



**HAL**  
open science

# Les approches chaos-stochastiques du risque de marché

Rachida Hennani

► **To cite this version:**

Rachida Hennani. Les approches chaos-stochastiques du risque de marché. Economies et finances. Université Montpellier, 2015. Français. NNT : 2015MONTD012 . tel-01365274

**HAL Id: tel-01365274**

**<https://theses.hal.science/tel-01365274>**

Submitted on 13 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

## Pour obtenir le grade de Docteur

Délivrée par l'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Préparée au sein de l'école doctorale **Économie et Gestion**

Et de l'unité de recherche **LABORATOIRE MONTPELLIÉRAIN  
D'ÉCONOMIE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE (LAMETA)**

Spécialité : **Sciences Économiques**

Présentée par **Rachida HENNANI**

### LES APPROCHES CHAOS-STOCHASTIQUES DU RISQUE DE MARCHÉ

Sous les directions de : Michel TERRAZA & Virginie TERRAZA

Soutenue le 10 décembre 2015 devant le jury composé de

Monsieur Gilles DUFRÉNOT, Professeur, Université Aix-Marseille  
Monsieur Christophe HURLIN, Professeur, Université d'Orléans  
Madame Catherine KYRTSOU, Associate Professor, University of Macedonia  
Madame Sandrine LARDIC, Professeure, Université du Havre  
Monsieur Michel TERRAZA, Professeur, Université de Montpellier  
Madame Virginie TERRAZA, Associate Professor, Université du Luxembourg

Rapporteur  
Examineur  
Rapporteuse  
Examinatrice  
Directeur de thèse  
Co-directrice de thèse





*" L'Université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur " .*



## REMERCIEMENTS

---

*"Je suis en proie à une étrange sensation. Si ce n'est pas une indigestion, ça doit être de la gratitude!"*

B. Disraeli

S'il existe un moment particulièrement émouvant au cours de la thèse, c'est celui des remerciements qui marque la fin d'une aventure exceptionnelle et permet de revenir sur les moments marquants. Par ces quelques lignes, je souhaite remercier les personnes qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse. Ces années m'ont profondément marqué à tel point que je ne peux m'empêcher de rattacher cette expérience à la description de l'effet papillon par Henri Poincaré : *"Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard."* Loin des grands discours surchargés de compliments, ces remerciements s'adressent à ces "petites causes" qui m'ont permis de mener ce long travail jusqu'au bout.

En première ligne, je voudrais adresser mes plus profonds remerciements à mon directeur de thèse Michel Terraza, qui a accepté de diriger cette thèse et qui m'a soutenu durant toutes ces années. Je lui témoigne ici toute ma reconnaissance pour son implication, ses conseils et sa disponibilité. Je remercie aussi ma co-directrice de thèse Virginie Terraza pour avoir accepté de rejoindre l'aventure et pour tout l'intérêt qu'elle a portée à mes travaux.

Je suis profondément reconnaissante aux professeurs Gilles Dufrénot et Catherine Kyrtsou d'avoir accepté de rapporter cette thèse, en dépit de leurs agendas très chargés. J'exprime toute ma gratitude aux professeurs Christophe Hurlin et Sandrine Lardic d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements s'adresse aussi à toute l'équipe du LAMETA. Je souhaite adresser ici mes remerciements les plus sincères aux professeurs Thierry Blayac et Brice Magdalou pour leur implications et leur soutiens durant les derniers mois de la thèse. Je profite

de ces quelques lignes pour remercier mes amis et collègues, notamment Darine, Karine, Ismaël, Fofana, Cécile, Saghar, Klarizze, Léa, Aurélie, Sarah et tous ceux que j'ai oublié (désolé!). Une mention spéciale pour Chloé Mulier qui a toujours été là pour moi!

Enfin, *last but not least*, je remercie du fond du cœur ma chère famille : mes parents que j'adore, mes nombreuses sœurs super sympas qui n'ont pas manqué une occasion de me rappeler *la* thèse, mes chers petits frères, mes tendres neveux et leur papa.

Rachida Hennani

Montpellier, le 18 Mai 2015.

## RÉSUMÉ

---

La complexité des marchés financiers et la recrudescence des crises particulièrement sévères contribuent à l'évolution et à la remise en cause de modèles économétriques dits standards dans l'explication et la prévision des dynamiques financières. L'alerte donnée conjointement par les responsables pruden­tiels et les chercheurs vise à encourager le développement de modèles plus complexes, non linéaires et largement inspirés d'autres disciplines. Nous soutenons dans cette thèse l'idée qu'une approche chaos-stochastique des chroniques financières est susceptible de conduire à de meilleurs résultats. La pertinence de cette association est évaluée pour le risque de marché dans deux cadres d'analyse distincts. Nous montrons tout l'intérêt d'une synthèse des modèles chaotiques et des spécifications GARCH avec ou sans changements de régimes markoviens (MRS) pour la modélisation et la prévision de la Value-at-Risk des indices boursiers de la zone euro. Il ressort de cette étude de meilleurs résultats des modèles chaos-stochastiques et dans le cas des spécifications MRS-GARCH, une meilleure adéquation du modèle chaotique de Lasota(1977) pour les indices de l'Europe du Sud, particulièrement plus volatiles que ceux de l'Europe du Nord pour lesquels nous recommandons le modèle de Mackey-Glass(1977). Cette combinaison permet, dans un cadre bivarié, de mieux appréhender les liens qui existent entre les différentes places boursières de la zone euro. Nous introduisons deux nouvelles spécifications qui intègrent les problématiques liées aux ruptures de corrélations : la première permet de distinguer, par une analyse en sous-périodes, les relations d'interdépendance par rapport aux phénomènes de contagion et la seconde propose, dans un cadre unifié, d'intégrer les ruptures de corrélations. Cette double analyse met en évidence le rôle moteur du couple d'indices franco-allemand, l'existence de deux sphères distinctes constituées d'une part par les indices de l'Europe du Nord et d'autre part par les pays de l'Europe du Sud et l'intensification de certaines relations entre indices suite à la crise des dettes souveraines. Nous constatons et insistons sur la pertinence d'un modèle chaotique en moyenne pour rendre compte d'une part de la volatilité attribuée, à tort, aux effets GARCH.



**Mots-clés :** Chaos-stochastique, non-linéarité, risque de marché, Value-at-Risk, contagions, interdépendances, Bâle 1, 2, 3

---

Ces travaux ont été menés au Laboratoire Montpelliérain d'Économie Théorique et Appliquée (LAMETA), UMR CNRS 5474 et UMR INRA 1135 sur le site Richter situé à la Faculté d'Économie de Montpellier, Avenue Raymond Dugrand, CS 79606, 34960 Montpellier Cedex 2.

# ABSTRACT

---

## **Chaos-stochastic approaches of market risk**

The complexity of financial markets and the resurgence of severe crises contribute to the skepticism and evolution of standard econometric models in the explanation and prediction of financial time series. The warning given jointly by prudential authorities and researchers aims to encourage the development of nonlinear and more complex models inspired by other disciplines. I argue in this thesis that a chaos-stochastic approach of financial dynamics is likely to lead to better results. The relevance of this association is evaluated for market risk in two distinct analytical frameworks. I show the improvements given by a synthesis of chaotic models and GARCH specifications with or without Markov Regime Switching (MRS) for modelling and predicting the Value-at-Risk of 7 mains index of Monetary and Economic Union. It appears, from this study, better results from chaos-stochastic models. In the case of the MRS-GARCH specifications, I find more adequacy of the chaotic model of Lasota (1977) for the indices of Southern Europe, which are especially more volatile than those of Northern Europe for which I recommend the model of Mackey-Glass (1977). This combination allows, in a bivariate framework, to provide information on the relationship between these different indices. I introduce two new specifications that integrate issues related to correlation breakdowns. The first distinguishes, by a sub-periods analysis, the relations of interdependence of contagious relationships. Meanwhile, the second provides, in a unified framework, an integration of correlations breakdowns. These two analyses imply It appears from this double analysis the leading role of the Franco-German duo, the existence of two distinct spheres formed in a part by the Northern European indices and in another part by countries of the Southern Europe, and the intensification of relations between some indices following the sovereign debt crisis. Finally, these results support the relevance of a chaotic model which may account for some volatilities that are, wrongly, attributed to GARCH effects.

**Keywords :** Chaos-stochastic, nonlinearity, market risk, Value-at-Risk, contagion, inter-dependencies, Basel 1, 2, 3



# SOMMAIRE

---

|   |     |
|---|-----|
| INTRODUCTION GÉNÉRALE   | 29  |
| 1 CHAPITRE 1 : RISQUE DE MARCHÉ : RÈGLEMENTATION PRUDENTIELLE<br>ET TECHNIQUES DE MODÉLISATION        | 43  |
| 1.1 L'évolution du risque de marché à travers la réglementation <sup>1</sup>                          | 48  |
| 1.1.1 Règlementation prudentielle et risques financiers   | 49  |
| 1.1.2 Le risque de marché dans Bâle II  | 58  |
| 1.1.3 Bâle III : les nouvelles normes prudentielles   | 67  |
| 1.2 Approches du risque de marché : cadre théorique et analytique                                     | 78  |
| 1.2.1 Marchés financiers : cadre théorique et résultats empiriques                                    | 79  |
| 1.2.2 L'insuffisance des modèles linéaires  | 92  |
| 1.2.3 Les approches stochastiques de la complexité des marchés financiers                             | 98  |
| 1.3 Risque de marché : une approche à travers la VaR et les ruptures de corrélations                  | 110 |
| 1.3.1 La VaR comme mesure des risques extrêmes : présentation et tests<br>de validation               | 111 |
| 1.3.2 Une approche du risque de marché à travers les ruptures de corrélations                         | 131 |
| 2 CHAPITRE 2 : APPROCHES CHAOS-STOCHASTIQUES DE LA NON-LINÉARITÉ<br>DES SÉRIES FINANCIÈRES            | 145 |
| 2.1 Genèse de l'approche chaotique des marchés financiers   | 147 |
| 2.1.1 Complexités des marchés financiers : une approche par la théorie du<br>chaos                    | 148 |
| 2.1.2 La théorie du chaos : concepts clés et tests de détection                                       | 168 |
| 2.2 Quelles modélisations chaos-stochastiques pour le risque de marché?                               | 198 |
| 2.2.1 Chaos, hétéroscédasticité et mémoire longue : quelles combinaisons<br>pour le risque de marché? | 201 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 2.2.2 | Modélisations du risque de marché : modèles chaos-stochastiques et changements de régimes . . . . .   | 235 |
| 3     | CHAPITRE 3 : MODÉLISATIONS CHAOS-STOCHASTIQUES DES INDICES BOURSIERS DE LA ZONE EURO : ÉVALUATION UNIVARIÉE DE LA VAR ET ANALYSE DES RUPTURES DE CORRÉLATIONS | 271 |
| 3.1   | Caractéristiques des indices de la zone euro : une analyse économique et économétrique . . . . .  | 278 |
| 3.1.1 | Structures et caractéristiques des indices européens . . . . .  | 279 |
| 3.1.2 | Analyse des caractéristiques économétriques des sous-périodes . . . . .   | 298 |
| 3.1.3 | Ruptures des corrélations : analyse préliminaire . . . . .  | 299 |
| 3.2   | Évaluations des modélisations univariées (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro . . . . .  | 302 |
| 3.2.1 | Modélisations (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro : une évaluation dans l'échantillon . . . . .   | 305 |
| 3.2.2 | Modélisations (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro : une évaluation hors échantillon . . . . .   | 353 |
| 3.3   | Ruptures de corrélations : une double analyse chaos-stochastique des indices de la zone euro . . . . .  | 364 |
| 3.3.1 | Résolution du phénomène de correlations breakdowns par une approche chaos-stochastique standard . . . . .   | 365 |
| 3.3.2 | Approche unifiée des régimes de volatilité : une modélisation bivariée chaos-stochastique avec changements de régimes markoviens . . . . .                    | 375 |
|       | CONCLUSION GÉNÉRALE   | 395 |
|       | BIBLIOGRAPHIE   | 405 |
| A     | ANNEXES CHAPITRE 1  | 473 |
| A.1   | Évaluation des risques relatifs aux titres de créances, de propriété et aux devises . . . . .   | 474 |
| A.2   | Le nouvel Accord . . . . .  | 478 |
| A.2.1 | Les instruments dérivés sur titres de créances . . . . .  | 480 |
| A.2.2 | Le traitement des instruments dérivés sur actions . . . . .   | 481 |
| A.2.3 | Les positions sur devises . . . . .   | 481 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| A.3    | Exigences de fonds propres pour le risque de change et pour les options . . .                                      | 483 |
| A.4    | Les modèles internes . . . . .   | 487 |
| A.4.1  | Définition des facteurs de risques de marché . . . . .   | 487 |
| A.4.2  | Critères qualitatifs . . . . .   | 488 |
| A.4.3  | Critères quantitatifs . . . . .  | 489 |
| A.5    | Bâle III . . . . .   | 491 |
| A.5.1  | Résumé des Accords . . . . .   | 491 |
| A.5.2  | La crise des subprimes . . . . .   | 493 |
| A.5.3  | Ratios de liquidité . . . . .  | 502 |
| A.6    | Les faits stylisés . . . . .   | 510 |
| A.6.1  | Propriétés d'échelles et distributionnelles des rentabilités financières   | 510 |
| A.6.2  | Les faits stylisés des marchés financiers . . . . .  | 513 |
| A.6.3  | Mémoire longue . . . . .   | 520 |
| A.6.4  | Les modèles GARCH à mémoire longue . . . . .   | 533 |
| A.7    | Les modèles de type GARCH . . . . .  | 536 |
| A.7.1  | Les modèles de variances conditionnelles linéaires . . . . .   | 536 |
| A.7.2  | Les modèles GARCH non linéaires . . . . .  | 537 |
| A.8    | Les modèles à changements de régimes . . . . .   | 541 |
| A.8.1  | Les modèles avec règles de sélection connues . . . . .   | 541 |
| A.8.2  | Modèle avec règle de sélection du régime inconnue . . . . .  | 551 |
| A.9    | Estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle com-<br>plet de Goldfeld et Quandt(1973) . . . . . | 557 |
| A.10   | Modèle d'Hamilton(1989) : précisions . . . . .   | 558 |
| A.10.1 | Prévisions . . . . .   | 559 |
| A.10.2 | Filtrage . . . . .   | 562 |
| A.10.3 | Algorithme . . . . .   | 562 |
| A.11   | Évaluation de la fonction de vraisemblance du modèle d'Hamilton et Sus-<br>mel(1994) . . . . .                     | 564 |
| A.11.1 | Prévisions . . . . .   | 564 |
| A.12   | Méthodes d'estimation de la VaR . . . . .  | 566 |
| A.13   | Limites et alternatives à la VaR . . . . .   | 569 |
| A.13.1 | Limites de l'instrument VaR . . . . .  | 569 |
| A.13.2 | Alternatives . . . . .   | 571 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| A.14   | Les procédures de backtesting : cadre statistique et normes prudentielles . . .   | 576 |
| A.14.1 | Concepts et hypothèses théoriques . . . . .   | 577 |
| A.14.2 | Les normes prudentielles . . . . .  | 580 |
| A.15   | L'approche Density Forecast Evaluation . . . . .  | 594 |
| A.15.1 | Le test de Crnkovic et Drachmann(1996) . . . . .  | 595 |
| A.15.2 | Le test de Diebold, Gunther et Tay(1998) . . . . .  | 596 |
| A.15.3 | Test de Berkowitz(2001) . . . . .   | 596 |
| A.16   | L'approche Event Probability Forecast Evaluation . . . . .  | 597 |
| A.16.1 | Les tests LR . . . . .  | 597 |
| A.16.2 | Les tests de durée . . . . .  | 604 |
| A.16.3 | Les tests fondés sur une régression des hits . . . . .  | 609 |
| A.16.4 | Autres tests . . . . .  | 612 |
| B      | ANNEXES CHAPITRE 2 . . . . .  | 621 |
| B.1    | La non-linéarité . . . . .  | 621 |
| B.2    | Méthode des surrogates data . . . . .   | 624 |
| B.3    | Le chaos en finance : une approche par les méthodes non paramétriques . . .   | 625 |
| B.3.1  | La méthode des plus proches voisins . . . . .   | 626 |
| B.3.2  | Les fonctions à bases radiales . . . . .  | 627 |
| B.3.3  | Les réseaux de neurones . . . . .   | 628 |
| B.4    | Value-at-Risk et changements de régimes . . . . .   | 630 |
| B.4.1  | Le modèle de Billio et Pelizzon(2000) . . . . .   | 631 |
| B.4.2  | Modèles avec changements de régimes beta . . . . .  | 632 |
| B.4.3  | Modèle d'Elliot et Miao(2009) . . . . .   | 634 |
| C      | ANNEXES CHAPITRE 3 . . . . .  | 637 |
| C.1    | Analyse des structures et caractéristiques des indices européens sur la pé-<br>riode [2003-2011] . . . . .                                  | 637 |
| C.1.1  | Les relations économiques entre indices et titres bancaires : une ana-<br>lyse comparée des GIPSI, de l'Allemagne et de la France . . . . . | 637 |
| C.1.2  | Tests préliminaires . . . . .   | 651 |
| C.1.3  | Tests d'homoscédasticité et de non-autocorrélation sur les rentabilités   | 664 |
| C.1.4  | Tests de détection de structures à mémoire longue . . . . .   | 665 |
| C.1.5  | Tests de détection de structures chaotiques . . . . .   | 668 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| c.2   | Analyse préliminaire des sous-périodes [2004-2006] & [2007-2009] . . . . .  | 669 |
| c.2.1 | Représentations graphiques . . . . .  | 669 |
| c.2.2 | Statistiques descriptives des sous-périodes . . . . .   | 671 |
| c.2.3 | Tests d'homoscédasticité et d'autocorrélation . . . . .   | 672 |
| c.3   | Relations entre les indices de la zone euro : test d'Engle et Sheppard(2001)  | 672 |
| c.4   | Modélisations (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro : éléments<br>d'analyse pour la période [2003-2011] . . . . . | 675 |
| c.4.1 | Modèles MG-MRS-G . . . . .  | 675 |
| c.4.2 | Modèle LA-MRS-G . . . . .   | 679 |
| c.5   | Évaluations dans l'échantillon . . . . .  | 683 |
| c.5.1 | Approches statistiques . . . . .  | 683 |
| c.5.2 | Approche par la VaR . . . . .   | 706 |
| c.6   | Évaluation hors-échantillon . . . . .   | 746 |
| c.6.1 | Approche statistique . . . . .  | 746 |
| c.6.2 | Évaluation hors échantillon : une approche par la VaR . . . . .   | 756 |
| c.7   | Ruptures de corrélations : une approche par un modèle chaos stochastique<br>en sous périodes . . . . .                        | 763 |
| c.7.1 | Les modèles GARCH multivariés . . . . .   | 763 |
| c.7.2 | Le modèle Mackey-Glass bivarié . . . . .  | 766 |
| c.7.3 | Représentations graphiques des corrélations conditionnelles dyna-<br>miques . . . . .   | 772 |
| c.7.4 | Analyse empirique pour la période [2003-2011] . . . . .   | 775 |





## LISTE DES TABLEAUX

---

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| Tableau 1  | Conditions de stabilité globale (Berezansky et al. (2013)) . . . . .                            | 210 |
| Tableau 2  | Statistiques descriptives . . . . .   | 286 |
| Tableau 3  | Coefficients de corrélations linéaires . . . . .  | 301 |
| Tableau 4  | Résultats des estimations des modèles (chaos)-stochastiques [2003-2011] . . . . .               | 309 |
| Tableau 5  | Estimation des modèles de type MRS-GARCH . . . . .  | 316 |
| Tableau 6  | Éléments d'analyse supplémentaires aux résultats MRS-G . . . . .                                | 317 |
| Tableau 7  | Résultats des estimations des modèles (chaos)-stochastiques [2004-2006] . . . . .               | 320 |
| Tableau 8  | Résultats des estimations des modèles (chaos)-stochastiques [2007-2009] . . . . .               | 321 |
| Tableau 9  | Résumé des tests de backtesting dans l'échantillon pour les modèles de type GARCH . . . . .     | 335 |
| Tableau 10 | Résumé des tests de backtesting dans l'échantillon pour les modèles de type MRS-GARCH . . . . . | 336 |
| Tableau 11 | Nature des relations détectées pour l'équation de la moyenne . . . . .                          | 370 |
| Tableau 12 | Récapitulatif des résultats pour la période calme . . . . .                                     | 373 |
| Tableau 13 | Récapitulatif des résultats pour la période de crise . . . . .                                  | 374 |
| Tableau 14 | Résultats du modèle Mackey-Glass . . . . .  | 385 |
| Tableau 15 | Résultats du modèle MS-CCC-GARCH . . . . .  | 386 |
| Tableau 16 | Exigences de fonds propres pour les options selon la méthode simplifiée . . . . .               | 485 |
| Tableau 17 | Exigences de fonds propres pour les options selon la méthode delta-plus . . . . .               | 486 |
| Tableau 18 | Extensions et références des modèles GARCH . . . . .  | 540 |
| Tableau 19 | Relation entre la VaR et la TVaR . . . . .  | 572 |
| Tableau 20 | Approche Traffic light pour 250 observations . . . . .  | 582 |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Tableau 21 | Régions de non-rejet (Kupiec(1995)) . . . . .  | 599 |
| Tableau 22 | Nombre de violations . . . . .   | 600 |
| Tableau 23 | Corrélations entre les différents indices . . . . .                                    | 644 |
| Tableau 24 | Corrélations entre les titres et l'indice français . . . . .                           | 644 |
| Tableau 25 | Corrélations entre les titres et l'indice allemands . . . . .                          | 644 |
| Tableau 26 | Corrélations entre les titres et l'indice irlandais . . . . .                          | 645 |
| Tableau 27 | Corrélations entre les titres et l'indice helléniques . . . . .                        | 645 |
| Tableau 28 | Corrélations entre les titres et l'indice espagnols . . . . .                          | 645 |
| Tableau 29 | Corrélations entre les titres et l'indice portugais . . . . .                          | 646 |
| Tableau 30 | Corrélations entre les titres et l'indice italiens . . . . .                           | 646 |
| Tableau 31 | Coefficients de corrélations entre titres et indices européens (Partie<br>1) . . . . . | 647 |
| Tableau 32 | Coefficients de corrélations entre titres et indices européens (Partie<br>2) . . . . . | 648 |
| Tableau 33 | Résultats des estimations des droites de marché . . . . .                              | 650 |
| Tableau 34 | Tableau de Buys-Ballot [1] . . . . .   | 656 |
| Tableau 35 | Test de Laloire(1972) . . . . .  | 657 |
| Tableau 36 | Résultats définitifs du test de Dickey-Fuller . . . . .                                | 658 |
| Tableau 37 | Résultats du test KPSS . . . . .   | 658 |
| Tableau 38 | Résultats du test ERS . . . . .  | 658 |
| Tableau 39 | Résultats du test de Zivot-Andrews . . . . .   | 659 |
| Tableau 40 | Résultats du test RESET . . . . .  | 660 |
| Tableau 41 | Sélection des filtres pour le test BDS . . . . .                                       | 662 |
| Tableau 42 | z-stat du test BDS ( $\epsilon = 0.5$ ) . . . . .                                      | 662 |
| Tableau 43 | z-stat du test BDS ( $\epsilon = 1$ ) . . . . .  | 662 |
| Tableau 44 | z-stat du test BDS ( $\epsilon = 1.5$ ) . . . . .                                      | 663 |
| Tableau 45 | z-stat du test BDS ( $\epsilon = 2$ ) . . . . .  | 663 |
| Tableau 46 | Test ARCH sur les séries de rentabilités . . . . .                                     | 664 |
| Tableau 47 | Q-stat des séries de rentabilités . . . . .  | 665 |
| Tableau 48 | Test de Box-Pierce sur les rentabilités . . . . .                                      | 665 |
| Tableau 49 | Test GPH sur les séries de rentabilités . . . . .                                      | 665 |
| Tableau 50 | Estimations et résultats du test de Shimotsu(2006) sur les rentabilités                | 666 |
| Tableau 51 | Estimations et résultats du test de Shimotsu(2006) sur la volatilité                   | 667 |

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| Tableau 52 | 2ème test de Shimotsu (2006) sur les volatilités . . . . .  | 667 |
| Tableau 53 | Résultats du test de Bensaïda(2012) sur les rentabilités . . . . .  | 668 |
| Tableau 54 | Résultats du test de Bensaïda sur les simulations du modèle Mackey–Glass  | 668 |
| Tableau 55 | Résultats du test de Aparicio et al.(2011) sur les rentabilités . . . .   | 668 |
| Tableau 56 | Statistiques descriptives sur les sous-périodes [2004-2006] & [2007-<br>2009] . . . . .                               | 671 |
| Tableau 57 | Test ARCH sur les rentabilités des sous-périodes . . . . .  | 672 |
| Tableau 58 | Test d'autocorrélation sur les rentabilités des sous-périodes . . . . .   | 672 |
| Tableau 59 | Test d'Engle et Sheppard(2001) . . . . .  | 673 |
| Tableau 60 | Modèles retenus pour l'équation de la variance . . . . .  | 674 |
| Tableau 61 | Mesures statistiques sur les résidus ordinaires des modèles de type<br>GARCH [2003-2011] . . . . .                    | 683 |
| Tableau 62 | Mesures statistiques sur les résidus standardisés des modèles de<br>type GARCH[2003-2011] . . . . .                   | 684 |
| Tableau 63 | Mesures statistiques sur les résidus ordinaires des modèles de type<br>MRSG . . . . .                                 | 685 |
| Tableau 64 | Mesures statistiques sur les résidus standardisés des modèles de<br>type MRSG . . . . .                               | 686 |
| Tableau 65 | Mesures statistiques sur les résidus ordinaires [2004-2006] . . . . .   | 687 |
| Tableau 66 | Mesures statistiques sur les résidus standardisés [2004-2006] . . . . .   | 688 |
| Tableau 67 | Mesures statistiques sur les résidus ordinaires [2007-2009] . . . . .   | 689 |
| Tableau 68 | Mesures statistiques sur les résidus standardisés[2007-2009] . . . . .  | 690 |
| Tableau 69 | Test ARCH sur les résidus des modélisations de type GARCH<br>[2003-2011] . . . . .                                    | 691 |
| Tableau 70 | Test d'autocorrélation sur les résidus des modélisations de type<br>GARCH [2003-2011] . . . . .                       | 692 |
| Tableau 71 | Statistiques de Jarque-Bera calculées sur les résidus standardisés<br>des modèles de type GARCH [2003-2011] . . . . . | 693 |
| Tableau 72 | Tests ARCH sur les résidus des modèles de type MRSG . . . . .   | 694 |
| Tableau 73 | Tests d'autocorrélation sur les résidus des modèles de type MRSG .  | 695 |
| Tableau 74 | Tests de normalité sur les résidus des modèles de type MRS-G . . .  | 695 |
| Tableau 75 | Test ARCH sur les résidus des modélisations [2004-2006] . . . . .   | 696 |
| Tableau 76 | Test d'autocorrélation sur les résidus des modélisations [2004-2006]  | 697 |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Tableau 77 | Statistiques de Jarque-Bera calculées sur les résidus standardisés [2004-2006] . . . . .                                   | 697 |
| Tableau 78 | Test ARCH sur les résidus des modélisations [2007-2009] . . . . .  | 698 |
| Tableau 79 | Test d'autocorrélation sur les résidus des modélisations [2007-2009]   | 699 |
| Tableau 80 | Statistiques de Jarque-Bera calculées sur les résidus standardisés [2007-2009] . . . . .                                   | 699 |
| Tableau 81 | Tests DM et DBM sur les résidus ordinaires des modèles de type MRS-G . . . . .   | 700 |
| Tableau 82 | Tests DM et DBM sur les résidus standardisés des modèles de type MRS-G . . . . .   | 701 |
| Tableau 83 | Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus ordinaires(ARMAG versus MGG) . . . . .    | 702 |
| Tableau 84 | Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus standardisés(ARMAG versus MGG) . . . . .  | 703 |
| Tableau 85 | Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus ordinaires (ARMAG versus LAG) . . . . .   | 704 |
| Tableau 86 | Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus standardisés (ARMAG versus LAG) . . . . . | 704 |
| Tableau 87 | Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus standardisés (MGG versus LAG) . . . . .   | 705 |
| Tableau 88 | Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus ordinaires (MGG versus LAG) . . . . .     | 705 |
| Tableau 89 | Tests DB, LR et DQ pour les VaR prévues de l'année 2007 . . . . .  | 718 |
| Tableau 90 | Tests DB, LR et DQ pour les VaR prévues de l'année 2010 . . . . .  | 719 |
| Tableau 91 | Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des $VaR_{95\%}$ de l'année 2010 par les modèles de type MRSG . . . . .             | 720 |
| Tableau 92 | Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2010 par les modèles de type MRSG . . . . .             | 721 |
| Tableau 93 | Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des $VaR_{95\%}$ de l'année 2007 par les modèles de type MRSG . . . . .             | 722 |
| Tableau 94 | Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2007 par les modèles de type MRSG . . . . .             | 723 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Tableau 95  | P-values du test GMM pour les prévisions de la $VaR_{95\%}$ de l'année 2007 . . . . .                        | 724 |
| Tableau 96  | P-values du test GMM pour les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2007 . . . . .                        | 725 |
| Tableau 97  | P-values du test GMM pour les prévisions de la $VaR_{95\%}$ de l'année 2010 . . . . .                        | 725 |
| Tableau 98  | P-values du test GMM pour les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2010 . . . . .                        | 726 |
| Tableau 99  | P-values du test GMM sur les prévisions des $VaR_{95\%}$ de l'année 2010 (Modèles de type MRS-G) . . . . .   | 726 |
| Tableau 100 | P-values du test GMM sur les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2010 (Modèles de type MRS-G) . . . . .   | 727 |
| Tableau 101 | P-values du test GMM sur les prévisions de la $VaR_{95\%}$ de l'année 2007 (Modèles de type MRS-G) . . . . . | 727 |
| Tableau 102 | P-values du test GMM sur les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2007 (Modèles de type MRS-G) . . . . . | 728 |
| Tableau 103 | Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2007 . . .                                       | 729 |
| Tableau 104 | Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2010 . . .                                       | 730 |
| Tableau 105 | P-values du test Risk map pour les VaR de l'année 2010 prévues par les modèles de type MRS-G . . . . .       | 731 |
| Tableau 106 | P-values du test Risk map pour les VaR de l'année 2007 prévues par les modèles de type MRS-G . . . . .       | 731 |
| Tableau 107 | Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (5%)  | 738 |
| Tableau 108 | Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (1%)  | 739 |
| Tableau 109 | Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (5%)  | 740 |
| Tableau 110 | Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (1%)  | 741 |
| Tableau 111 | P-values des tests DB, LR et DQ sur les prévisions dans l'échantillon de l'année 2005 . . . . .              | 742 |
| Tableau 112 | P-values des tests DB, LR et DQ sur les prévisions dans l'échantillon de l'année 2008 . . . . .              | 743 |
| Tableau 113 | Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2005 . . .                                       | 744 |
| Tableau 114 | Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2005 . . .                                       | 745 |

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| Tableau 115 | Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type GARCH-(2003-2011) . . . . .                                    | 748 |
| Tableau 116 | Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type MRS-GARCH-(2003-2011) . . . . .                                | 749 |
| Tableau 117 | Tests RC et SPA-Modèles de type GARCH(2003-2011) . . . . .  | 751 |
| Tableau 118 | Tests RC et SPA-Modèles de type MRS-GARCH(2003-2011) . . . . .  | 752 |
| Tableau 119 | Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type GARCH-(2004-2006) . . . . .                                    | 753 |
| Tableau 120 | Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type GARCH-(2007-2009) . . . . .                                    | 753 |
| Tableau 121 | Tests RC et SPA-Modèles de type GARCH(2004-2006) . . . . .  | 754 |
| Tableau 122 | Tests RC et SPA-Modèles de type GARCH(2007-2009) . . . . .  | 755 |
| Tableau 123 | Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2012 (Modèles de type GARCH) . . . . .     | 756 |
| Tableau 124 | Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2012 (Modèles de type MRS-GARCH) . . . . . | 757 |
| Tableau 125 | Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2007 . . . . .                             | 758 |
| Tableau 126 | Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la $VaR_{99\%}$ de l'année 2010                                       | 759 |
| Tableau 127 | P-values du test GMM pour les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2012 (Modèles de type GARCH) . . . . .     | 760 |
| Tableau 128 | P-values du test GMM pour les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2012 (Modèles de type MRS-GARCH) . . . . . | 761 |
| Tableau 129 | P-values du test GMM pour les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2007 . . . . .                             | 761 |
| Tableau 130 | P-values du test GMM pour les prévisions des $VaR_{99\%}$ de l'année 2010 . . . . .                             | 762 |
| Tableau 131 | Estimation des équations de la moyenne du modèle MG-DCC-GARCH (Echantillon 1) . . . . .                         | 769 |
| Tableau 132 | Estimation des équations de la moyenne du modèle MG-DCC-GARCH (Echantillon 2) . . . . .                         | 770 |
| Tableau 133 | Estimation des équations de la variance du modèle MG-DCC-GARCH  | 771 |

## TABLE DES FIGURES

---

|              |   |     |
|--------------|---|-----|
| Graphique 1  | Composantes des fonds propres, limites et minimas . . . . .   | 72  |
| Graphique 2  | Éléments des fonds propres Bâle III . . . . .   | 73  |
| Graphique 3  | Approche paramétrique : les différentes modélisations . . . . .   | 151 |
| Graphique 4  | Reconstruction de l'attracteur . . . . .  | 179 |
| Graphique 5  | Procédure pour la construction d'un modèle chaos-stochastique . .   | 200 |
| Graphique 6  | Modèle de Mackey-Glass avec $\gamma = 2.1$ . . . . .  | 215 |
| Graphique 7  | Exemple de simulations des équations 113 et 115 avec $\beta = \gamma$ . . . .                                 | 217 |
| Graphique 8  | Exemples de simulations de l'équation de Lasota avec de faibles<br>variations de $\beta$ & $\gamma$ . . . . . | 218 |
| Graphique 9  | Variation de la dimension de plongement pour le modèle Mackey-<br>Glass . . . . .                             | 221 |
| Graphique 10 | Trajectoires simulées à partir de l'équation 115 . . . . .  | 222 |
| Graphique 11 | Sensibilités aux conditions initiales de l'équation 115 . . . . .   | 223 |
| Graphique 12 | Exemples de simulations des équations 117 & 118 . . . . .   | 228 |
| Graphique 13 | Exemples de simulations du Mackey-Glass avec $n = 10$ et $n = 2$ . .  | 229 |
| Graphique 14 | Exemples de simulations du modèle de Lasota bruité . . . . .  | 230 |
| Graphique 15 | Représentations graphiques de quelques simulations . . . . .  | 241 |
| Graphique 16 | Exemples de simulations du modèle MG-GARCH (1) . . . . .  | 242 |
| Graphique 17 | Exemples de simulations du modèle MG-GARCH (2) . . . . .  | 243 |
| Graphique 18 | Exemples de simulations du modèle MG-GARCH (3) . . . . .  | 244 |
| Graphique 19 | Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH(1) . . . . .   | 245 |
| Graphique 20 | Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (2) . . . . .  | 246 |
| Graphique 21 | Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (3) . . . . .  | 247 |
| Graphique 22 | Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (4) . . . . .  | 248 |
| Graphique 23 | Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (5) . . . . .  | 249 |
| Graphique 24 | Simulations du modèle 130 . . . . .   | 256 |
| Graphique 25 | Simulations du modèle 131 . . . . .   | 257 |



|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| Graphique 26 | Comparaison des modèles 131 & 130 (1) . . . . .  | 258 |
| Graphique 27 | Comparaison des modèles 131 & 130 (2) . . . . .  | 259 |
| Graphique 28 | Approches chaos-stochastiques bivariées . . . . .  | 266 |
| Graphique 29 | Organigramme pour l'étude d'une série temporelle financière . . . . .                          | 269 |
| Graphique 30 | Rentabilités des indices Européens . . . . .   | 285 |
| Graphique 31 | Corrélations EWMA . . . . .  | 301 |
| Graphique 32 | Relations d'interdépendances en moyenne pour l'échantillon 1 . . . . .                         | 368 |
| Graphique 33 | Relations d'interdépendances et de contagions en moyenne pour<br>l'échantillon 2 . . . . .     | 369 |
| Graphique 34 | Corrélations conditionnelles estimées par le modèle MG-MS(2)-<br>CCC-GARCH . . . . .           | 384 |
| Graphique 35 | Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le<br>couple DAX-PSI . . . . .        | 387 |
| Graphique 36 | Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le<br>couple DAX-ATHEX . . . . .      | 387 |
| Graphique 37 | Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le<br>couple CAC-IBEX . . . . .       | 388 |
| Graphique 38 | Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le<br>couple CAC-ATHEX . . . . .      | 388 |
| Graphique 39 | Synopsis de Bâle III . . . . .   | 492 |
| Graphique 40 | Faits marquants de la crise financière . . . . .   | 495 |
| Graphique 41 | Les facteurs macroéconomiques de la crise . . . . .  | 501 |
| Graphique 42 | Les actifs de haute qualité . . . . .  | 504 |
| Graphique 43 | L'approche par composantes . . . . .   | 585 |
| Graphique 44 | Les différents degrés de maturité des banques dans les programmes<br>de stress-tests . . . . . | 586 |
| Graphique 45 | Indices et titres retenus pour l'analyse . . . . .   | 639 |
| Graphique 46 | Les poids des différents titres dans leurs indices respectifs . . . . .                        | 640 |
| Graphique 47 | Les poids des différents titres dans leurs indices respectifs . . . . .                        | 641 |
| Graphique 48 | Indice et titres bancaires français . . . . .  | 651 |
| Graphique 49 | Indice et titres bancaires allemands . . . . .   | 652 |
| Graphique 50 | Indice et titres bancaires irlandais . . . . .   | 652 |
| Graphique 51 | Indice et titres bancaires helléniques . . . . .   | 653 |

|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| Graphique 52 | Indice et titres bancaires espagnols . . . . .   | 653 |
| Graphique 53 | Indice et titres bancaires portugais . . . . .   | 654 |
| Graphique 54 | Indice et titres bancaires italiens . . . . .  | 654 |
| Graphique 55 | Les différents indices boursiers retenus . . . . .   | 655 |
| Graphique 56 | Résultats du test de McLeod et Li . . . . .  | 664 |
| Graphique 57 | Rentabilités des indices européens sur la période [2007-2009] . . . . .                        | 669 |
| Graphique 58 | Rentabilités des titres bancaires et indices européens sur la période<br>[2004-2006] . . . . . | 670 |
| Graphique 59 | Variances et probabilités lissées de l'indice ATHEX (MG-MRS-G) . . . . .                       | 675 |
| Graphique 60 | Variances et probabilités lissées de l'indice DAX (MG-MRS-G) . . . . .                         | 676 |
| Graphique 61 | Variances et probabilités lissées de l'indice CAC (MG-MRS-G) . . . . .                         | 676 |
| Graphique 62 | Variances et probabilités lissées de l'indice IBEX (MG-MRS-G) . . . . .                        | 677 |
| Graphique 63 | Variances et probabilités lissées de l'indice SP (MG-MRS-G) . . . . .                          | 677 |
| Graphique 64 | Variances et probabilités lissées de l'indice ISEQ (MG-MRS-G) . . . . .                        | 678 |
| Graphique 65 | Variances et probabilités lissées de l'indice PSI (MG-MRS-G) . . . . .                         | 678 |
| Graphique 66 | Variances et probabilités lissées de l'indice ATHEX (LA-MRS-G) . . . . .                       | 679 |
| Graphique 67 | Variances et probabilités lissées de l'indice DAX (LA-MRS-G) . . . . .                         | 680 |
| Graphique 68 | Variances et probabilités lissées de l'indice CAC(LA-MRS-G) . . . . .                          | 680 |
| Graphique 69 | Variances et probabilités lissées de l'indice ISEQ (LA-MRS-G) . . . . .                        | 681 |
| Graphique 70 | Variances et probabilités lissées de l'indice IBEX (LA-MRS-G) . . . . .                        | 681 |
| Graphique 71 | Variances et probabilités lissées de l'indice PSI (LA-MRS-G) . . . . .                         | 682 |
| Graphique 72 | Variances et probabilités lissées de l'indice SP (LA-MRS-G) . . . . .                          | 682 |
| Graphique 73 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH<br>(2007) (ATHEX) . . . . .       | 706 |
| Graphique 74 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH<br>(2007) (CAC) . . . . .         | 707 |
| Graphique 75 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH<br>(2007) (DAX) . . . . .         | 707 |
| Graphique 76 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH<br>(2007) (IBEX) . . . . .        | 708 |
| Graphique 77 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH<br>(2007) (PSI) . . . . .         | 708 |

|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| Graphique 78 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (ATHEX) . . . . .            | 709 |
| Graphique 79 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (CAC) . . . . .              | 709 |
| Graphique 80 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (DAX) . . . . .              | 710 |
| Graphique 81 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (IBEX) . . . . .             | 710 |
| Graphique 82 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (PSI) . . . . .              | 711 |
| Graphique 83 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice ATHEX (2007) . . . . . | 711 |
| Graphique 84 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice CAC (2007) . . . . .   | 712 |
| Graphique 85 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice DAX (2007) . . . . .   | 712 |
| Graphique 86 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice IBEX (2007) . . . . .  | 713 |
| Graphique 87 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice ISEQ (2007) . . . . .  | 713 |
| Graphique 88 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice SP (2007) . . . . .    | 714 |
| Graphique 89 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice ATHEX (2010) . . . . . | 714 |
| Graphique 90 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice CAC(2010) . . . . .    | 715 |
| Graphique 91 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice DAX (2010) . . . . .   | 715 |
| Graphique 92 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice IBEX (2010) . . . . .  | 716 |
| Graphique 93 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice ISEQ (2010) . . . . .  | 716 |

|               |  |     |
|---------------|--|-----|
| Graphique 94  | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice PSI (2010) . . . . .   | 717 |
| Graphique 95  | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice SP (2010) . . . . .    | 717 |
| Graphique 96  | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (ATHEX) . . . . . | 732 |
| Graphique 97  | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (DAX) . . . . .   | 733 |
| Graphique 98  | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (IBEX) . . . . .  | 733 |
| Graphique 99  | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (ISEQ) . . . . .  | 734 |
| Graphique 100 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (CAC) . . . . .   | 734 |
| Graphique 101 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (DAX) . . . . .   | 735 |
| Graphique 102 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (IBEX) . . . . .  | 735 |
| Graphique 103 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (PSI) . . . . .   | 736 |
| Graphique 104 | VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (SP) . . . . .    | 736 |
| Graphique 105 | Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH . . . . .            | 772 |
| Graphique 106 | Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH . . . . .            | 772 |
| Graphique 107 | Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH . . . . .            | 773 |
| Graphique 108 | Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH . . . . .            | 773 |
| Graphique 109 | Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH . . . . .            | 774 |

Graphique 110 Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle  
MG-DCC-GARCH . . . . . 774

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

*" There is no way to predict the price of stocks and bonds over the next few days or weeks. But it is quite possible to foresee the broad course of these prices over longer periods, such as the next three to five years. These findings, which might seem both surprising and contradictory, were made and analyzed by this year's Laureates, Eugene Fama, Lars Peter Hansen and Robert Shiller. "*

Extrait du Communiqué de Presse du Prix de la Banque royale de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel(2013)

La consécration de 3 financiers par le jury du prix de la Banque royale de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel marque, une fois de plus, l'intérêt croissant porté aux fonctionnements des marchés financiers. Elle témoigne de l'influence de plus en plus importante des évolutions des prix des actifs financiers et de leurs impacts sur l'économie réelle. Récompenser les travaux de Fama, Hansen et Shiller sur les prix des actifs est assez révélateur de l'importance des recherches sur les dynamiques des prix et de la nécessité de mieux comprendre le fonctionnement des marchés financiers dans un monde de plus en plus globalisé pour mieux anticiper les crises financières.

Ces dernières, au centre des préoccupations internationales, ont marqué pendant plusieurs siècles l'histoire financière. Elles sont étroitement attachées au capitalisme économique, de plus en plus gourmand, et sont de plus en plus violentes. De nature différente, elles reflètent souvent une perte de confiance sur les marchés financiers. Depuis la crise du bulbe de tulipe(1634), il s'est écoulé quatre siècles d'histoire financière marqués par une évolution particulière de la typologie des crises : si les premières crises de l'histoire financière ont souvent été des crises de change, des crises bancaires ou boursières, les crises immobilières, obligataires et des dettes souveraines sont aujourd'hui de plus en plus fréquentes. L'analyse originale menée par Reinhart et Rogoff(2009) sur 800 ans de crise financière révèle les similitudes de ces évènements.

La récente crise financière dite crise des subprimes, qui a secoué l'ensemble des marchés financiers mondiaux est en passe de devenir la plus importante crise financière qu'ont connu

les pays du monde. Il s'agit d'une crise qui trouve son origine dans les crédits hypothécaires accordés aux ménages américains et qui s'est propagée à l'ensemble du système bancaire et financier. Cette crise a été non seulement surprenante par son ampleur mais également par ses causes qui en font une crise unique en son genre. De cette crise, découle une crise des dettes souveraines en Europe qui entraîne des difficultés sur les marchés financiers européens. Cette double crise financière qui a touchée le Vieux Continent suscite de nombreuses interrogations quant aux similitudes, aux différences, aux interdépendances des indices boursiers de ces pays économiquement hétérogènes.

La crise des dettes souveraines dans la zone euro résulte d'une double conséquence de la crise des subprimes : le ralentissement économique induit par cette dernière et la méfiance des investisseurs vis-à-vis de la soutenabilité des dettes européennes, alourdies d'une part par les politiques de soutien au secteur bancaire et financier et d'autre part par les politiques de relance économique. La spécificité de l'Union Économique et Monétaire (UEM) en fait un incubateur particulier au sein duquel les craintes des investisseurs ont été exacerbées, se manifestant par un choix stratégique entre les pays de la zone euro qui privilégie les actifs bancaires et les titres d'États des pays les plus solvables. Cette asymétrie entre les pays de la zone euro se reflète sur les indices boursiers : les crises grecque et irlandaise se propagent progressivement aux principales places boursières espagnole, portugaise, italienne et dans une moindre mesure, française et allemande. La crise des dettes souveraines européennes conduit l'UEM à mettre en place un Mécanisme de Surveillance Unique qui vise à mener un contrôle prudentiel supranational des grands établissements de crédit, soumis jusque là à une surveillance nationale. Ce mécanisme s'inscrit dans un cadre plus large, à savoir l'union bancaire au sein de la zone euro.

Cette crise révèle, en filigrane, plusieurs enseignements non seulement sur les titres d'État qui apparaissent plus risqués mais surtout sur les liens financiers entre les principales places boursières de la zone euro. Sur le plan analytique, la lecture de ces événements s'inscrit dans le débat sur l'interdépendance et la contagion. La littérature économique s'est longtemps intéressée aux critères distinctifs entre une relation dite d'interdépendance et un phénomène de contagion. Le débat s'est progressivement déplacé sur le terrain économétrique avec le développement d'une multitude de modèles capables d'intégrer des ruptures de corrélations.

*Mais quel est l'impact de ces crises sur l'économie réelle ?*

En cliométrie financière, Bordo et al. (2001) confirmé par Boucher(2003), ont montré

une augmentation de la fréquence des crises depuis l'effondrement du système de Bretton Woods en 1971. Dans cette même étude, les auteurs affirment que la probabilité de subir une crise de change après 1971 a presque doublé par rapport à la période 1945-1971. Cette augmentation est notamment due à la réapparition des crises bancaires, à une hausse de la fréquence des crises de change et au retour des crises jumelles. De nombreuses études, dont Kaminsky et Reinhart(1999), Stone et Weeks(2001) entre autres, se sont intéressées à la fréquence des crises jumelles dans les pays émergents. Ces études concluent sur une recrudescence des crises jumelles dans les pays nouvellement financiarisés. Par ailleurs, une étude du FMI(1998) souligne que les crises financières récentes sont beaucoup plus dévastatrices pour l'économie réelle. L'impact des crises bancaires récentes sur le PIB est estimée à 11,5%, il atteint 14% quand il s'agit d'une crise jumelle. Les conséquences systémiques des crises financières sur l'économie réelle sont multiples. Elles touchent tous les agents de l'économie de façon différente et en fonction de la nature de la crise. Une crise financière conduit en général à une restriction des crédits aux entreprises et aux ménages, ce qui entraîne une baisse de la production et de la consommation. Les effets dévastateurs sur les entreprises sont renforcés car les investisseurs deviennent de plus en plus averses aux risques et exigent plus de rentabilité. Le manque de visibilité et de confiance dans le système économique conduit à une baisse de la demande et parallèlement à un phénomène de destruction créatrice. En effet, Fingleton(2009) a montré que la crise économique favorise une croissance de la productivité à long terme et élimine ainsi les entreprises les moins productives. Au-delà des impacts microéconomiques des crises financières, il revient aux autorités d'assurer la stabilité du système financier international.

#### *La stabilité du système financier international est un bien public*

Il n'existe pas d'unanimité quant au rôle des autorités publiques dans le système économique. Des préconisations d'Adam Smith aux politiques marxistes, les arguments pour l'implication ou au contraire la non-implication des pouvoirs publics sont diverses. Si certains estiment que le processus de concurrence sur les marchés est suffisant pour sélectionner les meilleurs agents, d'autres considèrent que l'absence de règles émanant des pouvoirs publics ne peut qu'encourager les comportements opportunistes. Cependant un quasi-consensus existe en ce qui concerne l'intervention des autorités publiques en période de crise financière. En effet, la survenue de tels phénomènes témoigne de l'imperfection des marchés, d'où la nécessité d'une action publique dont l'ampleur et la nature sont encore sujets à débats. Les partisans de l'hypothèse d'efficience des marchés financiers re-



commandent une intervention minimale des pouvoirs publics, juste suffisante pour assurer la transparence de l'information et la discipline des marchés (Betbèze et al. (2011)). À contrario, les tenants des politiques keynésiennes estiment que les marchés sont forcément instables et qu'une forte intervention publique est nécessaire pour prévenir et gérer les crises financières. Dans cette optique, l'idée défendue par les partisans des politiques keynésiennes est liée à une nécessité primordiale : la stabilité du système bancaire et financier. Une instabilité financière engendrerait des coûts pour la collectivité, coûts qui ne sont pas intégralement internalisés par les acteurs économiques d'où la nécessité d'une intervention publique. Le risque systémique d'un agent financier comme une banque par exemple a un coût global qui échappe à un agent microéconomique. L'asymétrie des bilans d'une banque en mauvaise posture et l'interdépendance des banques favorisent ce risque systémique. Les crises financières ont un double coût économique et social qui justifie la mise en place de politiques de prévention et de gestion des crises. Dans un monde de plus en plus globalisé, la stabilité financière prend une dimension internationale si bien qu'il est nécessaire de définir des politiques d'intervention globales. Ainsi la crise des subprimes a conduit à la mise en place de plusieurs sommets du groupe des 20 (les 19 pays les plus riches et l'Union Européenne) pour favoriser la concertation internationale et proposer des solutions aux crises financières. À l'instar de la notion de bien public mondial développé par Kindleberger(1986), la stabilité financière internationale est d'intérêt général, c'est un bien public mais pas un bien commun dans la mesure où tous les agents n'ont pas le même intérêt dans ce bien public mondial. Un certain nombre d'agents financiers tirent profit de l'instabilité des marchés financiers. Par ailleurs, les états sont enclins à limiter la production de bien public mondial dans la mesure où cette production a un coût et qu'elle profite à d'autres états, d'où la nécessité d'une coordination internationale.

#### Le rôle des autorités et le risque d'aléa moral

Ce constat pose le problème de l'aléa moral, principal argument des adeptes de la main invisible. L'intervention des pouvoirs publics n'a pas lieu d'être dans la mesure où elle encouragerait la prise de risque des agents financiers, ces derniers étant sûrs d'être secourus en cas de défaillance. Corsetti et al. (1998) proposent de modéliser les comportements des agents financiers en cas d'intervention publique. En retenant le modèle des crises jumelles de Dehove(2003), il semblerait que les agents financiers soient enclins à prendre plus de risques en intégrant dans leur raisonnement une intervention de l'État en cas de crise. En anticipant les politiques qui seront mises en œuvre en cas de difficultés, ces agents favorisent

le développement d'une crise jumelle qui à l'origine n'était qu'une crise bancaire. Empiriquement, le risque d'aléa moral a été confirmé par de nombreuses études notamment celles du FMI(2002). Par ailleurs, Bordo(1990) et Calomiris et Masson(1997) ont montré qu'il existait une corrélation entre la probabilité de sauvetage et l'ampleur des crises financières. Le risque d'aléa moral lié aux interventions des autorités publiques porte essentiellement sur les politiques de gestion de crise et non de prévention. La mise en place des règles prudentielles limitent les prises de risque démesurées des agents financiers. L'analyse de l'histoire financière montre que les interventions publiques sont fortement liées à la sphère financière : les principales avancées de la réglementation financière interviennent souvent au lendemain des crises financières.

#### *Le risque de marché dans la réglementation prudentielle*

La nécessité d'un système économique et financier crédible et stable conduit à la mise en place d'un cadre prudentiel par des autorités de réglementation supranationales. Les règles prudentielles définies par les instances de réglementation sont de plus en plus exigeantes dès lors qu'elles sont définies au lendemain d'une crise. Ainsi, la mise en place du Comité de Bâle fait suite à la liquidation de la société allemande Herstatt dont les conséquences se sont répandues sur plusieurs banques. Les principales avancées de ce comité interviennent souvent suite à une crise financière. Bâle I (1988) est une réponse au krach d'octobre 1987 tandis que Bâle III vient durcir les règles prudentielles suite à la crise des subprimes.

Ainsi, la recrudescence des crises financières pousse les autorités de régulation à exiger des instruments de plus en plus fiables afin de faire face aux incertitudes de l'avenir. Dans le cadre du risque de marché, un des plus importants risques financiers, le Comité de Bâle accepte le calcul du montant des fonds propres nécessaire pour couvrir ce risque par la Value-at-Risk (VaR). Popularisée dès l'automne 1994 par la Banque JP Morgan via sa méthodologie Riskmetrics et recommandée par le Groupe des 30 dès 1993, la VaR désigne le niveau de perte de valeur d'un actif à une date donnée et pour un niveau de probabilité fixé à priori. L'intérêt particulier porté à cette mesure de risque par les autorités de régulation est dû à la crédibilité nécessaire des institutions financières mais aussi à la recherche d'une certaine harmonisation entre les pays. Dans la littérature économétrique, la VaR a fait l'objet de nombreuses recherches qui ont conduit au développement de nombreuses méthodes d'estimation. Elles font l'objet d'une classification qui tient compte de l'ensemble d'informations utilisé. Malgré le caractère simpliste de cette mesure, il est à relever un certain nombre de limites qui conduisent de nombreux auteurs à amender cette mesure de

risque par l'introduction de nouveaux instruments. Cependant, les avantages procurés par la VaR en font le principal instrument de mesure du risque de marché.

L'importance prise par le risque de marché durant les 30 dernières années et les liens étroits qu'il entretient avec les risques de liquidité, de contagion et systémique contribuent à une croissance des travaux règlementaires, théoriques et empiriques sur la détection, l'analyse, la modélisation et l'évaluation de ce risque. Sur le plan règlementaire, les accords prudentiels du Comité de Bâle sont rythmés par une évolution particulière du risque de marché : il s'inscrit, dans le cadre des Accords Bâle II, dans une approche individualisée qui vise essentiellement à quantifier ce risque pour un actif ou un portefeuille d'actifs. Les nouvelles normes prudentielles, définies dans le cadre Bâle III, offrent une nouvelle dimension à ce risque : dans une vision microéconomique, le risque de marché est encore mesuré par l'instrument VaR mais dans une conception macroéconomique, il est attaché à d'autres types de risques. Ainsi, il est lié au risque de liquidité dans la mesure où un choc de liquidité impacte les prix des actifs et crée, par conséquent un risque de marché. Il est partie intégrante du risque systémique : une évaluation incorrecte du risque de marché peut provoquer une débâcle sur les marchés et ainsi, contribuer au risque systémique. Enfin, il est étroitement corrélé au risque de contagion et plus particulièrement, aux ruptures de corrélations.

#### Risque de marché et ruptures de corrélations

La question de la co-dépendance entre deux actifs est une problématique récurrente qui joue un rôle important dans plusieurs aspects de la finance. Elle permet de mettre en évidence la relation qui peut exister entre différents actifs et révèle l'intérêt ou non de conserver dans un même portefeuille certains titres. Ainsi, un investisseur qui construit un portefeuille pour diversifier ses risques doit s'assurer d'une faible corrélation entre les actifs de son portefeuille pour ne pas perdre les avantages de la diversification. Au-delà de ces aspects propres à la construction de portefeuille, la co-dépendance offre aux investisseurs une mine d'informations non négligeable sur l'évolution d'un actif. En intégrant le lien existant entre deux actifs dans une modélisation appropriée, l'investisseur doit pouvoir disposer d'une évolution plus précise des prix et par conséquent anticiper les risques afférents ses actifs.

Quel que soit l'objectif de l'investisseur (construction de portefeuille ou analyse multivariée), les relations qui peuvent exister entre différents actifs doivent être mises en évidence par des tests appropriés. La littérature économique s'est rapidement développée autour de ces questions de co-dépendance notamment du fait de l'insuffisance des mesures utili-

sées. En effet, le caractère non-linéaire des séries temporelles économiques et financières est incompatible avec la mesure de la co-dépendance par un coefficient de corrélation linéaire. Cette limite est révélée par l'existence de ruptures dans les coefficients de corrélations linéaires conditionnels. L'analyse de ces ruptures, appelées '*correlations breakdowns*', conduit les économistes à centrer leurs recherches autour de deux questions particulières à savoir le débat sur la contagion et l'intégration des ruptures dans un modèle approprié. Les ruptures de corrélations, symptomatiques d'une intensification des relations, sont interprétées comme le " marqueur " d'un phénomène de contagion sur les marchés. La distinction entre interdépendance et contagion est très importante dans le cadre des politiques d'interventions des autorités. En effet, lorsqu'une relation est dite d'interdépendance, les politiques d'intervention de court terme sont inefficaces car inadaptées. Une relation d'interdépendance est une relation de long terme qui traduit les liens entre deux ou plusieurs pays ou marchés. Elle est inchangée quelle que soit la période considérée. À contrario, en présence de relations de contagion, les politiques d'intervention de court terme de la BCE ou du FMI peuvent limiter les conséquences d'une crise. L'identification d'une relation de contagion est primordiale dans la définition des politiques publiques par les autorités dans la mesure où le phénomène de contagion constitue une externalité au marché contaminé, externalité qui ne peut donner lieu à une compensation financière (Constancio(2012)). Aussi, il revient à la puissance publique de proposer, via les politiques publiques, des solutions permettant de limiter les conséquences d'un choc contagieux. Dans cette perspective, il demeure important d'établir une distinction claire entre deux actifs caractérisés par un phénomène d'interdépendance et deux actifs dont les relations sont dites contagieuses. Dans le cadre du risque de marché, l'intensification des relations entre deux indices traduit un impact plus significatif sur l'évolution des prix qui conduit de fait à une augmentation du risque de marché. Si la contagion est avérée alors la pro-cyclicité des mesures de risques s'intensifie. Dès lors, il apparaît essentiel d'identifier les relations d'interdépendances qui peuvent se muter en phénomène de contagion et ainsi conduire à une modification substantielle du risque de marché. C'est dans cette perspective que se développent un certain nombre de modèles qui tentent de s'affranchir du cadre théorique de référence marqué par l'hypothèse centrale d'efficience des marchés financiers.

#### *La théorie de l'efficience des marchés financiers*

L'identification et l'anticipation du risque de marché permettent de limiter la survenue des crises financières. Notons que ces crises financières relancent plus que jamais le fameux

débat sur l'efficience des marchés. Concept central de la théorie financière, l'efficience des marchés peut se résumer par l'un de ses concepts fondamentaux qui considère que le prix d'un actif reflète toute l'information disponible. Sujet de discordance entre théoriciens et praticiens de la finance, l'efficience des marchés, si elle est acceptée, condamne une grande partie de la gestion de portefeuille traditionnelle car elle remet en cause la gestion " active " dont les gestionnaires attribuent le succès à leurs propres connaissances du marché, aux inefficiences de ce dernier et à leur habileté à sélectionner différents titres selon des processus de gestion spécifiques. Ainsi l'efficience des marchés détruit une grande partie du travail des gestionnaires et de leur valeur ajoutée, les contraignant à une gestion passive, moins rentable. Les praticiens tentent donc de prévoir l'évolution des cours alors que les théoriciens considèrent les variations des rentabilités comme des variables exogènes dont la gestion de portefeuille tente de limiter le risque. La théorie de l'efficience des marchés via son concept central, considère que les écarts existant entre les cours et la valeur fondamentale d'un titre tels que nous avons pu les observer durant l'automne 2008, ne sont que le résultat de chocs exogènes affectant temporairement les marchés. Leurs fluctuations, dues à l'apparition d'informations non anticipées sur les fondamentaux, sont aléatoires. Ainsi le marché est perçu comme un lieu dépourvu d'imperfections dans lequel les agents adoptent un comportement rationnel identique à celui de *l'homo oeconomicus*. Le constat alarmant selon lequel la théorie de l'efficience était incapable de rendre compte des événements comme ceux que nous avons pu observer durant la crise des subprimes a poussé nombre d'économistes à abandonner l'hypothèse de rationalité au profit de l'hypothèse de phénomènes psychologiques (Keynes(1936)). Ces phénomènes, souvent de nature mimétique, seraient à l'origine des écarts des cours par rapport à leur valeur fondamentale et l'analyse des fluctuations des cours boursiers permettrait une avancée non négligeable dans la compréhension des fluctuations économiques, la finance étant considérée comme une vision réduite et avancée de l'économie. La conception des marchés financiers, en tant que lieu de confrontation d'agents hétérogènes, permet le développement de modèles multi-agents dont les choix créent les dynamiques financières. Les fluctuations observées reflètent alors la répartition des différentes catégories d'agents. Dans le cadre d'une approche économétrique, l'analyse des fluctuations des chroniques financières résulte d'un traitement statistique particulier qui se base sur les différentes approches de l'économétrie des séries temporelles.

### Les différentes approches de l'économétrie des séries temporelles

Dans un monde où l'avenir est plus qu'incertain, parsemé de chocs aléatoires qui risquent de compromettre la stabilité du système financier international, les avancées de l'économétrie des séries temporelles nous permettent de prévoir de manière plus précise les mouvements des cours boursiers. L'économétrie des séries temporelles a ainsi permis la détection de tendances dans les chroniques économiques et le développement de méthodes de prévision mais elle a été confrontée à une limite dès l'effondrement des modèles structurels d'inspiration keynésienne. Pourtant, après cette chute, elle a connu un engouement sans précédent dû notamment aux développements de la macro dynamique théorique qui a mis en exergue un certain nombre de problèmes dont l'analyse nécessitait la mise en œuvre d'outils appropriés. En effet, l'étude d'une chronique temporelle nécessite la mise au point d'un certain nombre de techniques pour permettre un traitement statistique adapté et pour affronter les différents problèmes que l'on peut rencontrer lors de l'analyse d'une chronique (saisonnalité, tendance, hétéroscédasticité, rupture de tendance, bruit).

L'ouvrage décisif qui a relancé l'économétrie des séries temporelles est celui publié par Box et Jenkins en 1970, *Time series analysis : Forecasting and control*, et qui propose une nouvelle philosophie dans l'analyse des chroniques. Cet ouvrage s'inscrit dans un domaine particulier de l'économétrie des séries temporelles qui est celui de l'économétrie linéaire. En effet, la principale avancée de ces auteurs a consisté à mettre en place un algorithme itératif en 5 étapes permettant de passer de l'étude d'une chronique à sa prévision. L'étape centrale de cet algorithme est l'identification du processus ARMA adéquat via l'étude des corrélogrammes d'autocorrélations totale et partielle. La facilité présentée par les modèles linéaires notamment les modèles ARMA a contribué à la popularité et à la prédominance de ces méthodes dans le domaine de l'économétrie des séries temporelles. L'application des processus ARMA est donc conditionnée par la linéarité de la dynamique caractérisant les chroniques, condition que la plupart des séries financières ne semblent pas remplir. En effet, les faits stylisés des chroniques financières révèlent l'insuffisance des modèles linéaires à pouvoir rendre compte des différentes caractéristiques observées. Ce constat nous contraint à envisager une approche économétrique non linéaire qui permet de considérer un nombre plus important de dynamiques sous-jacentes aux séries financières, dynamiques qui étaient alors restreintes dans le cas linéaire.

Nous retenons trois avancées principales de l'économétrie non linéaire : les modèles intégrant des changements de régimes en moyenne, les modèles à mémoire longue et les modèles

de type ARCH. Pour pallier les lacunes présentées par les modèles ARMA, Engle(1982) propose les modèles AutoRégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques (ARCH) capables de capter le comportement de la volatilité au cours du temps. Ces modèles et leurs extensions constituent un apport primordial dans l'étude de la volatilité notamment des séries financières. De nombreux travaux se sont intéressés aux structures à mémoire longue dans les séries des rentabilités financières. Ce phénomène peut être pris en compte par des modèles de type ARFIMA en moyenne ou des modèles de type FIGARCH en variance. Les travaux sur la non linéarité en moyenne peuvent être scindés en deux classes principales : dans le cas où la valeur actuelle d'une variable dépend de façon non linéaire de ses valeurs passées ou de termes croisés autorégressifs, on pourra recourir aux processus bilinéaires, aux processus de moyenne mobile non linéaires, aux modèles autorégressifs non linéaires du type TAR, SETAR. Les phénomènes d'asymétrie et de rupture de forte amplitude peuvent être pris en compte par les modèles à seuil. Par ailleurs, les changements de régimes difficilement identifiables peuvent être intégrés dans des modèles à changements de régimes markoviens. Ces derniers présentent un intérêt particulier en économétrie financière dans la mesure où leur utilisation n'est pas conditionnée à un seuil. Le développement de modélisations intégrant à la fois des changements de régimes markoviens et des processus ARCH permet une approche de la volatilité des chroniques financières en termes de forte/faible volatilité. Ces modèles sont alors capables de distinguer un régime de crise d'un régime plus calme.

La littérature économétrique est riche de modèles combinant effets ARCH, mémoire longue et/ou changements de régimes. L'apport essentiel de ces modélisations réside dans :

- la capacité de ces spécifications à rendre compte de certaines structures caractéristiques des séries temporelles financières ;
- l'interprétation des régimes d'évolution successifs et dans l'anticipation d'un retournement des prix dans le cas d'une approche avec changements de régimes markoviens.

En dépit de ces différentes avancées, la question de la modélisation des séries temporelles financières reste ouverte dans la mesure où ces différentes modélisations sont incapables de filtrer l'ensemble des faits stylisés, notamment les structures chaotiques et de fournir des prévisions à court et moyen termes acceptables.

Ces solutions adoptent implicitement l'hypothèse de stochasticité des processus au détriment de l'hypothèse de déterminisme et c'est cette dernière que nous remettons en cause

en faisant appel à une branche particulière de l'économétrie non linéaire que constitue la théorie du chaos.

*La théorie du chaos : une nouvelle conception des marchés financiers ?*

C'est en 1972 lors d'une conférence à l'*American Association for the Advancement of Science*, que Lorenz énonce pour la première fois sa célèbre question : *Le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ?* Cette interrogation caractérise la sensibilité aux conditions initiales qui se situe au cœur de la théorie du chaos. Météorologue de renom, Lorenz redécouvre par hasard en 1963 l'effet papillon lors d'une expérience. Ce concept central de la théorie du chaos est largement attribué à Henri Poincaré qui l'a mis en évidence lors de son étude sur le problème des 3 corps mais il revient à Maxwell (1876) la paternité de cette découverte. Lors de son intervention, Lorenz(1972) explique l'importance cruciale des conditions initiales dans la prédiction des événements futurs.

Le développement de cette théorie s'inscrit dans un cadre particulier : elle émerge d'une multitude de travaux menés dans des disciplines diverses mais c'est dans les sciences dures que vont se développer ses principaux concepts. Cette théorie est une remise en cause de la vision Newtonienne du monde et en sciences sociales, elle constitue un compromis idéologique entre d'une part une vision néoclassique obsolète et d'autre part la nécessité de rendre compte des complexités des marchés financiers sans recourir à une approche transdisciplinaire. Notre intérêt pour la théorie du chaos réside dans le renouveau qu'elle a apporté à l'analyse des séries temporelles et à leurs prévisions. La particularité avancée par cette théorie porte sur la nature même des processus pris en compte : si l'économétrie non linéaire des séries temporelles et les analyses qui en découlent sont basées sur l'hypothèse de stochasticité, la théorie du chaos ouvre de nouvelles perspectives en considérant des systèmes déterministes. En économétrie financière, elle permet d'appréhender de nouveaux défis de recherche dans l'analyse des séries financières et elle offre de nouveaux instruments pour mieux comprendre les crises qui touchent les marchés financiers. Le déterminisme tel que l'avait défini Laplace a longtemps été considéré comme inconciliable avec le désordre. Mais les travaux de Lorenz(1963), Ruelle et Takens(1971) ont montré que les systèmes déterministes pouvaient exhiber des comportements chaotiques et imprévisibles pour un faible nombre de variables dynamiques, ces systèmes ont été alors baptisés chaos déterministe. Ainsi l'approche déterministe permet de concevoir les fluctuations des séries financières qui caractérisent un système chaotique de façon endogène, c'est-à-dire



un système déterministe possédant l'allure d'un processus aléatoire désordonné. L'attention que nous portons aux processus chaotiques réside dans la possibilité pour certaines fonctions chaotiques de mieux prendre en compte les caractéristiques des séries financières. Le recours à une approche chaos-stochastique pour décrire les dynamiques financières a fait l'objet d'un certain nombre de travaux, notamment par Kyrtsou et Terraza(2002, 2004, 2010). Ces derniers proposent une combinaison du modèle chaotique Mackey-Glass et d'un processus GARCH et montrent tout l'intérêt de cette spécification pour la prévision des rentabilités financières. Dans le cadre d'une approche multivariée, Kyrtsou et Labys(2006,2007) et Kyrtsou et Vorlow(2009) proposent un modèle chaotique bruité pour décrire les relations causales susceptibles d'exister entre deux séries temporelles. Les spécifications stochastiques, très diversifiées, peuvent être combinées pour proposer une modélisation de la variance plus précise, notamment en termes de changements de régimes. L'association de ces modélisations à un processus chaotique est susceptible de conduire à une amélioration dans la compréhension, la modélisation et la prévision des séries temporelles financières :

- dans un cadre descriptif, le recours à des modèles chaos-stochastiques pour rendre compte des relations entre deux actifs peut contribuer à avancer sur le débat de la contagion et de l'interdépendance. Le développement de modèles intégrant à la fois des dynamiques chaotiques, des changements de régimes et/ou des effets GARCH est envisagé ;
- dans un cadre de modélisation et de prévision, l'utilisation de modèles chaos-stochastiques est intéressante à plusieurs égards :
  - la modélisation par des spécifications chaos-stochastiques avec changements de régimes permet de prendre en compte non seulement les structures chaotiques en moyenne résultantes de l'activité des fundamentalistes complètement informés mais aussi les structures stochastiques avec changements de régimes en variance, caractéristiques d'un marché dominé par les chartistes en période de crise et d'une forte interaction entre fundamentalistes et chartistes dans les régimes plus calmes ;
  - la prévision par ces approches peut conduire à une meilleure anticipation du risque de marché. Plusieurs études ont montré que les spécifications stochastiques non-linéaires conduisent à des quantifications du risque de marché plus

ou moins proches et souvent validées par les tests de backtesting dits de première génération. Le recours d'une part à des modèles chaos-stochastiques avec ou sans changements de régimes et d'autre part, à de nouveaux tests de backtesting plus performants permet de juger de la pertinence d'une association des spécifications chaotique et stochastique.

**Nous soutenons dans cette thèse qu'une association des approches chaotiques et stochastiques est susceptible de mieux appréhender les dynamiques financières. Nous illustrons cette hypothèse, dans le cas univarié, par l'estimation et la prévision du risque de marché mesuré par la Value-at-Risk et dans le cas multivarié par une contribution au débat sur l'interdépendance et la contagion en proposant une double analyse des ruptures de corrélations.**

Afin de répondre à cette problématique, nous proposons une analyse en trois chapitres : le premier porte essentiellement sur le risque de marché vu au travers de la réglementation prudentielle et des techniques de modélisations. Dans un deuxième chapitre, nous abordons les approches chaos-stochastiques de la non-linéarité des séries financières. Le dernier chapitre est une évaluation empirique de ces modélisations dans deux cadres distincts : l'estimation et la prévision de la VaR dans une approche univariée des indices de la zone euro et l'analyse des ruptures de corrélations dans des relations bivariées.



# RISQUE DE MARCHÉ : RÉGLEMENTATION PRUDENTIELLE ET TECHNIQUES DE MODÉLISATION

---

*" In some ways, the new mortgage market came to look more like a textbook financial market, with fewer institutional "frictions" to impede trading and pricing of event-contingent securities. Securitization and the development of deep and liquid derivatives markets eased the spreading and trading of risk. [...] mortgages became more liquid instruments, for both lenders and borrowers. "*

(Ben Bernanke, 'Housing, Housing Finance and Monetary policy',  
Symposium économique de la Fed, 31/08/2007)<sup>2</sup>

Aurions-nous atteint le Saint Graal de la finance ? Les marchés financiers tels qu'ils existent, tels qu'ils ont été façonnés n'auraient-ils plus à pâlir face aux conceptions théoriques des marchés financiers ? Ont-ils finalement atteint l'efficience tant recherchée ?

À en croire Ben Bernanke, président de la Fed, le marché hypothécaire avait réussi à matérialiser les théories des manuels économiques et plus précisément la conception libérale des marchés telle qu'elle est enseignée dans toutes les facultés d'économie. Cette déclaration peut paraître d'autant plus surprenante qu'elle a lieu le 31/08/2007, c'est-à-dire au début de la crise des subprimes.

Par conséquent, comment interpréter ces mots, qui finalement décrivent le marché idéal au sens de la théorie libérale, alors que la débâcle des prix sur les marchés financiers fait craindre le pire ? Comment un responsable financier tel que Ben Bernanke, universitaire de renom diplômé du MIT et d'Harvard, peut-il tenir ce genre de propos ?

Paul Valéry avait écrit dans *Mélange* : " On dit qu'une conviction est solide quand elle résiste à la conscience qu'elle est fausse ". Il semblerait que cette phrase décrive parfaitement

---

2. Extrait de Orléan(2009).

l'ambiguïté de la situation. Les mots de Bernanke traduisent justement une conviction solide, celle des marchés libéraux, et Orléan(2009) souligne même à ce propos : " Ils [les mots de Ben Bernanke] révèlent la force de ses convictions théoriques qui lui permettent de voir au-delà de la brutalité de la crise ". Ce comportement est finalement révélateur des profondeurs théoriques dans lesquels les systèmes financiers ont été plongés et que la crise des subprimes va chambouler.

#### La crise financière : de la révolution à la frustration

Lors de ce même symposium de la Fed, Bernanke présente la titrisation comme la révolution financière tant attendue : *'The shift from reliance on specialized portfolio lenders financed by deposits to a greater use of capital markets represented the second great sea change in mortgage finance, equated in importance only by the events of the New Deal.'* Or, il apprendra plus tard, qu'elle a constitué un facteur non négligeable dans le déclenchement de la crise. De nombreuses pratiques financières basées sur la titrisation et considérées comme des innovations financières vont contribuer à la crise financière la plus importante depuis 1930.

La crise des subprimes marque les esprits à cause de son ampleur mais aussi de l'effet de surprise qu'elle a suscitée chez une grande partie des analystes financiers. À l'image de la crise du fond LTCM et de ses consultants, Merton et Scholes, futurs prix Nobel, la crise des subprimes n'a même pas effleurée l'esprit des responsables financiers.

Cette crise accentue des risques déjà existants, bien identifiés même s'ils ne sont pas bien intégrés. Mais elle révèle surtout de nouveaux risques ou des risques peu formalisés. Elle témoigne aussi de la fragilité du système financier international. Autant d'ingrédients qui ont conduit au déclenchement d'une crise particulière mais annonciatrice d'une nouvelle ère.

Ainsi, elle devient, peu à peu, le point de départ d'un renouveau à la fois théorique, réglementaire et dans une moindre mesure financier. Elle est clairement la matérialisation des limites du capitalisme financier tel qu'on le connaît et de la finance libérale telle qu'elle avait été défendue par ses partisans. Loin de l'idée d'une autorégulation et d'une discipline des marchés, la crise révèle surtout un laxisme réglementaire auquel il fallait remédier. C'est tout l'essence des accords Bâle III.

#### De Bâle I à Bâle III : que retenir de plus de 20 ans d'accords prudentiels ?

1988-2010 : 22 ans se sont exactement écoulés entre les premiers accords de Bâle signés suite à la faillite d'Herstatt et Bâle III, les nouveaux accords prudentiels adoptés suite à la

crise des subprimes. De Bâle I à Bâle III, les accords du Comité de Bâle pour la supervision bancaire (CBSB) témoignent de l'évolution des marchés financiers, de la nécessité de mieux appréhender les risques, de les comprendre et de les intégrer. La stabilité financière internationale est au cœur de ces différents accords qui ne s'inscrivent pas dans le même cadre. Bâle I est surtout connu pour le ratio Cooke même si les recommandations formulées par le CBSB sont beaucoup plus larges. Bâle II introduit 3 piliers qui visent à couvrir intégralement le risque bancaire et à promouvoir l'utilisation des modèles internes pour la gestion des risques. Ces deux accords s'inscrivent surtout dans un cadre micro-prudentiel. Le risque systémique et la procyclicité révélés par la crise des subprimes conduisent le CBSB à formuler de nouvelles recommandations dans un cadre micro et macro-prudentiel. À la lecture des différents accords, il est possible de noter, outre l'évolution vers un cadre macroprudentiel, une évolution dans la prise en compte des risques financiers. Les risques standards (risque de crédit, de marché, ...) ont été naturellement intégrés dès les premiers accords alors que de nouveaux risques ou des risques déjà existants ne sont pris en compte que dans l'accord de Bâle III ou dans les amendements de Bâle II. Ces deux décennies d'accords soulignent aussi l'évolution des pratiques financières, qui ont créé de nouveaux risques, peu ou pas anticipés par les instances de réglementation et donc intégrés plus tard aux recommandations. Ainsi, le problème de la procyclicité dans la détermination des fonds propres est mis en évidence par un rapport de la Banque des Règlements Internationaux (BRI) dès 2001 qui met en cause le rôle de la libéralisation financière : "Il est possible(...) qu'elle ait aussi accentué les cycles financiers qui, en contribuant à leur tour à amplifier les phases macroéconomiques, n'ont que trop fréquemment débouchés, par le passé, sur de coûteuses crises bancaires. " La problématique de la procyclicité est concrètement intégrée dans les recommandations de Bâle 2,5<sup>3</sup> qui prévoit l'introduction d'une VaR stressée : *'The additional stressed Value-at-Risk requirement will also help reduce the procyclicality of the minimum capital requirements for market risk.'*

#### Une évolution des approches théoriques

L'évolution de la réglementation financière est le reflet d'une complexité grandissante des marchés financiers. Cette dernière se traduit par des structures non-linéaires dans les séries temporelles financières, par une remise en cause du cadre théorique d'efficience des marchés financiers et par l'hypothèse d'une interaction d'agents hétérogènes. La littéra-

---

3. Ce sont les révisions à l'accord Bâle II suite à la crise des subprimes intitulées : *Revisions to Basel II market risk framework* (07/2009).

ture économétrique s'est attelée à développer des modèles permettant de rendre compte des faits stylisés observés sur les séries temporelles qui, de facto, s'inscrivent dans une approche stochastique non-linéaire. Les modèles développés dans ce cadre visent à rendre compte de l'hétéroscédasticité, des structures à mémoire longue ou encore des ruptures dans l'évolution des chroniques financières. La pléthore des modèles non-linéaires proposés ces dernières années ne permettent pas de résoudre les questions liées à la procyclicité des mesures de risques, à la détection des co-dépendances, à l'identification d'un risque de contagion et à la sous-estimation du risque de marché. L'importance prise par ce dernier est à relier à la nécessité pour les professionnels d'évaluer et de prévoir, de manière pertinente, ce risque. Par ailleurs, la crise des dettes souveraines a révélé l'importance des interconnexions entre places boursières et tout l'intérêt d'identifier les relations dites de contagion qui conduisent à une amplification du risque de marché. Ainsi, une quantification pertinente et une approche analytique de ce risque constituent les grands défis auxquels sont désormais confrontés les théoriciens, les praticiens et les instances de réglementation.

#### Value-at-Risk et tests d'évaluation

La Value-at-Risk (VaR) est l'un des instruments les plus utilisés pour mesurer le risque de marché. En dépit de ses limites et des différentes alternatives possibles, elle reste une mesure populaire du fait de sa simplicité. La diversité des méthodes d'estimation de la VaR témoigne de l'intérêt des chercheurs et des praticiens envers cet instrument. Comme toute mesure de risque, elle est soumise à des tests d'évaluation dont l'objectif est de comparer la précision de différentes VaR. Ces procédures, englobées sous le terme de backtesting ont connu un fort développement depuis l'intégration de la mesure VaR dans les textes réglementaires. Généralement de type model-free, les tests de backtesting visent à analyser le processus de violation de la VaR.

Malgré des tests de backtesting de plus en plus précis, il est difficile, compte tenu de la diversité des méthodes d'estimation, de conclure sur la surperformance d'une méthode. Dans le cadre d'une approche paramétrique de la VaR, la modélisation de la distribution des profits et pertes (P&L) constitue une étape cruciale dont la réalisation dépend de l'identification des structures existantes dans la série temporelle financière.

#### Risque de marché et ruptures de corrélations

Le rôle du risque de marché dans l'occurrence de divers risques financiers contribue à un renforcement des exigences des instances réglementaires. Il peut résulter d'un risque de contagion dans la mesure où la présence de ce dernier impacte les prix des actifs qui entre-

tiennent des liens qui s'intensifient en période de crise. Le risque de marché peut constituer une partie intégrante du risque systémique qu'il peut précipiter dès lors que son évolution est mal anticipée. Enfin, il est étroitement lié au risque de liquidité.

Aussi, le risque de marché peut être appréhendé dans un cadre analytique par la détection des liens susceptibles d'exister entre deux marchés. L'identification des relations d'interdépendances susceptibles de s'intensifier en période de crise doit permettre à l'investisseur d'intégrer ce phénomène dans le choix de ses actifs, aux instances de réglementation de prévenir d'un risque systémique et/ou d'un risque de liquidité. Par ailleurs, la détection des interdépendances permet de comprendre les liens qui régissent un ensemble d'actifs et le schéma de propagation du risque de marché au sein d'un groupe particulier. Dans ces différents objectifs, l'économétrie non-linéaire développe, dans une littérature relativement récente, plusieurs modélisations qui visent à identifier et intégrer le phénomène de co-dépendances.

Ce premier chapitre vise à détailler la question du risque et plus précisément du risque de marché sous les aspects réglementaire et théorique. Cette double analyse du risque de marché permet de confronter la perception de ce risque au niveau réglementaire et donc dans le domaine professionnel et la conception du risque de marché à travers la littérature économétrique.

La première section porte sur l'évolution du risque de marché à travers la réglementation. Nous présentons, dans une deuxième section, le cadre théorique et analytique du risque de marché. La troisième section est consacrée aux approches du risque de marché dans un cadre individualisé avec l'instrument VaR et dans une approche multivariée avec le concept de rupture des corrélations.



## 1.1 L'ÉVOLUTION DU RISQUE DE MARCHÉ À TRAVERS LA RÈGLEMENTATION<sup>4</sup>

La question des risques extrêmes revêt une importance particulière qui se justifie par l'impact désastreux des pertes extrêmes que peut subir un établissement financier. Elle constitue un domaine d'intérêt public dans la mesure où elle représente une menace pour la stabilité du système financier. Cette dernière est au cœur des accords prudentiels de Bâle adoptés par de nombreux pays. C'est à l'initiative du G10 que le comité de Bâle est créé en 1974<sup>5</sup>. Son objectif est de proposer des recommandations que les régulateurs nationaux peuvent adopter. Les différentes recommandations formulées sont soumises aux pays membres mais n'ont pas force de loi. Les principaux accords font souvent suite à des crises financières.

La crise financière des subprimes a conduit le régulateur à repenser le cadre normatif en imposant des exigences plus strictes notamment en ce qui concerne les fonds propres. Néanmoins, les règles imposées par les instances de réglementation sont soumises à une nécessité d'équilibre car des contraintes trop fortes conduiraient à un ralentissement de l'activité économique et des exigences insuffisantes concèderaient à des prises de risques démesurées. Au-delà de ces aspects réglementaires, les établissements financiers ont tout intérêt à mettre en œuvre des modèles soucieux de cet équilibre.

Bâle I(1988) introduit les premières directives qui portent essentiellement sur le risque de crédit. Le G10 recommande l'usage de la VaR dès 1993 et un amendement à Bâle I (1996) recommande de recourir à un modèle standard pour la mesure du risque de marché tout en autorisant les établissements bancaires à utiliser des modèles internes fondés sur la VaR. Les réflexions sur un deuxième accord sont menées dès 2001 à l'initiative des banques qui exigent des règles plus spécifiques au risque de crédit. Bâle II est adopté par les banques centrales en 2004 et introduit fin 2006 dans les différents pays concernés. Suite à la crise des subprimes, un amendement aux accords de Bâle II est mis en place en 2009. Il prévoit une meilleure prise en compte des risques de marché en préconisant le recours à une VaR stressée en plus de la VaR classique.

---

4. Une version complète et détaillée de cette synthèse est disponible dans Hennani(2015), *De Bâle I à Bâle III : les principales avancées des accords prudentiels pour un système financier plus résilient*, Etudes et Synthèses, LAMETA, ES 2015-01.

5. Il est initialement composé de 9 pays européens et de trois pays non-européens : Allemagne, Belgique, Canada, États-Unis, France, Italie, Japon, Luxembourg, Pays-Bas, Royaume-Uni, Suède et Suisse.

L'approche macro-prudentielle de Bâle III marque une rupture avec les précédents accords. Les nouvelles normes portent essentiellement sur le risque de liquidité mais aussi sur les risques traditionnels. Elles mettent l'accent sur le risque systémique dont les causes sont liées aux interconnexions entre les établissements et implicitement, aux risques de contagion. Nous rappelons dans un premier point le cadre réglementaire qui régit les risques financiers. Nous précisons dans un deuxième point le risque de marché dans le cadre des Accords Bâle II et nous présentons dans un dernier point les nouvelles normes prudentielles définies dans Bâle III.

### 1.1.1 RÈGLEMENTATION PRUDENTIELLE ET RISQUES FINANCIERS

Il existe plusieurs instances de réglementation de statut international qui visent à assurer une certaine stabilité financière. Il en est ainsi de la Banque des Règlements Internationaux (BRI) dont l'objectif est " *to serve central banks in their pursuit of monetary and financial stability, to foster international cooperation in those areas and to act as a bank for central banks* " <sup>6</sup>. Le comité sur le système global et financier s'intéresse aux sources de stress sur les marchés financiers, aux fondements structurels des marchés et tente d'apporter des améliorations dans le fonctionnement et la stabilité des marchés financiers. Le comité sur les systèmes de paiements et règlements travaille sur la promotion des systèmes de paiements et de compensations efficaces. L'institut de Stabilité Financière est créé sous l'impulsion conjointe du Comité de Bâle sur la Supervision Bancaire (CBSB) et de la BRI. Il vise à seconder les superviseurs du secteur financier et à améliorer et renforcer le système financier. Ces différents comités exercent leurs activités sous l'égide de la BRI. Le Comité de Bâle pour la Supervision Bancaire vise surtout à promouvoir la coopération entre superviseurs bancaires pour améliorer la surveillance bancaire. Il constitue ainsi le principal organe international qui émet des recommandations précises sur un certain nombre de problématiques aux superviseurs qui peuvent l'imposer à leurs établissements financiers. L'accord du Comité de Bâle de 1988 pose les fondations pour la gestion du risque de marché et du risque de crédit. Les faiblesses de l'accord de 1988 ont conduit le Comité de Bâle à adopter un amendement en 1996 qui porte surtout sur le risque de marché. Bâle III formule des exigences plus strictes et porte un intérêt particulier aux risques de liquidité et systémique.

---

6. Extrait du site de la BRI : [www.bis.org](http://www.bis.org).

Nous développons dans ce qui suit le cadre réglementaire pour les risques financiers dont l'évolution témoigne de l'apparition de nouveaux défis auxquels sont confrontées les institutions financières.

#### 1.1.1.1 UN CADRE RÉGLEMENTAIRE POUR LES RISQUES FINANCIERS

L'activité croissante des marchés financiers et des institutions financières a fait apparaître de nouveaux risques à côté des risques traditionnels. Les institutions réglementaires se sont alors efforcées à définir ces différents risques, à préciser leur impact sur les activités financières et l'ampleur des pertes qu'ils pouvaient engendrer. La crise des subprimes a confirmé des risques déjà identifiés notamment le risque systémique, ce qui a conduit les instances de réglementation, notamment le comité de Bâle à porter un intérêt particulier aux causes de ce type de risques. Nous proposons de revenir dans un premier point sur la définition des risques financiers. Le deuxième point détaille le risque systémique des Etablissements Financiers d'Importance Systémique (EFIS), pierre angulaire de la stabilité du système financier international.

##### 1.1.1.1.1 Des risques financiers à la menace du risque systémique

L'incertitude sur les marchés financiers est une caractéristique importante : elle est liée à la capacité des agents à pouvoir prévoir des événements ayant un impact sur leur prise de décision. Gilles(1992) présente l'incertitude comme une caractéristique consubstantielle aux marchés financiers dont il est nécessaire de connaître la nature pour mieux comprendre les marchés. Elle peut être due à des événements ou des facteurs aléatoires ou à l'action de tiers. La perception du risque dans nos sociétés évolue(Kermisch(2011)) : elle est souvent couplée à la notion de catastrophe et prend une ampleur beaucoup plus importante à cause de ce que le risque représente dans nos sociétés : " les nouveaux risques(...) comportent des enjeux inédits, à savoir l'intégrité et l'identité de l'espèce humaine, l'avenir de la planète ou la liberté individuelle qui dépassent largement le cadre de la science et de la technique pour envahir celui de l'éthique et de la politique". L'incertitude ou le risque (incertitude probabilisable) constitue depuis longtemps un sujet d'intérêt pour la recherche et ce, quel que soit le domaine. En économie, il faut remonter à la notion d'utilité espérée développée par Bernoulli(1738) qui lui a permis de résoudre le paradoxe de Saint Pétersbourg. La théorie de

Von Neuman et Morgenstern(1944)(VNM) introduit l'économie de l'incertain et développe une fonction d'utilité spécifique. Mais il faut attendre la découverte de 2 paradoxes, celui d'Allais(1953) et d'Ellsberg(1961) qui contredisent l'axiome d'indépendance de la fonction VNM pour voir émerger d'importantes recherches sur l'économie du risque et de l'incertain. Ainsi, vont se développer de nombreux concepts liés à ces paradoxes qui mettent en exergue le comportement des agents et leurs caractéristiques hétérogènes. Les modèles d'équilibres partiel et général conduisent au développement de plusieurs théories en finance (mesures de performances, modèles d'assurance, choix de portefeuille...). Gilles(1992) estime même que " le changement profond de configuration des marchés financiers (...) constitue un domaine particulièrement opératoire de ces théories et plus généralement du traitement de l'incertitude et du risque en économie". De ces notions d'incertitudes et des réalités qu'elles recouvrent, de nombreux chercheurs tentent de mettre en évidence leur caractère endogène et " macroscopique ." Ainsi, Kindleberger(1978) évoque les crashes et les paniques comme des formes d'incertitudes endogènes au marché quand Minsky(1977) retient l'idée d'une incertitude endogène en supposant une " systematic fragility "(incertitude systémique). Ces analyses " macroscopiques de l'incertitude permettent aussi de mieux comprendre les liens entre la structure financière et l'évolution réelle de l'économie, s'opposant en cela à la neutralité selon Modigliani-Miller(1958) "(Gilles(1992)). C'est précisément dans ce cadre que les autorités publiques décident d'encadrer et de superviser les activités financières. Pour cela, elles définissent clairement les différents risques financiers auxquels peuvent être confrontés les institutions, les banques, les agents et les marchés. La récente crise a permis d'identifier de nouveaux risques, mais elle a aussi mis en exergue les limites des autorités dans la surveillance des établissements et les difficultés des Too-Big-To-Fail (TBTF).

#### 1.1.1.1.1.1 Définitions réglementaires des risques financiers<sup>7</sup>

La confusion très répandue entre le risque et l'incertitude conduit Knight(1921) à proposer une distinction claire entre ces deux notions : *'The practical difference between the two categories, risk and uncertainty, is that in the former the distribution of the outcome in a group of instances is known (either through calculation a priori or from statistics of past*

---

7. La majorité des définitions proviennent des textes et règlements du Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire(CBSB).

*experience*), while in the case of uncertainty this is not true, the reason being in general that it is impossible to form a group of instances(...). Cette distinction associe donc à la notion de risque une distribution de probabilités alors que l'incertitude peut être liée à la théorie statistique de la décision (Gilles(1992)). Volle(1995) définit 2 composantes du risque : la perte et l'incertitude. L'aspect psychologique de la perte se traduit par une situation dans laquelle un individu subit une perte par rapport à son point de référence. L'incertitude est liée au processus d'évaluation des pertes des différentes alternatives.

En finance, le risque peut revêtir différentes formes selon les caractéristiques de l'actif en question, la nature de l'incertitude, etc... Un certain nombre de risques financiers ont été définis dans le cadre d'accords sur la réglementation bancaire.

Ainsi, la note sur la surveillance des positions de changes des banques(1980) définit plusieurs catégories de risques prudentiels :

- Le risque de change : c'est le risque pour une banque de subir des pertes par suite de mouvements défavorables des cours de change pendant une période où elle se trouve en position de change.
- Le risque de taux d'intérêt : il est dû à la non-concordance dans le temps des échéances des positions en monnaies étrangères.
- Le risque de crédit : c'est le risque lié au défaut d'une contrepartie d'un contrat de change ou d'un contrat de prêt.
- Le risque de fuseaux horaires : il est dû au fonctionnement ininterrompu des marchés de change. Le risque est lié au défaut d'une contrepartie dans l'intervalle temporelle durant lequel les règlements sont effectués.
- Le risque pays (ou souveraineté) : c'est le risque lié au pays de résidence qui peut par exemple interdire tout transfert d'argent.

Dans ses recommandations pour la gestion des engagements hors bilan(1986), le CBSB définit le risque de refinancement comme le risque qu'une banque soit incapable d'acquérir ou de se procurer d'une autre manière les fonds nécessaires pour faire face le moment venu à ses obligations. Dans ses propositions sur le traitement prudentiel des risques de marché(1993), le comité définit le risque de marché comme un risque de pertes sur positions de bilan et de hors bilan découlant des variations des prix de marché, liées notamment à

des mouvements des taux d'intérêt, des cours de changes et de la valeur des actions. Le comité définit deux types de risques de marché :

- le risque spécifique qui correspond à une éventualité de pertes dues à un mouvement défavorable du prix d'un titre, principalement pour des raisons liées à l'émetteur.
- le risque général de marché qui correspond à une possibilité des pertes résultantes d'un mouvement défavorable de l'ensemble du marché sans rapport avec le titre particulier.

Dans ses lignes directrices pour la gestion des risques liée aux instruments dérivés(1994), le comité définit 5 types de risques associés aux titres dérivés. Il souligne le lien indirect entre les produits dérivés et le risque de liquidité. Ce dernier peut prendre 2 formes :

- Le risque de liquidité spécifique : c'est le risque qu'un établissement ne peut ou rencontre des difficultés pour dénouer ou compenser une position particulière à un prix égal ou proche du prix de marché à cause de la profondeur insuffisante du marché ou des perturbations qu'il subit.
- Le risque de liquidité général : il désigne le risque qu'un établissement ne puisse faire face à ses obligations de paiement les jours des règlements ou lors des appels de marge.

Le comité définit le risque opérationnel comme le risque que des déficiences dans le système d'informations ou les contrôles internes se traduisent par des pertes imprévues. Le risque juridique désigne le risque lié à des contrats non applicables juridiquement ou mal documentés. Dans l'accord de Bâle II, la définition du risque opérationnel englobe celle du risque juridique. Cette dernière est élargie et inclue notamment l'exposition à des amendes, pénalités et dommages pour faute résultants de l'exercice de surveillance prudentielle ainsi que des transactions privés. Ainsi, le risque opérationnel recouvre différents risques : le risque de modèle, le risque de personne et le risque légal.

Le projet d'extension de l'accord sur les fonds propres aux risques de marché (1995) définit plusieurs risques propres aux produits de base :

- le risque de base représente le risque d'altération à terme de la relation entre les cours de produits de base similaires.
- le risque d'impasse à terme désigne le risque de variation du prix à terme pour d'autres raisons qu'un mouvement des taux d'intérêts.

La crise a mis en exergue de nouveaux risques ou des risques peu formalisés :

- Risque de liquidité : Ce risque peut se décomposer en risque de liquidité d'actifs et en risque de liquidité de financement. Le risque de liquidité d'actif désigne le risque lié à une transaction qui ne peut intervenir au prix prévu à cause de la taille relative de la position par rapport au volume des transactions. Le risque de liquidité de financement désigne une situation dans laquelle l'agent ne peut faire face à ses obligations de paiements. Ce risque est pris en compte par le comité de Bâle dès 2009.
- Risque endogène : Il est mis en évidence par Danielsson et al.(2009) et est lié aux comportements des opérateurs utilisant les mêmes modèles. Leur réaction simultanée augmente les phénomènes de pertes.
- Risque de modèle : Armatte(2009) revient sur la crise financière des subprimes et présente le risque de modèle comme une défaillance d'un modèle à pouvoir reproduire la réalité. L'évaluation des pertes associées à ce risque peut être décrite par la différence entre ce que prévoit le modèle et ce qui est observé. En pratique, cette évaluation est établie par comparaison des écarts de deux ou plusieurs modèles par rapport aux données observées.

Une attention particulière des autorités de régulation a été portée au risque systémique au lendemain de la crise des subprimes. Auparavant, ce risque était cantonné à la sphère académique. Le risque systémique reflète la menace potentielle sur la stabilité du système financier dû à l'action d'acteurs financiers. C'est un risque de nature macroéconomique qui n'est pas clairement identifié dans la réglementation financière contrairement aux risques microéconomiques plus classiques(Le Petit(2010)). Le risque systémique est une rupture dans le fonctionnement des services financiers due à la dégradation de tout ou partie du système financier et ayant un impact négatif généralisé sur l'économie réelle. Selon Le Petit(2010), "le risque systémique naît de l'accumulation des risques imparfaitement mesurés par la régulation financière classique. Cette accumulation des risques rend l'ensemble du secteur financier vulnérable à un choc se propageant à travers les principales institutions qui le composent". Les crises financières ont chacune leurs spécificités mais la quête d'une caractéristique commune s'inscrit dans le risque de système, base commune à ces différentes crises. Aglietta(2003) distingue deux types d'évènements systémiques :

- L'effet domino : c'est une répercussion en chaîne d'un choc exogène néfaste.
- L'effet catastrophe désigne des événements systémiques inclus dans des processus macroéconomiques qui font parti du cycle financier.

Cette distinction est basée sur la logique qui engendre l'instabilité et ce, quelles que soient les modalités de réalisation. Ce qui conduit Aglietta(2003) à définir le risque de système comme la probabilité que se produise un événement systémique de l'un ou l'autre type. C'est une menace à incidence macroéconomique qui permet de parler de dysfonctionnement global. Cartapanis(2011) distingue deux types de risques systémiques :

- Le risque agrégé représente la somme des risques excessifs pris par les agents par l'augmentation des leviers globaux.
- Le risque de réseaux est lié aux interconnexions des bilans.

Edey et Hviding(1995) proposent une liste des facteurs potentiels du risque systémique. En premier lieu, le volume des dépôts dans les établissements bancaires non règlementés sont soumis à une instabilité due aux risques de liquidité et/ou à des ruées bancaires. Un autre facteur potentiel porte sur le risque de non paiement d'un opérateur important. Le dernier facteur évoqué par les auteurs porte sur les stratégies d'arbitrages déstabilisatrices. Les stratégies d'arbitrage pro-cyclique peuvent induire une déstabilisation sur le marché des actifs dès lors qu'elles sont conséquentes. Dans le cadre de l'évaluation du risque systémique, des modèles qui rendent compte des interactions qui peuvent exister au sein des systèmes financiers ont été proposés. Il en est ainsi du Cadre d'Évaluation des Risques Macro financiers(CERM) élaboré par la banque du Canada (Gauthier et Souissi(2012)). Au-delà de ces analyses du risque systémique, le lien entre ce risque et les établissements bancaires d'importance systémique a conduit les autorités de supervision à mettre en place de nouvelles mesures tout en tenant compte du risque d'aléa moral de ces établissements.

#### **1.1.1.1.2 Le risque systémique des EFIS**

Il est des établissements financiers, bancaires ou non bancaires, qui présentent certaines particularités, attirant ainsi l'attention des autorités de supervision. Ces entités sont dites d'importance systémique et " faute de savoir gérer les conséquences de la faillite d'une institution financière d'importance systémique, celle-ci devient '*Too-Big-To-Fail*'[TBTF]



et les pouvoirs publics sont contraints de la soutenir" (Le Petit(2010)). La question de ces établissements, bien qu'elle fût l'objet d'études antérieures, a suscité un intérêt particulier au lendemain de la crise des subprimes.

Dans les premiers mois de la crise financière<sup>8</sup>, le Secrétaire du Trésor américain Henry Paulson justifie le non-renflouement de la banque Lehman Brothers, alors en faillite, par cette déclaration : " Le marché doit s'occuper du marché ." Cette phrase témoigne de l'influence des libéraux dans la gestion de la crise. Les adeptes de la main invisible considèrent que l'action des pouvoirs publics doit être minimale, voire inexistante. En effet, la supervision bancaire dans le cadre de la gestion des risques et le rôle des banques centrales comme prêteurs en dernier ressort contribuent fortement au risque d'aléa moral : les partisans de la main invisible d'Adam Smith dénoncent l'intervention des pouvoirs publics dans la mesure où elle encourage la prise de risque des établissements financiers, assurés d'un secours public en cas de difficultés.

Cette approche, fortement critiquée, est rapidement confrontée au problème des établissements financiers d'importance systémiques(EFIS). Ces établissements, trop grands pour faire faillite, occupent une place très importante dans la nouvelle réglementation. Les EFIS qui englobent les TBTF, les *Too-Interconnected-To-Fail*, les LCBO(*Large and complex banking organisation*), et les SIFI(les Institutions Financières d'Importance Systémique) ont été assurés, lors des sommets du G20, du soutien inconditionnel et systématique de la puissance publique en cas de défaillance. Rochet(2010) estime que ce soutien, " même s'il se justifiait à posteriori, a été catastrophique du point de vue de l'aléa moral et de la discipline de marché". Sur le plan réglementaire, le FMI, la BRI et le Conseil de la Stabilité Financière(CSF) ont posé les critères d'identification des établissements de taille systémique, adoptés par les ministres de l'économie du G20 en novembre 2009. Trois critères ont été retenus :

1. La taille des expositions en bilans et hors bilans. Elle représente le volume des services financiers offerts par un établissement ou un groupe d'établissements.
2. L'absence de substituabilité doit renseigner sur le degré de dépendance du secteur financier par rapport à un établissement et sur la fragilité du secteur en cas de disparition de ce même établissement.

---

8. Une description détaillée et une approche économique de la crise des subprimes est présentée dans l'annexe A.5.

3. L'interconnexion (directe ou indirecte) entre les institutions financières permet d'appréhender la propagation du risque systémique et la contagion à l'économie réelle.

Ces critères, relatifs, dépendent fortement de l'appréciation des autorités de supervision. Le Petit(2010) recommande une plus grande précision dans la définition de ces différents critères et souligne leur capacité limitée à apprécier la vulnérabilité systémique d'un marché. De plus, l'utilisation finale de ces critères n'est pas clairement établie et ne renseigne en rien sur les causes et les mécanismes du risque systémique de ces entités. Conscient du risque d'aléa moral posé par les EFIS, le Conseil de Stabilité financière recommande au Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire(CBSB) en Octobre 2010 de mettre en place une méthodologie d'évaluation permettant de mesurer l'importance systémique des EFIS et la capacité additionnelle d'absorption des pertes requise pour ces établissements. Le CBSB définit une nouvelle méthodologie d'évaluation et des exigences de capacité additionnelle d'absorption des pertes pour les banques d'importance systémique (Nov.2011 et Oct.2012). Elles visent à réduire la probabilité de défaillance des établissements financiers d'importance systémique mondiale et intérieure ( $EFIS^M$ ,  $EFIS^I$ ) dont l'impact sur l'économie réelle peut être désastreux. Le comité est conscient de la portée limitée de ces mesures qui ne peuvent empêcher les externalités négatives et les risques de contagion de ces établissements mais qui doivent conduire à une baisse du risque subjectif créée par l'idée selon laquelle les pouvoirs publics offrent un soutien inconditionnel à ces établissements. Deux principaux objectifs dictent les politiques à mettre en place :

1. La réduction de la probabilité de défaillance des établissements financiers d'importance systémique par l'augmentation des capacités d'absorption des pertes en continuité d'exploitation.
2. La réduction de l'étendue et de l'incidence des défaillances de ces établissements par l'amélioration des dispositifs mondiaux de recouvrement et de résolution.

---

Les systèmes financiers sont caractérisés par l'incertitude et par le risque au sens de Knight(1921). Au fil du temps, la notion de risque a évolué, elle s'est adaptée au contexte, à l'environnement et aux agents. En finance, et de manière plus générale en économie, le risque est devenu une problématique particulière qui a conduit à de nombreux travaux tant sur le plan académique, que sur les plans règlementaires et privés. La possibilité de

mesurer et de modéliser le risque a conduit au développement de système de mesure et de gestion des risques. Les menaces qui pèsent sur la stabilité financière, les problèmes liés à une concurrence déloyale, la protection des consommateurs et les externalités justifient la nécessité de mettre en place une réglementation prudentielle. Les autorités de supervision se sont attachées à définir et à intégrer dans les différents textes et règlements, tous les risques susceptibles d'affecter une institution financière. Cette approche micro-prudentielle vise à améliorer la résilience du système financier par des comportements responsables des différentes entités. Or, la récente crise des subprimes oblige les autorités de supervision à repenser l'approche micro-prudentielle et à la coupler à un objectif macro-prudentiel. L'intérêt porté à l'étude du risque systémique et aux établissements d'importance systémique témoigne de cette volonté d'associer aux politiques monétaires et à la surveillance micro-prudentielle, une approche macro-prudentielle du risque. D'aucuns ont appelé de leurs vœux au lendemain de la crise des subprimes à un rapprochement entre banques centrales et autorités de supervision pour converger vers ce qu'André Cartapanis qualifie de nouveau paradigme macro prudentiel.

### 1.1.2 LE RISQUE DE MARCHÉ DANS BÂLE II

La ratification des accords Bâle I par les pays membres permet l'instauration de normes minimales pour la couverture du risque de crédit. Mais elles vont rapidement être confrontées à l'évolution des marchés financiers et aux risques de marché beaucoup plus importants. Dès lors, c'est à la demande des grands établissements financiers que vont être formulées en avril 1993 des propositions pour le traitement prudentiel des risques de marché. Elles sont adoptées et intégrées à l'accord sur les fonds propres. La croissance des instruments dérivés sur les marchés financiers conduit à l'élaboration de directives, d'accords et de normes minimales dès 1994.

Suite aux propositions sur le traitement prudentiel des risques de marché<sup>9</sup>(Avril 1993), le comité publie un projet d'extension de l'accord des fonds propres aux risques de marché. Il vient combler les lacunes des propositions d'avril 1993 soumises aux critiques suivantes :

---

9. Sont inclus les risques de pertes sur des positions du bilan et hors bilan, dues à des fluctuations de taux, de cours, ou de prix de marché.

- Le caractère incitatif insuffisant des propositions d'avril 1993 ne permettait pas d'obtenir des systèmes de gestion des risques améliorés pouvant prendre en compte des techniques plus précises.
- Les corrélations, les effets de portefeuille et la diversification n'étaient pas pris en compte.
- Il existe un décalage entre ces propositions et le système de mesures des banques.

Le projet d'extension de l'accord sur les fonds propres aux risques de marché(1995) présente les différentes méthodes de mesure des exigences de fonds propres. Il s'inscrit dans un objectif particulier souhaité par les professionnels : l'utilisation des modèles internes pour déterminer l'exigence de fonds propres pour le risque de marché. Il est prévu que la mise en application des recommandations du comité définies dans ce projet doit avoir lieu au plus tard à la fin de l'année 1997. Ces directives portent sur les risques relatifs aux titres de créance et de propriété du portefeuille de négociation<sup>10</sup>. Il est convenu que le montant minimal de fonds propres doit être établi à partir de la valeur de marché actualisée des composantes du portefeuille de négociation. Il est laissé à la discrétion des banques le choix d'inclure ou non les instruments hors portefeuille de négociation du bilan ou du hors bilan, utilisés comme instruments de couverture des portefeuilles de négociation. Ils ne sont pas assujettis aux exigences relatives au risque spécifique mais sont soumis aux exigences liées aux risques de crédit. Le comité appelle à une grande vigilance pour éviter d'éventuels transferts abusifs entre le portefeuille de négociation et les autres comptes dans le but d'une minimisation des fonds propres exigés.

Ce projet s'intéresse aussi au risque de change et au risque sur produits de base. Le montant des fonds propres requis est évalué sur l'ensemble des positions en devises et produits de base. Le comité laisse à la discrétion des autorités d'inclure ou non les positions de change structurelles. Il conçoit la possibilité d'une évaluation de certaines positions à leur valeur comptable. Il exclut la possibilité de seuils d'exemption dans le calcul du montant des fonds propres pour le risque de marché. L'évaluation du montant des fonds propres pour le risque de marché doit se faire sur une base consolidée, le comité laisse le choix aux

---

10. Le comité définit un portefeuille de négociation comme l'ensemble des positions sur instruments financiers prises par un établissement pour son propre compte dans l'intention de réaliser des bénéfices à court terme grâce aux écarts existants ou attendus entre leurs prix d'achat et de vente, de couvrir d'autres éléments du même portefeuille, de les revendre à court terme et de les négocier avec la clientèle.

autorités d'autoriser ou non une compensation des positions entre différentes filiales et la surveillance du risque de marché sur une base non consolidée afin de mettre en évidence des déséquilibres inquiétants. Ce projet introduit deux méthodes de mesure du risque de marché qui peuvent être appliquées par les banques sous réserve d'un accord avec leurs autorités de tutelle. La première méthode dite standardisée prévoit une mesure des risques de marché pour les titres de créances, de propriétés, les devises, les produits de base et les options. Elle se base sur une approche analytique et prévoit un calcul séparé du risque spécifique et du risque général. La seconde méthode se base sur les modèles internes mis en place par les établissements financiers. Elle ne peut être appliquée qu'avec l'accord des autorités et elle est soumise à certaines conditions. Cette méthode concerne essentiellement le risque général. Le risque spécifique est souvent pris en compte par des systèmes de mesures séparés du risque de crédit mais le comité exige que les banques soient soumises à des exigences de fonds propres pour le risque spécifique de marché. Il demande à ce que les exigences pour risque spécifique liées aux titres de créances ou de propriétés ne soient inférieures à la moitié des mêmes exigences déterminés par la méthode standard. Pour chaque banque, l'exigence minimale des fonds propres est alors constituée :

- des exigences pour le risque de crédit telles qu'elles sont définies dans l'accord de 1988, y compris le risque de crédit de contrepartie pour tous les produits dérivés des portefeuilles de négociation ou bancaires. Sont exclus les titres de créances, de propriétés des portefeuilles de négociation et les positions sur produits de base.
- des exigences pour risque de marché mesurés soit par les méthodes standards, soit par les modèles internes, soit par une combinaison des 2.

Le comité souligne que le choix d'une méthode doit s'appliquer à toute une catégorie de risque : aucune combinaison de deux méthodes n'est tolérée pour une même catégorie de risque et l'extension aux autres catégories de risques de la méthode choisie doit se faire progressivement. Si les établissements font le choix des modèles internes, ils devront s'y conformer sans possibilité de revenir aux méthodes standards. La définition des fonds propres telle qu'elle a été présentée dans l'accord de 1988 est retenue (catégorie 1 et catégorie 2). Le comité retient aussi la catégorie 3 telle qu'elle a été définie dans l'amendement d'avril 1993 de l'accord sur les fonds propres. Le ratio des fonds propres est donné par la somme entre :

- le produit de la mesure du risque de marché par 12,5

- la somme des actifs risqués pondérés calculés pour le risque de crédit

Il faut que la banque détermine en premier lieu l'exigence minimale pour le risque de crédit et ensuite pour le risque de marché. Nous détaillons dans un premier point l'approche standardisée applicable aux risques de marché et dans un deuxième point, nous présentons les conditions nécessaires à l'utilisation des modèles internes pour l'évaluation du risque de marché.

#### 1.1.2.1 EXTENSION DU TRAITEMENT PRUDENTIEL DE L'ACCORD SUR LES FONDS PROPRES AUX RISQUES DE MARCHÉ : UNE APPROCHE STANDARDISÉE

En avril 1993, le comité formule des propositions pour le traitement prudentiel des risques de marché dans les établissements de crédit. Il s'agit de proposer des normes de fonds propres pour les positions ouvertes sur titres de créances, de propriétés et de devises. Après consultation, ces propositions sont intégrées à l'accord sur les fonds propres (Bâle I). Ce dernier fixe les normes minimales de fonds propres nécessaire pour le risque de crédit. L'importance croissante du risque de marché oblige le comité à élargir l'accord sur les fonds propres de telle sorte à prendre en compte de " manière directe et explicite les risques de marché ." Une méthode d'évaluation explicite des fonds propres pour le risque de marché doit satisfaire deux objectifs :

- mettre en place une norme minimale en relation avec les pertes potentielles encourues pour un ensemble de positions ;
- il faut que les exigences de fonds propres pour chaque catégorie d'instruments soient équivalentes.

Les recommandations formulées sont en grande partie en accord avec la directive sur l'adéquation des fonds propres de la Communauté Européenne. Elles doivent conduire à un amendement de Bâle I. La présentation du dispositif sur l'application des normes de fonds propres aux risques de marché vise à définir la quantité de capital nécessaire pour couvrir les positions ouvertes sur titres de créances et de propriété et sur devises et les moyens d'y arriver. En ce qui concerne les titres de créances et de propriété des portefeuilles de négociation, les exigences en fonds propres sont déterminées à partir de la valeur courante de marché. Pour les instruments qui ne peuvent pas être inclus dans le portefeuille de négociation (car ils ne répondent pas aux critères comptables), le régime des pondérations

est appliqué. Les positions sur produits dérivés pourraient être exclues du portefeuille de négociation. Par ailleurs, une attention particulière est portée à la répartition des instruments entre le portefeuille de négociation et les autres comptes de telle sorte à éviter les transferts abusifs visant à minimiser les exigences en fonds propres. La question du respect des exigences de fonds propres est soulevée par le comité : il semble que dans le cas des valeurs mobilières, les exigences en fonds propres formulées dans le cadre de l'accord de 1988 diffèrent de celles de la directive de la CEE. Cette divergence peut s'expliquer par la différence entre les risques de l'activité bancaire et les risques liés aux opérations de négociation. Dans un souci de convergence des normes appliquées aux banques et aux opérateurs sur titres, le comité tente de pallier aux limites de l'accord de 1988 en autorisant sous certaines conditions l'utilisation d'une forme supplémentaire de dette subordonnée pour la couverture exclusive des exigences de fonds propres pour risques de marché. Cet instrument peut intégrer le capital permanent de l'établissement sous conditions :

- il doit être libre de gage, subordonné et intégralement libéré ;
- il doit avoir une échéance originale d'au moins 2 ans ;
- il ne peut être remboursable avant échéance sauf en cas d'accords avec l'autorité de tutelle ;
- il doit comporter une clause de verrouillage : les intérêts et le capital ne peuvent être payés même à échéance et même si cela entraîne une chute de capital qui couvre les valeurs mobilières du portefeuille de négociation en dessous d'un seuil d'alerte de 20% au-dessus du minimum.

Cette troisième catégorie de fonds propres se distingue clairement de la dette subordonnée à long terme (catégorie 2) sur 3 points :

- l'échéance originale est plus courte ;
- la dette est évaluée au pair alors qu'elle est assortie d'une décote cumulative sur 5 ans dans l'accord de 1988 ;
- elle comporte une clause de verrouillage

Le comité formule un certain nombre de réserves concernant cette troisième catégorie notamment l'utilisation exclusive de cette classe dans le cadre du risque de marché sur

valeurs mobilières d'un portefeuille de négociation. La catégorie 3 est limitée à 250% de la catégorie 1, ce qui implique une couverture à au moins 28.5% des risques liés au portefeuille de négociations par des fonds propres de la catégorie 1. Certains éléments de la catégorie 2 peuvent se substituer à la catégorie 3 à condition que le montant total de la catégorie 2 n'excède pas celui de la catégorie 1 et que la dette subordonnée à long terme n'excède pas 50% de la catégorie 1. Il est convenu que la somme des montants des catégories 2 et 3 n'excède pas le montant de la catégorie 1. Le comité est favorable à une consolidation des risques même s'il craint une sous-estimation des risques due à une compensation entre positions de filiales différentes. Il recommande une forte vigilance qui peut se traduire par une surveillance des risques de marché des différents établissements sur une base non consolidée. Les encadrés 1,2,3 [▷ ANNEXE A.1.] précisent les mesures permettant l'évaluation des risques liés respectivement aux titres de créances, aux titres de propriétés et aux devises. Les recommandations du projet d'extension de l'accord de 1988 aux risques de marché (Avril 1995) présentent la méthode standard d'évaluation des risques associés aux titres de créances, aux titres de propriétés, aux devises, aux produits de base et aux options. Elle est essentiellement basée sur les propositions pour le traitement prudentiel des risques de marché dans les établissements de crédit d'avril 1993. La méthode standard est présentée selon :

- Les titres de créances : sont présentées les méthodes de calcul de fonds propres liées au risque spécifique et au risque général de marché. Le projet reprend les propositions d'avril 1993 pour le calcul du risque spécifique et du risque général [▷ ANNEXE A.1.] et les recommandations pour instruments dérivés<sup>11</sup> [▷ ANNEXE A.2.2.]
- les titres de propriétés : le comité reprend les propositions d'avril 1993 pour les titres de propriétés [▷ ANNEXE A.1.]
- Risque de change : dans le projet d'extension, le comité présente la méthode standard uniquement pour le risque de change. L'encadré 3 [▷ ANNEXE A.1.] précise les différentes propositions qui avaient été formulées en avril 1993 concernant les positions confrontées à un risque de change, les produits de base et la méthodologie pour le traitement du risque de change. Dans le cadre des positions en devises, l'ensemble des

---

11. Dans le document d'avril 1993, il était détaillé les différents instruments dérivés (CTIF, ATF, contrat à terme...) alors que dans ce projet, ces instruments sont regroupés sous l'appellation instruments financiers à terme.



propositions sont reprises mais seule la méthode simplifiée pour la détermination du montant des fonds propres est présentée. La méthode des simulations est considérée comme un modèle interne.

- Risque sur produits de base : Le projet présente de nouvelles propositions qui portent sur le risque sur produits de base<sup>12</sup>. Sont incluses toute détention ou position sur produits de base, métaux précieux à l'exclusion de l'or. La particularité des marchés des produits de base (plus volatiles, plus complexes et moins liquides) contribue aux risques financiers : le principal risque porte sur une modification du cours au comptant (risque directionnel). À ce risque, peuvent s'ajouter un risque de base, un risque de taux d'intérêt, un risque d'impasse à terme et un risque de crédit déjà pris en compte par l'accord de 1988. L'encadré 4 [▷ ANNEXE A.3.] précise les différents modes de mesure des risques sur produits de base. Pour des établissements ayant une activité sur produits de base limitée, le recours à l'approche standardisée est recommandé. Elle offre deux dispositifs : simplifié et complexe. Dans le cadre de l'approche standardisée, la banque peut déclarer sur une base nette les positions longue et courte sur chaque produit pour déterminer ses positions ouvertes. Si les positions sur produits de base différents ne peuvent être compensées, le comité laisse à la discrétion des autorités le choix d'autoriser des compensations entre sous-groupes différents du même produit. Le comité laisse en suspens l'idée d'une compensation pour des produits substituables dont des corrélations minimales entre mouvements de prix existent.
- Risque sur options : la difficulté de mesure des risques afférant ces instruments avait conduit le comité à leur consacrer une annexe dans les propositions d'avril 1993. Mais l'importance prise par les options nécessite des recommandations dans le calcul des exigences de fonds propres beaucoup plus détaillées. Le comité soumet plusieurs méthodes et il revient aux autorités nationales d'autoriser ou non telle ou telle méthode. L'encadré 5 [▷ ANNEXE A.3.] décrit les différentes méthodes : la première dite simplifiée s'adresse essentiellement aux établissements qui achètent uniquement des options<sup>13</sup>. Les deux autres méthodes dites intermédiaires s'adressent aux banques

---

12. Par produit de base, le Comité désigne tout produit physique qui peut être ou est négocié sur un marché secondaire.

13. si l'achat est couvert par une vente, aucune exigence de fonds propres pour risque de marché n'est demandée.

qui émettent des options. L'intensité des activités de négociation doit être liée à la complexité des méthodes. L'évaluation des risques sur options n'exclut pas la prise en compte du risque spécifique lié au sous-jacent et doivent donner lieu à un calcul des exigences de fonds propres. Pour la méthode simplifiée et l'analyse par scénarios, l'évaluation des fonds propres liés aux risques de l'option doit être disjointe de celle liée au sous-jacent. La sommation des différents montants donne alors les exigences en fonds propres.

#### 1.1.2.2 EXIGENCES DE FONDS PROPRES POUR LE RISQUE DE MARCHÉ : UNE APPROCHE PAR LES MODÈLES INTERNES

Les faiblesses des propositions d'avril 1993 et le coût onéreux d'une double mesure des risques (standard et interne) conduit le comité à élaborer un dispositif permettant l'utilisation des modèles internes pour déterminer les exigences en fonds propres. Dans cet objectif, le comité a mené plusieurs réflexions pour évaluer les modèles internes et ainsi fixer des conditions permettant l'utilisation de ces méthodologies. Le comité définit les caractéristiques communes aux différents modèles internes. Il introduit, pour la première fois, la Value-at-Risk qu'il définit comme l'estimation, avec un certain degré de probabilité statistique, des pertes maximales éventuelles en rapport avec le portefeuille. Il s'agit de déterminer pour chaque position la variation potentielle due aux fluctuations des facteurs de risques. Ensuite, il faut agréger les variations des différentes positions en tenant compte des corrélations entre les différents risques soit pour un portefeuille, soit pour toutes les activités de négociation.

Le comité a mené de juillet à décembre 1994 une analyse préliminaire de telle sorte à déterminer des paramètres fixes et communs à toutes les méthodes. Il a proposé à 15 établissements d'évaluer la perte potentielle sur 10 jours avec un intervalle de confiance à 99% d'un portefeuille de 350 positions. Cet exercice a pu mettre en évidence les divergences qui existent entre les différents modèles internes et la capacité de ces derniers à pouvoir fournir une estimation des pertes potentielles raisonnable. Trois types de données sont communs à l'ensemble des modèles :

- les positions
- les variables de marché qui constituent les facteurs de risque

- les paramètres de mesure (période de détention, période d'observation, intervalle de confiance...)

Il est apparu que des divergences dans la saisie des données et l'évaluation du risque liée aux options conduisaient à des résultats très différents. Lorsque ces deux aspects sont pris en compte, la moitié des méthodes fournissent des estimations proches. Le comité a listé les principaux facteurs de divergence des modèles internes :

- L'horizon temporel historique : aucune directive n'avait été donnée quant au choix de la durée si bien que certaines banques ont opté pour des durées très courtes et d'autres pour des périodes très longues.
- Le traitement du risque lié aux options.
- Le nombre et la définition des facteurs de risques utilisés par les différentes banques (nombre de tranches d'échéances...).

Pour obtenir l'agrément externe des autorités, il faut que les processus internes de validation des modèles soient satisfaisants, que les équations des modèles soient validées par les unités de contrôle des risques, que les modèles couvrent correctement les risques liés aux activités de la banque. Les autorités contrôleront aussi les résultats ex-post du modèle et vérifieront les critères de transparence sur le flux des données et le traitement du système de mesure. Le comité ré définit les facteurs de risques de marché, précisés dans l'annexe A.4.1, et impose des critères pour l'utilisation des modèles internes. Les critères quantitatifs, détaillés dans l'annexe A.4.3., fournissent des paramètres généraux de mesure du risque et un mécanisme permettant de convertir la mesure en exigence de fonds propres. Les critères qualitatifs, présentés dans l'annexe A.4.2., visent à garantir des principes sains, des procédures fiables et un suivi intègre des systèmes de mesure des banques. Ils permettent de définir les différents risques qui doivent être pris en compte, de fixer les principes directeurs pour les simulations de crise et les modalités de surveillance. À côté des critères quantitatifs et qualitatifs auxquels les modèles internes doivent se conformer, le comité exige la mise en place de programmes de simulations de crise. Ces derniers doivent permettre de révéler les influences d'un choc sur toutes les positions sous un angle quantitatif et qualitatif. Il est alors possible d'évaluer la capacité des fonds propres à couvrir les pertes engendrés par la crise simulée et mettre en évidence les mesures d'urgence qui doivent être prises en compte pour réduire les risques. Le comité propose de recourir à

deux types de scénarios : le premier serait défini par les autorités de tutelle et le second par les banques. Le contrôle bancaire doit porter sur :

- des scénarios critiques : les banques doivent fournir aux autorités les plus fortes pertes enregistrées durant toute une période. Ces pertes seront alors comparées aux montants des fonds propres déterminés par les modèles internes.
- des scénarios de crises passées : il revient aux établissements de faire subir à leur portefeuille des simulations de crise qui pourraient se dérouler en plusieurs étapes :
  - Soumettre d'abord le portefeuille à des crises passées en tenant compte de la baisse des prix et des réductions de liquidités.
  - Évaluer la sensibilité des positions aux changements de volatilité et de corrélations.
- Scénarios construits par la banque : l'établissement doit simuler des situations les plus défavorables possibles en tenant compte des caractéristiques de son portefeuille. La banque doit rendre compte des paramètres stressés, des simulations de crises, des conclusions et des mesures prises.

Le projet d'extension de l'accord sur les fonds propres aux risques de marché connaît quelques modifications suite aux consultations menées par le Comité. Un amendement à l'accord de 1988 est adopté sur la base du projet avec les précisions suivantes :

- Dans le cadre des modèles internes, il avait été proposé le recours à deux périodes d'observation sur lesquelles seraient menées les analyses. Le comité abandonne cette option dans la mesure où les coûts qu'elle représente sont supérieurs aux bénéfices potentiels. Par ailleurs, le comité autorise, pour une période déterminée, l'utilisation pour les options de la méthode de la racine carrée du temps pour convertir les pertes potentielles journalières en pertes potentielles sur 10 jours.
- Pour la détermination des fonds propres, la catégorie 3 peut être plafonnée si les autorités le jugent nécessaire.

### 1.1.3 BÂLE III : LES NOUVELLES NORMES PRUDENTIELLES

*"Let me conclude, Basel III represents a fundamental shift in how we will be conducting banking regulation and supervision in the future. It fixes many of the shortcomings of*

*micro-level supervision. But it also incorporates the broader system wide lessons and introduces a macro-prudential overlay to the regulatory framework. Taken together, these measures should make the system more stable over the long run, thus raising economic growth over the cycle."*

(Discours de Stefan Walter, Secrétaire Général du CBSB,  
5ème conférence biannuelle sur la gestion et la surveillance des risques à Bâle,  
3-4 Novembre 2010)

Les accords de Bâle III<sup>14</sup> font suite aux insuffisances de la réglementation prudentielle mises en évidence par la crise des subprimes. Le cadre dans lequel s'inscrivent ces accords est assez novateur puisqu'une dimension macro-prudentielle est introduite. Si cette nouvelle réglementation vise à pallier les lacunes en matière de réglementation, il faut souligner que ces insuffisances sont de diverses natures.

La crise des subprimes a mis en évidence des failles : un manque de liquidité, une réglementation inexistante pour les établissements d'importance systémique, des fonds propres de moyenne qualité, une procyclicité importante sont les principales lacunes de la réglementation élaborée dans les précédents accords. La surveillance prudentielle n'a pas été menée sérieusement si bien que les autorités n'ont pu identifier une accumulation des risques sur les marchés financiers.

Sur le plan bancaire, les comportements irresponsables des banques sont aussi mis en cause. Orléan(2009) qualifie même la myopie des investisseurs, incapables d'imaginer la possibilité d'un retournement des prix, d' "aveuglement au désastre". En effet, il faut comprendre que l'éclatement de la bulle immobilière a conduit à la baisse des prix immobiliers la plus importante depuis les années 1930. Orléan(2009) souligne la position rationnelle et complètement informée des investisseurs : " En effet, si on se reporte aux connaissances effectives des acteurs telles qu'elles se présentent avant la crise, on constate que, dans leur grande majorité, ceux-ci ne croyaient ni en l'existence d'une bulle immobilière, ni a fortiori en un retournement à venir des prix. Et surtout qu'ils ne manquaient pas d'arguments solides pour cela. Ce n'était nullement une position irrationnelle, ou même seulement mal informée. " En témoignent les mots choisis par Alan Greenspan qui qualifie les augmentations excessives des prix immobiliers d'écume ou de mousse et non de bulle : "Bien qu'une bulle de l'immobilier pour la nation dans sa totalité paraisse improbable, il est clair que l'on observe, au minimum, les signes d'une écume sur quelques marchés locaux où les prix

---

14. résumés dans l'annexe A.5.1.

immobiliers semblent avoir atteint des niveaux insoutenables.<sup>15</sup> Et va même plus loin : " L'économie états-unienne, par le passé, a fait face à des épisodes de ce genre sans avoir subi de baisses significatives des prix immobiliers au niveau national [...] Quoiqu'on ne puisse pas exclure des baisses des prix de l'immobilier, spécialement pour les marchés locaux, ces baisses, si elles venaient à se réaliser, n'auraient probablement aucune incidence macroéconomique significative". L'opinion d'Alan Greenspan est largement partagée par les professionnels de la finance, les médias ( The Economist qualifie même de mantra l'idée selon laquelle " la moyenne nationale des prix du logement n'a jamais chuté sur une année entière depuis que les statistiques modernes existent " <sup>16</sup>.) et les régulateurs (BRI, FMI...). Sur le plan idéologique et intellectuel, cette crise révèle les limites de la finance libérale. Orléan(2009) note le rôle particulier d'Alan Greenspan dans ce qu'on pourrait appeler 'De l'âge d'or à la décadence de la finance libérale' : " Personne mieux qu'Alan Greenspan n'illustre cette conjoncture idéologique si particulière. Il est exemplaire pour au moins deux raisons. D'une part, en ce qu'il a toujours été un partisan convaincu du libéralisme et de l'efficacité des marchés (...) : " Rien dans la régulation fédérale ne la rend supérieure à la régulation des marchés ", déclare-t-il en 1994. Ou encore : " D'après mon expérience, les banquiers en savent beaucoup plus sur le fonctionnement et les risques de leurs contreparties que les régulateurs. " D'autre part, (...) Greenspan est exemplaire de par le rôle central qui fut le sien à la tête de la Réserve fédérale dans la dérégulation du système financier. (...) Pour ces deux raisons, idéologique et politique, il incarne mieux que personne le libéralisme financier des trente dernières années. Il est, à lui seul, le parfait représentant des certitudes qui, depuis le début des années 1980, dominent les esprits et façonnent le monde. Aussi faut-il prendre très au sérieux ses déclarations d'octobre 2008 devant une commission parlementaire dans lesquelles il avoue publiquement s'être trompé. (...) :

" J'ai fait une erreur en pensant que des organisations mues par la recherche de leur intérêt privé, en particulier les banques et autres organisations de ce genre, étaient, pour cette raison, les mieux à même de protéger leurs actionnaires et leurs investissements [...]

Quelque chose qui semblait un édifice très solide, et même un pilier fondamental de la concurrence et des marchés libres, s'est écroulé. Et j'en ai été choqué [...] J'ai découvert une faille dans mon idéologie. Je ne sais à quel degré elle est significative et permanente,

---

15. Extrait de Orléan(2009).

16. Extrait de Orléan(2009)

mais j'en ai été très éprouvé [...] J'ai découvert une erreur dans le modèle dont je pensais qu'il expliquait la structure fondamentale du fonctionnement du monde tel qu'il est. "

Au-delà de ces mea-culpa de responsables financiers, la crise<sup>17</sup> et la gestion menée par les politiques, les régulateurs permettent d'envisager " un nouveau paradigme macro-prudentiel " selon l'expression de Cartapanis(2011). Le risque systémique et la procyclicité révélés par la crise des subprimes obligent les régulateurs à intégrer un volet macro-prudentiel dans la nouvelle réglementation. Cette dernière comporte un volet conséquent sur le risque de liquidité dont les liens avec le risque de marché s'intensifient en période d'illiquidité. Malgré le caractère " inachevé " de ce nouveau paradigme, Cartapanis(2011) y voit un changement d'atmosphère intellectuel ou même une nouvelle conception du monde financier si bien qu'il appelle de ses vœux à un renouvellement de l'agenda de recherche qui inclurait une meilleure compréhension de l'instabilité des dynamiques, une prise en compte de la dynamique des systèmes financiers dans les modèles macroéconomiques.

Nous présentons dans un premier point le premier volet des accords de Bâle III essentiellement axé sur le risque de liquidité. Nous détaillons, dans un deuxième point, l'accord Bâle III et sa dimension macro-prudentielle.

#### 1.1.3.1 BÂLE III : LE RISQUE DE LIQUIDITÉ

La récente crise financière a mis en lumière le risque de liquidité qui a conduit le comité à y consacrer un volet particulier dans les accords de Bâle III. En effet, les difficultés rencontrées par les banques dotées d'un niveau de fonds propres suffisant durant la crise ont révélé l'importance de la liquidité. Selon le comité, la crise s'ajoute à la non pratique de gestion saine du risque de liquidité, ce qui le conduit à énoncer des Principes de saine gestion et de surveillance (2008) qui visent à formuler des recommandations sur le suivi et la gestion du risque de liquidité. L'objectif est de renforcer la réglementation bancaire sur le plan des fonds propres mais aussi de la liquidité tout en promouvant la solidité des banques. Ce nouveau dispositif doit permettre de tenir compte des chocs dus aux tensions financières et économiques et d'éviter un risque de répercussion sur la sphère réelle. Le comité définit 2 normes minimales pour la liquidité de financement qui doivent répondre à deux objectifs :

---

17. L'annexe A.5.2. revient sur la crise des subprimes. Nous présentons dans un premier point un bref historique de la crise des subprimes. Nous en donnons une approche économique et nous soulignons le rôle des responsables politiques dans cette crise.

- La solidité des banques à court terme face au risque de liquidité : le comité a mis au point une mesure (le ratio de liquidité à court terme(LCR)) permettant aux banques de disposer d'assez de liquidités pour faire face à une crise d'un mois. Une présentation détaillée du LCR est fournie dans l'annexe A.5.3.1.
- La résilience des banques à long terme : elle peut être favorisée par l'utilisation de sources financières structurellement stables et le recours au ratio structurel de liquidité à long terme (NSFR) doit permettre d'évaluer la viabilité de la structure des échéances. Une description détaillée du NSFR est donnée dans l'annexe A.5.3.2.

Ces deux instruments doivent être obligatoirement mis en place respectivement au 01/01/2015 et au 01/01/2018 mais la tension sur les marchés financiers devrait conduire à une application plus rapide. Les objectifs complémentaires des normes minimales doivent permettre aux banques de surmonter les chocs sur la liquidité. Le comité souligne l'importance d'une application homogène de ces normes, ce qui le conduit à fixer des paramètres. Néanmoins, plusieurs paramètres restent à la discrétion des autorités qui doivent satisfaire aux exigences de transparence et de simplicité dans leur définition.

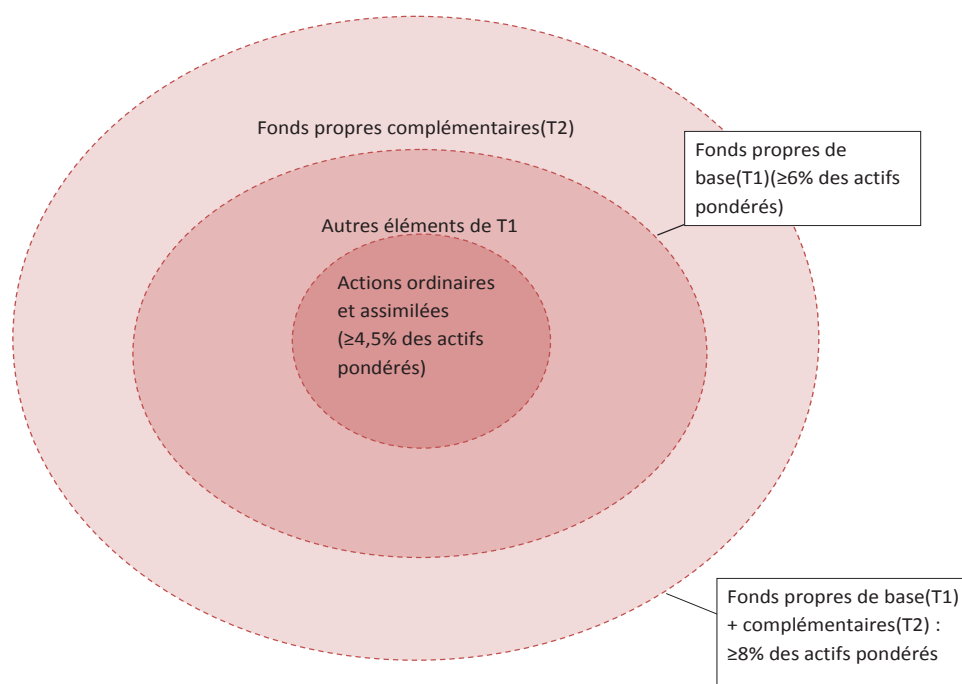
### 1.1.3.2 BÂLE III : UN ACCORD MACROPRUDENTIEL SUR LES FONDS PROPRES

Le deuxième volet de Bâle III présente les réformes élaborées par le comité dans le but de renforcer "les règles internationales en matière de fonds propres et de liquidité". Ces réformes viennent combler les lacunes mises en évidence par la crise financière notamment en ce qui concerne les risques systémique et de liquidité. Par ailleurs, la procyclicité a contribué à un renforcement de la crise et son impact doit être pris en compte. La crise a pu se propager via de nombreux canaux à d'autres pays, d'où la nécessité et l'urgence d'un système bancaire international résilient et stable pour faire face aux chocs internes et externes. Bâle III est conçu pour réformer intégralement le dispositif réglementaire international via une meilleure réglementation microprudentielle mais aussi macroprudentielle. L'amélioration du dispositif mondial de fonds propres tel qu'il est présenté dans Bâle II porte sur plusieurs points :

1. La qualité, le niveau, l'homogénéité et la transparence des fonds propres. Il ressort de la crise des subprimes un manque d'homogénéité dans la définition des fonds propres par les différents pays, une absence de transmission et de communication

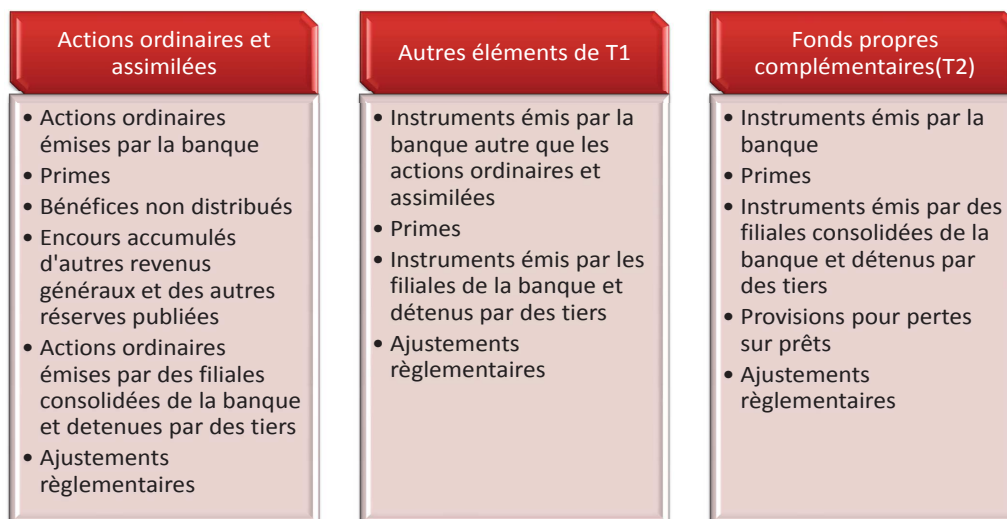


d'informations financières nécessaires à une bonne évaluation de la qualité des fonds propres. La couverture des pertes et dépréciations observées pendant la crise est principalement constituée des bénéfices non distribués. Aussi, le comité exige que les établissements financiers disposent de fonds propres dits de haute qualité et il redéfinit les fonds propres de base qui doivent être principalement constitués d'actions ordinaires et assimilées et de bénéfices non distribués[Graphique 1].



Graphique 1 – Composantes des fonds propres, limites et minimas

Des modalités sont prévues pour les établissements qui ne sont pas constitués en sociétés d'actions. Le Comité harmonise les éléments qui peuvent être déduit des fonds propres. Outre les bénéfices non distribués et les actions ordinaires, le noyau des fonds propres peut intégrer tout élément subordonné, assorti de dividende ou de coupons non cumulatifs avec un versement intégralement discrétionnaire sans date d'échéance ni d'incitation au remboursement. Une harmonisation des fonds propres de catégorie 2 est prévue par le Comité qui envisage de supprimer les fonds propres de catégorie 3 visant à couvrir le risque de marché. Une plus forte transparence est nécessaire : les éléments constitutifs des fonds propres seront publiés[Graphique 2].



Graphique 2 – Éléments des fonds propres Bâle III

2. La couverture des risques. La non prise en compte des risques liés aux positions de bilan et de hors-bilan et les expositions sur opérations dérivés a fortement déstabilisé les établissements durant la crise. Pour pallier ces lacunes, un renforcement de l'accord Bâle II a été présenté en juillet 2009. L'introduction d'une VaR stressée, des exigences de fonds propres plus strictes pour les opérations de titrisation et un renforcement des piliers 2 et 3 sont les principales réformes entreprises par le Comité. Par ailleurs, le Comité préconise des exigences de fonds propres plus fortes pour la couverture du risque de contrepartie, une diminution de la procyclicité et propose de privilégier le traitement des contrats dérivés de gré à gré par des contreparties centrales pour réduire le risque systémique. De nouvelles exigences sont présentées :

- a) Le montant des fonds propres doit être déterminé pour couvrir un éventuel risque de contrepartie par une analyse des intrants en période de crise, ce qui peut conduire à une réduction de la procyclicité ;
- b) Des exigences supplémentaires de fonds propres sont à déterminer pour couvrir le risque d'un déclassement d'une contrepartie qui induirait une perte en valeur

de marché (ajustement de valorisation sur actif(CVA)). Le risque CVA a été beaucoup plus important que le risque de défaut durant la crise ;

- c) Des normes plus strictes sont appliquées pour la gestion des sûretés et au dépôt de garantie initiale. Ainsi, les banques qui détiennent des produits dérivés importants et illiquides doivent retenir des périodes d'ajustement de marge plus longues pour déterminer les exigences des fonds propres réglementaires ;
- d) Pour réduire le risque systémique lié aux interdépendances, les contreparties centrales qui satisfont aux critères définis par le Comité sur les systèmes de paiement et de règlement (CSPR) et par l'organisation internationale des Commissions de valeur(OICV) sont pondérées par de faibles coefficients. L'idée est de favoriser les contreparties centrales et le comité propose de surpondérer les expositions sur les établissements financiers par rapport aux expositions sur entreprises non financières ;
- e) des normes plus strictes sont prévues pour la gestion du risque de contrepartie.

Enfin, le Comité souhaite et encourage vivement le recours à la notation interne. Il prévoit pour cela plusieurs mesures pour diminuer l'utilisation des notations externes ;

3. L'introduction d'un ratio de levier. Un effet de levier important au bilan et au hors bilan des banques a été l'une des nombreuses causes de la crise. Ainsi, les tentatives de réduction de l'effet levier ont conduit à une diminution des prix des actifs, accentuant les pertes. Le ratio de levier mis en place par le comité vise à :

- limiter l'effet de levier ;
- mettre en place des barrières aux risques de modèles et aux erreurs de mesures.

4. La réduction de la procyclicité et l'introduction de volants contra cycliques. Le caractère pro-cyclique des chocs a fortement déstabilisé le système bancaire, les marchés et l'économie durant la crise. Le comité propose plusieurs mesures pour éviter une dynamique procyclique des chocs. Ces mesures visent à :

- diminuer le caractère procyclique dans l'exigence minimale des fonds propres. Il semble que les mécanismes de gestion des risques et des fonds propres n'aient pas intégrés correctement certaines positions. De plus, le caractère procyclique

des exigences de fonds propres anticipé par le Comité dans le cadre de Bâle II n'a pu être endigué par les différentes mesures proposées.

- favoriser un provisionnement prospectif. La solidité des provisionnements s'effectue sur 3 aspects :
  - Aspect comptable : le Comité recommande une approche comptable essentiellement axée sur les pertes attendues. Pour cela, il a énoncé des principes directeurs généraux à l'attention de l'IASB (International Accounting Standard Board) pour l'élaboration des réformes de la norme IAS 39.
  - Aspect prudentiel : le Comité réactualise ses recommandations afin qu'elles soient en phase avec les nouvelles normes comptables.
  - Aspect préventif : le Comité s'engage à mettre en place des incitations qui permettraient aux banques de construire des provisions plus étoffées.
- conserver les fonds propres. Le comité soutient les efforts de constitution de fonds propres au delà du minimum requis par la mise en place d'un dispositif spécifique. Il condamne la redistribution des bénéfices au détriment de la reconstruction des volants de fonds propres et de l'octroi de crédit.
- expansion excessive du crédit. Le Comité recommande aux établissements bancaires de renforcer leurs marges de fonds propres lorsque l'environnement économique est favorable afin d'éviter les interdépendances entre pertes subies en période de crise et ralentissement de l'économie réelle.

Ces différentes mesures sont complémentaires et ne sont efficaces que si elles sont utilisées simultanément de manière adéquate.

5. La gestion du risque systémique et l'interdépendance des établissements. Le comité et le conseil de stabilité financière mènent des réflexions pour mettre en place une approche permettant aux établissements de taille systémique d'absorber les pertes qui dépassent les normes. Par ailleurs, le Comité met en place une méthode basée sur des critères quantitatifs et qualitatifs pour mesurer le poids systémique des établissements et l'ampleur des capacités nécessaires pour absorber les pertes. Il met en place des mesures supplémentaires pour les établissements de grande envergure notamment sur la liquidité, les grands risques et le contrôle prudentiel.

Plus précisément, le comité présente plusieurs modifications des normes définies dans le cadre des accords Bâle II pour la couverture des risques.

L'un des apports majeurs dans les accords Bâle III porte sur le volant de conservation des fonds propres dont l'objectif est la constitution en période calme de marges de fonds propres qui pourront être utilisées pour couvrir les pertes. Pour cela, le comité formule des recommandations pour de meilleures pratiques en matière de conservation des fonds propres. Les banques doivent constituer des fonds propres au-delà du minimum réglementaire en période calme, soit en réduisant les distributions prélevées sur les bénéfices, soit en levant des capitaux privés. Le comité appelle à un comportement raisonnable des banques en leur déconseillant une redistribution des bénéfices motivée par une éventuelle reprise ou la volonté de donner l'image d'une solidité financière. Le volant de conservation des fonds propres est de 2,5% des actifs pondérés des risques, il est principalement constitué d'actions ordinaires et assimilées. Des restrictions proportionnelles sur la distribution des bénéfices seront appliquées lorsque le niveau de fonds propres atteint le volant de conservation. Le seuil de 2.5% devra être atteint au 01/01/2019.

Par ailleurs, le comité présente de nouvelles mesures pour la constitution d'un volant contracyclique compris entre 0 et 2.5% des actifs pondérés des risques, qui briserait la procyclicité créée par une déstabilisation du système financier. Ces nouvelles exigences permettraient de tenir compte de l'environnement macro financier et sont mises en place par les autorités lorsqu'elles les jugent nécessaire<sup>18</sup>. Elles sont spécifiques aux juridictions si bien que les banques de statut international devront constituer un volant représentant la moyenne pondérée des volants activés dans les différentes juridictions dans lesquelles elles ont des expositions au risque de crédit.

Le dernier point important des accords Bâle III porte sur le ratio de levier. Il vise à limiter l'accumulation de l'effet de levier et compléter les exigences fondées sur le risque. Le ratio de levier est donné par :

$$\frac{\text{Total des actifs}}{\text{Fonds propres}} \geq 3\% \quad (1)$$

Au dénominateur, les fonds propres sont donnés par les fonds propres de base définis dans Bâle III. Tout élément déduit des fonds propres doit être déduit de la mesure des expositions. Ces dernières doivent satisfaire des critères généraux et l'inclusion de cessions temporaires de titres est soumise à plusieurs conditions.

---

18. Les autorités surveillent l'expansion du crédit. Si tous les indicateurs montrent une accumulation des risques, elles doivent imposer la constitution d'un volant contracyclique.

---

À l'occasion du 25ème anniversaire des accords Bâle I<sup>19</sup>, Stefan Ingves<sup>20</sup> revient sur les 5 avancées majeures qui ont conduit à une évolution particulière du Comité. La première porte sur " *a coordinating and information-sharing group to one that has become a standard setter* ". Les débuts du Comité sont marqués par certaines recommandations sur la nécessité d'une coopération et d'une surveillance prudentielles de tous les établissements bancaires. La volonté d'harmoniser les surveillances prudentielles n'est pas réellement envisagée et il faut attendre la signature de Bâle I et la crise de 1974 pour constater " *[a] political pressure for banks to increase their capital base and for the regulators to create an international level playing field in this respect* ".

L'évolution complexe et la sophistication des marchés financiers remet en cause la capacité des accords Bâle I à rendre compte des risques encourus par les établissements financiers. Le comité prépare alors l'arrivée des Accords Bâle II par une série de recommandations visant à mieux estimer et prendre en compte les risques financiers. Le constat de Stefan Ingves sur les accords Bâle II est nuancé : " *Like any change, it has delivered some undoubted benefits, but it has also created a whole new range of challenges that we are still grappling with today* ".

La troisième évolution majeure est l'augmentation de la globalisation qui a conduit à une profonde intégration des banques internationales dans des pays qui n'avaient pas pris part au Comité. Les crises financières et l'élargissement du Comité ont ainsi permis de couvrir 90% des actifs bancaires dans le monde. Il s'agit d'une étape importante qui, selon Stefan Ingves, a donné " *[a] greater legitimacy and credibility to the Committee's standards, as they are now set by a process that is truly reflective of international markets* ".

La quatrième évolution majeure est récente : elle est née de la nécessité de coupler une approche micro et macroprudentielle. La conception prudentielle du Comité avant la crise s'appliquait surtout aux banques individuellement, sous prétexte que " *if banks were individually stable, the financial system would itself stay upright* ". La crise des subprimes a montré combien cette idée était erronée !

Enfin la dernière (r)évolution est liée au rôle du Comité dans la mise en œuvre des règles prudentielles puisqu'il participe désormais à l'application de la réglementation prudentielle et ne se contente plus de formuler uniquement des recommandations.

---

19. Symposium to mark 25 years of the Basel Capital Accord, Basel, 26 September 2013.

20. Président du CBSB depuis 2011.

Ces différentes avancées ont conduit à renouveler les accords signés entre les membres du Comité : elles témoignent d'une évolution importante du Comité tant sur le plan de la réglementation bancaire des pays membres que sur le plan financier. La réaction des marchés financiers à de nouvelles réglementations émanant du Comité atteste de l'importance des décisions du Comité sur les activités financières. De ces différents progrès, nous retiendrons l'approche macroprudentielle qui constitue, à notre sens, la plus importante avancée dans la mesure et dans la prise en compte des risques financiers.

## 1.2 APPROCHES DU RISQUE DE MARCHÉ : CADRE THÉORIQUE ET ANALYTIQUE

Quarante ans se sont exactement écoulés depuis la création du CBSB, marqués par une pléthore d'accords, de principes, de recommandations pour une meilleure gestion des risques financiers. La question de la mesure et de la prise en compte de ces derniers est au cœur des trois principaux accords qui témoignent d'une évolution particulière des marchés financiers. Le constat de Stefan Ingves, 25 ans après l'accord sur les fonds propres, dresse les principales étapes de la complexification des marchés. Parallèlement à cette évolution, les instances de réglementation et notamment le CBSB s'efforcent d'approcher au mieux leurs recommandations pour tenir compte de ces complexités. Ces dernières, nombreuses et diversifiées, portent tout aussi bien sur les marchés, les dynamiques créées par l'interaction des agents financiers, les séries temporelles financières, les instruments et les risques, ce qui contraint le Comité à édicter de nouvelles normes qui tiennent compte de ces évolutions de plus en plus complexes. Tout se passe comme si les banques, les institutions financières rivalisaient d'innovation, de complexités, d'ingéniosités et que les responsables prudents, au pas de course, tentaient tant bien que mal de les rattraper. Cette situation particulière est assez bien décrite par Wayne Byres, Secrétaire général du CBSB : *"I would usually describe bankers as glass half full' people, and regulators as their glass half empty' counterparts. To take an obvious example, where banks might first see opportunity for reward, regulators will first see exposure to risk. The two perspectives are, of course, just different sides of the same coin. But they are perspectives that define and create the healthy tension in the bank/regulator relationship"*<sup>21</sup>. L'image du verre à moitié plein et à moitié vide décrit assez bien les deux visions du risque des banquiers et des régulateurs

---

21. Speech to the RiskMinds Risk and Regulation Forum Nice, France 10 September 2013.

mais un fait indéniable qui ne peut être remis en cause par aucune des parties concerne la complexité de plus en plus importante des marchés et par conséquent, des risques et des dynamiques.

Ces complexités et non linéarités doivent être mises en évidence pour conduire à une meilleure compréhension, modélisation et prévision des risques. Nous portons un intérêt particulier au risque de marché qui constitue avec le risque de crédit, les principaux risques financiers identifiés dès les débuts de la financiarisation de l'économie. La complexité croissante des marchés financiers contribue au développement des risques financiers. La présence de structures complexes dans les séries temporelles financières rend l'approche linéaire insuffisante pour rendre compte des comportements particuliers des chroniques temporelles financières. Ce constat impacte directement les mesures des risques financiers.

Aussi, nous proposons dans un premier point de revenir sur le cadre théorique dans lequel s'inscrivent les marchés financiers tout en rappelant les résultats empiriques observés. Nous montrons dans un deuxième point l'insuffisance des modèles linéaires à rendre compte des structures mises en évidence dans les séries financières et nous présentons dans un dernier point les approches stochastiques développées pour rendre compte de la complexité des marchés financiers et implicitement des non-linéarités des séries financières.

### 1.2.1 MARCHÉS FINANCIERS : CADRE THÉORIQUE ET RÉSULTATS EMPIRIQUES

L'étude des marchés financiers est marquée par d'innombrables découvertes qui portent à la fois sur le comportement de ces marchés, la dynamique des prix, l'interaction d'agents hétérogènes ou encore sur l'impact d'une intervention publique. L'engouement suscité dans ce secteur et les enjeux (économiques et financiers) en font la discipline qui a attirée " les économistes les plus brillants, au moins 10 d'entre eux ayant obtenu le prix Nobel depuis 1969 pour des contributions au cœur de la discipline ou à sa frontière proche " (Beaufils et al.(2010))

C'est un thème de recherche interdisciplinaire qui trouve un écho dans le monde de la finance avec ses crises et ses scandales. Il fait appel à l'économétrie temporelle, à l'analyse comportementale, aux systèmes complexes, aux faits historiques... pour tenter de percer la complexité qui le caractérise et d'apporter des solutions aux problèmes rencontrés. La complexité inhérente aux marchés financiers découle de cette interaction microéconomique et macroéconomique, qui nécessite une étude simultanée des marchés dans leur globalité



mais aussi des agents. Le marché financier en tant que " système structurel " est à la disposition d'agents économiques qui souhaitent investir et qui répond en ce sens à une fonction sociale (Orléan(2004)). Il s'est développé au fil des années tout un ensemble d'intermédiaires qui tirent profit de ces activités et qui doivent fournir aux investisseurs les meilleures informations possibles pour la prise de décision. Ainsi, dans l'analyse de la dynamique des prix, les 'experts' doivent mettre en évidence des redondances qui peuvent renseigner sur l'état futur du marché. Ces redondances ou faits stylisés constituent une analyse basique des marchés financiers. Mais les théories financières à la base de la finance moderne font abstraction de ces faits stylisés, considérés comme minimes et amenés à disparaître. La thèse de l'efficience des marchés financiers et son concept phare de la marche au hasard des cours boursiers suppose que toute l'information disponible est intégrée dans les prix. Autrement dit, il n'y a aucun moyen de prévoir les rentabilités futures. C'est un point de vue, souvent remis en cause, notamment au lendemain des crises financières. Il est statistiquement infirmé, par la détection de structures dans l'analyse des prix, par les comportements hétérogènes des agents financiers et les faits stylisés mis en évidence.

#### 1.2.1.1 HÉTÉROGÉNÉITÉ ET EFFICIENCE DES MARCHÉS FINANCIERS

La théorie de la finance moderne est bâtie sur l'hypothèse selon laquelle les marchés financiers sont efficients. La portée de cette supposition est très importante en ce sens où elle impacte depuis plus de 30 ans le fonctionnement des marchés financiers. L'hypothèse de la marche au hasard des cours financiers, l'idée d'une autorégulation des marchés, l'hypothèse d'efficience, la rationalité des investisseurs, l'existence d'une valeur fondamentale pour tout actif alimentent un plaidoyer en faveur d'une finance libéralisée, sans aucun contrôle qui doit conduire à une allocation efficace du capital.

Or, les crises qui se succèdent infirment ces hypothèses d'efficience des marchés, de rationalité des investisseurs ou encore d'autorégulation des marchés. Les partisans de ces théories font un compromis en considérant plusieurs niveaux d'efficience, en revendiquant une absence totale de régulation et d'interventions externes, en dénonçant des comportements excessifs. Mais, le "camp du démon" présente des arguments qui réfutent ces hypothèses : la difficulté de la définition d'une valeur fondamentale pour vérifier l'hypothèse d'efficience, la présence de bruiteurs sur le marché, d'agents irrationnels caractérisés soit par une ratio-

nalité procédurale, soit par un comportement moutonnier, ou encore par la peur du risque. À chaque nouvelle crise, le débat sur l'efficacité des marchés est relancé. Ainsi, la dernière crise des subprimes serait endogène au marché et qui mieux qu'Orléan(2009) peut résumer cette idée d'une instabilité des marchés propres aux théories d'efficacités et non pas le résultat de " forces perturbatrices exogènes " : " La thèse que nous défendons est que cette crise a pour origine la primauté accordée à la finance de marché. Plus précisément, la cause des désordres se trouve dans l'instabilité propre aux marchés financiers, à savoir leur incapacité à faire en sorte que les évolutions de prix soient maintenues dans des limites raisonnables, à la hausse comme à la baisse. Cette crise est donc endogène selon nous. Autrement dit, il s'agit d'en revenir à la question théorique centrale, celle de l'efficacité des marchés financiers. C'est là le cœur du problème et non pas la prétendue apparition de comportements cupides ou irrationnels. La crise ne vient pas de ce que les règles du jeu financier ont été contournées mais du fait qu'elles ont été suivies. Mais notre diagnostic reste pour l'instant minoritaire. Le point de vue dominant, qui ne manque pas d'arguments solides, défend a contrario l'idée que la logique financière est, en son principe, parfaitement efficace mais qu'elle s'est trouvée fortuitement entravée par la présence de forces perturbatrices exogènes. Est désignée en l'occurrence comme coupable une titrisation mal faite parce que trop opaque et trop complexe. En faisant obstacle à la logique concurrentielle, cette titrisation mal contrôlée aurait conduit à des situations aberrantes. Ainsi la finance de marché se trouve exonérée de toute responsabilité. Elle continue même à être pensée comme étant le seul mécanisme capable de réaliser une allocation efficace du capital. Tel est le diagnostic le plus communément retenu aujourd'hui".

Nous revenons, dans un premier point, sur le concept d'efficacité des marchés financiers et nous développons dans un deuxième point l'hypothèse de la marche au hasard des cours. Le dernier point est consacré au bruit sur les marchés financiers, preuve d'une hétérogénéité des agents.

#### **1.2.1.1.1 L'efficacité des marchés financiers**

Le débat sur l'efficacité des marchés financiers suscite des discussions intenses entre les partisans de l'hypothèse d'efficacité des marchés et le camp du démon, expression utilisée par Fama(1970) pour désigner les adversaires de l'hypothèse d'efficacité. Ce débat est né de l'idée formulée par Bachelier(1900) puis reprise par Working(1934) et Keynes(1936) se-

lon laquelle les marchés financiers sont comparables à des casinos dans lesquels les acteurs, dotés d'un esprit animal, ne font que répondre à des pulsions. À partir de cette comparaison, le débat sur l'efficacité des marchés est ouvert. Selon Fama(1965), un marché est efficace si et seulement s'il intègre simultanément et complètement toute l'information disponible. Cette définition, trop stricte selon Roberts(1967)<sup>22</sup> est revue par Fama(1970) qui propose d'établir plusieurs niveaux d'efficacité : efficacité faible, semi-forte et forte. Implicitement, cette définition suppose la formation d'anticipations rationnelles (hypothèse de rationalité fondamentaliste (Orléan(2004))). Autrement dit, les agents possèdent le "bon modèle" pour la détermination de la valeur fondamentale de l'actif. La définition proposée par Jensen(1978) est plus générale puisqu'elle suppose qu'un marché est efficace, au regard de l'ensemble d'informations s'il est impossible de réaliser un profit économique en agissant sur la base de cet ensemble d'informations. Malgré quelques études empiriques qui montrent que les rentabilités passées peuvent expliquer une part des rentabilités futures, Fama(1991) persévère : le marché est efficace puisqu'il est impossible de battre le marché avec le peu d'informations apportées. Le lien entre la rationalité des investisseurs et l'efficacité des marchés étant déjà établi, d'aucuns voient dans la rationalité des investisseurs une condition sine qua non à l'efficacité des marchés. Un agent est dit rationnel s'il maximise son espérance d'utilité sur la base des informations dont il dispose. Cette corrélation entre agents rationnels et efficacité des marchés va rapidement laisser place à une opposition entre ceux qui considèrent que les investisseurs sont rationnels (fondamentalistes) et ceux qui pensent que le marché est un lieu de rencontre d'agents irrationnels (techniciens). Ainsi, Peters(1991) montre que les marchés financiers respectent un des axiomes de l'hypothèse de concurrence pure et parfaite en ce sens où le nombre important des acteurs qui interviennent sur le marché garantit une rationalité collective puisqu'il paraît impossible qu'un nombre aussi important d'agents puisse se tromper. La comparaison des marchés financiers à un marché de concurrence pure et parfaite(CPP) est en partie défendue par Samuelson(1965) qui explique que les intervenants ont des préférences communes et constantes dans le temps, qu'ils calculent des probabilités communes et qu'ils sont neutres aux risques. Leroy(1984) présente la théorie de l'efficacité des marchés financiers comme une extension de l'hypothèse de CPP appliquée à la finance. Les partisans de l'hypothèse de comportements irrationnels introduisent la notion de bruiteurs pour désigner des agents qui peuvent être rationnels mais qui ne possèdent pas ou n'utilisent pas

---

22. Roberts(1967) distingue deux formes d'efficacité forte et faible

toute l'information disponible et pertinente. Ainsi, Black(1986) envisage l'hétérogénéité des agents sur les marchés financiers et introduit le concept de noisy-investors. De Long et al. (1990) proposent une formalisation de l'action des bruiteurs sur les prix mais qui ne fait aucune distinction entre agents rationnels et irrationnels. La transposition de ce débat dans le domaine probabiliste permet l'introduction de la marche au hasard des cours comme reflet de la rationalité des investisseurs.

### 1.2.1.1.2 La marche au hasard des cours

La théorie de l'efficience des marchés financiers est une théorie qui vient répondre à un problème crucial qu'est celui de l'utilité de l'information disponible pour prévoir les rentabilités futures d'un titre financier. Lors de la soutenance de sa thèse de doctorat, le 29 mars 1900, Louis Bachelier reformule pour la première fois l'hypothèse de la marche au hasard des marchés financiers. En 1863, Regnault avait adopté l'hypothèse de marche aléatoire des cours dans un contexte historique particulier pour des préoccupations éthiques, restant étranger à toute considération empirique. Bachelier montre que les variations des cours de la Bourse de Paris sont distribuées au hasard et que les rentabilités suivent une loi de Laplace-Gauss. Par conséquent, il ne sert à rien d'utiliser l'information disponible pour prévoir leur évolution future. Working(1934) et Kendall(1953) montrent que la marche aléatoire reflète l'évolution aléatoire des séries boursières. Cependant les interprétations du concept de marche aléatoire sont différentes : Osborne(1962) explique qu'un actif suit une marche aléatoire si les innovations sont indépendantes et suivent une même distribution normale tandis que Fama(1963) considère que la contrainte de normalité n'a pas lieu d'être. Il préconise le recours à une loi de Pareto-Levy. Granger et Morgenstern(1970) supposent qu'un actif suit une marche aléatoire si et seulement si :

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

L'espérance de l'erreur est constante et sa covariance nulle :

$$E[\epsilon_t] = E[\epsilon_{t+\tau}] \text{ et } Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+\tau}) = 0.$$

La nature restrictive de la marche aléatoire conduit Leroy(1989) à considérer un modèle plus large qui est celui de la martingale. Cette dernière suppose que le cours de l'actif au temps  $t$  est le meilleur prédictor au temps  $t + 1$ . Samuelson(1965) pose les conditions nécessaires pour l'utilisation de la martingale : les agents ont des préférences constantes et

communes, les états futurs de la nature sont déterminés par des probabilités communes et les agents sont neutres au risque. Si la notion de martingale ou de marche aléatoire décrit un comportement rationnel sur le marché, nous avons noté qu'une certaine partie de la littérature s'est attachée à développer la notion de rationalité bruitée liée à des agents irrationnels au sens classique du terme. Néanmoins, il vient une question évidente :

### **1.2.1.1.3 Les marchés financiers sont-ils réellement bruités ?**

C'est une question qui a engendrée une importante littérature notamment à cause de l'hypothèse trop forte de rationalité des agents, difficilement acceptable. Pour contrer cette hypothèse trop restrictive, certains ont mis en évidence des comportements particuliers en détaillant des rationalités propres à certains individus. Markowitz(1952) introduit le critère moyenne-variance dans la détermination du portefeuille optimale et par conséquent le caractère risquophobe de l'investisseur. Cette analyse envisage des agents qui ne sont pas neutres au risque et par conséquent non-rationnels au sens classique du terme. Parmi les agents dits irrationnels au sens classique, nous pouvons retenir l'agent surinformé car risquophobe qui retient des techniques antagonistes-chartistes, fundamentalistes, quantitativistes- pour déterminer sa décision finale. Selon Bawa et Klein(1976), un tel investisseur a une tendance croissante à investir dans un actif sans risque au fur et à mesure que l'information décroît. Par exemple, le cas des insiders analysé par Seyhun(1990) montre que ce type d'agents sur-informés adopte une attitude que l'on peut qualifier de rationnelle alors que l'effondrement du marché aurait été causé par des agents moins bien informés. La réaction d'un agent dit rationnel diffère de celle d'un insider. L'exemple de Seyhun(1990) indique que les insiders ont réagi en période de crise non pas à partir de l'information disponible (faible et mauvaise) mais grâce à des critères " rationnels " économiques et financiers qui ont montré une sur-réaction du marché. Un autre agent irrationnel que l'on peut rencontrer sur le marché est le spéculateur. Harrison et Kreps(1978) définissent ce dernier comme un agent " prêt à payer plus cher le droit de posséder un actif pour avoir le droit de le revendre à un moment voulu ." L'horizon d'investissement d'un spéculateur est à court terme et son action diffère non seulement des agents dits rationnels mais aussi des agents sur-informés dont l'objectif est à long terme. Généralement l'action des spéculateurs est contra-cyclique : ils achètent lorsque le marché baisse et vendent lorsque le marché augmente. Selon Summers(1986), l'écart du prix de l'actif à sa valeur fondamentale est dû aux

spéculateurs dont l'action empêche le prix de l'actif d'atteindre sa valeur fondamentale. Fama et French(1988) introduisent alors la notion de 'mean-reversion' et notent que la présence des spéculateurs peut être détectée par l'autocorrélation significative des rentabilités de long-terme. Ce concept est difficilement vérifiable car la valeur fondamentale d'un titre est difficile à déterminer. Shiller (1981) explique que la présence des spéculateurs peut être mise en évidence par la forte volatilité des cours. Les spéculateurs, neutres au risque, sont responsables de la forte volatilité des cours car ils sont déconnectés de la réalité du marché et profitent du comportement volatile du marché. Mais Leroy et Lacivita(1981), confirmés par Grossman et Shiller(1981) imputent la forte volatilité des cours aux agents risquophobes. Une expérience de laboratoire a été menée par Ang et Schwarz(1985) et montre qu'un marché composé uniquement de spéculateurs est plus volatile qu'un marché composé d'agents risquophobes. Ces derniers se soucient beaucoup du passé et les primes de risque demandées augmentent à la suite d'une crise sur le marché. Les spéculateurs ne tiennent pas compte du passé et Ang et Schwarz(1985) indiquent qu'un marché dominé par des spéculateurs conduit à une meilleure répartition de la richesse. Sur ce point, Beja et Goldman(1980) montrent que les spéculateurs favorisent une convergence plus rapide du prix de l'actif vers sa valeur fondamentale, ce qui indique que les spéculateurs peuvent très bien se fondre dans un marché efficient à partir du moment où les fundamentalistes tiennent compte de ces agents. Un autre exemple d'agent dit irrationnel est le bruiteur. La définition de 'noisy-investor' par Black(1986) envisage la présence d'agents rationnels n'utilisant pas toute l'information disponible. Une importante littérature s'est développée autour de ces agents dotés d'une rationalité procédurale. Il en est ainsi de Kahneman et Tversky(1973, 1974) qui montrent que les agents établissent des règles de décision subjectives pour déterminer les probabilités dans un choix incertain. Ces règles de décision reposent sur l'apparence des résultats et la formation de l'évènement. Les agents ont leur propre représentation de la réalité et agissent selon leurs habitudes, faisant fi de l'information disponible, d'autant plus si cette information a un coût. Orléan(1989) présente un modèle de mimétisme sur les marchés financiers dans lequel les agents nouvellement introduits sur le marché déterminent de façon aléatoire les investisseurs qu'ils vont copier. Du fait de ce comportement mimétique, l'action des agents conduit à l'irrationalité du marché. Orléan(1990) définit le mimétisme comme une " règle de connexion d'agents rationnellement fondée". Comme Bikhchandani et al.(1992), Orléan (1990) ne considère pas l'agent mimétique comme un investisseur irrationnel mais plutôt comme un agent

qui intègre le comportement des autres acteurs du marché comme une information. Un agent mimétique peut être rationnel mais le manque d'informations et/ou de confiance en font un agent irrationnel. Le bruiteur ou le noisy-investor mélange le bruit et l'information. Black(1986) définit le bruit en finance comme étant ce qui rend non seulement les observations imparfaites mais aussi ce qui permet d'observer des échanges sur le marché. Grossman et Stiglitz(1980) expliquent que la présence des bruiteurs ou d'agents mal informés est nécessaire pour que les échanges aient lieu. Mais Varian(1985) ne conditionne pas les échanges à la présence d'investisseurs bien et mal informés : une transaction peut avoir lieu entre agents bien informés disposant d'opinions divergentes mais Black(1986) explique que cette différence d'opinions est une différence d'informations. En dehors du problème des échanges, Fama(1965) explique que les performances d'agents mal informés étant forcément mauvaises, ces derniers sont rapidement évincés du marché. L'argument de Fama(1965) n'est vérifiable que si les bruiteurs ne sont pas nombreux et que les attitudes face aux risques sont ignorées. De Long et al.(1990) justifient l'incapacité des arbitragistes à pouvoir évincer les bruiteurs : ils sont incapables de pouvoir prendre un risque important, ils sont hésitant dans leurs actions face à un trend généré par les bruiteurs. Par ailleurs, ces derniers, inconscients du risque, tendent à le provoquer par un changement aléatoire de leurs opinions majoritaires.

---

L'hétérogénéité des intervenants sur le marché financier témoigne de l'inefficience des marchés puisque les opinions multiples ne peuvent refléter une même rationalité. Cette hétérogénéité se traduit par des faits stylisés sur les marchés financiers.

#### 1.2.1.2 LES CARACTÉRISTIQUES LIÉES À LA NON-LINÉARITÉ DES SÉRIES FINANCIÈRES

Les séries financières sont caractérisées par des faits stylisés mis en évidence par Granger et Ding(1995), Granger, Spear et Ding(2000), Cont(2001) ou encore Sewell(2011) entre autres. Un fait stylisé tel qu'il est défini par Sewell (2011) " is a term used in economics to refer to empirical findings that are so consistent (...), that they are accepted as true." Sewell(2011) présente une revue de littérature exhaustive sur les caractéristiques des séries temporelles financières. Plusieurs spécificités présentées par cet auteur ont été mises en exergue par Granger et Ding(1995). En effet, ces derniers révèlent un ensemble de pro-

propriétés temporelles et distributionnelles des séries financières et proposent des modèles stochastiques capables de générer les faits stylisés observés. Une analyse descriptive des faits stylisés est fournie par Malmsten et Teräsvirta(2004) à partir des rentabilités du SP 500.

Nous proposons une classification des différents faits stylisés en 3 groupes : le premier concerne les caractéristiques non-linéaires liées aux séries financières. Le deuxième groupe porte sur les propriétés d'échelles et distributionnelles des rentabilités financières et le dernier présente des faits stylisés liés aux marchés financiers. La plupart des références citées dans cette section sont issues de l'article de Sewell(2011). Nous présentons les faits stylisés liés à la non-linéarité des séries financières. Compte tenu de l'intérêt limité porté aux propriétés d'échelles et distributionnelles des rentabilités financières et aux faits stylisés liés aux marchés financiers, leurs descriptions sont renvoyées aux annexes A.6.1. & A.6.2.

#### **1.2.1.2.1 La dépendance temporelle des séries financières**

Une des caractéristiques importante des séries financières est le non-significativité des autocorrélations des rentabilités. Ce résultat est en cohérence avec la forme faible de l'hypothèse d'efficience des marchés financiers. Selon Cont(2001), ce fait stylisé n'est pas vérifié pour les données à haute fréquence. Fama(1970) a montré dans une analyse empirique qu'une grande partie des actifs étudiés présentait une corrélation sérielle journalière positive. Longin(1996) met aussi en évidence une autocorrélation positive pour des indices journaliers. Fama et French(1988) étudient les autocorrélations des rentabilités de portefeuille d'indices boursiers et montrent que la fonction d'autocorrélation est distribuée en forme de U au fur et à mesure que l'horizon d'étude augmente. Ainsi, il apparaît que les autocorrélations sont négatives pour les deux premières années de l'analyse, elles atteignent des valeurs minimales entre 3 et 5 ans et redeviennent positives pour des périodes d'études supérieures à 5 ans. Lo et Mckinlay (1988) montrent par une analyse empirique que les séries des rentabilités hebdomadaires et mensuelles d'indices boursiers sont caractérisées par une autocorrélation positive alors que les rentabilités hebdomadaires des titres individuels constituant les indices boursiers sont négativement autocorrélées. Ils confirment leurs résultats dans une autre analyse (Lo et Mckinlay (1990)) mais démontrent que les données mensuelles pour des indices de marchés suivent une marche aléatoire (Lo et Mckinlay(1999)). Campbell et al. (1996) montrent que les autocorrélations des rentabilités hebdomadaires d'actifs finan-



ciers sont faiblement négatives alors que les autocorrélations journalières, hebdomadaires et mensuelles des rentabilités d'indices boursiers sont positives. Sewell(2011) conclue à partir des analyses précitées que les rentabilités d'actifs hebdomadaires et mensuelles sont faiblement et négativement corrélées alors que les rentabilités d'indices boursiers journaliers, hebdomadaires et mensuels sont positivement corrélées. Campbell et al. (1996) font le même constat et expliquent que ce résultat peut être lié au fait que les autocorrélations croisées sont largement positives entre les titres et à travers le temps. Les rentabilités à haute fréquence des marchés sont négativement autocorrélées. Le recours à des modèles GARCH en valeur absolue permet d'intégrer cet effet. Kim et White (2004) préconisent l'utilisation de mesures robustes de l'asymétrie et de l'aplatissement et concluent que les faits stylisés basés sur les mesures standards sont trop facilement acceptés. Dans la même perspective, Teräsvirta et Zhao(2011) proposent d'étudier l'effet Taylor et la relation kurtosis-autocorrélation en retenant les mesures robustes recommandées par Kim et White(2004). Il apparaît que le recours aux mesures dites robustes entraîne la disparition de certains faits stylisés pour des séries financières à haute fréquence. L'autocorrélation des rentabilités absolues et des rentabilités au carré est toujours significativement positive et lentement décroissante (Cont(2001)). L'analyse de la fonction d'autocorrélation des rentabilités absolues du SP500 par Malmsten et Teräsvirta(2004) fait apparaître un effet Taylor qui se traduit par une FAC culminante au premier retard. Ding et Granger(1996) ont montré pour un grand nombre de séries que l'autocorrélation des rentabilités absolues est maximisée au retard 1. Cette régularité porte le nom d'effet Taylor, qui a été, dès 1986, le premier à mettre en évidence ce phénomène. D'une manière générale, les autocorrélations des rentabilités absolues sont plus grandes que les autocorrélations des puissances des rentabilités absolues et l'autocorrélation des rentabilités absolues est supérieure à l'autocorrélation des rentabilités au carré. Selon Tseng et Li(2011), la lente décroissance de la FAC est directement liée au degré de clustering des grandes fluctuations des rentabilités absolues.

#### **1.2.1.2.2 La non-stationnarité des séries financières**

La non stationnarité des séries des rentabilités financières est un fait stylisé empiriquement vérifié par Kendall(1953), Houthakker(1961) et Osborne(1962). La présence de clusters de volatilité reflète l'inconstance de l'écart-type mais une contre-analyse de Lee et al. (2010)

remet en cause ce résultat. Leur étude basée sur les prix des actifs de 32 pays développés et 26 pays en voie de développement pour une période allant de janvier 1999 à mai 2007 conclue sur la stationnarité des indices de prix pour ces pays. La non-stationnarité impacte fortement les modèles sélectionnés et les causes liées à ce fait peuvent être diverses. Ainsi, en économie, la non-stationnarité peut être due à une rupture structurelle (Stock(1994)) et elle peut être contournée par l'utilisation de modèles à changements de régimes. En mathématiques appliquées et en physiques, on lui préférera le terme de processus de diffusion à saut (Cont et Tankov(2004)) et le recours à un mouvement brownien ou à un processus de Poisson peut constituer une alternative acceptable. Un financier pourra arguer un changement des marchés pour expliquer la non-stationnarité tandis que les adeptes des modèles d'apprentissage parleront d'une dérive (Widmer et Kubat(1996)).

### **1.2.1.2.3 La non-linéarité des séries financières**

C'est un fait stylisé que l'on peut détecter dans la moyenne et/ou la variance. Hsieh(1989) étudie les rentabilités journalières de 5 taux de change et montre qu'il existe une corrélation non-linéaire qui s'inscrit plutôt dans un schéma multiplicatif qu'additif. Scheinkman et Lebaron(1989) détectent la présence de dépendances non-linéaires dans les rentabilités hebdomadaires de l'indice des valeurs pondérées du Center for Research in Security Prices (CRSP). Frank et Stengos (1989) mettent en évidence un processus générateur de données non linéaire déterministe pour les séries de taux de rentabilités de l'or et de l'argent. Brock et al.(1991) concluent que les modèles GARCH sont capables d'intégrer les non-linéarités présentes dans un grand nombre de séries de rentabilités. Abhyankar et al. (1995) décèlent une dépendance non-linéaire et de la non-linéarité dans les rentabilités à la minute du FTSE 100. Brooks(1996) met en évidence une non-linéarité pour 10 séries de taux de change anglais. Abhyankar et al. (1997) montrent que les 4 indices boursiers les plus importants sont caractérisés par une dépendance non-linéaire. Barkoulas et Travlos (1998) détectent des structures non-linéaires dans les rentabilités du marché d'actifs athénien. Ammermanna et Patterson(2003) indiquent que les dépendances sérielles non linéaires jouent un rôle significatif dans les séries de rentabilités pour une grande partie des séries financières. Lim et al. (2008) montrent qu'il existe de la non-linéarité dans les rentabilités de 10 marchés d'actifs asiatiques émergents.

#### **1.2.1.2.4 La volatilité des séries financières**

Elle est positivement autocorrélée et il existe une dépendance de long terme des autocorrélations. Cont(2001) montre qu'il existe un effet de levier dans la mesure où beaucoup de mesures de la volatilité sont négativement corrélées avec les rentabilités. Par ailleurs, il semble que le volume des échanges est corrélé avec toutes les mesures de volatilité. Bollerslev et Mikkelsen(1996), Liu et al. (1999) ou encore Andersen et al. (2001) montrent que la fonction d'autocorrélation de la volatilité présente une dépendance de long terme et est bien décrite par une loi de puissance décroissante. La distribution de la volatilité est log-normale selon Cizeau et al. (1997), Andersen et al. (2001) alors que Liu et al. (1999) estiment que les queues de distributions sont mieux décrites par une loi de puissance. La présence de clusters de volatilité a été remarquée pour la première fois par Kendall(1953). La volatilité présente des non-linéarités : Franses et Van Dijk(1996) montrent qu'un modèle non-linéaire améliore les prévisions de la volatilité hebdomadaire des marchés d'actifs. Diaz et al. (2002) et Maheu et McCurdy(2002) détectent des structures non-linéaires dans la volatilité du taux de change. Martens et al. (2004) détaillent les non-linéarités détectées dans la volatilité du SP500. Liu et al. (1999), Andersen et al. (2001) et Gençay et al. (2001) analysent les propriétés d'échelles dans la volatilité pour différents intervalles temporels.

#### **1.2.1.2.5 La mémoire longue des séries financières**

Empiriquement, une des caractéristiques des séries financières est la lente décroissance de la fonction d'autocorrélation. Ce fait stylisé peut dissimuler une mémoire longue dans les données. Selon Granger(1966) " les événements qui affectent l'économie sur une longue période sont plus importants que ceux qui l'affectent sur une courte période". Aussi, il est nécessaire de mettre en évidence une éventuelle mémoire longue dans les données par l'application de tests de mémoire longue. Une présentation plus détaillée du concept de mémoire longue et des tests relatifs à ce fait stylisé est donnée ultérieurement. Il existe une importante revue de littérature qui s'est attachée à mettre en évidence les éventuelles structures de mémoire longue dans les rentabilités financières. Elle est détaillée dans l'annexe A.6.3.1.

### 1.2.1.2.6 Les structures chaotiques des séries financières

L'identification de composantes chaotiques peut s'appréhender par le concept de sensibilité aux conditions initiales qui implique un comportement de long terme imprévisible. Les structures chaotiques à hautes dimensions sont difficiles à distinguer des processus stochastiques d'où l'intérêt porté au chaos à faible dimension. Les précisions nécessaires aux différents concepts sont données dans le chapitre suivant. La détection du chaos dans les données financières a fait l'objet d'une importante littérature relativement récente : Savit(1988) présente une introduction du chaos sur les marchés financiers tandis que Frank et Stengos(1989) analysent les rentabilités de l'or et de l'argent pour détecter d'éventuelles structures chaotiques. Peters(1991) confirme la présence de structures chaotiques dans les marchés financiers alors que Brock et al. (1991) sont plus nuancés et concluent sur l'absence de preuves robustes d'un processus générateur chaotique de faible dimension dans les données économiques et financières. Blank(1991) présente des preuves nécessaires mais insuffisantes d'un processus générateur chaotique déterministe pour l'indice SP500 quand Hsieh(1991) prétend qu'il n'y a aucune preuve d'une composante chaotique faiblement complexe dans les rentabilités des actifs financiers. Willey (1992) applique 3 tests empiriques et conclue sur le rejet de l'hypothèse d'un processus générateur chaotique déterministe pour les prix journaliers du SP 100 et du Nasdaq 100. Decoster et al. (1992) tentent de détecter des structures chaotiques dans les prix des biens mais ils concluent sur une structure non-linéaire. Certaines études ont mis en évidence la présence de structures chaotiques mais recommandent d'autres recherches pour confirmer ou infirmer leurs résultats. Mayfield et Mizrach(1992) estiment la dimension de l'indice SP 500 et concluent que les données sont soit issues d'un processus à faible dimension avec une grande entropie, soit issues d'un processus non-linéaire de haute dimension. Dans l'étude menée par Yang et Brorsen(1993), la moitié des marchés futurs étudiés comportent du chaos déterministe. Abhyankar et al. (1995) étudient sur 6 mois les rentabilités à la minute du FTSE 100 et montrent qu'elles comportent une composante chaotique. Dans une autre analyse, Abhyankar et al. (1997) analysent les 4 plus importants indices de marchés et ne détectent pas de structures chaotiques. Sur les 7 marchés noirs de change d'Europe de l'est, Serletis et Gogas(1997) confirment un processus générateur non-linéaire chaotique pour 2 marchés. Barkoulas et Travlos(1998) analysent les rentabilités du marché d'actifs athénien et montrent qu'il n'y a pas de structures chaotiques. Wei et Leuthold(1998) analysent 6 marchés agricoles de fu-

turs et confirment un processus générateur chaotique pour 5 marchés. Gao et Wang(1999) analysent les prix journaliers de 4 contrats futurs mais ne décèlent pas de chaos déterministe. Andreou et al. (2000) analysent le taux de change de 4 monnaies importantes contre la devise grecque et concluent sur la présence de structures chaotiques pour 2 d'entre elles. Panas et Ninni(2000) découvrent du chaos dans les productions journalières du pétrole des marchés de Rotterdam et méditerranéen. Adrangi et al. (2001) analysent plusieurs séries pétrolières et rejettent l'hypothèse de structures chaotiques. Antoniou et Vorlow (2005) mettent en évidence une possible signature déterministe dans le processus générateur de données du FTSE 100. Cecen et Ugur(2005) analysent des rentabilités de marché et de taux de change et concluent en faveur d'un processus chaotique à faible dimension dans les séries financières. Wang et Fu (2007) analysent l'indice de Shanghai et prouvent que le marché d'actif chinois est chaotique, confirmé par Zhao(2009).

---

'*This time is different. Eight centuries of financial folly*' de Reinhart et Rogoff(2009) s'attache à mettre en évidence les traits communs aux crises financières qui marquent le monde depuis 800 ans. Le syndrome du '*This time is different*' que l'on entend au lendemain de chaque crise, comme si elle était unique, témoigne finalement des analyses parcellaires des crises financières.

Cette propension à considérer que les crises sont uniques, qu'elles sont le résultat d'une force exogène perturbatrice, que les marchés sont efficients, que le système capitaliste et la libéralisation des marchés financiers ne peut qu'être bénéfique à l'économie alimente ce phénomène " d'aveuglement au désastre "(Orléan(2009)). Les marchés ne sont pas parfaits, ils ne sont pas efficients, ils doivent être régulés pour limiter les comportements excessifs d'agents irrationnels. Les faits stylisés témoignent de l'inefficience des marchés qu'il faut réguler. Cette inefficience crée des structures dans les séries temporelles financières qu'il faut mettre en évidence pour pouvoir anticiper une part des rentabilités futures et ainsi prévenir les crises financières.

### 1.2.2 L'INSUFFISANCE DES MODÈLES LINÉAIRES

Les faits stylisés mis en évidence par de nombreuses études témoignent de l'existence de

structures dans les séries financières. Ces caractéristiques communes reflètent des comportements hétérogènes et spéculatifs sur les marchés. L'étude des séries temporelles financières fait apparaître différentes anomalies : leptokurticité, volatilité, non-linéarité... Aussi, il est nécessaire de développer des modèles permettant de prendre en compte ces différentes caractéristiques. L'économétrie financière a longtemps été marquée par les modèles ARMA, véritable révolution dans la modélisation temporelle, popularisés par la méthodologie de Box et Jenkins. Or ces modèles de type linéaires sont incapables de transcrire une grande partie des faits stylisés des séries financières. Nous proposons de revenir dans un premier point sur deux types d'anomalies qui nous semblent importantes. Nous présentons dans un deuxième point les modèles ARMA qui ont dominé pendant plus de 10 ans l'économétrie temporelle et nous mentionnons les limites de ces modèles à pouvoir rendre compte des dynamiques financières.

#### 1.2.2.1 NON-NORMALITÉ ET VOLATILITÉ DES SÉRIES FINANCIÈRES

La modélisation des marchés financiers est depuis longtemps une préoccupation pour les théoriciens de la finance. Elle a fait l'objet de nombreuses publications et elle demeure depuis plus d'un siècle l'un des plus grands défis de recherche, défi qui a conduit à des avancées non négligeables dans l'économétrie des séries temporelles. En effet, c'est en 1900 que Louis Bachelier propose dans sa thèse de doctorat la pierre angulaire sur laquelle seront bâtis une multitude de modèles financiers : "*Il est possible d'étudier mathématiquement l'état du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. [...] On voit que la probabilité [pour que le cours se trouve dans un intervalle élémentaire] est régie par la loi de Gauss*". Cependant, il revient à Osborne(1959) et à Samuelson(1965) la description du mécanisme des fluctuations boursières par le modèle standard des variations qu'il est possible d'appeler indifféremment marche au hasard dans le cas discret ou mouvement brownien dans le cas continu. Les études empiriques menées notamment par Kendall(1953) font ressortir par les méthodes statistiques usuelles une absence totale de tendance dans les variations des cours et il rejoint Bachelier en expliquant qu'il est impossible de prévoir intégralement les cours. Néanmoins, il note qu'il est possible d'estimer partiellement les rentabilités à partir d'une variable exogène que Kendall a baptisé " le démon du hasard " alors que Bachelier parle de " causes naturelles ". Ainsi, ce démon serait à l'origine de la spéculation boursière

mais Working(1956) distingue clairement les causes dites naturelles de cette spéculation qui concerne l'économie réelle des causes " factices " liées à l'information des marchés. Dans les années 1960, plusieurs études menées par Kendall(1953), Osborne(1959) et Alexander (1961) montrent que la normalité des distributions des rentabilités est invalidée empiriquement. Les séries de rentabilités financières font apparaître un phénomène de leptokurticité qui remet en cause l'hypothèse de normalité des distributions des rendements financiers. Les analyses empiriques qui ont été menées (Cf. les faits stylisés) invalident l'hypothèse de normalité des distributions des cours financiers et mettent à jour un certain nombre d'anomalies. Les anomalies des marchés financiers peuvent avoir 2 origines :

- Elles peuvent être causées par des facteurs structurels si le marché ne réunit pas les conditions d'une concurrence parfaite en autorisant les gros investisseurs à côtoyer les petits porteurs.
- Elles peuvent être causées par des facteurs comportementaux si les acheteurs ou vendeurs sont soumis à des travers psychosociologiques qui altèrent leur jugement et donc leurs décisions d'achat ou de vente.

Les anomalies observées sur les marchés financiers concernent les rentabilités financières et sont dues à des facteurs structurels. Les analyses statistiques menées sur les séries de rentabilités financières font apparaître 2 grandes familles d'anomalies.

#### **1.2.2.1.1 L'excès de volatilité des séries des rentabilités financières**

L'étude des chroniques financières est confrontée à de multiples problèmes dont le plus connu et peut-être le plus problématique, est la variabilité importante des cours. En effet contrairement à ce que postule la théorie financière standard, les cours des titres financiers ne sont pas homoscédastiques, c'est-à-dire que nous n'observons pas la même variabilité au cours du temps. L'hypothèse d'efficience des marchés financiers suppose qu'à chaque nouvelle information arrivant sur le marché, les cours financiers s'ajustent quasi-instantanément : " Sur un marché efficient, la concurrence que se livrent un grand nombre d'opérateurs intelligents crée une situation dans laquelle, à chaque moment, les prix des différentes valeurs reflètent les effets de l'information basée, d'une part, sur des événements qui se sont déjà produits et, d'autre part sur des événements que le marché s'attend à voir se produire dans le futur. En d'autres termes, le prix pratiqué sur un mar-

ché efficient est, à tout moment, une bonne estimation de sa valeur intrinsèque. " (Fama (1965)). Ainsi, cette théorie postule qu'un petit changement de la vraie valeur d'un titre entraîne un petit ajustement : la causalité est donc linéaire et les fluctuations sont statistiquement gaussiennes. Empiriquement, les chroniques financières présentent un caractère fortement erratique par rapport à la trajectoire d'un bruit blanc. Il est possible d'observer plusieurs ruptures brutales qui donnent aux trajectoires boursières une allure " cassée " loin de l'aspect lisse des fluctuations gaussiennes. Les séries financières sont décrites par des clusterings de volatilité à savoir une alternance entre des périodes de forte volatilité et des périodes de faible volatilité. C'est ce qu'en termes économétriques nous appelons l'hétéroscédasticité conditionnelle, particulièrement fréquente dans les séries financières et boursières. Contrairement à ce que postule la théorie, des évènements mineurs peuvent engendrer de grandes fluctuations conduisant à une invalidation de l'hypothèse de normalité des cours. Face à cette incohérence, West (1988) et Leroy (1989) ont été les premiers à s'intéresser au problème de l'importante volatilité des cours boursiers et il existe des tests qui permettent d'appréhender cette extrême volatilité. Les tests de volatilité permettent de mesurer la répercussion sur le cours coté d'un choc d'information exogène et le calcul des primes de risques permet de mesurer l'écart existant entre la rentabilité théorique et la rentabilité réelle d'un actif.

#### **1.2.2.1.2 La non normalité empirique des distributions**

Elle constitue une des anomalies les plus importantes puisque la plupart des modèles financiers sont bâtis sur cette hypothèse. En effet, la majorité des modèles financiers se sont appuyés sur les travaux de Bachelier qui suppose que les distributions des prix relatifs sont gaussiennes. Conformément au théorème central limite, l'histogramme des rentabilités boursières doit être en adéquation avec la courbe en cloche de la loi normale. Empiriquement, une telle situation n'a pu être observée, les séries de rentabilités financières étant souvent caractérisées par des queues de distribution plus épaisses que celle de la loi normale. Le caractère leptokurtique des distributions de rentabilités trouve son origine dans la discontinuité des écarts des cours et dans les sauts des séries de cours boursiers :

- Les queues de distributions sont plus épaisses que celles de la loi normale. Or, c'est dans ces queues de distributions que se trouvent les rentabilités anormales. Ainsi la fréquence d'apparition des rentabilités anormales est plus élevée que la fréquence



prévue par la loi normale. En effet, la probabilité que surviennent des rentabilités anormales est infime si les rentabilités suivent une loi normale.

- Corollairement, l'histogramme des distributions empiriques ne comporte pas assez de valeurs autour de la moyenne.

La leptokurticité des distributions empiriques des rentabilités boursières est un fait indéniable qui indique clairement l'impossibilité de pouvoir décrire les rentabilités par une loi normale. La loi normale est souvent caractérisée par ses 2 premiers moments : l'espérance et la variance car il est facile de montrer que tout moment d'ordre impair est nul et tout moment d'ordre pair est fonction de l'écart type. Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement permettent de caractériser la distorsion par rapport à la loi normale. Le calcul de la variance de la série des rentabilités permet de montrer que pour des échantillons dont la longueur s'accroît, la variance augmente sans se stabiliser, laissant présager une variance très grande : c'est le problème de l'extrême volatilité.

### 1.2.2.2 LIMITES DES MODÈLES LINÉAIRES CLASSIQUES

Dès 1970, les méthodes de prévision des séries chronologiques connaissent un engouement dû notamment aux insuffisances présentées par les méthodes traditionnelles mais surtout aux travaux de Box et Jenkins. En effet, ces auteurs proposent une nouvelle conception pour analyser les chroniques temporelles. La méthode éponyme considère la série comme un échantillon d'un processus aléatoire et en utilisant la propriété dite d'ergodicité, ils supposent que les caractéristiques de la chronique tendent vers les caractéristiques du processus. L'avantage présenté par cette méthode réside dans le recours aux travaux sur les processus aléatoires pour étudier les chroniques économiques. La méthode de Box et Jenkins s'appuie sur un certain nombre de résultats théoriques notamment la théorie des processus aléatoires développée à partir de 1927 avec les processus de Yule. L'idée de base est de considérer la chronique comme un échantillon d'un processus aléatoire et de tenter de trouver un processus générateur possédant une forme fonctionnelle de telle sorte que les propriétés du processus s'appliquent à la chronique et donc à sa prévision. La diversité des processus aléatoires a conduit les chercheurs à retenir une classe particulière de processus : les processus aléatoires stationnaires. Ces derniers sont caractérisés par des moments indépendants de l'origine du temps. Ainsi en 1939, Wold définit une classe particulière de

processus stationnaires : les processus ARMA.

Les processus ARMA sont dits linéaires et possèdent, d'où leur intérêt, une forme fonctionnelle. Construits à partir d'un processus autorégressif (AR) et d'une combinaison linéaire finie des valeurs passées d'un bruit blanc (MA), les processus ARMA, mais surtout leurs identifications constituent le pilier de l'algorithme de Box et Jenkins. Ces modèles offrent un cadre d'étude des structures dynamiques des séries temporelles financières en modélisant la relation linéaire entre la série des rentabilités et l'information disponible en  $t$ . L'ensemble d'informations disponible en  $t$  peut contenir des valeurs retardées de la série des rentabilités mais aussi un vecteur aléatoire qui reflète l'environnement économique impactant le prix de l'actif.

Une des premières limites des modèles ARMA dans la modélisation des séries financières est l'incapacité de ces modèles à prendre en compte l'hétéroscédasticité des séries. Une autre faille présentée par les processus ARMA est leur linéarité : en effet cette condition suppose que le processus générateur de la chronique est linéaire. Par ailleurs, ces modèles ne prennent pas en compte les phénomènes d'asymétrie, ni les ruptures de fortes amplitudes. Ils ne tiennent pas compte des moments d'ordre supérieur à 2 susceptibles de disposer d'informations nécessaires pour l'étude des chroniques. Ces différentes faiblesses montrent que les modèles ARMA sont incapables de rendre compte d'un certain nombre de caractéristiques des séries financières.

---

Ce dernier volet consistait à présenter les différentes anomalies observées sur les marchés financiers, anomalies en contradiction avec l'hypothèse de normalité des cours boursiers formulée par Bachelier. La première anomalie observée, et peut-être la plus remarquable concerne l'excès de volatilité des séries de rentabilités financières. Cette anomalie est en étroite relation avec l'hypothèse d'efficience des marchés financiers puisqu'elle remet en cause cette dernière. Plusieurs auteurs ont proposé des tests de volatilité excessive qui permettent de rendre compte de l'écart existant entre les cours et la valeur fondamentale d'un actif financier. La seconde anomalie observée est la non normalité des distributions. Caractérisées par une leptokurticité des rentabilités, les séries des cours recensent un nombre important de valeurs " anormales". Face à ces diverses anomalies, les différents tests basés sur l'hypothèse de normalité apparaissent inadaptés. Le succès des modèles de type ARMA dans la modélisation des séries financières est surtout dû aux limites des modèles

d'inspiration keynésienne et à la méthodologie de Box et Jenkins. L'incapacité des modèles ARMA à pouvoir rendre compte des principales anomalies des séries financières limite la portée de ces modèles. Aussi, il est intéressant de considérer une approche différente en envisageant une démarche non linéaire. Ces différentes anomalies peuvent être symptomatiques d'une non linéarité. Les modèles linéaires présentent des trajectoires "lisses" qui ne correspondent pas aux séries financières alors que les modèles non linéaires font apparaître des comportements "explosifs" ou "intermittents" : "le monde est non linéaire, il faut bien s'en accommoder" <sup>23</sup>.

### 1.2.3 LES APPROCHES STOCHASTIQUES DE LA COMPLEXITÉ DES MARCHÉS FINANCIERS

En économétrie financière, la nature stochastique d'une série temporelle peut se manifester sous différentes formes : elle peut être liée à l'équation de la variance, à la présence de structures à mémoire longue ou encore à des changements de régimes. Ces 3 caractéristiques sont celles qui sont le plus observées dans les séries temporelles financières et elles sont souvent révélatrices de l'existence de structures non linéaires qu'il convient de prendre en compte dans la modélisation. Il existe une importante littérature qui porte sur les liens entre ces trois phénomènes. Les études qui ont été menées visent à mettre en évidence la caractéristique qui doit être principalement considérée.

- **Changements de régime et mémoire longue**

La possibilité d'observer différents régimes dans une série temporelle économique a conduit à l'utilisation des modèles à changements de régime de telle sorte à intégrer les différents changements structurels visibles ou non graphiquement. L'idée sous-jacente à ces modèles suppose la linéarité du processus entre chaque changement et les coefficients du modèle utilisé évoluent d'un état à un autre. Les modèles à changements structurels peuvent comporter des composantes de court terme ou de long terme qui dépendent de la régularité et de la nature des chocs. Ainsi, l'influence structurelle sur le niveau d'une série ou de sa variance peut créer une dépendance de long terme qui se traduit par une FAC lentement décroissante. Or, pour certains modèles, une composante de court terme peut créer des structures dont l'allure suggère une dépendance de long terme et conduire à une modélisation de la dépendance

---

23. Abraham-Frois(1994).

de long terme. Cette confusion est liée au comportement de la FAC d'un processus à changement de régime qui ne décroît pas toujours de façon exponentielle vers 0. Néanmoins, Guégan et Rioublanc(2005) ont montré qu'un modèle de mémoire longue conduit à de bonnes prévisions de séries caractérisées par des changements de régime à mémoire courte.

- **Mémoire longue et volatilité**

La coexistence d'une composante mémoire longue et la volatilité a été initialement étudiée par Aftalion et Poncet(2004) qui ont montré qu'il peut exister un lien entre volatilité et dépendance de long terme. Guégan(2007) propose d'analyser les dommages provoqués en termes de prévisions ou de risques en cas de confusion de modélisation lorsque persistance et volatilité coexistent. L'objectif est de savoir si une prise en compte de ces deux phénomènes dans un même modèle est possible. Pour cela, plusieurs approches sont introduites. Ding, Granger et Engle (1993), Baillie, Bollerslev et Mikkelsen(1996) et Guégan(2000) proposent différents modèles qui privilégient la composante mémoire longue tout en y intégrant le phénomène de volatilité. Selon ces auteurs, la composante de mémoire longue qui peut exister dans les rendements existe aussi dans le processus de volatilité, d'où l'intérêt porté à la dépendance de long terme dans la modélisation plutôt qu'à la volatilité. Giraitis, Robinson et Surgaitis(1999) préconisent un modèle ARCH infini avec des paramètres lentement décroissant pour modéliser la variance conditionnelle. Ce type de modèle reste cependant difficile à mettre en œuvre. Une autre alternative consiste à utiliser des modèles de volatilité stochastique (Robinson(2001)) ou des processus IGARCH (Bollerslev(1986)). La coexistence de ces deux phénomènes pose le problème de l'identification des structures qui composent les séries financières. En effet, Crato et de Lima(1994) ont montré que les tests de mémoire longue peuvent conduire à des résultats erronés et conclure à une dépendance de long terme à cause de la faible stationnarité des séries étudiées. Mikosch et Starica(1999) étudient une série temporelle  $X(t), t = 1, \dots, T$  et des sous-séries de  $X(t)$  dont les moyennes sont différentes. Il apparaît que la fonction d'autocovariance est constante pour de grands retards et que les sous-séries ont une densité spectrale qui explose à des fréquences proches de 0, ce qui est symptomatique d'une dépendance à long terme alors qu'il s'agit d'une série caractérisée par une dépendance de court terme. La non-stationnarité de la variance conditionnelle peut expliquer la lente décroissance de la FAC aussi bien que les modèles à changements

de régime. Le risque de cette double confusion affecte surtout les mesures des risques financiers qui sont alors invalides.

Nous revenons dans un premier point sur l'hétéroscédasticité et les mémoires longues qui constituent une double non linéarité des séries temporelles financières. Nous présentons dans un deuxième point les modèles à changements de régimes qui peuvent s'interpréter comme une succession de modélisations linéaires.

### 1.2.3.1 HÉTÉROSCÉDASTICITÉ ET MÉMOIRE LONGUE : UNE DOUBLE NON-LINÉARITÉ DANS LES SÉRIES FINANCIÈRES

La forme faible de l'hypothèse d'efficience des marchés financiers suppose l'imprévisibilité des rentabilités futures à partir de l'historique des rentabilités passées. Ainsi toute déviation du cours se résoudra par un retour à l'équilibre et l'arbitrage effectué doit être toujours possible et efficace. Un marché efficient suppose que toute arrivée nouvelle d'informations à l'origine d'une déviation des cours, doit être immédiatement arbitrée. Autrement dit, ce sont les traders qui rendent le marché efficient en exploitant des avantages potentiels de gains éphémères supérieurs à la performance du marché. Le prix d'équilibre du marché suit alors une marche aléatoire et les rentabilités sont distribuées normalement. Empiriquement, l'utilisation de l'historique des rentabilités est fréquente pour tenter de déterminer les rentabilités futures. Les anomalies de mémoire permettent alors d'obtenir de manière significative des rentabilités dites " anormales " et on pourrait supposer l'existence de capacités prédictives qui viendraient contredire l'efficacité des arbitrages. Ces anomalies nous conduisent à nous interroger sur la possibilité de disposer d'informations dans la suite des rentabilités passées de manière à obtenir une prévision des rentabilités futures meilleure que la moyenne historique des rentabilités. La fonction d'autocorrélation des accroissements des cours permet de mettre en lumière l'existence de cycles dans les séries de rentabilités. Ainsi, il peut être possible de mettre en évidence l'existence de dépendance de long terme entre les variations des cours si la fonction d'autocorrélation décroît lentement au fur et à mesure que le pas de temps augmente. Dans l'analyse des faits stylisés des séries financières, nous avons constaté que la FAC se présente comme une fonction lentement décroissante des retards, ce qui peut être symptomatique de l'existence d'un processus à mémoire longue. Or, la prise en compte des non-linéarités en moyenne

et en variance suppose l'absence d'autocorrélation à long terme<sup>24</sup>. Guégan(2007) a montré que la prise en compte de la volatilité, qui est une caractéristique de court terme, ne doit pas être dissociée de l'existence éventuelle du comportement de long terme. Les structures à mémoire longue peuvent être appréhendées par une analyse économétrique de la dépendance notamment par l'utilisation de tests de détection ou par le concept de " mean-reversion " (Retour à la moyenne).

Nous présentons dans un premier point une approche de la non-linéarité en variance par les modèles GARCH et dans un deuxième point les structures à mémoire longue.

### **1.2.3.1.1 La non-linéarité en variance : une approche par les modèles de type GARCH**

Mandelbrot(1963) et Fama(1965) ont montré l'inadéquation de la loi normale aux séries financières et recommandent le recours aux lois dites stables. La difficulté d'application de ces lois ne permet pas une utilisation générale. Engle(1982) introduit les processus ARCH qui permettent de profiter des avantages des lois stables sans en subir les difficultés : ces modèles intègrent des structures avec une kurtosis plus élevée que la loi normale, ils permettent de prendre en compte les clusters de volatilité mis en évidence par Mandelbrot(1963) mais aussi le lien entre la volatilité et les heures d'ouverture des marchés détecté par French et Roll(1986). La classe des processus ARCH développé par Engle(1982) vise à pallier les insuffisances des modèles ARMA qui ne permettent pas de prendre en compte la volatilité de la variance conditionnelle. Engle(1982) formalise le modèle ARCH(q) définit par :

$$\epsilon_t = \mu_t h_t \tag{3}$$

Où  $\mu_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\mu^2$  avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2}$$

q est l'ordre du processus ARCH.

Suite aux travaux d'Engle(1982), une vaste littérature autour de ces modèles a vu le jour. C'est ainsi que Bollerslev(1986) propose une généralisation des processus ARCH(q). En

---

24. Plus précisément, lorsqu'on modélise une série temporelle par un modèle de type GARCH et une structure linéaire en moyenne, on suppose implicitement qu'il n'existe pas de structures à mémoire longue.

pratique, la modélisation par un processus ARCH conduit à retenir un grand nombre de retards pour tenir compte de la volatilité persistante. Un nombre important de retards peut conduire à une violation de la contrainte de non-négativité de la variance. Les modèles GARCH(p,q) permettent de recourir à une structure de retards plus souple (Bollerslev et al.(1991)). Le modèle GARCH (p,q) est défini par :

$$\epsilon_t = \mu_t h_t \tag{4}$$

Où  $\mu_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\mu^2$  avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}}$$

avec  $\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q; \beta_j \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, p$ . Le modèle GARCH (p,q) intègre les erreurs les plus récentes de telle sorte à constituer un mécanisme adaptatif. L'algorithme de Berndt, Hall, Hall et Hausman(1974) basé sur le maximum de vraisemblance permet d'estimer le modèle GARCH. Weiss(1986) est le premier à considérer l'effet de la prise en compte des variables explicatives dans la variance conditionnelle. Ainsi, au lieu de considérer directement un modèle GARCH sur les données initiales, il recommande de l'appliquer aux innovations, ce qui permet de modéliser la moyenne par un processus comme les modèles ARMA ou un modèle de régression linéaire et la variance par un processus ARCH. Le modèle GARCH, en tant que généralisation du modèle ARCH a été appliqué entre autres par Bollerslev et Engle(1986) pour modéliser la prime de risque sur le marché des changes. Mais la mise en évidence par Black(1986) d'une corrélation négative entre le taux de rentabilité et les changements de volatilité n'est pas pris en compte pas les modèles GARCH. Les innovations passées sont élevées au carré, ce qui ne permet pas de tenir compte du signe de ces innovations. Les modèles GARCH sont soumis à des contraintes de positivité des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Selon Bresson et Pirotte(1995)<sup>25</sup>, les modèles ARCH se décomposent en deux sous-groupes. Le premier concerne les modèles ARCH linéaires, caractérisés par une équation quadratique de la variance conditionnelle des perturbations : ce sont les modèles ARCH(q), GARCH(p,q) et IGARCH(p,q). Les modèles ARCH non linéaires reposent sur une équation de la variance conditionnelle asymétrique et quadratique. Dans cette sous-classe de modèles, il y a les processus EGARCH (p,q), TARCH(q) et TGARCH(p,q). Ces différentes classes de modèles sont présentées dans l'annexe A.7.

---

<sup>25</sup>. Extrait de Hurlin(2010).

### 1.2.3.1.2 Hétéroscédasticité et mémoire longue

L'intérêt porté au phénomène de persistance en économie est relativement récent puisqu'il date des années 1980 et les définitions données pour caractériser ce phénomène sont diverses (Baillie (1996)). Les processus à mémoire longue ont été développés pour la première fois par Hurst (1951) lors de son étude sur les crues du Nil, caractérisés par un effet Joseph. Issu d'une allégorie biblique, l'effet Joseph traduit la dépendance de long terme dans les séries temporelles et conduit Hurst(1951) à déterminer une mesure de persistance basée sur les fluctuations maximales et minimales d'une série temporelle autour de sa moyenne. Les différentes définitions du concept de longue mémoire s'inscrivent dans le domaine temporel mais aussi dans le domaine spectral. Ainsi, une des premières définitions de la mémoire longue est une approche empirique dans le domaine du temps puisqu'elle consiste à repérer la persistance dans les autocorrélations. En effet, les processus à mémoire courte tels que les processus ARMA sont caractérisés par une fonction d'autocorrélation qui décroît à un taux exponentiel, symptomatique d'un marché efficient. À contrario, les processus à mémoire longue possèdent une fonction d'autocorrélation lentement décroissante, reflet d'un marché imparfait. Cette approche par les autocorrélations avait déjà été mise en évidence notamment par Hurst(1951,1957), Mandelbrot et Wallis (1968).

D'après la définition donnée par McLeod et Hipel(1978), une série  $X_t$  stationnaire dont le coefficient d'autocorrélation du retard  $j$  est noté  $\rho_j$  possède une mémoire longue si les autocorrélations ne sont pas absolument sommables. Formellement, la quantité  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n |\rho_j|$  est infinie.

Dans le domaine des fréquences, la série  $X_t$  présente un comportement de mémoire longue si sa densité spectrale  $f(w)$  est non bornée aux basses fréquences.

Soit un processus stationnaire  $X_t$  dont la fonction d'autocovariance est donnée par  $\gamma_X(\cdot)$ . Notons  $f_X(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} \gamma_X(\tau)$ ;  $\forall \lambda \in [-\pi, \pi]$ , la fonction de densité spectrale associée à la série  $X_t$ . Si la somme  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(\tau)$  n'est pas finie alors la densité spectrale devient singulière en particulier en 0 et par conséquent  $X_t$  est caractérisée par une dépendance de long terme (Guégan(2007)).

Par ailleurs, il est possible de définir le comportement de persistance à partir de critères particuliers comme par exemple, la définition de la mémoire longue à partir de la variance d'Allan (Guégan 2007). Il est à noter le caractère asymptotique de ces définitions qui traduisent le fait qu'une autocorrélation prise seule peut être faible mais la somme des



autocorrélations est très élevée. La pluralité de ces définitions ne signifie en aucun cas leur équivalence. En effet, les données présentant un comportement de mémoire longue au sens de la FAC ne présentent pas forcément un comportement de persistance au sens de la densité spectrale et réciproquement. Par ailleurs, il est possible d'observer pour une série temporelle un phénomène de persistance à la fois dans le domaine spectral et dans le domaine temporel. La littérature économétrique s'est intéressée aux modèles permettant de rendre compte de la dépendance de long terme et aux tests de détection. Nous en présentons une revue succincte dans l'annexe A.6.4.

---

La non-linéarité peut revêtir différentes formes qu'il est difficile d'identifier. L'hypothèse de stochasticité du processus sous-jacent permet de restreindre le champ de la non-linéarité. Les faits stylisés ont révélé deux anomalies majeures, symptomatiques de la non-linéarité des séries financières :

- La présence de structures à mémoire longue ;
- L'excès de volatilité et la leptokurticité des séries financières.

Si la deuxième anomalie est surtout liée à l'équation de la variance, les structures à mémoire longue peuvent exister non seulement dans la moyenne mais aussi dans la variance. Nous avons montré, dans les sections précédentes, les différentes structures stochastiques de la non-linéarité. Il est à noter que les structures à mémoire longue et les effets de type GARCH sont inhérents à la nature même de la série temporelle et qu'en ce sens, la modélisation retenue s'efforcera de rendre compte de ces structures.

### 1.2.3.2 LES MODÈLES À CHANGEMENTS DE RÉGIMES<sup>26</sup>

Les modèles avec changements structurels remettent en cause l'hypothèse de stabilité du modèle linéaire et permettent d'envisager un processus générateur de données non linéaire. S'il est difficile de donner une définition du changement structurel, on peut néanmoins en donner une description statistique. Un changement structurel se traduit " par une modification des valeurs prises par tout ou partie du modèle linéaire " (Uctum(2007)). L'idée sous-jacente aux modèles à changements de régimes suppose qu'il existe plusieurs

---

26. Cette revue de littérature s'inspire largement de Uctum (2007) : Économétrie des modèles à changement de régimes : un essai de synthèse, *L'Actualité Economique*.

états du monde et les changements structurels d'un état à un autre se produisent lorsque l'économie bascule d'un état à un autre état. Les modèles propres à chaque état sont supposés linéaires mais le modèle général qui intègre les différents régimes est non linéaire car les dates de ruptures, inconnues, sont estimées de façon endogène. Le caractère non linéaire est plus marqué lorsqu'on considère plusieurs régimes. Uctum(2007) définit le modèle à changements de régimes comme étant un modèle qui décrit " l'ensemble des états du monde, formellement distincts les uns des autres mais candidats à chaque instant pour expliquer le phénomène économique étudié". Par ailleurs ces modèles permettent de tenir compte de la nature asymétrique de certaines variables que les modèles linéaires ne peuvent pas prendre en compte : Sichel(1993) montre que l'asymétrie des cycles d'affaires est caractérisée par une asymétrie d'amplitude dès lors que les creux des cycles sont plus marqués que les pics. Une asymétrie de pente peut être mise en évidence lorsque les contractions des cycles réels sont plus abruptes et plus rapides que les expansions. Ces différentes asymétries peuvent être parfaitement intégrées par un modèle avec changements de régimes markoviens caractérisé par des probabilités de transition asymétriques. Il existe deux grandes catégories de modèles :

1. Les modèles qui supposent que la règle qui gouverne la sélection du régime à chaque instant est connue
2. Les modèles qui supposent que la règle qui gouverne la sélection du régime à chaque instant est inconnue

Dans la première catégorie, on distingue les modèles qui supposent que cette règle est déterministe (TAR, STAR) des modèles qui supposent que cette règle est stochastique. Dans la seconde catégorie, la règle de sélection est remplacée par des probabilités constantes associées à chaque régime. Ces probabilités peuvent être non conditionnelles à l'information passée comme dans les modèles à mélange de distributions ou conditionnelles aux régimes précédents comme dans les modèles à changements markoviens. Nous présentons dans l'annexe A.8. les deux catégories de modèles. La capacité des modèles de type GARCH à rendre compte de la volatilité inhérente aux séries temporelles financières a fait l'objet d'une importante littérature qui a conduit au développement d'une multitude de modèles permettant de décrire les différents comportements de volatilité qui peuvent exister. Parallèlement à ces avancées, d'aucuns se sont intéressés à la prise en compte et à la description de séries temporelles caractérisées par deux ou plusieurs comportements. Nous avons pré-

senté dans l'annexe A.8. les différentes classifications de ces modélisations. Hamilton et Susmel(1994) et Cai(1994) sont les premiers à envisager un rapprochement des modèles de type GARCH et des modèles Markov switching. Ainsi, ces auteurs proposent les premiers modèles ARCH avec changements de régime markovien, capables de rendre compte des changements de volatilité d'une série temporelle. Ces modèles se sont cantonnés à une spécification ARCH et il faut attendre l'article de Gray(1996) pour voir le premier modèle qui combine un processus GARCH et les changements de régimes markoviens. Les difficultés de prévisions par ce modèle sont prises en compte par la modélisation proposée par Klaassen(2002).

Nous proposons une présentation des modèles ARCH avec changements de régime markoviens avant d'exposer les modèles analogues, caractérisés par une spécification GARCH.

### 1.2.3.2.1 Les modèles ARCH avec changements de régime markoviens

Cai(1994) et Hamilton et Susmel(1994) sont les premiers à transposer le modèle à changements de régimes de Hamilton (1988, 1989,1990) à une spécification ARCH. Le recours à un processus de type ARCH est motivé par la volonté d'éviter que la variance dépende de tout l'échantillon d'analyse. Hamilton et Susmel(1994) décrivent le modèle ARCH le plus approprié pour prendre en compte les faits stylisés des séries financières. Ils proposent de retenir l'hypothèse d'une distribution de Student pour les erreurs. Par ailleurs l'effet de levier des séries financières est considéré par les auteurs qui proposent de retenir un modèle GJR-ARCH<sup>27</sup>. Le modèle AR(1)-GJR-ARCH avec distribution de Student appliqué à des données hebdomadaires du NYSE fournit des prévisions médiocres même si ce modèle supprime des spécifications identiques sous loi normale ou Generalized Error Distribution (GED). Une des explications des faibles performances de ce modèle est la non prise en compte des ruptures structurelles. Soit  $Y_t$  le vecteur des observations et  $S_t$  une variable aléatoire inobservable qui prend ses valeurs dans  $1, 2, \dots, K$ .  $S_t$  peut être décrit par une chaîne de Markov :

$$Prob[S_t = j | S_{t-1} = i, S_{t-2} = k, \dots, Y_{t-1}, Y_{t-2}] = Prob[S_t = j | S_{t-1} = i] = p_{ij} \quad (5)$$

---

27. Les modèles GJR, en référence aux auteurs Glosten, Jagannathan et Runkle(1993), sont présentés dans l'annexe A.7.2.

Pour  $i, j = 1, 2, \dots, K$ . On obtient alors la matrice des probabilités de transition :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{K1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{K2} \\ & & \dots & \\ p_{1K} & p_{2K} & \dots & p_{KK} \end{bmatrix}$$

Où la somme de chaque colonne est égale à 1.  $S_t$  désigne le régime dans lequel est le processus à la date  $t$ , il influence les paramètres de la distribution conditionnelle de  $Y_t$ . Si la densité de  $Y_t$  conditionnellement à ses valeurs passées et aux  $q$  valeurs passées et courantes de  $S_t$  a une forme connue :

$$F(Y_t | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0) \quad (6)$$

Alors on peut évaluer la fonction de vraisemblance pour les données observées et calculer l'inférence pour les régimes inobservables. Hamilton(1989) suggère de retenir :

$$Y_t = \mu_{S_t} + \tilde{Y}_t \quad (7)$$

$$\text{Où } \mu_{S_t} = \begin{cases} \mu_1 \text{ quand } S_t = 1 \\ \mu_2 \text{ quand } S_t = 2 \end{cases} \quad (8)$$

Et  $\tilde{Y}_t$  suit un processus autorégressif à  $q$  retards :

$$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \dots + \phi_q \tilde{Y}_{t-q} + \epsilon_t \quad (9)$$

Une extension naturelle de cette approche suppose que le résidu  $\mu_t$  de :

$$Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + \mu_t \quad (10)$$

est défini par :

$$\mu_t = \sqrt{G_{S_t}} \times \tilde{\mu}_t \quad (11)$$

Où  $\tilde{\mu}_t$  suit un processus GJR-ARCH( $q$ ) :

$$\tilde{\mu}_t = h_t * v_t \quad (12)$$

Où  $v_t \sim iid(0, 1)$  et  $h_t$  :

$$h_t^2 = a_0 + a_1 \tilde{\mu}_{t-1}^2 + \dots + a_q \tilde{\mu}_{t-q}^2 + \zeta * d_{t-1} * \tilde{\mu}_{t-1}^2 \quad (13)$$

Où :

$$d_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\mu}_{t-1} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{\mu}_{t-1} > 0 \end{cases}$$

Le processus GJR-ARCH(q) est multiplié par la constante  $\sqrt{G_1}$  lorsque le processus est dans le régime 1 et par  $\sqrt{G_2}$  lorsque le processus est dans le régime 2.  $G_1$  est normalisé à 1 avec  $G_j \geq 1$  pour  $j = 2, 3, \dots, K$ . Si  $\zeta = 0$ , il n'y a pas d'effet levier et le modèle obtenu est un processus ARCH(q) avec K changements de régimes markoviens (SWARCH (K,q)). Il est alors possible de déterminer la log-vraisemblance de l'échantillon :

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \ln f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-3}) \quad (14)$$

Lorsque l'inférence est basée sur l'information basée en t, on obtient les probabilités filtrées :

$$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-3}) \quad (15)$$

C'est la probabilité conditionnelle aux valeurs de Y que l'état en t est égal à  $S_t$ , en  $t-1$ ,  $S_{t-1}, \dots$ . Il y a ainsi  $K^{q+1}$  configurations possibles dont la somme est égale à 1. On peut aussi utiliser tout l'échantillon pour construire les probabilités lissées :

$$p(S_t | Y_T, Y_{T-1}, \dots, Y_{-3}) \quad (16)$$

Il y a K probabilités lissées dont la somme est égale à 1. L'évaluation de la fonction de vraisemblance et les prévisions sont donnés dans l'annexe A.11.

---

Les faiblesses dues à l'utilisation d'un processus ARCH sont mises en évidence par Bollerslev(1986). Elles sont surtout liées au nombre de retards qui croit rapidement dans une spécification ARCH. Le recours à des modèles GARCH permet de pallier cette limite qui se retrouve dans le modèle de Hamilton et Susmel(1994) et de Cai(1994).

#### 1.2.3.2.1.1 Les modèles MRS-GARCH

Le premier modèle Markov Regime Switching GARCH (MRS GARCH) est proposé par Gray(1996) pour la modélisation de la distribution des taux d'intérêt américains. Il est défini par :

$$\Delta r_t = \mu[\theta_\mu, \phi_{t-1}] + \sqrt{h[\theta_h(S_t), \phi_{t-1}]} z_t \quad (17)$$

Où  $S_t$  est le régime inconnu au temps  $t$ ,  $\phi_{t-1}$  est l'ensemble d'information qui ne contient aucun élément  $S_t$ . Ce dernier paramètre peut prendre plusieurs valeurs en fonction du nombre de régimes supposé. On peut alors réécrire ce modèle :

$$\Delta r_t = \mu_{it} + \sqrt{h_{it}}z_t \quad (18)$$

Où  $S_t = i$ . Dans ce modèle, les moyennes et variances conditionnelles sont différentes d'un régime à l'autre. Il est possible d'obtenir des formes fonctionnelles différentes pour chaque régime. Ainsi, si on retient une distribution normale pour chaque régime, alors la distribution de  $\Delta r_t$  est un mélange des différentes distributions normales retenues. Le problème soulevé par Cai(1994) et Hamilton et Susmel(1994) concernant l'impossibilité d'estimer un modèle MRS-GARCH à cause de la dépendance de la variance conditionnelle sur l'historique passé est résolu par Gray(1996). Ce dernier propose de retenir la variance :

$$h_t = E[\Delta r_t^2 | \phi_{t-1}] - E[\Delta r_t | \phi_{t-1}]^2 = p_{1t}(\mu_{1t}^2 + h_{1t}) + (1 - p_{1t})(\mu_{2t}^2 + h_{2t}) + [p_{1t}\mu_{1t} + (1 - p_{1t})\mu_{2t}]^2 \quad (19)$$

L'équation 19 montre que  $h_t$  ne dépend plus de tout l'historique et elle peut être utilisée dans une spécification GARCH :

$$h_{it} = w_i + a_i \epsilon_{t-1}^2 + b_i h_{t-1} \quad (20)$$

La principale faiblesse du modèle de Gray(1996) porte sur la difficulté d'établir des prévisions sur plusieurs pas de temps.

Klaassen(2002) suggère alors d'utiliser l'espérance conditionnelle de la variance conditionnelle avec un ensemble d'informations plus large que celui de Gray(1996) :

$$h_{i,t} = w_i + a_i \epsilon_{t-1}^2 + \beta_i E_{t-1}\{h_{i,t-1} | S_t\} \quad (21)$$

Avec :

$$E_{t-1}\{h_{i,t-1} | S_t\} = \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ji,t-1} [\mu_{j,t-1}^2 + h_{j,t-1}] - \left[ \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ji,t-1} \mu_{j,t-1} \right]^2 \quad (22)$$

$$\tilde{p}_{ji,t} = \text{prob}[S_t = j | S_{t+1} = i, \phi_{t-1}] = \frac{p_{ji} \text{Prob}(S_t = j | \phi_{t-1})}{\text{Prob}(S_{t+1} = i | \phi_{t-1})} = \frac{p_{ji} p_{jt}}{p_{i,t+1}} \quad (23)$$

Cette solution permet plus de flexibilité dans la prise en compte de la persistance des chocs de la volatilité et rend plus aisée sa prévision sur plusieurs pas de temps. Les modèles que nous venons de présenter possèdent divers avantages :

- une grande flexibilité : nous avons donné des spécifications générales mais il est laissé à la discrétion de l'utilisateur le choix du nombre de régimes, le choix d'un changement de régime uniquement sur la variance ou sur la moyenne et la variance.
- une bonne capacité prédictive hors échantillon. Marucci(2005) note l'intérêt de ces modèles pour la prévision qui surperforment les modèles GARCH classique pour des horizons relativement courts (une semaine).

Ils souffrent aussi d'un certain nombre de limites, notamment pour la prévision hors échantillon pour des horizons plus longs et surtout le choix d'un processus générateur linéaire pour l'équation de la moyenne. Ces modèles supposent que la dynamique décrite par l'équation de la moyenne est forcément linéaire et qu'elle est bien représentée par une constante.

---

Cette section met en évidence les limites des approches linéaires pour la modélisation du risque de marché. Elle développe l'approche stochastique de la non-linéarité. L'intérêt portée par la littérature économétrique à ces approches conduit à de nombreuses applications empiriques, essentiellement axées sur le risque de marché. Ce dernier peut être appréhendé au travers de l'instrument VaR et des ruptures de corrélations.

### 1.3 RISQUE DE MARCHÉ : UNE APPROCHE À TRAVERS LA VAR ET LES RUPTURES DE CORRÉLATIONS

La conception du risque de marché dans le cadre réglementaire s'inscrit dans une approche quantifiable à travers l'instrument VaR et dans une approche analytique au travers des risques induits par une dépréciation des actifs. De manière similaire, les nombreux travaux économétriques qui se sont développés ces dernières années s'axent autour de deux grands thèmes à savoir la mesure et la validation des modèles utilisés pour quantifier le risque, et l'analyse des impacts du risque de marché d'un actif ou d'un indice sur un autre actif.

La VaR, en tant que mesure des risques extrêmes, demeure un instrument de mesure du risque de marché incontournable en dépit des nombreuses limites et des instruments alternatifs proposés. La popularité de cette mesure s'est confirmée avec les révisions de Bâle II, qui reconnaissent les vertus de cet instrument en proposant une version stressée de la VaR. Les avancées théoriques concernent principalement les tests de validation de cette mesure

qui ont connu un engouement sans précédent. La classification que nous proposons par génération de tests témoigne d'un développement conséquent des tests de validation avec un intérêt constant de l'amélioration des critères discriminants des modèles d'estimation. Sur le plan analytique, le risque de marché est étudié au travers des ruptures de corrélations et des risques qui lui sont liés, notamment le risque de contagion. La littérature économétrique, relativement récente, qui porte sur ces questions est à confronter aux avancées réglementaires : le risque de contagion est une problématique récurrente depuis de nombreuses années et les difficultés de détection et de modélisation de ce risque sont liées au caractère non-linéaire des séries temporelles financières qui invalide l'utilisation de mesures basées sur le coefficient de corrélation linéaire. Sur le plan réglementaire, l'interconnexion, de plus en plus importante des places financières conduit le comité à développer des recommandations plus strictes sur le risque de contagion d'autant plus que la crise des subprimes a révélé l'existence d'un risque de transmission.

Ces deux visions du risque de marché permettent de concevoir ce risque dans un cadre individualisé, propre à un actif, à un portefeuille, ou à un marché. La question de la modélisation et de la prévision de ce risque prend toute son importance par l'utilisation de la VaR. Il est tout aussi possible d'entrevoir ce risque sur un plan analytique : les dynamiques financières entre deux indices peuvent être liées par une relation d'interdépendance ou par une relation de contagion qui supposerait une surréaction des marchés contaminés lors d'un choc.

Nous proposons, dans un premier point, une présentation de la VaR et de certains tests de validation de cette mesure. Dans un deuxième point, nous étudions le risque de marché à travers les ruptures de corrélations.

### 1.3.1 LA VAR COMME MESURE DES RISQUES EXTRÊMES : PRÉSENTATION ET TESTS DE VALIDATION

*" Extreme risks are the risks of very large losses per dollar invested. As losses associated to extreme risks occurs infrequently, investors tend to become less alert to these risks over time"*

(Gouriéroux et Jasiak(2010))



La définition que font ces auteurs des risques extrêmes suggère une faible occurrence statistique de ces risques. Or les crises financières qui se succèdent montrent que la probabilité d'une perte extrême est plus élevée. Aussi, les autorités du Contrôle Prudentiel ont commencé à s'intéresser au problème des pertes extrêmes et le CBSB adopte en 1995 une mesure de risques extrêmes : la Value-at-Risk(VaR).

L'adoption de cette mesure se fait en plusieurs étapes (Gouriéroux et Jasiak(2010)) : dans un premier temps, la VaR vise à estimer le risque de marché des portefeuilles d'actifs liquides basiques (indices de marchés, bons du Trésor...). Ensuite, elle est proposée pour les portefeuilles qui contiennent à la fois des actifs liquides basiques mais aussi des actifs dérivés liquides (options sur taux d'intérêt...). Dans un troisième temps, la VaR est déclinée pour le risque de défaut et conduit donc à la mise en place d'une CreditVaR. Enfin, le CBSB va développer des procédures pour juger de la fiabilité de cette mesure : ce sont les techniques du backtesting. Une autre étape a été franchie depuis la crise des subprimes.

Les analyses de la crise des subprimes ont montré que les pertes encourues par les banques étaient supérieures aux exigences requises par le pilier 1. Les révisions aux accords Bâle II pour le risque de marché introduisent une exigence supplémentaire en capital par le calcul d'une VaR stressée. Elle est déterminée à partir d'un échantillon de 12 mois de crise. La VaR stressée ne remplace pas la VaR classique, c'est un complément. Cette proposition vise principalement à briser la procyclicité des mesures de risques. Elle reste soumise, tout comme la VaR classique, aux tests de validation qui permettent de vérifier la pertinence du modèle d'estimation retenu.

Nous donnons, dans un premier point, une description de la VaR en détaillant l'approche paramétrique. Dans un deuxième point, nous présentons les tests de validation de cette mesure.

### 1.3.1.1 LA VAR PARAMÉTRIQUE

La Value-at-Risk<sup>28</sup> est née dans le domaine des assurances pour prévenir les ruines puis elle a été importée dans les salles de marchés notamment par la banque Bankers Trust. Elle

---

28. Ce terme est utilisé pour la première fois par le Groupe des 30 en 1993 dans *Derivatives : Practices and Principles*. Avant, les termes de Dollar-at-Risk, Income-at-Risk, Capital-at-Risk, entre autres, étaient utilisés.

est recommandée par le Groupe des 30 dès 1993 mais doit sa popularisation à la banque JP Morgan qui dès l'automne 1994 propose une méthodologie de quantification de cette mesure par son système Riskmetrics. La VaR devient ainsi en moins de 10 ans une mesure de référence du risque sur les marchés financiers.

Cet instrument peut être défini de plusieurs façons. La VaR peut se définir comme la perte maximale potentielle qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité et un horizon temporel donnés (Jorion(2007)).

Par exemple, si une banque annonce une VaR quotidienne sur un portefeuille de 100 millions de \$ pour un niveau de confiance de 99%, cela signifie qu'il y a seulement une chance sur 100, sous des conditions normales de marché, que la perte associée à la détention de ce portefeuille sur une journée excède 100 millions de \$.

La VaR peut aussi se traduire en termes statistiques : elle est définie pour un taux de couverture de  $\alpha\%$ , correspondant au quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution des pertes et profits associés à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs sur une période donnée.

Le calcul de la VaR dépend de 3 paramètres :

- La distribution des pertes et profits du portefeuille ou de l'actif (P&L). Le recours à une distribution historique nécessite un équilibre quant à la taille de l'échantillon à retenir : un échantillon trop petit implique des probabilités de pertes élevées, imprécises alors qu'un échantillon trop grand affecterait la cohérence temporelle des résultats.
- le niveau de confiance (ou le niveau de couverture= 1– niveau de confiance.) Il s'agit de la probabilité que les pertes éventuelles du portefeuille ou de l'actif ne dépassent pas la VaR. Le recours à plusieurs VaR pour plusieurs niveaux de confiance augmente le niveau d'informations.
- L'horizon temporel choisi. Ce choix est important car plus l'horizon est long, plus les pertes peuvent être importantes. Si la distribution des rentabilités est indépendamment et identiquement distribuée selon la loi normale, il suffit de multiplier la VaR quotidienne par la racine carrée de t pour obtenir la VaR sur t jours<sup>29</sup>.

---

29. Uniquement pour des actifs linéaires même si cette méthode a été autorisée durant un certain temps pour tous les actifs.

C'est un instrument indispensable pour l'analyse et la gestion du risque mais aussi un outil de régulation à la disposition des instances règlementaires. Son utilisation dans le domaine bancaire peut être multiple : elle est indispensable pour le calcul des fonds propres et permet dans le cadre de la gestion opérationnelle, via un usage défensif, le calcul des limites des risques en matière de trading<sup>30</sup> et la comparaison des risques engrangés sur différents marchés. Initialement, la VaR est utilisée de manière passive en tant que reporting d'informations. Enfin une utilisation active de la VaR permet l'allocation du capital ou même l'optimisation de portefeuille avec des critères de type moyenne-VaR. Les instances de réglementation introduisent un cadre particulier d'utilisation de la VaR pour le calcul des fonds propres. Elles imposent aux banques le recours à des simulations de crise non seulement pour que la Commission bancaire puisse valider le modèle interne mais aussi dans le cadre de la gestion du risque en tenant compte des pertes exceptionnelles liées à des événements de faible probabilité. Il revient aussi aux différents établissements d'évaluer leurs modèles par des tests de backtesting.

Bâle II distingue le modèle standard et les modèles internes et recommande l'utilisation de ces derniers fondés sur la VaR aux banques utilisant des instruments financiers sophistiqués. Ces recommandations s'accompagnent de mesures d'encadrement :

- L'efficacité des modèles internes doit être vérifiée par des backtests réguliers et des stress-tests.
- Les procédures de stress tests font l'objet d'une vérification périodique qui doit conduire à des corrections dès que c'est nécessaire.
- Il revient aux banques de vérifier leur système de mesures de risques par des audits internes.

Si le cadre réglementaire permet aux banques une certaine flexibilité dans la conception des modèles internes, elles restent soumises à des conditions minimales :

- Le calcul d'une VaR 10 jours à 99%
- Le recours à un échantillon d'au moins une année pour le calcul de la VaR historique avec une réactualisation minimale de 3 mois.
- Le calcul de la VaR peut être fondé sur des simulations.

---

30. L'utilisation de la VaR pour cet objectif est fortement déconseillé dans la mesure où elle peut mener à des pertes très importantes au-delà du seuil de 99%.

- L'utilisation de modèles spécifiques pour les options.
- Le calcul des fonds est déterminé par la valeur la plus élevée entre la VaR de la veille et la VaR moyenne calculée sur les 60 derniers jours, multiplié par un facteur d'échelle (entre 3 et 4) qui est une appréciation de la qualité du système de mesures de risques.

Les instances de réglementation imposent aux banques qui ont recours aux méthodes internes un programme de suivi en stress-tests. Ces derniers doivent répondre à des critères quantitatifs et qualitatifs, ils doivent reposer sur des scénarios spécifiques à la banque au-delà de ceux exigés par le régulateur. Il revient aux banques le suivi des pertes extrêmes et le calcul du nombre de jours où les pertes extrêmes sont couvertes par l'estimation de la VaR. Pour les risques au-delà du seuil de confiance, il est du ressort des établissements bancaires de les prendre en compte dans la détermination du capital réglementaire notamment par les stress-tests.

Dans le cadre d'un portefeuille, la modélisation du risque nécessite la prise en compte des interactions entre les actifs et par conséquent, de la dépendance non linéaire (méthode des copules, dépendance de queue...). Par ailleurs, le recours à une distribution conditionnelle des pertes et profits permettrait le calcul d'une VaR conditionnelle dans laquelle le calcul du risque dépendrait de la dernière observation des rendements. Ainsi, il suffit de déterminer le modèle qui décrit le mieux la dynamique des rendements, ce qui permet de faire dépendre le calcul de la VaR de son environnement.

Il existe différentes méthodes d'estimation de la VaR que l'on peut regrouper sous différentes approches (Engle et Manganelli(2001)) :

- Approches non-paramétriques : dans cette classe, on n'impose à priori aucune distribution paramétrique des pertes et profits. La méthode de simulation historique en est un exemple [▷ ANNEXE A.12.].
- Approches semi-paramétriques : ces méthodes sont à mi-chemin entre les approches paramétriques et non paramétriques. C'est le cas de la méthode CAViAR[▷ ANNEXE A.12.].
- Approches paramétriques : les méthodes qui s'inscrivent dans cette approche supposent que la distribution des rendements suit une distribution paramétrique.

Les approches paramétriques présentent un intérêt particulier : elles tiennent compte des structures qui peuvent exister dans les séries temporelles financières et permettent de travailler avec des modèles intégrant les avancées les plus récentes de l'économétrie financière. L'approche paramétrique standard est la méthode de la VaR normale. Cette méthode repose sur l'hypothèse de normalité de la distribution des P&L. Elle est particulièrement adaptée à des instruments dits linéaires. Damodaran(2007) propose, en cas d'un nombre trop important d'actifs dans le portefeuille, de procéder à un mapping qui permettrait de retenir des facteurs généraux du marché comme facteurs de risques des différents actifs. Comme on suppose que la distribution des P&L suit une loi normale d'espérance  $\mu_t$  et de variance  $\sigma_t^2$  au temps t, on peut écrire :

$$R_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad (24)$$

Par définition de la VaR :

$$Prob\left[\frac{R_t - \mu_t}{\sigma_t} < \frac{-VaR_t(\alpha) - \mu_t}{\sigma_t}\right] = \alpha \quad (25)$$

Avec  $\frac{R_t - \mu_t}{\sigma_t} \sim N(0, 1)$ . Si on note  $\phi$  la fonction de répartition de la loi normale, on obtient la VaR associée à un taux de couverture  $\alpha$  :

$$VaR_t(\alpha) = -\mu_t - \sigma_t \phi^{-1}(\alpha) \quad (26)$$

Sous l'hypothèse de distribution normale de la distribution des P&L, la prévision de la VaR associée à un taux de couverture de  $\alpha\%$  est définie par :

$$VaR_{t+1|t}(\alpha) = -\mu - \sqrt{h_{t+1}} \phi^{-1}(\alpha) \quad (27)$$

Où  $h_{t+1}$  est la variance conditionnelle des rendements. Cette méthode, aussi appelée la méthode de la variance/covariance, est une fonction croissante de la volatilité du portefeuille. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité.

Dans toute distribution elliptique, la prévision de la variance permet de prévoir la VaR car cette dernière est une transformée linéaire de la variance. Il est possible de retenir d'autres lois de probabilités (Student,...) plus adaptées aux distributions de P&L. Le principal problème de l'approche paramétrique réside dans le postulat d'une distribution i.i.d. des rentabilités. L'approche paramétrique est très utilisée : par exemple, Tang et Shieh(2006) intègrent la dépendance de long terme dans l'estimation de la VaR de 3 indices boursiers-SP 500, Nasdaq 100, Dow-Jones. Ils proposent plusieurs modélisations : FIGARCH(1,d,1)

et HYGARCH(1,d,1) sous différentes lois : normale, student et student asymétrique. L'évaluation par le test de Kupiec des prévisions de la VaR par les différents modèles conclue sur la surperformance du modèle HYGARCH(1,d,1) sous la loi de student asymétrique. Giot et Laurent(2003) proposent une étude de la VaR pour des positions courtes et longues. Leurs résultats indiquent que les modèles avec des distributions symétriques sous-performent notamment à cause de l'asymétrie de la distribution des rentabilités. Les mêmes modèles avec des distributions asymétriques donnent de meilleurs résultats. Le modèle APARCH avec distribution de Student asymétrique est celui qui passe le mieux les tests de backtesting. Berkowitz et O'Brien(2002) ont montré dans une étude sur 6 banques américaines que les VaR estimées à 99% sont très conservatives et par conséquent consommatrices de fonds propres. Ils ont montré qu'un simple modèle GARCH était capable de reproduire les mêmes résultats avec des VaR moins conservatives. Si le montant élevé des VaR estimées peut constituer une sécurité pour les banques, il n'en demeure pas moins que ces montants représentent un coût important en termes de mobilisation de fonds propres. Aussi, Pérignon et Smith(2008) analysent les raisons de ces VaR conservatives. Une des raisons peut être due au fait que les banques n'intègrent pas complètement l'effet de diversification entre les différentes catégories de risques. Un nombre croissant de banques estiment des VaR pour chaque catégorie de risque alors qu'une diversification des risques permettrait de disposer d'une VaR agrégée assez importante avec un nombre relativement faible d'exceptions. Si les établissements financiers acceptent de diversifier alors les VaR individuelles ne jouent qu'un rôle informatif. Dans le cas contraire, les VaR individuelles biaisent l'évaluation des risques. Mais l'analyse de Pérignon et Smith(2010) montre que les banques américaines ne sous-estiment pas l'effet de diversification. Il est intégré dans les différentes estimations. Ce constat conclue à un biais dans l'évaluation des risques.

Au-delà de ces résultats liés au choix du modèle d'estimation, la mesure VaR souffre d'un certain nombre de limites détaillées dans l'annexe A.13.1., qui ont conduit au développement de mesures alternatives, présentées dans l'annexe A.13.2.

### 1.3.1.2 TESTS DE VALIDATION DES PRÉVISIONS DE LA VALUE-AT-RISK

*'VaR is only as good as its backtest. When someone shows me a VaR number, I don't ask how it is computed, I ask to see the backtest.'*

*Brown(2008)*

Les procédures qui permettent de tester la validité de la VaR sont regroupées sous le terme de backtesting. Jorion(2007) définit le backtesting comme " un ensemble de procédures statistiques dont le but est de vérifier que les pertes réelles observées ex-post sont en adéquation avec les pertes prévues. Cela implique de comparer systématiquement l'historique des prévisions de la VaR aux rendements observés du portefeuille". Si la validation des modèles d'estimation est au cœur des procédures de backtesting, la mise en œuvre de ces dernières est, selon Hurlin(2008), motivée par :

1. Les aspects réglementaires (Bâle II et III) : Les instances de réglementations imposent aux institutions financières la validation de leurs modèles par des procédures de backtesting. Elles définissent ces dernières dans les précisions de l'Amendement à l'Accord sur les fonds propres, intitulées '*Supervisory framework for the use of 'backtesting' in conjunction with the internal models approach to market risk requirements*'. Le comité expose la nécessité d'un contrôle de la précision et de la qualité des systèmes de mesures des risques et encourage l'utilisation de procédures de backtesting : '*Many banks that have adopted an internal model-based approach to market risk measurement routinely compare daily profits and losses with model-generated risk measures to gauge the quality and accuracy of their risk measurement systems. This process, known as "backtesting", has been found useful by many institutions as they have developed and introduced their risk measurement models*'.
2. L'intérêt pour les risk managers : Le contrôle interne des risques est essentiel pour les institutions financières. Aussi, les gestionnaires de risque effectuent un audit interne pour évaluer leurs modèles et les prévisions de la VaR qui en découlent.
3. La grande diversité des modèles de prévision de la VaR : La pluralité des approches permettant l'estimation de la VaR conclue que très rarement sur des résultats similaires. Beder(1995) propose une analyse de plusieurs estimations de la VaR sur 3 portefeuilles. Elle conclue : "*As highlighted by the three portfolios, the picture of expected capital at risk is wildly dependent upon the VaR methodology and the assumptions behind the specific calculation. Not only do the eight VaR results for the individual portfolios differ significantly, but the magnitude of the difference does not follow a clear pattern with increasing complexity of the portfolio.*" Aussi, les procédures de backtesting doivent permettre de comparer les différentes méthodes.

Les deux catégories d'évaluation des prévisions -méthodes d'évaluation des intervalles ou des densités de probabilité- ont été fortement développées même si les méthodes d'évaluation des intervalles de prévision connaissent un succès plus important. L'indisponibilité de la VaR ex-post contribue au développement des tests de type model-free, permettant ainsi de mener une évaluation des prévisions quelle que soit la méthode d'estimation. Il est à relever un engouement particulier des tests de backtesting qu'il est possible de classer en trois catégories :

- Les tests de première génération. Ce sont des tests qui ont été développés en même temps que l'approche traffic light du CBSB. Les tests de Kupiec(1995) et de Christoffersen(1998) sont inclus dans cette catégorie. La spécificité de ces tests, leur simplicité a fortement contribué à leur popularisation.
- Les tests de deuxième génération. Ils sont essentiellement constitués des tests de durée de Christoffersen et Pelletier(2004), les tests de Haas(2001 & 2005), de Berkowitz et al.(2005), d'Engle et Manganelli(2004), de Patton(2002) et de Lopez(1999). Ces tests visent à combler les lacunes des tests de Christoffersen(1998) et offrent de nouvelles approches du processus de violations. Les faiblesses des tests de deuxième génération sont mises en évidence par Hurlin et Tokpavi(2007) et par Escanciano et Olmo(2010).
- Les tests de troisième génération. Ils peuvent être subdivisés en trois classes :
  1. La première s'appuie sur la méthode des moments généralisés. Il en est ainsi des tests de Candelon et al.(2008) et de Dumitrescu et al.(2011).
  2. La seconde concerne les tests qui prennent en compte l'ampleur des pertes comme les tests de Wong(2010) et Hurlin et al.(2012).
  3. La dernière propose des modèles non linéaires pour le processus de violations(Dumitrescu et al.(2012), et Gaglianone et al.(2011)).

Les instances réglementaires recommandent l'utilisation de deux méthodes d'évaluation particulières (l'approche traffic light et les stress tests), définies dans le cadre des accords de Bâle. Ces deux approches sont détaillées dans l'annexe A.14. La construction des tests de backtesting s'inscrit dans un cadre statistique particulier. Elle fait appel à des concepts et des hypothèses de tests. Ces différentes hypothèses sont détaillées dans l'annexe A.14.1.

Nous présentons dans ce qui suit quelques tests de backtesting



### 1.3.1.2.1 Les différentes stratégies de tests

Le problème de la prévision, notamment son évaluation, est une question récurrente tant les enjeux qui lui sont liés sont importants. Il existe deux grandes méthodes d'évaluation des prévisions qui permettent donc de classer les tests de backtesting selon deux approches :

- Density Forecast Evaluation : Ce sont des tests qui vérifient de façon conjointe la propriété d'efficience conditionnelle pour l'ensemble des taux de couverture possibles et qui ne se limitent plus à l'étude d'une VaR pour un taux fixé arbitrairement. Cette classe est présentée dans l'annexe A.15.
- Event Probability Forecast Evaluation : c'est l'ensemble des tests établis pour un taux de couverture donné. Hurlin et Tokpavi(2006) résument cette approche en un test joint des hypothèses de couverture inconditionnelle et d'indépendance et notent que la principale difficulté réside dans la définition de l'hypothèse alternative : "*What matters then is to jointly test the unconditional coverage and independence hypotheses. In this context, the major difficulty consists in specifying the form of the dependence of  $I_t(\alpha)$  processes under the alternative hypothesis. Various tests of conditional efficiency are associated to the various suggested specifications.*" Il existe plusieurs classes de tests :

1. ceux fondés sur une modélisation du type chaîne de Markov à 2 états
2. ceux fondés sur l'étude de la distribution des durées entre deux violations
3. ceux qui testent directement l'hypothèse de différence de martingale
4. ceux fondés sur un modèle de régression des hits

D'autres tests n'appartenant à aucune de ces classes sont présentées. Il en est ainsi des tests de Dumitrescu et al.(2012), de Wong(2010), de Lopez(1999), de Colletaz et al.(2012), de Pérignon et Smith(2008).

L'approche Event Probability Forecast Evaluation repose sur des mesures standards d'évaluation des prévisions. Lopez(1999) explique que cette méthodologie vise à minimiser une fonction des pertes : "*the accuracy of VaR forecasts (and their underlying model) is gauged by how well they minimize this loss function*". L'idée est d'évaluer les intervalles de prévision. Clements et Taylor(2003) définissent ces intervalles : "*Interval forecasts, or prediction intervals, consist of an upper and a lower bound intended to cover a pre-selected*

*percentage of possible outcomes, and is such are a more formal method of conveying forecast uncertainty*". À partir de ces intervalles, il est alors possible de construire un processus de violations.

Il existe plusieurs tests qui s'inscrivent dans cette approche et qui peuvent être regroupés en 4 classes principales. Les tests de ratio de vraisemblance sont les premiers tests de backtesting. Face aux limites de ces derniers, les tests de durée tentent de modéliser la durée entre deux violations. Les tests de différence de martingale offrent une nouvelle approche du processus de violations et les tests basés sur la régression des hits permettent d'inclure un ensemble d'informations plus large pour tester la précision d'un modèle d'estimation. Ces différents tests tentent de concilier leur caractère model-free et la minimisation des erreurs de type 1 et de type 2. Pour cela, ces tests doivent être capables d'identifier un 'bon' intervalle de prévision. Clements et Taylor(2003) précisent le caractère d'un 'bon' intervalle : "*A 'good' interval forecast should be wider in volatile than in tranquil periods, so that occurrences of observations outside the intervals are evenly spread over the two periods, rather than clustered in volatile periods and largely absent from tranquil periods.*" Pour chacune des classes susmentionnées, nous présentons un test de backtesting<sup>31</sup>. Une description plus détaillée des différentes classes est fournie dans l'annexe A.16.

#### 1.3.1.2.1.1 *Les tests de durée*

Les tests de ratios de vraisemblance de Kupiec(1995) et de Christoffersen(1998) constituent avec l'approche traffic light la première génération des tests de backtesting. La simplicité de ces tests contribue à leur popularité si bien qu'ils constituent aujourd'hui les tests les plus utilisés en finance. Ils souffrent, chacun d'un certain nombre de limites :

- Le test de Kupiec(1995) porte uniquement sur l'hypothèse de couverture non conditionnelle. L'auteur développe dans le même article, le test TUFF(Time Until First Failure) pour tester l'hypothèse de couverture inconditionnelle. L'hypothèse d'indépendance des violations n'est pas testée.
- Les tests de Christoffersen(1998) constituent un apport par rapport au test de Kupiec(1995) en ce sens où ils visent à tester l'hypothèse d'indépendance et de couver-

---

31. Étant donné la simplicité et la popularité des tests de type LR, ceux-ci sont présentés dans l'annexe A.16.1.

ture (in)conditionnelle. Les faiblesses du test de Christoffersen(1998) conduisent au développement de tests alternatifs.

Berkowitz et O'Brien(2002) analysent les prévisions de la VaR de six grandes banques américaines. L'analyse des violations montre que les montants des dépassements sont non seulement très importants mais surtout regroupés dans le temps et entre les banques. Il semblerait que pour les six banques, les violations aient lieu durant la crise du fond LTCM. Ce constat montre la nécessité de disposer d'un modèle VaR dont les prévisions ne conduisent pas à des grappes de violations. L'objectif des tests dits d'indépendance visent à tester la capacité des modèles à fournir des VaR non autocorrélées.

Ces tests visent à modéliser la durée entre deux violations successives. Sous l'hypothèse de couverture conditionnelle, la durée entre deux violations successives  $D_i$  admet une loi géométrique avec une probabilité de succès  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \text{Sous } H_0 : D_i &\sim \text{Geom}(\alpha) \\ f(D_i(d, \alpha)) &= (1 - \alpha)^{d-1} \alpha \\ D &\in N^* \end{aligned}$$

L'avantage de ces tests réside dans la possibilité d'éviter le problème de la spécification de la forme de la dépendance des violations. Le problème c'est que ces tests postulent une forme de dépendance pour les durées.

Les premiers tests de durée (le test TUFF(1995) et le test de Haas(2001)) s'inscrivent dans la première génération des tests de backtesting. Les tests de durée de deuxième génération sont proposés par Christoffersen et Pelletier(2004) et par Haas(2005). Ces différents tests sont décrits dans l'annexe A.16.2. Nous détaillons un test de troisième génération : le test de Candelon et al.(2008).

#### **1.3.1.2.1.1.1 Test de Candelon, Colletaz, Hurlin et Tokpavi(2008)**

Ces auteurs proposent un test de durée basé sur la méthode des moments généralisée. Les auteurs développent des J-statistiques définies à partir de polynômes orthonormaux associés à une distribution géométrique. Il est à relever que ce test est le premier test de durée à pouvoir vérifier séparément les différentes hypothèses de validité de la VaR. Les distributions de la famille Pearson(Normale, Student, Gamma, Beta et Uniforme) peuvent être associées dans le cas continu à des polynômes orthonormaux d'espérance nulle. Les

auteurs proposent d'utiliser ces polynômes pour tester l'hypothèse distributionnelle. Ainsi, les polynômes orthonormaux associés à la distribution géométrique sont définis par :

$$M_{j+1}(d; \beta) = \frac{(1 - \beta)(2j + 1) + \beta(j - d + 1)}{(j + 1)\sqrt{1 - \beta}} M_j(d; \beta) - \frac{j}{j + 1} M_{j-1}(d; \beta) \quad (28)$$

$\forall j \in N$  avec  $M_{-1}(d; \beta) = 0$  et  $M_0(d; \beta) = 1$

Si la vraie distribution de D suit une loi géométrique avec une probabilité de succès  $\beta$  alors :

$$E[M_j(d; \beta)] = 0 \quad \forall j \in N^*, \forall d \in N^* \quad (29)$$

Soient  $\{d_1, \dots, d_N\}$  la séquence des N durées entre les violations de la VaR. Sous l'hypothèse de couverture conditionnelle, les durées  $d_i, i = 1, \dots, N$  sont i.i.d. selon une loi géométrique avec une probabilité de succès égale au taux de couverture  $\alpha$  ( $\beta = \alpha$ ) :

$$H_{0,CC} : E[M_j(d_i; \alpha)] = 0, j = \{1, \dots, p\}$$

Où p représente le nombre de moments. On peut tester les hypothèses individuellement :

$$H_{0,UC} : E[M_1(d_i; \alpha)] = 0$$

Sous cette hypothèse, l'espérance de la durée est  $\frac{1}{\alpha}$

$$H_{0,IND} : E[M_j(d_i; \beta)] = 0, j = \{1, \dots, p\}$$

Où  $\beta$  représente le taux de violations calculé qui peut être différent du taux de couverture  $\alpha$ . L'espérance de la durée des violations est alors donnée par  $\frac{1}{\beta}$ . Sous cette hypothèse, la durée entre deux violations consécutives suit une distribution géométrique et l'hypothèse de couverture non conditionnelle est rejetée si  $\beta \neq \alpha$ . Candelon et al.(2008) spécifient les tests statistiques associés aux différentes hypothèses :

- Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle :

$$J_{CC}(p) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right)' \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} X^2(p) \quad (30)$$

Où  $M(d_i; \alpha)$  est un vecteur(p,1) composé des polynômes orthonormaux  $M_j(d_i; \alpha)$  pour  $j = 1, \dots, p$ .

- Sous l'hypothèse nulle de couverture inconditionnelle<sup>32</sup> :

$$J_{UC} = J_{CC}(1) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M_1(d_i; \alpha) \right)^2 \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} X^2(1) \quad (31)$$

- Sous l'hypothèse nulle d'indépendance :

$$J_{IND}(p) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \beta) \right)' \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \beta) \right) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} X^2(p) \quad (32)$$

La valeur de  $\beta$  étant généralement estimée, le degré de liberté du  $X^2$  change :

$$J_{IND}(p) \sim X^2(p-1).$$

#### 1.3.1.2.1.2 Les tests de différence de martingale

La différence de martingale est une propriété qui implique :

$\forall Z_{t-k} \in \Omega_{t-1}$  :

$$E[(I_t(\alpha) - \alpha) \otimes Z_{t-k}] = 0 \quad (33)$$

Et plus particulièrement, si  $I_{t-k}(\beta) \in \Omega_{t-1}$  alors :

$$E[[I_t(\alpha) - \alpha][I_{t-k}(\beta) - \beta]] = 0 \quad (34)$$

$\forall(\alpha, \beta); \forall k \neq 0$

À partir de cette propriété, on peut construire des tests pour vérifier l'indépendance du processus de violations. Berkowitz et al.(2005) proposent une approche unifiée basée sur la différence de martingale qui permet de généraliser plusieurs tests de backtesting. Par ailleurs, nous présentons le test de Hurlin et Tokpavi(2007a).

##### 1.3.1.2.1.2.1 Test de Berkowitz, Christoffersen et Pelletier(2005)

Berkowitz et al.(2005) introduisent une famille de tests qui généralisent 4 classes particulières de tests de backtesting :

- Les tests de différence de martingale : ils proposent une approche unifiée d'évaluation de la VaR :

$$Hit(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha \quad (35)$$

---

32. C'est un cas particulier du  $J_{CC}$ .

Cette hypothèse implique, dans le cas des tests de Christoffersen(1998) :

$$E[I_{t+1}(\alpha) - \alpha | \Omega_t] = 0 \quad (36)$$

Où  $\Omega_t$  est l'ensemble d'informations disponible en t. La propriété de différence de martingale implique l'indépendance des violations.

- Les tests de durée. En réutilisant la différence de martingale, Berkowitz et al.(2005) intègrent les tests de durée de Christoffersen et Pelletier(2004) et de Haas(2001).
- Les tests d'autocorrélation de la série des violations. Dans le test de Christoffersen(1998), l'hypothèse nulle suppose l'absence d'autocorrélation de premier ordre que Berkowitz et al.(2005) proposent de réécrire :

$$(I_{t+1}(\alpha) - \alpha) \stackrel{i.i.d.}{\sim} (0, \alpha(1 - \alpha)) \quad (37)$$

Il est alors possible de tester l'autocorrélation à tous les retards. L'hypothèse nulle est alors définie par :

$$H_0 : \gamma_k = 0, k > 0$$

Et l'hypothèse alternative est donnée par :

$$H_0 : \gamma_k \neq 0, k > 0$$

Il suffit alors d'appliquer un test de Ljung-Box sur les autocorrélations des différences de martingale construites précédemment. Sous  $H_0$ , les K premières autocorrélations du processus de violations sont nulles. Sous cette hypothèse, les auteurs retiennent la statistique :

$$LB(K) = T(T + 2) \sum_{i=1}^K \frac{\hat{r}_i^2}{T - i} \sim X^2(K) \quad (38)$$

Où  $\hat{r}_i$  désigne l'autocorrélation empirique d'ordre i du processus  $Hit(\alpha)$ .

- La dernière classe s'inspire de Durlauf(1991). Il s'agit de tester l'hypothèse de martingale à partir de la fonction de densité spectrale. Les auteurs proposent d'examiner la queue de la fonction de densité spectrale de  $I_t(\alpha) - \alpha$  et de la comparer à celle d'un bruit blanc.

Berkowitz et al.(2005) prévoient aussi le cas où l'ensemble d'informations est élargi et inclut d'autres variables.

### 1.3.1.2.1.2.2 Test de Hurlin et Tokpavi(2007a)

Hurlin et Tokpavi(2007a) proposent un test de backtesting basé sur la statistique du Portmanteau de Li et McLeod(1981). Ce test est une extension du test de Berkowitz et al.(2005) au cas multivarié. L'objectif est de tester l'absence de corrélation des hits pour différents niveaux de couverture. L'hypothèse de différence de martingale supposée par Berkowitz et al.(2005) implique pour deux taux de couverture différents  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned} E[Hit_t(\alpha)Hit_{t-k}(\alpha)] &= 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \\ E[Hit_t(\alpha)Hit_{t-k}(\beta)] &= 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Hurlin et Tokpavi(2007a) proposent de tester la validité de la VaR pour un échantillon fini et pour plusieurs taux de couverture. Soit  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  un ensemble discret de m taux de couverture différents appartenant à  $[0,1]$ . Notons :

$$Hit_t = [Hit_t(\theta_1) : Hit_t(\theta_2) : \dots : Hit_t(\theta_m)]'$$

le vecteur de dimension  $(m \times 1)$  regroupant les séquences de violations associées aux m différents taux de couverture à la date t. Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle :

$$Cov(Hit_t(\theta_i), Hit_{t-k}(\theta_j)) = V \cdot \delta_k$$

Ou

$$E[Hit_t(\theta_i)Hit_{t-k}(\theta_j)'] = 0; \forall k = 1, \dots, K; \forall (\theta_i, \theta_j) \in \Theta.$$

Où V est une matrice non nulle symétrique de dimension  $(m \times m)$  et  $\delta_k$  est un scalaire défini par :

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (39)$$

Soit la matrice des covariances empiriques du vecteur  $Hit_t$  notée  $\hat{c}_k$  :

$$\hat{c}_k = (\hat{c}_{ijk}) = \sum_{t=k+1}^T Hit_t Hit_{t-k}' \quad (40)$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

On a donc :

$$\hat{r}_k = D\hat{c}_k D \quad (41)$$

Où  $D$  est la matrice diagonale ayant pour éléments les écarts-types associés aux processus univariés  $Hit_t(\theta_i)$  défini par  $\sqrt{\widehat{c}_{ii0}}$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Sous l'hypothèse nulle, la statistique du Portemanteau telle qu'elle est définie par Li et McLeod(1981) suit un Khi-deux :

$$Q_m(K) = T \sum_{k=1}^K (vec \widehat{r}_k)' (\widehat{r}_0^{-1} \otimes \widehat{r}_0^{-1}) (vec \widehat{r}_k) \sim X^2(km^2) \quad (42)$$

Pour des raisons mathématiques, les auteurs suggèrent de choisir  $m = 2$  ou  $3$  et retenir 1%, 5% ou 10% comme taux de couverture. Pour ce qui est du retard  $K$ , les auteurs recommandent les 5 premiers retards.

#### 1.3.1.2.1.3 Les tests fondés sur une régression des hits

Il s'agit d'estimer un modèle paramétrique sur le processus des hits  $I_t$  de telle sorte à ramener les tests de backtesting à de simples tests paramétriques sur les coefficients du modèle.

Le test le plus populaire basé sur la régression quantile est incontestablement celui d'Engle et Manganelli(2004). Mais le premier test de backtesting fondé sur une régression des hits est proposé par Clements et Taylor(2003). Le processus de violations étant de nature binomiale, Patton(2002) propose une modélisation logit. Les tests de Clements et Taylor(2003), d'Engle et Manganelli(2004) et de Patton(2002) sont détaillés dans l'annexe A.16.3. Nous présentons un test de troisième génération (Dumitrescu et al.(2012)).

##### 1.3.1.2.1.3.1 Test de Dumitrescu, Hurlin et Pham(2012)

Dumitrescu, Hurlin et Pham(2012) proposent un test de backtesting basé sur un modèle non linéaire de régression des violations. Le modèle retenu est un modèle binaire dynamique qui met en relation les violations de la VaR au temps  $t$  et un ensemble de variables explicatives. Soit la probabilité conditionnelle d'une violation au temps  $t$  :

$$\text{Prob}[I_t(\alpha) = 1 | \mathbb{F}_{t-1}] = F(\pi_t)$$

Où  $F$  est la fonction de distribution conditionnelle et  $\mathbb{F}_{t-1}$  est l'ensemble d'informations disponible en  $t - 1$ .  $\pi_t$  est un processus autorégressif défini par :

$$\pi_t = c + \sum_{j=1}^{q_1} \beta_j \pi_{t-j} + \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j I_{t-j}(\alpha) + \sum_{j=1}^{q_3} \psi_j l(x_{t-j}, \varphi) + \sum_{j=1}^{q_4} \gamma_j l(x_{t-j}, \varphi) I_{t-j} \quad (43)$$



Où  $l(\cdot)$  est une fonction d'un nombre fini de valeurs retardées et  $x_t$  est le vecteur des variables explicatives.  $l(\cdot)$  permet de lier  $\pi_t$  aux variables observées de l'ensemble d'informations. Les auteurs retiennent 7 spécifications :

$$DB1 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} \quad (44)$$

$$DB2 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} + \delta_1 I_{t-1}(\alpha) \quad (45)$$

$$DB3 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} + \delta_1 I_{t-1}(\alpha) + \delta_2 I_{t-2}(\alpha) \quad (46)$$

$$DB4 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} + \delta_1 I_{t-1}(\alpha) + \delta_2 I_{t-2}(\alpha) + \delta_3 I_{t-3}(\alpha) \quad (47)$$

$$DB5 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} + \phi_1 VaR_{t-1} \quad (48)$$

$$DB6 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} + \delta_1 I_{t-1}(\alpha) + \phi_1 VaR_{t-1} \quad (49)$$

$$DB7 : \pi_t = c + \beta_1 \pi_{t-1} + \delta_1 I_{t-1}(\alpha) + \phi_1 VaR_{t-1} + \gamma_1 VaR_{t-1} I_{t-1} \quad (50)$$

DB1 ; DB2 ; DB3 ; et DB4 traduisent un modèle de réponse dynamique binaire qui inclue l'indice retardé comme une variable explicative. DB5 et DB6 s'inspirent des spécifications du modèle quantile d'Engle et Manganelli(2004) quand DB7 inclut une asymétrie des réponses de l'indice aux VaR passées. La méthode du maximum de vraisemblance est retenue pour estimer le modèle :

$$\ln L(\theta; I(\alpha), Z) = \sum_{t=1}^T [I_t(\alpha) \ln F(\pi_t(\theta, Z_t)) + (1 - I_t(\alpha)) \ln (1 - F(\pi_t(\theta, Z_t)))] \quad (51)$$

Où  $\theta$  est le vecteur des paramètres en fonction du modèle choisi :  $\theta = [\beta', \gamma', \psi', \delta']$  et  $Z_t$  est le vecteur des variables explicatives au temps t. Le test de backtesting de Dumitrescu et al.(2012) est construit de la même manière que celui d'Engle et Manganelli(2004) :

- L'hypothèse de couverture conditionnelle suppose  $\beta = 0, \delta = 0, \psi = 0, \gamma = 0$  et  $c = F^{-1}(\alpha)$ . Sous cette hypothèse :

$$Prob(I_t = 1 | \mathbb{F}_{t-1}) = F(F^{-1}(\alpha)) = \alpha$$

Le test  $LR_{CC}$  correspondant est défini par :

$$DBLR_{CC} = -2 \{ \ln L(0, F^{-1}(\alpha); I_t(\alpha), Z_t) - \ln L(\hat{\theta}, \hat{c}; I_t(\alpha), Z_t) \} \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} X^2(dim(Z_t)) \quad (52)$$

Où  $\hat{\theta}$  est le vecteur des paramètres estimés du modèle binaire choisit et  $\hat{c}$  la constante estimée du modèle.

- L'hypothèse d'indépendance suppose  $\beta = 0, \delta = 0, \psi = 0$  et  $\gamma = 0$ . Pour le test d'indépendance,  $c$  n'est pas une fonction de  $\alpha$  et le test statistique est donné par :

$$DBLR_{IND} = -2\{\ln L(0, I_t(\alpha), Z_t) - \ln L(\hat{\theta}, I_t(\alpha), Z_t)\} \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} X^2(\dim(Z_t) - 1) \quad (53)$$

- L'hypothèse de couverture non conditionnelle suppose que  $E[I_t(\alpha)] = \lim_{j \rightarrow \infty} E[I_t(\alpha) | \mathbb{F}_{t-j}] = \alpha$ .

En fonction de la spécification retenue, certaines contraintes peuvent être imposées aux paramètres du modèle.

#### 1.3.1.2.1.4 *Autres tests*

Il existe un nombre de tests de backtesting, principalement de troisième génération qui n'entrent dans aucune des catégories précitées. Le test de Dumitrescu et al.(2011) vise à la fois à évaluer des intervalles de prévisions et des régions à fortes densités. La méthode utilisée ne permet pas de le classer dans une classe particulière. Les tests de Wong(2010) et Lopez(1999) visent à intégrer l'ampleur des pertes dans l'évaluation des estimations. Le test de Dumitrescu et al.(2011) présente l'originalité d'introduire un test joint de 2 VaR estimées à des taux de couverture différents. Le test de Pérignon et Smith(2008) est aussi basé sur une VaR multidimensionnelle. Ces différents tests sont détaillés dans l'annexe A.16.4.

---

Nous avons présentés quelques tests de backtesting plus ou moins utilisés par les établissements financiers. Ils révèlent l'amélioration des procédures de backtesting qui va de pair avec une certaine complexité de ces mêmes procédures. Les différentes approches présentées souffrent, chacune, de plusieurs limites. Ainsi, Hurlin et Tokpavi(2007) proposent d'évaluer la capacité des procédures de backtesting à discriminer plusieurs prévisions de la VaR d'un même actif. L'idée développée par les auteurs consiste à analyser la capacité des tests de backtesting à mettre en évidence, à partir d'un certain nombre de prévisions, un sous-ensemble de prévisions dit valide. La diversité des méthodes de prévisions conduit à des résultats sensiblement différents et l'objectif poursuivi par Hurlin et Tokpavi(2007)

consiste à vérifier si les tests standards sont capables de sélectionner les meilleures prévisions. Les tests standards considérés sont les tests LR de Christoffersen(1998), le test DQ d'Engle et Manganelli(2004) et les tests de durée de Christoffersen et Pelletier(2004). Ces différents tests sont appliqués sur les prévisions issues de 3 méthodes paramétriques, 2 méthodes non paramétriques et une méthode semi-paramétrique d'estimation de la VaR. Les résultats de l'analyse montrent que les tests standards de backtesting ont tendance à valider les prévisions de la VaR sensiblement différentes pour un même actif. L'analyse des fréquences de validation des 6 mesures par les différents tests montrent que les procédures de backtesting ont une forte tendance à valider toutes les prévisions. Il semble cependant, que le test DQ soit le plus restrictif même s'il valide 4 mesures de VaR dans 23% des cas. Par exemple, pour l'indice Nasdaq, les écarts minimaux varient entre 20% et 260% du niveau moyen de la delta-VaR. Par ailleurs, ils montrent que les exceptions ne surviennent pas aux mêmes périodes selon les méthodes utilisées. La comparaison entre les prévisions de la VaR delta-normale et la VaR GARCH montre qu'entre 10 et 11 violations associées aux processus GARCH ne coïncident pas avec les violations des prévisions VaR delta-normale alors que le nombre d'exceptions autorisées est de 12.

Dans une autre étude, Escanciano et Olmo(2010) proposent de quantifier le risque d'estimation des procédures de backtesting les plus utilisées pour la prévision hors-échantillon et introduisent une correction qui élimine le risque d'estimation. Ils présentent deux théorèmes :

1. Le premier quantifie le risque d'estimation et le risque de modèle dans le test de couverture inconditionnelle. Ils montrent que sous des conditions générales, il existe un biais qui modifie la variance asymptotique.
2. Le deuxième théorème invalide les tests joints de Berkowitz et al.(2005) basé sur l'estimation de la covariance du processus de violations.

Ils proposent une correction de la variance dans le test de Kupiec(1995) dont des distorsions de taille significatives ont été mises en évidence. Dans le cas des tests joints, des distorsions similaires sont observées pour des valeurs de  $\alpha$  relativement importantes ( $\alpha = 0.1$ ). Elles sont d'autant plus importantes que l'échantillon sur lequel est estimé le modèle n'est pas très long et que les prévisions hors-échantillon sont importantes.

Ces différentes analyses mettent en exergue les faiblesses des procédures de backtesting, notamment celles dites de deuxième génération alors que les tests de 3ème génération

s'attachent à prendre en compte les différentes limites mises en évidence par ces analyses. Les tests de la classe Density Forecast Evaluation souffrent de plusieurs limites :

- ils requièrent la fonction des quantiles conditionnels  $F^{-1}(\cdot|\Omega_t)$  entière bien que les quantiles qui ne sont pas aux extrémités soient inutiles. Campbell(2005) explique que les modèles de risque qui s'attachent à modéliser les évènements extrêmes paraîtront imprécis pour des intervalles où les pertes et profits ne sont pas conséquents. Ainsi, un modèle qui semble approprié pour modéliser les valeurs extrêmes peut être rejeté par ces tests.
- Campbell(2005) souligne l'utilité limitée de ces procédures en ce sens où l'intérêt dans l'analyse du risque de portefeuille porte principalement sur les queues extrêmes. Une analyse de la densité de probabilité pour tous les quantiles biaise la notion de risque de portefeuille car elle ne se focalise pas sur le risque extrême. Une alternative consiste à tester l'uniformité et l'indépendance sur un intervalle de taux de couverture  $\alpha$ .
- Enfin, le nombre de données requises dans certains tests pour atteindre une puissance de tests acceptable peut freiner les analystes.

L'engouement que suscite ce domaine de recherche contribue à une croissance exponentielle des tests de backtesting. Nous assistons à une amélioration conséquente de ces procédures par rapport au backtesting réglementaire mais il manque encore l'intérêt du secteur bancaire qui n'intègre pas encore ces avancées dans leur gestion des risques.

### 1.3.2 UNE APPROCHE DU RISQUE DE MARCHÉ À TRAVERS LES RUPTURES DE CORRÉLATIONS

Le résultat empirique selon lequel la corrélation entre deux actifs augmente en période de crise, et dénommé "*correlations breakdowns*", conduit une grande partie de la littérature à s'intéresser aux conséquences et à l'intégration de ce résultat. En effet, l'augmentation des corrélations entre deux actifs dans les queues extrêmes des distributions traduit une augmentation des risques extrêmes et par conséquent, rend caducs des modèles qui ne tiennent pas compte de cette caractéristique. En dépit de l'absence de consensus concernant la détection et les raisons de ce phénomène, il s'est développé toute une littérature autour des '*correlations breakdowns*' qui peut se synthétiser en trois principaux domaines :

- L'identification des '*correlations breakdowns*' et leurs impacts sur les mesures de risques : le lien entre les ruptures de corrélations et les risques financiers est assez intuitif. Dans le cadre du risque de marché, l'impact des '*correlations breakdowns*' peut être analysé à partir d'un portefeuille d'actifs ou dans une approche multivariée de la dynamique des rentabilités. La mise en évidence de ces ruptures a fait l'objet de nombreuses études dont le consensus principal réside dans l'utilisation erronée du coefficient de corrélation linéaire pour détecter des '*correlations breakdowns*'. Un certain nombre d'instruments ont été introduits (mesures des excès de corrélations, corrélations de seuil, etc...) mais s'inscrivent très souvent dans une approche linéaire par morceaux des dynamiques.
- Le phénomène de '*correlations breakdowns*' dans le débat sur la contagion et l'interdépendance : les premières études qui se sont attachées à révéler un phénomène de contagion sur les marchés financiers (King et Wadhani(1990) , Baig et Goldfajn(1998)) mettent en évidence un phénomène de '*correlations breakdowns*' en déterminant des coefficients de corrélations linéaires conditionnels à des périodes spécifiques. Les critiques formulées à l'encontre de ces démarches conduisent de nombreux auteurs à développer des instruments plus robustes, capables d'intégrer des structures non linéaires. En dépit des limites de ces instruments, l'idée selon laquelle le phénomène de contagion est avéré dès lors qu'il existe une intensification des relations entre deux marchés en période de crise est communément admise. En retenant cette définition, une partie de la littérature développe des modèles souvent de type GARCH capables de rendre compte d'une intensification des liens traduisant ainsi une asymétrie des corrélations sur longues périodes.
- L'intégration du phénomène de '*correlations breakdowns*' : qu'il soit identifié ou non par des instruments imparfaits, le phénomène de '*correlations breakdowns*' est intégré dans des modélisations capables de rendre compte d'une asymétrie de la volatilité ou de l'existence de plusieurs régimes de volatilité. Ces approches intéressantes souffrent d'une réelle interprétation de l'interaction des agents sur les marchés. Qu'est ce qui crée ces ruptures de corrélations ? La part des fondamentalistes sur les marchés se réduit-elle en période d'intensification ? Est-ce que les chartistes sont les seuls responsables de cette augmentation soudaine des relations entre deux actifs ? Si les approches purement stochastiques n'apportent pas d'éléments probants sur

l'interaction qui causent ces ruptures, deux études (Corcos et al.(2002) et Falbo et Grassi(2011)) tentent d'expliquer comment l'interaction de différents types d'agents crée une rupture dans les corrélations, quels agents contribuent fortement à la formation de ce phénomène et comment ceux-ci agissent lorsqu'ils anticipent la formation d'une rupture des corrélations. Nous détaillons les résultats de ces études dans le chapitre 2.

Nous revenons sur les différents résultats de la littérature par une présentation succincte des principaux objets d'études du phénomène de 'correlations breakdowns'. Nous détaillons dans un premier point les travaux visant à identifier les '*correlations breakdowns*' et à analyser l'impact de ces ruptures sur le risque de marché. Dans une deuxième section, nous replaçons le sujet des '*correlations breakdowns*' dans un contexte plus large, à savoir le débat sur la contagion et l'interdépendance.

### 1.3.2.1 IDENTIFICATION DU PHÉNOMÈNE DE '*correlations breakdowns*' ET IMPACT SUR LE RISQUE DE MARCHÉ

Le phénomène de '*correlations breakdowns*' impacte directement les mesures de risques de marchés que l'on soit dans le cadre d'un portefeuille d'actifs ou dans une approche bidimensionnelle. La diversification, en tant qu'avantage principal de la construction des portefeuilles, est ainsi affectée dès lors qu'un problème de '*correlations breakdowns*' est identifié. Nous détaillons cette particularité, souvent reprise dans la littérature, à titre d'exemple. Soit un portefeuille composé de deux actifs dont les moyennes et les écarts-types sont respectivement donnés par  $\mu_i, \sigma_i$  avec  $i = 1, 2$ . La moyenne des rendements du portefeuille est donnée par les moyennes pondérées des deux actifs :

$$\mu_p = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \quad (54)$$

L'écart-type du portefeuille est donné par :

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho} \quad (55)$$

Où  $\rho$  est le coefficient de corrélation linéaire entre les deux actifs. Il est de connaissance commune, depuis les travaux de Markowitz(1952), qu'un investisseur tire profit du principe de diversification si les actifs composant son portefeuille sont peu corrélés, ce qui permet d'avoir un risque de portefeuille relativement faible. En dépit de l'approche simpliste de Markowitz(1952), de nombreux auteurs se sont attachés à remettre en cause les bénéfices

attribués à la diversification en raison de l'hypothèse centrale de linéarité. La leptokurticité et les nombreuses non linéarités qui caractérisent les séries financières biaisent le coefficient de corrélation linéaire. Par ailleurs, le coefficient de corrélation utilisé est supposé constant et n'intègre pas d'éventuelles ruptures des corrélations. En effet, on pourrait s'attendre à un changement dans les corrélations en période de crise qui reflèterait une intensification des relations entre deux actifs. La problématique des '*correlations breakdowns*' est basée sur la dichotomie entre une mesure de corrélations inconditionnelles et une mesure des corrélations conditionnelles. Cette dernière, déterminée sur un échantillon particulier, introduit un biais dans l'interprétation des '*corrélations breakdowns*'. Loretan et English(2000) analysent le phénomène de '*correlations breakdowns*' en temps de crise. Selon ces auteurs, la différence entre les deux principales causes des '*correlations breakdowns*' est à rechercher dans la variabilité temporelle de la volatilité qui de fait conduit à une variabilité des corrélations même quand les relations entre deux indices sont inchangées. Ils montrent que les ruptures de corrélations sont dues à des changements de la volatilité qui impactent les mesures de corrélations. Pour démontrer leurs intuitions, Loretan et English(2000) dérivent un théorème<sup>33</sup> :

**Théorème 1** Soient une paire de variables aléatoires normales  $x$  et  $y$  de variances  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$  respectivement et de covariance  $\sigma_{xy}$ . Posons  $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$  le coefficient de corrélation linéaire inconditionnel entre  $x$  et  $y$ . La corrélation entre  $x$  et  $y$  conditionnellement à un évènement  $x \in A$  pour tout  $A \subset \mathbb{R}$  avec  $0 < \text{Prob}(A) < 1$  est donnée par :

$$\rho_A = \rho \left[ \rho^2 + (1 - \rho^2) \frac{\text{Var}(x)}{\text{Var}(x|x \in A)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (56)$$

Selon ce théorème, la corrélation conditionnelle entre  $x$  et  $y$  est plus grande (resp. plus petite) que la valeur absolue du coefficient  $\rho$  si la variance conditionnelle de  $x$  ( $x \in A$ ) est plus grande (resp. plus petite) que la variance inconditionnelle de  $x$ . Ce résultat est généralisé par Loretan et English(2000) au cas où  $y$  est une fonction linéaire de  $x$ . La principale limite de ce résultat réside dans l'hypothèse restrictive de la distribution bivariée ( $x, y$ ) qui est supposée i.i.d. dans le cas particulier et linéaire dans le cas général. En dépit de cette restriction, Loretan et English(2000) concluent, dans leur application, sur l'absence de ruptures dans le processus générateur de données et attribuent le phénomène de '*correlations breakdowns*' à une augmentation de la volatilité. Certains tentent de rendre compte de ce

---

33. Pour la démonstration, voir Loretan et English(2000). Ce résultat avait d'abord été mis en évidence par Boyer et al.(1999).

phénomène par des matrices de corrélations conditionnelles à un seuil de rentabilité dans une approche univarié ou bivariée. Il en est ainsi de Ramchand et Susmel(1998), Longin et Solnik(2001), Boyer et al.(1999). Longin et Solnik(2001) proposent une mesure des excès des corrélations définis par :

$$\rho(\theta) = \begin{cases} \text{Corr}(x_1, x_2 | x_1 < \theta, x_2 < \theta) \text{ pour } \theta \leq 0 \\ \text{Corr}(x_1, x_2 | x_1 > \theta, x_2 > \theta) \text{ pour } \theta \geq 0 \end{cases} \quad (57)$$

Où  $\theta$  est un seuil prédéfini. Les excès de corrélations permettent de mettre en évidence des asymétries dans la dépendance des queues de distributions. Dans le cas d'une distribution normale multivariée, il apparait que la distribution des excès de corrélations décroît au fur et à mesure que la corrélation inconditionnelle augmente. Ce résultat atypique se justifie par la relation particulière entre les excès de corrélation et la dépendance des queues, relation qui ne peut être mise en évidence dans le cas d'une distribution multivariée normale qui, par définition, est une distribution asymptotique indépendante pour tout  $\rho$ .

Campbell et al.(2002) mettent en évidence un biais dans l'estimation théorique de ces approches d'excès des corrélations lié non seulement au choix des rentabilités extrêmes qui sont conditionnées mais aussi de la distribution jointe des rentabilités. Ainsi, Boyer et al.(1999) conditionnent les corrélations estimées d'un actif à la distribution normale jointe des rentabilités. Ils proposent alors d'estimer une corrélation conditionnelle tronquée pour une distribution bivariée dans laquelle les rentabilités d'un des actifs considérés excèdent un seuil préétabli. Il reste délicat de comparer cette corrélation conditionnelle tronquée à une corrélation inconditionnelle et d'en tirer un quelconque enseignement en raison des corrélations supposées constantes dans les queues de la distribution jointe. Il en résulte un biais qui conduit à rejeter plus souvent l'hypothèse de constance des corrélations. Pour éviter le biais dans l'estimation théorique, Campbell et al.(2002) proposent d'utiliser une mesure des corrélations qui, non seulement corrige le biais mais qui est aussi utile d'un point de vue professionnel. Aussi, ces auteurs introduisent une mesure des corrélations basée sur la VaR. En déterminant les VaR individuelles associées à chaque actif et la VaR du portefeuille, il est possible d'obtenir une mesure des corrélations en remplaçant dans la formule standard les écart-types par les VaR correspondantes. Ainsi, en supposant une constance des corrélations inconditionnelles, le dépassement des rentabilités du portefeuille au-delà du seuil est donné par une moyenne pondérée des dépassements individuels des différents actifs. Si la corrélation entre deux actifs est effective alors la VaR du portefeuille



sera supérieure à la moyenne pondérée des VaR individuelles. Mittnik(2013) généralise l'approche de Campbell et al.(2002) à  $n$  actifs. Ainsi, l'information contenue dans les corrélations des portefeuilles à plusieurs actifs est prise en compte. Par ailleurs, Mittnik(2013) présente les conditions pour garantir une matrice des corrélations semi-définie positive.

Dans la littérature, les ruptures de corrélations peuvent résulter de deux effets particuliers :

- une variation temporelle des moyennes et des variances alors que la structure de dépendance est constante. Cette situation crée une relation fallacieuse entre les corrélations et la volatilité.
- une évolution de la structure de dépendance qui traduit une évolution des relations entre deux actifs.

Si ces deux effets conduisent de fait à une évolution des corrélations, seule la deuxième situation correspond à une rupture effective des corrélations.

### 1.3.2.2 RUPTURES DES CORRÉLATIONS ET CONTAGIONS

Dans la littérature économique, l'avènement d'une crise financière suscite un intérêt particulier notamment en ce qui concerne l'impact de la crise sur les autres marchés. Forbes et Rigobon (2001) définissent la contagion " as a significant increase in cross-market linkages after a shock to an individual country<sup>34</sup> ". Cette définition n'est pas acceptée par tous les économistes et il en existe d'autres associées au terme contagion<sup>35</sup>. À contrario, l'interdépendance "implies no significant change in cross-market relationships<sup>36</sup>."

L'étude des phénomènes de contagion et/ou d'interdépendances entre plusieurs marchés permet selon Corazza, Malliaris, et Scalco(2010) de déduire, à partir de l'utilisation d'une information concernant une action et disponible publiquement, des informations futures pour l'actif co-dépendant. La détection de ces phénomènes permet de fournir non seulement une réponse à la coordination des politiques économiques mais aussi un indicateur du degré d'intégration financière. Au-delà des intérêts que suscite cette recherche, il existe un débat théorique sur les phénomènes caractérisés de contagion et les phénomènes dits d'interdépendance. Xu(2008) reprend la définition informelle de la contagion telle qu'elle a été

---

34. Comme une augmentation significative des liens entre les marchés après un choc sur un pays.

35. Voir Forbes et Rigobon(2001), Pericoli et Sbracia(2003).

36. n'implique pas de changement significatif dans les relations entre les marchés.

proposée par Forbes et Rigobon(2001) et, en utilisant son sens strict, elle montre qu'il est possible de distinguer les canaux de transmission existants indépendamment de la crise des canaux dont l'existence et l'activité sont conditionnés par la crise. Ce qui revient à confronter deux théories : la théorie de la contagion non contingente et la théorie de la contagion contingente. Forbes et Rigobon(2001) identifient quatre canaux de transmission de la contagion non contingente : le canal commercial (Gerlach et Smets(1995), Corsetti et al. (2002)), la coordination des politiques, la ressemblance des fondamentaux (Rigobon(1998), Calvo et Mendoza(2000)) et l'effet mousson (Masson(1998)). Selon Forbes et Rigobon(2001), si ces canaux sont inchangés avant et pendant la crise, les relations entre deux pays sont des relations d'interdépendance. À contrario, la contagion " pure " peut transiter via 3 canaux : l'équilibre multiple basé sur la psychologie des investisseurs (Masson(1999)), le choc endogène de liquidité (Valdès(1996)) et la contagion politique (Drazen(1998)). Boyer et al.(1999) et Forbes et Rigobon(2002) s'accordent sur l'idée selon laquelle une augmentation de la volatilité en période d'instabilité peut induire une augmentation des corrélations par rapport à une période stable. Par conséquent, l'identification de phénomènes de contagion apparaît erronée dès lors que la synchronisation des volatilités n'est pas considérée comme une cause de l'intensification des relations et qu'aucun ajustement entre les niveaux de volatilités et de corrélations n'est effectué.

Parmi les principales méthodes de détection d'un phénomène d'interdépendance, le recours au coefficient de corrélation a fait l'objet d'un certain nombre d'études (King et Wadhani(1990), Baig et Goldfajn(1998)). Boyer et al. (1997) et Forbes et Rigobon(2001) remettent en cause son utilisation du fait de l'importante volatilité des cours. Ils proposent un coefficient de corrélation ajusté de la volatilité qui permet de distinguer les phénomènes dits de contagion " pure " des phénomènes d'interdépendance.

Cette approche est critiquée par Dungey et al. (2005) dans leur revue de littérature sur les méthodes visant à étudier les phénomènes de contagion. Un certain nombre de modélisations sont présentées avec une importante nuance entre les modèles qui tentent de quantifier les phénomènes d'interdépendance et ceux qui prennent en compte les phénomènes de contagion. Selon ces auteurs une causalité entre 2 actifs est qualifiée d'interdépendance lorsque la période retenue est une période calme alors que le terme de contagion s'applique pour des périodes de crises.

Dans la modélisation de la contagion, les auteurs introduisent différentes spécifications qui permettent d'intégrer les ruptures structurelles, les dynamiques autorégressives et hété-

roscedastiques. De plus, ils reprennent les tests de détection des phénomènes de contagion par l'étude des corrélations et des covariances et introduisent une version alternative aux tests de Forbes et Rigobon(2001).

D'autres auteurs comme Corsetti et al. (2005) présentent une méthode de comparaison entre un coefficient de corrélation corrigé et un indice d'interdépendance. Caporale et al. (2005) proposent une méthode basée sur la corrélation conditionnelle qui permet de prendre en compte l'hétéroscedasticité, l'endogénéité et l'omission de variables. Il apparait rapidement que le recours à un coefficient de corrélation pour étudier la transmission entre les marchés est, en particulier à cause de sa linéarité, insuffisant.

Il existe d'autres outils qui permettent de détecter les relations causales entre deux marchés, comme ceux proposés par Xu(2008) qui a recours à la théorie des valeurs extrêmes en utilisant la notion de contagion "pure" liée à l'efficacité des politiques d'intervention de court terme. L'auteur tente de distinguer les situations où il existe de la contagion des situations caractérisées par un phénomène d'interdépendance. Le test de détection des phénomènes de contagion retenu est fondé sur la comparaison entre le lien en période de crise et le lien en période normale. Lorsque le lien extrême est significativement plus élevé que le lien normal alors il y a contagion. Dans le cas contraire, l'hypothèse d'interdépendance est retenue.

Les relations d'interdépendance et de contagions et leurs impacts sur les marchés boursiers ont fait l'objet de nombreuses études. Récemment, Bensafta et Semedo(2011) ont proposé une modélisation ICSS-MGARCH<sup>37</sup> pour prendre en compte les changements de régime de la volatilité dans la mesure de la persistance de la volatilité. Cette démarche vise à tester la non contagion basée sur la stabilité des corrélations croisées. L'analyse menée par ces auteurs s'appuie sur la volatilité conditionnelle des marchés et l'hypothèse d'une interdépendance entre les marchés à cause de la volatilité conditionnelle (Hamao et al. (1990), Koutmos et al. (1995)). L'étude fait intervenir un GARCH multivarié avec la prise en compte de changements de régimes dans la variance et un modèle VAR pour l'équation de la moyenne. La modélisation VAR-MGARCH-BSV<sup>38</sup> permet de mettre en évidence la transmission en moyenne entre les marchés via la significativité des paramètres du processus VAR et la causalité en variance. La modélisation s'effectue en 2 étapes et les

---

37. Iterated Cumulative Sum of Squares Multivariate-GARCH.

38. Vecteurs autorégressifs avec une modélisation GARCH multivariée et ruptures structurelles dans la variance.

auteurs ont recours à 3 tests de transmission et de non-contagion. Le test de transmission en moyenne et le test de causalité au sens de Granger reposent sur un test de significativité de l'ensemble des paramètres du modèle VAR. Le test de transmission en variance et le test de Wald de causalité en variance visent à tester l'absence de transmission en variance entre 2 marchés.

Dewandaru et al.(2014) proposent une étude des comouvements pour les indices boursiers standards et pour des indices boursiers islamiques. Il ressort de leur analyse, menée par une décomposition en ondelette, que la crise des subprimes a contribué à une contagion sur les différents marchés. Ils montrent que l'exposition des indices islamiques est moins importante à cause d'un effet de levier et du faible intérêt qui leur est porté sur le plan international. Par opposition, les indices de l'Eurozone et américains ont capté les chocs de volatilité induits par la crise des subprimes mais l'impact de la crise des dettes souveraines Européennes ne s'est pas exporté. Støve et Tjøstheim (2013) étudie la contagion financière entre les places boursières de 5 pays (France, États-Unis, Allemagne, Norvège et Royaume-Uni) durant 3 crises majeures (Crise mexicaine, la crise asiatique et la crise des subprimes). Les auteurs utilisent une approximation des distributions bivariées des rentabilités, donnée par une famille de distributions bivariées gaussiennes. En retenant les corrélations locales de la distribution gaussienne, Støve et Tjøstheim (2013) établissent une comparaison avant/après le choc qui conclut sur une contagion entre les différents pays. Ils montrent qu'il existe bien une relation d'interdépendance non linéaire entre les marchés qui s'intensifie en période de crise. La principale limite de cette étude réside dans l'identification a priori d'un pays contagieux (les Etats-Unis pour la crise des subprimes) et ne permet pas de détecter et d'analyser cette caractéristique entre deux pays qui n'inclut pas le pays d'origine de la crise.

Jin et Maheu(2014) proposent de modéliser les ruptures dans la covariance par un modèle GARCH multivarié flexible. Ils partent du postulat selon lequel en période normale, la volatilité d'une distribution bivariée est bien décrite par un modèle GARCH multivarié. La rupture induite par un choc peut alors être prise en compte par une composante stochastique flexible qui permet de rendre compte des changements dans les variances conditionnelles, les covariances et les corrélations. L'approche originale de Jin et Maheu(2014) du phénomène de '*correlations breakdowns*' réside dans l'identification a priori des causes de ces phénomènes : en analysant les ruptures dans la matrice des variances/covariances, ils identifient celles à l'origine du phénomène de '*correlations breakdowns*' et ils évitent tout

problème de mauvaise spécification des corrélations. Ainsi, l'identification d'une rupture dans la matrice des variances / covariances n'implique pas forcément une rupture dans les corrélations ou un phénomène de contagion : tout dépend des ruptures identifiées et de leur impact réel. Jin et Maheu(2014) considèrent qu'il y a une rupture dans la covariance s'il existe une déviation du moment conditionnel d'ordre 2 par rapport à la matrice de covariance déterminée par une spécification GARCH multivariée. Ils supposent que les covariances suivent une chaîne de Markov d'ordre 1. L'application empirique menée sur différents indices boursiers conclue sur l'existence de ruptures dans la covariance dans 34% du temps, ruptures d'une durée d'un à deux mois. Becker et Schmidt(2015) proposent d'analyser les déterminants des corrélations et des volatilités en étudiant la dynamique de dépendance entre ces deux caractéristiques. En retenant le comportement fortement non linéaire des dynamiques de corrélations et des volatilités, Becker et Schmidt(2015) introduisent une dépendance flexible sur ces facteurs capable non seulement de capturer les non linéarités mais aussi l'influence des mouvements de marché. Ces derniers sont donnés par une fenêtre temporelle flexible qui représente la mémoire de marché. L'originalité de cette approche réside dans la prise en compte de l'impact des rentabilités sur les corrélations et sur la volatilité. Plus précisément, ces auteurs veulent expliciter la dépendance des corrélations et de la volatilité avec la tendance de marché. En procédant de la sorte, Becker et Schmidt(2015) déterminent les corrélations des différents environnements de marché qui ne souffrent pas d'un biais conditionnel. En améliorant le modèle de Bauwens et Otranto(2013), Becker et Schmidt(2015) vont simplifier la dépendance non linéaire et flexible qui peut exister entre la tendance ou la volatilité et les corrélations. Ils mettent ainsi en évidence une dépendance fortement non linéaire des volatilités et des corrélations aux tendances de marché.

---

L'étude des ruptures de corrélations constitue un objet d'analyse très important lié principalement à l'impact qu'elles peuvent avoir sur les prix des actifs. L'analyse de ces derniers et des risques qui leurs sont liés doit être menée pour détecter d'éventuelles ruptures dans les relations qui peuvent exister entre les différents actifs. Dans cette revue de littérature, nous sommes revenus sur deux problématiques essentielles liées aux ruptures de corrélations : la distinction entre l'interdépendance et la contagion et l'intégration des 'corrélations

breakdowns' dans la modélisation. Les différents travaux menés sont principalement axés sur la modélisation de la volatilité comme facteur de transmission des chocs.

## CONCLUSION

---

Les impératifs liés à la protection du consommateur, des institutions et à la stabilité financière ont contribué à l'émergence d'une instance de réglementation qui vise à proposer des recommandations pour la prévention et la gestion des risques financiers. Face aux multiples crises qui se sont succédées, aux faillites bancaires, aux répercussions des conséquences de ces crises dans la sphère économique, il devenait nécessaire de mettre en place un cadre réglementaire pour minimiser la survenue de ces événements. Le caractère international des dispositions réglementaires s'imposait naturellement pour converger vers l'adoption de normes communes. C'est tout l'essence du Comité de Bâle qui a vu le jour au lendemain de la faillite d'Herstatt. Sur la base des réflexions communes, de concessions, les pays membres du Comité ont formulé un certain nombre de recommandations, concrétisées par 3 principaux Accords.

Bâle I est le premier accord du CBSB. Signé en 1988, il formule des recommandations pour une exigence de fonds propres dans la couverture du risque de crédit. Le caractère insuffisant et obsolète de Bâle I conduit à l'adoption des Accords de Bâle II qui apparaissent beaucoup plus détaillés, beaucoup plus exhaustifs dans la couverture des risques. *Last but not least*, Bâle III est signé en 2010. Il offre, contrairement aux deux précédents accords, une approche macro-prudentielle des risques.

Le comité de Bâle a, au travers de ses trois principaux accords, formulé des exigences de plus en plus strictes, notamment en ce qui concerne le risque de marché. L'importance croissante prise par ce risque au cours des dernières années est liée à son interaction avec d'autres types de risques que la récente crise financière a révélé. Cette évolution du risque de marché, à travers le prisme de la réglementation, est détaillée dans la première section de ce chapitre.

Parallèlement à ces avancées réglementaires qui s'appliquent exclusivement au monde professionnel, nous assistons à un développement des modèles économétriques qui visent à pallier les insuffisances révélées par l'approche linéaire. Ces modélisations visent à intégrer toute une palette de faits stylisés identifiés dans les séries temporelles financières : les modèles de type GARCH rendent compte de la volatilité des séries financières tandis que les modèles à mémoire longue prennent en compte les anomalies de mémoire. La succession de divers régimes d'évolution au sein d'une même série temporelle conduit tout un pan de

la littérature à développer des modèles à changements de régimes. Ces différentes avancées de l'économétrie temporelle peuvent être combinées pour rendre compte de plusieurs caractéristiques des séries temporelles financières. Elles s'inscrivent exclusivement dans une approche stochastique de la non-linéarité.

L'intérêt porté à la modélisation des structures des séries temporelles financières est lié à la nécessité d'une meilleure quantification du risque de marché. Ce dernier peut être mesuré par l'instrument VaR et analysé par une étude des relations susceptibles d'exister entre différents actifs. Ces deux approches du risque de marché, que nous retenons, constituent deux problématiques importantes tant sur le plan de l'actualité financière que dans le cadre des approches économétriques utilisées.

En effet, la crise des subprimes a révélé la procyclicité dans les mesures de risques et la menace du risque systémique. Le caractère pro-cyclique dans les exigences des fonds propres et le risque systémique constituent 2 caractéristiques prises en compte par le CBSB. Plusieurs recommandations sont formulées pour les EFIS tandis que les mesures de risques sont amendées pour intégrer la procyclicité. Parallèlement aux progrès observés pour la quantification du risque de marché, de nombreuses avancées sur l'analyse du risque de marché et des impacts induits par le risque de contagion font l'objet d'une importante littérature.

En dépit de ces évolutions, un certain nombre de problèmes liés au risque de marché restent ouverts : ils concernent essentiellement l'approche retenue pour modéliser le risque de marché. Nous avons vu que le cadre linéaire était insuffisant pour rendre compte des non-linéarités observées et qu'une approche stochastique de la non-linéarité s'est développée. Cette dernière, certes intéressante, laisse en suspens plusieurs problématiques : la sous-estimation du risque, dénoncée dans le cadre de Bâle III, la procyclicité des mesures de risques, l'identification des relations de contagion et l'interprétation des interactions entre agents hétérogènes ne sont que, partiellement, évoquées. L'identification de structures chaotiques et les limites des différentes modélisations stochastiques appuient l'idée selon laquelle une approche chaotique des marchés financiers peut être envisagée.





## APPROCHES CHAOS-STOCHASTIQUES DE LA NON-LINÉARITÉ DES SÉRIES FINANCIÈRES

---

*"The financial economics establishment should have been aware of the use of the wrong tools and the complete fiasco in implementing these theories. (...) Specifically, promotion and teaching of Gaussian portfolio theory and inadequate risk measurement methods on grounds that " we need to give students something "(...). It would be rare that an airplane pilot who would accept using a map of Saudi Arabia when flying over the Himalayas on grounds that " there is nothing else "-humans intuitions know better. "*  
(Martin et Taleb(2012)).

Le réveil est brutal et le constat est amer. La crise des subprimes a laissé la place aux (autos)-critiques : des régulateurs aux banquiers en passant par les chercheurs, ils sont chacun à des degrés différents, responsables d'une des plus grandes crises financières. En témoignent ces quelques lignes de Martin et Taleb(2012) qui décrivent la crise comme une combinaison du dilemme de l'agence et de 'scientificité'. Ils listent les responsables de cette tempête financière et dénoncent leur manque de rigueur : prix Nobel (Markowitz, Sharpe, Scholes, Merton , Engle,...), enseignants ou banquiers, ils ont tous contribué à cette crise en tolérant des hypothèses loin d'être vérifiées en réalité. La comparaison avec le pilote des enseignants et scientifiques n'ayant pas autre chose à proposer ridiculise un peu plus les partisans de ces théories et la conception actuelle de la finance moderne. Mais à ces critiques, on peut confronter l'analyse de Cont(2009) qui relativise la responsabilité des chercheurs dans la crise : *"L'origine de la crise financière actuelle se trouve dans l'éclatement de la bulle spéculative immobilière (...), cette crise répète un schéma familier pour les économistes et a connu de multiples précédents historiques, bien avant l'apparition des " mathématiques financières " ou du moindre produit dérivé.(...) Mais à*

de rares exceptions près, une banque ou un fonds d'investissement ne fonde pas une décision majeure d'investissement sur une formule mathématique". Si les critiques de Martin et Taleb(2012) peuvent se justifier à l'encontre du monde professionnel qui n'a pas su intégrer les dernières avancées de l'économétrie financière, que ce soit pour les banques ou pour les régulateurs, elles apparaissent inappropriées pour le monde scientifique. L'enseignement des modèles utilisés dans la finance moderne constitue un préalable, auquel il faut apporter des amendements dès qu'ils seront entrepris par le monde financier : *"Benoît Mandelbrot, le père des fractales, avait signalé dès 1963 l'importance [des] fluctuations extrêmes. Il qualifia ce comportement de "hasard sauvage", par opposition au comportement aléatoire, mais continu et assez "sage", du mouvement brownien. Il suggéra alors de remplacer le mouvement brownien par une classe de processus aléatoires reflétant ce caractère sauvage(...). Cependant, les institutions financières où l'on mesure les risques au moyen de modèles gaussiens sont encore nombreuses. Comme le constate B. Mandelbrot, la prise en compte de ces risques extrêmes aurait pu "éviter aux gens de perdre autant d'argent parce qu'ils sous-estiment leurs risques." Voilà donc un exemple, non pas de défaillance de la modélisation quantitative, mais de l'absence d'utilisation d'outils quantitatifs pourtant disponibles dans le domaine public"*(Cont(2009)). La remise en cause de l'hypothèse de normalité a conduit au développement de nombreux modèles stochastiques qui permettent d'intégrer les différentes structures des séries financières. Il en est ainsi des modèles ARCH, des modèles intégrant des processus à mémoire longue mais aussi des modèles à changements de régime. Par ailleurs, de nombreux travaux se sont attachés à proposer des lois alternatives (loi de Student, lois stables...). Ces principaux apports s'inscrivent dans une approche stochastique de la non linéarité et de la complexité des marchés financiers. Un renouveau théorique est apporté par la théorie du chaos qui ouvre de nouvelles perspectives de recherche. Les marchés financiers sont perçus comme des lieux où s'affrontent des agents hétérogènes qui créent des dynamiques complexes. La nature de ces dynamiques est identifiée comme provenant d'un processus sous-jacent de nature chaotique. Il devient alors intéressant d'analyser les dynamiques financières sous un angle différent. L'idée d'un processus générateur purement déterministe paraît inadaptée compte tenu du caractère fortement volatile des séries financières. Aussi, le choix d'une approche chaos-stochastique semble plus approprié.

Nous proposons dans un premier point, de revenir sur l'approche chaotique des marchés financiers : nous détaillons les complexités qui caractérisent ces derniers et qui suggèrent

une approche par la théorie du chaos que nous développons. Nous proposons dans un deuxième point une analyse des modèles chaos-stochastiques pour le risque de marché.

## 2.1 GENÈSE DE L'APPROCHE CHAOTIQUE DES MARCHÉS FINANCIERS

*'Give me only the equation of motion, and I will show you the future of the universe'*  
Hsieh et Ye(1991).

Cette phrase, extraite de *Economics, Philosophy and Physics* témoigne de la nécessité de modéliser le monde qui nous entoure. Comprendre, intégrer et prévoir sont les maîtres-mots de cette quête sans cesse du "bon" modèle : comprendre l'évolution des dynamiques, intégrer les structures existantes dans un modèle pour aboutir à de bonnes prévisions. Les impératifs liés à la prévision sont multiples : elle doit permettre d'anticiper certains événements, elle peut orienter les décisions des régulateurs, et elle est aussi révélatrice d'un ensemble d'informations qui renseignent sur l'évolution des données. En finance, la prévision est essentielle car elle aide les acteurs à anticiper les mouvements sur les marchés financiers et notamment les crises financières. C'est dans cet objectif que se développent des modèles visant à intégrer les principales structures des séries temporelles financières. L'économétrie temporelle financière est marquée par des renouvellements théoriques : les modèles ARMA sont nés du désintérêt des modèles structurels d'inspiration keynésienne mais leur incapacité à pouvoir capter des structures plus complexes notamment de nature non linéaire a conduit au développement des modèles ARCH par Engle (1982). L'engouement sans précédent suscité par ces processus a conduit au développement d'une multitude de modèles capables de rendre compte d'une partie de la volatilité des séries financières. En outre des modèles de nature linéaire capables de prendre en compte des non linéarités ont été développés : c'est le cas, par exemple, des modèles faisant intervenir plusieurs régimes d'évolution. Les différentes modélisations que nous venons de mentionner reposent sur l'hypothèse de stochasticité qui suppose que le processus générateur de données est un processus aléatoire alors que certains auteurs remettent en cause cette hypothèse en évoquant la possibilité d'un processus générateur de nature déterministe. L'hypothèse de déterminisme " pur " étant difficilement acceptable pour les séries financières, l'idée d'un processus générateur chaotique a conduit une partie de la littérature à mettre en évidence les structures de ce type qui peuvent exister dans les séries financières. Il en est

ainsi d'Alsaleh (2002), Guégan et Houmniya (2005), Guégan et Mercier (2005), Guégan (2009), Kyrtsov et Malliaris (2009) entre autres. Une autre approche concilie l'hypothèse de stochasticité avec celle de déterminisme : le chaos stochastique. La mise en évidence des structures chaotiques dans les séries économiques et financières est une procédure complexe qui peut conduire à des résultats contestables en économie notamment à cause de la nature des données utilisées (bruitées, historique trop court, etc..., pour plus de précisions, voir Faggini(2011)). Nous revenons sur la théorie du chaos : après une présentation générale, nous détaillons les concepts-clés et les tests de détection des structures chaotiques.

### 2.1.1 COMPLEXITÉS DES MARCHÉS FINANCIERS : UNE APPROCHE PAR LA THÉORIE DU CHAOS

Les insuffisances des approches linéaires dans la modélisation des séries temporelles financières conduisent au développement d'analyses mettant en exergue les non linéarités et les complexités des séries temporelles financières. Un certain nombre de travaux se sont intéressés depuis longtemps aux non-linéarités des chroniques qui ont été progressivement intégrées dans la modélisation. Ces différents résultats s'inscrivent, pour la plupart, dans une approche stochastique. La récente crise financière a révélé les limites de ces apports dans la compréhension, la modélisation et la prévision des fluctuations des séries temporelles financières. La remise en cause des modélisations déjà existantes s'accompagne d'une invitation aux chercheurs à s'ouvrir aux autres disciplines afin de mieux détecter, intégrer, modéliser et prévoir l'évolution des structures des chroniques financières. Cette nécessité est d'autant plus forte que la compréhension des comportements à l'origine des dynamiques s'améliore et qu'elle ne cesse de renvoyer aux apports éventuels de la théorie du chaos. Nous présentons la théorie du chaos, notamment ses origines, son impact sur la science et l'intérêt en économétrie financière de recourir à cette théorie.

#### 2.1.1.1 AUX ORIGINES DE LA THÉORIE DU CHAOS

L'effet papillon, une des principales caractéristiques de la théorie du chaos, est tombé dans le langage commun pour décrire les conséquences de petites causes. Dans le monde scientifique, les non initiés l'associent souvent aux travaux de Lorenz (1963). En réalité, elle avait déjà été mise en évidence par Poincaré dans son problème des trois corps. Mais, il revient à Maxwell(1876) la paternité de la description de ce phénomène.

La théorie du chaos est un peu à l'image de ce concept : elle est marquée par de nombreuses redécouvertes, par des interprétations différentes d'un même phénomène et finalement, elle est le résultat de nombreuses petites avancées. Rosser(2008) s'est intéressé aux précurseurs de la théorie du chaos qui est devenue progressivement la principale remise en cause de la vision newtonienne du monde. Elle offre une autre interprétation de la complexité et son positionnement aux confluent de nombreuses disciplines permet un développement conséquent des concepts, des instruments, des tests qui lui sont associés.

Nous revenons dans un premier point sur la nécessité d'une nouvelle approche des marchés financiers. Les complexités et les non-linéarités inhérentes aux marchés financiers doivent être prises en compte. L'idée d'une approche transdisciplinaire est étudiée. Dans un deuxième point, nous évoquons les précurseurs de la théorie du chaos, non sans avoir préalablement mentionné le renouveau qu'elle apporte par rapport à la théorie newtonienne.

#### **2.1.1.1.1 De la nécessité d'une nouvelle approche des marchés financiers**

La remise en cause des hypothèses néoclassiques des marchés financiers est essentiellement due aux crises financières qui se succèdent sur ces marchés. L'hypothèse d'efficience des marchés financiers liée à la marche au hasard des cours boursiers constitue selon Cont(2009) une des causes de la récente crise des subprimes, en ce sens où ces hypothèses sont à la base d'un certain nombre de modèles largement utilisés par le monde financier. Or, l'hypothèse d'efficience des marchés financiers est loin d'être observée et pour pallier ces faiblesses, certains proposent de recourir à des modèles stochastiques non linéaires dits complexes, des processus déterministes stochastiques ou des modèles alliant des structures stochastiques non linéaires et chaotiques, schématisés dans le graphique 3.

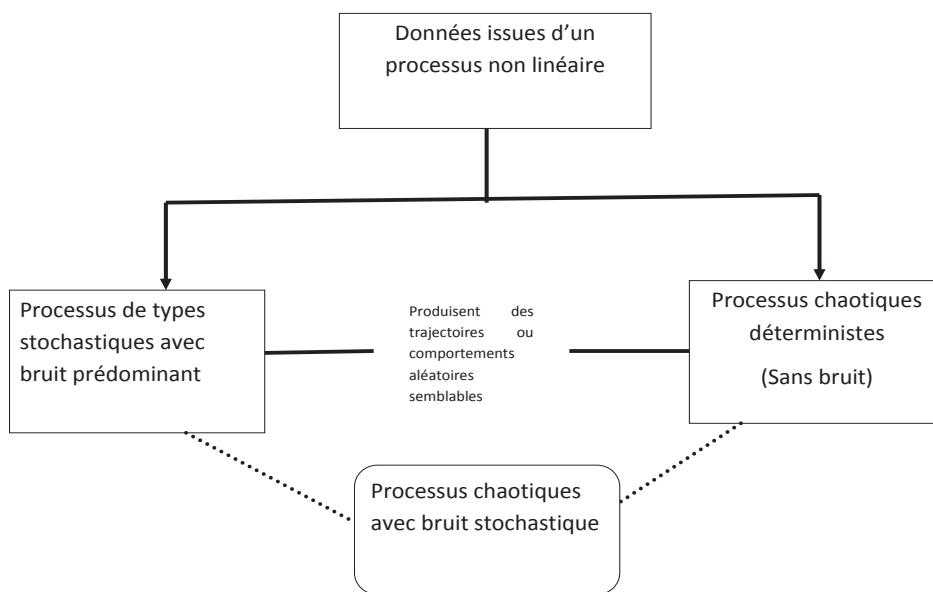
Si les modèles stochastiques non linéaires ont suscité un vif intérêt auprès des économètres financiers, les modèles chaotiques et chaos-stochastiques ont eu un accueil plus mitigé malgré leur nature non explosive. Selon Guégan(2003), ces modèles possèdent un attracteur que l'on peut détecter, dans lequel les trajectoires évoluent et qui fournit de précieuses informations. La reconstruction de l'attracteur constitue donc une étape primordiale qui est de plus en plus facilitée par le développement d'outils statistiques appropriés. La théorie moderne du chaos connaît d'importants progrès si bien qu'il est désormais possible non seulement de reconstruire les attracteurs mais aussi d'estimer les invariants liés à cet

attracteur et de faire des prévisions. Guégan(2003) propose une classification des modèles selon 2 approches :

- Paramétrique : ils sont subdivisés en 3 classes :
  - 1ère classe. Il s'agit de modèles stochastiques constitués d'un bruit prédominant non observé. On retrouve les modèles classiques : hétéroscédastiques, à mémoire longue et à changements de régime. Ces différentes modélisations permettent de prendre en compte des trajectoires non linéaires.
  - 2ème classe : ce sont les processus déterministes chaotiques qui possèdent un attracteur dans l'espace des phases. La détermination de cet attracteur renseigne sur la non linéarité des trajectoires.
  - 3ème classe : ce sont les processus de type chaotique en présence d'un bruit dynamique ou d'un bruit de mesure qui " collent [parfois] mieux à la réalité de nos observations."
- non paramétrique : cette classe recense des méthodes qui permettent de reconstruire des trajectoires. Il en est ainsi des fonctions radiales, de la méthode des plus proches voisins, des réseaux de neurones, des ondelettes.

La complexité et les non-linéarités qu'il est possible de détecter résultent de la coexistence sur le marché de deux comportements antagonistes dont l'interaction crée des dynamiques chaotiques. L'analyse des comportements fundamentalistes et chartistes a été entreprise par de nombreux auteurs qui ont montré que leurs présences simultanées sur le marché créaient des structures chaotiques. Ces complexités et ces non-linéarités doivent être prises en compte dans l'analyse des marchés financiers mais le développement des instruments liés à ces caractéristiques proviennent de disciplines diverses qui permettent d'envisager une approche transdisciplinaire des marchés financiers.

Nous revenons sur la complexité et la non-linéarité en économie avant de décrire l'interaction des fundamentalistes et des chartistes. Nous verrons, dans un dernier point, si une approche transdisciplinaire des marchés financiers est envisageable.



Graphique 3 – Approche paramétrique : les différentes modélisations

*Ce graphique décrit les différentes approches paramétriques possibles : les modélisations les plus utilisées s'inscrivent dans une approche stochastique. S'il reste difficile de rendre compte des non-linéarités des séries financières par une approche purement déterministe, il est possible de combiner les processus chaotiques à des structures stochastiques.*



#### 2.1.1.1.1.1 *Complexités et non-linéarités des marchés financiers*

Les conséquences de la crise financière des subprimes ont conduit à une énième remise en cause du système financier et plus précisément à une contestation de l'approche idéologique des marchés financiers. Est-il possible d'envisager une nouvelle conception des marchés financiers ? D'aucuns estiment qu'il est venu le moment d'une révolution idéologique qui doit conduire à une nouvelle approche.

L'avènement d'une nouvelle ère en économie est annoncée par Holt et al.(2010) qui considèrent que l'ère néoclassique est révolue. L'acceptation du fonctionnement complexe de l'économie constitue ainsi la principale caractéristique de cette nouvelle approche. La notion de complexité peut être analysée selon différents points de vue. Holt et al. (2010) retiennent :

- une approche générale de la complexité qui considère l'évolution de l'économie comme une discipline particulière ;
- une approche computationnelle de la complexité qu'ils décrivent comme une méthodologie de recherche ;
- une approche dynamique de la complexité, résultante d'une combinaison des approches générale et computationnelle.

Parmi les 45 définitions de la complexité recensées par Lloyd(2001), Holt et al.(2010) retiennent celle de Simon(1962) qui propose une conception hiérarchique de la complexité : "*Roughly by a complex system I mean one made up of a large number of parts that interact in a non-simple way. In such systems, the whole is more than the sum of the parts, not in an ultimate metaphysical sense, but in the important pragmatic sense that, given the properties of the parts and the laws of their interaction, it is not a trivial matter to infer the properties of the whole. In the face of complexity, an in-principle reductionist may be at the same time a pragmatic holist.*"

L'interaction complexe de sous-ensembles rend difficile la mise en évidence des propriétés propres à un système. Cette définition est particulièrement adaptée aux marchés financiers en tant que lieux d'interaction d'agents hétérogènes, rationnels ou pas, fondamentalistes, chartistes, ou spéculateurs. La diversité des agents et leurs interactions conduisent à des dynamiques très complexes qui peuvent muter en crise financière dès lors qu'une partie

non négligeable des agents perd confiance. Les marchés financiers doivent donc être appréhendés selon une approche microéconomique mais aussi une approche macroéconomique. La coexistence de ces deux sphères, micro et macro, contribue fortement à la complexité des marchés en ce sens où les décisions individuelles, qui peuvent être complètement rationnelles, peuvent devenir irrationnelles collectivement et conduire à des crises financières : c'est le concept de la généralisation fallacieuse développé par Keynes(1936). L'approche dynamique de la complexité décrite par Holt et al.(2010) est à relier à la définition de Day(1994) : " *A dynamical system is complex if it endogenously does not tend asymptotically to a fixed point, a limit cycle, or an explosion*". À partir de cette définition, Rosser(1999) retient 4 approches possibles de la complexité basées sur des dynamiques non linéaires : la cybernétique, la théorie des catastrophes, la théorie du chaos et les modèles basés sur l'interaction d'agents hétérogènes (Holt et al.(2010)). Le développement de ces théories s'inscrit dans une conception non linéaire complexe des dynamiques. Elles trouvent ses détracteurs comme Horgan (1995), cité par Rosser(1999), qui considère cet engouement pour la complexité comme une mode vouée à l'échec, à l'image des 3 précédentes théories : la cybernétique, la théorie des catastrophes et le chaos(les 4 C). Rosser(1999) reconnaît que les 4 C sont liés en ce sens où ils font appel à des concepts de la non-linéarité dont les développements sont à rechercher dans les travaux de Poincaré, entre autres. Mais, la complexité en économie est particulière : elle a trait aux interactions des calculs humains dans la prise de décisions et constitue en cela une exception par rapport aux autres disciplines : " *What we know indicate that even the simple models from introductory economics can exhibit dynamical behavior far more complex than anything found in classical physics or biology* "(Saari(1995), extrait de Rosser(1999)).

Si la cybernétique et la théorie des catastrophes ont fait l'objet d'importantes critiques en économie, la théorie du chaos et l'idée de dynamiques complexes sont encore sujettes à débats. Quelle que soit l'approche considérée, elles s'inscrivent toutes dans une conception non linéaire.

La non linéarité est une caractéristique difficile à définir, si bien qu'est finalement considéré comme non linéaire, tout ce qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire pouvant être décrit par une équation simple additive. Les méthodes linéaires s'attachent à décrire des structures régulières et sont liées à l'idée selon laquelle de petites causes ont de petits impacts. Ces modèles supposent alors que toute structure irrégulière résulte d'un aléa externe au système. S'il est actuellement difficile de définir un indice ou un test de non linéarité, un

certain nombre d'analyses peuvent être menées pour la détecter. Guégan(2003) propose l'analyse graphique et statistique décrite dans l'annexe B.1.

Kantz et Schreiber(2004) recommandent aussi une étude préliminaire des caractéristiques de la dynamique pour mettre en évidence des non linéarités :

- la stationnarité du processus est une étape primordiale : elle doit être menée à la fois sur les variances et moyennes des sous échantillons de telle sorte à mettre en évidence une éventuelle non-stationnarité qui affecterait divers instruments d'analyse.
- Les corrélations linéaires et la puissance spectrale constituent aussi des outils pour mettre en évidence la nature des dynamiques. Ainsi, la FAC d'un signal périodique présente des périodicités aux retards  $\tau$ , celle d'un processus stochastique est décroissante en fonction des retards mais la vitesse de décroissance dépend des propriétés du processus. Dans le cas d'un processus chaotique, les autocorrélations décroissent de façon exponentielle. La puissance spectrale d'un signal périodique fait apparaître des pics spectraux qui permettent ainsi de différencier le bruit du signal. Le bruit de mesure est représenté par des bandes continues sur le spectre. Pour des signaux chaotiques, ces mêmes bandes sont présentes sur le spectre même en l'absence de bruit. Il est donc difficile d'attribuer ces caractéristiques au bruit ou à la dynamique chaotique. Les auteurs recommandent aussi d'utiliser un filtre linéaire comme le filtre de Wiener et d'analyser le résidu issu de ce filtre.
- Le recours au prédicteur linéaire est aussi recommandé.

La non-linéarité dans les séries financières, si elle est détectée, rend souvent compte de dynamiques complexes qu'il est nécessaire d'analyser. Ces dernières résultent de l'interaction de deux types d'agents : les fundamentalistes et les chartistes.

#### 2.1.1.1.1.2 *Fondamentalistes et chartistes : des comportements complexes aux dynamiques chaotiques*

La théorie financière moderne est construite sur la théorie de l'efficience des marchés financiers qui stipule l'évolution aléatoire des cours, rendant le marché imprévisible. Ainsi, l'hypothèse de marche aléatoire formulée par Bachelier(1900) implique l'efficience des marchés financiers. Les définitions données par Fama(1965), Samuelson(1965), amendées par

Jensen(1978) ont conduit à la détermination de 3 formes d'efficience : faible, semi-forte et forte. Empiriquement, l'hypothèse d'efficience des marchés financiers semble invérifiée et les multiples analyses empiriques -sans exhaustivité : Ou et Penman(1989), Orléan(1989)-ont contribué au rejet de cette hypothèse. Face à cette théorie, deux types d'agents remettent en cause le caractère imprévisible des marchés financiers : les chartistes et les fondamentalistes. Une branche relativement importante de la littérature économétrique justifie la présence de clusters de volatilité des séries financières par la coexistence de ces 2 catégories d'agents (Brock et Hommes(1997,1998), Farmer(2000), Gaunersdorfer(2000), Lux et Marchesi(2000), Lebaron(2000), Gaunersdorfer et al. (2007)).

L'approche fondamentaliste stipule l'existence d'une valeur intrinsèque de l'actif autour de laquelle le prix fluctue. L'évolution des prix autour de cette valeur fondamentale est le résultat d'un bruit statistique alimenté par les rumeurs du marché. Les fondamentalistes expliquent que quelles que soient les fluctuations du marché, le prix revient toujours vers la valeur fondamentale de l'actif. Dans un marché dominé uniquement par des fondamentalistes, les fluctuations des prix sont en moyenne nulle et la valeur fondamentale de l'actif reflète la valeur intrinsèque de l'entreprise. Une baisse de sa valeur fondamentale est induite par de mauvaises performances, par un mauvais bilan financier ; autrement dit par des valeurs objectives. La spéculation n'est pas une stratégie gagnante dans un marché dominé par des fondamentalistes.

L'analyse technique, utilisée par 90% des traders, stipule que l'évolution passée des cours fournit les informations pour l'évolution future des cours. L'hypothèse centrale de cette approche est la répétition de l'évolution des cours qui permet ainsi de déterminer les prix futurs en fonction des prix passés. L'utilisation des représentations graphiques des cours permet ainsi d'identifier les tendances du marché à des fins prévisionnelles. Le renouvellement des trajectoires des cours permet aux chartistes d'anticiper les points de retournements. Les phases de fortes volatilités présentes dans les séries financières sont dues à un phénomène endogène causé par la dominance des marchés par les chartistes. Le comportement des chartistes est souvent qualifié de non-rationnel en ce sens où ils peuvent agir contrairement à la dynamique du marché. Ces agents peuvent aussi extrapoler les évolutions du marché, créant ainsi une forte volatilité.

L'interaction des chartistes et des fondamentalistes peut conduire à une dynamique non linéaire chaotique des marchés financiers. En effet, Kyrtou et Malliaris(2009), Gaunersdorfer et Hommes(2007), Kyrtou et Terraza(2002,2010) expliquent que l'interaction des

agents hétérogènes conduit à une forte complexité des marchés financiers. Une des justifications de cette complexité est donnée par Vega(2006), Daniel et Titman(2006) qui expliquent qu'elle est due à la réaction du public et à l'information privée. Hirshleifer et al. (2006) mettent en cause le rôle des investisseurs qui induirait une certaine complexité. Gaunersdorfer et Hommes(2007) justifient le rejet de l'hypothèse d'efficience des marchés par les faits stylisés observés dans les données empiriques. Les clusters de volatilité qui peuvent être modélisés par des processus de type GARCH seraient dus à une interaction entre chartistes et fundamentalistes. L'explication endogène des clusters de volatilité a conduit de nombreux auteurs (sans exhaustivité : Chen et al. (2005), Gaunersdorfer et Hommes(2007), Arthur et al. (1997), Brock et Hommes(1997,1998), Lebaron(2000)) à proposer des systèmes multi-agents dans lesquels ces 2 types de traders sont en interaction. Si la construction de ces systèmes multi-agents est profondément différente, la description des clusters de volatilité est identique : les phases de faible volatilité traduisent la dominance du marché par les fundamentalistes tandis que les phases de forte volatilité sont dues à la dominance du marché par les chartistes qui contribuent à la déviation des prix de leur valeur fondamentale. Les proportions de traders chartistes et de traders fundamentalistes ne sont pas figées, elles évoluent en fonction du type d'agents dominant le marché. Ainsi, les chartistes auront tendance à se comporter comme les fundamentalistes en abandonnant leurs outils lorsque le prix de l'actif converge vers sa valeur fondamentale. À contrario, en période de forte volatilité, une part des fundamentalistes préfère confier ses actifs à des traders chartistes qui extrapolent la volatilité observée. L'interaction entre les 2 types d'agents conduit à une dynamique non linéaire chaotique en ce sens où les clusters de forte ou de faible volatilité ne demeurent pas indéfiniment, il se produit un revirement de situation extrême dû à la non-linéarité qui résulte du lien entre la part de marché et la rentabilité observée des différents types d'agents (Artus(2008)).

La complexité des dynamiques créée par l'interaction de ces agents doit être prise en compte par des modèles appropriés. D'aucuns suggèrent même le recours à une approche transdisciplinaire pour mieux comprendre et analyser ces structures complexes.

#### 2.1.1.1.1.3 *Vers une approche transdisciplinaire des marchés financiers ?*

La pensée Newtonienne, importée de la physique, a influencée l'économie notamment les théories néoclassiques même si certains s'accordent à dire que la science économique ne

peut être une analogie de la physique newtonienne dans la mesure où elle a été incapable de définir des lois strictes et universelles comme en physique.

Au-delà de la conception de Newton, la physique offre des approches intéressantes pour l'étude des phénomènes économiques et financiers. Saviou et Siman(2013) expliquent les apports de la physique qui permettent d'envisager une vision transdisciplinaire de l'économie :

- un apport méthodologique descriptif et analytique
- le phénomène de Gestalt, qui permet de visualiser un tout comme la somme de ses parties individuelles, apporte des solutions pour la compréhension et la description de systèmes.
- Plerou et al.(2003) expliquent que les échelles de mesure et les aspects quantitatifs de la physique permettent de décrire les qualités d'un système ou d'un phénomène économique.
- la physique permet d'appréhender une étude hiérarchique d'un système et des parties sous-jacentes et offre ainsi une perspective micro et macro.
- Stauffer(2000) note l'apport de la physique dans la construction des équations qui simplifient et modélisent les phénomènes économiques.

Saviou et Siman(2013) évoquent l'émergence d'une nouvelle science : l'éconophysique qui permet l'identification des caractéristiques économiques par des mesures quantitatives pour converger vers des lois universelles. Le néologisme éconophysique est utilisé pour la première fois par Mantegna et Stanley(2000), : "*a neologism that denotes the activities of physicists who are working on economic problems to test a variety of new conceptual approaches deriving from the physical science*". Néanmoins, Saviou et Siman(2013) soulèvent les nombreuses difficultés qui peuvent émaner de la cohabitation de la théorie économique et de la physique. Chakraborti et al. (2013) reviennent sur les principales avancées de l'éconophysique. Cette branche, aux confluent de la physique et de l'économie, vise à construire des modèles et à les valider à partir des observations alors que plusieurs modèles en économie sont d'abord théorisés avant d'être vérifiés empiriquement. Les apports de l'éconophysique sont nombreux. Il en est ainsi des modèles d'échange cinétique initié par Daniel Bernoulli en 1738 puis repris par Maxwell qui définit la première loi statistique en physique. Les statistiques physiques sont alors utilisées en économie, notamment dans

les problèmes liés aux revenus et à la richesse. Mais le développement d'outils statistiques en économie utilisés ensuite en physique est tout aussi important : les lois de puissance sont initialement utilisées par Pareto(1897) dans l'étude sur la distribution des revenus avant d'être importées en physique. Le concept de marche aléatoire développé par Bachelier(1900) est utilisé en physique avec l'étude des mouvements brownien notamment par Osborne(1959).

Rosser(2008) nuance l'apport des éconophysiciens, qui présentent leur approche comme étant supérieure à l'approche économique standard, et rappelle les principales critiques à l'encontre de cette sous-discipline notamment " *[the] ignorance of relevant work in economics, inappropriate use of statistics, excessive and unwarranted assertions of finding universal laws and a failure to provide adequate theory for the model used* " (Rosser(2008)). Il faut analyser les apports et les faiblesses de l'éconophysique sur les plans empiriques et théoriques : il est reproché à cette discipline de grosses lacunes dans la littérature économique qui surévalue les résultats obtenus, des méthodologies statistiques très faibles, une formulation excessive des lois universelles en économie et un manque de modèles théoriques pour expliquer les phénomènes économiques. À ces critiques, McCauley(2006) confronte le manque de lois invariantes en économie. Rosser(2008) note la difficulté, malgré les résultats obtenus par certains éconophysiciens, d'une invariance dans les études empiriques et relève le faible pouvoir prédictif des crises financières du modèle de Johansen et Sornette(2001). Sur le plan théorique, les modèles de l'éconophysique s'attachent surtout à décrire des phénomènes économiques sans pour autant analyser et comprendre ces phénomènes.

---

La nature complexe et non-linéaire des marchés financiers est la résultante de l'interaction de deux types d'agents : les fundamentalistes et les chartistes. De nombreux auteurs se sont attachés à montrer que cette interaction produisait des structures chaotiques dans les séries temporelles financières. Une part non négligeable de chercheurs, issus essentiellement des sciences dures envisagent une approche transdisciplinaire en utilisant des outils issus de la statistique physique pour modéliser des phénomènes économiques. Néanmoins, l'éconophysique souffre d'un certain nombre de limites qui laisse perplexe quant aux résultats obtenus. Plutôt qu'une approche transdisciplinaire des marchés financiers, nous proposons de prolonger les recherches sur les apports de la théorie du chaos dans la compréhension des marchés financiers.

### 2.1.1.1.2 De Newton à Poincaré ou comment en est-on arrivé au chaos ?

La théorie du chaos offre aux scientifiques une nouvelle approche pour étudier les dynamiques. Mais elle a du, au préalable, s'affranchir de la conception newtonienne du monde. Cette dernière caractérisée par des hypothèses rigides, un formalisme mathématique et un réductionnisme méthodologique, est incapable d'expliquer un certain nombre de faits stylisés.

Vélasquez(2009) confronte ces deux conceptions dans divers domaines : économie, physique, météorologie. Mais c'est dans le domaine financier qu'elle justifie le mieux la nécessité de recourir à une nouvelle approche des marchés financiers : *" Indeed, one of the mayor lessons of the subprime crisis has been that current financial models are not based on adequate assumptions. Evidently, Neoclassical theory, today's mainstream economic and financial paradigm, has become obsolete for explaining the complexity of financial markets. It oversimplifies reality, and therefore, can only address problems under ideal or normal conditions. This is especially problematic for risk management, as its objective is to ensure that risks are controlled even in the wildest financial moments. For this reason, it is necessary to look for alternative theories that allow the description of real market dynamics, and provide accurate tools to measure the apparent disorder of today's capital markets. ."*

Les théories " alternatives " auxquelles elle se réfère portent essentiellement sur la théorie du chaos et la science des fractales. Ces dernières découlent naturellement d'un renouveau théorique, basé sur la remise en cause de la théorie Newtonienne. La physique Newtonienne offre dès le 17ème siècle une nouvelle conception du monde, essentiellement déterministe et réductionniste. Elle s'impose progressivement aux sciences sociales et notamment à l'économie via la théorie néoclassique. Néanmoins, elle est remise en cause en physique par 3 principales ruptures : la mécanique quantique, le principe de Carnot et la théorie du chaos. Face à ces nouveaux théoriques, la science économique est restée inerte, tentant tant bien que mal de converger vers un monde efficient. Si la mécanique quantique et le principe de Carnot semblent avoir des apports limités en économie, une approche par la théorie du chaos permet d'envisager de nouvelles perspectives de recherches. Cependant, les concepts récents liés à cette théorie n'ont pas encore permis d'établir une théorie générale applicable à tous les domaines. D'aucuns s'attachent à mettre en évidence un certain nombre d'invariants, permettant ainsi de converger vers une harmonisation des concepts liés à ces nouvelles approches. Ces difficultés sont à lier au développement et à la description des



concepts dans des disciplines aussi diverses que la philosophie, la météorologie, l'astronomie, la physique ou encore la peinture. La popularisation par Lorenz de l'effet papillon et des attracteurs étranges, les découvertes de Poincaré font de ces 2 scientifiques deux acteurs majeurs de la théorie du chaos. Mais il ne faut pas négliger les apports, qu'ils soient descriptifs ou mathématiques, de dizaines de scientifiques précurseurs dans la théorie du chaos.

Nous proposons une description succincte de la théorie de Newton. Nous discutons ensuite des hypothèses de cette théorie dans l'approche néoclassique et nous revenons sur les origines de la théorie du chaos.

#### 2.1.1.1.2.1 *Une présentation de la théorie Newtonienne*

Rosenblum et Kuttner(2006) reviennent dans "*Quantum Enigmas : Physics encounters and consciousness*", sur les découvertes qui ont marqué l'âge d'or de la théorie Newtonienne. Cette dernière s'impose au monde scientifique dès le 17ème siècle. Les découvertes d'Isaac Newton en 1687 notamment les lois sur le mouvement et la force de gravitation, vont conduire à l'émergence d'une nouvelle conception du monde : elle stipule une évolution du monde indépendante du temps dans laquelle présent et futur jouent le même rôle : "*Every state in the world is a result of a preceding occurrence.*" (Velasquez(2009)).

Newton s'affranchit des conceptions d'Aristote et de Galileo sur les chutes naturelles et le déplacement naturel des planètes. Il remet en cause ces acceptations et stipule qu'une force est nécessaire pour faire dévier un corps qui se déplace sur une trajectoire à vitesse constante, la force étant proportionnelle à la masse du corps : c'est la loi universelle du mouvement. Il définit en même temps la loi de la gravité.

La popularisation de ces découvertes par des auteurs comme Voltaire ou Madame de Châtelet, fait de Newton "*The most respected person in the Western Union*" (Rosenblum et Kuttner(2006)). En 1734, dans ses Lettres Anglaises, Voltaire compare la conception Newtonienne, qui s'impose en Angleterre à la vision cartésienne, majoritaire en France : "*Un Français qui arrive à Londres trouve les choses bien changées en Philosophie comme dans tout le reste. Il a laissé le monde plein ; il le trouve vide. À Paris, on voit l'univers composé de tourbillons de matière subtile ; à Londres, on ne voit rien de cela. Chez nous, c'est la pression de la Lune qui cause le flux de la mer ; chez les Anglais, c'est la mer qui gravite vers la Lune, de façon que, quand vous croyez que la lune devrait nous donner*

*marée haute, ces Messieurs croient qu'on doit avoir marée basse ; ce qui malheureusement ne peut se vérifier, car il aurait fallu, pour s'en éclaircir, examiner la lune et les marées au premier instant de la création. Vous remarquerez encore que le soleil, qui en France n'entre pour rien dans cette affaire, y contribue ici environ pour son quart. Chez vos Cartésiens, tout se fait par une impulsion qu'on ne comprend guère ; chez M. Newton, c'est par une attraction dont on ne connaît pas mieux la cause. À Paris, vous vous figurez la terre faite comme un melon ; à Londres, elle est aplatie des deux côtés. La lumière, pour un Cartésien, existe dans l'air ; pour un Newtonien, elle vient du soleil en six minutes et demie. Votre Chimie fait toutes ses opérations avec des Acides, des Alcalis et de la matière subtile ; l'Attraction domine jusque dans la Chimie Anglaise. L'essence même des choses a totalement changé. Vous ne vous accordez ni sur la définition de l'âme ni sur celle de la matière. Descartes assure que l'âme est la même chose que la pensée, et Locke lui prouve assez bien le contraire.[...] Ce fameux Newton, ce destructeur du système Cartésien, mourut au mois de Mars de l'an passé 1727. Il a vécu honoré de ses compatriotes, et a été enterré comme un Roi qui aurait fait du bien à ses Sujets."*

Les lois de Newton vont progressivement laisser la place à une conception du monde, différente de celles qui existaient jusque là, basée sur 5 critères :

1. Le déterminisme : le monde, selon Newton est déterministe. Ainsi, la position et la vitesse d'une paire de boules de bowling qui va entrer en collision peut être prédite arbitrairement. Rosenblum et Kuttner(2006) relèvent le paradoxe qui existe entre la liberté de croire ou non au déterminisme et l'approche newtonienne du monde : "*You have to believe in free will. You have no choice*<sup>39</sup>."
2. Réalité physique : la conception newtonienne du monde suppose que la Nature est une " machine ", dont on ne comprend pas tous les mécanismes, qui régit les différents mouvements du monde. Sur ce point, la mécanique quantique et la philosophie montrent que la réalité physique peut être interprétée différemment sans pour autant devenir une réalité subjective.
3. Séparabilité : une planète, une personne, un objet n'interagit avec le reste du monde que s'il existe une force physique réelle.
4. Réduction : la vision newtonienne repose sur une hypothèse réductionniste qui suppose qu'un système complexe peut être expliqué par de simples parties.

---

39. de Bashevis-Singer, extrait de Rosenblum et Kuttner(2006).

5. Une explication suffisante : Newton a longtemps expliqué que ses lois n'étaient basées sur aucune hypothèse (*Hypothesis non fingo*) et qu'une théorie n'a pas nécessairement besoin d'en formuler pour prouver qu'elle est consistante. Il rejete, notamment dans le cas de la force gravitationnelle, le recours à un modèle d'explication mécanique : "*Je n'ai pu encore parvenir à déduire des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravitation, et je n'imagine point d'hypothèses. Car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse, et les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale*".

Cette conception du monde va permettre le développement de théories sous-jacentes. Elle est importée dans d'autres disciplines, notamment en sociologie par Auguste Comte, en économie par Adam Smith et par Karl Marx, en psychologie par Freud. Nous précisons dans la section suivante l'analogie de la physique newtonienne en économie.

#### 2.1.1.1.2.2 *La vision Newtonienne dans la théorie néoclassique*

Rosenblum et Kuttner(2006) considèrent la théorie néoclassique comme une analogie de la physique Newtonienne, notamment le concept de main invisible d'Adam Smith. L'école néoclassique s'inscrit dans la conception de Newton en ce sens où elle est partisane du laisser-faire mais elle admet aussi un certain nombre d'hypothèses qui renvoient aux idées de Newton.

Ainsi, la théorie néoclassique postule, sous un certain nombre d'hypothèses, qu'un optimum peut être atteint dès lors que les agents rationnels satisfont leurs fonctions d'utilité respectives. L'optimum de Pareto est tel que s'il existe un déséquilibre, le marché, efficient par nature, le résorbera sans intervention externe. La notion d'équilibre se retrouve dans la loi sur le mouvement et l'idée d'une réponse proportionnelle à une force exogène venant perturber une trajectoire est tout aussi présente dans le cas de l'optimum de Pareto.

Mirowski(2004) relève le déterminisme Newtonien dans la théorie néoclassique " *These stochastic shocks had little or not theoretical justification, but themselves seemed only an excuse to maintain the pure deterministic ideal of explanation in the face of massive disconfirming evidence*". La description et le fonctionnement des marchés financiers dans la théorie néoclassique lient les valeurs passées aux valeurs futures par une équation dans

laquelle il existe, outre un bruit blanc aléatoire, une variable déterministe qui décrit l'évolution des prix :

$$X_{t+1} = X_t + \epsilon_t \quad (58)$$

À l'image de la physique newtonienne, la théorie néoclassique s'efforce de décrire le monde idéal tel qu'elle le conçoit : déterministe, avec des individus rationnels dont les choix créent des dynamiques sans aucunes complexités particulières. McCauley(2004) estime que la liaison établit par Mirowski(2002) entre la vision newtonienne et l'économie néoclassique alimente une confusion en ce sens où la conception newtonienne qui relèverait plus de la théorie s'efforce de décrire des mouvements macroscopiques de façon très précise et ce, à partir d'expérience ou d'observations de phénomènes. À contrario, l'économie néoclassique vise à développer un modèle qui ne décrit aucune réalité existante, si ce n'est celle que cette école de pensée considère comme idéale. McCauley(2004) confronte d'un côté la théorie newtonienne, les dynamiques complexes et chaotiques et d'un autre côté les anticipations rationnelles associées à la notion d'équilibre. Cette vision dichotomique fait apparaître un monde désordonné, complexe que l'on s'attache à décrire et la conception d'un monde idéal. Elle est intéressante puisqu'elle montre finalement l'état de la recherche en économie : cette vision idéale vers laquelle on tente, tant bien que mal, de converger est la vision néoclassique qui définit les règles du jeu financier depuis plusieurs décennies. La vision réaliste, chaotique, complexe des marchés financiers que McCauley(2004) confronte à la vision néoclassique est celle dont on doit connaître les mécanismes sous-jacents, les comportements et les caractéristiques pour pouvoir mieux anticiper ses mouvements et alors réfléchir à une meilleure conception, plus efficiente, à partir de cette vision réaliste. Le problème de la théorie néoclassique ne réside pas dans sa conception newtonienne de l'économie mais plutôt dans le développement de concepts clés du 19ème siècle qui ne sont pas remis en cause à l'heure actuelle alors même que la physique newtonienne est confrontée depuis plusieurs années à 3 principales ruptures qui ouvrent de nouvelles perspectives : la mécanique quantique, le principe de Carnot et la théorie du chaos. C'est cette dernière rupture que nous développons.

### 2.1.1.1.2.3 D'Anaxagoras à Lorenz : les origines de la théorie du chaos

*Quæ sunt Cæsaris, Cæsari*<sup>40</sup>

Rosser(2008) revient sur les précurseurs de la théorie du chaos avant la redécouverte par Lorenz(1963) de l'effet papillon. D'Anaxagoras à Lorenz, la théorie du chaos puise ses concepts dans des disciplines très diverses. La définition des concepts clés est tout d'abord descriptive : les premiers scientifiques et philosophes décrivent des structures chaotiques sans réellement comprendre l'aspect mathématique sous-jacent. Ensuite une approche mathématique d'un certain nombre de concepts, notamment les dérivés fractionnaires par Liebniz(1695) préfigurent le développement d'instruments clés de la théorie du chaos. Enfin, il est à noter qu'un certain nombre de chercheurs ont influencé la théorie du chaos sans pour autant le savoir, notamment en économie, par le développement de modèles capables de générer pour certains paramètres des dynamiques chaotiques.

Rössler(1998) revient sur le rôle particulier du philosophe grec Anaxagoras dans l'émergence d'une rupture de la complexité et notamment dans ce qui constituera plus tard les concepts clés de la théorie du chaos. Il désigne donc Anaxagoras comme le premier philosophe qui décrit finalement un ensemble de dynamiques qui seront formalisés plus tard par Poincaré : "*Anaxagoras introduces a technical term... "around motion" (perichoresis)... He goes to great pains to make clear it is not a circular, a closed, a periodic motion which he has in mind...Anaxagoras single-handedly created the qualitative mathematical notions used so successfully later by the Poincaré school : deterministic flow, surface-de-section (cross-section through a flow, i.e. a recurrence) and - most important - the notions of mixing and unmixing*". Il attribue à Anaxagoras l'idée d'autosimilarité qui sera reprise dans l'étude des fractales : "*the mind is self-similar (totally similar) both in the large and in the small*<sup>41</sup>".

Dans la littérature française, Voltaire décrit dans son dictionnaire philosophique le chaos qui a précédé la création "*Si nous voulions parler du chaos, je vous dirais que tout y était nécessairement en mouvement, et que le souffle de Dieu y était porté sur les eaux*". L'ordre dans le chaos est alors apporté par Dieu et le monde est décrit comme un ensemble d'élé-

---

40. Il faut rendre à César ce qui appartient à César.

41. extrait de Rössler(1998).

ments hétéroclites en mouvement. À sa manière, Victor Hugo(1865) dans *Les travailleurs de la mer* évoque le chaos comme "tous les pêle-mêle, depuis les mêlées d'hommes qu'on nomme batailles jusqu'aux mêlées d'éléments qu'on nomme chaos". L'océan est finalement "le plus indivisible et le plus profond" des chaos. Il le décrit avec une certaine particularité qui se rapproche assez bien de la conception moderne du chaos : "Essayez de vous rendre compte de ce chaos, si énorme qu'il aboutit au niveau. Il est le récipient universel, réservoir pour les fécondations, creuset pour les transformations. Il amasse, puis disperse; il accumule, puis ensemence; il dévore, puis crée. Il reçoit tous les égouts de la terre, et il les thésaurise. Il est solide dans la banquise, liquide dans le flot, fluide dans l'effluve. Comme matière il est masse, et comme force il est abstraction. Il égalise et marie les phénomènes. Il se simplifie par l'infini dans la combinaison. C'est à force de mélange et de trouble qu'il arrive à la transparence. La diversité soluble se fond dans son unité. Il a tant d'éléments qu'il est l'identité. Une de ses gouttes, c'est tout lui. Parce qu'il est plein de tempêtes, il devient l'équilibre. Platon voyait danser les sphères; chose étrange à dire, mais réelle, dans la colossale évolution terrestre autour du soleil, l'océan, avec son flux et reflux, est le balancier du globe".

Rosser(2008) voit dans les représentations de Léonard de Vinci un prélude à la théorie moderne du chaos : 'These depict spectacular turbulence, and turbulence in fluid dynamics has long been a central area of study associated with chaos theory, most notably including the work of Lorenz himself'.

Depuis les découvertes de Poincaré, un certain nombre de théories vont se développer sur la base des travaux du mathématicien français. Il en est ainsi de la théorie des oscillateurs par Andronov(1929) qui influencera les recherches de Kolmogorov(1958) sur les dynamiques turbulentes. D'autres travaux comme ceux de Duffing(1918), Cartwright et Littlewood(1945) sur les modèles d'oscillateurs apportent leur pièce à l'édifice par le développement des dynamiques chaotiques. Ueda(1980) s'inspire de ces travaux pour développer les premiers attracteurs étranges. Van Der Pol(1927) développe un modèle de circuit électrique capable de générer des dynamiques chaotiques.

Malgré la virulence du débat sur la présence de structures chaotiques dans les données économiques et financières, il faut reconnaître l'apport de ces disciplines dans la théorie du chaos. Palander(1935) développe, sans le savoir, un modèle économique avec un cycle de 3 périodes dont les simulations font apparaître des dynamiques chaotiques. Rosser(2008) note l'incertitude de ce modèle à pouvoir générer des structures chaotiques et accorde à

Strotz et al.(1953) la découverte des dynamiques chaotiques dans la simulation des modèles économiques, sans pour autant que ces auteurs aient conscience de leurs découvertes. May(1976) est le premier à utiliser un modèle générant des structures chaotiques et à le proposer pour des données démographiques. Rand(1978) est l'un des premiers à envisager la présence de structures chaotiques dans les données économiques, il propose donc un modèle chaotique pour l'analyse des dynamiques des duopoles de Cournot. Néanmoins, il revient à Malthus(1798) et Marshall(1920) le rôle précurseur dans la description et l'analyse des dynamiques erratiques des données économiques. Malthus(1798) développe dans *Essay on the Principle of population*, l'idée d'éléments endogènes et exogènes dans le contrôle de la population, éléments caractérisés par des changements irréguliers. De ce constat, plusieurs modèles démographiques et économiques générant des structures chaotiques sont développés.

Marshall(1920), principal partisan de l'école néoclassique, envisage la possibilité d'un monde imparfait, différent de celui qu'il décrit dans ses modèles. Ce monde, caractérisé par des dynamiques non-linéaires et sûrement chaotiques est décrit dans *Principles of Economics*(1920) : " *But in reality such oscillations are seldom as rhythmical as those of a stone hanging freely from a string; the comparison would be more exact if the string were supposed to hang in the troubled waters of mill-race, whose stream was at one time allowed to flow freely, and at another partially cut off. Nor are these complexities sufficient to illustrate the disturbances to which the economist and the merchant alike are forced to concern themselves. If the person holding the string swings his hand with movements partly rhythmical, and partly arbitrary, the illustration will not outrun the difficulties of some very real and practical problems of value*<sup>42</sup>". Enfin la modélisation des dynamiques macroéconomiques développés entre 1930 et 1950 décrivent des relations non linéaires capables de générer des comportements cycliques. Il en est ainsi des modèles de Hicks(1950), Goodwin(1951), Kalecki(1935), Kaldor(1940), capables de générer des dynamiques irrégulières, sans pour autant que les auteurs de ces modèles aient conscience de leurs découvertes.

L'avènement de la théorie du chaos comme science alternative suscite un accueil dubitatif dans le monde scientifique qui voit dans cette théorie des idées " étranges " qui " produisent des monstres "(Rosser(1998)). Maxwell(1876) est le premier à développer le concept de sensibilité aux conditions initiales dans sa théorie d'unification de l'électricité et du magnétisme. Il est l'un des premiers à intégrer la possibilité que de petites causes

---

42. Extrait de Rosser(2008).

puissent provoquer des effets importants, disproportionnés par rapport aux causes. La découverte de Weierstrass(1872) des fonctions éponymes, continues et non-différentiables va permettre le développement de la mécanique quantique par Planck et Mandelbrot estime que cette découverte pose les bases de la géométrie fractale. Enfin, Rosser(1998) présente Cayley(1879) comme un précurseur à la théorie du chaos. Ce dernier retient une équation cubique :  $x^3 - 1 = 0$  et propose d'étudier les itérations selon la méthode newtonienne pour analyser la convergence des solutions de cette équation vers un point arbitraire. Le résultat de Cayley(1879) montre que les itérations forment une dynamique erratique semblable à celle d'une pendule, générant un bassin fractale borné par 3 attracteurs. Quelques années plus tard, la découverte de l'ensemble de Cantor(1883) comme un ensemble fractal permet le développement, un siècle plus tard, de nouveaux concepts comme l'attracteur de Lorenz, la dimension d'Hausdorff(1918) entre autres. Ces différentes découvertes préfigurent, plus ou moins, ce qui constituera la théorie du chaos dont les travaux de Poincaré représentent un tournant majeur.

---

*" It is true that Poincaré had all the individual pieces. It is also certainly true that these pieces had all been observed or contemplated even earlier by others. It is also true that several individuals actually saw chaotic dynamics, either in the real world or in a computer simulation. "*

(Rosser(2008))

La conception newtonienne du monde s'est imposée progressivement à différentes disciplines. Caractérisée par un réductionnisme méthodologique, une vision déterministe du monde et un formalisme mathématique, elle est rapidement intégrée à la science économique et plus précisément à la théorie néoclassique. Cette dernière définit le fonctionnement des marchés financiers qu'elle s'attache à rendre efficients. Alors que la conception newtonienne est encore très présente en économie, la physique a su s'en défaire progressivement par 3 révolutions majeures : la mécanique quantique, le deuxième principe de la thermodynamique et la théorie du chaos. C'est cette dernière rupture que nous envisageons pour les marchés financiers.

La popularisation des découvertes de Lorenz a ombragé l'apport scientifique de dizaines de chercheurs. Si on a rendu à Poincaré la notoriété tant méritée dans la théorie du chaos, il n'en demeure pas moins qu'il faille reconnaître les apports d'Anaxagoras, de Cantor, de



Planck, de Maxwell, de Malthus entre autres. Il faut rendre à Lorenz la popularisation de l'effet papillon, des attracteurs étranges qui en font un acteur majeur du développement de la théorie du chaos.

### 2.1.2 LA THÉORIE DU CHAOS : CONCEPTS CLÉS ET TESTS DE DÉTECTION

*" Il est apparu que certains systèmes non linéaires régis par des lois excessivement simples pouvaient présenter des évolutions très complexes alors même que l'on s'attendait intuitivement à un comportement régulier. L'aspect surprenant d'une telle caractéristique provient du fait que ces systèmes ne sont soumis à aucune force aléatoire. Bien au contraire, les équations qui gouvernent ces systèmes sont purement déterministes. On pourrait alors penser que pour qu'un système déterministe puisse conduire à des évolutions très complexes, apériodiques, imprévisibles, il soit nécessaire que celui-ci comporte un grand nombre de degrés de liberté. Or, contre toute attente, il est apparu qu'un système avec uniquement 3 degrés de libertés en temps continu et un seul en temps discret peut exhiber de telles dynamiques. Ce phénomène selon lequel un système dynamique non linéaire avec un faible nombre de degrés de liberté peut produire des trajectoires apparemment dénuées de toute régularité, a marqué l'émergence d'un nouveau paradigme, baptisé chaos déterministe<sup>43</sup> ".*

Le recours à la théorie du chaos pour tenter d'expliquer les chroniques et notamment leur évolution, réside dans le fait que l'approche chaotique permet d'ouvrir de nouvelles perspectives concernant les explications du caractère endogène des fluctuations. Parmi ces perspectives, la théorie du chaos permet de rendre compte du caractère auto-entretenu des fluctuations et de les appréhender de manière exogène. L'intérêt de recourir à cette théorie, ou du moins à ses principaux instruments d'analyse, réside dans le fait que les fluctuations engendrées par un système chaotique se comportent comme des trajectoires aléatoires et ont des propriétés similaires aux chroniques financières. Kelsey(1988) établit un parallélisme entre le chaos et les marchés financiers dont la dynamique aléatoire est le résultat de décisions déterminées par les investisseurs.

Par ailleurs, les méthodes traditionnelles basées sur la FAC ou l'analyse spectrale ne sont pas adaptées à l'étude des caractéristiques des processus chaotiques en ce sens où l'étude des autocorrélations ne permet pas de distinguer un processus déterministe chaotique d'un processus stochastique. Il est donc nécessaire de recourir à des instruments plus puissants

---

43. Lardic et Mignon(2002).

pour établir cette distinction. Si en théorie, de nombreux instruments ont été développés pour détecter les structures chaotiques, la procédure pratique, notamment sur une série temporelle, s'appuie sur le théorème de Takens (1981).

L'analyse de la nature chaotique d'une série temporelle nécessite la reconstruction des trajectoires dans l'espace des phases ou espace d'états de telle sorte à pouvoir étudier les propriétés spécifiques de l'ensemble des points ainsi reconstruits. Il est admis pour le processus sous-jacent l'existence d'une mesure invariante qui assure que les propriétés de la trajectoire sont préservées lors de ce plongement. L'espace d'états dans lequel sont plongées les données est un espace contenant toutes les non-linéarités du système. Mais, en pratique la dimension  $n$  de l'espace dans lequel la série temporelle est définie est inconnue et ce que l'on observe n'est qu'une projection de cette série. Cette procédure suppose qu'il est toujours possible de plonger un espace  $E$  de dimension  $n$  dans un espace de dimension  $d$  si  $d \geq 2n + 1$  grâce à une application  $\phi$  de l'espace d'origine  $E$  dans un espace euclidien tel que  $E$  et  $\phi(E)$  aient les mêmes propriétés topologiques. Guégan(2003) rappelle les conditions nécessaires à ce plongement, i.e., l'existence d'une seule application inverse pour  $\phi$ ,  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  doivent être continûment différentiables, la stabilité est assurée si  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont des fonctions de types Lipschitz.

Nous présentons dans ce qui suit les concepts-clés de la théorie du chaos et les tests de détection des structures chaotiques.

#### 2.1.2.1 CONCEPTS-CLÉS

La prédictibilité d'un système est étroitement liée au degré de déterminisme qu'il contient. Leibniz, repris par Bernard(1865) considère le déterminisme scientifique comme un fait indéniable : *"les conditions d'existence de tout phénomène sont déterminées d'une manière absolue(...). La négation de cette proposition ne serait rien d'autre que la négation de la science elle-même"*. Il existe de nombreuses situations réelles qui comportent une part non négligeable de déterminisme si bien que la répétition de ces situations est facilement prévisible. Le causalisme selon Leibniz défendu par ces auteurs suppose que rien n'est dû au hasard. Une connaissance parfaite de l'état du système à la période initiale permet de déterminer l'état du système pour les périodes à venir, et ce grâce aux mathématiques. La théorie du causalisme de Leibniz est confrontée à de nombreuses critiques car elle ne laisse aucune place à l'aléa et au choix. La prise en compte des 2 sphères : le monde réel et

le monde scientifique conduit un certain nombre d'auteurs à développer l'idée d'un déterminisme physiologique qui concilierait les deux mondes. L'existence d'un phénomène est alors soumise à des conditions déterminantes qui peuvent être influencées par des choix que nous effectuons. Les lois issues des sciences ne décrivent pas exactement la réalité mais plutôt une norme ou un ensemble de règles que l'individu dit rationnel doit satisfaire. Selon Israël(1992), l'individu rationnel acquiert sa liberté dès lors qu'il se rapproche de cette norme. En adoptant un déterminisme philosophique, les scientifiques entrouvrent la possibilité d'un déterminisme permettant de décrire la réalité : le déterminisme méthodologique. Quel que soit le déterminisme retenu, il y a toujours une cause dont l'effet sera proportionnel à l'importance de la cause. Ekeland(1984) se réfère à Maxwell pour expliquer que toute l'information que nous pouvons retirer d'une cause n'est pas utile pour prévoir un phénomène car une cause ne peut survenir deux fois de façon identique. En réalité, il faut prendre en compte toutes les petites causes qui à un moment permettront une prévision approximative du phénomène. Maxwell(1876) puis Gleick(1987) constatent alors que de petites causes peuvent induire des effets disproportionnés aux causes. Ce constat contredit l'idée d'approximer l'évolution d'un phénomène en négligeant les petites causes et conduit à un certain paradoxe : comment anticiper un phénomène déterministe sans disposer de toutes les informations nécessaires, aussi minimales soient-elles ? Laplace(1810) recommande le recours aux probabilités pour décrire les phénomènes déterministes que nous ne pouvons expliquer. Probabiliser les liens causaux entre deux phénomènes permet d'établir des faits que l'on peut accepter comme vrais en fonction de la probabilité d'acceptation. C'est dans cette perspective que Laplace (1810) développe le théorème central limite. Ces évolutions vont ombrager l'utilisation des équations différentielles pour déterminer l'évolution d'un phénomène notamment à cause de l'impossibilité de réunir toutes les variables explicatives d'un phénomène mais aussi des difficultés de résolution des équations différentielles qui peuvent n'avoir aucune solution. Il en est ainsi pour Poincaré(1890) et le problème des 3 corps. L'analyse des systèmes complexes est devenue progressivement l'objet des théories probabilistes jusqu'à ce que le clivage aléa-déterminisme évolue. Certains systèmes déterministes exhibent des trajectoires aléatoires si bien qu'il devient difficile d'identifier la nature du processus générateur. Ces systèmes constituent alors une branche particulière des systèmes déterministes et sont dits chaotiques. Les systèmes dynamiques aléatoires et déterministes chaotiques peuvent être comparés pour mettre en évidence leurs similitudes, leurs ressemblances et surtout leurs différences. Pour cela, il s'agit de déterminer

les mesures invariantes par isomorphisme qui caractérisent ces systèmes. Le recours à la théorie ergodique ne permet pas une distinction systématique entre les systèmes déterministes et aléatoires. Kolmogorov(1958) propose alors de recourir à l'entropie métrique comme mesure invariante qui permet de distinguer 2 systèmes non-isomorphes ayant tous les deux un spectre continu. Par ailleurs, la sensibilité aux conditions initiales qui caractérise les systèmes chaotiques peut être détectée par le calcul des exposants de Lyapunov. Une autre caractéristique des systèmes chaotiques est fournie par les mesures de récurrence. Nous présentons dans les paragraphes suivants les caractéristiques des systèmes chaotiques avant de préciser les méthodes de reconstruction nécessaires pour une série temporelle et le théorème de Takens(1981) qui permet le plongement de la série temporelle dans un pseudo-espace des phases.

#### **2.1.2.1.1 Définition et caractéristiques des systèmes chaotiques**

Le chaos, dans sa conception générale, décrit le désordre qui existait avant la naissance de l'univers ou l'intervention d'une puissance divine. Cavallès(1994) confronte cette conception, prédominante jusqu'à la moitié du XXème siècle à celle du " retour au chaos " qui fonde la théorie du chaos. Cette opposition entre une description littéraire et une définition mathématique du chaos conduit de fait à une approche différente et nous nous plaçons, bien entendu, dans ce que Cavallès(1994) désigne comme la deuxième séquence de l'histoire du chaos. En réalité, la description littéraire s'applique aussi à l'étude des systèmes dans la théorie du chaos. Bensaïda et Litimi(2013) réconcilient ces approches : *"chaos refers to an apparent lack of order in a system that nevertheless obeys certain laws or rules"*. Cet oxymore entre d'un côté un désordre apparent et d'un autre côté l'existence d'un ordre défini par des règles ou des lois traduit parfaitement la complexité des systèmes chaotiques et les difficultés d'analyses qui en découlent.

La théorie du chaos porte sur l'étude des systèmes dynamiques. Elle résulte de la confrontation de 3 avancées majeurs :

- la théorie des systèmes dynamiques ;
- l'analyse des systèmes non-linéaires, désordonnés ;
- l'ordinateur.

Selon la définition donnée par Guégan(2003), un système dynamique  $(E, \varphi)$  est la donnée d'une application  $\varphi$  définie d'un espace  $E$  dans lui-même où  $E$  est un espace métrique, tel que pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  :

$$X_{t+1} = \varphi(X_t)$$

Il s'agit d'un système dynamique discret où  $X_t$  est une variable aléatoire munie d'une loi d'observation. Autrement dit, un système dynamique décrit l'évolution temporelle d'un système dans un espace des phases ou espace d'états. Un système chaotique est ordonné dans l'espace des phases et désordonné dans l'espace du temps. Nous précisons dans les paragraphes suivants la reconstruction, nécessaire, d'une série temporelle dans son espace des phases. En fonction de la nature de la fonction  $\varphi$ , le système dynamique est soit linéaire, soit non-linéaire. Si  $\varphi$  est non linéaire alors le système dynamique peut être chaotique. Selon Guégan(2003),  $\varphi$  est une fonction chaotique si pour une condition initiale  $X_0$ , caractérisée par une mesure  $\mu$  :

- (a)  $\varphi$  est une fonction non-linéaire ;
- (b)  $\varphi$  ne contient pas de termes aléatoires ;
- (c)  $\varphi$  est apériodique ;
- (d)  $\varphi$  est ergodique pour  $\mu$  ;
- (e)  $\varphi$  est sensible aux conditions initiales ;
- (f)  $\varphi$  possède un attracteur.

Une autre définition, souvent retenue, est fournie par Devaney(1989) qui précise les propriétés d'un système dynamique chaotique :

1.  $\varphi$  est sensible aux conditions initiales
2.  $\varphi$  est transitive
3. les points périodiques de  $\varphi$  sont denses dans  $E$ .

La propriété [1. & (e)] est celle qui est le plus souvent observée. Elle est redécouverte par Lorenz en 1972 et popularisée par sa présentation " *Predictability : Does the flap of a Butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?* " devant l'American Association for

the Advancement of Science. Au XIX<sup>ème</sup> siècle, le concept de sensibilité aux conditions initiales est mis en évidence par Poincaré<sup>44</sup> dans *Science et méthode* lors de son étude sur le problème des 3 corps. Ce dernier a trait aux orbites décrites par 3 corps que constituent la terre, la lune et le soleil et notamment sur la stabilité ou au contraire l'instabilité de ces orbites. Il fut le premier à montrer que le déterminisme d'une loi n'implique pas forcément sa prédictibilité : " *La probabilité est opposée à la certitude ; c'est donc ce qu'on ignore et, par conséquent semble-t-il, ce qu'on ne saurait calculer. Il y a là une contradiction au moins apparente et sur laquelle on a déjà beaucoup écrit. [...] Les anciens distinguaient les phénomènes qui semblaient obéir à des lois harmonieuses, établies une fois pour toutes, et ceux qu'ils attribuaient au hasard ; c'étaient ceux qu'on ne pouvait prévoir parce qu'ils étaient rebelles à toute loi*". Poincaré met l'accent sur la difficulté de distinguer les événements issus du hasard des événements provoqués par une modification de l'état initial et cette distinction est bien reprise par l'exemple suivant : " *Le premier exemple que nous allons choisir est celui de l'équilibre instable ; si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté ; il nous semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pesanteur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légèrement d'un côté ou de l'autre, et dès qu'il penchera, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Si même la symétrie est parfaite, une trépidation très légère, un souffle d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc ; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens de sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale. Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard*". Ainsi l'état initial conditionne de manière très significative l'état final et une précision optimale des conditions initiales est nécessaire pour anticiper l'état final : " [...] *il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit*". Ce passage insiste bien sur l'impact des conditions initiales dans la prévision d'un événement et constitue la particularité essentielle des systèmes déterministes relevant de la théorie du chaos. Il est possible de quantifier la sensibilité aux

---

44. Il faut rappeler que Maxwell(1876) dans *Matter and Motion* évoque déjà la sensibilité aux conditions initiales dans les phénomènes physiques.

conditions initiales d'un système en estimant les exposants de Lyapunov (▷ §2.1.2.2.2.). Cette caractéristique que constitue la sensibilité aux conditions initiales est souvent retenue pour qualifier si un système est ou non chaotique. Ainsi, Li et Yorke(1975) définissent le chaos comme l'ensemble des systèmes dynamiques rigoureusement déterministes mais qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales. Or, cette définition, incomplète, est dénoncée par Yousefpoor et al.(2008) qui soulignent que si la sensibilité aux conditions initiales est une condition nécessaire, elle n'est en aucun cas suffisante. La propriété (c) de la définition de Guégan(2003) est liée à la sensibilité aux conditions initiales : si cette dernière est observée pour  $\varphi$  alors il n'existe pas d'orbite attractive périodique dans E.

Les propriétés (3. et (f)) se rejoignent. Tout système dynamique possède un attracteur. Ce dernier est défini par Diks et al.(2008) comme étant " *the subset of state space points to which the dynamics are confined in the long run. It contains informations about the long run dynamical behavior of the system*". L'attracteur est un invariant du système. Les points fixes et les cycles limites sont des attracteurs. Pour des systèmes chaotiques, les attracteurs correspondants sont caractérisés par des structures géométriques particulières. Dans l'analyse d'une série temporelle, il est nécessaire de reconstruire l'attracteur du système dont elle est issue. La propriété 3. de la définition de Devaney(1989) suppose l'existence d'un sous-ensemble dense de E composé des points périodiques de  $\varphi$ . Plus précisément, ce sous-ensemble comporte des points périodiques instables et les trajectoires qui passent près de ces points périodiques s'en écartent rapidement (Yousefpoor et al.(2008) et Banks et al.(1992)). Les propriétés (a) & (b) sont des conditions triviales des systèmes chaotiques. La transitivité (propriété 2.) de la fonction  $\varphi$  suppose que pour deux sous-ensembles non vides U et V de E, il existe un nombre naturel k tel que  $\varphi^k(U) \cap V$  soit non-vide. Selon Guégan(2003), la condition 2. de la définition de Devaney(1989) est trop forte et la condition 3. est superflue puisqu'il existe des fonctions  $\varphi$  chaotiques qui ne comportent pas de points périodiques.

Une autre caractéristique des systèmes chaotiques porte sur les bifurcations. Nous retenons la définition de Guégan(2003) :

**Définition 1** Soit  $N_\lambda$ , le nombre de points d'équilibre pour  $X_{t+1} = \varphi(X_t)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda$ . Étant donné un nombre  $\epsilon$  petit, si  $N_\lambda$  n'est pas constant sur l'intervalle  $[\lambda_0 - \epsilon; \lambda_0 + \epsilon]$  alors le nombre  $\lambda_0$  est appelé bifurcation et on dit que le système a une bifurcation quand le paramètre  $\lambda$  dépasse  $\lambda_0$ .

### 2.1.2.1.2 Méthodes d'espace des phases

Les méthodes non linéaires des séries temporelles portent sur des systèmes dynamiques dans lesquels l'évolution du temps est défini dans un espace des phases. Ce dernier renseigne sur les caractéristiques d'une dynamique. Ainsi, dans le cas d'un système purement déterministe, l'espace des phases renseigne sur les états futurs de la dynamique. Théoriquement, les systèmes purement déterministes sont caractérisés par une propriété d'unicité dans l'espace des phases : la dynamique est décrite par une trajectoire unique. Un certain nombre de systèmes dynamiques sont décrits par un ensemble de phases et les trajectoires de ces systèmes dépendent de règles de transition qui permettent le passage d'un état à un autre comme dans le cas d'un processus markovien. Supposons que l'espace d'état est  $\mathbb{R}^m$ . Un état est défini par un vecteur  $x \in \mathbb{R}^m$ . Il est alors possible de décrire les dynamiques relatives à cet espace par un graphique à  $m$  dimensions (cas discret) ou par une équation différentielle (cas continu). Dans le cas discret, on a :

$$X_{n+1} = F(x_n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (59)$$

Dans le cas continu, on a :

$$\frac{d(x(t))}{dt} = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (60)$$

La suite de points  $x_n$  ou  $x(t)$  constitue la trajectoire qui satisfait l'équation différentielle de premier ordre du système avec  $x_0$  la condition initiale. L'ensemble des conditions initiales qui conduisent à des trajectoires ayant un comportement asymptotique identique est nommé bassin d'attraction<sup>45</sup>. Les systèmes dynamiques possèdent des solutions bornées. Ils sont dits dissipatifs et pour un ensemble de conditions initiales, les trajectoires de ce système sont attirées, après quelques périodes, dans un sous-ensemble de l'espace des phases qu'on appelle attracteur. Afin de reconstruire l'attracteur du système, il faut définir un ensemble de paramètres.

À partir d'une série temporelle, il est possible de reconstruire les vecteurs d'états. Cette procédure de reconstruction de l'espace des phases est généralement menée au moyen de

---

45. Il est possible de retenir la définition de Guégan(2003) : le bassin d'attraction  $D$  associé au système dynamique  $X_{t+1} = \varphi(X_t)$  avec  $X_0$  comme point initial est l'ensemble des points  $X$  tels que  $\varphi^{(t)}(X) \rightarrow X_0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .



la méthode des retards. Soit  $F_n = F(X(n_{\Delta t})) + \eta_n$  où  $\eta_n$  est un bruit de mesure. La reconstruction dans un espace à  $m$  dimensions est donnée par :

$$F_n = (F_{n-(m-1)\tau}, F_{n-(m-2)\tau}, \dots, F_{n-\tau}, F_n) \quad (61)$$

Pour  $\tau > 1$ , seule la fenêtre temporelle pour chaque vecteur est augmentée alors que le nombre de vecteurs construits à partir de la série temporelle est le même. Sous certaines conditions, l'attracteur formé par  $F_n$  est équivalent à l'attracteur de l'espace inconnu dont est issu la série temporelle si la dimension  $m$  est assez grande. Plus précisément, cette propriété est observée lorsque  $m$  est deux fois supérieur à la dimension de l'attracteur ( $\triangleright$  §2.1.2.1.3.). Le plongement de la série nécessite la définition d'une dimension adéquate. Lorsqu'on dispose d'une série temporelle, il est difficile de connaître  $m$  et  $\tau$ . Aussi, des méthodes ont été développées pour déterminer ces paramètres. La théorie du plongement garantie pour des données non bruitées l'existence d'une dimension  $m$  de telle sorte que les vecteurs  $F_n$  soient équivalents aux vecteurs de l'espace des phases. Il existe deux approches pour optimiser  $m$  et  $\tau$  :

- à partir d'outils statistiques ;
- par une analyse des résultats en balayant différentes valeurs pour  $m$  et  $\tau$ .

Un autre paramètre important est le produit  $m\tau$ . C'est la fenêtre temporelle représentée par un vecteur de plongement. Le choix du paramètre  $m$  est très important car une dimension trop importante conduit dans le cas de données chaotiques à une redondance et dégrade la performance des algorithmes utilisés sur ces données.

Il est possible de déterminer le paramètre  $m$  par la méthode des faux plus proches voisins. Elle est introduite par Arbabanel, Brown et Kennel(1992), modifiée par Hegger et Kantz(1999), et consiste à mettre en évidence des points proches dans l'espace des phases mais dont les trajectoires divergent fortement dans le futur. Supposons que la dimension de plongement correcte pour un ensemble de données est  $m_o$ . L'étude de cet ensemble de données pour une dimension de plongement  $m < m_o$  conduit à éliminer certains points du système, considérés comme faux voisins. Statistiquement, il s'agit de prendre pour chaque point d'une série temporelle ses plus proches voisins dans la dimension  $m$  et de calculer le rapport des distances entre deux points dans la dimension  $m$  et  $m + 1$ . Si ce rapport excède un seuil  $r$ , définit préalablement, les points sont des faux voisins.

Le choix du paramètre  $\tau$  est moins problématique que le paramètre  $m$  en ce sens où

différentes valeurs de  $\tau$  conduisent à des résultats similaires dans le cas de données non bruitées. Si la valeur de  $\tau$  choisie est trop petite alors les éléments du vecteur de retard risquent d'être fortement corrélés tandis que si elle est trop grande, ces différents éléments sont indépendants. Une représentation à deux dimensions permet de donner une première recommandation pour le choix de  $\tau$ .

### 2.1.2.1.3 De la théorie à la pratique : le théorème de Takens

Le théorème de Takens ou théorème de plongement prouve ce qu'a illustré Packard et al.(1980), à savoir qu'il est possible de préserver les invariants d'une chronique temporelle lors de la reconstruction de la dynamique dans l'espace des phases. Pour cela il suppose un processus dynamique  $X_t$  généré par  $X_{t+1} = f(X_t), X \in \mathbb{R}^n$ . Étant donné qu'en économie on ne connaît ni la forme structurelle de  $f(X_t)$ , ni la dimension  $n$  de l'espace dans lequel évolue la trajectoire globale de  $X_t$  et dans le cas où l'on ne dispose pas d'informations sur le nombre et la nature des variables intervenant dans le système, il faut construire des variables indépendantes à partir de l'évolution temporelle d'un signal unidimensionnel  $Y_t$ , fonction de  $X_t : Y_t = h(X_t)$ . Parmi les différentes méthodes possibles pour générer ces séries, il existe une méthode particulière qui est la méthode des retards et qui consiste à partir de l'observation d'une série unidimensionnelle  $Y_t, t = 1, \dots, T$  à construire un système dynamique artificiel  $X_t^m$  qui évoluera dans un pseudo-espace des phases de dimension  $n$ . Ainsi le passage de  $Y_t$  à  $X_t^m$  correspond à un changement d'espace : il s'agit de projeter une chronique de dimension très grande vers un espace de dimension finie  $m$ . Les paramètres de la transformation sont  $m$ , la dimension de plongement et  $\tau$ , un écart temporel. La dimension de plongement est alors la dimension de l'espace des phases dans lequel l'attracteur est reconstruit. Ainsi si on part de notre chronique observée  $Y_t$ , on compose des vecteurs  $X_t^m$  de dimension  $m$ , appelés les  $m$ -histoires des observations. Chaque vecteur  $X_t^m$  de la nouvelle chronique dépend des valeurs observées de la variable  $Y_t$ , à l'instant  $t$  et des  $(m-1)$  instants décalés de  $\tau k = k\tau$  avec  $k = 1, \dots, (m-1)$  :

$$X_t^m = (Y_t, Y_{t+\tau}, Y_{t+2\tau}, \dots, Y_{t+(m-1)\tau}) \quad (62)$$

Avec  $t = 1, \dots, T - (m-1)$ . Takens établit alors que si  $m \geq 2n + 1$  avec  $n$  la dimension inconnue du système, le comportement des  $m$ -histoires imitera celui du système dynamique

sous-jacent inconnu. Autrement dit l'attracteur que nous obtenons a les mêmes propriétés topologiques que le système initial. À partir de ce théorème, il est alors possible d'établir si l'attracteur d'un système sous-jacent est chaotique ( $\triangleright$  Graphique 4).

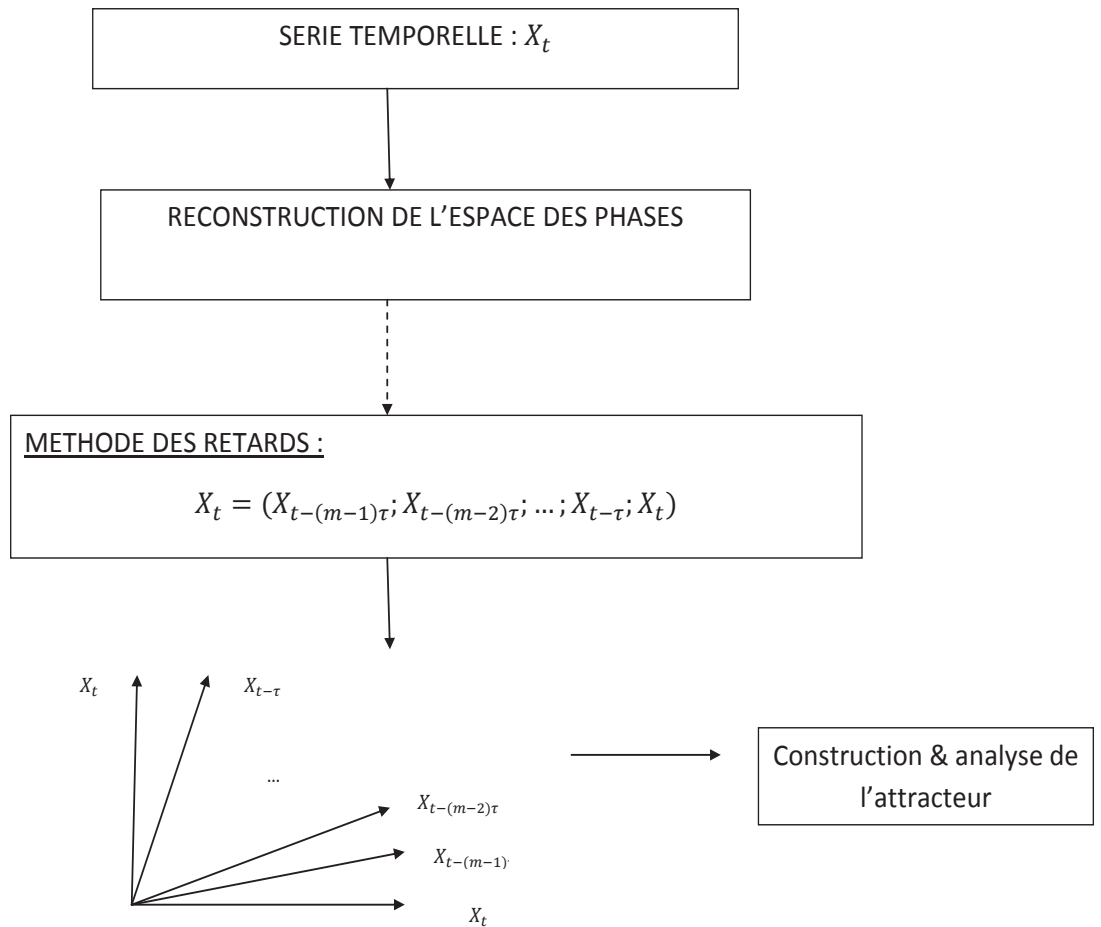
---

L'étude des systèmes chaotiques est particulièrement intéressante dans la mesure où ces systèmes décrivent des dynamiques aux comportements aléatoires mais régis par des équations déterministes. L'intérêt premier porté à ces systèmes est lié à la prévision : la dynamique d'un système stochastique est, par définition, imprévisible alors qu'une dynamique chaotique permet des prévisions à court terme.

La complexité de ces systèmes, que l'on retrouve dans les différentes définitions, a conduit au développement d'une théorie des systèmes chaotiques qui permet d'analyser et de détecter une série temporelle chaotique par la mise en évidence des invariants du système dont elle est issue. Nous précisons les tests permettant la détection des structures chaotiques dans une série temporelle.

#### 2.1.2.2 TESTS DE DÉTECTION

Le comportement erratique des trajectoires chaotiques ne permet pas de distinguer visuellement une chronique issue d'un modèle chaotique d'une réalisation d'un modèle stochastique. La nécessité de mettre en évidence les structures existantes dans une série temporelle est liée aux problèmes de modélisation et de prévision. L'identification d'un processus générateur purement stochastique restreint considérablement la possibilité d'établir des prévisions du processus étudié. À contrario, un système déterministe chaotique permet d'envisager des prévisions à court terme dont la durée dépend de la sensibilité aux conditions initiales. Poincaré, en tant que pionnier dans la théorie du chaos, définit un certain nombre de notions qui vont permettre un développement théorique des caractéristiques d'un processus chaotique. Ainsi, le concept de récurrence et le théorème qui lui est associé vont conduire à la mise en place d'instruments basés sur ces définitions. Inspirés par les travaux de Poincaré, Lyapunov, Kolmogorov et Hausdorff donnent leurs noms à différents concepts et mesures spécifiques aux systèmes déterministes chaotiques. Le caractère théorique de ces différents outils de quantification ne permet pas une application directe sur des séries temporelles empiriques.



Graphique 4 – Reconstruction de l'attracteur

*Il existe plusieurs méthodes de reconstruction de l'attracteur mais la plus utilisée reste la méthode des retards qui permet de créer plusieurs vecteurs qui sont utilisés pour reconstruire l'attracteur.*

De nombreux auteurs (Linton et Shintani(2004), Kantz et Schreiber(1997), Grassberger et Procaccia(1983), Eckmann et Ruelle(1992) entre autres) ont proposé des méthodes empiriques qui permettent de déterminer la présence de structures chaotiques. Ces différents outils ont fait l'objet d'une classification notamment par Belaire-Franch et Contreras(2001). Selon ces derniers, il existe 3 types de méthodes permettant de déceler les structures chaotiques d'une série : une approche métrique, une approche dynamique et une approche topologique. L'engouement suscité par la théorie du chaos dans des disciplines diverses et

variées a contribué à un développement impressionnant de tests de détection de structures chaotiques. Certains tests sont très spécifiques à la discipline dans laquelle ils ont été développés quand d'autres se veulent plus généralistes. La tendance actuelle converge vers le développement d'outils de détection adaptés à tout type de données, quels que soient le pas d'échantillonnage et la taille de l'échantillon (dans la mesure du raisonnable). La question des structures existantes dans les données, notamment le bruit dynamique qui peut exister commence à être abordé. Nous présentons dans ce qui suit les 3 approches : pour chacune d'elles, nous introduisons quelques méthodes.

### 2.1.2.2.1 Approche métrique

Le comportement " étrange " des dynamiques chaotiques est reflété dans l'espace des phases par les trajectoires qui représentent l'attracteur du système. Pour des systèmes chaotiques dissipatifs, l'attracteur est géométriquement complexe, d'où son aspect étrange. Il y a plusieurs moyens de quantifier l'autosimilarité d'un objet géométrique par une dimension. En générale, une dimension non entière traduit un système chaotique. Ainsi, un point fixe est de dimension nulle alors qu'un attracteur périodique est de dimension 1. Selon la définition donnée par Guégan(2003) : " la dimension mesure en quelque sorte le nombre de variables " essentielles ", utiles pour caractériser la dynamique du système". Elle distingue deux classes de dimensions :

- celles liées uniquement à une métrique : c'est le cas de la dimension d'Hausdorff, de la capacité de Kolmogorov ;
- celles liées à une métrique et à une loi de probabilité.

L'approche métrique vise à calculer les distances dans l'attracteur du système. Le test le plus fréquent est le calcul de la dimension de corrélation de Grassberger et Procaccia(1992). La dimension de corrélation est une approximation de la dimension d'information. Cette dernière est une généralisation de la notion de capacité<sup>46</sup> puisqu'elle vise à prendre en compte la fréquence de visite des trajectoires dans l'attracteur. Il est possible de retenir

46. Telle qu'elle est définie par Guégan(1992), la capacité de Kolmogorov est la limite suivante :

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log}N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

quand  $\epsilon \rightarrow 0$  pour un espace de points situés dans un espace d'état de dimension  $d$ ,  $\epsilon$  désignant le coté des cubes permettant de recouvrir cet espace et  $N(\epsilon)$  le nombre de cubes nécessaires pour recouvrir cet espace.

la définition donnée par Guégan(1992) qui considère la dimension d'information comme la fréquence de visite des cubes utilisés pour recouvrir l'espace :

$$d_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(\epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$$

où  $I(\epsilon) = \sum_i P_i \ln \frac{1}{P_i}$  avec  $P_i$  la probabilité pour la trajectoire  $X_t$  au temps  $t$  de tomber dans le  $i$ ème cube  $c_i$ . Si tous les cubes ont la même probabilité de visite alors la dimension d'information coïncide avec la capacité. La dimension de corrélation mesure la possibilité pour 2 points de la série dans l'espace des phases reconstruit avec la dimension de plongement d'être séparés d'une distance inférieure à  $\epsilon$ . La dimension de corrélation est défini par :

$$D_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

où  $C(\epsilon)$  est l'intégrale de corrélation pour une distance de  $\epsilon$ . L'intérêt que nous portons à cet instrument réside dans sa capacité à pouvoir distinguer un processus déterministe d'un processus stochastique. En effet, la dimension de corrélation qui caractérise un processus déterministe fait apparaître une intégrale de corrélation croissante avec la dimension de plongement mais qui se stabilise tandis qu'un processus stochastique est caractérisé par une croissance monotone de l'intégrale de corrélation avec la dimension de plongement. La saturation n'est jamais atteinte pour un processus stochastique. Cependant, cet instrument possède d'importantes limites notamment en ce qui concerne le nombre de données retenues.

### 2.1.2.2 Approche dynamique

Une des caractéristiques importante du chaos est l'imprédictabilité des données futures dans la mesure où l'erreur moyenne croit rapidement. Cette caractéristique est une conséquence de l'instabilité des solutions. Deux concepts y sont attachés :

- L'entropie de Kolmogorov-Sinaï mesure la perte d'informations. Elle est égale à la somme des exposants de Lyapunov positifs associés à l'attracteur. Elle indique la contraction d'un système dans l'espace des phases. Un système non chaotique a une entropie nulle. Elle n'est pas souvent utilisée en raison des difficultés d'interprétation (Yousefpoor et al.(2008)).

- La divergence exponentielle : dans un système chaotique, la divergence entre deux trajectoires est exponentiellement rapide. L'exposant moyen de cette divergence par itération est l'exposant de Lyapunov. L'approche dynamique s'intéresse à la divergence des trajectoires dans l'orbite en estimant les exposants de Lyapunov. Il est possible de définir des exposants de Lyapunov locaux, difficiles à interpréter. Ils représentent le taux de divergence moyen sur une courte période. Les exposants de Lyapunov globaux traduisent une moyenne sur une quantité caractérisée par d'importantes fluctuations. Un système comportant  $m$  dimensions possèdera autant d'exposants de Lyapunov et chaque exposant mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Pour obtenir l'exposant de Lyapunov maximal  $\lambda$ , définissons deux points dans l'espace des phases :  $S_{n1}$  et  $S_{n2}$ . La distance euclidienne entre ces deux points est telle que :

$$\|S_{n1} - S_{n2}\| = \delta_0 \ll 1 \quad (63)$$

Soit  $\delta_{\Delta n}$  la distance entre les deux trajectoires émergeant de ces points à une période  $\Delta n$  :

$$\delta_{\Delta n} = \|S_{n1+1+\Delta n} - S_{n2+1+\Delta n}\| \quad (64)$$

$\lambda$  est alors donné par :

$$\delta_{\Delta n} \approx \delta_0 e^{\lambda \Delta n} \quad (65)$$

$$\delta_{\Delta n} \ll 1$$

$$\Delta n \gg 1$$

Si  $\lambda$  est positif alors il existe une divergence exponentielle de trajectoires proches initialement. Autrement dit, les dynamiques sont chaotiques. Dans les systèmes dissipatifs, l'exposant de Lyapunov maximal est négatif, ce qui traduit l'existence d'un point fixe stable. Si le plus grand exposant de Lyapunov est négatif, cela signifie que l'on perd de l'information sur les conditions initiales. Dans un cycle limite, la vitesse de convergence ou de divergence de deux trajectoires est plus lente que l'exponentielle. Dans ce cas, l'exposant maximal de Lyapunov est nul. La positivité du plus grand exposant de Lyapunov constitue une preuve évidente de la présence de structures chaotiques dans les données. En pratique, l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov est très délicate. Deux conceptions émergent dans les approches développées pour l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov (LLE), elles se

distinguent principalement par les hypothèses retenues pour le processus générateur de la série. De manière générale, ce dernier est inconnu et il existe deux méthodes particulièrement utilisées :

- L’approche directe (Packard et al.(1980)) qui vise à déterminer la divergence exponentielle entre deux trajectoires très proches. Cette méthode n’est pas adaptée à des trajectoires bruitées et elle est soumise à diverses critiques, notamment sur la nécessité d’une série temporelle longue et sur sa sensibilité au bruit dynamique (McCaffrey et al.(1992), Kantz et Schreiber(1995), Nychka et al.(1997)). Cette méthode est utilisée dans les algorithmes de Wolf et al.(1985), Rosenstein et al.(1992), Kantz(1994) entre autres.
- La méthode du Jacobien repose sur la matrice jacobienne du système chaotique et fournit une estimation consistante du plus grand exposant de lyapunov même en présence d’un bruit (McCaffrey et al.(1992)).

Soit  $x_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , une série temporelle extraite d’un système chaotique définie par :

$$x_t = f(x_{t-\tau}, x_{t-2\tau}, \dots, x_{t-m\tau}) \quad (66)$$

où  $\tau$  est le retard retenu lors de la reconstruction dans l’espace des phases. La représentation espaces-états de cette équation est donnée par :

$$F : \begin{bmatrix} x_{t-\tau} \\ x_{t-2\tau} \\ \dots \\ \dots \\ x_{t-m\tau} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_t = f(x_{t-\tau}, x_{t-2\tau}, \dots, x_{t-m\tau}) + \epsilon_t \\ x_{t-\tau} \\ x_{t-2\tau} \\ \dots \\ x_{t-m\tau+\tau} \end{bmatrix}$$

où  $\epsilon_t$  est un bruit ajouté. On peut alors définir la matrice jacobienne associée à ce système par :

$$J_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{t-\tau}} & \frac{\partial f}{\partial x_{t-2\tau}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{t-m\tau+\tau}} & \frac{\partial f}{\partial x_{t-m\tau}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Eckmann et Ruelle(1985) montrent que pour de petites perturbations, on a :

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \ln \left\| \prod_{t=1}^{M-1} J_{M-t} \right\| \quad (67)$$

Où  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne et  $\lambda$  le plus grand exposant de Lyapunov. M est le nombre de points évalués. La méthode du Jacobien est souvent utilisée dans des algorithmes récents comme ceux de Linton et Shintani(2004) ou de Bensaïda(2012). Le calcul de cet exposant reste néanmoins difficile à établir. En témoignent les différents algorithmes qui ont été développés en ce sens :

- L'algorithme de Wolf et al.(1985) : Cet algorithme repose sur une mesure du taux de divergence entre 2 trajectoires. Il s'agit de fixer une distance maximale à ne pas dépasser. Si cette distance est franchie alors la trajectoire initialement suivie est remplacée par une nouvelle trajectoire. Cette méthode est très sensible au bruit et à la taille de l'échantillon. Kantz et Schreiber (2004) notent la sensibilité importante de cet algorithme et recommandent un usage délicat car il conduit facilement à des résultats erronés. Il ne permet pas de tester directement le caractère exponentiel d'une divergence mais est basé sur cette hypothèse, ce qui le conduit à estimer des valeurs finies de  $\lambda$  même lorsque ces valeurs sont censés être infinies, comme c'est le cas dans les données stochastiques.
- L'algorithme de Rosenstein et al.(1992) et de Kantz(1994) : L'algorithme de Rosenstein et al.(1992) tente de combler les faiblesses des méthodes existantes notamment la fiabilité en petits échantillons et l'implémentation trop lourde qui accompagne ces méthodes. Il reprend la reconstruction de la dynamique de l'attracteur par la méthode des retards. En utilisant la méthode des plus proches voisins, cet algorithme tente de localiser le point le plus proche pour chaque point de la trajectoire, non sans avoir préalablement imposé une contrainte supplémentaire selon laquelle les plus proches voisins doivent avoir une séparation temporelle plus grande que la moyenne de la série temporelle. Pour une série temporelle de T points  $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ , chaque vecteur  $X_i$  désigne l'état du système au temps discret i :

$$X_i = [x_i \dots x_{i+J} \dots x_{i+(m-1)J}] \quad (68)$$

où  $J$  représente le retard retenu,  $m$  la dimension de plongement. Le plus proche voisin  $X_{\hat{j}}$  d'un point de référence  $X_j$  est tel qu'il minimise la distance :

$$d_j(0) = \min_{X_{\hat{j}}} \|X_j - X_{\hat{j}}\| \quad (69)$$

La limite supplémentaire imposée par Rosenstein et al.(1992) stipule que :  $|j - \hat{j}| > \bar{x}$  (moyenne de la période). Le plus grand exposant de Lyapunov est le taux de divergence de la jème paire des plus proches voisins :

$$d_j(i) = C_j e^{\lambda_1(i.\Delta_t)} \quad (70)$$

où  $C_j$  est la séparation initiale,  $\lambda_1$  est le plus grand exposant de Lyapunov. On peut réécrire l'équation 70 :

$$\ln(d_j(i)) = \ln(C_j + \lambda_1(i.\Delta_t)) \quad (71)$$

Le plus grand exposant de Lyapunov est déterminé par un ajustement des moindres carrés à la moyenne.

Dans la même idée, Kantz(1994) calcule le plus grand exposant de Lyapunov en imposant un temps relatif  $\alpha$  pour déterminer la distance entre la trajectoire de référence et le plus proche voisin. Ces algorithmes testent la divergence exponentielle de 2 trajectoires initialement proches. L'exposant de Lyapunov maximal peut être défini comme la moyenne des exposants locaux. La présence de bruit dans les données conduit les auteurs à intégrer dans leur procédure l'impact possible de ce bruit sur le calcul du plus grand exposant de Lyapunov. La procédure est la suivante :

- Dans l'espace des phases, il faut choisir un point  $S_{n_o}$  de la série temporelle ;
- Sélectionner tous les voisins de ce point séparés d'une distance inférieure à  $\epsilon$  ;
- Calculer la moyenne des distances en fonction du temps ;
- Le logarithme des distances moyennes au temps  $\Delta_n$  est un taux d'expansion effectif contenant toutes les fluctuations déterministes ;
- Il faut ensuite répéter cette procédure pour toutes les valeurs inférieures à  $n_o$ .

Liu et al.(2005) proposent une amélioration de l'algorithme de Rosenstein et al.(1992) plus robuste au bruit qui peut atteindre jusqu'à 30% du signal. Par ailleurs, l'algorithme modifié n'est pas sensible à la distribution du bruit et apparaît performant pour des systèmes chaotiques complexes.

- L'algorithme de Linton et Shintani(2004) & de Bensaïda(2012) : Face aux faiblesses des précédents algorithmes, notamment pour des séries temporelles bruitées, Linton et Shintani(2004) puis Bensaïda(2012) proposent un cadre statistique pour détecter les structures chaotiques dans un système bruité. L'algorithme de Linton et Shintani(2004) repose sur les résultats d'Eckmann et al.(1985, 1986) et plus précisément sur les apports de la méthode du Jacobien dans l'estimation du LLE. Linton et Shintani(2004) retiennent aussi la méthode d'estimation du LLE de Nychka et al.(1992) basée sur les réseaux de neurones. Cet algorithme vise à pallier les lacunes théoriques des résultats d'Eckmann et al.(1985, 1986) et de Nychka et al.(1992) et introduit pour la première fois une distribution asymptotique de l'estimateur de l'exposant de Lyapunov, un cadre statistique et des conditions de normalité de l'estimateur. À partir des travaux de McCaffrey (1991), McCaffery et al.(1992), Linton et Shintani(2004) construisent un algorithme basé sur une estimation non paramétrique des réseaux de neurones artificiels avec une couche unique, particulièrement appréciés pour leur insensibilité à l'augmentation des dimensions. Par ailleurs, Kuan et White(1994) montrent la performance des réseaux de neurones même quand la fonction non linéaire est très complexe pour générer du chaos. Le recours à la méthode jacobienne nécessite une approximation du processus générateur de la série temporelle. Hornik et al.(1989) proposent une méthode particulière qui permet d'approximer tout type de système ou fonction non linéaire. Soit  $(x_{t-\tau}, x_{t-2\tau}, \dots, x_{t-m\tau})$  le signal entrant d'une couche de m-dimensions. Ce signal est alors transmis à une couche de q dimensions avec des points de connexions notés  $\beta_{i,j}$  avec  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, q$ . La jème cellule recevra un signal total donné par :

$$\sum_{i=1}^m \beta_{i,j} x_{t-i\tau} \quad (72)$$

Qui représente la somme totale des signaux fournis par les m cellules. Chaque cellule comporte une sensibilité appelée seuil interne et notée  $\beta_{0,j}$ . Donc la jème cellule reçoit un signal défini par :

$$\beta_{0,j} + \sum_{i=1}^m \beta_{i,j} x_{t-i\tau} \quad (73)$$

La propagation du signal d'une cellule à l'autre est défini par une fonction d'activation du signal notée  $\psi$ . En général,  $\psi$  est une fonction monotone et bornée mais Hornik et al.(1994) préconisent de s'affranchir de ces conditions de manière à obtenir

une approximation optimale. Habituellement, la fonction logistique est retenue pour  $\psi$  donc le signal sortant pour la jème cellule est donné par :

$$\psi(\beta_{0,j} + \sum_{i=1}^m \beta_{i,j} x_{t-i\tau}) \quad (74)$$

Si on note  $\alpha_j$ , les poids des connexions entre les couches et  $\alpha_0$ , le seuil du réseau, la fonction chaotique  $f$  définie par l'équation 66 peut être approximée par :

$$X_t \approx \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_j \psi(\beta_{0,j} + \sum_{i=1}^m \beta_{i,j} x_{t-i\tau}) + \epsilon_t \quad (75)$$

Cette approximation est soumise à une condition sur le bruit  $\epsilon_t$  qui doit être minimale pour compenser la perte d'informations engendrée par l'approximation. Une estimation par les moindres carrés non linéaires du paramètres  $\theta$  est alors réalisée sur :

$$S(\theta) = \sum_{t=m\tau+1}^T \epsilon_t^2 = \sum_{t=m\tau+1}^T [x_t - f(x_{t-\tau}, \theta)]^2 \quad (76)$$

Linton et Shintani(2004) et Bensaïda(2012) retiennent ce résultat :

$$\|X\| = \max(\text{eig}(X'X)^{1/2})$$

où eig désigne la valeur propre de la matrice  $Z = (X'X)^{1/2}$ . Ainsi, en posant :  $T_M = \prod_{t=1}^{M-1} J_{M-t}$ , le LLE est donné par :

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \ln(v_1) \quad (77)$$

Où  $v_1$  est la plus grande valeur propre du produit  $T_M' T_M$ . Pour un ensemble de données finies, on obtient :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2M} \ln(v_1) \quad (78)$$

Où M désigne le nombre de points évalués. Linton et Shintani(2004) précisent que le nombre de points optimal M est donné par  $T^{1/3}$ . Il est alors possible de tester l'hypothèse nulle  $\lambda \geq 0$  contre l'hypothèse alternative  $\lambda < 0$  :

$$\hat{t} = \frac{\hat{\lambda}_M}{\sqrt{\hat{\Sigma}/M}} \rightarrow N(0, 1) \quad (79)$$

Où  $\hat{\lambda}_M$  et  $\hat{\Sigma}$  sont respectivement les estimateurs du LLE et de la matrice de variance /covariance consistante à l'hétéroscédasticité et à l'autocorrélation (HAC), définie par

Andrews(1991). Linton et Shintani(2004) montrent que, sous certaines conditions, la variance du ième LLE est définie par :

$$Var(\hat{\lambda}_i) = \Sigma_i = \lim_{M \rightarrow \infty} Var\left(\frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \eta_{i,t}\right) \quad (80)$$

Où  $\eta_{i,t} = \omega_{i,t} - \lambda_i$  avec :

$$\omega_{i,t} = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{v_i(T'_t T_t)}{v_i(T'_{t-1} T_{t-1})}\right] \text{ pour } t \geq 2 \quad (81)$$

$$\omega_{i,1} = \frac{1}{2} \ln[v_i(T'_1 T_1)] \quad (82)$$

La matrice de variance covariance estimée est alors donnée par :

$$\hat{\Sigma} = \sum_{j=-M+1}^{M-1} \xi\left(\frac{j}{S_M}\right) \hat{\delta}(j) \quad (83)$$

$$\hat{\delta}(j) = \frac{1}{M} \sum_{t=|j|+1}^M \hat{\eta}_t \hat{\eta}_{t-|j|} \quad (84)$$

$\xi$  et  $S_M$  représentent respectivement la fonction Kernel et un paramètre de retard <sup>47</sup>. Il existe un biais pour  $\hat{\lambda}$  dans la mesure où la condition asymptotique ne peut être respectée. Bensaïda(2012) propose alors de recourir à une correction basée sur une estimation de la décomposition orthogonal triangulaire de  $\lambda$  proposée par Abarbanel et al.(1991), ce qui revient à multiplier la matrice  $T_M$  par un vecteur unitaire de telle sorte à diminuer le biais positif. En général, le vecteur unitaire est choisi tel que :  $U_0 = (1, 0, \dots, 0)'$ . Les algorithmes reposent sur le choix ex-ante du triplet (L, m, q) et Bensaïda(2012) préconise de retenir le triplet (L,m,q)=(5,6,5). Enfin Bensaïda(2012) précise que la détection des structures chaotiques est conditionnée au bruit dont la variance doit être limitée. Si le bruit est trop important, la dynamique chaotique disparaît au profit du bruit.

### 2.1.2.2.3 Approche topologique

Cette approche étudie l'organisation des attracteurs dans l'espace des phases. Les différentes méthodes qui ont été développées se basent sur les graphiques de récurrence. Nous en donnons une présentation succincte (cf. la monographie de Marwan et al.(2007)).

---

47. Andrews(1991) suggère la fonction Kernel quadratique spectrale comme choix optimal et un paramètre de retard  $S_M$  optimal pour cette fonction est donné par :  $S_M^* = 1,3221(K.T)^{(1/5)}$  avec  $K = 1$  pour des raisons de simplicité.

Les graphiques de récurrence ont été proposés par Eckmann et al.(1987) pour détecter graphiquement des dynamiques cachées. Le graphique de récurrence (RP) représente les distances dans l'espace de dimension  $m$  entre les points  $i$  et  $j$ .

**Définition 2** *Graphique de récurrence (Marwan et al.(2007) et Eckmann et al.(1987))*

Soit une trajectoire  $X_i, i = 1, \dots, N$  d'un système dynamique dans son espace des phases. Ce dernier est décrit par les vecteurs  $\vec{x}_i, i = 1, \dots, N$ . Le RP est déterminé par :

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x}_i \approx \vec{x}_j \\ 0 & \text{si } \vec{x}_i \not\approx \vec{x}_j \end{cases}$$

où  $N$  est le nombre d'états considérés et  $\approx$  désigne une approximation avec une erreur  $\epsilon$ .

Les RP permettent de mesurer les recurrences d'une série temporelle, on peut les définir en fonction de l'erreur  $\epsilon$  :

$$R_{i,j}(\epsilon) = \Theta(\epsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) \quad (85)$$

avec  $i, j = 1, \dots, N$  et  $\Theta$  la fonction de Heaviside qui prend la valeur 1 quand  $(\epsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) \geq 0$  et 0 sinon. Sur la première bissectrice, on retrouve la ligne d'identité (LOI) c'est-à-dire la diagonale formée par les points  $R_{i,i}, i = 1, \dots, N$ . Les RP sont symétriques par définition :  $R_{i,j} = R_{j,i}$ <sup>48</sup>. Les RP reposent sur la détermination de deux éléments :

- la norme (euclidienne,  $L_\infty$  ou  $L_1$ ). En général, la norme  $L_\infty$  est retenue car elle est celle qui permet de prendre en compte un nombre important de voisins (Marwan et al.(2007)) ;
- le seuil  $\epsilon$ . Il existe, dans la littérature, plusieurs règles pour la détermination de ce seuil. Il est à noter que pour des séries bruitées, Marwan et al.(2007) préconisent une valeur de  $\epsilon$  égale à 5 fois l'écart-type du bruit. La détermination de ce seuil est très importante car une valeur trop petite peut conduire à l'absence totale de points de récurrence et une valeur trop importante peut créer des artefacts. Ainsi, des points consécutifs dans la trajectoire peuvent devenir voisins avec un  $\epsilon$  trop important : c'est l'effet tangential motion<sup>49</sup>.

48. Dans la détermination du voisinage des points  $i$ , on fixe un rayon de voisinage égal à  $\epsilon$ . Le RP n'est symétrique que si le rayon  $\epsilon$  est identique pour les points  $i$  et  $j$ .

49. La tangential motion est un couloir de structures autour de la diagonale principale qui peut fausser les résultats. Theiler(1986) propose de retenir un critère supplémentaire dans la détermination des RP :  $|j - i| \geq w$  où  $w$  est déterminé par la FAC. Gao et Zheng(1994) retiennent  $w = (m - 1)\tau$ .

Selon la nature de la série temporelle étudiée, on retiendra une règle appropriée. Une série déterministe se caractérise par un graphique de récurrence particulier en ce sens où l'attracteur du système sera revisité par les trajectoires plusieurs fois. Il est alors possible d'identifier une structure dans le graphique de récurrence. À l'inverse, une série stochastique ne fournira aucune structure dans son graphique de récurrence. La principale limite de cet instrument réside dans son analyse uniquement visuelle, ce qui a poussé Webber et Zbilut(1992,1994) à proposer un ensemble d'outils d'analyse regroupés sous l'étiquette "Analyse Quantitative de Récurrence "(RQA).

Il est possible d'identifier dans les RP plusieurs types de récurrences :

- des points de récurrence simples et isolés ;
- des lignes diagonales définies par  $R_{i+k,j+k} \equiv 1$  avec  $k = 0, \dots, l - 1$  où  $l$  est la longueur de la ligne diagonale. Ces structures se produisent quand un segment de la trajectoire est presque parallèle à un autre segment. La longueur de la ligne diagonale est alors déterminée par la durée de cette évolution entre les deux segments (Marwan et al.(2007)) ;
- des lignes verticales/horizontales sont définies par  $R_{i,j+k} \equiv 1$  avec  $k = 0, \dots, v - 1$  où  $v$  est la longueur de la ligne. Elles représentent un intervalle temporel durant lequel un état ne change pas ou évolue très lentement.

À partir de ces structures, Webber et Zbilut(1992, 1994) ont proposé plusieurs mesures de la complexité. Nous retenons la classification de Marwan et al.(2007) :

- Mesures basées sur la densité des récurrences : le taux de récurrence ou le % de récurrence décrit la densité des points de récurrence dans le RP :

$$RR(\epsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}(\epsilon) \quad (86)$$

- Mesures basées sur les lignes diagonales. Elles sont déterminées à partir de l'histogramme  $P(\epsilon, l)$  des lignes diagonales :

$$P(\epsilon, l) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i-1,j-1}(\epsilon))(1 - R_{i+l,j+l}(\epsilon)) \prod_{k=0}^{l-1} R_{i+k,j+k}(\epsilon) \quad (87)$$

Il est alors possible de calculer 5 mesures à partir de l'équation 87<sup>50</sup>.

---

50. Pour des raisons de simplicité, nous notons  $P(\epsilon, l) = P(l)$ .

1. DET est le ratio des points de récurrence qui forment une diagonale sur l'ensemble des points de récurrence :

$$DET = \frac{\sum_{l=lmin}^N lP(l)}{\sum_{l=1}^N lP(l)} \quad (88)$$

DET mesure le déterminisme d'un système.

2. L donne la longueur moyenne des lignes diagonales :

$$L = \frac{\sum_{l=lmin}^N lP(l)}{\sum_{l=lmin}^N P(l)} \quad (89)$$

Cette mesure représente le temps moyen pendant lequel deux segments de la trajectoire sont proches.

3. LMAX est la longueur maximale d'une ligne diagonale du RP. À partir de cette mesure, on peut calculer la divergence d'un système :

$$LMAX = \max_{i=1, \dots, N_l} (l_i) \quad (90)$$

$$DIV = \frac{1}{LMAX} \quad (91)$$

Où  $N_l = \sum_{l \geq lmin} P(l)$  est le nombre total de lignes diagonales.

4. L'entropie de Shannon est donnée par :

$$ENTR = - \sum_{l=lmin}^N p(l) \ln p(l) \quad (92)$$

Où  $p(l)$  est la probabilité de trouver une ligne diagonale de longueur  $l$  :  $p(l) = \frac{P(l)}{N_l}$ . L'entropie de Shannon renseigne sur la complexité du système.

5. TREND est un coefficient de régression linéaire entre la densité des points de récurrence des lignes diagonales parallèles à la LOI et de la distance temporelle entre ces diagonales et la LOI. Cette mesure renseigne principalement sur la stationnarité de la série temporelle. Pour  $\tilde{N}$  points, la statistique TREND est définie par :

$$TREND = \frac{\sum_{\tau=1}^{\tilde{N}} (\tau - \tilde{N}/2) (RR_{\tau} - \langle RR_{\tau} \rangle)}{\sum_{\tau=1}^{\tilde{N}} (\tau - \tilde{N}/2)^2} \quad (93)$$

Où  $\langle . \rangle$  désigne la moyenne.

- Mesures basées sur les lignes verticales. Deux mesures principales peuvent être définies :



1. un indice de laminarité est donné par :

$$LAM = \frac{\sum_{v=vmin}^N vP(v)}{\sum_{v=1}^N vP(v)} \quad (94)$$

où  $v$  désigne la longueur de la ligne verticale. Analogue au pourcentage de déterminisme, cette mesure quantifie le pourcentage de points récurrents pour les lignes verticales.

2. la longueur moyenne des structures verticales(TT) :

$$TT = \frac{\sum_{v=vmin}^N vP(v)}{\sum_{v=vmin}^N P(v)} \quad (95)$$

Un exemple de test construit à partir du RQA est fourni par le Close Returns test proposé par McKenzie(2001).

Le close returns test (CRT) est un test topologique qui vise à identifier les trajectoires périodiques instables plongées dans un attracteur étrange. Le CRT est basé sur l'idée suivante : si un point  $x_t$  d'une série chaotique  $X_t$  est proche d'une orbite chaotique alors les points suivants vont évoluer dans un voisinage de  $x_t$  après un intervalle  $I$ . Ainsi, la différence entre les points  $x_t$  et  $x_{t+I}$  doit être petite. L'objectif du test consiste à identifier les segments de données pour lesquels la différence est petite. Il permet ainsi d'identifier la condition 3. dans la définition de Devaney(1989) de densité des points périodiques d'une fonction chaotique. Ce test doit permettre de détecter des structures chaotiques de faibles dimensions. Pour pouvoir appliquer le test, il faut calculer toutes les différences entre  $x_t$  et  $x_{t-i}$  pour tout  $t = 1, \dots, T$  et  $i = 1, \dots, T - 1$  avec  $T$ , la longueur de la série temporelle :

$$|x_t - x_{t+i}| \quad (96)$$

Il faut ensuite choisir une valeur arbitraire  $\epsilon$  comprise entre 2% et 5% de la différence maximale entre deux valeurs de la série temporelle. Le CRT est scindé en deux parties :

- Partie qualitative : elle consiste à représenter un graphique qui reprend les résultats obtenus. Si la différence entre deux points (par exemple  $x_1$  et  $x_2$ ) est inférieure à  $\epsilon$  alors un point noir symbolisera ce résultat sur le graphique. Dans le cas contraire, le résultat n'est pas représenté sur le graphique. Ainsi le graphique d'une série purement aléatoire ne fera apparaître aucune structure contrairement à celui d'une trajectoire chaotique.

- Partie quantitative : à partir des résultats précédents , il est possible de construire un histogramme basé sur la fonction suivante :

$$H_i = \Sigma \Theta(\epsilon - |X_t - X_{t+i}|) \quad (97)$$

Où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside. Elle prend la valeur 1 lorsque la différence est positive et 0 sinon. La partie quantitative consiste alors en un test sur  $H_i$  :

$$X_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k=t-1} [H_i - \bar{H}]^2}{n * p} \equiv X^2(k-1) \quad (98)$$

Où  $\bar{H} = n * p$  est le nombre de point retenu pour le test multiplié par une probabilité estimée  $p$ <sup>51</sup> avec  $p = \frac{\text{Nombre de points (n)}}{\text{Aire total du graphique}}$ .

Ces différentes mesures et les tests qui en découlent ne sont pas spécifiques à la détection de structures chaotiques dans l'analyse des séries temporelles. Elles visent plutôt à identifier des structures de récurrence dans les données, à définir la nature des relations détectées (linéaires, non-linéaires...). Les différents exemples empiriques analysés dans la monographie de Marwan et al.(2007) vont dans ce sens : la principale conclusion qui ressort des différentes applications statue sur la présence ou non de non-linéarités.

Certains auteurs, conscients des limites du RQA, proposent un ensemble de tests construits à partir des mesures précédemment définies. Il en est ainsi de Aparicio et al.(2008) qui proposent 3 tests. Ces auteurs montrent le caractère subjectif des mesures de déterminisme en ce sens où il est laissé à la discrétion de l'analyste de fixer le seuil à partir duquel la série étudiée présente assez de structures déterministes pour considérer qu'elle est issue d'un processus générateur déterministe. Aparicio et al.(2008) vont définir 3 statistiques de tests basés sur :

- le pourcentage de déterminisme ;
- la longueur moyenne des lignes parallèles à la diagonale principale ;
- le nombre moyen de points dans une diagonale.

L'idée retenue par les auteurs consiste à exploiter les informations révélées par les structures parallèles à la première diagonale. L'ensemble des tests proposés s'applique au TRM<sup>52</sup>, c'est-à-dire aux résultats du graphique de récurrence auxquels on

---

51. Plus précisément, il faut diviser le graphique en plusieurs parties de dimension  $n * n$ , et pour chaque partie, il faut estimer  $H_i$ .

52. TRM=RP-LOI.

a préalablement retiré la première diagonale formée par les points  $R_{i,i}$ . Les auteurs montrent que leurs statistiques donnent de bons résultats pour différents processus simulés et pour des données réelles. Par ailleurs, ce constat est validé pour des séries originales ou des séries reconstruites par la méthode des retards. Or, Thiel et al.(2006) ont montré que la méthode des retards, utilisée pour reconstruire la trajectoire dans l'espace des phases crée des structures fallacieuses dans les graphiques de récurrence. Ces structures fallacieuses sont le résultat de répétitions de certaines coordonnées lors de la procédure de plongement. Ainsi, une série temporelle issue d'un processus générateur déterministe et reconstruite par la méthode des retards peut générer plusieurs structures dans le graphique de récurrence : certaines étant liées au processus générateur et d'autres résultantes de la méthode des retards. Thiel et al.(2006) montrent ainsi que ces corrélations fallacieuses ne résultent pas d'un mauvais choix des paramètres de la méthode des retards mais qu'elles sont le résultat de la méthode utilisée.

Conscients de ces faiblesses, Aparicio et al.(2011) présentent des tests corrigés qui s'inspirent de la démarche de March et al.(2005). L'idée de ces derniers suppose que le recours à une norme infinie avec un retard d'un pas de temps permet d'obtenir une transformation de la série qui génère un RP " plongé". Plus précisément, il s'agit de considérer deux vecteurs proches dans un espace de dimension  $m$ . Le RP relatif à ces vecteurs fait apparaître un point dans un espace à  $m$  dimensions alors que le RP relatif à ces deux vecteurs produit une structure diagonale dans un espace à  $m'$  dimensions où  $m' < m$ . En retenant cette approche, Aparicio et al.(2011) définissent pour une série purement aléatoire la distribution de probabilités de la variable aléatoire  $L$  pour chaque dimension  $m$  :

$$P^m(L) = \frac{1}{(m + (L - 1))} \frac{NREC}{NREC^m} P[m + (L - 1)] \quad (99)$$

Où  $NREC^m$  est le nombre de points récurrents dans un RP à  $m$  dimensions avec  $NREC^1 \equiv NREC$ . La variable aléatoire  $L$  affecte à chaque point du RP la longueur de la ligne diagonale à laquelle il appartient. Sous l'hypothèse  $H_0$ , la distribution des points de récurrence est aléatoire et donc la série temporelle étudiée est issue d'un processus purement stochastique. Aparicio et al.(2011) définissent 3 tests :

1. S1 est basé sur le pourcentage de déterminisme sous  $H_0$ . La statistique du test est la suivante :

$$\frac{[NPD - NREC^m E[\%DET]]^2}{NREC^m E[\%DET]} + \frac{[(NREC^m - NPD) - NREC^m(1 - E[\%DET])]^2}{NREC^m \cdot [1 - E[\%DET]]} \quad (100)$$

NPD désigne le nombre de points parallèles à la diagonale principale et  $E[\%DET] = \sum_{L>1} P(L) = 1 - P(1)$ . Cette statistique est à comparer à un Khi-deux d'ordre 1.

2. S2 est basé sur  $\bar{L}$  (le nombre de points moyens par ligne) :

$$\frac{\bar{L} - E(L)}{\sqrt{Var(L)/NREC^m}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad (101)$$

Avec  $E(L) = \sum_{L=1}^{l-1} LP(L)$  et  $Var(L) = \sum_{L=1}^{l-1} (L - E(L))^2 P(L)$

3. S3 est basé sur ALL (longueur moyenne de la ligne) :

$$\frac{ALL^{-1} - E(L^{-1})}{\sqrt{Var(L^{-1}/NREC^m)}} \xrightarrow{D} N(0, 1) \quad (102)$$

L'hypothèse  $H_0$  n'est rejetée que si les 3 statistiques sont supérieures aux quantiles correspondants. L'intérêt que nous portons à ces tests réside :

- dans la capacité de ces méthodes à pouvoir différencier clairement un processus stochastique d'un processus déterministe ;
- dans la robustesse des résultats obtenus. Aparicio et al.(2011) appliquent leurs résultats à plusieurs séries financières et montrent que les conclusions des tests ne changent pas lorsque la série financière est analysée directement et lorsqu'elle est filtrée par un processus GARCH. Autrement dit, ces tests constituent une avancée majeure dans la détection de structures chaotiques des séries temporelles chaos-stochastiques ;
- dans la robustesse des statistiques corrigées à la méthode des retards. Contrairement aux différents tests que nous avons développés précédemment, les tests de Aparicio et al.(2011) sont robustes à la procédure de plongement, ce qui permet d'éviter tout problème de corrélations fallacieuses.

Néanmoins, ces tests peuvent souffrir de certaines limites qui peuvent être mises en évidence par des simulations :

- \* le problème de la présence de plusieurs structures dans les séries temporelles étudiées : processus déterministe avec mémoire longue et effets GARCH ou avec mémoire longue et changements de régime par exemple ;
- \* ces différents tests font abstraction des autres mesures qui existent pour évaluer la complexité d'un système et qui ont été définies dans le cadre du RQA ;
- \* Enfin, l'hypothèse alternative n'est pas assez précise. Elle indique simplement qu'il existe des structures dans le RP et que ces structures sont intrinsèques au système sous-jacent. Or, la prudence affichée par Marwan et al.(2007) qui concluent simplement sur le caractère linéaire ou non-linéaire des séries temporelles étudiées à partir du RQA contraste avec l'assurance affichée des auteurs sous l'hypothèse alternative.

---

Il existe, à l'heure actuelle, une multitude de tests de détection de structures chaotiques et l'intérêt croissant porté à la théorie du chaos laisse présager une croissance exponentielle des procédures et méthodes de détection. Nous avons retenu, dans cette présentation succincte, la classification des différentes approches telle qu'elle a été définie par Belaire-Franch et Contreras(2001). Le choix des méthodes présentées s'appuie sur la popularité et le caractère récent des différents tests.

Il existe une importante littérature sur l'approche métrique que nous avons détaillée. Elle porte principalement sur le test de la dimension de corrélation. L'engouement suscité par l'estimation des exposants de Lyapunov à partir d'une série temporelle explique largement l'intérêt croissant de la communauté scientifique dans ce domaine. L'interprétation simpliste qui ressort de cette mesure encourage encore plus les recherches dans l'approche dynamique. Mais nous relevons un intérêt tout aussi important pour l'approche topologique qui a conduit une partie des chercheurs, toutes disciplines confondues, à mettre en place des outils permettant d'appliquer ces méthodes.

Le développement important de ces tests s'explique largement par le recours à la théorie du chaos comme alternative de recherche dans plusieurs disciplines et il n'y a qu'à constater les applications empiriques diverses et variées rete-

nues par les différents auteurs. Les défis de recherche pour la détection des structures chaotiques restent nombreux :

- \* les différentes limites mises en évidence dans les différentes approches indiquent toute la difficulté de la prise en compte des bruits dynamiques dans les séries temporelles. En effet, la question du bruit a longtemps été étudiée en supposant que les données comportaient des bruits de mesure. L'idée d'une composante stochastique mélangée à une composante déterministe commence à être étudiée.
- \* la robustesse des résultats est aussi mise en cause. Lorsque des méthodes sont développées et qu'elles subissent des analyses pour juger de leur robustesse, il ressort souvent un constat positif, laissant à penser que deux méthodes différentes conduisent à peu près aux mêmes taux de réussite. Mais cette question de la robustesse est en partie traitée par des méthodes de surrogate data<sup>53</sup> qui permettent d'évaluer la robustesse des résultats obtenus.
- \* Enfin, se pose le problème de ce que Yousefpoor et al.(2008) qualifient d' "approche systématique pour sélectionner les tests de chaos". Selon la définition retenue, plusieurs caractéristiques sont à identifier dans la série temporelle avant de conclure qu'elle est issue d'un processus déterministe chaotique. Or, les différents tests présentés ne permettent pas de mettre en évidence toutes les caractéristiques d'un processus chaotique et ce, qu'ils soient appliqués séparément ou de façon complémentaire. La condition 2. de la définition de Devaney(1989) n'est ainsi vérifiée par aucun test et la condition 1. lorsqu'elle est vérifiée, conduit souvent à conclure sur la présence de structures chaotiques quand bien même les deux autres conditions n'étaient pas remplies.

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons exclusivement des tests récents à savoir le test de Bensaïda(2012) et de Aparicio et al.(2011). Ce choix est lié d'une part aux limites des autres tests de chaos, largement discutées dans la littérature et d'autre part aux capacités de ces tests à détecter, dans certains cas, les structures chaotiques d'une série temporelle particulièrement bruitée.

---

53. Une présentation des méthodes de surrogate data est fournie dans l'annexe B.2.

## 2.2 QUELLES MODÉLISATIONS CHAOS-STOCHASTIQUES POUR LE RISQUE DE MARCHÉ ?

*"Two fundamental paradigms are used to account for the seemingly unpredictable and erratic motions exhibited by many dynamical systems : the first is that of a dynamical system perturbed by noise-a differential equation, say, driven by white noise or jump noise. This type of motion is called stochastic chaos (...). The second paradigm of erratic motion posits a purely deterministic dynamical system with 1) an uncertainty (perhaps very, very small) in its initial state and 2) a flow structure admitting intersecting stable and unstable manifolds." (Frey et Simiu(1993))*

La conception du chaos stochastique développée par Frey et Simiu(1993) témoignent de l'importance du bruit dans les modèles chaotiques. L'idée d'un système chaotique purement déterministe capable de décrire les fluctuations d'une série temporelle suppose l'absence de chocs et permet d'établir une prévision de la série temporelle en tenant compte de la sensibilité aux conditions initiales. Il est important de bien comprendre que cette dernière ne peut être assimilée à un choc mais plutôt à une imprécision de mesure. Ainsi, la capacité des modèles chaotiques déterministes à produire des trajectoires oscillantes, notamment à hautes dimensions, demeure insuffisante pour rendre compte des importantes fluctuations des chroniques temporelles financières. Néanmoins, il ne faut pas négliger l'apport d'une approche chaotique, décrit dans les sections précédentes : la diversité des trajectoires que peuvent décrire les modèles chaotiques rend compte des dynamiques créées par les agents financiers majoritaires sur le marché.

En considérant que *"deterministic chaos and stochastic chaos are not mutually exclusive ; one may have a system sensitively dependent upon initial conditions which randomly perturbed by noise. [...] the presence of noise is inevitable in any real system "*, Frey et Simiu(1993) estiment que l'idée d'une approche chaotique purement déterministe dans la modélisation des systèmes reste insuffisante mais considère qu'il est possible de tenir compte, dans une modélisation commune, du caractère déterministe et stochastique d'une série temporelle. L'approche du chaos stochastique que nous retenons suppose que l'équation de la moyenne

peut être parfaitement décrite par un modèle chaotique mais que la présence d'agents spéculateurs sur le marché crée un bruit significatif. Ce dernier peut être modélisé, en fonction des structures qu'il comporte, par différentes spécifications, schématisés dans la figure 5<sup>54</sup> :

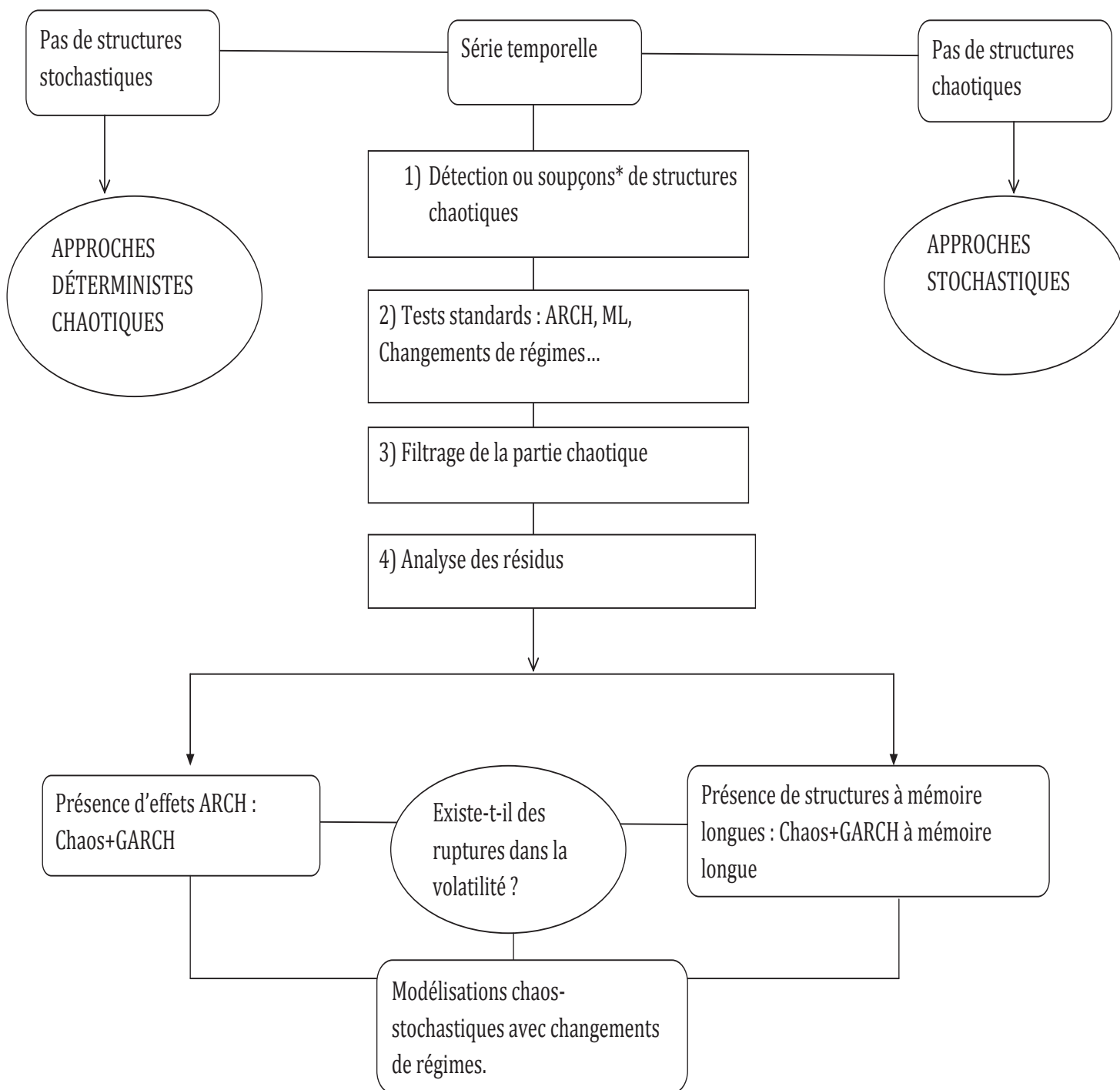
- \* la forte volatilité observée sur les marchés peut présenter toutes les caractéristiques d'un effet ARCH : clusters de volatilité, forte hétéroscédasticité... Elle peut être modélisée par un modèle classique de type GARCH.
- \* le bruit créé par les agents spéculatifs peut comporter des structures à mémoire longue et une modélisation GARCH intégrant ce type de structures peut être combinée à un modèle chaotique pour décrire l'évolution d'une série temporelle financière.
- \* il est aussi possible d'observer différents régimes de volatilité sur le marché qui témoignent ainsi d'une lutte entre fondamentalistes et chartistes pour la dominance du marché. Il est alors plus adéquat de recourir à des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes.

En termes de modélisations, les deux premières spécifications sont intrinsèquement liées à la nature et à l'existence même de structures dans la série temporelle. Autrement dit, si nous retenons un échantillon de 1000 données caractérisées par la présence de structures chaotiques avec effets ARCH, il est fort probable que sur les 600 premières données, la modélisation chaos-stochastique retenue soit adaptée. En revanche, le recours à un modèle chaos stochastique avec changements de régime n'est pas directement lié aux structures mêmes qui existent dans la série temporelle. Nous revenons dans un premier point sur l'approche chaos-stochastique classique : nous présentons les chaos en finance et nous précisons l'approche paramétrique retenue en détaillant deux modèles particuliers et nous analysons les combinaisons possibles en montrant les comportements des modèles de Lasota (1977) et Mackey-Glass (1977) lorsqu'ils sont associés à un bruit. Dans un deuxième point, nous explicitons l'approche chaos-stochastique avec changements de régime.

---

54. Compte tenu des insuffisances des tests de détections de structures chaotiques, il est possible de privilégier une approche chaos-stochastique dès que des "soupçons" sur l'existence de structures chaotiques existent.





Graphique 5 – Procédure pour la construction d’un modèle chaos-stochastique

\* : Compte tenu des limites des tests de détection de chaos, notamment en présence d’un bruit stochastique important, il peut être difficile de conclure catégoriquement sur la présence de structures chaotiques. Aussi, il est préférable de retenir plusieurs modélisations et d’analyser l’apport des modèles intégrant des structures chaotiques.

### 2.2.1 CHAOS, HÉTÉROSCÉDASTICITÉ ET MÉMOIRE LONGUE : QUELLES COMBINAISONS POUR LE RISQUE DE MARCHÉ ?

Dans la modélisation des séries temporelles financières, l'objectif consiste à prendre en compte au maximum les structures présentes. Aussi de nombreuses études se sont attachées à déceler et modéliser les structures qui peuvent exister dans la variance et ce, souvent au détriment de la moyenne. L'hypothèse selon laquelle la moyenne des rentabilités financières est nulle est une hypothèse accommodante qui conduit à une perte d'information dans la modélisation des séries temporelles financières. Le recours aux équations différentielles déterministes pour l'équation de la moyenne est intéressant à plusieurs égards :

- \* Ces équations décrivent une dynamique qui à long terme converge vers un point d'équilibre  $\bar{X}$ . Si on fait abstraction des fortes volatilités qui existent dans les séries financières et qui relèvent donc de l'équation de la variance, ces modèles peuvent parfaitement décrire l'évolution de l'équation de la moyenne.
- \* En période de crise, la volatilité est très forte. Elle peut aussi être la conséquence d'une volatilité en moyenne qui peut parfaitement être intégrée par ces équations car pour certains paramètres, les dynamiques décrites par ces équations peuvent être volatiles.
- \* Filtrer la non-linéarité présente dans les séries temporelles financières par ces équations permet non seulement de capter les structures chaotiques (puisque ces équations sont capables de décrire des dynamiques chaotiques pour certains paramètres) ou des structures périodiques d'où le double intérêt de modéliser les séries financières par ces équations.

L'intérêt que nous portons à ces équations dans la modélisation des séries temporelles financières réside surtout dans la capacité de ces modèles à pouvoir capter des dynamiques qui ne peuvent être prises en compte par les modèles standards de type ARMA-GARCH. La présence de structures non linéaires dans les équations de la moyenne et de la variance rendent ce type de modélisation (ARMA-GARCH) insuffisant.

Nous présentons dans ce qui suit les chaos en finance. Nous détaillons, ensuite,

l'apport et les caractéristiques des modèles chaotiques bruités par des structures stochastiques classiques.

#### 2.2.1.1 LES CHAOS EN FINANCE

*" The brief market plunge was just an example of how complex and chaotic, in a formal sense, the systems have become (...) what happened in the stock market is just a little example of how things can cascade or how technology can interact with market panic".*<sup>55</sup>

Ce constat établi par le président de la Fed montre, une fois de plus, la nécessité et la volonté de repenser les modèles économétriques utilisés en finance. Dans cet objectif, Christian Noyer, gouverneur de la banque de France, lance un défi à la recherche économique qui doit se renouveler : *" La science économique est donc confrontée à un examen de conscience et à un redoutable défi. Il lui faut d'une part, viser à décrire le monde tel qu'il est, avec toute sa complexité et son corollaire, l'incertitude et la diversité (et donc, sans doute renoncer à la simplification de l'agent représentatif). Il faut penser l'économie et, notamment, la sphère financière comme un système complexe, ce qui permettra de mieux rendre compte de la volatilité, des évolutions brutales et des discontinuités qui apparaissent périodiquement sous forme de crises plus ou moins aiguës. Mais la science doit aussi conserver une rigueur analytique conceptuelle, faute de quoi l'analyse économique se résumerait à une collection de descriptions empiriques aux fondements incertains et, donc difficilement exploitables pour guider les politiques économiques. Dans la description de la complexité, concilier rigueur et réalisme sera un défi majeur".*

Dans cette perspective, la théorie du chaos offre de nouvelles méthodes, de nouveaux instruments pour expliquer l'instabilité des marchés et des prix, les comportements des agents sur les marchés financiers. De nombreux travaux se sont attachés à étudier la présence de structures chaotiques en finance. Sans exhaustivité, nous pouvons citer Özüin(2006), Federici et al.(2011), Maddocks et al.(1991), Caraguel et al.(2006), Sawaya(2010), Chen(2008), Panas(2001), Alsaleh(2002). Au-delà de la détection de structures chaotiques dans des don-

---

55. Ben Bernanke (17/05/2010), extrait de Farmer et al.(2012).

nées souvent bruitées avec toutes les insuffisances qui émergent des tests et procédures de détection, se pose une question essentielle : comment travailler avec des données chaotiques ? Un certain nombre de travaux théoriques et empiriques ont été entrepris pour répondre à cette question. Ils peuvent être subdivisés en plusieurs catégories et portent sur :

- \* L'analyse des comportements sur les marchés financiers. La présence de comportements hétérogènes sur les marchés financiers conduit une partie de la littérature à modéliser ces comportements et à montrer que l'interaction de ces comportements crée des attracteurs chaotiques. Brock et Hommes(1997,1998) expliquent que l'interaction de comportements hétérogènes des agents financiers conduit à une dynamique des prix irrégulière, convergeant vers un attracteur chaotique. Lux(1995,1998) observe des similarités entre les faits stylisés qui caractérisent les séries financières et les caractéristiques de simulations de séries chaotiques. Il justifie la présence d'attracteurs étranges par l'interaction entre chartistes et fondamentalistes. Ces résultats sont confirmés par Malliaris et Stein(1999). Chen et al.(2001) proposent un modèle qui fait intervenir ces 2 types d'agents et testent la présence de chaos et de structures non linéaires dans des séries simulées. Le modèle de Chen et al.(2001) est repris par Kyrtsov et Terraza(2002) qui tentent de vérifier l'hypothèse selon laquelle une interaction d'agents hétérogènes conduirait à un comportement chaotique des marchés financiers marqués par un excès de volatilité.
  
- \* la modélisation et la prévision non paramétrique des structures chaotiques. Ces différents travaux s'inspirent largement des méthodes appliquées en physique, en mathématique ou encore dans l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires. De nombreuses méthodes non paramétriques sont utilisées. Nous en présentons 3 dans l'annexe B.3.
  
- \* L'approche paramétrique des structures chaotiques. Les travaux qui s'inscrivent dans cette catégorie visent surtout à modéliser les séries temporelles financières en fonction des structures présentes. C'est dans cette perspective que se développent des modèles chaos stochastiques.

Cette dernière catégorie nous semble plus pertinente que les deux précédentes pour au moins deux raisons : dans l'estimation et la prévision du risque de marché, le recours à une modélisation économétrique semble plus approprié. Ensuite, elle permet d'améliorer de manière significative des modèles déjà existants. Elle est un compromis entre le conseil de C. Noyer qui recommande : " *dans la remise en cause de la science économique, il faut prendre garde à ne pas, si j'ose dire, jeter le bébé avec l'eau du bain et nous priver des avancées considérables réalisées depuis trente ans*" et la révolution que Farmer et al.(2012) appellent de leurs vœux : " *The only way to make a major advance in economic modelling is to explore entirely new approaches rather than make incremental modifications to existing models*".

Développer des modèles chaos stochastiques permet de conserver les avancées majeures des 30 dernières années en économétrie financière tout en proposant et en précisant une conception particulière des marchés financiers que constitue l'approche chaotique.

Nous détaillons dans la section suivante deux modèles chaotiques particulièrement adaptés aux séries temporelles financières.

#### **2.2.1.1.1 Quelle forme de non-linéarité chaotique pour prendre en compte les structures des séries financières ?**

La nature des séries financières reflète l'interaction plus ou moins complexe qui existe sur les marchés financiers. Nous avons montré, dans les sections précédentes, que la complexité des séries financières résultait de l'interaction de plusieurs catégories d'agents. D'aucuns estiment que la modélisation des séries financières doit s'effectuer uniquement sur la volatilité. Figlewski(1997) explique que ce choix est motivé par des raisons pratiques injustifiées. En effet, supposer que la moyenne de la série des prix stationnarisée est nulle ou est bien décrite par un modèle linéaire revient à omettre une partie des structures non linéaires qui existent dans les séries financières. Les structures prises en compte par l'équation de la moyenne sont importantes : elles représentent une partie de

l'interaction des agents sur le marché et comportent de précieuses informations quant au type d'agents dominant le marché. Mackey(2004) pointe le désinté- rêt de la science économique envers des modèles faisant intervenir des délais pour modéliser les séries économiques, Howroyd et Russel(1984) constituant une exception. L'absence de littérature économique sur ces sujets est d'autant plus surprenante que Ricci(1930), Schultz(1930) et Tinbergen(1930) utilisent simultanément le retard connu entre le début de la production et la distribu- tion de biens pour analyser le cycle des biens dans un cadre mathématique temporel discret qui deviendra plus tard la théorie Cobweb. Par ailleurs, un certain nombre de chercheurs ont développé des modèles à base d'équations dif- férentielles pour rendre compte du comportement des cycles économiques. Il en est ainsi de Haldane(1933), Goodwin(1951), Larson(1964). Enfin, il existe un large spectre de comportements dynamiques qui peuvent être pris en compte par des équations non linéaires différentielles avec retards.

La nature chaotique des séries financières nous conduit à retenir des équations différentielles avec retard de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t); x(t - \tau)) \quad (103)$$

Ce type d'équation intègre un retard ( $\tau$ ) qui correspond au temps de réac- tion suite à un choc. Il existe une multitude d'équations de cette forme. Nous mettons l'accent sur deux équations en particulier : l'équation de Mackey- Glass(1977) et l'équation de Lasota(1977). L'intérêt de ces deux équations est lié à une particularité commune dans leur nature non linéaire et leur caractère non-monotone identique. De nombreux travaux menés notamment par Kyrtsou et al.(2002, 2004, 2010) montrent les performances particulières du modèle Mackey-Glass lorsqu'il est associé à un processus GARCH dans la modélisa- tion et la prévision des chroniques financières. La popularité et l'engouement suscité par l'équation de Mackey-Glass ont ombragé les éventuels apports de l'équation de Lasota. Nous proposons une présentation de ces équations et nous montrons, par des simulations, leurs principales caractéristiques.

### 2.2.1.1.1.1 *Le modèle de Mackey-Glass*

L'équation de Mackey-Glass(1977) est introduite pour la première fois dans l'étude des systèmes de contrôles physiologiques. Il s'agit d'une équation non linéaire différentielle avec retard capable de décrire plusieurs comportements dynamiques complexes. L'objectif premier des auteurs est double :

- \* porter à l'attention des théoriciens deux exemples médicaux des dynamiques complexes ;
- \* montrer que des modèles mathématiques simples peuvent décrire des dynamiques périodiques et apériodiques, similaires à celles observées dans les études médicales.

Le succès de cette équation a conduit au développement de nombreuses études dans plusieurs disciplines. Nous revenons sur les principaux résultats.

Glass et Mackey(1977) introduisent 3 modèles permettant de décrire respectivement les problèmes respiratoires des adultes atteints du phénomène de Cheyne-Stokes ( $y(t)$ ) (Modèle 1) et les fluctuations de globules blancs chez des patients atteints de leucémie myéloïde chronique (Modèles 2 & 3).

Modèle 1 :

$$\frac{dy}{dt} = \lambda - \frac{\alpha V_m y(t) y^n(t - \tau)}{\theta^n + y^n(t - \tau)} \quad (104)$$

Où  $V_m$  est la respiration maximale,  $\theta$  et  $n$  sont des paramètres ajustés aux observations empiriques,  $\lambda$  est le taux de production de  $CO_2$ ,  $\tau$  désigne le temps entre l'oxygénation du sang dans les poumons et la stimulation des chémorécepteurs du tronc cérébrale,  $\alpha$  est une constante.

Modèle 2 :

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \frac{F_0 \theta^n}{\theta^n + y^n(t - \tau)} \quad (105)$$

Modèle 3 :

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \frac{\beta \theta^n y(t - \tau)}{\theta^n + y^n(t - \tau)} \quad (106)$$

Où  $F_0, \theta > 0, n$  et  $\gamma$  sont des constantes. Dans ces modèles, les paramètres sont positifs et doivent être déterminés par des analyses empiriques. Dans la littérature, ces différents modèles et leurs variantes ont été étudiés<sup>56</sup>. Ainsi, Berezansky et al.(2006, 2006a, 2006b), Wan et al.(2002, 2004), Xu et al.(2007) étudient une variante du modèle 3, l'équation de Mackey-Glass non autonome définie par :

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma(t)y(t) + \frac{\beta(t)x(t - \tau(t))}{1 + x^n(t - \tau(t))} \quad (107)$$

Avec  $\gamma, \beta \in C[\mathbb{R}, (0, \infty)]$ ,  $\tau \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ . Dans cette équation, tous les paramètres dépendent du temps. Une autre spécification dérivée du modèle 3 est étudiée par Jiang et al.(2001), Weng et al.(1995), Zhang et al.(2006). Elle est décrite par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma(t)x(t) + \beta(t) \int_0^\infty \frac{P(\tau)x(t - \tau)dr}{1 + x^n(t - \tau)} \quad (108)$$

Avec  $\gamma, \beta \in C[\mathbb{R}^+, (0, \infty)]$ ,  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est supposé continu. En économétrie financière, les études portant sur le modèle de Mackey-Glass se basent sur une version discrète du modèle 3. Ce dernier peut être réécrit en substituant  $y(t)$  par  $\theta x(t)$  :

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x(t) + \frac{\beta x(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)} \quad (109)$$

Avec  $t > 0$  et la condition initiale  $\phi$  pour  $t \geq 0$  est donnée par  $x(t) = \phi(t)$  où  $\phi \in C[-\tau, 0], \mathbb{R}^+, \phi(0) = 0$ . De nombreuses études définissent les propriétés mathématiques de ce modèle. Il en est ainsi de Gopalsamy et al.(1998) qui donnent les propriétés d'attractivités des points d'équilibres et les conditions de stabilités asymptotiques globales des points d'équilibres. Berezansky et al.(2006) définissent les bornes et les conditions de positivité, de persistance et d'extinction des solutions. Berezansky et al.(2013) reviennent sur les principaux résultats des modèles de Mackey-Glass(1977) et précisent la stabilité des solutions du modèle 3. Les conditions de stabilité des solutions sont très importantes pour identifier les éventuelles bifurcations d'un système chaotiques. Elles permettent de définir un équilibre de long terme vers lequel converge la dynamique du système. Dans le cadre financier, elles indiquent la convergence de la dynamique en moyenne vers le prix d'équilibre lorsque le marché est dominé par des fondamentalistes.

---

56. Pour éviter toute confusion, nous notons, par la suite, la chronique temporelle  $x(t)$  au lieu de  $y(t)$ .



### Stabilité des solutions :

Le modèle décrit par l'équation 109 a un équilibre trivial. Si l'inégalité suivante  $\beta > \gamma > 0$  est respectée alors le modèle a un équilibre positif donnée par :

$$K = \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1\right)^{(1/n)} \quad (110)$$

Nous retenons les définitions de la stabilité des solutions suivantes, extraites de Berezansky et al.(2013) :

#### **Définition 3** *Stabilité*

*On dit qu'une solution d'équilibre du modèle décrite par l'équation 110 est localement stable, si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$ , tel que pour chaque condition initiale  $\phi(t)$ , l'inégalité  $|\phi(t) - K| < \delta$  pour tout  $t \geq 0$  implique  $|x(t) - K| < \epsilon$  pour la solution  $x$ . Si en plus, pour chaque solution  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K$  alors la solution  $x = K$  est **localement asymptotiquement stable (LAS)**. L'équilibre  $K$  est **globalement asymptotiquement stable (GAS)** pour des conditions initiales dans l'ensemble ouvert  $Q_0 \subset \mathbb{R}$  si  $K$  est un attracteur pour toutes les solutions  $x(t)$  avec des conditions initiales dans l'ensemble ouvert  $Q_0 \subset \mathbb{R}$ ; c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K$  et il est également localement stable.*

Pour définir le théorème d'attractivité globale du modèle décrit par l'équation 109, Berezansky et al.(2013) retiennent le lemme suivant :

**Lemme 1** *Si  $f'(0) < \gamma$  où  $f(x) = \frac{\beta X}{1+X^n}$  alors pour tout  $\tau \geq 0$ , l'équilibre trivial de toute équation de la forme :*

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x(t) + f(x(t, \tau)) \quad (111)$$

*où  $f(x(t, \tau)) = f(x)$ , est globalement attractif.*

De ce lemme, on peut définir le théorème suivant :

#### **Théorème 2** *Attractivité globale*

*Si  $n > 1$  et  $\beta < \gamma$  alors la solution triviale du modèle décrit par l'équation 110 est un attracteur global.*

Berezansky et al.(2006) établissent le théorème suivant :

**Théorème 3** *Soit le modèle défini par :*

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma(t)x(t) + \frac{\beta(t)x(h(t))}{1+x^n(h(t))} \quad (112)$$

Avec la condition initiale  $x(t) = \phi(t), t \leq 0, h(t)$  étant une fonction mesurable au sens de Lebesgue qui satisfait  $h(t) \leq t$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ . Les hypothèses suivantes sont associées au modèle :

\*  $n > 0, \beta(t) \geq 0, \gamma(t) \geq 0$  sont des fonctions Lebesgue-mesurables, essentiellement localement bornées.

\*  $\phi : (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Borel mesurable bornée,  $\phi(t) \geq 0, \phi(0) > 0$

Sous ces hypothèses, si on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\beta(t)}{\gamma(t)} &= \lambda < 1 \\ \int_0^{\infty} \gamma(s) ds &= \infty \\ \sup_{t < 0} x(t) &< \infty \end{aligned}$$

alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  où  $x(t)$  est une solution de l'équation 112.

Pour les détails, voir Berezensky et al.(2006, 2013). Ces résultats permettent de définir le théorème de stabilité des solutions indépendantes de  $\tau$  :

**Théorème 4** *Stabilité des solutions*

L'équilibre positif  $K$  du modèle décrit par l'équation 109 est LAS pour tout  $\tau$  si et seulement si une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1.  $0 < n \leq 2$ ;
2.  $n > 2$  et  $\frac{\beta}{\gamma} < \frac{n}{n-2}$

Ce qui permet de déduire le théorème de stabilité globale indépendamment du retard.

**Théorème 5** *Si une des deux conditions (1) ou (2) est satisfaite alors l'équilibre positif  $K$  du modèle décrit par l'équation 109 est GAS pour tout  $\tau$ .*

De nombreuses études se sont intéressées aux conditions suffisantes de stabilité globale du modèle décrit par l'équation 109. Elles sont résumées par Berezensky et al.(2013) dans le tableau 1. Namajunas et al.(1995) avaient déjà conclu sur des résultats similaires pour une classe d'équations de Mackey-Glass. Ils ont montré qu'il peut exister, en fonction des valeurs prises par les paramètres, 3 points stationnaires données par  $x_0 = 0, x_0 = -1, x_0 = 1$ . Liz et al.(2002) apportent la preuve mathématique de la convergence d'un ensemble de solutions

---

Conditions suffisantes de stabilité globale

---

|                         |   |
|-------------------------|---|
| Karakostas et al.(1992) | $n > 1 \ \& \ 1 < \frac{\beta}{\gamma} \leq \frac{n}{n-1}$  |
| Kuang(1993)             | $n > 1 \ \& \ 1 < \frac{\beta}{\gamma} \leq \frac{4n}{(n-1)^2}$   |
| Gopalsamy et al.(1998)  | $0 < n \leq 2$  |
| Gopalsamy et al.(1998)  | $n > 2 \ \& \ \gamma \in [0, \gamma_0(\tau)], \ \gamma_0(\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{n^2-2n+2}{n^2-3n+2}$  |
| Gopalsamy et al.(1998)  | $n > 2, \ \gamma > \gamma_0(\tau) \ \& \ \frac{\beta}{\gamma} < \frac{2n\theta}{2(n-1)\theta-1-\sqrt{1+4\theta(1-\theta)}}, \ (\theta = 1 - e^{-\gamma\tau})$                   |
| Liz et al.(2005)        | $n > 2, \ \gamma > \gamma_0(\tau) \ \& \ -\frac{\gamma}{\alpha} e^{-\tau\gamma} > \ln \frac{\alpha^2-\alpha\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}, \ (\alpha = \gamma n/\beta - n + 1 < 0)$ |

---

Tableau 1 – Conditions de stabilité globale (Berezansky et al. (2013))

vers 0 et les premières intuitions sur l'équivalence entre les stabilités asymptotiques locale et globale.

Une version discrète de l'équation 109 peut être donnée par :

$$X_t = \beta \frac{X_{t-\tau}}{1 + X_{t-\tau}^n} + (1 - \delta)X_{t-1} \quad (113)$$

Avec  $\beta, n > 0$  et  $(1 - \delta) = \gamma$ . Il est intéressant de noter que l'équation 113 décrit de façon relativement simple un système complexe que l'on peut interpréter de la façon suivante :

- \*  $\frac{X_{t-\tau}}{1+X_{t-\tau}^n}$  représente la partie non linéaire de l'équation 113. La forme mathématique de ce rapport est relativement proche de celle d'un facteur d'actualisation. En économie, cette non linéarité peut s'interpréter comme une actualisation de la variable  $X_{t-\tau}$  en retenant comme facteur d'actualisation  $\frac{1}{1+X_{t-\tau}^n}$ .
- \*  $X_{t-1}$  représente un processus autorégressif d'ordre 1.

La simplicité de l'équation 113 revêt des dynamiques complexes qui peuvent être de nature chaotique. Elle présente la particularité de pouvoir représenter des systèmes de dimensions infinies d'où l'intérêt de définir préalablement l'intervalle temporel dans lequel évolue la trajectoire. Farmer(1982) a montré que l'augmentation du paramètre  $\tau$  conduit à une augmentation de la dimension de l'attracteur de l'équation 113 comme dans les systèmes chaotiques.

Nous retrouvons une grande partie des résultats mathématiques par des simula-

tions de l'équation 113. L'intérêt de ce modèle en économétrie financière réside dans sa capacité à décrire les fluctuations du marché lorsqu'il est dominé par une force stabilisatrice (Kyrtsov et Terraza(2002)).

#### 2.2.1.1.1.2 *Le modèle de Lasota*

Lasota(1977) présente une équation différentielle non linéaire avec retard de la même forme que celle de Mackey-Glass(1977) :

$$\frac{dx}{dt} = \beta x_\tau^n e^{-x_\tau} - \gamma x \quad (114)$$

Malgré le manque de littérature sur ce modèle, il est possible d'affirmer comme Glass et Mackey(2010) que le caractère non linéaire de l'équation 114 a le même comportement non monotone que l'équation 113. Une version discrète de l'équation 114 peut être donnée par :

$$X_t = \beta X_{t-\tau}^n e^{-X_{t-\tau}} + (1 - \delta)X_{t-1} \quad (115)$$

Avec  $\beta, n > 0$  et  $(1 - \delta) = \gamma$ . La partie non linéaire de l'équation 115 est intéressante à plusieurs égards :

- \* Elle rend compte d'une dynamique non linéaire différente de celle du modèle de Mackey-Glass dont l'application sur des chroniques financières a conduit à des résultats concluants.
- \* La nature de la non-linéarité décrite par cette équation est d'autant plus intéressante qu'elle comporte un terme exponentiel qui peut produire des dynamiques explosives caractéristiques des séries temporelles financières en périodes de crise.

L'évolution de ce modèle repose essentiellement sur le comportement de la partie non linéaire :

$$\beta X_{t-\tau}^n e^{-X_{t-\tau}} \quad (116)$$

Lasota(1977) montre que pour certaines valeurs de  $\beta$ , il existe dans  $[0, \infty)$  une mesure continue, ergodique et invariante pour l'équation 116. Pour  $\beta$  suffisamment grand, l'équation 116 peut décrire des trajectoires turbulentes et stationnaires à long terme. Des trajectoires périodiques et chaotiques peuvent

être décrites par l'équation 114. Ainsi, si on retient  $\tau = 1, \delta = 0.1, n = 8$ , il est possible de définir deux types de trajectoires pour l'équation 113 :

- \* Si  $X_0 \geq 2.5$ ,  $X_t$  converge vers une solution stationnaire  $\bar{X} > 0$
- \* Si  $X_0 \leq 2.5$ ,  $X_t$  converge vers une solution stationnaire  $\bar{X} = 0$

Lasota(1977) montre que sous les conditions  $\tau = 1, \delta = 0.4, n = 8$ , il existe une solution périodique de période 2 et que toute trajectoire, ayant une condition initiale  $X_0 \geq 3.4$ , est asymptotiquement périodique. Cependant, pour certaines trajectoires commençant par une condition initiale  $X_0 \leq 3.4$ , l'équilibre de long terme est un point fixe instable. Sous les mêmes conditions avec  $X_0 \leq 3.3$ , l'équilibre de long terme est nul. Dans le cas où  $n > 0$ , Lasota(1977) montre que pour des valeurs positives de  $\beta, \tau$  et  $\gamma$ , il existe une mesure continue, ergodique et invariante pour l'équation 114. Nous proposons d'étudier et de comparer les caractéristiques de cette équation avec celles du modèle de Mackey-Glass.

### 2.2.1.1.1.3 Comparaison des versions déterministes

Nous proposons de simuler diverses trajectoires en recourrant aux deux équations 113 et 115. Il s'agit d'analyser leur comportement lorsqu'elles ne sont associées à aucun bruit. Pour cela, fixons au préalable, les paramètres  $\beta, \gamma$ , et  $n$  ainsi que les conditions initiales. Il n'existe pas de recommandations quant au choix de ces valeurs mais l'économétrie financière peut nous guider.

- \* Le choix du retard  $\tau$  : dans certaines disciplines notamment en biologie, ce paramètre peut prendre des valeurs importantes et non entières. Le choix de la valeur de ce paramètre est primordial puisqu'il indique implicitement le retard de la variable d'état qu'il faut retenir. En économétrie financière et plus généralement en économie, le retard généralement retenu dans le cas des données journalières est 1 pour plusieurs raisons :
  - Il est difficile de justifier que la variable retardée à un ordre supérieur à 1 ( $X_{t-\tau}, \tau > 1$ ) explique mieux l'évolution de la variable d'état ( $X_t$ ) que la variable retardée  $X_{t-1}$  sauf s'il existe une saisonnalité dans les données.

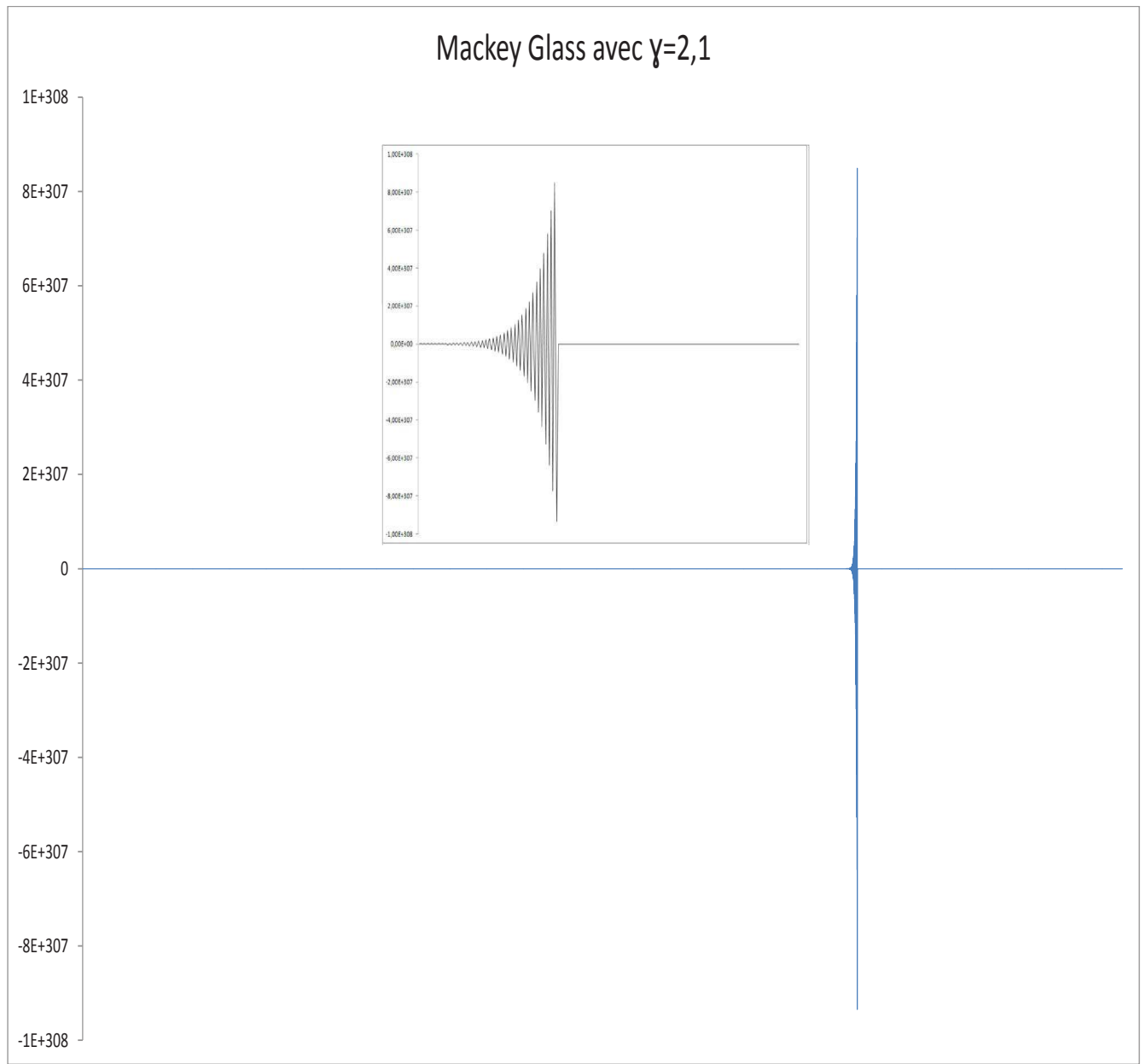
- En finance, la propriété de martingale suppose que le meilleur prédictor de  $X_t$  est  $X_{t-1}$ .
- \* Le choix du paramètre  $n$  : Il représente la dimension du système qui peut prendre des valeurs importantes selon que l'on considère que la dynamique étudiée est issue d'un système à haute ou faible dimension. En économétrie financière, la dimension du système généralement retenue est 2. Mais il peut être intéressant d'analyser l'évolution des deux équations en faisant varier  $n$ .
- \* La fixation des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  : La condition de positivité de ces paramètres doit être respectée. Dans de nombreuses études, notamment par Rosenstein et al.(1992), Glass et Mackey(2010) ou encore Kyrtsou et Teraza(2003), la valeur de ces paramètres varie entre 0.2 et 2.1 pour  $\beta$  et entre 0.05 et 1 pour  $\gamma$ .

Pour les deux équations, nous fixons des valeurs identiques pour les paramètres et les conditions initiales avec  $\tau = 1, n = 2, \beta = 0.2, \gamma = 0.1, X_0 = 1.2$ . Pour ces valeurs, les équations 113 et 115 convergent vers un point fixe  $\bar{X}$  avec  $\bar{X} = 1$  pour 113 et  $\bar{X} = 0$  pour 115. Il est intéressant de noter que cette convergence se fait assez rapidement pour 113 alors qu'elle est plus lente pour 115. Nous proposons de faire varier les paramètres des équations 113 et 115 et d'analyser le comportement de ces équations.

### 2.2.1.1.3.1 Variation du paramètre $\gamma$

Nous commençons par analyser le comportement de ces deux équations lorsque le paramètre  $\gamma$  varie. Lorsque  $\gamma$  augmente, toutes choses égales par ailleurs, l'équilibre de long terme  $\bar{X}$  devient identique pour les deux équations ( $\bar{X} = 0$ ). Quand  $\gamma$  atteint les valeurs  $\gamma = 2.1$  et  $\gamma = 1.5$  pour les équations 113 et 115 respectivement, la convergence vers l'équilibre de long terme s'opère différemment puisque les séries oscillent fortement autour de 0. Ainsi nous donnons une représentation graphique du modèle Mackey-Glass avec  $\gamma = 2.1$ . Nous constatons que l'équilibre de long terme évolue autour de 0 pour les 7300 premières observations mais que la trajectoire commence alors à osciller fortement comme

on peut le voir dans le graphique zoomé ( $\triangleright$  Graphique 6). Il est à noter que ces oscillations peuvent survenir dans la trajectoire simulée plusieurs fois : elles caractérisent la sensibilité aux conditions initiales de l'équation de Mackey-Glass mais la nature purement déterministe du modèle garantit un retour rapide vers l'équilibre de long terme, ces oscillations ne se produisant que sur 0,1% des données.



Graphique 6 – Modèle de Mackey-Glass avec  $\gamma = 2.1$



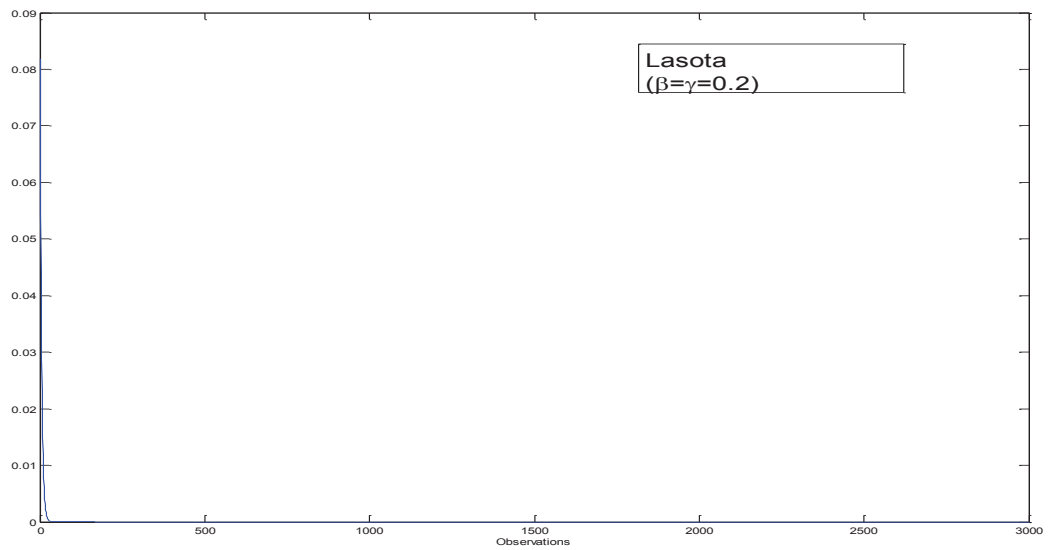
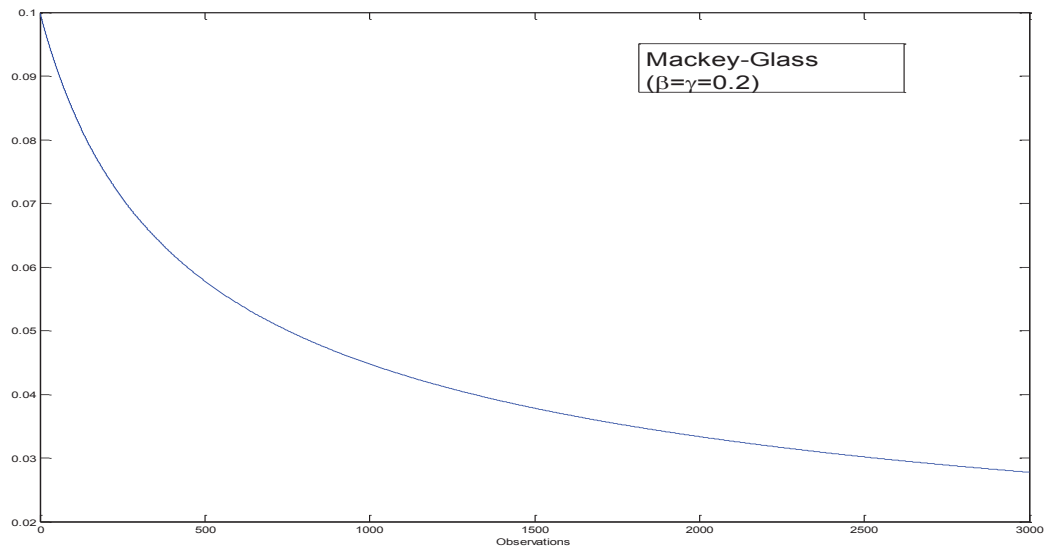
L'équilibre de long terme du modèle de Mackey-Glass avec  $\beta \leq \gamma$  et  $\gamma \in [0.2, 2.1]$  est toujours nul. Ce résultat se déduit facilement de l'équilibre trivial de l'équation de Mackey-Glass qui est un équilibre positif si et seulement si  $\beta > \gamma > 0$ . Nous donnons, à titre illustratif, une des trajectoires simulées pour laquelle  $\beta = \gamma$  ( $\triangleright$  Graphique 7).

**Conjecture** : Pour des valeurs positives de  $\beta, \gamma, c$  et  $\tau$  avec  $0 < \beta < \gamma$ , l'équilibre de long terme du modèle Mackey-Glass est toujours nul.

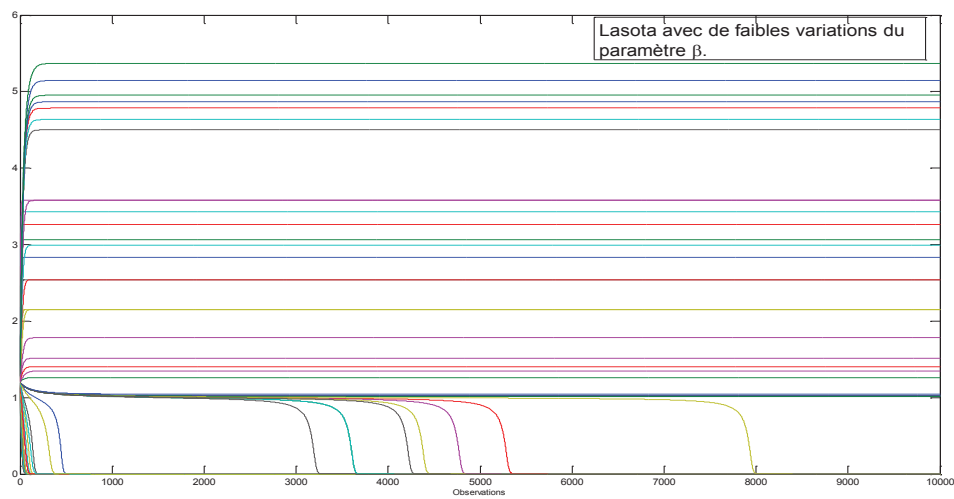
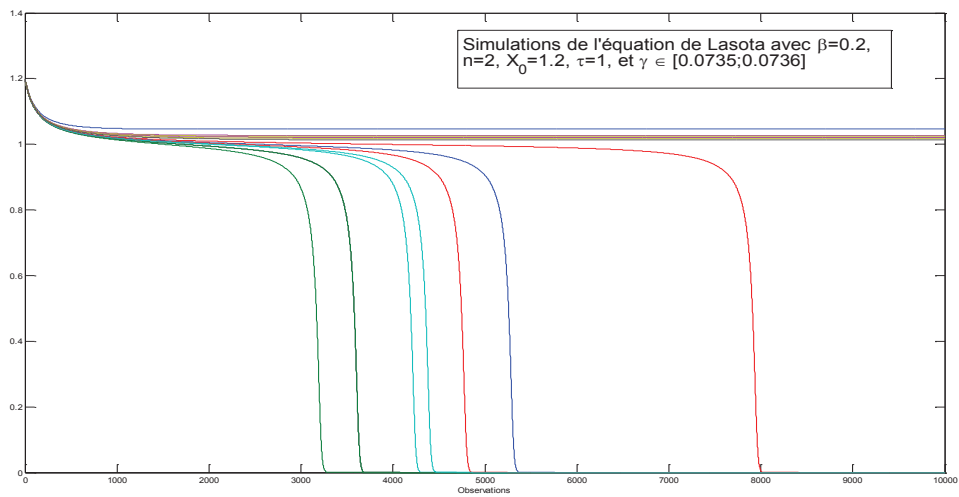
Il est intéressant de noter que la convergence vers l'équilibre de long terme  $\bar{X} = 0$  pour des valeurs  $0 < \beta < \gamma$  se fait très lentement pour le modèle de Mackey-Glass. Autrement dit, il faut des séries plus longues pour observer la convergence vers l'équilibre de long terme. La simulation du modèle de Lasota pour des valeurs identiques au Mackey-Glass montre que les différentes trajectoires ont un équilibre de long terme nul. La convergence vers cet équilibre de long terme se fait très rapidement pour le modèle de Lasota, comparativement au modèle de Mackey-Glass.

**Conjecture** : Pour des valeurs positives de  $\beta, \gamma, n$  et  $\tau$ , avec  $0 < \beta \leq \gamma$ , l'équilibre de long terme du modèle de Lasota est toujours nul.

La nature chaotique de l'équation de Lasota est confirmée par l'existence de bifurcations. Ainsi, si on retient les paramètres  $\beta = 0.2, \gamma = 0.1, n = 2, X_0 = 1.2$  et  $\tau = 1$ , on obtient une trajectoire avec un équilibre de long terme,  $\bar{X} = 0$ . Si on modifie le paramètre  $\gamma = 0.05$ , les simulations montrent une convergence vers un équilibre de long terme  $\bar{X} = 2.15$ . Il est alors possible d'obtenir une infinité de trajectoires pour de faibles variations du paramètre  $\gamma$ . Le graphique 7 montre l'évolution de l'équation de Lasota pour des valeurs de  $\gamma$  comprises entre 0.0735 et 0.0736, toutes choses égales par ailleurs. Nous constatons alors qu'une variation d'un millionième peut conduire à un équilibre de long terme qui oscille entre des valeurs positives et nulles et ce, pour une condition initiale identique.



Graphique 7 – Exemple de simulations des équations 113 et 115 avec  $\beta = \gamma$



Graphique 8 – Exemples de simulations de l'équation de Lasota avec de faibles variations de  $\beta$  &  $\gamma$

### 2.2.1.1.1.3.2 Variation du paramètre $\beta$

La variation du paramètre  $\beta$  toutes choses égales par ailleurs, montre que l'équilibre de long terme augmente au fur et à mesure que  $\beta$  augmente. Il est à noter que dans le cas de l'équation 115, lorsque  $\beta > 15$ , il n'y a plus de convergence croissante vers l'équilibre de long terme mais plutôt une convergence décroissante.

Lorsqu'on fait varier  $\beta$ , ceteris paribus, l'équilibre de long terme du modèle de Mackey-Glass est donné par l'équation 110 avec la condition  $0 < \gamma < \beta$ . Les simulations du modèle de Lasota indiquent que sous la même condition, l'équilibre de long terme est toujours positif ou nul. Si nous comparons les séries simulées, nous constatons que l'équilibre de long terme du Mackey-Glass augmente plus vite que les valeurs de  $\beta$  alors que pour le modèle de Lasota, l'équilibre de long terme augmente moins vite que les valeurs de  $\beta$ .

**Conjecture** : Pour des valeurs positives de  $\beta, \gamma, n$  et  $\tau$  avec  $\gamma \geq \beta > 0$ , l'équilibre de long terme du modèle de Lasota est toujours nul.

Les différentes simulations de l'équation de Lasota montrent qu'il est difficile de définir des intervalles de variation des paramètres pour obtenir un équilibre de long terme strictement positif. En effet, nous observons que pour de petites variations des paramètres  $\beta$  ou  $\gamma$ , toutes choses égales par ailleurs, l'équilibre de long terme varie subitement de  $\bar{X} = m$  avec  $m$  strictement positif à  $\bar{X} = 0$ . Nous constatons que l'équation de Lasota conduit à des équilibres qui diffèrent beaucoup pour de petites variations (au centième près) du paramètre  $\beta$  avec les mêmes conditions initiales ( $\triangleright$  Graphique 8).

### 2.2.1.1.1.3.3 Variations du paramètre $n$ et des conditions initiales

Lorsque la dimension  $n$  augmente, toutes choses égales par ailleurs, nous constatons pour l'équation de Mackey-Glass une convergence plus rapide vers l'équilibre de long terme tant que  $n$  est inclus dans  $[2; 30[$ . À partir d'une dimension  $n = 30$  la convergence vers un équilibre de long terme n'est plus nette : la trajectoire commence à osciller. Quand  $n > 30$ , notamment pour  $n = 50, n = 100$ , la trajectoire est une succession de pics et de creux autour de l'équilibre de long terme ( $\triangleright$  Graphique 9). Le graphique 10 donne une sélection des simulations de l'équation de Lasota pour :

- (a) une dimension  $n=2$  avec  $\beta < \gamma$ ;
- (b) une dimension  $n=10$  avec  $\beta < \gamma$ ;
- (c) une dimension  $n=2$  avec  $\beta > \gamma$ ;
- (d) une dimension  $n=10$  avec  $\beta > \gamma$ ;
- (e) une dimension  $n=2$  avec  $\beta < \gamma$ ;
- (f) une dimension  $n=10$  avec  $\beta < \gamma$ ;
- (g) une dimension  $n=2$  avec  $\beta < \gamma$ ;
- (h) une dimension  $n=10$  avec  $\beta < \gamma$ .

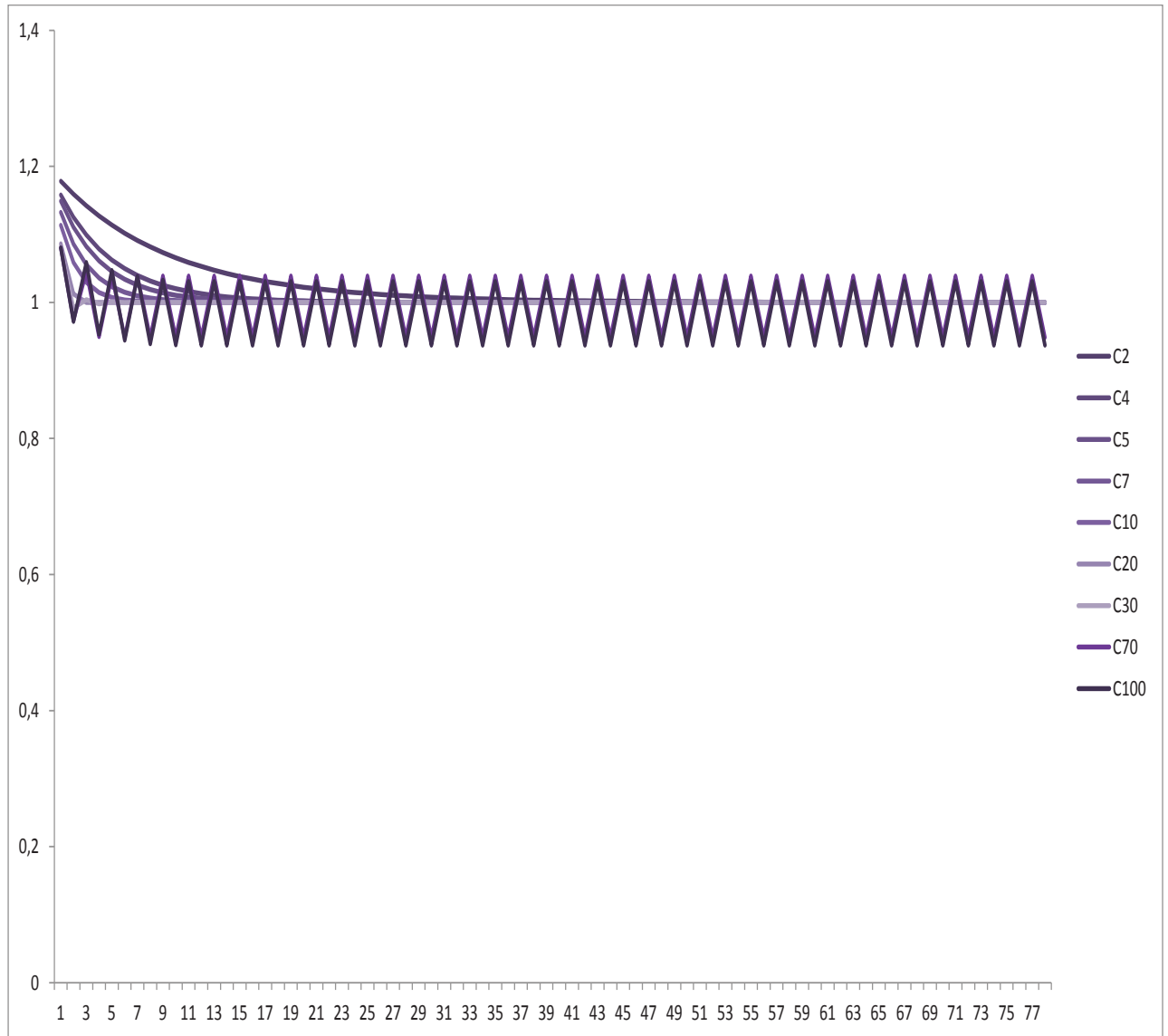
Le premier enseignement que nous pouvons tirer de ces simulations concerne la relation entre  $\beta$  et  $\gamma$  : si  $\beta < \gamma$ , l'équilibre de long terme converge vers 0 et ce, quelle que soit la dimension retenue. Autrement dit, pour ces trajectoires la dimension n'a aucun impact sur l'équilibre de long terme. Lorsque  $\beta > \gamma$ , la complexité de l'équation se révèle : la sensibilité aux conditions initiales apparaît clairement dans le graphique 11 qui donne 4 trajectoires de l'équation de Lasota avec respectivement :

- (a) une dimension  $n=2$  avec  $\beta = \gamma$ ;
- (b) une dimension  $n=10$  avec  $\beta = \gamma$ ;
- (c) une dimension  $n=2$  avec  $\beta > \gamma$ ;
- (d) une dimension  $n=10$  avec  $\beta > \gamma$ .

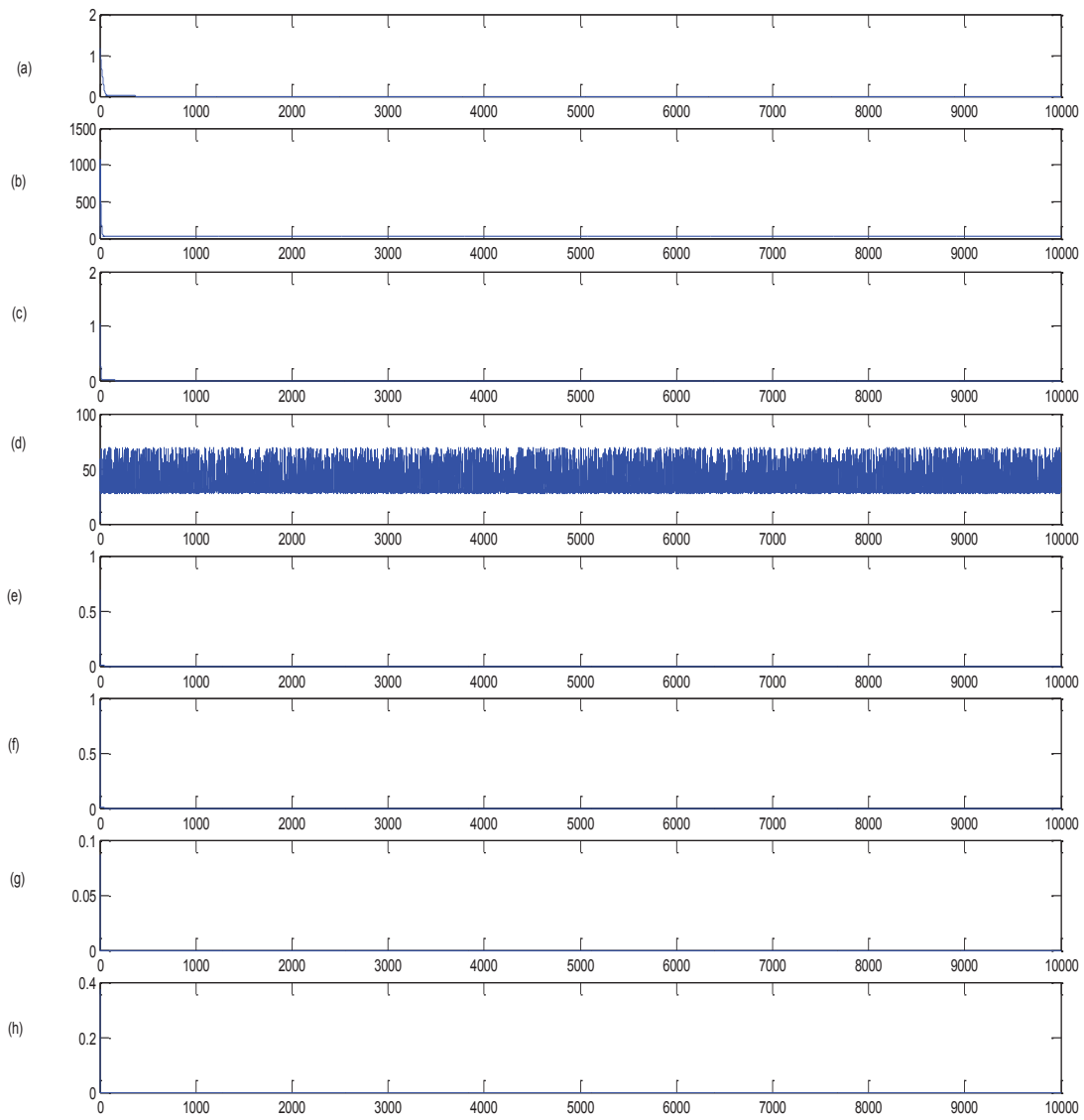
Nous donnons pour la dernière trajectoire une représentation plus nette sur les 200 premières observations qui indique la forte sensibilité aux conditions initiales de l'équation de Lasota. Autrement dit, pour d'importantes dimensions, l'équation de Lasota est capable de reproduire des trajectoires hautement complexes caractérisées par une forte sensibilité aux conditions initiales.

En ce qui concerne les conditions initiales, nous notons que dans le cas de l'équation 113 quand  $X_0 < 1$ , il y a une convergence vers l'état d'équilibre  $\bar{X} = 1$  alors que lorsque  $X_0 > 1$ , les trajectoires simulées s'éloignent de l'équilibre de long terme  $\bar{X} = 1$ . Dans le cas de l'équation 115, contrairement au modèle de Mackey-Glass pour lequel l'équilibre de long terme ne dépend pas de la condition initiale, nous constatons que la condition initiale  $X_0$  impacte

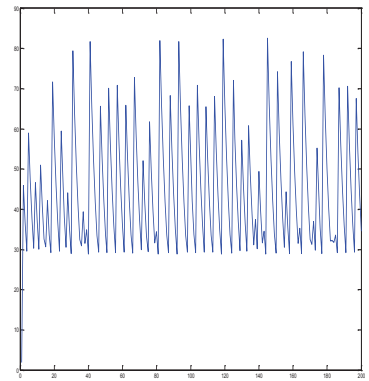
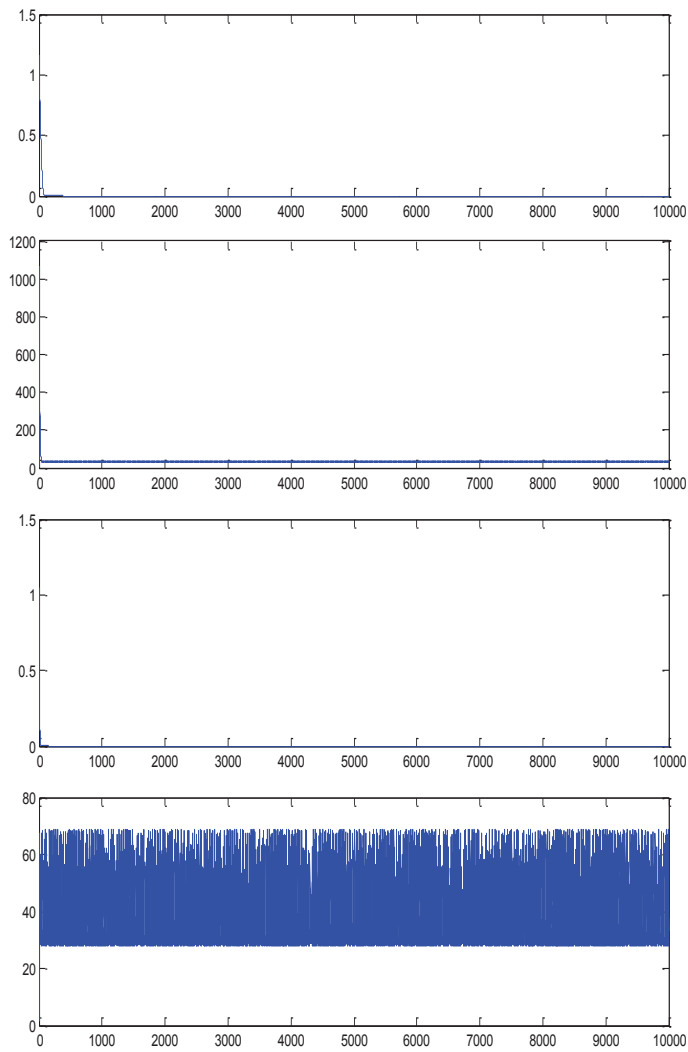
fortement l'équilibre de long terme.



Graphique 9 – Variation de la dimension de plongement pour le modèle Mackey-Glass



Graphique 10 – Trajectoires simulées à partir de l'équation 115



Graphique 11 – Sensibilités aux conditions initiales de l'équation 115



---

La non linéarité décrite par les équations de Mackey Glass et de Lasota est différente mais l'engouement suscité par les modèles de Mackey-Glass ont permis de définir les caractéristiques de cette équation. La capacité de ces équations à pouvoir décrire plusieurs types de trajectoires est d'autant plus intéressante que les séries financières comportent différentes non linéarités et que ces dernières s'amplifient en période de crise. La définition d'un équilibre trivial, globalement et localement stable pour l'équation de Mackey-Glass est un apport important pour l'approche chaotique des marchés financiers. L'interaction d'agents financiers fundamentalistes et chartistes fait apparaître des trajectoires différentes selon le type d'agents majoritaire sur le marché. Ainsi, l'équation de Mackey-Glass permet de représenter une tendance de long terme qui est la valeur fondamentale du titre. Elle décrit l'existence d'une force stabilisatrice sur le marché. La non linéarité décrite par l'équation de Lasota(1977) est intéressante car elle peut décrire plusieurs configurations. L'équilibre de long terme n'est pas un équilibre trivial et il peut se modifier subitement par de petites variations de paramètres, témoignant ainsi de l'existence de bifurcations. Compte tenu de la palette des trajectoires qui peut être décrite par les équations de Lasota et Mackey-Glass, il nous semble pertinent de retenir ces modèles pour estimer les tendances globales du marché.

#### 2.2.1.2 MODÈLES CHAOTIQUES AVEC BRUITS

L'insuffisance de l'approche déterministe à rendre compte des fluctuations des séries temporelles financières nous conduit à envisager une approche chaostochastique. Cette dernière permet de prendre en compte non seulement les fluctuations " modérées " autour d'un équilibre de long terme qui représente la valeur fondamentale du titre mais aussi les fortes perturbations qui peuvent être créées par des agents spéculatifs sur le marché. La capacité de cette approche à pouvoir rendre compte de plusieurs trajectoires est à confronter aux modélisations classiques, cantonnées à une approche stochastique des marchés financiers et ignorants l'éventuelle présence de structures chaotiques en moyenne. Il est

vrai que l'idée d'une modélisation chaotique peut susciter certaines réserves quant à l'utilisation finale qui peut en être faite : l'horizon de prévision est relativement réduit compte tenu de la forte sensibilité aux conditions initiales et la prise en compte des importantes fluctuations nécessite l'utilisation d'un chaos à hautes dimensions. Ces craintes sont palliées dans l'approche chaos-stochastique pour plusieurs raisons :

- \* le recours à un chaos à hautes dimensions n'est pas toujours nécessaire dans la mesure où les fluctuations non prises en compte par la partie chaotique peuvent être parfaitement intégrées par la partie stochastique.
- \* l'horizon de prévision n'est plus lié à la sensibilité aux conditions initiales : nous montrons que l'équilibre de long terme décrit par la partie chaotique est rapidement atteint dès lors que l'analyse empirique repose sur un nombre important de données. Les fortes fluctuations dues à la présence d'agents spéculatifs sont alors intégrées par la partie stochastique.

Il faut comprendre que l'approche chaos-stochastique offre une multitude de modélisations qui permet de rendre compte des différentes trajectoires des séries temporelles financières. Cette diversité n'est pas spécifique à la partie stochastique du modèle mais elle est plutôt liée à la pléthore des trajectoires qu'une seule équation chaotique peut décrire selon les paramètres retenus.

Nous commençons par une analyse des modèles chaotiques avec bruit blanc : nous présentons les principales caractéristiques des modèles de Lasota(1977) et Mackey-Glass(1977) lorsqu'ils sont bruités. Nous détaillons les principaux résultats du modèle de Mackey-Glass avec bruits hétéroscédastiques. Enfin, nous revenons sur les principaux résultats mathématiques du modèle de Mackey-Glass avec bruit stochastique fractionnaire de Dung(2012).

#### **2.2.1.2.1 Modèles chaotiques avec bruits blancs**

La non-linéarité en économétrie financière peut revêtir différentes formes. Elle peut tout aussi concerner l'équation de la moyenne, celle de la variance ou les deux en même temps. L'idée d'une série temporelle financière faiblement non linéaire est plausible : elle peut être caractérisée par des dynamiques chaotiques

en moyenne et un bruit homoscédastique en variance. Nous proposons de simuler les modèles de Mackey-Glass et Lasota en les associant à un bruit blanc normal :

$$X_t = \beta \frac{X_{t-\tau}}{1 + X_{t-\tau}^n} + (1 - \delta)X_{t-1} + \epsilon_t \quad (117)$$

$$X_t = \beta X_{t-\tau}^n e^{-X_{t-\tau}} + (1 - \delta)X_{t-1} + \epsilon_t \quad (118)$$

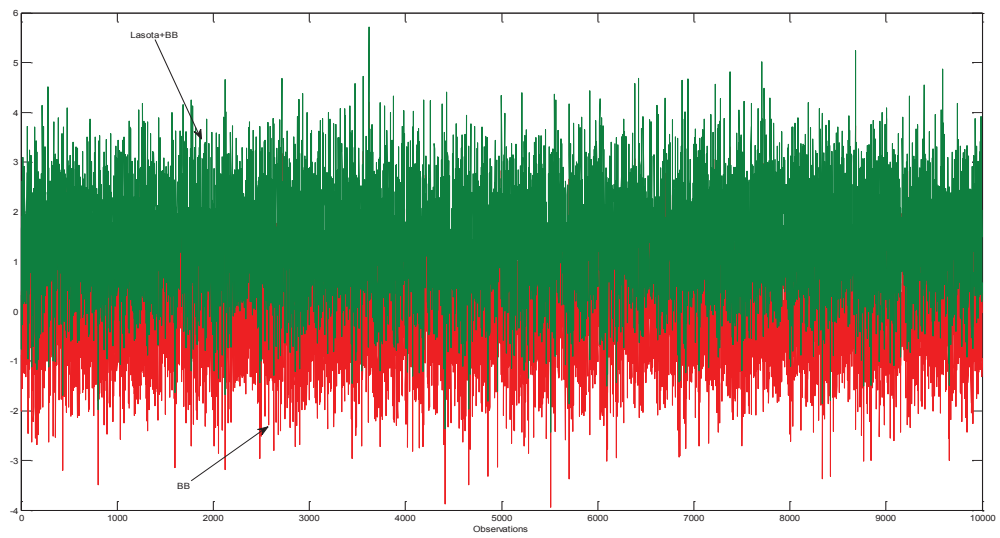
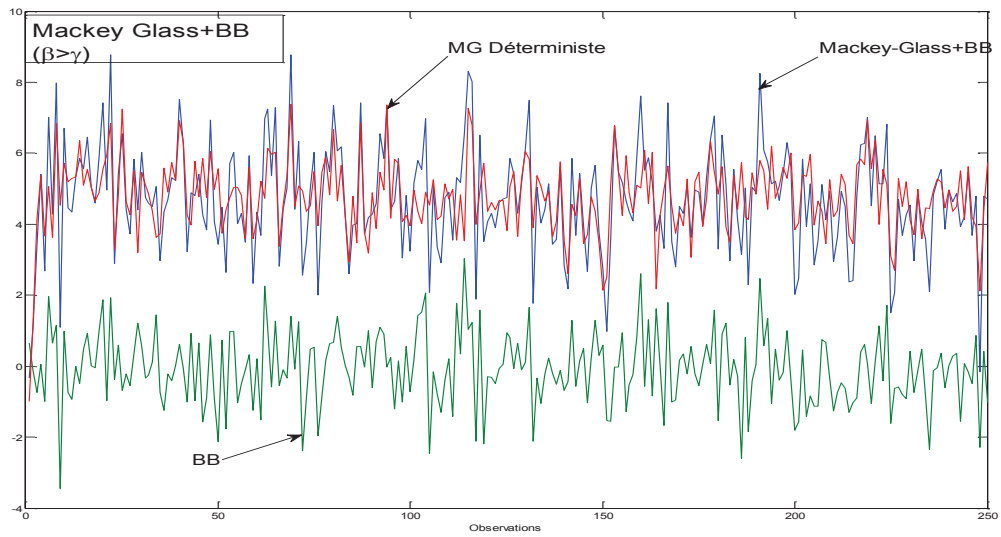
Où  $\epsilon_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle.

Si nous retenons un modèle de Mackey-Glass avec bruit blanc dans lequel  $0 < \beta \leq \gamma$ , les simulations montrent que le modèle de Mackey-Glass est dominé par le bruit blanc, ce qui se justifie dans la mesure où l'équilibre du Mackey-Glass est nul. Nous obtenons une dominance identique pour l'équation de Lasota sous les mêmes conditions. Si nous retenons les modèles (117 & 118) avec  $\beta > \gamma$ , nous obtenons des trajectoires qui oscillent autour d'un équilibre de long terme décrit par la partie déterministe des équations (117 & 118). Nous donnons dans le graphique 12, deux exemples de simulations. Pour bien voir l'interaction de l'équation de Mackey-Glass avec le bruit blanc, nous ne retenons que les 250 premières observations : pour  $0 < \gamma < \beta$ , la convergence vers l'équilibre de long terme du Mackey-Glass n'étant pas immédiate, la partie déterministe oscille fortement. Ainsi, lorsqu'elle est associée à un bruit blanc, la trajectoire obtenue n'est pas dominée par le bruit blanc. Elle comporte une part chaotique décrite par le Mackey-Glass et une part stochastique décrite par le bruit blanc. La simulation du modèle de Lasota sous les mêmes conditions montre que l'association d'un modèle déterministe chaotique avec un bruit blanc conduit à des trajectoires oscillantes qui, visuellement, se rapprochent de celles d'une série temporelle financière. Le recours à des trajectoires dont la dimension dépasse 2 indique un faible impact du bruit blanc sur la partie déterministe. Ainsi, nous donnons dans le graphique 13, plusieurs trajectoires simulées à partir de l'équation 117 pour des valeurs de  $n = 2$  (Graphique du bas) et  $n = 10$  (Graphique du haut). Nous constatons que les trajectoires simulées et bruitées par un bruit blanc sont beaucoup plus sensibles lorsque la dimension retenue est relativement faible. Ce constat suggère que la complexité créée par le Mackey-Glass à hautes dimensions absorbe les variations induites par le bruit blanc alors que pour de faibles dimensions, l'impact du bruit blanc est plus visible.

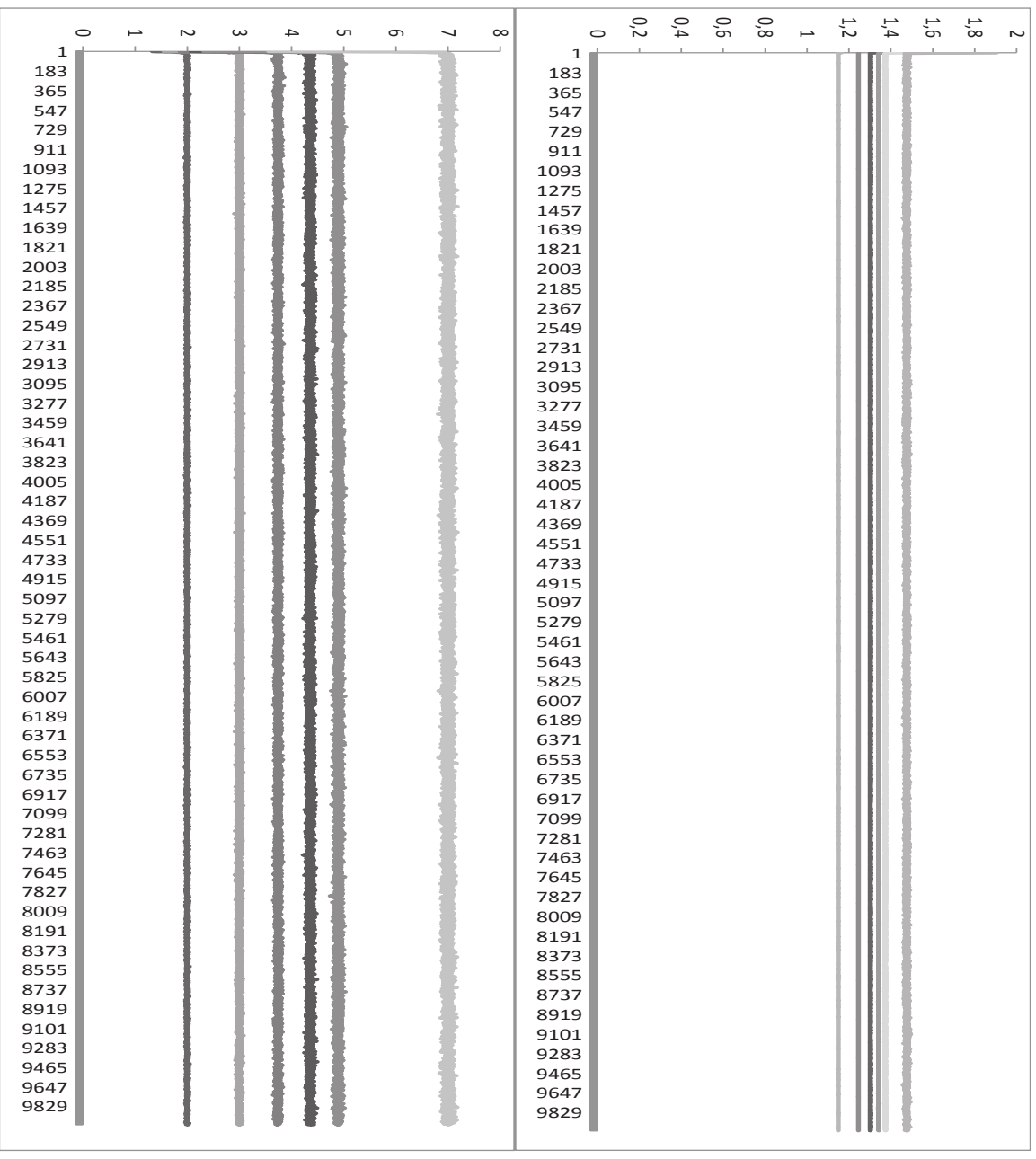
En ce qui concerne l'équation 118, le graphique 14 donne plusieurs trajectoires qui renseignent sur le comportement de l'équation de Lasota bruitée :

- \* l'impact du bruit blanc sur des séries où  $\beta < \gamma$  n'est pas très significatif lorsqu'on recourt à des trajectoires à faibles dimensions ( $n = 2$ ) ou à fortes dimensions ( $n = 10$ ) comme on peut le voir sur les deux dernières trajectoires.
- \* Lorsque  $\beta = \gamma$ , nous notons que l'amplitude des trajectoires s'amplifie de manière significative. Cependant, il faut relativiser ce constat dans la mesure où les trajectoires simulées avec  $\beta = \gamma$  se comportent différemment selon la dimension du système. Ainsi, dans le deuxième cadran du graphique 14, la forte amplitude du second graphique est à relier à la dimension élevée de cette trajectoire ( $n = 10$ ), comparativement au graphique du dessus où la dimension est égale à 2. Ces résultats se retrouvent dans les cas où  $\beta > \gamma$  : les trajectoires à hautes dimensions sont caractérisées par d'importantes amplitudes alors que celles simulées avec de faibles dimensions sont marquées par une amplitude plus modérée.
- \* l'ajout du bruit blanc détruit toute structure dans les données dans la mesure où la sensibilité aux conditions initiales mise en évidence dans l'analyse du modèle déterministe a disparu. Quelle que soit la dimension retenue, l'interaction du bruit blanc et du modèle de Lasota conduit à de nouvelles structures caractérisées par une certaine volatilité que l'on peut à la fois relier au bruit mais aussi à la complexité du modèle déterministe.

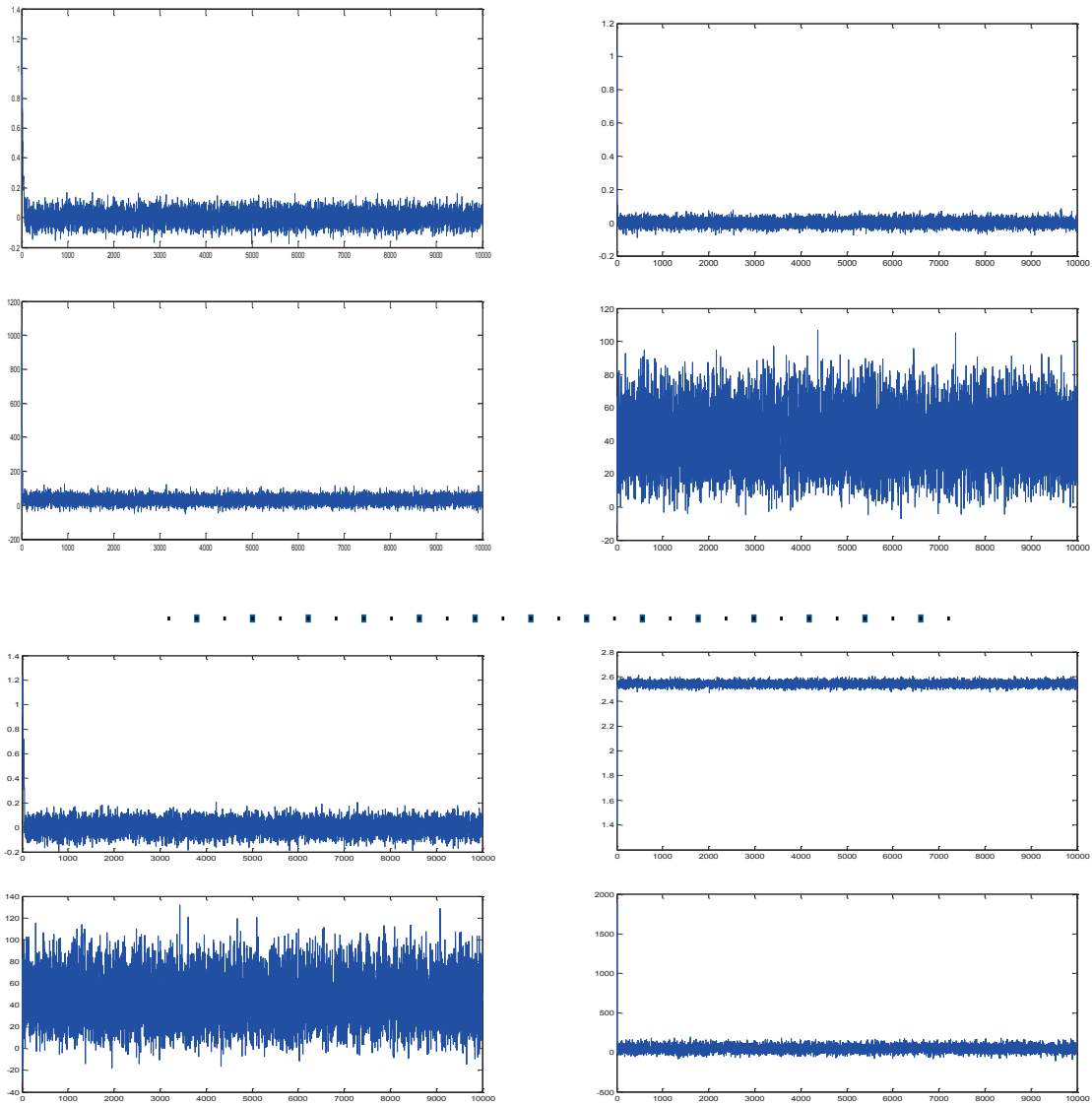
L'existence de structures hétéroscédastiques dans les séries temporelles financières a conduit un certain nombre d'auteurs à envisager une association des modèles chaotiques à des bruits hétéroscédastiques.



Graphique 12 – Exemples de simulations des équations 117 & 118



Graphique 13 – Exemples de simulations du Mackey-Glass avec  $n = 10$  et  $n = 2$



Graphique 14 – Exemples de simulations du modèle de Lasota bruité

### 2.2.1.2.2 Le modèle de Mackey-Glass avec bruits hétéroscédastiques

L'étude du modèle de Mackey-Glass en économétrie financière a d'abord été entreprise par Kyrtsou et Terraza(2002) dans le cadre d'une approche chaostochastique des séries financières. La mise en évidence des structures chaotiques et l'intérêt croissant de la science économique dans la théorie du chaos a impulsée les recherches sur la modélisation chaotique des séries financières. Nous avons vu précédemment que le recours à des méthodes non paramétriques pour prendre en compte et prévoir des séries temporelles financières chaotiques a été largement exploité. Dans une approche paramétrique des structures chaotiques des séries financières, l'engouement est plus limité. La mise en évidence par Kyrtsou et Terraza(2002) des structures chaotiques et hétéroscédastiques dans les séries financières et la possibilité de prendre en compte conjointement ces structures offrent un renouveau dans l'approche paramétrique des séries financières. Ces auteurs proposent une modélisation des forces dites stabilisatrices par un modèle déterministe, capable de rendre compte d'un retour vers la valeur fondamentale du titre et une modélisation des forces déstabilisatrices par une partie stochastique, symptomatiques d'un marché dominé par des agents spéculatifs bruités.

L'utilisation d'un modèle de Mackey-Glass bruité est justifiée par la capacité de ce modèle à produire des caractéristiques similaires aux séries temporelles financières, notamment en ce qui concerne la non linéarité en moyenne et en variance. Par ailleurs, la combinaison d'un processus déterministe et hétéroscédastique produit une trajectoire aléatoire et l'attracteur de cette combinaison perd sa structure. L'analyse sur données empiriques montre que le recours à un modèle Mackey-Glass-GARCH(1,1) pour expliquer l'évolution du CAC 40 donne des résultats concluants en termes de prédictions, comparativement au modèle GARCH(1,1), à la prédiction naïve, à la régression en composantes principales et à l'utilisation des fonctions à bases radiales.

Kyrtsou(2008) montre comment le modèle de Mackey-Glass peut comporter des structures hétéroscédastiques même lorsqu'il n'est pas couplé à un processus hétéroscédastique. Une mauvaise spécification de la moyenne conditionnelle, notamment lorsque la série temporelle est caractérisée par des breaks ou des



outliers peut fausser la sélection du modèle approprié (Lumsdaine et Ng(1999) et Blake et Kapetanios(2007)). Par ailleurs, la présence de structures déterministes peut impacter le bruit stochastique. Kyrtsou(2008) propose donc d'analyser la dynamique du bruit lorsqu'il est impacté par une partie déterministe. En appliquant les tests de McLeod et Li(1983) et Engle(1982), elle montre que les simulations d'un Mackey-Glass associé à un bruit blanc peuvent comporter de l'hétéroscédasticité. Elle propose alors de filtrer le modèle de Mackey-Glass bruité en retirant la partie déterministe. Elle montre que l'application des tests de McLeod et Li(1983) et Engle(1982) sur les résidus indiquent une distribution hétéroscédastique et non linéaire. Elle conclue donc sur un impact significatif de la partie déterministe sur la partie stochastique. Melhem et Melhem(2012) discutent les résultats obtenus par Kyrtsou(2008) notamment sur le choix d'un modèle de Mackey-Glass bruité à hautes dimensions. Hommes et Manzan(2006) ont montré dans une précédente étude que les fluctuations des séries temporelles financières pouvaient en partie s'expliquer par la présence de structures chaotiques à faibles dimensions.

Kyrtsou(2006) propose un modèle de Mackey-Glass Généralisé (GMG) qui inclut une fonction logistique. Elle montre comment ce modèle peut filtrer séparément des stratégies de feedback positives et négatives. Kyrtsou et Malliaris(2009) proposent une étude sur l'impact d'une nouvelle information sur le marché. Ils montrent, en recourant entre autres aux modèles de Mackey-Glass bruités, que l'arrivée d'une nouvelle information modifie fortement la dynamique décrite par ces modèles. Plus précisément, dans le cas du Mackey-Glas bruité, ils mettent en évidence un effet dual :

- \* l'information exogène se perd dans la structure du bruit blanc et il n'y a pas de modifications significatives des kurtosis et statistiques de Jarque Bera ;
- \* l'interaction entre l'information exogène et le bruit hétéroscédastique permet une stabilisation du système.

Kyrtsou et Terraza(2010) proposent un modèle Mackey-Glass-GARCH saisonnier permettant de prendre en compte les éventuelles saisonnalités qui peuvent exister dans la volatilité. Ils montrent tout l'intérêt de cette modélisation dans

la prévision des chroniques financières. Une version particulière du modèle Mackey-Glass bruité est proposée par Dung(2012).

### 2.2.1.2.3 Le modèle de Mackey-Glass avec bruit stochastique fractionnaire (Dung(2012))

Dung(2012) propose une version stochastique fractionnaire du modèle de Mackey-Glass. Il définit le paramètre  $\gamma$  par :

$$\gamma(\omega) = \gamma + \sigma \quad (119)$$

Où  $\gamma = E[\gamma(\omega)]$ . En introduisant le paramètre stochastique dans l'équation 109, il obtient une version stochastique de l'équation de Mackey-Glass :

$$dX_t = \left( \frac{\beta X_{t-\tau}}{1 + X_{t-\tau}^n} - \gamma X_t \right) dt + \sigma X_t dW_t^H \quad (120)$$

Avec  $t \in [0; T]$ ,  $X_t = \phi(t)$ ,  $t \in [-\tau, 0]$  où  $\phi \in C[-\tau, 0]$ ,  $\phi(0) > 0$  et  $W_t^H$  est un mouvement brownien fractionnaire, et  $H$  est l'indice de Hurst,  $H \in (\frac{1}{2}; 1)$ . L'équation 120 est alors présentée comme une forme analogue en temps continu de l'équation discrète Mackey-Glass-GARCH utilisée par Kyrtsou et Terraza(2002, 2010) avec  $W_t^H$ , un mouvement brownien standard. La présence de structures à mémoire longue mise en évidence par de nombreuses études conduit Dung(2012) à proposer un modèle de Mackey-Glass en temps continu avec un processus de mémoire longue. Il étudie les conditions d'existence et d'unicité des solutions du processus Mackey-Glass fractionnaire.

Il montre, par une méthode pas à pas, l'existence et l'unicité des solutions de l'équation 120 sur l'intervalle  $[0, \tau]$ , puis sur  $[\tau, 2\tau]$ , etc....

**Lemme 2** Soit  $\{Z_t, t \in [0, T]\}$  un processus gaussien centré de variance finie. Alors :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\sigma Z_t} \in L^p(\Omega) \quad \forall p > 1 \quad (121)$$

De ce lemme, Dung(2012) pose les conditions d'unicité de l'équation 120.

**Théorème 6** Supposons que l'indice de Hurst  $H \in (\frac{1}{2}; 1)$ . Posons  $\beta_t, t \in [0; T]$  comme un processus stochastique adapté tel que :

$$\int_0^T (E |\beta_t|^{2+\delta} + \int_0^T E |D_u^W \beta_t|^{2+\delta} du) dt < \infty \quad (122)$$

pour  $\delta > 0$ . Alors l'équation :

$$dX_t = (\beta_t - \gamma X_t)dt + \sigma X_t dW_t^H \quad (123)$$

Avec  $X_0 = x > 0$ , a une unique solution donnée par :

$$X_t = \phi_t(X_0 + \int_0^t \beta_s(\phi_s)^{-1} ds) \quad (124)$$

Où  $\phi_t = \exp(-\lambda t + \sigma W_t^H)$ . De plus, cette solution satisfait :

$$\int_0^T (E |X_t|^{2+\frac{\delta}{2}} + \int_0^T E |D_u^W X_t|^{2+\frac{\delta}{s}} du) dt < \infty \quad (125)$$

**Théorème 7** L'équation de Mackey-Glass fractionnaire avec  $H > \frac{1}{2}$  admet une unique solution dans  $(\mathbf{H})$  qui peut être explicitement déterminé par la méthode pas à pas :

$$X_t = \phi(t) \quad t \in [-\tau, 0] \quad (126)$$

$$X_t = \phi_t(X_0 + \int_0^t \frac{\beta X_{s-\tau}}{1 + X_{s-\tau}^n} (\phi_s)^{-1} ds) \quad t \in [0, T] \quad (127)$$

Où  $\phi_t = \exp(-\lambda t + \sigma W_t^H)$ .

L'approche chaos-stochastique est intéressante à plusieurs égards : elle permet de décrire plusieurs trajectoires spécifiques aux séries temporelles financières, elle offre un renouveau dans la modélisation des séries temporelles financières et elle conduit à de bons résultats en termes de prédiction. Nous avons montré que l'idée d'un chaos bruité par un processus gaussien pouvait reproduire certaines caractéristiques des séries temporelles financières mais la forte volatilité de celles-ci notamment en période de crise rend cette modélisation insuffisante. Néanmoins, les simulations des modèles chaotiques avec bruit blanc révèlent un peu plus les caractéristiques des modèles de Lasota et Mackey-Glass. Le comportement des modèles est très différent : si le modèle de Mackey-Glass bruité oscille fortement pour les premières observations avant de décrire une trajectoire faiblement oscillante autour d'un équilibre de long terme donné par la partie chaotique, les simulations du modèle de Lasota bruité sont très différentes. Elles décrivent une trajectoire dont les amplitudes d'oscillations sont intrinsèquement liées à la dimension du système retenue. Autrement dit, le

modèle de Mackey-Glass bruité à faible dimension est fortement impacté par le bruit alors que le modèle de Lasota bruité à haute dimension produit des trajectoires avec de fortes amplitudes d'oscillations. Par ailleurs, la structure chaotique du modèle de Lasota ne s'efface pas au profit du bruit quelle que soit la dimension retenue, ces constats n'étant vérifiés que lorsque  $\beta > \gamma$ . L'importante littérature sur le modèle Mackey-Glass avec bruit stochastique a permis de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques et les apports non négligeables de ces modélisations pour les séries temporelles financières. Au vu de ces premières simulations, nous constatons que le modèle de Lasota contribue à amplifier les oscillations des séries temporelles et permet ainsi de rendre compte d'une série temporelle particulièrement mouvementée. Ces résultats nous conduisent à envisager une spécification Lasota stochastique pour les séries temporelles.

## 2.2.2 MODÉLISATIONS DU RISQUE DE MARCHÉ : MODÈLES CHAOS-STOCHASTIQUES ET CHANGEMENTS DE RÉGIMES

La proposition du Comité de Bâle pour briser la procyclicité dans la détermination des fonds propres suppose le calcul de deux VaR : une pour la période calme et l'autre pour une période stressée. Cette solution permet donc de déterminer un montant de fonds propres plus important que celui donné en période calme. Cette proposition, même si elle permet de briser la procyclicité souffre de plusieurs problèmes :

- \* Elle n'a aucune implication sur les modèles. La sous estimation de la VaR est peut être liée à la procyclicité dans la détermination des fonds propres mais elle est en premier lieu due à une mauvaise spécification du modèle.
- \* Cette solution risque de créer des VaR conservatives en période calme et éventuellement des VaR insuffisantes en période de crise.

Le problème de la procyclicité dans les mesures de risques est un problème général et certains estiment que la meilleure manière de rendre compte des différents cycles qui peuvent exister dans une série temporelle financière est l'utilisation des modèles à changements de régimes. L'engouement des chercheurs envers ce

type de modélisation a conduit au développement d'une multitude de modèles. Ces derniers sont regroupés en différentes classes :

- \* Les modèles dont la règle de sélection est connue : ils constituent une des premières classes de modèles à changements de régimes et permettent de rendre compte de l'évolution de différents régimes déterminés à partir d'un ou plusieurs seuils.
- \* Les modèles avec règles de sélection inconnue essentiellement basés sur le calcul des probabilités de passage d'un régime à un autre.

Il existe une littérature relativement récente qui s'est intéressée à l'estimation de la VaR sous différents régimes, faisant abstraction des avancées sur la modélisation des séries temporelles financières. Elle est présentée dans l'annexe B.4. Or, nous avons montré dans les sections précédentes tout l'intérêt de recourir à une approche chaos-stochastique des séries temporelles financières.

La nécessité d'une modélisation chaos-stochastique pour les séries temporelles financières est d'autant plus importante que les modèles dits standards sont incapables de rendre compte des fluctuations particulières des chroniques financières. L'approche chaos-stochastique peut prendre différentes formes mais nous privilégions une modélisation chaotique pour l'équation de la moyenne associée à un bruit stochastique pour l'équation de la variance. Ce dernier peut présenter différentes caractéristiques : hétéroscédasticité, effet ARCH, structures à mémoires longues... La capacité des modèles Mackey-Glass et Lasota à produire des trajectoires diversifiées aux caractéristiques particulières selon les paramètres retenus indique tout l'intérêt de recourir à ces modèles pour rendre compte des dynamiques des séries temporelles financières. L'analyse des caractéristiques descriptives des différentes simulations indique qu'une grande partie des séries simulées est de nature non linéaire, hétéroscédastique, autocorrélée et est caractérisée par une distribution non normale.

Il peut être intéressant d'aller plus loin et d'envisager des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes dans la volatilité. Cette spécification, comparativement à la solution du comité et aux modèles VaR avec changements de régime, présente de nombreux avantages :

- \* Elle évite le problème des VaR automatiquement conservatives puisqu'elle estime la VaR à partir d'un historique passé et des probabilités de transition d'un régime calme à un régime de crise. Par ailleurs, la probabilité d'avoir des VaR insuffisantes est forcément réduite puisque elle dépend des critères d'entrée dans le régime de crise. Ainsi, lorsque la probabilité d'être dans un régime de crise est élevée, la VaR qui en découle le sera aussi.
- \* Elle va plus loin que les modèles VaR avec changements de régime d'El-liot et Miao(2009) et de Billio et Pelizzon(2000) qui sont basés sur une approche linéaire du processus générateur de données.
- \* L'utilisation de modèles chaos-stochastiques constitue une avancée non négligeable puisque plusieurs études s'accordent sur la capacité de ces modèles à donner de bonnes prévisions. Le recours à un bruit caractérisé par des changements de régimes doit conduire à de meilleures prévisions.

Nous proposons, dans une première partie, de comparer les versions bruitées des modèles Mackey-Glass et Lasota et dans une deuxième partie, nous introduisons les spécifications chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens.

### 2.2.2.1 LE MODÈLE DE LASOTA PEUT-IL CONCURRENCER LE MODÈLE DE MACKEY-GLASS DANS LA MODÉLISATION NON-LINÉAIRE DES SÉRIES FINANCIÈRES ?

En suivant une procédure identique à la version déterministe, nous retenons les équations 113 et 115 auxquelles nous ajoutons un bruit de type GARCH.

- \* Équation de MG-GARCH

$$\begin{aligned}
 X_t &= \beta \frac{X_{t-\tau}}{1 + X_{t-\tau}^n} - \gamma X_{t-1} + \epsilon_t \\
 \epsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, h_t), \\
 \epsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \text{ et } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}
 \end{aligned}$$

(128)

\* Équation de Lasota-GARCH

$$\begin{aligned} X_t &= \beta X_{t-\tau}^n e^{-X_{t-\tau}} - \gamma X_{t-1} + \epsilon_t \\ \epsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, h_t), \\ \epsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \text{ et } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{aligned} \tag{129}$$

Nous retenons pour le processus GARCH les valeurs suivantes :  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_1 = 0.15$ ,  $\beta_1 = 0.8$ . La simulation de ces deux équations offre plusieurs trajectoires possibles selon la valeur des paramètres retenue. Nous donnons dans le graphique 15 quelques simulations des équations 128 et 129. Le premier constat général que nous pouvons faire concerne les différentes volatilités que ces modèles peuvent reproduire. Nous rappelons que la partie GARCH que nous avons ajouté est la même pour toutes les simulations. Outre les différentes amplitudes des variations des modèles chaos-stochastiques, nous notons dans le cas du modèle Lasota-GARCH, d'importantes oscillations symptomatiques d'une période de crise. Pour des valeurs de paramètres identiques, le modèle MG-GARCH fait apparaître quelques points atypiques mais une amplitude de variation modérée. La comparaison de ces deux modèles avec les rentabilités du CAC 40 indique tout l'intérêt et l'apport possible de ces modélisations pour les séries temporelles financières. Nous proposons une étude détaillée des équations 128 et 129 en fonction des différents paramètres.

À l'instar des simulations avec bruits blanc, le modèle MG-GARCH fait apparaître deux types de comportements selon les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  :

- \* lorsque  $\beta < \gamma$ , les simulations, données dans le graphique 16, font apparaître des trajectoires fortement oscillantes autour de 0. Il est à noter que l'amplitude des oscillations n'est pas très élevée et que les caractéristiques de ces simulations sont assez proches d'une série temporelle financière en période calme.
- \* lorsque  $\beta > \gamma$ , les trajectoires oscillent autour d'un équilibre donné par le modèle Mackey-Glass (Graphique 17). Nous relevons que plus la valeur de  $\beta$  est importante par rapport à celle de  $\gamma$ , plus l'équilibre de long terme

du Mackey-Glass augmente et plus les variations autour de cet équilibre sont importantes.

Il faut bien comprendre, dans les simulations du MG-GARCH, qu'il ne s'agit pas uniquement d'un équilibre de long terme donné par le Mackey-Glass et d'un processus GARCH qui oscille autour de cet équilibre. L'interaction entre la partie chaotique et la partie stochastique du MG-GARCH produit des trajectoires qui oscillent plus ou moins fortement autour d'un équilibre mais les oscillations ne sont pas identiques d'une simulation à l'autre. Autrement dit, la partie chaotique joue un rôle particulier dans la fréquence, l'amplitude et la force des oscillations.

Par ailleurs, compte tenu des observations formulées dans l'analyse de la version déterministe, nous constatons que le modèle de Mackey-Glass évolue différemment selon la valeur retenue pour  $n$  (Graphique 18). Quand la dimension  $n$  augmente, les simulations de l'équation MG-GARCH oscillent autour d'un équilibre dans un très petit intervalle. Pour des valeurs de paramètres identiques, le modèle MG-GARCH à faibles dimensions est caractérisé par un nombre de points atypiques et un intervalle d'oscillation plus importants. Tout se passe comme si les structures créées par le Mackey-Glass à hautes dimensions englobaient les structures hétéroscédastiques créées par le processus GARCH.

Dans le cas du modèle Lasota-GARCH, nous observons différents comportements qui dépendent des valeurs prises par les paramètres. Le graphique 19 montre dans le cas où  $\beta < \gamma$ , que le modèle Lasota-GARCH oscille autour d'un équilibre de long terme très proche de 0 avec des intervalles d'oscillations très restreints. Il est intéressant de noter, comme on peut le voir sur le graphique 20, que plus la différence entre les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  augmente, plus l'amplitude de variation des trajectoires simulées diminue. Autrement dit, plus cette différence augmente, plus les structures du modèle de Lasota s'amplifient au détriment de celles créées par le processus GARCH. Dans le cas où  $\gamma < \beta$ , le modèle Lasota-GARCH produit des trajectoires très différentes : elles sont marquées par une forte volatilité avec une amplitude de variation plus importante que dans le cas précédent et quelques outliers typiques des séries temporelles financières en période de crise. Trois exemples de ces comportements sont donnés dans le graphique 21. Il est intéressant de représenter ces

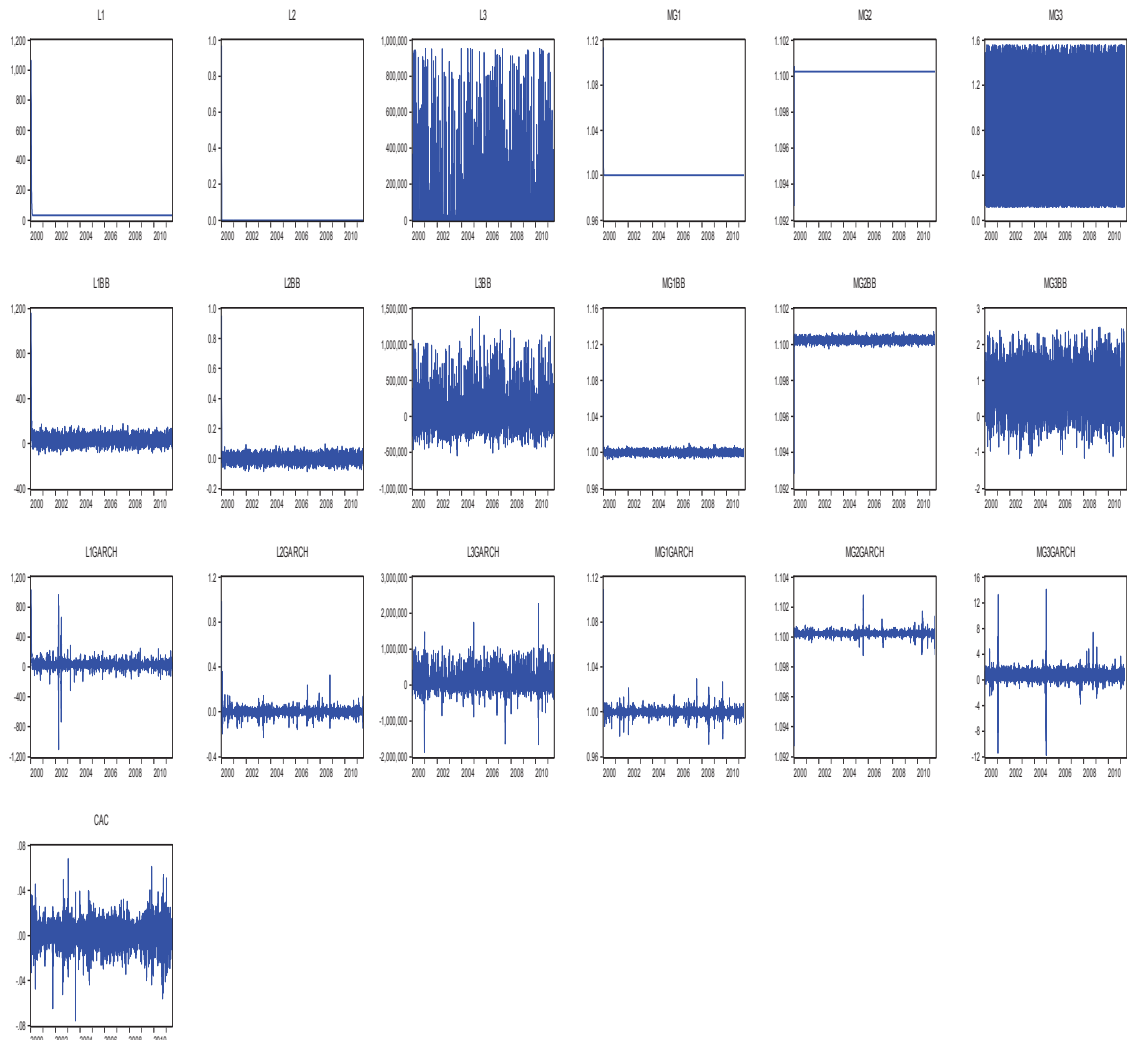


mêmes trajectoires à hautes dimensions. Elles sont données par le graphique 22 qui indique que l'échelle de variation augmente exponentiellement lorsqu'on fait varier le paramètre  $\beta$ . Par ailleurs, comme on peut le constater sur le graphique 23, l'augmentation de la dimension a principalement pour conséquence une augmentation de l'amplitude de variation et la création d'un nombre plus important d'outliers.

---

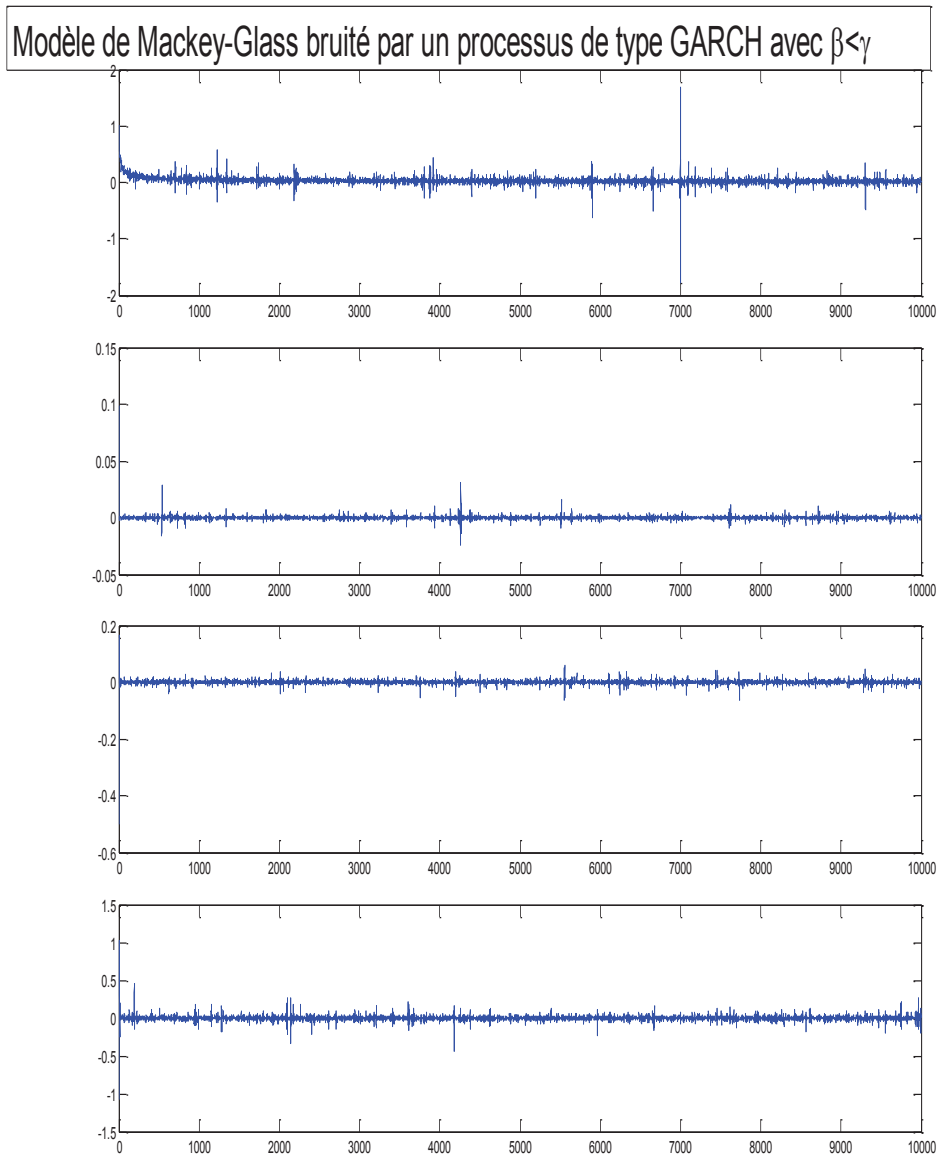
Si le modèle Mackey-Glass bruité a fait l'objet d'une importante littérature, les simulations du modèle de Lasota bruité montrent sa capacité à rendre compte des séries temporelles financières en période de crise. Autrement dit, le modèle de Lasota-GARCH n'est pas en concurrence directe avec le modèle Mackey-Glass-GARCH pour rendre compte des non linéarités des séries financières mais il est un complément qui est capable de prendre en compte les forts mouvements erratiques des chroniques financières.

Un problème subsiste dans les deux modélisations : celui de la constance de l'intensité des oscillations. Autrement dit, les différents modèles rendent compte d'une non linéarité " assez lisse " sur la période. Or, sur les tailles d'échantillons retenues ( $N = 10000$ ), on peut soupçonner pour des séries temporelles financières des changements de régime dans l'évolution de la volatilité. Si nous considérons que les modèles MG-GARCH et Lasota-GARCH sont capables de rendre compte des fluctuations des séries temporelles financières en période calme et en période de crise respectivement, il peut être intéressant d'avoir, pour ces modèles, des évolutions qui dépendent de la forte présence ou de la présence modérée des noise traders sur le marché. C'est tout l'intérêt des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes.



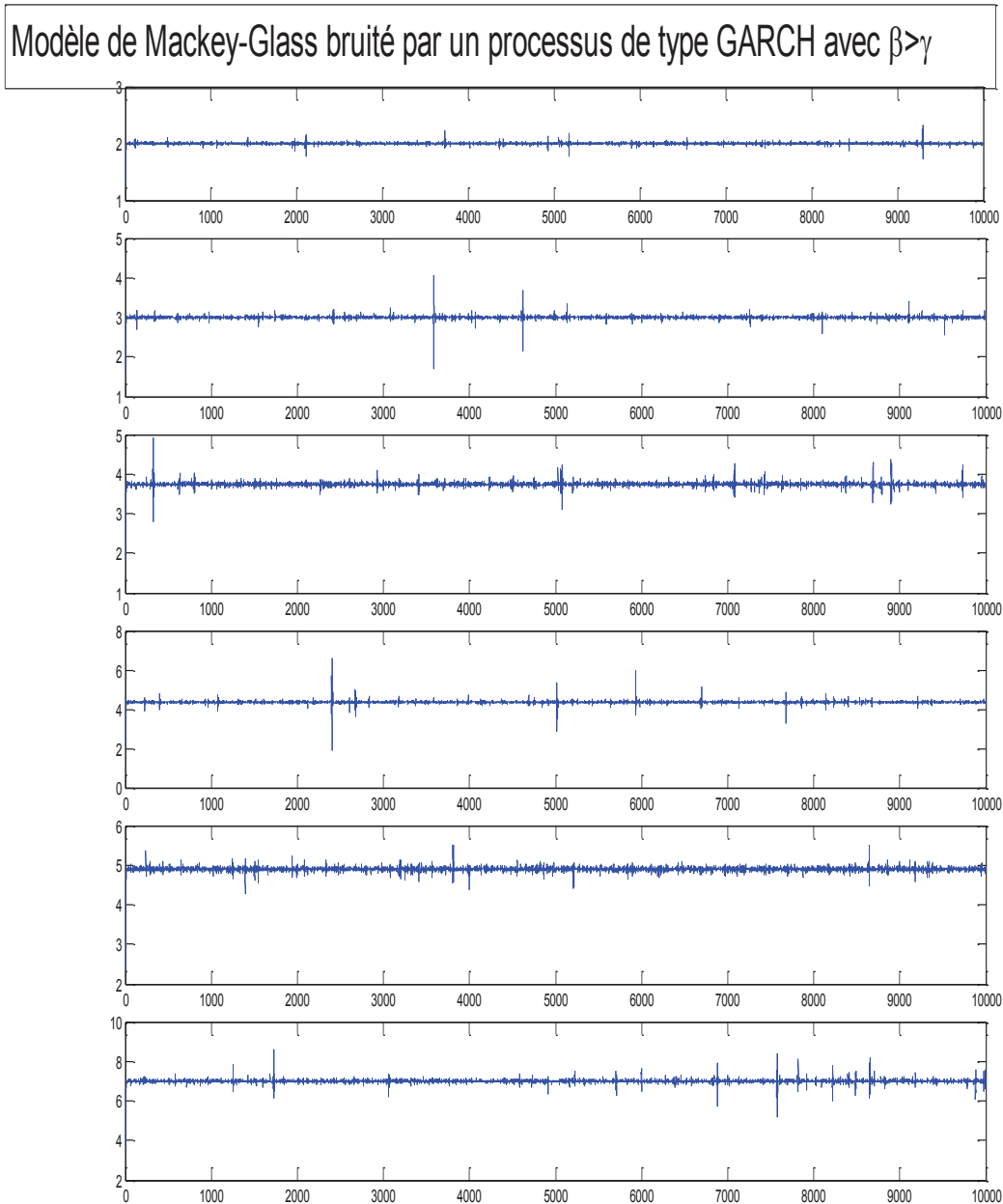
Graphique 15 – Représentations graphiques de quelques simulations

*Nous donnons les simulations des équations de Mackey-Glass et de Lasota quand les paramètres sont ceux retenus par Kyrtsov et Terraza(2003, 2004) [L1 & MG1], quand le paramètre  $\beta$  augmente [L2 & MG2] et quand le paramètre de plongement est de 10 [L3 & MG3]. Nous associons à chacune des trajectoires estimée un bruit blanc [L1BB, L2BB, L3BB, MG1BB, MG2BB, MG3BB] et un processus GARCH [L1GARCH, L2GARCH, L3GARCH, MG1GARCH, MG2GARCH, MG3GARCH]. Nous donnons aussi la série des rentabilités du CAC 40.*



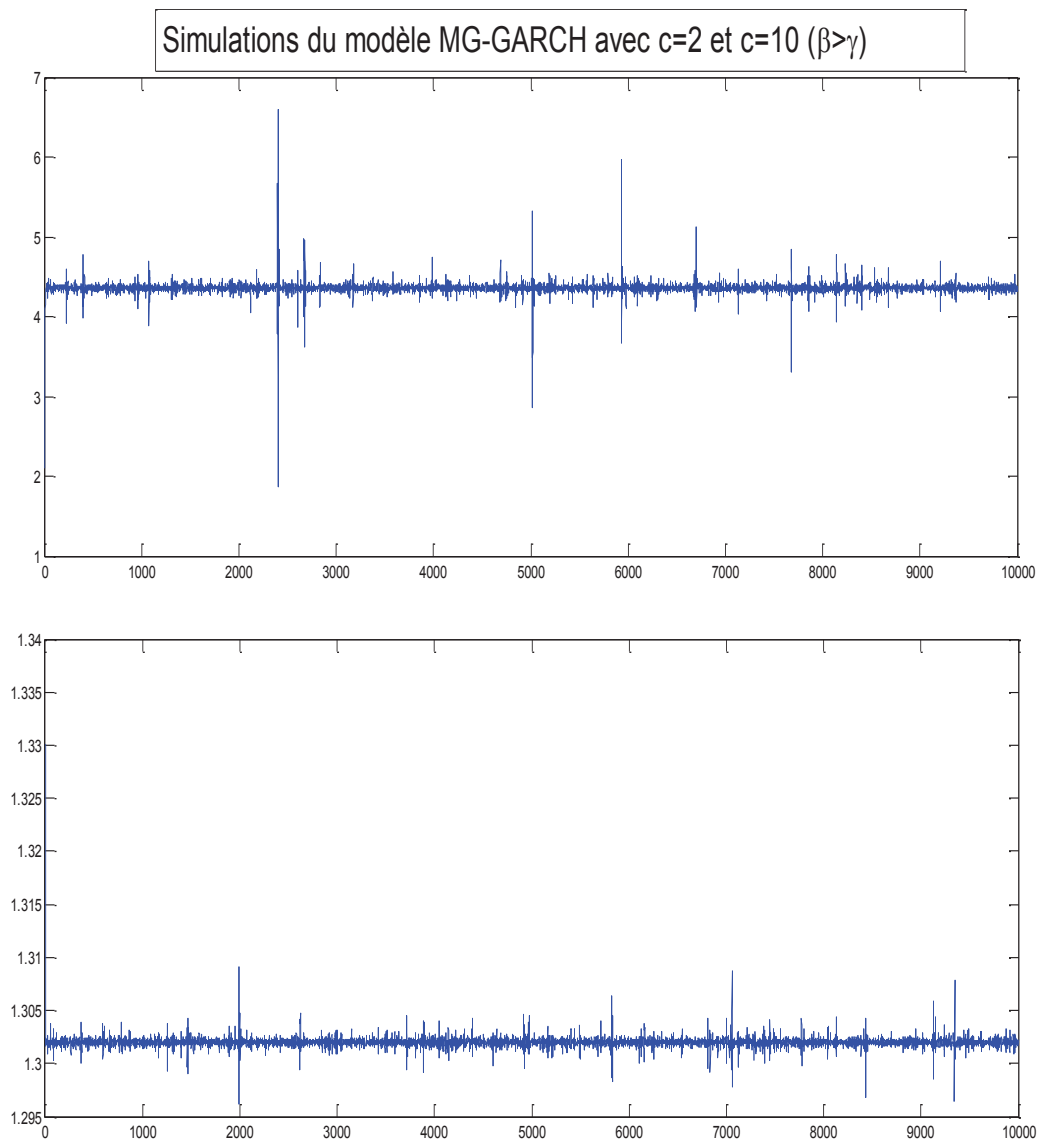
Graphique 16 – Exemples de simulations du modèle MG-GARCH (1)

*Nous donnons les simulations du modèle de Mackey-Glass bruité par un processus GARCH en faisant varier le paramètre  $\gamma$  pour une dimension  $n=2$ .*



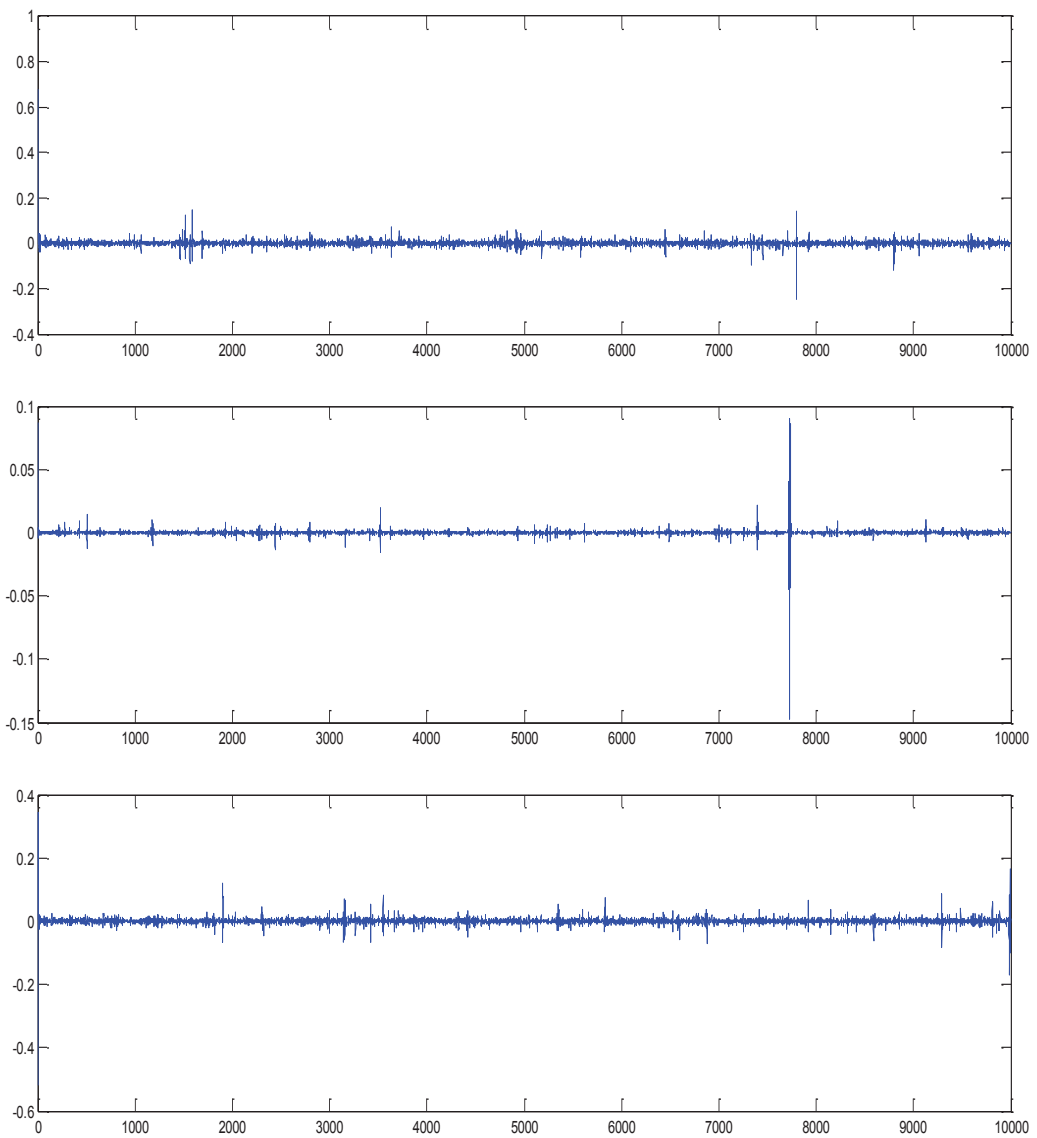
Graphique 17 – Exemples de simulations du modèle MG-GARCH (2)

*Pour ces différentes trajectoires, nous avons retenu un paramètre  $\beta \geq \gamma$ . L'équilibre de long terme autour duquel varient les différentes simulations est donné par le modèle de Mackey-Glass et dépend donc des valeurs prises par  $\beta$  &  $\gamma$ .*



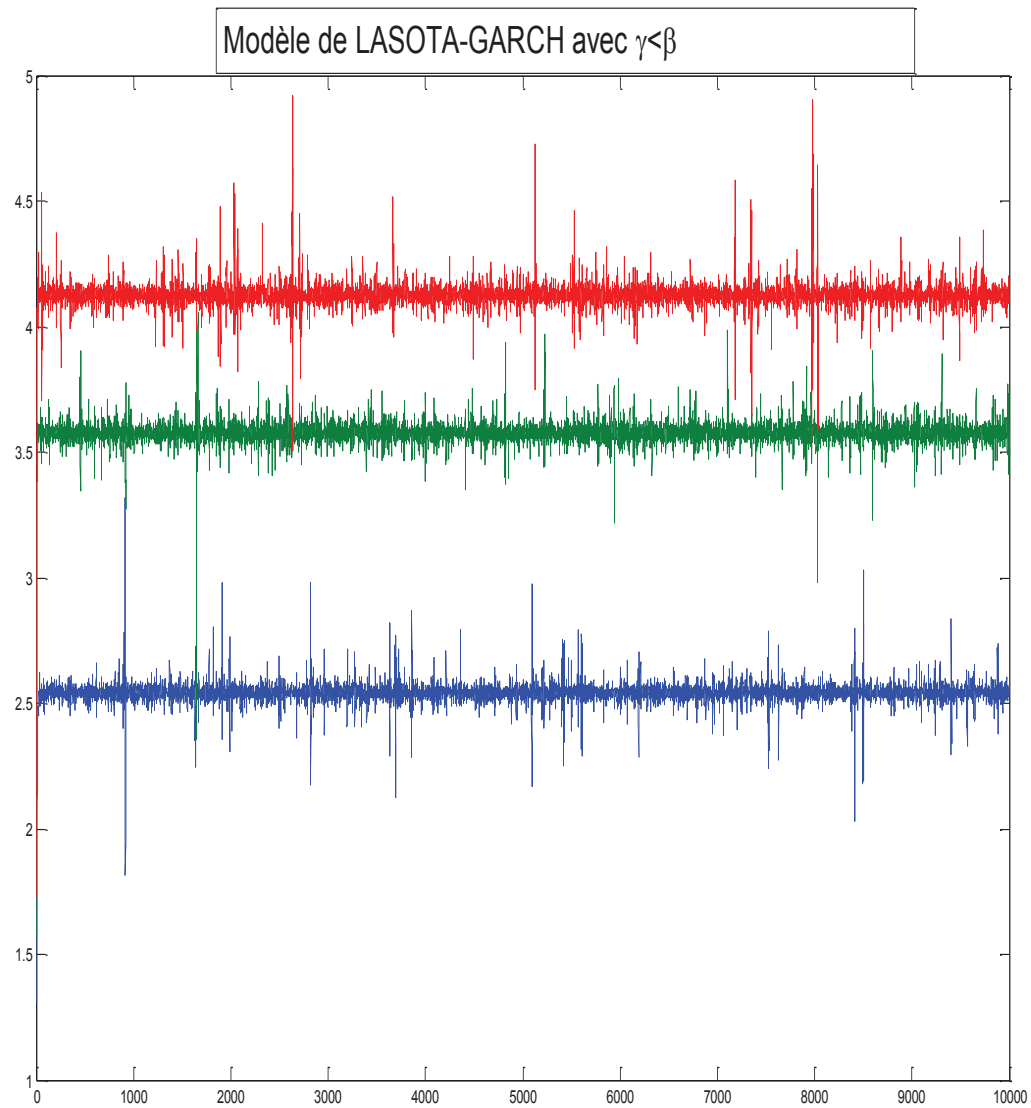
Graphique 18 – Exemples de simulations du modèle MG-GARCH (3)

*Nous donnons deux simulations du modèle de MG-GARCH : le premier graphique représente le MG-GARCH à faible dimension ( $n = 2$ ) et le second est une simulation du MG-GARCH à haute dimension.*



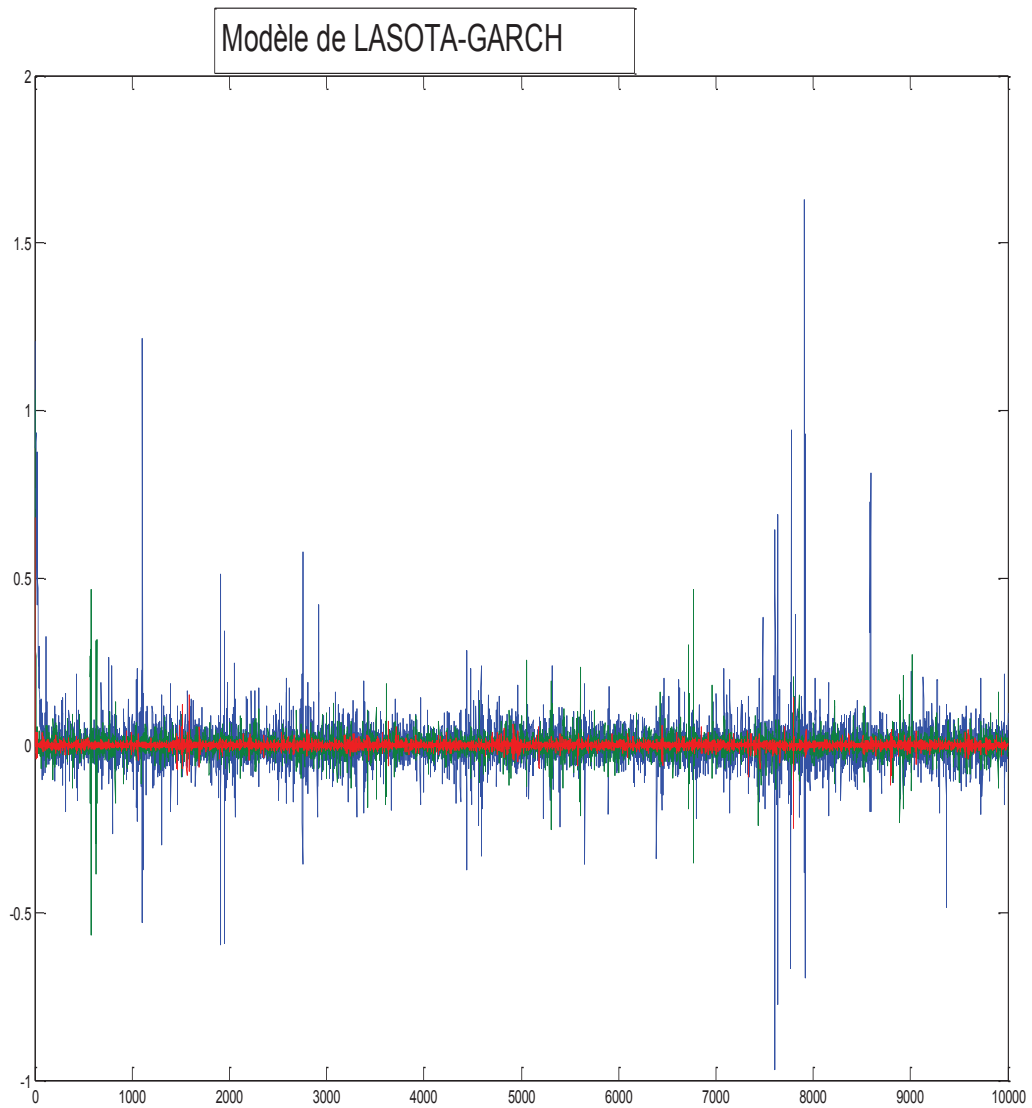
Graphique 19 – Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH(1)

*Nous donnons, à titre illustratif, 3 trajectoires du modèle Lasota-Garch avec  $\beta < \gamma$ .*



Graphique 20 – Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (2)

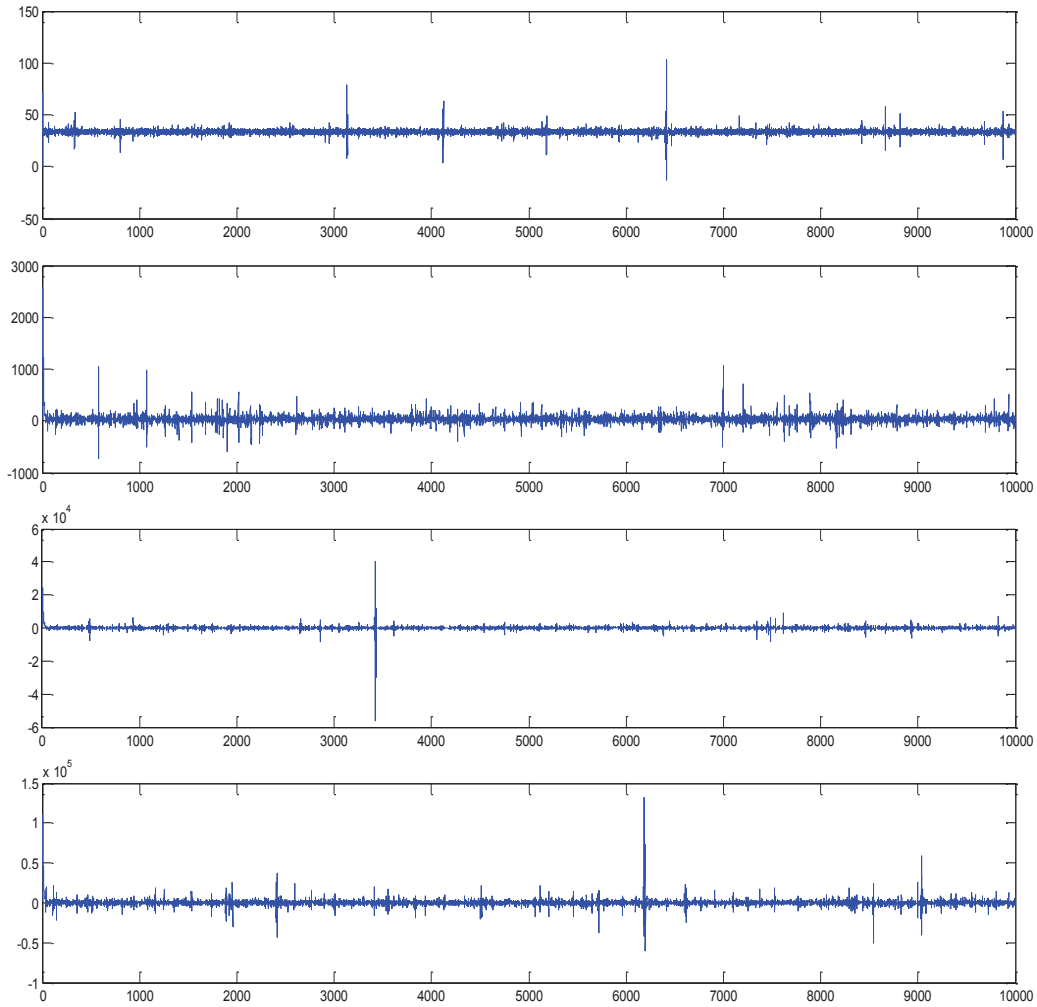
*Cette représentation rend compte de l'impact du paramètre  $\beta$  au fur et à mesure qu'il augmente dans le modèle Lasota-GARCH.*



Graphique 21 – Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (3)

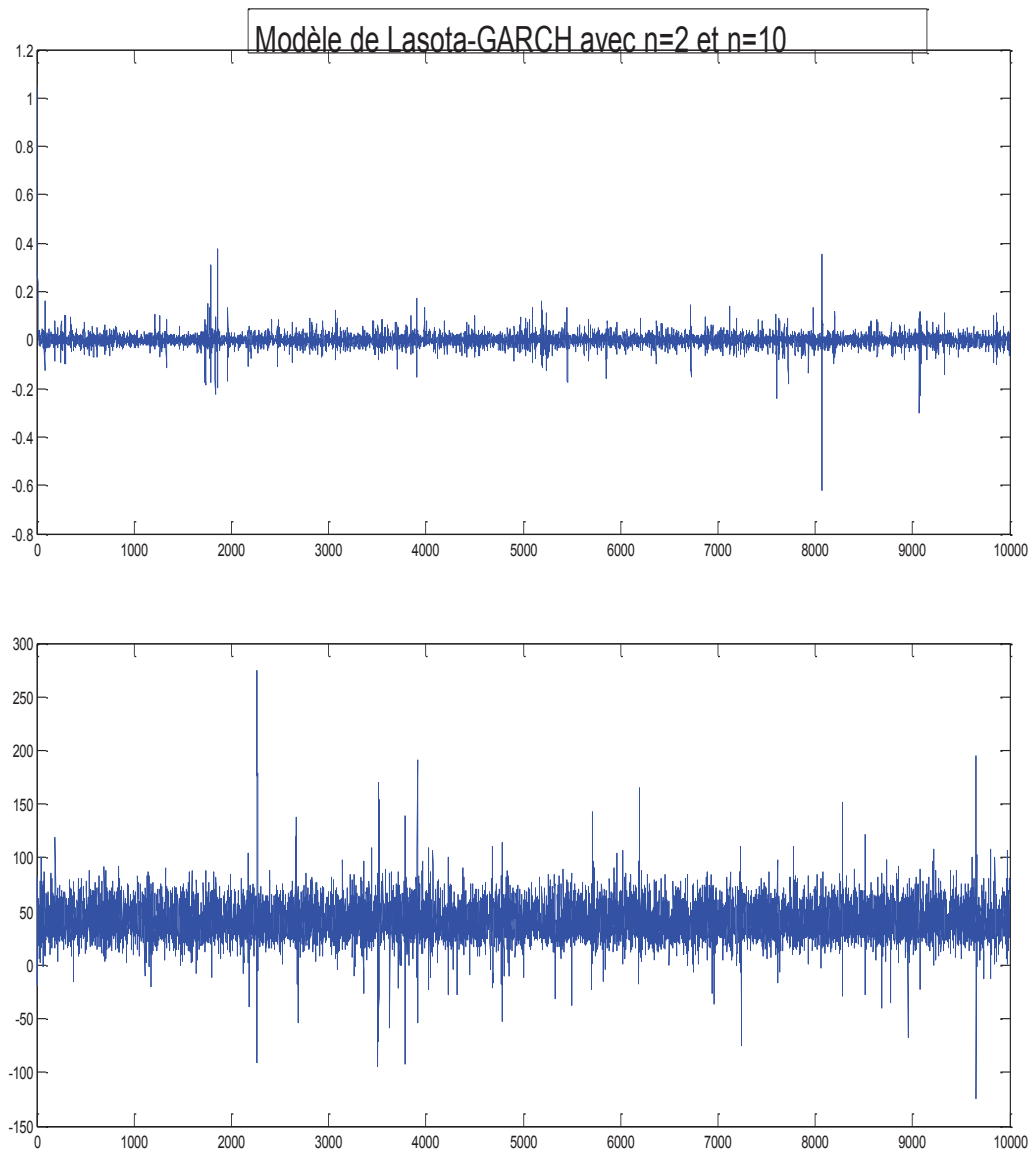
*À l'inverse du graphique précédent, celui-ci donne plusieurs trajectoires avec  $\beta < \gamma$  et  $\gamma$  qui augmente.*





Graphique 22 – Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (4)

*Le modèle de Lasota-GARCH à hautes dimensions fait apparaître des oscillations avec des amplitudes de variations relativement importantes.*



Graphique 23 – Exemples de simulations du modèle LASOTA-GARCH (5)

*Nous donnons deux représentations du modèle Lasota-GARCH : la première à faible dimension et la seconde pour une valeur  $n = 10$ .*

### 2.2.2.2 LES MODÈLES CHAOS-STOCHASTIQUES AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIMES

Les modèles chaos-stochastiques présentent un intérêt indéniable pour la modélisation et la prévision des séries temporelles financières. La timide percée de ces modèles est liée à un constat difficile à admettre selon lequel il existe une part de déterminisme dans les chroniques financières et qu'une approche chaotique peut donc être envisagée pour rendre compte des fluctuations des séries financières. Nous avons montré dans les sections précédentes tout l'intérêt et les éventuels apports d'une approche chaos-stochastique. L'interprétation économique qui découle de ces modèles est toute aussi importante car elle indique le type d'agents dominant le marché. Plusieurs responsables ont d'ailleurs invité les chercheurs à converger vers des modèles plus complexes issus d'autres disciplines, capables de rendre compte des fluctuations particulières des séries temporelles financières.

Parallèlement à cette nécessité, les autorités prudentielles encouragent les chercheurs, les modélisateurs, à intégrer les changements de régimes pour tenir compte d'une modification brusque de la dynamique des prix. L'objectif recherché est l'amélioration des mesures de risques qui ne sont pas assez performantes à cause de la procyclicité.

Afin de concilier ces deux exigences, entre d'une part la nécessité de modèles plus performants qui tiennent compte des complexités qui existent sur les marchés financiers et d'un autre côté, la prise en compte d'un retournement dans la dynamique des prix, nous proposons de recourir à des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens. Cette spécification doit permettre de rendre compte des complexités qui existent dans les séries temporelles financières et de briser la procyclicité.

#### 2.2.2.2.1 Les modèles chaos-stochastiques avec changements de régime markoviens

Les modélisations chaos-stochastiques offrent de nouvelles perspectives dans

l'étude des séries temporelles financières. Elles permettent de décrire les dynamiques qui caractérisent les chroniques financières et par conséquent, elles peuvent conduire à une amélioration dans l'estimation des mesures de risques notamment pour la Value-at-Risk. La procyclicité inhérente à cette dernière a conduit les autorités prudentielles à requérir deux VaR : l'une basée sur un échantillon de crise et l'autre sur un échantillon standard.

Cette proposition, lourde en termes d'implémentation, exige une double analyse des structures existantes dans la série temporelle pour établir le modèle adéquat. Le processus générateur d'une série temporelle, lorsqu'il est identifié doit rendre compte de l'évolution de la série quelle que soit la période étudiée. Les fluctuations et les périodes de crise doivent être décrites par ce même processus et seuls les paramètres peuvent se modifier.

La solution du Comité peut conduire à la définition de deux processus générateurs en fonction des structures détectées par les tests appropriés. Ce résultat est alors en contradiction avec la définition même de l'unicité du processus générateur. Une solution à ce problème a été proposée avec les modèles à changements de régime, capables de rendre compte de différents régimes ou périodes dans une même série temporelle. Jusqu'à présent, ce type de modélisation s'est cantonné à décrire des structures stochastique linéaires ou non linéaires et l'idée d'une modélisation chaotique associée à un processus stochastique avec changements de régime n'a jamais été abordée. Aussi, nous proposons une courte description de ce type de modélisation qui pourrait briser la procyclicité dans la détermination des fonds propres tout en intégrant une approche chaotique en moyenne. Nous retenons les modèles de Lasota et Mackey-Glass auxquels nous associons un processus MRS-GARCH. Les enseignements que nous pouvons tirer de ce type de modélisation ne sont pas universels et il existe une multitude de combinaisons possibles. Nous commençons par une brève description des modèles que nous comparons par la suite.

2.2.2.2.1.1 *Présentation de deux modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes*

Face aux limites des approches classiques, nous proposons deux modélisations capables de décrire les fluctuations des séries temporelles financières. Elles rendent compte de l'existence de structures chaotiques par l'équation de la moyenne et de structures stochastiques caractérisées par des changements de régimes dits markoviens par l'équation de la variance. Nous retenons les deux modèles suivants :

\* Le modèle MG-MRS-GARCH définit par :

$$\begin{aligned} X_t &= \beta \frac{X_{t-\tau}}{1 + X_{t-\tau}^n} - \gamma X_{t-1} + \epsilon_t \\ \epsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, h_t^{(i)}), \\ \epsilon_t &= z_t \sqrt{h_t^{(i)}} \text{ et } h_t^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} h_{t-1} \end{aligned} \tag{130}$$

\* Le modèle Lasota-MRS-GARCH :

$$\begin{aligned} X_t &= \beta X_{t-\tau}^n e^{-X_{t-\tau}} - \gamma X_{t-1} + \epsilon_t \\ \epsilon_t | I_{t-1} &\sim N(0, h_t^{(i)}), \\ \epsilon_t &= z_t \sqrt{h_t^{(i)}} \text{ et } h_t^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} h_{t-1} \end{aligned} \tag{131}$$

Où  $h_t^{(i)}$  désigne la variance conditionnelle associée au régime  $i$ .

Le choix d'une modélisation chaos-stochastique avec changements de régimes markoviens est motivé par :

\* les avantages des modèles à changements de régimes markoviens. En effet, contrairement aux modèles à seuil, les modèles MRS -GARCH offrent une souplesse particulière lorsqu'on passe d'un régime à un autre, sans pour autant qu'il soit nécessaire d'établir des critères stricts.

- \* la réglementation prudentielle. L'introduction d'une VaR stressée suppose l'utilisation de deux échantillons pour l'estimation de la VaR au jour le jour. Sur ces deux échantillons, qui ne sont pas forcément consécutifs, il reste nécessaire d'estimer dans le cadre d'une approche paramétrique, un modèle qui décrit au mieux les dynamiques observées. Les modélisations que nous avons retenu peuvent faciliter cette démarche en ce sens où l'estimation d'un modèle chaos-stochastique avec changements de régimes markoviens va permettre de distinguer un régime de stress d'un régime plus calme. Les probabilités associées à chaque régime renseignent alors sur la persistance dans le régime en question et la prévision tient compte du régime dans lequel se trouvent la dernière observation et de la probabilité de persistance. Par ailleurs, le choix de coupler les changements de régimes en variance à une modélisation chaotique en moyenne ne peut que conduire à de meilleurs résultats dans la mesure où l'existence même de structures dans la moyenne est généralement ignorée du fait de l'importance donnée à la variance.
- \* l'infinité des trajectoires qui peuvent être décrites. Le terme chaos-stochastique est général et il a trait à une multitude de modélisations possibles qui peuvent fournir de bonnes prévisions dès lors qu'elles sont capables de décrire de manière appropriée les structures qui existent dans la série temporelle. Nous avons fait le choix de retenir deux modèles chaotiques-celui de Mackey-Glass et de Lasota- et un modèle de type GARCH pour illustrer les apports de ce type de modélisations. Ces combinaisons ne sont pas uniques et il revient à l'utilisateur de déterminer la combinaison optimale en fonction des données.

Nous illustrons par des simulations les caractéristiques de ces deux modélisations.

#### 2.2.2.2.1.2 *Comparaison des modèles*

Nous proposons de simuler les modèles 130 et 131 en retenant un processus MRS-GARCH identique avec pour le premier régime  $\alpha_0 = 0.7, \alpha_1 =$

0.023,  $\beta_1 = 0.97$ ,  $p_{11} = 0.98$ ,  $p_{12} = 0.02$  et pour le régime 2, nous retenons  $\alpha_0 = 0.7$ ,  $\alpha_1 = 0.0225$ ,  $\beta_1 = 0.963$ ,  $p_{11} = 0.96$ ,  $p_{12} = 0.04$ . Le graphique 24 donne un aperçu des simulations pour le modèle 130. Le premier constat que nous pouvons faire porte sur l'évolution très volatile des fluctuations (deuxième graphique) qui ne permet pas d'identifier clairement l'existence de plusieurs régimes. À partir des informations tirées des simulations, notamment sur la présence de chaque observation dans l'un ou l'autre régime, nous avons décomposé la simulation en deux trajectoires distinctes qui représentent deux régimes. Le premier régime est caractérisé par une moyenne beaucoup plus importante et une volatilité presque identique à celle du deuxième régime. Il est aussi plus fréquent que le deuxième régime ( $n_1 = 704$ ,  $n_2 = 296$ ).

En conservant le même modèle MRS-GARCH, nous simulons l'équation 131. Il ressort de la trajectoire du graphique 25 plusieurs similitudes avec celle du modèle 130 liées à la partie stochastique mais une différence apparaît dans la moyenne. Elle est due au modèle chaotique, qui pour les paramètres retenus, oscille autour de 1 dans le cas du modèle 130 et 0 dans le cas du modèle 131. Cette différence est beaucoup plus visible sur le graphique 26 qui montre que le modèle MG-MRS-GARCH évolue pratiquement de la même façon que le modèle Lasota-MRS-GARCH avec un déplacement des fluctuations vers le haut. Afin de montrer tout l'intérêt de recourir à des modèles chaos-stochastiques, nous avons représenté les modèles 130 et 131 selon les deux régimes. Ainsi, le graphique 27 montre l'impact de l'association d'un modèle chaotique et stochastique dans l'évolution des fluctuations. Si nous comparons les deux représentations, nous pouvons dire, compte tenu des paramètres retenus que le modèle 130 semble plus adapté pour des séries très volatiles. Ce constat est à relativiser car une analyse plus précise montre que ce modèle est plus adapté à des séries volatiles mais qui présentent plus de rentabilités positives que négatives. À contrario, le modèle 131 est plutôt destiné, compte tenu des paramètres retenus, à des séries temporelles volatiles mais qui présentent plus de pertes que de gains. Autrement dit, le modèle MG-MRS-GARCH est plus approprié à des séries temporelles financières en période calme avec soit une légère asymétrie à gauche, soit une asymétrie positive. Le modèle Lasota-MRS-GARCH peut

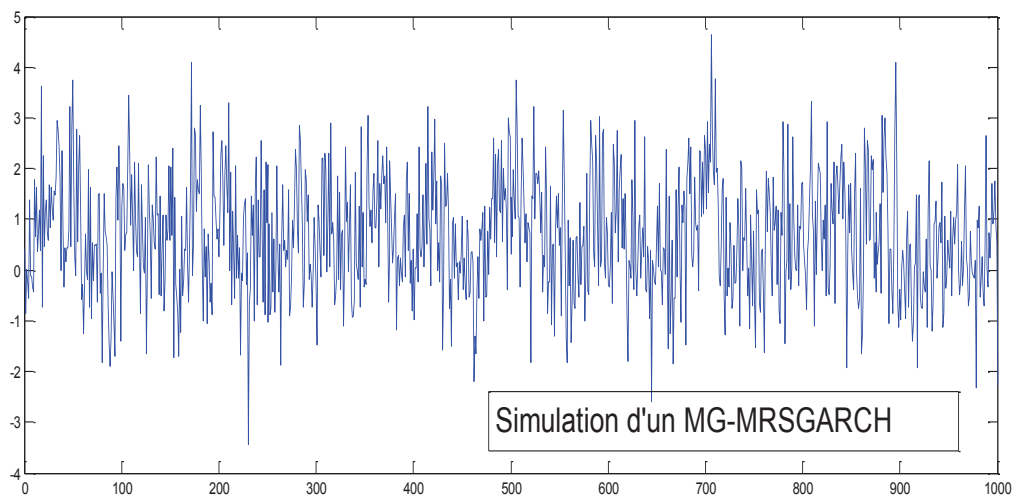
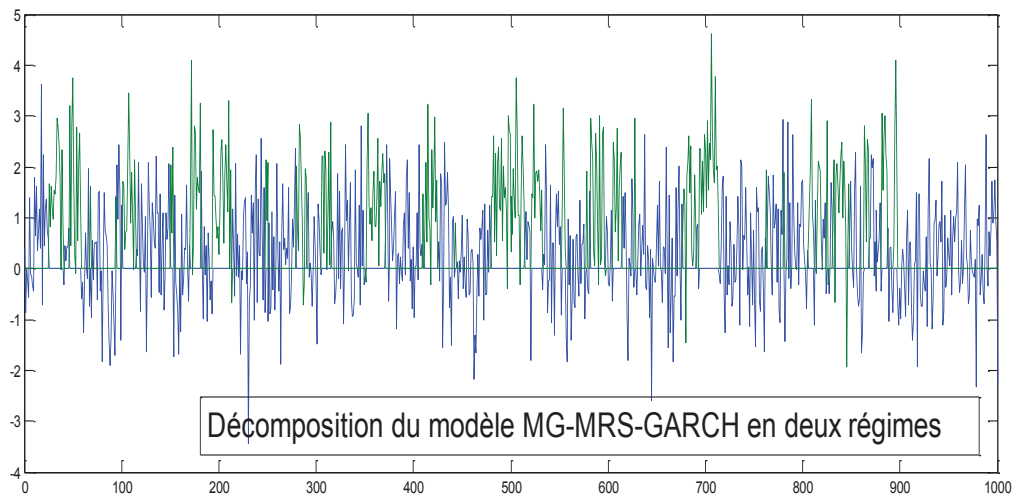
mieux décrire des séries temporelles en période de crise avec une forte asymétrie à gauche.

---

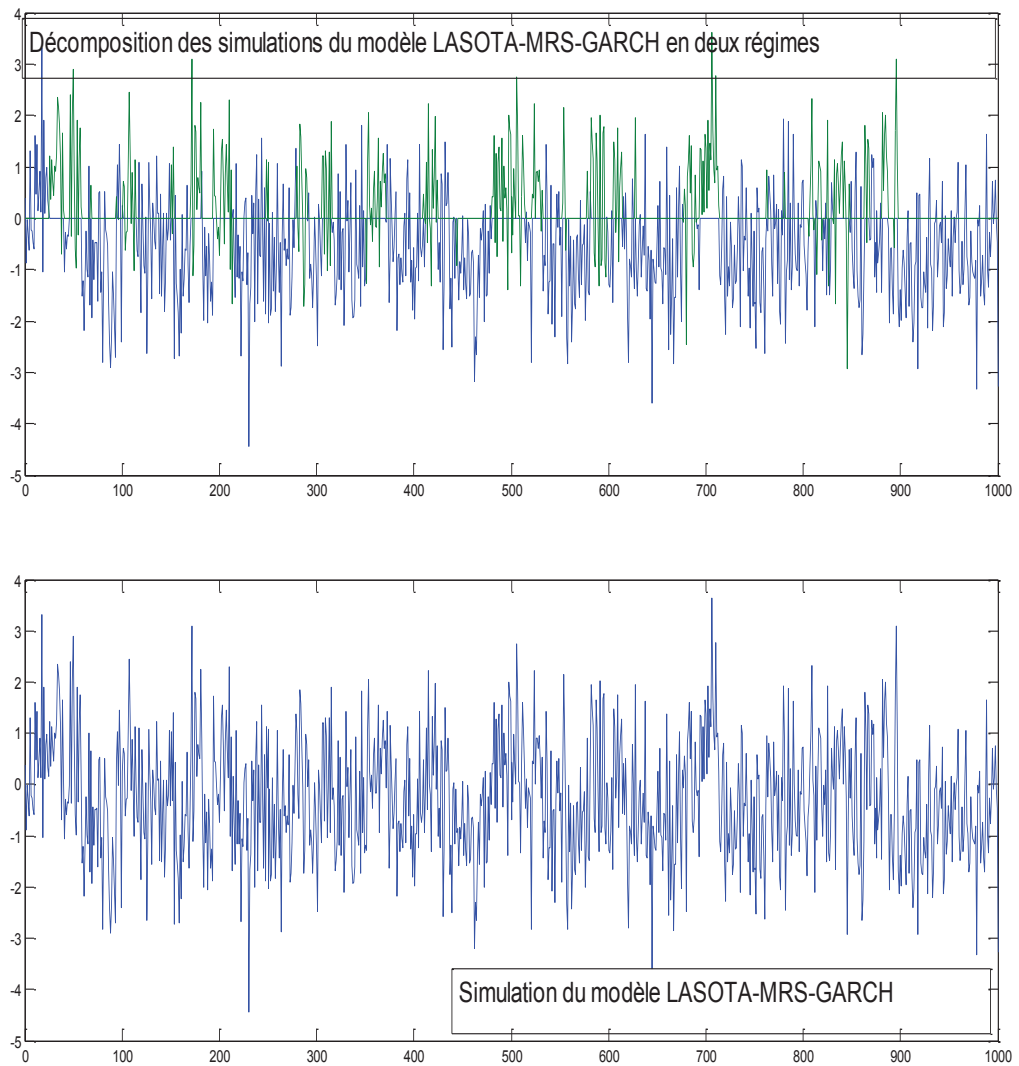
La diversité des structures qui peuvent exister dans une série temporelle a conduit les chercheurs à développer des modèles capables de décrire ces structures. Une grande partie de ces modèles s'inscrit dans une approche purement stochastique due notamment aux difficultés des approches déterministes à pouvoir rendre compte des fortes fluctuations des séries temporelles financières. De ce constat, d'aucuns estiment qu'il est nécessaire de s'ouvrir aux autres disciplines pour comprendre comment elles intègrent les structures hautement complexes des séries temporelles financières.

Nous considérons qu'une approche purement stochastique ou purement chaotique est insuffisante et qu'une combinaison de ces différentes approches peut conduire à de bons résultats. Les exemples des modèles Mackey-Glass et Lasota vont dans ce sens. Ces derniers associés à un processus GARCH avec changements de régimes markoviens présentent des trajectoires proches de celles d'une série temporelle et permettent de rendre compte de l'évolution de la série temporelle en fonction des différents régimes.

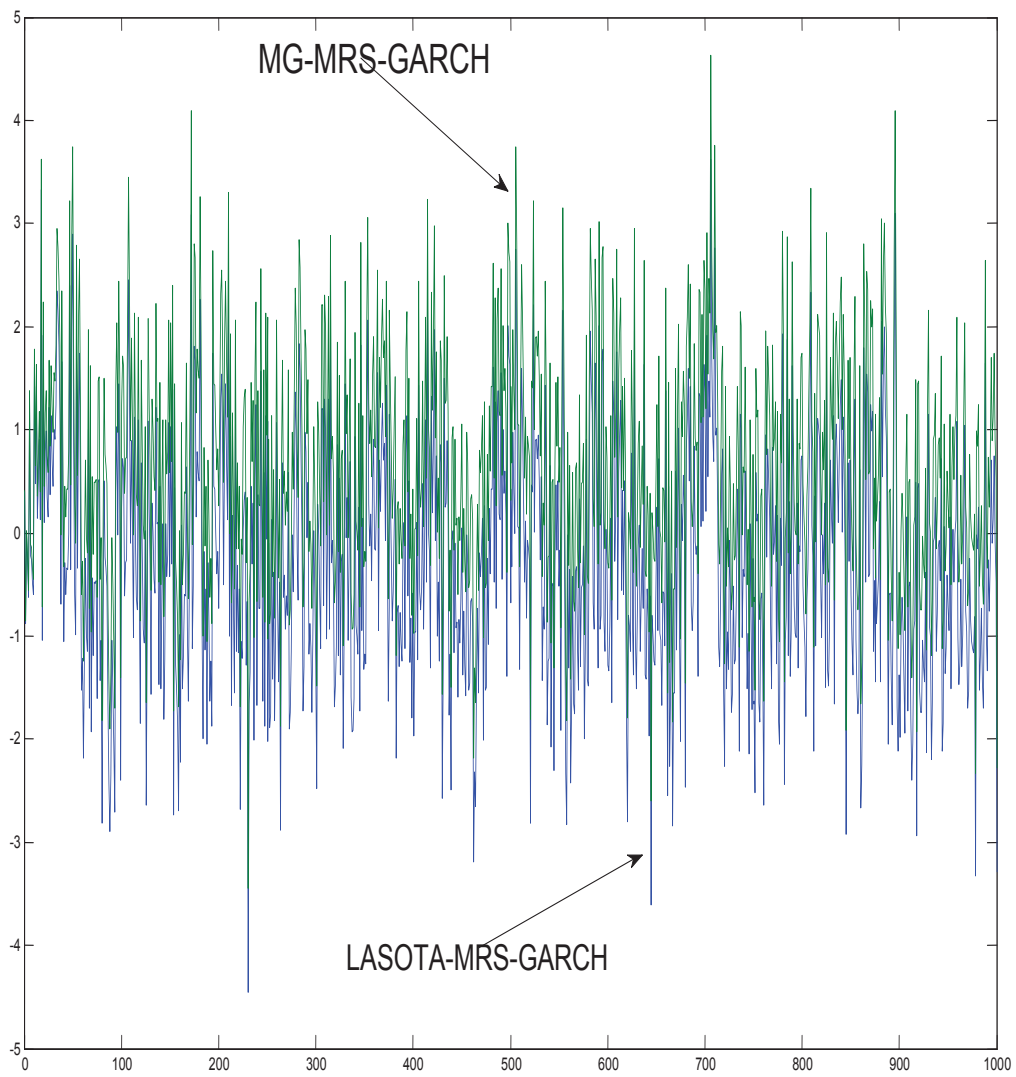




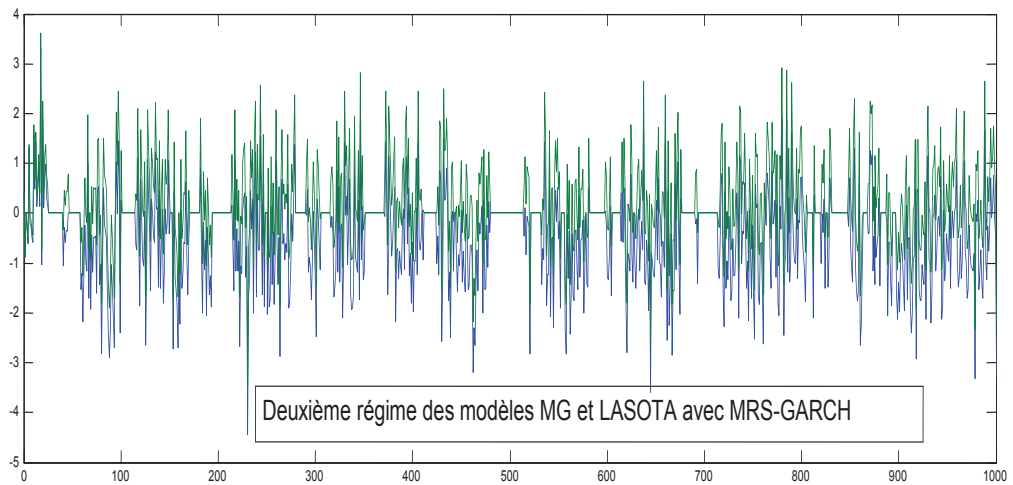
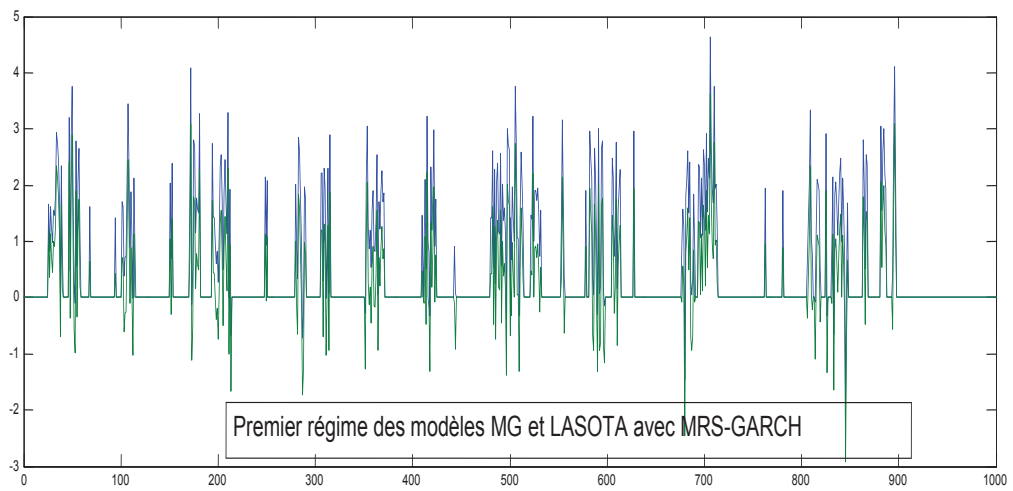
Graphique 24 – Simulations du modèle 130



Graphique 25 – Simulations du modèle 131



Graphique 26 – Comparaison des modèles 131 & 130 (1)



Graphique 27 – Comparaison des modèles 131 & 130 (2)

#### **2.2.2.2.2 Ruptures de corrélations et modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes**

La pertinence de l'utilisation de modèles chaos-stochastiques dans un cadre élargi fait l'objet d'une littérature relativement récente qui, par le biais de différentes approches, s'attache à préciser les apports éventuels de ces modélisations dans la description des interactions entre agents financiers et des événements majeurs. Dans un cadre descriptif, le recours à un modèle chaotique bivarié permet d'évaluer les conséquences des interactions entre agents hétérogènes. Corcos et al.(2008) proposent un modèle multi-agents qui permet de comprendre comment l'interaction d'agents hétérogènes est susceptible de créer une crise financière sur le marché. Ce modèle chaotique confirme certains résultats obtenus dans le cas univarié, notamment sur la coexistence de structures chaotiques et stochastiques qui peut conduire à rejeter l'hypothèse de structures chaotiques en présence de fortes stochasticités.

La version bivariée des modèles chaos-stochastiques a été introduite par Kyrtsov et Labys(2006, 2007) et Kyrtsov et Vorlow(2009). Elle permet de détecter les interdépendances non-linéaires susceptibles d'exister entre deux actifs. Ainsi, Kyrtsov et Labys(2006) étudient la dépendance chaotique entre l'inflation américaine et le prix des matières premières à partir d'une méthodologie particulière qu'ils appliquent à des données mensuelles. Ils utilisent, en effet, un test de causalité non linéaire de Granger et mettent ainsi en évidence une relation non linéaire bidirectionnelle. Ils proposent de prendre en compte la nature de la relation par un processus de Mackey-Glass bivarié.

L'extension de ces modèles est envisagée pour contribuer à la détection des ruptures de corrélations, à l'identification de phénomènes de contagion, et à la description des interdépendances non-linéaires caractérisées par des changements de régimes markoviens. Nous revenons sur l'interprétation possible d'un modèle chaotique à deux régimes et sur les impacts de ce type de modèle dans un premier point. Nous détaillons les modélisations bivariées possibles dans le cas d'une spécification Mackey-Glass bruitée et nous proposons deux extensions de ce modèle dans un deuxième point.

#### 2.2.2.2.1 *Crise financière et bulles spéculatives : une interprétation du problème de 'correlations breakdowns' par un modèle chaotique à deux régimes*

Le recours à des modèles chaos-stochastiques est privilégié par les performances observées de ce type d'approche mais aussi par l'interaction des agents qui crée des structures chaotiques qui ne peuvent être ignorées. Corcos et al.(2008) présentent un modèle d'interaction entre deux types d'agents aux comportements particuliers : moutonnier et contre-tendance. Les agents ne se réfèrent pas à la valeur fondamentale d'un titre ou d'un portefeuille, ils raisonnent en termes d'espérance du prix du marché et en ce sens, restent des agents rationnels au sens de Keynes(1936), Orléan(1986), Sornette(2001). L'espérance du prix qu'ils déterminent est calculée en utilisant l'information disponible d'un sous-échantillon d'agents choisi aléatoirement. Il est possible d'obtenir à partir de cet échantillon une opinion collective sur le comportement du prix future par rapport à la valeur fondamentale du titre. Ainsi, le prix peut traduire deux types de situation :

- \* une situation spéculative qui reflète un comportement de court terme des agents de l'échantillon ;
- \* une situation de long terme qui conduit les agents à prendre en compte dans leurs opinions la réalité économique et la valeur fondamentale.

Cette dichotomie dans la formation du prix traduit la coexistence d'agents fondamentalistes ou chartistes, qui est reprise dans le modèle de Corcos et al.(2008). À ces différentes situations, s'associent des risques différents : un risque de compétition dans le cas spéculatif et un risque résultant d'une forte précaution dans la situation de long terme. En définitive, l'agent de référence établit un arbitrage entre ces deux types de risques et adoptera soit un comportement mimétique, soit un comportement antagoniste. Le modèle considère  $N$  agents qui peuvent se positionner sur deux états différents du marché : haussier ou baissier. Lorsque le nombre d'agents  $N$  tend vers l'infini alors la fraction d'agents se situant dans l'état haussier ('bullshit') suit une dynamique déterministe chaotique dans un sous-espace de mesures positives. Plus précisément, l'évolution du modèle pour un nombre infini d'agents contient certaines caractéristiques

téristiques aléatoires mais fait apparaître en même temps des régularités sur de petites périodes qui reflètent la nature déterministe du modèle. Si le prix du marché s'établit sur la base d'espérance de prix et prend en compte les comportements mimétiques alors l'évolution chaotique des agents conduit à une dynamique chaotique des prix. Le nombre d'agents participants au marché est primordial : si dans certains modèles tels que ceux développés par Kim et Markowitz(1989), Lux et Marchesi(1999), un nombre infini d'agents conduit à des dynamiques quasi-périodiques et à des prix complètement irréalistes, certaines études se sont attachées à déterminer des seuils en dessous desquels les fluctuations des prix s'apparentent aux trajectoires réelles. Le cas infini apparaît donc irréaliste dans la mesure où il conduit à des trajectoires périodiques, en contradiction avec la réalité des prix. Corcos et al.(2008) améliorent ce point en montrant, dans leur modèle, que le cas où  $N$  est un nombre fini avec une probabilité  $p$  d'agents 'bullshit' correspond au cas où  $N$  est infini avec un ratio d'agents 'bullshit' donné par  $p$ . Les trajectoires obtenues dans les deux cas sont chaotiques avec une prédominance stochastique dans le cas où  $N$  est fini.

Le modèle retenu par ces auteurs est mis en perspective avec 3 comportements économiques standards :

- \* Lorsque  $N$  tends vers l'infini, la trajectoire du modèle est déterministe. En exploitant le comportement mimétique des agents, les auteurs montrent que le désordre apparent des prix peut être expliqué non seulement par une partie aléatoire mais aussi par des comportements déterministes. En dépit des applications empiriques peu pertinentes et peu concluantes sur l'existence de structures chaotiques dans la littérature, Corcos et al.(2008) montrent que pour un nombre d'agents finis  $N$ , les dynamiques chaotiques des prix sont remplacées par des dynamiques stochastiques qui cachent les dynamiques chaotiques obtenues dans le cas infini. Il existe donc un mécanisme de fixation des prix à l'origine de l'instabilité des prix : d'une période à l'autre et en l'absence d'une nouvelle information autre que celle anticipée par les autres agents, les prix présentent un comportement continu erratique, ils ne stabilisent jamais sans diverger.

- \* Le modèle développé par Corcos et al.(2008) montre qu'une partie de la volatilité inhérente aux marchés financiers peut être attribuée aux structures chaotiques.
- \* Enfin, les bulles spéculatives créées par le modèle seraient une conséquence des comportements mimétiques sur les marchés. Corcos et al.(2008) s'inscrivent alors dans une approche à la Shiller (1984) puisqu'ils considèrent la formation des bulles spéculatives comme une conséquence de la rationalité limitée des agents, qui découlerait d'une asymétrie d'information, de l'inefficacité des prix ou encore de l'hétérogénéité des anticipations.

En définitive, ces auteurs montrent que la construction des bulles spéculatives est attribuée à une dominance des agents 'bullish' sur le marché qui vont alimenter la confiance des chartistes. En combinant les deux approches fondamentaliste et chartiste, Corcos et al.(2008) montrent que l'interaction de ces deux comportements antagonistes crée des structures chaotiques et des bulles spéculatives. Il ressort de cette analyse un rôle particulier attribué aux effets de taille et au bruit dans le comportement stochastique des prix. Falbo et Grassi(2011) proposent d'étudier l'effet introduit dans les dynamiques de marché quand les agents anticipent l'occurrence d'une rupture des corrélations. En recourant à un modèle multi-agents, ils montrent que les agents rationnels peuvent causer des crises financières même en l'absence d'agents spéculateurs du fait de leur anticipation des '*correlations breakdowns*'. Les agents dits rationnels sont des agents informés qui vont sélectionner les portefeuilles optimaux. Les agents spéculatifs peuvent soit suivre les mouvements de marché, soit aller à l'encontre de la tendance de marché. Falbo et Grassi(2011) déterminent les conditions sous lesquelles un marché dominé par les spéculateurs converge vers un équilibre stable ou diverge de la valeur fondamentale. Plus précisément, Falbo et Grassi(2011) et Corcos et al.(2002) constituent les rares études qui se sont attachées à réinterpréter les crises financières et les bulles spéculatives comme les conséquences de deux processus de formation des prix différents. L'idée selon laquelle ces phénomènes seraient des conséquences symétriques d'un même processus de formation des prix est pourtant infirmée dans les études menées en finance comportementale (Kahneman et Tversky(1973, 1974)).



2.2.2.2.2 *Modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes : une approche bivariée*

Nous avons vu dans les sections précédentes la richesse des dynamiques qui peuvent être créées par le modèle de Mackey-Glass. L'approche univariée retenue dans les sections précédentes peut facilement se généraliser dans un cadre multivarié. Un certain nombre de travaux se sont intéressés au cas bivarié du modèle Mackey-Glass. Il en est ainsi de Kyrtsov et Labys(2006) qui proposent un modèle de Mackey-Glass avec bruit blanc pour rendre compte des dynamiques complexes qui caractérisent les liens causaux entre l'inflation américaine et le prix des biens. Ils introduisent le modèle bivarié suivant :

$$X_{1t} = \alpha_1 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1 + X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_1 X_{1,t-1} + \alpha_2 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1 + X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_2 X_{2,t-1} + \epsilon_{1,t} \quad \epsilon_{1,t} \sim N(0, 1)$$

$$X_{2t} = \alpha_3 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1 + X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_3 X_{1,t-1} + \alpha_4 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1 + X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_4 X_{2,t-1} + \epsilon_{2,t} \quad \epsilon_{2,t} \sim N(0, 1)$$

La version bivariée du modèle Mackey-Glass conserve toutes les propriétés dynamiques du cas univarié (Kyrtsov et Labys(2006)). Elle présente l'avantage de pouvoir rendre compte d'une palette de dynamiques plus diversifiée que les modèles VAR. Par ailleurs, le modèle Mackey-Glass bivarié permet de décrire des interdépendances de type non-linéaire. Dans une autre étude(2007), ces auteurs retiennent le même modèle pour mettre en évidence la présence des liens causaux entre l'inflation américaine et le prix du métal. Kyrtsov et Vorlow(2009) proposent alors une amélioration du Mackey-Glass bivarié en le rattachant à un processus BEKK-GARCH<sup>57</sup> pour modéliser les comouvements qui peuvent exister entre deux séries temporelles.

Ces modélisations bivariées peuvent être améliorées par l'utilisation d'un processus de type DCC-GARCH<sup>58</sup> en variance. Le nombre important de paramètres à estimer et l'absence d'informations sur les corrélations conditionnelles dans le cadre du modèle BEKK-GARCH conduit au développement de spécifications permettant de pallier les insuffisances révélées. Nous proposons une

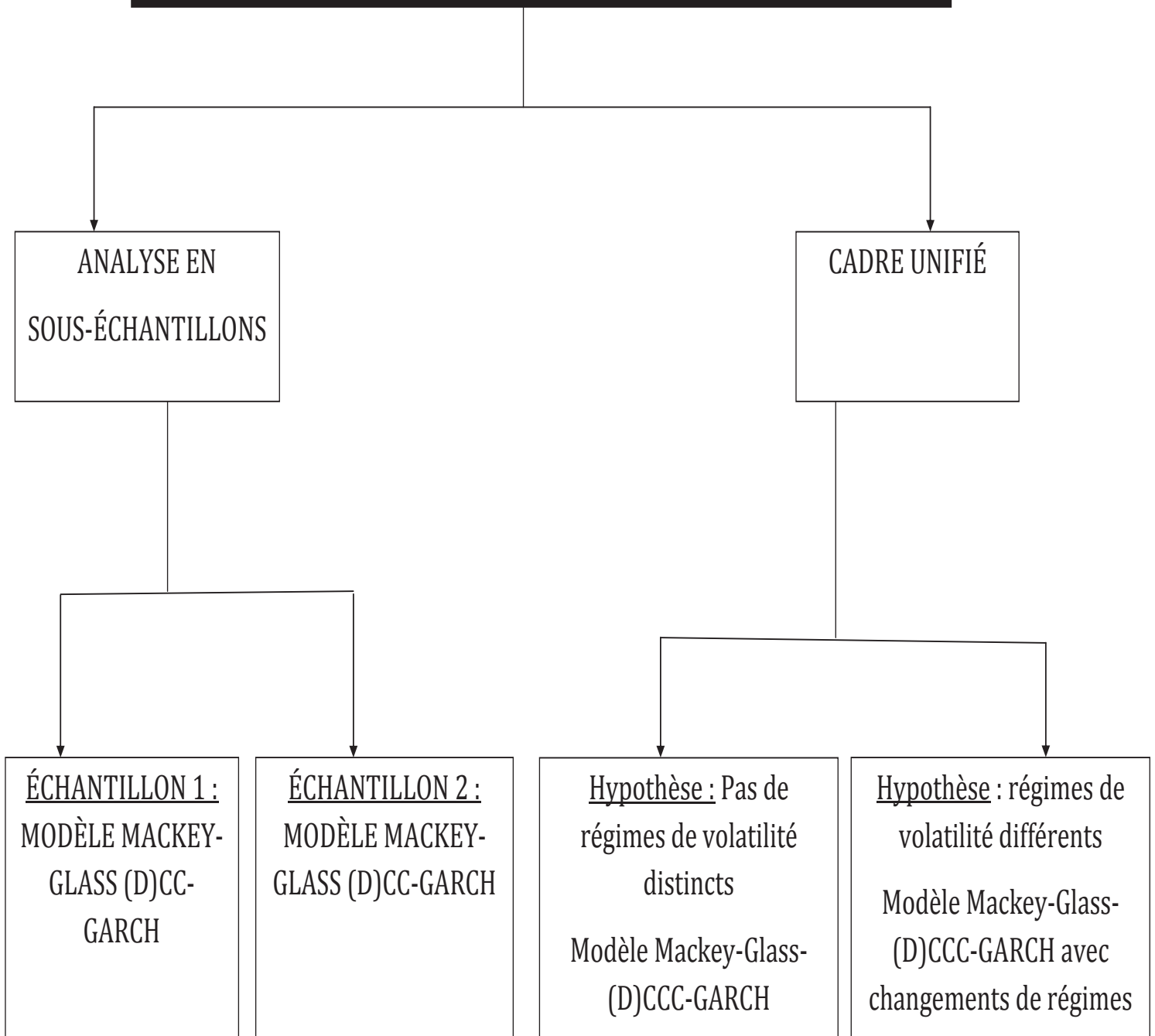
57. La description du modèle BEKK-GARCH est fournie dans l'annexe C.7.1.

58. Une description détaillée de ce processus est fournie dans l'annexe C.7.1.

procédure particulière pour l'utilisation des modèles Mackey-Glass bruité et bivarié.

Les relations susceptibles d'exister entre deux actifs peuvent être dynamiques ou statiques. L'interdépendance éventuelle en moyenne peut être prise en compte par un modèle de Mackey-Glass bivarié avec des paramètres fixes. L'intensité des relations en variance est alors décrite par un processus de type DCC-GARCH qui prévoit un cas particulier, à savoir la constance des corrélations conditionnelles (CCC-GARCH). Le recours aux spécifications dynamique ou statique résulte de l'application de tests particuliers, notamment le test d'Engle et Sheppard(2001). La finalité de l'exercice conditionne alors la procédure utilisée : dans le cadre d'une analyse des interdépendances susceptibles d'exister entre deux actifs, l'utilisation du modèle Mackey-Glass bivarié est réalisé sur l'ensemble de l'échantillon d'analyse. Dans le cas où l'étude vise à révéler l'existence de phénomène de contagion et donc des ruptures dans les corrélations, le recours à un modèle en sous-période est privilégié. Il doit mettre en évidence une intensification des relations en période de crise qui traduit les contagions entre deux actifs. Dans le cas où cette dernière n'est pas identifiée, les relations traduisent uniquement une interdépendance qui reste constante dans le temps. Cette démarche par sous-périodes d'étude peut présenter l'inconvénient d'une procédure trop lourde à réaliser. Le développement relativement récents de spécifications de type DCC-GARCH avec changements de régimes permet d'envisager une analyse plus générale dans un cadre unifié. Il est alors possible d'utiliser des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes bivariés. Cette alternative présente le double avantage d'une modélisation unique et d'une description des régimes de volatilités qui caractérisent une relation. Ces deux extensions que nous proposons sont résumées dans le graphique 28. Elles sont appliquées et détaillées dans le troisième chapitre.

# ANALYSE BIVARIÉE CHAOS-STOCHASTIQUE



Graphique 28 – Approches chaos-stochastiques bivariées

## CONCLUSION

Les menaces que fait peser la sphère financière sur l'économie ont conduit à la mise en place de règles, de recommandations, d'exigences pour limiter l'impact des risques financiers. Les responsables prudents ont accompagné les établissements financiers dans l'identification, la mesure et la prise en compte des risques. Parmi ces derniers, le risque de marché est, avec le risque de crédit, l'un des plus importants risques financiers et il est apparu nécessaire de le quantifier : c'est tout l'intérêt de la Value-at-Risk.

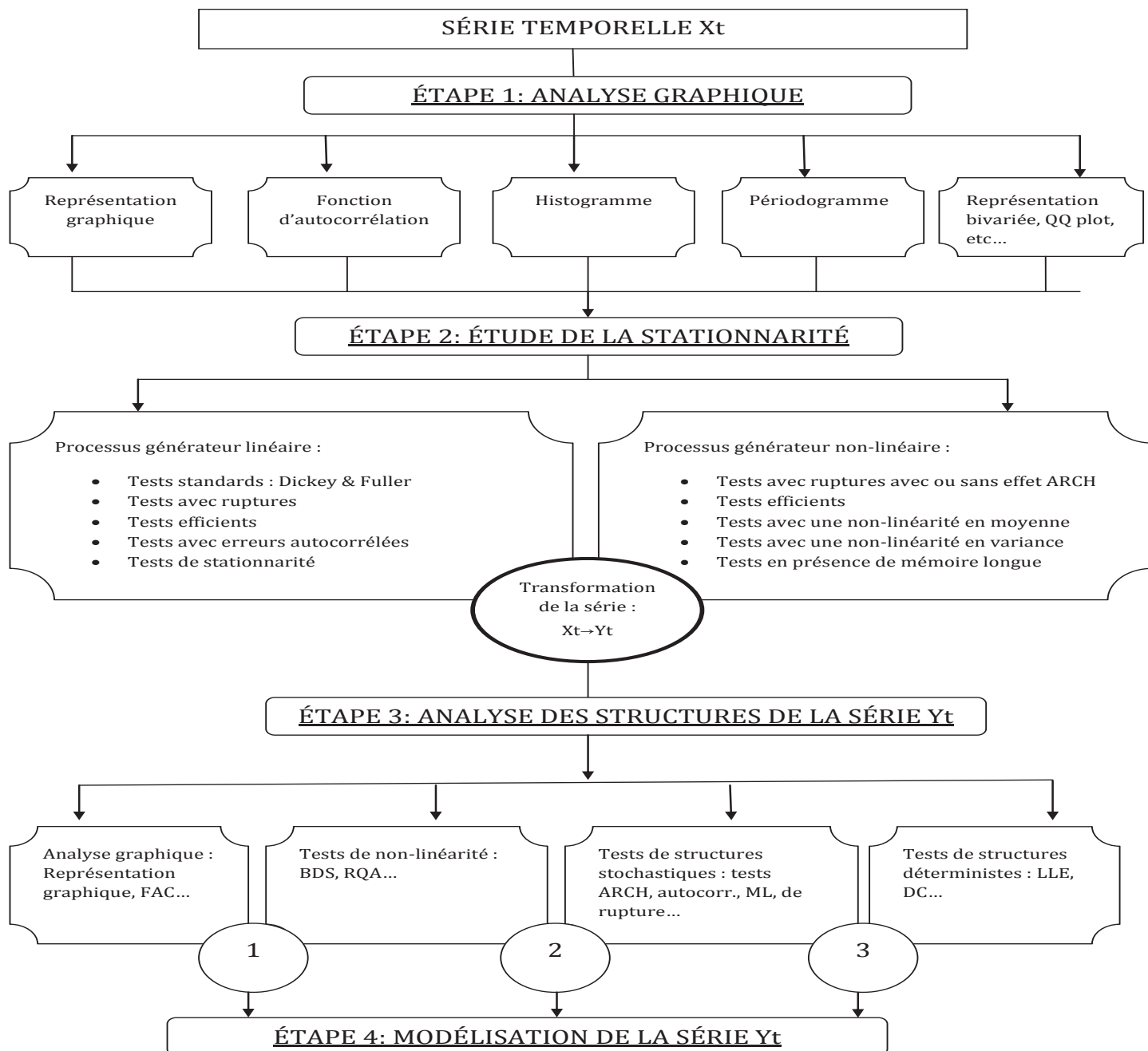
Dans le cadre d'une approche paramétrique de cette mesure, de nombreux modèles ont été proposés pour rendre compte des fluctuations des séries temporelles financières pour lesquelles on cherche à déterminer le risque de marché. Dans une approche multivariée du risque de marché, le problème induit par la détection de ruptures des corrélations pose la question de la pertinence des modèles et des instruments utilisés. Malgré le nombre important de modèles proposés, la récente crise financière a révélé leur insuffisance à cause de leur incapacité à rendre compte d'un possible revirement soudain qui conduirait à une exigence de fonds propres plus importante. Ces faiblesses sont intrinsèquement liées à l'existence de structures hautement complexes dans les séries temporelles financières. Reflet de la forte non linéarité des séries temporelles financières, ces structures sont de natures diverses et il revient aux modélisateurs de combiner, dans un modèle, ces différentes structures pour rendre compte des fluctuations financières. Un autre problème sous-jacent à ces difficultés porte sur l'hypothèse restrictive du processus générateur de données. L'idée de la nature purement stochastique de ce processus est aujourd'hui remise en cause et certains estiment nécessaire, voire urgent de revoir cette hypothèse, en s'ouvrant à d'autres disciplines qui utilisent déjà des instruments différents.

Dans cette optique, la théorie du chaos peut apporter un renouveau sans précédent, comme elle l'a fait dans d'autres disciplines. Principale remise en cause de la vision newtonienne du monde, la théorie du chaos permet d'envisager un nombre infini de modélisations aux caractéristiques particulières. Néanmoins, les fortes fluctuations des séries temporelles financières indiquent l'apport limité d'une approche purement chaotique et suggèrent un compromis entre une

partie stochastique capable de rendre compte des fortes amplitudes des fluctuations et une partie chaotique nécessaire pour décrire les fluctuations de faibles amplitudes mais révélatrices de la présence de fondamentalistes sur le marché. Ce compromis entre une force stabilisatrice et déstabilisatrice a fait l'objet d'un intérêt particulier dans la littérature. Mais la succession de périodes de crises et de périodes calmes est insuffisamment décrite par ces modèles et nous avons proposé le recours à une approche chaos-stochastique avec changements de régimes.

Les résultats mathématiques et les simulations de deux modèles chaotiques que nous retenons témoignent d'une richesse des dynamiques. La littérature économétrique développe le modèle de Mackey-Glass bruité par un processus GARCH, elle montre tout l'intérêt de cette modélisation pour les séries temporelles financières. L'apport principal de ce chapitre consiste en de nombreuses extensions du modèle Mackey-Glass bruité qui intègrent notamment des changements de régimes markoviens. Par ailleurs, l'introduction du modèle Lasota, tout aussi riche, associé à un bruit avec ou sans changements de régimes permet de concevoir des dynamiques particulièrement volatiles. Une autre contribution majeure de ce chapitre est liée aux spécifications bivariées qui permettent de décrire les interactions entre deux actifs, de modéliser les ruptures des corrélations, d'analyser les interdépendances et les contagions entre deux actifs. Les approches bivariées développées portent exclusivement sur le modèle de Mackey-Glass et elles intègrent, dans un cadre unifié des changements de régimes markoviens.

Il reste, cependant, important de bien définir les étapes nécessaires à la détermination de la combinaison optimale : le graphique 29 présente une démarche en 4 étapes. Nous présentons dans le chapitre suivant une application empirique des modèles chaos-stochastiques. L'apport de ces modèles est évalué dans un cadre univarié avec l'estimation, la prévision et l'évaluation de la VaR. Nous présentons une approche bivariée originale qui permet d'analyser les liens susceptibles d'exister entre les indices boursiers.



Graphique 29 – Organigramme pour l'étude d'une série temporelle financière

*La première étape est une analyse graphique qui doit être menée sur plusieurs représentations. Elle doit fournir une première indication sur la nature, les structures et les caractéristiques de la série temporelle. À la suite de cette première analyse, une étude de la stationnarité est nécessaire. Dans cette optique, il ne faut en aucun cas négliger les structures qui existent dans la série temporelle et ainsi retenir le(s) test(s) de stationnarité approprié(s). À l'issue de cette étape, les transformations nécessaires à la stationnarité de la série doivent être appliquées et une analyse des structures de la série temporelle transformée pourra être menée. Elle doit révéler les structures à prendre en compte et les modèles les plus appropriés.* 269



MODÉLISATIONS  
CHAOS-STOCHASTIQUES DES  
INDICES BOURSIERS DE LA ZONE  
EURO : ÉVALUATION UNIVARIÉE DE  
LA VAR ET ANALYSE DES RUPTURES  
DE CORRÉLATIONS

---

*"This morning I would like to share with you some of my views on the lessons the crisis has taught us and, more importantly, how we can use this experience to better prepare for the future. Clearly, we are still in the midst of this process and more lessons are likely to arise. As you know, both Belgium and my home country, the Netherlands, are on the shore of the North Sea, which can be extremely stormy at times. In the past, people were at the mercy of these storms. For instance, in 1570 more than 20,000 people died during one of the worst storms in history. So how did people react? They built dikes to protect against the floodwaters. Despite these buffers, a bit more than 50 years ago, the Netherlands as well as Belgium, the UK and Germany were caught again by an enormous flood, which flowed over the dikes - the buffers - that had been built up during the good years."*

Nout Wellink (sept.2008)

Depuis la crise du bulbe de tulipe en 1634, les principaux acteurs des marchés financiers ne cessent de renouveler leurs instruments pour anticiper les crises financières. La métaphore de Wellink rappelle la nécessité de mettre en place des garde-fous qui doivent être constamment réactualisés. Ainsi, lors de la confé-



rence internationale des superviseurs bancaires du CBSB de Septembre 2008, N. Wellink, le président du CBSB et de la banque centrale des Pays-Bas pointe les failles du système bancaire et financier : une concentration des risques, un effet de levier mal contrôlé, un risque de liquidité important, une pro cyclicité dans la détermination des fonds propres sont les principaux ingrédients d'une crise sans précédent. Pris à part, ces différents éléments ne pouvaient à eux-seuls conduire à l'une des plus grandes crises de l'Histoire mais la façon dont ils ont été gérés et contrôlés semble au cœur du problème. Il dénonce aussi l'excès de confiance et les complaisances des différents acteurs qui "as long as the music is playing, [they]'ve got to get up and dance". Ce cocktail explosif aurait dû alarmer les autorités afin qu'elles prennent les mesures nécessaires pour endiguer la crise.

La faillite de Lehman Brothers et les difficultés rencontrées par les groupes AIG, Freddie Mac et Fannie Mae deviennent rapidement le symbole d'une crise particulière tant par son ampleur que par les impacts qu'elle eut par la suite. Une des conséquences importante de la crise des subprimes intervient en 2011 lors de la crise des dettes souveraines en Europe. Les récentes crises financières survenues dans le Vieux Continent ont conduit à une fragilisation importante de la monnaie unique. Les déficits budgétaires record enregistrés par ces pays ont favorisé une méfiance croissante vis-à-vis des États et notamment des titres émis par ces derniers. L'émission des titres d'État sur les marchés financiers doit permettre aux émetteurs d'emprunter à moindre coût et ainsi financer leur déficit budgétaire. En contrepartie, et compte tenu de la signature de l'émetteur, cet actif présente un risque minimal. Aussi son attractivité permet aux États de lever des sommes importantes puisque l'emprunt d'État est généralement bien coté. Cependant, l'accroissement du montant de la dette a conduit les agences de notation à envisager un risque de défaut des États européens les plus modestes, ce qui a entraîné une augmentation des taux d'intérêt et par conséquent de la charge d'intérêt totale que ces États devaient rembourser.

Par ailleurs, comme l'explique Cohen(2011), la frustration de la crise européenne réside d'une part dans l'instauration de la monnaie unique et d'autre part dans une situation paradoxale créée par la crise elle-même. L'instauration de la monnaie unique avait pour objectif de créer un rempart contre les déséqui-

libres monétaires internationaux, notamment américains. La situation paradoxale, exposée par Cohen(2011) concerne le niveau relativement bas des taux d'intérêt, abaissé justement pour endiguer la crise. La panique qui a gagnée les marchés financiers est notamment due à une interdépendance importante des États européens et des marchés. Une monnaie unique et plusieurs dettes publiques de pays économiquement hétérogènes conduisent les investisseurs à établir des choix qui favorisent les pays européens les plus riches au détriment des pays plus modestes. Ces événements ont accentué les conséquences de la crise des subprimes, démarrée aux États-Unis et dont l'impact s'est répandu sur différents pays.

La crise des dettes européennes a surpris une grande partie des politiciens et des observateurs qui constatent que les déficits fiscaux et le niveau des dettes publiques avant la crise des subprimes avaient très peu augmentés. Selon eux, les marchés ont surréagis suite à la crise de 2007 et cela, à cause du risque de contagion de certains pays comme la Grèce. Ainsi, en retenant la période pré-crise (2000-2007), Beirne et Fratzscher(2013) établissent les relations qui existent entre les fondamentaux et le risque souverain et notent une surestimation de ce dernier notamment dans les pays de la zone euro. Un autre constat établi par ces auteurs concerne les déterminants du risque souverain : le niveau de la dette publique, le déficit fiscal et la croissance n'expliquent que très peu le risque souverain des pays GIPSI<sup>59</sup> avant la crise, ce qui n'est pas le cas pour d'autres pays développés ou en voie de développement. Les fondamentaux ont donc un impact très limité sur le risque souverain des pays de la zone euro dans la période pré-crise mais cet impact est plus important durant la crise. En période pré-crise, le risque souverain est sous-estimé alors qu'il est surestimé durant la crise compte tenu des fondamentaux économiques.

Le lien entre la crise des dettes souveraines et celle des subprimes est explicité par Reinhart et Rogoff(2009). Ils identifient 3 caractéristiques inhérentes aux crises financières dites sévères, à l'instar de la crise des subprimes : une crise profonde et durable sur le marché des actifs, une baisse importante de la production et une montée du chômage, une explosion de la valeur réelle des dettes gouvernementales. Cette dernière caractéristique est imputée à une baisse des

---

59. Grèce, Italie, Portugal, Espagne, Irlande.

recettes fiscales dû à une diminution de la production. La crise des dettes européennes serait donc une conséquence de la crise des subprimes.

Ces évènements révèlent les difficultés des institutions bancaires et financières à pouvoir faire face à des situations extrêmes notamment lorsqu'il s'agit de couvrir des pertes portant sur les actifs détenus. Un certain nombre de facteurs ont été identifiés comme déclencheurs de la crise financière (Wellink(2009)) et l'un des constats mis en évidence par les analystes porte sur la sous-estimation du risque de marché. Dans le cadre des réponses du CBSB à la crise financière, plusieurs pistes de réflexions ont été envisagées et conduisent à de nouvelles normes qui s'inscrivent dans le cadre de Bâle 3. En ce qui concerne la gestion du risque de marché, les solutions proposées concernent principalement la VaR. L'estimation de la VaR, à l'instar de la plupart des instruments de mesure du risque, entretient un lien étroit avec les cycles économiques. En effet, en période d'euphorie des cycles financiers dû notamment à une évolution favorable de l'économie réelle, nous assistons à une sous-estimation des risques, à un octroi abusif des crédits et à une consommation excessive des ménages(BRI(2001)). L'identification des prophéties autoréalisatrices(Merton(1948)) dans le comportement des institutions financières montre une sous-estimation du risque en période de crise. L'évaluation du risque de marché par la VaR tend à minimiser le montant de perte potentielle en période d'euphorie à cause de l'augmentation des prix et de la diminution de la volatilité. Bâle 2 impose l'utilisation d'un historique de 250 jours pour l'estimation de la VaR, favorisant ainsi un biais à cause des notations internes des banques (BRI(2001)). La procyclicité inhérente aux mesures de risque basée sur les anticipations autoréalisatrices des agents ne permet pas d'identifier clairement les signes d'une augmentation du risque.

Les révisions des règles prudentielles définies par Bâle 3 introduisent une exigence supplémentaire dans la détermination des fonds propres par le calcul d'une VaR stressée qui doit permettre d'intégrer le comportement violent des marchés en période de crise et par conséquent de rompre la procyclicité dans l'estimation de la VaR. Définie dans le cadre des révisions de l'accord Bâle 2, la VaR stressée est déterminée à partir d'un historique de crise. Elle vise à réduire la procyclicité des fonds propres et conduit ainsi à leur augmentation de 110%.

L'introduction d'une VaR stressée doit permettre de remédier aux faiblesses de la VaR classique en déterminant le montant minimal de fonds propres par une combinaison linéaire des VaR classique et stressée. Le choix d'une VaR stressée pour prendre en compte les problèmes liés à la procyclicité est une réponse intéressante mais cette alternative ne garantit pas des estimations des pertes suffisantes. En effet, en introduisant la VaR stressée, le comité espère uniquement rompre la procyclicité de la VaR classique. Or, les problèmes rencontrés lors de la crise des subprimes sont beaucoup plus larges et englobent de nombreuses failles notamment celles du choix des méthodes et/ou modèles utilisés pour estimer la VaR. Aussi, il est intéressant de proposer, dans la lignée de la VaR stressée des méthodes qui permettent de modéliser conjointement des périodes calmes et stressées.

Dans ce cadre, nous privilégions une approche paramétrique de la VaR capable d'intégrer les structures existantes dans les séries temporelles financières. La popularité des modèles GARCH a permis le développement d'une palette de modèles capables de prendre en compte les différentes caractéristiques des séries temporelles financières. Cependant l'utilisation de ces modèles conduit à des résultats insuffisants et ils ne performant que pour un nombre restreint de séries temporelles financières. Aussi, le recours à des modèles chaos-stochastiques doit permettre d'améliorer la prise en compte des structures existantes. Nous proposons de retenir différents modèles intégrant non seulement les structures chaotiques mais aussi les changements de régimes, traduisant ainsi les successions de périodes stressées et calmes.

Une autre approche du risque de marché consiste en une analyse des liens entre deux séries financières, liens qui peuvent s'intensifier en période de crise et conduire à un phénomène de '*correlations breakdowns*'. Les modèles visant à intégrer cette caractéristique s'inscrivent essentiellement dans une approche markovienne des régimes de volatilités. En dépit de certaines critiques relatives à ce type de modélisation, il s'est développé toute une littérature récente qui vise essentiellement à rendre compte, par des modèles de type GARCH, de l'asymétrie des volatilités observées sur les marchés.

L'étude des co-dépendances est étroitement liée à l'évolution des corrélations conditionnelles : elles peuvent être dynamiques ou constantes et les modèles

utilisés doivent être adaptés aux dynamiques des corrélations conditionnelles. La nature de ces dernières est mise en évidence par différents tests statistiques. Tse(2000) propose un test de détection des corrélations conditionnelles constantes contre une hypothèse alternative de corrélations conditionnelles dynamiques. Engle et Sheppard (2001) remettent en cause le test de Tse (2000) du fait de sa faible puissance pour des dimensions importantes. Ils proposent un test permettant de détecter les corrélations conditionnelles dynamiques contre l'hypothèse alternative de corrélations conditionnelles constantes. La validation de l'hypothèse alternative du test d'Engle et Sheppard(2001) ne signifie pas l'absence de ruptures dans les corrélations conditionnelles. Elle traduit l'absence d'évolution significative de la matrice des coefficients de corrélations mais il peut exister une rupture temporelle unique suggérant l'existence de deux régimes de volatilités particuliers caractérisés chacun par une évolution constante des corrélations. De manière à rendre compte de cette dichotomie dans l'évolution des co-dépendances, nous proposons de retenir deux modélisations particulières qui doivent permettre de rendre compte des différents cas de figure. Dans le cadre de cette analyse, nous élargissons l'analyse menée auparavant par une double modélisation :

- \* une analyse par sous-échantillon : la revue de littérature a révélé les limites des approches standards dans le débat sur la contagion. Notre contribution essentielle porte sur l'introduction d'un modèle chaos-stochastique avec des corrélations conditionnelles dynamiques. Ce modèle original permet de mettre en évidence une intensification des relations en temps de crise et offre, contrairement aux modèles DCC-GARCH standards<sup>60</sup>, un complément d'informations sur l'interaction des agents et la nature des impacts mis en évidence.
  
- \* une analyse unifiée des régimes de volatilité : en amendant le modèle de Haas et Liu(2014) par une partie chaotique, nous mettons en exergue les différents régimes de volatilités, les structures de corrélations et l'interaction des agents.

---

60. Une présentation détaillée de ces modèles est fournie dans l'annexe C.7.1.

Cette double approche constitue un apport dans les deux problématiques des 'correlations breakdowns'.

Dans un souci de cohérence, l'application empirique porte sur les pays GIPSI (Grèce, Italie, Portugal, Espagne et Irlande), la France et l'Allemagne. L'exemple de ces pays est pertinent à plusieurs niveaux : ils sont ceux qui ont été fortement touchés par la crise des dettes souveraines, ils partagent une monnaie unique et à ce titre, ils peuvent être victimes des choix stratégiques des investisseurs. En effet, d'aucuns estiment que la crise économique et financière des GIPSI est principalement liée au surplus de taux d'intérêt qu'ils doivent payer comparativement à l'Allemagne, pays de référence. Ainsi le schéma serait inversé, la crise financière résulterait d'une crise économique caractérisée par 3 principaux éléments :

- \* La compétitivité extérieure des pays GIPSI est plus dégradée que celle des autres pays de la zone euro.
  
- \* La demande interne chute plus rapidement dans ces pays que dans les pays voisins.
  
- \* Du fait de la monnaie unique, les politiques des taux d'intérêt et des taux de change seraient inadaptées à ces pays, souvent plus sensibles au niveau des différentes monnaie (\$, £) par rapport à l'euro<sup>61</sup>.

L'analyse porte sur les principaux indices boursiers de ces pays sur une période allant du 28/11/2003 au 28/11/2012. Nous débutons notre analyse par une étude préliminaire des caractéristiques économiques et économétriques des indices boursiers. La modélisation de ces derniers et les capacités prédictives des modèles sont évaluées dans une deuxième section. Enfin, la dernière partie propose une double analyse des relations bivariées des principales places boursières de la zone euro.

---

61. Ces différents éléments ne s'appliquent pas uniformément aux GIPSI. Ainsi, l'Italie n'a pas pâti des taux bas pratiqués par la BCE entre 2003 et 2007.

### 3.1 CARACTÉRISTIQUES DES INDICES DE LA ZONE EURO : UNE ANALYSE ÉCONOMIQUE ET ÉCONOMÉTRIQUE

Le choix des pays GIPSI, de l'Allemagne, et de la France réside dans la spécificité de ces pays, partageant une monnaie commune avec des politiques budgétaires et fiscales indépendantes. Leur situation est intéressante à divers points de vue surtout lorsqu'on constate l'impact du choix du pays qui se porte le mieux économiquement (Allemagne) sur ses voisins. La politique monétaire mise en place au sein de la zone euro ne peut être favorable à tous les pays auxquels elle s'applique et l'impact sur les marchés financiers est différent selon le pays.

La volatilité d'un indice boursier est intrinsèquement liée à la part des actifs bancaires inclus dans l'indice. Une analyse préliminaire sur les relations entre indices et titres bancaires, fournie dans l'annexe C.1.1., permet de constater l'existence de spécificités nationales :

- \* elle met en exergue deux types d'économies : les pays de l'Europe du Sud (Grèce, Portugal, Italie et Espagne) sont marqués par une part des actifs bancaires relativement importante (près d'un tiers) comparativement aux pays dits de l'Europe du Nord (France, Allemagne, et Irlande ( $\leq 10\%$ ))
- \* en dehors de l'indice allemand, nous relevons de fortes corrélations entre indice et titres bancaires. Nous notons deux situations particulières : l'isolement de l'indice allemand qui n'est que faiblement corrélé avec les autres indices mais aussi avec les titres bancaires européens. La particularité de l'indice espagnol, corrélé avec seulement 40% des titres bancaires européens, révèle une intégration partielle de l'indice IBEX au sein des marchés financiers européens. Une analyse plus détaillée des corrélations entre indices boursiers est présentée dans les sections suivantes.

Il est à noter que l'indice allemand est le seul à intégrer les dividendes, ce qui peut expliquer certaines divergences dans l'étude qui suit. L'analyse menée couvre la période du 28/11/2003 au 28/11/2012. Ce choix s'explique par la volonté d'intégrer à la fois des périodes de calme (2003- mi 2007), de crise

(2007-2011) et de reprise (2011-2012). Par ailleurs, nous proposons une étude par sous-périodes qui met en évidence les caractéristiques économétriques des indices boursiers de la zone euro sur les périodes [2004-2006] & [2007-2009]. Dans un premier point, nous mettons en exergue les caractéristiques économétriques des différentes séries temporelles retenues sur la période complète et les sous-périodes. L'intérêt de cette analyse est de mettre en évidence les structures qui composent les différentes séries temporelles afin de proposer le(s) modèle(s) le(s) plus adéquat(s). Dans un deuxième point, nous effectuons une analyse préliminaire sur les différents indices pour détecter d'éventuelles co-dépendances et identifier la nature des dynamiques observées.

### 3.1.1 STRUCTURES ET CARACTÉRISTIQUES DES INDICES EUROPÉENS

L'étude d'une série temporelle doit mettre en évidence les caractéristiques et les structures qui la composent. Cette analyse doit être menée minutieusement de telle sorte à ne pas conclure trop rapidement sur la nature des structures existantes. La première étape consiste en une description de l'évolution de la série temporelle pour détecter la présence d'un trend, d'une saisonnalité ou d'une rupture. Cette première analyse, essentiellement visuelle, s'accompagne d'une étude des statistiques descriptives de la série temporelle. Une analyse plus précise de l'existence de structures saisonnières est menée au moyen de tests statistiques. L'étape suivante concerne l'étude de la stationnarité. Il s'agit de vérifier, au moyen de tests appropriés, la stationnarité au sens faible. C'est une étape délicate dans la mesure où les premières informations obtenues à l'étape 1 conditionnent le choix du test de stationnarité. Or, ces informations, résultantes d'une analyse essentiellement visuelle peuvent être erronées et ainsi conduire à retenir un test non approprié. L'utilisation de plusieurs tests est alors recommandée. La troisième étape consiste en une analyse préliminaire de la série temporelle stationnarisée. C'est une étape facultative dans la mesure où elle n'est menée que si l'étape 2 a conclu sur une non-stationnarité de la série temporelle. Ces premières analyses permettent de travailler sur des séries temporelles faiblement stationnaires et désaisonnalisées. De manière à



identifier les différentes structures, une étude du caractère linéaire ou non du processus générateur de données est requise. Elle peut être menée au moyen de divers tests statistiques. Enfin, les caractéristiques stochastiques et chaotiques sont mises en évidence par un ensemble de tests. Cette dernière étape est très délicate dans la mesure où les conclusions qui en découlent orientent le choix du modèle. Or, la forte sensibilité des tests aux choix des valeurs des paramètres ou même la nature de la série temporelle considérée sont autant d'éléments qui peuvent conduire à retenir un modèle inadapté.

Nous proposons dans un premier point une analyse préliminaire qui met en exergue l'évolution des prix des différents actifs retenus, l'existence d'une éventuelle saisonnalité et le caractère (non)-stationnaire des séries temporelles retenues sur longue période. Une étude identique est menée sur les sous-périodes dans le deuxième point. Dans un troisième point, nous étudions le caractère non linéaire des différentes séries temporelles. Le dernier point vise à mettre en évidence les structures qui composent les différentes séries temporelles.

#### 3.1.1.1 ANALYSE ET TESTS PRÉLIMINAIRES SUR LA PÉRIODE [2003-2011]

L'analyse et les tests préliminaires constituent une étape importante dont l'objectif est double :

- \* du point de vue économique, il s'agit de mettre en évidence le comportement des différentes séries temporelles retenues, notamment dans les périodes dites de crise et d'euphorie. Il s'agit, bien entendu, d'un aspect purement descriptif qui peut révéler certaines similarités entre les indices ;
- \* du point de vue économétrique, l'objectif consiste à analyser l'existence d'une composante saisonnière ou d'un extrasaisonnier. L'analyse de la stationnarité au sens faible est tout aussi primordiale et est menée au moyen de différents tests.

Nous proposons dans un premier point une analyse de l'évolution des prix des indices européens. Dans un deuxième point, nous menons une étude de la saisonnalité et de la stationnarité des différentes séries temporelles.

### 3.1.1.1.1 Analyse descriptive des prix

L'évolution des indices sur la période retenue est donnée dans le graphique 55 de l'annexe C.1.2.1. Sur ces graphiques, nous identifions clairement une rupture qui se situe à la fin de l'année 2008, en plein cœur de la crise des subprimes. Avant cette date clé, la plupart des séries est caractérisée par une montée plus ou moins importante jusqu'en mi-2007 avant une succession de baisse jusqu'au point de rupture. Après la date de rupture, nous notons une reprise timide pour la plupart des actifs. Les différentes séries de prix sont marquées par une forte volatilité. En niveau, l'indice SP est beaucoup plus important que les autres indices mais ils sont tous caractérisés par une évolution similaire.

Une analyse plus précise, pays par pays, révèle des comportements différents. En ce qui concerne l'indice français, les trois phases précédemment décrites sont assez visibles. Une comparaison des indices français et allemand révèle un comportement quasi-symétrique en termes de variation même si la période après-crise est marquée par un creusement de l'écart entre ces deux indices. La comparaison de ces deux indices avec l'indice irlandais montre l'impact violent de la crise sur ce dernier. En effet, sur la période [2004-2007], l'indice ISEQ est marqué par une évolution croissante qui le situe à la tête du peloton formé avec la France et l'Allemagne. En moins de 2 ans, l'indice ISEQ perd 80% de sa valeur, là où les indices allemand et français enregistrent des pertes autour de 50-60%. À l'image de l'indice français, l'indice irlandais est marqué par une reprise plutôt faible comparativement à l'indice allemand qui a, depuis février 2009, augmenté sa valeur de 98% alors que les indices français et irlandais l'ont augmenté respectivement de 35% et 70 %.

La comparaison des indices allemand, français, irlandais et espagnol indique que la dynamique de ce dernier est assez semblable à celle du DAX. Ils sont tous les deux marqués, dans des proportions variables, par un épisode de croissance jusqu'en octobre 2007 avant une petite chute entre octobre 2007 et janvier 2008 puis une croissance des prix entre janvier et mai 2008 avant l'effondrement des deux indices pendant la crise des subprimes qui a conduit à une chute de 50% de l'IBEX. Cette symétrie se retrouve durant la période après-crise marquée par une croissance des prix en tendance et quelques épisodes de chute que

l'on retrouve sur les deux indices. L'indice ATHEX est marqué par une phase de croissance puis de décroissance durant la crise des subprimes. La troisième phase, qui dure 7 mois, est marquée par une reprise des cours puis à nouveau par une chute.

L'indice PSI, à l'instar de l'indice espagnol, est caractérisé par une dynamique similaire à celle de l'indice DAX.

#### **3.1.1.1.2 Étude de la saisonnalité et de la stationnarité des prix**

L'analyse d'une série temporelle repose principalement sur l'algorithme de décomposition-reconstitution-prévision. La mise en œuvre de l'algorithme est conditionnée par l'étude préalable de la chronique afin de distinguer les différentes composantes qui la constituent. La première étape du traitement de la série chronologique consiste à étudier la présence éventuelle d'une saisonnalité. Pour cela, il existe une multitude d'instruments permettant de mettre en évidence cette caractéristique. En premier lieu, l'étude de la représentation graphique permet une première analyse visuelle des saisonnalités qui peuvent exister dans la série temporelle. Néanmoins, cette solution, qui n'a pas permis de mettre en évidence la caractéristique recherchée, est souvent abandonnée au profit d'analyses et de tests statistiques dits robustes. L'analyse du tableau de Buys-Ballot permet une étude plus fine du caractère saisonnier de la série et peut révéler une éventuelle saisonnalité journalière. Nous avons reporté dans le tableau 34 de l'annexe C.1.2.2.1. les pourcentages de valeurs maximales et de valeurs minimales en fonction des 5 jours de la semaine.

Nous constatons une inégalitaire répartition des valeurs maximales et minimales sur les 5 jours ouvrés. En effet, les indices retenus sont caractérisés par des pourcentages relativement importants des valeurs maximales et minimales pour le vendredi et le lundi. Ce résultat est symptomatique d'un effet week-end assez particulier puisque les valeurs extrêmes surviennent plus souvent avant ou après un week-end. Il est important de nuancer cette saisonnalité dans la mesure où les pourcentages observés ne sont pas assez importants pour révéler une saisonnalité rigide. En effet, si l'on considère qu'une répartition optimale

des valeurs les plus élevées et les plus faibles est de 20%, nous notons que ce seuil est largement dépassé pour la majorité des indices et ce, tous les vendredis. Existe-t-il pour autant un effet week-end qui permettrait à un investisseur de tirer un profit conséquent ? La réponse à cette question est très subjective. Il est difficile de considérer que cet effet, présent pour tous les indices retenus, constitue une composante saisonnière pour au moins deux raisons :

- \* la première est liée au fait que les lundis et les vendredis sont caractérisés par une part des valeurs les plus faibles et les plus élevées importante. Autrement dit, il n'y a pas de mouvement répétitif caractéristique d'une saisonnalité mais plutôt une accentuation des mouvements du marché de la semaine les vendredis et les lundis.
- \* le caractère subjectif de cet instrument ne permet pas de confirmer ou d'infirmier une saisonnalité. La répartition optimale étant difficilement observable, il semble difficile de fixer un intervalle de variation des pourcentages en dehors duquel on pourrait conclure sur un effet saisonnier

Cette dernière raison est la principale motivation du choix de tests alternatifs et plus objectifs pour mettre en évidence une composante saisonnière.

Un autre test permettant de mettre en évidence une saisonnalité repose sur l'analyse de la variance. Laloire(1972) a développé deux tests permettant de mettre en évidence un effet période et un effet semaine. Ils sont présentés dans l'annexe C.1.2.2.2. L'analyse des 2 tests montrent l'absence d'une saisonnalité mais l'existence d'un extrasaisonnier pour une grande partie des séries temporelles considérées. La rigueur de notre analyse exige que la série brute soit épurée de tout extrasaisonnier quelle que soit sa nature, dans la mesure où celui-ci peut masquer la variance du vecteur colonne et par conséquent camoufler une éventuelle saisonnalité. Nous appliquons alors le test de Laloire sur les différences premières pour chaque série. Il en ressort la confirmation, à un seuil de 5%, de l'absence d'une composante saisonnière et d'un extrasaisonnier pour l'ensemble des indices.

Une étude de la stationnarité des différentes séries est menée par l'application des tests de racine unitaire de Dickey-Fuller(1981)[DF]<sup>62</sup>, de Kwiatkowski-

---

62. Dans l'application du test de Dickey-Fuller, nous retenons la procédure d'Hénin-Jobert.

Phillips-Schmidt-Shin(1992)[KPSS], d'Elliot-Rothenberg-Stock(1996)[ERS] et de Zivot-Andrews(1992)[ZA]<sup>63</sup>. Les résultats des différents tests sont donnés dans les tableaux 36, 37, 38, 39 de l'annexe C.1.2.3. Les tests standards (DF, KPSS et ERS) confirment la présence d'une racine unitaire pour tous les actifs retenus. Le test de Zivot-Andrews indique que toutes les séries de prix sont non-stationnaires (à 10%).

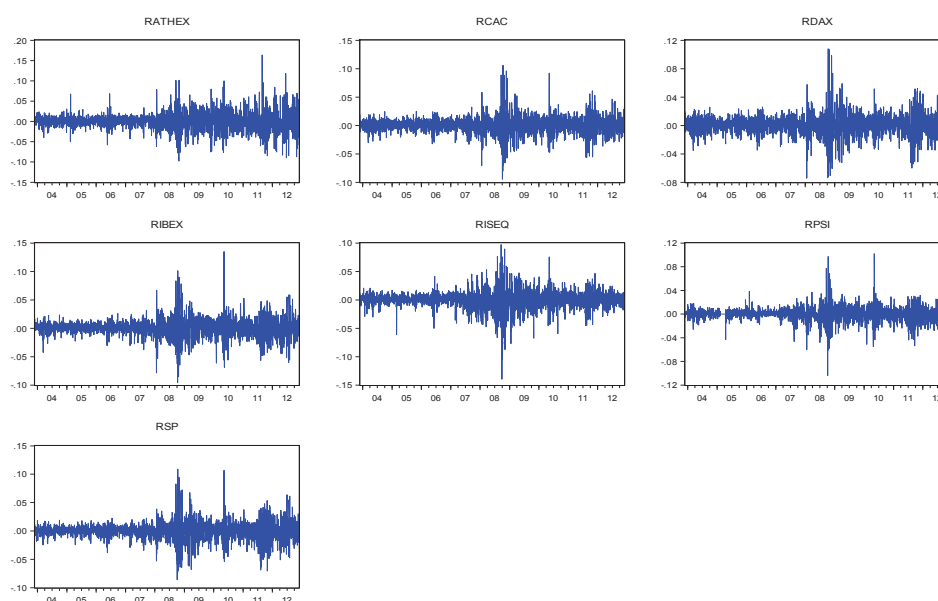
De manière à stationnariser les différentes séries temporelles, nous retenons les différences premières du logarithme des prix qui correspondent approximativement aux rentabilités financières. Le graphique 30 représente les séries de rentabilités. Elles font état de 2 situations bien différenciées : la première est caractérisée par une faible volatilité, elle concerne la période pré-crise tandis que la seconde est marquée par d'importants clusters de volatilité, symptomatique d'une crise. Les amplitudes de variations diffèrent beaucoup d'un actif à un autre. Contrairement aux analyses menées sur les prix, la troisième période dite de reprise est difficilement dissociable de la période de crise tant la volatilité sur cette période est importante. On retrouve des schémas de volatilité du type faible-importante-faible-importante. C'est le cas des indices DAX et CAC.

En réalité, il semble difficile à partir de ces graphiques d'identifier des périodes de crise dans la mesure où une période d'euphorie, caractérisée par d'importantes fluctuations comporte tout aussi bien des clusters de volatilité. Tout ce que l'on peut dire concerne uniquement la variation des prix qui, lorsqu'elle est importante est schématisée par des grappes aussi importantes. Une analyse des statistiques descriptives sur les prix, reportées dans le tableau 2 confirme les amplitudes particulières des différents indices tandis que les statistiques sur les rentabilités du tableau 2 montrent des caractéristiques communes, à savoir une distribution leptokurtique, asymétrique et non normale.

---

63. Si les premiers sont des tests standards de détection de racine unitaire et de stationnarité, le test ERS et surtout le test de Zivot-Andrews semblent plus adaptés à des séries pouvant comporter des ruptures. Le test de Seo(1999) aurait pu être appliqué mais les résultats de Charles et Darné(2009) montrent l'inefficacité d'un tel test face au test de Dickey-Fuller lorsque la somme des paramètres estimés  $\alpha$  et  $\beta$  d'un modèle GARCH est proche de 1 et que  $\beta > \alpha$ .

Sur le plan économique, l'évolution des prix des différents indices est assez similaire même s'il faut tenir compte des proportions dans les pertes et les gains qui révèlent finalement l'impact inégal des crises sur ces indices. Sur le plan économétrique, il faut relever une certaine homogénéité : les prix des indices sont, pour la plupart caractérisés par un extrasaisonnier. Le recours aux différences premières de ces prix permet de supprimer cet extrasaisonnier et confirme l'absence d'une composante saisonnière. Les tests de stationnarité indiquent la présence d'une racine unitaire et le passage aux différences premières des logarithmes des prix permet d'obtenir des séries temporelles faiblement stationnaires. L'analyse des statistiques descriptives montre des résultats similaires et caractéristiques des séries temporelles financières, à savoir, une leptokurticité, une asymétrie et une non-normalité des rentabilités.



Graphique 30 – Rentabilités des indices Européens

|                         | Moyenne   | Std. Dev. | Skewness  | Kurtosis | Jarque-Bera | Probabilité |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|-------------|-------------|
| Séries des prix         |           |           |           |          |             |             |
| ATHEX                   | 1384,609  | 752,9797  | 0,127639  | 1,878647 | 129,4494    | 0           |
| CAC                     | 4127,494  | 848,5337  | 0,635503  | 2,368146 | 197,1884    | 0           |
| DAX                     | 5838,552  | 1185,432  | -0,136274 | 1,956841 | 113,7762    | 0           |
| IBEX                    | 10493,93  | 2323,185  | 0,509526  | 2,389273 | 138,146     | 0           |
| ISEQ                    | 5036,714  | 2278,797  | 0,462115  | 1,881843 | 205,9756    | 0           |
| PSI                     | 8211,942  | 2142,141  | 0,72075   | 2,90134  | 204,3292    | 0           |
| SP                      | 27162,07  | 8783,744  | 0,169554  | 1,799242 | 152,3732    | 0           |
| Séries des rentabilités |           |           |           |          |             |             |
| RATHEX                  | -0,000572 | 0,021449  | 0,187616  | 7,563993 | 2051,646    | 0           |
| RCAC                    | 1,11E-05  | 0,014634  | 0,062559  | 10,00529 | 4802,608    | 0           |
| RDAX                    | 0,000287  | 0,014154  | 0,040548  | 9,915897 | 4679,975    | 0           |
| RIBEX                   | 3,30E-05  | 0,015242  | 0,11885   | 10,51527 | 5531,084    | 0           |
| RISEQ                   | -0,000156 | 0,015761  | -0,583595 | 10,56724 | 5735,528    | 0           |
| RPSI                    | -9,87E-05 | 0,011931  | -0,126959 | 12,98685 | 9763,928    | 0           |
| RSP                     | -0,00024  | 0,015434  | -0,044347 | 9,174745 | 3730,908    | 0           |

Tableau 2 – Statistiques descriptives

### 3.1.1.2 ÉTUDE DE LA NON-LINÉARITÉ

La mise en évidence de structures non linéaires est une étape importante dans l'analyse des séries temporelles. Elle vise à justifier le recours à des modèles plus complexes, capables de générer des structures particulières. La remise en cause de la nature linéaire des séries temporelles économiques et financières a rapidement conduit à un développement important de tests permettant de mettre en exergue la non linéarité.

Ramsey(1969) est l'un des premiers à proposer un test de non-linéarité, RESET (Regression Equation Specification Error Test), qui vise à tester la significativité des paramètres d'une équation de régression linéaire. Thursby et Schmidt(1977) proposent une extension de ce test en intégrant dans l'équation de régression le produit des variables explicatives et des transformées de ces mêmes variables. Les simulations menées montrent que les spécifications les plus performantes sont celles qui intègrent des puissances carré, cubique et quartique des variables explicatives. Thursby(2014) a, par ailleurs, montré, par des simulations de Monte Carlo, la puissance du test RESET pour détecter les erreurs de spécification et la robustesse de ce test à la présence d'autocorrélation.

Keenan(1985) amende le test RESET en utilisant les corrélations entre les erreurs prévues et les prévisions au carré. Tsay(1986) améliore le test de Keenan(1985) en recourant aux produits croisés des variables explicatives. Lee et al.(1993) généralisent le test RESET en introduisant des polynômes des prévisions pour contrôler la colinéarité. White(1989) et Lee et al.(1993) utilisent la méthode des réseaux de neurones pour détecter la non linéarité. Mais, Teräsvirta et al.(1993) montrent que ces tests ont une faible puissance dans une grande partie des cas considérés et qu'ils ne sont pas robustes à l'introduction d'une constante dans l'équation de régression.

Brock, Dechert et Scheinkman(1987) introduisent un test dont l'hypothèse nulle suppose une série i.i.d. contre une hypothèse alternative non spécifiée. C'est un test non paramétrique basé sur une intégrale de corrélation appelée



intégrale BDS. Parmi les alternatives possibles à l'hypothèse nulle du test BDS, la présence de structure de dépendance linéaire de type ARMA peut conduire au rejet du test BDS. C'est la raison pour laquelle Brock(1986) suggère de filtrer les séries préalablement au test BDS au moyen d'une modélisation de type ARMA. Ainsi, le rejet de l'hypothèse nulle du test BDS sur les séries filtrées de toute dépendance linéaire signifie que les séries sont issues d'un processus non linéaire (stochastique, chaotique ou chaos stochastique). Une présentation détaillée de ce test est donnée dans l'annexe C.1.2.4.2.

Nous appliquons les tests de Ramsey(1969) avec la spécification recommandée par Thursby et Schmidt(1977) et BDS aux différentes séries temporelles retenues. Ce choix est justifié par la volonté de mettre en évidence le caractère non linéaire des séries temporelles par des tests dont l'hypothèse alternative est aussi large que possible<sup>64</sup>.

Le tableau 40 de l'annexe C.1.2.4.1. récapitule les résultats obtenus pour le test RESET en utilisant les puissances carré, cubique et quartique de la variable explicative. Soit  $Y_t$  les rentabilités de l'indice retenu. Nous estimons les 3 modèles suivant :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}^2 + \epsilon_t \quad (132)$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}^2 + \beta_2 Y_{t-1}^3 + \epsilon_t \quad (133)$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}^2 + \beta_2 Y_{t-1}^3 + \beta_3 Y_{t-1}^4 + \epsilon_t \quad (134)$$

Le tableau 40 de l'annexe C.1.2.4.1. donne les statistiques de Fisher calculées et les probabilités associées pour chaque modèle. Il ressort de ces résultats un rejet de l'hypothèse nulle de linéarité pour toutes les séries temporelles retenues.

Préalablement à l'application du test BDS, nous filtrons toute structure de type ARMA. Nous donnons dans le tableau 41 de l'annexe C.1.2.4.2.2. les différents filtres retenus pour chaque série de rentabilités. Nous faisons varier  $\epsilon$  comme l'ont préconisé Brock et al.(1987). Les tableaux 42 à 45 de l'annexe C.1.2.4.2.2.

---

64. Nous ne retenons pas les tests de (non)-linéarité qui visent à vérifier sous l'hypothèse alternative un modèle non-linéaire spécifique. Il en est ainsi des tests de Tsay(1989) et de Hansen(1996) qui, sous l'hypothèse alternative, visent à détecter un modèle avec changements de régime. Cette contrainte risque de conduire très souvent au rejet de l'hypothèse nulle de linéarité au profit de l'hypothèse alternative qui n'est pas forcément vérifiée.

donnent les résultats de la statistique  $z$  du test BDS<sup>65</sup> à comparer à la valeur de la loi normale centrée réduite à 95%, soit 1,96. Nous notons que dans tous les cas, la statistique  $z$  est supérieure à 1,96. Par conséquent les différentes séries des rentabilités ne sont pas i.i.d.

Compte tenu de ces résultats, nous pouvons conclure sur un processus générateur de données non linéaire. En filtrant toute dépendance non linéaire de type ARMA, l'hypothèse d'un processus non linéaire se dessine et les nombreuses alternatives doivent être testées. Ces séries sont donc caractérisées par une non-linéarité dont la nature reste à déterminer.

### 3.1.1.3 STRUCTURES NON LINÉAIRES DES INDICES EUROPÉENS

Les conclusions des tests de linéarité de la section précédente ne permettent pas d'identifier clairement les structures non linéaires qui caractérisent les séries temporelles financières retenues. Aussi, une analyse économétrique des caractéristiques les plus souvent rencontrées est menée par l'application de tests spécifiques. L'analyse des faits stylisés des séries temporelles financières permet de mettre en évidence deux caractéristiques particulièrement fréquentes :

- \* l'autocorrélation
- \* l'hétéroscédasticité

La première traduit la dépendance des rentabilités dans le temps. Elle peut être mise en évidence par un test statistique et nous retenons les tests de Ljung-Box et de Box-Pierce. La seconde porte sur l'inégale variation des rentabilités et les grappes de volatilités que l'on peut identifier graphiquement. Nous retenons les tests de Engle(1982) et de Li et McLeod(1983) pour mettre en évidence cette caractéristique. Ces deux premières caractéristiques sont très classiques. Il existe d'autres structures que l'on peut mettre en évidence dans les séries temporelles financières. Nous analysons la présence de structures à mémoire longues qui peut avoir un impact non négligeable sur le choix final des modèles à retenir. Nous testons aussi la présence de structures chaotiques.

---

65. La statistique  $z$  doit être prise en valeur absolue.

### 3.1.1.3.1 Autocorrélation et structures hétéroscédastiques

Un des faits stylisés les plus répandus des séries financières porte sur la présence d'effets ARCH. Cette caractéristique témoigne de la forte et inégale volatilité des séries financières qui peut être interprétée comme le résultat d'une confrontation entre plusieurs types d'investisseurs (fondamentalistes, chartistes,...) sur le marché. Il existe une multitude de tests qui visent à mettre en évidence la nature hétéroscédastique d'une série temporelle. Ils se distinguent selon la variable supposée à l'origine de ce phénomène. En économétrie financière, le test ARCH, développé par Engle(1982) est l'un des plus utilisés. Nous proposons de mettre en évidence la forte et inégale variabilité des séries temporelles retenues au moyen des tests de Engle(1982) et de Li et McLeod(1983).

Le tableau 46 de l'annexe C.1.3.1. présente les résultats du test ARCH effectués sur chaque série des rentabilités. Nous avons fait varier le retard (2, 5, 10, 15, 20) et il ressort de ce test que tous les indices retenus comportent un effet ARCH. Cette hypothèse est largement validée dès les premiers retards. Le test de Li et McLeod (1983) est appliqué aux différentes séries (▷ Graphique 56- Annexe C.1.3.2.). Nous notons que pour la plupart des séries, les p-values correspondantes à ce test sont en dessous du seuil de 5% . Cela indique que ces différentes séries sont caractérisées par une hétéroscédasticité conditionnelle.

En ce qui concerne l'autocorrélation, les résultats du tableau 47 de l'annexe C.1.3.3. montrent qu'une grande partie des indices sont caractérisés par de l'autocorrélation. Étant donné l'hypothèse implicite d'homoscédasticité du test de Ljung-box, nous donnons dans le tableau 48 de l'annexe C.1.3.3., les résultats du test de Box-Pierce pour les retards 2, 5, 10, 15 et 20. L'intérêt de ce test réside dans sa robustesse en présence d'hétéroscédasticité. Il ressort de ces résultats une confirmation des résultats du test de Ljung-Box.

### 3.1.1.3.2 Dépendance de long terme

Une autre caractéristique souvent observée dans les séries temporelles finan-

cières est liée à la lente décroissance de la FAC, symptomatique de la présence de structures à mémoire longue. Depuis les travaux de Hurst(1951), la détection de ces structures a connu un engouement particulier. En témoignent les différents tests développés, sans exhaustivité : la statistique R/S (modifiée), le test GPH, le test GSP de Robinson(1995) et leurs nombreux amendements. D'aucuns estiment que les faiblesses des ces tests et les difficultés à identifier les dépendances de long terme peuvent être palliées par l'analyse des propriétés d'un processus à mémoire longue. Ainsi, Shimotsu(2006, 2010) propose un cadre statistique permettant de distinguer une série temporelle caractérisée par une dépendance de long terme d'une série temporelle caractérisée par des structures fallacieuses qui peuvent conduire à accepter à tort l'hypothèse nulle de structure de dépendance de long terme<sup>66</sup>.

Nous proposons d'étudier l'existence de structures à mémoire longue dans les rentabilités au moyen des tests GPH et GSP. Nous analysons par les tests de Shimotsu(2006,2010) la présence éventuelle de structures de dépendances dans les rentabilités et la volatilité en retenant comme approximation de celle-ci les rentabilités au carré.

L'application du test GPH requiert la fixation du paramètre  $m$ . Il est recommandé de retenir un nombre  $m = \sqrt{T}$  où  $T$  est le nombre total d'observations. Le test consiste à calculer le paramètre fractionnaire  $d$ , le ratio de Student (Tasy) et la probabilité asymptotique associée au test de significativité sur le paramètre  $d$  ainsi que le ratio de Student (Tols) et la probabilité associée du test de significativité sur un échantillon fini.

Les résultats du test GPH, reportés dans le tableau 49 de l'annexe C.1.4.1, montrent que tous les paramètres fractionnaires estimés sont inférieurs à 0,5. Les tests de significativité menés sur ces paramètres indiquent que l'hypothèse nulle de significativité du paramètre  $d$  est acceptée pour tous les actifs exceptés les indices ISEQ ( $d = 0.3$ ) et PSI ( $d = 0.21$ ). Avant de confirmer l'existence de structures à mémoire longue dans les différentes séries, nous retenons le test de Shimotsu(2006).

Le test de Shimotsu(2006) est appliqué sur les paramètres fractionnaires déterminés par la méthode de l'estimateur local Whittle (Shimotsu et Phillips(2005)).

---

66. Une présentation de ce test est fournie dans l'annexe A.6.3.3.4.

Il est nécessaire de fixer  $m$  et nous suivons les recommandations de Shimotsu(2006) en faisant varier ce paramètre de 200 à 800. Par ailleurs, le nombre de sous échantillons à construire est recommandé par Shimotsu(2006) à  $b = 2$  et  $b = 4$ . Nous avons reporté dans la table 50 de l'annexe C.1.4.2., les estimés  $\hat{d}, \bar{d}$  et la statistique de Wald calculée.

En comparant les statistiques de Wald calculées sur 2 et 4 sous échantillons aux valeurs respectives du  $\chi^2(1) = 3,84$  et  $\chi^2(3) = 7,82$  au seuil  $\alpha = 5\%$ , nous constatons que l'hypothèse nulle de constance du paramètre  $d$  est rejetée pour les indices ISEQ ( $m = 400$  &  $600$  et  $b = 4$ ) et PSI ( $m = 200$  &  $400$  &  $600$  et  $b = 2$  &  $4$ ). Ces premières observations sont à comparer aux résultats du test GPH qui avait détecté des paramètres  $d$  significatifs et supérieurs à 0 pour les indices ISEQ et PSI. L'hypothèse de mémoire longue est par conséquent rejetée pour les indices susmentionnés. L'existence de structures à mémoire longue peut être mise en évidence non seulement dans la moyenne mais aussi dans la variance.

Les résultats du test de Shimotsu(2006) sur la volatilité des indices, reportés dans le tableau 51 de l'annexe C.1.4.2., révèlent que seul l'indice ATHEX est caractérisé par un coefficient  $d$  constant, ce qui satisfait une des propriétés des processus à mémoire longue. Une analyse du paramètre fractionnaire de l'indice hellénique montre qu'il est relativement important. Afin de confirmer ou infirmer la présence de structures à mémoire longue pour cet indice, nous appliquons une version modifiée des tests de KPSS et de Phillips et Perron sur les séries intégrées d'ordre  $d$ <sup>67</sup>.

La deuxième partie du test de Shimotsu(2006) consiste à retenir les transformées fractionnaires des séries des rentabilités et des volatilités pour leurs appliquer 2 tests de stationnarité. Shimotsu(2006) a tabulé les valeurs critiques qui doivent être comparées aux valeurs calculées<sup>68</sup>. Le tableau 52 de l'annexe C.1.4.2. donne les résultats de ce test, uniquement pour l'indice ATHEX. Il en

---

67. Comme précisé dans l'annexe A.6.3.3.4., le test de Shimotsu(2006) se décompose en deux sous-tests. Il est entendu, ici, que les séries temporelles n'ayant pas validé le premier test ne sont pas soumises au second puisque l'hypothèse nulle n'est acceptée que si elle est validée par les deux tests.

68. Il n'est pas possible de retenir les statistique des tests de Phillips et Perron et de KPSS. Pour plus de précisions, voir Shimotsu(2006).

ressort le rejet de l'hypothèse de structure à mémoire longue pour cet indice. Ces résultats doivent être relativisés pour les raisons suivantes :

- \* la prudence de Shimotsu(2010) qui explique que le rejet de l'hypothèse nulle de structures à mémoire longue est à relier avec le constat de Granger et Hyung(2004) et Choi et Zivot(2007) qui suppose simplement qu'un processus  $I(d)$  ne peut pas expliquer toute la persistance de la série temporelle. Ainsi, le rejet de l'hypothèse nulle ne peut pas conduire à conclure sur l'existence de structures fallacieuses créées par des changements de régimes. Il faut interpréter ces résultats comme un rejet de l'hypothèse selon laquelle un processus à mémoire longue expliquerait parfaitement l'évolution des rentabilités ou de la volatilité.
- \* la deuxième raison qui nous pousse à nuancer ces résultats est liée aux choix des tests KPSS et de Phillips et Perron pour vérifier l'ordre d'intégration de la série. Le recours à ces tests suppose que la série temporelle est uniquement caractérisée par de l'autocorrélation. Or, dans le cas des séries temporelles financières, l'hétéroscédasticité et les changements de régimes constituent deux particularités souvent rencontrées. D'autre part, il existe une multitude de tests de détection de racine unitaire, applicables à des séries temporelles caractérisées par des dépendances de long terme (Lee et Amsler(1997), Su(1998) pour ne citer qu'eux).
- \* Par ailleurs, la procédure de test confronte un processus intégré fractionnaire d'ordre  $d$  et un processus fallacieux dont le comportement suggère des structures à mémoire longue et qui serait en réalité issu d'un modèle avec changements structurels. Bien que l'idée du test soit intéressante et apporte réellement un supplément d'analyse, la coexistence de structure de dépendance à long terme et de changements structurels ne peut être exclue. Nous retrouvons d'ailleurs cette nuance chez Shimotsu(2006).

Ces différentes raisons alimentent le doute sur la pertinence de ces résultats et nous invitent à une prudence quant à l'interprétation qui en découle.

### 3.1.1.3.3 Détection des structures chaotiques

La détection de structures chaotiques dans une série temporelle financière est, notamment à cause du bruit, une étape délicate dont les résultats peuvent être contestés. Afin de mettre en évidence l'existence de structures chaotiques, nous retenons les tests de Bensaïda(2012) et de Aparicio et al.(2011). Le choix de ces tests est dicté par leur caractère récent et l'absence de critiques dans la littérature.

Le test de Bensaïda(2012) vise à détecter des structures chaotiques et ce, même dans le cas de séries temporelles bruitées. L'absence d'études alternatives sur les performances de ce test nous contraint à une évaluation succincte. De manière à juger de la pertinence de ce test à pouvoir mettre en évidence de structures chaotiques bruitées par une partie stochastique, nous proposons de l'appliquer non seulement aux rentabilités des indices européens mais aussi aux simulations des modèles Mackey-Glass déterministes et bruités utilisées dans le chapitre précédent.

Le tableau 53 de l'annexe C.1.5.1. donne les résultats du test de Bensaïda(2012) appliqué aux séries empiriques. L'application de ce test a été menée en suivant les préconisations de Bensaïda(2012), notamment en ce qui concerne la fonction d'activation et le triplet (L, M, Q). La fonction tangente hyperbolique est retenue aux dépens de la fonction logistique et le triplet (L,M,Q) est déterminé de telle sorte à ce qu'il minimise le critère de Schwarz<sup>69</sup>. Le premier constat qui ressort des résultats sur données empiriques porte sur le rejet systématique de l'hypothèse nulle de structures chaotiques. Face à ce résultat, plusieurs pistes peuvent être envisagées :

- \* la première, et sûrement la plus simpliste, consiste à accepter ces résultats et conclure sur l'absence de structures chaotiques ;
- \* la seconde est liée aux recommandations de l'auteur qui insiste sur la nécessité d'avoir une faible part stochastique. En effet, Bensaïda(2012) explique que le test est valide tant que la variance du bruit reste modérée. Or, le choix de notre base de données inclut à la fois des périodes de

---

69. De plus, ce triplet ne peut excéder les valeurs optimales définies par Bensaïda(2012) à savoir (5,6,5).

stress extrême et des périodes marquées par une volatilité modérée. De ce constat, le rejet du test de Bensaïda(2012) semble approprié.

- \* la troisième piste repose sur un raisonnement ex-ante. La finalité de cette application empirique consiste à déterminer si les modèles de type chaos-stochastiques sont adaptés pour modéliser et prévoir les rentabilités financières. Pour cela, nous avons privilégié deux types de modélisations. Nous appliquons donc le test de Bensaïda(2012) aux simulations de ces modèles et aux données empiriques afin de mettre en évidence d'éventuelles similitudes. Face aux limites de ce test, cette dernière solution semble être la plus appropriée.

Le tableau 54 de l'annexe C.1.5.1. donne les pourcentages de rejet et d'acceptation de l'hypothèse nulle du test de Bensaïda(2012) en fonction de la série considérée (déterministe ou bruitée). Il semblerait que ce test rejette systématiquement l'hypothèse nulle de structures chaotiques pour les simulations de Mackey-Glass bruitées et accepte cette hypothèse dans seulement 15% des simulations de Mackey-Glass déterministe. Par comparaison, nous pouvons affirmer que les exposants de Lyapunov estimés par la méthode de Bensaïda(2012) sur nos données empiriques sont assez proches de ceux estimés sur les simulations du Mackey-Glass bruité.

Ces résultats sont en accord avec les caractéristiques du test de Bensaïda(2012). En effet, comme nous l'avons mentionné, la nécessité d'un bruit limité affaiblit considérablement l'efficacité de ce test. L'étude des performances du test de Bensaïda(2012) n'a pas été menée sur des modèles de type chaos-stochastique et surtout sur des modèles chaotiques à hautes dimensions. Ces insuffisances concourent à remettre en cause les conclusions de ce test et à proposer un test supplémentaire pour confirmer ou infirmer ces résultats.

Le deuxième test de détection de structures chaotiques que nous retenons est le test de Aparicio et al.(2011)<sup>70</sup>.

Aparicio et al.(2011) recommandent d'utiliser les tests modifiés qui prennent en compte le problème du plongement et ainsi, évitent tout problème de structures fallacieuses. Pour l'application de ces tests, nous retenons donc une dimension

---

70. Nous remercions Teresa Aparicio pour nous avoir fourni les programmes informatiques associés à ces tests.



de plongement  $m = 1$ , ce qui signifie que le test est appliqué aux différentes séries de rentabilités. Par ailleurs, la norme maximale est retenue. Enfin, le seuil  $\epsilon$  est déterminé en fonction de l'écart-type de la série temporelle. Il existe plusieurs règles pour déterminer ce seuil. Marwan et al.(2007) ont recommandé, pour des séries temporelles très bruitées, une valeur de  $\epsilon$  égale à 5 fois l'écart-type de la série temporelle. D'autres estiment que cette valeur doit représenter 10% de la moyenne ou doit être déterminée de telle sorte à garantir un pourcentage de récurrence supérieur à 10%. Les séries temporelles financières retenues mêlent à la fois des périodes de crise, d'euphorie et de calme. Ainsi, le critère de Marwan et al.(2007) semble inapproprié pour ce type de données et le choix d'une valeur de  $\epsilon$  trop grande peut créer des artefacts et ainsi produire un effet tangential motion.

Nous choisissons donc de retenir une valeur de  $\epsilon$  qui correspond à 80% de la valeur de l'écart-type de la série temporelle. Ce choix est un consensus entre :

- \* la nécessité de retenir une valeur de  $\epsilon$  ni trop grande, ni trop petite ;
- \* une valeur de  $\epsilon$  qui garantit un pourcentage de récurrence supérieur à 10% ;
- \* une valeur de  $\epsilon$  relativement importante pour pouvoir détecter, malgré tout, des points de récurrence.

Le tableau 55 de l'annexe C.1.5.2. donne les résultats du test de Aparicio et al.(2011), appliqué aux séries des rentabilités. Nous reportons dans ce tableau les indicateurs, les tests statistiques et les p-values pour les trois tests. Le premier constat que nous pouvons faire porte sur le rejet de l'hypothèse nulle pour toutes les séries. L'existence de structures déterministes dans les différentes séries temporelles est confirmée. Une analyse plus fine montre que les statistiques calculées pour chaque test sont relativement importantes, si bien que nous pouvons affirmer que l'hypothèse nulle de stochasticité pure sur les rentabilités est fortement rejetée. En effet, le pourcentage de déterminisme est supérieur à 70% pour toutes les séries temporelles considérées, ce qui laisse penser qu'il existe des structures déterministes dans ces données. Compte tenu du comportement particulier de séries temporelles financières, l'existence de structures chaotiques semble évidente.

Un autre constat intéressant à relever porte sur les indicateurs % DET,  $\bar{L}$  et ALL et leurs espérances. Nous notons que ces valeurs sont très proches pour toutes les séries temporelles retenues. Ce résultat est très important dans la mesure où il légitime le test de Aparicio et al.(2011) : en effet, ces tests révisés présentent la particularité de ne pas créer de structures fallacieuses par l'utilisation de la méthode des retards. Aparicio et al.(2011) ont montré que dans le cas où  $m$  est strictement supérieur à 1 alors la méthode de plongement crée des structures qui tendent à augmenter sensiblement la valeur des indicateurs % DET,  $\bar{L}$  et ALL.

Compte tenu des résultats des différents tests, nous retenons l'hypothèse de structures chaotiques pour les différentes séries temporelles financières. Ce choix est lié d'une part aux résultats de Aparicio et al.(2011) qui se sont basés sur des mesures définies dans le cadre du RQA et qui montrent l'existence de structures déterministes. D'autre part, les résultats similaires obtenus par le test de Bensaïda(2012) sur les simulations et les données empiriques nous encouragent à envisager la présence de structures chaotiques de type Mackey-Glass.

---

L'identification des dynamiques qui caractérisent les indices boursiers européens est essentielle pour la mesure et la prévision des risques financiers. L'économétrie temporelle a, au travers d'une multitude de travaux, mis en évidence un certain nombre de caractéristiques inhérentes aux séries temporelles financières. La pluralité de ces faits stylisés contraint le modélisateur à établir une procédure d'analyse afin d'identifier les différentes structures. Dans le cadre de cette application empirique, nous avons opté pour une procédure standard.

Dans la première étape, l'analyse graphique des prix a révélé des dynamiques relativement proches pour certains indices boursiers, notamment allemand et français mais aussi des disparités importantes. Les tests de racine unitaire mettent en évidence la présence d'une racine unitaire qui nous conduit à retenir les différences premières des logarithmes des prix. Ces rentabilités approximatives sont marquées par d'importants clusters de volatilité. Dans une deuxième étape, l'étude de la nature non linéaire des séries de rentabilités est

menée au moyen des tests RESET et BDS. Ces derniers concluent sur la nature non linéaire des séries de rentabilités. Les tests de Ljung-Box et de Box-Pierce mettent en évidence, pour la plupart des indices retenus, une autocorrélation et le test ARCH révèle la nature hétéroscédastique de ces séries temporelles. Les tests de mémoire longue de GPH et de Shimotsu(2006) confirment l'absence de dépendance de long terme. Les tests de détection des structures chaotiques de Bensaïda(2012) et de Aparicio et al.(2011) ne vont pas dans le même sens : le test de Bensaïda(2012) donne des exposants de Lyapunov négatifs et ce, même pour des simulations de modèles chaotiques. Le test de Aparicio et al.(2011) met en évidence un pourcentage de déterminisme non négligeable pour l'ensemble des séries temporelles considérées. Face à ces divergences, nous appuyons la thèse selon laquelle il existe des structures déterministes dans les indices boursiers européens qui peuvent être de nature chaotique.

Cette première partie met en évidence les caractéristiques économiques et économétriques des séries temporelles retenues. Elle révèle une certaine homogénéité, notamment sur le plan économétrique avec des caractéristiques communes aux séries temporelles financières, une non-linéarité du processus générateur de données marqué par une importante variabilité, de l'autocorrélation et la présence de structures déterministes.

### 3.1.2 ANALYSE DES CARACTÉRISTIQUES ÉCONOMÉTRIQUES DES SOUS-PÉRIODES

Les graphiques 57 et 58 présentés dans l'annexe C.2.1. donnent respectivement l'évolution des rentabilités sur les périodes [2007-2009] et [2004-2006]. À première vue, les rentabilités en période calme semblent moins volatiles notamment pour l'indice ISEQ. Rappelons que la variabilité extrême des rentabilités n'est pas une caractéristique exclusive des périodes fastes, il n'est donc pas surprenant d'avoir des séries temporelles plus volatiles en période d'euphorie qu'en période de crise : c'est le cas de l'indice SP. Une différence notable entre ces deux périodes porte sur l'homogénéité des variations : en période de crise, les actifs les plus mouvementés sont marqués par des clusters de volatilité très

importants alors qu'en période calme, la variabilité est presque homogène sur toute la période, on ne distingue pas de clusters de volatilités.

L'analyse des statistiques descriptives, données dans le tableau 56 de l'annexe C.2.2, révèle :

- \* sur la période stressée : une moyenne des rentabilités négative pour toutes les séries temporelles, un écart-type relativement élevé comparativement aux périodes calme et complète, notamment pour les indices ATHEX et ISEQ. Les indices DAX, IBEX, CAC et SP sont caractérisés par un risque un peu moins important. Par ailleurs, une grande partie des indices sont marqués par une leptokurticité plus modérée que sur toute la période ;
- \* sur la période calme : une forte asymétrie à gauche pour tous les actifs excepté l'indice ATHEX ; une leptokurticité très importante ; une moyenne positive et un écart-type plus faible par rapport aux deux autres échantillons.

Nous appliquons sur les 7 actifs retenus les tests ARCH et de Ljung-box afin de mettre en évidence d'éventuelles structures hétéroscédastiques ou de l'autocorrélation. Il ressort de ces résultats, reportés dans les tableaux 57 et 58 de l'annexe C.2.3., que sur la période 2004-2006, l'indice PSI est non autocorrélé et homoscedastique. Sur cette même période, les indices CAC, DAX, IBEX, ISEQ et SP sont non autocorrélés. Pour des raisons évidentes liées à la longueur des échantillons retenus, il est inutile d'appliquer des tests de mémoire longue et de détection de structures chaotiques.

### 3.1.3 RUPTURES DES CORRÉLATIONS : ANALYSE PRÉLIMINAIRE

L'analyse empirique que nous proposons porte sur les 7 principaux indices de l'Union Économique et monétaire : l'Allemagne (DAX 30), la France (CAC 40), l'Italie (SP 40), l'Espagne (IBEX 35), l'Irlande (ISEQ), le Portugal (PSI 20) et la Grèce (ATHEX 20). Si les relations économiques qu'entretiennent ces pays entre eux sont indiscutables, il semblerait que la nature des liens qui lie les principales places boursières de ces pays est plus floue. Aussi, nous clarifions ces relations par différentes méthodes utilisées dans la dernière section de ce

chapitre. De manière à identifier les relations susceptibles d'être décrites par un modèle en sous-échantillon ou par une approche unifiée, nous menons une analyse préliminaire.

Le premier instrument utilisé-et le plus discutable- est le coefficient de corrélation linéaire. Nous donnons dans la table 3, les coefficients de corrélations linéaires estimés sur toute la période considérée. Nous identifions 7 relations caractérisées par une forte corrélation ( $\geq 0.9$ ). Elles concernent 4 pays en particulier : Grèce, France, Portugal et Italie. L'indice français est fortement corrélé à l'indice hellénique, portugais et italien et ces deux derniers sont fortement corrélés à l'ATHEX. Par ailleurs, les indices portugais et italien sont fortement corrélés respectivement aux indices irlandais et espagnol. Ce constat est intéressant puisqu'il fait apparaître une dé-corrélation entre le moteur européen (l'Allemagne) et les autres pays de l'euro zone. Des relations secondaires (avec des coefficients de corrélation compris entre 0.8 et 0.9) existent entre l'indice hellénique et les indices espagnols et irlandais, ces derniers sont aussi bien corrélés avec le CAC. Nous notons donc une certaine interdépendance linéaire entre ces pays. Nous donnons dans le graphique 31 les corrélations conditionnelles bivariées déterminées par un estimateur EWMA (cf. légende graphique 31). Nous notons une intensification des corrélations de l'indice hellénique avec les autres indices Européens en temps de crise. Nous relevons des cas similaires pour les corrélations entre les indices DAX-PSI, IBEX-ISEQ, IBEX-PSI, IBEX-SP, ISEQ-PSI, ISEQ-SP et PSI-SP. À contrario, certains couples conservent des évolutions plus ou moins constantes sur toute la période. Il en est ainsi des indices DAX-CAC, DAX-SP, et dans une moindre mesure CAC-SP, CAC-IBEX entre autres. Ces deux mesures mettent en évidence des relations entre un certain nombre d'indices mais ne renseignent pas sur la nature des relations.

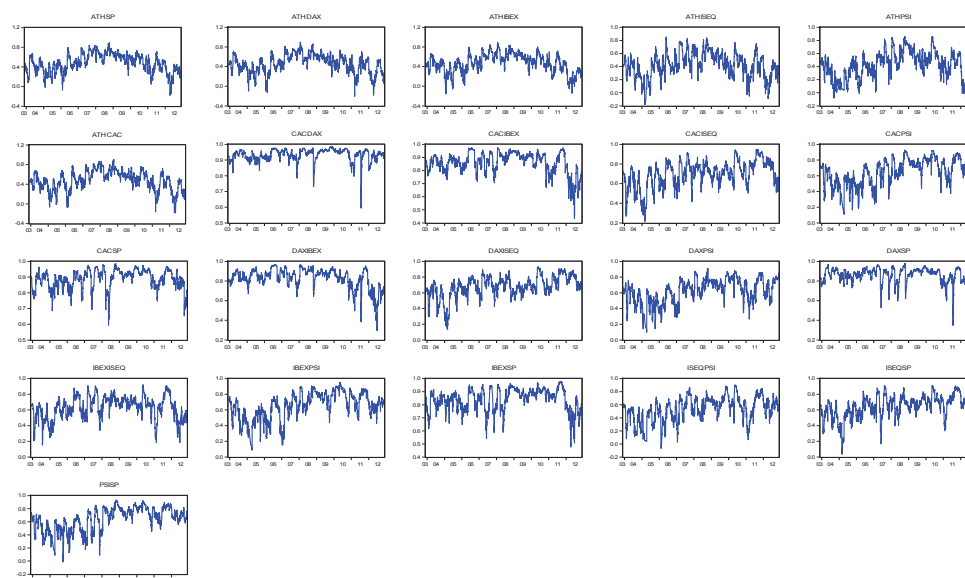
Afin de déterminer les relations qui seront mieux décrites par un modèle de type DCC-GARCH ou CCC-GARCH, nous recourons au test de Engle et Sheppard(2001). Pour le test d'Engle et Sheppard(2001)<sup>71</sup>, nous retenons deux

---

71. Le test d'Engle et Sheppard(2001) permet de déterminer le type de modèle à utiliser. Il teste l'hypothèse nulle de corrélations conditionnelles constantes contre l'hypothèse alternative de corrélations conditionnelles dynamiques.

|        | RATHEX | RCAC   | RDAX   | RIBEX  | RISEQ  | RPSI   | RSP    |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| RATHEX | 1      | 0,4952 | 0,4681 | 0,4857 | 0,4478 | 0,4968 | 0,4937 |
| RCAC   | 0,4952 | 1      | 0,9226 | 0,8769 | 0,7263 | 0,7512 | 0,9051 |
| RDAX   | 0,4681 | 0,9226 | 1      | 0,8079 | 0,6680 | 0,6855 | 0,8429 |
| RIBEX  | 0,4857 | 0,8769 | 0,8079 | 1      | 0,6589 | 0,7561 | 0,8640 |
| RISEQ  | 0,4478 | 0,7263 | 0,6680 | 0,6589 | 1      | 0,6100 | 0,6626 |
| RPSI   | 0,4968 | 0,7512 | 0,6855 | 0,7561 | 0,6100 | 1      | 0,7463 |
| RSP    | 0,4937 | 0,9051 | 0,8429 | 0,8640 | 0,6626 | 0,7463 | 1      |

Tableau 3 – Coefficients de corrélations linéaires



Graphique 31 – Corrélations EWMA

Nous donnons les corrélations conditionnelles déterminées par une covariance EWMA avec  $\lambda = 0.95$  (Alexander(2008)).

sous-périodes<sup>72</sup> : la première (du 28/11/2003 au 27/11/2007) est une période

72. L'application du test aux sous-périodes est liée à la finalité de l'exercice : les relations caractérisées par des corrélations conditionnelles dynamiques sont estimés par une double modélisation. À l'inverse, les

dite " calme " marquée par une croissance lente, la seconde (du 28/11/2007 au 25/11/2011) est une période de crise marquée par de forts mouvements erratiques sans tendance bien définie. Le test d'Engle et Sheppard(2001) [ $\triangleright$  Tableaux 59 & 60- Annexe C.3.] montre que certaines relations, détectées pour la période complète dans une étude préliminaire<sup>73</sup>, sont confirmées pour les 2 sous-échantillons. Il en est ainsi pour les relations DAX-CAC, DAX-SP, CAC-SP, et IBEX-SP. De nouvelles relations caractérisées par des corrélations conditionnelles dynamiques sont mises en évidence dans l'échantillon 2 pour la relation entre l'indice français et l'indice espagnol et dans l'échantillon 1 pour l'indice français et l'indice hellénique. Les couples d'indices, qui ne sont pas caractérisés par des corrélations conditionnelles dynamiques selon le test d'Engle et Sheppard(2001) sont modélisés dans le cadre d'une approche unifiée.

## 3.2 ÉVALUATIONS DES MODÉLISATIONS UNIVARIÉES (CHAOS)-STOCHASTIQUES DES INDICES DE LA ZONE EURO

L'identification de faits stylisés pour les séries temporelles financières permet une approche plus globale dans l'étude des mouvements de prix. Les caractéristiques communes fréquemment détectées dans les séries de prix ou des rentabilités ont fait l'objet d'une importante littérature qui s'est attachée à mettre en évidence ces similitudes et à proposer des modèles permettant de les prendre en compte. Ainsi, l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité sont deux caractéristiques très répandues dans les séries temporelles financières et d'aucuns proposent de rendre compte de ces faits via des modèles de type ARMA et ARCH respectivement. Il est entendu que les faits stylisés des séries temporelles financières ont été identifiés comme tels dans la mesure où ils sont fréquemment rencontrés. Il est tout aussi envisageable de disposer d'une série temporelle financière homoscedastique et non autocorrélée par exemple.

Dans le cadre de cette étude, nous avons, dans la section précédente, mis en

---

relations qui, sur l'ensemble de la période, sont caractérisées par des corrélations conditionnelles constantes sont prises en compte par une approche unifiée.

73. Les résultats de cette étude préliminaire sont reportés dans l'annexe C.3.

évidence les caractéristiques des indices européens. Il ressort de ces analyses un certain nombre de similitudes que nous avons détectées. Si l'universalité des faits stylisés mis en exergue pour les indices européens n'a pu être observée, la fréquence des caractéristiques pour un certain nombre d'indices révèle des comportements d'évolution des prix et des rentabilités similaires au sein de la zone euro. Étant donné les résultats peu concluants de l'analyse préliminaire, il apparaît nécessaire de recourir à plusieurs modélisations afin de mettre en évidence et de prendre en compte les caractéristiques des indices européens. Dans un souci d'équité scientifique, nous proposons de rendre compte de la volatilité par le modèle GARCH. Ce choix est un compromis entre plusieurs impératifs :

- \* mettre en évidence l'utilité ou non d'une modélisation chaotique en moyenne ;
- \* éviter à la fois d'avoir des paramètres de la variance négatifs et une pléthore de processus de type GARCH candidats pour rendre compte de la volatilité ;
- \* limiter au maximum l'utilisation de modèles non standards. En effet, la volatilité inhérente aux séries temporelles financières peut être le résultat d'une partie chaotique que l'on peut prendre en compte de manière erronée par un processus GARCH non standard.

Nous retenons six modèles sur l'ensemble de la période et trois modèles pour chaque sous-période. Sur les trois échantillons, nous estimons les modèles suivants :

- \* ARMA-GARCH (ARMAG) : c'est un modèle classique qui peut inclure ou non une partie ARMA. En effet, pour un certain nombre de séries, nous n'avons pas pu déterminer de processus ARMA significatifs et dans certains cas, l'utilisation d'une constante pour la moyenne s'avère inutile.
- \* Mackey-Glass-GARCH (MGG) : ce modèle chaos-stochastique nécessite la fixation des paramètres  $\tau$  et  $c$ . Nous donnons dans le tableau 4 les valeurs retenues.
- \* Lasota-GARCH(LAG) : il s'agit du second modèle chaos-stochastique que nous retenons et les valeurs de  $\tau$  et  $c$  retenues pour ce modèle sont données dans le tableau 4.



Il existe différentes méthodes pour fixer les paramètres  $\tau$  et  $c$ . D'aucuns estiment que le paramètre  $\tau$  peut être déterminé par la FAC ou le critère d'information mutuelle moyenne (AMI). En utilisant un de ces instruments, on peut alors déterminer  $\tau$  de telle sorte à ce qu'il minimise un de ces deux instruments. À partir de cette valeur et en utilisant la méthode des plus proches voisins, il est possible de déterminer  $c$ , la dimension du système. L'utilisation de ces différentes méthodes pour déterminer les paramètres  $\tau$  et  $c$  souffre d'un certain nombre de limites, mises en évidence dans le cadre de cette analyse. En premier lieu, la fixation indépendante de ces deux paramètres conduit à retenir des couples de valeurs de  $c$  et  $\tau$  non pertinents. Il ressort, dans la procédure d'estimation, un nombre important de modélisations dont les paramètres ne sont pas significatifs. Par ailleurs, le choix de ces paramètres ne repose pas sur un critère commun qui garantirait un choix optimal. Par conséquent, les paramètres  $\tau$  et  $c$  retenus pour l'estimation des modèles Mackey-Glass et Lasota résultent d'un balayage de différentes valeurs et nous retenons le couple de valeurs qui minimise le critère de Schwarz.

Dans le cadre de l'estimation sur la période [2004-2006], il apparaît que l'indice PSI est caractérisé par une variabilité constante. Aussi, nous ne retenons aucuns des trois modèles susmentionnés pour cet indice en période calme.

Trois modèles supplémentaires sont estimés sur la période [2003-2011]. Ils font intervenir pour l'équation de la variance une spécification Markov-Regime-Switching-GARCH (MRS-GARCH). Nous retenons les modèles :

- \* MRS-GARCH : ils définissent pour la moyenne une constante pour chaque régime ;
- \* LA-MRS-GARCH : ce type de modélisation fait intervenir une spécification de Lasota avec des paramètres  $\tau$  et  $c$  prédéfinis.
- \* MG-MRS-GARCH : nous considérons dans ce modèle une spécification Mackey-Glass en moyenne.

Contrairement aux trois modèles précédents, les spécifications chaotiques sont soumises à une procédure d'estimation en deux étapes : la première étape consiste à filtrer la partie chaotique et dans une seconde étape, nous modélisons les erreurs par un processus MRS-GARCH. Il s'agit là d'une procédure

consistante dans la mesure où les tests de significativité des paramètres du modèle chaotique sont recalculés pour tenir compte de la variance de l'erreur finale.

Nous commentons les résultats des procédures d'évaluation dans l'échantillon dans un premier point. Nous analysons, dans un deuxième point, les résultats relatifs à la prévision hors-échantillon.

### 3.2.1 MODÉLISATIONS (CHAOS)-STOCHASTIQUES DES INDICES DE LA ZONE EURO : UNE ÉVALUATION DANS L'ÉCHANTILLON

La palette des modélisations disponibles pour rendre compte des structures d'une série temporelle nous contraint à évaluer de manière pertinente et indépendante les différents modèles. Cette évaluation nécessaire est souvent menée sur la prévision hors-échantillon. Néanmoins, la pertinence d'un modèle doit aussi se juger sur sa capacité à intégrer les structures détectées dans l'analyse préliminaire : c'est tout l'intérêt d'une évaluation dans l'échantillon. Si cette dernière est incapable de renseigner sur l'aptitude d'un modèle à prévenir des pertes futures d'un indice boursier, elle est un complément d'informations non négligeable sur l'utilité des modèles retenus et sur l'adéquation de ces modèles aux résultats des tests préliminaires. Nous proposons de mener une évaluation dans l'échantillon pour les différents modèles retenus en tenant compte non seulement des caractéristiques statistiques mais aussi de la finalité de l'exercice, à savoir la pertinence des modèles dans l'estimation et la prévision d'une Value-at-Risk valide au sens de Christoffersen(1998). Nous commentons les résultats obtenus sur les 3 périodes retenues. Nous évaluons ensuite, par une approche statistique, les différents modèles retenus. Nous comparons les capacités des différents modèles à fournir une VaR valide dans un dernier point.

#### 3.2.1.1 RÉSULTATS D'ESTIMATION SUR LA PÉRIODE [2003-2011]

Les six modèles estimés sur cette période font apparaître des résultats différents en fonction de l'indice. Nous détaillons les modèles selon le processus utilisé pour la variance.

### 3.2.1.1.1 Les modèles incluant un processus GARCH(1,1)

Le tableau 4 présente les résultats de l'estimation des modèles ARMA-, LASOTA-, et MG-GARCH(1,1). Avant de détailler ces résultats, nous commentons le choix des modèles ARMA d'une part et des paramètres  $\tau$  et  $c$  d'autre part. Pour les modèles ARMA-GARCH, nous avons retenu 4 processus différents pour rendre compte de la dynamique en moyenne. Ainsi, nous avons choisi un processus AR(1) avec constante pour les indices PSI et CAC. L'indice hellénique est modélisé par un processus AR(2) avec constante, ce qui suppose que la dynamique en moyenne nécessite un délai un peu plus long pour réagir. Par ailleurs, plusieurs indices ne sont pas modélisés par un processus ARMA en moyenne. Il en est ainsi de l'indice DAX d'une part et les indices ISEQ, IBEX, et SP d'autre part. Les différents processus retenus sont principalement liés à des critères statistiques : la significativité des paramètres et l'existence de pics dans la FAC justifient amplement le choix de ces processus. La sélection de ces derniers est très standard dans la modélisation des rentabilités financières. L'analyse de l'équation de la variance révèle une adéquation du processus GARCH(1,1) pour rendre compte de la volatilité des indices retenus, renforcée par une somme des coefficients  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  proche de l'unité. Le tableau 4 donne aussi la sélection des paramètres  $\tau$  et  $c$  pour les modèles LAG et MGG. Une analyse des paramètres retenus pour le modèle LAG montre que plusieurs indices sont modélisés en retenant un couple  $(\tau, c) = (1, 1)$ . Cela suppose que les 4 indices européens (DAX, CAC, IBEX et PSI) sont singularisés par des dynamiques en moyenne faiblement complexes. En effet, le choix d'une dimension unitaire suppose que le modèle retenu pour l'équation de la moyenne n'est rien d'autre qu'une combinaison de processus autorégressifs. Ce constat est tout aussi valable pour l'indice ATHEX qui nécessite en plus un retard de deux pas de temps. Si l'on s'intéresse aux valeurs des paramètres  $\tau$  et  $c$  retenues pour le modèle de Mackey-Glass, nous notons que les indices DAX, IBEX et PSI sont aussi caractérisés par des valeurs de  $\tau$  et  $c$  unitaire. Pour ces indices, ces résultats indiquent une dynamique en moyenne non linéaire mais peu complexe qui peut résulter de l'existence de plusieurs régimes de dynamiques différentes et qui, lorsqu'elles sont modélisées sur une longue période se compensent. Il est

tout aussi possible d'envisager pour ces indices l'existence, quelle que soit la période considérée, d'une dynamique faiblement complexe et non linéaire qui est finalement bien décrite par une combinaison de processus stochastiques. Il est à noter que ces dynamiques, compte tenu de la valeur des paramètres  $\tau$  et  $c$  ne sont pas chaotiques. Il est à relever que les paramètres du délai et de la dimension peuvent se modifier en fonction du modèle. Ils sont identiques pour les deux modèles dans le cas des indices DAX, IBEX, PSI et SP. En ce qui concerne l'indice SP, il est à relever que les valeurs retenues sont typiques d'une dynamique chaotique à faible dimension, ce qui est assez cohérent avec des données financières. Néanmoins, nous ne retiendrons pas l'hypothèse de structures chaotiques pour l'indice SP étant donnée la non-significativité des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  pour les deux modèles. Pour l'indice français, la dynamique chaotique n'a pas pu être prise en compte dans le cas du modèle LAG malgré la significativité du paramètre  $\beta$  et  $\gamma$ . À contrario, dans le cas du Mackey-Glass, le couple  $(\tau, c)$  retenu permet d'envisager une dynamique chaotique en moyenne pour l'indice français. Ce résultat qui peut apparaître paradoxal se justifie par la nature de la dynamique chaotique : elle est explosive dans le cas du modèle LAG et plus mesurée dans le cas du modèle MGG. Autrement dit, nous ne pouvons envisager sur cette longue période une dynamique chaotique explosive du type Lasota pour les rentabilités de l'indice CAC.

Il est à noter que l'indice ISEQ n'est pas caractérisé en moyenne par une dynamique chaotique ou du moins, que les modèles retenus sont incapables d'en rendre compte. En effet, nous notons pour cet actif une significativité du paramètre  $\beta$  dans le cas du modèle LAG. Cette significativité partielle est révélatrice d'une dynamique non linéaire en moyenne puisque le paramètre  $\beta$  décrit principalement la partie non linéaire des modèles mais cette dynamique non linéaire et complexe ne peut être appréhendée par les modèles retenus.

Il est intéressant de relever des résultats quasi-identiques pour les équations de la variance des différents modèles. Cela révèle deux éléments en particulier :

- \* l'hétéroscédasticité qui résulte du filtrage des structures chaotiques est quasiment identique pour les deux modèles ;
- \* la volatilité résiduelle est bien décrite par un modèle GARCH(1,1) puisque tous les paramètres sont fortement significatifs.

Ces résultats sont à relativiser pour diverses raisons :

- \* plusieurs séries temporelles retenues sont bien décrites par les deux modèles qui, en termes de modélisations, ne rendent pas compte des mêmes structures. Dans le cas du modèle de Lasota, ces structures sont dites explosives. Aussi, il peut apparaître suspicieux qu'un modèle de Mackey-Glass puisse rendre compte aussi bien de ces dynamiques explosives ;
- \* ces premiers résultats se basent essentiellement sur la significativité des paramètres et une analyse plus poussée est nécessaire pour juger de la pertinence de ces modèles ;
- \* la période d'étude retenue est assez problématique car elle n'est pas assez longue pour mettre en évidence plus de structures chaotiques et en même temps, il semble plus intéressant de considérer une période plus courte et donc plus homogène. Cette période qui mêle à la fois des moments de volatilités extrêmes, modérés et faibles n'est pas sans conséquence sur les résultats ;
- \* enfin, il faut souligner que dans certains cas, l'équation en moyenne peut expliquer une part de l'hétéroscédasticité des séries et qu'à ce titre, il est difficile d'attribuer une partie de la volatilité aux structures existantes en moyenne ou en variance.

| Paramètres  | $\beta$   | $\gamma$ | $\alpha_0$       | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | LL       | $\tau$ | c |
|---|-----------|----------|------------------|------------|-----------|----------|--------|---|
| LAG   |           |          |                  |            |           |          |        |   |
| ATHEX   | -0,042*   | 0,041*   | $2e^{-06***}$    | 0,092***   | 0,909***  | 5630,453 | 2      | 1 |
| DAX   | -1,88*    | 1,87*    | $2,49e^{-06***}$ | 0,097***   | 0,89***   | 6323,39  | 1      | 1 |
| CAC   | -1,92*    | 1,875*   | $1,84e^{-06***}$ | 0,1***     | 0,89***   | 6318,59  | 1      | 1 |
| ISEQ  | 0,06*     | 0,56     | $2,11e^{-06***}$ | 0,103***   | 0,89***   | 6171,2   | 4      | 4 |
| IBEX  | 2,202**   | -2,2**   | $2,42e^{-06***}$ | 0,122***   | 0,87***   | 6322,18  | 1      | 1 |
| PSI   | -2,48**   | 2,54**   | $2,83e^{-06***}$ | 0,13***    | 0,85***   | 6814,78  | 1      | 1 |
| SP  | 1,32      | -0,02    | $1,45e^{-06***}$ | 0,102***   | 0,89***   | 6395,04  | 1      | 2 |
| MGG   |           |          |                  |            |           |          |        |   |
| ATHEX   | -0,04*    | 0,04*    | $1,99e^{-06***}$ | 0,092***   | 0,909***  | 5630,42  | 2      | 2 |
| DAX   | -1,90*    | 1,88*    | $2,49e^{-06***}$ | 0,097***   | 0,89***   | 6323,42  | 1      | 1 |
| CAC   | -0,05**   | -0,042*  | $1,81e^{-06***}$ | 0,09***    | 0,89***   | 6311,48  | 3      | 2 |
| ISEQ  | 14,96     | -14,9    | $2,13e^{-06***}$ | 0,101***   | 0,89***   | 6184,4   | 1      | 2 |
| IBEX  | -2,38**   | 2,39**   | $2,42e^{-06***}$ | 0,122***   | 0,87***   | 6322,6   | 1      | 1 |
| PSI   | -2,43**   | 2,49**   | $2,69e^{-06***}$ | 0,12***    | 0,86***   | 7604,48  | 1      | 1 |
| SP  | -0,41     | 0,39     | $1,45e^{-06***}$ | 0,102***   | 0,89***   | 6393,87  | 1      | 2 |
| ARMAG   |           |          |                  |            |           |          |        |   |
| Paramètres  | c         | $\phi$   | $\alpha_0$       | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | LL       |        |   |
| ATHEX   | 0,0009*** | -0,04*   | $2,08e^{-06***}$ | 0,093***   | 0,907***  | 5631,07  |        |   |
| DAX   | 0,001***  |          | $2,76e^{-06***}$ | 0,105***   | 0,88***   | 6326,73  |        |   |
| CAC   | 0,001***  | -0,05**  | $1,94e^{-06***}$ | 0,09***    | 0,89***   | 7064,85  |        |   |
| ISEQ  | 0,001***  |          | $2,18e^{-06***}$ | 0,11***    | 0,88***   | 6187,66  |        |   |
| IBEX  | 0,001***  |          | $2,48e^{-06***}$ | 0,128***   | 0,87***   | 6325,52  |        |   |
| PSI   | 0,001***  | 0,054**  | $2,83e^{-06***}$ | 0,14***    | 0,84***   | 6816,65  |        |   |
| SP  | 0,0003*   |          | $1,28e^{-06***}$ | 0,09***    | 0,903***  | 7075,96  |        |   |
| *** significatif à 1%; ** significatif à 5%; * significatif à 10% |           |          |                  |            |           |          |        |   |
| LL correspond au maximum de vraisemblance                         |           |          |                  |            |           |          |        |   |

Tableau 4 – Résultats des estimations des modèles (chaos)-stochastiques [2003-2011]

### 3.2.1.1.2 Les modèles incluant un processus MRS-GARCH(1,1)

Les impératifs liés à la définition d'un modèle adéquat nous conduisent à envisager l'existence de changements de régimes dans l'équation de la variance. Les modèles qui permettent de prendre en compte ces changements font l'objet d'une littérature dense et récente qui s'attache à détecter et modéliser un changement de régime. La nature de ce dernier constitue le principal discriminant des modèles développés dans la littérature. Nous avons opté pour des modèles à changements de régimes markoviens dont les avancées récentes suggèrent une performance particulière comparativement aux autres modèles existants. Sans exhaustivité, nous pouvons citer les travaux de Klaassen(2002), Gau et Tang(2004), Haas et al.(2004), Marcucci(2005), Sajjad et al.(2008) qui montrent l'efficacité relative des modèles de type MRS-G. Nous proposons donc de modéliser les indices européens par trois modèles incluant un processus GARCH à changements de régimes markoviens. Les résultats d'estimation sont donnés dans le tableau 5. Il en ressort plusieurs commentaires :

- \* L'estimation est menée sur une version modifiée des codes de Marcucci<sup>74</sup>(2005) qui propose de modéliser la volatilité par un processus MRS-G. Les paramètres sont estimés en utilisant le quasi-maximum de vraisemblance, calculé à partir de l'algorithme d'optimisation quasi-newtonien de Broyden et al.
- \* Le constat criant qui ressort du tableau 5 est l'absence de relations significatives. Quel que soit le modèle considéré, nous relevons un nombre important de modélisations non significatives. Ce résultat est lié à la méthode d'estimation. En retenant la méthode du maximum de vraisemblance, souvent utilisée dans le cadre des modèles de type MRS-G, nous nous confrontons au problème de Davies(1987). Ce dernier a étudié le problème d'inférence qui existe lorsqu'on est en présence d'un paramètre de nuisance sous l'hypothèse nulle. Plus précisément, ce problème apparaît lors des tests de significativité des paramètres. Sous l'hypothèse nulle de non significativité des paramètres, les probabilités de transition  $p$  et  $q$

---

74. Les codes en question sont disponibles sur la page personnelle de Juri Marcucci : <https://sites.google.com/site/jurimarcucci/publications/hints-for-mrsgarch-program>.

ne sont plus identifiables dans la mesure où sous cette hypothèse, nous supposons un modèle linéaire sans changements de régimes. Dès lors, le ratio de vraisemblance, le multiplicateur de Lagrange et les tests de Wald ne peuvent plus être comparés aux statistiques standards. Plusieurs travaux, notamment Garcia(1998), Hansen(1992) entre autres se sont intéressés aux solutions possibles au problème de Davies(1987). Néanmoins, il ressort des applications empiriques des modèles de type MRS-G un choix quasi-unanime qui fait abstraction des résultats de significativité des paramètres. Ces auteurs justifient leur démarche par la finalité de l'application, à savoir l'analyse des capacités prédictives de ces modèles.

Nous commentons les résultats obtenus par modèle.

#### 3.2.1.1.2.1 *Les modèles MRS-G*

Les résultats du modèle classique font état de plusieurs relations dont au moins un des paramètres de l'équation de la variance n'est pas significatif. Ce modèle n'a pu détecter de relations entre la variance en  $t$  du régime 1 et les innovations en  $t - 1$  du même régime pour les actifs IBEX, ISEQ, PSI, et SP. Un constat similaire sur le régime 2 peut être établi pour les actifs ATHEX, CAC, et DAX. Par ailleurs, les paramètres  $\beta_i$  associés à chaque régime sont non significatifs pour l'indice PSI.

Afin d'identifier la particularité de chaque régime, nous calculons les écarts-types conditionnels à chaque régime :

$$\sigma_i = \left( \frac{\alpha_0^i}{1 - \alpha_1^i - \beta_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (135)$$

où  $\alpha_0^i, \alpha_1^i, \beta_i$  désignent les paramètres relatifs à l'équation de la variance du régime  $i$ . Il ressort des résultats des tableaux 5 et 6 l'existence de deux régimes dont la caractéristique discriminante est le niveau de la volatilité. Ainsi, pour les actifs PSI, SP, IBEX, ISEQ, et ATHEX, le régime 1 est caractérisé par une faible volatilité alors que le régime 2 est fortement volatile. Pour les indices DAX et CAC, le régime 2 est moins volatile que le régime 1. Lorsque nous analysons la persistance dans chaque régime, nous constatons qu'elle est très



forte dans le régime 2 pour les actifs PSI, CAC, ATHEX, IBEX, et ISEQ. Elle est beaucoup plus importante dans le régime 1 pour l'indice allemand. Pour l'indice SP, la persistance dans le régime 1 est un peu plus élevée que dans le régime 2. Ces constats révèlent une mauvaise prise en compte de la persistance par les modèles GARCH spécifiques à chaque régime, notamment lorsque la somme des paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  n'excède pas 0.8. Finalement, ce modèle rend compte de manière satisfaisante de la persistance des deux régimes pour l'indice ISEQ. De plus, l'analyse des probabilités de transition p et q montre qu'elles sont hautement significatives et proches de 1, excepté pour l'indice PSI. Enfin, une analyse des probabilités inconditionnelles montre que la probabilité d'être dans le régime 2 pour les actifs IBEX, ISEQ, et PSI oscille entre 66% et 99%. Autrement dit, il existe une plus forte probabilité d'être dans un régime de forte volatilité pour ces actifs. Pour les indices DAX, ATHEX, CAC et SP la répartition des probabilités inconditionnelles est à peu près égale, ce qui traduit une bonne répartition des observations entre les deux régimes.

### 3.2.1.1.2.2 *Les modèles MG-MRS-G*

À l'instar du modèle précédent, nous relevons plusieurs paramètres non significatifs pour l'équation de la variance. Le modèle chaotique filtre de manière satisfaisante les structures en moyenne. Les spécifications MG-MRS-G ne donnent pas de résultats satisfaisants pour l'indice PSI, et dans une moindre mesure pour les indices IBEX, ISEQ, et DAX. Il n'est pas surprenant d'obtenir ces résultats dans la mesure où l'utilisation d'un modèle chaotique en moyenne conduit à une modification des structures en variance selon les paramètres retenus et la dynamique existante dans les rentabilités. Ainsi, nous constatons pour une grande partie des actifs susmentionnés le choix d'une dimension supérieure à 1 qui conduit inéluctablement le modèle à décrire une partie de la volatilité. Cela a pour conséquence un tassement de la volatilité qui ne permet pas dans certains cas d'identifier plusieurs régimes de volatilités homogènes. Par exemple, l'indice ISEQ a été filtré par le modèle Mackey-Glass avec une dimension de 2. Dans le modèle chaotique, le choix d'une dimension  $n = 2$

revient à inclure dans le modèle une proxy de la volatilité donnée par  $R_t^2$ . L'impact de ce choix est visible sur les résultats de l'équation de la variance : les paramètres relatifs à chaque régime apparaissent non significatifs mais le calcul des écart-types conditionnels à chaque régime révèle un régime de forte volatilité (le régime 1 pour l'indice ISEQ) et un régime de faible volatilité. Un autre impact du choix d'un modèle chaotique en moyenne est mis en évidence pour les indices ATHEX et IBEX. Il n'est plus possible de discriminer les deux régimes par le niveau de la volatilité puisque l'écart-type calculé sur chaque régime est statistiquement égal pour ces actifs.

Des éléments d'analyse intéressants sont donnés par les probabilités inconditionnelles. On distingue ainsi :

- \* un régime plus prépondérant pour les indices CAC, DAX, IBEX et SP qui enregistrent une probabilité inconditionnelle supérieure à 0,8 dans l'un des deux régimes. Cela révèle l'importance des régimes de fortes volatilités pour les actifs CAC, DAX et SP ;
- \* une répartition quasi-identique entre les deux régimes pour les indices ISEQ et PSI. Pour ces derniers, les données sont équitablement réparties entre un régime de forte volatilité et un régime de faible volatilité ;
- \* une répartition (2/3)-(1/3) pour l'indice ATHEX. Cette répartition perd tout son sens pour l'actif hellénique caractérisé par des régimes de volatilité quasi-identiques.

À titre d'illustration, nous donnons dans les graphiques 59 à 65 de l'annexe C.4 les variances associées à chaque régime, la variance totale calculée comme la somme pondérée des probabilités lissés des variances de chaque régime et les probabilités lissées. Nous relevons plusieurs éléments :

- \* la confirmation d'un régime plus prépondérant pour les actifs CAC, DAX, IBEX et SP dont les probabilités lissées associées à chaque régime sont cantonnées aux valeurs extrêmes. Cela indique une forte persistance de certains régimes notamment de forte volatilité ;
- \* les graphiques montrent bien la coexistence de deux régimes de forte et de faible volatilités notamment pour les indices SP, CAC, DAX, IBEX. Ce résultat n'est pas confirmé graphiquement pour les indices ATHEX, PSI,

ISEQ pour lesquels les variances des deux régimes sont caractérisées par des dynamiques relativement proches.

### 3.2.1.1.2.3 *Les modèles LA-MRS-G*

Pour les modèles de type LA-MRS-G, la non significativité des paramètres de l'équation de la variance s'explique aussi pour certains actifs par l'absence de deux régimes de variances distincts. Ainsi, nous constatons des écart-types statistiquement non différents pour les deux régimes pour les indices SP et CAC. Nous détectons l'existence de deux régimes de variance pour les indices ATHEX, ISEQ et PSI caractérisés par un régime de forte volatilité (régime 1 pour les actifs ISEQ et PSI) et un régime de faible volatilité (régime 1 pour l'indice hellénique). Par ailleurs, nous constatons une faible persistance dans les régimes. Ce résultat traduit la capacité limitée des spécifications MRS-G à rendre compte d'une volatilité particulière, résultante d'un filtre chaotique. Les probabilités inconditionnelles indiquent une prédominance du régime de forte volatilité pour les indices IBEX et PSI et du régime de faible volatilité pour l'indice DAX. Les graphiques 66 à 72 de l'annexe C.4.2. reportent les variances et probabilités lissées pour chaque indice. Il ressort de ces différentes figures deux groupes distincts :

- \* le premier caractérisé par des variances dans les différents régimes d'amplitudes proches et par conséquent, par des probabilités lissées oscillantes traduisant l'occurrence tantôt du régime 1, tantôt du régime 2 sans qu'il soit possible d'identifier catégoriquement la prédominance d'un régime. Il en est ainsi pour les indices ATHEX, ISEQ, PSI.
- \* le deuxième dont les régimes de variance sont caractérisés par un régime de très forte volatilité et un régime de très faible volatilité avec des probabilités lissées cantonnées aux valeurs  $[0; 0,2]$  et  $[0,8; 1]$ . Nous retrouvons dans ce groupe les indices DAX, CAC, IBEX, SP.

Une analyse comparative des résultats détaillés ci-dessus révèle :

- \* des similitudes entre les modèles chaos-stochastiques. Ils identifient les mêmes régimes de forte volatilité pour l'indice ISEQ ;

- \* un régime de très forte volatilité décrit par le modèle MRS-G relativement aux modèles chaos-stochastiques pour les indices CAC, DAX, IBEX, SP, et ATHEX qui accrédite la thèse selon laquelle les filtres chaotiques réduisent substantiellement la volatilité des rendements ;
- \* une identification unanime du régime de forte volatilité par les trois modèles pour les actifs ATHEX et IBEX.

| MRS    |              |             |                 |              |                 |                 |                 |            |                |            |        |   |
|--------|--------------|-------------|-----------------|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------|----------------|------------|--------|---|
|        | $\delta_1$   | $\delta_2$  | $\alpha_0^1$    | $\alpha_0^2$ | $\alpha_1^1$    | $\alpha_1^2$    | $\beta_1$       | $\beta_2$  | p              | q          |        |   |
| ATHEX  | 0,1534***    | -0,122***   | 0,499***        | 0,375***     | 0,0319***       | 0,0837          | 0,2988***       | 0,866***   | 0,99***        | 0,995***   |        |   |
| CAC    | -0,49***     | 0,146***    | 0,2708***       | 0,0355***    | 0,0659***       | $3,409e^{-09}$  | 0,927***        | 0,8609***  | 0,8569***      | 0,9366***  |        |   |
| DAX    | -0,2106***   | 0,2338***   | 0,1367***       | 0,0568***    | 0,0604***       | $6,4408e^{-09}$ | 0,9355***       | 0,7605***  | 0,9029***      | 0,895***   |        |   |
| IBEX   | 0,1698***    | -0,2185***  | 0,0664***       | 0,188***     | $2,1565e^{-09}$ | 0,0578***       | 0,739***        | 0,9356***  | 0,9098***      | 0,9187***  |        |   |
| ISEQ   | 0,13722***   | -0,33586*** | 0,05068***      | 0,3222***    | $5,331e^{-09}$  | 0,05016***      | 0,8119***       | 0,94138*** | 0,9356***      | 0,8922***  |        |   |
| PSI    | 9,7743***    | 0,0608***   | $6,2521e^{-10}$ | 0,0482***    | 0,1178          | 0,162***        | $9,0778e^{-09}$ | 0,796***   | $8,685e^{-07}$ | 0,997***   |        |   |
| SP     | 0,233***     | -0,0966***  | 0,0689***       | 0,064***     | $7,687e^{-09}$  | 0,0737***       | 0,498***        | 0,924***   | 0,8531***      | 0,96***    |        |   |
| MG-MRS |              |             |                 |              |                 |                 |                 |            |                |            |        |   |
|        | $\beta$      | $\gamma$    | $\alpha_0^1$    | $\alpha_0^2$ | $\alpha_1^1$    | $\alpha_1^2$    | $\beta_1$       | $\beta_2$  | p              | q          | $\tau$ | c |
| ATHEX  | 16,864***    | -16,77***   | $9,62E-10$      | $3,85E-09$   | 0,0348***       | 0,0284***       | $5,00E-09$      | 0,0838***  | 0,8981***      | 0,9496***  | 1      | 2 |
| CAC    | -207,9071*** | 207,85***   | $1,13E+00$      | 3,4333***    | $6,04E-09$      | $2,90E-02$      | $6,68E-03$      | 0,0911***  | $3,97E-02$     | 0,9525***  | 1      | 3 |
| DAX    | -119,62*     | 119,6*      | $1,01E+00$      | 3,6459***    | $6,65E-09$      | $4,23E-02$      | $9,64E-09$      | $1,03E-01$ | $6,92E-02$     | 0,9436***  | 1      | 3 |
| IBEX   | 16,58***     | -16,53***   | $6,02E-09$      | $7,20E-09$   | 0,0242***       | $6,79E-02$      | $1,03E-01$      | $2,13E-09$ | 0,9485***      | 0,1500***  | 1      | 2 |
| ISEQ   | 17,06***     | -16,98***   | 4,0130***       | $5,70E-09$   | $8,62E-03$      | $1,43E-01$      | $9,77E-09$      | $1,11E-01$ | 0,8909***      | 0,9001***  | 1      | 2 |
| PSI    | -0,825*      | 0,878*      | $1,43E+00$      | 1,6100***    | $2,46E-09$      | $1,83E-01$      | $2,98E-09$      | $1,25E-01$ | $8,37E-01$     | $8,62E-01$ | 1      | 1 |
| SP     | -145,83***   | 145,84***   | $1,07E+00$      | 3,5266***    | $4,93E-02$      | $1,36E-02$      | $5,08E-09$      | 0,0953***  | $2,00E-02$     | 0,9564***  | 1      | 3 |
| LA-MRS |              |             |                 |              |                 |                 |                 |            |                |            |        |   |
|        | $\beta$      | $\gamma$    | $\alpha_0^1$    | $\alpha_0^2$ | $\alpha_1^1$    | $\alpha_1^2$    | $\beta_1$       | $\beta_2$  | p              | q          | $\tau$ | c |
| ATHEX  | -18,33***    | 0,092***    | $8,63E-09$      | $1,39E+00$   | $1,88E-02$      | $3,87E-02$      | $8,20E-02$      | $4,22E-09$ | 0,9522***      | $8,94E-01$ | 1      | 3 |
| CAC    | 1,281***     | -0,042***   | 2,2422***       | $1,00E+00$   | $2,99E-02$      | $1,54E-09$      | 0,0940***       | $9,47E-03$ | 0,9510***      | $4,03E-02$ | 1      | 2 |
| DAX    | -0,78*       | 0,78*       | 2,8969***       | $1,02E+00$   | $4,41E-02$      | $5,85E-09$      | $1,06E-01$      | $1,19E-09$ | 0,9418***      | $7,12E-02$ | 1      | 1 |
| IBEX   | -19,89***    | 0,058***    | 1,6993***       | 4,5908***    | $2,65E-02$      | $4,02E-09$      | 0,1075***       | $8,59E-09$ | 0,9459***      | $1,51E-01$ | 1      | 3 |
| ISEQ   | -15,27***    | 0,076***    | 5,1753***       | $2,34E-09$   | $9,17E-03$      | $1,34E-01$      | $9,62E-10$      | $1,10E-01$ | $8,88E-01$     | 0,9024***  | 1      | 3 |
| PSI    | -0,91*       | 0,051***    | 1,9320***       | $6,00E-09$   | $2,16E-01$      | $9,09E-09$      | $5,71E-09$      | $1,61E-01$ | $4,02E-01$     | $9,07E-01$ | 2      | 2 |
| SP     | -0,87**      | 0,88***     | $5,18E-09$      | $2,46E-09$   | 0,0128***       | $4,68E-02$      | $9,20E-02$      | $2,98E-09$ | 0,9578***      | $2,31E-02$ | 1      | 1 |

\*\*\* significatif à 1%; \*\* significatif à 5%; \* significatif à 10%

Tableau 5 – Estimation des modèles de type MRS-GARCH

|  | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ |
|--|------------|------------|----------|----------|---------|---------|
| MRS-GARCH  |            |            |          |          |         |         |
| ATHEX  | 0,86       | 2,73       | 0,33     | 0,95     | 0,67    | 0,33    |
| CAC  | 6,18       | 0,51       | 0,99     | 0,86     | 0,69    | 0,31    |
| DAX  | 5,77       | 0,49       | 1,00     | 0,76     | 0,48    | 0,52    |
| IBEX   | 0,50       | 5,34       | 0,74     | 0,99     | 0,53    | 0,47    |
| ISEQ   | 0,52       | 6,17       | 0,81     | 0,99     | 0,37    | 0,63    |
| PSI  | 0,00       | 1,07       | 0,12     | 0,96     | 1,00    | 0,00    |
| SP   | 0,37       | 5,28       | 0,50     | 1,00     | 0,79    | 0,21    |
| MG-MRS-GARCH   |            |            |          |          |         |         |
| ATHEX  | 3,158E-05  | 6,582E-05  | 3,48E-02 | 0,1122   | 0,6691  | 0,3309  |
| CAC  | 1,0648     | 1,9753     | 6,68E-03 | 0,1201   | 0,9529  | 0,0471  |
| DAX  | 1,0034     | 2,0659     | 1,63E-08 | 0,1457   | 0,9428  | 0,0572  |
| IBEX   | 8,300E-05  | 8,487E-05  | 1,27E-01 | 8,92E-09 | 0,0571  | 0,9429  |
| ISEQ   | 2,0119     | 8,741E-05  | 8,62E-03 | 0,2536   | 0,5221  | 0,4779  |
| PSI  | 1,1977     | 1,5246     | 5,43E-09 | 0,3074   | 0,5412  | 0,4588  |
| SP   | 1,0600     | 1,9894     | 4,93E-02 | 0,1090   | 0,9574  | 0,0426  |
| LA-MRS-GARCH   |            |            |          |          |         |         |
| ATHEX  | 9,797E-05  | 1,2045     | 1,01E-01 | 0,0387   | 0,3114  | 0,6886  |
| CAC  | 1,5998     | 1,0050     | 1,24E-01 | 0,0095   | 0,0485  | 0,9515  |
| DAX  | 1,8467     | 1,0115     | 1,51E-01 | 7,04E-09 | 0,0590  | 0,9410  |
| IBEX   | 1,4008     | 2,1426     | 1,34E-01 | 1,26E-08 | 0,0599  | 0,9401  |
| ISEQ   | 2,2854     | 5,557E-05  | 9,17E-03 | 0,2439   | 0,5336  | 0,4664  |
| PSI  | 1,5693     | 8,460E-05  | 2,16E-01 | 0,1610   | 0,8650  | 0,1350  |
| SP   | 7,606E-05  | 5,077E-05  | 1,05E-01 | 0,0468   | 0,0414  | 0,9586  |
| $\rho_i = \alpha_1^i + \beta_i, \pi_i = \frac{1-q}{2-p-q}$ |            |            |          |          |         |         |

Tableau 6 – Éléments d'analyse supplémentaires aux résultats MRS-G

---

L'utilité d'un modèle à changements de régimes markoviens a fait l'objet d'un certain nombre de travaux dont les conclusions sur les performances hors-échantillon diffèrent profondément. En proposant 3 modèles (chaos)-stochastiques avec changements de régimes markoviens, l'objectif poursuivi visait :

- \* à apporter une amélioration des modèles déjà existants en prenant en compte les structures chaotiques des séries temporelles financières ;
- \* à montrer qu'une approche chaos-stochastique bien définie peut constituer une alternative solide et efficace aux propositions du CBSB pour briser la procyclicité de la VaR.

Force est de constater que ce double objectif ne peut être complètement atteint et ce, pour diverses raisons :

- \* les résultats obtenus restent exploitables et une analyse des capacités prédictives est envisagée par la suite. Mais nous regrettons l'incapacité du modèle MRS-G à rendre compte de la persistance dans les deux régimes ;
- \* l'utilisation de modèles chaotiques en moyenne impacte de manière différente les structures en variance. La conséquence, dans le cadre d'une spécification de type MRS-G, est l'absence de régimes de forte et faible volatilités, ce qui ne permet pas d'obtenir des résultats concluants ;
- \* la nécessité d'un échantillon d'analyse plus long. Ce constat est apparu évident suite à l'incapacité du modèle MRS-G à identifier certains régimes de volatilités. Il est entendu que cette dernière raison souffre de plusieurs inconvénients mais, et c'est sûrement la cause des faibles performances prédictives des modèles de type MRS-G, la taille de l'échantillon reste, selon nous, le critère discriminant entre d'une part un modèle permettant de décrire correctement un ensemble de données et un modèle visant à faire de la prévision. La question ultime qui se pose est la finalité de l'analyse : dans le cas d'une analyse des structures, ce modèle est une aide à l'interprétation et un échantillon plus long peut améliorer l'interprétation. Dans le cas d'une prévision, comme dans le cadre de ce travail, le recours à une longue série temporelle donne moins d'importance aux données récentes.

Ces commentaires généraux ne s'appliquent pas forcément à l'ensemble des indices européens retenus.

### 3.2.1.2 RÉSULTATS D'ESTIMATION SUR LES SOUS-PÉRIODES [2004-2006] & [2007-2009]

La pertinence des modèles retenus doit se confirmer sur des sous-échantillons caractérisés par des évolutions différentes. Pour cela, nous retenons deux sous-périodes :

- \* du 01/07/2004 au 14/07/2006 : c'est une période marquée par une volatilité mesurée avec une tendance haussière des prix ;
- \* du 15/07/2007 au 15/07/2009 : cette période coïncide avec la crise des subprimes.

Les résultats d'estimation sur les sous-périodes sont donnés dans les tableaux 7 et 8. Le premier enseignement qui en ressort est l'absence d'un modèle capable de rendre compte des dynamiques de tous les indices européens. Les modèles standards de type ARMA permettent de modéliser les structures en moyenne des indices CAC et IBEX sur la période 2007-2009. Les modèles chaos-stochastiques rendent compte des dynamiques en moyenne :

- \* des indices ATHEX, DAX, ISEQ, IBEX sur la période 2004-2006 ;
- \* des indices DAX, CAC, PSI, SP, IBEX sur la période 2007-2009.

Il est à relever que les modèles chaos-stochastiques décrivent une grande partie des dynamiques des indices européens et ce, quelle que soit la période considérée. Une analyse plus précise des paramètres  $\tau$  et  $c$  retenus indique sur la période 2004-2006 que ces modèles filtrent principalement des structures chaotiques à faibles dimensions, généralement de dimension 2. Sur la période de stress, les dimensions retenues sont plus élevées, notamment dans le cas du modèle MGG pour les indices DAX, CAC et SP. Cela révèle des dynamiques plus complexes en période de crise qui nécessitent une dimension plus importante. Un autre constat que nous pouvons relever porte sur les indices DAX et IBEX. Ils sont les seuls à être modélisés par le même modèle chaos-stochastique sur les deux sous-périodes retenues. Ainsi, l'indice DAX est bien décrit par un modèle MGG sur les deux sous-périodes tandis que les dynamiques de l'indice espagnol



sont mieux prises en compte par le modèle LAG. Les différents constats établis précédemment se basent essentiellement sur la significativité des paramètres des différents modèles. Or, ce critère semble insuffisant pour évaluer la capacité et la supériorité d'un modèle à décrire et prendre en compte les structures existantes dans les indices européens.

| Paramètres  | $\beta$      | $\gamma$    | $\alpha_0$     | $\alpha_1$     | $\beta_1$   | $LL$      | $\tau$   | $c$ |
|---|--------------|-------------|----------------|----------------|-------------|-----------|----------|-----|
| LAG   |              |             |                |                |             |           |          |     |
| ATHEX   | -137.7634*** | 0.102597**  | $4.20e-06$ *** | 0.084067***    | 0.888369*** | 1660.233  | 1        | 3   |
| DAX   | -5.853072*** | 5.851273*** | $3.75e-06$ *** | 0.069600***    | 0.883146*** | 1776.967  | 1        | 1   |
| CAC   | -5,08        | 5,13        | $3,78e-06$ **  | 0,07***        | 0,87***     | 1824,26   | 1        | 1   |
| ISEQ  | 0,09**       | 0,01        | $4,82e-06$ *** | 0,09***        | 0,84***     | 1831,69   | 3        | 1   |
| IBEX  | 7,02**       | -7,01**     | $4,28e-06$ **  | 0,07***        | 0,84***     | 1898,69   | 1        | 1   |
| SP  | 162,26**     | -0,05       | $4,75e-06$ **  | 0,09***        | 0,82***     | 1880,026  | 3        | 3   |
| MGG   |              |             |                |                |             |           |          |     |
| ATHEX   | 125,45***    | -125,4***   | $4,3e-06$ ***  | 0,09***        | 0,89***     | 1659,71   | 1        | 2   |
| DAX   | -5,8**       | 5,8**       | $3,76e-06$ **  | 0,07***        | 0,88***     | 1776,94   | 1        | 1   |
| CAC   | -5,12        | -5,08       | $3,78e-06$ **  | 0,07***        | 0,87***     | 1824,24   | 1        | 1   |
| ISEQ  | -81,29**     | 81,4**      | $5,3e-05$ ***  | 0,2***         |             | 1817,55   | 1        | 2   |
| IBEX  | -6,97**      | 6,98**      | $4,41e-06$ **  | 0,07***        | 0,84***     | 1895,35   | 1        | 1   |
| SP  | -5,93        | 5,88        | $4,39e-06$ **  | 0,09***        | 0,82***     | 1888,85   | 1        | 1   |
| ARMAG   |              |             |                |                |             |           |          |     |
| Paramètres  | $c$          | $\phi$      | $\theta$       | $\alpha_0$     | $\alpha_1$  | $\beta_1$ | $LL$     |     |
| ATHEX   | 0,001**      |             |                | $4,65e-06$ *** | 0,092***    | 0,88***   | 1662,977 |     |
| DAX   | 0,001**      |             |                | $3,59e-06$ *   | 0,07***     | 0,88***   | 1780,99  |     |
| CAC   | 0,001**      |             |                | $3,34e-06$ *** | 0,07***     | 0,88***   | 1827,47  |     |
| ISEQ  | 0,001***     |             |                | $4,51e-06$ *** | 0,11***     | 0,83***   | 1846,14  |     |
| IBEX  | 0,001***     |             |                | $4,66e-06$ *** | 0,08***     | 0,83***   | 1900,76  |     |
| SP  | 0,001**      |             |                | $4,88e-06$ **  | 0,11***     | 0,79***   | 1894,73  |     |
| *** significatif à 1%; ** significatif à 5%; * significatif à 10% |              |             |                |                |             |           |          |     |

Tableau 7 – Résultats des estimations des modèles (chaos)-stochastiques [2004-2006]

| Paramètres  | $\beta$            | $\gamma$           | $\alpha_0$       | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $LL$    | $\tau$ | $c$ |
|---|--------------------|--------------------|------------------|------------|-----------|---------|--------|-----|
| LAG   |                    |                    |                  |            |           |         |        |     |
| ATHEX   | 0,36               | 0,011              | $8,32e^{-05**}$  | 0,13***    | 0,86***   | 1282,32 | 1      | 2   |
| DAX   | -0,09*             | -0,087             | $5,01e^{-06***}$ | 0,13***    | 0,87***   | 1380,73 | 3      | 1   |
| CAC   | -0,098**           | -0,11**            | $7,5e^{-06**}$   | 0,12***    | 0,87***   | 1345,19 | 3      | 1   |
| ISEQ  | -160,8*            | 0,03               | $1,84e^{-05**}$  | 0,11***    | 0,86***   | 1213,44 | 4      | 4   |
| IBEX  | 1,99*              | -0,088*            | $9,69e^{-06**}$  | 0,13***    | 0,85***   | 1353,21 | 5      | 2   |
| PSI   | 3,39*              | -3,36*             | $9,52e^{-06***}$ | 0,15***    | 0,82***   | 1479,08 | 1      | 1   |
| SP  | -34,21**           | -0,043             | $6,38e^{-06**}$  | 0,12***    | 0,87***   | 1356,06 | 5      | 3   |
| MGG   |                    |                    |                  |            |           |         |        |     |
| ATHEX   | -16,16             | 16,14              | $8,37e^{-06*}$   | 0,13***    | 0,86***   | 1282,51 | 1      | 2   |
| DAX   | $-13,901e^{03***}$ | $-13,901e^{03***}$ | $5,03e^{-06***}$ | 0,12***    | 0,87***   | 1384,81 | 1      | 5   |
| CAC   | -0,099**           | -0,109*            | $7,5e^{-06***}$  | 0,12***    | 0,87***   | 1345,27 | 3      | 5   |
| ISEQ  | -89,23             | -89,26             | $1,89e^{-06**}$  | 0,11***    | 0,86***   | 1221,95 | 1      | 3   |
| IBEX  | -0,02              | -0,09*             | $9,76e^{-06***}$ | 0,13***    | 0,86***   | 1360,75 | 2      | 2   |
| PSI   | -3,33*             | 3,36*              | $9,53e^{-06***}$ | 0,15***    | 0,82***   | 1479,11 | 1      | 1   |
| SP  | $-24,735e^{03*}$   | $-24,734e^{03*}$   | $6,22e^{-06***}$ | 0,12***    | 0,87***   | 1367,01 | 1      | 5   |
| ARMAG   |                    |                    |                  |            |           |         |        |     |
| Paramètres  | $c$                | $\phi$             | $\alpha_0$       | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $LL$    |        |     |
| ATHEX   |                    |                    | $8,71e^{-06**}$  | 0,13***    | 0,86***   | 1285,9  |        |     |
| DAX   |                    |                    | $5,36e^{-06***}$ | 0,12***    | 0,87***   | 1385,72 |        |     |
| CAC   |                    | -0,11**            | $7,43e^{-06***}$ | 0,11***    | 0,87***   | 1348,57 |        |     |
| ISEQ  | -0,002**           |                    | $1,92e^{-05**}$  | 0,12***    | 0,85***   | 1227,22 |        |     |
| IBEX  |                    | -0,09*             | $9,97e^{-06***}$ | 0,125***   | 0,86***   | 1363,96 |        |     |
| PSI   |                    |                    | $9,32e^{-06***}$ | 0,15***    | 0,82***   | 1480,87 |        |     |
| SP  |                    |                    | $6,37e^{-06***}$ | 0,12***    | 0,87***   | 1368,97 |        |     |
| *** significatif à 1%; ** significatif à 5%; * significatif à 10% |                    |                    |                  |            |           |         |        |     |

Tableau 8 – Résultats des estimations des modèles (chaos)-stochastiques [2007-2009]

### 3.2.1.3 COMPARAISON DES MODÉLISATIONS : UNE APPROCHE STATISTIQUE

De manière à juger la capacité d'une modélisation à rendre compte des structures qui existent dans une série temporelle, il est fortement recommandé de mener une analyse statistique sur les séries résiduelles. En effet, le critère de significativité des paramètres est insuffisant et une analyse discriminante entre les modèles peut et doit être menée par des tests appropriés. Il est possible de mener deux types d'analyses sur les séries résiduelles :

- \* une analyse descriptive : elle se base essentiellement sur des mesures calculées sur les séries résiduelles qui permettent de comparer différents modèles. Ainsi, on pourra retenir l'erreur moyenne au carré et les statistiques qui s'en inspirent ( $MSE_2$ , MAD,...);
- \* une analyse statistique : elle regroupe un ensemble de tests déterminés en fonction du ou des modèles estimés, de la finalité de l'analyse, etc... Nous retenons les tests standards ARCH et QSTAT, le test de Jarque-Bera et nous évaluons les capacités prédictives de ces différents modèles par le test de Diebold et Mariano(1995).

Nous menons ces différentes analyses sur les séries résiduelles des modèles estimés dans la section précédente.

#### 3.2.1.3.1 Analyse descriptive des résidus

Nous retenons 5 indicateurs qui vont nous permettre d'établir un premier classement. Il est possible que ce dernier soit difficile à déterminer puisque, comme l'ont discuté Bollerslev et al.(1994) et Lopez(2001), la multiplicité des critères ne garantit pas la sélection du meilleur modèle et aucun n'a pour l'instant été érigé en critère unique et satisfaisant.

Nous choisissons de retenir deux mesures de type MSE :

- \* la première est une mesure standard. Elle est donnée par :

$$MSE_1 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2 \quad (136)$$

Où N désigne la taille de l'échantillon et  $e_t$ , l'erreur en t.

\* la seconde est une mesure MSE modifiée :

$$MSE_2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (e_t^2)^2 \quad (137)$$

Cette seconde mesure fait intervenir un carré supplémentaire. Elle est généralement utilisée dans des modèles de variance de type GARCH et permet ainsi de juger de la capacité de ces modèles à rendre compte de la volatilité.

Nous retenons aussi deux mesures en valeur absolue :

\*  $MAD_1$  mesure la moyenne des erreurs en valeur absolue :

$$MAD_1 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e_t| \quad (138)$$

\*  $MAD_2$  mesure la moyenne des erreurs en valeur absolue au carré :

$$MAD_2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |e_t^2| \quad (139)$$

Enfin, un critère supplémentaire est retenu :

\* le critère d'information d'Akaike(1973) mesuré pour chaque modèle.

Notons que les 4 premières mesures se basent sur les résidus et que, dans le cadre de cette étude, les modèles retenus font intervenir une partie GARCH. Il existe alors deux possibilités :

- \* l'utilisation des résidus ordinaires calculés comme la différence entre la rentabilité en t et la rentabilité estimée par le modèle en t ;
- \* l'utilisation des résidus standardisés qui sont déterminés à partir des résidus ordinaires. Ils sont obtenus en divisant ces derniers par l'écart-type en t estimé par le modèle.

Nous proposons d'utiliser les deux séries résiduelles pour cette étude.

Les tableaux 61 à 68 présentés dans l'annexe C.5.1.1. donnent les différentes statistiques calculées sur les trois échantillons. Il ressort de ces résultats plusieurs enseignements :

- \* sur la période complète [2003-2011] : les modèles de type LAG donnent les meilleurs statistiques sur les résidus ordinaires avec 40% de réussite. Une analyse par mesure révèle que les critères MSE et la mesure  $MAD_2$  sont

minimaux pour 40% des résidus des modèles de type MGG alors que les critères  $MAD_1$  et AIC placent les modèles de type LAG en première position dans 40% et 80% des cas respectivement. Ces résultats ne sont pas confirmés pour les séries résiduelles standardisées qui placent les modèles de type ARMA en première position dans 80% des cas. Il faut souligner le caractère discutable de ces résultats dans la mesure où les différents critères calculés ne sont pas statistiquement différents d'un modèle à l'autre. Pour les modèles intégrant des changements de régimes markoviens, nous relevons dans 42% des cas des résidus ordinaires la supériorité du modèle MG-MRS-G. Les modèles standards et le modèle LA-MRS-G arrivent en première position dans 25% des cas, toutes statistiques confondues. Une analyse plus précise révèle que 50% des sommes résiduelles sont minimales lorsqu'elles proviennent des modèles MG-MRS-G. Selon ces critères, le modèle MRS-G est mieux adapté pour les actifs DAX et CAC tandis que le modèle LA-MRS-G donne les meilleurs résultats pour l'indice ATHEX. En retenant les résidus standardisés, nous relevons une écrasante majorité des modèles chaos-stochastiques avec 82% de réussite : le modèle LA-MRS-G surperforme légèrement le modèle MG-MRS-G puisqu'il enregistre un taux de réussite de 43% contre 38% pour le modèle MG-MRS-G. Enfin, nous notons que les critères  $MSE_1$ ,  $MAD_2$  et AIC placent le modèle LA-MRS-G en première position dans 50% des cas alors que les critères  $MSE_2$  et  $MAD_1$  sont minimaux pour le modèle MG-MRS-G dans 46% des cas.

- \* sur la période [2004-2006] : le modèle MGG domine les deux autres modèles dans 33% des cas lorsqu'on se réfère aux statistiques calculées sur les résidus ordinaires. Ce chiffre atteint 75% dans le cas des résidus standardisés. Les modèles de type ARMA donnent de meilleurs résultats dans 50% des cas si l'on retient les résidus ordinaires. Dans le cas des résidus standardisés, ces modèles sont en première position dans 25% des cas. Le modèle LAG fournit les meilleures statistiques pour 20% des séries résiduelles ordinaires mais il n'est jamais placé en première position dans le cas des séries résiduelles standardisées. Une analyse plus ciblée révèle que sur les critères de type MSE, le modèle MGG enregistre un taux de suc-

cès respectif de 50% et de 100% sur les résidus ordinaires et standardisés. Si l'on se réfère au critère  $MAD_1$ , le modèle MGG est de nouveau en tête dans 50% des cas alors que ce taux atteint 75% en retenant le critère  $MAD_2$ . En retenant le critère AIC, le modèle ARMA surperforme les deux autres modèles dans 75% des cas mais il faut souligner les différences relativement faibles entre les différents AIC calculés.

\* sur la période [2007-2009] : en moyenne, les modèles de type ARMA donnent de meilleurs résultats dans respectivement 50% et 55% des séries ordinaires et standardisées. Ces modèles sont aussi performants que les modèles LAG qui enregistrent un taux de réussite de 50% dans le cas des résidus standardisés alors que le modèle MGG n'est meilleur que dans 26 % des cas. Il est à relever les faibles performances des modèles MGG et LAG dans le cas des résidus ordinaires puisqu'ils sont meilleurs dans seulement 20% et 53% des cas respectivement. Une analyse plus précise des modèles deux à deux révèle que sur l'ensemble des résultats, les modèles de type ARMA excellent dans 58% des cas alors que le modèle LAG ne surperforme que dans 42% des cas. Si l'on s'intéresse aux actifs sur lesquels ont été estimés les trois modèles, nous constatons que les taux de réussite sont très resserrés : les modèles de type ARMA sont meilleurs dans 40% des cas, les modèles de type LAG enregistrent un taux de succès dans 34% des cas et les modèles MGG sont classés en première position dans 26% des cas. Une comparaison des modèles par critères montre que les critères de type MSE placent les trois modèles en première position dans le cas des résidus ordinaires alors que le modèle LAG supplante les deux autres modèles dans le cas des résidus standardisés. Selon le critère  $MAD_1$ , les modèles de type ARMA sont les plus performants alors que le critère  $MAD_2$  classe les trois modèles en première position dans le cas des résidus ordinaires et le modèle LAG dans le cas des résidus standardisés. À l'instar de la sous-période précédente, le critère AIC calculé sur les modèles de type ARMA est le plus faible dans 60% des cas.

Une appréciation des différentes mesures par actifs révèle de nouveaux éléments :

- \* l'indice allemand est mieux modélisé sur les deux périodes par un modèle MGG ;
- \* sur la période [2004-2006], les indices IBEX et ATHEX sont mieux représentés par un modèle de type MGG ;
- \* sur la période stressée, les indices DAX et SP sont les seuls à placer le modèle MGG en première position. L'indice français est mieux représenté par les modèles de type LAG. Les modélisations de type ARMA supplantent les autres modèles dans le cas des indices PSI et IBEX.

### 3.2.1.3.2 Analyse statistique des résidus

Il est d'usage d'analyser les résidus d'une modélisation afin de déterminer si les structures visées ont été prises en compte. Ainsi, dans le cadre des modèles de type GARCH, il est important de vérifier que les structures hétéroscédastiques ont été filtrées par le modèle. De la même manière, il est tout aussi nécessaire de vérifier que les résidus présentent ou convergent vers les caractéristiques d'un bruit blanc normal. Dans cet objectif, nous appliquons le test ARCH d'homoscédasticité, le test Q-stat de Ljung Box et le test de Jarque Bera. Nous évaluons les capacités prédictives des différents modèles par le test de Diebold et Mariano <sup>75</sup>(1995).

Contrairement à certains tests qui visent à mettre en évidence la supériorité stricte d'un modèle par rapport à un autre (test RC de White(2000) ou test SPA de Hansen(2005)), le test de Diebold et Mariano(1995) compare deux modèles et teste l'hypothèse d'égalité dans la précision des prévisions <sup>76</sup>. Il s'agit d'un test de type EPA (Equality Predictive Ability) qui repose sur une fonction de pertes déterminée à partir des prévisions des modèles.

Soient  $\hat{R}_t^A$  et  $\hat{R}_t^B$ , deux séries de prévisions issues respectivement des modèles A et B et notons  $e_t^A$  et  $e_t^B$  leurs erreurs de prévision respectives. Soit  $g(\cdot)$  une fonction de pertes et définissons  $g(e_t^A)$  et  $g(e_t^B)$ , les fonctions de pertes des modèles A et B respectivement. En posant  $d_t$ , la différence entre ces deux

75. Cette évaluation n'est pas menée sur l'ensemble des modèles retenus.

76. Compte tenu des résultats peu concluants de la section précédente, il nous semble plus pertinent d'expliquer cette confusion par des résultats très proches plutôt que d'appliquer un test de supériorité qui alimenterait cette confusion.

fonctions de pertes, Diebold et Mariano(1995) montrent que la distribution asymptotique de la moyenne des différences est une distribution normale :

$$\sqrt{N}(\bar{d} - \mu) \rightarrow N(0, V(\bar{d})) \quad (140)$$

Avec  $\hat{V}(\bar{d}) = \frac{1}{N}(\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^q \omega_k \hat{\gamma}_k)$ , où  $q = h - 1$ ,  $\omega_k = \frac{1-k}{q+1}$  est le retard de la fenêtre et  $\hat{\gamma}_i$  est un estimé de l'autocovariance de la série  $d_t$  à l'ordre  $i$  :

$$\hat{\gamma}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=k+1}^N (d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d}) \quad (141)$$

Pour  $k = 1, \dots, q$ . La statistique DM est alors définie par :

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{V}(\bar{d})}} \equiv N(0, 1) \quad (142)$$

Les limites de ce test pour de petits échantillons conduisent Harvey et al.(1997) à proposer une version modifiée (DBM) dans laquelle la statistique DM est multipliée par un facteur. Les auteurs suggèrent de la comparer aux valeurs critiques de la distribution de Student avec  $n - 1$  degrés de liberté.

Les tableaux 69 à 80 de l'annexe C.5.1.2. donnent les résultats des tests d'homoscédasticité, d'autocorrélation et de normalité réalisés sur les résidus standardisés des différentes modélisations retenues et ce, pour les trois échantillons d'analyse. Il ressort de ces résultats plusieurs éléments :

- \* sur la période [2003-2011] : les modèles LAG, MGG et ARMAG échouent respectivement à rendre compte de l'autocorrélation existante dans les indices PSI ; PSI ; ATHEX. Ces trois modèles n'intègrent pas correctement l'effet ARCH de l'indice espagnol et seul le modèle standard fournit des résidus hétéroscédastiques pour l'indice SP. Les statistiques de Jarque-Bera calculées indiquent que le modèle LAG est plus performant que les deux autres modèles pour les indices CAC et SP. Ces statistiques sont les plus faibles dans le cas des modèles MGG pour les indices IBEX et PSI . Enfin les modèles standards donnent les statistiques de Jarque-Bera les plus faibles pour les indices ATHEX, DAX, ISEQ. Il faut préciser que l'incapacité des modèles de type ARMA-GARCH à rendre compte de l'autocorrélation pour l'indice hellénique conduit à retenir le modèle LAG puisqu'il est celui qui réduit le plus les statistiques de Jarque-Bera et qu'il prend en compte non seulement l'autocorrélation mais aussi l'hétéroscédasticité



de cet indice. Dans le cas des modèles avec changements de régimes, nous relevons l'incapacité du modèle standard (MRS-G) à rendre compte de l'hétéroscédasticité de l'ensemble des actifs excepté les indices ATHEX et SP. Les modèles MG-MRS-G et LA-MRS-G échouent à fournir des résidus homoscédastiques pour les actifs CAC, DAX, IBEX, et CAC, DAX, IBEX, SP respectivement. Par ailleurs, le modèle classique ne prend pas en compte l'autocorrélation des actifs ATHEX et PSI. Les statistiques de Jarque-Bera calculées pour les résidus issus du modèle MG-MRS-G sont meilleures dans 42% des cas. Nous notons que le modèle classique donne des statistiques de Jarque-Bera relativement proches de celles de la loi normale, notamment pour les indices CAC, ISEQ, DAX et IBEX ;

\* sur la période [2004-2006] : les trois modèles retenus rendent compte de l'autocorrélation des 7 actifs mais l'hétéroscédasticité n'est pas bien intégrée par les modèles ARMAG et MGG respectivement dans le cas des indices ATHEX et IBEX et dans le cas de l'indice ATHEX. Une comparaison entre les trois spécifications indique que le modèle LAG est plus performant pour les indices ATHEX et IBEX. Les indices ISEQ et DAX sont caractérisés par des statistiques de Jarque-Bera plus faibles lorsqu'ils sont modélisés par des spécifications standards ;

\* sur la période [2007-2009] : l'autocorrélation est bien prise en compte par les différents modèles qui échouent à rendre compte de l'hétéroscédasticité de l'indice espagnol. De plus, le modèle ARMAG est incapable de prendre en compte l'inégalitaire variabilité de l'indice PSI. Une discrimination par la statistique de Jarque-Bera place le modèle MGG en première position pour les indices français, allemand et italien tandis que l'indice PSI est mieux décrit par le modèle LAG. Ce dernier fournit la statistique de Jarque-Bera la plus faible pour l'indice espagnol. Nous constatons que sur cette période de stress extrême, les modèles chaos-stochastiques supplantent les modèles standards pour les actifs les moins volatiles sur la période. Ce résultat indique qu'en période de crise extrême, les modèles chaos-stochastiques rendent compte des évolutions des actifs les plus stables. Ces résultats peuvent être liés au choix d'un processus

GARCH(1,1) pour la variance, qui en période de crise, peut sembler insuffisant pour rendre compte de la volatilité.

Avant de confronter ces éléments aux résultats des tests de type Diebold et Mariano(1995), il faut préciser plusieurs points :

- \* ces comparaisons sont effectuées sur des résidus standardisés qui tiennent compte du processus utilisé en variance. Le choix d'un même processus pour les différents modèles revient à comparer les spécifications en moyenne ;
- \* les comparaisons effectuées se basent essentiellement sur les statistiques de normalité lorsque l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité sont prises en compte. Il faut souligner les différences relativement faibles entre les statistiques de Jarque-Bera calculées sur chaque modèle. Autrement dit, les comparaisons et le classement qui en découle peuvent être largement discutés.

Les tests de type DM permettent de tester des différences significatives entre deux séries de résidus. Nous reportons dans les tableaux 81 à 88, donnés dans l'annexe C.5.1.2., les résultats des tests de type DM, réalisés sur les résidus ordinaires et standardisés. Il ressort de ces résultats une équivalence entre les modèles standards et le modèle MGG pour l'indice DAX sur la période [2007-2009]. La comparaison des résidus des modèles de type ARMA et LAG indique que l'hypothèse nulle d'une différence non significative est retenue pour l'indice CAC sur la période [2007-2009]. Les spécifications chaos-stochastiques donnent des séries résiduelles statistiquement équivalentes pour l'indice espagnol sur la période calme et pour les actifs CAC et PSI sur la période stressée. Il est à relever que l'on observe ces résultats pour les résidus ordinaires et standardisés excepté pour les spécifications chaos-stochastiques en période stressée qui sont équivalentes pour les actifs susmentionnés dans le cas des résidus standardisés mais l'hypothèse nulle est rejetée pour l'indice CAC dans le cas des résidus ordinaires.

En ce qui concerne les modèles avec changements de régimes markoviens, il convient de constater que les séries résiduelles comparées des trois modèles sont statistiquement équivalentes selon le test DM modifié. Contrairement aux

modèles sans changements de régimes, les résultats des modèles de type MRS-G montrent que les conclusions des tests de type DM ne sont pas identiques. En effet, le test DM classique tend à rejeter pour un certain nombre d'actifs l'hypothèse d'égalité des prédictions.

---

Une analyse statistique des résultats doit fournir un complément d'informations essentiel pour juger de la capacité d'un modèle à pouvoir rendre compte des structures existantes dans la série temporelle. Si la significativité des paramètres est une condition nécessaire, elle demeure insuffisante dans la mesure où elle est incapable de rendre compte des caractéristiques résiduelles. Une analyse plus précise conduit à retenir plusieurs critères de comparaison et nous avons opté non seulement pour des mesures statistiques qui résument les caractéristiques des séries résiduelles mais aussi pour des tests statistiques qui évaluent la capacité des différents modèles à rendre compte de certaines structures. Il ressort de ces différents instruments des résultats qui ne convergent pas vers un seul modèle mais une analyse générale permet d'établir le classement suivant :

- \* sur la période [2003-2011] : le modèle MGG est le mieux placé pour rendre compte des structures de l'indice français tandis que le modèle LAG est en première position pour l'indice ATHEX. Les indices PSI, DAX, et IBEX sont mieux modélisés par des spécifications standards. Si nous supposons qu'il existe des changements de régimes markoviens avec ou sans structures en moyenne, il apparaît que le modèle LA-MRS-G surperforme les deux autres modèles pour les actifs ATHEX et PSI tandis que le modèle MG-MRS-G est mieux placé pour rendre compte des dynamiques des actifs IBEX, SP, ISEQ, CAC et DAX.
- \* sur la période [2004-2006] : les indices DAX, IBEX, ATHEX sont mieux décrits par le modèle MGG. Le modèle LAG est mieux placé pour rendre compte des structures de l'indice espagnol. Enfin, les modèles ARMA-GARCH décrivent mieux l'indice ISEQ ;
- \* sur la période stressée, le modèle MGG surperforme les deux autres modèles pour les indices DAX et SP tandis que le modèle LAG est plus

efficace pour les indices PSI et CAC. Le modèle standard est particulièrement performant pour l'indice espagnol.

Nous constatons que sur les sous périodes, l'indice allemand est mieux décrit par le modèle MGG alors que la spécification standard surperforme sur la période complète. Il est difficile, à partir de ces mesures d'ériger un modèle dominant dans la mesure où le classement établit synthétise les résultats des mesures et tests statistiques et qu'à ce titre, il peut être remis en cause.

#### 3.2.1.4 COMPARAISON DES MODÉLISATIONS : UNE APPROCHE PAR LA VALUE-AT-RISK

Dans le cadre de la gestion des risques, la VaR constitue un élément essentiel qui rend compte du risque de marché. Nous avons vu dans les chapitres précédents les multiples intérêts de cet instrument et les différentes méthodes d'estimation de cette mesure. Dans le cadre de cette étude, l'estimation paramétrique et la prévision de la VaR constituent une finalité qui doit nous permettre d'identifier les modèles les plus appropriés pour décrire les dynamiques des indices européens. Nous évaluons donc la capacité des différents modèles à rendre compte des dynamiques dans l'échantillon en calculant les VaR aux seuils de 95% et de 99% et nous testons la prévision dans l'échantillon par l'application des tests de backtesting. Nous proposons de retenir une année de prévisions pour chacune des sous périodes [2004-2006] et [2007-2009] et deux années (2007 & 2009) pour l'échantillon [2003-2011]. Nous retenons 5 tests de backtesting<sup>77</sup> :

- \* un test standard : le test de Christoffersen(1998). Nous vérifions l'hypothèse de couverture conditionnelle par un test LR.
- \* deux tests basés sur une régression de la séquence des violations : le test d'Engle et Manganelli (2004) et le test de Dumitrescu et al. (2012). Pour ces tests, nous suivons la procédure de Dumitrescu et al.(2012) en retenant pour le test de Engle et Manganelli(2004) deux types des régressions :
  1. une régression basée uniquement sur les processus de violations retardés à l'ordre 1, 2 et 3 (DQ1, DQ2, DQ3) ;

---

77. Ces différents tests ont été appliqué en utilisant les codes disponibles sur le site runmycode.com.

2. une régression qui intègre non seulement les processus de violations retardés mais aussi les VaR retardées aux ordres 1, 2, et 3 (DQV1, DQV2, DQV3).

Pour le test de Dumitrescu et al.(2012), nous donnons les 7 spécifications proposées par les auteurs et un processus autorégressif d'ordre 3.

- \* un test de durée : le test GMM de Candelon et al.(2011). Nous retenons 6 polynômes pour ce test.
- \* le test Riskmap de Candelon et al.(2012) avec un taux de couverture des 'super' exceptions de 1% et 0.2% pour les VaR à 95% et 99% respectivement.

Nous commentons les résultats obtenus selon les périodes considérées.

#### **3.2.1.4.1 Évaluation de la VaR dans l'échantillon sur longue période**

Les graphiques 73 à 82 donnés dans l'annexe C.5.2.1.1. représentent les VaR prévues par les modèles (chaos)-stochastiques pour les années 2007 et 2010. Nous constatons que les VaR prévues pour l'année 2007 par les modèles chaos-stochastiques sont assez proches et qu'elles se confondent souvent. Il existe une différence significative visuellement entre les VaR issues des modèles classiques et les VaR chaos-stochastiques, qui traduit un temps de réaction et une profondeur des VaR différents. Cela révèle l'impact de l'équation en moyenne dans la détermination de la VaR et seuls les tests d'évaluation permettent de conclure sur l'utilité ou non d'un modèle chaotique en moyenne. Un constat similaire peut être établi pour l'année 2010 avec un décalage entre les VaR classiques et les VaR chaos-stochastiques plus important.

Les graphiques 83 à 95 de l'annexe C.5.2.1.1 donnent les VaR prévues par les modèles de type MRS-G pour les années 2007 et 2010. Il est entendu que seuls les tests de backtesting permettent de juger de l'utilité ou non de ce type de modélisation mais force est de constater que des spécifications différentes en fonction du régime de variance permettent de réduire le montant des fonds propres nécessaires pour couvrir le risque. Ce commentaire ne s'applique pas particulièrement aux prévisions de la VaR issues des modèles MG-MRS-G puis-

qu'on observe beaucoup de violations et des VaR plus conservatives à certains moments.

L'indicateur FEV donné dans les tables 95 à 102 de l'annexe C.5.2.1.2., permet de comparer la fréquence empirique des violations (FEV). Cette donnée ne permet pas de discriminer les modèles entre eux mais elle est une mesure intéressante de la nature conservatrice ou non des modèles<sup>78</sup>. Pour l'année 2007, les  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle classique sont très conservatives, notamment pour les indices ATHEX, CAC et DAX. Les modèles chaos-stochastiques fournissent des  $VaR_{95\%}$  avec un taux de couverture de 4% pour l'indice allemand. 60% des  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle classique sont conservatives alors que seulement 20% des  $VaR_{95\%}$  du modèle classique sont caractérisées par un risque de première espèce. Pour les modèles chaos-stochastiques, 60% et 20% des  $VaR_{95\%}$  sont respectivement sous-estimées et surestimées. Pour les VaR associées à un taux de couverture de 1%, la répartition du risque de première espèce est identique pour les modèles ARMAG et MGG qui sous-estiment le risque pour 4 actifs. Plus précisément, le modèle classique enregistre un taux d'échec proche de 0 pour l'indice ATHEX alors que les modèles chaos-stochastiques donnent une FEV de 2%. Par ailleurs, nous relevons des FEV identiques pour les modèles chaos-stochastiques dans 80% des cas alors que les trois modèles fournissent les mêmes FEV dans un peu plus de 20% des indices. L'analyse des FEV pour les modèles de type MRS-G montre que les  $VaR_{95\%}$  prévues par les trois modèles pour l'année 2007 sont très conservatives dans la mesure où elles atteignent rarement le seuil de violations théoriques de 5%. Ainsi, seules les  $VaR_{95\%}$  des indices SP et PSI prévues par le modèle MRS-G enregistrent une FEV strictement supérieure à 0,05. Ce constat est confirmé dans une moindre mesure pour les  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007 pour lesquelles nous observons principalement des FEV nulles. Par ailleurs, nous relevons dans plus de 20% des cas des FEV identiques pour les modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens.

Pour l'année 2010, nous constatons une FEV supérieure au taux de couverture de 5% pour l'ensemble des VaR prévues par les modèles classique, LAG et MGG.

---

78. Plus précisément, en l'absence de tests statistiques, il s'agit là d'une comparaison relative dont les conclusions peuvent aller à l'encontre des résultats des tests d'évaluation.

De plus, les VaR prévues par les modèles chaos-stochastiques enregistrent des FEV identiques dans 72% des cas. Une analyse comparative montre que les modèles classiques tendent à surestimer le risque comparativement aux modèles chaos-stochastiques. Lorsque nous supposons l'existence de changements de régimes markoviens, nous constatons que les  $VaR_{95\%}$  et les  $VaR_{99\%}$  prévues par les différents modèles pour l'année 2010 enregistrent des FEV supérieures aux seuils retenus. Ces résultats vont à l'encontre de ceux observés sur l'année 2007 et donnent une première intuition quant à la capacité des modèles de type MRS-G à rendre compte de deux dynamiques différentes selon des performances identiques.

Ces premiers éléments permettent une analyse descriptive des violations sans pour autant discriminer les modèles entre eux. Nous détaillons les résultats des tests de backtesting, résumés dans les tableaux 9 & 10.

#### 3.2.1.4.1.1 *Test LR de Christoffersen(1998)*

Les tableaux 89 à 94 présentés dans l'annexe C.5.2.1.2. donnent les P-values associées au test de couverture conditionnelle de Christoffersen(1998). Nous constatons, sur l'année 2007, le rejet de l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle pour les  $VaR_{95\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle classique. Pour un taux de couverture de 1% nous relevons sur l'année 2007, un taux de succès de 100% pour le modèle LAG. Dans le cas des spécifications avec changements de régimes markoviens, le rejet de l'hypothèse nulle est constaté pour les  $VaR_{95\%}$  de tous les actifs prévues par le modèle MRS-G. L'hypothèse de couverture conditionnelle est retenue pour l'indice IBEX prévu par le modèle MG-MRS-G et pour les indices IBEX, SP prévus par le modèle LA-MRS-G. Pour un taux de couverture de 1%, l'hypothèse de couverture conditionnelle est rejetée pour les prévisions de la VaR des indices CAC, IBEX, ISEQ, PSI et SP issues du modèle MRS-G. Le test de Christoffersen(1998) valide les  $VaR_{99\%}$  prévues par les modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens.

Sur l'année 2010, le modèle classique échoue à fournir une couverture condi-

|                        | ARMAG         | MGG           | LAG           |
|------------------------|---------------|---------------|---------------|
| Test de Christoffersen |               |               |               |
| 2007                   |               |               |               |
| VaR <sub>95%</sub>     |               |               |               |
| ATHEX                  |               | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,GMM    |
| CAC                    | LR, DQ,DB     | LR,DB,GMM     | LR,DB,GMM     |
| DAX                    | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM |
| IBEX                   | LR,DB,GMM     | LR,DB,GMM     | LR, DQ,DB,GMM |
| ISEQ                   | LR, DQ,DB,GMM |               |               |
| PSI                    | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM |
| SP                     | LR, DQ,DB,GMM |               |               |
| VaR <sub>99%</sub>     |               |               |               |
| ATHEX                  | LR,DB,GMM     | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM |
| CAC                    | DB,GMM        | DB,GMM        | LR,DB,GMM     |
| DAX                    | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM |
| IBEX                   | LR, DQ,DB     | LR,DB         | LR            |
| ISEQ                   | LR, DQ,DB,GMM |               |               |
| PSI                    | LR, DQ,DB,GMM | LR,DB         | LR,DB         |
| SP                     | LR, DQ,DB     |               |               |
| 2010                   |               |               |               |
| VaR <sub>95%</sub>     |               |               |               |
| ATHEX                  |               | LR,GMM        | LR,GMM        |
| CAC                    | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,GMM    | LR, DQ,GMM    |
| DAX                    | LR,DB,GMM     | LR,DB,GMM     | LR,DB,GMM     |
| IBEX                   | LR, DQ,GMM    | LR            | LR            |
| ISEQ                   | GMM           | -             | -             |
| PSI                    | LR, DQ,DB,GMM |               |               |
| SP                     | GMM           | -             | -             |
| VaR <sub>99%</sub>     |               |               |               |
| ATHEX                  | DB,GMM        | LR,GMM        | LR,DB,GMM     |
| CAC                    | DB,GMM        | DB            | DB,GMM        |
| DAX                    | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM |
| IBEX                   | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ,DB,GMM |
| ISEQ                   | DB,GMM        |               |               |
| PSI                    | LR, DQ,DB,GMM | LR            | LR            |
| SP                     | DB            |               |               |

Tableau 9 – Résumé des tests de backtesting dans l'échantillon pour les modèles de type GARCH



|                        | MRS-G         | MG-MRSG   | LA-MRSG   |
|------------------------|---------------|-----------|-----------|
| Test de Christoffersen |               |           |           |
| 2007                   |               |           |           |
| VaR <sub>95%</sub>     |               |           |           |
| ATHEX                  |               |           |           |
| CAC                    |               |           |           |
| DAX                    | DQ            | DQ        | DQ        |
| IBEX                   |               | LR, DQ    | LR, DQ    |
| ISEQ                   |               |           |           |
| PSI                    |               |           | DQ        |
| SP                     |               | DQ        | LR, DQ    |
| VaR <sub>99%</sub>     |               |           |           |
| ATHEX                  | LR            | LR, DQ,DB | LR, DQ,DB |
| CAC                    |               | DB        | DB        |
| DAX                    | LR            | LR, DQ    | LR, DQ,DB |
| IBEX                   |               | DB        | LR, DQ,DB |
| ISEQ                   |               | LR, DQ,DB | LR, DQ,DB |
| PSI                    |               | LR, DQ,DB | LR, DQ,DB |
| SP                     |               | LR, DQ,DB | LR, DQ,DB |
| 2010                   |               |           |           |
| VaR <sub>95%</sub>     |               |           |           |
| ATHEX                  | LR            |           |           |
| CAC                    |               | LR        | LR        |
| DAX                    | LR            | LR        | LR        |
| IBEX                   |               |           |           |
| ISEQ                   |               |           |           |
| PSI                    |               | -         |           |
| SP                     |               |           |           |
| VaR <sub>99%</sub>     |               |           |           |
| ATHEX                  | LR, DQ,DB,GMM | LR, DQ    | GMM       |
| CAC                    |               |           |           |
| DAX                    |               |           | DB        |
| IBEX                   |               |           |           |
| ISEQ                   |               |           | LR        |
| PSI                    |               |           |           |
| SP                     |               |           |           |

Tableau 10 – Résumé des tests de backtesting dans l'échantillon pour les modèles de type MRS-GARCH

tionnelle aux VaR prévues des indices ISEQ et SP (à 95%) et ATHEX, CAC, ISEQ, SP (à 99%). Ces " échecs " sont liés à l'absence de violations, ce qui ne permet pas de déterminer les statistiques de couverture conditionnelle. Les VaR prévues, mêmes si elles restent valident <sup>79</sup>, apparaissent trop conservatives et inutiles dans la mesure où elles provisionnent des fonds propres qui ne pourront être utilisés pour d'autres activités. Sur la même année, le modèle LAG échoue à fournir une couverture conditionnelle aux  $VaR_{95\%}$  de l'indice PSI alors que le modèle MGG ne valide pas l'hypothèse de couverture conditionnelle pour les  $VaR_{95\%}$  de l'indice PSI et les  $VaR_{99\%}$  de l'indice CAC. Par ailleurs, le modèle MRS-G échoue à fournir une couverture conditionnelle aux  $VaR_{95\%}$  des différents actifs exceptées pour celles des indices ATHEX et DAX. Il en est de même pour le modèle MG-MRS-G dont les prévisions de la  $VaR_{95\%}$  sont validées uniquement pour les actifs CAC et DAX. Les  $VaR_{99\%}$  de l'indice hellénique prévues par les modèles MRS-G et MG-MRS-G sont valides au sens de Christoffersen(1998). Par ailleurs, les  $VaR_{99\%}$  des indices DAX et ISEQ prévues le modèle LA-MRS-G sont validées par le test de Christoffersen(1998). Ce premier test d'évaluation permet de mettre en évidence les faiblesses de certains modèles, notamment standards, à satisfaire les hypothèses de validité de la VaR. Il faut souligner que dans le cas des VaR prévues pour lesquelles il existe des violations, le rejet de l'hypothèse nulle peut provenir de la couverture inconditionnelle ou de l'indépendance des violations qui ne serait pas satisfaite. Par ailleurs, les multiples faiblesses et la forte propension de ce test à accepter un mauvais modèle contribuent à asseoir l'idée d'une mauvaise spécification pour les actifs dont les prévisions ne satisfont pas l'hypothèse de couverture conditionnelle.

#### 3.2.1.4.1.2 *Test DQ de Engle et Manganelli(2004)*

Comme précisé précédemment, nous détaillons les résultats des tests DQ selon que la régression quantile inclut ou non les VaR retardées. Dans le cas de la

---

79. Pour un niveau de confiance de 99%, une absence de violations est envisageable et permet de valider l'hypothèse de couverture inconditionnelle pour un échantillon de prévision de 255 jours.

spécification standard, le test d'Engle et Manganelli(2004) rejette l'hypothèse de validité de la VaR :

\* sur l'année 2007 des  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle MGG pour l'indice CAC. Par ailleurs, l'hypothèse nulle est rejetée pour les  $VaR_{95\%}$  des actifs ATHEX,  $CAC(DQ_1)$ ,  $IBEX(DQ_1)$ , ISEQ, PSI et SP prédites par le modèle MRS-G et des actifs ATHEX,  $CAC(DQ_1, DQ_2)$ , ISEQ ( $DQ_1, DQ_2$ ) et  $PSI(DQ_1)$  prévues par le modèle MG-MRS-G. Il en est de même pour les  $VaR_{95\%}$  des actifs ATHEX,  $CAC(DQ_1)$  et ISEQ ( $DQ_1, DQ_2$ ) prévues par le modèle LA-MRS-G.

Pour un niveau de confiance de 99%, le test de Engle et Manganelli(2004) rejette l'hypothèse de validité pour les VaR de l'indice français prévues par le modèle standard, pour les VaR des actifs IBEX et PSI prévues par le modèle LAG et celles prévues par le modèle MGG pour les indices CAC, IBEX et PSI. Un constat similaire est observé pour les  $VaR_{99\%}$  des différents indices, prévues par le modèle MRS-G. En ce qui concerne les spécifications chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens, l'hypothèse de validité de la VaR est satisfaite pour 85% des  $VaR_{99\%}$ . Elle ne peut être vérifiée pour les VaR de l'indice CAC prévues par le modèle LA-MRS-G et pour les VaR des actifs CAC et IBEX prévues par le modèle MG-MRS-G.

Une mise en perspective de ces résultats avec ceux obtenus précédemment indique l'incapacité des tests standards d'Engle et Manganelli (2004) à détecter un ensemble de prévisions invalides pour les VaR de l'indice ATHEX, prévues par le modèle classique. Il faut relativiser ce constat dans la mesure où l'invalidité peut provenir d'une autre variable explicative que celle figurant dans la régression quantile standard. Cependant, nous relevons l'incapacité du test de Christoffersen(1998) à détecter une autocorrélation des  $VaR_{95\%}$  aux ordres 2 et 3 de l'indice français prévues par le modèle MGG. En ce qui concerne les actifs IBEX et PSI, nous relevons une validité des VaR prévues par les modèles chaos-stochastiques selon le test de Christoffersen(1998) alors que le test DQ met en évidence une autocorrélation d'ordre 1 dans le processus de violations. Ce résultat traduit la nécessité de recourir à une palette de tests pour détecter

d'éventuelles dépendances qui ne peuvent être mises en évidence par certains tests.

\* sur l'année 2010, des  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle standard pour les indices DAX, ISEQ. Le modèle LAG ne valide pas l'hypothèse nulle pour les  $VaR_{95\%}$  des indices DAX et PSI alors que le modèle MGG échoue pour les indices ATHEX, DAX, et PSI. Il en est de même pour les  $VaR_{95\%}$  prévues par les modèle de type MRS-G.

Pour un taux de couverture de 1%, les modèles classiques (ARMAG) échouent pour les mêmes actifs que dans le cas du test LR. En ce qui concerne les modèles chaos-stochastiques, les  $VaR_{99\%}$  des indices CAC et PSI sont invalides selon le test DQ. Une analyse plus précise des spécifications du test DQ indique la détection d'une autocorrélation à l'ordre 3 pour les  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle classique pour l'indice DAX. Pour ce dernier, l'hypothèse de couverture conditionnelle est validée par le test de Christoffersen(1998), ce qui appuie l'idée d'une dépendance entre les violations à un ordre supérieure à 1. Il est intéressant de noter la détection d'une dépendance d'ordre 3 des violations de la  $VaR_{95\%}$  de l'indice DAX prévues par le modèle LAG, dépendance que n'a pu mettre en évidence le test de Christoffersen(1998). Dans le même cas de figure, nous relevons les violations de la  $VaR_{99\%}$  pour les indices CAC et PSI qui apparaissent valides au sens du test de Christoffersen(1998) mais autocorrélés au sens du test DQ. Enfin, les  $VaR_{95\%}$  des indices hellénique et allemand et les  $VaR_{99\%}$  de l'indice PSI prévues par le modèle MGG ne sont pas valides selon le test DQ. Dans le cas des spécifications avec changements de régimes markoviens, l'hypothèse de validité est acceptée uniquement pour l'indice hellénique dans le cas des modèles MRS-G et MG-MRS-G.

Si l'on intègre, dans la régression quantile, les VaR retardées aux ordres 1, 2, et 3, alors l'hypothèse de validité de la VaR, selon le test DQ, est rejetée :

\* sur l'année 2007 pour les violations de la  $VaR_{95\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle ARMAG et celles de la  $VaR_{99\%}$  des actifs ATHEX et CAC prévues par le modèle classique (ARMAG). Nous notons que le test LR rejette l'hypothèse de couverture conditionnelle pour les  $VaR_{95\%}$

de l'indice ATHEX mais que le test DQ standard valide les VaR prévues. Nous pouvons donc attribuer le rejet de l'hypothèse nulle à l'existence d'une relation entre le processus de violations et les VaR retardées aux ordres 1, 2 et 3. Il est intéressant de relever, dans le cas des  $VaR_{99\%}$  de l'indice ATHEX, le rejet de l'hypothèse nulle uniquement pour les spécifications intégrant les VaR retardées aux ordres 2 et 3. La séquence des violations des  $VaR_{95\%}$  prévues par le LAG pour l'indice français et celles des  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle LAG pour les indices CAC, IBEX et PSI présente un lien significatif avec les VaR et les violations retardées. Dans le cas du modèle MGG, l'intégration des VaR retardées à l'ordre 1 permet de mettre en évidence un lien significatif entre les violations et les VaR retardées. Dans le cas des spécifications avec changements de régimes, nous relevons un lien significatif entre les VaR retardées et le processus de violations pour :

- les indices ATHEX et ISEQ dont les  $VaR_{95\%}$  sont issues des 3 modèles. Pour l'indice hellénique, l'invalidité des VaR prévues est principalement due à un impact significatif des VaR retardées, impact qui n'a pu être mis en évidence par les tests précédents. Par ailleurs, nous relevons un échec du modèle MRS-G incapable de fournir des VaR valides pour les indices IBEX, PSI et SP. Il en est de même pour le modèle MG-MRS-G dans le cas de l'indice français et du modèle LA-MRS-G dans le cas de l'indice espagnol. Il faut préciser les performances particulières des modèles chaos-stochastiques pour les indices PSI et SP ;
- Lorsque le niveau de confiance est plus élevé, nous constatons un rejet de l'hypothèse nulle du test DQ pour les  $VaR_{99\%}$  des indices PSI et SP prédites par le modèle MRS-G.

Enfin, les statistiques de tests n'ont pu être déterminées pour les  $VaR_{99\%}$  des actifs ATHEX, DAX, IBEX et ISEQ prévues par le modèle classique, des actifs CAC et IBEX issues des modèles MG-MRS-G et de l'indice français prévues par les modèle LA-MRS-G.

\* sur l'année 2010, les violations des  $VaR_{95\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle classique sont invalides alors qu'elles sont validées par les tests précédents. Il en est de même pour les  $VaR_{95\%}$  de l'indice ATHEX, des  $VaR_{99\%}$  des indices ATHEX et CAC prévues par le modèle LAG et des  $VaR_{95\%}$  de l'indice espagnol et des  $VaR_{99\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle MGG. Les résultats obtenus pour les modèles de type MRS-G pour l'année 2010 sont moins concluants que ceux obtenus sur l'année 2007. Lorsque nous considérons les  $VaR_{99\%}$ , nous constatons une validation des hypothèses pour l'indice ATHEX dont les prévisions sont issues de la spécification classique et du modèle MG-MRS-G.

#### 3.2.1.4.1.3 Test DB de Dumitrescu et al.(2012)

Le test de Dumitrescu et al.(2012) repose sur l'estimation d'un modèle non linéaire des violations qui peut prendre différentes formes. Parmi les 7 spécifications proposées par les auteurs, les quatre premières font intervenir la séquence des violations retardées aux ordres 1, 2, 3 (DB2, DB3, DB4). Les spécifications DB5, DB6, et DB7 introduisent la séquence des VaR retardées aux ordres 1,2 et 3. L'analyse des performances menées par les auteurs a mis en exergue plusieurs éléments :

- \* de meilleurs résultats, pour les petits échantillons de la spécification DB1, par rapport aux autres spécifications ;
- \* l'impossibilité de calculer le maximum de vraisemblance dans le cas d'une séparation complète des points. De ce constat, il apparait que seuls les spécifications DB1, DB5 et DB6 sont tout le temps définies. À titre de comparaison avec les précédents résultats, l'absence de violations conduisait de facto à rejeter l'hypothèse nulle dans la mesure où les statistiques ne pouvaient être calculées. Dans le cas du test DB, les statistiques peuvent être déterminées même en l'absence de violations.

En retenant les spécifications recommandées par les auteurs<sup>80</sup>, nous relevons un rejet de l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle :

---

80. Nous considérons, dans ce qui suit, uniquement les résultats des spécifications DB1, DB5 et DB6.

- \* sur l'année 2007, pour les violations des  $VaR_{95\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle classique. Les  $VaR_{95\%}$  pour l'indice ATHEX et les  $VaR_{99\%}$  de l'indice IBEX prévues par le modèle LAG sont invalidées par le test DB. Il en est de même pour les  $VaR_{95\%}$  des indices ATHEX et CAC et des  $VaR_{99\%}$  de l'indice espagnol prévues par le modèle MGG. Pour un taux de couverture de 1%, les prévisions de la VaR issues du modèle MG-MRS-G sont toutes validées exceptées celles de l'indice DAX. Il en est de même pour le modèle LA-MRS-G qui valide le test DB. Enfin le modèle MRS-G est incapable de fournir des VaR satisfaisantes selon le test DB pour les indices SP et PSI.
- \* sur l'année 2010, pour les violations des  $VaR_{95\%}$  estimées par le modèle classique pour les indices ATHEX, IBEX, ISEQ, et SP. En ce qui concerne le modèle LAG, les  $VaR_{95\%}$  des indices ATHEX, IBEX, CAC, et PSI sont invalides. Les  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle LAG pour l'indice PSI ne satisfont pas l'hypothèse de couverture conditionnelle. Enfin le modèle MGG ne fournit pas de couverture conditionnelle acceptable au sens du test DB pour les  $VaR_{95\%}$  des actifs ATHEX, CAC, IBEX et PSI et pour les  $VaR_{99\%}$  des actifs ATHEX et PSI. Pour un niveau de confiance de 99%, les prévisions fournies par le modèle MRS-G pour l'indice ATHEX et les  $VaR_{99\%}$  prédites pour l'indice allemand par le modèle LA-MRS-G sont validées par le test DB.

Il est intéressant de noter que, contrairement aux tests précédents, l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle est acceptée par les tests DB pour :

- \* les  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle classique sur l'année 2007 ;
- \* les  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle LAG pour l'indice CAC sur l'année 2007 ;
- \* les  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle LAG pour les indices CAC et PSI sur l'année 2007 ;
- \* les  $VaR_{95\%}$  de l'indice DAX issues des 3 modèles de type GARCH sur l'année 2010 ;

- \* les  $VaR_{99\%}$  des actifs ATHEX et CAC prévues par les modèles LAG et ARMAG et celles de l'indice français issues du modèle MGG sur l'année 2010.

Les  $VaR_{99\%}$  des actifs ATHEX, CAC, ISEQ et SP prévues par le modèle classique (ARMAG) n'enregistrent aucune violations et les statistiques des tests précédents n'étant pas définies, le rejet de l'hypothèse de couverture conditionnelle s'appliquait. Or les statistiques DB calculées sur ces actifs montrent que l'hypothèse de validité est acceptée. Ce résultat est très important car il est révélateur de l'efficacité limitée des tests précédents incapables de juger de la validité ou non d'une VaR conservatrice. Kupiec(1995) a tabulé les régions de non rejet et dans le cas d'un échantillon d'une année de prévisions, l'absence de violations ne viole pas l'hypothèse de couverture non conditionnelle.

#### 3.2.1.4.1.4 Test GMM de Candelon et al.(2012)

Le test GMM de Candelon et al.(2012) est un test de duration qui permet de vérifier séparément les hypothèses de couverture et d'indépendance. Les résultats de ce test sont donnés dans les tableaux 95 à 102 de l'annexe C.5.2.1.2. Nous constatons un rejet de l'hypothèse de couverture non conditionnelle (test  $J_{CC,p} = 1$ ) pour les  $VaR_{95\%}$  des actifs ATHEX et CAC et les  $VaR_{99\%}$  des indices IBEX et SP prévues par le modèle classique sur l'année 2007. Les  $VaR_{95\%}$  de l'indice allemand prévues par le modèle LAG et les  $VaR_{99\%}$  des indices IBEX et PSI prévues par les spécifications chaos-stochastiques ne satisfont pas l'hypothèse de couverture non conditionnelle sur l'année 2007. L'hypothèse d'indépendance est vérifiée pour les  $VaR_{95\%}$  de l'indice DAX prévues par le modèle LAG et les  $VaR_{99\%}$  de l'indice espagnol prévues par le modèle classique. Le test de couverture non conditionnelle est invalidé pour un taux de couverture de 5% pour les VaR prévues en 2010 :

- \* par le modèle classique de l'indice ATHEX ;
- \* par les modèles chaos-stochastiques des indices PSI et IBEX.

Il est à relever un rejet de l'hypothèse de couverture conditionnelle pour les actifs ATHEX et PSI respectivement prévues par les modèles classique et chaos-



stochastiques. L'hypothèse d'indépendance n'est pas satisfaite pour les  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle classique pour l'indice hellénique. Il en est de même pour les  $VaR_{95\%}$  prévues par les modèles LAG et MGG des indices IBEX et PSI. En retenant un niveau de confiance de 99%, il est impossible de déterminer les statistiques  $J_{CC}$  et  $J_{IND}$  associées aux  $VaR_{99\%}$  qui n'enregistrent aucune exception. C'est le cas des actifs ATHEX et CAC prévus par le modèle classique. Par ailleurs, les hypothèses de couverture sont rejetées pour les  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle standard pour l'indice SP. Nous relevons aussi un rejet des 3 hypothèses pour les  $VaR_{99\%}$  de l'indice PSI et des indices CAC et PSI respectivement prévues par les modèles LAG et MGG. Dans le cas des modèles de type MRS-G, nous constatons que les trois hypothèses sont acceptées uniquement :

- \* pour toutes les  $VaR_{99\%}$  prévues par les modèles chaos-stochastiques sur l'année 2007 ;
- \* pour les  $VaR_{99\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle MRS-G sur l'année 2010 ;
- \* pour les  $VaR_{99\%}$  de l'indice ATHEX prévues par le modèle LA-MRS-G.

#### 3.2.1.4.1.5 *Risk map*

Le risk map permet de tester l'hypothèse jointe de couverture inconditionnelle des exceptions et super-exceptions. Nous donnons les résultats de ce test dans les tableaux 103 à 106, présentés dans l'annexe C.5.2.1.2. Deux  $VaR_{95\%}$  issues du modèle classique (ATHEX et CAC) et une  $VaR_{95\%}$  prévue par le modèle MGG (CAC) sont en zone orange : elles restent valides à 10% mais présentent un nombre soit trop important (CAC), soit trop faible (ATHEX) de violations. Par ailleurs, sur l'année 2007, le modèle LAG enregistre un taux de succès de 100%. Sur l'année 2010, plusieurs défaillances sont à relever pour le modèle classique :

- \* il est en zone orange pour les  $VaR_{95\%}$  de l'indice ATHEX et les  $VaR_{99\%}$  de l'indice SP ;
- \* les statistiques pour les  $VaR_{99\%}$  de l'indice hellénique ne sont pas définies.

Les modèles chaos-stochastiques restent en zone verte pour tous les actifs et ce quel que soit le taux de couverture. Lorsque nous modélisons les séries par un modèle GARCH avec changements de régimes markoviens, nous constatons :

- \* que les  $VaR_{95\%}$  prévues par le modèle MRS-G sur l'année 2007 sont principalement en zone rouge à l'exception des  $VaR_{95\%}$  de l'indice CAC (zone verte) et des  $VaR_{95\%}$  de l'indice allemand (zone orange) ;
- \* que seules les  $VaR_{95\%}$  des actifs ATHEX et CAC de l'année 2007 prévues par le modèle MG-MRS-G sont invalidées par le risk map ;
- \* que les  $VaR_{95\%}$  des indices espagnol (zone verte) et allemand (zone orange) prévues par le modèle LA-MRS-G sont validées ;
- \* que toutes les  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007 issues des modèles chaos-stochastiques sont validées ;
- \* que les  $VaR_{99\%}$  des indices PSI et SP prévues par le modèle MRS-G sont invalidées par le risk-map ;
- \* que toutes les VaR des indices ATHEX et DAX et les  $VaR_{99\%}$  de l'indice français prévues sur l'année 2010 satisfont l'hypothèse de couverture et ce, quel que soit le modèle retenu.

---

La diversité des tests d'évaluation utilisés a pour objectif de détecter toute forme de dépendance dans le processus de violations de telle sorte à ne pas conclure de manière erronée sur la supériorité d'un modèle. Ce choix est confronté à une diversité des résultats qui ne peuvent être interprétés que de manière agrégée. Face à cette contrainte et devant la nécessité de mettre en évidence l'utilité d'un modèle par rapport à un autre, nous déterminons un classement qui tient compte, à parts égales, des résultats des différents tests d'évaluation. Ainsi, sur l'année 2007, il ressort pour les modèles de type GARCH :

- \* 3 indices pour lesquels un ou plus des 3 modèles retenus valide intégralement les 5 tests d'évaluation. Il en est ainsi des indices PSI et ISEQ qui sont bien représentés par le modèle classique. L'indice allemand est aussi bien pris en compte par le modèle classique que par le modèle MGG ;

- \* 2 indices pour lesquels un ou plus des 3 modèles ne valide pas au plus un test de backtesting. L'indice hellénique est mieux représenté par les modèles chaos-stochastiques qui fournissent des VaR invalides selon le test DB. Pour l'indice IBEX, le modèle standard semble plus approprié ;
- \* enfin l'indice CAC est bien représenté par le modèle LAG et l'indice SP est bien pris en compte par le modèle ARMAG.

Il est intéressant de noter que ces résultats sont propres à l'année 2007 mais que les tests d'évaluation menés sur l'année 2010 tendent non seulement à les confirmer mais aussi à les affiner. En effet, nous retenons dans le classement des modèles pour l'année 2010 :

- \* les modèles chaos-stochastiques en première position pour l'indice allemand et le modèle LAG pour les indices hellénique et français ;
- \* le modèle classique reste en première position pour les indices PSI et IBEX ;
- \* pour 2 indices, le classement obtenu est très relatif dans la mesure où il classe en première position soit le seul modèle existant, soit le moins mauvais. Ainsi, pour les indices SP et ISEQ, le choix d'un modèle standard est un choix par défaut car il ne valide qu'un seul test sur les 5 retenus.

En synthétisant les résultats obtenus pour les modèles de type MRS-G, nous constatons les mauvaises performances de ces modèles : aucune des spécifications retenues ne valide les 5 tests. Cependant, un classement peut être effectué sur la base d'une agrégation des résultats de backtesting. Ainsi, nous notons :

- \* une légère surperformance du modèle MRS-G pour les indices ATHEX, et CAC ;
- \* une meilleure prise en compte des dynamiques par les modèles MG-MRS-G pour les indices IBEX, ISEQ et PSI ;
- \* de meilleurs résultats par le modèle LA-MRS-G pour les indices DAX, IBEX, et SP.

### 3.2.1.4.2 Évaluation de la VaR dans l'échantillon sur les sous-périodes

Nous analysons les VaR prévues par les différents modèles pour les années 2005 et 2008. Les graphiques 96 à 104 donnés dans l'annexe C.5.2.2.1. représentent les VaR à 95% et à 99% dans l'échantillon pour les indices ATHEX, DAX, IBEX, ISEQ, PSI et SP. De ces graphiques, nous constatons :

- \* un nombre relativement faible de violations qui s'explique par la capacité des différents modèles à intégrer la volatilité des rentabilités ;
- \* des VaR chaos-stochastiques qui se confondent pour un certain nombre d'actifs. En effet, les différences calculées entre les VaR prévues par le modèle LAG et celles issues du modèle MGG sont de l'ordre du millième, ce qui ne permet pas de visualiser graphiquement toutes les VaR prévues ;
- \* l'impact de l'équation en moyenne qui traduit l'importance de recourir, quand cela est nécessaire, à un modèle chaotique. Par exemple, pour l'indice SP sur l'année 2008, les VaR prévues par le modèle MGG sont plus importantes que celles issues du modèle standard et elles permettent de couvrir le risque sans être conservatives.

En dépit de ces constatations visuelles, il est impossible de conclure sur la capacité d'un modèle en particulier à prévoir des VaR valides au sens de Christoffersen(1998). Aussi les tableaux 107 à 114, présentés dans l'annexe C.5.2.2.2. donnent les résultats des tests de backtesting appliqués aux différentes prévisions. Avant de commenter les différents résultats obtenus, nous analysons pour chaque modèle et pour chaque actif l'indicateur FEV donné dans les tableaux 107 à 110 [▷ Annexe C.5.2.2.2.] qui traduit la fréquence empirique des violations.

Pour l'année 2005, nous avons retenu deux taux de couverture (5% et 1%). Les tableaux 109 et 110 donnent les fréquences empiriques respectivement pour les  $VaR_{95\%}$  et les  $VaR_{99\%}$ . En se basant sur cet indicateur, nous constatons pour un taux de couverture de 5% le caractère extrêmement conservatif des VaR prévues dans l'échantillon pour tous les actifs. Ce dernier présente des FEV supérieures à ce qui était attendu avec une légère surperformance du modèle MGG. Notons que les modèles chaos-stochastiques enregistrent une FEV

identique pour 3 indices (ATHEX, DAX et IBEX), alors qu'ils partagent cette similitude avec le modèle standard uniquement pour l'indice DAX. Pour l'actif ISEQ, le modèle standard apparaît plus conservatif que le modèle MGG. Pour la même année et pour un taux de couverture de 1%, nous relevons des FEV supérieures au seuil pour les indices CAC, DAX, et SP dans le cas du modèle standard. Tous les actifs modélisés par le modèle LAG fournissent des FEV supérieures au seuil de 1% alors que pour le modèle MGG, seuls l'indice ISEQ enregistre des FEV très conservatives. Pour l'année 2008 et pour un taux de couverture de 5%, toutes les VaR estimées par les 3 modèles enregistrent des FEV supérieures au seuil de 5%. Par ailleurs, deux des trois actifs modélisés par le LAG présentent des FEV identiques à celles fournies par le modèle MGG alors que seul l'indice PSI enregistre une FEV identique pour les trois modèles. Les modèles chaos-stochastiques présentent des FEV similaires pour 3 indices (CAC, PSI, et DAX) alors qu'ils ne partagent cette similitude avec le modèle standard que pour un seul indice (DAX).

Cette analyse comparative présente un intérêt limité en ce sens où les VaR prévues doivent obligatoirement satisfaire les hypothèses de couverture inconditionnelles et d'indépendance pour être valides. Autrement dit, une VaR fortement conservatrice n'est pas meilleure qu'une VaR dont la FEV dépasse à peine le seuil retenu. Tout dépend de la significativité des différences entre la FEV et le taux de couverture retenu. Au-delà de ces comparaisons des risques de premier et second ordre, il reste essentiel de tester la validité de la VaR par des tests appropriés. Nous proposons d'analyser les résultats des différents tests retenus.

#### 3.2.1.4.2.1 *Test LR de Christoffersen(1998)*

Sur l'année 2005, le test de Christoffersen(1998), dont les résultats sont fournis dans le tableau 111[▷ Annexe C.5.2.2.2.], ne valide pas l'hypothèse de couverture conditionnelle pour les indices IBEX et ISEQ modélisés par le modèle ARMAG et pour un taux de couverture de 5%. En revanche, les VaR prévues par ce modèle pour un niveau de confiance de 99% sont valides au sens du test

de Christoffersen(1998) ; Les nombreuses limites liées à ce test alimentent un doute quant au succès des différents modèles retenus.

#### 3.2.1.4.2.2 *Test DQ de Engle et Manganelli(2004)*

Nous donnons les résultats de ce test dans les tableaux 111 & 112 dans l'annexe C.5.2.2.2. Dans le cas de la spécification standard, nous relevons un rejet de l'hypothèse nulle pour les VaR estimées avec un niveau de confiance de 95% sur l'année 2008, par le modèle ARMAG pour les indices CAC selon la statistique DQ3, PSI selon les statistiques DQ1 et DQ3, DAX selon les statistiques DQ2 et DQ3 et ISEQ selon la statistique DQ1. Ces rejets traduisent l'existence d'une autocorrélation aux ordres 1, 2 ou 3 de la séquence des violations, ce qui ne permet pas de valider l'hypothèse d'indépendance des violations. Un constat similaire peut être établi pour l'indice PSI (DQ1 et DQ2) lorsqu'il est modélisé par le modèle LAG et les indices CAC (DQ1, DQ2, DQ3) et DAX (DQ2 et DQ3) lorsque les VaR sont prévues par le modèle MGG. Pour un taux de couverture de 1%, le test DQ rejette l'hypothèse de validité des VaR sur l'année 2005, pour les VaR prévues par les modèles ARMAG des indices DAX, CAC et SP selon les trois statistiques. Les VaR prévues par les modèles chaos-stochastiques pour l'indice DAX sont invalidées par la statistique DQ3. Ces résultats sont intéressants à divers points de vue :

- \* Ils révèlent un lien existant entre la séquence des violations et ses valeurs retardées, lien que n'a pu mettre en évidence le test de Christoffersen(1998) ;
- \* près de la moitié (46%) des VaR invalides au sens du test DQ présentent une autocorrélation des violations d'ordre 3 ;
- \* il est à noter que le rejet de ce test n'est pas nécessairement dû au rejet de l'hypothèse d'indépendance. Mais force est de constater que suite aux résultats du test de Christoffersen(1998), dont la principale faiblesse reste le test d'indépendance, le rejet du test DQ est essentiellement lié au rejet de l'hypothèse d'indépendance.

Il est alors intéressant de confronter les résultats du test de Christoffersen et du test DQ. En termes de succès, le modèle ARMAG échoue pour 29% des indices alors que les spécifications chaos-stochastiques LAG et MGG enregistrent des taux d'échecs respectifs de 25% et 33%. En retenant les spécifications incluant les VaR retardées, nous notons que le test de couverture conditionnelle d'Engle et Manganeli (2004) est rejeté :

- \* pour les prévisions de la VaR sur l'année 2008 établies par les modèles standards et ce, pour les actifs CAC(DQV2, DQV3), PSI (DQV1, DQV2), DAX(DQV2, DQV3), IBEX (DQV2, DQV3), et ISEQ (DQV1) pour un taux de couverture de 5% ;
- \* pour les prévisions de la VaR à 95% établies par le modèle LAG des actifs CAC (DQV2, DQV3), et PSI (DQV1, DQV3) sur l'année 2008 ;
- \* pour les prévisions de la VaR à 95% établies par le modèle MGG des indices CAC (DQV2, DQV3), PSI ( DQV1, DQV3), et DAX (DQV2, DQV3).

Sur l'année 2005, le rejet de l'hypothèse de couverture conditionnelle concerne les actifs DAX (DQV1, DQV2, DQV3), CAC (DQV1, DQV2, DQV3) et SP (DQV1, DQV2, DQV3) prévues par le modèle standard avec un niveau de confiance de 99%. Les prévisions de l'indice allemand par les modèles chaos-stochastiques sont invalides pour un taux de couverture de 1%.

Si l'on retrouve une grande partie des résultats donnés par la version standard du test, il faut noter sur l'année 2008 la détection de l'impact des  $VaR_{95\%}$  retardées à l'ordre 2 du modèle standard pour l'indice français et aux ordres 2 et 3 pour l'indice espagnol sur la séquence des violations.

L'application du test DQ a permis de mettre en évidence des VaR prévues non valides au sens de Christoffersen(1998) par des relations de régression que le test  $LR_{CC}$  n'a pu détecter.

#### 3.2.1.4.2.3 Test DB de Dumitrescu et al.(2012)

Les problèmes liés au test d'Engle et Manganeli (2004) et susmentionnés dans les chapitres précédents nous conduisent à retenir un deuxième test basé sur les

régressions des hits dont le principal avantage réside dans la prise en compte des limites du test précédent. Nous donnons dans les tableaux 111 et 112 de l'annexe C.5.2.2.2., les p-values correspondantes aux tests réalisés sur les 7 spécifications. Cependant, nous suivons les recommandations des auteurs qui suggèrent d'utiliser pour de petites tailles d'échantillons les spécifications DB1, DB5 et DB6 qui donnent de meilleurs résultats par rapport au test DQ. Selon les tests menés sur ces spécifications, la validité de la VaR ne peut être acceptée :

- \* sur l'année 2008, pour les VaR prévues par le modèle standard des indices IBEX (à 5% et 1%) et PSI (5%). Il en est de même pour les VaR prévues par le modèle LAG de l'indice espagnol (1% et 5%), et de l'indice PSI (5%) et celles prévues par le modèle MGG pour l'indice PSI (5%) ;
- \* sur l'année 2005 pour les VaR des indices IBEX, ISEQ prévues par le modèle standard pour un niveau de confiance de 95%.

#### 3.2.1.4.2.4 Test GMM de Candelson et al.(2011)

Il ressort de ces résultats [ $\triangleright$  Tableaux 107 à 110- Annexe C.5.2.2.2.] pour l'année 2008 et pour un taux de couverture de 5% un rejet des hypothèses de couverture (in)conditionnelles pour les VaR de l'indice PSI prévues par les trois modèles. L'hypothèse d'indépendance n'est pas vérifiée pour l'indice PSI prévu par le modèle ARMAG, pour l'indice PSI prévu par les modèles LAG et MGG et pour l'indice SP prévu par le modèle MGG.

Pour un taux de couverture de 1%, les VaR prévues par le modèle ARMAG pour l'indice IBEX sont invalides puisqu'elles ne satisfont pas les hypothèses de couverture conditionnelle et d'indépendance. Les VaR de l'indice espagnol prévues par le modèle LAG sont invalides puisque les hypothèses de couverture conditionnelle et d'indépendance sont rejetées.

Pour l'année 2005, les 3 hypothèses sont rejetées pour les VaR de l'indice ISEQ prévues par le modèle ARMAG et ce, pour un taux de couverture de 5%. Par ailleurs, l'hypothèse d'indépendance est rejetée pour les prévisions des VaR de l'indice ATHEX fournies par le modèle ARMAG. Les VaR de l'indice espagnol



prévues par le modèle standard ne satisfont pas les hypothèses de couverture. Pour un niveau de confiance de 95%, le modèle MGG échoue pour l'indice ISEQ.

#### 3.2.1.4.2.5 *Risk map (RM)*

Les résultats du RM sont reportés dans les tableaux 113 et 114 de l'annexe C.5.2.2.2. Le modèle ARMAG est en zone orange pour l'indice ISEQ avec 5 exceptions et une super exception : les VaR restent valides à 10% mais elles sont moins performantes que celles fournies par le modèle MGG. Pour l'année 2008, les 3 modèles sont en zone orange pour l'indice PSI (95%) et les VaR de l'indice français prévues par le modèle standard ne sont pas très performantes comparativement à celles des modèles chaos-stochastiques. L'interprétation de ce test est assez particulière car la comparaison de deux séries de VaR prévues n'est pas basée sur le nombre d'exceptions réalisées mais sur l'hypothèse d'une couverture inconditionnelle des exceptions et des super exceptions.

---

L'application des tests de backtesting permet d'écarter les modèles incapables d'intégrer les structures existantes de telle sorte à rendre compte de manière efficiente des mouvements du marché. Dans cet objectif, nous avons retenus 5 tests dont les performances diffèrent amplement. En synthétisant ces différents résultats, nous pouvons établir un classement pour chaque actif et sur chaque période :

- \* pour l'année 2005 : le modèle LAG pour les indices IBEX et ATHEX et le modèle MGG pour les indices IBEX, CAC et ATHEX. Ces modèles valident les 5 tests retenus pour ces actifs. Pour l'indice ISEQ, nous choisissons le modèle MGG qui valide tous les tests excepté le test GMM à 5%. Nous sélectionnons les modèles chaos-stochastiques pour l'indice allemand qui ne valident pas le test DQ pour un taux de couverture de 1%.
- \* pour l'année 2008, les prévisions de 2 actifs valident les 5 tests : les indices ATHEX et SP sont bien représentés par le modèle standard. Pour l'indice

ISEQ, nous retenons le modèle standard dont les prévisions restent invalides au sens des tests GMM et DQ. L'indice espagnol est bien décrit par le modèle LAG si l'on fait abstraction des résultats des tests DB et GMM tandis que les structures de l'indice français sont bien prises en compte par les modèles chaos-stochastiques selon les tests LR, DB, GMM et RM. L'indice allemand est aussi bien décrit par le modèle standard que par le modèle MGG mais ces derniers restent invalides au sens du test DQ. De manière à discriminer certains modèles qui apparaissent aussi performant l'un que l'autre et de telle sorte à juger de la capacité de ces différents modèles à prévoir l'évolution des rentabilités, nous appliquons les tests de backtesting aux prévisions hors-échantillon.

### 3.2.2 MODÉLISATIONS (CHAOS)-STOCHASTIQUES DES INDICES DE LA ZONE EURO : UNE ÉVALUATION HORS ÉCHANTILLON

L'étude des séries temporelles financières, notamment des indices boursiers révèle la confiance des investisseurs dans l'économie nationale. Elle est un indicateur primordial dont les résultats permettent de jauger l'impact des décisions des politiques économiques auprès des investisseurs. Au-delà de cette conception macroéconomique, l'analyse des séries temporelles financières s'inscrit dans un cadre microéconomique qui doit aider l'investisseur à comprendre et prévoir l'évolution des prix des actifs qu'il détient. Ces deux facettes de l'analyse des séries temporelles financières sont synthétisées dans le cadre des accords de Bâle avec d'une part Bâle II qui introduit une approche microéconomique du risque de marché et Bâle III qui envisage un cadre macroéconomique des risques. Quel que soit le cadre d'analyse dans lequel l'étude est réalisée, une étape cruciale consiste à montrer l'intérêt des modèles utilisés et leur capacité à satisfaire les impératifs fixés. Plus précisément, l'étude porte un intérêt particulier à la prévision hors-échantillon. Cette dernière est d'autant plus intéressante qu'elle conduit inéluctablement à un choix à l'aveugle. En effet, seules les performances finales d'un modèle permettent de juger de la capacité de ce modèle à rendre compte et prévoir l'évolution des dynamiques et ce,

quelle que soit la complexité du modèle.

Dans le cadre de cette étude, nous avons retenu les différents modèles utilisés précédemment. Pour la prévision hors-échantillon, nous avons eu recours à une prévision de type one-step-ahead, c'est-à-dire une ré-estimation sur la même taille d'échantillon. Plus précisément, nous avons estimé les différents modèles sur une taille d'échantillon  $N$  avec  $N = 1, \dots, T$  puis nous avons prévu la  $T + 1$  observation. Nous réitérons ensuite la procédure en retenant un échantillon de taille  $N$  avec  $N = 2, \dots, T + 1$  et ainsi de suite. Compte tenu des critères spécifiques à chaque modèle, le nombre de prévisions retenu varie entre 259 et 261 prévisions. Par ailleurs, nous nous inscrivons dans cette section dans le cadre défini par les accords de Bâle qui impose le calcul des VaR avec un niveau de confiance de 99%. De plus, l'introduction des VaR stressées ou contracycliques dans les accords Bâle III nous conduit à déterminer, lorsque cela est possible des VaR contracycliques. Ainsi, nous retenons les VaR contracycliques des indices CAC, IBEX et PSI.

Nous proposons une double évaluation. La première est une évaluation économétrique essentiellement basée sur des tests d'égalité ou de supériorité prédictive. De manière à respecter le cadre financier, nous optons pour une fonction de pertes basée sur la VaR. Nous proposons de recourir à 3 tests : le test de Giacomini et White(2006), le test de Hansen(2005) et le test de White(2000) dont une présentation détaillée est fournie dans l'annexe C.6.1.1. La seconde évaluation est basée sur 4 tests de backtesting : le test GMM, le test DB, le test LR et le test DQ. Une synthèse de ces évaluations permet de conclure sur les capacités prédictives des modèles pour chaque actif.

Nous évaluons dans un premier point les capacités prédictives des modèles. Nous détaillons dans un deuxième point les résultats des tests de backtesting.

### 3.2.2.1 ÉVALUATION DES CAPACITÉS PRÉDICTIVES

De manière à juger de la pertinence des modèles considérés à rendre compte des dynamiques qui caractérisent les indices européens, nous pro-

posons une analyse des aptitudes prédictives des différentes modélisations par l'application de tests de type Superiority Predictive Ability. Ce choix s'explique par la volonté de mettre en exergue le modèle le plus approprié pour rendre compte des dynamiques existantes.

Suite aux difficultés d'identification des modèles les plus performants, une partie de la littérature économétrique s'est intéressée aux capacités prédictives des modèles, en comparant les fonctions de pertes de plusieurs modèles. Il en est ainsi des tests de Diebold et Mariano(1995) et de Giacomini et White(2006) qui permettent de comparer les modèles deux à deux, du test de White(2000) et de Hansen(2005) qui autorisent la comparaison de plusieurs modèles simultanément. Deux caractéristiques importantes de ces tests doivent être précisées :

- le critère de comparaison : dans le cas du test DM, l'hypothèse nulle vise à tester l'égalité des fonctions de pertes. L'hypothèse alternative de ce test ne permet pas de conclure de manière catégorique sur la supériorité d'un modèle par rapport à un autre. Le test de Giacomini et White(2006) est plus large dans la mesure où il permet sous l'hypothèse nulle de vérifier l'égalité conditionnelle et inconditionnelle des fonctions de pertes et sous l'hypothèse alternative de conclure sur la supériorité d'un modèle par rapport à un modèle concurrent. Les tests de Hansen(2005) et White(2000) s'inscrivent dans ce même objectif à savoir la mise en évidence d'un modèle surperformant ;
- la fonction de pertes : il s'agit d'un critère important dont le choix peut impacter le résultat final. Il existe dans la littérature plusieurs fonctions de pertes très utilisées, basées essentiellement sur les critères MSE. La finalité de ce travail nous conduit à retenir une fonction de pertes différente :

$$L_t = \begin{cases} R_t - VaR_t & \text{si } VaR_t < R_t \\ VaR_t - R_t & \text{si } R_t < VaR_t \end{cases} \quad (143)$$

Ce choix se justifie amplement par l'objectif poursuivi mais il est aussi un compromis pour éviter tout problème dans l'application des

tests. Plus précisément, il est d'usage de retenir la fonction de pertes suivante :

$$L_t = \begin{cases} R_t - VaR_t & \text{si } VaR_t < R_t \\ 0 & \text{si } R_t < VaR_t \end{cases} \quad (144)$$

Les problèmes qu'induit une forte occurrence de valeurs nulles ne permettent pas dans certains cas de satisfaire certains calculs computationnels liés aux tests et par ricochet, de déterminer les statistiques des tests. C'est la principale raison du choix d'une fonction de pertes différente.

Nous retenons 3 tests en particulier (Test de Giacomini et White(2006), test de Hansen(2005) et le test de White(2000)) que nous présentons dans l'annexe C.6.1.1.. Nous commentons les résultats de ces trois tests appliqués sur les prévisions hors échantillon.

### **3.2.2.1.1 Test de Giacomini et White(2006)**

Le tableau 115 de l'annexe C.6.1.2. donne les résultats du test de Giacomini et White(2006) pour les prévisions établies par les modèles de type GARCH. Il ressort de ces résultats une équivalence en termes de performances des modèles classique et MGG pour les VaR contracycliques calculées pour l'indice PSI. Le modèle LAG fournit des prévisions équivalentes à celles du modèle classique pour les VaR contracycliques des indices IBEX et PSI. Les capacités prédictives des modèles chaos-stochastiques sont équivalentes pour les VaR contracycliques de l'indice PSI. Ces résultats traduisent l'absence de modèles surperformants puisque les modèles retenus restent candidats pour rendre compte des dynamiques de l'actif et le test de Giacomini et White(2006) n'a pu discriminer les différents modèles.

À contrario, les tests UPA et CPA permettent de statuer sur les capacités prédictives des modèles pour certains actifs. Ainsi, le modèle MGG surperforme le modèle classique pour les actifs ATHEX, CAC, DAX, IBEX, PSI, et pour les VaR contracycliques de l'indice français. Lorsque nous comparons les deux modèles chaos-stochastiques,

nous constatons une surperformance du modèle MGG par rapport au modèle LAG pour les actifs ATHEX et CAC et pour les VaR contracycliques de l'indice CAC. Le modèle LAG est mieux placé que le modèle MGG pour les indices DAX, IBEX, PSI. Ces premiers résultats appuient l'idée d'une modélisation chaos-stochastique plus adaptée aux indices européens qui devra se confirmer par d'autres tests. Le tableau 116 de l'annexe C.6.1.2. donne les résultats du test de Giacomini et White(2006) pour les modèles de type MRS-G. Nous relevons une surperformance du modèle MRS-G comparativement aux modèles chaos-stochastiques pour les indices CAC, DAX, ISEQ et IBEX alors que le modèle LA-MRS-G excelle pour les actifs ATHEX, PSI et SP.

Une analyse des résultats des sous-périodes indique :

- pour les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  pour l'année 2007, une équivalence des capacités prédictives des modèles chaos-stochastiques pour l'indice espagnol. Par ailleurs, les modèles chaos-stochastiques surperforment toujours le modèle classique alors que le modèle MGG est plus performant que le modèle LAG pour les indices ATHEX et DAX ;
- pour les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  pour l'année 2010, une équivalence des capacités prédictives des trois modèles pour l'indice CAC, des modèles chaos-stochastiques pour l'indice PSI. Le modèle classique est incapable de fournir de meilleures prévisions pour les actifs PSI et IBEX comparativement aux modèles chaos-stochastiques.

### 3.2.2.1.2 Tests RC et SPA

Les tableaux 117 à 122 de l'annexe C.6.1.3. donnent les p-values associées aux tests de Hansen(2005) et de White(2000). La particularité de ces tests permet de comparer plusieurs modèles. Le tableau 117 [ $\triangleright$  Annexe C.6.1.3.] montre, sur la période [2003-2011], une dominance du modèle classique par rapport aux modèles chaos-stochastiques pour les VaR contracycliques des indices PSI et IBEX. Les deux tests confirment les meilleures capacités prédictives du modèle MGG pour

l'ensemble des indices exceptés pour les actifs DAX, IBEX et PSI. Pour ce dernier, le modèle LAG donne de meilleurs résultats mais échoue pour les indices ATHEX et CAC et pour les VaR contracycliques de l'indice français. Nous constatons qu'il est difficile de conclure sur la surperformance d'un modèle par rapport à un autre pour les VaR contracycliques des indices PSI et IBEX dans la mesure où l'hypothèse nulle est toujours acceptée. Ce résultat est lié à l'absence de violations dans le cas des VaR contracycliques. Plus précisément, les pertes subies par les indices susmentionnés sont très proches pour les trois modèles mais une discrimination à partir des valeurs des p-values reste possible. Ainsi, on peut conclure sur la surperformance du modèle ARMAG pour les VaR contracycliques. Dans le cas des modèles avec changements de régimes markoviens, nous constatons une répartition égalitaire entre les modèles : le modèle classique est mieux adapté pour les indices de l'Europe du Nord, le modèle LA-MRS-G excelle particulièrement pour les indices de l'Europe du Sud.

Lorsque la comparaison inclut les trois modèles, la spécification MGG excelle pour les indices boursiers. Lorsque la comparaison est effectuée entre le modèle classique et modèle MGG, nous constatons une meilleure performance du modèle MGG dans le cas des indices ATHEX, DAX, IBEX, ISEQ. Les performances du modèle LAG pour les prévisions de l'année 2010 sont relativement mauvaises par rapport au modèle classique.

---

L'évaluation des capacités prédictives reste une étape cruciale dans l'identification des modèles adéquats. Elle peut prendre différentes formes et elle peut être menée sur différents critères. En retenant une fonction de pertes basée sur la VaR, nous souhaitons axer cette évaluation sur les pertes financières que peut induire un modèle. Cette évaluation économétrique diffère des tests de backtesting qui ne tiennent pas toujours compte de l'ampleur des pertes. Elle est une autre façon d'évaluer la capacité des modèles à satisfaire les impératifs de

résultats mais contrairement aux tests de backtesting, elle n'est pas soumise à des objectifs quantitatifs. Plus précisément, le processus d'évaluation n'est qu'une comparaison entre les modèles et les conclusions qui en découlent mettent en évidence les modèles dont les pertes sont les moins importantes. Des différents tests utilisés, nous tirons divers enseignements :

- sur la période [2003-2011], les modèles chaos-stochastiques de type GARCH supplantent largement le modèle classique dans la mesure où les trois tests valident la supériorité des spécifications chaos-stochastiques pour l'ensemble des  $VaR_{99\%}$ , excepté pour les VaR contracycliques des indices PSI et IBEX. Une comparaison entre les modèles chaos-stochastiques révèle la supériorité du modèle MGG pour les actifs ATHEX, CAC et pour les VaR contracycliques de l'indice CAC. Lorsque les modèles intègrent des changements de régimes, le modèle classique rend mieux compte des indices de l'Europe du Nord alors que les modèles chaos-stochastiques sont mieux adaptés pour les indices de l'Europe du Sud ;
- sur la période [2004-2006] : nous retrouvons les performances particulières des modèles chaos-stochastiques par rapport au modèle classique ;
- sur la période [2007-2009], la supériorité du modèle MGG se confirme.

De cette évaluation, nous retiendrons l'utilité et l'apport des modèles chaos-stochastiques dans les spécifications de type GARCH. Dans le cas des modèles à changements de régimes, les résultats, bien qu'ils soient en faveur des modèles chaos-stochastiques, ne sont pas unanimes dans la mesure où les indices de l'Europe du Nord sont mieux décrits par le modèle classique. Malgré l'intérêt et les enseignements tirés de cette évaluation, nous devons souligner son caractère insuffisant lié aux critères d'évaluation retenus, basés essentiellement sur une mesure synthétique des pertes. L'évaluation par les tests de backtesting offre des précisions supplémentaires.



### 3.2.2.2 PRÉVISIONS HORS-ÉCHANTILLON : UNE ÉVALUATION EN TERMES DE BACKTESTING

Afin de juger de la pertinence des différents modèles à intégrer et prévoir les structures existantes dans les indices européens, une évaluation en termes de backtesting des  $VaR_{99\%}$  est entreprise. Elle permet de mettre en exergue le modèle le plus adapté pour anticiper les pertes maximales futures.

Avant de commenter les différents tests, une analyse des FEV, données dans les tableaux 127 à 130 de l'annexe C.6.2., fournit des informations intéressantes. Ainsi, pour les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  pour l'année 2012, nous constatons une fréquence légèrement plus élevée des VaR conservatives dans le cas des modèles LAG (70%). Nous relevons des FEV identiques entre les trois modèles de type GARCH pour 3 actifs, les modèles ARMAG et MGG enregistrent des FEV identiques pour 5 actifs. Lorsque les modèles intègrent des changements de régimes, le risque de premier ordre est beaucoup plus important puisque les FEV calculées dépassent largement le taux de couverture. Ce constat est valable quel que soit le modèle même s'il faut reconnaître une légère surperformance des modèles chaos-stochastiques. Pour les prévisions de l'année 2007, nous constatons des VaR moins conservatives comparativement à celles calculées pour l'année 2012 mais nous relevons des FEV très proches pour les trois modèles. Ce constat est tout aussi valable pour les prévisions de la VaR de l'année 2010. Nous détaillons les résultats en fonction des périodes retenues

- Période [2003-2011] : le test GMM offre la possibilité de vérifier les trois hypothèses de couverture et d'indépendance. Nous constatons, à partir de ce test, l'absence d'un modèle unanimement supérieur aux autres modèles. Pour les prévisions de la VaR pour l'année 2012, nous notons que les 3 modèles de type GARCH satisfont les hypothèses du test GMM [▷ Tableau 127-Annexe C.6.2.]. Il est difficile d'établir un classement des modèles à partir de ce test qui valide les 3 spécifications mais nous notons, compte tenu d'une FEV plus faible,

la supériorité du modèle LAG pour les actifs CAC et DAX, du modèle MGG pour l'indice allemand. Les tests DB (DB1, DB5 et DB6), donnés dans les tableaux 123 à 126 de l'annexe C.6.2., permettent d'affiner ces résultats : ils indiquent un rejet de l'hypothèse de validité des  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle ARMAG pour les actifs CAC, DAX et SP. Il en est de même pour l'indice CAC prévu par le modèle MGG. Les tests LR et DQ ne permettent pas de classer les modèles et le seul enseignement que l'on peut tirer de ces tests porte sur la supériorité du modèle LAG pour les indices DAX et CAC. Le modèle MGG valide l'ensemble des tests pour les prévisions de l'indice allemand. Pour les autres actifs (ATHEX, IBEX et PSI), il reste très délicat de conclure sur la surperformance d'un modèle par rapport à un autre à cause de résultats très proches.

Dans le cas de modèles de type MRS-G, le test GMM rejette l'hypothèse de validité des  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle MRS-G pour tous les actifs sauf l'indice ISEQ. Les tests DB, LR et DQ rejettent l'hypothèse de validité pour l'ensemble des  $VaR_{99\%}$  prévues par le modèle MRS-G. Il en est de même pour les prévisions du modèle MG-MRS-G excepté pour les indices CAC, DAX, ISEQ et PSI. Dans le cas du modèle LA-MRS-G, l'hypothèse de validité est satisfaite pour les indices de l'Europe du Nord. Le principal constat que l'on peut établir porte sur l'inefficacité du modèle MRS-G dont les prévisions sont invalidées par au moins un des 4 tests de backtesting. Les modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens donnent des résultats satisfaisant pour les indices de l'Europe du Nord et pour l'indice PSI dans le cas du modèle MG-MRS-G ;

- Périodes [2004-2006] & [2007-2009] : les prévisions des  $VaR_{99\%}$  pour l'année 2007 sont validées par le test GMM lorsqu'elles proviennent du modèle classique (excepté pour les actifs IBEX et SP) ; lorsqu'elles proviennent du modèle MGG (hormis pour l'indice IBEX) et quand elles sont données par le modèle LAG (excepté pour l'indice IBEX). Ces résultats sont confirmés et affinés par les tests DB, LR, et DQ qui rejettent l'hypothèse de validité pour les  $VaR_{99\%}$  du modèle ARMAG

prévues pour l'indice ISEQ. Les  $Var_{99\%}$  prévues par le modèle MGG des actifs ISEQ et IBEX ne satisfont pas aux hypothèses de validité et les  $Var_{99\%}$  de l'indice espagnol prévues par le modèle LAG violent les hypothèses de couverture et d'indépendance.

À l'instar des prévisions établies pour l'année 2012, il reste très difficile de discriminer les modèles entre eux tant les FEV calculées et les résultats des tests sont proches. Par ailleurs, les trois modèles valident le test GMM pour les indices CAC et PSI. Le tableau 126 de l'annexe C.6.2. indique un rejet de l'hypothèse de validité pour les prévisions des VaR des actifs CAC et PSI prévues par les modèles chaos-stochastiques et de l'indice espagnol prévues par les modèles LAG et ARMAG.

---

Nous avons mené dans cette section une double évaluation des prévisions hors échantillon établies par les différents modèles. En synthétisant les différents résultats obtenus, il est possible d'ériger un modèle pour chaque actif qui satisfait soit aux tests de prédiction, soit aux tests de backtesting, soit aux deux. Sur la période [2003-2011], les modèles GARCH sont d'autant meilleurs que lorsqu'ils incluent une partie chaotique. Ainsi, le modèle LAG surperforme les modèles ARMAG et MGG pour l'indice allemand. Pour les autres actifs, le résultat final est un compromis :

- pour l'indice français, les tests sur les capacités prédictives indique que le modèle MGG donne de meilleurs résultats mais le test DB ne valide pas les  $Var_{99\%}$  fournies par les modèles ARMAG et MGG. Compte tenu des limites des tests de supériorité prédictive et de l'unanimité des tests de backtesting, le modèle LAG est retenu comme étant le meilleur modèle à rendre compte des dynamiques de l'indice français.
- un arbitrage similaire à l'indice français est effectué pour les indices ATHEX, IBEX et PSI : les tests de backtesting valident les prévisions des trois modèles mais les tests des capacités prédictives statuent

en faveur du modèle MGG pour l'indice hellénique et en faveur du modèle LAG pour les indices de la péninsule ibérique ;

- en ce qui concerne les VaR contracycliques, l'incapacité des tests de backtesting à discriminer les trois modèles nous conduit à retenir les conclusions des tests de capacités prédictives qui indiquent de meilleures prévisions du modèle classique pour les VaR contracycliques des indices PSI et IBEX et du modèle MGG pour les VaR contracycliques de l'indice CAC.

Dans le cas des modèles avec changements de régimes markoviens, les mauvais résultats des tests de backtesting du modèle standard (MRS-G) ne permettent pas de retenir ce dernier pour un ou plusieurs actifs. L'arbitrage s'effectue alors entre les modèles chaos-stochastiques :

- pour les indices CAC et DAX, le modèle LA-MRS-G valide aussi bien les tests de backtesting que le modèle MG-MRS-G mais il donne de meilleurs résultats selon les tests de capacités prédictives.
- pour les indices ISEQ et PSI, le modèle MG-MRS-G est le mieux placé pour rendre compte des dynamiques de ces indices.

En ce qui concerne les prévisions des  $VaR_{99\%}$  pour l'année 2007, un croisement des résultats indique :

- la supériorité du modèle classique pour l'indice CAC ;
- la supériorité du modèle MGG pour les actifs ATHEX et DAX.

Les prévisions des  $VaR_{99\%}$  ne valident pas les tests de backtesting. Pour l'année 2010, les tests de backtesting révèlent de très faibles résultats pour les trois modèles.

### 3.3 RUPTURES DE CORRÉLATIONS : UNE DOUBLE ANALYSE CHAOS-STOCHASTIQUE DES INDICES DE LA ZONE EURO

Les relations particulières qu'entretient le risque de marché avec 3 grands risques financiers conduisent les régulateurs à exiger une meilleure anticipation de ce risque sur les marchés financiers. Il est étroitement lié au risque de liquidité dont il peut découler suite à un risque d'illiquidité sur les marchés. Il joue un rôle non négligeable dans le risque systémique qu'il peut précipiter s'il est mal anticipé. Enfin, il occupe une place de choix dans les diverses approches du risque de contagion. Ce dernier, au coeur des préoccupations au cours des dernières années, est difficile à détecter notamment en raison des désaccords qui existent quant à sa définition, sa quantification et sa modélisation. Il est au centre d'un débat passionné entre ceux qui considèrent qu'il n'existe pas de phénomènes de contagion sur les marchés financiers et ceux qui voient dans l'intensification des relations en période de crise la matérialisation d'une contagion.

L'approche de ce risque par l'analyse des transmission de chocs, de volatilité vise à étudier l'évolution des risques de marché bivariés de manière à détecter une augmentation éventuelle de ce risque. Le risque de contagion est avéré s'il existe une transmission du risque de marché plus importante en période de forte volatilité. Cette augmentation des liens qui peuvent exister entre deux marchés a longtemps été mesurée par des coefficients de corrélations linéaires dont les insuffisances ne permettaient pas de statuer sur l'existence d'une relation contagieuse. Néanmoins, le principe selon lequel il existe une rupture des corrélations, qu'elle soit mesurée par un coefficient linéaire ou non, dès lors que deux indices boursiers sont caractérisés par un phénomène de contagion, est largement accepté.

Nous proposons dans cette section, une double analyse des ruptures de corrélations :

- en sous-périodes : après avoir scindé la période complète en deux sous périodes, nous modélisons chacune d'entre elles par un modèle

chaos-stochastique et nous analysons les résultats pour détecter une intensification des relations. Cette analyse n'est menée que sur les relations bivariées caractérisées par des corrélations conditionnelles dynamiques qui peuvent être prises en compte par un modèle Mackey-Glass-DCC-GARCH ;

· dans un cadre unifié : nous amendons le modèle de Haas et Liu(2014) afin de rendre compte des structures chaotiques tout en intégrant les corrélations conditionnelles constantes avec changements de régimes markoviens.

### 3.3.1 RÉSOLUTION DU PHÉNOMÈNE DE CORRELATIONS BREAKDOWNS PAR UNE APPROCHE CHAOS-STOCHASTIQUE STANDARD <sup>81</sup>

La présence de structures chaotiques d'une part et la nécessité d'un modèle non linéaire capable de capter les dynamiques complexes des séries financières d'autre part nous conduisent à envisager une modélisation par un modèle de Mackey-Glass bruité. L'efficacité de ce modèle a fait l'objet d'un certain nombre de publications dans le cas univarié (Kyrtsou et Terraza(2002), Kyrtsou, Labys et Terraza(2004), Kyrtsou et Terraza(2003)) mais aussi dans le cas multivarié (Kyrtsou et Labys(2006), Kyrtsou et Labys(2007), Kyrtsou et Vorlow(2009)). Nous amendons ces modèles par l'introduction des modèles GARCH multivariés avec corrélations conditionnelles dynamiques <sup>82</sup>.

Nous proposons une combinaison semblable à celle de Kyrtsou et al.(2006) en apportant une amélioration dans la prise en compte de l'effet ARCH. Nous utilisons un modèle de type DCC-GARCH pour l'équation de la variance pour rendre compte des interactions qui peuvent exister dans les corrélations conditionnelles :

---

81. Cette section constitue l'application empirique de l'article Hennani et Terraza(2014)"La crise des dettes souveraines : contagions ou interdépendances des principaux indices de la zone euro ?", DR LAMETA 2014-04.

82. Une revue de la littérature succincte des modèles GARCH multivariée est présentée dans l'annexe C.7.1.

$$\begin{aligned}
X_{1t} &= \alpha_1 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1 + X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_1 X_{1,t-1} + \alpha_2 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1 + X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_2 X_{2,t-1} + \epsilon_{1,t} \\
X_{2t} &= \alpha_3 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1 + X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_3 X_{1,t-1} + \alpha_4 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1 + X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_4 X_{2,t-1} + \epsilon_{2,t}
\end{aligned}$$

Avec

$$\epsilon_t = \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix} \quad (144)$$

Et  $\epsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$  où  $\Omega_{t-1}$  est l'ensemble d'information disponible en  $t-1$ .

$H_t$  est définie par :

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (145)$$

$$D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2}) \quad (146)$$

$$R_t = (\text{diag} Q_t)^{-1/2} Q_t (\text{diag} Q_t)^{-1/2} \quad (147)$$

où  $X_{it}, c_i, \tau_i$  avec  $i = 1, 2$  désignent respectivement les rentabilités des actifs considérés, les dimensions et les retards retenus.  $H_t$  désigne la matrice des variances/covariances,  $D_t$  est une matrice diagonale qui contient les variances alors que la matrice  $R_t$  est la matrice des coefficients de corrélations linéaires. Pour plus de précisions sur les modèles GARCH multivariés, voir l'annexe C.7.1. Pour mettre en évidence les phénomènes de contagion susceptibles d'apparaître en période de crise, nous estimons sur chaque couple d'indices le modèle MG-DCC-GARCH.

### 3.3.1.1 CONTAGIONS, INTERDÉPENDANCES ET RELATIONS UNILATÉRALES : UNE INTENSIFICATION EN PÉRIODE DE CRISE

L'estimation des liens entre les différents indices européens a pour objectif de vérifier si ces indices sont interdépendants ou si la relation qui les caractérise est une relation de contagion. Dans cette perspective, nous avons estimés toutes les relations sur les 2 sous-échantillons [ $\triangleright$  Annexe C.7.2.]<sup>83</sup>. Les résultats obtenus sont représentés graphiquement dans les figures 32 et 33 et analysés en prenant en compte 4 caractéristiques :

---

83. À titre d'illustration, nous donnons dans l'annexe C.7.4., les résultats obtenus sur la période complète.

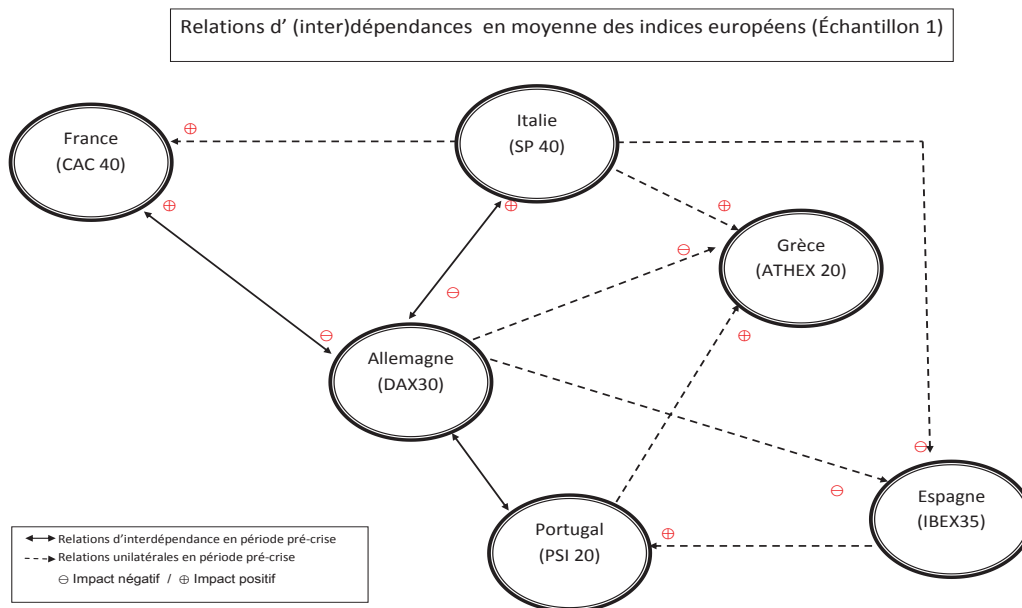
1. La significativité des paramètres estimés des différentes relations bivariées.

Les tableaux 12 et 13 résument les différentes relations mises en évidence (interdépendances, relations unilatérales...). Les résultats de l'estimation indiquent que pour ces différentes relations, l'hypothèse de structures chaotiques hautement complexes dans la moyenne est confirmée. Nous remarquons trois relations d'interdépendance commune aux deux échantillons : la première concerne les indices français et allemand, la seconde, les indices allemand et italien et la dernière les indices allemand et portugais. De nouvelles relations d'interdépendances ont été mises en évidence pour l'échantillon 2 : CAC-IBEX, CAC-SP et DAX-PSI. Nous constatons que les deux dernières relations se sont intensifiées en période de crise puisqu'en période normale, les relations CAC-SP et DAX-PSI sont des relations unilatérales.

2. La nature de l'impact d'un indice sur un autre

Il est possible de caractériser la nature des relations par la différence des coefficients  $\alpha$  et  $d$  (Kyrtsov et al. (2006, 2009)). Le tableau 11 indique que la plus forte influence est celle de l'indice français sur le DAX en période de crise (en valeur absolue). Nous remarquons aussi que cet impact est beaucoup plus important dans la période stressée que dans la période calme, ce qui indique non seulement une intensification des relations franco-allemandes en période de crise mais aussi les externalités positives créées par l'indice allemand sur l'indice français. Cet impact positif de l'indice allemand est aussi observé pour l'indice italien dans les deux périodes. Il est intéressant de noter que pour les deux périodes, l'indice italien affecte négativement l'indice allemand. Pour les relations entre les indices français et italien, nous notons que ce dernier influence positivement l'indice français quand celui-ci l'impacte négativement. Par ailleurs, en période calme l'effet feedback sur l'indice français le plus important est celui de l'indice italien alors qu'en période de crise, c'est celui de l'indice allemand. Ce dernier affecte sensiblement les indices de la péninsule ibérique. L'impact du DAX sur ces indices est négatif pour la période stressée.





Graphique 32 – Relations d'interdépendances en moyenne pour l'échantillon 1

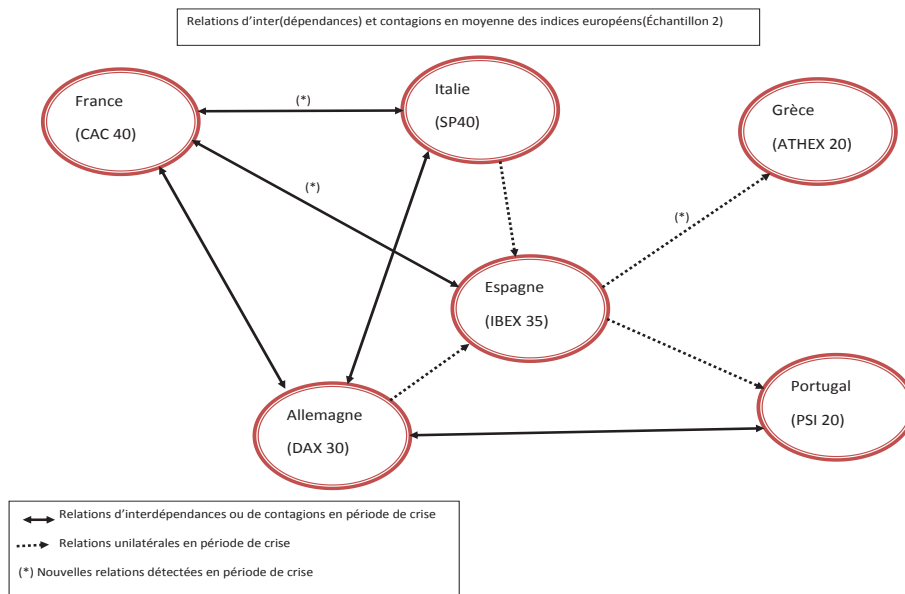
Il est intéressant de noter que pour cette période, l'indice français est celui qui affecte le plus l'indice espagnol mais cet impact est négatif. Autrement dit, les deux indices moteurs que constituent le CAC et le DAX influencent négativement l'indice espagnol et cette influence est, avec celle de l'indice italien, la plus forte influence ressentie par l'indice espagnol.

### 3. L'importance de l'influence d'un indice sur un autre

En utilisant les paramètres estimés il est possible d'évaluer l'importance de l'impact d'un indice sur un autre qu'il soit positif ou négatif. Ainsi, nous relevons qu'en période calme, l'indice italien est celui qui a la plus importante influence sur l'indice allemand alors que ce dernier impacte principalement l'indice français. Nous notons aussi que ces relations sont fortement significatives car plus importantes en période normale qu'en période de crise. En période de crise c'est l'impact de l'indice allemand sur l'indice espagnol qui est le plus important et celui de l'indice français sur l'indice allemand.

### 4. Des dynamiques divergentes des corrélations conditionnelles dynamiques.

Les figures 105 à 110 [Annexe C.7.3.] représentent les corrélations



Graphique 33 – Relations d'interdépendances et de contagions en moyenne pour l'échantillon 2

conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH pour les deux sous-périodes. Elles indiquent en premier lieu que les différentes relations estimées sont caractérisées par des corrélations conditionnelles dynamiques positives et importantes puisqu'elles avoisinent souvent le seuil de 0.8. Nous notons tout de même des dynamiques très hétérogènes pour les différentes relations. Ainsi, nous relevons des dynamiques très divergentes d'une période à l'autre pour les relations entre l'indice italien d'une part et les indices espagnol et français d'autre part mais aussi entre le DAX et l'indice espagnol. Contrairement à la relation franco-allemande marquée par une évolution similaire et presque constante sur nos deux périodes, nous constatons que plusieurs relations sont caractérisées par des dynamiques très volatiles durant les deux périodes comme c'est le cas des relations entre l'indice italien et les indices espagnol et allemand. Nous pouvons supposer un phénomène de contagion en variance pour les relations entre l'indice italien et les indices allemand et français, de même que pour la relation entre l'indice allemand et espagnol

dans la mesure où on observe une intensification des corrélations conditionnelles dynamiques en période de crise.

Il existe un phénomène de contagion limité à 2 ou 3 indices qui ne se propage pas comme un effet domino sur l'ensemble des indices. Si on peut parler de contagion pour les relations entre les indices allemand et français et dans une moindre mesure entre les indices allemand, français et italien, nous ne pouvons pas conclure sur un phénomène de contagion en moyenne entre ces indices et les indices espagnol, grec, et portugais. Nous identifions clairement 2 sphères différentes : l'une composée des pays d'Europe du Nord, l'autre composée des pays d'Europe du Sud sans pour autant détecter de lien fort qui pourrait établir la jonction entre ces deux sphères.

| Échantillon 1 |      |                          | Échantillon 2 |      |                          |
|---------------|------|--------------------------|---------------|------|--------------------------|
| Relations     |      | $(\alpha_2 - d_2) * 100$ | Relations     |      | $(\alpha_2 - d_2) * 100$ |
| DAX           | CAC  | -10                      | DAX           | CAC  | -53                      |
| CAC           | DAX  | 0                        | CAC           | DAX  | 29                       |
| DAX           | SP   | -60                      | DAX           | SP   | -16,5                    |
| SP            | DAX  | 25                       | SP            | DAX  | 6                        |
| CAC           | PSI  | 9                        | CAC           | IBEX | 18,8                     |
| IBEX          | DAX  | -20                      | IBEX          | CAC  | -34,2                    |
| DAX           | PSI  | 8                        | DAX           | PSI  | 4,25                     |
| CAC           | SP   | 16                       | CAC           | SP   | 10,5                     |
| PSI           | IBEX | 10,6                     | PSI           | IBEX | 11                       |
| IBEX          | SP   | -2                       | IBEX          | DAX  | -11,6                    |
| ATHEX         | PSI  | 5                        | SP            | CAC  | -24,4                    |
| ATHEX         | SP   | 13,5                     | SP            | IBEX | 14                       |
| ATHEX         | DAX  | -5                       | PSI           | DAX  | -4,62                    |
| PSI           | DAX  | 11                       | ATHEX         | IBEX | 23                       |

$(\alpha - d) * 100$  désigne la différence des coefficients estimés pour l'équation  $X_{1t} = \alpha_1 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1+X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_1 X_{1,t-1} + \alpha_2 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1+X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_2 X_{2,t-1} + \epsilon_{1,t}$

Tableau 11 – Nature des relations détectées pour l'équation de la moyenne

*Ce tableau explicite pour les deux sous-échantillons, la différence entre les coefficients  $\alpha$  et  $d$  du modèle Mackey-Glass. Selon Kyrtsou et al.(2006, 2009), cette différence renseigne sur la nature des relations estimées.*

### 3.3.1.2 RÉSULTATS MÉTHODOLOGIQUES

Mise à part la prise en compte des structures chaotiques par l'équation de Mackey-Glass, le modèle MG-DCC-GARCH intègre aussi les volatilités et les corrélations conditionnelles dynamiques. La comparaison entre les modèles MG-DCC-GARCH et DCC-GARCH peut être effectuée selon différents facteurs. Nous notons plusieurs caractéristiques qui permettent d'évaluer les deux modèles :

#### 3.3.1.2.1 L'effet de persistance à long terme de la volatilité

Lorsque nous comparons le modèle MG-DCC-GARCH avec le modèle DCC-GARCH, nous relevons pour certains indices une meilleure prise en compte de l'effet de persistance par le modèle chaos stochastique. Afin de juger de la capacité de chaque modèle à prendre en compte l'effet de persistance de la volatilité conditionnelle, nous calculons la somme des paramètres des innovations et de la variance conditionnelle retardée. Si cette somme est proche de l'unité, cela suppose que la persistance dans la variance conditionnelle est bien prise en compte. Dans le cas de la relation DAX-CAC, nous notons un phénomène de persistance de la variance conditionnelle du DAX 30 (la somme des paramètres du GARCH correspondant est proche de l'unité). Les paramètres des corrélations conditionnelles dynamiques montrent que l'impact des chocs retardés sur la corrélation dynamique n'est pas significatif mais l'effet des corrélations dynamiques retardées est fortement significatif. À titre de comparaison, nous estimons un modèle DCC-GARCH uniquement sur les 2 indices. L'effet de persistance de la variance conditionnelle du DAX 30 mis en évidence dans ce modèle est plus faible que celui détecté précédemment. Ce modèle ne prend pas en compte de manière efficace la variance conditionnelle du CAC 40. Néanmoins, il met en évidence un impact significatif (à 10%) des chocs sur les corrélations dynamiques. Cette meilleure prise en compte du phénomène de persistance de la volatilité est plus visible en période de crise : l'analyse de la relation entre le CAC et l'ATHEX montre dans l'équation

de la variance que la persistance de la variance conditionnelle est significative et proche de l'unité lorsque la modélisation est effectuée par un modèle MG-DCC-GARCH. En revanche, lorsqu'on analyse l'équation de la variance conditionnelle estimée par le modèle DCC-GARCH, il semble que seul l'effet de persistance de la variance conditionnelle du CAC soit bien pris en compte. De plus, l'analyse des séries résiduelles indique que le modèle DCC-GARCH ne prend pas en compte toute l'hétéroscédasticité inhérente à ces 2 indices contrairement au modèle MG-DCC-GARCH.

### **3.3.1.2.2 La surperformance du modèle MG-DCC-GARCH**

Le modèle MG-DCC-GARCH conduit le plus souvent à des résultats plus performants que le modèle DCC-GARCH. Nous pouvons justifier ce résultat par 2 raisons. La première porte sur la capacité du modèle MG-DCC-GARCH à modéliser des structures d'interdépendance en moyenne qui ne peuvent être mise en évidence par un modèle DCC-GARCH. La significativité des paramètres de l'équation de la moyenne confirme l'hypothèse selon laquelle les dynamiques des différentes séries sont hautement complexes. L'incapacité du modèle DCC-GARCH à détecter ce type de structures confirme l'insuffisance de ce modèle comparativement au modèle MG-DCC-GARCH. La seconde raison concerne les non-linéarités qui sont prises en compte. En effet, si on examine les résultats de la modélisation CAC-ATHEX, PSI-ATHEX en période calme, nous notons que les séries résiduelles sont non autocorrélées et homoscedastiques lorsqu'elles proviennent de la modélisation MG-DCC-GARCH contrairement à celles issues d'un modèle DCC-GARCH même si ce constat ne peut être généralisé à tous les indices.

---

Interdépendances pour l'échantillon 1

---

| $X_{1t}$ | $X_{2t}$ | Moyenne                           | Variance                             |
|----------|----------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| DAX      | CAC      | Interdépendance en moyenne        | Transmission partielle de volatilité |
| DAX      | PSI      | Interdépendance en moyenne        |                                      |
| DAX      | IBEX     | Impact du DAX sur l'IBEX          | Transmission partielle de volatilité |
| DAX      | ATHEX    | Impact du DAX sur l'ATHEX         |                                      |
| DAX      | SP       | Interdépendance en moyenne        | Transmission partielle de volatilité |
| CAC      | PSI      | Impact partiel du PSI sur le CAC  |                                      |
| CAC      | IBEX     | Pas d'impact                      | Transmission partielle de volatilité |
| CAC      | ATHEX    | Impact partiel du CAC sur l'ATHEX |                                      |
| CAC      | SP       | Impact du SP sur le CAC           | Transmission partielle de volatilité |
| PSI      | IBEX     | Impact de l'IBEX sur le PSI       |                                      |
| PSI      | ATHEX    | Impact du PSI sur l'ATHEX         | Transmission partielle de volatilité |
| IBEX     | ATHEX    | Pas d'impact                      |                                      |
| IBEX     | SP       | Impact du SP sur l'IBEX           | Transmission partielle de volatilité |
| ATHEX    | SP       | Impact du SP sur l'ATHEX          |                                      |

---

Tableau 12 – Récapitulatif des résultats pour la période calme

| Interdépendances pour l'échantillon 2 |          |                                      |                                      |
|---------------------------------------|----------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $X_{1t}$                              | $X_{2t}$ | Moyenne                              | Variance                             |
| DAX                                   | CAC      | Interdépendance en moyenne           | Transmission de volatilité           |
| DAX                                   | PSI      | Interdépendance en moyenne           |                                      |
| DAX                                   | IBEX     | Impact du DAX sur l'IBEX             | Transmission de volatilité           |
| DAX                                   | ATHEX    | Impact partiel du DAX sur l'ATHEX    |                                      |
| DAX                                   | SP       | Interdépendance en moyenne           | Transmission partielle de volatilité |
| CAC                                   | PSI      | Interdépendance partielle en moyenne |                                      |
| CAC                                   | IBEX     | Interdépendance en moyenne           | Transmission de volatilité           |
| CAC                                   | ATHEX    | Impact partiel du CAC sur l'ATHEX    | Transmission de volatilité           |
| CAC                                   | SP       | Interdépendance en moyenne           | Transmission de volatilité           |
| PSI                                   | IBEX     | Impact de l'IBEX sur le PSI          |                                      |
| PSI                                   | ATHEX    | Impact partiel du PSI sur l'ATHEX    |                                      |
| IBEX                                  | ATHEX    | Impact de l'IBEX sur l'ATHEX         |                                      |
| IBEX                                  | SP       | Impact du SP sur l'IBEX              | Transmission de volatilité           |
| ATHEX                                 | SP       | Impact partiel du SP sur l'ATHEX     |                                      |

Tableau 13 – Récapitulatif des résultats pour la période de crise

*Note : les tableaux 12 et 13 récapitulent pour chaque échantillon les résultats obtenus par le modèle MG-DCC-GARCH. L'interdépendance en moyenne se traduit par la significativité de tous les coefficients du modèle MG tandis qu'une significativité partielle des coefficients traduit seulement l'impact d'un indice sur un autre. Pour la variance, une transmission partielle est liée à une significativité partielle des coefficients.*

### 3.3.2 APPROCHE UNIFIÉE DES RÉGIMES DE VOLATILITÉ : UNE MODÉLISATION BIVARIÉE CHAOS-STOCHASTIQUE AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIMES MARKOVIENS

Une manière plus consensuelle d'intégrer et analyser les '*correlations breakdowns*' est de recourir à une approche unifiée qui permet, via un modèle unique, de distinguer des périodes d'intensification des relations et des périodes d'interdépendances. Un certain nombre de travaux se sont intéressés à l'idée d'une rupture des liens entre deux marchés. Les travaux précités portent principalement sur la mise en évidence du phénomène de '*correlations breakdowns*'. Or, il semble plus important de présenter des modèles permettant d'intégrer ce phénomène. Dans cet objectif, de nombreux auteurs ont développé des modèles multivariés de type GARCH. Il en est ainsi de Pelletier(2005) avec son modèle à changement de régimes (RSDC), de Silvennoinen et Teräsvirta (2008) avec leur modèle à transition lisse. Kasch et Caporin(2008) proposent un modèle DCC GARCH qui rend compte de la dynamique entre les corrélations et les variances. Ce modèle permet alors d'identifier les portefeuilles dont les corrélations sont sensibles aux fortes volatilités. Haas et Liu(2014) proposent un modèle GARCH multivarié avec changements de régimes markoviens et corrélations conditionnelles constantes et mettent en évidence l'existence d'un phénomène de '*correlations breakdowns*'. Une approche unifiée des régimes de volatilités suppose l'identification d'au moins deux régimes qui apparaissent hétérogènes (forte/faible volatilité) entre eux mais homogènes à l'intérieur. L'intérêt que nous portons à ce type de modélisation réside dans deux caractéristiques particulières :

- \* les hypothèses du modèle : elles permettent d'envisager l'existence de plusieurs régimes de volatilités qui induisent des ruptures de corrélations. L'homogénéité des corrélations conditionnelles, qui peut être testée, relève d'une logique selon laquelle les relations entre deux marchés ne se modifient pas brutalement d'une période à l'autre. Cette approche, en phase avec les mouvements observés sur les marchés, traduit un glissement progressif entre les différents états du marché.



\* l'impact des modèles chaotiques : un des résultats majeurs du chapitre précédent concerne la capacité des modèles chaotiques à filtrer une partie de la volatilité des séries temporelles financières. Si cette particularité est propre aux modèles retenus en moyenne, l'impact sur la modélisation en variance est plus visible dans le cas où elles intègrent des changements de régimes markoviens. Le tassement de la volatilité qui en résulte peut tout aussi être observé dans une approche multivariée. Par ailleurs, cette démarche est appuyée par la littérature, notamment le modèle de Corcos et al.(2002), qui conclue sur l'existence de structures chaotiques dont la formation n'est plus exclusivement attribuée à la présence de noise traders sur les marchés.

Nous élargissons l'approche de Haas et Liu(2014) en mettant l'accent sur le processus en moyenne par le recours à des modèles chaotiques qui permettent de réduire considérablement la volatilité des actifs.

### 3.3.2.1 LE MODÈLE MACKEY-GLASS-CCC-GARCH AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIMES MARKOVIENS

L'intérêt suscité par les approches multivariées des modèles GARCH avec changements de régimes markoviens conduit tout un pan de la littérature économétrique à développer de nouveaux modèles capables de rendre compte du caractère asymétrique des volatilités des séries temporelles économiques et financières. La multitude des modélisations proposées est essentiellement due aux hypothèses formulées ex-ante, notamment sur l'occurrence des ruptures, la nature des régimes , etc... Ainsi, le modèle de Pelletier(2006) suppose des changements de régimes uniquement sur la matrice des corrélations et considère ainsi une volatilité constante des régimes.

En dépit des nombreuses spécifications proposées, il demeure une caractéristique largement ignorée dans les différents modèles à savoir les structures qui peuvent exister en moyenne. Nous avons vu, dans les chapitres précédents, tout l'intérêt de rechercher l'existence de dynamiques chaotiques visant d'une part à décrire l'interaction de différents types d'agents sur les marchés et d'autre part à filtrer une partie de la volatilité qui ne peut être décrite par l'équation de la variance.

Les limites des modèles GARCH multivariés avec changements de régimes markoviens nous conduisent à proposer une extension permettant d'inclure un filtre chaotique en moyenne. Nous proposons donc d'amender le modèle de Haas et Liu(2014) en l'associant à un modèle Mackey-Glass en moyenne. Dans le cas bivarié, le modèle est décrit par :

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \alpha_1 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1 + X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_1 X_{1,t-1} + \alpha_2 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1 + X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_2 X_{2,t-1} + \epsilon_{1,t} \\ X_{2t} &= \alpha_3 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1 + X_{1,t-\tau_1}^{c_1}} - d_3 X_{1,t-1} + \alpha_4 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1 + X_{2,t-\tau_2}^{c_2}} - d_4 X_{2,t-1} + \epsilon_{2,t} \\ \epsilon_t &= \{\epsilon_{1,t}, \epsilon_{2,t}\} \end{aligned}$$

Haas et Liu(2014) proposent une généralisation du modèle univarié de Haas et al.(2004) qui permet de rendre compte des dynamiques de volatilité pour des régimes spécifiques, des effets de levier et des structures de corrélations. Reprenons  $\epsilon_t$  qui contient les résidus du modèle Mackey-Glass :

$$\epsilon_t = D_{\Delta_t,t} \cdot z_t \quad (148)$$

Où  $\Delta_t$  est une chaîne de Markov avec un espace d'état fini donné par  $\varepsilon = 1, \dots, k$  et une matrice de transition  $P$ , irréductible et apériodique :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & \dots & p_{1k} \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ p_{k1} & \dots & \dots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

Où les probabilités de transition  $p_{ij} = p(\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i), i, j, \in \varepsilon$ . Une distribution stationnaire de la chaîne de Markov est donnée par :

$$\Pi_\infty = (\Pi_{1,\infty}, \Pi_{2,\infty}, \dots, \Pi_{k,\infty})' \quad (149)$$

$D_{\Delta_t,t} = \text{diag}(\sigma_{\Delta_t,t})$  où  $\sigma_{jt} = (\sigma_{1j,t}, \dots, \sigma_{Mj,t})' \in \mathbb{R}, j \in \varepsilon$  contient les écart-types de  $\epsilon_t$  conditionnels aux régimes. Par ailleurs,  $z_t$  est défini par :

$$z_t = R_{\Delta_t}^{1/2} \xi_t \quad (150)$$

Où  $R_j = (\rho_{lm,j}), l, m = 1, \dots, M, j = 1, \dots, k$  représente la matrice des corrélations spécifiques aux différents régimes.  $\xi_t$  est une suite de vecteurs aléatoires

i.i.d. de moyenne nulle et de variance unitaire.  $\Delta_t$  et  $\xi_t$  sont supposés indépendants. Les auteurs supposent que les écarts-types conditionnels à chaque régime suivent un processus AGARCH :

$$\begin{aligned}\sigma_{jt} &= \omega_j + A_j|\epsilon_{t-1}| - (A_j \odot \Gamma_j)\epsilon_{t-1} + B_j\sigma_{j,t-1} \\ &= \omega_j + (A_j|Z_t| - (A_j \odot \Gamma_j)Z_t)\sigma_{\Delta_{t-1,t-1}} + B_j\sigma_{j,t-1}\end{aligned}\quad (151)$$

Où  $Z_t = \text{diag}(z_t)$  et  $\omega_j = (\omega_{1j}, \dots, \omega_{Mj})$  et  $A_j = [a_{lm,j}]$ ,  $\Gamma_j = [\gamma_{lm,j}] \in [-1, 1]$  et  $B_j = [b_{lm,j}]$ ,  $l, m = 1, \dots, M, j \in \varepsilon$ . Les paramètres  $\gamma_{lm,j}$  peuvent rendre compte d'une réponse asymétrique aux chocs de même magnitude. Pour des raisons de simplicité, les matrices  $A_j, \Gamma_j$  et  $B_j$  sont des matrices diagonales. Des conditions de positivité sont posées sur les éléments de ces matrices avec  $\omega_j > 0$ ,  $A_j, B_j \geq 0$ . Les propriétés statistiques du modèle sont développées par Haas et Liu(2014).

### 3.3.2.2 RÉSULTATS

Nous modélisons les couples DAX-PSI, DAX-ATHEX, CAC-IBEX, CAC-ATHEX, IBEX-ATHEX, ISEQ-CAC, ISEQ-DAX, et ISEQ-PSI par un modèle MG-MS-CCC-GARCH<sup>84</sup>. Nous supposons la présence de deux régimes (forte/faible volatilité)<sup>85</sup> et nous retenons des spécifications diagonales pour les matrices des équations des variances. Il n'y a aucune restriction quant aux coefficients d'asymétrie  $\Gamma$ .

La modélisation s'effectue en deux étapes : nous filtrons les structures chaotiques dans un premier temps et nous modélisons les résidus par le modèle MS(2)-CCC-GARCH<sup>86</sup>. Étant donné la multitude des valeurs que peuvent prendre les différents paramètres, nous retenons une discrimination basée sur la valeur du logarithme de vraisemblance et sur le critère BIC (Schwarz(1978)). La capacité du modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH à prendre en compte les structures chaotiques d'une part et à rendre compte des variances et corrélations

84. L'analyse menée a une visée essentiellement interprétative. Elle ne donne lieu à aucune comparaison par rapport à un modèle particulier. Haas et Liu(2014) ont déjà montré la supériorité du modèle MS-CCC-GARCH par rapport aux modèles RSDC de Pelletier(2006) et DCC-GARCH d'Engle (2002). Par ailleurs, la pertinence d'un modèle chaos-stochastique par rapport à une spécification purement stochastique a été mise en évidence dans les sections précédentes.

85. Haas et Liu(2014) ont montré, par une étude comparative, la supériorité d'une spécification à deux régimes par rapport aux modèles à un ou 3 régimes et ce, quelle que soit la distribution conditionnelle (normale ou Student) retenue.

86. Nous remercions le Pr. Markus Haas de nous avoir fourni le code Matlab nécessaire à l'estimation.

spécifiques aux différents régimes d'autre part suppose une performance particulière dont les enseignements économiques qui en découlent apportent des précisions sur l'identification des ruptures de corrélations. Nous synthétisons les résultats obtenus selon 3 points.

### **3.3.2.2.1 Structures complexes : le rôle particulier des indices DAX et CAC**

Le filtre chaotique, représenté par le modèle Mackey-Glass, révèle l'existence de structures chaotiques complexes dans les données. Les dimensions retenues dans les spécifications Mackey-Glass indiquent la présence de structures chaotiques dites de faibles dimensions. Nous relevons plusieurs impacts significatifs en moyenne qui témoignent en priorité de l'importance des indices des grandes places Européennes. Ainsi, les places financières allemande et française jouent un rôle important dans l'évolution d'indices " secondaires " à l'instar des places hellénique, portugaise et irlandaise. Ce résultat principal est à contrebalancer avec l'impact relativement modeste des indices espagnols et irlandais sur les indices hellénique et portugais respectivement. Nous notons une seule relation d'interdépendance entre les indices espagnol et français. Lorsque nous nous intéressons au signe des impacts révélés, nous relevons un phénomène opposé : d'une part, l'indice français a une influence positive sur les indices européens (exception faite pour l'indice irlandais) et d'autre part, l'indice allemand impacte négativement les indices PSI, ATHEX et ISEQ. Sur le plan économique, ce résultat reflète une situation particulière qui place l'Allemagne en gendarme européen, à la fois bonne élève et leitmotiv d'une Europe plus soudée, plus interdépendante. En dépit de ce rôle prestigieux, l'Allemagne reste inflexible et individualiste face à ses partenaires, ce qui explique son influence négative sur certains pays notamment du Sud de l'Europe. À contrario, l'indice français joue un rôle plus consensuel mais principalement axé sur l'Europe continentale et ses partenaires les plus proches. Finalement, l'indice irlandais est le seul dont les impacts des deux principaux indices sont négatifs.

Les résultats que nous obtenons indiquent, outre l'importance des indices DAX et CAC sur les différentes places européennes, un schéma d'interaction des agents financiers qui s'exporte sur les différents indices européens. Il reste diffi-

cile de répartir les rôles des différents types d'agents dans la création des structures chaotiques que la littérature attribue tout aussi bien aux chartistes (Kyrtou et Malliaris(2009), Gaunersdorfer et Hommes(2007)) qu'aux fundamentalistes (Corcos et al.(2002)). Néanmoins, l'identification de structures chaotiques permet de rendre compte d'une partie de la volatilité des indices boursiers et en ce sens, conduit à de meilleurs résultats.

### **3.3.2.2 Régimes de volatilité et ruptures de corrélations**

Les résultats de la modélisation MS(2)-CCC-GARCH rendent compte de plusieurs caractéristiques :

- \* l'existence de deux régimes de volatilité distincts : en dépit de la faible significativité des paramètres GARCH, nous relevons une distinction assez claire entre un régime de forte et de faible volatilités. Il en est ainsi pour les couples d'indices DAX-PSI, DAX-ATHEX, CAC-IBEX et CAC-ATHEX (Graphiques 35 à 38) pour lesquels les variances estimées dans chaque régime sont marquées par des différences d'amplitudes assez importantes. Pour ces 4 couples, l'identification de deux régimes de volatilités montre que la dynamique décrite par les rentabilités ne peut être parfaitement prise en compte dans le cadre d'un modèle GARCH unique. Elle met en lumière le recours indispensable à des modèles avec changements de régimes pour rendre compte de l'existence de deux structures de volatilité que l'on peut attribuer d'une part à la prédominance des chartistes (forte volatilité) et d'autre part à la forte présence des fundamentalistes (faible volatilité). Il est à relever la détection des deux régimes même lorsque le filtre chaotique appliqué préalablement ne détecte aucune structure chaotique. À titre d'exemple, la modélisation Mackey-Glass appliquée sur le couple DAX-PSI, met en exergue l'existence de structures chaotiques uniquement pour l'indice PSI. En dépit de la non-significativité des paramètres  $\alpha$  et  $d$  pour l'indice DAX, la modélisation MS(2)-CCC-GARCH révèle l'identification de deux régimes de volatilité caractérisés par une forte persistance des régimes ( $p_{11}$  et  $p_{22} > 0.7$ ) mais une durée temporelle plus importante dans le régime de forte volatilité. Ces enseignements sont révélateurs de la nécessité d'un filtre chaotique

capable de capter une partie de la volatilité qui ne peut être prise en compte par des modèles GARCH de telle sorte à disposer de données filtrées dont les variances sont de même importance. Ainsi, dans le cas du couple DAX-PSI, les résultats du filtre chaotique permettent de disposer de 2 séries pour lesquelles il est possible d'identifier deux régimes différents et ce, pour chaque série. Les volatilités estimées du DAX et du PSI dans le régime 1 sont de même importance : ce sont de fortes volatilités avec des pics aux mêmes périodes.

- \* Persistance et asymétrie : Les coefficients  $A_i, B_i, i = 1, 2$  et  $G_{i,i=1,1'}$  permettent d'évaluer d'une part la persistance dans les régimes et d'autre part l'asymétrie des régimes. En ce qui concerne la première caractéristique, nous relevons deux types de résultats : certaines relations estimées indiquent une persistance dans les régimes relativement importante avec des sommes  $A_i + B_i$  supérieures à 0.65. Les couples d'indices IBEX-ATHEX, DAX-ISEQ et ISEQ-PSI sont bien décrits par des spécifications GARCH et l'identification des deux régimes révèle une persistance importante de la volatilité dans chaque régime. Pour les autres couples, les sommes  $A_i + B_i$  sont généralement proches de 0.6 : la persistance dans les régimes est moins importante mais il faut relever qu'elle est en générale plus significative dans le régime de forte volatilité que dans celui de faible volatilité. Nous relevons 4 coefficients d'asymétrie significatifs : ils concernent les relations DAX-PSI, CAC-IBEX, CAC-ISEQ et ISEQ-PSI. Ces paramètres indiquent qu'il existe une asymétrie positive entre les deux régimes de volatilité des indices DAX, CAC, et PSI. Il faut bien comprendre que les résultats que nous mettons en exergue ne sont pas propres aux rentabilités des différents indices mais résultent des caractéristiques créées par le filtre chaotique. Autrement dit, il n'est pas surprenant d'identifier une asymétrie entre les deux régimes pour l'indice allemand dans le cas où il est modélisé par l'indice PSI et de ne pas détecter d'asymétrie significative dans le cas de la relation DAX-ATHEX.
- \* Ruptures de corrélations Nous donnons dans le graphique 34 les corrélations conditionnelles estimées par le modèle. Elles sont révélatrices d'un certain nombre d'informations à mettre en perspective avec les coeffi-

cients de corrélations linéaires relatifs à chaque régime donnés dans le tableau 14. Tout d'abord, il faut relever des structures de corrélations particulières symptomatiques des relations hétérogènes entre les indices. Ainsi, nous notons que l'indice hellénique est caractérisé par des corrélations conditionnelles moyennes avec l'indice espagnol et par de faibles corrélations avec les indices allemand et français. De plus, ces corrélations sont de nature très différentes : elles sont strictement constantes entre les indices ATHEX et DAX, faiblement constantes entre les indices ATHEX et IBEX et dynamiques dans le cas du couple ATHEX-CAC. De la même manière, l'indice français est caractérisé par des corrélations conditionnelles dynamiques moyennes avec l'indice espagnol alors qu'elles apparaissent faibles pour les couples CAC-ATHEX et CAC-ISEQ. L'indice portugais est marqué par des corrélations conditionnelles constantes et moyennes avec les indices DAX et ISEQ. Ces résultats sont à contrebalancer avec les coefficients de corrélations linéaires estimés sur chaque régime. Nous notons deux caractéristiques principales :

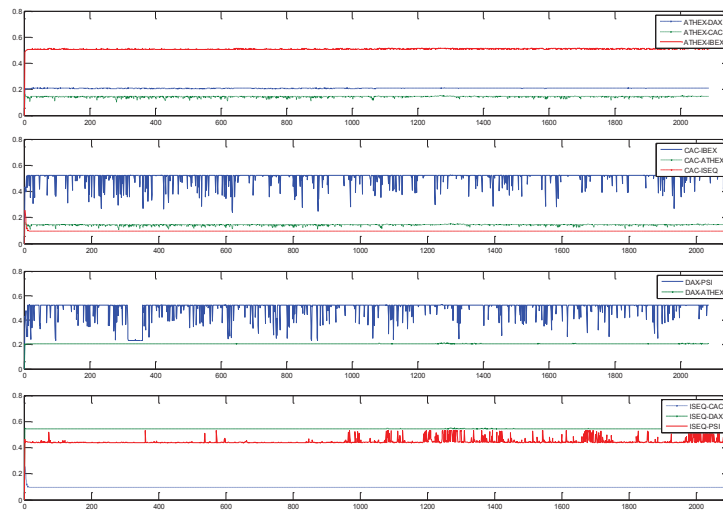
1. Quel que soit le couple d'indices, nous relevons des coefficients de corrélations linéaires moyens : aucune relation n'est marquée par une forte relation ;
2. Pour chaque relation, nous identifions une rupture de corrélations puisque les coefficients  $R_1$  des couples DAX-PSI, CAC-IBEX et CAC-ISEQ sont beaucoup plus importants que les coefficients  $R_2$ . Cela révèle des liens plus marqués en période de fortes volatilités qui accentue les dépendances entre les indices sans que l'on puisse qualifier cette intensification de phénomène de contagion. À contrario, ces relations intenses se produisent dans des régimes de faibles volatilités pour les couples DAX-ATHEX, CAC-ATHEX, IBEX-ATHEX et ISEQ-PSI. Par ailleurs, une seule relation (DAX-ISEQ) n'est pas marquée par des ruptures de corrélations. Pour ce couple, l'existence de deux régimes de volatilité n'entraîne pas d'intensification des relations qui restent relativement constantes.

### 3.3.2.2.3 Implications économiques

L'interprétation économique qui découle des résultats du modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH est assez intuitive. Elle confirme, en premier lieu, les rôles particuliers des indices allemand et français même si les impacts qu'ils peuvent avoir sur les autres places européennes peuvent s'opposer. Lorsqu'on s'intéresse aux relations de ces indices avec l'indice hellénique, nous notons une dichotomie assez marquée dans l'interaction des indices mais nous retrouvons une homogénéité dans les caractéristiques de la variance. Plus précisément, nous avons relevé les influences opposées des indices DAX et CAC sur l'indice hellénique en moyenne mais la modélisation de la variance révèle des relations plus fortes en périodes de faibles volatilités avec une forte persistance du régime de forte volatilité. Tout se passe comme si en période d'accalmie, le rapprochement entre les indices DAX, CAC et l'indice hellénique s'intensifiait alors que dans les périodes dites de fortes volatilités, plus fréquentes, les relations étaient beaucoup moins importantes. Le deuxième résultat économique marquant reste la relation DAX-ISEQ, caractérisée par l'absence de rupture des corrélations. La position particulière de l'indice irlandais (non continentale, moins intégré...) suggère des liens constants entre cet indice et les autres places financières mais l'absence de ruptures dans les corrélations des régimes de volatilité aux caractéristiques opposées est un résultat intéressant. Ce dernier est à mettre en perspective avec la relation CAC-ISEQ en moyenne qui a révélé une influence négative de l'indice français. La particularité de ces relations révèle une opposition marquée en variance entre d'une part une relation franco-irlandaise plus importante dans des épisodes de fortes volatilités qui sont aussi plus fréquents avec des corrélations conditionnelles constantes et faibles et d'autre part une relation DAX-ISEQ marquée par une plus forte persistance des régimes de faibles volatilités et des corrélations conditionnelles constantes moyennes. Enfin, le résultat le plus fréquent est l'existence de ruptures de corrélations pour plusieurs couples d'indices. Il s'agit d'un résultat important qui révèle les limites des approches standards sans changements de régimes. Ce résultat est d'autant plus intéressant qu'il est mis en évidence dans un modèle chaos-stochastique qui a permis de diminuer d'une part la volatilité que l'on attribue, à tort, aux effets GARCH et d'autre part d'identifier deux régimes de volatilités opposés mar-



qués par une vraie rupture. À ces différents constats, il faut associer la mise en évidence de trois relations particulières à savoir les corrélations conditionnelles des couples CAC-IBEX, DAX-PSI, et ISEQ-PSI qui révèlent des relations instables et moyennes dont la prise en compte peut améliorer la prévision des rentabilités.



Graphique 34 – Corrélations conditionnelles estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH

| $X_{1t}$ | $X_{2t}$ | $\alpha_1$ | $d_1$     | $\alpha_2$ | $d_2$   | $\alpha_3$ | $d_3$     | $\alpha_4$ | $d_4$    | $\tau_1$ | $c_1$ | $\tau_2$ | $c_2$ |
|----------|----------|------------|-----------|------------|---------|------------|-----------|------------|----------|----------|-------|----------|-------|
| DAX      | PSI      | 5,4        | -5,3      | -12        | 11,7    | 18,4**     | -18,3**   | -26,4***   | 27***    | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | ATHEX    | -0,04**    | -0,012    | 1,95       | -1,9    | 16,74***   | -16,6***  | -27,2***   | 27,35*** | 1        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | IBEX     | -0,067***  | -0,16***  | 10,98**    | -10,8** | 19,33***   | -19,07*** | -0,06***   | -0,23*** | 2        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | ATHEX    | -0,11***   | -0,071*** | 0,043**    | 0,03    | 16,47***   | -16,4***  | 0,06**     | 0,1***   | 1        | 2     | 4        | 2     |
| IBEX     | ATHEX    | 18,3***    | -18,2***  | -4,65      | 4,65    | 15,32***   | -15,3***  | 858,9*     | -858,8*  | 1        | 4     | 1        | 2     |
| CAC      | ISEQ     | -0,11***   | -0,08**   | 0,06**     | 0,03    | 20,3***    | -20,1***  | -15,7*     | 15,6*    | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | ISEQ     | -0,04**    | 0,009     | -3,49      | 3,47    | 18,17***   | -18,11*** | -21,3**    | 21,4***  | 2        | 2     | 1        | 2     |
| ISEQ     | PSI      | 22,4***    | -22,3***  | -31,9***   | 31,8*** | 4,32       | -4,2      | 3,8        | -3,9     | 1        | 2     | 1        | 2     |

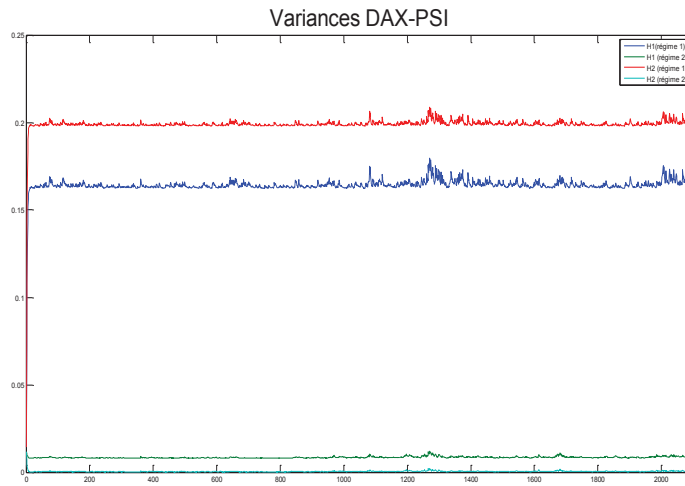
Tableau 14 – Résultats du modèle Mackey-Glass

Les coefficients  $\alpha_i$  et  $d_i$  ont été estimés alors que les paramètres  $\tau$  et  $c$ , qui représentent respectivement le délai et la dimension sont fixés ex-ante. Le choix de ces paramètres est soumis au critère BIC. \*\*\* indique une significativité avec un niveau de confiance de 99%, \*\* à 95%, \* à 90%

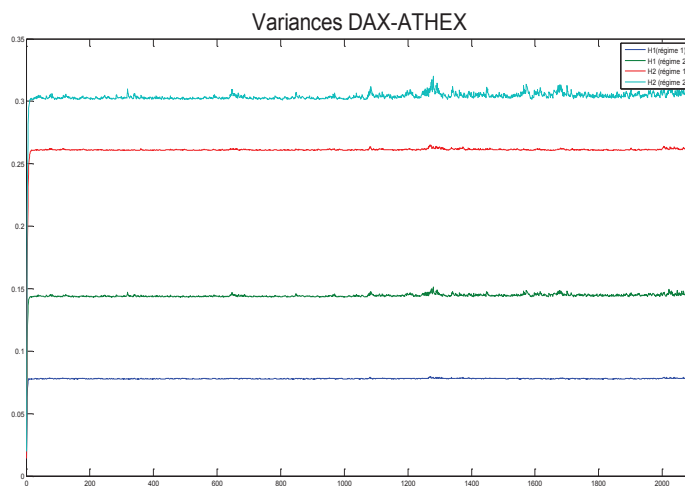
|   | DAX-PSI       | DAX-ATHEX     | CAC-IBEX      | CAC-ATHEX     | IBEX-ATHEX    | CAC-ISEQ      | DAX-ISEQ      | ISEQ-PSI      |
|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a <sub>01</sub>                           | 0,07          | 0,0359        | 0,0625        | 0,0100        | 0,0016        | 0,0625        | 0,0081        | 0,0081        |
| a <sub>01'</sub>                          | 0,003         | 0,0574        | 0,0025        | 0,0625        | 0,0039        | 0,0001        | 0,0731        | 0,0016        |
| a <sub>02</sub>                           | 0,1           | 0,0894        | 0,0900        | 0,0004        | 0,0081        | 0,2401        | 0,0256        | 0,0256        |
| a <sub>02'</sub>                          | 0,0001        | 0,1265        | 0,0001        | 0,1225        | 0,0150        | 0,0081        | 0,1296        | 0,1296        |
| A <sub>1</sub>                            | 0,11          | 0,0112        | 0,0900        | 0,0121        | 0,0001        | 0,0081        | 0,0016        | 0,0016        |
| A <sub>1'</sub>                           | 0,03          | 0,0400        | 0,0225        | 0,0400        | 0,0016        | 0,0001        | 0,0001        | 0,0001        |
| A <sub>2</sub>                            | 0,07          | 0,0325        | 0,0625        | 0,0400        | 0,0005        | 0,0256        | 0,0081        | 0,0081        |
| A <sub>2'</sub>                           | 0,01          | 0,101         | 0,0121        | 0,0900        | 0,0081        | 0,0005        | 0,0016        | 0,0016        |
| B <sub>1</sub>                            | <b>0,62</b>   | 0,4744        | <b>0,6146</b> | 0,4855        | <b>0,7900</b> | <b>0,6146</b> | <b>0,7505</b> | <b>0,7505</b> |
| B <sub>1'</sub>                           | <b>0,71</b>   | 0,5598        | <b>0,6871</b> | 0,5636        | <b>0,7279</b> | <b>0,6871</b> | <b>0,7573</b> | <b>0,7573</b> |
| B <sub>2</sub>                            | <b>0,58</b>   | <b>0,6644</b> | 0,5452        | <b>0,6547</b> | <b>0,6514</b> | 0,5452        | <b>0,6508</b> | <b>0,6508</b> |
| B <sub>2'</sub>                           | <b>0,61</b>   | <b>0,5752</b> | <b>0,5792</b> | <b>0,5931</b> | <b>0,7035</b> | 0,5792        | <b>0,7228</b> | <b>0,7228</b> |
| G <sub>1</sub>                            | <b>0,56</b>   | 0,3611        | <b>0,5560</b> | 0,3718        | 0,3485        | <b>0,5560</b> | 0,4005        | 0,4082        |
| G <sub>1'</sub>                           | 0,27          | 0,2247        | 0,2762        | 0,2417        | 0,2350        | 0,2762        | 0,2491        | <b>0,5298</b> |
| R <sub>1</sub>                            | <b>0,57</b>   | 0,1589        | 0,5560        | 0,1483        | 0,1467        | 0,5560        | 0,4575        | 0,0990        |
| R <sub>2</sub>                            | 0,1           | 0,6150        | 0,0141        | 0,6150        | 0,5239        | 0,0990        | 0,5560        | 0,5560        |
| p <sub>11</sub>                           | <b>0,9203</b> | <b>0,9877</b> | <b>0,9139</b> | <b>0,9806</b> | 0,3823        | <b>0,8205</b> | 0,3680        | <b>0,7573</b> |
| p <sub>22</sub>                           | <b>0,7822</b> | 0,4804        | <b>0,7788</b> | 0,4702        | <b>0,8016</b> | 0,3752        | <b>0,8687</b> | <b>0,6508</b> |
| (1-p <sub>11</sub> ) <sup>-1</sup>        | 12,547        | 81,3          | 11,6186       | 51,5220       | 1,6189        | 5,5696        | 1,5822        | 4,1198        |
| (1-p <sub>22</sub> ) <sup>-1</sup>        | 4,5913        | 1,924         | 4,5208        | 1,8875        | 5,0413        | 1,6006        | 7,6139        | 2,8637        |
| π <sub>1,∞</sub>                          | 0,7321        | 0,9747        | 0,7199        | 0,9647        | 0,2431        | 0,7768        | 0,1720        | 0,5899        |
| π <sub>2,∞</sub>                          | 0,2679        | 0,0253        | 0,2801        | 0,0353        | 0,7569        | 0,2232        | 0,8280        | 0,4101        |
| δ = p <sub>11</sub> + p <sub>22</sub> - 1 | 0,7025        | 0,4681        | 0,6927        | 0,4508        | 0,1839        | 0,1957        | 0,2366        | 0,4081        |

Tableau 15 – Résultats du modèle MS-CCC-GARCH

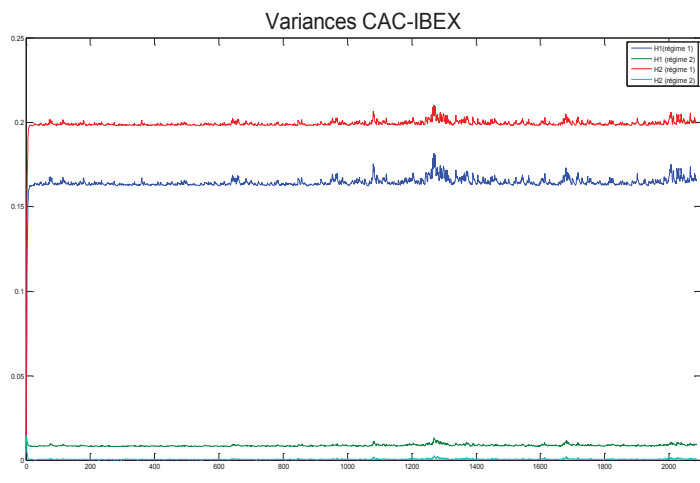
Les coefficients  $a_{oi}$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  sont les coefficients des modèles GARCH,  $G_i$  est le coefficient d'asymétrie,  $R_i$  est le coefficient de corrélation linéaire spécifique à chaque régime,  $p_{ii}$  désigne la probabilité de persistance dans chaque régime.  $(1 - p_{ii})^{-1}$  donne la durée espérée pour chaque régime et  $\pi_{i,\infty}$  est la probabilité stationnaire pour chaque régime. Les coefficients en gras sont fortement significatifs.



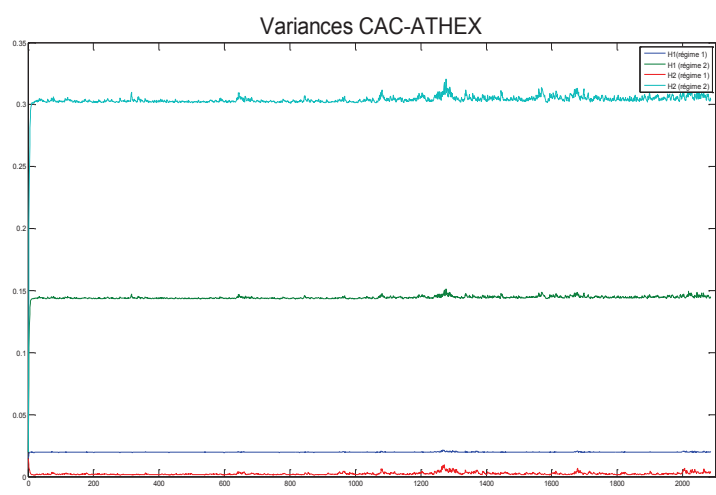
Graphique 35 – Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le couple DAX-PSI



Graphique 36 – Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le couple DAX-ATHEX



Graphique 37 – Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le couple CAC-IBEX



Graphique 38 – Variances estimées par le modèle MG-MS(2)-CCC-GARCH pour le couple CAC-ATHEX

## CONCLUSION

La stabilité du système financier international est l'enjeu majeur poursuivi par les instances de réglementation. Ces dernières doivent composer avec les États, les Unions pour améliorer la coopération entre les différentes entités et ainsi favoriser une meilleure résilience du système financier international. La crise des subprimes a exacerbé les craintes d'un effondrement mondial des systèmes financiers et a amené les instances de réglementations à réagir en proposant de nouvelles normes plus strictes. L'implication des États concernés dans l'élaboration et l'application des accords Bâle III reflète l'urgence et la nécessité de colmater les failles du système financier.

Dans cette démarche, le rôle des banques centrales est primordial : les politiques monétaires menées par ces établissements impactent l'évolution des prix sur les marchés financiers. Sur le plan national, les politiques économiques menées par les États ne sont pas sans conséquences sur les marchés financiers. Cette double influence est intégrée par les investisseurs qui doivent agir en conséquence. Les politiques monétaires menées par les banques centrales et les politiques économiques menées par les gouvernements ne sont pas toujours liées mais elles peuvent s'adapter. Il existe une particularité dans les économies avancées qui concerne les pays de l'Union Économique et Monétaire (UEM). Soumis aux décisions d'une même banque centrale, ces pays restent souverains des politiques économiques menées par les gouvernements. Cette situation particulière est à l'origine d'un climat concurrentiel particulier qui conduit de fait les investisseurs à comparer les impacts des politiques économiques menés par les États. La crise des dettes souveraines est la matérialisation même de cette situation particulière. Ce constat nous conduit à analyser sept pays de l'UEM par l'étude de leurs indices boursiers principaux.

L'évaluation des approches chaos-stochastiques avec ou sans changements de régime menée dans ce chapitre permet de statuer sur la pertinence de ces modélisations dans l'analyse et la prévision du risque de marché relatifs aux principales places boursières des pays de l'UEM. Nous avons mené une étude sur les capacités prédictives des modèles retenus dans un cadre particulier qui est celui de l'évaluation du risque de marché. Ce premier volet, essentiellement quantitatif, met en exergue les performances particulières de ces modèles :

- \* dans l'échantillon : elle met en évidence les résultats limités des modèles de type MRS-G et une légère surperformance des modèles chaos-stochastiques de type GARCH sur la période [2003-2011]. Les bonnes performances des modèles chaos-stochastiques sont confirmées pour la sous-période [2004-2006] ;
- \* hors-échantillon : de nouveaux éléments révèlent la supériorité du modèle MRS-G pour rendre compte des dynamiques des indices de l'Europe du Nord et les capacités des modèles chaos-stochastiques de type MRS-G pour les indices de l'Europe du Sud. Par ailleurs, les modèles chaos-stochastiques de type GARCH supplantent largement le modèle classique. Cette performance particulière est confirmée pour les sous-périodes.

Ces résultats qui peuvent sembler équivoques se justifient par les modèles retenus : les critères statistiques et les tests des capacités prédictives dans l'échantillon ont révélé les bonnes performances des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes markoviens mais les tests de backtesting donnent des résultats mitigés. Les critères statistiques et les tests d'égalité et de supériorités prédictives pour les prévisions hors échantillon permettent de discriminer les modèles : le modèle classique MRS-G semble plus approprié pour les indices des pays de l'Europe du Nord, traditionnellement moins volatiles que ceux de l'Europe de Sud pour lesquels les spécifications chaos-stochastiques de type MRS-G sont recommandées. Un autre résultat important est lié aux capacités des modèles chaos-stochastiques de type GARCH à rendre compte des dynamiques d'une grande partie des actifs considérés. Cet apport est d'autant plus important qu'il est mis en évidence par des tests de backtesting robustes.

Au-delà des résultats économétriques, cette étude révèle la coexistence de fondamentalistes et de chartistes qui créent des frictions sur les marchés européens, l'existence d'une dynamique européenne commune qui peut être prise en compte par l'équation de la variance et la présence de structures chaotiques résultantes des spécificités nationales. La présence de différents régimes de volatilités est détectée graphiquement et la nécessité de rendre compte de ces différents régimes reste une question primordiale : en dépit des résultats économétriques relativement limités, nous avons montré la capacité de ces modèles à intégrer les dynamiques existantes et à prévoir l'évolution des rentabilités. En

ce sens, il nous semble important d'accentuer les efforts sur les modèles avec changements de régimes markoviens plutôt que de recourir à des VaR contracycliques dont les résultats restent très mitigés.

Le deuxième volet de cette application est principalement analytique : il a trait aux relations bivariées susceptibles d'exister entre les indices boursiers. La double analyse que nous proposons met en évidence plusieurs résultats.

L'analyse en sous-périodes révèle un certain nombre de résultats qui permettent de montrer les relations d'interdépendances et/ou de contagions qui existent entre les principaux indices européens :

- Une augmentation des relations d'interdépendances : En période normale, seules 2 relations d'interdépendances ont été détectées alors qu'il y en existe 6 en période de crise. Pour la plupart de ces relations, la période de stress retenue a conduit à une intensification des relations dans la mesure où en période calme, seules des transmissions en moyenne unilatérales avaient été détectées. On peut qualifier ces relations de phénomènes de contagion.
- Des relations plus fortes en période de crise : Au-delà des phénomènes de contagion, nous relevons une augmentation des relations unilatérales. Ce constat indique que la période de crise est propice à une transmission en moyenne ou en variance des indices dits "importants" tels que le CAC ou le DAX aux indices d'envergure moins importante. Cette analyse confirme le rôle moteur attribué à l'indice allemand.

Une analyse plus précise des sous-échantillon fait ressortir de nouveaux éléments. Les résultats obtenus semblent établir deux schémas en période de crise : le premier est caractérisé par les principaux indices que sont les indices français et allemand qui entretiennent une relation particulière et qui en période normale peuvent affecter positivement des indices comme l'indice hellénique par exemple. Le second schéma est marqué par les indices des "pays du Sud" tels que les indices espagnol, hellénique ou encore portugais qui en période de crise sont impactés négativement par les indices principaux mais positivement par les indices des pays de l'Europe de Sud. Tout se passe comme si les deux schémas étaient décorrélés, comme si il y avait une fracture et que les



externalités produites par chaque schéma affectaient négativement le schéma opposé. Cependant, nous devons souligner le rôle particulier de l'indice italien, impacté positivement par le DAX sur les deux périodes mais négativement en période de crise par le CAC. Il s'agit là d'une contagion non contingente selon l'expression de Rigobon et Forbes(2001). Ces résultats indiquent la présence de phénomènes de contagion qui peuvent expliquer partiellement la crise des dettes européennes.

Le modèle MG-MS-CCC-GARCH a mis en lumière l'existence de ruptures de corrélations particulières pour un certain nombre de couples d'indices européens. La particularité des schémas observés est à comparer aux hypothèses standards qui supposent qu'en périodes de fortes volatilités, les corrélations sont très importantes alors qu'elles apparaissent relativement faibles dans des périodes de faibles volatilités. Ces intuitions ont ouvert le débat sur la pertinence des ruptures de corrélations qui finalement ne résulteraient pas d'un changement radical dans les relations mais seraient plutôt le fruit d'une augmentation de la volatilité qu'il faut prendre en compte. Dans cette argumentation, largement défendue par Loretan et English(2000), l'idée d'une rupture dans le processus générateur de données est rejetée. Nos résultats permettent d'avancer sur ces divergences de points de vue car ils offrent une palette de configuration assez large :

- \* L'application empirique met en évidence, dans le cas du couple DAX-ISEQ, une absence de rupture de corrélation en dépit de l'identification de deux régimes de volatilité distincts. Ce résultat révèle la capacité du modèle MG-MS-CCC-GARCH à rendre compte de l'absence de rupture des corrélations entre un régime de forte volatilité et un régime de faible volatilité.
- \* L'exercice permet aussi de mettre en évidence des schémas de ruptures des corrélations inhabituels : une intensification des relations, mesurée par le coefficient de corrélation linéaire conditionnel au régime, dans des périodes de faibles volatilités. De manière similaire, le modèle MG-MS-CCC-GARCH identifie des configurations de 'corrélations breakdowns' standards avec une intensification en période de crise.

\* La discrimination des régimes selon des caractéristiques préétablies (faible/forte volatilité) est effectuée sur des relations que l'on qualifie de moyenne : deux indices qui entretiennent des liens constants mais dont les trajectoires ne sont pas fortement corrélées peuvent être sujets à des ruptures de corrélations qui peuvent sembler de prime abord insignifiantes, notamment dans un cadre de construction de portefeuille. Or, une rupture de corrélation, qu'elle prenne une forme standard faible/forte corrélation ou une forme atypique faible/moyenne corrélation, demeure une caractéristique essentielle à prendre en compte non seulement dans une approche multivariée des prix mais aussi dans la construction d'un portefeuille.

Au-delà du débat économétrique, ces résultats révèlent des implications économiques inattendues. La première porte sur la pluralité des schémas de variances et des interactions. Elle révèle des comportements particuliers qui peuvent apparaître contradictoires avec les événements économiques. Ainsi, lors de la crise des dettes souveraines, d'aucuns ont tenté de mettre en exergue un phénomène de contagion européen qui supposait de très fortes interdépendances en périodes de faibles volatilités et une intensification en périodes de fortes volatilités. Le recours à une approche unifiée permet de relativiser ce constat et révèle au plus des interdépendances moyennes. La deuxième implication est à relier au filtre chaotique qui permet de capter une partie de la volatilité créée par l'interaction des agents. Les relations moyennes que nous obtenons, aussi surprenantes soient-elles, sont intrinsèquement liées au filtre chaotique. En effet, il résulte de ce dernier un tassement des volatilités qui lorsqu'elles sont modélisées par une spécification GARCH révèlent une interdépendance plus faible. Il n'en demeure pas moins que le niveau de ces interdépendances est réel : le filtre chaotique ne réduit pas artificiellement l'intensité des relations mais il rend compte d'une certaine volatilité que l'on attribue à l'équation de la variance. Autrement dit, l'identification de deux régimes caractérisés par un schéma faibles/fortes corrélations est erronée dès lors que la volatilité résultante des structures chaotiques n'a pas été filtrée. De ce résultat, l'hypothèse d'une forte interdépendance des marchés boursiers européens est fragilisée : les places boursières étudiées dans cette section s'impactent moyennement. La dernière implication économique,

très intuitive, est liée aux rôles particuliers des indices DAX, CAC et à l'isolement de l'indice ISEQ.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

*"When the crisis came, the serious limitations of existing economic and financial models immediately became apparent.(...) Macro models failed to predict the crisis and seemed incapable of explaining what was happening to the economy in a convincing manner. As a policy-maker during the crisis, I found the available models of limited help. In fact, I would go further : in the face of the crisis, we felt abandoned by conventional tools. (...) We need to develop complementary tools to improve the robustness of our overall framework. (...) In this context, I would very much welcome inspiration from other disciplines : physics, engineering, psychology, biology. Bringing experts from these fields together with economists and central bankers is potentially very creative and valuable. Scientists have developed sophisticated tools for analysing complex dynamic systems in a rigorous way. These models have proved helpful in understanding many important but complex phenomena : epidemics, weather patterns, crowd psychology, magnetic fields".*

(J.C. Trichet, gouverneur de la BCE à la Conférence annuelle des Banques Centrales, Novembre 2010.)

La complexité des marchés financiers est aujourd'hui un dogme accepté et assumé par une grande partie des protagonistes de ces mêmes marchés. La première contribution de cette thèse vise à démontrer cette prise de conscience et à proposer des solutions pour améliorer la compréhension, la modélisation et la prévision des mouvements de marché et plus spécifiquement de l'évolution du risque de marché. La recrudescence des crises financières et l'essoufflement des modèles standards à pouvoir rendre compte des fluctuations des rentabilités d'un actif témoignent de la nécessité d'une nouvelle approche dans la modélisation des séries temporelles financières. Conscient de ces insuffisances, un certain nombre de responsables dont J.-C. Trichet, gouverneur de la BCE appelle les économistes à renouveler leurs instruments, leurs modèles pour mieux rendre compte de la complexité des marchés financiers.

Dans le jeu financier, le rôle des autorités prudentielles est primordial : elles doivent mener une politique préventive pour éviter la survenue des crises financières et elles doivent contraindre les établissements financiers à une certaine retenue dans leurs prises de risques pour limiter les impacts des crises financières. La création du Comité de Bâle s'inscrit dans ce double objectif mais les recommandations qu'il formule viennent surtout colmater des failles du système financier que les crises financières ont révélé. Nous détaillons dans le premier chapitre l'évolution du risque de marché à travers la réglementation prudentielle en mettant en exergue la complexité croissante de ces accords qui est à relier à l'évolution des marchés financiers, à l'identification de nouveaux risques et à la complexification des instruments financiers. L'apport majeur en 22 ans d'accords reste l'introduction d'une vision macroéconomique des risques.

Par son ampleur, sa spécificité et son effet de surprise, la crise financière des subprimes apporte un renouveau à la fois intellectuel, idéologique, théorique et même politique. En effet, les différents plans de sauvetage envisagés et le coût supporté par le contribuable alimentent une prise de conscience des citoyens profanes face aux dérives et aux comportements irresponsables de la finance. Elle ouvre la voie à de nouvelles conceptions des marchés financiers face à l'essoufflement et aux limites d'un système capitaliste où la finance libérale prône une autorégulation et l'efficacité des marchés.

Les nouvelles recommandations formulées par le CBSB au lendemain de la crise se focalisent sur les risques de liquidité et de marché : les autorités prudentielles identifient le risque de liquidité comme l'un des principaux vecteurs de la crise financière et soulignent le caractère procyclique des mesures du risque de marché.

Dans le cadre de cette thèse, nous portons un intérêt particulier au risque de marché dont l'évolution substantielle au cours des 30 dernières années a joué un rôle conséquent dans la survenue des crises financières. Il est aussi intrinsèquement lié à plusieurs risques financiers, notamment les risques de contagion, de liquidité et systémique. Intégré tardivement dans le cadre réglementaire, le risque de marché est mieux défini dans l'accord Bâle II qui propose de le mesurer par un instrument particulier : la Value-at-Risk. En dépit des différentes limites de cette mesure, aucun instrument alternatif n'a pu s'imposer

comme mesure de référence du risque de marché. Aussi, il nous semble naturel de contribuer à l'amélioration de cet instrument. Cet objectif est d'autant plus intéressant que les tests de validité de cette mesure se sont considérablement développés.

Une autre approche du risque de marché que nous retenons consiste à mettre en évidence une transmission des chocs entre actifs par l'étude des rentabilités bivariées. Cette démarche est d'autant plus intéressante qu'elle peut mettre en exergue des phénomènes de contagion entre les actifs, qu'elle contribue à la détection des ruptures de corrélations et qu'elle est capable de décrire les interactions entre deux actifs.

La dernière partie du chapitre 1 introduit ces deux approches du risque de marché. Elle présente la Value-at-Risk et les tests de validité la concernant. Nous proposons une classification par génération de tests. Le cadre paramétrique de la VaR est retenu. Par ailleurs, nous donnons une revue de littérature sur les ruptures de corrélations qui vise à détailler les interprétations de ces phénomènes et à synthétiser le débat sur l'interdépendance et la contagion. Elle montre aussi l'intérêt croissant de la littérature économétrique sur ces questions qui sont désormais au cœur de l'actualité financière.

Ces différentes approches du risque de marché sont confrontées à des insuffisances dans la modélisation, la prévision et l'interprétation des structures existantes dans les rentabilités financières. Nous montrons que les faits stylisés, la non linéarité et le bruit des séries financières alimentent un plaidoyer en faveur d'une nouvelle conception des marchés financiers et plus précisément, pour de nouvelles modélisations des séries temporelles financières. Les limites des modèles linéaires et des approches stochastiques de la non-linéarité contribuent à l'émergence d'une nouvelle vision des marchés financiers en tant que lieux de confrontations entre agents hétérogènes dont l'interaction crée des structures chaotiques.

La récente crise financière constitue ainsi un tournant majeur dans l'idéologie libéral si bien qu'un certain nombre de responsables prudents mais aussi des chercheurs se positionnent en faveur de l'ouverture vers d'autres disciplines afin d'améliorer sensiblement la compréhension, la modélisation et la prévision des séries temporelles financières et par conséquent des risques. L'idée d'une

approche linéaire des marchés financiers est définitivement abandonnée et le recours à des modèles plus complexes est encouragé. Hommes(2013) date l'analyse et la modélisation de la complexité des marchés financiers aux années 1980 avec les importants travaux de l'Institut Santa Fe : "*the complexity modelling paradigm has been strongly advocated since the 1980's by economists and multidisciplinary scientists from various fields, such as physics, computer science and biology, linked to the Santa Fe Institute*". Ces premiers travaux restent essentiellement dans le cadre scientifique et ne concernent qu'une branche très restreinte de l'économétrie financière. Pourtant, les apports dans la compréhension et la modélisation des marchés financiers par ces approches sont substantiels. La complexité des marchés financiers est le fruit de l'interaction de différentes catégories d'agents : les fondamentalistes et les chartistes qui n'ont pas la même vision de l'évolution des prix. La coexistence de ces deux types d'agents conduit alors à une modélisation particulière qui doit rendre compte des complexités créées. Il est important de séparer l'idée d'une approche économique de la complexité qui se borne à utiliser des instruments issus de disciplines diverses et l'idée d'une approche multidisciplinaire des marchés financiers. De ces différentes approches, la théorie du chaos reste un point de convergence qui permet une meilleure compréhension des marchés financiers : c'est ce que nous montrons dans le chapitre 2 de cette thèse. Avant d'être importée en économie, la théorie du chaos est essentiellement appliquée dans les sciences dures. Elle se présente comme une des trois principales remises en cause de la théorie Newtonienne et va conduire au développement d'un certain nombre d'instruments capables d'identifier, et de quantifier la complexité d'un système. La redécouverte par Lorenz(1963) de l'effet papillon marque le début d'un intérêt sans précédent de la communauté scientifique envers une théorie "révolutionnaire". Les avancées qui émanent de cet engouement ne doivent pas ombrager les premiers travaux descriptifs, artistiques, mathématiques, économiques... portant sur les caractéristiques du chaos. À ces différentes avancées, il faut opposer les difficultés de la mise en évidence des structures chaotiques, notamment pour les séries temporelles financières. En effet la nécessité d'un nombre important de données associée à la présence d'un bruit prédominant rendent difficiles l'application de tests de détection. Sur le plan analytique, cette difficulté est

liée à la nature même des séries temporelles financières : " *the most important difference between economics and the natural sciences is perhaps the fact that decisions of economic agents today depend upon their expectations or beliefs about the future. To illustrate this difference, weather forecasts for tomorrow will not affect today's weather but investors' predictions about future stock prices may affect financial market movements today* "(Hommes (2013)). Les travaux visant à analyser, modéliser et prévoir les chroniques financières caractérisées par des structures chaotiques sont très nombreux. Les modèles proposés s'inscrivent dans différentes classes : paramétriques, non paramétriques et sont basés sur différentes approches économiques. Le choix d'une approche paramétrique capable de décrire l'évolution des rentabilités d'un actif est motivée par :

- \* l'important panel de structures qui peuvent être décrites par ces modélisations en fonction des paramètres retenus ;
- \* la possibilité d'intégrer un bruit stochastique à un modèle chaotique et ainsi d'inclure dans la modélisation les avancées des trente dernières années en économétrie temporelle (processus GARCH, à mémoire longue, à changements de régimes) ;
- \* l'interprétation économique qu'on peut tirer de ces modélisations à savoir une dynamique créée par les fondamentalistes et donnée par la partie chaotique du modèle et une dynamique reflétée par la partie stochastique, qui décrit le comportement des chartistes.

Nous mettons en exergue le comportement de deux modèles en particulier-les modèles Mackey-Glass (1977) et Lasota(1977)- lorsqu'ils sont couplés à un bruit stochastique qui peut prendre la forme d'un effet GARCH avec ou sans changements de régimes markoviens ou d'un effet GARCH avec mémoire longue. Les simulations réalisées permettent d'identifier les dynamiques de ces modèles d'autant plus que la littérature concernant le modèle de Lasota(1977) est relativement pauvre. Nous relevons le caractère explosif du modèle de Lasota(1977) et nous montrons tout l'intérêt de recourir à des modèles chaos-stochastiques de ce type pour la modélisation et la prévision des séries temporelles financières. La pléthore des dynamiques que ces modèles peuvent décrire en fonction des



paramètres retenus contribue à envisager ce type de modèle comme une référence en économétrie financière. Les recommandations sur l'utilisation de ces modèles par des économètres financiers concernent surtout la nécessité de coupler un modèle chaotique à un bruit stochastique qui peut intégrer ou non des changements de régimes, une modélisation en deux étapes permettant de filtrer les structures chaotiques, le choix d'une dimension proche de 2 pour rendre compte d'un chaos à faible dimension, notamment sur des périodes non-stressées. Par ailleurs, une dimension de 2 permet d'obtenir un équilibre localement et asymptotiquement stable.

Nous retenons aussi une approche bivariée chaos-stochastique avec ou sans changements de régimes et nous détaillons une méthodologie particulière pour l'utilisation de ces modèles. Cette approche, appliquée uniquement au modèle Mackey-Glass, offre deux modélisations possibles pour décrire les mouvements de marché bivariés. La première s'inscrit dans un cadre d'analyse de l'intensification des liens entre deux séries temporelles : elle consiste en une modélisation chaos-stochastique, par sous-périodes, des relations susceptibles d'exister. La deuxième modélisation est une approche unifiée des liens par un modèle intégrant à la fois une partie chaotique et une spécification stochastique bivariée avec des changements de régimes. Ces deux approches analogues renvoient à l'étude d'une même problématique à savoir la prise en compte des ruptures de corrélations qui peuvent fausser les conclusions d'une étude basée sur une approche linéaire des relations.

Dans le troisième chapitre, nous évaluons les capacités des modèles chaos-stochastiques avec ou sans changement de régimes dans la description, la modélisation et la prévision des indices européens. Nous proposons une double analyse de ces modèles : une étude univariée qui porte sur la modélisation, la prévision et l'évaluation et une approche bivariée capable de décrire les relations entre deux indices européens. La spécificité des pays de la zone euro, notamment des pays GIPSI, de l'Allemagne et de la France qui ont été au cœur des crises des subprimes et des dettes souveraines nous conduit à proposer une modélisation des évolutions de leurs indices sur la période [2003-2011]. Le recours à des sous-périodes particulières permet de juger des capacités des modèles chaos-stochastiques dans la modélisation et la prévision du risque de

marché dans un cadre individualisé. L'analyse des capacités prédictives dans l'échantillon est menée en retenant d'une part des tests et mesures statistiques et d'autre part des tests d'évaluation des VaR. Il ressort de cette analyse les bonnes performances des modèles chaos-stochastique de type GARCH qui se confirment sur les différents échantillons. L'évaluation hors-échantillon permet d'affiner les résultats obtenus puisqu'elle indique les meilleures performances des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes pour les indices de l'Europe du Sud, traditionnellement plus volatiles que ceux de l'Europe du Nord. Par ailleurs, les performances des modèles chaos-stochastiques de type GARCH sont largement confirmées sur les trois sous-échantillons. Les résultats de cette application empirique fournissent plusieurs enseignements :

- \* les marchés financiers sont complexes et les séries temporelles financières comportent des structures chaotiques : il faut impérativement reconsidérer le modèle standard de type ARMA-GARCH au profit des modèles chaos-stochastiques qui apparaissent comme la modélisation standard des séries temporelles financières ;
- \* le recours à des modèles avec changements de régimes markoviens est nécessaire : les propositions du Comité en faveur d'une VaR stressée restent insuffisantes dans la mesure où elles ne résolvent que partiellement le problème de la pro-cyclicité. La capacité des modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes à rendre compte de dynamiques particulièrement volatiles encourage ce type de modèle pour anticiper le risque de marché et briser la pro-cyclicité dans la détermination des fonds propres ;
- \* sur le plan européen, nous avons identifié deux sphères particulières dont le principal discriminant reste le niveau de volatilité. La nature fortement erratique des pays de l'Europe du Sud n'est pas sans conséquence sur les pays de l'Europe du Nord et il revient à ces derniers d'encourager une intégration européenne pour limiter une partie de cette volatilité dont les dommages peuvent être conséquents.

L'étude bivariée révèle tout l'intérêt de l'utilisation de modèles chaos-stochastiques pour rendre compte des interactions non linéaires susceptibles d'exister entre deux indices. Les approches retenues dans le cadre bivarié permettent de décrire

l'ensemble des relations entre les indices européens : elles révèlent le leadership du couple franco-allemand dont les interactions asymétriques sur les autres indices européens montre le rôle consensuel de l'indice français vis-à-vis des ses partenaires de l'Europe continentale. Ces analyses font état de deux ensembles distincts constitués d'une part par les pays de l'Europe du Nord et d'autre part par les pays de l'Europe du Sud, au sein desquels il existe une forte interaction de nature différente. L'isolement de l'indice irlandais est à relier à des raisons spatiale et culturel dans la mesure où tous les autres indices sont circonscrits au continent. Par ailleurs, la crise des dettes souveraines a renforcé les relations entre plusieurs indices européens, révélant ainsi l'existence de phénomènes de contagions de type non linéaire.

Sur le plan économétrique, l'apport principal du chapitre empirique réside dans la pertinence de l'utilisation d'un modèle chaotique en moyenne, capable de filtrer une partie de la volatilité attribuée, à tort, aux processus stochastiques. Les résultats obtenus confirment les intuitions de Corcos et al.(2008) sur l'interaction des structures stochastiques et chaotiques qui rendent difficile la détection de ces dernières et qui contribuent à une mauvaise spécification du modèle en privilégiant des approches purement stochastiques. Une prise de conscience des contributions des approches chaos-stochastiques doit permettre un développement conséquent des modélisations capables de décrire les dynamiques financières.

L'appel des responsables prudeniels en faveur d'une nouvelle conception plus réaliste des marchés financiers marque un tournant important puisqu'il invite les chercheurs à se renouveler. Les études empiriques dont celle présenté dans cette thèse contribuent à montrer que le recours à des modèles plus complexes devient une nécessité à laquelle les établissements financiers doivent se conformer au plus vite. Les autorités réglementaires doivent aussi s'impliquer davantage en exigeant des modèles plus performants et en imposant des tests d'évaluations plus strictes et plus robustes.

Cette thèse est un plaidoyer pour l'ouverture de la science économique et plus particulièrement de l'économétrie financière à d'autres disciplines qui ont su intégrer de nouvelles approches, renouveler leurs instruments et développer des

approches atypiques pour aider les décideurs dans leurs choix. Elle ouvre de nouvelles perspectives de recherche qui concernent différentes thématiques :

- \* la réglementation financière : la nécessité d'une stabilité financière et les ravages économiques induits par les crises financières doivent pousser les instances de réglementation à une plus grande sévérité, notamment dans l'évaluation des risques. En dépit des mesures prises au lendemain de la crise financière des subprimes, les recommandations restent insuffisantes. En ce qui concerne le risque de marché, le Comité a tout intérêt à inviter progressivement les banques et les institutions financières à améliorer leurs tests d'évaluation, à utiliser des mesures plus adaptées, à tenir compte des différentes interactions possibles dans la mesure et l'évaluation de leur risque de marché ;
- \* la modélisation et la prévision des séries temporelles financières : les économètres financiers doivent emboîter le pas aux physiciens, aux mathématiciens, et aux physiologistes en recourant à la théorie du chaos. Si une approche purement chaotique reste difficilement acceptable, une association des modèles chaotiques et stochastiques est une démarche intéressante. Au-delà des résultats obtenus dans cette thèse, ce type d'approche peut se transposer dans une étude multi-agents, pour la mesure et l'évaluation d'autres risques financiers, dans une analyse multivariée ou encore dans des systèmes d'alerte des crises. Les problématiques de recherche qui peuvent intégrer ce type d'approche restent nombreuses mais souffrent des limites théoriques imposées par une approche purement stochastique ;
- \* le développement des modèles chaotiques : le recours au modèle de Lasota(1977) a permis de juger de sa capacité à décrire les structures chaotiques d'une chronique fortement stressée. En dépit de l'apport de cette équation, la littérature la concernant reste très pauvre. Aussi, il peut être intéressant de poursuivre les recherches concernant ce modèle et de développer des spécifications chaos-stochastiques capables d'intégrer simultanément ou en différé des changements de régimes. Ce type de spécification

permettrait de traduire des régimes différents en moyenne et en variance qui seraient le reflet des différentes phases des agents hétérogènes.

Ces différentes perspectives demeurent des ouvertures dont l'issue reste incertaine mais elles vont progressivement devenir des sujets d'intérêts majeurs tant la pression des responsables politiques et les limites des approches standards sont de plus en plus fortes.

## RÉFÉRENCES

---

- [1] ABARBANEL, H., BROWN, R., KENNEL, M. (1991). Lyapunov exponents in chaotic systems : their importance and their evaluation using observed data. In *International Journal of Modern Physics B*, vol. 5(09) :pp. 1347–1375.
- [2] ABARBANEL, H., BROWN, R., KENNEL, M. (1992). Determining embedding dimension for phase space reconstruction using the method of false nearest neighbors. In *Phys. Rev. A*, vol. 45(6) :pp. 3403–3411.
- [3] ABHYANKAR, A., COPELAND, L.S., WONG, W. (1995). Nonlinear dynamics in real-time equity market indices : Evidence from the united kingdom. In *The Economic Journal*, vol. 105(431) :pp. pp. 864–880.
- [4] ABHYANKAR, A., COPELAND, L.S., WONG, W. (1997). Uncovering nonlinear structure in real-time stock-market indexes : The s&p 500, the dax, the nikkei 225, and the ftse-100. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 15(1) :pp. 1–14.
- [5] ABRAHAM, A. IKENBERRY, D.L. (1994). The individual investor and the weekend effect. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 29(2) :pp. pp. 263–277.
- [6] ABRAHAM-FROIS, G. (1994). La dynamique chaotique. In *Revue d'économie politique*, vol. 104(2-3). Numéro spécial.
- [7] ABRAHAM-FROIS, G. (1995). *Les fluctuations économiques : analyses contemporaines*. Economica.
- [8] ABRAHAM-FROIS, G. BERREBI, E. (1995). *Instabilité, cycles, chaos*. Economica.
- [9] ADRANGI, B., CHATRATH, A., DHANDA, K.K., RAFFIEE, K. (2001). Chaos in oil prices ? evidence from futures markets. In *Energy Economics*, vol. 23(4) :pp. 405 – 425.
- [10] AFTALION, F. PONCET, P. (2004). La volatilité. In *Revue Banque et Marchés*.

- [11] AGLIETTA, M. (2003). Le risque systémique dans la finance libéralisée. In *Revue d'économie financière*, vol. 70(1) :pp. 33–50.
- [12] AGNON, Y., GOLAN, A., SHEARER, M. (1999). Nonparametric, nonlinear, short-term forecasting : theory and evidence for nonlinearities in the commodity markets. In *Economics Letters*, vol. 65(3) :pp. 293–299.
- [13] AGRAWAL, A. TANDON, K. (1994). Anomalies or illusions? evidence from stock markets in eighteen countries. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 13(1) :pp. 83 – 106.
- [14] ALEXANDER, S.S. (1961). Price movements in speculative markets : Trends or random walks. In *Industrial Management Review*, vol. 2 :pp. 7–26.
- [15] ALLAIS, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine. In *Econometrica : Journal of the Econometric Society* :pp. 503–546.
- [16] ALSALEH, M. (2002). Detecting chaos in kuwait exchange rate data. In *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 111(6) :pp. 3814–3819.
- [17] AMEMIYA, T. (1983). Nonlinear regression models. In *Handbook of econometrics*, vol. 1 :pp. 333–389.
- [18] AMMERMAN, P.A. PATTERSON, D.M. (2003). The cross-sectional and cross-temporal universality of nonlinear serial dependencies : Evidence from world stock indices and the taiwan stock exchange. In *Pacific-Basin Finance Journal*, vol. 11(2) :pp. 175 – 195.
- [19] ANDERSEN, T.G. BOLLERSLEV, T. (1997). Heterogeneous information arrivals and return volatility dynamics : Uncovering the long-run in high frequency returns. In *The journal of Finance*, vol. 52(3) :pp. 975–1005.
- [20] ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD, F.X., EBENS, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility. In *Journal of Financial Economics*, vol. 61(1) :pp. 43 – 76.
- [21] ANDERSEN, T.G., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD, F.X., EBENS, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility. In *Journal of Financial Economics*, vol. 61(1) :pp. 43 – 76.

- [22] ANDERSON, H., NAM, K., VAHID, F. (1999). Asymmetric nonlinear smooth transition garch models. In *Nonlinear time series analysis of economic and financial data*. Springer, pp. 191–207.
- [23] ANDREOU, A.S., PAVLIDES, G., KARYTINOS, A. (2000). Non-linear time-series analysis of the greek exchange-rate market. In *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10(07) :pp. 1729–1758.
- [24] ANDREWS, D. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. In *Econometrica : Journal of the Econometric Society* :pp. 817–858.
- [25] ANDRONOV, A. (1929). Les cycles limites de poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. In *CR Acad. Sci. Paris*, vol. 189 :pp. 559–561.
- [26] ANG, J. SCHWARZ, T. (1985). Risk a version and information structure : An experimental study of price variability in the securities markets. In *The Journal of Finance*, vol. 40(3) :pp. 825–844.
- [27] ANTONIOU, A. VORLOW, C.E. (2005). Price clustering and discreteness : is there chaos behind the noise? In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 348(0) :pp. 389 – 403.
- [28] APARICIO, T., POZO, E., SAURA, D. (2008). Detecting determinism using recurrence quantification analysis : Three test procedures. In *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 65(3) :pp. 768–787.
- [29] APARICIO, T., POZO, E., SAURA, D. (2011). Detecting determinism using recurrence quantification analysis : a solution to the problem of embedding. In *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, vol. 15(1).
- [30] ARAGONÈS, J., BLANCO, C., DOWD, K. (2001). Incorporating stress tests into market risk modeling. In *Derivatives Quarterly*, vol. 7(3) :pp. 44–50.
- [31] ARIEL, R.A. (1987). A monthly effect in stock returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 18(1) :pp. 161 – 174.



- [32] ARIEL, R.A. (1990). High stock returns before holidays : existence and evidence on possible causes. In *The Journal of Finance*, vol. 45(5) :pp. 1611–1626.
- [33] ARMATTE, M. (2009). Crise financière : modèles du risque et risque de modèle. In *Mouvements*, (2) :pp. 160–176.
- [34] ARNOULT, N. ISSAAD, R. (2011). *Réseaux de neurones et séries temporelles : Une application au taux de change Euro/Dollar*. Master's thesis, Université Paris Dauphine.
- [35] ARSAD, Z. COUTTS, J. (1997). Security price anomalies in the london international stock exchange : a 60 year perspective. In *Applied Financial Economics*, vol. 7(5) :pp. 455–464.
- [36] ARTHUR, W., HOLLAND, J., LEBARON, B., PALMER, R. (1997). Asset pricing under endogenous expectations in an artificial stock market. In *The Economy as an Evolving Complex System II, Reading, Ma : Addison-Wesley* :pp. 15–44.
- [37] ARTUS, P., BETBÈZE, J.P., DE BOISSIEU, C., CAPELLE-BLANCARD, G. (2008). La crise des subprimes. Rapport du CAE.
- [38] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. AND HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. In *Mathematical finance*, vol. 9(3) :pp. 203–228.
- [39] ASTATKIE, T., WATTS, D., WATT, W. (1997). Nested threshold autoregressive (netar) models. In *International Journal of Forecasting*, vol. 13(1) :pp. 105–116.
- [40] AUDRINO, F. BÜHLMANN, P. (2001). Tree-structured generalized autoregressive conditional heteroscedastic models. In *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, vol. 63(4) :pp. 727–744.
- [41] AUTORITÉ DU CONTRÔLE PRUDENTIEL (2013). Stress tests sur le système bancaire et les organismes d'assurance en france. Tech. rep., Banque de France.
- [42] AYDOGAN, K. BOOTH, G.G. (1988). Are there long cycles in common stock returns? In *Southern Economic Journal*, vol. 55(1) :pp. pp. 141–149.

- [43] BACHELIER, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Gauthier-Villars.
- [44] BAHRAMMIRZAEI, A. (2010). A comparative survey of artificial intelligence applications in finance : artificial neural networks, expert system and hybrid intelligent systems. In *Neural Computing and Applications*, vol. 19(8) :pp. 1165–1195.
- [45] BAIG, T. GOLDFAJN, I. (1998). *Financial Market Contagion in the Asian Crisis*. IMF working paper. International Monetary Fund, Asia and Pacific Department. [4].
- [46] BAILLIE, R. (1996). Long memory processes and fractional integration in econometrics. In *Journal of Econometrics*, vol. 73 :pp. 5–59.
- [47] BAILLIE, R., BOLLERSLEV, T., MIKKELSEN, H. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. In *Journal of Econometrics*, vol. 74 :pp. 3–30.
- [48] BALKE, N. WOHAR, M. (1998). Nonlinear dynamics and covered interest rate parity. In *Empirical Economics*, vol. 23(4) :pp. 535–559.
- [49] BANKS, J., BROOKS, J., CAIRNS, G., DAVIS, G., STACEY, P. (1992). On devaney’s definition of chaos. In *American Mathematical Monthly* :pp. 332–334.
- [50] BARKOULAS, J. TRAVLOS, N. (1998). Chaos in an emerging capital market ? the case of the athens stock exchange. In *Applied Financial Economics*, vol. 8(3) :pp. 231–243.
- [51] BARKOULAS, J.T. BAUM, C.F. (1996). Long-term dependence in stock returns. In *Economics Letters*, vol. 53(3) :pp. 253 – 259.
- [52] BARKOULAS, J. BAUM, C.F. (1997). Long memory and forecasting in euroyen deposit rates. In *Financial Engineering and the Japanese Markets*, vol. 4(3) :pp. 189–201.
- [53] BARNDORFF-NIELSEN, O.E. PRAUSE, K. (2001). Apparent scaling. In *Finance and Stochastics*, vol. 5(1) :pp. 103–113.
- [54] BARRO, R. GROSSMAN, H. (1971). A general disequilibrium model of income and employment. In *The American Economic Review* :pp. 82–93.

- [55] BASAK, S. SHAPIRO, A. (2001). Value-at-risk-based risk management : optimal policies and asset prices. In *Review of Financial studies*, vol. 14(2) :pp. 371–405.
- [56] BAUWENS, L., LAURENT, S., ROMBOUTS, J.V.K. (2006). Multivariate garch models : a survey. In *Journal of Applied Econometrics*, vol. 21(1) :pp. 79–109. [6].
- [57] BAUWENS, L., OTRANTO, E., ET AL. (2013). Modeling the dependence of conditional correlations on volatility. Tech. rep., Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE).
- [58] BAWA, V. KLEIN, R. (1976). The effect of estimation risk on optimal portfolio choice. In *Journal of Financial Economics*, vol. 3(3) :pp. 215–231.
- [59] BEAUFILS, B., BRANDOUY, O., MATHIEU, P. (2010). *Qu'appelle-t-on aujourd'hui les sciences de la complexité ? : langages, réseaux, marchés, territoires*, chap. Une analyse de la complexité des dynamiques financières à l'aide de modèles multi-agents.
- [60] BECKER, C. SCHMIDT, W.M. (2015). How past market movements affect correlation and volatility. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 50 :pp. 78–107.
- [61] BEDER, T. (1995). Var : Seductive but dangerous. In *Financial Analysts Journal* :pp. 12–24.
- [62] BEINE, M. LAURENT, S. (2003). Central bank interventions and jumps in double long memory models of daily exchange rates. In *Journal of Empirical Finance*, vol. 10(5) :pp. 641 – 660.
- [63] BEIRNE, J. FRATZSCHER, M. (2013). The pricing of sovereign risk and contagion during the european sovereign debt crisis. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 34(C) :pp. 60–82. [2].
- [64] BEIRNE, J. FRATZSCHER, M. (2013). The pricing of sovereign risk and contagion during the european sovereign debt crisis. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 34(C) :pp. 60–82. [2].
- [65] BEJA, A. GOLDMAN, M. (1980). On the dynamic behavior of prices in disequilibrium. In *The Journal of Finance*, vol. 35(2) :pp. 235–248.

- [66] BELAIRE-FRANCH, J. CONTRERAS, D. (2002). Recurrence plots in nonlinear time series analysis : Free software. In *J-STAT-SOFT*, vol. 7(9) :pp. 1–18.
- [67] BEN SALEM, M. PERRAUDIN, C. (2001). Tests de linéarité, spécification et estimation de modèles à seuil : une analyse comparée des méthodes de tsay et de hansen. In *Economie & prévision*, (2) :pp. 157–176.
- [68] BENASSY, J.P. (1984). *Macroéconomie et théorie du déséquilibre*. Dunod.
- [69] BENSAlIDA, A. (2014). Noisy chaos in intraday financial data : Evidence from the american index. In *Applied Mathematics and Computation*, vol. 226(0) :pp. 258 – 265.
- [70] BENSAlIDA, A. LITIMI, H. (2013). High level chaos in the exchange and index markets. In *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 54(0) :pp. 90 – 95.
- [71] BENSAlFTA, K.M. SEMEDO, G. (2011). Chocs, chocs de volatilité et contagion entre les marchés boursiers. application d’un modèle icss-mgarch. In *Revue économique*, vol. 62(2) :pp. 277–311. [4].
- [72] BEREZANSKY, L. BRAVERMAN, E. (2006). Mackey-glass equation with variable coefficients. In *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 51(1) :pp. 1–16.
- [73] BEREZANSKY, L. BRAVERMAN, E. (2006). On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays. In *Advances in Dynamical Systems and Applications*, vol. 1(1) :pp. 29–47.
- [74] BEREZANSKY, L., BRAVERMAN, E., IDELS, L. (2013). Mackey–glass model of hematopoiesis with non-monotone feedback : Stability, oscillation and control. In *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219(11) :pp. 6268–6283.
- [75] BEREZANSKY, L. BRAVERMAN, E. (2006). On existence and attractivity of periodic solutions for the hematopoiesis equation. In *Dynamics of continuous discrete and impulsive systems-series A- Mathematical analysis*, vol. 13 :pp. 103–116.
- [76] BERKOWITZ, J. (1999). *A coherent framework for stress-testing*, vol. 99. Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board.

- [77] BERKOWITZ, J. (2001). Testing density forecasts, with applications to risk management. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 19(4) :pp. 465–474.
- [78] BERKOWITZ, J., CHRISTOFFERSEN, P., PELLETIER, D. (2005). Evaluating value-at-risk models with desk-level data. Tech. rep., North Carolina State University, Department of Economics.
- [79] BERKOWITZ, J. O'BRIEN, J. (2002). How accurate are value-at-risk models at commercial banks? In *The Journal of Finance*, vol. 57(3) :pp. 1093–1111.
- [80] BERNANKE, B. (2007). Housing, housing finance, and monetary policy. In *Speech Federal Reserve Bank of Kansas City's Economic Symposium*.
- [81] BERNARD, C. (1865). *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*. Baillière.
- [82] BERNDT, E., HALL, B., HALL, R., HAUSMAN, J. (1974). Estimation and inference in nonlinear structural models. In *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 3, number 4*. NBER, pp. 103–116.
- [83] BERNOULLI, D. (1738). Spécimen theoriae novae de mensura sortis. In *Proceedings of the Impérial Academy*.
- [84] BETBÈZE, J.P., BORDES, C., COUPPEY-SOUBEYRAN, J., PLIHON, D. (2011). *Banques centrales et stabilité financière*. la Documentation française.
- [85] BHARDWAJ, R.K. BROOKS, L.D. (1992). The january anomaly : Effects of low share price, transaction costs, and bid-ask bias. In *The Journal of Finance*, vol. 47(2) :pp. 553–575.
- [86] BIKHCHANDANI, S., HIRSHLEIFER, D., WELCH, I. (1992). A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. In *Journal of political Economy* :pp. 992–1026.
- [87] BILLIO, M. PELIZZON, L. (2000). Value-at-risk : a multivariate switching regime approach. In *Journal of Empirical Finance*, vol. 7(5) :pp. 531–554.
- [88] BLACK, F. (1986). Noise. In *The journal of finance*, vol. 41(3) :pp. 529–543.

- [89] BLAKE, A. KAPETANIOS, G. (2007). Testing for arch in the presence of nonlinearity of unknown form in the conditional mean. In *Journal of Econometrics*, vol. 137(2) :pp. 472–488.
- [90] BLAKE, A.P. KAPETANIOS, G. (2004). Testing for Neglected Nonlinearity in Cointegrating Relationships. Working Papers 508, Queen Mary, University of London, School of Economics and Finance.
- [91] BLANK, S.C. (1991). Chaos in futures markets ? a nonlinear dynamical analysis. In *Journal of Futures Markets*, vol. 11(6) :pp. 711–728.
- [92] BODMAN, P. (1998). Asymmetry and duration dependence in australian gdp and unemployment. In *Economic Record*, vol. 74(227) :pp. 399–411.
- [93] BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. In *Journal of Econometrics*, vol. 31 :pp. 307–327.
- [94] BOLLERSLEV, T., CHOU, R.Y., JAYARAMAN, N., KRONER, K.F. (1991). Les modèles arch en finance : Un point sur la théorie et les résultats empiriques. In *Annals of Economics and Statistics / Annales d'Économie et de Statistique*, (24) :pp. 1–59.
- [95] BOLLERSLEV, T. ENGLE, R. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. In *Econometric reviews*, vol. 5(1) :pp. 1–50.
- [96] BOLLERSLEV, T., ENGLE, R., NELSON, D. (1994). Chapter 49 arch models. vol. 4 of *Handbook of Econometrics*. Elsevier, pp. 2959 – 3038.
- [97] BOLLERSLEV, T. ENGLE, R. (1993). Common persistence in conditional variances. In *Econometrica*, vol. 61 :pp. 167–186.
- [98] BOLLERSLEV, T. MIKKELSEN, H.O. (1996). Modeling and pricing long memory in stock market volatility. In *Journal of Econometrics*, vol. 73(1) :pp. 151 – 184.
- [99] BORDO, M., EICHENGREEN, B., KLINGEBIEL, D., MARTINEZ-PERIA, M.S. (2001). Is the crisis problem growing more severe ? In *Economic Policy*, vol. 16(32) :pp. 51–82.
- [100] BORDO, M. (1990). The lender of last resort : Alternative views and historical experience. In *Economic Review*.

- [101] BORIO, C. SHIM, I. (2007). *What can (macro-) prudential policy do to support monetary policy?*. 242. Bank for International Settlements, Monetary and Economic Department.
- [102] BOUCHER, C. (2003). Identification des crises boursières. Tech. rep., Université Paris XIII,.
- [103] BOUDOUGH, J., RICHARDSON, M., WHITELAW, R. (1998). The best of both worlds. In *Risk*, vol. 11(5) :pp. 64–67.
- [104] BOUGEROL, P. PICARD, N. (1992). Stationarity of garch processes and of some nonnegative time series. In *Journal of Econometrics*, vol. 52 :pp. 115–128.
- [105] BOX, G. PIERCE, D. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. In *Journal of the American statistical Association*, vol. 65(332) :pp. 1509–1526.
- [106] BOX, G. JENKINS, G. (1970). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- [107] BOYER, B.H., GIBSON, M.S., LORETAN, M. (1997). Pitfalls in tests for changes in correlations. International Finance Discussion Papers 597, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.). [4].
- [108] BOYLE, P., HARDY, M., VORST, T. (2005). Life after var. In *The Journal of Derivatives*, vol. 13(1) :pp. 48–55.
- [109] BRESSON, G. PIROTTE, A. (1995). *Économétrie des séries temporelles. Théorie et applications*. PUF.
- [110] BRI (2001). *71e rapport annuel : 1er avril 2000-31 mars 2001*. Rapport annuel - Banque des règlements internationaux. Banque des Règlements Internationaux.
- [111] BRI (2007). *Rapport trimestriel de la BRI*.
- [112] BRITTEN-JONES, M. SCHAEFER, S. (1999). Non-linear value-at-risk. In *European Finance Review*, vol. 2(2) :pp. 161–187.
- [113] BROCK, W. (1986). Distinguishing random and deterministic systems : Abridged version. In *Journal of Economic theory*, vol. 40(1) :pp. 168–195.

- [114] BROCK, W. HOMMES, C. (1997). A rational route to randomness. In *Econometrica : Journal of the Econometric Society* :pp. 1059–1095.
- [115] BROCK, W.A., DECHERT, W.D., SCHEINKMAN, J. (1987). A test for independence based on the correlation dimension. Tech. rep., Discussion Paper 8702, University of Wisconsin-Madison.
- [116] BROCK, W.A. HOMMES, C.H. (1998). Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. In *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 22(8-9) :pp. 1235 – 1274.
- [117] BROCK, W.A., HSIEH, D.A., LEBARON, B.D. (1991). *Nonlinear dynamics, chaos, and instability : statistical theory and economic evidence*. MIT press.
- [118] BROCKMAN, P. MICHAYLUK, D. (1998). The persistent holiday effect : additional evidence. In *Applied Economics Letters*, vol. 5(4) :pp. 205–209.
- [119] BROOKS, C. (1996). Testing for non-linearity in daily sterling exchange rates. In *Applied Financial Economics*, vol. 6(4) :pp. 307–317.
- [120] BROWN, A. (2008). Private profits and socialized risk. In *Global Association of Risk Professionals*, vol. 42 :pp. 10–26.
- [121] BROWN, R. TOLIKAS, K. (2006). The distribution of the extreme daily share returns in the athens stock exchange. In *European Journal of Finance*, vol. 12(1) :pp. 1–22.
- [122] BYRES, W. (2013). Speech to the riskminds risk and regulation forum. CBSB.
- [123] CADSBY, C.B. RATNER, M. (1992). Turn-of-month and pre-holiday effects on stock returns : Some international evidence. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 16(3) :pp. 497 – 509.
- [124] CAI, J. (1994). A markov model of switching-regime arch. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 12(3) :pp. 309–316.
- [125] CAJUEIRO, D.O. TABAK, B.M. (2004). Evidence of long range dependence in asian equity markets : the role of liquidity and market restrictions. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 342(34) :pp. 656 – 664.



- [126] CAJUEIRO, D.O. TABAK, B.M. (2005). Possible causes of long-range dependence in the brazilian stock market. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 345(34) :pp. 635 – 645.
- [127] CALOMIRIS, C. . MASSON, J. (1997). Contagion and bank failures during the great depression : The june 1932 chicago banking panic. In *American Economic Review*.
- [128] CALVO, G.A. MENDOZA, E.G. (2000). Rational contagion and the globalization of securities markets. In *Journal of International Economics*, vol. 51(1) :pp. 79–113. [4].
- [129] CAMPBELL, J.Y., LO, A., MACKINLAY, A.C. (1996). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [130] CAMPBELL, R., KOEDIJK, K., KOFMAN, P. (2002). Increased correlation in bear markets. In *Financial Analysts Journal*, vol. 58(1) :pp. 87–94.
- [131] CAMPBELL, S. (2005). *A review of backtesting and backtesting procedures*. Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board.
- [132] CANAMERO, M. PRIOUX, S. (2011). Stress-tests -enjeux et best practices-. In *Revue Banque*, (742) :p. 78.
- [133] CANDELON, B., COLLETAZ, G., HURLIN, C., TOKPAVI, S. (2008). Backtesting Value-at-Risk : A GMM Duration-Based Test. Working Papers halshs-00329495, HAL.
- [134] CANTOR, G. (1883). Über unendliche, lineare punktmannigfaltigkeiten. In *Mathematische Annalen*.
- [135] CAO, C. NELSON, D. (1992). Inequality constraints in the univariate garch model. In *Journal of Business and economic statistics*, vol. 10 :p. 229235.
- [136] CAPORALE, G.M., CIPOLLINI, A., SPAGNOLO, N. (2005). Testing for contagion : a conditional correlation analysis. In *Journal of Empirical Finance*, vol. 12(3) :pp. 476–489. [4].
- [137] CARAGUEL, S. VIGIER, A. (2006). Marchés financiers : aléa ou chaos? In .

- [138] CARTAPANIS, A. (2011). La crise financière et les politiques macroprudentielles. In *Revue économique*, vol. 62(3) :pp. 349–382.
- [139] CARTWRIGHT, M. LITTLEWOOD, J. (1945). On nonlinear differential equations of the second order. In *London Mathematical Society*.
- [140] CASDAGLI, M. (1992). Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-Linear Modelling. In *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 54(2) :pp. 303–328.
- [141] CAVAILLÈS, R. (1994). Histoires parallèles du 'bruit' et du 'chaos'. In *situations : Littérature et théorie du chaos*, (12) :pp. 13–40.
- [142] CAYLEY, A. (1879). Desiderata and suggestions : no. 3. the newton-fourier imaginary problem. In *American Journal of Mathematics*, vol. 2(1) :pp. 97–97.
- [143] CBSB (1975). Rapport pour le contrôle des établissements des banques à l'étranger.
- [144] CBSB (1978). Rapport sur la consolidation des bilans des banques.
- [145] CBSB (1979). Rapport sur la surveillance consolidée des activités internationales des banques.
- [146] CBSB (1979). Rapport sur le traitement des intérêts minoritaires dans la consolidation des banques.
- [147] CBSB (1980). Note sur la surveillance des positions de change des banques.
- [148] CBSB (1981). Note sur le secret bancaire et la coopération internationale pour la supervision bancaire.
- [149] CBSB (1982). Réflexions sur la gestion des prêts bancaires internationaux.
- [150] CBSB (1983). Principes pour le contrôle des banques à l'étranger.
- [151] CBSB (1983). Procédures d'autorisation pour les établissements des banques à l'étranger.
- [152] CBSB (1984). Procédures de confirmations interbancaires.
- [153] CBSB (1986). Recommandations pour la gestion des engagements hors bilan.
- [154] CBSB (1987). Propositions en vue de la convergence internationale de la mesure et des normes de fonds propres.

- [155] CBSB (1988). Convergence internationale de la mesure et des normes de fonds propres.
- [156] CBSB (1988). Note sur la prévention de l'utilisation du système bancaire pour le blanchiment des fonds d'origine criminelle.
- [157] CBSB (1989). Note sur les risques liés aux systèmes informatiques et de télécommunications.
- [158] CBSB (1990). Amendement au concordat de 1983.
- [159] CBSB (1990). Note sur les bonnes pratiques dans la mesure et le contrôle des grands risques de crédit.
- [160] CBSB (1990). Rapport sur les échanges d'informations entre autorités de contrôle bancaire et instances de surveillance des entreprises d'investissement.
- [161] CBSB (1993). Propositions sur le traitement prudentiel des risques de marché dans les établissements de crédit.
- [162] CBSB (1994). Lignes directrices pour la gestion des risques liées aux instruments dérivés.
- [163] CBSB (1995). Projet d'extension de l'accord sur les fonds propres aux risques de marché.
- [164] CBSB (1996). Amendement à l'accord sur les fonds propres pour son extension aux risques de marchés.
- [165] CBSB (1999). Nouveau dispositif d'adéquation des fonds propres.
- [166] CBSB (2003). Principes directeurs pour la mise en oeuvre transfrontalière du nouvel accord.
- [167] CBSB (2008). Principes de saine gestion et de surveillance du risque de liquidité.
- [168] CBSB (2009). Revisions to the basel ii market risk framework - final version.
- [169] CBSB (2010). Bâle iii : dispositif réglementaire mondial visant à renforcer la résilience des établissements et systèmes bancaires.
- [170] CECEN, A. UGUR, A. (2005). On testing for nonlinear dependence and chaos in financial time series data. In IEEE, ed., *in 2005 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. Vol. 1. pp. pp.203–208.

- [171] CHAKRABARTI, B., CHAKRABORTI, A., CHAKRAVARTY, S., CHATTERJEE, A. (2013). *Econophysics of income and wealth distributions*. Cambridge University Press.
- [172] CHAN, K. TONG, H. (1986). On estimating thresholds in autoregressive models. In *Journal of time series analysis*, vol. 7(3) :pp. 179–190.
- [173] CHARPENTIER, A. (2002). *Séries temporelles : Théorie et applications*. Polycopié de cours Université Paris IX Dauphine.
- [174] CHEN, C.H.. TONG, H. (1978). On a threshold model in pattern recognition and signal processing. In .
- [175] CHEN, G.M., FIRTH, M., RUI, O. (2001). The dynamic relation between stock returns, trading volume, and volatility. In *Financial Review*, vol. 36(3) :pp. 153–174.
- [176] CHEN, H. SINGAL, V. (2003). Role of speculative short sales in price formation : The case of the weekend effect. In *The Journal of Finance*, vol. 58(2) :pp. 685–706.
- [177] CHEN, S.H. LIAO, C.C. (2005). Agent-based computational modeling of the stock price–volume relation. In *Information Sciences*, vol. 170(1) :pp. 75–100.
- [178] CHEN, S.W. LIN, J. (2000). Identifying turning points and business cycles in taiwan : a multivariate dynamic markov switching factor model approach. In *Academia Economic Papers*, vol. 28 :pp. 289–320.
- [179] CHEN, W.C. (2008). Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system. In *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 36(5) :pp. 1305–1314.
- [180] CHERNOZHUKOV, V. (2000). *Conditional Extremes and Near-extremes : Concepts, Asymptotic Theory, and Economic Applications*. Ph.D. thesis, stanford university.
- [181] CHEUNG, Y.W. LAI, K.S. (1993). Do gold market returns have long memory? In *Financial Review*, vol. 28(2) :pp. 181–202.
- [182] CHOI, K. ZIVOT, E. (2007). Long memory and structural changes in the forward discount : An empirical investigation. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 26(3) :pp. 342–363.

- [183] CHONG, R., HUDSON, R., KEASEY, K., LITTLER, K. (2005). Pre-holiday effects : International evidence on the decline and reversal of a stock market anomaly. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 24(8) :pp. 1226 – 1236.
- [184] CHORDIA, T., ROLL, R., SUBRAHMANYAM, A. (2001). Market liquidity and trading activity. In *The Journal of Finance*, vol. 56(2) :pp. 501–530.
- [185] CHRISTOFFERSEN, P. PELLETIER, D. (2004). Backtesting value-at-risk : A duration-based approach. In *Journal of Financial Econometrics*, vol. 2(1) :pp. 84–108.
- [186] CHRISTOFFERSEN, P.F. (1998). Evaluating interval forecasts. In *International Economic Review*, vol. 39(4) :pp. 841–62.
- [187] CHRISTOPHE, S.E., FERRI, M.G., ANGEL, J.J. (2009). Short selling and the weekend effect in nasdaq stock returns. In *Financial Review*, vol. 44(1) :pp. 31–57.
- [188] CHU, J. (1995). Detecting parameter shift in garch models. In *Econometric Reviews*, vol. 14(2) :pp. 241–266.
- [189] CIZEAU, P., LIU, Y., MEYER, M., PENG, C.K., STANLEY, H.E. (1997). Volatility distribution in the s&p 500 stock index. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 245(34) :pp. 441 – 445.
- [190] CLEMENTS, M. KROLZIG, H.M. (1998). A comparison of the forecast performance of markov-switching and threshold autoregressive models of us gnp. In *The Econometrics Journal*, vol. 1(1) :pp. 47–75.
- [191] CLEMENTS, M. TAYLOR, N. (2003). Evaluating interval forecasts of high-frequency financial data. In *Journal of Applied Econometrics*, vol. 18(4) :pp. 445–456.
- [192] COCCO, F. PARUOLO, P. (1990). Volatility persistence and the italian risk premium : parametric and non-parametric evaluation. In *DP Università di Bologna*.
- [193] COCHRANE, J. (1988). How big is the random walk in gnp? In *The Journal of Political Economy* :pp. 893–920.
- [194] COHEN, D. (2011). La crise grecque. In *Revue économique*, vol. 62 :pp. 383–394.

- [195] COLLETAZ, G. HURLIN, C. (2007). Modèles Non Linéaires et Prévisions. Working Papers halshs-00156692, HAL.
- [196] COLLETAZ, G., HURLIN, C., PÉRIGNON, C. (2012). The Risk Map : A New Tool for Validating Risk Models. Working Papers halshs-00746273, HAL.
- [197] COMTE, F. RENAULT, E. (1998). Long memory in continuous-time stochastic volatility models. In *Mathematical Finance*, vol. 8(4) :pp. 291–323.
- [198] CONNOLLY, R.A. (1989). An examination of the robustness of the weekend effect. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24(2) :pp. pp. 133–169.
- [199] CONSTANTINIDES, G.M. (1984). Optimal stock trading with personal taxes : Implications for prices and the abnormal january returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 13(1) :pp. 65 – 89.
- [200] CONSTÂNCIO, V. (2012). Contagion et crise de la dette européenne. In *Revue de la Stabilité financière*, (16) :pp. 121–134. [2].
- [201] CONT, R. (2001). Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues. In *Quantitative Finance*, vol. 1(2) :pp. 223–236.
- [202] CONT, R. (2009). Risques financiers : quelle modélisation mathématique? In *Pour la Science*, (375) :p. 25.
- [203] CONT, R., DEGUEST, R., SCANDOLO, G. (2010). Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures. In *Quantitative Finance*, vol. 10(6) :pp. 593–606.
- [204] CONT, R. TANKOV, P. (2004). *Financial Modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC : London.
- [205] COOTNER, P.E. (1964). *The random character of stock market prices*. Cambridge, MA. : MIT Press.
- [206] CORAZZA, M., MALLIARIS, A., SCALCO, E. (2010). Nonlinear bivariate comovements of asset prices : Methodology, tests and applications. In *Computational Economics*, vol. 35(1) :pp. 1–23. [3].
- [207] CORCOS, A., ECKMANN, J.P., MALASPINAS, A., MALEVERGNE, Y., SORNETTE, D. (2008). Imitation and contrarian behavior : hyperbolic bubbles, crashes and chaos. In *arXiv preprint cond-mat/0109410*.

- [208] CORCOS, A., ECKMANN, J.P., MALASPINAS, A., MALEVERGNE, Y., SORNETTE, D. (2002). Imitation and contrarian behaviour : hyperbolic bubbles, crashes and chaos. In *Quantitative Finance*, vol. 2(4) :pp. 264–281.
- [209] CORSETTI, G., PESENTI, P., ROUBINI, N. (1998). What caused the asian currency and financial crisis? part ii : The policy debate. Working Paper 6834, National Bureau of Economic Research.
- [210] CORSETTI, G., PERICOLI, M., SBRACIA, M. (2002). Some contagion, some interdependence : More pitfalls in tests of financial contagion. CEPR Discussion Papers 3310, C.E.P.R. Discussion Papers. [4].
- [211] CORSETTI, G., PERICOLI, M., SBRACIA, M. (2005). some contagion, some interdependence : More pitfalls in tests of financial contagion. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 24(8) :pp. 1177–1199.
- [212] CORSETTI, G., PESENTI, P., ROUBINI, N., TILLE, C. (2000). Competitive devaluations : toward a welfare-based approach. In *Journal of International Economics*, vol. 51(1) :pp. 217–241.
- [213] COSTE, C., DOUADY, R., ZOVKO, I. (2009). The StressVaR : A New Risk Concept for Superior Fund Allocation. Papers 0911.4030, arXiv.org.
- [214] CRATO, N. DE LIMA, P.J. (1994). Long-range dependence in the conditional variance of stock returns. In *Economics Letters*, vol. 45(3) :pp. 281 – 285.
- [215] CRNKOVIC, C. DRACHMAN, J. (1997). Quality control in var : Understanding and applying value-at-risk. In *V London : Risk Publications*.
- [216] CÍZEK, P. SPOKOINY, V. (2009). Varying coefficient garch models. In *Handbook of Financial Time Series*. Springer, pp. 169–185.
- [217] DACOROGNA, M.M., MÜLLER, U.A., NAGLER, R.J., OLSEN, R.B., PICTET, O.V. (1993). A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 12(4) :pp. 413 – 438.

- [218] DAMODARAN, A. (2003). *Investment Philosophies : Successful Strategies and the Investors Who Made Them Work*, vol. 185. John Wiley & Sons.
- [219] DAMODARAN, A. (2007). *Strategic risk taking : a framework for risk management*. Pearson Prentice Hall.
- [220] DANIELSSON, J. (2009). On the efficacy of financial regulations. In *Financial Stability Review*, (13) :pp. 53–63.
- [221] DANIEL, K. TITMAN, S. (2006). Market reactions to tangible and intangible information. In *The Journal of Finance*, vol. 61(4) :pp. 1605–1643.
- [222] DANIELSSON, J. DE VRIES, C. (2000). Value-at-risk and extreme returns. In *Annales d’Economie et de Statistique* :pp. 239–270.
- [223] DANIELSSON, J., SHIN, H.S., ZIGRAND, J.P., EQUITY, A. (2009). *Risk appetite and endogenous risk*. Financial Markets Group.
- [224] DAVIES, R. (1987). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. In *Biometrika*, vol. 74(1) :pp. 33–43.
- [225] DAY, R. (1994). Complex economic dynamics-vol. 1 : An introduction to dynamical systems and market mechanisms. In *MIT Press Books*, vol. 1.
- [226] DE GIORGI, E. (2002). A note on portfolio selection under various risk measures. In *Available at SSRN 762104*.
- [227] DE LONG, J., SHLEIFER, A., SUMMERS, L., WALDMANN, R. (1990). Noise trader risk in financial markets. In *Journal of political Economy* :pp. 703–738.
- [228] DE PERETTI, C. (2003). Bilateral bootstrap tests for long memory : An application to the silver market. In *Computational Economics*, vol. 22(2-3) :pp. 187–212.
- [229] DECOSTER, G.P., LABYS, W.C., MITCHELL, D.W. (1992). Evidence of chaos in commodity futures prices. In *Journal of Futures Markets*, vol. 12(3) :pp. 291–305.



- [230] DEHOVE, M. (2003). Crises financières : deux ou trois choses que nous savons d'elles. que nous apprend l'approche statistique des crises financières. In *Document de travail CAE, Avril*.
- [231] DEMPSTER, A., LAIRD, N., RUBIN, D. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. In *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* :pp. 1–38.
- [232] DEVANEY, R. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*, vol. 6. Addison-Wesley Reading.
- [233] DEWANDARU, G., RIZVI, S.A.R., MASIH, R., MASIH, M., ALHABSHI, S.O. (2014). Stock market co-movements : Islamic versus conventional equity indices with multi-timescales analysis. In *Economic Systems*, vol. 38(4) :pp. 553–571.
- [234] DI MATTEO, T., ASTE, T., DACOROGNA, M. (2003). Scaling behaviors in differently developed markets. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 324(12) :pp. 183 – 188. Proceedings of the International Econophysics Conference.
- [235] DIAZ, A.F., GRAU-CARLES, P., MANGAS, L.E. (2002). Nonlinearities in the exchange rates returns and volatility. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 316(14) :pp. 469 – 482.
- [236] DICKEY, D. FULLER, W. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with unit root. In *Econometrica*, vol. 49 :p. 4.
- [237] DIEBOLD, F., GUNTHER, T., TAY, A. (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. In *International Economic Review*, vol. 39(4) :pp. 863–83.
- [238] DIEBOLD, F., LEE, J., WEINBACH, G. (1994). Regime switching with time-varying transition probabilities. In *lung*, vol. 1 :p. 31.
- [239] DIEBOLD, F. MARIANO, R. (1995). Comparing predictive accuracy. In *Journal of Business & economic statistics*, vol. 20(1).
- [240] DIEBOLD, F.X. INOUE, A. (2001). Long memory and regime switching. In *Journal of Econometrics*, vol. 105(1) :pp. 131 – 159. Forecasting and empirical methods in finance and macroeconomics.

- [241] DIKS, C., HOMMES, C., PANCHENKO, V., VAN DER WEIDE, R. (2008). E&f chaos : a user friendly software package for nonlinear economic dynamics. In *Computational Economics*, vol. 32(1-2) :pp. 221–244.
- [242] DING, Z. GRANGER, C.W. (1996). Modeling volatility persistence of speculative returns : A new approach. In *Journal of Econometrics*, vol. 73(1) :pp. 185 – 215.
- [243] DING, Z., GRANGER, C.W., ENGLE, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. In *Journal of empirical finance*, vol. 1(1) :pp. 83–106.
- [244] DOWD, K. (2006). Backtesting market risk models in a standard normality framework. In *Journal of Risk*, vol. 9(2) :p. 93.
- [245] DRAZEN, A. (2000). Political contagion in currency crises. In *Currency Crises*, NBER Chapters. National Bureau of Economic Research, Inc, pp. 47–70. [4].
- [246] DU, G. NING, X. (2008). Multifractal properties of chinese stock market in shanghai. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387(1) :pp. 261 – 269.
- [247] DUAN, J.C. (1997). Augmented garch ( $p < i > p < / i > , < i > q < / i >$ ) process and its diffusion limit. In *Journal of Econometrics*, vol. 79(1) :pp. 97–127.
- [248] DUFFING, G. (1918). Erzwungene schwingungen bei veranderlicher eigenfrequenz. In *Braunschweig : F. Viewig u. Sohn*.
- [249] DUMITRESCU, E., HURLIN, C., MADKOUR, J. (2011). Testing interval forecasts : a GMM-based approach. Working Papers halshs-00618467, HAL.
- [250] DUMITRESCU, E., HURLIN, C., PHAM, V. (2012). Backtesting Value-at-Risk : From Dynamic Quantile to Dynamic Binary Tests. Working Papers halshs-00671658, HAL.
- [251] DUNG, N. (2012). Mackey–glass equation driven by fractional brownian motion. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391(22) :pp. 5465–5472.

- [252] DUNGEY, M., FRY, R., GONZALES-HERMOSILLO, B., MARTIN, V. (2005). Empirical Modeling of Contagion :A Review of Methodologies. In *Quantitative Finance*, vol. 5(1) :pp. 9–24. [4].
- [253] DURLAUF, S. (1991). Spectral based testing of the martingale hypothesis. In *Journal of Econometrics*, vol. 50(3) :pp. 355–376.
- [254] DZHABAROV, C. ZIEMBA, W. (2010). Do seasonal anomalies still work ? In *The Journal of Portfolio Management*, vol. 36(3) :pp. 93–104.
- [255] ECKMANN, J.P., KAMPHORST, S.O., RUELLE, D. (1987). Recurrence plots of dynamical systems. In *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 4(9) :p. 973.
- [256] ECKMANN, J.P. RUELLE, D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. In *Reviews of modern physics*, vol. 57(3) :p. 617.
- [257] ECKMANN, J.P. RUELLE, D. (1992). Fundamental limitations for estimating dimensions and lyapunov exponents in dynamical systems. In *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 56(2) :pp. 185–187.
- [258] EDEY, M. HVIDING, K. (1995). *An assessment of financial reform in OECD countries*. 154. OECD.
- [259] EINHORN, D. (2008). Private profits and socialized risk. In *Global Association of Risk Professionals*, vol. 42 :pp. 10–26.
- [260] EISLER, Z. KERTÉSZ, J. (2007). Liquidity and the multiscaling properties of the volume traded on the stock market. In *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 77(2) :p. 28001.
- [261] EKELAND, I. (1984). *Le calcul, l'imprévu : les figures du temps de Kepler à Thom*. Editions du Seuil.
- [262] ELLIOTT, G., ROTHENBERG, T.J., STOCK, J.H. (1996). Efficient tests for an autoregressive unit root. In *Econometrica*, vol. 64(4) :pp. 813 – 836.
- [263] ELLIOTT, R. MIAO, H. (2009). Var and expected shortfall : a non-normal regime switching framework. In *Quantitative Finance*, vol. 9(6) :pp. 747–755.
- [264] ELLSBERG, D. (1961). Risk, ambiguity, and the savage axioms. In *The quarterly journal of economics* :pp. 643–669.

- [265] EMBRECHTS, M., CADER, M., DEBOECK, G.J. (1994). *Nonlinear dimensions of foreign exchange, stock, and bond markets*, chap. 17. New York : Wiley, pp. 297–313.
- [266] EMBRECHTS, P., FREY, R., MCNEIL, A. (2005). Quantitative risk management. In *Princeton Series in Finance, Princeton*, vol. 10.
- [267] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., STRAUMANN, D. (2002). Correlation and dependence in risk management : properties and pitfalls. In *Risk management : value at risk and beyond* :pp. 176–223.
- [268] ENGEL, C. (1994). Can the markov switching model forecast exchange rates? In *Journal of International Economics*, vol. 36(1) :pp. 151–165.
- [269] ENGEL, C. HAKKIO, C. (1996). The distribution of exchange rates in the ems. Tech. rep., National Bureau of Economic Research.
- [270] ENGEL, C. HAMILTON, J. (1990). Long swings in the exchange rate : are they in the data and do markets know it? Tech. rep., National Bureau of Economic Research.
- [271] ENGEL, C. KIM, C.J. (1996). The long-run us/uk real exchange rate. Tech. rep., National bureau of economic research.
- [272] ENGLE, R. GRANGER, C. (1987). Co-integration and error correction : representation, estimation, and testing. In *Econometrica : journal of the Econometric Society* :pp. 251–276.
- [273] ENGLE, R., LILIEN, D., ROBINS, R. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure : the arch-m model. In *Econometrica : Journal of the Econometric Society* :pp. 391–407.
- [274] ENGLE, R. RUSSELL, J. (1998). Autoregressive conditional duration : a new model for irregularly spaced transaction data. In *Econometrica* :pp. 1127–1162.
- [275] ENGLE, R.F. BOLLERSLEV, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. In *Econometric Reviews*, vol. 5 :pp. 1–50.
- [276] ENGLE, R.F. MANGANELLI, S. (2004). Caviar : Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. In *Journal of business and Economic Statistics*, vol. 22 :pp. 367–381.
- [277] ENGLE, R.F. NG, V.K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. In *Journal of Finance*, vol. 48(5) :pp. 1749–78.

- [278] ENGLE, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of u.k. inflation. In *Econometrica*, vol. 50 :pp. 987–1008.
- [279] ENGLE, R. MANGANELLI, S. (2001). Value-at-risk models in finance. Tech. rep., ECB Working Paper.
- [280] ESCANCIANO, J. OLMO, J. (2010). Backtesting parametric value-at-risk with estimation risk. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 28(1).
- [281] EVANS, M. WACHTEL, P. (1993). Inflation regimes and the sources of inflation uncertainty. In *Journal of Money, Credit and Banking* :pp. 475–511.
- [282] EVERTSZ, C.J. (1995). Fractal geometry of financial time series. In *Fractals*, vol. 3(03) :pp. 609–616.
- [283] FAGGINI, M. (2011). Chaotic time series analysis in economics : Balance and perspectives. Working papers 25, Former Department of Economics and Public Finance "G. Prato", University of Torino.
- [284] FALBO, P. GRASSI, R. (2011). Market dynamics when agents anticipate correlation breakdown. In *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2011.
- [285] FAMA, E. (1963). Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. In *Journal of Business* :pp. 420–429.
- [286] FAMA, E.F. (1965). The behavior of stock-market prices. In *The Journal of Business*, vol. 38(1) :p. 34.
- [287] FAMA, E.F. (1965). Random walks in stock market prices. In *Financial Analysts Journal*, vol. 21(5) :pp. 55–59.
- [288] FAMA, E.F. (1970). Efficient capital markets : A review of theory and empirical work. In *Journal of Finance*, vol. 25 :pp. 383–417.
- [289] FAMA, E.F. (1980). Agency problems and the theory of the firm. In *Journal of Political Economy*, vol. 88(2) :p. 288.
- [290] FAMA, E.F. (1981). Stock returns, real activity, inflation, and money. In *The American Economic Review*, vol. 71(4) :pp. 545–565.
- [291] FAMA, E.F. (1990). Stock returns, expected returns, and real activity. In *The Journal of Finance*, vol. 45(4) :pp. 1089–1108.

- [292] FAMA, E.F. (1991). Efficient capital markets : Ii. In *The Journal of Finance*, vol. 46 :pp. 1575–1617.
- [293] FAMA, E.F. FRENCH, K.R. (1988). Permanent and temporary components of stock prices. In *Journal of Political Economy*, vol. 96(2) :pp. pp. 246–273.
- [294] FAMA, E.F. FRENCH, K.R. (1992). The cross-section of expected stock returns. In *Journal of Finance*, vol. 47(2) :pp. 427–465.
- [295] FAMA, E.F. FRENCH, K.R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. In *Journal of Financial Economics*, vol. 33(1) :pp. 3–56.
- [296] FAMA, E.F. JENSEN, M.C. (1983). Separation of ownership and control. In *The Journal of Law and Economics*, vol. 26(2) :p. 301.
- [297] FAMA, E.F. MACBETH, J.D. (1973). Risk, return, and equilibrium : Empirical tests. In *Journal of Political Economy*, vol. 81(3) :p. 607.
- [298] FARMER, J. (2000). Market force, ecology and evolution. Tech. Rep. 5, Santa Fe Institute.
- [299] FARMER, J., GALLEGATI, M., HOMMES, C., KIRMAN, A., ORMEROD, P., CINCOTTI, S., SANCHEZ, A., HELBING, D. (2012). A complex systems approach to constructing better models for managing financial markets and the economy. In *The European Physical Journal-Special Topics*, vol. 214(1) :pp. 295–324.
- [300] FARMER, J.D. (1982). Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. In *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 4(3) :pp. 366 – 393.
- [301] FAVRE, L. GALEANO, J.A. (2002). Mean-modified value-at-risk optimization with hedge funds. In *The Journal of Alternative Investments*, vol. 5(2) :pp. 21–25.
- [302] FEDERICI, D. GANDOLFO, G. (2011). The euro/dollar exchange rate : Chaotic or non-chaotic ? Tech. rep., CESifo working paper : Monetary Policy and International Finance.
- [303] FIELDS, M.J. (1931). Stock prices : A problem in verification. In *The Journal of Business of the University of Chicago*, vol. 4(4) :pp. pp. 415–418.

- [304] FIELDS, M.J. (1934). Security prices and stock exchange holidays in relation to short selling. In *The Journal of Business of the University of Chicago*, vol. 7(4) :pp. pp. 328–338.
- [305] FIGLEWSKI, S. (1997). Forecasting Volatility. In *Financial Markets, Institutions and Instruments*, vol. Vol. 6 No. 2.
- [306] FILARDO, A. GORDON, S. (1998). Business cycle durations. In *Journal of Econometrics*, vol. 85(1) :pp. 99–123.
- [307] FINGLETON, J. (2009). Competition policy in troubled times, ceo, office of fair trading. In *Annual Charles River Associates Conference in Brussels, in a panel on Competition Policy in Troubled Times*.
- [308] FISHER, A., CALVET, L., MANDELBROT, B. (1997). *Multifractality of Deutschemark/US Dollar exchange rates*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University.
- [309] FMI (1998). Financial crises : Causes and indicators. Tech. rep., World Economic Outlook, Washington DC.
- [310] FMI (2002). How effectively is the market for credit risk transfer vehicles functioning? Tech. rep., Global Financial Stability Report.
- [311] FORBES, K.J. RIGOBON, R. (2001). No contagion, only interdependence : Measuring stock market comovements. In *Journal of Finance*, vol. 57(5) :pp. 2223–2261. [2, 3, 4, 14].
- [312] FRANK, M. STENGOS, T. (1989). Measuring the strangeness of gold and silver rates of return. In *The Review of Economic Studies*, vol. 56(4) :pp. 553–567.
- [313] FRANKEL, J. FROOT, K. (1986). Understanding the us dollar in the eighties : the expectations of chartists and fundamentalists. In *Economic record*, vol. 62(1) :pp. 24–38.
- [314] FRANCES, P. PAAP, R. (2000). Does seasonality influence the dating of business cycle turning points? In *Journal of Macroeconomics*, vol. 21(1) :pp. 79–92.
- [315] FRANCES, P.H. VAN DIJK, D. (1996). Forecasting stock market volatility using (non-linear) garch models. In *Journal of Forecasting*, vol. 15(3) :pp. 229–235.

- [316] FRENCH, K. ROLL, R. (1986). Stock return variances : The arrival of information and the reaction of traders. In *Journal of financial economics*, vol. 17(1) :pp. 5–26.
- [317] FRENCH, K.R. (1980). Stock returns and the weekend effect. In *Journal of Financial Economics*, vol. 8(1) :pp. 55 – 69.
- [318] FREY, M. SIMIU, E. (1993). Deterministic and stochastic chaos. In *Computational Stochastic Mechanics* :pp. 195–216.
- [319] GAGLIANONE, W., LIMA, L., LINTON, O., SMITH, D. (2011). Evaluating value-at-risk models via quantile regression. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 29(1).
- [320] GALLANT, A R.AND HSU, C.T. TAUCHEN, G. (1999). Using daily range data to calibrate volatility diffusions and extract the forward integrated variance. In *Review of Economics and Statistics*, vol. 81(4) :pp. 617–631.
- [321] GALLUCCIO, S., CALDARELLI, G., MARSILI, M., ZHANG, Y.C. (1997). Scaling in currency exchange. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 245(34) :pp. 423 – 436.
- [322] GAO, A.H. WANG, G.H.K. (1999). Modeling nonlinear dynamics of daily futures price changes. In *Journal of Futures Markets*, vol. 19(3) :pp. 325–351.
- [323] GAO, J. ZHENG, Z. (1994). Direct dynamical test for deterministic chaos and optimal embedding of a chaotic time series. In *Physical review E*, vol. 49(5) :p. 3807.
- [324] GARCIA, R. (1998). Asymptotic null distribution of the likelihood ratio test in markov switching models. In *International Economic Review* :pp. 763–788.
- [325] GARCIA, R., RENAULT, E., TSAFACK, G. (2007). Proper conditioning for coherent var in portfolio management. In *Management Science*, vol. 53(3) :pp. 483–494.
- [326] GAU, Y.F. TANG, W.T. (2004). Forecasting value-at-risk using the markov-switching arch model. Econometric Society 2004 Far Eastern Meetings 715, Econometric Society.



- [327] GAUNERSDORFER, A. (2000). Endogenous fluctuations in a simple asset pricing model with heterogeneous agents. In *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 24(5) :pp. 799–831.
- [328] GAUNERSDORFER, A. HOMMES, C. (2007). *A nonlinear structural model for volatility clustering*. Springer.
- [329] GAUNERSDORFER, A., HOMMES, C., WAGENER, F. (2007). Bifurcation routes to volatility clustering under evolutionary learning. In .
- [330] GAUTHIER, C. SOUSSI, M. (2012). Comprendre le risque systémique au sein du secteur bancaire : le cadre d'évaluation des risques macro-financiers. In *Revue de la Banque du Canada*.
- [331] GENÇAY, R., SELÇUK, F., WHITCHER, B. (2001). Scaling properties of foreign exchange volatility. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 289(12) :pp. 249 – 266.
- [332] GERLACH, S. SMETS, F. (1995). Contagious speculative attacks. In *European Journal of Political Economy*, vol. 11(1) :pp. 45–63. [4].
- [333] GEWEKE, J. PORTER-HUDAK, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models. In *Journal of Time Series Analysis*, vol. 4(4) :pp. 221–238.
- [334] GIACOMINI, R. WHITE, H. (2006). Tests of conditional predictive ability. In *Econometrica*, vol. 74(6) :pp. 1545–1578.
- [335] GILLES, P. (1992). Incertitude, risque et asymétrie d'information sur les marchés financiers. In *Revue Française d'Économie*, vol. 7(2) :pp. 53–115.
- [336] GIOT, P. LAURENT, S. (2003). Market risk in commodity markets : a var approach. In *Energy Economics*, vol. 25(5) :pp. 435–457.
- [337] GIRAITIS, L., KOKOSZKA, P., LEIPUS, R., TEYSSIÈRE, G. (2003). Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels. In *Journal of Econometrics*, vol. 112(2) :pp. 265 – 294.
- [338] GIRAITIS, L., ROBINSON, P.M., SURGAILIS, D. (1999). A model for long memory conditional heteroscedasticity. In *Annals of Applied Probability* :pp. 1002–1024.
- [339] GLASS, L. MACKEY, M. (2010). Mackey-glass equation. In , vol. 5(3) :p. 6908.

- [340] GLEICK, J. (1997). *Chaos : Making a new science*. Random House.
- [341] GLOSTEN, L., JAGANNATHAN, R., RUNKLE, D. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. In *The journal of finance*, vol. 48(5), :pp. 1779–1801.
- [342] GOETZMANN, W.N. (1993). Patterns in three centuries of stock market prices. In *The Journal of Business*, vol. 66(2) :pp. pp. 249–270.
- [343] GOLDFELD, S. QUANDAT, R. (1972). Nonlinear methods in econometrics. In .
- [344] GOLDFELD, S. QUANDT, R. (1973). The estimation of structural shifts by switching regressions. In *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 2, number 4*, NBER Chapters. National Bureau of Economic Research, Inc, pp. 473–483.
- [345] GOLDFELD, S. QUANDT, R. (1992). Estimation in multi market disequilibrium models. In *The collected essays of Richard E. Quandt, Economist of the Twentieth Century series*.
- [346] GONZÁLEZ-RIVERA, G. (1998). Smooth-transition garch models. In *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, vol. 3(2).
- [347] GOODWIN, R. (1951). The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. In *Econometrica : Journal of the Econometric Society* :pp. 1–17.
- [348] GOODWIN, T.H. (1993). Business-cycle analysis with a markov-switching model. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 11(3) :pp. pp. 331–339.
- [349] GOPALSAMY, K., TROFIMCHUK, S., BANTSUR, N. (1998). A note on global attractivity in models of hematopoiesis. In *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 50(1) :pp. 3–12.
- [350] GOPIKRISHNAN, P., PLEROU, V., AMARAL, L.A.N., MEYER, M., STANLEY, H.E. (1999). Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. In *Phys. Rev. E*, vol. 60 :pp. 5305–5316.
- [351] GOPIKRISHNAN, P., PLEROU, V., LIU, Y., AMARAL, L., GABAIX, X., STANLEY, H. (2000). Scaling and correlation in financial time series. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 287(34) :pp. 362 – 373.

- [352] GOURIEROUX, C. LIU, W. (2012). Converting tail-var to var : An econometric study. In *Journal of Financial Econometrics*, vol. 10(2) :pp. 233–264.
- [353] GOURIÉROUX, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*.
- [354] GOURIÉROUX, C. JASIAK, J. (2010). Value-at-risk. In *Handbook of financial econometrics* :pp. 553–609.
- [355] GRANGER, C. DING, Z. (1995). Some properties of absolute return : An alternative measure of risk. In *Annales d’Economie et de Statistique* :pp. 67–91.
- [356] GRANGER, C. HYUNG, N. (2004). Occasional structural breaks and long memory with an application to the s&p 500 absolute stock returns. In *Journal of empirical finance*, vol. 11(3) :pp. 399–421.
- [357] GRANGER, C. MORGENSTERN, O. (1970). *Predictability of stock market prices*. Heath Lexington Books Lexington, MA.
- [358] GRANGER, C., SPEAR, S., DING, Z. (2000). Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute returns : An update. In *Statistics and Finance : An Interface* :pp. 97–120.
- [359] GRANGER, C.W. HYUNG, N. (1999). Occasional structural breaks and long memory. Tech. rep., University of California, San Diego.
- [360] GRANGER, C.W., SPEAR, S., DING, Z. (2000). Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute returns : An update. In *Statistics and Finance : An Interface* :pp. 97–120.
- [361] GRANGER, C.W. (1966). The typical spectral shape of an economic variable. In *Econometrica : Journal of the Econometric Society* :pp. 150–161.
- [362] GRANGER, C.W. DING, Z. (1996). Varieties of long memory models. In *Journal of Econometrics*, vol. 73(1) :pp. 61 – 77.
- [363] GRANGER, C.W. TERASVIRTA, T. (1997). Modelling non-linear economic relationships. In *OUP Catalogue*.
- [364] GRANGER, C. JOYEUX, R. (1980). An introduction to long memory time series models and fractional differencing. In *Journal of Time Series Analysis*, vol. 1 :pp. 15–39.

- [365] GRASSBERGER, P. PROCACCIA, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. In *International Symposium on Physical Design*.
- [366] GRAY, S. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. In *Journal of Financial Economics*, vol. 42(1) :pp. 27–62.
- [367] GREENE, M. FIELITZ, B. (1977). Long-term dependence in common stock returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 4(3) :pp. 339–349.
- [368] GREENE, M.T. FIELITZ, B.D. (1977). Long-term dependence in common stock returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 4(3) :pp. 339 – 349.
- [369] GREENSPAN, A. (2000). Greenspan’s plea for stress testing. In *Risk*, vol. 13 :pp. 53–55.
- [370] GRIGOLETTO, M. LISI, F. (2009). Looking for skewness in financial time series. In *The Econometrics Journal*, vol. 12(2) :pp. 310–323.
- [371] GROSSMAN, S. SHILLER, R. (1981). The determinants of the variability of stock market prices. In *American Economic Review*, vol. 71 :pp. 222–227.
- [372] GROSSMAN, S. STIGLITZ, J. (1980). On the impossibility of informationally efficient markets. In *The American economic review* :pp. 393–408.
- [373] GROUP, G.D.S. (1993). Derivatives : Practices and principles. Tech. rep., Washington DC : Group of Thirty Report.
- [374] GUÉGAN, D. (1992). Notion de chaos : approche dynamique et problèmes d’identification. Rapport de recherche RR-1623, INRIA. Projet CLOREC.
- [375] GUÉGAN, D. (2000). A new model : the k -factor gigarch process. In *Journal of Signal Processing*.
- [376] GUÉGAN, D. (2003). Les chaos en finance : Approche statistique. In .
- [377] GUÉGAN, D. (2007). La persistance dans les marchés financiers. In *Banque et Marchés*, vol. 90.
- [378] GUÉGAN, D. (2009). Chaos in economics and finance. In *Annual Reviews in Control*, vol. 33(1) :pp. 89 – 93.

- [379] GUÉGAN, D. HOUMMIYA, K. (2005). De-noising with wavelets method in chaotic time series : application in climatology, energy, and finance. In *Proc. SPIE 5848,174*.
- [380] GUÉGAN, D. HUCK, N. (2005). On the use of nearest neighbors in finance. In *Finance*, vol. 26(2) :pp. 67–86.
- [381] GUÉGAN, D. MERCIER, L. (2005). Prediction in chaotic time series : methods and comparisons with an application to financial intra-day data. In *European Journal of Finance*, vol. 11(2) :pp. 137–150.
- [382] GUÉGAN, D. RIOUBLANC, S. (2005). Regime switching models : real or spurious long memory ? In *IDHE-MORA Note of Research No. 02-2005.*
- [383] GUHA, D. BANERJI, A. (1998). Testing for regional cycles : a markov-switching approach. In *Journal of Economic and Social Measurement*, vol. 25(3) :pp. 163–182.
- [384] GUIDOLIN, M. TIMMERMANN, A. (2004). Value at risk and expected shortfall under regime switching. In *Maastricht Meetings Paper No. 2983.*
- [385] GUILLAUME, D.M., DACOROGNA, M.M., DAVÉ, R.R., MÜLLER, U.A., OLSEN, R.B., PICTET, O.V. (1997). From the bird’s eye to the microscope : A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets. In *Finance and Stochastics*, vol. 1(2) :pp. 95–129.
- [386] GULTEKIN, M.N. GULTEKIN, N.B. (1983). Stock market seasonality : International evidence. In *Journal of Financial Economics*, vol. 12(4) :pp. 469 – 481.
- [387] HAAS, M. (2001). New methods in backtesting. In *Financial Engineering Research Center, Working Paper*.
- [388] HAAS, M. (2005). Improved duration-based backtesting of value-at-risk. In *Journal of Risk*, vol. 8(2) :pp. 17–38.
- [389] HAAS, M., MITTNIK, S., PAOLELLA, M.S. (2004). A new approach to markov-switching garch models. In *Journal of Financial Econometrics*, vol. 2(4) :pp. 493–530.
- [390] HAGERUD, G. (1997). A new non-linear garch model. In .

- [391] HALDANE, J. (1933). The part played by recurrent mutation in evolution. In *American Naturalist* :pp. 5–19.
- [392] HAMAQ, Y., MASULIS, R.W., NG, V. (1990). Correlations in price changes and volatility across international stock markets. In *Review of Financial Studies*, vol. 3(2) :pp. 281–307.
- [393] HAMILTON, J. (1988). Rational-expectations econometric analysis of changes in regime : An investigation of the term structure of interest rates. In *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 12(2) :pp. 385–423.
- [394] HAMILTON, J. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. In *Journal of econometrics*, vol. 45(1) :pp. 39–70.
- [395] HAMILTON, J. SUSMEL, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. In *Journal of Econometrics*, vol. 64(1) :pp. 307–333.
- [396] HAMILTON, J.D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. In *Econometrica*, vol. 57(2) :pp. 357–84.
- [397] HAMILTON, J.D. (1994). *Time series analysis*. Princeton.
- [398] HAMPEL, F. (1974). The influence curve and its role in robust estimation. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69(346) :pp. 383–393.
- [399] HANSEN, B. (1992). The likelihood ratio test under nonstandard conditions : testing the markov switching model of gnp. In *Journal of applied Econometrics*, vol. 7(S1) :pp. S61–S82.
- [400] HANSEN, B. (1996). Testing for structural change in conditional models and the bootstrap. In *Boston College, November*.
- [401] HANSEN, B. (1997). Inference in tar models. In *Studies in nonlinear dynamics & econometrics*, vol. 2(1).
- [402] HANSEN, P. (2005). A test for superior predictive ability. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 23(4).
- [403] HARRIS, L. (1986). A transaction data study of weekly and intraday patterns in stock returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 16(1) :pp. 99 – 117.

- [404] HARRIS, L. (1989). A day-end transaction price anomaly. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24(1) :pp. pp. 29–45.
- [405] HARRISON, J. KREPS, D. (1978). Speculative investor behavior in a stock market with heterogeneous expectations. In *The Quarterly Journal of Economics* :pp. 323–336.
- [406] HARVEY, A. (1985). Trends and cycles in macroeconomic time series. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 3(3) :pp. 216–227.
- [407] HARVEY, D., LEYBOURNE, S., NEWBOLD, P. (1997). Testing the equality of prediction mean squared errors. In *International Journal of forecasting*, vol. 13(2) :pp. 281–291.
- [408] HAUG, M. HIRSCHEY, M. (2006). The january effect. In *Financial Analysts Journal* :pp. 78–88.
- [409] HAUGEN, R.A. LAKONISHOK, J. (1987). *The incredible January effect : the stock market's unsolved mystery*. Dow Jones-Irwin.
- [410] HAUSDORFF, F. (1918). Dimension und äusseres mass. In *Mathematische Annalen*, vol. 79(1-2) :pp. 157–179.
- [411] HE, C. TERÄSVIRTA, T. (1999). Properties of moments of a family of garch processes. In *Journal of Econometrics*, vol. 92(1) :pp. 173–192.
- [412] HEGGER, R. KANTZ, H. (1999). Improved false nearest neighbor method to detect determinism in time series data. In *Physical Review E*, vol. 60(4) :p. 4970.
- [413] HENNANI, R. TERRAZA, M. (2011). Etude de la performance d'une value-at-risk chaotique pour l'indice cac 40. Tech. rep., LAMETA, Université Montpellier1.
- [414] HENNANI, R. TERRAZA, M. (2012). Value-at-risk stressée chaotique d'un portefeuille bancaire. Working papers, LAMETA, Universtiy of Montpellier.
- [415] HENNANI, R. (2015). De bâle i à bâle iii : les principales avancées des accords prudentiels pour un système financier plus résilient. Tech. rep., LAMETA, Universtiy of Montpellier.
- [416] HENTSCHEL, L. (1995). All in the family nesting symmetric and asymmetric garch models. In *Journal of Financial Economics*, vol. 39(1) :pp. 71–104.

- [417] HEYDE, C., KOU, S., PENG, X. (2007). What is a good external risk measure : Bridging the gaps between robustness, subadditivity, and insurance risk measures. In *Preprint, Columbia University*.
- [418] HICKS, J. (1950). A contribution to the theory of the trade cycle. In *Oxford University Press*.
- [419] HIRSHLEIFER, D., SUBRAHMANYAM, A., TITMAN, S. (2006). Feedback and the success of irrational investors. In *Journal of Financial Economics*, vol. 81(2) :pp. 311–338.
- [420] HOLT, R., ROSSER JR, J.B., COLANDER, D. (2010). The complexity era in economics. In *Review of Political Economy*, vol. 23(3) :pp. 357–369.
- [421] HOMMES, C. (2013). *Behavioral rationality and heterogeneous expectations in complex economic systems*. Cambridge University Press.
- [422] HOMMES, C. MANZAN, S. (2006). Comments on testing for nonlinear structure and chaos in economic time series. In *Journal of Macroeconomics*, vol. 28(1) :pp. 169–174.
- [423] HOMMES, C. MANZAN, S. (2005). Testing for Nonlinear Structure and Chaos in Economic Time Series : A Comment. CeNDEF Working Papers 05-14, Universiteit van Amsterdam, Center for Nonlinear Dynamics in Economics and Finance.
- [424] HORGAN, J. (1995). From complexity to perplexity. In *Scientific American*, vol. 272(6) :pp. 104–109.
- [425] HORNIK, K., STINCHCOMBE, M., WHITE, H. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. In *Neural Networks*, vol. 2(5) :pp. 359 – 366.
- [426] HORNIK, K., STINCHCOMBE, M., WHITE, H., AUER, P. (1994). Degree of approximation results for feedforward networks approximating unknown mappings and their derivatives. In *Neural Computation*, vol. 6(6) :pp. 1262–1275.
- [427] HOSKING, J. (1981). Fractional differencing. In *Biometrika*, vol. 68 :pp. 165–176.



- [428] HOUTHAKKER, H.S. (1961). Systematic and random elements in short-term price movements. In *The American Economic Review*, vol. 51(2) :pp. pp. 164–172.
- [429] HOWROYD, T. RUSSELL, A. (1984). Cournot oligopoly models with time delays. In *Journal of Mathematical Economics*, vol. 13(2) :pp. 97–103.
- [430] HSIEH, C. YE, M. (1991). *Economics, Philosophy, and Physics*. M.E. Sharpe.
- [431] HSIEH, D.A. (1989). Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates. In *The Journal of Business*, vol. 62(3) :pp. pp. 339–368.
- [432] HSIEH, D.A. (1991). Chaos and nonlinear dynamics : application to financial markets. In *The journal of finance*, vol. 46(5) :pp. 1839–1877.
- [433] HUANG, B.N. YANG, C.W. (1999). An examination of long-term memory using the intraday stock returns. Tech. rep., Technical Report 99–03, Clarion University of Pennsylvania, Clarion.
- [434] HUBER, P. (1981). Robust statistics.
- [435] HUGO, V. (1865). *Les Travailleurs de la mer*. Classiques.
- [436] HUISMAN, R., KOEDIJK, K., POWNALL, R. (1999). Asset allocation in a value-at-risk framework. In *Available at SSRN 163970*.
- [437] HURLIN, C. (2008). Value-at-risk et backtesting.
- [438] HURLIN, C. (2010). *Econométrie pour la finance : Modèles garch univariés*.
- [439] HURLIN, C. PÉRIGNON, C. (2012). Margin Backtesting. Working Papers halshs-00746274, HAL.
- [440] HURLIN, C. PÉRIGNON, C. (2013). Systemic Risk Score : A Suggestion. Working Papers halshs-00867063, HAL.
- [441] HURLIN, C., PÉRIGNON, C., STODDEN, V. (2012). RunMyCode.org : a novel dissemination and collaboration platform for executing published computational results. Working Papers halshs-00739233, HAL.
- [442] HURLIN, C. TOKPAVI, S. (2006). Backtesting VaR Accuracy : A New Simple Test. Working Papers halshs-00068384, HAL.
- [443] HURLIN, C. TOKPAVI, S. (2007). Un test de validité de la value at risk. In *Revue économique*, vol. 58(3) :pp. 599–608.

- [444] HURLIN, C. TOKPAVI, S. (2007). Une évaluation des procédures de backtesting, tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes'. In *Finance*, vol. 29(1) :pp. 53–80.
- [445] HURST, H. (1951). Long term storage capacity of reservoirs. In *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116 :pp. 770–799.
- [446] HURST, H. (1957). A suggested statistical model of some time series that occur in nature. In *Nature*, vol. 180 :p. 494.
- [447] HYNDMAN, R. (1996). Computing and graphing highest density regions. In *The American Statistician*, vol. 50(2) :pp. 120–126.
- [448] IBRAGIMOV, R. (2009). Portfolio diversification and value at risk under thick-tailedness. In *Quantitative Finance*, vol. 9(5) :pp. 565–580.
- [449] INGVES, S. (2013). Symposium to mark 25 years of the basel capital accord. CBSB.
- [450] INUI, K. KIJIMA, M. (2005). On the significance of expected short-fall as a coherent risk measure. In *Journal of banking & finance*, vol. 29(4) :pp. 853–864.
- [451] ISRAEL, G. (1992). L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques. In *Chaos et déterminisme. Paris : Edition Du Seuil*.
- [452] JACKSON, P., FURFINE, C., GROENVELD, H., HANCOCK, D., JONES, D., PERRAUDIN, W., RADECKI, L., YONEYAMA, M. (1999). Capital requirements and bank behavior : The impact of the basel accord. Tech. rep., Basel Committee on Banking Supervision.
- [453] JAIN, P.C. JOH, G.H. (1988). The dependence between hourly prices and trading volume. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 23(3) :pp. pp. 269–283.
- [454] JANSEN, E. TERÄSVIRTA, T. (1996). Testing parameter constancy and super exogeneity in econometric equations. In *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 58(4) :pp. 735–763.
- [455] JARQUE, C. BERA, A. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. In *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique* :pp. 163–172.

- [456] JENSEN, E. (1990). An econometric analysis of the old-age security motive for childbearing. In *International Economic Review* :pp. 953–968.
- [457] JENSEN, M. (1978). Some anomalous evidence regarding market efficiency. In *Journal of financial economics*, vol. 6(2) :pp. 95–101.
- [458] JIANG, R., WU, Q., ZHU, Z. (2001). Full velocity difference model for a car-following theory. In *Physical Review E*, vol. 64(1) :p. 017101.
- [459] JIN, X. MAHEU, J.M. (2014). Modeling covariance breakdowns in multivariate garch. In .
- [460] JOHANSEN, A. SORNETTE, D. (2001). Finite-time singularity in the dynamics of the world population, economic and financial indices. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 294(3) :pp. 465–502.
- [461] JOHNSON, N.F., JEFFERIES, P., HUI, P.M. (2003). Financial market complexity. In *OUP Catalogue*.
- [462] JORION, P. (2001). *Financial Risk Manager Handbook 2001-2002*, vol. 96. John Wiley & Sons.
- [463] JORION, P. (2007). *Value at Risk*. McGraw-Hill Education.
- [464] JORION, P. (2013). Amnistie financière. In *Le Monde*.
- [465] JORION, P. GARP (2007). *Financial risk manager handbook*. Wiley Finance. Wiley.
- [466] KAHNEMAN, D. TVERSKY, A. (1973). Availability : A heuristic for judging frequency and probability. In *Cognitive psychology*, vol. 5(2) :pp. 207–232.
- [467] KAHNEMAN, D. TVERSKY, A. (1974). Judgment under uncertainty : Heuristics and biases. In *science*, vol. 185(4157) :pp. 1124–1131.
- [468] KAKES, J. (2000). Monetary policy and business cycle asymmetry in germany. In *Kredit und Kapital*, vol. 33 :pp. 182–197.
- [469] KALDOR, N. (1940). A model of the trade cycle. In *The Economic Journal* :pp. 78–92.
- [470] KALECKI, M. (1935). A macrodynamic theory of business cycles. In *Econometrica, Journal of the Econometric Society* :pp. 327–344.
- [471] KAMARA, A. (1997). New evidence on the monday seasonal in stock returns. In *The Journal of Business*, vol. 70(1) :pp. pp. 63–84.

- [472] KAMIJO, K.I. TANIGAWA, T. (1990). Stock price pattern recognition-a recurrent neural network approach. In *Neural Networks, 1990., 1990 IJCNN International Joint Conference on*. IEEE, pp. 215–221.
- [473] KAMINSKY, G. (1993). Is there a peso problem? evidence from the dollar/pound exchange rate, 1976-1987. In *The American Economic Review* :pp. 450–472.
- [474] KAMINSKY, G.L. REINHART, C.M. (1999). The twin crises : the causes of banking and balance-of-payments problems. In *American economic review* :pp. 473–500.
- [475] KAMSTRA, M.J., KRAMER, L.A., LEVI, M.D. (2000). Losing sleep at the market : The daylight saving anomaly : Reply. In *American Economic Review* :pp. 1257–1263.
- [476] KANTZ, H. (1994). A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time series. In *Physics Letters A*, vol. 185(1) :pp. 77 – 87.
- [477] KANTZ, H. SCHREIBER, T. (1995). Noise in chaotic data : diagnosis and treatment. In *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 5(1) :pp. 133–142.
- [478] KANTZ, H. SCHREIBER, T. (1997). *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- [479] KANTZ, H. SCHREIBER, T. (2004). *Nonlinear time series analysis*, vol. 7. Cambridge university press.
- [480] KARAKOSTAS, G., PHILOS, C., SFICAS, Y. (1992). Stable steady state of some population models. In *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. 4(1) :pp. 161–190.
- [481] KAWATA, R. KIJIMA, M. (2007). Value-at-risk in a market subject to regime switching. In *Quantitative Finance*, vol. 7(6) :pp. 609–619.
- [482] KEEF, S.P., KHALED, M., ZHU, H. (2009). The dynamics of the monday effect in international stock indices. In *International Review of Financial Analysis*, vol. 18(3) :pp. 125 – 133.
- [483] KEEF, S.P. ROUSH, M.L. (2005). Day-of-the-week effects in the pre-holiday returns of the standard & poor’s 500 stock index. In *Applied Financial Economics*, vol. 15(2) :pp. 107–119.

- [484] KEENAN, D. (1985). A tukey nonadditivity-type test for time series non-linearity. In *Biometrika*, vol. 72(1) :pp. 39–44.
- [485] KEIM, D.B. (1983). Size-related anomalies and stock return seasonality : Further empirical evidence. In *Journal of Financial Economics*, vol. 12(1) :pp. 13 – 32.
- [486] KEIM, D.B. (1989). Trading patterns, bid-ask spreads, and estimated security returns : The case of common stocks at calendar turning points. In *Journal of Financial Economics*, vol. 25(1) :pp. 75 – 97.
- [487] KELSEY, D. (1988). The economics of chaos or the chaos of economics. In *Oxford economic papers*, vol. 40(1) :pp. 1–31.
- [488] KENDALL, D. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain. In *The Annals of Mathematical Statistics* :pp. 338–354.
- [489] KERMISCH, C. (2011). *Le concept du risque : De l'épistémologie à l'éthique*. SRD. Série Notes de synthèse et de recherche. Tec & Doc Lavoisier.
- [490] KEYNES, J.M. (1936). The general theory of employment, interest and money. In *Cambridge University Press, for the Royal Economic Society Cambridge University Press*.
- [491] KIM, C.H. (2000). Balassa-samuelson theory and predictability of the us/uk real exchange rate. In *International Economic Journal*, vol. 14(3) :pp. 101–121.
- [492] KIM, C.W. PARK, J. (1994). Holiday effects and stock returns : Further evidence. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 29(1) :pp. pp. 145–157.
- [493] KIM, G. MARKOWITZ, H. (1989). J. portfolio management.
- [494] KIM, M.J. (1996). Duration dependence in korean business cycles : Evidence and its implication based on gibbs sampling approach to regime-switching model. In *Seoul Journal of Economics*, vol. 9(2) :p. 123.
- [495] KIM, T.H. WHITE, H. (2004). On more robust estimation of skewness and kurtosis. In *Finance Research Letters*, vol. 1(1) :pp. 56–73.
- [496] KIMOTO, T., ASAKAWA, K., YODA, M., TAKEOKA, M. (1990). Stock market prediction system with modular neural networks. In *Neu-*

- ral Networks, 1990., 1990 IJCNN International Joint Conference on.*  
IEEE, pp. 1–6.
- [497] KINDLEBERGER, C.P. (1978). *Economic response : comparative studies in trade, finance, and growth.* Harvard University Press.
- [498] KINDLEBERGER, C.P. (1986). *The world in depression, 1929-1939*, vol. 4. Univ of California Press.
- [499] KING, M. LEAPE, J. (1998). Wealth and portfolio composition : Theory and evidence. In *Journal of Public Economics*, vol. 69(2) :pp. 155–193.
- [500] KING, M.A. WADHANI, S. (1990). Transmission of volatility between stock markets. In *Review of Financial Studies*, vol. 3(1) :pp. 5–33. [4].
- [501] KIRMAN, A. TEYSSIERE, G. (2002). Microeconomic models for long memory in the volatility of financial time series. In *Studies in nonlinear dynamics and econometrics*, vol. 5(4) :pp. 281–302.
- [502] KLAASSEN, F. (2002). Improving garch volatility forecasts with regime-switching garch. In *Advances in Markov-Switching Models.* Springer, pp. 223–254.
- [503] KNIGHT, F.H. (1921). Risk, uncertainty and profit. In *New York : Hart, Schaffner and Marx.*
- [504] KOENKER, R. BASSETT JR, G. (1978). Regression quantiles. In *Econometrica : journal of the Econometric Society* :pp. 33–50.
- [505] KOHLER, H.P. (2000). Social interactions and fluctuations in birth rates. In *Population Studies*, vol. 54(2) :pp. 223–237.
- [506] KOLMOGOROV, A. (1958). A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in lebesgue spaces. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS)*, vol. 119. pp. 861–864.
- [507] KOUTMOS, G. BOOTH, G.G. (1995). Asymmetric volatility transmission in international stock markets. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 14(6) :pp. 747–762. [4].
- [508] KRÄGER, H. KUGLER, P. (1993). Non-linearities in foreign exchange markets : a different perspective. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 12(2) :pp. 195–208.
- [509] KRITZMAN, M. RICH, D. (2002). The mismeasurement of risk. In *Financial Analysts Journal* :pp. 91–99.

- [510] KUANG, C.M. WHITE, H. (1994). Artificial neural networks : an econometric perspective? In *Econometric Reviews*, vol. 13(1) :pp. 1–91.
- [511] KUANG, Y. (1993). *Delay differential equations : with applications in population dynamics*. Academic Press.
- [512] KUNKEL, R.A., COMPTON, W.S., BEYER, S. (2003). The turn-of-the-month effect still lives : the international evidence. In *International Review of Financial Analysis*, vol. 12(2) :pp. 207 – 221.
- [513] KUPIEC, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. In *J. Derivatives*, vol. 2 :pp. 174–184.
- [514] KUPIEC, P. (1998). Stress testing in a value-at-risk framework. In *Journal of Derivatives*, vol. 6(1) :pp. 7–24.
- [515] KWIATKOWSKI, D., PHILLIPS, P., SCHMIDT, P., SHIN, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : How sure are we that economic time series have a unit root? In *Journal of Econometrics*, vol. 54 :pp. 159–178.
- [516] KYRTSOU, C. (2006). Heterogeneous non-linear trading rules and routes to chaotic dynamics. Tech. rep., Lameta.
- [517] KYRTSOU, C. (2008). Re-examining the sources of heteroskedasticity : The paradigm of noisy chaotic models. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387(27) :pp. 6785 – 6789.
- [518] KYRTSOU, C. LABYS, W. (2007). Detecting positive feedback in multivariate time series : the case of metal prices and us inflation. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 377(1) :pp. 227–229.
- [519] KYRTSOU, C. LABYS, W.C. (2006). Evidence for chaotic dependence between us inflation and commodity prices. In *Journal of Macroeconomics*, vol. 28(1) :pp. 256–266.
- [520] KYRTSOU, C., LABYS, W.C., TERRAZA, M. (2004). Noisy chaotic dynamics in commodity markets. In *Empirical Economics*, vol. 29(3) :pp. 489–502.
- [521] KYRTSOU, C. MALLIARIS, A.G. (2009). The impact of information signals on market prices when agents have non-linear trading rules. In *Economic Modelling*, vol. 26(1) :pp. 167–176.

- [522] KYRTSOU, C. TERRAZA, M. (2002). Stochastic chaos or arch effects in stock series? : A comparative study. In *International Review of Financial Analysis*, vol. 11(4) :pp. 407–431.
- [523] KYRTSOU, C. TERRAZA, M. (2003). Is it possible to study chaotic and arch behaviour jointly? application of a noisy mackey-glass equation with heteroskedastic errors to the paris stock exchange returns series. In *Computational Economics*, vol. 21(3) :pp. 257–276.
- [524] KYRTSOU, C. TERRAZA, M. (2010). Seasonal mackey-glass-garch process and short-term dynamics. In *Empirical Economics*, vol. 38(2) :pp. 325–345.
- [525] KYRTSOU, C. TERRAZA, V. (2004). Var non linéaire chaotique : Application à la série des rentabilités de l'indice nikkei. In *AFFI International Conference*.
- [526] KYRTSOU, C. VORLOW, C.E. (2009). Modelling non-linear co-movements between time series. In *Journal of Macroeconomics*, vol. 31(1) :pp. 200 – 211.
- [527] LAKONISHOK, J. MABERLY, E. (1990). The weekend effect : Trading patterns of individual and institutional investors. In *The Journal of Finance*, vol. 45(1) :pp. 231–243.
- [528] LAKONISHOK, J. SMIDT, S. (1988). Are seasonal anomalies real? a ninety-year perspective. In *Review of Financial Studies*, vol. 1(4) :pp. 403–425.
- [529] LALOIRE, J.C. (1972). *Méthodes du traitement des chroniques : statistiques et prévisions de ventes*. Dunod.
- [530] LANNE, M. SAIKKONEN, P. (2005). Non-linear garch models for highly persistent volatility. In *The Econometrics Journal*, vol. 8(2) :pp. 251–276.
- [531] LAPLACE, P. (1810). *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités*. Baudouin.
- [532] LARDIC, S. MIGNON, V. (2002). *Econométrie des séries temporelles macroéconomiques et financières*. Economica.



- [533] LAROQUE, G. SALANIÉ, B. (1995). *Macroeconometric disequilibrium models*. INSEE/Dpt de la recherche.
- [534] LARSON, A.B. (1960). Measurement of a random process in futures prices. In *Food Research Institute Studies*, (03).
- [535] LARSON, A.B. (1964). The hog cycle as harmonic motion. In *Journal of Farm Economics*, vol. 46(2) :pp. 375–386.
- [536] LASOTA, A. (1977). Ergodic problems in biology. In *Dynamical Systems*, vol. II :pp. 239–250.
- [537] LAWRENCE, R. (1997). Using neural networks to forecast stock market prices. In *University of Manitoba*.
- [538] LE PETIT, J. (2010). Rapport sur le risque systémique. Tech. rep., Ministère de l'économie, de l'industrie et de l'emploi.
- [539] LEBARON, B. (2000). Agent-based computational finance : Suggested readings and early research. In *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 24(5) :pp. 679–702.
- [540] LEE, C.C. LEE, J.D. (2010). Stock prices and the efficient market hypothesis : Evidence from a panel stationary test with structural breaks. In *Japan and the World Economy*, vol. 22(1) :pp. 49 – 58.
- [541] LEE, H. AMSLER, C. (1997). Consistency of the kpss unit root test against fractionally integrated alternative. In *Economics Letters*, vol. 55(2) :pp. 151–160.
- [542] LEE, K.E. LEE, J.W. (2007). Scaling and multiscaling properties in the korean stock market. In *Journal of the korean physical society*, vol. 50(1) :p. 178.
- [543] LEE, T.H., WHITE, H., GRANGER, C. (1993). Testing for neglected non-linearity in time series models : A comparison of neural network methods and alternative tests. In *Journal of Econometrics*, vol. 56(3) :pp. 269–290.
- [544] LEIBNIZ, G. (1695). Letter to de l'hôpital. In *Reprinted in C.D. Gerhard (Ed.). (1849). Mathematische Schriften*.
- [545] LEROY, S. (1984). Efficiency and the variability of asset prices. In *The American Economic Review* :pp. 183–187.

- [546] LEROY, S. (1989). Efficient capital markets and martingales. In *Journal of Economic Literature* :pp. 1583–1621.
- [547] LEROY, S. LACIVITA, C. (1981). Risk aversion and the dispersion of asset prices. In *Journal of Business* :pp. 535–547.
- [548] LHABITANT, F.S. (2004). *Gestion alternative : comprendre et investir dans les hedge funds*. Dunod.
- [549] LI, C. LI, W. (1996). On a double-threshold autoregressive heteroscedastic time series model. In *Journal of applied econometrics*, vol. 11(3) :pp. 253–274.
- [550] LI, T.Y. YORKE, J. (1975). Period three implies chaos. In *American mathematical monthly* :pp. 985–992.
- [551] LI, W.K. MCLEOD, A.I. (1983). Diagnostic checking arma time series models using squared-residual autocorrelations. In *Journal of Time Series Analysis*, vol. 4(4) :pp. 269–273.
- [552] LIM, C., SHERALI, H.D., URYASEV, S. (2010). Portfolio optimization by minimizing conditional value-at-risk via nondifferentiable optimization. In *Computational Optimization and Applications*, vol. 46(3) :pp. 391–415.
- [553] LIM, K.P., BROOKS, R.D., HINICH, M.J. (2008). Nonlinear serial dependence and the weak-form efficiency of asian emerging stock markets. In *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, vol. 18(5) :pp. 527 – 544.
- [554] LIMAM, I. (2003). Is long memory a property of thin stock markets? international evidence using arab countries. In *Review of Middle East Economics and Finance*, vol. 1(3) :pp. 251–266.
- [555] LINTON, O. (2009). *Semiparametric and nonparametric ARCH modeling*. Springer.
- [556] LINTON, O. SHINTANI, M. (2004). Nonparametric neural network estimation of lyapunov exponents and a direct test for chaos. In *Journal of Econometrics*, vol. 120(1) :pp. 1–33.
- [557] LIU, H.F., DAI, Z.H., LI, W.F., GONG, X., YU, Z.H. (2005). Noise robust estimates of the largest lyapunov exponent. In *Physics Letters A*, vol. 341(1-4) :pp. 119 – 127.

- [558] LIU, L. LU, S. (2008). Are there holiday effect in china' s stock market ?  
In *Journal of Financial Research*, vol. 2 :p. 014.
- [559] LIU, Y., GOPIKRISHNAN, P., CIZEAU, P., MEYER, M., PENG, C.K.,  
STANLEY, H.E. (1999). Statistical properties of the volatility of price  
fluctuations. In *Phys. Rev. E*, vol. 60 :pp. 1390–1400.
- [560] LIZ, E., PINTO, M., TKACHENKO, V., TROFIMCHUK, S. (2005). A  
global stability criterion for a family of delayed population models.  
In *Quarterly of applied mathematics*, vol. 63(1) :pp. 56–70.
- [561] LIZ, E., TROFIMCHUK, E., TROFIMCHUK, S. (2002). Mackey-glass type  
delay differential equations near the boundary of absolute stability. In  
*Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 275(2) :pp.  
747 – 760.
- [562] LJUNG, G. BOX, G. (1978). On a measure of lack of fit in time series  
models. In *Biometrika*, vol. 65(2) :pp. 297–303.
- [563] LLOYD, S. (2001). Measures of complexity : a nonexhaustive list. In  
*Control Systems, IEEE*, vol. 21(4) :pp. 7–8.
- [564] LO, A.W. (1991). Long-term memory in stock market prices. In *Econo-  
metrica*, vol. 59(5) :pp. 1279–1313.
- [565] LO, A.W. MACKINLAY, A. (1999). *A Non-Random Walk Down Wall  
Street*.
- [566] LO, A. MACKINLAY, A. (1988). Stock market prices do not follow  
random walks : evidence from a simple specification test. In *Review  
of Financial Studies*, vol. 1(1) :pp. 41–66.
- [567] LO, A. MACKINLAY, A. (1990). When are contrarian profits due  
to stock market overreaction? In *Review of Financial Studies*,  
vol. 3(2) :pp. 175–205.
- [568] LOBATO, I.N. VELASCO, C. (2000). Long memory in stock-market  
trading volume. In *Journal of Business & Economic Statistics*,  
vol. 18(4) :pp. 410–427.
- [569] LOFTHOUSE, S. (2001). *Investment management*. Wiley.
- [570] LONGIN, F. (2001). Beyond the var. In *The Journal of Derivatives*,  
vol. 8(4) :pp. 36–48.

- [571] LONGIN, F.M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. In *The Journal of Business*, vol. 69(3) :pp. pp. 383–408.
- [572] LONGIN, F. SOLNIK, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. In *The journal of finance*, vol. 56(2) :pp. 649–676.
- [573] LOPEZ, J. (1999). Regulatory evaluation of value-at-risk models. Tech. rep., Federal Reserve Bank of New York.
- [574] LOPEZ, J. (2001). Evaluating the predictive accuracy of volatility models. In *Journal of Forecasting*, vol. 20(2) :pp. 87–109.
- [575] LOPEZ, J. (2005). Stress tests : useful complements to financial risk models. In *FRBSF Economic Letter*, (Jun 24).
- [576] LOPEZ, J. (1998). Methods for evaluating value-at-risk estimates. In *Federal Reserve Bank of New-York*, vol. 9802. Working paper.
- [577] LORENZ, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. In *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 20(2) :pp. 130–141.
- [578] LORENZ, E. (1972). Predictability : does the flap of a butterfly’s wing in brazil set off a tornado in texas ? AAAS Section on Environmental Sciences, New Approaches to Global Weather : GARP.
- [579] LORETAN, M. ENGLISH, W.B. (2000). Evaluating correlation breakdowns during periods of market volatility. In *Board of Governors of the Federal Reserve System International Finance Working Paper*, (658).
- [580] LUMSDAINE, R.L. NG, S. (1999). Testing for ARCH in the presence of a possibly misspecified conditional mean. In *Journal of Econometrics*, vol. 93(2) :pp. 257–279.
- [581] LUNDBERGH, S., TERÄSVIRTA, T., VAN DIJK, D. (2003). Time-varying smooth transition autoregressive models. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 21(1) :pp. 104–121.
- [582] LUUKKONEN, R., SAIKKONEN, P., TERÄSVIRTA, T. (1988). Testing linearity against smooth transition autoregressive models. In *Biometrika*, vol. 75(3) :pp. 491–499.
- [583] LUX, T. (1995). Herd behaviour, bubbles and crashes. In *The Economic Journal*, vol. 105(431) :pp. 881–896.

- [584] LUX, T. (1998). The socio-economic dynamics of speculative markets : interacting agents, chaos, and the fat tails of return distributions. In *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 33(2) :pp. 143 – 165.
- [585] LUX, T. MARCHESI, M. (2000). Volatility clustering in financial markets : A microsimulation of interacting agents. In *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 3(04) :pp. 675–702.
- [586] LUX, T. MARCHESI, M. (1999). Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. In *Nature*, vol. 397(6719) :pp. 498–500.
- [587] MACKEY, M. (2007). Adventures in poland : Having fun and doing research with andrzej lasota. In *Matematyka Stosowana*, vol. 8 :pp. 5–32.
- [588] MACKEY, M. GLASS, L. (1977). Oscillation and chaos in physiological control systems. In *Science*, vol. 197 :pp. 287–289.
- [589] MADDALA, G. (1986). Disequilibrium, self-selection, and switching models. In *Handbook of econometrics*, vol. 3 :pp. 1633–1688.
- [590] MADDALA, G. (1991). Disequilibrium modeling, switching regressions, and their relationship to structural change. In *Economic Structural Change*. Springer, pp. 159–168.
- [591] MADDALA, G.S. KIM, I.M. (1998). *Unit roots, cointegration, and structural change*. 4. Cambridge University Press.
- [592] MADDOCKS, N., NISBET, M., NISBET, R., BLYTHE, S. (1991). Determinism and chaos in long financial time series. In *AFFIR Colloquium*.
- [593] MAHEU, J.M. MCCURDY, T.H. (2002). Nonlinear features of realized fx volatility. In *Review of Economics and Statistics*, vol. 84(4) :pp. 668–681.
- [594] MALLIARIS, A.G. STEIN, J.L. (1999). Methodological issues in asset pricing : Random walk or chaotic dynamics. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 23(11) :pp. 1605–1635.
- [595] MALMSTEN, H. TERÄSVIRTA, T. (2004). Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility. In *SSE/EFI Working*

*Paper Series in Economics and Finance, Stockholm School of Economics*, vol. 563.

- [596] MALTHUS, T. (1798). An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society, with remarks on the apeculations of mr. godwin, m. condorcet, and other writers 1798. j. johnson. In *St. Paul's Church-yard, London*.
- [597] MANDELBROT, B. (1963). The variation of certain speculative prices. In *The Journal of Business*, vol. 36(4) :pp. 394–419.
- [598] MANDELBROT, B. (1972). Statistical methodology for nonperiodic cycles : from the covariance to rs analysis. In *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 1, number 3*. NBER, pp. 259–290.
- [599] MANDELBROT, B. (1975). On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars. In *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 72(03) :pp. 401–416.
- [600] MANDELBROT, B. VAN NESS, J. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. In *SIAM review*, vol. 10(4) :pp. 422–437.
- [601] MANDELBROT, B. WALLIS, J. (1968). Noah, joseph and operational hydrology. In *Water Resources Research*, vol. 4 :pp. 909–918.
- [602] MANTEGNA, R.N. STANLEY, H.E. (1995). Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. In *Nature*, vol. 376(6535) :pp. 46–49.
- [603] MANTEGNA, R. STANLEY, H. (2000). An introduction to econophysics : Correlations and complexity in finance. Tech. rep., Cambridge, UK : Cambridge University Press.
- [604] MARCH, T., CHAPMAN, S., DENDY, R. (2005). Recurrence plot statistics and the effect of embedding. In *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 200(1) :pp. 171–184.
- [605] MARCUCCI, J. (2005). Forecasting stock market volatility with regime-switching garch models. In *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, vol. 9(4).
- [606] MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio selection. In *The Journal of Finance*, vol. 7(1) :pp. 77–91.

- [607] MARQUARDT, D.W. (1963). An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. In *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 11(2) :pp. 431–441.
- [608] MARRETT, G.J. WORTHINGTON, A.C. (2009). An empirical note on the holiday effect in the australian stock market, 19962006. In *Applied Economics Letters*, vol. 16(17) :pp. 1769–1772.
- [609] MARSHALL, A. (1920). *Principles of economics*. London : Macmillan.
- [610] MARTENS, M., VAN DIJK, D., DE POOTER, M. (2004). Modeling and forecasting s&p 500 volatility : Long memory, structural breaks and nonlinearity. Tech. rep., Tinbergen Institute Discussion Paper.
- [611] MARTIN, G. TALEB, N. (2012). How to prevent other financial crises. In *SAIS Review of International Affairs*, vol. 32(1) :pp. 49–60.
- [612] MARWAN, N., CARMEN, M., THIEL, M., KURTHS, J. (2007). Recurrence plots for the analysis of complex systems. In *Physics Reports*, vol. 438(5) :pp. 237–329.
- [613] MASSON, P.R. (1998). Contagion-monsoonal effects, spillovers, and jumps between multiple equilibria. IMF Working Papers 98/142, International Monetary Fund. [4].
- [614] MAXWELL, J.C. (1876). Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity (or determinism) over that of the contingency of events and the freedom of the will. In *The life of James Clerk Maxwell* :pp. 434–444.
- [615] MAXWELL, J. (1876). Matter and motion.
- [616] MAY, R. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. In *Nature*, vol. 261(5560) :pp. 459–467.
- [617] MAYFIELD, E.S. MIZRACH, B. (1992). On determining the dimension of real-time stock-price data. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 10(3) :pp. 367–374.
- [618] MCCAFFREY, D. (1991). *Estimating Lyapunov exponents with nonparametric regression and convergence rates for feedforward single hidden layer networks*. Ph.D. thesis, North Carolina State University.
- [619] MCCAFFREY, D., ELLNER, S., GALLANT, A., NYCHKA, D. (1992). Estimating the lyapunov exponent of a chaotic system with nonpara-

- metric regression. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87(419) :pp. 682–695.
- [620] MCCAULEY, J. (2004). *Dynamics of markets : econophysics and finance*. Cambridge University Press.
- [621] MCCAULEY, J. (2006). Response to worrying trends in econophysics. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 371(2) :pp. 601–609.
- [622] MCGUINNESS, P.B. (2005). A re-examination of the holiday effect in stock returns : the case of hong kong. In *Applied Financial Economics*, vol. 15(16) :pp. 1107–1123.
- [623] MCLEOD, A. HIPEL, K. (1978). Preservation of the rescaled adjusted range, 1 : A reassessment of the hurst phenomenon. In *Water Resources Research*, vol. 14 :pp. 491–508.
- [624] MCNEIL, A. FREY, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : an extreme value approach. In *Journal of empirical finance*, vol. 7(3) :pp. 271–300.
- [625] MEADE, N. (2002). A comparison of the accuracy of short term foreign exchange forecasting methods. In *International Journal of forecasting*, vol. 18(1) :pp. 67–83.
- [626] MELHEM, S. MELHEM, M. (2012). Comments on Re-examining the source of Heteroskedasticity : The paradigm of noisy chaotic models. Working Papers 12-13, LAMETA, Universtiy of Montpellier.
- [627] MENEU, V. PARDO, A. (2004). Pre-holiday effect, large trades and small investor behaviour. In *Journal of Empirical Finance*, vol. 11(2) :pp. 231 – 246.
- [628] MERTON, R.K. (1948). The self-fulfilling prophecy. In *The Antioch Review*, (8) :pp. 193–210.
- [629] MIKOSCH, T. STĂRICĂ, C. (1999). Change of structure in financial time series, long range dependence and the garch model. In *Chalmers Tekniska Högskola/Göteborgs Universitet. Department of Mathematics..*
- [630] MILLS, F.C. (1927). The behavior of prices. In *NBER Books*.



- [631] MILLS, T.C. COUTTS, A.J. (1995). Calendar effects in the london stock exchange ftse indices. In *The European Journal of Finance*, vol. 1(1) :pp. 79–93.
- [632] MINSKY, H.P. (1977). A theory of systemic fragility. In *Financial crises : Institutions and markets in a fragile environment* :pp. 138–52.
- [633] MINSKY, H.P. (1982). *Can " it " happen again ? : essays on instability and finance*. ME Sharpe Armonk, NY.
- [634] MIROWSKI, P. (2002). *Machine dreams : Economics becomes a cyborg science*. Cambridge University Press.
- [635] MIROWSKI, P. (2004). *The effortless economy of science ?*. Duke University Press.
- [636] MITCHELL, W.C. (1921). *Index Numbers of Wholesale Prices in the United States and Foreign Countries : Revision of Bulletin No. 173. October, 1921*. 284. US Government Printing Office.
- [637] MITCHELL, W. (1915). The making and using of index numbers. In *Bulletin of the US Bureau of Labor Statistics*, vol. 173.
- [638] MITTNIK, S. (2013). Var-implied tail-correlation matrices. Tech. rep., Center for Financial Studies (CFS).
- [639] MIYANO, T., KIMOTO, S., SHIBUTA, H., NAKASHIMA, K., IKENAGA, Y., AIHARA, K. (2000). Time series analysis and prediction on complex dynamical behavior observed in a blast furnace. In *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 135(3) :pp. 305–330.
- [640] MÜLLER, U.A., DACOROGNA, M.M., OLSEN, R.B., PICTET, O.V., SCHWARZ, M., MORGENEGG, C. (1990). Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intraday analysis. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 14(6) :pp. 1189 – 1208.
- [641] MOHAMMADI, S. (2009). Lyaprosen : Matlab function to calculate lyapunov exponent. Statistical Software Components, Boston College Department of Economics.
- [642] MOLLER, N. ZILCA, S. (2008). The evolution of the january effect. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 32(3) :pp. 447 – 457.

- [643] NAKAGAWA, T. OSAKI, S. (1975). The discrete weibull distribution. In *Reliability, IEEE Transactions on*, vol. 24(5) :pp. 300–301.
- [644] NAMAJUNAS, A., PYRAGAS, K., TAMASEVICIUS, A. (1995). Stabilization of an unstable steady state in a mackey-glass system. In *Physics Letters A*, vol. 204(3–4) :pp. 255 – 262.
- [645] NATH, G.C. (2001). Long memory and indian stock market—an empirical evidence. In *UTIICM Conference Paper*.
- [646] NAWROCKI, D. (1995). R/s analysis and long term dependence in stock market indices. In *Managerial Finance*, vol. 21(7) :pp. 78–91.
- [647] NELSON, C. PLOSSER, C. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series : some evidence and implications. In *Journal of monetary economics*, vol. 10(2) :pp. 139–162.
- [648] NELSON, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : A new approach. In *Econometrica*, vol. 59(2) :pp. pp. 347–370.
- [649] NEWTON, I. (1987). *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (mathematical principles of natural philosophy). In *London*.
- [650] NGUYEN, D.T. (2012). Mackeyglass equation driven by fractional brownian motion. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391(22) :pp. 5465 – 5472.
- [651] NIKKINEN, J., SAHLSTRÖM, P., ÄIJÖ, J. (2007). Turn-of-the-month and intramonth effects : Explanation from the important macroeconomic news announcements. In *Journal of Futures Markets*, vol. 27(2) :pp. 105–126.
- [652] NOWMAN, K. SALTOGLU, B. (2003). Continuous time and nonparametric modelling of us interest rate models. In *International Review of Financial Analysis*, vol. 12(1) :pp. 25–34.
- [653] NYCHKA, D., ELLNER, S., GALLANT, A., MCCAFFREY, D. (1992). Finding chaos in noisy systems. In *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* :pp. 399–426.
- [654] NYCHKA, D., HAALAND, P., O’CONNELL, M., ELLNER, S. (1997). Funfits, data analysis and statistical tools for estimating functions. In *Lecture notes in statistics* :pp. 159–180.

- [655] OF CHICAGO BOARD OF TRADE ANNUAL SYMPOSIUM, P., ed. (1956). *Price effects of scalping and day trading*.
- [656] OFFICER, R. (1975). Seasonality in australian capital markets : Market efficiency and empirical issues. In *Journal of Financial Economics*, vol. 2(1) :pp. 29 – 51.
- [657] OGAWA, S., IKEGUCHI, T., MATOZAKI, T., AIHARA, K. (1996). Nonlinear modeling by radial basis function networks. In *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol. 79(10) :pp. 1608–1617.
- [658] OGDEN, J.P. (1990). Turn-of-month evaluations of liquid profits and stock returns : A common explanation for the monthly and january effects. In *The Journal of Finance*, vol. 45(4) :pp. 1259–1272.
- [659] OLIVIER, M. (1926). *Les nombres indices de la variation des prix*. Ph.D. thesis, Paris.
- [660] ORLÉAN, A. (1989). Pour une approche cognitive des conventions économiques. In *Revue Économique*, vol. 40(2) :pp. 241–272.
- [661] ORLÉAN, A. (1990). Contagion mimétique et bulles spéculatives. In *Cartelier J.(éd.), La formation des grandeurs économiques, coll." Nouvelle Encyclopédie Diderot", Presses Universitaires de France*, vol. 285 :p. 321.
- [662] ORLÉAN, A. (1990). Le rôle des influences interpersonnelles dans la détermination des cours boursiers. In *Revue économique*, vol. 0(5) :pp. 839–868.
- [663] ORLÉAN, A. (2004). Les marchés financiers sont-ils rationnels ? In *Reflets et perspectives de la vie économique*, vol. 0(2) :pp. 35–41.
- [664] ORLÉAN, A. (2009). *De l'euphorie à la panique : penser la crise financière*. No. 16 in Opuscules du CEPREMAP. CEPREMAP.
- [665] ORLÉAN, A. (1986). Mimétisme et anticipations rationnelles : une perspective keynésienne. In *Recherches Économiques de Louvain/Louvain Economic Review* :pp. 45–66.
- [666] OSBORNE, M. (1962). Periodic structure in the brownian motion of stock prices. In *Operations Research*, vol. 10(3) :pp. 345–379.

- [667] OSBORNE, M.F. (1959). Brownian motion in the stock market. In *Operations research*, vol. 7(2) :pp. 145–173.
- [668] OSIEWALSKI, J. WELFE, A. (1998). The price-wage mechanism : an endogenous switching model. In *European Economic Review*, vol. 42(2) :pp. 365–374.
- [669] OU, J. PENMAN, S. (1989). Financial statement analysis and the prediction of stock returns. In *Journal of accounting and economics*, vol. 11(4) :pp. 295–329.
- [670] PACKARD, N., CRUTCHFIELD, J., FARMER, J., SHAW, R. (1980). Geometry from a time series. In *Physical review letters*, vol. 45(9) :p. 712.
- [671] PALANDER, T. (1935). Beiträge zur standortstheorie. In *Uppsala : Almqvist & Wiksell.*
- [672] PANAS, E. (2001). Long memory and chaotic models of prices on the london metal exchange. In *Resources Policy*, vol. 27(4) :pp. 235–246.
- [673] PANAS, E. NINNI, V. (2000). Are oil markets chaotic? a non-linear dynamic analysis. In *Energy Economics*, vol. 22(5) :pp. 549 – 568.
- [674] PARETO, V. (1897). The new theories of economics. In *The Journal of Political Economy*, vol. 5(4) :pp. 485–502.
- [675] PASQUINI, M. SERVA, M. (1999). Multiscale behaviour of volatility auto-correlations in a financial market. In *Economics Letters*, vol. 65(3) :pp. 275 – 279.
- [676] PATTON, A. (2002). *Applications of copula theory in financial econometrics*. Ph.D. thesis, University of California, San Diego.
- [677] PEEL, D. SPEIGHT, A. (1998). Threshold nonlinearities in output : some international evidence. In *Applied Economics*, vol. 30(3) :pp. 323–333.
- [678] PEEL, D. SPEIGHT, A. (2000). Threshold nonlinearities in unemployment rates : further evidence for the uk and g3 economies. In *Applied Economics*, vol. 32(6) :pp. 705–715.
- [679] PENMAN, S.H. (1987). The distribution of earnings news over time and seasonalities in aggregate stock returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 18(2) :pp. 199 – 228.
- [680] PERICOLI, M. SBRACIA, M. (2003). A primer on financial contagion. In *Journal of Economic Surveys*, vol. 17(4) :pp. 571–608.

- [681] PERIGNON, C. SMITH, D. (2008). A new approach to comparing var estimation methods. In *The Journal of Derivatives*, vol. 16(2) :pp. 54–66.
- [682] PETERS, E.E. (1991). Chaos and order in the capital markets. a new view of cycle, prices, and market volatility. In *J. Wiley*.
- [683] PETERS, E.E. (1996). *Chaos and order in the capital markets : a new view of cycles, prices, and market volatility*, vol. 1. John Wiley & Sons.
- [684] PHILLIPS, K. (1991). A two-country model of stochastic output with changes in regime. In *Journal of international economics*, vol. 31(1-2) :pp. 121–142.
- [685] PLEROU, V., GOPIKRISHNAN, P., AMARAL, L.A.N., GABAIX, X., STANLEY, H. (2000). Economic fluctuations and anomalous diffusion. In *Phys. Rev. E*, vol. 62 :pp. R3023–R3026.
- [686] PLEROU, V., GOPIKRISHNAN, P., GABAIX, X., AMARAL, L., STANLEY, H. (2001). Price fluctuations, market activity and trading volume. In *Quantitative Finance*, vol. 1(2) :pp. 262–269.
- [687] PLEROU, V., GOPIKRISHNAN, P., STANLEY, H. (2003). Econophysics : Two-phase behaviour of financial markets. In *Nature*, vol. 421(6919) :pp. 130–130.
- [688] POINCARÉ, H. (1890). Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique. In *Acta mathematica*, vol. 13(1) :pp. A3–A270.
- [689] POTERBA, J.M. WEISBENNER, S.J. (2001). Capital gains tax rules, tax-loss trading, and turn-of-the-year returns. In *The Journal of Finance*, vol. 56(1) :pp. 353–368.
- [690] PRAETZ, P.D. (1973). A spectral analysis of australian share prices. In *Australian Economic Papers*, vol. 12(20) :pp. 70–78.
- [691] PÉRIGNON, C. SMITH, D.R. (2010). Diversification and value-at-risk. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 34(1) :pp. 55 – 66.
- [692] QIN, D. LU, M. (1998). Dynamic structure of disequilibrium models. In *Economics of Planning*, vol. 31(1) :pp. 15–27.
- [693] QIU, T., GUO, L., CHEN, G. (2008). Scaling and memory effect in volatility return interval of the chinese stock market. In *Physica A :*

- Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387(27) :pp. 6812 – 6818.
- [694] QIU, T., ZHONG, L., CHEN, G., WU, X. (2009). Statistical properties of trading volume of chinese stocks. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 388(12) :pp. 2427 – 2434.
- [695] QUANDT, R. (1972). A new approach to estimating switching regressions. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 67(338) :pp. 306–310.
- [696] QUANDT, R. (1988). *The econometrics of disequilibrium*. Blackwell Oxford :.
- [697] RAMCHAND, L. SUSMEL, R. (1998). Volatility and cross correlation across major stock markets. In *Journal of Empirical Finance*, vol. 5(4) :pp. 397–416.
- [698] RAMSEY, J. (1969). Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis. In *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* :pp. 350–371.
- [699] RAND, D. (1978). Exotic phenomena in games and duopoly models. In *Journal of Mathematical Economics*, vol. 5(2) :pp. 173–184.
- [700] REGNAULT, J. (1863). *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*. librairie Castel.
- [701] REINGANUM, M.R. (1990). Market microstructure and asset pricing : An empirical investigation of {NYSE} and {NASDAQ} securities. In *Journal of Financial Economics*, vol. 28(12) :pp. 127 – 147.
- [702] REINHART, C. ROGOFF, K. (2009). *This time is different : eight centuries of financial folly*. princeton university press.
- [703] REINHART, C.M. ROGOFF, K.S. (2009). The aftermath of financial crises. Working Paper 14656, National Bureau of Economic Research.
- [704] RENDON, J. ZIEMBA, W. (2007). Is the january effect still alive in the futures markets? In *Financial Markets and Portfolio Management*, vol. 21(3) :pp. 381–396.
- [705] RICCI, U. (1930). Die "synthetische okonomie. In *Journal of Economics*, vol. 1(5) :pp. 649–668.

- [706] RIGOBON, R. (2008). Informational speculative attacks : Good news is no news. Tech. rep., Federal Reserve Board IF Seminar Paper. [2].
- [707] RISKMETRICS (1996). Technical document. Tech. rep., Morgan Guarantee Trust Company of New-York.
- [708] RITTER, J.R. (1988). The buying and selling behavior of individual investors at the turn of the year. In *The Journal of Finance*, vol. 43(3) :pp. 701–717.
- [709] ROBERTS, H.V. (1967). Statistical versus clinical prediction of the stock market.
- [710] ROBINSON, P. (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. In *The Annals of statistics* :pp. 1630–1661.
- [711] ROBINSON, P. (2001). The memory of stochastic volatility models. In *Journal of econometrics*, vol. 101(2) :pp. 195–218.
- [712] ROCHET, J.C. (2010). Risque systémique : une approche alternative. In *Revue de la stabilité financière*, vol. 14 :pp. 107–115.
- [713] ROCKAFELLAR, R. URYASEV, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. In *Journal of risk*, vol. 2 :pp. 21–42.
- [714] ROCKAFELLAR, R. URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 26(7) :pp. 1443–1471.
- [715] ROLL, R. (1983). Vas ist das? In *The Journal of Portfolio Management*, vol. 9(2) :pp. 18–28.
- [716] ROSENBLUM, B. KUTTNER, F. (2006). Quantum enigma : Science encounters consciousness.
- [717] ROSENSTEIN, M.T., COLLINS, J.J., LUCA, C.J.D. (1992). A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets. In *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 65(1-2) :pp. 117 – 134.
- [718] ROSSER, J. (1999). On the complexities of complex economic dynamics. In *The Journal of Economic Perspectives* :pp. 169–192.
- [719] ROSSER, J. (2008). Econophysics and economic complexity. In *Advances in Complex Systems*, vol. 11(05) :pp. 745–760.
- [720] ROSSER, J.B. (2004). Complexity in economics.

- [721] ROZEFF, M.S. KINNEY, W.R.J. (1976). Capital market seasonality : The case of stock returns. In *Journal of Financial Economics*, vol. 3(4) :pp. 379 – 402.
- [722] RÖSSLER, O. (1998). The world as an interface. In *Singapura : World Scientific*.
- [723] RUBINSTEIN, M. (2001). Rational markets : yes or no? the affirmative case. In *Financial Analysts Journal* :pp. 15–29.
- [724] RUELLE, D. TAKENS, F. (1971). On the nature of turbulence. In *Communications in mathematical physics*, vol. 20(3) :pp. 167–192.
- [725] SAARI, D. (1995). Mathematical complexity of simple economics. In *Notices of AMS*, vol. 42 :pp. 222–230.
- [726] SAJJAD, R., COAKLEY, J., NANKERVIS, J. (2008). Markov-switching garch modelling of value-at-risk. In *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, vol. 12(3).
- [727] SAMUELSON, P. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. In *Industrial management review*, vol. 6(2) :pp. 41–49.
- [728] SARANTIS, N. (1999). Modeling non-linearities in real effective exchange rates. In *Journal of International Money and Finance*, vol. 18(1) :pp. 27 – 45.
- [729] SAUNDERS, A. (1999). *Credit Risk Measurement : New Approaches to Value-at-Risk and Other Paradigms*. Frontiers in Finance Series. Wiley.
- [730] SAVIT, R. (1988). When random is not random : An introduction to chaos in market prices. In *Journal of Futures Markets*, vol. 8(3) :pp. 271–290.
- [731] SAVOIU, G. IORGA-SIM ?N, I. (2013). *Econophysics : Background and Applications in Economics, Finance, and Sociophysics*. Academic Press.
- [732] SAWAYA, A. (2010). Financial time series analysis : Chaos and neurodynamics approach. In .
- [733] SCHEINKMAN, J.A. LEBARON, B. (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. In *The Journal of Business*, vol. 62(3) :pp. 311–337.



- [734] SCHULTZ, H. (1930). Der sinn der statistischen nachfragen,. Veroffentlichungen der Frankfurter Gesellschaft fur Konjunkturforschung.
- [735] SCHWARZ, G. (1978). Estimating the dimension of a model. In *The annals of statistics*, vol. 6(2) :pp. 461–464.
- [736] SCHWERT, G. (1989). Why does stock market volatility change over time? In *The journal of finance*, vol. 44(5) :pp. 1115–1153.
- [737] SCHWERT, G.W. (2003). *Anomalies and market efficiency*, vol. 21, chap. Handbook of the Economics of Finance. Elsevier, pp. 939–974.
- [738] SCHWERT, W. (1990). Stock volatility and the crash of '87. In *Review of Financial Studies*, vol. 3 :pp. 77–102.
- [739] SENTANA, E. (1995). Quadratic arch models. Papers 9517, Centro de Estudios Monetarios Y Financieros-.
- [740] SEO, B. (1999). Distribution theory for unit root tests with conditional heteroskedasticity. In *Journal of Econometrics*, vol. 91 :pp. 113–144.
- [741] SERLETIS, A. GOGAS, P. (1997). Chaos in east european black market exchange rates. In *Research in Economics*, vol. 51(4) :pp. 359 – 385.
- [742] SEWELL, M. (2011). Characterization of financial time series. In *UCL Department of Computer Science, Research Note RN/11/01* :pp. 1–35.
- [743] SEYHUN, H. (1990). Overreaction or fundamentals : Some lessons from insiders' response to the market crash of 1987. In *The Journal of Finance*, vol. 45(5) :pp. 1363–1388.
- [744] SHILLER, R. (1981). The use of volatility measures in assessing market efficiency. In *The Journal of Finance*, vol. 36(2) :pp. 291–304.
- [745] SHILLER, R. (1984). Stock prices and social dynamics. In *Brookings Papers on Economic Activity* :pp. 457–510.
- [746] SHIMOTSU, K. (2006). Simple (but effective) tests of long memory versus structural breaks. In *Queen's Economics Dept. Working Paper*, (1101).
- [747] SHIMOTSU, K. (2010). Exact local whittle estimation of fractional integration with unknown mean and time trend. In *Econometric Theory*, vol. 26(02) :pp. 501–540.

- [748] SHIMOTSU, K. PHILLIPS, P. (2005). Exact local whittle estimation of fractional integration. In *The Annals of Statistics*, vol. 33(4) :pp. 1890–1933.
- [749] SIAS, R.W. STARKS, L.T. (1997). Institutions and individuals at the turn-of-the-year. In *The Journal of Finance*, vol. 52(4) :pp. 1543–1562.
- [750] SICHEL, D. (1993). Business cycle asymmetry : a deeper look. In *Economic Inquiry*, vol. 31(2) :pp. 224–236.
- [751] SIEGEL, J.J. (1998). *Stocks for the long run : The definitive guide to financial market returns and long-term investment strategies*. McGraw-Hill New York.
- [752] SIMON, H. (1962). The architecture of complexity. In *Proceedings of the American Philosophical Society*, vol. 106(6) :pp. 467–482.
- [753] SINGAL, V. (2004). Beyond the random walk : A guide to stock market anomalies and low-risk investing. In .
- [754] SKJELTORP, J.A. (2000). Scaling in the norwegian stock market. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 283(34) :pp. 486 – 528.
- [755] SMALL, M. (2005). *Applied nonlinear time series analysis : applications in physics, physiology and finance*, vol. 52. World Scientific.
- [756] SMITH, L. (1992). Identification and prediction of low dimensional dynamics. In *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 58(1) :pp. 50–76.
- [757] STARKS, L.T., YONG, L., ZHENG, L. (2006). Tax-loss selling and the january effect : Evidence from municipal bond closed-end funds. In *The Journal of Finance*, vol. 61(6) :pp. 3049–3067.
- [758] STATMAN, M., THORLEY, S., VORKINK, K. (2006). Investor overconfidence and trading volume. In *Review of Financial Studies*, vol. 19(4) :pp. 1531–1565.
- [759] STAUFFER, D. (2000). Econophysicsa new area for computational statistical physics? In *International Journal of Modern Physics C*, vol. 11(06) :pp. 1081–1087.

- [760] STEELEY, J. (2001). A note on information seasonality and the disappearance of the weekend effect in the {UK} stock market. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 25(10) :pp. 1941 – 1956.
- [761] STOCK, J. (1994). *Unit Roots, Structural Breaks, and Trends*, chap. Handbook of Econometrics. Amsterdam : Elsevier, pp. 2740–2843.
- [762] STONE, M.R. WEEKS, M. (2001). *Systemic Financial Crises, Balance Sheets, and Model Uncertainty*. 162. International Monetary Fund.
- [763] STØVE, B. TJØSTHEIM, D. (2013). Measuring asymmetries in financial returns : An empirical investigation using local gaussian correlation. In .
- [764] STROTZ, R., MCANULTY, J., NAINES, J. (1953). Goodwin’s nonlinear theory of the business cycle : an electro-analog solution. In *Econometrica, Journal of the Econometric Society* :pp. 390–411.
- [765] SU, J.B. HUNG, J.C. (2011). Empirical analysis of jump dynamics, heavy-tails and skewness on value-at-risk estimation. In *Economic Modelling*, vol. 28(3) :pp. 1117–1130.
- [766] SULLIVAN, R., TIMMERMANN, A., WHITE, H. (2001). Dangers of data mining : The case of calendar effects in stock returns. In *Journal of Econometrics*, vol. 105(1) :pp. 249 – 286. Forecasting and empirical methods in finance and macroeconomics.
- [767] SUMMERS, L. (1986). Does the stock market rationally reflect fundamental values? In *The Journal of Finance*, vol. 41(3) :pp. 591–601.
- [768] SUN, Q. TONG, W. (2010). Risk and the january effect. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 34(5) :pp. 965 – 974.
- [769] TAKENS, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*. Springer, pp. 366–381.
- [770] TANG, T. SHIEH, S. (2006). Long memory in stock index futures markets : A value-at-risk approach. In *Physica A*, vol. 366 :pp. 437–448.
- [771] TAYLOR, S. (1986). Modeling financial time series. In *Wiley, Chichester*.
- [772] TAYLOR, S.J. (2005). *Asset price dynamics, volatility, and prediction*. Princeton university press.

- [773] TERÄSVIRTA, T. (1994). Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 89(425) :pp. 208–218.
- [774] TERÄSVIRTA, T. (2009). An introduction to univariate garch models. In *Handbook of Financial Time Series*. Springer, pp. 17–42.
- [775] TERÄSVIRTA, T., LIN, C.F., GRANGER, C. (1993). Power of the neural network linearity test. In *Journal of Time Series Analysis*, vol. 14(2) :pp. 209–220.
- [776] TERÄSVIRTA, T. ZHAO, Z. (2011). Stylized facts of return series, robust estimates and three popular models of volatility. In *Applied Financial Economics*, vol. 21(1-2) :pp. 67–94.
- [777] THALER, R.H. (1992). The winner’s curse : anomalies and paradoxes of economic life. In *Princeton University Press*.
- [778] THEILER, J. (1986). Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data. In *Physical Review A*, vol. 34(3) :p. 2427.
- [779] THIEL, M., ROMANO, M., KURTHS, J., ROLFS, M., KLIEGL, R. (2006). Twin surrogates to test for complex synchronisation. In *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 75(4) :p. 535.
- [780] THURSBY, J. SCHMIDT, P. (1977). Some properties of tests for specification error in a linear regression model. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 72(359) :pp. 635–641.
- [781] TINBERGEN, J. (1930). Bestimmung und deutung von angebotskurven ein beispiel. In *Journal of Economics*, vol. 1(5) :pp. 669–679.
- [782] TOLVI, J. (2003). Long memory in a small stock market. In *Economics Bulletin*, vol. 7(3) :pp. 1–13.
- [783] TONG, H. (1978). *On a threshold model*. 29. Sijthoff & Noordhoff.
- [784] TONG, H. (1983). *Threshold models in non-linear time series analysis. Lecture notes in statistics, No. 21*. Springer-Verlag.
- [785] TONG, H. LIM, K.S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. In *journal of the Royal Statistical Society Series B Methodological*.

- [786] TSAY, R. (1986). Nonlinearity tests for time series. In *Biometrika*, vol. 73(2) :pp. 461–466.
- [787] TSAY, R.S. (1989). Testing and modeling threshold autoregressive processes. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 84(405) :pp. pp. 231–240.
- [788] TSE, Y.K. (1998). The conditional heteroscedasticity of the yen-dollar exchange rate. In *Journal of Applied Econometrics*, vol. 13 :pp. 49–55.
- [789] TSENG, J.J. LI, S.P. (2011). Asset returns and volatility clustering in financial time series. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 390(7) :pp. 1300–1314.
- [790] UCTUM, R. (2007). Économétrie des modèles à changement de régimes : un essai de synthèse. In *L'Actualité Economique*, vol. 83(4) :pp. 447–482.
- [791] UEDA, Y. (1980). Explosion of strange attractors exhibited by duffing's equation. In *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 357(1) :pp. 422–434.
- [792] VALDÈS, R.O. (1996). Emerging Markets Contagion : Evidence and Theory. In *SSRN eLibrary*. [4].
- [793] VAN DER POL, B. (1927). Vii. forced oscillations in a circuit with non-linear resistance.(reception with reactive triode). In *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 3(13) :pp. 65–80.
- [794] VAN DIJK, D.AND FRANCES, P. (2000). Nonlinear error-correction models for interest rates in the netherlands. In *Non-linear Econometric Modelling in Time Series Analysis (W. Barnett, DF Hendry, S. Hylleberg, T. Teräsvirta, D. Tjøstheim and AW Würtz, eds.)*, Cambridge : Cambridge University Press (2000) :pp. 203–227.
- [795] VAN EYDEN, R. (1996). *The application of neural networks in the forecasting of share prices*. Finance & Technology.
- [796] VARIAN, H. (1985). Divergence of opinion in complete markets : A note. In *The Journal of Finance*, vol. 40(1) :pp. 309–317.
- [797] VEGA, C. (2006). Stock price reaction to public and private information. In *Journal of Financial Economics*, vol. 82(1) :pp. 103–133.

- [798] VERGIN, R.C. MCGINNIS, J. (1999). Revisiting the holiday effect : is it on holiday? In *Applied Financial Economics*, vol. 9(5) :pp. 477–482.
- [799] VIGFUSSON, R. (1996). Switching between chartists and fundamentalists : A markov regime-switching approach. In .
- [800] VÉLASQUEZ, T. (2009). *Chaos Theory and the Science of Fractals, and their Application in Risk Management*. Ph.D. thesis, Copenhagen Business School.
- [801] VOLLE, P. (1995). Le concept de risque perçu en psychologie du consommateur : antécédents et statut théorique. In *Recherche et Applications en Marketing*, vol. 10(1) :pp. 39–56.
- [802] VOLTAIRE, F.M. (1734). Lettres philosophiques. In *R. Pomeau (Paris : Garnier-Flammarion, 1964)*.
- [803] VON NEUMANN, J. MORGENSTERN, O. (1944). Theory of games and economic behavior. In *Bull. Amer. Math. Soc*, vol. 51(7) :pp. 498–504.
- [804] WACHTEL, S.B. (1942). Certain observations on seasonal movements in stock prices. In *The Journal of Business of the University of Chicago*, vol. 15(2) :pp. pp. 184–193.
- [805] WALLACE, M. (2011). Neural networks and their application to finance. In *Operations Management : A Modern Approach* :p. 152.
- [806] WAN, A. JIANG, D. (2002). Existence of positive periodic solutions for functional differential equations. In *Kyushu Journal of Mathematics*, vol. 56(1) :pp. 193–202.
- [807] WAN, A., JIANG, D., XU, X. (2004). A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equations. In *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 47(8) :pp. 1257–1262.
- [808] WANG, B.H. HUI, P.M. (2001). The distribution and scaling of fluctuations for hang seng index in hong kong stock market. In *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 20(4) :pp. 573–579.
- [809] WANG, K. LI, Y.AND ERICKSON, J. (1997). A new look at the monday effect. In *The Journal of Finance*, vol. 52(5) :pp. 2171–2186.

- [810] WANG, Z. FU, C. (2007). A chaos and fractal theory based nonlinear dynamical model for china stock market. In *Journal of Communication and Computer*, vol. 4 :pp. 1–5.
- [811] WEBBER, C.L. ZBILUT, J.P. (1992). Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. In *Physics Letters A*, vol. 171 :pp. 199 – 203.
- [812] WEBBER JR, C.L. ZBILUT, J. (1994). Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies. In *Journal of Applied Physiology*, vol. 76(2) :pp. 965–973.
- [813] WEI, A. LEUTHOLD, R.M. (1998). Long agricultural futures prices : Arch, long memory, or chaos processes ? Tech. rep., University of Illinois OFOR Working Paper.
- [814] WEIERSTRASS, K. (1872). Über continuirliche functionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten besitzen. In *Communication à l'Académie Royale des Sciences..*
- [815] WEISS, A. (1986). Arch and bilinear time series models : Comparison and combination. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 4(1) :pp. 59–70.
- [816] WELLINK, N. (2008). Conférence internationale des superviseurs du cbsb.
- [817] WELLINK, N. (2009). Beyond the crisis : the basel committee's strategic response. In *Financial Stability Review*, (13) :pp. 123–132.
- [818] WENG, P. LIANG, M. (1995). The existence and behavior of periodic solution of hematopoiesis model. In *Mathematica Applicata*, vol. 8(4) :pp. 434–439.
- [819] WEST, K. (1988). Dividend innovations and stock price volatility. Tech. rep., NBER WORKING PAPER SERIES.
- [820] WHITE, H. (1989). Learning in artificial neural networks : A statistical perspective. In *Neural computation*, vol. 1(4) :pp. 425–464.
- [821] WHITE, H. (2000). A reality check for data snooping. In *Econometrica*, vol. 68(5) :pp. 1097–1126.

- [822] WIDMER, G. KUBAT, M. (1996). Learning in the presence of concept drift and hidden contexts. In *Machine Learning*, vol. 23(1) :pp. 69–101.
- [823] WIDROW, B., GRONER, G., HU, M., SMITH, F., SPECHT, D., TALBERT, L. (1963). Practical applications for adaptive data processing systems. In *WESCON Conv., San Francisco, Paper* :pp. 11–4.
- [824] WILLEY, T. (1992). Testing for nonlinear dependence in daily stock indices. In *Journal of Economics and Business*, vol. 44(1) :pp. 63 – 76.
- [825] WILLINGER, W., TAQQU, M., TEVEROVSKY, V. (1999). Stock market prices and long-range dependence. In *Finance and Stochastics*, vol. 3(1) :pp. 1–13.
- [826] WILLIS, R. ROSEN, S. (1978). Education and self-selection.
- [827] WILMOTT, P. (1998). Derivatives. In .
- [828] WOLF, A., SWIFT, J.B., SWINNEY, H.L., VASTANO, J.A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. In *Physica D : Non-linear Phenomena*, vol. 16(3) :pp. 285 – 317.
- [829] WONG, W. (2010). Backtesting value-at-risk based on tail losses. In *Journal of Empirical Finance*, vol. 17(3) :pp. 526–538.
- [830] WORKING, H. (1934). A random-difference series for use in the analysis of time series. In *Journal of the American Statistical Association*, vol. 29(185) :pp. 11–24.
- [831] XU, B. (2008). Co-mouvements extrêmes, interdépendance ou contagion ? une analyse daprès la théorie des valeurs extrêmes. Tech. rep., LAREFI. [3-4].
- [832] XU, D. YANG, Z. (2007). Attracting and invariant sets for a class of impulsive functional differential equations. In *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 329(2) :pp. 1036–1044.
- [833] XU, Z. GENÇAY, R. (2003). Scaling, self-similarity and multifractality in {FX} markets. In *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 323(0) :pp. 578 – 590.
- [834] YAMAI, Y. YOSHIBA, T. (2002). On the validity of value-at-risk : comparative analyses with expected shortfall. In *Monetary and economic studies*, vol. 20(1) :pp. 57–85.



- [835] YAMAI, Y. YOSHIBA, T. (2005). Value-at-risk versus expected short-fall : A practical perspective. In *Journal of Banking & Finance*, vol. 29(4) :pp. 997–1015.
- [836] YAN, J. ZHAO, X. (2010). An empirical study on turn-of-the-month effect and its causes in chinese stock market. In *South China Journal of Economics*, vol. 2 :p. 007.
- [837] YANG, S.R. BRORSEN, B.W. (1993). Nonlinear dynamics of daily futures prices : Conditional heteroskedasticity or chaos? In *Journal of Futures Markets*, vol. 13(2) :pp. 175–191.
- [838] YOUSEFPOOR, P., ESFAHANI, M., NOJUMI, H. (2008). Looking for systematic approach to select chaos tests. In *Applied Mathematics and Computation*, vol. 198(1) :pp. 73–91.
- [839] ZAKOIAN, J.M. (1994). Threshold heteroskedastic models. In *Journal of Economic Dynamics and control*, vol. 18(5) :pp. 931–955.
- [840] ZHANG, H., FENG, G., DUAN, G., LU, X. (2006).  $H_\infty$  filtering for multiple-time-delay measurements. In *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 54(5) :pp. 1681–1688.
- [841] ZHAO, H. (2009). A comparative study on garch effect and chaos in china’s stock markets. In *Test and Measurement, 2009. ICTM’09. International Conference on*, vol. 2. IEEE, pp. 386–389.
- [842] ZIVOT, E. ANDREWS, D.W.K. (1992). Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis. In *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 10(3) :pp. 251–270.
- [843] ÖZÜN, A. (2006). Modelling chaotic behaviours in financial markets. In *Journal of istanbul Kultur University*, vol. 2 :pp. 181–187.

ANNEXES CHAPITRE 1

---

## A.1 ÉVALUATION DES RISQUES RELATIFS AUX TITRES DE CRÉANCES, DE PROPRIÉTÉ ET AUX DE- VISES

### ▷ ENCADRÉ 1 : NORMES MINIMALES DE FONDS PROPRES POUR LES TITRES DE CRÉANCES

Les titres de créances dans le portefeuille de négociation incluent tous les titres qu'ils soient à taux fixe ou variable et les instruments ayant un comportement identique. Les normes minimales sont formulées selon le risque spécifique de marché et le risque général. Dans le cas du risque spécifique, seules les positions équilibrées dans une émission spécifique peuvent être compensées. Le comité propose 5 groupes distincts sur lesquels seront appliqués différents taux :

1. les emprunts gouvernementaux sont pondérés à 0% : dans cette classe, on trouve les différents instruments permettant l'emprunt d'État (obligations, bons du trésor, instrument à court terme...). Les autorités peuvent décider d'appliquer une pondération plus élevée à des titres d'État de certains gouvernements.
2. les emprunts qualifiés : dans cette catégorie, on trouve les titres de dettes des agents du secteur public, des banques multilatérales de développement mais aussi les titres notés au moins Baa ou BBB (selon l'agence de notation) par 2 agences désignées par l'autorité de contrôle ou non notés mais cotés sur un marché reconnu et dont la qualité est comparable. Ils sont pondérés à :
  - \* 0.25% lorsque l'échéance résiduelle est égale ou inférieure à 6 mois.
  - \* 1% lorsque l'échéance résiduelle est comprise entre 6 et 24 mois.
  - \* 1.6% lorsque l'échéance résiduelle dépasse 24 mois.
3. Tous les autres titres sont pondérés à 8% comme prévu dans l'accord sur les fonds propres. Le comité préconise une exigence pour risque spécifique supérieure à 8% pour des titres à hauts rendements et l'impossibilité d'une compensation avec les autres catégories de titres de créances. Pour le risque général de marché, le comité propose de choisir entre deux méthodes de calcul de risque.

▷ ENCADRÉ 1 : NORMES MINIMALES DE FONDS PROPRES POUR LES TITRES DE CRÉANCES

La méthode standard est construite à partir d'un tableau de 13 tranches d'échéances des positions sur titres de créances et produits dérivés<sup>87</sup>. Pour chaque tranche d'échéance, il faut affecter aux positions une pondération<sup>88</sup> qui traduit la sensibilité-prix aux variations du taux d'intérêt. La pondération est le produit de deux éléments : la duration approchée<sup>89</sup> d'une obligation dont l'échéance est égale au milieu de la tranche considérée et une fluctuation des taux. Le comité attire l'attention sur les obligations à coupon zéro dont les risques peuvent être sous-estimés. L'annexe 2 du document consultatif présente le mode de conversion des zéros coupons en obligations à 8% avec 2 tranches d'échéances supplémentaires pondérées plus fortement. L'étape suivante consiste en une compensation des positions pondérées longues et courtes<sup>90</sup>. Pour chaque tranche d'échéance, les positions peuvent différer d'où un risque de base. Mais le comité n'est pas favorable à une compensation intégrale mais plutôt à un ajustement compensatoire : il propose d'affecter un coefficient (10%) de non compensation verticale à la plus petite position de sens opposée<sup>91</sup>. Pour chaque tranche, on obtient la position résiduelle longue ou courte et l'exigence de fonds propres pour non compensation. Ensuite, le comité préconise le regroupement des différentes tranches d'échéances en plages :

- \* Plage 1 : 0 à 12 mois.
- \* Plage 2 : 1 à 4 ans.
- \* Plage 3 : 4 à 20 ans.

À partir de ces plages, le comité propose une compensation horizontale partielle en deux temps :

- \* entre positions résiduelles au sein de chaque plage.
- \* entre positions résiduelles des plages.

89. Si l'instrument est à taux variable, il faut se référer à la date de révision des taux la plus proche.

90. Pour chaque tranche, le Comité définit un coefficient de pondération.

91. C'est la sensibilité du prix d'un titre aux variations du taux d'intérêt divisé par un facteur égal à 1 plus le taux d'intérêt.

92. Pour les titres à rendements élevés non affectés d'une pondération du risque spécifique supérieure à 8% , aucune compensation n'est admise.

93. Si dans une tranche particulière, la somme des positions pondérées longues est de 100 millions et la somme des positions pondérées courtes de 90 millions, l'exigence en fonds propres pour non compensation serait de 10% du montant équilibré(90 millions), ce qui représente 9 millions.

▷ ENCADRÉ 1 : NORMES MINIMALES DE FONDS PROPRES POUR LES TITRES DE CRÉANCES

Pour chacune des sous-étapes précédentes, les montants équilibrés sont pondérés d'un coefficient de non compensation déterminé à partir des corrélations constatées entre les variations des taux d'intérêt. On obtient alors les exigences en fonds propres auxquelles sont ajoutées celles déterminées pour non compensation verticale et les positions résiduelles du portefeuille. La somme de ces 3 composantes donne les exigences pour le risque général de marché. En sommant ces exigences et celles déterminées pour le risque spécifique, on obtient la norme globale de fonds propres par la méthode standard. Une méthode alternative pour le risque général de marché est fortement recommandée notamment pour sa précision. Elle consiste à mesurer la duration pour chaque position en retenant le coupon de chaque instrument (dans la méthode standard, le taux est supposé égal à 8%) et la durée de vie résiduelle précise<sup>94</sup>. L'utilisation de cette méthode est conditionnée à la production de résultats équivalents à la méthode standard.

▷ ENCADRÉ 2 : NORMES MINIMALES DE FONDS PROPRES POUR LES TITRES DE PROPRIÉTÉS

Pour les titres de propriétés ou les positions prises sur ces titres dans les portefeuilles de négociation, le comité relève de nombreuses divergences des autorités liées à l'appréciation des risques en fonction de l'environnement national. Les recommandations du comité doivent être appliquées à toutes positions sur tous les instruments dont le comportement de marché est identique aux actions<sup>93</sup>. La compensation sur émissions identiques est autorisée. En ce qui concerne l'exigence des fonds propres<sup>94</sup>, la procédure est identique aux titres de créances : une approche analytique avec la détermination d'exigences de fonds propres pour le risque spécifique et pour le risque général. Le comité propose pour chaque ligne d'action l'application de la formule  $x + y$  où  $x$  désigne le risque spécifique (affectés à toutes les positions) et  $y$  le risque général affecté à la position nette globale (Positions longues moins positions courtes). Le comité recommande de retenir 8%<sup>95</sup> de la position nette pour le risque général. Pour le risque spécifique, le comité suggère la prise en compte de la diversification du portefeuille et de la liquidité des actifs. Une valeur élevée du risque spécifique est nécessaire (8%) sauf si le portefeuille répond aux critères de diversification et de liquidité. Ces critères n'étant pas bien définis, il revient aux autorités de les préciser pour leurs établissements sachant que le risque spécifique ne peut être inférieur à 4%. Pour les instruments dérivés, l'annexe A.2. détaille les normes de fonds propres.

92. Précédemment, on choisissait le milieu de la tranche d'échéance.

▷ ENCADRÉ 3 : NORMES PRUDENTIELLES POUR LE RISQUE DE CHANGE

Pour le risque de marché, la détermination des exigences de fonds propres nécessite :

1. la mesure de la position dans une devise donnée. Une position nette ouverte est la somme :
  - \* d'une position nette au comptant
  - \* d'une position nette à terme
  - \* de garanties avec une activation future certaine
  - \* d'un solde net des gains/dépenses futurs non courus mais entièrement couverts.
  - \* d'un portefeuille global net d'options de change pondéré par le coefficient delta.
  - \* tout élément représentant un gain ou une perte en devise.

Pour les métaux précieux, en attendant des normes sur les produits de base, les exigences en fonds propres appliquées sont celles définies pour le risque de change. Des précisions sur le traitement des intérêts, la mesure des positions, la méthodologie et les procédures applicables aux positions structurelles sont fournies en annexe [▷ Annexe B.3.].

2. le calcul des risques liés à une détention de positions longues et courtes en devises et la fixation d'un montant de fonds propres approprié. Les exigences de simplicité et de précision conduisent le comité à retenir deux méthodes de détermination du montant des fonds propres :

- \* la méthode simplifiée : elle se base sur le montant minimal de la position nette sur chaque devise et sur chaque métal précieux. Ce montant doit être converti dans la devise de déclaration en retenant le cours au comptant. On obtient la position nette ouverte en ajoutant le maximum entre la somme des positions courtes et la somme des positions longues et en ajoutant la somme des positions nettes sur les métaux précieux. L'exigence en fonds propres est donnée par le montant qui représente 8% de la position nette ouverte. Un certain nombre d'exonérations sont prévues :
  - a) Une banque peut être exonérée de l'exigence des fonds propres sur ses opérations de devises si le volume de ses opérations de change ne dépasse pas la totalité de ses fonds propres défini dans le cadre de Bâle I.
  - b) Un établissement peut être exonéré si sa position ouverte nette ne dépasse pas 2% des fonds propres.

▷ ENCADRÉ 3 : NORMES PRUDENTIELLES POUR LE RISQUE DE CHANGE

\* la méthode de simulation : elle repose sur les variations de change observées sur une période bien définie. Elle consiste à appliquer les variations aux positions courantes en devises de telle sorte à déterminer les gains et les pertes simulées. L'exigence en fonds propres est fonction de la perte maximale simulée. Pour cette méthode, il faut préciser :

- la période de détention d'une position : elle est fonction du temps nécessaire à un établissement pour boucler une position déficitaire. Si une journée peut être suffisante, le comité note la difficulté que peut rencontrer un établissement dans la fermeture d'une position déficitaire lorsque les cours sont très volatiles ou que le marché est étroit. Par ailleurs, la banque peut décider de conserver la position en anticipant un retournement rapide. Le comité propose de retenir une période de 10 jours ouvrés, calculée par glissement.
- La durée de la période d'observation : elle dépend des prévisions sur l'évolution de la volatilité. Une période de 5 ans est retenue avec possibilité de glissement.
- le niveau de confiance pour la mesure du risque : le comité retient le quantile à 95%
- un facteur de gradation qui détermine la sévérité de l'exigence des fonds propres. Le comité, en attente de résultats, propose de retenir un facteur minimal de 3% pour l'exigence des fonds propres.

## A.2 LE NOUVEL ACCORD

Une réflexion est menée sur la compensation des fonds propres en avril 1993. Dans l'accord sur les fonds propres, la compensation bilatérale par novation pour une monnaie et une date identiques est la seule à bénéficier d'une reconnaissance prudentielle<sup>96</sup>. Le rapport Lamfalussy de la BRI daté de novembre

94. Ne sont concernés que les actions ordinaires, bons de souscription d'actions, titres convertibles avec un comportement identique aux actions, engagements et autres droits d'acquisition, cession d'actions et participations. Pour les produits dérivés, les indices d'actions et les opérations d'arbitrage, voir l'annexe A.2.

95. Ce choix est déterminé par une analyse de la volatilité-prix des principaux indices d'actions sur les grandes places.

96. L'accord sur les fonds propres(1988) permet le calcul sur une base nette du risque de crédit lié aux obligations à terme, ces dernières étant soumises à une compensation bilatérale par novation.

1990 met en évidence la contribution des mécanismes de compensation des ordres de paiement interbancaires et des engagements contractuels à terme dans l'amélioration de l'efficacité et de la stabilité des règlements interbancaires. Le rapport pointe aussi une réduction des risques de crédit et de liquidité sous certaines conditions. L'objectif du comité est la reconnaissance d'autres formes de compensations bilatérales des risques de crédit. Une attention particulière est portée aux clauses d'exception d'inexécution<sup>97</sup>. Tout mécanisme de compensation incluant ces clauses ne peut bénéficier de compensation de fonds propres. La compensation bilatérale pour la mesure des fonds propres dépend de la méthode utilisée :

- \* Évaluation du risque courant : il y a deux grandes méthodes d'évaluation du risque de crédit des obligations à terme autorisées mais la plus répandue est la méthode du risque courant qui évalue chaque instrument par référence au marché, somme les valeurs positives de tous les instruments pour déterminer le coût de remplacement courant et majore ce montant d'un risque potentiel futur à partir du nominal sous-jacent à chaque contrat. Le comité propose de retenir un coût de remplacement sur une base nette de telle sorte à diminuer les exigences de fonds propres pour un portefeuille prévu dans un accord de compensation. En ce qui concerne la majoration pour les risques potentiels futurs, le comité retient la méthode de 1988(on multiplie le notionnel par un pourcentage).
- \* Évaluation du risque initial : aucune banque internationale ne peut bénéficier d'un traitement prudentiel préférentiel dès lors qu'elle a recours à cette méthode. Sur proposition de certains membres, le comité retient une reconnaissance prudentielle temporaire pour les utilisateurs de cette méthode, ce qui leur permet de bénéficier d'une réduction des facteurs de conversion en équivalent crédit minorés.

En ce qui concerne la compensation multilatérale, l'intervention d'une chambre de compensation est nécessaire. Si elle est acceptée, elle serait soumise aux mêmes exigences juridiques que la compensation bilatérale. La question sur le

---

<sup>97</sup>. c'est une disposition qui autorise une contrepartie non défaillante à n'effectuer aucun paiement ou des paiements limités envers un défaillant même s'il est créancier net.



niveau des fonds propres pour les risques et les risques potentiels futurs n'a pu être déterminée et est soumise à des consultations ultérieures.

#### A.2.1 LES INSTRUMENTS DÉRIVÉS SUR TITRES DE CRÉANCES

Les instruments dérivés concernés sont les ATF (Accords de taux futur), les CTIF (Contrat à terme d'instruments financiers), les options sur titres de dettes, échange de taux d'intérêt et de devises et les contrats de change à terme. Ils doivent être convertis en position sur le sous-jacent et soumis à la méthode standard du risque général et spécifique. Pour les options, l'annexe 5 du document consultatif précise le traitement du risque de marché. Pour les CTIF, les ATF et les contrats à terme, on retient une combinaison de position courte et de position longue sur le notionnel et la durée du CTIF ou d'un ATF est la période qui reste jusqu'à l'exercice du contrat ou éventuellement jusqu'à la date de fin du support. En ce qui concerne les échanges financiers, le comité retient 2 positions notionnelles sur titres d'État avec les durées de vie appropriées. Pour les options sur marché organisé ou de gré à gré, il y a une asymétrie des risques. Il n'y a donc aucune recommandations définitives et le comité laisse le choix entre différentes méthodes à l'autorité de contrôle. Pour la détermination des exigences, la compensation est autorisée pour des instruments absolument identiques. Les positions en devises ne peuvent être compensées si elles ne sont pas libellées dans la même monnaie. Les positions inverses sur une même catégorie d'instruments peuvent être intégralement compensables sous un certain nombre de conditions propres aux différents instruments. Dans le cadre du risque spécifique, l'exigence en fonds propres doit permettre de couvrir un risque de crédit ou de liquidité lié au support. Or, une grande partie des instruments hors bilan est associée à un sous-jacent qui ne comporte aucun risque spécifique identifiable. Aussi, les échanges de taux d'intérêt, d'intérêt, de devises, les ATF, les contrats de change à terme, les CTIF, les options sur taux d'intérêt sont exemptés d'exigences de fonds propres pour couvrir le risque spécifique. Cette règle ne peut s'appliquer aux CTIF et options dont le support est un titre de dettes ou un indice de titres de dettes. Pour le risque général de marché, le comité retient les positions sur tous les produits dérivés et les po-

sitions au comptant. Les positions équilibrées sur instruments identiques sont exclues. Une procédure identique aux titres de créances est appliquée (méthode standard ou alternative).

### A.2.2 LE TRAITEMENT DES INSTRUMENTS DÉRIVÉS SUR ACTIONS

Pour les CTIF, options sur actions et indices d'actions, les produits aux comportements identiques, il faut une conversion en position sur le sous-jacent. Les calculs relatifs aux actions peuvent alors s'appliquer. Il faut déclarer les différents instruments aux prix courant du marché. Les positions équilibrées sur chaque ligne d'action sont compensables. Pour le risque spécifique lié à un indice, le facteur forfaitaire peut être faible car le risque spécifique d'un indice est moins élevé que celui d'un échantillon aléatoire. Un taux de 2% est recommandé et le comité insiste sur la diversification des indices, ce qui exclut les indices sectoriels. En ce qui concerne les arbitrages liés aux CTIF, le comité permet une compensation partielle dans certains cas mais la complexité de ces instruments exige l'utilisation d'une méthode particulière sous conditions.

### A.2.3 LES POSITIONS SUR DEVISES

Dans le cadre de l'évaluation d'une position en devise, 4 aspects doivent être détaillés :

1. le traitement des intérêts, les produits à recevoir et les charges à payer : les intérêts courus et les charges à payer sont considérés comme des positions. Les intérêts attendus mais non acquis et les charges prévues sont exclues.
2. la mesure des positions de change à terme : ces dernières sont évaluées au cours de change du marché au comptant. Elles peuvent éventuellement(en fonction des pratiques comptables) être évaluées en valeur nette actualisée.
3. la méthodologie concernant les options de change : l'absence de corrélation parfaite entre le prix d'une option et le cours de change au comptant rend difficile la mesure du risque. En fonction de l'usage de l'option, il

est possible de séparer l'option de la position et d'appliquer des traitements différents. Dans le cas d'une option de couverture, l'exigence de fonds propres est de 8% de la position couverte. Pour une option sèche de vente ou d'achat, il faut comparer la valeur de marché de l'option et le montant représenté par 8 % de la valeur de marché du sous-jacent et retenir le montant le plus faible. Il est possible d'utiliser le delta du portefeuille total d'options de change bien que la volatilité ne soit pas prise en compte.

4. Positions structurelles : si la banque possède une position équilibrée en devises, cela n'implique pas nécessairement un ratio de fonds propres protégé. Elle doit se prémunir d'une dépréciation de la monnaie nationale en retenant une position courte dans sa monnaie. Le comité laisse à la discrétion des autorités d'autoriser ce type de procédures. Les positions prises dans ce cadre peuvent être exclues de la position nette ouverte en devises sous conditions :

- \* si elles sont de nature " structurelles " (non négociables) ;

- \* si elles visent uniquement à protéger le ratio des fonds propres ;

- \* si elles sont exclues définitivement et ne peuvent être " réutilisées " comme instrument de couverture.

### A.3 EXIGENCES DE FONDS PROPRES POUR LE RISQUE DE CHANGE ET POUR LES OPTIONS

▷ ENCADRÉ 4 : EXIGENCES DE FONDS PROPRES POUR LES PRODUITS DE BASE

Il faut que ces exigences couvrent le risque directionnel, le risque d'écart à terme<sup>98</sup> et de taux d'intérêt et le risque de base. Deux approches sont présentées :

- \* L'approche standard : elle consiste en premier lieu à convertir les positions sur produits de base en unités standard de mesure. Pour chaque produit, la position nette est alors convertie dans la monnaie nationale en tenant compte des cours de change courants au comptant. La compensation des positions longue et courte pour chaque tranche donne lieu à une exigence de fonds propres pour couvrir les risques d'écart à terme et de taux d'intérêt. Elles sont donc pondérées par le cours au comptant du produit et par un coefficient d'écart de taux approprié à la tranche. Si pour des échéances courtes, il existe une position résiduelle nette, elle peut être utilisée pour compenser les risques relatifs à des échéances plus longues. Mais compte tenu de l'imprécision des couvertures entre positions, une surpondération de 0.6% de la position nette reportée est appliquée pour chaque tranche. Les positions finales (longues ou courtes) donnent lieu à une exigence de fonds propres de 15%<sup>99</sup>. Cette procédure est valable pour les instruments dérivés sur produits de base dont les positions doivent être converties en positions notionnelles et assorties d'échéances définies par le comité selon l'instrument en question.
- \* L'approche simplifiée : en ce qui concerne le risque directionnel, l'approche simplifiée est identique à l'approche standard avec une exigence de fonds propres de 15%. Pour le risque de base, de taux d'intérêt et d'écart à terme, l'approche simplifiée prévoit en plus une exigence additionnelle de 3% des positions brutes<sup>100</sup> longue ou courte d'un produit.

98. C'est un risque dû à des décalages d'échéances.

99. Pour tous les produits de base quelle que soit leur volatilité.

100. déterminées par les prix courants au comptant.

▷ ENCADRÉ 5 : EXIGENCES DE FONDS PROPRES POUR LES OPTIONS

Deux classes de méthodes sont proposées : la méthode simplifiée distingue deux types de positions résumées dans le tableau 16. Les méthodes intermédiaires sont au nombre de 2 :

1. La méthode delta-plus : il est possible de pondérer les positions sur options par le delta. Mais les limites du delta conduisent à retenir les sensibilités Gamma et Véga pour prendre en compte tous les risques afférant aux positions sur options. Les méthodes de calcul des exigences de fonds propres dépendent du sous-jacent. L'évaluation du risque delta se base sur les procédures définies pour chaque sous-jacent (tableaux d'échéances, etc...). Le tableau 17 qui suit précise le calcul des exigences pour les risques Gamma et Véga en fonction de la nature du sous-jacent. L'exigence totale des fonds propres est donnée par la somme des exigences individuelles pour les Gammas nets négatifs (sur positions courtes) et la valeur absolue de la somme des exigences pour le Véga.
2. L'analyse par scénarios : c'est une méthode qui permet, sur la base d'une grille de variation des facteurs de risques, de calculer les variations d'un portefeuille d'options. Une réévaluation du portefeuille doit être menée en prenant en compte les variations de la valeur du sous-jacent tout en tenant compte des risques liés à cet actif. Ainsi, pour les taux d'intérêt, on retiendra 100 points de base pour la plage 1, 90 points de base pour la plage 2 et 75 points de base pour la plage 3.

On suppose une variation de  $\pm 8\%$  pour les devises,  $\pm 12\%$  pour les actions et  $\pm 15\%$  pour les produits de base. Pour la volatilité, on peut supposer une variation de  $\pm 25\%$ <sup>101</sup>. L'exigence de fonds propres est alors donnée par la somme des pertes de valeur du portefeuille les plus importantes pour chaque taux ou chaque sous-jacent. Le comité insiste sur des estimations distinctes du montant des fonds propres :

- \* Pour des options sur taux d'intérêt ou titres de créances, l'évaluation des fonds propres se fait selon les plages d'échéances.
- \* Pour des options sur actions, l'évaluation des fonds propres se fait pour chaque émission de titre spécifique et pour chaque indice.
- \* Pour des options sur devises, l'évaluation des fonds propres se fait selon les cours de change individuels

---

101. Les autorités peuvent exiger une fourchette de variation différente.

| Position                                      | Mesure de risque   |
|---|--|
| Longue comptant et longue sur option d'achat  | Exigence de fonds propres : c'est la valeur de marché du sous-jacent multiplié par la somme des pondérations pour risque spécifique et risque général de marché moins le montant de l'option dans le cours avec une limite de 0                  |
| Courte comptant et longue sur option de vente |  |
|   | Exigence de fonds propres : c'est la somme minimale entre :  |
| Longue sur option de vente ou option d'achat  | <ul style="list-style-type: none"> <li>* la valeur de marché du sous-jacent multiplié par la somme des pondérations pour risque spécifique et risque général de marché sur le sous-jacent.</li> <li>* la valeur de marché de l'option</li> </ul> |

Tableau 16 – Exigences de fonds propres pour les options selon la méthode simplifiée

| Nature du sous-jacent                | Exigences de fonds propres selon la méthode delta-plus   |
|--------------------------------------|--|
| Titres de créances ou taux d'intérêt | <ul style="list-style-type: none"> <li>* Gamma : pour chaque tranche d'échéance, le gamma sur positions courtes est multiplié par des pondérations de risques définies par le comité et par le carré de la valeur de marché du sous-jacent.</li> <li>* Véga : l'exigence de fonds propres est donnée pour chaque tranche en supposant une variation proportionnelle de <math>\pm 25\%</math> de la volatilité.</li> </ul>      |
| Actions                              | <ul style="list-style-type: none"> <li>* Gamma : Pour chaque sous-jacent, le gamma sur positions courtes est multiplié par 0,72% dans le cas d'une action ou 0,32% dans le cas d'un indice et par le carré de la valeur de marché du sous-jacent.</li> <li>* Véga : l'exigence de fonds propres est donnée pour chaque tranche en supposant une variation proportionnelle de <math>\pm 25\%</math> de la volatilité</li> </ul> |
| Devises et or                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>* Gamma : les gammas sur positions courtes sont multiplié par 0,32% et par le carré de la valeur de marché du sous-jacent.</li> <li>* Véga : l'exigence de fonds propres est donnée pour chaque tranche en supposant une variation proportionnelle de <math>\pm 25\%</math> de la volatilité</li> </ul>   |
| Produits de base                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>* Gamma : les gammas sur positions courtes sont multiplié par 1,125% et par le carré de la valeur de marché du sous-jacent.</li> <li>* Véga : l'exigence de fonds propres est donnée pour chaque tranche en supposant une variation proportionnelle de <math>\pm 25\%</math> de la volatilité</li> </ul>  |

Tableau 17 – Exigences de fonds propres pour les options selon la méthode delta-plus

## A.4 LES MODÈLES INTERNES

### A.4.1 DÉFINITION DES FACTEURS DE RISQUES DE MARCHÉ

Dans le cadre des systèmes de mesures de risques de marché, une étape importante réside dans une définition des facteurs de risques c'est-à-dire des cours, des taux ou des prix de marché qui ont un impact sur la valeur des positions. Pour les modèles internes, cette définition doit permettre de prendre en compte de façon complète tous les facteurs de risques et c'est dans cet objectif que le comité décide de définir des principes directeurs. Ils sont scindés selon les facteurs de risques :

- \* Taux d'intérêt : Pour chaque position sensible au taux d'intérêt, détenue par la banque dans chaque monnaie, il faut définir des facteurs de risques :
  - la modélisation de la courbe des rendements doit être effectuée par le système de mesures des risques : une division de la courbe en plusieurs tranches d'échéances permet de prendre en compte la volatilité des taux et on retient un facteur de risque pour chaque tranche. Pour de grandes positions, par devise et par marché, le comité recommande de retenir au minimum six facteurs de risques.
  - Des facteurs qui prennent en compte le risque d'écarts de taux doivent être inclus dans le système de mesure. Plusieurs méthodes permettent de tenir compte de cet écart de taux qui est dû à une corrélation imparfaite des variations des taux d'intérêt entre les titres d'État et les autres instruments à taux fixe.
- \* Cours de change : pour chaque devise, des facteurs de risques doivent être définis. Toute position libellée dans une autre monnaie que la monnaie de déclaration intègre un risque de change qui doit être pris en compte.
- \* Prix des actions : Pour chaque marché où la banque détient une position significative, il faut :
  - au minimum un facteur de risque qui prend en compte les variations des prix de l'indice de marché<sup>102</sup>.

---

102. Un équivalent bêta peut être calculé pour des titres spécifiques ou des indices sectoriels.



- Pour les différents secteurs du marché, il faut définir des facteurs de risques correspondants.
- Prendre en compte la volatilité des titres spécifiques.

L'application de ces trois méthodes dépend du degré de concentration sur titres spécifiques et des positions de la banque.

\* Prix sur produits de base : pour chaque position importante, la banque doit définir un facteur de risque correspondant au marché dans lequel elle détient les positions :

- Pour des positions limitées sur instruments liés aux produits de base, la banque peut simplement attribuer un facteur de risque pour chaque prix de produits de base. Si les positions sont très faibles, un facteur de risque pour toute une gamme de produits est autorisé.
- Pour des positions plus importantes, il faut que les banques intègrent dans leur modèle la variation du " rendement de détention " <sup>103</sup> entre les positions sur produits dérivés et les positions au comptant.

#### A.4.2 CRITÈRES QUALITATIFS

Le comité définit des critères qualitatifs que les établissements qui optent pour l'utilisation des modèles internes doivent satisfaire. Le respect de ces critères est directement lié aux facteurs multiplicatifs des fonds propres déterminés par les autorités (cf. supra). Le comité expose 7 critères :

1. Une unité indépendante chargée des systèmes de gestion et de contrôle des risques doit être mise en place par les établissements. Elle rendra compte à la direction générale des résultats produits par les différents modèles et son indépendance vis-à-vis des unités de négociation devra être garantie. Des contrôles ex-post doivent être menés par cette unité.

---

103. Ce sont les bénéfices réalisables par la détention directe du produit physique.

2. L'implication de la direction générale dans la gestion et le contrôle des risques est nécessaire et les moyens financiers consacrés à ce domaine doivent être substantiels. L'expérience des membres de la direction générale doit permettre des prises de décisions rapides et appropriées suite aux rapports de l'unité de contrôle des risques.
3. Le modèle interne de la banque doit être intégré à la gestion journalière des risques et il doit fournir des résultats quant à la planification, au suivi, et au contrôle des risques de la banque.
4. Des limites de négociation doivent être fixées en fonction des risques mesurés par le modèle.
5. Des simulations de crises doivent être menées à des intervalles réguliers. Les résultats relatifs à ces exercices doivent être examinés par la direction générale qui doit prendre les mesures qui s'imposent en cas de failles du système.
6. Les établissements doivent mettre en place un programme permettant de vérifier le respect des politiques, des contrôles et des procédures internes liées au système de mesure.
7. Un audit interne de la banque doit être mené régulièrement sur les activités de négociation et sur l'unité chargée du contrôle des risques.

#### A.4.3 CRITÈRES QUANTITATIFS

Tous les risques de marché doivent être pris en compte et satisfaire des principes directeurs définis par le Comité. Ce dernier exige une sophistication des méthodes proportionnelle à l'ampleur des risques. Le comité fournit des critères quantitatifs pour 6 paramètres :

1. Période de détention pour le calcul des variations potentielles de la valeur du portefeuille : l'évolution de la valeur du portefeuille doit être arrêtée dans le temps et il est apparu que plus la période d'étude est longue, plus le nombre de changements de prix est important. Si certaines banques optent pour une analyse sur une durée journalière, le comité recommande

le choix d'une période beaucoup plus large de telle sorte à pouvoir prendre en compte les difficultés de retraits sur des positions à cause d'un marché illiquide ou encore le caractère non linéaire des prix de certains instruments. Le comité retient une période de détention de deux semaines, soit 10 jours ouvrés comme il l'avait déjà recommandée dans ses propositions d'avril 1993. Ce choix suppose que le portefeuille est statique sur 10 jours. Le comité autorise le recours à des périodes plus brèves (journalières) mais exige une conversion des résultats pour une période de deux semaines par la méthode de la racine carrée du temps<sup>104</sup>.

2. Période d'observation des variations des prix, volatilités et corrélations : le choix de ce paramètre est contraint par la disponibilité des données mais le comité souligne qu'une période trop courte est très sensible aux événements récents et que si cette période s'inscrit dans une longue phase de stabilité, elle risque de conduire à des mesures trop faibles. Un horizon long ne permet pas de prendre en compte de manière rapide l'évolution du marché. Il est décidé de fixer une période d'observation minimale d'une année. Le comité autorise l'évaluation sur deux périodes séparées d'au moins 6 mois, une période longue (supérieure ou égale à 1 an) et une période courte (moins d'un an). Les banques qui optent pour ce choix se verront contraintes de retenir l'exigence la plus élevée calculée sur les deux périodes. Par ailleurs, les banques sont tenues d'actualiser leurs données au moins tous les trois mois.
3. Niveau de confiance : le Comité retient un niveau de 99%.
4. Limites fixées aux méthodes d'agrégation : en période d'instabilité, les corrélations entre certaines variables peuvent disparaître et engendrer des pertes importantes. Le comité autorise le rejet de certaines corrélations pour l'évaluation des fonds propres. La difficulté rencontrée pour définir les hypothèses de corrélation qui sont vérifiées, celles qui pourraient l'être et celles qui ne le sont pas conduit le comité à proposer :

\* une agrégation par addition des pertes potentielles entre catégories de facteurs de risques.

---

104. Cette méthode, adaptée uniquement pour des instruments dits linéaires, ne peut être appliquée aux options.

- \* le libre arbitre aux banques pour les corrélations au sein de chaque catégorie sous réserve de l'accord des autorités nationales.

5. Mesure pour les options et instruments à comportement identiques.

Etant donnée la diversité des méthodes utilisées pour l'évaluation des risques liés aux options, le comité pose des critères qui doivent conduire à des techniques sophistiqués : le caractère non linéaire des options par rapport à leur actif sous jacent doit être pris en compte. Une méthode non linéaire qui peut refléter les sensibilités-prix est donc nécessaire. Par ailleurs, le recours à une période de détention de deux semaines est exigé, elle ne peut être approximée par l'utilisation de la racine carrée du temps.

6. Calcul de l'exigence de fonds propres : les modèles internes ne tiennent pas compte d'un certain nombre d'éléments difficilement quantifiables, ce qui rend la mesure fournie par ces modèles insuffisante. Aussi, le comité propose de multiplier les mesures par un coefficient de telle sorte à renforcer les exigences de fonds propres. Ce coefficient doit être fixé par les autorités nationales en fonction de la qualité du modèle interne. Un coefficient minimal de 3 est retenu. Par ailleurs, le comité exige l'ajout d'un complément qui reflète les capacités prédictives du modèle. L'exigence en fonds propres est déterminée par comparaison de :

- \* la perte potentielle en  $t - 1$ .
- \* la moyenne des pertes potentielles sur les 60 derniers jours ouvrés pondérée par un coefficient multiplicatif.

La perte la plus élevée donne l'exigence en fonds propres.

## A.5 BÂLE III

### A.5.1 RÉSUMÉ DES ACCORDS

## Comité de Bâle sur le contrôle bancaire : les réformes de Bâle III

Bâle III renforce la réglementation microprudentielle et y ajoute une dimension macroprudentielle, notamment par le biais de volants de fonds propres.

| Fonds propres |  |  |   |  | Liquidité  |
|---------------|--|--|---|--|--|
|               |  |  |   |  | Normes mondiales de liquidité et suivi prudentiel  |
|               |  |  |   |  | Ratio de liquidité à court terme   |
|               |  |  |   |  | Ratio de liquidité à long terme  |
|               |  |  |   |  | Principes de saine gestion et de surveillance du risque de liquidité   |
|               |  |  |   |  | Suivi prudentiel   |
|               | <b>Fonds propres</b>   | <b>Couverture des risques</b>  | <b>Encadrement de l'effet de levier</b>   | <b>Gestion et surveillance des risques</b>   |  |
|               | <b>3<sup>e</sup> pilier</b>  | <b>1<sup>er</sup> pilier</b>   | <b>2<sup>e</sup> pilier</b>   | <b>3<sup>e</sup> pilier</b>  |  |
|               | <b>Discipline de marché</b>  | <b>Exigences supplémentaires</b>   | <b>Ratio de levier</b>  | <b>Révision des exigences de communication financière</b>  |  |
|               | <b>Qualité et niveau des fonds propres</b><br>L'accent est mis sur les actions ordinaires, dont le niveau minimal est porté à 4,5 % des actifs pondérés des risques (APR), après déductions.   | <b>Titrisations</b><br>Renforcement de la couverture en fonds propres de certaines titrisations complexes. Exigence, pour les banques, d'analyser plus rigoureusement la qualité de crédit de leurs expositions de titrisation notées par un organisme externe.  | <b>Un ratio de levier indépendant du risque, et incluant le hors-bilan, complète les mesures de fonds propres fondées sur le risque et limite le recours à l'effet de levier au sein du système bancaire.</b> | <b>Traitement de la gouvernance et de la gestion des risques au niveau de l'établissement; prise en compte du risque lié aux expositions hors bilan et aux titrisations; gestion de la concentration des risques; incitations à une meilleure gestion des risques et rendements sur le long terme; saines pratiques de rémunération; pratiques de valorisation; tests de résistance; normes comptables applicables aux instruments financiers; gouvernance d'entreprise; collèges prudentiels.</b> | <b>Le ratio de liquidité à court terme (<i>Liquidity Coverage Ratio</i>, LCR) impose aux banques de détenir suffisamment d'actifs liquides de haute qualité pour résister à une pénurie de financement de 30 jours, sur la base d'un scénario défini par les responsables prudentiels.</b>                                   |
|               | <b>Absorption des pertes par les fonds propres au point de non-viabilité</b><br>Dans leurs conditions contractuelles, les instruments de fonds propres comprendront une clause permettant – à la discrétion de l'autorité compétente – de les annuler ou de les convertir en actions ordinaires si la banque est jugée non viable. Ce principe accroît la participation du secteur privé à la résolution des futures crises bancaires, et réduit, ce faisant, le risque subjectif (ou aléa moral).   | <b>Portefeuille de négociation</b><br>Relèvement notable des fonds propres au regard des activités de négociation et sur dérivés, ainsi que des titrisations complexes dans le portefeuille de négociation. Création d'une exigence sur la valeur en risque en période de tensions, pour aider à atténuer la procyclicité. Exigence de fonds propres incrementale au regard des risques estimés de défaut et de migration de notation sur expositions à des produits de crédit non titrisés, prenant aussi en compte la liquidité. |   | <b>Instauration d'exigences sur les expositions de titrisation et sur la responsabilité directe des véhicules hors bilan. Communication financière plus détaillée concernant les composantes des fonds propres réglementaires et leur rapprochement avec les comptes publiés, fournissant une explication complète du mode de calcul des ratios de fonds propres réglementaires.</b>   | <b>Le ratio de liquidité à long terme (<i>Net Stable Funding Ratio</i>, NSFR) est un indicateur structurel conçu pour corriger les asymétries de liquidité. Il couvre la totalité du bilan et incite les banques à recourir à des sources de financement stables.</b>  |
|               | <b>Volant de conservation des fonds propres</b><br>Constitué d'actions ordinaires à hauteur de 2,5 % des APR, ce volant porte à 7 % le niveau total des fonds propres de cette qualité. Des restrictions s'appliquent aux distributions discrétionnaires si l'exigence de 7 % n'est plus respectée.  | <b>Risque de contrepartie</b><br>Renforcement substantiel du traitement du risque de contrepartie: mesure plus rigoureuse des expositions; incitation, pour les banques, par le coefficient de fonds propres, à recourir aux contreparties centrales pour leurs opérations sur dérivés; surpondération des expositions entre institutions financières.   |   |  | <b>En 2008, le Comité, tirant les enseignements de la crise, a publié les <i>Principes de saine gestion et de surveillance du risque de liquidité</i>, ensemble de recommandations établi à partir d'une révision en profondeur des saines pratiques de gestion du risque de liquidité dans les organisations bancaires.</b> |
|               | <b>Volant contracyclique</b><br>Compris dans une fourchette de 0–2,5 % et constitué d'actions ordinaires, ce volant est imposé par les autorités lorsqu'elles jugent que la croissance du crédit entraîne une augmentation inacceptable du risque systémique.  | <b>Expositions envers les contreparties centrales (CCP)</b><br>Proposition du Comité d'affecter une pondération de 2 % aux expositions envers une CCP agréée et de calculer, en fonction du risque (par une estimation simple et uniforme), l'exigence de fonds propres au regard des expositions sur les fonds de garantie des CCP.   |   |  | <b>Le dispositif de liquidité comprend un ensemble d'indicateurs universels conçus pour aider les autorités de contrôle à identifier et analyser les tendances affichées par le risque de liquidité tant au niveau des établissements qu'au sein du système tout entier.</b>   |
| <b>EFIS</b>   | Compte tenu du plus haut degré de risque qu'ils présentent pour le système financier, les établissements financiers ayant une importance systémique mondiale (EFIS <sup>m</sup> ) doivent se conformer à toutes les exigences de Bâle III et disposer, en outre, d'une plus grande capacité d'absorption des pertes. Le Comité a élaboré une méthodologie fondée sur des indicateurs quantitatifs et qualitatifs afin d'identifier les établissements bancaires concernés (EBIS <sup>m</sup> ). Des exigences supplémentaires, en actions ordinaires et assimilées de T1 (CET1), dans une fourchette de 1 % à 2,5 %, leur sont appliquées. De plus, une exigence additionnelle d'absorption des pertes de 1 % peut être appliquée aux banques soumises à la surpondération maximale (2,5 %), afin de les dissuader d'accroître encore leur importance systémique mondiale de manière significative. Ces règles ont été établies par le Comité en collaboration avec le Conseil de stabilité financière, lequel coordonne l'ensemble des mesures visant à réduire le risque subjectif (ou aléa moral) encouru du fait des EFIS <sup>m</sup> . |  |   |  |  |

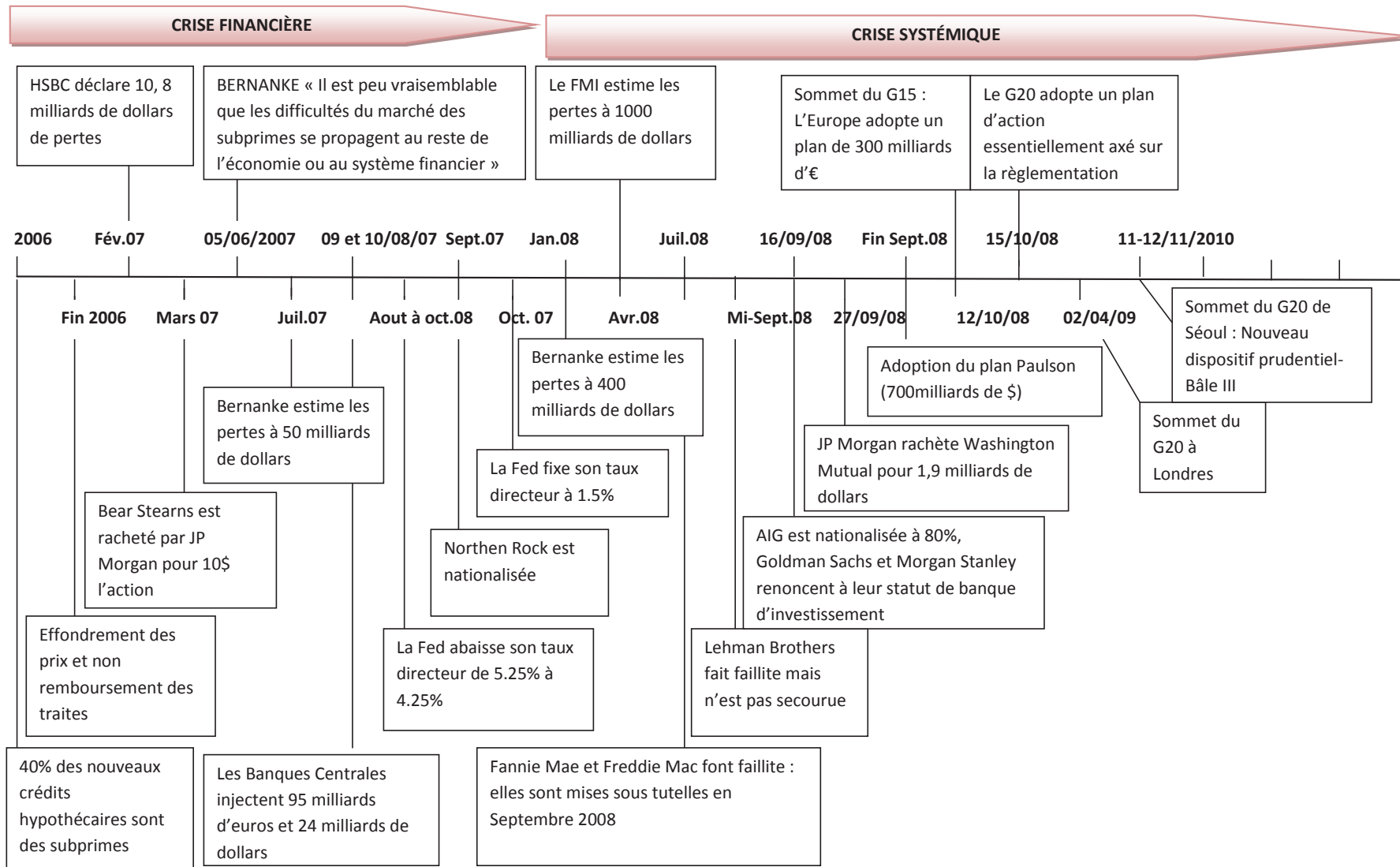
## A.5.2 LA CRISE DES SUBPRIMES

*Can it happen again ?* titrait Hyman Minsky en 1982 en référence à la Grande Dépression qui a suivi le krach de 1929. Cette question était dans tous les esprits lorsque la crise des subprimes s'est déclenchée bien que l'idée défendue par Minsky(1982), qui supposait la nature endogène et systématique des crises dans le système capitaliste, était loin de faire l'unanimité. L'éclatement de la bulle spéculative des prix de l'immobilier a conduit à une crise bancaire puis financière dont le caractère systémique en fait l'une des plus grandes crises de l'histoire financière. Mais au-delà de cette crise, un débat plus profond entre économistes reprend et deux écoles de pensée s'affrontent. Avant de proposer une analyse économique de la crise, revenons sur les faits marquants.

### A.5.2.1 LE DÉROULEMENT DE LA CRISE [[▷ GRAPHIQUE 40](#)]

La bulle immobilière du marché américain éclate au second semestre 2006 et la crise des subprimes est déclarée durant l'été 2007 avec, entre autres, l'insolvabilité de 2 grandes banques allemandes, l'IKB Bank et la Sachsen-Landesbank, dont on soupçonnait l'exposition à des prêts subprimes. Le rapport trimestriel de la BRI(2007) récapitule les différentes dates clés qui ont conduit à la crise. Au mois de juin 2007, plusieurs titres voient leur note abaissée par Moody's et Bear Stearns annonce la fermeture de 2 fonds spéculatifs, dont l'un est renfloué le 22 juin à hauteur de 3.2 milliards de dollars. Le mois de juillet est marqué par une succession de déclassement, des difficultés dans le secteur immobilier américain et des pertes financières dues aux expositions à des prêts subprimes. Le mois d'août 2008 est celui du secours : la première semaine, les pertes de l'IKB Bank conduisent à la mise en place d'un fond de secours de 3.5 milliards d'euros tandis qu'aux États-Unis, American Home Mortgage Investment Corp. est déclarée en faillite. Trois jours plus tard, BNP Paribas suspend le rachat de 3 fonds de placement et la BCE injecte 95 milliards d'euros de liquidité sur le marché interbancaire. Le 17 août, la Fed réduit son taux d'escompte de 50 points de base et autorise un financement à terme pendant 30 jours.

L'idée d'une crise circonscrite au marché immobilier est dans tous les esprits, notamment celui de Ben Bernanke, le président de la Fed, qui déclare le 05 juin 2007 : "(...) Il est peu vraisemblable que les difficultés du marché des subprimes se propagent au reste de l'économie ou au système financier". Mais les déclassements par les agences de notation et l'assèchement de la liquidité sur certains marchés commencent à infirmer l'idée d'une crise sectorielle. Le marché interbancaire est en crise avec des écarts records entre le taux de prêts interbancaires au jour le jour et le taux de prêts avec garantie. Les politiques de baisse des taux d'intérêt menées par les banques centrales, notamment aux États-Unis, ne suffisent pas à rétablir la confiance envers des banques qui risquent de subir des pertes dont les montants sont inconnus. Plusieurs estimations sont proposées tout au long de la crise : en juillet 2007, le président de la Fed estime entre 50 et 100 milliards de dollars de pertes des prêts subprimes alors que Lehman Brothers établit fin 2007 une fourchette comprise entre 250 et 320 milliards de dollars et la Deutsche Bank évoque une perte oscillant entre 300 et 400 milliards de dollars. En mars 2008, le chiffre de 400 milliards semble faire consensus mais le FMI avance en avril 2008 une estimation de 565 milliards de dollars pour les banques et 1000 milliards pour le secteur financier. Aux États-Unis, les grandes banques commencent à être en difficulté : Northern Rock est nationalisée en septembre 2007 et un an plus tard, Fannie Mae et Freddie Mac sont mises sous tutelle. Le mois de septembre 2008 est marqué par la faillite de Lehman Brothers, la nationalisation d'AIG et le rachat de Washington Mutual par JP Morgan.





### A.5.2.2 UNE ANALYSE ÉCONOMIQUE DE LA CRISE

Le Conseil d'Analyse Économique(CAE) a consacré un rapport sur la crise des subprimes(2008) et présente les facteurs à l'origine de la crise. Il note l'effet de surprise de cette crise qui semblait circonscrite aux États-Unis : " (...) ces marchés n'annonçaient pas de ralentissement mondial. Ils signalaient tous le risque d'un ralentissement américain, mais un ralentissement qui ne se transmettrait pas au reste du monde : c'est la théorie dite du " découplage " ." Par ailleurs, le caractère plus volatile des marchés semblait légitime à cause du niveau historiquement bas de la volatilité. Finalement la crise éclate et la question que se posent tous les experts est la suivante :

Comment la crise sur le marché des subprimes qui représente 5% de la capitalisation boursière américaine a pu se propager aux autres marchés ?

La position retenue par le CAE met en cause plusieurs déséquilibres financiers mondiaux que la crise sur le marché des subprimes a accentué. Le rapport du CAE présente 3 causes majeures de la crise des subprimes :

- \* des déséquilibres macroéconomiques : l'appétit des pays émergents conduit à une augmentation conséquente de leurs réserves de change, ce qui crée un manque de liquidité. Parallèlement, les États-Unis s'endettent de plus en plus auprès de ces pays émergents qui ont fortement confiance dans le dollar. La situation macroéconomique d'avant crise illustre parfaitement l'idée d'un paradoxe de la tranquillité développé par Minsky(1982). Un environnement vertueux avec des taux d'intérêt bas favorise le surendettement des agents économiques qui éprouvent alors des difficultés de remboursement lorsque les taux d'intérêt augmentent. Par ailleurs, ce paradoxe de la tranquillité s'ajoute à un paradoxe de la crédibilité (Borio et Shim(2007)). Ce dernier se caractérise par la lutte contre l'inflation menée par les banques centrales, ce qui conduit à une importante liquidité sur les marchés et de faibles rendements obligataires, d'où une diminution des primes de risques. Le CAE met en évidence 6 faits stylisés schématisés par le graphique 41 dont la conjonction a été à l'origine des déséquilibres :

1. Un excès de liquidité mondial : deux types de facteurs sont à l'origine de cet excès :
  - Facteurs exogènes : l'excédent commercial et les taux d'épargne des pays émergents conduisent à une augmentation des réserves de change d'où une augmentation de la liquidité mondiale.
  - Facteurs endogènes : le choc de productivité a contribué à la croissance couplée à des taux d'intérêt bas et à des innovations financières. Ce cocktail conduit à une expansion du crédit contribuant ainsi à une augmentation de la liquidité mondiale.
2. Une diminution globale de l'inflation et de sa volatilité. L'inflation aurait dû augmenter du fait de l'excès de liquidité sur les marchés mais la lutte contre l'inflation menée par les banques centrales et les positions concurrentielles des pays émergents ont contribué à une forte diminution de l'inflation.
3. Une baisse généralisée des primes de risque. L'excès de liquidité pousse les agents vers des placements plus risqués donc plus rémunérateurs tandis que les obligations, du fait d'une moindre rentabilité, voient leur demande baisser, d'où une diminution du risque et de son prix. La croissance, l'excès de confiance, la baisse de l'inflation contribuent ainsi à une diminution des primes de risques.
4. Une baisse des taux d'intérêt à long terme. Les baisses conjuguées des primes de risque, de l'inflation et de sa volatilité favorisent la baisse des taux d'intérêt à long terme. La volonté politique de diminution des déficits publics et ainsi des emprunts contribuent aussi à cette baisse des taux d'intérêt.
5. Une expansion du crédit dans un contexte non inflationniste. La baisse des taux d'intérêt et des primes de risques contribuent à une expansion du crédit d'autant plus importante que la lutte contre l'inflation et la concurrence des pays émergents ne permet pas une augmentation de l'inflation.

6. Une montée des prix des actifs. L'offre d'actifs étant limitée, l'exès de liquidité a conduit à une augmentation du prix des actifs, qui par l'effet de l'accélérateur financier, contribue à l'augmentation des crédits.

- \* des dysfonctionnements microéconomiques. L'endettement des ménages de type ninja (*no income, no job, no asset*) a été favorisée suite aux catastrophes naturelles qui ont touchées les États-Unis. Mais les taux variables et la capacité de remboursement de ce type de ménage ont contribué à une augmentation du taux de défaut et à la vente de biens en dessous du prix de marché.
- \* Des pratiques financières dites de haut risque. Les néo-keynésiens défendent l'idée d'un marché financier libéral à bout de souffle pour expliquer une partie de la crise des subprimes. Ils mettent en cause une spéculation incontrôlable et prônent le retour à une régulation par l'État. D'aucuns estiment même que les crédits hypothécaires de type subprimes n'ont fait qu'accentuer une crise déjà en route dont les causes sont à rechercher dans la dérèglementation, la mondialisation et la pression sur les revenus. Les nouvelles techniques de titrisation, qui permettent le transfert du risque de crédit, ont été fortement critiquées au lendemain de la crise notamment à cause de leur complexité. Les innovations financières contribuent fortement au risque opérationnel et indirectement au risque de modèle.

#### A.5.2.3 LES POLITIQUES OU LES POMPIERS PYROMANES

La gestion de la crise des subprimes est marquée par l'intervention (excessive ?) des responsables politiques. Alors que des plans de soutien au secteur bancaire et les renflouements de certains établissements sont entrepris par les banques centrales, les responsables politiques vont venir porter secours au secteur financier pour limiter les conséquences de la crise financière sur l'économie réelle. Ainsi, plusieurs sommets entre chefs d'État sont organisés. Le 15 novembre 2008, le sommet du G20 à Washington conduit à la mise en place d'un plan d'action visant à étendre et approfondir la réglementation des intermédiaires fi-

nanciers. Moins de 5 mois plus tard, ce même sommet se réunit à Londres pour proposer une " solution mondiale " à une " crise mondiale". Sur le plan opérationnel, cela se traduit par " multiplier par 3 les moyens dont dispose le FMI(...), soutenir une nouvelle allocation de droits de tirages spéciaux(...), permettre aux banques multilatérales de développement d'accorder au moins 100 milliards de dollars de prêts supplémentaires, soutenir à hauteur de 250 milliards de dollars le financement du commerce et affecter les moyens complémentaires résultant de ventes d'or décidées par le FMI à des financements concessionnels au profit des pays les plus pauvres". Les sommets qui suivent (Pittsburgh (25/09/2009), Toronto (27/06/2010), Séoul (12/11/2010)) conduisent à de nouvelles réflexions sur un dispositif prudentiel amélioré (Bâle III).

L'analyse que fait Cartapanis(2011) de ces différents sommets est intéressante à plusieurs égards :

- \* L'ambition affichée d'une meilleure maîtrise de l'instabilité financière et la volonté d'une régulation universelle vont surtout dans le sens d'une consolidation de la réglementation financière : " Les déclarations du G20(...) ne s'apparentent donc, ni à un nouveau Bretton Woods, ni à une refondation du capitalisme".
- \* Loin de la " nouvelle architecture financière internationale", qui supposait une autorégulation et la discipline des marchés, prônée par le FMI au sommet du G7 à Cologne(1999), le G20 s'inscrit d'un point de vue lexical dans la nécessité d'une meilleure réglementation des excès à répétition, des sous-estimations et des sous-évaluations...Il préconise une réglementation plus sévère, universelle au détriment d'une auto-régulation et de la discipline des marchés.

Ces volontés politiques, mises en évidence par les couvertures médiatiques des différents sommets, cachent en réalité des choix politiques qui ont joués dans la crise et ce, notamment aux États-Unis. Il faut remonter à 1933 et l'adoption du Glass Steagall Act. Cette loi, aussi connue sous le nom du banking Act, instaurait entre autres, une frontière étanche entre banques de dépôts et banques d'investissements. Elle aurait pu, selon Jorion(2013) empêcher que " la crise des subprimes ne dégénère en tarissement du crédit, comme ce fût le

cas en août 2007". C'était sans compter sur la pression du lobbying bancaire qui a conduit à l'abrogation du Banking Act en novembre 1999 par l'adoption du Financial Services Modernization Act. Jorion(2008) explique que les FIRE(Finance, Insurance and Real Estate) " consacrèrent 200 millions de dollars à une campagne visant à l'abrogation de la loi, auxquels il faut rajouter les 150 millions de dollars qui furent versés comme contribution aux campagnes électorales des membres des commissions bancaires".

Un autre exemple du double jeu politicien dans le monde financier concerne le Dodd-Frank Act dont les 3 objectifs visent à :

- \* Promouvoir la stabilité financière aux États-Unis ;
- \* Limiter l'aléa moral des TBTF ;
- \* Protéger les contribuables et les consommateurs des produits dérivés.

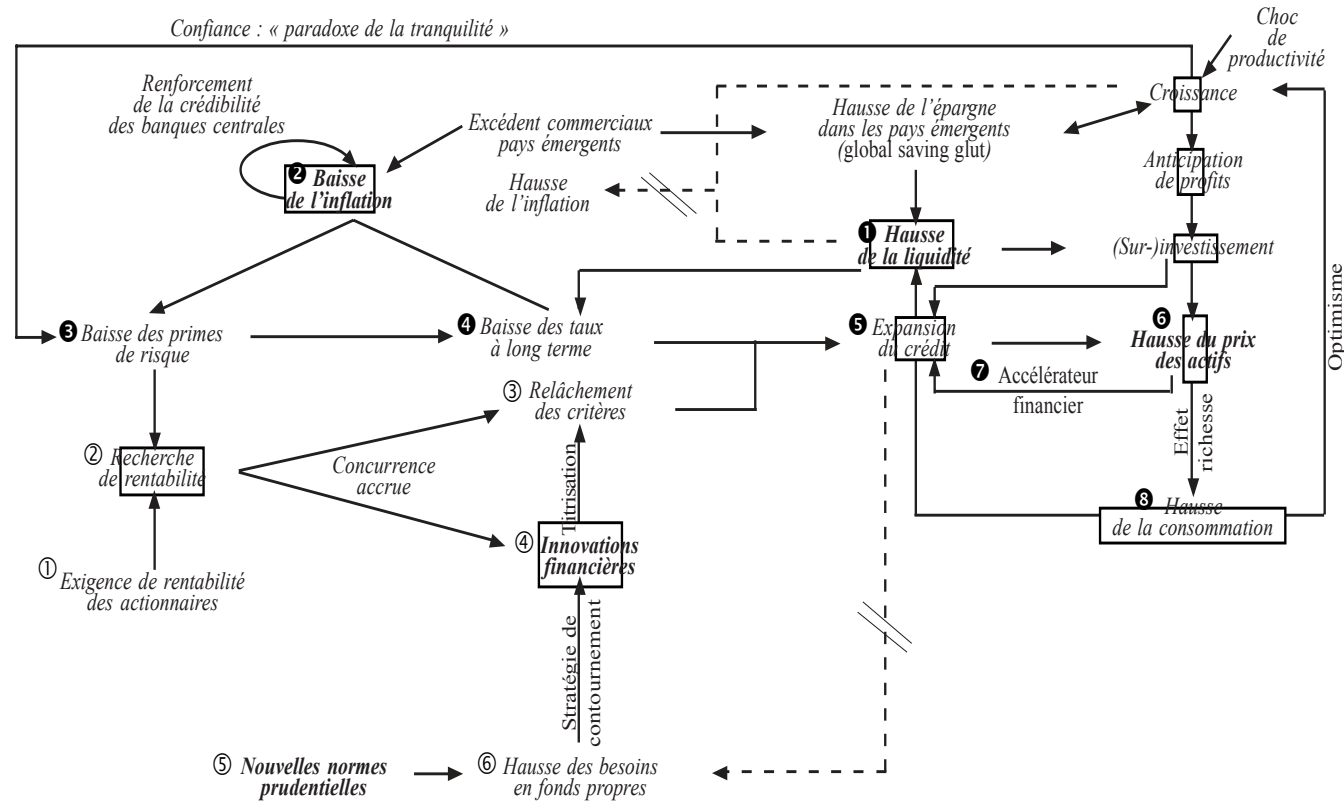
Un amendement est proposé pour limiter le secours aux TBTF en limitant la taille de ces établissements : " il they're too big to fail, they're too big " selon l'expression d'Alan Greenspan. L'amendement est rejeté. À défaut de pouvoir limiter la taille de ces établissements, 2 sénateurs (Brown et Vitter) proposent un amendement TBTF pour **T**erminating **B**ailouts for **T**axpayer **F**airness<sup>105</sup> qui met fin au statut des TBTF. L'amendement est adopté le 22/03/2013 en attendant une nouvelle loi qui l'abrogera !

L'expression du pompier pyromane est particulièrement adaptée aux responsables politiques qui tentent de concilier les pressions des lobbyistes bancaires et de leur électorat au détriment de la stabilité financière. Lorsque les responsables politiques assouplissent les conditions pour l'octroi de crédit à des ménages ninja sous la pression des lobbyistes bancaires (370 millions de dollars ont été dépensés par les principaux émetteurs des subprimes en lobbying entre 1999 et 2009), la question légitime qui se pose est la suivante : *les responsables politiques ont-ils un quelconque intérêt dans la stabilité financière?* En tous cas, ces responsables jouent sur 2 tableaux : ils votent des lois pour les prêts rapaces et encouragent la réglementation prudentielle.

---

105. Mettre fin au sauvetage pour rétablir l'équilibre du contribuable

Graphique 41 – Les facteurs macroéconomiques de la crise



Notes : Les mécanismes numérotés 1 à 8 (déséquilibres macroéconomiques) et 1 à 5 (dysfonctionnements microéconomiques) sont détaillés dans le texte. En gras, les principaux faits stylisés. Les flèches en pointillés représentent les mécanismes de stabilisation automatique qui n'ont pas fonctionné.

### A.5.3 RATIOS DE LIQUIDITÉ

#### A.5.3.1 RATIO DE LIQUIDITÉ À COURT TERME(LCR)

L'objectif de cette mesure vise à garantir que la banque possède un niveau satisfaisant d'actifs liquides dit de haute qualité et non grevés qui peuvent être directement convertis en liquidité de telle sorte à couvrir ses besoins en liquidité sur une période de 30 jours de crise. La période de crise est définie par les autorités prudentielles, elle offre un temps de réflexion et d'actions aux organes de direction et aux responsables prudentiels pour apporter des solutions. Le LCR est donné par :

$$\frac{\text{Encours d'actifs liquides de haute qualité}}{\text{Total des sorties nettes de trésoreries sur les 30 jours calendaires suivants}} \geq 100\% \quad (152)$$

Au minimum, l'encours d'actifs liquides de haute qualité doit être égal au total des sorties nettes de trésorerie sur les 30 jours suivants. Les actifs liquides de haute qualité présentent la spécificité de conserver leur liquidité même en période de crise. Ils sont directement transformables en liquidité sans perte (ou peu) de valeur. Ils doivent, dans la mesure du possible, remplir les critères d'acceptation définis par la Banque Centrale pour pouvoir obtenir directement des liquidités intra-journalières et des lignes de crédit au jour le jour. L'actif liquide de haute qualité est un actif de sécurité sur lequel se reportent les investisseurs en cas de difficultés. Les actifs liquides de haute qualité doivent satisfaire à des exigences opérationnelles :

- \* À tout moment, ces actifs doivent être disponibles et convertibles.
- \* Ils doivent être non grevés, c'est-à-dire, qu'ils ne sont pas immobilisés comme garantie ou sûreté. Néanmoins, s'ils ont été reçus dans le cadre de prise en pension ou de cession temporaire de titres, qu'ils n'ont pas été réutilisés comme sûretés et qu'ils sont légalement à la disposition de la banque, ils peuvent être considérés comme non grevés au même titre que les actifs de haute qualité donnés en garantie à la banque centrale ou à un organisme public et non utilisés.

- \* Ils ne doivent couvrir ou être associés à aucune position de négociation, constituer une sûreté ou un rehaussement de crédit dans les transactions structurées ou couvrir des frais opérationnel. Ces actifs peuvent être couverts pour leur risque de variation mais il faut que la banque tienne compte des couvertures en cas d'utilisation de ces actifs.
- \* Le gestionnaire du risque de liquidité doit contrôler l'encours d'actifs liquides et mener des analyses pour tester son accès au marché et l'efficacité de l'utilisation de ces actifs.
- \* Il est possible d'intégrer par consolidation les actifs liquides éligibles que la banque détient sur ses filiales. Il faut que ces actifs soient exclusivement à la disposition de la société mère en cas de crise.
- \* Le LCR ne tient pas compte des besoins en liquidité intra journaliers.
- \* Il faut que les banques répondent à leur besoin de liquidité dans chaque monnaie, elles doivent donc calculer un LCR par devise et surveiller les différents LCR pour tenir compte d'éventuelles asymétries.
- \* Les effets de seuils qui apparaissent lorsqu'un actif liquide éligible devient inéligible sont pris en compte par le comité qui propose de conserver l'actif dans l'encours d'actifs liquide de haute qualité pendant 30 jours à partir de la date de déclassement de l'actif.

La période de crise qui doit être couverte simule un double choc, idiosyncratique et généralisé, dont les conséquences se traduisent par :

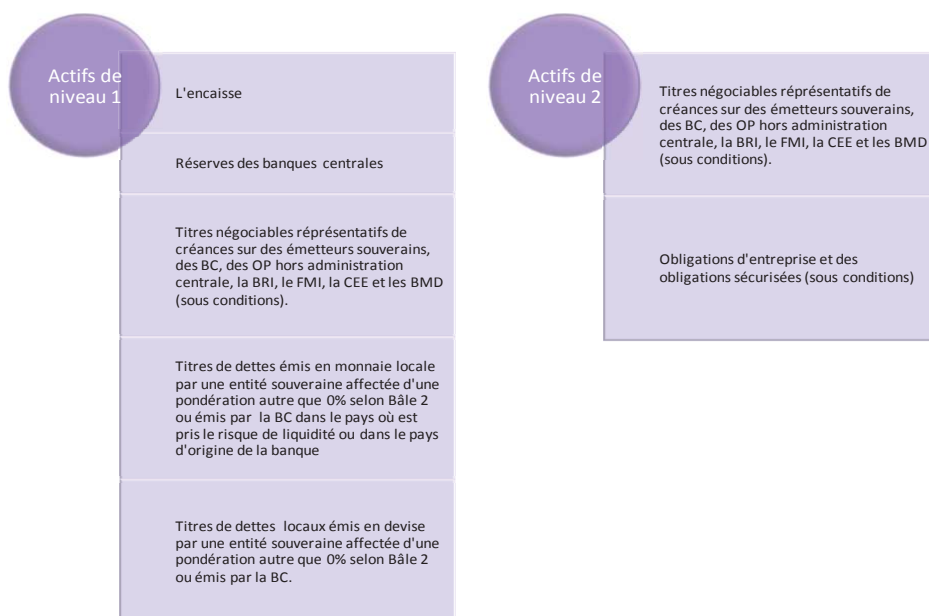
- \* Un retrait d'une partie des dépôts
- \* Une perte partielle de la capacité de financement de gros non garanti
- \* Un assèchement partiel des financements à court terme garantis par certaines sûretés et auprès de certaines contreparties.
- \* Des sorties contractuelles supplémentaires provenant d'un déclassement de la banque
- \* Une augmentation de la volatilité des marchés
- \* Des tirages non programmés sur les engagements non confirmés de crédit et de liquidité accordés mais non utilisés fournis par la banque à sa clientèle.



- \* Un besoin potentiel de rachats de ses propres titres ou d'honorer des obligations non contractuelles pour éviter un risque de réputation.

Ce niveau minimum de liquidité n'est qu'un seuil en deçà duquel aucun établissement ne peut descendre mais le comité recommande vivement une étude plus détaillée pour évaluer le niveau de liquidité au-delà du minimum le plus approprié. Les actifs liquides dits de haute qualité sont regroupés selon 2 catégories :

1. Actifs dits de niveau 1 dont la quantité est limitée. Ces actifs sont évalués à leur valeur de marché et ne subissent aucune décote pour le calcul du ratio LCR. Néanmoins, le Comité prévoit la possibilité, si les autorités l'exigent, de décotes liées à la duration, aux risques de crédit et de liquidité et autres décotes sur opérations de pension. Ces actifs se subdivisent en 5 catégories données dans le graphique 42.



Graphique 42 – Les actifs de haute qualité

Les titres de créances de la catégorie 3 ne sont acceptés que s'ils remplissent les conditions suivantes :

- \* Il faut qu'ils soient affectés d'une pondération nulle dans le cadre de Bâle II.
- \* Ils doivent être négociés sur des marchés au comptant ou de pensions importants, profonds, actifs et caractérisés par une faible concentration.
- \* Il faut apporter la preuve que ces titres sont une source fiable de liquidité même en période de crise
- \* Ils ne peuvent être émis par un établissement financier ou une entité affiliée à un établissement financier.

2. Actifs dits de niveau 2 dont la quantité est limitée à 40% de l'encours d'actifs liquide de haute qualité. Sont inclus dans cette catégorie les actifs de niveau 1 dont l'échéance est de 30 jours. Tout actif de niveau 2 subit une décote de 15% minimale sur sa valeur de marché courante. Deux types d'actifs sont inclus dans cette catégorie. La première est soumise aux mêmes conditions que les titres de créances au niveau 1 sauf pour la pondération qui doit être de 20%. Les obligations d'entreprises<sup>106</sup> et les obligations sécurisées<sup>107</sup> sont soumises aux conditions suivantes :

- \* elles ne doivent être émises par un établissement financier ou une entité affiliée à un établissement financier (obligation d'entreprise), par la banque elle-même ou une de ses entités (obligations sécurisées) ;
- \* elles doivent au minimum afficher une note AA- ;
- \* elles doivent être négociées sur des marchés au comptant et doivent constituer une source fiable de liquidité même en période de crise.

Afin de faire face aux insuffisances d'actifs liquides dans certaines juridictions, le comité présente 3 options qui ne seront applicables qu'à un nombre restreint de juridictions et de devises. Le recours à chaque option est limité :

- \* Option 1 : engagements contractuels de soutien de liquidité reçus (contre commissions) de la banque centrale d'émission. Ce sont des accords contrac-

---

106. Ce sont des titres classiques dont la note de crédit est facile à connaître par les méthodes standards.

107. Ce sont des obligations émises et détenues par une banque ou un établissement de crédit hypothécaire et soumises à un contrôle public spécifique qui protège les détenteurs.

tuels entre la banque centrale et la banque commerciale assortis d'une échéance d'au moins 30 jours, non révocable avant l'échéance et incompatibles avec une décision de crédit ex-post de la banque centrale. La banque commerciale doit verser une commission dont le montant est tel que le rendement net des actifs utilisés dans ce cadre est identique au rendement d'un portefeuille composé d'actifs de niveau 1 et 2.

- \* Option 2 : actifs liquides en devises. Si la banque démontre une pénurie d'actifs liquides libellés en monnaie locale, elle peut être autorisée à recourir à des actifs liquides dans une autre monnaie. Il faut que ce choix soit vivement justifié et qu'il n'induisse pas plus d'asymétrie de devises. Cette option est soumise à des restrictions des autorités qui doivent prendre en compte la capacité de la banque à gérer le risque de change. Le choix de la devise dans laquelle la banque désire détenir des actifs liquides doit répondre à certaines exigences, notamment sur sa capacité à être convertie rapidement et sur les risques que cette monnaie peut faire peser sur la solidité financière de la banque. Le volume maximal qui peut être déterminé par cette option est :

$$\frac{\text{Montant maximal des sorties de trésorerie nettes libellées dans une monnaie A} \\ \text{et devant être couvert par la monnaie B}}{\text{Montant total des sorties nettes libellées dans la monnaie A}}$$

- \* Option 3 : Emploi supplémentaire d'actifs de niveau 2, assortis d'une décote plus élevée. Il est possible que certains établissements ne disposent pas d'assez d'actifs liquides de niveau 1 mais que les actifs liquides de niveau 2 soient suffisants pour couvrir le risque de liquidité. Dans ce cas, et dans une limite fixée par le comité, la banque peut recourir à des actifs liquides de niveau 2 supplémentaires qui subiront une décote plus élevée que ceux inclus dans les 40%.

Au dénominateur du LCR figure le total des sorties de trésorerie nette qui désigne le total des sorties attendues en période de crise sur 30 jours. Le total des sorties est donné par le produit des soldes des différents types ou catégories de passifs et d'engagements hors-bilan et leur taux attendus d'échéance ou de

décaissement. Le total des entrées est donné par le minimum entre le produit du solde des différentes catégories de créances contractuelles par leur taux attendus de décaissement en période de crise et le montant que représente 75% des sorties attendues.

#### A.5.3.2 RATIO STRUCTUREL DE LIQUIDITÉ À LONG TERME(NSFR)

Le NSFR vise à inciter les banques à des financements de leurs actifs et de leurs activités sur le moyen et le long terme. Il traduit le montant minimum acceptable de financement stable par rapport au profil de liquidité des actifs de la banque sur une année. Il doit donc permettre un financement des actifs à long terme par un montant minimum de passif stable et ainsi réduire l'asymétrie entre les financements à court terme et les financements à long terme. Par ailleurs, ce ratio doit dissuader les banques d'utiliser des actifs de haute qualité dont l'échéance est fixée juste après la période de 30 jours pour le calcul du LCR. Le NSFR est donné par :

$$\frac{\text{Montant de financement stable disponible}}{\text{Montant de financement stable exigé}} \geq 100\% \quad (153)$$

Le financement stable représente les types et montants de financement sous forme de fonds propres ou d'autres passifs, censés constituer des ressources fiables sur une durée de 1 an en période de tension prolongée. Le financement stable disponible se compose :

- \* des fonds propres ;
- \* des actions(de préférence d'une durée supérieure ou égale à 1 an)
- \* des passifs d'une durée effective supérieure ou égale à 1 an
- \* des dépôts sans échéance et/ou des dépôts à terme d'une durée inférieure à 1 an qui seraient durablement conservés en cas de choc idiosyncratique.
- \* de la part de financement de gros de durée inférieure à un an qui peut être durablement conservée en cas de choc idiosyncratique

Les valeurs comptables des différentes composantes citées ci-dessus sont affectées à l'une des 5 catégories détaillées par le Comité. À chaque catégorie, le comité associe un coefficient de liquidité (de 0% à 100%) et le financement

stable disponible est la somme des 5 composantes pondérées par le coefficient correspondant. Le financement stable exigé est déterminé à partir d'un corps d'hypothèses prudentielles qui portent sur les profils de risque de liquidité des actifs, des expositions hors bilans et autres activités de la banque. Il est donné par la somme de la valeur des actifs détenus et financés par la banque, la valeur de chaque actif multiplié par un coefficient de financement stable exigé spécifique (RSF). Le coefficient RSF fournit une valeur approximative du montant d'un actif qui ne pourrait ni être réalisé par une vente, ni utilisé comme sûreté pour couvrir un risque de liquidité. Un coefficient RSF de 0% est attribué aux liquidités alors qu'il est de 100% pour les actifs grevés (sauf si la durée résiduelle de la charge sur ces actifs est inférieure à 1 an). Le comité répertorie dans un tableau les différents actifs qui peuvent être utilisés pour le calcul du financement stable exigé et les coefficients RSF associés. En complément de ces normes, le comité propose des outils de suivi universels. Ils doivent permettre aux responsables prudentiels d'évaluer le risque de liquidité d'une banque et le comité autorise ces responsables à exiger des indicateurs supplémentaires. Ces indicateurs sont au nombre de 5 :

1. Asymétrie des échéances contractuelles. Cet indicateur met en évidence les écarts entre entrées et sorties de liquidités contractuelles dans des tranches d'échéances données. Il quantifie les potentiels besoins de liquidité d'une banque pour chaque tranche d'échéance si toutes les sorties avaient lieu à la même date. Cet indicateur ne tient pas compte de sorties futures qui s'inscrivent dans un objectif de continuité d'exploitation et des sorties sans obligations contractuelles liées à l'image de la banque. Ainsi, le comité recommande aux établissements de mener leurs propres analyses d'asymétrie d'échéance en fixant des hypothèses plus propres à leur profil.
2. Concentration du financement. Cette mesure doit permettre d'identifier les sources de financement de gros d'une importance particulière dont

les retraits pourraient induire des problèmes de liquidité. Il revient à la banque de déterminer les différents éléments suivants :

$$\frac{\text{Passifs de financement par contrepartie significative}}{\text{Total du bilan de la banque}} \quad (154)$$

$$\frac{\text{Passifs de financement par produit ou instrument significatif}}{\text{Total du bilan de la banque}} \quad (155)$$

Liste des encours d'avoires et d'engagements par monnaie significative (156)

Une contrepartie ou un groupe de contrepartie significative doit représenter plus de 1% du bilan total de la banque. Un instrument ou produit est dit significatif si son montant agrégé représente plus de 1% du bilan total de la banque. Les banques doivent mettre à disposition des autorités la liste des encours d'avoires et d'engagements pour chaque devise significative. Cette dernière est caractérisée par un montant agrégé représentant au moins 5% du total des passifs de la banque. Il est recommandé aux banques une vigilance particulière en ce qui concerne la concentration des sources de financement qui pourrait être plus importante notamment à cause des difficultés d'identification des contreparties ou groupes de contreparties surtout en période de crise.

3. Actifs non grevés disponibles : les actifs non grevés disponibles mobilisables comme sûretés sur les marchés secondaires et/ou acceptés par la banque centrale peuvent constituer des sources de liquidités pour la banque. Certains éléments doivent être précisés comme le montant, le type, la localisation des actifs ventilés par devise significative. La principale faiblesse de cet indicateur réside dans la non prise en compte des variations potentielles des décotes et des procédures de prêts en cas de choc.
4. LCR par devise significative. Afin de mener un suivi approprié des éventuelles asymétries de devises, les banques doivent calculer un ratio de liquidité à court terme pour toute devise significative.

$$\text{LCR en devise} = \frac{\text{Encours d'actifs liquides de haute qualité dans chaque devise significative}}{\text{Total des sorties nettes de trésorerie dans chaque devise significative sur une période de 30 jours}}$$

Il n'y a pas de seuil minimal mais les autorités peuvent exiger des seuils de déclenchement en fonction de la devise considérée.

5. Outils de suivi relatifs au marché. Ces outils peuvent être utilisés par les autorités pour détecter des problèmes de liquidité :

- \* Informations sur l'ensemble du marché. L'évolution des grands marchés peut avoir un impact sur le système financier ou sur une banque particulière. Les données de marché sont donc un outil indispensable pour appréhender d'éventuels problèmes de liquidité.
- \* Informations sur le secteur financier. Une analyse du secteur financier permet de mettre en évidence les éventuelles difficultés par rapport au marché dans son ensemble.
- \* Informations propres à la banque. Des informations relatives à la banque comme le cours de ses actions par exemple permettent de mettre en évidence une perte de confiance du marché envers la banque.

## A.6 LES FAITS STYLISÉS

### A.6.1 PROPRIÉTÉS D'ÉCHELLES ET DISTRIBUTIONNELLES DES RENTABILITÉS FINANCIÈRES

La section précédente met en évidence les structures non-linéaires qui peuvent exister dans les séries financières. Les rentabilités financières comportent des caractéristiques similaires que nous précisons. Par ailleurs, de nombreux auteurs se sont attachés à mettre en évidence des propriétés d'échelles de ces séries temporelles.

#### A.6.1.1 LA DISTRIBUTION DES RENTABILITÉS

Elle n'est pas stationnaire, elle est approximativement symétrique avec une augmentation de l'asymétrie positive au fur et à mesure que l'intervalle temporel décroît. L'asymétrie gain/pertes est confirmée par Cont(2001) comme

un fait stylisé. Elle possède une queue plus épaisse au fur et à mesure que la fréquence des données augmente. La leptokurticité a été identifiée pour la première fois par Mitchell (1915, 1921), Olivier (1926), Mills (1927), Osborne(1959), Larson(1960) et Alexander(1961). Malmsten et Teräsvirta (2004) montrent que la distribution marginale des rentabilités du SP 500 est leptokurtique et qu'elle comporte plusieurs clusters de volatilité. Selon ces auteurs, la leptokurticité et la présence de grappes de volatilités est le résultat de la combinaison d'un important kurtosis et les faibles autocorrélations des séries de rentabilités absolues à la puissance  $m$  avec  $m=0.25; 0.5; 0.75; 1$ . Tseng et Li(2011) montrent que la leptokurticité semble n'avoir aucun rôle dans les grappes de volatilités. Selon Cont(2001), la distribution inconditionnelle des rentabilités suit une loi de Pareto avec une queue de taille finie comprise entre 2 et 5 pour la plupart des séries financières étudiées, ce qui exclut toutes les lois dites stables de variance infinie et la loi normale. D'après Cont(2001), la correction de la leptokurticité par des modèles adaptés montre que les séries résiduelles restent leptokurtiques même si elles ont des queues moins épaisses que pour une distribution inconditionnelle des rentabilités. La distribution des rentabilités annuelle est approximativement normale. Cont(2001) considère la gaussienité agrégée comme un fait stylisé des séries financières : plus l'échelle temporelle est grande, plus la distribution des rentabilités tend vers une loi normale, notamment en ce qui concerne la pente de la distribution, différente selon l'échelle temporelle retenue. La forte variabilité des rentabilités financières et ce, quelque soit l'échelle retenue, constitue une caractéristique particulière des séries financières (Cont(2001)). La série des rentabilités est indépendante de la série des rentabilités absolues. La distribution marginale des rentabilités absolues est exponentielle.

#### A.6.1.2 LES PROPRIÉTÉS D'ÉCHELLES DES SÉRIES FINANCIÈRES

Sewell(2011) recense différentes études qui mettent en exergue des propriétés d'échelles non-triviales. L'analyse empirique des séries financières montre que l'on peut trouver des propriétés d'échelles propres aux chroniques financières. Selon Sewell(2011), " Scaling laws describe the absolute size of returns as a



function of the time interval at which they are measured. Markets exhibit non-trivial scaling properties ." Mandelbrot(1963) a été le premier à identifier des propriétés d'échelles dans les prix du coton. Muller et al. (1990) analysent les prix de change intra journaliers et identifient des propriétés d'échelles dans la moyenne des rentabilités absolues. Mantega et Stanley(1995) montrent que l'échelle de la distribution de probabilité du SP500 peut-être décrite comme un processus non gaussien. Evertsz(1995) identifie une autosimilarité distributionnelle dans les taux de change records USD/DEM et les prix records des 30 principaux actifs allemands. Guillaume et al.(1997) trouvent des propriétés d'échelles pour plusieurs séries étudiées et pour plusieurs intervalles. Fisher et al.(1997) détectent des propriétés d'échelles multi fractals pour les rentabilités du taux de change DEM/USD. Galluccio et al.(1997) détectent des propriétés d'échelles dans les taux de changes. Gopikrishnan et al. (1999) montrent que les distributions des rentabilités possèdent la même forme fonctionnelle pour différentes échelles temporelles, confirmé par Gopikrishnan et al. (2000). Pasquini et Serva(1999) indiquent que les corrélations des volatilités des rentabilités journalières du NYSE présentent un comportement multi-échelle. Skjettorp (2000) met en évidence des propriétés d'échelles dans le marché d'actifs norvégien. Barndorff-Nielsen et Prause(2001) expliquent que les propriétés d'échelles sont largement dues à des queues semi-épaisses des distributions concernées plutôt qu'à l'échelle retenue. Cont(2001) note des asymétries dans les échelles temporelles. Gençay et al. (2001) montrent que les volatilités des taux de change suivent différentes lois d'échelles à différents horizons temporels. Andersen et al. (2001) analysent les rentabilités à hautes fréquences des taux de change DEM/USD et JPY/USD et mettent en évidence des lois d'échelles précises. Wang et Hui(2001) identifient des propriétés d'échelles pour l'indice Hang Seng. Dacorogna et al. (2001) montrent que les lois d'échelles empiriques des taux de change USD/JPY et GBP/USD sont des lois de puissances pour des intervalles temporelles de 2 minutes à 10 mois. Xu et Gençay(2003) prouvent que les rentabilités du taux de change USD/DEM sont caractérisées par des queues possédant des propriétés d'échelles. Di Matteo et al. (2003) étudient les indices de marchés d'actifs à plusieurs stades de développement et mettent en évidence plusieurs propriétés d'échelles. Johnson et al. (2003) montrent que la

fonction de distribution des probabilités des changements de prix contient des propriétés d'échelles non-triviales. Lee et Lee(2007) identifient des propriétés d'échelles dans les queues des distributions de probabilités des rentabilités de l'indice de marchés des actifs coréens et dans la fonction d'autocorrélation des rentabilités absolues. Du et Ning(2008) détectent de faibles propriétés multi fractales sur le marché des actifs de Shanghai. Qiu et al. (2008) montrent qu'il existe des propriétés d'échelles sur le marché des actifs chinois.

## A.6.2 LES FAITS STYLISÉS DES MARCHÉS FINANCIERS

Certaines caractéristiques ne sont pas liées aux distributions temporelles financières mais aux marchés financiers. Il en est ainsi du volume des échanges caractérisés par des faits stylisés. Par ailleurs, les effets calendriers constituent une particularité des marchés financiers.

### A.6.2.1 LE VOLUME DES ÉCHANGES SUR LES MARCHÉS FINANCIERS

Il s'agit d'une caractéristique des séries financières qui a fait l'objet de plusieurs publications. Jain et Joh(1988) montrent que le volume moyen échangé diffère selon les heures de la journée et les jours de la semaine. Plerou et al. (2000) expliquent que la distribution de l'activité de trading décroît comme une loi de puissance et est corrélée sur le long terme. Lobato et Velasco(2000) décèlent de la mémoire longue dans le volume des échanges du marché des actifs. Gopikrishnan et al. (2000) indiquent que la distribution du nombre de titres échangés décroît selon une loi de puissance et les corrélations temporelles font apparaître une persistance de long terme. Plerou et al. (2001) montrent que l'activité de trading a des corrélations temporelles qui décroissent asymptotiquement selon une loi de puissance. La décroissance de la distribution des volatilités selon une loi de puissance est confirmée par Plerou et al. (2004). Chordia et al. (2001) détectent un effet jour de la semaine sur les actifs du NYSE (de 1988 à 1998), l'activité de trading est relativement élevée les mardis et faible les vendredis. Statman et al. (2006) notent que le turnover des titres

sur l'ensemble du marché augmente dans les mois qui suivent les rentabilités du marché les plus fortes. Eisler et Kertész(2007) détectent de la mémoire longue dans la fréquence et dans la taille des transactions consécutives du NYSE. Qiu et al. (2009) montrent qu'il existe de l'autocorrélation de long terme dans le volume des actifs chinois et que la distribution cumulative est bien estimée par une fonction exponentielle.

#### **A.6.2.2 LES EFFETS CALENDRIERS**

Selon la définition donnée par Sewell(2011), les effets calendriers sont des anomalies cycliques dans la série des rentabilités, le cycle étant basé sur le calendrier. Les effets calendriers ont fait l'objet d'une importante littérature notamment par Thaler (1992), Siegel(1998), Lofthouse(2001), Damodaran(2003), Constantinides et al.(2003), Singal (2004), Taylor(2005), Lakonishok et Smidt(1988), Hawawini et Keim(1995), Mills et Coutts(1995), Arsad et Coutts(1997), Dzhabarov et Ziemba(2010) entre autres. Sullivan et al. (2001) mettent en évidence les dangers des effets calendriers dans les bases de données mais une grande partie de ces effets ont disparus dès qu'ils ont été découverts.

##### **A.6.2.2.1 Les effets intra journaliers**

Harris(1986) a montré que les différences significatives des jours de la semaine dans les rentabilités intra journalières s'accumulent durant les 45 premières minutes après l'ouverture des marchés. Les lundis matins, les prix chutent alors qu'ils augmentent durant les autres matins de la semaine. Il apparait aussi une augmentation des prix pour la dernière transaction de la journée. Harris(1989) met en évidence une anomalie des prix à la fin de la journée.

##### **A.6.2.2.2 Les effets week-end**

L'effet lundi ou saisonnalité du lundi apparait lorsque les actifs enregistrent des rentabilités relativement plus importantes le vendredi comparativement au lundi. Ce constat peut apparaitre surprenant dans la mesure où l'on s'attend

à des rentabilités relativement plus importantes à la réouverture des marchés le lundi matin comparativement aux autres jours de la semaine. Fields (1931) est le premier à avoir mis en évidence l'effet lundi. French (1980) a présenté un papier sur l'effet week-end. Il a testé l'hypothèse nulle selon laquelle sous l'effet lundi, la rentabilité moyenne des lundis est égale à 3 fois la rentabilité moyenne des 4 autres jours. L'hypothèse alternative suppose que les rentabilités moyennes attendues sont identiques pour chaque jour de la semaine. French(1980) a montré qu'aucune des hypothèses n'était vérifiée et que si les rentabilités moyennes des 4 autres jours sont positives, elles sont négatives pour le lundi. Connolly(1989) examine la robustesse de l'effet lundi et conclut qu'il était plus faible que ce qui était attendu, difficile à fructifier et aurait disparu en 1975. Lakonishok et Maberly(1990) tentent d'expliquer l'effet lundi en indiquant que le premier jour de la semaine est le jour où le volume des échanges est le plus faible et que la propension des investisseurs individuels à faire des transactions le lundi est la plus importante de la semaine alors que pour les institutions, cette propension est la plus faible le lundi. Ils ont aussi noté que les investisseurs individuels avaient tendance à augmenter le nombre de transactions vendues relativement au nombre de transactions achetées le lundi. Agrawal et Tandon (1994) analysent les schémas saisonniers de 80 pays et montrent qu'il existe un effet jour dans la majorité des pays mais que l'effet lundi n'est confirmé que pour 9 pays. Les saisonnalités journalières disparaissent dans les années 1980. Abraham et Ikenberry (1994) indiquent que l'effet lundi est substantiellement la conséquence de l'information révélée en avance dans les sessions d'échange particulièrement les vendredis. Selon Kamara(1997), les actifs dérivés et l'institutionnalisation des marchés d'actions affectent la saisonnalité du lundi. Wang et al. (1997) indiquent que l'effet lundi survient surtout durant les deux dernières semaines du mois. Rubinstein(2001) note que malgré l'importance de l'effet lundi, il n'est pas possible d'en tirer un quelconque profit pour ceux qui ont des coûts de transactions. Par ailleurs, l'effet week-end semble disparaître après 1987 et ne réapparaît plus. Steeley (2001) montre que l'effet week-end dans les marchés d'actions anglais disparaît dans les années 1990. Il montre aussi que les rentabilités des lundis et des vendredis sont statistiquement différentes de celles des autres jours. Se-

lon Chen et Singal(2003), les vendeurs spéculatifs sont à l'origine de l'effet lundi. Schwert(2003) note que l'effet lundi tend à disparaître ou du moins à s'atténuer depuis sa découverte en 1980. Christophe et al. (2009) examinent les ventes spéculatives journalières des actifs du Nasdaq et montrent qu'elles n'expliquent pas une portion économiquement significative de l'effet week-end dans les rentabilités. Keef et al. (2009) examinent l'effet lundi sur 50 pays et montrent qu'une faible saisonnalité lundi subsiste et qu'elle est stable sur la période 1994-2006.

### **A.6.2.2.3 Les effets intra-mensuels**

Cette catégorie inclue la présence de rentabilités positives sur les 15 premiers jours du mois et plus spécifiquement un effet changement de mois qui se traduit par de fortes rentabilités le dernier jour du mois et les trois premiers jours du mois suivant. L'article séminal d'Ariel (1987) montre que la rentabilité moyenne des actifs est positive uniquement pour les jours immédiatement après et pendant la première quinzaine du mois et non statistiquement différent de 0 pour la deuxième quinzaine. Penman (1987) explique que les informations sur les gains des entreprises qui arrivent sur le marché durant la première quinzaine de mois du deuxième au quatrième trimestre sont bonnes alors que celles qui arrivent plus tard sont susceptibles d'annoncer des mauvaises nouvelles. Lakonishok et Smidt(1988) obtiennent des résultats inconsistants concernant des taux de rentabilités plus importants durant la première quinzaine du mois. De même, Jaffe et Westerfield (1989) confirment un faible effet mensuel tel que l'a identifié Ariel et pas d'effet dernier jour du mois. Ogden (1990) a montré que la standardisation des paiements aux États-Unis à la fin du mois induit une augmentation des rentabilités d'actifs à la fin de chaque mois. Cadsby et Ratner(1992) confirment l'effet fin de mois pour les indices de marchés canadien, anglais, australien, suisse et pour l'Allemagne de l'Ouest alors qu'il n'est pas détecté pour les marchés du Japon, de l'Italie, de la France et de Hong-Kong. Kunkel et al. (2003) détectent un effet fin de mois pour 16 des 19 pays étudiés sur la période 1988-2000. Nikkinen et al.(2007) expliquent que les effets fins de mois et intra-mensuels surviennent à partir des clusters d'informations

notamment les nouvelles annonces macroéconomiques importantes qui sont systématiquement annoncées à une certaine date du mois. Selon Dzhabarov et Ziemba(2010), l'effet fin de mois existe encore mais avec peu d'anticipations. Zhao et Yan(2010) identifient un effet fin de mois sur le marché des actifs chinois.

#### **A.6.2.2.4 L'effet janvier**

L'effet fin d'année ou anomalie de janvier est à l'heure actuelle le plus important effet calendrier. Il se traduit par des rentabilités des actifs en janvier plus hautes que celles des autres mois et cela est dû à une plus petite capitalisation des actifs pendant les premiers jours du mois. Watchel(1942) identifie une augmentation des rentabilités en Décembre/Janvier. Praetz(1973) montre que les distributions des rentabilités de l'indice australien dépendent du mois. Officer(1975) relève une anomalie de janvier dans les marchés des capitaux australien. Rozeff et Kinney (1976) sont les premiers à découvrir l'effet janvier sur le NYSE. Selon Roll(1983), l'effet fin d'année est la conséquence des taxes payées qui induisent des rentabilités négatives. Keim(1983) explique que la distribution des rentabilités journalières anormale en janvier a des moyennes plus importantes que celle des 11 autres mois et la relation entre les rentabilités journalières anormales et la taille de la firme est toujours négative mais elle est beaucoup plus prononcée en janvier. Reinganum(1983) montre que les rentabilités exceptionnellement élevées des petites firmes durant les premiers jours de janvier semblent consistantes avec les taxes fiscales payées mais ces dernières ne peuvent pas expliquer tout l'effet janvier. Gultekin et Gultekin(1983) détectent un effet janvier pour la plupart des pays industrialisés étudiés. Selon Constantinides(1984), les taxes du trading n'expliquent pas l'anomalie des petites firmes mais prédisent un schéma saisonnier dans le volume des échanges qui concorde avec l'effet janvier seulement si les investisseurs sont irrationnels ou ignorent la saisonnalité des prix. Haugen et Lakonishok(1987) ont publié un livre qui présente l'effet janvier et les stratégies d'investissement pour tirer profit de cet effet, ce qui a contribué à la diminution de cette anomalie. Ritter(1988) note que le rapport achat/vente d'actions des investisseurs individuels explique à peu près

la moitié de l'effet janvier. Lakonishok et Smith(1988) ont démontré que les rentabilités sont hautement persistantes à la fin du mois de décembre. Keim(1989) relève des tendances systématiques des prix de fermeture record pour l'offre en décembre et pour la demande en janvier. Bhardwaj et Brooks(1992) précisent que l'effet janvier est principalement un phénomène de prix bas des titres plutôt qu'un effet de petites firmes. Agrawal et Tandon(1994) décèlent un effet janvier dans une grande partie des 80 marchés d'actifs. Hawawini et Keim(1995) analysent les rentabilités mensuelles moyennes des 80 indices et montrent que les rentabilités moyennes de janvier sont toujours positives et très élevées par rapport à celles des autres mois sauf pour la Corée. Ils ont noté que les indices équipondérés les plus importants qui mettent l'accent sur les plus petits actifs présentent un effet janvier plus important que les indices plus étroits ou à valeur pondérée. Sias et Starks(1997) valident l'hypothèse des taxes payées comme la cause de l'effet janvier. Poterba et Weisbenner(2001) estiment que la fin de l'année et les taxes payées par les investisseurs individuels contribuent à l'effet janvier. Selon Schwert (2003), l'effet fin d'année a diminué de moitié mais reste positif. Haug et Hirschey(2006) analysent les rentabilités des actifs américains et trouvent que les taux de rentabilités anormalement élevés des actifs de petite capitalisation subsistent durant le mois de janvier. Starks et al. (2006) s'intéressent aux obligations municipales et montrent que l'hypothèse des taxes peut expliquer l'effet janvier. Selon Rendon et Ziemba (2007), l'effet janvier subsiste encore sur le marché des contrats futurs. Moller et Zilca(2008) mettent en évidence des rentabilités anormalement hautes dans la première quinzaine de janvier et anormalement basses dans la deuxième quinzaine pour des années récentes mais l'ampleur globale de l'effet janvier semble inchangée. Selon Dzhaharov et Ziemba(2010), l'effet janvier existe encore mais s'est déplacé au mois de décembre. Sun et Tong(2010) expliquent que l'effet janvier n'est pas dû au risque en soi mais plutôt à la forte compensation pour le risque dans le mois.

#### **A.6.2.2.5 L'effet vacances**

C'est la tendance du marché à donner de bons résultats chaque jour qui pré-

cède des vacances. Fields(1934) analyse les données du DJIA et montre une augmentation le jour avant les vacances. Lakonishok et Smidt(1988) indiquent que le taux de rentabilité journalier avant les vacances est 23 fois plus grand que le taux de rentabilité journalier et l'effet vacances explique à peu près 50% de l'augmentation des prix du DJIA. Selon Ariel (1990), les veilles de vacances enregistrent des rentabilités moyennes élevées qui en moyenne représentent la rentabilité moyenne des autres jours de l'année. Ainsi, un tiers des rentabilités totales accumulées sur le marché pour la période 1963-1982 a été obtenue durant les 8 jours précédant les vacances chaque année. Cadsby et Ratner(1992) identifient un effet vacances pour les États-Unis, le Canada, le Japon, Hong-Kong, et l'Australie. Kim et Park(1994) détectent un effet vacances pour les 3 principaux indices américains et pour les indices anglais et japonais. Arsad et Coutts(1997) identifient un effet vacances pour l'indice FT 30. Brockman et Michayluk(1998) détectent un effet vacances pour les actifs du NYSE, AMEX et Nasdaq sur la période 1987-1993. Selon Vergin et McGinnis(1999), les rentabilités excessives pré-vacances entre 1987 et 1996 ont disparus pour les grandes entreprises et ont substantiellement diminuées pour les petites firmes. Meneu et Pardo(2004) confirment l'existence d'un effet vacances sur les actifs espagnols les plus échangés. Keef et Roush(2005) montrent que l'effet vacances est très important jusqu'en 1987 mais diminue fortement après 1987. McGuinness(2005) révèle un fort effet vacances sur les rentabilités des actifs de Hong-Kong. Chong et al. (2005) notent que l'effet vacances décline sur le marché anglais et de façon plus significative, sur le marché américain. Lu et Liu(2008) identifient un effet pré-vacances et post-vacances dans les rentabilités du marché des actifs chinois. Marrett et Worthington(2009) mettent en évidence un effet pré-vacances sur le marché des actifs australien. Selon Dzhabarov et Ziemba(2010), l'effet vacances existe encore et s'étend sur les 3 jours précédents les vacances mais il a fortement diminué entre les années 1990 et 2000.

#### **A.6.2.2.6 Anomalie de l'heure d'été**

Kamstra et al. (2000) montrent qu'il existe une anomalie de l'heure d'été : les week-ends d'été sont typiquement suivis de rentabilités négatives plus impor-



tantes sur les marchés, cet effet résulterait des changements dans les schémas de sommeil.

### A.6.3 MÉMOIRE LONGUE

#### A.6.3.1 LA MÉMOIRE LONGUE DES SÉRIES FINANCIÈRES : REVUE DE LITTÉRATURE

Green et Fielitz(1977) ont montré que plusieurs séries de rentabilités journalières d'actifs sont caractérisées par une dépendance de long terme. Aydogan et Booth(1988) concluent sur l'absence de preuves significatives de présence de structures à mémoire longue dans les séries financières. Lo(1991) propose une modification de la statistique R/S pour qu'elle soit robuste aux dépendances de court terme et met en évidence un comportement de mémoire longue dans les rentabilités du marché d'actifs américain. Goetzmann(1993) analyse des prix du marché des actifs sur 3 siècles et montre par la statistique R/S une dépendance de long terme dans les prix corrigés de la tendance du LSE et du NYSE. Cheung et Lai(1993) examinent la mémoire longue dans les rentabilités de l'or de la période post-Bretton-Woods et montrent que la dépendance de long terme dans ces données est instable. Ils concluent que l'omission de données correspondant à des événements politiques majeurs permet d'obtenir des résultats en faveur de la dépendance de long terme. Embrechts et al. (1994) appliquent l'analyse R/S sur plusieurs séries et montrent qu'une grande partie des chroniques retenues suivent une marche aléatoire biaisée. Nawrocki(1995) applique la statistique R/S modifiée de Lo et l'exposant de Hurst et trouve une mémoire persistante finie dans les données journalière du SP500. Moody et Wu(1996) améliorent la statistique R/S de Lo et mettent en évidence un retour à la moyenne dans les séries du taux de change DEM/USD. Peters (1996) applique l'analyse R/S et conclue que la plupart des marchés des capitaux possède une mémoire longue. Barkoulas et Baum(1996) appliquent la méthode de régression spectrale et ne détectent aucune mémoire longue pour les indices d'actifs agrégés ou sectoriels mais mettent en évidence une dépendance de long terme pour 5, une mémoire intermédiaire pour 3 et aucune mémoire pour 22 des 30 compagnies du DJIA. Willinger et al.(1999) présentent une preuve empi-

rique non conclusive d'une dépendance de long terme dans les rentabilités des actifs financiers. Huang et Yang(1999) décèlent une dépendance de long terme dans les données intra journalières des indices NYSE et Nasdaq par l'application de la statistique R/S modifiée. Nath(2001) trouve de la mémoire longue dans le marché d'actifs indien par l'analyse R/S mais suggère une statistique plus robuste. De Peretti(2003) applique 4 tests d'intégration fractionnaire dans les données journalières des prix de l'argent et conclue non seulement sur l'absence d'une dépendance de long terme dans les prix de l'argent mais aussi sur la nécessité de recourir au moins à un test de bootstrap bilatéral pour mettre en évidence une dépendance de long terme. Limam(2003) analyse les rentabilités des indices d'actifs de 14 marchés et conclue que la mémoire longue est associée à des marchés restreints. Cajueiro et Tabak(2005) présentent la dépendance de long terme dans les rentabilités financière comme un fait stylisé et leur analyse sur les actifs du marché brésilien montre que des variables spécifiques aux entreprises peuvent expliquer au moins partiellement le phénomène de dépendance de long terme. Malmsten et Teräsvirta(2004) proposent d'analyser des sous-échantillons de la série des rentabilités du SP 500. La comparaison entre les autocorrélations moyennes des sous-échantillons et l'autocorrélation de la série initiale montre que le taux de décroissance des autocorrélations de la moyenne des sous-échantillons est plus rapide que celui de la série complète, ce qui conduit à rejeter l'utilisation d'un modèle de mémoire longue pour intégrer ce fait stylisé. Une partie de la littérature s'est intéressée à déceler une structure à mémoire longue dans la volatilité, en retenant comme proxies de la volatilité les rentabilités absolues ou les rentabilités au carré. Il en est ainsi de Taylor(1986) qui est le premier à relever la lente décroissance de la FAC des rentabilités absolues comme un fait stylisé des séries financières. Dacorogna et al. (1993) modélisent la volatilité des taux de change et notent une décroissance hyperbolique des autocorrélations des rentabilités absolues. Ding et Granger (1996) identifient une dépendance de long terme dans les rentabilités de plusieurs séries financières notamment des indices (SP 500, Nikkei), des taux de change (DEM/USD), des actifs individuels (Chevron, Ajinomoto). Granger et Ding(1996) découvrent une structure à mémoire longue dans les rentabilités absolues d'un actif et expliquent que le modèle  $I(d)$  n'est pas le seul

à pouvoir produire des structures de mémoire longue. Granger et Hyung(1999) démontrent que le SP 500 est plus susceptible de comporter les propriétés de mémoire longue qu'un processus I(d). Diebold et Inoue(2001) montrent qu'une confusion est possible entre la mémoire longue et les changements de régimes. Kirman et Teyssière(2002) ont estimé le degré d'intégration fractionnaire de plusieurs taux de change et concluent sur la présence d'une composante mémoire longue dans les données. Selon Giraitis et al. (2003), les rentabilités absolues du SP 500 peuvent comporter de la mémoire longue non pas parce qu'elles sont issues d'un processus I(d) mais à cause de la présence de ruptures non prises en compte. Deux études en particulier ont tenté de mettre en évidence une composante de mémoire longue dans les volumes des transactions. Il en est ainsi de Lobato et Velasco(2000) qui analysent le volume échangé par 30 actifs de l'indice DJIA et qui concluent sur la présence d'une composante mémoire longue. Eisler et Kertész(2007) identifient une dépendance de long terme à la fois dans la fréquence et dans la taille des transactions consécutives du NYSE.

#### A.6.3.2 COMMENT PRENDRE EN COMPTE LA DÉPENDANCE DE LONG TERME ?

Dans l'analyse d'une série temporelle stationnaire, la composante de long terme peut être appréhendée de différentes manières. Le recours aux processus ARMA de Box et Jenkins pour prendre en compte la dépendance de long terme peut être une solution mais l'augmentation rapide du nombre de retards des polynômes AR et MA peut poser problème. Les premiers modèles proposés par Mandelbrot et Van Ness(1968) et Mandelbrot(1971) sont les modèles fractionnaires qui permettent de prendre en compte le comportement de mémoire longue à partir d'un paramètre  $d$  qui ne prend pas forcément de valeurs entières. Un processus est dit intégré d'ordre  $d$  ou I(d) si :

$$(1 - L)^d X_t = u_t \quad (157)$$

Où  $L$  est l'opérateur retard et  $u_t$ , un processus stationnaire et ergodique dont la densité spectrale est finie pour toutes ses fréquences. Baillie (1996) définit différentes classes de processus lorsque  $u_t$  est stationnaire :

- \* Pour  $0 < d < 0.5$ , le processus  $X_t$  est dit persistant au sens de la FAC puisque ses autocorrélations sont positives et elles décroissent à un taux hyperbolique.
- \* Pour  $-0.5 < d < 0$ , la somme des autocorrélations convergent vers une constante. Par conséquent, le processus  $X_t$  est dit anti persistant et il possède une mémoire courte au sens de la FAC car ses autocorrélations sont négatives et décroissent à un taux hyperbolique.

Ces modèles ne prennent en compte que la dynamique de long terme. Ainsi, Granger et Joyeux(1980) et Hosking(1981) proposent les modèles ARFIMA (p,d,q) qui permettent de prendre en compte non seulement la dynamique de long terme à partir du paramètre fractionnaire mais aussi la dynamique de court terme par les composantes moyenne mobile et autorégressive. Se présentant comme une extension des processus ARIMA, les processus ARFIMA ont l'avantage d'être facilement applicable en économie. La spécificité de ces processus réside dans le choix d'un paramètre d caractérisant le nombre de racines unitaires existant dans la série ( $d = 1$  pour une racine unitaire). L'apport majeur des processus ARFIMA concerne le large éventail des valeurs que peut prendre le paramètre d puisqu'il peut être sélectionné dans l'ensemble des réels. Cette contribution est essentielle car la prise en compte des cas intermédiaires c'est-à-dire la possibilité d'un processus de différenciation d fractionnaire, permet de caractériser les processus à mémoire longue. Un modèle ARFIMA(p,d,q) se présente comme suit :

$$\phi(L)(1-L)^d(X_t - \mu) = \theta(L)\epsilon_t \quad (158)$$

Où d désigne le paramètre d'intégration fractionnaire et  $\phi(L), \theta(L)$  sont les polynômes d'opérateurs dont les racines se situent à l'extérieur du cercle unitaire,  $\epsilon_t$  étant un bruit blanc. Dans ce modèle, la série  $X_t$  est dite intégrée d'ordre d et ses coefficients d'autocorrélation décroissent très lentement à un taux hyperbolique. Face à la non stationnarité des séries financières, 2 solutions sont envisageables : soit une modélisation par un processus ARIMA(p,d,q) ; soit une stationnarisation de la chronique et la sélection d'un processus ARMA(p,q). Le

processus ARFIMA(0,d,0) est le plus simple parmi les processus ARFIMA, il s'écrit :

$$(1 - B)^d X_t = \mu_t \quad (159)$$

où  $\mu_t$  est un bruit blanc. Le développement binomial permet de réécrire ce processus :

$$\nabla^d = (1 - B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j B^j \quad (160)$$

$$\text{Avec } \Pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 < k \leq j} \frac{k-1-d}{k}$$

Les caractéristiques de ce processus sont les suivantes :

- \* Lorsque  $d < 0,5$  ,  $X_t$  est un processus stationnaire et présente une représentation moyenne mobile infinie.
- \* Lorsque  $d > -0,5$  ,  $X_t$  est un processus inversible et présente une représentation autorégressive infinie
- \* Lorsque  $-0,5 < d < 0,5$  et  $\mu_t$  est de variance unitaire,  $X_t$  est un processus inversible et stationnaire.

Une généralisation des modèles précédents peut être donnée par le filtre de Gegenbauer dont l'écriture est la suivante :  $(I - 2uB + B^2)^d$  avec  $|u| < 1$ . L'intérêt de ce filtre est la prise en compte des explosions de la densité spectrale en une fréquence non nulle ( $(\cos^{-1}(u))$ ). La prise en compte de cette fréquence par le filtre de Gegenbauer permet de filtrer la pseudo-saisonnalité liée à la dépendance de long terme des prix (Guégan 2007). À partir de ce filtre, il est alors possible de fournir un modèle paramétrique permettant de capter le comportement de mémoire longue d'une série stationnaire, conduisant ainsi à des résidus stationnaires et non autocorrélés. Le modèle retenu est alors le suivant :

$$\phi(L) \prod_{i=1}^k (I - 2u_i B + B^2)^{d_i} X(t) = \theta(L) \epsilon(t) \quad (161)$$

Avec  $k$  un nombre entier fini,  $0 < d_i < 1/2$ ,  $|u_i| < 1$  et  $\epsilon(t)$  est un bruit blanc de variance finie. Il s'agit d'un modèle GARMA à  $k$  facteurs. Cette présentation des différents concepts de longue mémoire s'applique non seulement à la présence d'un phénomène de persistance dans la moyenne mais aussi dans la variance. Les encadrés 6 et 7 présentent deux modèles qui prennent en compte la dépendance de long terme dans la variance.

### A.6.3.3 LES TESTS DE DÉTECTION DES STRUCTURES À MÉMOIRE LONGUE

De nombreux tests ont été développés pour mettre en évidence la présence de structures à mémoire longue dans les séries temporelles. Il est à reconnaître l'apport important de Hurst(1951), Lo(1991) et Cochrane(1988) entre autres. Nous donnons une présentation succincte des tests de détections proposé par Hurst(1951), Cochrane(1988), Lo(1991) et Shimotsu(2006).

#### A.6.3.3.1 Rescaled range

L'analyse R/S introduite par Hurst(1951) est le ratio entre l'étendue d'une série et son écart-type. Elle permet de détecter la présence de mémoire longue. L'avantage de cette statistique réside dans sa capacité à classer grâce à l'exposant de Hurst les séries temporelles en fonction de la nature de leur mémoire. La statistique Rescaled Range notée aussi  $Q_m$  est l'étendue  $R_n$  des sommes partielles des écarts de la série à sa moyenne divisé par son écart type  $S_n$  :

$$Q_m = \frac{R_n}{S_n} = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n)}{(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n)^2)^{1/2}} \quad (162)$$

Le numérateur est la différence entre le maximum des  $k$  sommes partielles des  $k$  écarts de  $x_j$  par rapport à sa moyenne et le minimum des  $k$  sommes partielles des  $k$  écarts de  $x_j$  par rapport à sa moyenne. Le numérateur est toujours positif et la statistique  $Q_m$  est toujours positive. Cette statistique est asymptotiquement égale à  $H \sim \frac{\log Q_T}{\log T}$  où  $H$  désigne l'exposant de Hurst. Nous pouvons alors démontrer qu'il existe un lien entre l'exposant de Hurst et le paramètre  $d$  de diffusion :  $2H - 2 = 2d - 1d = H - 0,5$ . Ce qui nous permet d'établir une classification des séries temporelles :

- Si  $0 < d < 0,5$  : le processus ARFIMA est un processus stationnaire à mémoire longue, persistant.
- Si  $d = 0$  le processus ARFIMA se réduit au processus ARMA standard et ne présente aucune structure de dépendance à long terme.
- Si  $-0,5 < d < 0$  : le processus est anti persistant.

Mandelbrot(1975) fournit une classification à partir de l'exposant de Hurst :

- La série est indépendante si  $H = 0.5$ .
- La série est extraite d'un processus ARMA si  $H = 0.5$  et la constante différente du cas précédent.
- Elle est persistante si  $H$  est différent de 0.5 et peut conduire à 2 cas de figure :
  - \*  $0 \leq H \leq 0.5$  : la série est anti-persistante avec un phénomène de " mean-reversion ."
  - \*  $0.5 \leq H \leq 1$ , la série est positivement persistante.

Ces critères sont soumis à des conditions de stationnarité des séries étudiées.

#### A.6.3.3.2 Le test des rapports de variances

Introduit par Cochrane(1988), Lo et Mc Kinlay(1988), le test du rapport des variances part de l'idée selon laquelle si une variable suit une marche aléatoire, la variance de la variable en différences premières est une fonction linéaire de la période d'observations. Autrement dit la variance des différences T-ièmes est égale à T fois la variance des différences premières. En partant de  $X_t = \mu + X_{t-1} + \epsilon_t$ , on obtient alors :

- l'estimateur centré non biaisé de la variance des différences premières de  $X_t$  :

$$\tilde{\sigma}_a^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (\Delta X_k - \hat{\mu})^2 \quad (163)$$

Où  $\hat{\mu}$  désigne l'estimateur de la moyenne des différences premières.

- l'estimateur centré non biaisé de la variance des différences premières de  $X_t$  :

$$\tilde{\sigma}_b^2 = \frac{1}{\tau(T-\tau+1)(1-\frac{\tau}{T})} \sum_{k=1}^T (X_k - X_{k-\tau} - \tau\hat{\mu})^2 \quad (164)$$

- Il est alors possible de construire la statistique suivante :

$$M_R(\tau) = \frac{\tilde{\sigma}_b^2(\tau)}{\tilde{\sigma}_a^2} - 1 \sim \frac{2}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} (\tau-j)\hat{\rho}_j \quad (165)$$

où  $\tau$  désigne le retard. Ce test est soumis à 2 hypothèses fondamentales :

- Le caractère i.i.d. des résidus ;
- Non autocorrélation des résidus.

Cependant selon l'évolution de la variance au cours du temps, constante ou hétéroscédastique, il existe 2 statistiques possibles. Nous n'exposons ci-dessous que le cas d'une marche aléatoire hétéroscédastique puisque la marche aléatoire homoscedastique n'est pas plausible pour les séries financières. Donc dans le cas d'une marche aléatoire hétéroscédastique, nous devons calculer la statistique suivante :

$$z_2(\tau) = (\widehat{V}(\tau))^{-\frac{1}{2}} M_R(\tau) \equiv N(0, 1) \quad (166)$$

$$\text{Avec } \widehat{V}(\tau) = \sum_{j=1}^{\tau-1} \left(\frac{2(\tau-j)}{\tau}\right)^2 \widehat{\delta}_j \text{ et } \widehat{\delta}_j = \frac{\sum_{k=j+1}^T (\Delta X_k - \widehat{\mu})^2 (\Delta X_{k-j} - \widehat{\mu})^2}{[\sum_{k=1}^T (\Delta X_k - \widehat{\mu})^2]^2}$$

#### A.6.3.3.3 Analyse R/S modifiée et exposant de Hurst.

Face aux inconvénients présentés par l'analyse R/S mis en évidence par Green et Fielitz(1977) (sa dépendance de court terme et sa distribution statistique inconnue), Lo(1991) propose une statistique appelée R/S modifiée qui présente l'avantage d'être invariante sous une classe générale de processus à mémoire courte. La statistique R/S pour une série i.i.d. possède des propriétés asymptotiques :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} R/S(T) = V \quad (167)$$

Où  $V$  est l'étendue standardisée du mouvement brownien. Pour un processus avec une dépendance de court terme de type AR(1), les propriétés asymptotiques sont :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} R/S(T) = \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} \quad (168)$$

Avec  $\rho$  le coefficient d'autocorrélation. Pour corriger le biais de la statistique R/S, Lo(1991) propose :

$$Q_{mT} = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n)}{S_n(q)} \quad (169)$$

$$\text{Avec } S_n^2(q) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x}_n)^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \omega_j(q) [\sum_{i=j+1}^n (x_j - \bar{x}_n)(x_{i-j} - \bar{x}_n)]$$

$$\text{Avec } \omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1} \text{ et } q < n.$$



Le choix de  $q$  c'est-à-dire des décalages nécessaires a été étudié par Andrews(1991) qui fournit une règle dans le cas d'un AR(1) :

$q = \text{int}[k_n]$  avec  $k_n = \left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2}\right)^{\frac{2}{3}}$  où  $\hat{\rho}$  est l'estimateur du coefficient d'autocorrélation d'ordre 1. Les poids, dans ce cas, deviennent :  $\omega_j(q) = 1 - \left|\frac{j}{k_n}\right|$ . À partir du théorème de Lo, il est possible de trouver la distribution statistique de  $Q_{mt}$ . Il est possible de tester l'hypothèse nulle d'indépendance contre une hypothèse alternative de dépendance de long terme. Le concept de dépendance de long terme peut être relié à celui de mean-reversion. Summers(1986) développe un modèle de 'mean-reversion' selon lequel les rentabilités à long terme sont fortement autocorrélées alors que les rentabilités à court terme sont faiblement autocorrélées. L'analyse menée par Fama et French(1988) tend à confirmer ce phénomène puisqu'ils montrent que 25% à 40% des cours pour des horizons temporels de 3 à 5 ans sont expliqués par les cours passés. Le modèle de mean-reversion montre que la dépendance doit être analysée à court et long terme.

#### **A.6.3.3.4 Test de Shimotsu(2006)**

La mise en évidence par Diebold et Inoue(2001), Gouriéroux et Jasiak(2001), Granger et Hyung(2004), Perron et Qu(2006) entre autres de séries temporelles caractérisées par des changements structurels et pouvant exhiber une dynamique de mémoire longue dite fallacieuse a conduit de nombreux auteurs à développer des tests permettant de mettre en évidence les comportements fallacieux de mémoire longue. Shimotsu(2006) propose 2 tests relativement simples basés sur les propriétés d'un processus intégré d'ordre  $d$ . Le premier test repose sur l'idée selon laquelle si une série temporelle est intégrée d'ordre  $d$  alors les sous échantillons de cette série temporelle seront aussi intégrés d'ordre  $d$ . Le deuxième test est basé sur la propriété selon laquelle une série temporelle intégrée d'ordre  $d$  est intégrée d'ordre 0 lorsqu'elle est différenciée  $d$  fois.

Dans le cadre de ces tests, Shimotsu(2006) retient l'estimateur local Whittle, basé sur une approche semi-paramétrique gaussienne et l'estimateur exact local Whittle pour estimer le paramètre fractionnaire. Ces approches, utilisées respectivement par Robinson(1995) et Shimotsu et Phillips(2005) sont caractérisées par une simplicité computationnelle et une invariance de leur distribution limite par rapport à  $d$ . Nous

commençons par une description de l'estimation locale Whittle avant de décrire les deux tests de Shimotsu(2006).

#### A.6.3.3.4.1 *L'estimation locale Whittle du paramètre d*

Soit un processus  $X_t$  dont la densité spectrale est décrite par :

$$f(\lambda) \sim G\lambda^{-2d}, \lambda \rightarrow 0^+ \quad (170)$$

$d \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ ,  $G \in [0, \infty)$ ,  $X_t$  est un processus intégré fractionnaire défini par :

$$(1 - L)^d X_t = \mu_t \quad (171)$$

Où  $\mu_t$  est un processus dont la covariance est stationnaire et la densité spectrale bornée,  $L$  est un opérateur retard. Il est alors possible de définir la transformée discrète de Fourier et le périodogramme de  $X_t$ , évalué à ses valeurs fondamentales :

$$W_x(\lambda_j) = (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n X_t e^{it\lambda_j} \quad (172)$$

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}, j = 1, \dots, n \quad (173)$$

$$I_x(\lambda_j) = |W_x(\lambda_j)|^2 \quad (174)$$

Künsch(1987) et Robinson(2005) développent l'estimation locale Whittle qui se base sur la fonction gaussienne définie pour  $d$  et  $G$  :

$$Q_m(G, d) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [\log(G\lambda_j^{-2d}) + \frac{\lambda_j^{2d}}{GI_x(\lambda_j)}] \quad (175)$$

Où  $m$  est un entier inférieur à  $n$ . Il s'agit de minimiser la fonction  $Q_m$  en fonction de  $G$  et  $d$  avec  $G \in (0, \infty)$  et  $d \in (\Delta_1, \Delta_2)$ ,  $-\frac{1}{2} < \Delta_1 < \Delta_2 < \infty$ . Robinson(2005) montre que sous certaines conditions, on a :

$$\sqrt{m}(\hat{d} - d_0) \xrightarrow{t} N(0, \frac{1}{4}) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (176)$$

#### A.6.3.3.4.2 *Test basé sur les sous-échantillons*

Soient  $b$  sous-échantillons de la série temporelle  $X_t$ , composé chacun de  $\frac{n}{b}$  observations avec  $b$  et  $\frac{n}{b}$ , deux entiers. Soient  $\hat{d}^{(a)}$ ,  $a = 1, \dots, b$ , l'estimateur local Whittle

de  $d$  pour le  $a$ ème sous échantillon. Le choix de  $m$ , le nombre de cordonnées du périodogramme utilisées dans la fonction objective est très important car il détermine la largeur de la bande de fréquence utilisée pour estimer  $d$ . Shimotsu(2006) recommande de choisir le même nombre d'informations dans le domaine des fréquences pour les sous échantillons et pour l'échantillon total. Pour le  $a$ ème sous échantillon, on peut alors définir :

$$\tilde{d}^{(a)} = \arg \min_{d \in [\Delta_1, \Delta_2]} R^{(a)}(d)$$

Avec :

$$R^{(a)}(d) = \log \widehat{G}^{(a)}(d) - 2d \frac{b}{m} \sum_{j=1}^{\frac{m}{b}} \log \tilde{\lambda}_j \quad (178)$$

$$\widehat{G}^{(a)}(d) = \frac{b}{m} \sum_{j=1}^{\frac{m}{b}} \tilde{\lambda}_j^{2d} I_x^{(a)}(\tilde{\lambda}_j) \quad (179)$$

$$I_x^{(a)}(\tilde{\lambda}_j) = (2\pi m)^{-1} \left| \sum_{t=\frac{(a-1)n}{b+1}}^{\frac{an}{b}} X_t e^{it\tilde{\lambda}_j} \right|^2 \quad (180)$$

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{b} \quad j = 1, \dots, \frac{n}{b} \quad (181)$$

Le test se décompose en un examen visuel et en un test statistique. L'examen visuel consiste à comparer la moyenne des paramètres  $d$  estimés sur les sous échantillons et le paramètre  $d$  estimé sur l'échantillon total. Pour un processus à mémoire longue, on obtient une moyenne des  $d$  estimés sur les sous échantillons très proche du paramètre  $d$  estimé sur tout l'échantillon. Cette propriété n'est pas toujours vérifiée pour des processus caractérisés par des structures à mémoire longue fallacieuses. Robinson(2005) a montré, sous certaines hypothèses que :

$$\sqrt{m}(\bar{d} - d_0) \xrightarrow{t} N\left(0, \frac{1}{4}\right) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (182)$$

Où  $\bar{d}$  et  $d_0$  représentent respectivement la moyenne des paramètres fractionnaires sur les sous-échantillons et la vraie valeur du paramètre  $d$  sur tout l'échantillon. Ce résultat suppose que les variances limites de  $\bar{d}$  et  $\widehat{d}$  sont identiques mais les simulations menées par Shimotsu(2006) montrent que pour des échantillons finis,  $\bar{d}$  a une variance plus grande que  $\widehat{d}$ . Shimotsu(2006) propose alors un test formel :

$$H_0 : d_0 = d_{0,1} = \dots = d_{0,b}$$

Soient  $\widehat{d}_b$  un vecteur de longueur  $(b + 1)$  et la matrice  $A$  de dimension  $(b \times (b + 1))$ , définis comme suit :

$$\widehat{d}_b = \begin{pmatrix} \widehat{d}^{(1)} - d_0 \\ \widehat{d}^{(2)} - d_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widehat{d}^{(b)} - d_0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse nulle, on a :  $\sqrt{m}\widehat{d}_b = Z_n + \text{biais}(m)$  avec  $Z_n \xrightarrow[t]{} N(0, \frac{1}{4}\Omega)$  et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & L'_b \\ Lb & bI_b \end{pmatrix}$$

Où  $I_b$  est une matrice identité  $(b \times b)$ ,  $Lb$  est un vecteur unitaire  $(b \times 1)$  et  $A\Omega A' = bI_b - LbL'_b$ . La statistique de Wald sous  $H_0$  est donnée par :

$$W = 4mA\widehat{d}_b(A\Omega A')^{-1}(A\widehat{d}_b)' \equiv \chi^2(b - 1) \quad (183)$$

où  $(A\Omega A')^{-1}$  est l'inverse de  $(A\Omega A')$ . Hurvich et Chen(2000) montrent que la variance d'échantillon fini de l'estimateur locale Whittle est plus grande que  $\frac{1}{4m}$  et le test de Wald basé sur la variance asymptotique tend à rejeter plus souvent l'hypothèse nulle. Ils proposent donc de remplacer  $m$  dans la variance estimée par un nombre  $C_m$  défini par :

$$C_m = \sum_{j=1}^m v_j^2 \quad (184)$$

Où  $v_j = \log \lambda_j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \lambda_j = \log j - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log j$

Dans la mesure où  $\frac{C_m}{m} \rightarrow 1$  quand  $m \rightarrow \infty$ , cette modification n'altère pas la distribution asymptotique du test statistique. On peut alors définir une statistique de Wald modifiée :

$$W_c = 4m \left( \left( \frac{C_m}{b} \right) \left( \frac{m}{b} \right) \right) \widehat{A} d_b (A \Omega A')^{-1} (\widehat{A} d_b) \equiv \chi^2(n-1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (185)$$

#### A.6.3.3.4.3 Test basé sur les différences

La procédure de test est basée sur deux étapes :

- centrer les données
  
- Appliquer les tests de Phillips et Perron et de KPSS à la série différenciée d fois.

Cette procédure nécessite cependant quelques corrections. Soit :

$$X_t - \mu_0 = (1 - L)^{-d_0} \mu_t 1_{\{t \geq 1\}} \quad (186)$$

Où  $\mu_0$  désigne la moyenne de la série temporelle. Si  $d_0 < 1$  alors  $\mu_0$  est donnée par la moyenne arithmétique calculée sur la série temporelle. Si  $d_0 \geq 1$ , le choix de la moyenne arithmétique introduit une erreur non négligeable. Shimotsu(2006) recommande alors de retenir  $X_1$  comme un estimé de  $\mu_0$  et d'utiliser une combinaison linéaire de  $\bar{X}$  et de  $X_1$ . Il suffit alors de calculer les différences dièmes de la série temporelle et d'appliquer les tests de KPSS et de Phillips et Perron.

#### A.6.4 LES MODÈLES GARCH À MÉMOIRE LONGUE

##### ▷ ENCADRÉ 6 : LE MODÈLE FIGARCH

La question de la persistance des chocs dans les séries économiques et financières a fait l'objet d'une importante littérature et il est rapidement apparu que la distinction entre les processus intégrés d'ordre 0 et les processus intégrés d'ordre 1 était trop restrictive. Comme nous l'avons vu précédemment, la classe des processus à longue mémoire fractionnaire intégrés sont caractérisés par une propagation des chocs dans la moyenne à un taux hyperbolique très lent. La volonté de modéliser ce comportement de long terme dans la variance a conduit Engle et Bollerslev (1986) à proposer les processus GARCH intégrés. Dans l'article original de Baillie, Bollerslev et Mikkelsen(1996), les modèles FIGARCH se présentent comme une amélioration des modèles IGARCH présentés pour la première fois par Engle et Bollerslev(1986), leur objectif vise à développer une classe de processus plus flexibles pour la variance conditionnelle capables d'expliquer et de représenter les dépendances temporelles existantes dans la volatilité des marchés financiers. La construction des processus FIGARCH est établie à partir de la spécification proposée par Bollerslev(1986) des processus GARCH(p,q). Ces derniers autorisent une structure des retards plus flexibles par rapport aux processus ARCH :

$$\sigma_t^2 = w + \alpha(L)\epsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (187)$$

Où  $L$  désigne l'opérateur retard. Pour la stabilité et la stationnarité en covariance du processus  $\epsilon_t$ , toutes les racines du polynôme  $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$  et  $[1 - \beta(L)]$  doivent se trouver à l'extérieur du cercle unité. Cette dernière condition suppose implicitement que l'impact des innovations passées au carré sur la variance conditionnelle décroît à un taux exponentiel. Baillie et al.(1996) proposent alors de réécrire la spécification GARCH sous la forme d'un processus ARMA(m,p) en  $\epsilon_t^2$  :

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\epsilon_t^2 = w + [1 - \beta(L)]v_t \quad (188)$$

Où  $m \equiv \max\{p, q\}$  et  $v_t \equiv \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$ , de moyenne nulle et non autocorrélé. Cette expression permet alors de définir les processus IGARCH caractérisés par la présence d'une racine unitaire dans le polynôme  $1 - \alpha(L) - \beta(L)$ . La spécification IGARCH(p,q) s'écrit alors :

$$\phi(L)(1 - L)\epsilon_t^2 = w + [1 + \beta(L)]v_t \quad (189)$$

Où  $\phi(L) \equiv [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$  est d'ordre  $m - 1$ . Les processus FIGARCH sont obtenus en remplaçant simplement l'opérateur de différence première de l'équation précédente par un opérateur de différence fractionnaire :

$$\phi(L)(1 - L)^d \epsilon_t^2 = w + [1 + \phi(L)]v_t \quad (190)$$

▷ ENCADRÉ 6 : LE MODÈLE FIGARCH(2)

Où  $0 < d < 1$  et toutes les racines de  $\phi(L)$  et  $1 + \beta(L)$  sont à l'extérieur du cercle unité. Il existe un certain nombre de caractéristiques propres à ces modèles qui doivent être présentées. Pour cela, nous donnons une autre représentation du modèle FIGARCH :

$$[1 + \beta(L)]\sigma_t^2 = w + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1 - L)^d]\epsilon_t^2 \quad (191)$$

Ce qui nous permet de donner une représentation de la variance conditionnelle de  $\epsilon_t$  :

$$\sigma_t^2 = w[1 - \beta(1)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(1)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d\}\epsilon_t^2 \equiv w[1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(L)\epsilon_t^2 \quad (192)$$

Où  $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 \dots$ . La spécification précédente de la variance conditionnelle est soumise à une condition de positivité des coefficients. Les critères qui assurent la condition de positivité proposés par Cao et Nelson(1992) dans le cas d'une spécification GARCH ne sont pas clairement définis. Par conséquent, Baillie et al.(1996) établissent un cas par cas pour les modèles FIGARCH :

- Pour  $0 < d \leq 1$ , le terme  $w > 0$  a la même interprétation que pour le modèle IGARCH. Par conséquent, le second moment de la distribution inconditionnelle de  $\epsilon_t$  est infini et le processus FIGARCH n'est manifestement pas faiblement stationnaire (il partage ainsi une des caractéristiques des processus IGARCH).
- Nelson(1990) a montré pour le cas du IGARCH(1,1), étendu aux modèles IGARCH(p,q) par Bougerol et Picard(1992), que ces modèles sont strictement stationnaires et ergodiques pour  $0 \leq d \leq 1$ . On peut donc étendre ces résultats aux modèles FIGARCH(p,d,q) dans la mesure où les coefficients de la représentation ARCH du modèle FIGARCH peuvent être dominés par les coefficients correspondants du modèle IGARCH.

Si nous retenons la définition de Bollerslev et Engle(1993) du phénomène de persistance, il est possible de caractériser le comportement de long terme via les coefficients de réponse impulsionnelle. Il y a d'importantes différences dans la dissipation du choc pour  $d = 0$  et  $0 < d < 1$ . Dans le cas du GARCH, les chocs disparaissent à un taux exponentiel alors que pour le FIGARCH, les chocs disparaissent à un taux de décroissance hyperbolique. Donc même si la fonction de réponse impulsionnelle converge vers 0 pour  $0 \leq d < 1$ , le paramètre de différenciation fractionnaire fournit d'importantes informations en ce qui concerne les modèles et la vitesse de propagation des chocs sur le processus de volatilité. Par opposition, pour  $d = 1$ , la somme des poids de réponse impulsionnelle converge vers une constante non nulle. Ainsi, l'impact des chocs sur la variance conditionnelle persiste indéfiniment. Enfin pour  $d > 1$ , le processus possède une variance conditionnelle explosive, irréaliste.

▷ ENCADRÉ 7 : LE MODÈLE FIAPARCH

La classe des processus FIAPARCH a été présentée pour la première fois par Tse en 1998 via une application au taux de change Yen-Dollar. Ces modèles constituent une extension des modèles APARCH, développés pour la première fois par Ding, Granger et Engle en 1993. Les modèles APARCH sont étendus aux processus fractionnaires intégrés développés pour la première fois par Baillie et al.(1996). Ils sont nés d'un certain nombre de constats qu'il était indispensable de prendre en compte via un modèle adéquat. Un des premiers constats empirique montrait que le recours aux rentabilités absolues plutôt qu'aux rentabilités brutes faisait apparaître un phénomène de persistance assez important dans les données. Ding, Granger et Engle(1993) ont alors proposé de faire varier l'exposant de la rentabilité absolue afin de déterminer les coefficients d'autocorrélation pour différents retards allant jusqu'à 100. Ils ont pu montrer que le phénomène de persistance était très important lorsque l'exposant des rentabilités absolues était proche de 1. Ce phénomène de persistance, assez particulier, est lié à la nature des séries prises en compte. Les séries financières exhibent un comportement de mémoire longue assez particulier dans la mesure où ces séries font apparaître des clusters de volatilité distincts selon que le choc ait été provoqué par une bonne nouvelle ou par une mauvaise nouvelle. La volatilité des séries financières réagit asymétriquement et positivement contre les chocs négatifs. À coté de la spécification GARCH(p,q) proposée par Bollerslev(1986), Taylor(1986) suggère de retenir les rentabilités absolues au lieu des rentabilités brutes et Schwert(1989) propose de retenir un modèle GARCH particulier où l'équation de l'écart type conditionnelle des résidus de la modélisation des rentabilités absolues remplace l'équation de la variance conditionnelle du modèle GARCH de Bollerslev(1986). La spécificité de ces modèles réside dans leur capacité à prendre en compte les caractéristiques des séries financières mais leurs applications sur les données financières n'ont pu déterminer la prédominance d'un modèle sur l'autre. Aussi, Ding, Granger et Engle(1993) proposent une classe de processus permettant de prendre en compte les 2 modèles présentés et 5 autres modèles en fonction des paramètres retenus. La structure générale de cette classe de processus est la suivante :

$$\epsilon_t = \sigma_t e_t \quad (193)$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \quad (194)$$

Où  $e_t \sim N(0, 1), \alpha_0 > 0, \delta \geq 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, -1 < \gamma_i < 1, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$ .



▷ ENCADRÉ 7 : LE MODÈLE FIAPARCH (2)

De cette classe de modèles, Tse(1998) propose de combiner les modèles FIGARCH de Baillie et al.(1996) et les modèles APARCH que nous venons de présenter. L'auteur part de la modélisation APARCH(p,q) donnée précédemment. Afin de tenir compte de la persistance des chocs de la volatilité conditionnelle, Tse(1998) suppose l'existence d'un polynôme  $\phi(L)$  telle que l'équation de la variance conditionnelle s'écrit comme suit :

$$(1 - L)^d \phi(L) g(\epsilon_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(L)) \epsilon_t \quad (195)$$

où  $0 \leq d \leq 1$  et les racines de l'équation  $\phi(L) = 0$  sont à l'extérieur du cercle unitaire. En arrangeant les termes de l'équation précédente, l'auteur déduit l'équation de la variance conditionnelle :

$$\sigma_t^\delta = \frac{\alpha_0}{1 - \beta(1)} + [1 - (1 - \beta(L))^{-1} \phi(L) (1 - L)^d] g(\epsilon_t)^\delta \quad (196)$$

La classe des modèles FIAPARCH présente de nombreux avantages. Outre la possibilité de se ramener à un modèle GARCH de Bollerslev(1986) ou de Taylor(1986)/Schwert(1989), ces modèles permettent de prendre en compte l'asymétrie très présente dans les séries financières. Dans le cas où  $(1 - \beta(L))$  et  $\phi(L)$  sont de premier degré, avec  $\beta(L) = \beta L$  et  $\phi(L) = 1 - \phi(L)$ , le modèle obtenu est un FIAPARCH (1,d,1) avec :

$$\sigma_t^\delta = w + \lambda(L) (|\epsilon_t| - \gamma \epsilon_t)^\delta \quad (197)$$

Avec  $w = \frac{\alpha_0}{1 - \beta(1)}$  et  $\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i = 1 - (1 - \beta L)^{-1} (1 - \phi L)^{-1} (1 - L)^d$  et  $g(\epsilon_t)^\delta$  est remplacé par  $(|\epsilon_t| - \gamma \epsilon_t)^\delta$ .

## A.7 LES MODÈLES DE TYPE GARCH

### A.7.1 LES MODÈLES DE VARIANCES CONDITIONNELLES LINÉAIRES

Une des conditions de l'existence du modèle GARCH suppose que la somme des paramètres  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  soit strictement inférieure à 1. Dans le cas où cette condition n'est pas respectée, il est possible de recourir à un modèle IGARCH. Le modèle IGARCH(p,q) introduit par Engle et Bollerslev(1986) fait intervenir une dépendance de long terme dans la variance. En effet, un choc sur la variance conditionnelle en t affecte toutes les variances conditionnelles futures. Ce modèle est caractérisé par la non-stationnarité de la variance conditionnelle :

$$\epsilon_t = \mu_t h_t \quad (198)$$

Où  $\mu_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\mu^2$  avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}}$$

avec  $\alpha_0 \geq 0; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q; \beta_j \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, p$  et  $\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1$ .

### A.7.2 LES MODÈLES GARCH NON LINÉAIRES

Cette classe de modèles regroupe les modèles GARCH asymétriques qui permettent de considérer l'hétéroscédasticité selon que l'erreur est positive ou négative. Les différents modèles peuvent être subdivisés selon que ces modèles prennent en compte les évolutions asymétriques de la variance ou selon qu'ils font intervenir des fonctions linéaires définies par morceaux (TGARCH).

#### **Le modèle EGARCH :**

Afin de pallier aux lacunes des modèles GARCH, Nelson(1991) introduit le modèle EGARCH :

$$\epsilon_t = \mu_t \log(h_t) \tag{199}$$

Où  $\mu_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\mu^2$  avec

$$\log(h_t) = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\mu_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(h_{t-j})}$$

avec

$$g(\mu_{t-i}) = \theta \mu_{t-i} + \gamma (|\mu_{t-i}| - E(|\mu_{t-i}|)).$$

Il tient compte non seulement de l'importance de l'innovation mais surtout de son signe. Ce modèle n'est pas soumis à des conditions de positivité de ses paramètres et est caractérisé par une non linéarité qui permet de mieux appréhender les structures complexes des séries financières.

#### **Le modèle GARCH-M :**

Introduit par Engle, Lilien et Robins(1987), le modèle ARCH-M permet de considérer la volatilité du processus comme une variable explicative de l'équation structurelle. En tenant compte de la variance conditionnelle dans l'équation de la moyenne, ce modèle traduit la

dépendance des cours boursiers en fonction de la volatilité. Le modèle GARCH-M(p,q) peut être représenté par :

$$Y_t = bx_t + \delta h_t + \epsilon_t \quad (200)$$

$$\epsilon_t = \mu_t h_t \quad (201)$$

Où

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}}$$

avec  $E[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}] = 0$  et  $V[\epsilon_t | \epsilon_{t-1}] = h_t$ . Le modèle GARCH-M peut intégrer différentes formes de la variance conditionnelle. On peut ainsi considérer que la relation entre  $y_t$  et  $\delta h_t$  est une relation log-linéaire en retenant  $\log(h_t)$  comme variable explicative.

#### **Le modèle GARCH-DM (Differenced Mean) :**

Cocco et Paruolo(1990) présentent le processus GARCH-DM qui permet de prendre en compte la différence de volatilité entre deux périodes comme variable explicative des rendabilités. Il est possible de tenir compte de plusieurs retards en recourant à un processus GARCH-DLM introduit par Cocco et Paruolo(1990).

**Le modèle GJR-GARCH :** Introduits par Glosten, Jagannathan et Runkle(1993), le modèle GJR-GARCH permet de rendre compte de la modification d'un coefficient selon le signe de l'innovation passée.

$$\epsilon_t = \mu_t h_t \quad (202)$$

Où  $\mu_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\mu^2$  avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i I_{\epsilon_{t-i} < 0} \epsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}}$$

avec :

$$I_{\epsilon_{t-i} < 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

#### **Le modèle APARCH :**

Ding, Granger et Engle(1993) introduisent les modèles asymétriques APARCH définis par :

$$\epsilon_t = \mu_t h_t \quad (203)$$

Où  $\mu_t$  est un bruit blanc normal de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\mu^2$  avec

$$h_t^\delta = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^\delta} \text{ avec } \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 \text{ et } -1 < \gamma_i <$$

$1, i = 1, \dots, q; \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p; \delta > 0.$

Pour  $\delta = 2, \gamma_1 = 0$  et  $\beta_1 = 0$ , on retrouve le processus ARCH et pour  $\delta = 2, \gamma_1 = 0$ , on obtient un modèle GARCH. Si  $\delta = 2$ , on a un processus GJR-GARCH.

Il existe une vaste littérature sur les modèles GARCH, qui ont connus un succès sans précédent en économétrie financière. Les extensions des modèles GARCH sont encore nombreuses. Aussi, nous donnons dans le tableau 18 quelques références concernant les modèles univariés que nous n'avons pas présentés. Ils sont subdivisés en 7 classes :

- les modèles asymétriques : à l'instar du modèle APARCH de Ding et al.(1993), le modèle asymmetric GARCH d'Engle et Ng(1993) rend compte du caractère asymétrique de la volatilité.
- les familles de modèles constituent une généralisation des modèles GARCH qui permettent de retrouver, sous certaines conditions, des processus classiques.
- les modèles à seuils permettent de prendre en compte des changements de régimes dans la volatilité et décrivent ainsi plusieurs comportements de la volatilité.
- les modèles à paramètres variables sont beaucoup plus précis que les modèles à seuils dans la mesure où ils s'adaptent à chaque variation de la volatilité en associant des paramètres qui varient en fonction des volatilités.
- les modèles ARCH non stationnaires permettent de rendre compte de la volatilité d'une série temporelle non stationnaire.
- les modèles GARCH semi et non-paramétriques.
- les modèles GARCH DSK rendent compte de la volatilité des séries temporelles via une modélisation dynamique du skewness et du kurtosis.

Pour plus d'informations, Teräsvirta(2009) présente une revue de littérature relativement complète des modèles GARCH.

| Extensions   | Références   |
|--|--|
| Modèles asymétriques                               |  |
| Asymmetric GARCH                                   | Engle et Ng(1993)  |
| Familles de modèles                                |  |
| First-order GARCH                                  | Hentschel(1995)  |
| GARCH  | He et Teräsvirta(1999)   |
| Augmented GARCH                                    | Duan(1997)   |
| Modèles à seuils                                   |  |
| Smooth Transition GARCH                            | Hagerud(1997), Gonzales-Riveira(1998)<br>Anderson et al.(1999), Lanne et Saikonnen(2005) |
| Markov Switching (G)ARCH                           | Hamilton et Susmel(1994), Cai(1994), Gray(1996)<br>Klaassen(2002), Haas et al.(2004)     |
| Threshold GARCH                                    | Zakoian(1994)  |
| Double Threshold GARCH                             | Li et Li(1996)   |
| Tree-Structured GARCH                              | Audrino et Bühlman(2001)   |
| Modèles à paramètres variables                     |  |
| Time-varying GARCH                                 | Chu(1995)  |
| Modèles ARCH non stationnaires                     |  |
| Non-stationary ARCH models                         | Cizek et Spokoiny(2009)  |
| Modèles semi et non paramétriques                  | Linton(2009)   |
| GARCH DSK : dynamic skewness and kurtosis<br>GARCH | Grigoletto et Lisi(2009)   |

## A.8 LES MODÈLES À CHANGEMENTS DE RÉGIMES

Nous pouvons définir un modèle de référence avec informations complètes sur la réalisation des régimes (Uctum(2007)). Soit :

$$Y_t = \beta'_i X_{it} + \epsilon_{it} \quad (204)$$

Si  $t \in I_i, i = 1, \dots, k$ . Où  $Y_t$  désigne la variable endogène,  $X_{it}$  est le vecteur des  $k$  variables exogènes,  $\beta_i$ , le vecteur des  $k$  coefficients et  $\epsilon_{it}$  le vecteur des  $k$  bruits blancs gaussiens avec  $Cov(\epsilon_{it}, \epsilon_{jt}) = 0$  car à chaque instant  $t$ , il y a un seul et bon modèle.  $I_i$  est le vecteur des sous ensembles disjoints constitués de  $n_i$  observations :

$$\sum_{i=1}^k n_i = T \quad (205)$$

Où  $T$  désigne la taille de l'échantillon. Les observations propres à chaque régime peuvent être ou non consécutives : si elles le sont alors aux  $k$  régimes correspond  $k - 1$  ruptures ; si elles ne le sont pas, on peut observer  $T - 1$  ruptures.

À l'instar de Uctum(2007), nous présentons dans un premier point les modèles avec règles de sélection connues et dans un deuxième point les modèles avec règles de sélection des régimes inconnues. Le troisième point est consacré à la présentation de 3 modèles d'estimation de la VaR avec changements de régime.

### A.8.1 LES MODÈLES AVEC RÈGLES DE SÉLECTION CONNUES

Les séries temporelles peuvent être caractérisées par deux ou plusieurs changements de régimes et le passage d'un état à un autre peut être conditionné à un seuil. Goldfeld et Quandt(1972,1973) sont les premiers à proposer un modèle qui décrit une série temporelle caractérisée par des changements de régimes. Ils supposent alors que la variable de seuil est connue. Face à cette hypothèse restrictive, d'autres vont proposer d'élargir la variable de seuil à un ensemble fini. Il s'en suit alors le développement des modèles à transition brutale tels que les modèles TAR, SETAR...

Le choix d'une variable à seuil déterministe est assez restrictif et Maddala(1986,1991) propose de recourir à des modèles caractérisés par des variables de seuils stochastiques.

Nous présentons dans un premier point les modèles avec règles de sélection déterministes

puis nous introduisons les modèles à transition brutale. Enfin, nous explicitons les modèles avec règle de sélection stochastique.

#### A.8.1.1 RÈGLE DE SÉLECTION DÉTERMINISTE : LES MODÈLES À SEUILS

Ces modèles font intervenir une variable dite variable de seuil ou de transition qui peut appartenir à l'ensemble des variables exogènes  $X_t$ . La valeur prise par cette variable à chaque instant détermine le régime. Le premier modèle à seuil est celui de Goldfeld et Quandt(1972, 1973). Il est décrit par l'équation suivante :

$$Y_t = \beta'_i X_{it} + \epsilon_{it} \text{ si } \alpha_{i-1} < S_t \leq \alpha_i, i = 1, \dots, k \quad (206)$$

Où  $S_t$  est la variable de seuil et  $\alpha_i$  les seuils inconnus avec  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$ . Par convention :  $\alpha_0 = -\infty; \alpha_k = \infty$ . Le cas le plus simple qui peut être décrit par ce modèle suppose que  $S_t$  est une variable identifiable exogène ou une somme pondérée de variables exogènes dont les pondérations sont des paramètres inconnus à déterminer. Pour estimer ce modèle, il faut d'abord conditionner chaque régime  $i$  à un positionnement spécifique de  $S_t$  par rapport à l'ensemble des seuils ordonnés  $\alpha_j (j = 1, \dots, k - 1)$ . Ensuite, à chaque seuil est associée une fonction binaire :

$$d_j(S_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \leq \alpha_j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On approxime la fonction  $d_j(S_t)$  par une fonction continue, par exemple la fonction cumulative normale :

$$d_j(S_t) \equiv F(S_t, \alpha_j, \gamma_j) = 2\pi^{-1/2} \gamma_j^{-1} \int_{-\infty}^{S_t} \exp\{-\frac{1}{2}[(\tau - \alpha_j)/\gamma_j]^2\} d\tau \quad (207)$$

Où  $\gamma_j$  est le paramètre à estimer. Il est alors possible de réécrire le modèle à seuil sous cette forme :

$$Y_t = \sum_{i=1}^k \delta_i(S_t) \beta'_i X_{it} + \epsilon_t \quad (208)$$

$$\delta_i(S_t) = \prod_{j=0}^{i-1} d_j(S_t) \prod_{j=i}^k (1 - d_j(S_t)) \quad (209)$$

Où  $d_0(S_t) = 1$  et  $d_k(S_t) = 0$  par convention.  $\epsilon_t = \sum_{i=1}^k \delta_i(S_t) \epsilon_{it}$  et  $V(\epsilon_t) = \sum_{i=1}^k \delta_i(S_t)^2 \sigma_i^2$ .

### A.8.1.2 MODÈLE TAR OU À TRANSITION BRUTALE

Dans le modèle de Goldfeld et Quandt(1972,1973), la variable  $S_t$  est supposée connue. Certains modèles supposent que la variable  $S_t$  est inconnue mais qu'elle appartient à un ensemble fini de variables explicatives. Par exemple, cet ensemble de variables explicatives peut être constitué des valeurs passées de  $Y_t$ , ce qui permet d'obtenir un modèle autorégressif à seuils ou TAR. Le modèle SETAR permet donc d'introduire une variable de seuil appartenant à l'ensemble des valeurs passées de la variable endogène :

$$Y_t = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{p_i} \beta_{ij} Y_{t-j} + \epsilon_{it} \text{ si } \alpha_{i-1} < Y_{t-d} \leq \alpha_i \quad (210)$$

Avec  $S_t = Y_{t-d}$  et  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$ ,  $p_i$  est l'ordre du polynôme de retard dans le processus autorégressif qui définit le régime  $i$  et  $d$  le paramètre de retard tel que  $1 \leq d \leq \max(p_i)$  où  $d$  est un entier. Les modèles SETAR de Tong(1978,1983) et Tong et Lim(1980) intègrent parfaitement les structures des séries caractérisées par des cycles périodiques. Ils prennent en compte différentes formes d'asymétries. Le problème des modèles SETAR concerne l'estimation des paramètres qui apparait difficile à cause de l'identification de la variable de seuil et de l'absence d'une méthode d'estimation globale simple. Pour pallier ces faiblesses, plusieurs approches supposant un modèle linéaire pour chaque régime ont été développées. Elles reposent sur des méthodes séquentielles d'estimation conditionnelle des paramètres  $d$  et  $\alpha$ . Dans le cadre de ces approches, Tong et Lim(1980) proposent une procédure d'estimation basée sur le critère AIC. Mais, le caractère peu commode de cette méthode et les limites présentées par la sélection des valeurs optimales par un critère unique et global conduisent au développement de méthodes alternatives. Ainsi, Hansen (1997) propose un modèle non linéaire avec une seule équation qui associe à chaque régime une variable indicatrice de ce régime. Il propose une procédure de balayage sur  $\alpha$  et  $d$  et retient comme critère d'optimisation la minimisation de la variance de l'erreur résiduelle. Par exemple, pour un modèle à 2 régimes :

$$Y_t = (\beta_{10} + \sum_{j=1}^P \beta_{1j} Y_{t-j}) 1_{Y_{t-d} \leq \alpha} + (\beta_{20} + \sum_{j=1}^P \beta_{2j} Y_{t-j}) 1_{Y_{t-d} > \alpha} + \epsilon_t \quad (211)$$

Où

$$1_{Y_{t-d} \leq \alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_{t-d} \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$\epsilon_t$  est une martingale homoscédastique par rapport aux valeurs passées de  $Y_t$ . Pour  $(d, \alpha)$  donné, les paramètres des deux représentations autorégressives linéaires sont estimées par les moindres carrés ordinaires, selon qu'à chaque instant  $t$ ,  $Y_{t-d}$  dépasse ou non le seuil  $\alpha$ . On commence par un balayage sur  $\alpha$  pour des données en réitérant l'opération pour toutes les valeurs de  $d$  et on calcule la variance résiduelle associée à chaque couple. Le couple optimale  $(d^*, \alpha^*)$  et les autres paramètres estimés doivent satisfaire :

$$\operatorname{argmin} \widehat{\sigma}_\epsilon^2(d, \alpha) \quad (212)$$

Le couple  $(d, \alpha)$  n'est pas identifiable sous l'hypothèse nulle de linéarité. Pour tester cette hypothèse, Hansen(1997) propose plusieurs tests statistiques. La principale limite de cette méthode est son coût et l'incapacité à prendre en compte les cas où  $k > 2$ . Tsay(1989) propose alors d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif unique dont les observations sont disposées selon les valeurs ordonnées de la variable de seuil. Ensuite, il suffit de tester la non-linéarité à seuil par une statistique F :

- Le modèle est linéaire si les résidus sont orthogonaux aux régimes.
- Si le modèle est non linéaire alors on sélectionne comme paramètre de retard celui qui correspond à la plus forte non-linéarité et par une procédure graphique, on peut déterminer les valeurs et le nombre de seuils.

Ben Salem et Perraudin(2001) comparent les deux méthodes précédentes et montrent qu'aucune méthode ne surperforme l'autre. Mais le modèle SETAR donne de bons résultats sur le plan explicatif et prédictif. Tsay(1989) reprend les données de Tong(1983) et montre la performance de sa méthode pour des modèles SETAR à 2 ou 3 régimes. Krager et Kugler(1993) modélisent plusieurs séries de change et montrent que le modèle SETAR intègre bien les variations des séries de taux de change. Balke et Wohar(1998) proposent une application du modèle SETAR à la dynamique asymétrique des écarts à la parité couverte du taux d'intérêt. Peel et Speight(1998,2000) montrent que le modèle SETAR est particulièrement adapté aux données de la production allemande, japonaise et américaine et aux données du chômage. Si ces derniers concluent sur la performance prédictive, Clements et Krolzig(1998) montrent que les modèles TAR ne surperforment pas le modèle autorégressif linéaire en termes de prévisions. Dans une autre étude(1999), ils montrent que la prévision d'un modèle SETAR peut surperformer celle d'un modèle autorégressif linéaire à condition de retenir des prévisions conditionnelles au régime en cours.

Astatkie et al.(1997) proposent une extension des modèles TAR en retenant les modèles TAR imbriqués (Nested TAR ou NeTAR). Ces modèles supposent que l'état du monde est représenté par plusieurs non linéarités définies par des variables à seuils suivant un schéma d'imbrication donné. Soit le modèle NTAR à  $k$  régimes ( $k_1 = 1, k_{2i} = 2, \forall i = 1, 2$ ) suivant :

$$Y_t = \begin{cases} \sum_{j=1} \beta_{1j} Y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{1i} Z_{t-i} + \epsilon_{1t} & \text{si } x_{t-e_1} \leq \alpha_2 \text{ et } Y_{t-d} \leq \alpha_1 \\ \sum_{j=1} \beta_{2j} Y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{2i} Z_{t-i} + \epsilon_{2t} & \text{si } x_{t-e_1} > \alpha_2 \text{ et } Y_{t-d} \leq \alpha_1 \\ \sum_{j=1} \beta_{3j} Y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{3i} Z_{t-i} + \epsilon_{3t} & \text{si } x_{t-e_2} \leq \alpha_3 \text{ et } Y_{t-d} > \alpha_1 \\ \sum_{j=1} \beta_{4j} Y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{4i} Z_{t-i} + \epsilon_{4t} & \text{si } x_{t-e_2} > \alpha_3 \text{ et } Y_{t-d} > \alpha_1 \end{cases} \quad (213)$$

Où  $Y_{t-d}$  est la variable retardée  $Y_t$  à l'ordre  $d$ ,  $Z_t$  est le vecteur des variables  $Y_{t-d}, X_t$  et/ou  $X_{t-d}$  où  $X_t$  et  $X_{t-d}$  désignent respectivement les variables endogènes et endogènes retardées. Si  $Y_{t-d}$  agit en premier niveau et prend ses valeurs dans les  $k$  intervalles et si pour un intervalle  $i \in [1, k], x_t - e_i (e_i \geq 0$  inconnu) prend ses valeurs dans  $k_{2i}$  intervalles alors le modèle ci-dessus est un modèle NTAR à  $k = \sum_{i=1}^{k_1} k_{2i}$  régimes. L'estimation de ce modèle repose sur une procédure séquentielle et les paramètres sont évalués par un lissage non-paramétrique. Chan et Tong(1986), Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta(1988) et Teräsvirta(1994) proposent les modèles STAR(Smooth Transition AutoRegressive). Ces modèles permettent une transition souple entre les régimes. Selon Granger et Teräsvirta(1997), le changement au niveau agrégé est plus adéquatement représenté par un modèle STAR si l'économie est constituée d'un grand nombre d'individus ou de firmes car chaque individu ou firme change de régime de façon brutale mais à des dates différentes. Pour Maddala(1991), la transition souple résulte du fait que les agents ne croient pas à la permanence d'un régime et qu'ils ne s'y ajustent pas mais convergent graduellement par apprentissage. Le modèle STAR à deux régimes peut être défini par :

$$Y_t = (\beta_{10} + \sum_{j=1}^P \beta_{1j} Y_{t-j}) [1 - F(S_t, \alpha, \gamma)] + (\beta_{20} + \sum_{j=1}^P \beta_{2j} Y_{t-j}) F(S_t, \alpha, \gamma) + \epsilon_t \quad (214)$$

Avec  $\gamma > 0, F(\cdot)$  est une fonction continûment dérivable sur  $[0; 1]$ . À chacune des valeurs extrêmes de cet intervalle correspond un régime donné alors que les valeurs intermédiaires décrivent la transition d'un régime à un autre,  $S_t$  peut décrire une valeur retardée de  $Y_t$ , une variable exogène ou une fonction de variables exogènes.  $\gamma$  mesure la vitesse de transition : plus sa valeur est élevée, plus la transition est rapide,  $\epsilon_t$  est un bruit  $i.i.d(0, \sigma_\epsilon)$ . Une généralisation de ce modèle est proposée par Granger et Teräsvirta(1997) : le modèle STR

remplace tout ou partie de ses régresseurs par des variables exogènes. Plusieurs fonctions de transition peuvent être utilisées :

- La fonction logistique (modèle LSTAR)

$$F(S_t, \alpha, \gamma) = (1 + \exp(-\gamma(S_t - \alpha)))^{-1}, \gamma > 0 \quad (215)$$

- La fonction exponentielle (ESTAR)

$$F(S_t, \alpha, \gamma) = 1 - \exp(-\gamma(S_t - \alpha)^2), \gamma > 0 \quad (216)$$

On note  $w_t = S_t - \alpha$ , l'écart au seuil à un instant donné. Quand  $w_t \rightarrow \pm\infty$ ,  $F(\cdot)$  tend vers 0 ou 1. Si  $S_t$  est petit devant  $\alpha$  alors le modèle se réduit au premier régime sinon au deuxième. Quand  $\gamma \rightarrow \infty$ , la transition entre les régimes se fait brutalement et si  $S_t = Y_{t-d}$ , le modèle LSTAR est un modèle SETAR. Lorsque  $\gamma = 0$ , le modèle LSTAR s'identifie à un modèle linéaire puisque la fonction de transition est égale à 0.5. Dans le modèle ESTAR, quand  $w_t \rightarrow 0$  alors  $F(\cdot) \rightarrow 0$  et lorsque  $w_t \rightarrow \infty$ ,  $F(\cdot) \rightarrow 1$ . Si  $S_t$  est proche de  $\alpha$ , le modèle ESTAR se réduit au premier régime sinon au deuxième. Quand  $\gamma \rightarrow 0$ , le modèle ESTAR devient un modèle linéaire traduisant le régime intermédiaire alors que lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , le modèle ESTAR devient un modèle linéaire traduisant le régime extrême. Teräsvirta(1994) propose une procédure d'estimation séquentielle qui consiste à spécifier un modèle en déterminant successivement l'ordre du retard, la variable de transition et la fonction de transition avant d'en estimer les paramètres. La première étape de cette procédure est donnée par Luukkonen et al.(1994) : on retient une approximation du modèle LSTAR et on choisit la variable de transition en recourant à un test LM pour tester l'hypothèse nulle de linéarité contre l'hypothèse alternative d'un modèle STAR et ce, pour chaque variable de transition candidate. Pour Teräsvirta(1994), le choix entre le modèle ESTAR et LSTAR peut faire l'objet d'une séquence de tests d'hypothèses nulles emboîtées. Van Dijk et Franses(1999) généralisent le modèle LSTAR à plus de 2 régimes en introduisant le modèle MRSTAR. Ce modèle permet de rendre compte de deux types de mécanismes particuliers du changement :

- Suivant 2 ou plusieurs variables de transition  $S_{it}(i = 1, 2, 3, \dots)$  dont chacune est comparée à un seuil qui lui est spécifique. Selon que  $S_{2t} \leq \alpha_2$  ou  $S_{2t} > \alpha_2$ ,  $Y_t$  est expliqué soit par un modèle LSTAR, soit par un autre modèle LSTAR dont chacun décrit deux régimes selon les valeurs de  $S_{1t}$  par rapport à  $\alpha_1$ . Le modèle MRSTAR

définit alors 4 régimes  $:(S_{1t} \leq \alpha_1; S_{2t} \leq \alpha_2); (S_{1t} > \alpha_1; S_{2t} \leq \alpha_2); (S_{1t} \leq \alpha_1; S_{2t} > \alpha_2); (S_{1t} > \alpha_1; S_{2t} > \alpha_2)$ . Si  $F_{1,t} = F(S_{1t}; \alpha_1; \gamma_1)$  et  $F_{2t} = F(S_{2t}; \alpha_2; \gamma_2)$  sont des fonctions logistiques associées à  $S_{1t}$  et à  $S_{2t}$  alors le modèle MRSTAR est donné par :

$$Y_t = [(\beta_{10} + \sum_{j=1}^P \beta_{1j} Y_{t-j})(1 - F_{1t}) + (\beta_{20} + \sum_{j=1}^P \beta_{2j} Y_{t-j})F_{1t}](1 - F_{2t}) + [(\beta_{30} + \sum_{j=1}^P \beta_{3j} Y_{t-j})(1 - F_{1t}) + (\beta_{40} + \sum_{j=1}^P \beta_{4j} Y_{t-j})F_{1t}]F_{2t} + \epsilon_t \quad (217)$$

Ce modèle traduit le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième régime selon les valeurs prises par les fonctions de transitions  $(0, 0); (1, 0); (0, 1); (1, 1)$ . Si  $F_{1t} = F_{2t} = 0.5$  alors il n'y a pas de transition, le modèle MRSTAR est un modèle AR(p) simple. Si  $F_{1t} = 0.5$  ou  $F_{2t} = 0.5$  alors le modèle MRSTAR devient un modèle STAR à deux régimes. Si  $F_{1t} = F_{2t} = \infty$  alors le modèle MRSTAR est un modèle NeTAR particulier où  $e_1 = e_2 = e$ . Pour estimer le modèle MRSTAR, Van Dijk et Franses(2000) retiennent la procédure de Luukkonen et al.(1988). Ils tentent d'abord d'identifier les variables de transitions candidates pour ensuite tester par les moindres carrés non linéaires un modèle LSTAR en partant de la variable de transition la plus représentative. Ils développent une statistique LM permettant de tester l'hypothèse nulle d'un modèle STAR à 2 régimes contre l'hypothèse alternative d'un modèle MRSTAR à 4 régimes. Si  $S_{2t} = t$ , le modèle MRSTAR est un modèle STAR à deux régimes dont les paramètres  $(\beta_{1j}; \beta_{2j})$  changent en  $(\beta_{3j}; \beta_{4j})$  au-delà d'une date  $\alpha_2$  estimée ( $\alpha_2 = t^*$ ). C'est le modèle STAR à paramètres variables (TVSTAR) de Lundbergh et al.(2003).

- Suivant une seule variable de transition comparée à plusieurs seuils. Supposons le cas particulier où  $S_{2t} = S_{1t} = S_t$  et posons par convention  $\alpha_1 < \alpha_2$ . On peut alors définir 3 états dans lesquels :

1. Les valeurs sont inférieures à  $\alpha_1$ .
2. Les valeurs sont comprises entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$
3. Les valeurs sont supérieures à  $\alpha_2$ .

Le quatrième état correspond à la situation où  $\alpha_2 < S_t \leq \alpha_1$  mais ne se réalise jamais compte tenu de la condition précitée.  $(1 - F_{1t})F_{2t}$  est négligeable sinon nul

quelque soit la valeur de  $S_t$  ce qui implique que  $F_{2t}$  est une bonne approximation de  $F_{1t}F_{2t}$ . Le modèle MRSTAR à deux régimes est alors défini par :

$$Y_t = \beta_{10} + \sum_{j=1}^P \beta_{1j} Y_{t-j} + (\beta'_0 + \sum_{j=1}^P \beta'_j Y_{t-j}) F_{1t} + (\beta''_0 + \sum_{j=1}^P \beta''_j Y_{t-j}) F_{2t} + \epsilon_t \quad (218)$$

Avec  $\beta'_j = \beta_{2j} - \beta_{1j}$  et  $\beta''_j = \beta_{4j} - \beta_{2j}, j = 0, \dots, P$

Jansen et Teräsvirta(1996) présentent un autre modèle à 3 régimes : il s'agit d'un modèle STAR avec une fonction logistique quadratique(QLSTAR) :

$$F(S_t, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = (1 + \exp(-\gamma(S_t - \alpha_1)(S_t - \alpha_2)))^{-1} \quad (219)$$

Pour des valeurs suffisamment grandes de  $\gamma$  et pour  $\alpha_1 < \alpha_2$  :

$$\begin{aligned} F(S_t, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) &= 1 \text{ si } S_t < \alpha_1 \text{ ou } S_t > \alpha_2 \\ F(S_t, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) &= 0 \text{ si } \alpha_1 < S_t < \alpha_2 \end{aligned}$$

Ce modèle à 3 régimes décrit 2 régimes identiques au modèle ESTAR à la différence que le modèle QLSSTAR rend compte des asymétries de seuils séparant les régimes extrêmes du régime intermédiaire.

### A.8.1.3 RÈGLE DE SÉLECTION STOCHASTIQUE : MODÈLES À CHANGEMENTS DE RÉGIMES ENDOGÈNES

Les modèles à seuil supposent une variable de transition déterministe et une version stochastique de ces modèles est introduite par Maddala(1986, 1991) qui substitue à la variable de transition déterministe une variable aléatoire :

$$Y_{it} = \beta'_i X_{it} + \epsilon_{it}, \quad i = 1, 2 \quad (220)$$

$$Y_t = Y_{1t} \text{ si } S_t = \mu' Z_t + \eta_t < 0 \quad (221)$$

$$Y_t = Y_{2t} \text{ si } S_t = \mu' Z_t + \eta_t \geq 0 \quad (222)$$

Où  $Y_{it}$  est une variable exogène latente non observable ;  $Z_t$  un vecteur de variables exogènes pouvant contenir  $Y_{1t}$  et/ou  $Y_{2t}$  et/ou tout ou partie des exogènes avec  $\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \eta_t$  des erreurs aléatoires telles que  $[\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \eta_t]' \sim N.i.i.d.(0, \Omega)$  et :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{1\eta} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{2\eta} \\ \sigma_{1\eta} & \sigma_{2\eta} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}$$

La densité conditionnelle de  $Y_t$  est donnée par :

$$h(Y_t) = f(Y_t|\eta_t < -\mu'Z_t)P(\eta_t < -\mu'Z_t) + f(Y_t|\eta_t \geq -\mu'Z_t)P(\eta_t \geq -\mu'Z_t) \quad (223)$$

Si on note  $\varphi$  la fonction de densité de la loi  $N(0,1)$  et  $\phi$  sa fonction de distribution, on peut réécrire la densité conditionnelle de  $Y_t$  :

$$h(Y_t) = \sigma_1^{-1} \varphi\left(\frac{Y_t - \beta_1' X_{1t}}{\sigma_1}\right) \phi\left(\frac{-\mu' Z_t - \sigma_{1\eta}(Y_t - \beta_1' X_{1t})/\sigma_1^2}{(\sigma_\eta^2 - \sigma_{1\eta}^2/\sigma_1^2)^{1/2}}\right) + \sigma_2^{-1} \varphi\left(\frac{Y_t - \beta_2' X_{2t}}{\sigma_2}\right) [1 - \phi\left(\frac{-\mu' Z_t - \sigma_{2\eta}(Y_t - \beta_2' X_{2t})/\sigma_2^2}{(\sigma_\eta^2 - \sigma_{2\eta}^2/\sigma_2^2)^{1/2}}\right)] \quad (224)$$

$\sigma_\eta$  n'étant pas identifiable, on le norme à 1. Les changements sont endogènes lorsque la  $cov(\eta_t, \epsilon_{1t}) = \sigma_{1\eta} \neq 0$  et/ou  $cov(\eta_t, \epsilon_{2t}) = \sigma_{2\eta} \neq 0$  tandis que  $\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}$  peuvent être ou non indépendant. Le changement est endogène dans la mesure où le mécanisme qui régit le changement se base sur des grandeurs simultanément expliqués par le modèle. Osielwalski et Welfe(1998) appliquent un modèle avec changements de régimes endogènes sur les données polonaises du prix et du salaire en situation d'hyperinflation et de faible inflation. Jensen(1990) propose une application sur des données malaisiennes. On peut aussi appliquer des modèles endogènes à choix multiples où le régime sélectionné attribue à la variable dépendante sa valeur maximale ou minimale. Une illustration de ces modèles est fournie par Uctum(2007) qui suppose un individu ayant plusieurs choix. Il doit donc évaluer celui qui lui procurera un avantage relatif et comparer tous les résultats dans les différents régimes, ce qui suppose une coexistence des régimes et une connaissance de tous les régimes à chaque instant par l'individu mais pas par le modélisateur. Il s'agit là d'une spécificité des modèles endogènes. Les termes d'erreurs  $\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}$  sont alors distribués sur toute la période.

Soit un modèle à k régimes où la règle de décision est donné par une fonction max :

$$Y_{it} = \beta'_i X_{it} + \epsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, k \quad (225)$$

$$\text{et } Y_t = Y_{it} \text{ si } Y_{it} = \max(Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{kt}) \quad (226)$$

$$(227)$$

Ce type de modèle est appliqué par Willis et Rosen(1979) pour décrire les préférences d'un individu  $Y_t$  pour un niveau d'étude  $i$  selon que la valeur actualisée  $Y_{it}$  pour ce niveau d'étude est maximale. King et Leape(1998) proposent un modèle similaire dans le cadre d'une composition optimale de portefeuille. Lorsque le nombre de régimes est supérieur à 2, le modèle est polychotomique et son estimation nécessite une transformation de la règle de sélection et une procédure d'estimation en 2 étapes (Amemiya(1983), Maddala(1988)). Barro et Grossman(1971), Benassy(1984) et Quandt(1988), Laroque et Salanié(1995) donnent respectivement une présentation théorique et économétrique du modèle à 2 régimes avec une règle de sélection faisant intervenir la fonction min. Il s'agit d'un modèle de déséquilibre à prix fixes :

$$Y_{St} = \beta'_S X_{St} + \epsilon_{St} \quad (228)$$

$$Y_{Dt} = \beta'_D X_{Dt} + \epsilon_{Dt} \quad (229)$$

$$Y_t = \min(Y_{St}, Y_{Dt}) \quad (230)$$

Où  $Y_{St}$  et  $Y_{Dt}$  désignent respectivement l'offre et la demande inobservables.  $\epsilon_{St} \sim \text{Nid}(0, \sigma_S^2)$ ,  $\epsilon_{Dt} \sim \text{Nid}(0, \sigma_D^2)$  et  $\text{cov}(\epsilon_{St}, \epsilon_{Dt}) = 0$ . La fonction min peut alors se réécrire comme suit :

$$Y_t = Y_{St} \text{ si } Y_{St} < Y_{Dt} \quad (231)$$

$$Y_t = Y_{Dt} \text{ si } Y_{St} \geq Y_{Dt} \quad (232)$$

On peut retrouver le modèle précédent en retenant les indices 1 et 2 à la place de S et D,  $\mu = (\beta'_S - \beta'_D)$ ;  $Z_t = (X_{St}, X_{Dt})'$  et  $\eta_t = \epsilon_{St} - \epsilon_{Dt}$ . La densité conditionnelle de  $Y_t$  est alors donnée par :

$$h(Y_t) = \sigma_S^{-1} \varphi(Y_t - \beta'_S X_{St} / \sigma_S) [1 - \phi(Y_t - \beta'_D X_{Dt} / \sigma_D)] + \sigma_D^{-1} \varphi(Y_t - \beta'_D X_{Dt} / \sigma_D) [1 - \phi(Y_t - \beta'_S X_{St} / \sigma_S)] \quad (233)$$

Il est alors possible d'estimer le régime qui a le plus prévalu à chaque période et la probabilité d'occurrence en t d'un régime  $i$ . Si on note  $\pi_t = 1, 2, \dots, k$  une variable aléatoire

indicatrice des régimes alors on peut calculer la contribution du régime  $i$  à la densité conditionnelle de  $Y_t$  :

$$P(\pi_t = i|Y_t) = \frac{f(Y_t|\pi_t = i)P(\pi_t = i)}{\sum_{i=1}^k f(Y_t|\pi_t = i)P(\pi_t = i)} \quad (234)$$

Avec  $\sum_{i=1}^k P(\pi_t = i|Y_t) = 1 \forall t = 1, \dots, T$ . Goldfeld et Quandt (1992) proposent une extension de ce modèle en retenant les modèles des déséquilibres multi marchés. Qin et Lu(1998) proposent les modèles dynamiques de déséquilibre qui permettent de décrire le mécanisme de résorption des déséquilibres comme un ajustement des prix et des quantités. Le changement est exogène si  $Cov(\eta_t, \epsilon_{1t}) = Cov(\eta_t, \epsilon_{2t}) = 0$  et la densité conditionnelle devient :

$$h(Y_t) = \sigma_1^{-1} \varphi(Y_t - \beta_1' X_{1t} / \sigma_1) \phi(-\mu' Z_t / \sigma_\eta) + \sigma_2^{-1} \varphi(Y_t - \beta_2' X_{2t} / \sigma_2) [1 - \phi(-\mu' Z_t / \sigma_\eta)] \quad (235)$$

Si  $S_t$  n'admet pas de composante aléatoire alors les modèles à variables indicatrices et à seuils correspondent à des modèles à changements exogènes. Selon Maddala et Kim(2000), si  $S_t$  est inconnu et la règle de sélection est une distribution de probabilité alors on a des modèles probabilistes qui sont des modèles à changements exogènes.

L'ensemble de ces modèles, qu'ils soient caractérisés par une règle de sélection déterministe ou stochastique, supposent que cette dernière est connue. Or, il peut exister plusieurs régimes dans une série temporelle sans pour autant que la règle de sélection soit explicite. Il est alors plus adéquat de recourir à des modèles avec règles de sélection du régime inconnues.

#### A.8.2 MODÈLE AVEC RÈGLE DE SÉLECTION DU RÉGIME INCONNUE

Dans cette classe de modèles, le régime en cours et les déterminants du changement de régimes sont inconnus. Il y a deux classes de modèles :

1. Ceux qui supposent une distribution de probabilité inconnue à estimer : ce sont les modèles à mélange de distribution.
2. Ceux qui supposent des probabilités de transition inconnues : ce sont les modèles à changements de régimes markoviens.

Nous présentons succinctement ces deux types de modèles.



### A.8.2.1 MODÈLE À MÉLANGE DE DISTRIBUTION

Quandt(1972) et Goldfeld et Quandt(1973) proposent les modèles  $\lambda$  qui modélisent les changements de régimes en affectant des probabilités non conditionnelles aux différents régimes. Il s'agit d'un mélange de distribution normale en ce sens où la distribution non conditionnelle de la variable endogène est obtenue comme la moyenne pondérée des distributions conditionnelles de cette variable, les coefficients de pondération étant les probabilités non conditionnelles. Il existe quand même un mécanisme de décision connu par l'agent économique mais externe au modèle et inconnu par le modélisateur. Les probabilités constantes et inconnues associées aux différents régimes remplacent ce mécanisme. Elles peuvent être interprétées comme des probabilités associées à des règles de sélection implicites. Soit  $\pi_t$  une variable inobservable indicatrice du régime  $i = 1, \dots, k$  la probabilité non conditionnelle à priori qui lui est associée est donnée par :

$$P(\pi_t = i; \theta) = p_i \quad (236)$$

Avec  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ , et  $\theta$  le vecteur des paramètres du modèle. En t,  $Y_t$  est généré par un processus  $i$  selon la distribution de probabilité suivante :

$$Y_t = \beta'_i X_{it} + \epsilon_{it} \quad (237)$$

Avec la probabilité  $p_i, i = 1, \dots, k, \epsilon_{it} \equiv N(0, \sigma_i^2)$ . La densité de  $Y_t$  conditionnellement au régime  $i$  s'écrit :

$$f(Y_t | \pi_t = i) = \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{Y_t - \beta'_i X_{it}}{\sigma_i}\right) \quad (238)$$

Où  $\varphi$  est la densité de la loi  $N(0,1)$ . La densité non conditionnelle de  $Y_t$  est défini par :

$$h(Y_t) = \sum_{i=1}^k p_i f(Y_t | \pi_t = i) \quad (239)$$

dont on déduit la log-vraisemblance :

$$\text{Log}L = \sum_{t=1}^T \text{log}h(Y_t) \quad (240)$$

Les paramètres estimés permettent alors de calculer les probabilités des régimes conditionnellement aux réalisations de  $Y_t$  ou encore les probabilités à postériori des régimes à chaque instant :

$$P(\pi_t = i | Y_t) = \frac{p_i h(Y_t | \pi_t = i)}{\sum_{i=1}^k p_i h(Y_t | \pi_t = i)} \quad (241)$$

Hamilton(1994) a montré analytiquement qu’au point du vecteur des paramètres qui maximisent la vraisemblance non contrainte, la probabilité à priori structurelle d’un régime est égale à la moyenne longitudinale des probabilités à posteriori de ce régime :

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P(\pi_t = i|Y_t) = p_i, \forall i = 1, \dots, k \quad (242)$$

La portée plus générale des modèles markoviens a ombragée les modèles à mélange de distribution. Le principal avantage de ces derniers face aux modèles markoviens est leur capacité à modéliser un grand nombre de régimes.

### A.8.2.2 MODÈLES AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIMES MARKOVIENS (MS)

Ces modèles reposent sur le principe selon lequel la probabilité de réalisation d’un régime est conditionnelle aux réalisations passées des variables d’intérêt. En outre, ils permettent de calculer les probabilités associées aux réalisations futures d’un régime et de prévoir la valeur future de la variable endogène et ce, quelque soit la longueur de l’horizon de prévision. Les équations qui décrivent ces modèles sont les suivantes :

$$Y_t = \beta'_{\pi_t} Z_t + \epsilon_t \quad \pi_t = 1, \dots, k \quad (243)$$

Où  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ;  $Z_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, X_t', X_{t-1}', \dots)'$ ,  $X_t$  est le vecteur des variables exogènes et  $\pi_t$ , une variable aléatoire inobservable, indicatrice du régime t et supposée indépendante de  $\epsilon_{t-\nu}, \forall \nu = 0, 1, \dots$  et  $\beta_{\pi_t}$  un vecteur de paramètres caractérisant le régime  $\pi_t$  ( $\beta_{\pi_t} = \beta_j$ ) lorsque le régime j prévaut. L’estimation du modèle peut se faire de manière itérative en alternant une étape d’inférence et une étape de prévision :

1. Étape d’inférence : Elle décrit la probabilité que  $\pi_t = j$  conditionnellement à toute l’information disponible en t ; à savoir les valeurs présentes et passées de  $Y_t$  et  $X_t$  :

$$P(\pi_t = j|Y_t, Z_t) = \frac{P(\pi_t = j|Z_t)F(Y_t|\pi_t = j, Z_t)}{F(Y_t|Z_t)} \quad (244)$$

Où  $P(\pi_t = j|Z_t)$  est la prévision du régime j conditionnellement à l’information passée.  $F(Y_t|\pi_t = j, Z_t)$  est la densité de  $Y_t$  conditionnellement au régime  $\pi_t = j$  construite à partir de la loi de distribution connue des erreurs  $\epsilon_t$ .  $F(Y_t|Z_t)$  est la

densité non conditionnelle au régime, c'est la somme pondérée des densités conditionnelles au régime :

$$F(Y_t|Z_t) = \sum_{j=1}^k P(\pi_t = j|Z_t)F(Y_t|\pi_t = j, Z_t) \quad (245)$$

2. Étape de prévision : La prévision  $P(\pi_t = j|Z_t)$  suppose que  $\pi_t$  évolue suivant une chaîne de Markov à  $k$  états, indépendante des valeurs présentes et passées de  $X_t$  et des valeurs passées de  $Y_t$  :

$$P(\pi_t = j|\pi_{t-1} = i, \pi_{t-2} = i', \dots, Z_t') = P(\pi_t = j|\pi_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (246)$$

Où  $p_{ij}$  est la probabilité de transition du régime  $i$  vers le régime  $j$  et tel que  $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ . Les variables  $Z_t$  et les régimes antérieurs au dernier n'ont aucune information concernant  $\pi_t$  qui ne soit déjà contenue dans la connaissance du régime passé. Ainsi, par exemple, si  $p_{ii}$  est élevée alors  $Y_t$  appartient en probabilité au même régime que celui qui avait généré  $Y_{t-1}$  sans qu'aucune influence exogène n'affecte le régime courant. La prévision du régime en  $t + 1$  conditionnelle à toutes les valeurs présentes et passées de  $Y$  et de  $X$  s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\pi_{t+1} = j|Y_t, Z_t) &= \sum_{i=1}^k P(\pi_{t+1}, \pi_t = i|Y_t, Z_t) \\ &= \sum_{i=1}^k P(\pi_{t+1} = j|\pi_t = i, Y_t, Z_t)P(\pi_t = i|Y_t, Z_t) \end{aligned} \quad (247)$$

Le régime dans lequel le système entrera vraisemblablement à la période suivante dépend du régime vraisemblablement en vigueur actuellement et de la probabilité associée au passage de ce dernier vers le premier. Or, la probabilité du régime en cours conditionnellement au régime passé ne dépend pas de  $Z_t$  ni de la sous-partie  $[Y_{t-1}, Z_{t-1}]$  de  $Z_t$ . On a donc :

$$P(\pi_t = j|\pi_t = i, Y_t, Z_t) = P(\pi_{t+1} = j|\pi_t = i) = p_{ij} \quad (248)$$

Par ailleurs, l'hypothèse sous-jacente selon laquelle les variables exogènes  $X_t$  seules ne véhiculent aucune information concernant  $\pi_t$  qui ne soit déjà contenue dans  $X_{t-1}$  et  $Y_{t-1}$  se traduit par :

$$P(\pi_t = j|Y_{t-1}, Z_{t-1}) = P(\pi_t = j|Y_{t-1}, Z_{t-1}, X_t) = P(\pi_t = j|Z_t) \quad (249)$$

La prévision conditionnelle à  $Z_t$  est alors donnée par :

$$P(\pi_t = j|Z_t) = \sum_{i=1}^k p_{ij}P(\pi_{t-1} = i|Y_{t-1}, Z_{t-1}) \quad (250)$$

La probabilité associée à un régime dépend des valeurs passées de  $Y_t$ . Par ces propriétés, ces modèles se distinguent des modèles à mélange de distribution où la probabilité d'un régime n'est pas conditionnelle aux réalisations passées des variables. L'identification du régime dans lequel l'observation  $Y_t$  est générée à l'instant  $t$  peut se faire en calculant ex-post les probabilités lissées de  $\pi_t = j$  conditionnelle à toutes les observations de  $Y_t$  et de  $X_t, t = 1, \dots, T$ . Hamilton(1994) développe ces probabilités :

$$P(\pi_t = j|Y_t, Z_t) = \frac{P(\pi_t = j|Y_t, Z_t) \sum_{i=1}^k P_{ji} P(\pi_{t+1} = i|Y_T, Z_T)}{P(\pi_{t+1} = i|Y_t, Z_t)} \quad (251)$$

Ces probabilités peuvent être évaluées récursivement en partant de  $t = T - 1$ . Selon Goodwin(1993), ces probabilités lissées permettent non seulement l'estimation des paramètres mais aussi la datation des points de retournement des cycles économiques.

Pour l'estimation, l'algorithme le plus utilisé est l'algorithme EM de Dempster et al.(1977) pour résoudre les problèmes liés à l'estimation du maximum de vraisemblance : en partant d'un vecteur de paramètres  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}_j; \hat{\sigma}_j; \hat{P}_{ij}; i, j = 1, \dots, k)$  de  $\theta$ , l'étape E de l'algorithme EM consiste à calculer les prévisions associées aux régimes et à accroître la vraisemblance. L'étape M vise à obtenir un nouveau vecteur de paramètres  $\hat{\theta}'$  par la méthode des moindres carrés ordinaires pondérée par les probabilités lissées. À partir de ces probabilités, Hamilton(1990) montre comment sont actualisées les probabilités de transition. Les séquences  $\hat{\theta}, \hat{\theta}'$  convergent vers le maximum de vraisemblance selon Hamilton(1994). De nombreux travaux ont utilisés ces modèles pour intégrer les structures asymétriques des cycles réels. Il en est ainsi de Kohler(2000), Chen et Lin(2000), Kakes(2000), Guta et Banerjee(1998). Diebold, Lee et Weinbach(1994) et Filardo et Gorden(1998) proposent un modèle MS avec probabilité de transitions variables. À partir de ces modèles, on peut alors prévoir les points de retournement des cycles économiques. Franses et Paap(1999) montrent que la datation des points de retournement par ces modèles est sensible à la correction des variables saisonnières. Kim(1996) et Bodman(1998) testent l'hypothèse selon laquelle la probabilité de sortie d'une phase économique dépend de la durée de cette phase sur des données coréennes et australiennes respectivement. D'autres auteurs recommandent ou utilisent les modèles MS dans les séries de taux de change. Selon Engel et Kim(1999), le taux de change réel a une composante permanente et une composante transitoire dont la variance suit un processus markovien. Plusieurs auteurs proposent des modèles MS pour le taux de change : Engel et Hakkio(1996), Vigfusson(1997), Frankel et Froot(1988) entre autres. Concernant la prévision, un certain nombre d'études s'accordent sur le faible pouvoir prédictif de ces

modèles : les prévisions d'un modèle MS sont à peine meilleures (Goodwin(1993)) ou pas meilleures (Clements et Krolzig(1998)) qu'un modèle AR linéaire. Phillips(1991) obtient des variances d'erreurs plus importantes dans les modèles MS que dans les modèles ARMA et VAR et Sarantis(1999) conclue sur la surperformance du modèle STAR par rapport au modèle MS. Engel(1994) note l'avantage du modèle MS à mieux prévoir le sens de la variation du taux de change même si les prévisions de ce modèle ne surperforment pas la marche aléatoire. Kim(1993) associe le modèle MS au filtre de Kalman et montre qu'il surperforment la marche aléatoire. Un troisième domaine d'application du modèle MS porte sur les anticipations rationnelles dont les travaux d'Engel et Hamilton(1990) sont les précurseurs. Kaminsky(1993), Hamilton(1988) et Evans et Watchel(1993) appliquent aussi le modèle MS pour tester l'hypothèse des anticipations rationnelles. Hamilton(1989) propose une alternative aux modélisations du PNB par des processus AR(I) MA (Nelson et Plosser(1982)), des modèles de composantes linéaires inobservables (Harvey(1985)) ou par des spécifications cointégrées (Engle et Granger(1987)). Il suggère de relâcher l'hypothèse d'un processus stationnaire linéaire au profit de l'hypothèse d'un processus non linéaire stationnaire. Il retient l'approche de Goldfeld et Quandt(1973) qui suppose une régression avec changements markoviens pour prendre en compte les ruptures dans les paramètres d'un processus autorégressif. Il utilise un filtre non linéaire sur les données observées pour décrire l'inférence statistique de la variable d'état inobservable.

Soit  $n_t$  la tendance d'une série  $\tilde{Y}_t$ ,  $n_t$  est un trend markovien en niveau si :

$$n_t = \alpha_1 S_t + \alpha_0 + n_{t-1} \quad (252)$$

Où  $S_t = 0$  ou  $1$ , est l'état inobservable du système. On peut supposer que la transition entre les différents états est gouvernée par un processus markovien de premier ordre :

$$Prob(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = p$$

$$Prob(S_t = 0 | S_{t-1} = 1) = 1 - p$$

$$Prob(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) = q$$

$$Prob(S_t = 1 | S_{t-1} = 0) = 1 - q$$

Soit  $\hat{n}_t = exp(n_t)$ , le trend markovien en logarithme. Supposons que le processus stochastique  $S_t$  est strictement stationnaire et admet une représentation AR(1) :

$$S_t = (1 - q) + \lambda S_{t-1} + v_t \quad (253)$$

Avec  $\lambda = -1 + p + q$  où conditionnellement à  $S_{t-1} = 1$  :

$$v_t = (1 - p) \text{ avec la probabilité } p$$

$$v_t = (-p) \text{ avec la probabilité } (1 - p)$$

Et conditionnellement à  $S_{t-1} = 0$  :

$$v_t = -(1 - q) \text{ avec la probabilité } q$$

$$v_t = q \text{ avec la probabilité } (1 - q)$$

La différence notable entre un processus ARMA et l'équation 253 réside :

- Dans la prise en compte de changements occasionnels dans le taux de croissance  $n_t - n_{t-1}$
- Dans l'ajout d'un processus linéaire normale qui permet à l'équation 253 de générer un processus non linéaire pour les séries observées et conduit à de meilleures prévisions que le modèle ARMA.

L'engouement des chercheurs envers ce type de modélisation est principalement dû à la capacité de ces modèles à pouvoir décrire des séries temporelles caractérisées par plusieurs états. En économétrie financière, les faibles résultats des modèles standards utilisés pour l'estimation de la VaR ont encouragé une partie de la littérature à développer des modélisations paramétriques de la VaR caractérisés par des changements de régimes.

## A.9 ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE DES PARAMÈTRES DU MODÈLE COMPLET DE GOLDFELD ET QUANDT(1973)

Nous retenons la densité  $Y_t$  conditionnelle à l'information disponible en  $t \in I_i$  :

$$F(Y_t|t \in I_i, X_{it}, \beta_i, \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_t - \beta_i' X_{it}}{\sigma_i}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{Y_t - \beta_i' X_{it}}{\sigma_i}\right) \quad (254)$$

Où  $\varphi$  est la densité de la loi normale centrée réduite. La fonction de log-vraisemblance est alors définie par :

$$\ln L(Y_t) = \sum_{i=1}^k \sum_{t \in I_i} \ln f(Y_t|t \in I_i) \quad (255)$$

Dans ce modèle, on suppose que les dates de ruptures sont connues. Or, il est possible qu'une rupture résulte en réalité d'une réalisation dans la queue de distribution des erreurs. Goldfeld et Quandt(1976) proposent alors un modèle avec dates de ruptures inconnues :

$$Y_t = \begin{cases} \beta_1 X_{1t} + \epsilon_{1t} & \text{si } t = 1, \dots, t_s - 1 \\ \beta_2 X_{2t} + \epsilon_{2t} & \text{si } t = t_s, \dots, T \end{cases} \quad (256)$$

Où  $t_s$  est la date de rupture à estimer par balayage. Il faut évaluer la log-vraisemblance pour chaque valeur plausible de  $t_s$  et la date optimale est celle pour laquelle la log-vraisemblance est maximale. La log-vraisemblance du modèle est donnée par :

$$\begin{aligned} LnL(Y_t) &= \sum_{t=1}^{t_s-1} \ln(Y_t | \pi_t = 1) + \sum_{t=t_s}^T \ln(Y_t | \pi_t = 2) = \\ & \frac{T}{2} \ln(2\pi) - (t_s - 1) \ln(\sigma_1) - (T - t_s + 1) \ln(\sigma_2) - \\ & \frac{1}{2} [\sum_{t=1}^{t_s-1} ((Y_t - \beta_1' X_{1t}) / \sigma_1)^2 + \sum_{t=t_s}^T ((Y_t - \beta_2' X_{2t}) / \sigma_2)^2] \end{aligned} \quad (257)$$

## A.10 MODÈLE D'HAMILTON(1989) : PRÉCISIONS

Nous pouvons donner plusieurs propriétés liées à l'équation 253. Si on suppose  $E_0 v_t = 0$  pour tout  $t > 0$  :

$$E_0 S_t = \frac{(1-q)(1-\lambda^t)}{(1-\lambda)} + \lambda^t E_0 S_0 \quad (258)$$

Où  $E_0$  est l'espérance conditionnelle à l'information disponible à la date 0.  $E_0 S_t$  peut être interprété comme la probabilité que  $S_t = 1$  sachant l'information disponible à la date 0 ( $P_0(S_t = 1)$ ). L'équation 258 peut être réécrite :

$$P_0(S_t = 1) = \pi + \lambda^t (\pi_0 - \pi) \quad (259)$$

Où  $\pi = (1-q)/(1-p+1-q)$ ,  $\pi_0 = P_0(S_0 = 1)$ .

Asymptotiquement, la probabilité conditionnelle converge vers la probabilité incondi-  
tionnelle limite  $P(S_t = 1) = \pi$ . Dans le cas d'un processus ARIMA avec distribution nor-  
male des erreurs, le terme d'erreur  $v_t$  n'est pas corrélé avec les valeurs retardées de  $S_t$  :  
 $E(v_t | S_{t-j} = 1) = E(v_t | S_{t-j} = 0) = 0$  pour  $j = 1, 2, \dots$ . Cependant, on peut ici supposer  
que  $v_t$  n'est pas statistiquement indépendant des valeurs retardées de  $S_t$  :

$$\begin{aligned} E(v_t^2 | S_{t-1} = 1) &= p(1-p) \\ E(v_t^2 | S_{t-1} = 0) &= q(1-q) \end{aligned}$$

Ce dernier résultat marque une différence importante lorsqu'un bruit blanc est ajouté. On a supposé que  $S_t$  est inobservable mais que cette variable influence les données observables. Si on compare l'équation 252 à un processus ARMA(1,1) défini par :

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = (1 - q) + \mu_t - \theta \mu_t \quad (260)$$

On peut noter que la prévision à l'horizon  $j$  de la variable  $Y_t$  est basée sur une fonction linéaire de  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$ . Ces prévisions ne sont pas optimales et Granger(1983) a montré que des prévisions non linéaires qui exploitent la dépendance sérielle de la série des bruits blancs sont meilleures. Les prévisions optimales peuvent être données par :

$$E_t Y_{t+j} = \pi + \lambda^j [P(S_t = 1 | Y_t, Y_{t-1}, \dots) - \pi] \quad (261)$$

Où  $P(S_t = 1 | Y_t, Y_{t-1}, \dots)$  est une fonction linéaire de  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$ .

### A.10.1 PRÉVISIONS

#### A.10.1.1 TENDANCE MARKOVIENNE EN NIVEAU

Soit  $i_t$  une variable cumulative définie par  $i_t = S_1 + S_2 + \dots + S_t$ . On peut alors réécrire :  
 $n_t = n_0 + \alpha_1 i_t + \alpha_0 t$ .

Sachant que  $E[S_t | \text{prob}(S_0 = 1) = \pi_0] = \pi + \lambda^t (\pi_0 - \pi)$ . On peut alors réécrire :

$$\begin{aligned} E_0\{N_t | E_0[N_0] = n_0, \text{Prob}[S_0 = 1] = \pi_0\} &= n_0 + \alpha_1 [\pi_t + \sum_{\tau=1}^t \lambda^\tau (\pi_0 - \pi)] + \alpha_0 t \\ &= n_0 + [\alpha_1 \pi + \alpha_0] t + [\alpha_1 \lambda (1 - \lambda^t) / (1 - \lambda)] [\pi_0 - \pi] \end{aligned} \quad (262)$$

On obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[N_{t+1} - N_t | n_0, \pi_0] = \alpha_1 \pi + \alpha_0 \quad (263)$$

Pour  $t \rightarrow \infty$  le système est dans l'état 1 avec une probabilité  $\pi$  et un taux de croissance  $\alpha_1 + \alpha_0$  alors que le système est dans l'état 0 avec une probabilité  $1 - \pi$  et un taux de croissance de  $\alpha_0$ . Donc le taux de croissance espéré est donné par  $\alpha_1 \pi + \alpha_0$ . Par ailleurs, s'il n'y a pas d'informations supplémentaires sur l'état du système à la date 0 :  $\pi_0 = \pi$  et  $E_0\{N_t | E_0[N_0] = n_0, \text{Prob}[S_0 = 1] = \pi_0\}$  implique que le taux de croissance limite constitue une base pour les prévisions de  $N_t$  pour tout  $t$  fini. S'il y a une information supplémentaire,  $\pi_0 > \pi$  alors pour  $\alpha_1 \lambda > 0$ ,  $E[N_t | P_0(S_0 = 1) = \pi_0] > E[N_t | P_0(S_0 = 1) =$



$\pi]$  pour tout  $t$  avec un écart croissant avec  $t$  jusqu'à ce que le terme  $(1 - \lambda^t)$  est égale à 1. Si on compare l'information selon laquelle  $S_0 = 1(\pi_0 = 1)$  avec  $S_0 = 0(\pi_0 = 0)$  on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [E[N_t | s_0 = 1] - E[N_t | S_0 = 0]] = \frac{\alpha_1 \lambda}{1 - \lambda} \quad (264)$$

Donc, lorsque l'information sur l'état du système à la date 0 n'a aucun effet sur le taux de croissance à long terme ( $N_{t+1} - N_t$ ), il y a un effet permanent sur le niveau de  $N_t$ . La valeur actualisée peut être évaluée par :

$$E\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t N_t | n_0, \pi_0\right\} = \frac{n_0}{(1 - \beta)} + \alpha_1 \left[ \frac{\beta(1 - q)}{(1 - \beta)^2(1 - \beta\lambda)} + \frac{\beta\lambda\pi_0}{(1 - \beta)(1 - \beta\lambda)} \right] + \frac{\alpha_0\beta}{(1 - \beta)^2} \quad (265)$$

#### A.10.1.2 TENDANCE MARKOVIENNE EN LOG

Soit  $P_T[A, B]$  la probabilité d'occurrence des éléments A et B simultanément conditionnellement à l'information disponible en  $\tau$ . On peut définir :

$$P_0[I_t = i, S_t = 1] = pP_0[I_{t-1} = i - 1, S_{t-1} = 1] + (1 - q)P_0[I_{t-1} = i - 1, S_{t-1} = 0] \quad (266)$$

Pour  $t = 1, 2, \dots$  et  $i = 1, 2, \dots, t$ .

Pour  $i = 0$  :  $P_0[I_t = 0, S_t = 1] = 0$  pour  $t = 1, 2, \dots$

De même :

$$P_0[I_t = i, S_t = 0] = (1 - p)P_0[I_{t-1} = i, S_{t-1} = 1] + qP_0[I_{t-1} = i, S_{t-1} = 0] \quad (267)$$

Pour  $t = 1, 2, \dots$  et  $i = 0, 1, \dots, t - 1$  et  $P_0[I_t = t, S_t = 0] = 0$  pour  $t = 1, 2, \dots$

Posons  $\hat{\alpha}_1 \equiv \exp(\alpha_1)$  et  $\hat{\alpha}_0 \equiv \exp(\alpha_0)$  en reprenant l'équation 266 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^t \hat{\alpha}_1^i \hat{\alpha}_0^t P_0[I_t = i, S_t = 1] &= [\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_0 p] \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \hat{\alpha}_1^j \hat{\alpha}_0^{t-1} \cdot P_0[I_{t-1} = j, S_{t-1} = 1] \\ &+ [\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_0 (1 - q)] \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \hat{\alpha}_1^j \hat{\alpha}_0^{t-1} \cdot P_0[I_{t-1} = j, S_{t-1} = 0] \end{aligned} \quad (268)$$

On peut faire le même calcul avec l'équation 267.

On peut alors définir  $M_0(t, s) = \sum_{i=0}^t \hat{\alpha}_1^i \hat{\alpha}_0^t \cdot P_0[I_t = i, S_t = s]$  pour  $s = 0, 1$  et retenir la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_0(t, 1) \\ M_0(t, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1 p & \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_1 (1 - q) \\ \hat{\alpha}_0 (1 - p) & \hat{\alpha}_0 q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0(t - 1, 1) \\ M_0(t - 1, 0) \end{bmatrix}$$

Et avec :

$$B \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 p & \hat{\alpha}_1(1-q) \\ (1-p) & q \end{bmatrix}$$

Nous obtenons : 
$$\begin{bmatrix} M_0(t,1) \\ M_0(t,0) \end{bmatrix} = \hat{\alpha}_0 B \begin{bmatrix} M_0(t-1,1) \\ M_0(t-1,0) \end{bmatrix}$$

dont la solution est donnée par : 
$$\begin{bmatrix} M_0(t,1) \\ M_0(t,0) \end{bmatrix} = \hat{\alpha}_0^t B^t \begin{bmatrix} \pi_0 \\ 1 - \pi_0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit alors de résoudre  $|\mu I - B| = 0$  :

$$\mu_1 + \mu_2 = q + p\hat{\alpha}_1 \quad (269)$$

$$\mu_1 \mu_2 = \hat{\alpha}_1(-1 + p + q) \quad (270)$$

En utilisant le résultat de Chiang(1980) :

$$B^t = T \begin{bmatrix} \mu_1^t & 0 \\ 0 & \mu_2^t \end{bmatrix} T^{-1}$$

Où :

$$T = \begin{bmatrix} (\mu_1 - q) & (\mu_2 - q) \\ (1-p) & (1-p) \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(1-p)} \begin{bmatrix} (1-p) & (q - \mu_2) \\ -(1-p) & (\mu_1 - q) \end{bmatrix}$$

La valeur espérée est alors donnée par :  $E_0 \hat{N}_t = \hat{n}_0 [M_0(t,1) + M_0(t,0)] = \hat{n}_0 \cdot [1 \ 1] \hat{\alpha}_0^t B^t [\pi_0 \ 1 - \pi_0]'$   
 $= \frac{\hat{n}_0 \hat{\alpha}_0^t ((k_0 - \mu_2) \mu_2^t - (k_0 - \mu_1) \mu_1^t)}{(\mu_1 - \mu_2)}$  (271) Où  $k_0 = [\mu_1 \mu_2 / \hat{\alpha}_1] [\pi_0 + \hat{\alpha}_1(1 - \pi_0)] = [-1 + p + q] [\pi_0 + \hat{\alpha}_1(1 - \pi_0)]$

En normalisant  $\mu_1 > \mu_2$ , on voit dans le cas d'une tendance markovienne en niveau que le taux de croissance de long terme est indépendant de l'état initial :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_0[\hat{N}_{t+1}]}{E_0[\hat{N}_t]} = \hat{\alpha}_0 \mu_1 \quad (272)$$

Mais les changements dans l'état courant exercent un effet permanent sur le niveau futur de la série :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_0[\hat{N}_t | \pi_0 = 1]}{E_0[\hat{N}_t | \pi_0 = 0]} = \frac{\mu_1 - (-1 + p + q)}{\mu_1 - \hat{\alpha}_1(-1 + p + q)} \quad (273)$$

On obtient :

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \hat{N}_t = \frac{\hat{n}_0(1 - k_0 \beta \hat{\alpha}_0)}{1 - \beta \hat{\alpha}_0(p \hat{\alpha}_1 + q) + \beta^2 \hat{\alpha}_0^2(-1 + p + q) \hat{\alpha}_1} \quad (274)$$

### A.10.2 FILTRAGE

Soit une série temporelle  $\tilde{Y}_t$  définie par :

$$\tilde{Y}_t = n_t + \tilde{Z}_t \quad (275)$$

Où  $Z_t$  est un ARIMA(r,1,0) défini par :

$$\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_{t-1} = \phi_1(\tilde{Z}_{t-1} - \tilde{Z}_{t-2}) + \phi_2(\tilde{Z}_{t-2} - \tilde{Z}_{t-3}) + \dots + \phi_r(\tilde{Z}_{t-r} - \tilde{Z}_{t-r-1}) + \epsilon_t \quad (276)$$

Où  $\epsilon_t$  est un bruit blanc N.i.d(0,  $\sigma^2$ ) indépendant de  $n_{t+j}$  pour tout j. Par différenciation,

$$Y_t = \alpha_1 S_t + \alpha_0 + Z_t$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_r Z_{t-r} + \epsilon_t$$

Où  $Y_t = \tilde{Y}_t - \tilde{Y}_{t-1}$  et  $Z_t = \tilde{Z}_t - \tilde{Z}_{t-1}$ . On connaît  $Y_t$  mais pas  $Z_t$  et  $S_t$ .

Un filtre basique accepte comme signal la probabilité conditionnelle jointe :

$$P[S_{t-1} = s_{t-1}, S_{t-2} = s_{t-2}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}] \quad (277)$$

Et comme output :

$$P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}] \quad (278)$$

Et la vraisemblance conditionnelle de  $Y_t$  :

$$f(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}) \quad (279)$$

$[S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-r+1}]$  sont les r plus récentes valeurs de s alors que  $[Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}]$  est l'historique complet de Y observé.

### A.10.3 ALGORITHME

#### Étape 1

Calculer  $P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}] = P[S_t = s_t | S_{t-1} = s_{t-1}] \times P[S_{t-1} = s_{t-1}, S_{t-2} = s_{t-2}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}]$ .

### Étape 2

Calculer la distribution des densités conditionnelles jointes de  $Y_t$  et  $(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-r})$  :

$$\begin{aligned} & f(Y_t, S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}) \\ &= f(Y_t | S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}) \quad (280) \\ & \quad \times P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}] \end{aligned}$$

Et nous savons que  $f(Y_t | S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} ((Y_t - \alpha_1 S_t - \alpha_0) - \phi_1(Y_{t-1} - \alpha_1 S_{t-1} - \alpha_0) - \dots - \phi_r(Y_{t-r} - \alpha_1 S_{t-r} - \alpha_0))^2]$

### Étape 3

Nous avons alors :

$$f(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}) = \sum_{S_t=0}^1 \sum_{S_{t-1}=0}^1 \dots \sum_{S_{t-r}=0}^1 f(Y_t, S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}) \quad (281)$$

### Étape 4

Ainsi :

$$\begin{aligned} & P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}] \quad (282) \\ &= \frac{f(Y_t, S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{-r+1})}{f(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1})} \end{aligned}$$

### Étape 5

L'output est obtenu par :

$$\begin{aligned} & P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r+1} = s_{t-r+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}] \quad (283) \\ &= \sum_{S_{t-r}=0}^1 P[S_t = s_t, S_{t-1} = s_{t-1}, \dots, S_{t-r} = s_{t-r} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-r+1}] \end{aligned}$$

On peut débiter l'algorithme par  $P[S_0 = s_0, S_{-1} = s_{-1}, \dots, S_{-r+1} = s_{-r+1} | Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-r+1}]$

Hamilton(1989) propose de procéder ainsi :

Poser  $P[S_{-r+1}=1] = \pi$  et  $P[S_{-r+1} = 0] = 1 - \pi$ .

Pour  $\tau = -r + 2, -r + 3, \dots, 0$ , on calcule :

$$\begin{aligned} & P[S_\tau = s_\tau, S_{\tau-1} = s_{\tau-1}, \dots, S_{-r+1} = s_{-r+1}] \quad (284) \\ &= P[S_\tau = s_\tau | S_{\tau-1} = s_{\tau-1}] \times P[S_{\tau-1} = s_{\tau-1}, S_{\tau-2} = s_{\tau-2}, \dots, S_{-r+1} = s_{-r+1}] \end{aligned}$$

$P[S_0 = s_0, S_{-1} = s_{-1}, \dots, S_{-r+1} = s_{-r+1}]$  est alors utilisé comme input pour le filtre basique en  $t = 1$ .

L'itération est répétée pour  $t = 1, 2, \dots, T$ .

## A.11 ÉVALUATION DE LA FONCTION DE VRAISEMBLANCE DU MODÈLE D'HAMILTON ET SUSMEL(1994)

À l'étape  $t$ , on a :

$$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-3}) \quad (285)$$

Chacun des  $K^{q+1}$  nombres est multiplié par  $p_{S_t|S_{t+1}}$  et

$f(Y_{t+1}|S_{t+1}, S_t, \dots, S_{t-q}, S_{t-q+1}, Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-q+1})$  pour obtenir les  $K^{q+2}$  nombres :

$$p(S_{t+1}, S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q}, Y_{t+1} | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-3}) \quad (286)$$

Pour une spécification gaussienne, on a :

$$f(Y_{t+1}|S_{t+1}, S_t, \dots, S_{t-q}, S_{t-q+1}, Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-q+1}) = \quad (287)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t+1}(S_{t+1}, S_t, \dots, S_{t-q+1})}} \exp\left[\frac{-(Y_{t+1}-\alpha-\phi Y_t)^2}{2\sigma_{t+1}^2(S_{t+1}, S_t, \dots, S_{t-q+1})}\right]$$

Où :

$$\sigma_t^2(\cdot) = E[\mu_t^2 | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q}, \mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \dots, \mu_{t-q}] = \quad (288)$$

$$G_{St}[a_0 + a_1 \frac{\mu_{t-1}^2}{G_{St-1}} + a_2 \frac{\mu_{t-2}^2}{G_{St-2}} + \dots + a_q \frac{\mu_{t-q}^2}{G_{St-q}} + \zeta * d_{t-1} * \frac{\mu_{t-1}^2}{G_{St-1}}]$$

### A.11.1 PRÉVISIONS

Pour prévoir les  $m$  futures périodes de  $\mu_{t+m}^2$ , on peut procéder à reculons en supposant les valeurs de  $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}$  connues de façon certaine et donc  $\tilde{\mu}_\tau = \frac{\mu_\tau}{\sqrt{G_{St}}}$  pour  $\tau = t, t-1, \dots, t-q+1$ .

Pour cet ensemble d'informations, les prévisions de  $\mu_{t+m}^2$  sont donnés par :

$$E[\mu_{t+m}^2 | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}] =$$

$$E[G_{St+m} \times \tilde{\mu}_{t+m}^2 | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}] = \quad (289)$$

$$E[G_{St+m} | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}] \times E[\tilde{\mu}_{t+m}^2 | \tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}]$$

Car  $S_t$  est indépendant de  $\mu_t$  et  $\tilde{\mu}_t$  pour tout  $t$  et  $\tau$ . Puisque  $S_t$  suit une chaîne de Markov, on a :

$$E[G_{S_{t+m}}|S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}] = \sum_{j=1}^K G_j \times Prob(S_{t+m} = j|S_t) \quad (290)$$

Les probabilités de transition des  $m$  périodes sont obtenues en multipliant la matrice  $P$   $m$  fois :  $P^m$ . On retient le vecteur :  $G'_{(1 \times K)} \equiv [G_1, G_2, \dots, G_K]$ . On peut alors réécrire :

$$E[G_{S_{t+m}}|S_t = i] = G' P^m e_i \quad (291)$$

Où  $e_i$  est la  $i$ ème colonne de la matrice identité de dimension  $(K \times K)$ . Il reste donc à calculer le deuxième terme :

$$E[\tilde{\mu}_{t+m}^2|\tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}] = \begin{cases} a_0 + a_1 \tilde{\mu}_t^2 + \dots + a_q \tilde{\mu}_{t-q+1}^2 + \zeta * d_t * \tilde{\mu}_t^2 & \text{Pour } m = 1 \\ a_0 + (a_1 + \frac{\zeta}{2}) \tilde{h}_{t+m-1|t}^2 + a_2 \tilde{h}_{t+m-2}^2 + \dots + a_q \tilde{h}_{t+m-q|t}^2 & \text{Pour } m = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (292)$$

Où  $\tilde{h}_{\tau|t}^2 = \tilde{\mu}_\tau^2$  pour  $\tau \leq t$ . Si  $\tau > t$ , on retient  $E[\tilde{\mu}_\tau^2|\tilde{\mu}_t^2, \tilde{\mu}_{t-1}^2, \dots]$ .  $\tilde{h}_{\tau|t}^2$  pour  $\tau = t+2, t+3, \dots$  est calculé par itération de l'équation 292. Les prévisions obtenues sont fonction de  $\mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1}$  et  $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}$  :

$$E[\tilde{\mu}_{t+m}^2|\tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}] = \tilde{h}_{t+m|t}^2(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1}) \quad (293)$$

On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned} & E[\mu_{t+m}^2|S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}] \\ &= (G' P^m e_{S_t}) \times \tilde{h}_{t+m}^2(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q}, \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1}) \end{aligned} \quad (294)$$

Pour les valeurs données de  $\mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1}$  on obtient les prévisions de  $\mu_{t+m}^2$  pour chaque configuration possible de  $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}$  :

$$E[\mu_{t+m}^2|S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_{t-1}, \dots, \tilde{\mu}_{t-q+1}] \sim K(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1}) \quad (295)$$

Comme on ne connaît pas réellement  $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}$  on utilise la loi des espérances itérées :

$$\begin{aligned} \sigma_{t+m|t}^2 &= E[\mu_{t+m}^2(\mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1})] = \\ & \sum_{S_t=1}^K \sum_{S_{t-1}=2}^K \dots \sum_{S_{t-q+1}=1}^K [K(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}, \mu_t, \mu_{t-1}, \dots, \mu_{t-q+1})] \times \end{aligned} \quad (296)$$

$$p(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-q+1}|Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{-3})$$

On pondère chaque prévision conditionnelle par la probabilité filtrée d'une configuration particulière pour obtenir les  $m$  prévisions de  $\mu_{t+m}^2$ .

## A.12 MÉTHODES D'ESTIMATION DE LA VAR

▷ ENCADRÉ 8 : UNE APPROCHE NON-PARAMÉTRIQUE DE LA VAR :

LA MÉTHODE DE LA SIMULATION HISTORIQUE(SH)

La méthode de la simulation historique est la plus facile des méthodes non-paramétrique. L'idée sous-jacente suppose le recours aux données historiques du marché pour calculer la VaR. L'estimation de la VaR est effectuée à partir de l'histogramme des rentabilités. L'hypothèse sous-jacente à cette méthode suppose que la distribution des rentabilités historiques est un bon proxy des rentabilités futures. Outre sa simplicité, cette méthode présente un autre avantage : elle n'admet aucune hypothèse sur la distribution statistique des rentabilités et ne nécessite pas de modèles d'estimation. En estimant la VaR à partir de la distribution des rentabilités passées, la méthode SH permet de tenir compte de différents faits stylisés des séries financières, notamment le caractère leptokurtique.

La principale limite de la simulation historique peut se traduire par l'expression " L'Histoire ne se répète jamais". En effet, les évènements récents montrent que les agents peuvent être confrontés à des évènements exceptionnels n'ayant jamais eu lieu dans l'historique des rentabilités. Par ailleurs, elle nécessite un compromis dans le choix de la période à considérer. Une trop longue période permet de retenir un maximum d'évènements exceptionnels mais met beaucoup plus l'accent sur les données passées que sur les données récentes. La VaR estimée réagit lentement aux données récentes du marché, ce qui rend l'estimation fautive. Enfin la méthode SH qui repose sur le quantile inconditionnel de l'échantillon historique fait abstraction des avancées des 20 dernières années en économétrie financière puisqu'elle ne prend pas en compte les rentabilités conditionnelles.

▷ ENCADRÉ 9 : UNE APPROCHE SEMI-PARAMÉTRIQUE DE LA VAR :

LA MÉTHODE CAVIAR

Le modèle Conditional Autoregressif Value-at-Risk(CAViAR) est introduit par Engle et Manganelli(2004). L'objectif affiché par les auteurs vise à :

- Fournir une formule pour calculer la VaR au temps  $t$  en fonction de variables connues au temps  $t - 1$  et d'un ensemble de paramètre qui doivent être estimés.
- Fournir une méthode d'estimation pour l'ensemble des paramètres inconnus.
- Fournir un test pour juger de la qualité de l'estimation.

Engle et Manganelli(2004) proposent d'estimer directement le quantile par la méthode de Koenker et Bassett (1978) dite régression quantile. Ce modèle est un compromis entre les méthodes paramétriques et non paramétriques. Une approche intéressante est l'approche hybride de Boudoukh, Richardson et Withelaw(1998). Cette méthode combine les méthodes de volatilité et celle de la simulation historique en appliquant des poids qui baissent exponentiellement aux rentabilités passées du portefeuille. L'application de la méthode d'estimation des quantiles extrêmes à la VaR date des années 2000 (Danielsson et de Vries). L'intuition consiste à exploiter les résultats de la théorie statistique des valeurs extrêmes et à concentrer l'analyse sur la forme asymptotique de la queue de distribution plutôt que sur la modélisation de toute la distribution. Mais subsistent 2 problèmes avec cette approche :

- Cette méthode ne marche que pour les quantiles avec des probabilités très faibles. Danielsson et al.(2000) ont montré que l'estimation était vraiment pauvre pour les niveaux de probabilité standard parce qu'il n'y a pas assez de valeurs extrêmes.
- Ces modèles nécessitent un cadre particulier à savoir des variables i.i.d.

En 2000, Frey et McNeil suggèrent d'estimer un modèle GARCH sur la série des rentabilités et ensuite d'appliquer la théorie des valeurs extrêmes pour les résidus. Mais cette méthode souffre des mêmes limites que les méthodes de volatilité. Enfin, Chernozukov(2000) et Manganelli et Engle(2004) ont montrés comment la théorie des valeurs extrêmes peut être incorporée dans un cadre de la régression quantile.



▷ ENCADRÉ 9 : UNE APPROCHE SEMI-PARAMÉTRIQUE DE LA VAR :

LA MÉTHODE CAViAR

Présentation du modèle

La spécificité des séries empiriques notamment les séries financières réside dans la présence de clusters de volatilité qui se traduisent le plus souvent en termes statistiques par de l'autocorrélation. Aussi, il est normal de trouver un modèle permettant de prendre en compte ce phénomène. La spécification autorégressive doit permettre de formaliser cet aspect. C'est la principale raison qui a amené les auteurs à retenir un modèle CAViAR. Supposons un vecteur de rentabilité noté  $R_t$  avec  $t = 1, \dots, T$  et posons  $\alpha$  la probabilité associée à la VaR. Posons  $X_t$  un vecteur temporel des variables observées et  $\beta_\alpha$  un vecteur de longueur  $p$  de paramètres inconnus. Enfin, posons  $f_t(\beta) \equiv f_t(X_{t-1}, \beta_0)$ , le  $\alpha$ -quantile au temps  $t$  de la distribution des rentabilités du portefeuille formé au temps  $t - 1$ . Une spécification générale du modèle CAViAR peut être donnée par :

$$f_t(\beta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i f_{t-i}(\beta) + \sum_{j=1}^r l(X_{t-j}) \quad (297)$$

Où  $p = q + r + 1$  est la dimension de  $\beta$  et  $l$  est une fonction dénombrable des valeurs retardées des variables observées. Le terme autorégressif  $\beta_i f_{t-i}(\beta)$  assure que le changement du quantile se fait en douceur au fil du temps. Le rôle de  $l(X_{t-j})$  est de lier  $f_t(\beta)$  aux variables observées qui appartiennent à l'ensemble d'informations. Les paramètres du modèle CAViAR sont estimés par la régression quantile développée par Koenker et Bassett(1978). Ils ont montrés comment étendre la notion de quantile d'échantillon à un modèle de régression linéaire. Considérons un échantillon généré par le modèle :

$$R_t = X_t' \beta_0 + \epsilon_{\alpha t} \quad Quant_\alpha(\epsilon_{\alpha t} / X_t) = 0 \quad (298)$$

Où  $X_t$  est un vecteur de longueur  $p$  des régresseurs et  $Quant_\alpha(\epsilon_{\alpha t} / X_t)$  est le  $\alpha$ -quantile de  $\epsilon_{\alpha t}$  conditionnellement à  $X_t$ . Posons  $f_t(\beta) \equiv X_t \beta$ . La régression du  $\alpha$ -ième quantile est donnée par le  $\hat{\beta}$  qui satisfait :

$$\min_{\beta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [R_t < f_t(\beta)][R_t - f_t(\beta)] \quad (299)$$

## A.13 LIMITES ET ALTERNATIVES À LA VaR

### A.13.1 LIMITES DE L'INSTRUMENT VaR

'The VaR is like an airbag that works all the time except when you have an accident' (Einhorn(2008)).

Malgré sa simplicité, la VaR a très rapidement souffert d'un certain nombre de critiques. L'une des critiques avancées pendant la récente crise financière concerne sa maniabilité. Brown et Tolikas(2006) montrent que l'utilisation d'une VaR gaussienne peut largement sous estimer le risque même si elle est appliquée à des actifs comme les actions. Danielsson (2009) montre que la prévision du risque par l'instrument VaR est imprécise. Il a montré que les estimations de la VaR par différentes méthodes et pour plusieurs périodes de références varient fortement (50% pour l'année 2003 et entre 100 et 320% pour 2005). Une comparaison des méthodes d'estimation s'avère difficile à cause des faiblesses des techniques de backtesting. Escangio et Olmo(2010) pointent aussi les insuffisances des méthodes de backtesting utilisées par les banques et par les régulateurs et proposent une méthode pour adapter ces tests.

La VaR souffre d'un problème d'agrégation temporelle : une prévision de la VaR à 10 jours à partir de la prévision quotidienne nécessite une distribution i.i.d. des rendements. Dans le cas où cette condition ne serait pas remplie, il faut recourir à un modèle de dépendance entre les rendements. La VaR n'est pas une mesure cohérente car elle n'est pas sous-additive. En effet, la VaR d'un portefeuille peut être supérieur à la somme des VaR de ses composantes. Artzner et al.(1999) définissent la notion de mesure de risque cohérente. Notons  $I$  un ensemble de variables aléatoires de pertes réelles définies sur un espace mesurable  $(\Omega, A)$ .  $I$  contient les constantes et est stable par l'addition et la multiplication par un scalaire. Une application  $p : I \rightarrow R$  est appelée mesure de risque cohérente si elle est :

- monotone :  $\forall L_1, L_2 \in I; L_1 \leq L_2 \Rightarrow p(L_1) \leq p(L_2)$ .
- sous-additive :  $\forall L_1, L_2 \in I; p(L_1 + L_2) \leq p(L_1) + p(L_2)$ .
- positivement homogène :  $\forall L \in I, \forall \lambda \geq 0; p(L) = \lambda p(L)$ .
- invariante par translation :  $\forall L \in I, \forall c \in R; p(L + c) = p(L) + c$ .

La VaR est une mesure monotone, positivement homogène, invariante par translation mais pas sous-additive. Par conséquent la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente. Ibragimov(2009), Garcia, Renault et Tsafack(2007) montrent que la VaR peut être sous-additive si les queues de distribution marginales sont épaisses et asymétriques. De plus, Embrechts et al.(2005) montrent que c'est une mesure cohérente pour une classe de distribution elliptiques. Malgré la popularité dont jouie la VaR, ses limites conduisent à envisager d'autres mesures de risques.

La mesure VaR s'inscrit dans le cadre des mesures de distorsions dont une définition générale peut être donnée par :

$$\Gamma(F, G) = \int_0^1 F^{-1}(1-u) dG(u) \quad (300)$$

Où  $G$  est une fonction de répartition sur  $[0;1]$  dite fonction de distorsion et  $F$  est la distribution des pertes. Ainsi la VaR constitue un cas particulier de mesure de distorsion dans laquelle  $G$  est la masse de Dirac en  $\alpha$ . Un autre cas particulier de mesure de distorsion peut être fourni par l'Expected Shortfall(ES). L'ES est la mesure de référence des risques standard dans le domaine des assurances recommandée par Solvency 2. Elle représente pour un niveau  $\alpha$  la moyenne des VaR sur tous les niveaux  $u \leq \alpha$ . Cette mesure est d'autant plus intéressante qu'elle répond aux critères de mesure cohérente définis par Artzner et al.(1999). L'ES est une mesure de distorsion particulière dans laquelle la densité  $G$  est constante sur  $[0; \alpha]$ .

L'instrument VaR ne fournit aucune information sur l'ampleur des pertes qui peuvent survenir au-delà de l'estimation de la VaR. La VaR peut conduire à une mauvaise interprétation des risques : par exemple les portefeuilles qui affichent une même VaR ne sont pas nécessairement soumis aux mêmes risques. Pour pallier cette faiblesse, Longin (2001) suggère l'utilisation d'une VaR conditionnelle qui permet de mesurer la valeur attendue des pertes dans le cas où elles seraient supérieures à l'estimation de la VaR.

La simplicité, principal atout de la VaR, constitue une importante limite de cette mesure. En représentant un seul point de la distribution des pertes et profits, la VaR peut conduire à des choix risqués. Ainsi Boyle, Hardy et Vorst(2005) montrent que les traders ont tendance à choisir les portefeuilles les plus risqués lorsqu'ils sont contraints par la VaR. Basak et Shapiro(2001) indiquent que, sous contrainte de la VaR, les agents sont plus enclins à investir dans des actifs risqués que lorsque la contrainte VaR n'est pas posée.

Elle a aussi été critiquée sur sa capacité à rendre compte d'autres risques que le risque de marché (Damodaran(2007)). Malgré les extensions de la mesure VaR aux autres types de risques, Damodaran(2007) note la difficulté de la VaR à pouvoir rendre compte de façon précise du risque pour des horizons temporels longs : les résultats se détériorent rapidement lorsque l'on passe de mesures mensuelles à des mesures annuelles. Kritzman et Rich(2002) expliquent qu'une des faiblesses de la VaR porte sur la prise en compte des pertes subies à la fin de la période d'estimation alors qu'au même moment beaucoup d'investisseurs ont une vision du risque différente. Ils peuvent être exposés aux pertes durant toute la période de détention mais le risque n'est pas correctement capturé par les modèles VaR normale. Les auteurs recommandent alors le recours à une VaR continue. D'autres critiques portent sur l'idée selon laquelle les rentabilités passées sont un bon prédicteur des rentabilités futures ou encore sur les hypothèses restrictives rarement vérifiées sur lesquelles repose la VaR. Tsai(2004) recommande l'utilisation d'autres mesures de risque en plus de la VaR. Su et Hung(2011) analysent l'impact des dynamiques à saut, des queues épaisses et du skewness sur l'estimation de la VaR. Il ressort de leur étude que le rôle des dynamiques à sauts est plus important que la présence des queues épaisses ou d'un fort skewness sur la prévision de la VaR à 90% et 95 % alors que l'épaisseur des queues de distribution est plus importante pour la VaR à 99% en position longue. En position courte, aucune de ces 3 caractéristiques n'a d'impact substantiel.

### A.13.2 ALTERNATIVES

La VaR normale peut être améliorée par l'introduction du skewness et du kurtosis. Par exemple, la VaR Cornish Fisher(VaR CF) proposée par Favre et Galeano(2002) permet une correction de la VaR normale en introduisant un développement Cornish-Fisher de la fonction quantile d'une distribution autour de la distribution gaussienne. Ainsi, si on retient une distribution leptokurtique et asymétrique, la VaR CF permet un décalage à gauche par rapport à la VaR normale et prend en compte les écarts par rapport à la loi normale. Une des limites de cette VaR CF a été soulevée par Lhabitant(2004) qui montre que cette VaR n'est correcte que si le skewness est petit et la kurtosis proche de 3. Une autre alternative à la VaR normale consiste à retenir d'autres lois de distribution que la

loi normale.

Nous présentons certaines alternatives à la VaR.

### A.13.2.1 LA CONDITIONAL VALUE-AT-RISK

La Conditional Value-at-Risk (CVaR) ou Expected Shortfall(ES) ou encore Tail-VaR (TVaR) à  $\alpha\%$  représente les pertes moyennes attendues au-delà de la VaR pour un niveau de confiance de  $(1 - \alpha\%)$ . Recommandée en 2002 par le sous-comité Life capital de l'Académie Américaine des Actuaires pour le calcul des fonds propres requis pour le risque de marché, elle traduit la moyenne équipondérée de toutes les VaR calculées à des niveaux de risques inférieurs ou égaux à  $\alpha$ . Elle améliore la VaR en prenant en compte l'ampleur des pertes. La notoriété dont jouie cette mesure face à la VaR réside dans sa capacité à prendre en compte les pertes extrêmes et rares. Il s'agit d'une mesure cohérente au sens d'Artzner et al. (1999). Elle a été utilisée dans le cadre d'optimisation de portefeuille notamment par Rockafellar et Uryasev(2000). De Giorgi(2002) et Rockafellar et al.(2000) montrent que si la distribution des rentabilités du portefeuille est une distribution multivariée normale et que l'investisseur connaît les paramètres alors le portefeuille qui minimise l'ES pour une rentabilité  $\bar{R}$  minimise aussi la variance et la VaR avec la même rentabilité espérée. Autrement dit, les frontières de l'optimisation moyenne-CVaR sont identiques à celles de l'optimisation moyenne-VaR. Ce constat est vérifié même si l'investisseur ignore le processus générateur de données. D'aucuns ont cherché à mettre en évidence une mesure de conversion entre la VaR et la TVaR :

- en calculant un ratio  $\frac{TVaR}{VaR}$  pour un même niveau de risque. La valeur de ce ratio ( $> 1$ ) fournit le facteur multiplicatif. Gouriéroux et Liu(2012) donnent les relations entre la VaR et la TVaR selon la distribution retenue(loi uniforme, exponentielle, Pareto ou Normale)[Tableau 19].

| Distribution                       | $U(a, b)$  | $\gamma(1, \lambda)$         | $Pareto(a, b)$             | $N(0, 1)$   |
|------------------------------------|--|------------------------------|----------------------------|---|
| $\frac{TVaR(\alpha)}{VaR(\alpha)}$ | $\frac{b(2-\alpha)+a\alpha}{2[b(1-\alpha)+a\alpha]}$ | $1 - \frac{1}{\log(\alpha)}$ | $\frac{a}{a-1}$            | $\frac{\phi(\Phi^{-1}(1-\alpha))}{\alpha\Phi^{-1}(1-\alpha)}$ |
| $g(\alpha)$                        | $\frac{\alpha}{2}$                                   | $\frac{\alpha}{e}$           | $(\frac{a-1}{a})^a \alpha$ | $1 - \Phi[\frac{1}{\alpha}\phi[\Phi^{-1}(1-\alpha)]]$         |

Tableau 19 – Relation entre la VaR et la TVaR

$g(\alpha)$  traduit la valeur de  $\alpha^* = g(\alpha)$  telle que  $TVaR(\alpha) = VaR(\alpha^*)$ ,  $\phi$  et  $\Phi$  représentent respectivement les fonctions de densité et de répartition de la loi normale. Ils montrent que pour une variable  $X$  positive dont les moments de premier ordre sont finis, le ratio  $\frac{TVaR}{VaR}$  est constant en  $\alpha$  si et seulement si la distribution sous-jacente est une distribution de Pareto.

- en reliant les deux mesures selon leur niveau de risque. Ainsi, la TVaR représente la VaR à un niveau de risque différent. Si on note  $\alpha$  et  $\alpha'$ , deux niveaux de risques différents avec  $\alpha > \alpha'$  alors la  $TVaR(\alpha)$  est égale à la  $VaR(\alpha')$ .

Ces deux options supposent une connaissance parfaite de la distribution des P&L. Gouriéroux et Liu(2012) se basent sur la deuxième option et mettent en évidence les caractéristiques linéaires du facteur de conversion estimé permettant de passer de la TVaR à la VaR. Un test d'hypothèse sur la linéarité de la fonction de conversion est proposé. Cont et alli.(2010) et Heyde et alli.(2007) montrent que l'estimation de la CVaR est moins " robuste " au sens de Huber(1981) et Hampel(1974). Mais les partisans de cette mesure notent son utilité lorsque les rentabilités dévient de la distribution normale, notamment lorsqu'elles sont leptokurtiques. Un des aspects non analysé par Artzner et al.(1999) porte sur les erreurs d'estimation et leurs effets sur les optimisations de portefeuille. En effet, la précision des données est essentielle pour une mesure de risques extrêmes. Or, un historique de plusieurs années de données financières peut être imprécis à cause de la non stationnarité de la distribution des rentabilités. Aussi Lim et al.(2010) proposent d'analyser l'impact des erreurs d'estimation dans la CVaR notamment dans le cadre d'optimisation de portefeuille. Ils montrent que malgré la cohérence de cette mesure, sa fragilité à cause des erreurs d'estimation doit être prise en compte. Yamai et Yoshiba(2005) montrent que l'utilisation de la VaR comme mesure de risques dans le cadre d'une maximisation de l'utilité espérée d'un investisseur peut induire en erreur. La mesure VaR n'est pas fiable pour un marché en crise car elle sous-estime le risque. Le recours à l'ES peut constituer une alternative intéressante mais l'efficacité de cette mesure dépend de la précision de l'estimation. Il semble que l'ES nécessite un échantillon de taille plus importante que la VaR pour obtenir le même niveau de précision notamment lorsque la distribution des rentabilités est caractérisée par des queues épaisses. La mesure VaR est caractérisée par la propriété de 'tail risk' car elle est incapable de résumer le risque relatif à un actif caractérisé par une distribution avec des queues épaisses et un nombre important de pertes extrêmes. L'exemple suivant est extrait

de Yamai et Yoshihara(2002) : " Soient deux portefeuilles A et B dont les VaR respectives sont 10 et 15 millions avec un niveau de confiance de 99%. Le seul constat que l'on peut faire par l'instrument VaR, c'est que le portefeuille B semble plus risqué que le portefeuille A. Or, cette affirmation peut être erronée. Si la perte maximale des portefeuilles A et B est respectivement de 1 milliard et 16 millions, le portefeuille A est plus risqué que le portefeuille B puisque la perte dans les pires conditions est plus importante pour le portefeuille A". L'incapacité de la VaR à pouvoir discriminer clairement les portefeuilles A et B réside dans la non prise en compte des pertes subies au-delà de la VaR : c'est la propriété de 'tail risk'. Si les rentabilités suivent une distribution normale, Yamai et Yoshihara(2002) ont montrés que la VaR et l'ES sont exemptés de la propriété de 'tail risk'. Plus précisément, selon Embrechts et al.(2002) la VaR et l'ES fournissent la même information lorsque les rentabilités suivent une loi elliptique. Sous l'hypothèse d'une distribution normale des P&L, la VaR et l'ES sont identiques.

#### A.13.2.2 LA MEAN-MODIFIED VAR

Favre et Galeano(2002) proposent la mean-modified VaR basée sur les travaux de Huisman et al.(1999) et l'expansion de Cornish-Fisher. Wilmott(1998) explique que l'hypothèse selon laquelle la moyenne des rentabilités est nulle n'est valide que pour des horizons courts. Pour des périodes plus longues, il faut en tenir compte. La mean-modified VaR est donnée par :

$$VaR = w[\mu - (z_c + \frac{1}{6}(z_c^2 - 1)S + \frac{1}{24}(z_c^3 - 3z_c)K - \frac{1}{36}(2z_c^3 - 5z_c)S^2)\sigma] \quad (301)$$

Où  $w$  est le montant investit,  $z_c$  est le niveau de confiance,  $\mu$  est la moyenne,  $S$  le skewness et  $K$  le kurtosis. Pour un portefeuille avec un skewness négatif et/ou un excès de kurtosis, la VaR modifiée conduit à de meilleurs résultats que la VaR normale.

Nous avons souligné l'incapacité des modèles d'estimation de la VaR de type variance/covariance à pouvoir donner des résultats satisfaisants pour des actifs non linéaires comme les options. L'approche delta-normal VaR tente de pallier cette lacune en retenant une approximation de premier ordre des rentabilités des actifs non linéaires. Elle est rapidement limitée par la présence de certaines non-linéarités dans le portefeuille. Britten-Jones et Schaefer(1999) proposent alors un modèle VaR quadratique dit delta-gamma VaR qui

prend en compte une approximation de deuxième ordre. Ces alternatives sont intéressantes mais perdent les avantages de la VaR normale.

### A.13.2.3 LA VaR STRESSÉE

Définie dans le cadre des révisions de l'accord Bâle 2, la VaR stressée est déterminée à partir d'un historique de crise. Elle vise à réduire la procyclicité des fonds propres et conduit ainsi à leur augmentation de 110%. L'introduction d'une VaR stressée doit permettre de remédier aux faiblesses de la VaR classique en déterminant le montant minimal de fonds propres par une combinaison linéaire des VaR classique et stressée :

$$c = \max\{VaR_{t-1}; m_c * VaR_{AVG}\} + \max\{SVaR_{t-1}; m_s * SVaR_{AVG}\} \quad (302)$$

Où  $c$  est le montant minimal de fonds propres requis,  $VaR_{t-1}$ ;  $VaR_{AVG}$  désignent respectivement la VaR classique en  $t-1$  et la moyenne des  $VaR_{t-1}$  sur une période de 60 jours,  $SVaR_{t-1}$  est la VaR stressée en  $t-1$  et  $SVaR_{AVG}$  la moyenne des VaR stressées en  $t-1$  sur une période de 60 jours.  $m_c$  et  $m_s$  sont des facteurs multiplicatifs compris entre 3 et 4 déterminés par les autorités de supervision.

### A.13.2.4 LA STRESS-VAR

Coste et al.(2009) introduisent une nouvelle approche de l'estimation du risque basée sur des modèles à facteurs non linéaires. Le recours à la stress-VaR permet de pallier les difficultés des autres mesures de risque notamment sur la prise en compte et l'anticipation d'évènements extrêmes. La SVaR est basée sur des modèles facteurs et repose sur 3 étapes :

1. le factor scoring : sur un grand nombre de facteurs qui peuvent expliquer le risque il faut estimer pour chaque facteur un modèle non linéaire et retenir une mesure de comparaison, par exemple la p-value. Il faut ensuite ranger les facteurs selon la part qu'ils expliquent dans la série des rentabilités. On retient alors un certain nombre de facteurs explicatifs dont les p-values sont supérieures à un certain seuil.



2. Estimer les facteurs de risques : il faut estimer la distribution du facteur de risque en utilisant l'historique le plus long possible. Ensuite on peut prévoir les pertes liées à l'actif pour un pourcentage donné  $q$  du facteur de risque.
3. Estimer la SVaR : c'est le maximum des pertes prévues par les différents facteurs de risques sélectionnés. La SVaR est alors la somme quadratique des facteurs de risques et du risque spécifique :

$$SVaR = \sqrt{\widehat{Y}_{max}^2 + \sigma^2(Y) \times (1 - R^2)\psi^2} \quad (303)$$

Où  $\sigma^2(Y)$  est la variance de la série des rentabilités,  $Y_{max}$  est la perte maximale potentielle correspondant à  $q\%$  du facteur des rentabilités et  $R^2$  représente la somme entre le facteur de risque et le risque spécifique.  $\psi = F^{-1}(q)$  où  $F$  est la fonction de distribution. On peut retenir une distribution normale. Le risque de cette mesure réside dans la sélection fallacieuse des facteurs de risques. Coste et al.(2009) proposent alors de retenir un test permettant d'évaluer la pertinence d'un facteur.

---

En dépit des différentes limites de la VaR, aucun instrument alternatif n'a pu s'imposer comme mesure de référence du risque de marché. La simplicité et la popularité de la VaR ne doivent pas entraver l'amélioration de cette mesure. Plus précisément, la méthode d'estimation paramétrique standard de la VaR est basée sur un corps d'hypothèses qui restent à vérifier.

## A.14 LES PROCÉDURES DE BACKTESTING : CADRE STATISTIQUE ET NORMES PRUDENTIELLES

Bâle II prévoit l'utilisation des modèles internes pour la gestion et l'évaluation des risques financiers. Les banques doivent mener des exercices de backtesting pour montrer que leur modèle est approprié dans l'estimation de leurs risques. Au-delà de la procédure d'évaluation des modèles, le backtesting constitue tout un ensemble : " *A backtesting program refers to the whole process of conducting backtesting including selecting the data for backtesting, the comparisons to be made in backtesting including portfolio and or market data selection, the selection and development of appropriate statistical tests, the exploration of poor backtesting results and the decisions to take remedial action where appropriate. The*

*backtesting program should be fully described in policies and procedures*"(CBSB(2010))<sup>108</sup>.

Un certain nombre de préconisations, notamment le taux de couverture et l'horizon de prévision ont été formulées dès 1996 lors de l'introduction de la VaR comme mesure de risque de marché. Au même moment, le CBSB propose une méthode d'évaluation des prévisions de la VaR. Elle est à la base du calcul des fonds propres et dépend du nombre d'échecs du modèle d'estimation. Elle définit 3 zones (verte, jaune et rouge) qui permettent de calculer un facteur multiplicatif du montant des fonds propres requis. L'approche traffic light (en référence aux 3 couleurs) est la principale méthode de backtesting du CBSB. Ce dernier, conscient des limites de ces procédures, recommande fortement l'utilisation des stress-tests comme complément aux procédures de backtesting.

#### A.14.1 CONCEPTS ET HYPOTHÈSES THÉORIQUES

Les tests de backtesting sont basés sur un ensemble de concepts et hypothèses théoriques. En fonction de la nature du test, les hypothèses et les procédures peuvent différer mais la précision d'un modèle d'estimation ne peut être vérifiée que si le processus de violations satisfait deux hypothèses importantes : la couverture inconditionnelle et l'indépendance des violations. Ces deux hypothèses ne sont testées que dans une approche Event Probability Forecast Evaluation. Il est à noter que les différents tests présentés sont construits de telle sorte à être applicable à toute prévision de la VaR quelque soit la méthode d'estimation. Nous donnons dans un premier point une définition des concepts clés à la base des procédures de backtesting avant de présenter les hypothèses que doit satisfaire le processus de violation.

##### A.14.1.1 DÉFINITION DES CONCEPTS DES PROCÉDURES D'ÉVALUATION

Notons  $R_t$  la rentabilité d'un actif en  $t$ . La valeur ex-ante de la VaR pour un taux de couverture de  $\alpha\%$ , notée  $VaR_{t|t-1}(\alpha)$  est définie par :

$$Prob[R_t < VaR_{t|t-1}(\alpha)] = \alpha \quad (304)$$

---

108. Extrait de *Sound practices for backtesting counterparty credit risk models*.

### Violation

On appelle violation ou hit une situation dans laquelle à la date  $t$  la perte observée excède la VaR anticipée.

Si on retient  $T$  prévisions de la VaR et que l'on observe  $N$  exceptions, c'est-à-dire  $N$  fois où les pertes excèdent le montant de la VaR alors on peut définir un taux d'échec noté  $\frac{N}{T}$ . Une modélisation adéquate doit conduire à une égalité entre le taux d'échec et le taux de couverture. À partir des violations ou des non-violations observées à chaque pas de temps  $t$ , il est possible de construire un processus dit de violations défini par :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (305)$$

Le processus de violations peut être amendé de telle sorte à ce qu'il prenne en compte l'ampleur des pertes :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} R_t - VaR_{t|t-1}(\alpha) & \text{si } R_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (306)$$

#### A.14.1.2 LES HYPOTHÈSES DE VALIDATION DE LA VaR

**Comment tester la validité de prévision de la VaR ?** Traditionnellement la validité d'une prévision d'une grandeur économique est évaluée en comparant sa réalisation ex-post à la valeur prédite ex-ante. En ce qui concerne la VaR, la réalisation ex-post est inobservable. Une solution consiste à utiliser un proxy. Pour la VaR, aucune variable proxy satisfaisante n'a été trouvée donc l'évaluation est fondée sur des tests statistiques de 2 hypothèses principales que le processus de violations de la VaR anticipée doit satisfaire à savoir l'hypothèse de couverture non conditionnelle et l'hypothèse d'indépendance.

L'évaluation des prévisions de la VaR est soumise à des tests statistiques qui visent à vérifier si le processus associé aux violations de la VaR ex-ante vérifie deux hypothèses essentielles. Selon Christoffersen(1998), une prévision de la VaR est valide si et seulement si la séquence de violations satisfait ces deux hypothèses indépendantes.

Hypothèse de couverture non conditionnelle.

Elle est satisfaite lorsque le nombre de violations observées est précisément égal au taux de couverture  $\alpha$  :

$$Prob[I_t(\alpha) = 1] = E[I_t(\alpha)] = \alpha \quad (307)$$

Sous cette hypothèse, le processus de violations  $I(\alpha)$  suit une loi binomiale de paramètre  $p$  où  $p = \alpha$ . Si  $p < \alpha$  alors il y a une surestimation de la VaR et donc du risque. La VaR est conservative, c'est un risque de deuxième ordre. Si  $p > \alpha$  alors il y a une sous-estimation de la VaR et donc du risque, c'est un risque de premier ordre :

$$Prob[I_t(\alpha) = 1] = E[I_t(\alpha)] > \alpha \quad (308)$$

Un bon modèle d'estimation de la VaR doit être capable de réagir à l'évolution de la volatilité et des corrélations de telle sorte à ce que les violations de la VaR se produisent indépendamment les unes des autres. Un mauvais modèle d'estimation a tendance à créer des grappes de violations. Ces dernières sont d'autant plus dangereuses qu'elles sont susceptibles de mener à des désastres financiers tant les pertes successives sont importantes.

Hypothèse d'indépendance des violations.

Elle est satisfaite lorsque les violations de la VaR observées à 2 dates différentes pour un même taux de couverture sont indépendamment distribuées. En d'autres termes, il n'existe pas de clusters de violations.

Formellement,  $I_t(\alpha)$  associé à la date  $t$  de la VaR pour un taux de couverture de  $\alpha$  % est indépendante de  $I_{t-k}(\alpha), \forall k \neq 0$ . Si ces deux hypothèses sont respectées, l'hypothèse de couverture conditionnelle est vérifiée :

Hypothèse de couverture conditionnelle.

Elle est satisfaite lorsque la probabilité conditionnelle à l'information disponible en  $t - 1$  que se réalise ex-post une perte en excès par rapport à la VaR est précisément égale au taux de couverture  $\alpha$  :

$$Prob[I_t(\alpha) = 1 | \Omega_{t-1}] = E[I_t(\alpha) | \Omega_{t-1}] = \alpha \quad (309)$$

Où  $\Omega_{t-1}$  est l'ensemble d'information utilisé pour prévoir la VaR.

---

Les procédures de backtesting sont basées sur la construction d'un processus de violations qui permet de répertorier les dépassements de la VaR. Christoffersen(1998) présente deux

hypothèses que doit satisfaire ce processus de violations : la couverture inconditionnelle et l'indépendance. Le cadre normatif du backtesting présenté par le CBSB propose une méthode d'évaluation, essentiellement basée sur le nombre de violations et non sur l'indépendance des violations. La crise a conduit à des normes plus strictes qui exigent des institutions financières la mise en place de programmes de stress-tests plus sévères en complément des tests de backtesting. Il n'en demeure pas moins que l'approche traffic light en tant que test de backtesting est insuffisante pour détecter les " mauvais " modèles. Aussi, de nombreuses avancées ont été faites pour améliorer les procédures d'évaluation de la VaR : elles sont présentées dans la section suivante.

#### A.14.2 LES NORMES PRUDENTIELLES

La normalisation des règles et des techniques nécessaires au calcul des fonds propres des établissements bancaires a été fortement encouragée par le G10. Bâle I (et Solvency I pour les assurances) impose aux établissements concernés des méthodes basées sur des critères empiriques et forfaitaires. Bâle II et Solvency II introduisent des méthodes quantitatives beaucoup plus techniques en termes de formalisation. Le suivi du risque des établissements bancaires nécessite l'utilisation de trois mesures qui ne sont efficaces que si elles sont utilisées simultanément. La première mesure porte sur l'analyse de sensibilité. Il s'agit de mesurer la sensibilité des portefeuilles d'actifs aux variations de premier et parfois second ordre de certaines grandeurs classiques telles que les indices d'actions, les taux d'intérêt, etc. Ce sont des mesures locales non adaptées à la modélisation de variations de grandes amplitudes. La seconde métrique concerne les stress-tests qui permettent de mesurer la perte d'un portefeuille dans des scénarios extrêmes. Cette mesure nécessite la définition d'un scénario pertinent et plausible qu'il est possible de construire à partir des caractéristiques des scénarios historiques des crises passées ou à partir de scénarios théoriques. La dernière mesure est la Value-at-Risk. Contrairement aux deux précédentes, cette métrique est basée sur une approche probabiliste, d'où son intérêt. Quelque soit la méthode d'estimation utilisée, il revient aux établissements financiers de s'assurer de la précision et de la qualité de leurs modèles d'estimation de la VaR. Le CBSB présente, dès janvier 1996, un dispositif prudentiel permettant le contrôle ex-post des modèles internes utilisés dans le cadre du risque de marché. Conscient de l'hétérogénéité des méthodologies de contrôles

utilisés par les établissements financiers, le Comité propose une technique de backtesting couplée à l'utilisation des modèles internes. Dans son introduction, il souligne le caractère limité des procédures de backtesting mais note *'the need to put in place appropriate incentives'*. L'approche du CBSB consiste à identifier le nombre de violations par comparaison entre les VaR estimées sur les 250 derniers jours et les rentabilités correspondantes. Il définit alors un facteur d'échelle qui pénalise les modèles les moins performants en imposant un montant de fonds propres plus élevé. Cette procédure est détaillée dans le premier point. Dans un second point, nous présentons les stress-tests.

#### A.14.2.1 L'APPROCHE TRAFFIC LIGHT

L'obligation de disposer des fonds requis pour faire face aux pertes potentielles s'inscrit dans le cadre réglementaire défini par le Comité de Bâle. Il impose le calcul d'une VaR sur 10 jours avec un niveau de confiance de 99% et l'évaluation par des procédures de backtesting. Le processus de backtesting réglementaire suppose la comparaison des 250 dernières VaR estimées à 99% avec les rentabilités correspondantes. La précision du modèle est évaluée par comptabilisation du nombre d'exceptions durant la période retenue. Le montant des fonds propres requis augmente avec le risque associé à l'actif et il dépend des résultats du backtesting :

$$S_t = \begin{cases} 3 & \text{si } N \leq 4 \\ 3 + 0.2(N - 4) & \text{si } 5 \leq N \leq 9 \\ 4 & \text{si } 10 \leq N \end{cases} \quad (310)$$

Où  $S_t$  est le facteur d'échelle du montant des fonds propres requis et  $N$  le nombre d'exceptions observés sur les 250 derniers jours. Le comité de Bâle catégorise les résultats selon 3 couleurs : verte, jaune et rouge (▷ Tableau 20). La probabilité cumulative désigne la probabilité d'obtenir un nombre donné ou inférieur d'exceptions quand le modèle est correct. Si on retient un taux de couverture de 1% pour 250 VaR estimées, le nombre d'exceptions autorisées est de 2.5. Si le nombre d'exceptions varie entre 0 et 4 alors le modèle est en zone verte : il est d'autant plus précis que la probabilité d'accepter un mauvais modèle est faible. La zone jaune peut concerner de bons modèles mais aussi de mauvais modèles avec une

| Zone  | N       | Augmentation du facteur d'échelle | Probabilité cumulative |
|-------|---------|-----------------------------------|------------------------|
| Verte | 0       | 0                                 | 8,11%                  |
| Verte | 1       | 0                                 | 28,58%                 |
| Verte | 2       | 0                                 | 54,32%                 |
| Verte | 3       | 0                                 | 75,81%                 |
| Verte | 4       | 0                                 | 89,22%                 |
| Jaune | 5       | 0,4                               | 95,8%                  |
| Jaune | 6       | 0,5                               | 98,63%                 |
| Jaune | 7       | 0,65                              | 99,6%                  |
| Jaune | 8       | 0,75                              | 99,89%                 |
| Jaune | 9       | 0,85                              | 99,97%                 |
| Rouge | 10 ou + | 1                                 | 99,99%                 |

Tableau 20 – Approche Traffic light pour 250 observations

probabilité relativement élevé. Si les résultats des procédures de backtesting conduisent à la zone jaune alors il peut y avoir une augmentation du facteur multiplicatif des fonds propres selon le nombre d'exceptions enregistrées. Cependant, la possibilité qu'un bon modèle bascule en zone jaune conduit les autorités à certaines souplesses : si la banque concernée peut démontrer que son modèle est bon et que sa présence en zone jaune n'est que transitoire alors les autorités réglementaires peuvent réviser leurs exigences en termes de fonds propres. Le comité de Bâle propose une classification des raisons qui justifient de faibles résultats de validation :

1. L'intégrité basique du modèle : le système est incapable de capturer le risque des positions ou il y a un problème dans le calcul des volatilités et des corrélations.
2. La précision du modèle peut être améliorée : le risque de certains instruments n'est pas mesuré avec une précision suffisante.
3. La malchance ou une évolution du marché non anticipée par le modèle
4. Les échanges intra-journaliers : il y a un changement des positions après les estimations de la VaR.

La zone rouge est sans appel : il y a clairement un problème avec le modèle qui doit être rejeté. Haas(2001) pointe la faiblesse de cette approche qui ne teste pas l'indépendance des violations de la VaR. Par ailleurs, cette approche ne permet pas de distinguer clairement un bon modèle d'un mauvais mais cette limite, reconnue par le Comité de Bâle, est préférable à une norme purement discrétionnaire ou qui ne dispose d'aucune incitation que ce soit.

#### A.14.2.2 LES STRESS-TESTS

Les stress-tests constituent un instrument complémentaire à la VaR, c'est un outil de gestion des risques financiers prévu par le pilier de l'accord dit Bâle II et renforcé dans le cadre réglementaire de Bâle III. L'historique des rendements à partir duquel est estimée la VaR peut ne comporter aucune période de stress extrême. Aussi, les stress-tests permettent d'envisager des scénarios extrêmes qui peuvent survenir à tout moment. Lopez (2005) définit le stress-test comme " un instrument de gestion du risque utilisé pour évaluer l'impact potentiel sur la valeur d'un portefeuille d'un événement ou d'un mouvement improbable mais plausible d'un ensemble de variables financières ."

L'idée du stress-testing est d'aller au-delà du niveau de confiance de la VaR (99%). L'objectif visé par les exercices de stress-tests est l'évaluation des impacts potentiels de scénarios particulièrement sévères mais réalistes. Les scénarios tiennent compte de chocs macroéconomiques ou financiers et une simulation de ces derniers peut permettre d'identifier les canaux de transmission. Une version simplifiée des stress-tests consiste en une analyse des sensibilités. En pratique les stress-tests se basent sur différentes simulations des variations des facteurs de risques représentés par exemple par des courbes de taux, des surfaces de volatilités etc.... L'idée est relativement simple : il s'agit de simuler des chocs de sensibilités sur un seul facteur de risque pour évaluer l'impact de ces chocs sur les différentes positions. Un " bon " stress-test doit être à la fois sévère et plausible : sévère pour simuler des chocs extrêmes susceptibles d'arriver à tout moment et plausible pour que cet outil donne des résultats réalistes.

Les stress-tests peuvent être utilisés pour estimer le capital nécessaire pour couvrir les pertes prévues par les scénarios, ils peuvent aussi constituer un outil d'analyse des crises de liquidité et de l'effet de contagion. Aux États-Unis, l'objectif des stress-tests est un peu



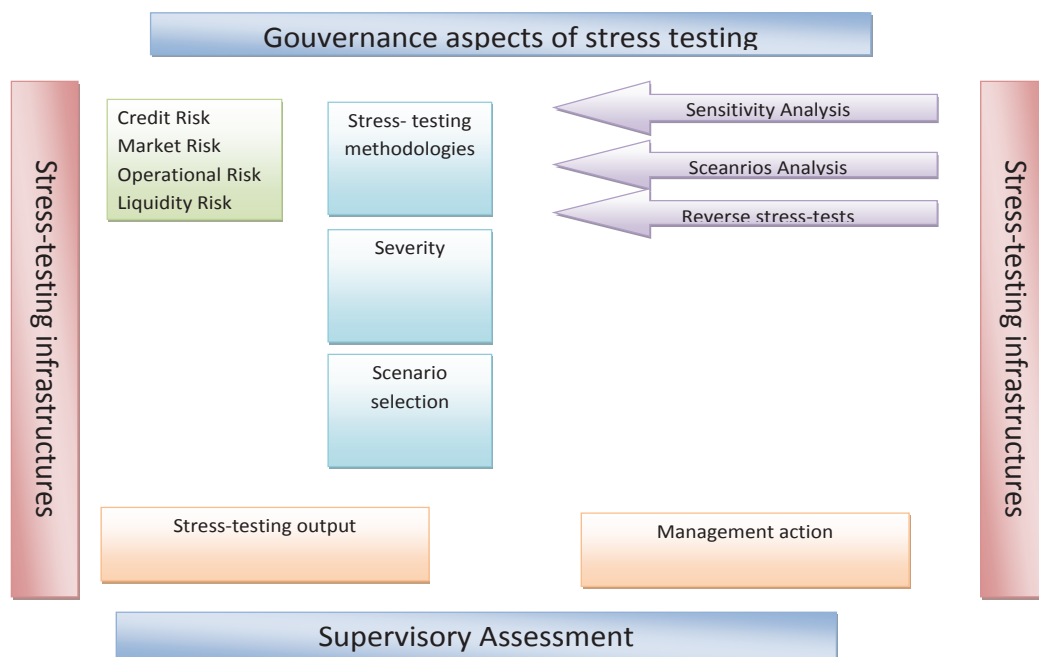
plus large : il s'agit non seulement de tester la résistance des institutions financières mais aussi d'évaluer des plans de capitalisation et de mettre en place des mesures de recapitalisation, de restriction de distribution de dividendes dans un contexte perturbé. Compte tenu des informations nécessaires pour la construction d'un scénario réaliste, une participation collégiale d'experts est nécessaire (économistes, risk managers...). Cet instrument peut aussi être utilisé dans le cadre d'optimisation de portefeuille et pour la gestion des risques dans un contexte particulièrement agité. Les méthodologies relatives à cet instrument se sont beaucoup développées à partir de 2006, elles se sont intensifiées avec la crise des subprimes qui a permis d'établir un constat clair sur ces pratiques. Il est apparu que les banques n'appliquaient pas sérieusement les recommandations relatives à cet instrument : elles retiennent des scénarios trop laxistes, les stress-tests ne sont pas intégralement inclus dans la gestion des risques et la concentration des risques était ignorée. La crise a mis en exergue la nécessité d'anticiper et d'analyser de nouveaux risques.

Il existe plusieurs cadres réglementaires qui définissent et régissent ces stress-tests. Ainsi, l'Autorité du Contrôle Prudentiel de la Banque de France met en place des stress-tests semestriels. Depuis 2007, les autorités françaises réalisent 2 exercices internes par an et au niveau européen, l'Autorité Bancaire Européenne (ABE) met en place des stress-tests et présente des lignes directrices. Au niveau international, le programme FSAP du FMI réalise des exercices de stress-tests dans près de 50 pays [▷ [ENCADRÉ 10](#)]. Le comité Européen de Supervision Bancaire (2011) [CESB] définit des lignes directrices pour les stress-tests<sup>109</sup>. Elles viennent en complément des recommandations formulées par le Comité de Bâle et sont scindées selon des composantes (▷ Voir [fig.43](#) : l'approche par composantes). Le CESB recommande non seulement l'utilisation de méthodes simples comme l'analyse des sensibilités mais insiste surtout sur l'utilisation de stress-tests plus complexes. Il met l'accent sur l'utilisation et la gouvernance des stress-tests notamment dans le cadre de la gestion des risques, il insiste sur les suites à donner aux résultats des stress-tests. Les directives formulées sont soumises au principe de proportionnalité qui suppose la prise en compte de la nature, de l'importance et de la complexité des activités concernées. Des établissements très importants ne sont pas soumis aux mêmes obligations d'établissements de moindre taille. Il est possible de représenter les différents degrés de maturité des établissements dans les programmes de stress-tests (▷ cf [fig.44](#)). L'analyse menée par Moody's Analy-

---

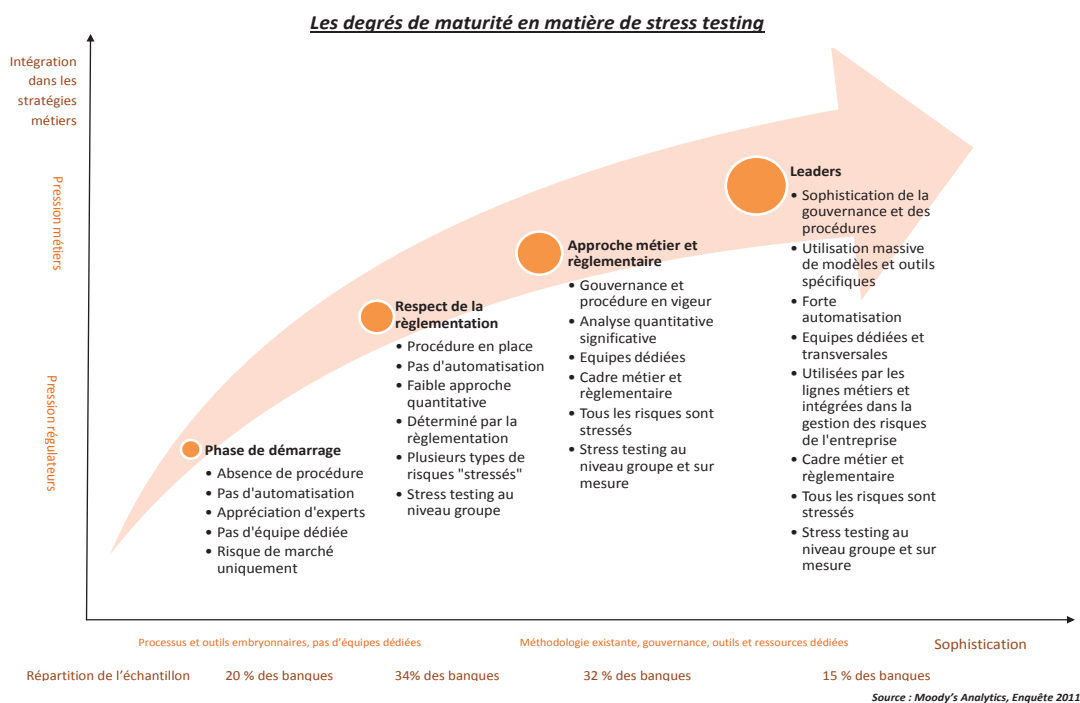
109. Une première version de ce document a été publiée en 2006 : *Guidelines on technical aspects of stress testing under the supervisory review process*. Une version révisée a été publiée en 2011.

tics(2011) sur 42 banques européennes montre que 15 % des banques seulement réalisent des stress-tests sophistiqués, automatisés avec des équipes dédiées et transversales alors que 20% des banques européennes sont encore dans la phase de démarrage. La plupart de ces établissements se situent à des stades intermédiaires entre respect de la réglementation et développement des stress-tests comme outil de gestion courante. Le CESB insiste sur la nette distinction entre les exigences en fonds propres définies dans le pilier 1 et les stress-tests : si les premiers visent à couvrir des pertes extrêmes inattendues, les seconds doivent aider les gestionnaires à comprendre l'incidence sur les activités de l'établissement d'un évènement inattendu et extrême. Les stress-tests permettent donc de mieux cerner le profil de risque et la capacité de résistance d'un établissement. L'utilisation des stress-tests est recommandée dans la directive sur l'adéquation des fonds propres dans le cadre des recommandations définies par le Comité de Bâle (Bâle II-Pilier 2).



Graphique 43 – L'approche par composantes

Source : Annexe Circulaire CBFA-2011-10-1 : Lignes directrices du CEBS concernant les stress tests



Graphique 44 – Les différents degrés de maturité des banques dans les programmes de stress-tests

Source : Canamero et Prioux(2011) : Stress-tests : Enjeux et best practices, Revue Banque



▷ ENCADRÉ 10 : PROGRAMME D'ÉVALUATION DU SECTEUR FINANCIER (FSAP)

L'exercice de stress-test mené par le FMI sur le secteur bancaire consiste à analyser 3 caractéristiques : la solvabilité, la liquidité et la contagion en retenant des stress-tests bottom-up et top-down. Le volet solvabilité est analysé par la prise en compte du risque souverain, du risque de crédit, du risque de marché et du coût de refinancement. La liquidité est examinée en supposant une défaillance du marché interbancaire alors que la contagion est prise en compte par une analyse du réseau interbancaire. Les scénarios retenus dépendent donc des 3 volets :

1. Stress de solvabilité

Pour analyser le stress de solvabilité, les autorités retiennent deux scénarios :

- un scénario central estimé à partir du modèle Mascotte de la banque de France.

Ce scénario intègre 4 impacts :

- a) Une récession européenne dès le premier trimestre 2012 qui entraîne une réduction de la demande extérieure à la France.
- b) Une intensification de la crise européenne qui conduit à une augmentation des spreads souverains.
- c) Une hausse des coûts de refinancement qui induit une diminution de l'offre de crédit de 0.8%.
- d) Une augmentation du risque souverain qui conduit à une réévaluation des obligations en portefeuille.

- Un scénario de crise avec une déviation de la croissance du PIB de deux fois l'écart-type en 2012/2013 par rapport au scénario précédent.

2. Stress de liquidité

Pour cet aspect, les autorités formulent 3 hypothèses :

- Un taux de fuite des dépôts de 5% et des ressources interbancaires de 75%.
- Un taux de renouvellement des opérations à l'actif sans credit crunch.
- Un jeu de décotes et de délais de cession sur le marché des réserves

Les autorités mènent aussi un RST liquidité pour déterminer les pertes maximales de financement de gros pour chaque devise que les banques peuvent couvrir sans avoir recours à la BCE.

### 3. Stress en sensibilité.

Les autorités supposent :

- La vente de titres souverains non notés AAA à leur valeur de marché en décembre 2011 avec une décote.
- Un défaut des 5 plus grosses contreparties et dans les 5 pays où le groupe est le plus exposé, les autorités supposent la défaillance des 5 plus grosses contreparties de ces pays.
- Un choc de  $\pm 20\%$  du taux de change euro/dollar.
- Choc de  $\pm 200$  points de base sur la courbe des taux d'intérêt.
- Une baisse de 25% des prix de l'immobilier

**Source : Stress tests sur le système bancaire et les organismes d'assurance en France, Analyses et Synthèses, ACP Banque de France 2013.**

Les procédures de stress-testing Nous précisons dans les annexes qui suivent le cadre réglementaire et une application pratique du stress-testing.

#### A.14.2.3 CADRE RÉGLEMENTAIRE

Le CESB définit 5 directives liées à la gouvernance et à l'utilisation des stress-tests :

1. Il incombe au management body<sup>110</sup> la responsabilité finale des stress-tests.
2. Les stress-tests sont intégrés à la gestion des risques dans le cadre d'une infrastructure efficace. Par cet outil, il sera possible d'analyser les différentes activités et les différents risques de l'établissement, les composantes des portefeuilles, les types de risques et les lignes d'activités. Les relations entre les types de risques pourront être prises en compte. Il sera possible de mener des stress-tests de type bottom-up,

---

110. Selon l'article 11 de la directive sur l'adéquation des fonds propres(CRD), le management body représente le plus haut niveau de management d'un établissement.

top-down et reverse<sup>111</sup>. Les stress-tests doivent être inclus dans le processus interne d'évaluation de l'adéquation des fonds propres(ICAAP) de telle sorte à démontrer l'intégration des stress-tests à la gestion des risques. Certains stress-tests devront être plus fréquents comme pour le risque de marché.

3. Les résultats des stress-tests doivent conduire à des mesures effectives.
4. La mise en place de politiques et procédures particulières et la définition et l'affectation des responsabilités et des ressources pour l'établissement permet de faciliter la mise en œuvre des stress-tests. Les politiques et procédures internes doivent préciser le type de tests et l'objectif principal de chaque composante, la fréquence des tests, la méthodologie utilisée.
5. Une évaluation des stress-tests par rapport aux objectifs peut conduire à une révision. D'un point de vue qualitatif et quantitatif, l'efficacité et la robustesse des stress-tests doivent être analysées.

Le CESB ne préconise pas de méthodologie particulière, il propose des recommandations pour aider à l'amélioration des pratiques en matière de stress-tests. Selon le CESB, " tout programme de stress-test efficace consistera d'une part en des analyses de sensibilité(...) et d'autre part en des analyses de scénarios tenant compte de tous les risques significatifs aux différents niveaux de l'établissement". Pour la méthodologie des stress-tests, le CESB recommande :

1. des analyses de sensibilités sur des portefeuilles et des risques spécifiques. L'analyse des sensibilités est une procédure qui consiste à appliquer un choc sur un facteur de risque de telle sorte à pouvoir évaluer la sensibilité de la banque à ce risque. En retenant les principaux facteurs de risques auxquels elle est confrontée, la banque peut soumettre un choc plus ou moins sévère à chaque facteur de risque en se basant sur les données historiques, elle peut aussi envisager le choc de plusieurs facteurs de risque simultanément.
2. Les banques doivent utiliser la méthode des scénarios en veillant à ce que ces derniers soient dynamiques et prospectifs et qu'ils simulent l'occurrence simultanée de

---

111. Les bottom-up stress-tests permettent de tester des expositions et facteurs de risques spécifiques et à agréger les résultats. Les top-down visent à tester des expositions au niveau global et ensuite ventiler les résultats entre les entités ou les lignes d'activités concernées. Les reverse stress-tests partent d'un résultat négatif significatif et remontent l'enchaînement des causes et des conséquences de ce résultat.

chocs affectant la banque. Si le recours à des scénarios historiques dans l'élaboration de situations hypothétiques peut être intéressant, le CESB recommande fortement l'utilisation de scénarios prospectifs de telle sorte à intégrer non seulement les changements systémiques mais aussi les changements qui pourraient affecter l'établissement dans un futur proche.

3. Il est recommandé aux établissements de traduire les scénarios en paramètres de risques internes de telle sorte à disposer d'une vue d'ensemble des risques encourus au niveau de tout l'établissement.
4. Les établissements doivent intégrer les interactions systémiques et les effets par rétroactions. Les tests doivent prendre en compte de manière explicite les interdépendances qui peuvent exister et les dynamiques systémiques. La difficulté de modélisation des interactions systémiques et des effets par rétroactions peut être surmontée par une évaluation qualitative des effets par rétroaction des situations stressées.
5. Les événements exceptionnels envisagés par les établissements doivent être plausibles : il faut retenir plusieurs scénarios plus ou moins sévères mais réalistes. Les degrés de sévérité retenus pour chaque secteur sont à la discrétion de l'établissement, seul à pouvoir juger correctement de l'adéquation parfaite du niveau de sévérité au risque encouru pour une ligne d'activité particulière.
6. Il est nécessaire que les établissements mettent en place des reverse stress-tests(RST). Les RST constituent un outil de gestion des risques complémentaire aux stress-tests qui permettent de mieux comprendre les failles potentielles de l'établissement.

Les stress-tests appliqués à un portefeuille, à un risque individuel sont soumis aux directives suivantes :

1. Les stress-tests doivent tenir compte des changements de corrélation entre risques dans un portefeuille donné. Les portefeuilles individuels doivent être soumis à des stress-tests qui leur sont spécifiques. Les établissements doivent tenir compte des interactions entre différents types de risques notamment en période de crise.
2. Une vue complète et holistique des risques encourus par l'établissement suppose la mise en place de stress-tests couvrant un large éventail de risques pour tout l'établissement. L'agrégation des résultats peut être insuffisante et les corrélations entre



facteurs de risques peuvent être ignorées. Aussi, la mise en place de stress-tests dans tous les secteurs de l'établissement est nécessaire, il est possible de mettre en évidence une éventuelle concentration des risques et les corrélations entre et au sein des catégories de risques.

En ce qui concerne les informations issues des stress-tests et les actions à mener suite à ces résultats, le CESB préconise :

1. de prendre en considération ces enseignements dans le cadre de la détermination des fonds propres réglementaires et des ressources des établissements. Ces derniers doivent évaluer les effets des stress-tests sur leur bilan et leur compte de résultat.
2. la détermination d'interventions concrètes et crédibles pour répondre aux informations issues des stress-tests et ainsi garantir une solvabilité permanente. Ces interventions peuvent être immédiates ou subordonnées à l'occurrence d'évènements qui doivent être clairement définis.

Dans le cadre du processus d'évaluation de l'adéquation des fonds propres(ICAAP), le CESB recommande :

1. L'évaluation de la fiabilité de la planification de leur besoins en capitaux suite aux résultats des stress-tests. Les plans de besoin en capital dans une situation délicate doivent être réévalués suite aux stress-tests.
2. Une cohérence entre les stress-tests et l'attitude envers le risque et la stratégie de l'établissement. Il revient aux établissements de démontrer le lien entre leur attitude face au risque, leur stratégie, les plans de besoin en capital et les stress-tests. Ils doivent être capables de conserver pendant une période de stress définie des capitaux supérieurs aux exigences réglementaires. Les établissements doivent consigner par écrit les résultats des stress-tests avec et sans intervention.

Pour la surveillance et l'évaluation prudentielles, le CESB préconise :

1. Une évaluation régulière des stress-tests par les autorités de contrôle notamment sur la sélection des scénarios, les méthodes, l'infrastructure et l'utilisation des stress-tests.
2. Une évaluation des informations issues des stress-tests par les autorités de contrôle de manière à juger de la solidité des établissements et de leur capacité à conserver

des capitaux suffisants et une liquidité adéquate. Dans cet objectif, les autorités sont invitées à un contrôle détaillé des mouvements et des besoins de capitaux et de liquidité en période stressée.

3. Une évaluation et un examen critique par les autorités du champ d'application, de la sévérité, des hypothèses et des mesures d'atténuation des risques des stress-tests pour tout l'établissement.
4. Pour des groupes internationaux, une coordination entre l'autorité de contrôle responsable du contrôle consolidé et les autorités du pays d'accueil est mise en place de telle sorte à ce que les stress-tests soient appliqués à l'ensemble du groupe.
5. Les autorités de contrôle peuvent faire des recommandations en ce qui concerne les scénarios. Elles peuvent elles-mêmes effectuer des stress-tests pour un établissement individuel et mener des simulations de crises systémiques basées sur des scénarios communs. Les autorités peuvent imposer des scénarios si elles jugent que ceux retenus par l'établissement sont incohérents avec son profil de risque ou les conditions macroéconomiques.

#### A.14.2.4 APPLICATION PRATIQUE

Selon Canamero et Prioux(2011), les conséquences des stress-tests sur les banques sont multiples :

- Les banques ont désormais étendu l'utilisation des stress-tests à d'autres objectifs comme l'analyse de l'impact de différents risques sur leurs bilans, les résultats et les flux de trésorerie.
- La mise en œuvre collégiale des stress-tests conduit à une gestion très délicate de ces procédures, d'où la nécessité d'un pilotage centralisé.
- La nécessité d'une plus grande transparence

Sur le plan théorique, les stress-tests ont fait l'objet d'une importante littérature. Le Comité sur le Système Global Financier(2005) présente un panorama des différentes procédures de stress testing et montre que la plupart d'entre elles reposent soit sur des événements historiques, soit sur des événements hypothétiques, soit sur une combinaison des

deux. Mais ces différentes méthodes ont fait l'objet de virulentes critiques notamment par Berkowitz(2000) et Greenspan(2000) pour leur manque de rigueur. En effet, ces différentes procédures sont exemptées de modèles de risques, ce qui ne permet pas de connaître la probabilité associée à chaque scénario. Le développement des procédures de stress-testing reposant sur des modèles de risques peut constituer une alternative intéressante. Kupiec(1998) tente d'introduire les effets des marchés croisés résultant d'un choc de marché et Aragones et al.(2001) incorporent des événements hypothétiques dans un modèle basé sur la théorie des valeurs extrêmes.

Sur le plan pratique, l'autorité du contrôle prudentiel a produit un rapport sur les stress-tests appliqués au système bancaire et aux organismes d'assurance en France(2013). Il s'agit de porter un constat sur l'exercice des stress-tests dans un environnement macroéconomique et financier dégradé. Les 8 groupes du secteur bancaire français ont été soumis à un stress-test bottom-up en retenant une analyse des sensibilités et deux types de scénarios : un scénario central et un scénario défavorable. L'analyse prend en compte 3 indicateurs : un indicateur de solvabilité incluant le risque souverain, un indicateur de liquidité et un indicateur de contagion [ $\triangleright$  [ENCADRÉ 10](#)]. Les résultats des stress-tests de solvabilité indiquent une résistance des banques françaises face à la détérioration de l'environnement économique. En ce qui concerne les stress-tests de liquidité, un dysfonctionnement partiel des marchés interbancaires permet de mesurer la vulnérabilité du secteur bancaire et a mis en évidence l'existence de réserves importantes permettant de faire face à une crise de plus d'une année. Les stress-tests sur les expositions bancaires indiquent une bonne résilience du système bancaire français aux risques de contagion.

## A.15 L'APPROCHE DENSITY FORECAST EVALUATION

Elle consiste à tester l'efficacité conditionnelle pour tous les taux de couverture. Les tests de la classe " Event probability forecast " se cantonnent à l'analyse des prévisions de la VaR pour un taux de couverture donné. Il n'y a pas de raisons particulières qui justifient ce choix. Les tests " Density forecast evaluation " visent donc à pallier cette faiblesse en testant les hypothèses de couverture non conditionnelle et d'indépendance pour toute distribution. Crnkovic et Drachman(1997) développent un test à partir de l'intuition suivante : si le modèle d'estimation est précis alors une VaR avec un taux de couverture de 1% doit conduire à 1% des violations, une VaR à 5% doit conduire à 5% des violations, une VaR à 10% doit conduire à 10% des violations etc...

De plus, une violation de la VaR pour un taux de couverture donné  $\alpha$  doit être indépendante d'une violation de la VaR pour un autre taux de couverture  $\beta$ . Au temps  $t$ , il est possible, à partir d'un modèle de prévoir la fonction de densité de probabilité pour une série des rentabilités. En  $t + 1$  quand la rentabilité est connue, il est possible de déterminer le centile de la distribution prévue auquel appartient la rentabilité observée. Si le modèle est correctement calibré alors chaque centile doit avoir la même probabilité d'occurrence et les différents centiles sont indépendants les uns des autres. Il s'agit alors de tester l'uniformité et l'indépendance des violations. Ces différentes hypothèses font l'objet de différents tests. Selon Campbell(2005), l'avantage de ces tests est qu'ils fournissent une précision supplémentaire dans l'identification des mauvais modèles. La principale limite de ces tests est le nombre de données requises. Selon les auteurs, il faut au moins 4 années de données pour obtenir des estimations fiables.

Le manque de littérature sur cette approche est dû selon Diebold et al.(1998) à 3 facteurs :

- La construction analytique des prévisions des densités requière des hypothèses restrictives et parfois incertaines ;
- Il y avait, jusqu'à récemment, une faible demande des prévisions des densités par rapport aux intervalles et points de prévisions ;
- Le problème de l'évaluation des prévisions de densités est complexe.

Nous présentons 3 tests : le test de Crnkovic et Drachmann(1996), de Diebold et al.(1998) et de Berkowitz(2001).

#### A.15.1 LE TEST DE CRNKOVIC ET DRACHMANN(1996)

Il s'agit d'un test qui évalue le modèle d'estimation de la VaR en calculant les centiles de la distribution estimée :

$$\alpha_i = F(x_i) \tag{311}$$

Où  $\alpha_i$  est le centile  $i$ . Un bon modèle suppose que chaque centile compris dans  $[0,1]$  a la même probabilité d'occurrence. Le test vise à vérifier l'hypothèse suivante :

$$\alpha_i \sim i.i.d.(0, 1)$$

Les auteurs retiennent le test BDS(1996) pour tester l'indépendance des centiles. L'hypothèse d'uniformité est testée par la statistique de Kuiper :

$$K(F(x_i), G(x_i)) = \max\{f(x_i) - g(x_i)\} - \min\{f(x_i) - g(x_i)\} \quad (312)$$

Où  $G(x_i)$  désigne la distribution cumulative de la loi uniforme.

### A.15.2 LE TEST DE DIEBOLD, GUNTHER ET TAY(1998)

Soient  $\{y_t\}_{t=1}^m$  une série temporelle dont la densité conditionnelle sachant l'ensemble d'informations  $\Omega_t = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$  est notée  $f_t(y_t|\Omega_t)_{t=1}^m$  et  $P_t(y_t|\Omega_t)_{t=1}^m$ , la prévision de la densité à un pas de temps. Si la vraie densité  $f_t(y_t|\Omega_t)_{t=1}^m$  était observée alors, on peut déterminer  $P_t(\cdot)$ . Comme  $f_t(\cdot)$  n'est jamais connu, Diebold et al.(1998) proposent de recourir à une transformation de l'intégrale de probabilité :

$$z_t = \int_{-\infty}^{y_t} P_t(u)du = P_t(y_t) \quad (313)$$

$z_t$  est la transformée de l'intégrale de probabilité, elle représente la fonction de densité cumulative correspondant à la densité  $P_t(y_t)$  évaluée en  $y_t$ . Si  $P_t(y_t) = f_t(y_t)$  alors la densité de  $z_t$  est la densité uniforme[0,1] :

$$\{z_t\}_{t=1}^m iid \sim U[0, 1] \quad (314)$$

Les auteurs proposent de tester l'hypothèse d'une distribution i.i.d. U[0,1] de  $z_t$  par des tests de type Kolmogorov-Smirnov ou Cramer-VonMises. Cependant, ils soulignent l'information limitée de ces tests qui ne renseignent en rien sur le rejet de l'hypothèse nulle. Aussi Diebold et al.(1998) proposent, en complément de ces tests des outils graphiques(représentation graphique, histogramme...) qui permettent de comparer la distribution de  $z_t$  à celle d'une loi U[0,1].

### A.15.3 TEST DE BERKOWITZ(2001)

Face aux limites des tests de Crnkovic et Drachman(1997) et Diebold et al.(1998) qui re-

quièrent un nombre important de données, Berkowitz(2001) propose un test paramétrique basé sur une transformée de Rosenblatt :

$$X_t = F_{t-1}(R_t) \sim i.i.d.U[0; 1] \quad (315)$$

Cette dernière suppose que si la série des rentabilités est une variable aléatoire dont la fonction de distribution est notée  $F_t$  alors la variable aléatoire transformée  $X_t$  est distribuée uniformément sur  $[0;1]$ . Sous l'hypothèse nulle d'un 'bon' modèle d'estimation,  $X_t$  est i.i.d., ce qui suppose :

$$Z_t = \phi^{-1}(X_t) = \phi^{-1}[F_{t-1}(r_t)] \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (316)$$

Où  $\phi^{-1}$  est l'inverse de la fonction de distribution cumulative de la distribution normale standard. Berkowitz(2001) développe les tests LR permettant de tester l'indépendance de  $X_t$ . Par exemple, il considère sous l'hypothèse alternative une dépendance non linéaire :

$$H_0 : Z_t \sim i.i.d.N(0, 1) \text{ contre} \\ H_1 : Z_t = \mu + \rho_1 Z_{t-1} + \dots + \rho_n Z_{t-n} + \gamma_1 Z_{t-1}^2 + \dots + \gamma_n Z_{t-n}^2 + \mu_t$$

Sous  $H_0 : \mu = \rho_1 = \dots = \rho_n = \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$  et  $\sigma_{Z_t} = 1$ .

## A.16 L'APPROCHE EVENT PROBABILITY FORECAST EVALUATION

### A.16.1 LES TESTS LR

Ce sont les premiers tests de backtesting basés sur un test statistique. Ils sont construits à partir de la différence des vraisemblances sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative. Les tests de ratios de vraisemblance présentent la particularité d'être facilement applicables. Nous commençons par une présentation du test de Kupiec(1995) avant d'introduire les tests de Christoffersen(1998).

#### A.16.1.1 TEST DE KUPIEC(1995)

Le test de Kupiec (1995) permet de vérifier si les prévisions de la VaR satisfont l'hypothèse de couverture non conditionnelle. Une approche simplifiée du test est donnée par

Jorion(2001). Si on considère une séquence de T prévisions successives et N le nombre de violations associées :

$$N = \sum_{t=1}^T I_t(\alpha)$$

Le rapport  $\frac{N}{T}$  est la fréquence empirique des violations. Sous l'hypothèse de couverture non conditionnelle, on sait que le taux d'échec constitue un estimateur convergent du taux de couverture :

$$\frac{N}{T} \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} \alpha \quad (317)$$

Si on suppose que  $I_t(\alpha)$  est i.i.d. alors sous l'hypothèse de couverture non conditionnelle, le nombre de violations N suit une loi binomiale :

$$N \sim B(T, p) \text{ avec } E(N) = pT, V(N) = p(1-p)T \text{ et } f(N) = \binom{T}{N} \alpha^N (1-\alpha)^{T-N}.$$

Si T est suffisamment grand, on peut approximer la loi binomiale par la loi normale et sous l'hypothèse de couverture non conditionnelle, on a :

$$Z = \frac{N - pT}{\sqrt{p(1-p)T}} \sim N(0, 1) \quad (318)$$

Il est alors possible de tester l'hypothèse de couverture non conditionnelle directement à partir de cette relation :

$$H_0 : E[I_t] = \alpha \quad (319)$$

$$H_1 : E[I_t] \neq \alpha \quad (320)$$

Ce test statistique doit conclure soit au rejet, soit à l'acceptation de l'hypothèse nulle. Il est soumis, comme tous les tests de backtesting, à un compromis entre deux types d'erreurs :

1. L'erreur de type 1 qui désigne la possibilité de rejeter un bon modèle.
2. L'erreur de type 2 qui représente la possibilité d'accepter un mauvais modèle.

Un test statistiquement puissant doit minimiser ces deux erreurs. Jorion(2001) a montré que le test de Kupiec(1995) pour  $\alpha = 1\%$  a une probabilité de 10,8% de rejeter un modèle correct. L'erreur de type 2 est observé dans 12,8% des cas pour un taux de couverture de

3%.

Le test de Kupiec(1995) est basé sur un ratio de vraisemblance et sous l'hypothèse nulle, on a :

$$LR_{uc} = -2\ln[(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N] + 2\ln[(1 - \frac{N}{T})^{T-N} \frac{N}{T}] \sim X^2(1) \quad (321)$$

Kupiec(1995) a tabulé les régions de non-rejet selon différents taux de couverture et pour différentes tailles d'échantillons :

| $\alpha$ | 1- $\alpha$ | T=255   | T=510   | T=1000   |
|----------|-------------|---------|---------|----------|
| 0,01     | 99%         | N<7     | 1<N<11  | 4<N<17   |
| 0,025    | 97,5%       | 2<N<12  | 6<N<21  | 15<N<36  |
| 0,05     | 95%         | 6<N<21  | 16<N<36 | 37<N<65  |
| 0,075    | 92,5%       | 11<N<28 | 27<N<51 | 59<N<92  |
| 0,1      | 90%         | 16<N<36 | 38<N<65 | 81<N<120 |

Tableau 21 – Régions de non-rejet (Kupiec(1995))

Il est possible d'évaluer la puissance du test par le calcul d'intervalles de confiance. Par exemple, à 95%, l'intervalle de confiance pour 255 observations est [0.024 ; 0.082] alors que pour 1000 observations, il est de [0.037 ; 0.065]. L'intervalle de confiance est plus petit au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Donc, selon Jorion(2001), la probabilité de rejet d'un modèle est fortement liée à la taille de l'échantillon. Le test est statistiquement faible pour des tailles d'échantillons recommandées par les instances réglementaires (1 année). Par ailleurs, il ne tient compte que des fréquences des pertes et non des périodes auxquelles elles surviennent. Campbell(2005) explique que ce test ne peut que vérifier l'hypothèse de couverture non conditionnelle puisqu'il est incapable de détecter un modèle qui crée des grappes de violations. Cette principale faiblesse est partiellement prise en compte par les tests de Christoffersen(1998).



### A.16.1.2 TESTS LR DE CHRISTOFFERSEN(1998)

Il s'agit du test le plus utilisé pour vérifier l'indépendance des violations et plus généralement la couverture conditionnelle. Il s'inscrit dans un cadre proche de celui de Kupiec(1995) puisqu'il repose sur un ratio de vraisemblance. L'avantage de ce test est la possibilité de tester les deux hypothèses indépendantes (couverture inconditionnelle et indépendance des violations) par un test de couverture conditionnelle ou de tester l'hypothèse d'indépendance par un test d'indépendance en complément du test de Kupiec. Une présentation est donnée par Jorion(2001), Campbell(2005), Dowd(2006). Sous l'hypothèse alternative de non efficacité conditionnelle de la VaR, le processus de violations  $I_t(\alpha)$  est modélisé par une chaîne de Markov. Les différentes hypothèses que doit satisfaire la VaR peuvent être testées grâce à des statistiques LR. Campbell(2005) recommande de tester séparément les deux hypothèses car le test LR de couverture conditionnelle peut être validé sans pour autant que l'hypothèse d'indépendance ne soit vérifiée.

#### Test d'indépendance

Il faut que la probabilité d'observer une violation en  $t$  soit indépendante de l'occurrence d'une non-violation en  $t - 1$ . En retenant la définition du processus de violations telle que nous l'avons donnée dans le test de Kupiec(1995), il est possible de noter  $n_{ij}$  le nombre de fois où l'on observe  $I_t(\alpha) = j | I_{t-1}(\alpha) = i$ . Pour mieux comprendre ce à quoi correspond  $n_{ij}$ , nous prenons l'exemple suivant :

|                   | $I_{t-1}(\alpha = 0)$ | $I_{t-1}(\alpha = 1)$ |                   |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------|
| $I_t(\alpha = 0)$ | $n_{00}$              | $n_{10}$              | $n_{00} + n_{10}$ |
| $I_t(\alpha = 1)$ | $n_{01}$              | $n_{11}$              | $n_{01} + n_{11}$ |
|                   | $n_{00} + n_{01}$     | $n_{10} + n_{11}$     | $N$               |

Tableau 22 – Nombre de violations

À partir de ce tableau, il est possible de calculer différentes probabilités. Soit  $\pi_{ij}$  la probabilité d'observer  $j$  en  $t$  sachant  $i$  en  $t - 1$  :

- La probabilité d'observer une exception en  $t$  quel que soit l'état en  $t - 1$  :

$$\pi_{i1} = \frac{n_{01} + n_{11}}{N} \quad (322)$$

- La probabilité d'observer une exception en  $t$  sachant une exception en  $t - 1$  :

$$\pi_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \quad (323)$$

- La probabilité d'observer une exception en  $t$  sachant aucune exception en  $t - 1$  :

$$\pi_{01} = \frac{n_{01}}{n_{01} + n_{11}} \quad (324)$$

- La probabilité de ne pas avoir d'exceptions en  $t$  quel que soit l'état en  $t - 1$  :

$$\pi_{i0} = \frac{n_{00} + n_{10}}{N} \quad (325)$$

- La probabilité de ne pas observer d'exceptions en  $t$  sachant une exception en  $t - 1$  :

$$\pi_{10} = \frac{n_{10}}{n_{11} + n_{10}} \quad (326)$$

- La probabilité de ne pas observer d'exceptions en  $t$  sachant aucune exception en  $t - 1$  :

$$\pi_{00} = \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} \quad (327)$$

Le test de Christoffersen suppose que la série des violations repose sur une matrice des probabilités de transition suivante :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix}$$

Ce test suppose que  $\pi_{0j} = \pi_{1j}$  donc sous  $H_0$ , la matrice devient :

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{pmatrix}$$

La vraisemblance de l'hypothèse nulle d'indépendance est la suivante :

$$L(\Pi_2, \{I_1, I_2, \dots, I_T\}) = (1 - \pi_2)^{(n_{00} + n_{10})} \pi_2^{(n_{01} + n_{11})} \quad (328)$$

Et l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\pi_2$  est donné par :

$$\hat{\pi}_2 = \frac{(n_{01} + n_{11})}{(n_{01} + n_{11} + n_{10} + n_{00})} \quad (329)$$

La vraisemblance sous  $H_0$  devient :

$$L(\widehat{\Pi}_2, \{I_1, I_2, \dots, I_T\}) = (1 - \widehat{\pi}_2)^{(n_{00}+n_{10})} \widehat{\pi}_2^{(n_{01}+n_{11})} \quad (330)$$

Sous l'hypothèse alternative de non-indépendance, la matrice des probabilités est donnée par :

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \end{pmatrix}$$

La vraisemblance sous  $H_1$  est donnée par :

$$L(\widehat{\Pi}_1, \{I_1, I_2, \dots, I_T\}) = \left[ \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} \right]^{n_{00}} \left[ \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \right]^{n_{01}} \left[ \frac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} \right]^{n_{10}} \left[ \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \right]^{n_{11}} \quad (331)$$

La statistique du test est alors la suivante :

$$LR_{ind} = -2(\log L(\widehat{\Pi}_2, \{I_1, I_2, \dots, I_T\}) - \log L(\widehat{\Pi}_1, \{I_1, I_2, \dots, I_T\})) \sim X^2(1) \quad (332)$$

### Test de couverture inconditionnelle

Le test de couverture non conditionnelle de Christoffersen(1998) est similaire au test de Kupiec(1995) avec :

$$H0_{uc}^{CHR} : I_t \sim i.i.d \text{ Bernoulli}(\alpha) \text{ contre } H1_{uc}^{CHR} : I_t \sim i.i.d \text{ Bernoulli}(\pi).$$

$$\text{Sous } H0_{uc}^{CHR} : \alpha = \pi.$$

Implicitement ce test suppose l'indépendance des violations qu'il faut, en réalité, tester. La vraisemblance sous  $H_0$  est donnée par :

$$L(\alpha; I_1, I_2, \dots, I_k) = (1 - \alpha)^{n_0} \alpha^{n_1} \quad (333)$$

Sous l'hypothèse alternative, elle est donnée par :

$$L(\pi; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi)^{n_0} \pi^{n_1} \quad (334)$$

Le test de couverture inconditionnelle est un test LR défini par :

$$LR_{UC}^C = -2 \log \left[ \frac{L(\alpha; I_1, I_2; \dots, I_T)}{L(\widehat{\pi}; I_1, I_2; \dots, I_T)} \right] \sim X^2(1) \quad (335)$$

Où  $\hat{\pi} = \frac{n_1}{(n_0+n_1)}$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance,  $n_1$  et  $n_0$  désignent respectivement le nombre de violations et de non-violations de la VaR.

Test de couverture conditionnelle :

Ce test suppose que, sous l'hypothèse alternative de non efficacité de la VaR, le processus des violations  $I_t(\alpha)$  est modélisé par une chaîne de Markov dont la matrice de transition peut être donnée par :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{pmatrix}$$

Il est ainsi possible de modéliser une éventuelle dépendance temporelle dans la séquence des violations : une violation en  $t$  peut être liée à une violation en  $t - 1$ . Sous  $H_0$ , on a :

$$\Pi = \Pi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

En acceptant l'hypothèse nulle d'efficacité conditionnelle, on accepte aussi l'hypothèse de couverture non conditionnelle. Quel que soit l'état du système en  $t - 1$ , la probabilité d'observer à la date  $t$  une violation est égale au taux de couverture conditionnelle :

$$\pi_t = \text{prob}[I_t(\alpha) = 1] = \alpha \quad (336)$$

La probabilité d'observer une violation à la date  $t$  est indépendante de l'état en  $t - 1$ . Pour tester l'hypothèse nulle d'efficacité conditionnelle, on utilise un ratio de vraisemblance qui sous  $H_0$  est donné par :

$$LR_{CC} = -2\ln L(\Pi_\alpha, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)) - \ln L(\hat{\Pi}, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)) \sim X^2(\alpha)$$

Avec  $T \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\Pi}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de transition sous l'hypothèse alternative et  $\ln L(\Pi_\alpha, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha))$  désigne la log-vraisemblance des violations  $I_t(\alpha)$  associés à une matrice de transition  $\Pi_\alpha$  et :

$$L(\Pi, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \quad (338)$$

où  $n_{ij}$  désigne le nombre de fois où l'on observe  $I_t(\alpha) = j$  sachant  $I_{t-1}(\alpha) = i$ .

L'égalité suivante est observée si la première observation est ignorée :

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \quad (339)$$

La mise en œuvre de ces tests est relativement simple mais elle souffre de certaines limites notamment pour l'hypothèse d'indépendance. L'hypothèse alternative au test d'indépendance est très spécifique et ne tient pas compte des dépendances d'ordre supérieur à 1. L'utilisation des chaînes de Markov ne permet pas de mesurer le rôle d'autres variables dans une possible dépendance des violations. Le test d'Engle et Manganelli (2004) permet de pallier ces deux difficultés.

## A.16.2 LES TESTS DE DURÉE

### A.16.2.1 LE TEST TIME UNTIL FIRST FAILURE(TUFF)

Kupiec(1995) présente le test TUFF pour mesurer le temps  $\tau$  de l'occurrence de la première exception. L'hypothèse nulle du test suppose :

$$H_0 : \alpha = \frac{1}{\tau}$$

Il s'agit d'un test LR :

$$LR_{TUFF} = -2\ln \frac{\alpha(1-\alpha)^{\tau-1}}{\frac{1}{\tau}(1-\frac{1}{\tau})^{\tau-1}} \sim X^2(1) \quad (340)$$

Si  $LR_{TUFF}$  est inférieur à la valeur du khi-deux à un degré de liberté alors le modèle est accepté. Ce test a une faible puissance pour identifier les mauvais modèles de VaR. Dowd(1998) préconise l'utilisation de ce test comme étape préliminaire au test LR de Kupiec lorsque l'ensemble des données disponibles n'est pas important. Il peut aussi constituer une première étape au test d'indépendance de Haas(2001).

### A.16.2.2 LE TEST DE KUPIEC MIXTE (HAAS(2001))

L'incapacité des tests LR à pouvoir rendre compte de la dépendance d'ordre supérieur à 1 conduit Haas(2001) à développer un test amélioré qui s'inspire de celui de Christoffersen(1998) et de Kupiec(1995) pour tester l'indépendance et la couverture non conditionnelle. Selon Haas(2001), le test de Christoffersen(1998) est trop faible pour produire des résultats réalistes. Il propose alors un test de Kupiec mixte qui mesure le temps entre les exceptions au lieu d'analyser uniquement la dépendance à l'ordre 1. Le test de Haas(2001) permet de capturer des formes de dépendances plus générales. En utilisant le test TUFF de Kupiec(1995) pour mesurer le délai entre deux exceptions, le test de Haas est un test LR :

$$LR_i = -2\ln\left(\frac{\alpha(1-\alpha)^{v_i-1}}{p(1-p)^{v_i-1}}\right) \quad (341)$$

Où  $v_i$  est le délai entre l'exception  $i$  et  $i-1$ . Pour la première exception, le test est similaire au test de Kupiec. Ensuite, il faut appliquer le test  $LR_i$  pour chaque  $i > 1$ . Pour  $N$  exceptions, le test d'indépendance est alors donné par :

$$LR_{ind}^{HAAS} = \sum_{i=2}^N \left[ -2\ln\left(\frac{\alpha(1-\alpha)^{v_i-1}}{p(1-p)^{v_i-1}}\right) \right] - 2\ln\left(\frac{\alpha(1-\alpha)^{v-1}}{p(1-p)^{v-1}}\right) \sim X^2(N) \quad (342)$$

Avec  $v$ , le délai jusqu'à la première exception. Le test de Kupiec mixte est donc la combinaison du test  $LR_{IND}$  de Haas et du test LR de Kupiec :

$$LR_{mix} = LR_{POF} + LR_{IND} \sim X^2(N+1) \quad (343)$$

### A.16.2.3 TEST DE CHRISTOFFERSEN ET PELLETIER(2004)

Les tests de Christoffersen(1998) souffrent d'une faible puissance pour des tailles d'échantillon recommandées par les instances de réglementation(250 jours). Par ailleurs, le test d'indépendance vérifie uniquement la présence d'une dépendance d'ordre 1. L'alternative présentée par Berkowitz(2001) repose sur la pente de la queue gauche de la distribution des rentabilités. Cette caractéristique n'est pas toujours disponible dans les applications empiriques. Face à ces limites, Christoffersen et Pelletier(2004) proposent un test de durée. Il consiste à analyser la durée entre deux violations de la

VaR. L'idée sous-jacente suppose qu'un modèle VaR est bien spécifié pour un taux de couverture  $\alpha$  si chaque jour la durée conditionnelle espérée entre deux violations est de  $\frac{1}{\alpha}$  jours. Notons la durée entre deux violations :  $D_i = t_i - t_{i-1}$  où  $t_i$  désigne le jour de la  $i$ ème violation. Sous l'hypothèse nulle d'un modèle de risque correctement spécifié, la durée de non violation n'a pas de mémoire et est en moyenne égale à  $\frac{1}{\alpha}$  jours. Pour vérifier l'absence de mémoire, la distribution de probabilité discrète sous l'hypothèse nulle est donnée par :

$$\begin{aligned} Pr(D = 1) &= \alpha \\ Pr(D = 2) &= (1 - \alpha)\alpha \\ Pr(D = 3) &= (1 - \alpha)^2\alpha \\ &\dots \\ Pr(D = d) &= (1 - \alpha)^{d-1}\alpha \end{aligned}$$

La fonction de densité de  $D_i$  est alors définie par :

$$F_{exp}(D; \alpha) = \alpha \exp(-\alpha D) \quad (344)$$

Le choix de la fonction exponentielle repose sur le fait qu'elle est la seule distribution sans mémoire. L'hypothèse alternative de dépendance suppose que la durée  $D_i$  suit une loi de Weibull de paramètre d'échelle  $b$ , de paramètre de centrage  $a$  et de densité égale à :

$$g(D; b; a) = a^b b D^{b-1} \exp[-(aD)^b] \quad (345)$$

Cette loi est caractérisée par une fonction aléatoire décroissante quand  $b < 1$ , ce qui correspond à un nombre excessif de durées très courtes (périodes très volatiles) et un nombre excessif de durée très longues (périodes très calmes).

Si  $b = 1$ , alors  $g(D, b, a) \sim f(D, \alpha)$  et  $E(D) = \frac{1}{a}$  où  $a$  est le paramètre de centrage.

L'hypothèse d'indépendance suppose :  $H_{0,IND} : b = 1$

Sous  $H_1$ , on peut utiliser la fonction  $\Gamma$  et par conséquent la fonction de densité de probabilité est définie par :

$$F_{\Gamma}(D; a; b) = \frac{a^b D^{b-1} \exp(-aD)}{\Gamma(b)} \quad (346)$$

Si  $b = 1$ , on retrouve la fonction de densité de probabilité sous  $H_0$ . Le test d'indépendance nécessite le calcul de la log-vraisemblance de la distribution de Weibull sous

l'hypothèse nulle ( $LL_0$ ) et sous l'hypothèse alternative ( $LL_1$ ). Le test d'indépendance repose sur un ratio de vraisemblance défini par :

$$LR_{IND}^{Durée,CP} = -2(LL_0 - LL_1) = 2(LL_1 - LL_0) \sim X^2(1) \quad (347)$$

Ce test de durée peut donc capturer des dépendances d'ordre élevé mais ne donne aucune information sur l'ordre temporel des durées entre deux violations. Engle et Russel(1998) proposent un modèle de durée conditionnelle autorégressif exponentiel(EACD) qui permet de tenir compte de l'ordre temporel des durées. Dans un modèle EACD(1,0), la durée conditionnelle espérée est donnée par :

$$E_{i-1}[D_i] \equiv \Psi_i = w + \alpha D_{i-1} \quad (348)$$

Où  $\alpha \in [0;1]$ . Si on suppose une densité exponentielle de moyenne égale à 1, la distribution conditionnelle de la durée est donnée par :

$$f_{EACD}(D_i|\Psi_i) = \frac{1}{\Psi_i} \exp\left(-\frac{D_i}{\Psi_i}\right) \quad (349)$$

L'hypothèse nulle d'indépendance est alors la suivante :  $H_{0,IND} : \alpha = 0$

Pour procéder à l'implémentation du test, il faut remplacer la séquence des violations  $I_t$  par la séquence des durées  $D_i$  entre deux violations. Ensuite, il faut construire la série  $C_i$  :

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{si la durée est atteinte en } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (350)$$

Il s'agit là d'une procédure triviale pour toutes les observations exceptées pour les première et dernière observations. Pour la première observation, si la séquence des violations commence par 0 alors  $D_1$  est le nombre de jours qui sépare la première observation de la première violation. Par conséquent,  $C_1 = 1$ . Si la séquence des violations commence par 1 alors  $D_1$  est simplement le nombre de jours jusqu'à la deuxième violation et  $C_1 = 0$ . La procédure est identique pour la dernière durée. Si la dernière observation de la séquence des violations est nulle alors la dernière durée  $D_N(T)$  est le nombre de jours après la dernière violation et  $C_{N,T} = 1$ . Si la dernière observation est une violation alors la durée :  $D_N(T) = T_{N(T)} - T_{N(T-1)}$  et  $C_{N,T} = 0$ . La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} \ln L(D, \Theta) = & c_1 \ln S(D_1) + (1 - c_1) \ln f(D_1) + \sum_{i=2}^{N(T)-1} \ln(f(D_i)) \\ & + c_{N(T)} \ln S(D_{N(T)}) + (1 - c_{N(T)}) \ln f(D_{N(T)}) \end{aligned} \quad (351)$$



Avec  $S(D_i) = 1 - F(D_i)$  où  $F(D_i)$  est la fonction de densité de probabilité. Pour le modèle EACD, il suffit de maximiser la vraisemblance pour les paramètres  $\alpha$  et  $w$  tandis que si l'on retient la distribution de Weibull, il faut maximiser la vraisemblance pour  $a$ . Pour une valeur donnée de  $b$ , on a :

$$\hat{a} = \frac{N(T) - C_1 - C_N(T)}{\sum_{i=1}^{N(T)} D_i^b} \quad (352)$$

#### A.16.2.4 TEST DE HAAS(2007)

Le test de Christoffersen et Pelletier(2004) base l'hypothèse alternative sur une loi de Weibull continue. Haas(2005) propose de retenir la distribution discrète de Weibull telle qu'elle a été présentée par Nakagawa et Osaki(1975). Cette distribution partage les mêmes propriétés que la distribution de Weibull utilisée par Christoffersen et Pelletier(2004). La densité de la distribution discrète de Weibull est donnée par :

$$f(d; q, b) = q^{(D-1)b} q^{D^b} \quad (353)$$

Avec  $q \in (0, 1), b > 0, D \in N$ . où  $q$  désigne la probabilité d'avoir au moins une observation avant une violation et  $b$  détermine la mémoire du processus. Haas(2005) recommande, pour de petits échantillons et pour des VaR (99%) d'utiliser une densité alternative :

$$f_{DW}(D; a, b) = \exp\{-a^b(D-1)^b\} - \exp\{-a^b D^b\} \quad (354)$$

$a, b > 0, D \in N$ . On peut retrouver la loi géométrique en retenant  $b = 1, \alpha = 1 - \exp\{-a\}$ . L'hypothèse de couverture conditionnelle suppose :

$$H_{0,CC} : b = 1 \text{ et } \alpha = -\log(1 - p)$$

L'hypothèse nulle d'indépendance suppose :

$$H_{0,IND} : b = 1$$

Les simulations de Haas(2005) montrent l'adéquation d'une loi de Weibull discrète par rapport à la loi continue pour la détection des grappes de violations.

### A.16.3 LES TESTS FONDÉS SUR UNE RÉGRESSION DES HITS

#### A.16.3.1 TEST DE CLEMENTS ET TAYLOR(2003)

Clements et Taylor(2003) notent l'incapacité du test de Christoffersen(1998) à pouvoir détecter des structures de dépendances dues à des effets périodiques. Ces dernières peuvent être prises en compte si l'ordre de la chaîne de Markov du test de Christoffersen(1998) augmente, mais Clements et Taylor(2003) soulignent les difficultés de cette solution, inapplicable lorsque l'ordre des périodicités est inconnu. Aussi, Clements et Taylor(2003) proposent de retenir un retard périodique dans la chaîne de Markov de premier ordre. Pour des données S-périodiques, les auteurs définissent :

$$\begin{aligned}\pi_{ij,S} &= Prob[I_t = j | I_{t-S} = i] \\ n_{ij,S} &= [I_t = j; I_{t-S} = i]\end{aligned}$$

Il suffit d'introduire  $\pi_{ij,S}$  et  $n_{ij,S}$  dans les tests LR de Christoffersen(1998) qui deviennent un cas particulier ( $S = 1$ ). Clements et Taylor(2003) introduisent un test basé sur une régression pour vérifier l'efficacité conditionnelle du modèle. Ils proposent de tester l'hypothèse d'indépendance du modèle suivant :

$$I_t = \alpha_0 + \sum_{s=1}^S \alpha_s I_{t-s} + \sum_{s=1}^{S-1} \mu_s D_{s,t} + \epsilon_t \quad (355)$$

$$t = S + 1, S + 2, \dots, T$$

Où

$$D_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = (N-1)S + s \text{ avec } s = 1, 2, \dots, S \text{ et } N = 1, 2, \dots, \frac{T}{S} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (356)$$

L'hypothèse d'indépendance suppose la nullité des coefficients du modèle :

$$\phi = [\alpha_1, \dots, \alpha_s, \mu_1, \dots, \mu_s]' = 0$$

La non-nullité des paramètres  $\alpha_i$  traduit une corrélation sérielle tandis que celle des paramètres  $\mu_i$  suggère des effets périodiques. L'hypothèse d'efficacité conditionnelle est vérifiée si  $\phi = 0$  et  $\alpha_0 = \alpha$ . Une estimation linéaire de ce modèle conduit à des résultats erronés à cause de la dépendance de  $\epsilon_t$  par rapport aux régresseurs. Aussi, les auteurs proposent de recourir à une transformation logistique de la variable dépendante.

### A.16.3.2 TEST D'ENGLÉ ET MANGANELLI(2004)

L'idée de ce test est d'appliquer un modèle de régression linéaire entre les violations présentes et passées. Notons :

$$Hit_t(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha$$

Le processus de violations centré sur  $\alpha$  associé à  $I_t(\alpha)$  est défini par :

$$Hit_t(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{si } r_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ -\alpha & \text{sinon} \end{cases} \quad (357)$$

Engle et Manganelli(2004) considèrent le modèle suivant :

$$Hit_t(\alpha) = \delta + \sum_{k=1}^K \beta_k Hit_{t-k}(\alpha) + \sum_{k=1}^K \gamma_k g[Hit_{t-k}(\alpha), Hit_{t-k-1}(\alpha), Hit_{t-k-2}(\alpha), \dots; Z_{t-k}, Z_{t-k-1}, Z_{t-k-2}, \dots] + \epsilon_t \quad (358)$$

$$\text{Où } \epsilon_t = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{avec une probabilité } \alpha \\ -\alpha & \text{avec une probabilité } 1 - \alpha \end{cases}$$

Le test d'Engle et Manganelli(2004) vise à tester l'hypothèse nulle d'efficacité conditionnelle :

$$H_{0,CC} : \delta = \beta_k = \gamma_k = 0, \forall k = 1, \dots, K$$

L'hypothèse d'indépendance des violations est vérifiée si  $\beta_k = \gamma_k = 0$  et l'hypothèse d'efficacité non conditionnelle suppose  $\delta = 0$ . Soit  $\Psi = (\delta, \beta_1, \dots, \beta_k; \gamma_1, \dots, \gamma_k)'$  le

vecteur des  $2K + 1$  paramètres du modèle de régression, et  $Z$ , la matrice des variables explicatives. La statistique du test de couverture conditionnelle est donnée par :

$$DQ_{CC} = \frac{\hat{\Psi}' Z' Z \hat{\Psi}}{\alpha(1 - \alpha)} \sim X^2(2K + 1) \quad (359)$$

La statistique du test d'indépendance est donnée par :

$$DQ_{IND} = \frac{\hat{\Psi}' R' [R(Z'Z)^{-1} R']^{-1} R \hat{\Psi}}{\alpha(1 - \alpha)} \sim X^2(2K) \quad (360)$$

Où  $R = [0 : I_{2K}]$  est une matrice  $(2K, 2K+1)$  telle que  $R\Psi = \beta$  avec  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_K, \gamma_1, \dots, \gamma_K)'$ .

### A.16.3.3 TEST DE PATTON(2002)

Ce test s'inscrit dans l'approche d'Engle et Manganelli(2004) en considérant une relation dichotomique entre les violations courantes et les violations passées. Le modèle logit permet de mettre en relation la probabilité des violations à la date  $t$  et un ensemble de variables explicatives  $z_t$ . La probabilité d'occurrence d'une violation  $\pi_t$  satisfait :

$$\pi_t = Prob[I_t(\alpha) = 1] = \Lambda[\beta z_t - \ln(\frac{1 - \alpha}{\alpha})] \quad (361)$$

Où  $\Lambda(w) = \frac{e^w}{1 + e^w}$ . Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle,  $\beta = 0$ , ce qui traduit l'absence d'impact des variables  $z_t$  sur la probabilité d'occurrence d'une violation. On utilise la statistique :

$$LR_{CC}^{Logit} = -2[\ln L(\alpha, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)) - \ln L[\hat{\pi}, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)]] \sim X^2(dim(Z)) \quad (362)$$

Où  $\hat{\pi}$  est la probabilité estimée à partir du modèle logit et :

$$\ln L[\hat{\pi}, I_1(\alpha), \dots, I_T(\alpha)] = \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) \ln(\hat{\pi}) + [(1 - I_t(\alpha)) \ln(1 - \hat{\pi})] \quad (363)$$

Pour le test d'indépendance, il faut retenir un modèle logit légèrement différent avec :

$$\pi_t = Prob[I_t(\alpha) = 1] = \Lambda(\beta Z_t + c) \quad (364)$$

Sous l'hypothèse nulle d'indépendance des violations :  $\beta = 0$ . La forme statistique du test LR est la même.

## A.16.4 AUTRES TESTS

### A.16.4.1 TEST DE DUMITRESCU, HURLIN ET MADKOUR(2011)

Dumitrescu, Hurlin et Madkour(2011) proposent une procédure d'évaluation des intervalles de prévision et des régions à fortes densité(HDR) en utilisant un test J. Soit  $X_t, t \in \{1, \dots, T\}$  une série temporelle et  $\{C_{t|t-1}(\alpha)\}_{t=1}^T$  les intervalles de prévision hors échantillon pour un taux de couverture  $\alpha$  :

$$Prob[X_t \in C_{t|t-1}(\alpha)] = \alpha \quad (365)$$

Les auteurs retiennent la méthode des régions à forte densité définie par Hyndman(1996) et posent :

$$I_t(\alpha) \begin{cases} 1 & \text{si } X_t \notin C_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & X_t \in C_{t|t-1}(\alpha) \end{cases} \quad (366)$$

Le test développé est basé sur la méthode des moments généralisée. L'hypothèse nulle de couverture conditionnelle suppose que la somme des violations suit une loi binomiale :

$$H_{0,CC} : \sum_{t=1}^T I_t(\alpha) \sim B(T, \alpha)$$

L'incapacité à pouvoir tester directement cette hypothèse sur les intervalles de prévision hors échantillon conduit les auteurs à diviser l'échantillon des violations en blocs. Sous l'hypothèse d'indépendance des violations, la série  $I_t(\alpha)$  est divisée en H blocs de taille N :  $H = \frac{T}{N}$ .

Pour chaque bloc, l'hypothèse d'une distribution binomiale est retenue ( $B(N, \alpha)$ ) et les auteurs définissent  $y_h, h \in \{1, \dots, H\}$  comme étant la somme des N violations correspondante :

$$y_h = \sum_{t=(h-1)N+1}^{hN} I_t(\alpha) \quad (367)$$

Sous l'hypothèse nulle d'indépendance,  $y_h \sim i.i.d.B(N, \alpha)$  et sous l'hypothèse de couverture conditionnelle :  $y_h \sim B(N, \alpha), \forall h \in \{1, \dots, H\}$ . L'idée retenue par les auteurs consiste à associer à la distribution binomiale un polynôme orthonormal

d'espérance nulle et à utiliser ce dernier comme un moment de la méthode GMM. Les auteurs retiennent les polynômes Krawtchouk définis par :

$$P_{j+1}^{(N,\alpha)}(y_h) = \frac{\alpha(N-j) + (1-\alpha)j - y_h}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(N-j)(j+1)}} P_j^{(N,\alpha)}(y_h) - \sqrt{\frac{j(N-j+1)}{(j+1)(N-j)}} P_{j-1}^{(N,\alpha)}(y_h) \quad (368)$$

Où  $j < N$  et  $P_{-1}^{(N,\alpha)}(y_h) = 0, P_0^{(N,\alpha)}(y_h) = 1$  vérifie  $E[P_j^{(N,\alpha)}(y_h)] = 0, \forall j < N$ . L'hypothèse nulle de couverture conditionnelle est alors donnée par :

$$H_{0,CC} : E[P_j^{(N,\alpha)}(y_h)] = 0, j = \{1, \dots, m\}$$

Avec  $m < N$ . L'hypothèse nulle de couverture non conditionnelle est définie par :

$$H_{0,UC} : E[P_1^{(N,\alpha)}(y_h)] = 0$$

Et l'hypothèse d'indépendance suppose :

$$H_{0,IND} : E[P_j^{(N,\beta)}(y_h)] = 0, j = \{1, \dots, m\}$$

Avec  $\beta$  qui peut être différent de  $\alpha$ . Soit  $P^{(N,\alpha)}$ , un  $(m, 1)$ -vecteur dont les composants sont les polynômes orthonormaux  $P_j^{(N,\alpha)}(y_h)$  pour  $j = 1, \dots, m$  associés à la distribution binomiale  $B(N, \alpha)$ . Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle, le test statistique suppose :

$$J_{CC}(m) = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{h=1}^H P_j^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^2 \underset{H \rightarrow \infty}{\sim} X^2(m) \quad (369)$$

Sous l'hypothèse nulle de couverture conditionnelle :

$$J_{UC} = J_{CC}(1) = \frac{1}{H} \left( \sum_{h=1}^H P_1^{(N,\alpha)}(y_h) \right)^2 \underset{H \rightarrow \infty}{\sim} X^2(1) \quad (370)$$

Et sous l'hypothèse d'indépendance, la statistique de test est donnée par :

$$J_{IND}(m) = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{h=1}^H P_j^{(N,\beta)}(y_h) \right)^2 \underset{H \rightarrow \infty}{\sim} X^2(m) \quad (371)$$

$\beta$  peut être estimé. Dans ce cas, le degré de liberté de la statistique  $J_{IND}(m)$  est  $m - 1$ .

#### A.16.4.2 BACKTESTING BASÉ SUR LA FONCTION DES PERTES

Campbell(2005) recommande la prise en compte de l'ampleur des pertes lorsqu'il y a violation de la VaR. Lopez(1999) présente une méthode qui intègre l'ampleur des pertes dans l'estimation de la VaR. Plus précisément, il s'agit de mesurer la performance des modèles VaR en analysant leurs capacités par la fonction des pertes. Il ne s'agit pas de tester des hypothèses que le processus de violations doit satisfaire et Dowd(2006) reconnaît l'avantage de cette approche pour des échantillons de petite taille. La fonction de pertes affecte des valeurs plus élevées aux exceptions qu'aux autres observations, elle peut être de forme quadratique :

$$L(VaR_t(\alpha), R_{t|t+1}) = \begin{cases} 1 + (R_{t|t+1} - VaR_t)^2 & \text{si } R_{t|t+1} < -VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (372)$$

Où  $R_{t|t+1}$  est la rentabilité et  $VaR_t$ , la VaR estimée. Il suffit alors de calculer la perte moyenne de l'échantillon :

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(VaR_t(\alpha), R_{t|t+1}) \quad (373)$$

Le principal avantage de cette approche réside dans la flexibilité de la forme que peut prendre la fonction de pertes. Pour savoir si cette perte moyenne est trop importante, il faut la comparer à une valeur de référence qui peut être obtenue par simulation d'une distribution stochastique des rentabilités. La fonction de pertes repose sur l'hypothèse d'une distribution des rentabilités correctement définie. Si cette dernière est mal spécifiée, les résultats du backtesting risquent d'être faussés. À cause des différentes faiblesses de cette approche, elle ne peut être utilisée pour différencier un bon modèle d'un mauvais modèle mais elle peut constituer une approche complémentaire aux tests standards de backtesting.

#### A.16.4.3 LE TEST DE COLLETAZ, HURLIN ET PÉRIGNON(2011)

Ce test permet de tenir compte non seulement du nombre d'exceptions de la VaR mais aussi de l'ampleur des exceptions. Une représentation graphique des résultats permet de synthétiser toute l'information sur les performances du modèle. L'intérêt

de ce test est mis en évidence par cet exemple suggéré par les auteurs : " *Consider 2 banks that both have a one day VaR of \$ 100 millions at the 1% probability level. Assume that over the past year, each bank has reported 3 VaR exceptions but the average VaR exceedance is \$ 1 millions for bank A and \$ 500 millions for bank B*". Il est à noter que les méthodes standards de backtesting valideront les deux modèles utilisées par les différentes banques. Aussi, il est primordial de prendre en compte non seulement le nombre d'exceptions mais aussi l'ampleur des pertes. L'idée sous-jacente de Colletaz et al.(2012) repose sur une intuition selon laquelle une exception de la VaR pour un taux de couverture  $\alpha$  peut constituer une exception pour un taux de couverture plus faible. Ainsi, il est possible de définir deux exceptions :

1. VaR exceptions :  $r_t < -VaR_t(\alpha)$ . C'est l'exception pour un taux de couverture  $\alpha$  (5% ou 1%)
2. VaR " super " exceptions :  $r_t < -VaR_t(\alpha')$ . C'est l'exception pour un taux de couverture  $\alpha' < \alpha$ .

### **Présentation du test**

Soient  $r_t$  la distribution des pertes et profits au temps t,  $VaR_{t|t-1}(\alpha)$ , la prévision de la VaR ex-ante pour un taux de couverture  $\alpha$ . On sait que :

$$Prob[r_t < -VaR_{t|t-1}(\alpha)] = \alpha \quad (374)$$

L'hypothèse de couverture non conditionnelle ne permet pas de différencier une situation dans laquelle le montant des pertes est relativement proche de la VaR d'une situation dans laquelle le montant des pertes est beaucoup plus important que la VaR. L'idée de la mise en place d'une VaR super exceptions réside dans la possibilité de prendre en compte l'amplitude des pertes. En effet, si le nombre de super-exceptions relevées est important, cela signifie que l'ampleur des pertes de la VaR est importante. Les auteurs proposent un test joint :

$$\begin{aligned} H_0 : E[I_t(\alpha)] &= \alpha \\ E[I_t(\alpha')] &= \alpha' \end{aligned} \quad (375)$$



La statistique du test est alors définie par :

$$J_{1,t} = I_t(\alpha) - I_t(\alpha') = \begin{cases} 1 & \text{si } -VaR_{t|t-1}(\alpha') < r_t < -VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (376)$$

$$J_{2,t} = I_t(\alpha') = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t < -VaR_{t|t-1}(\alpha') \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (377)$$

$$J_{0,t} = 1 - J_{1,t} - J_{2,t} = 1 - I_t(\alpha) \quad (378)$$

Posons  $N_{i,t} = \sum_{t=1}^T J_{i,t}$  pour  $i = 0, 1, 2$ . La statistique LR est, sous  $H_0$ , définie par :

$$LR_{MUC}(\alpha, \alpha') = 2[N_0 \ln \frac{N_0}{T} + N_1 \ln \frac{N_1}{T} + N_2 \ln \frac{N_2}{T} - [N_0 \ln(1 - \alpha) + N_1 \ln(\alpha - \alpha') + N_2 \ln(\alpha')]] \quad (379)$$

$$LR_{MUC}(\alpha, \alpha') \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} X^2(2) \quad (380)$$

À partir de cette statistique, il est possible de construire un graphique qui met en relation le nombre d'exceptions  $N$  et le nombre de super-exceptions  $N'$ .

#### A.16.4.4 LE TEST DE WONG(2010)

La principale faiblesse des tests de backtesting standard est la non prise en compte de l'ampleur des pertes. Wong(2010) propose un test qui vise à prendre en compte le montant des pertes en cas d'exceptions. L'originalité de ce test tient à la technique utilisée : la méthode du point-selle permet de calculer la p-value requise pour le test statistique Tail-Risk(TR). Ce test permet de mettre en exergue la faiblesse des modèles de risques notamment pour la crise de 1987. La statistique TR est définie par :

$$\widehat{TR} = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - VaR(\alpha)) * I(r_t < VaR(\alpha)) \quad (381)$$

La statistique  $\widehat{TR}$  représente la perte moyenne subie par la banque lorsque la rentabilité est inférieure au montant de la VaR. Elle peut s'exprimer en fonction de la VaR et de l'ES :

$$\alpha^{-1}TR = ES - VaR \quad (382)$$

Où  $\alpha$  est le taux de couverture. La statistique TR prend donc en compte le risque ignoré par la VaR mais elle n'est pas égale à l'ES :

$$\widehat{ES} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T (r_t - VaR(\alpha)) * I(r_t < VaR) - VaR(\alpha) \quad (383)$$

Dans le cadre d'une procédure de backtesting, si la VaR est donnée pour un taux de couverture  $\alpha$  alors l'ES diffère de TR uniquement par ce qu'elle est divisée par N au lieu de T. Un modèle valide au sens de l'ES peut être invalide au sens de la statistique TR à cause du nombre de violations N imprécis. En effet, si  $\frac{N}{T}$  est approximativement égal à  $\alpha$  pour T qui tend vers l'infini sous  $H_0$ , N peut être trop petit ou trop grand si les prévisions de la VaR sont imprécises. La statistique TR donne pour une période la perte moyenne qui sera subie par l'investisseur. Normalement, la statistique TR peut être approximée par une distribution normale quand T est grand. Pour un taux de couverture  $\alpha = 0.01$ , TR est en moyenne nulle, ce qui conduit à une approximation normale fortement imprécise pour des tailles d'échantillons utilisées en pratique. Notons :

$$X_t(\alpha) = \begin{cases} r_t - VaR_t(\alpha) & \text{si } R_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (384)$$

Avec  $TR = -E[X]$ ,  $X \in [-\infty; 0]$ . On peut alors réécrire :

$$\widehat{TR} = -\bar{X} = -T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \quad (385)$$

La fonction de distribution cumulative de X peut être donnée par

$$F(X) = \begin{cases} \phi(X + VaR) & \text{si } X < 0 \\ 1 & \text{si } X = 0 \end{cases} \quad (386)$$

Où  $\phi$  est la fonction de densité de probabilité de X. La technique du point selle est démontrée par l'auteur. Le test repose sur ces deux hypothèses :  $H_0 : TR = TR_0$  contre  $H_1 : TR > TR_0$ . Sous  $H_0$ , le modèle de risque est consistant avec le risque observé dans les queues de distribution.

#### A.16.4.5 TEST DE PÉRIGNON ET SMITH(2008)

Pérignon et Smith(2008) proposent une procédure de backtesting basée sur une VaR multidimensionnelle. Cette dernière représente différentes VaR mesurées sur le même horizon mais pour plusieurs taux de couverture. L'idée sous-jacente à ce test suppose que la précision d'un modèle ne peut être évaluée en utilisant un seul taux de couverture et qu'une analyse plus précise de la queue gauche de la distribution des rentabilités est souhaitable. Ce test se présente comme une généralisation multivariée du test de Kupiec(1995) et présente la particularité d'être utilisable pour n'importe quelle combinaison de taux de couverture et pour n'importe quel horizon temporel. Face aux limites du test de Kupiec, notamment sa faible puissance statistique, Berkowitz(2001) suggère de tester toute la distribution en utilisant la transformation de Rosenblatt. Si la densité conditionnelle est correctement spécifiée alors l'inversion de la fonction de densité cumulative du modèle (en utilisant la densité normale) produira une variable aléatoire normale. Berkowitz(2001) recommande de restreindre l'analyse à la queue gauche de la distribution. Pérignon et Smith(2008) proposent de combiner les 2 approches- de Kupiec et de Berkowitz- en retenant leurs caractéristiques attractives. Le test met l'accent sur plusieurs VaR évaluées pour différents taux de couverture dans la queue gauche de la distribution. Soit  $K$  différents taux de couvertures notés  $p_i$  avec  $i = 1, 2, \dots, K$  et  $p_1 > p_2 > \dots > p_K$ . Les VaR associées à chaque taux de couverture sont plus extrêmes au fur et à mesure que  $i$  augmente. On peut associer à chacune des  $K$  VaR une variable indicatrice définie par :

$$J_{i,t+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } -VaR_{t+1|t}(p_{i+1}) < R_{t+1} \leq -VaR_{t+1|t}(p_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (387)$$

Avec  $p_{K+1} = 0, VaR_{t+1|t} = \infty$  et :

$$J_{o,t+1} = \prod_{i=1}^K (1 - J_{i,t+1}) \quad (388)$$

$$J_{i,t+1} = I_{i,t+1} - I_{i+1,t+1} \quad (389)$$

La variable indicatrice  $J_{i,t+1}$  vaut 1 lorsque la rentabilité est comprise entre la  $Var_{t+1|t}(p_i)$  et la  $Var_{t+1|t}(p_{i+1})$ . Elle vaut 0 dans tous les autres cas. Les auteurs définissent :

$$J_{i,t+1} = 1 \text{ avec une probabilité } \theta_i = p_i - p_{i+1}, i > 0 \quad (390)$$

$$J_{0,t+1} = 1 \text{ avec une probabilité } \theta_0 = 1 - p_1 \quad (391)$$

Soit  $\theta$ , le vecteur des K probabilités :  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)'$ . Si nous notons  $N_{t+1} = i$  quand  $J_{i,t+1} = 1, i \geq 0$  le nombre d'exceptions, on peut définir la densité de N par :

$$G(n_t, \theta) = Pr(N_t = n_t; \theta) = (1 - 1'\theta)^{J_{o,t}} \prod_{i=1}^K \theta_i^{J_{i,t}} \quad (392)$$

Et la fonction de vraisemblance associée est donnée par :

$$LL(N, \theta) = \sum_{t=1}^T (J_{o,t} \ln(1 - 1'\theta) + \sum_{i=1}^K J_{i,t} \ln(\theta_i)) \quad (393)$$

Le test de couverture non conditionnelle est donné par :

$$LR_{MUC} = 2[(n_0 \ln(1 - 1'\hat{\theta}) + \sum_{i=1}^K n_i \ln(\hat{\theta}_i)) - [(n_0 \ln(1 - 1'\theta) + \sum_{i=1}^K n_i \ln(\theta_i))] \quad (394)$$

$$LR_{MUC} = 2[\ln[\frac{1-1'\hat{\theta}}{1-1'\theta}]^{n_0} + \sum_{i=1}^K \ln[\frac{\hat{\theta}_i}{\theta_i}]^{n_i}] \quad (395)$$

$$LR_{MUC} \sim X^2(K) \quad (396)$$

Où  $n_i = \sum_{t=1}^T J_{i,t}$  et  $\hat{\theta}_i$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  :

$$\hat{\theta}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T J_{i,t} \quad (397)$$

Si  $K=1$ , on retrouve le test de Kupiec. L'avantage de ce test, illustré par un exemple fournit par les auteurs, réside dans sa capacité à tester plusieurs estimations de la VaR. Ainsi, 3 VaR estimées pour 3 taux de couverture  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  peuvent être valides au sens de la couverture non conditionnelle par le test de Kupiec mais invalide par le test de Pérignon et Smith qui permet de tester les 3 VaR simultanément.



## ANNEXES CHAPITRE 2

---

### B.1 LA NON-LINÉARITÉ

▷ ENCADRÉ 11 : QUELQUES ÉLÉMENTS POUR DÉTECTER LE TYPE DE NON LINÉARITÉ (GUÉGAN(2003))

Guégan(2003) propose un certain nombre d'éléments qui permettent de déterminer les modèles les plus appropriés pour une trajectoire particulière. Le concept de non-linéarité étant relativement vaste, les différents modèles permettant de la prendre en compte peuvent être regroupés selon 3 catégories :

- ceux qui font intervenir des fonctions polynomiales : on retrouve dans cette classe les processus bilinéaires, hétéroscédastiques, à mémoire longue ou chaotiques.
- ceux qui intègrent des fonctions discontinues : ce sont essentiellement les processus à seuils et à changements de régime.
- ceux qui incluent des fonctions de type logarithmique ou exponentielle comme certains processus hétéroscédastiques ou EXPAR.

Pour pouvoir approcher au mieux les caractéristiques d'une trajectoire, un examen graphique et une analyse statistique doivent être menées. Le choix d'un modèle est aussi conditionné à un certain nombre d'analyses.

- Analyse graphique : une étude de la représentation graphique de la trajectoire, de la FAC, du périodogramme et de l'histogramme doit être menée. Une représentation bivariée de la série peut fournir d'autres informations.

\* la représentation graphique des trajectoires doit permettre de détecter des explosions, des ruptures, des sauts, des phénomènes de persistance.

(GUÉGAN(2003))

- la FAC permet d'évaluer la vitesse de décroissance vers 0. Elle est très rapide pour des processus linéaires à bruit gaussien caractérisés par une mémoire courte et pour certains modèles de type non linéaire comme les modèles ARCH ou SETAR.
- le périodogramme permet de détecter des explosions en une ou plusieurs fréquences, la présence d'harmoniques ou une bande de fréquence large.
- l'histogramme renseigne sur l'asymétrie, la vitesse de décroissance des queues de la distribution vers 0 et l'existence de pluri-modalités.
- la convexité du nuage de points.
- l'histogramme de la série des accroissements :  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$  permet de détecter si la distribution est quasi-exponentielle et les éventuelles intermittences dans la trajectoire.
- Analyse du modèle : le modèle choisit doit être soumis à plusieurs vérifications préalables :

- \* l'existence des moments. Ils sont tous définis pour les modèles linéaires.
- \* la réversibilité<sup>112</sup>
- \* le spectre : la puissance spectrale est donnée par le carré de l'amplitude de la transformée de Fourier du processus par unité de temps :

$$S(w) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \int_0^n e^{iwt} X_t dt \right|^2 \quad (398)$$

$S(w)$  indique si le spectre est périodique ou quasi-périodique. S'il est caractérisé par une large bande, son analyse est plus compliquée à cause de la présence possible d'une structure chaotique, d'un bruit ou d'un mélange des deux.

- \* le prédictor des moindres carrés est une propriété, difficile à établir, qui suppose qu'un processus est linéaire si étant donné l'ensemble de valeurs passées, le prédictor des moindres carrés pour cet ensemble est aussi le prédictor linéaire.

112. Un processus statistique  $X_t, t \in \mathbb{Z}$  est dit réversible dans le temps si pour tout entier  $n$  et pour tout  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ , les vecteurs  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  et  $(X_{t_n}, \dots, X_{t_1})$  ont les mêmes distributions conjointes.

▷ ENCADRÉ 11 : QUELQUES ÉLÉMENTS POUR DÉTECTER LE TYPE DE NON LINÉARITÉ  
(GUÉGAN(2003))

- la loi non conditionnelle d'un processus. Si elle est gaussienne, le processus est linéaire, sinon il est linéaire non gaussien ou non linéaire.
- Statistiques empiriques :
  - \* les moments empiriques (au moins jusqu'à l'ordre 4)
  - \* le Q-Q plot ou le test de Kolmogorov Smirnov permettent de comparer la distribution empirique à une distribution théorique. Si l'étude de la distribution empirique fait apparaître plusieurs maxima, cette propriété suggère des processus non linéaires, voire chaotiques.
  - \* Une transformation instantanée comme la valeur absolue, le carré de la série ou toute autre puissance peut être informative.
  - \* L'étude des dimensions généralisées empiriques sont des statistiques basées sur des moments empiriques d'ordre supérieur qui permettent de détecter des explosions lorsqu'on analyse l'évolution en fonction de la dimension de plongement.



## B.2 MÉTHODE DES SURROGATES DATA

La méthode des surrogates data (SD) permet d’approfondir les analyses préliminaires d’une série temporelle. La présentation qui suit s’inspire largement des monographies de Schreiber et Schmitz(2000), Kugiumtzis(2000), Maiwald et al(2008), Theiler et al.(1992). D’aucuns s’accordent sur la nécessité d’une analyse rigoureuse de la série temporelle afin de mettre en évidence toutes les non linéarités présentes et les SD permettent de confronter les caractéristiques de la série temporelle à celles du processus générateur supposé.

Supposons une série temporelle  $X_t, t = 1, \dots, N$ . Si nous retenons l’hypothèse d’un processus générateur de type ARMA, il faut définir les caractéristiques de ce processus, notamment les corrélations linéaires qui peuvent exister dans ce type de processus. L’hypothèse  $H_0$  suppose que la série  $X_t$  est issue d’un processus ARMA(p,q). L’hypothèse alternative n’est pas spécifiée. Pour vérifier cette hypothèse, il faut générer un nombre M de séries de données dont les caractéristiques sont celles du processus supposé, ici le processus ARMA. Ensuite, il faut une statistique qui permet de discriminer les processus ARMA de tout autre processus et de la calculer pour toutes les séries simulées et pour la série  $X_t$ . Si la statistique calculée pour la série  $X_t$  est comprise dans l’intervalle des statistiques calculées pour les SD alors l’hypothèse nulle est retenue. Le rejet de l’hypothèse nulle signifie simplement que si l’hypothèse nulle est vraie, elle ne peut être observée que dans un nombre restreint de cas. Le non-rejet de l’hypothèse nulle signifie que soit l’hypothèse nulle est vraie, soit la statistique retenue n’est pas assez performante pour l’hypothèse alternative. Cet exemple simpliste ne reflète pas la finalité des SD souvent utilisés pour distinguer un processus faiblement non linéaire d’un processus linéaire. Dans cet objectif, il est indispensable de définir des statistiques ou des mesures propres à la non-linéarité. Par exemple, on peut retenir l’asymétrie d’une série temporelle inversée définie par :

$$\Phi^{REV}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=\tau+1}^N (X_n - X_{n-\tau})^3 \quad (399)$$

La réversibilité d’un système peut aussi être étudiée, elle est une forte signature de la non linéarité. Dans le cas d’une série temporelle pour laquelle on suppose un processus générateur déterministe, la reconstruction de la dynamique dans l’espace des phases est nécessaire. La statistique que l’on peut retenir dans ce cas est une me-

sure de la différence entre l'erreur de prédiction linéaire par rapport à un prédicteur localement linéaire  $F$  :

$$\gamma(m, \tau, \epsilon) = \left( \frac{1}{N} \sum [X_{n+1} - F(X_n)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (400)$$

Le problème de ces différentes mesures que nous venons de présenter porte sur les distributions de probabilités des mesures non linéaires précédemment définies, qui sont inconnues pour un ensemble de données fini. Il est alors possible de recourir à une technique de rééchantillonnage par les simulations de Monte- Carlo. Il existe deux principales méthodes de rééchantillonnage utilisées :

- Typical realisation : on simule des échantillons à partir des équations du modèle supposé. Cette méthode souffre de plusieurs limites : elle est intrinsèquement liée à la définition des retards à retenir, au choix des paramètres et surtout à l'identification du modèle.
- Constrained realisation : Theiler et Prichard(1997) proposent d'imposer des structures à tester dans la série temporelle à la place du modèle à définir. Par exemple, si on cherche à tester l'hypothèse nulle d'indépendance sur une série temporelle, on crée des SD en modifiant aléatoirement la série temporelle et on calcule les corrélations dans la série temporelle et dans les SD. Cette méthode crée des permutations sans remplacement contrairement à la méthode précédente.

### B.3 LE CHAOS EN FINANCE : UNE APPROCHE PAR LES MÉTHODES NON PARAMÉTRIQUES

Dans la modélisation et la prévision des séries temporelles issues de systèmes non-linéaires dynamiques, d'aucuns préconisent l'utilisation de méthodes non paramétriques. Ces dernières sont d'autant plus utilisées dans le cas de séries temporelles pour lesquelles on envisage un processus générateur chaotique mais dont la forme fonctionnelle est inconnue. Il s'agit, à partir d'une trajectoire  $X_1, X_2, \dots, X_T$ , dont on ne connaît pas le processus générateur sous-jacent de tenter d'estimer la fonction  $\phi$  tel que :

$$X_{T+1} = \phi(X_T) \quad (401)$$

Nous présentons 3 méthodes non paramétriques particulièrement utilisées dans le cadre des systèmes dynamiques chaotiques et souvent appliquées dans la modélisation des séries financières :

- Les plus proches voisins : cette méthode est bâtie sur une idée particulière selon laquelle certaines caractéristiques du passé d'une série temporelle peuvent être semblables aux caractéristiques du futur. Ainsi, le comportement de la série temporelle peut présenter des schémas similaires du passé pour les prévisions à court terme.
- Les fonctions à bases radiales : basées sur la théorie du chaos déterministe, il s'agit d'une méthode semi-locale qui permet d'estimer la fonction générant les données.
- Les réseaux de neurones : cette méthode globale s'inspire de la configuration du système nerveux pour construire un modèle capable de capter les non-linéarités des séries temporelles. Elle est parfois présentée comme un pont entre la linéarité et la non-linéarité.

Nous détaillons succinctement ces différentes méthodes et leurs applications en finance.

### B.3.1 LA MÉTHODE DES PLUS PROCHE VOISINS

L'idée de la méthode des plus proches voisins est d'établir des prévisions à court terme en utilisant l'évolution passée des cours. Soit  $X_1, X_2, \dots, X_T$ , l'ensemble d'apprentissage,  $X_T$  étant la dernière observation. Il s'agit de déterminer les distances  $D(X_i, X_T)$  entre  $X_1, X_2, \dots, X_{T-1}$  et  $X_T$ . Généralement, on utilise la norme euclidienne. Si le point  $X_j$  est celui dont la distance avec  $X_T$  est la plus petite, nous sélectionnons  $X_j$  et étudions l'évolution de l'ensemble d'apprentissage de  $X_j$  et  $X_{T-1}$ . Ainsi, il est possible de reconstruire le futur de  $X_T$  à partir de l'évolution de  $X_j$ . Il est possible d'utiliser plusieurs proches voisins pour construire l'évolution de  $X_T$ . Ainsi, si nous retenons 4 plus proches voisins, l'évolution de  $X_T$  sera une somme pondérée

des valeurs futures de ses 4 plus proches voisins. La méthode des plus proches voisins est souvent utilisée dans la prévision des séries temporelles financières. Il en est ainsi de Nowman et al.(2003) qui proposent une comparaison des performances prédictives de plusieurs méthodes paramétriques et non paramétriques. Leurs résultats sur les taux d'intérêt américains indiquent que la méthode des plus proches voisins fournie de bonnes prévisions, comparativement aux méthodes des réseaux neuronaux et de régression linéaire locale mais que ces résultats restent en deçà de ceux obtenus par la méthode paramétrique. Meade(2002) indique que les taux de change ne sont pas mieux décrits par des approches non paramétriques comme la méthode des plus proches voisins que par des méthodes paramétriques comme les modèles AR-GARCH. Agnon et al.(1999) retiennent une méthode particulière des plus proches voisins et montrent qu'elle surperforme les méthodes traditionnelles dans la prévision des séries temporelles économiques. De nombreuses méthodes de prévisions construites sur la méthode des plus proches voisins ont été proposées : elles montrent la capacité de cette méthode à fournir des prévisions plus précises (Feng et al.(2013) ; Lin et al.(2012) ; Benitez et al.(2000)).

Dans le cadre de prévisions de séries temporelles non linéaires chaotiques par la méthode des plus proches voisins, 2 paramètres doivent être préalablement définis : la dimension de plongement et le nombre de voisins. Guégan et Huck(2005) ont montré que l'estimation par les méthodes standards conduisait à des distorsions car les valeurs sélectionnées pour ces paramètres étaient trop élevées. Ainsi, ces auteurs montrent que le RMSE<sup>113</sup> décroît avec le nombre de voisins retenus et préconisent l'utilisation d'une dimension de plongement relativement petite.

### B.3.2 LES FONCTIONS À BASES RADIALES

Il s'agit d'estimer  $\phi$  à partir d'une combinaison linéaire de fonctions facilement calculables. Soient  $Y_1, \dots, Y_c$ ,  $c$  centres sélectionnés dans l'espace des phases reconstruit. L'estimation de  $X_{T+1}$  peut être donnée par :

$$\hat{X}_{T+1} = \phi_T(X_T) = \sum_{c=1}^C \lambda_c w_c(\|X_T - Y_T\|) \quad (402)$$

---

113. Root Mean Square Error

$\lambda_c$  est estimé par les moindres carrés,  $w_c$  représente une fonction radiale que l'on peut choisir parmi :

- La fonction linéaire :  $(x/R_c)$
- La fonction cubique :  $(x/R_c)^3$
- La fonction " Spline " lissée :  $(x/R_c)^2 \log(x/R_c)$
- La fonction gaussienne :  $\exp(-(x/R_c))$
- La fonction multiquadratique :  $\sqrt{x^2 + R_c^2}$
- La fonction multiquadratique inverse :  $1/\sqrt{x^2 + R_c^2}$

Avec  $R_c$  le rayon de chacune de ces fonctions. En pratique, il s'agit de déterminer le nombre de centres à retenir via différentes méthodes (critères BIC, AIC, méthode de classification, algorithme de clustering des K-moyennes...). On associe à chaque centre un rayon  $\sigma_c$ ; ce qui permet d'estimer la matrice  $W_{M \times C}$  et ainsi de déterminer l'estimateur  $\hat{\phi}$ . À partir de la fonction radiale choisie, on pourra estimer les paramètres  $w_1, w_2, \dots, w_C$  et ainsi déterminer la forme de l'estimateur de  $\phi$ . Cette méthode est largement appliquée dans l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires (Smith(1992), Ogawa et al.(1996), Miyano et al.(2000)). Elle a aussi suscité beaucoup d'intérêt en économétrie financière puisqu'elle fait l'objet de nombreuses applications. Guégan et Mercier(2005) proposent une comparaison des méthodes des plus proches voisins et des fonctions à base radiales et une application à des données financières intra-journalières. Kyrtsov et Terraza(2002) la comparent avec la régression en composantes principales et montrent que cette dernière donne de meilleures prévisions.

### B.3.3 LES RÉSEAUX DE NEURONES

Les réseaux de neurones offrent la possibilité de prévoir les directions du marché de façon plus précise que les techniques traditionnelles (Lawrence (1997)). En réalité si le modèle est bien spécifié, les réseaux de neurones peuvent conduire à de meilleures

prévisions. La caractéristique de cette technique consiste, à partir d'un ensemble de données, à prévoir les données futures en utilisant des méthodes proches du fonctionnement du système nerveux. La définition d'un réseau de neurone est relativement simple : le premier modèle proposé par Widrow et al.(1963) est un simple modèle linéaire du type  $Y = \alpha X$  où Y est définie comme la sortie, X l'entrée et  $\alpha$  les coefficients synaptiques. Ce modèle relativement simple est inadapté, il faut recourir à un véritable réseau composé d'une couche d'entrée qui permet de lire les signaux entrants. Ainsi une série temporelle composée de 3000 points est une couche d'entrée avec 3000 signaux d'entrée. La couche de sortie fournit la réponse du système comme par exemple une prévision. Entre la couche d'entrée et la couche de sortie, il existe une ou plusieurs couches assurant le transfert entre l'entrée et la sortie. L'utilisation d'un réseau neuronal nécessite la définition du réseau et de l'ensemble d'apprentissage, de l'organisation du réseau et des performances du réseau. L'ensemble d'apprentissage est déterminé par l'utilisateur qui doit définir les données utilisées et notamment la nature de ces données. Ainsi, l'utilisation de données financières ou non financières, d'indicateurs techniques ou fondamentaux est possible. La définition du réseau d'apprentissage vise à indiquer les schémas à partir desquels le système doit s'imprégner de telle sorte à minimiser les erreurs. Il existe plusieurs algorithmes permettant d'effectuer cette tâche. Pour les données financières, l'algorithme de back propagation est souvent utilisé. Il faut aussi définir une fonction pour la couche d'entrée (sigmoïde, hyperbolique tangente ...). La phase d'apprentissage est une étape délicate car il faut éviter le sur-apprentissage du réseau d'où l'utilisation de tests de performance comme la validation croisée. Il existe plusieurs architectures de réseaux neuronaux : le réseau back propagation, l'algorithme génétique, le réseau récurrent et le réseau modulaire. Small(2005) note que les réseaux de neurones et les fonctions à bases radiales "[are] excessively nonlinear and difficult to optimise". Néanmoins, les réseaux de neurones sont très populaires. Lawrence(1997) présente une revue de littérature sur l'application des réseaux de neurones pour la prévision des séries temporelles financières. Parmi les applications qui ont été faites, nous pouvons citer sans exhaustivité les travaux de Van Eyden(1996), Kamijo et al.(1990), Kimoto et al.(1990) et plus récemment Arnoult et Issaad(2011). Bahrammirzaee(2010) montre les capacités des méthodes artificielles, dont les réseaux de neurones, pour la gestion des portefeuilles, la prévision financière mais affiche une certaine prudence quant à la

généralisation de ses résultats. Wallace(2011) revient sur l'utilisation des réseaux de neurones en finance : en séries temporelles, cette méthode est souvent utilisée pour vérifier l'hypothèse de marche aléatoire ; dans l'analyse des marchés financiers et les modèles d'actualisation des dividendes ; dans la budgétisation du capital et du risque ; dans la prévision financière. Il rappelle quand même les difficultés et la complexité de cette méthode qui a beaucoup évolué depuis le modèle de Widrow(1963).

---

L'approche non paramétrique a suscité un vif intérêt dans de nombreuses disciplines. Les méthodes d'estimation sont nombreuses et l'application de celles-ci sont présentes dans divers domaines. Il n'existe pas, à ce jour, de consensus sur la méthode non paramétrique la plus appropriée pour estimer une dynamique chaotique. Les différentes méthodes que nous avons présenté ont été largement appliquées en économétrie financière mais la méthode des réseaux de neurones reste la plus utilisée. Outre les insuffisances intrinsèques aux différentes méthodes, la principale limite de l'utilisation de l'approche non paramétrique réside dans l'abstraction des avancées des 30 dernières années en économétrie financière.

## B.4 VALUE-AT-RISK ET CHANGEMENTS DE RÉGIMES

La remise en cause de l'hypothèse de normalité notamment par Mandelbrot(1963) et Fama(1970) a encouragé de nombreux auteurs à recourir à d'autres types de lois(Pareto, Student,...). Dans le cadre de l'estimation de la VaR, l'utilisation de modèles à changements de régimes est envisagée par une certaine partie de la littérature. Il en est ainsi de Billio et Pelizzon(2000) qui proposent un modèle de changements de volatilité pour prévoir la distribution des rentabilités et estimer la VaR pour un actif et un portefeuille d'actifs. Le recours à des modèles à changements de régimes est motivé par 3 impératifs : prendre en compte la non-normalité conditionnelle des rentabilités, prendre en compte la volatilité temporelle et traiter les événements rares. La prise en compte des événements exceptionnels a déjà fait l'objet d'une vaste littérature qui propose notamment l'utilisation de la méthode simulation historique, l'utilisation de distribution de Student ou encore le mélange de deux distributions

normales. Mais ces différentes solutions ne résolvent qu'en partie les problèmes liés aux moments d'ordre 3 et 4 de la distribution des rentabilités et ne corrigent pas la sous-estimation du risque. L'approche proposée par Billio et Pelizzon(2000) est similaire au mélange des distributions proposée par JP Morgan mais s'en distingue par l'hypothèse faite sur la variable aléatoire qui suit une chaîne de Markov à k états au lieu d'une variable de Bernoulli. L'idée sous-jacente à la méthode de Billio et Pelizzon(2000) suppose que le recours à une chaîne de Markov est plus adapté pour tenir compte d'un constat particulier : les fortes volatilités sont généralement suivies de fortes volatilités.

Nous commençons par une présentation du modèle classique de Billio et Pelizzon(2000). Nous présentons ensuite la version beta de ce modèle. Enfin, une introduction au modèle d'Elliot et Miao(2009) est proposée.

#### B.4.1 LE MODÈLE DE BILLIO ET PELIZZON(2000)

La variation du profil du risque d'une économie, d'un agent ou d'un actif peut provenir de changements dans la volatilité. Ces changements doivent être considérés comme aléatoires mais leurs effets doivent être pris en compte par les analystes pour la prévision. Un simple modèle avec changements de régimes peut être défini par :

$$R_t = \mu(S_t) + \sigma(S_t)\epsilon_t \quad (403)$$

Où  $R_t$  est la rentabilité,  $\epsilon_t \sim i.i.d.(0, 1)$ ,  $S_t$  est une chaîne de Markov avec k états dont la matrice des probabilités de transition est notée  $\pi$ . Par exemple, si  $k = 2$  :

$$R_t \begin{cases} \mu_0 + \sigma_0\epsilon_t & \text{si } S_t = 0 \\ \mu_1 + \sigma_1\epsilon_t & \text{si } S_t = 1 \end{cases} \quad (404)$$

Et la matrice  $\pi$  est définie par :

$$\pi = \begin{bmatrix} p & (1-p) \\ (1-q) & q \end{bmatrix}$$

Où les paramètres p et q traduisent la probabilité que la volatilité persiste dans



le même régime. Dans ce modèle, la variance et la moyenne ne change qu'en raison d'évènements périodiques discrets. Dans l'approche de JP Morgan, la variable aléatoire  $S_t$  est une variable de Bernoulli :

$$S_t = \begin{cases} 0 & \text{avec la probabilité } \pi \\ 1 & \text{avec la probabilité } (1 - \pi) \end{cases} \quad (405)$$

La valeur future  $S_{t+1}$  est indépendante de  $S_t$ , elle dépend uniquement des probabilités inconditionnelles de la chaîne de Markov :

$$\pi = \begin{bmatrix} (1 - q)/(2 - p - q) \\ (1 - q)/(2 - p - q) \end{bmatrix}$$

au lieu des probabilités conditionnelles  $p$  et  $q$ . Les deux approches sont similaires si et seulement si  $p = q = 0.5$ . L'approche par une chaîne de Markov permet de tenir compte de l'information conditionnelle pour la prévision. Dans le cadre de cette approche, l'estimation de la VaR requiert la valeur critique de la distribution conditionnelle pour laquelle la densité cumulative est égale à  $a$ . Pour  $k = 2$ , la valeur critique est définie par :

$$a = \sum_{S_{t+h}=0.1} Pr(S_{t+h}|I_t) \int_{-\infty}^{VaR} N(x, \mu(S_{t+h}), \sigma^2(S_{t+h}|I_t)) dx \quad (406)$$

Où  $N$  est la distribution normale,  $I_t$  est l'information disponible à la date  $t$ ,  $Pr(S_{t+h}|I_t)$  est obtenue par le filtre d'Hamilton(1994),  $\mu(S_{t+h})$  et  $\sigma^2(S_{t+h})$  désignent respectivement la moyenne et la variance avec  $\mu(0) = \mu_0, \mu(1) = \mu_1, \sigma^2(0) = \sigma_0^2$  et  $\sigma^2(1) = \sigma_1^2$ . Il est possible de donner une généralisation de ce modèle.

#### B.4.2 MODÈLES AVEC CHANGEMENTS DE RÉGIMES BETA

Le modèle précédent est incapable de rendre compte d'un lien entre la rentabilité de l'actif et la rentabilité de l'indice de marché. Le modèle beta s'inscrit dans le cadre du modèle APT, la rentabilité d'un actif  $i$  est caractérisée par un changement de

régime de l'indice de marché et par des changements spécifiques au risque de l'actif. Il peut être défini par les équations :

$$R_{mt} = \mu_m(S_t) + \sigma_m(S_t)\epsilon_t, \epsilon_t \sim N.i.i.(0, 1) \quad (407)$$

$$R_{it} = \mu_i(S_{it}) + \beta_i(S_t, S_{it})R_{mt} + \sigma_i(S_{it})\epsilon_{it}, \epsilon_{it} \sim N.i.i.(0, 1) \quad (408)$$

Où  $S_t$  et  $S_{it}$  sont deux chaînes de Markov indépendantes. La moyenne conditionnelle de l'actif risqué est donnée par  $\mu_i(S_{it})$  (spécifique à l'actif) et  $\beta_i(S_t, S_{it})$ . Pour calculer la VaR, on retient l'approche précédente et pour  $k = 2$ , on a :

$$a = \sum_{S_{t+h}=0,1} \sum_{S_{i,t+h}=0,1} Pr(S_{t+h}, S_{i,t+h}|I_t) \int_{-\infty}^{VaR} N(x, \mu(S_{t+h}, S_{i,t+h}), \sigma^2(S_{t+h}, S_{i,t+h})|I_t) dx \quad (409)$$

Où N est la distribution normale avec :

$$\mu(S_{t+h}, S_{i,t+h}) = \mu_i(S_{i,t+h}) + \beta_i(S_{t+h}, S_{i,t+h})\mu_m(S_{t+h}) \quad (410)$$

$$\sigma^2(S_{t+h}, S_{i,t+h}) = \beta_i^2(S_{t+h}, S_{i,t+h})\sigma_m^2(S_{t+h}) + \sigma_i^2(S_{i,t+h}) \quad (411)$$

$I_t$  est l'information disponible en t et  $Pr(S_{t+h}, S_{i,t+h}|I_t)$  est obtenu par le filtre d'Hamilton. Ce modèle peut être généralisé pour N facteurs (Multivariate Switching Regime Model(MSRM)) mais la croissance exponentielle du nombre de paramètres à estimer conduit les auteurs à définir un modèle à facteurs avec changements de régimes (FSRM). Billio et Pelizzon(2000) appliquent ce modèle aux rentabilités de 10 actifs italiens. Les résultats de l'estimation montrent la capacité du modèle SSRM à capturer l'effet des changements potentiels dans la volatilité des rentabilités. Les auteurs retiennent 250 observations sur lesquelles ils estiment le modèle. Dans le cadre de la prévision, ils proposent d'augmenter l'échantillon de 50 observations et de ré-estimer les paramètres. La VaR est calculée en retenant les paramètres estimés et par la probabilité du changement prévue jour par jour déterminé par le filtre d'Hamilton (on rajoute une donnée chaque jour). En retenant le test TUFF de Kupiec(1995), Billio et Pelizzon(2000) comparent les prévisions du modèle SSRM, du modèle SRBM, Riskmetrics, le modèle Riskmetrics Beta(analogue au modèle SRBM) et deux versions du modèle GARCH(GARCH-normale, GARCH-Student, GARCH-B, et GARCH-B Student). Le modèle SRBM surperforme toutes les autres spécifications et ce pour tous les actifs. Il ne sous-estime et ne surestime pas le risque et surperforme le modèle SSRM. Ce dernier résultat s'explique par la prise en compte

par le modèle SRBM du lien entre le marché et le risque de l'actif qui apparaît fondamental. Par ailleurs, le modèle SRBM surperforme les modèles GARCH qui s'affaiblissent au fur et à mesure que le nombre d'observations extrêmes dévie de plus en plus des valeurs théoriques et ce, pour tous les actifs.

Guidolin et Timmermann(2003) proposent un modèle multivarié à changements de régimes pour prendre en compte la distribution jointe des rentabilités d'actifs et d'obligations. Le modèle retenu prévoit 4 états et les prévisions de la VaR et de la CVaR surperforment celles du modèle GARCH(1,1). De nombreuses études empiriques conduisent à une sous-estimation de la VaR à 99% lorsque la méthode de simulation historique est appliquée. Le caractère leptokurtique n'est pas correctement pris en compte par ces méthodes mais Inui et al.(2005) ont montré que théoriquement, la méthode simulation historique a tendance à surestimer la VaR lorsque la distribution des rentabilités est leptokurtique. Kawata et Kijima(2007) tentent de réconcilier ces deux résultats en retenant les modèles à changements de régimes pour estimer la VaR d'un portefeuille. Le modèle retenu permet de corriger la sous estimation du risque. Les modèles précités-Billio et Pelizzon(2000), Guidolin et Timmermann(2003), Kawata et Kijima(2005)-supposent une distribution normale des rentabilités. Elliot et Miao(2009) développent un modèle avec changements de régimes pour calculer la VaR et la CVaR. Ce modèle permet de prendre en compte les clusters de volatilité et la variation de la variance en retenant une distribution de Student.

#### B.4.3 MODÈLE D'ELLIOT ET MIAO(2009)

Le modèle à changements de régimes retenu suppose une variable d'état inobservable  $X$  qui prend différentes valeurs selon le régime. Les différents états du monde sont représentés par une chaîne de Markov et une matrice des probabilités de transition. Le nombre d'états retenu est  $k = 2$ . Soit l'espace d'états  $S$  de  $X$  défini par :

$$S = \{e_i, i = 1, 2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (412)$$

Soit  $p_{ij} = P(X_k = e_j | X_{k-1} = e_i)$  et posons  $A = p_{ji}, 1 \leq i, j \leq 2$  pour la matrice de transition. On a :

$$X_k = AX_{k-1} + V_t \quad (413)$$

Où  $V_t$  est une martingale. On suppose que la série des rentabilités  $Y_k, (0 \leq k \leq T)$  d'un actif financier S suit une distribution de Student avec changements de régimes dont la fonction de densité est donné par :

$$T(x|V, \mu, \sigma) = \frac{T((V+1)/2)}{T(V/2)\sqrt{\pi V\sigma^2}} \left(1 + \frac{1}{V} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-\frac{V+1}{2}} \quad (414)$$

Pour  $V, \sigma > 0$ . La rentabilité de l'actif peut être décrite par :

$$Y_k \sim \begin{cases} T(V_1, \mu_1, \theta_1) \text{ dans l'état 1} \\ T(V_2, \mu_2, \theta_2) \text{ dans l'état 2} \end{cases} \quad (415)$$

La fonction de densité de  $Y_k$  est alors donnée par :

$$\Psi(Y_k) = \prec X_{k-1}, e_1 \succ T_1(Y_k) + \prec X_{k-1}, e_2 \succ T_2(Y_k) \quad (416)$$

Ce modèle peut capturer la leptokurticité et les clusters de volatilité selon les différents régimes. Les auteurs supposent :

$$Y_k = \log \frac{S_k}{S_{k-1}} = \mu_k(X_{k-1}) + \sigma(X_k, k)\epsilon_{k+1} \quad (417)$$

Où  $\epsilon_{k+1} \sim N(0, 1)$ . Les rentabilités sont normalement distribuées avec une moyenne  $\mu_k$  et une variance  $\sigma_k^2$ .  $\mu_k$  dépend de la variable d'état  $X_k$  et  $\sigma_k^2$  dépend non seulement de la variable d'état  $X_k$  mais aussi du temps  $k$ , c'est ce qui distingue ce modèle des autres spécifications qui faisaient dépendre  $\sigma_k^2$  uniquement de la variable d'état  $X_k$ . Si on suppose que l'inverse de la variance suit une distribution  $\Gamma$  alors la variance dans chaque état prend des valeurs positives :

$$\mu_k = \prec \mu, X_{k-1} \succ \quad (418)$$

$$\sigma_k^2 = \prec \sigma^2, X_{k-1} \succ \quad (419)$$

Où :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Et :

$$\frac{1}{\sigma_i^2} \sim G(v_i, v_i \theta_i) \text{ pour } i = 1, 2 \quad (420)$$

G est la distribution Gamma avec une fonction de densité définie par :

$$G(x|v, \beta) = \frac{(\beta/2)^{v/2}}{\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-(\beta/2)x} I_{\{x \geq 0\}} \quad (421)$$

$v, \beta > 0$  Où :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (422)$$

$$Y_t|e_i \sim T(v_i, \mu_i, \theta_i) \quad (423)$$

Où  $\mu_i$  est le paramètre de localisation,  $\theta$ , le paramètre d'échelle et  $v_i$ , le paramètre de pente. Les différents paramètres sont alors estimés par l'algorithme EM.

## ANNEXES CHAPITRE 3

---

### C.1 ANALYSE DES STRUCTURES ET CARACTÉRISTIQUES DES INDICES EUROPÉENS SUR LA PÉRIODE [2003-2011]

Les annexes qui suivent présentent certains résultats de l'analyse préliminaire. Nous exposons les relations susceptibles d'exister entre les indices et les titres bancaires figurant dans ces mêmes indices.

#### C.1.1 LES RELATIONS ÉCONOMIQUES ENTRE INDICES ET TITRES BANCAIRES : UNE ANALYSE COMPARÉE DES GIPSI, DE L'ALLEMAGNE ET DE LA FRANCE

L'étude des relations économiques qui peuvent exister entre les indices et titres bancaires constitue une étape préliminaire indispensable qui peut mettre en évidence des relations particulières entre les différents indices, entre indices et titres et entre les différents titres bancaires. La relation indice-titre bancaire est assez particulière : elle renseigne sur le type d'économie du pays, elle met en évidence l'impact plus ou moins important du secteur bancaire sur l'indice de marché et elle offre un aperçu intéressant sur la volatilité du marché. En effet, les titres bancaires sont réputés pour leur forte volatilité qui amplifie souvent celle de l'indice de référence. La part que représente le secteur bancaire dans l'indice est alors déterminante : les indices boursiers caractérisés par une part du secteur bancaire importante sont souvent les plus volatiles.

Nous proposons d'analyser les relations indice-titre bancaire au moyen de 3 indicateurs :

- la part des actifs bancaires dans chaque indice
- les corrélations entre indice et titre
- les droites de marché.

#### C.1.1.1 LA PART DES ACTIFS BANCAIRES DANS CHAQUE INDICE

Le graphique 45 recense les différents indices et titres pour chaque pays.

Les graphiques 46 et 47 présentent la part des différents actifs dans l'indice national et la part total du secteur bancaire dans l'indice. Un premier constat porte sur la part totale du secteur bancaire et financier dans les différents indices : on peut distinguer 2 groupes, le premier est composé des indices français, allemand et irlandais et le second est composé de la Grèce, du Portugal, de l'Espagne et de l'Italie. La part du secteur bancaire dans le premier groupe n'excède pas 10% alors que les pays du Sud de la zone euro sont caractérisés par une forte part (près d'un tiers) du secteur bancaire et financier dans l'indice national. Ces caractéristiques peuvent être d'ordre purement culturel puisque le deuxième groupe est essentiellement composé de pays de l'Europe du Sud. L'économie de ces derniers est essentiellement axée sur l'agriculture et une des caractéristiques de ce type d'économie est la part relativement importante du secteur bancaire dans les indices boursiers. Par ailleurs, une grande partie des indices boursiers est construite en tenant compte du poids des différents secteurs dans l'économie. Ainsi, en Allemagne et en France, le secteur bancaire et financier occupe une place moins importante dans l'économie que les pays de l'Europe du sud. Un autre aspect particulier que nous pouvons relever porte sur le poids de certains titres dans les différents indices. Ainsi, pour les indices français, allemand, irlandais, et hellénique nous notons qu'à chaque fois un titre occupe une part importante, respectivement les titres Bnp Paribas, Deutsche Bank, Bank of Ireland et NBG. Cette caractéristique n'est pas observée pour les indices espagnol, portugais et italien marqués par des parts importantes de 2 ou 3 titres dans les indices nationaux.

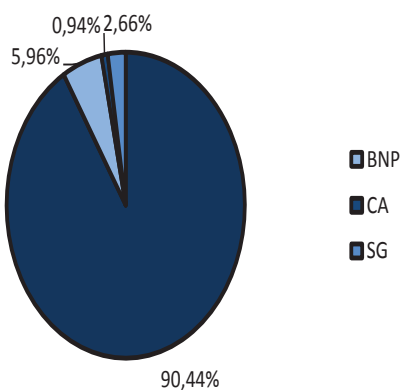
| France<br>CAC 40   | Allemagne<br>DAX 30  | Irlande<br>ISEQ  | Grèce<br>ATHEX  | Espagne<br>IBEX 35  | Portugal<br>(PSI 20)  | Italie<br>S&P/MIB  |
|--|--|--|---|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• BNP Paribas (BNP)</li> <li>• Crédit Agricole (CA)</li> <li>• Société Générale (SG)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Commerzbank (CB)</li> <li>• Deutsche Bank (DB)</li> <li>• Deutsche Post Bank (DPB)</li> <li>• Deutsche Börse (DBO)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Allied Irish Bank (AIR)</li> <li>• FBD Holdings (FBD)</li> <li>• Governor and Co. (BIR)</li> <li>• IFG Group (IFG)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Alpha Bank (AB)</li> <li>• National Bank of Greece(ETE)</li> <li>• Bank of Cyprus (BOC)</li> <li>• Eurobank (EB)</li> <li>• Helene Exchange (EXAE)</li> <li>• Piraeus Bank (PIRA)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Banco Popular (BP)</li> <li>• Banco Sabadell (BS)</li> <li>• Grupo Santander (GS)</li> <li>• Bankinter (BINTER)</li> <li>• BBVA</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Banco Commercial (BC)</li> <li>• Banco Espírito Santo (BE)</li> <li>• BPI</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Banco Popolar (BP)</li> <li>• BCA MPS (BMPS)</li> <li>• BCA Pop Milano (PMI)</li> <li>• Exor (EXO)</li> <li>• Intesa San Paolo (ISP)</li> <li>• Medio Banca (MB)</li> <li>• UbiBanca (UBI)</li> <li>• UniCredit (UCG)</li> <li>• Banco Popolar Romagna (BPE)</li> </ul> |

Graphique 45 – Indices et titres retenus pour l’analyse

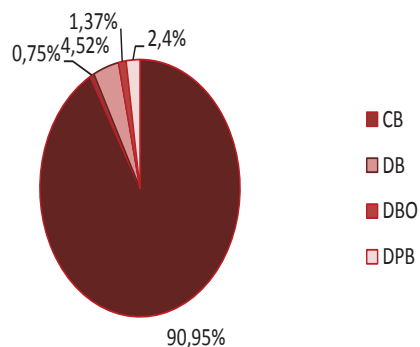
*Pour la suite de l’analyse, nous dénotons NBG le titre bancaire National Bank of Greece et BOFC le titre bancaire Bank of Cyprus*



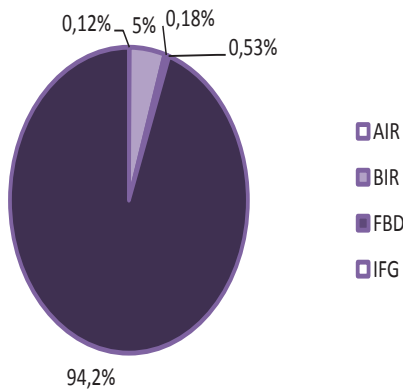
### Part des différents actifs bancaires dans le CAC 40



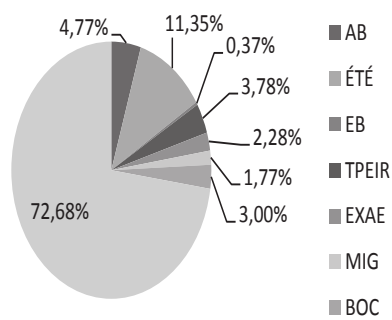
### Part des différents actifs bancaires et financiers dans le DAX 30



### Part des actifs bancaires et financiers dans l'ISEQ

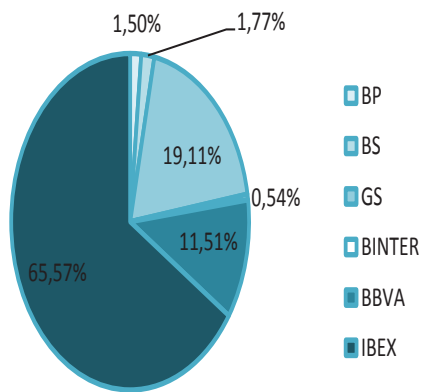


### Part des différents actifs bancaires et financiers dans l'ATHEX

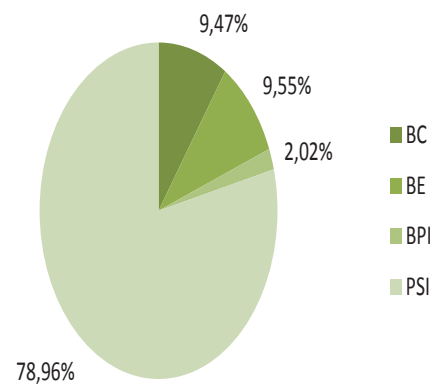


Graphique 46 – Les poids des différents titres dans leurs indices respectifs

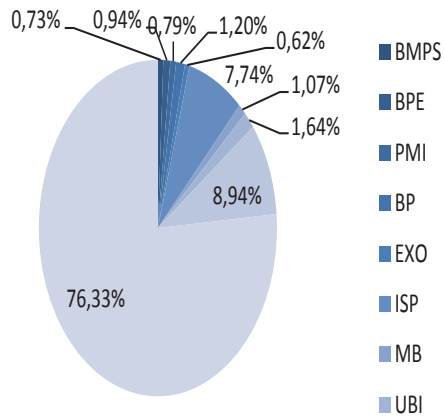
### Part des actifs bancaires et financiers dans l'IBEX



### Part des actifs bancaires et financiers dans le PSI



### Part des actifs bancaires et financiers dans le SP/MIB



Graphique 47 – Les poids des différents titres dans leurs indices respectifs

### C.1.1.2 LES CORRÉLATIONS ENTRE INDICES ET TITRES

L'annexe C.1.2. présente les corrélations linéaires entre les différents indices et titres. Le tableau 23 donne les corrélations entre les différents indices de l'analyse : sept relations caractérisées par une forte corrélation ( $\geq 0.9$ ) sont mises en évidence. Elles concernent 4 pays en particulier : la Grèce, la France, le Portugal et l'Italie. L'indice français est fortement corrélé à l'indice hellénique, portugais et italien et ces deux derniers sont fortement corrélés à l'ATHEX. Par ailleurs, les indices portugais et italien sont fortement corrélés respectivement aux indices irlandais et espagnol. Ce constat est intéressant puisqu'il fait apparaître une dé-corrélation entre le moteur européen (l'Allemagne) et les autres pays de l'euro zone. Des relations secondaires (avec des coefficients de corrélation compris entre 0.8 et 0.9) existent entre l'indice hellénique et les indices espagnols et irlandais, ces derniers sont aussi bien corrélés avec le CAC. Nous notons donc une certaine interdépendance linéaire entre ces pays<sup>114</sup>. Une analyse par marché peut être effectuée à partir des tableaux 24 à 30. Ils présentent les coefficients de corrélations entre chaque titre et leur indice principal. Pour chaque marché, nous notons des caractéristiques différentes selon l'analyse par corrélations ;

- en ce qui concerne le CAC et les titres bancaires inclus dans cet indice, nous notons une très forte corrélation positive, qu'elle soit évaluée entre les titres ou entre l'indice et les différents titres ( $>0.8$ ) ;
- pour les actifs allemands, une forte corrélation est observée entre les titres bancaires. L'indice allemand n'est que faiblement corrélé avec les titres bancaires ;
- l'analyse des corrélations des titres irlandais montre une forte corrélation entre les titres et l'indice à l'exception du titre IFG, faiblement corrélé avec les autres titres bancaires et avec l'indice boursier ;
- les titres helléniques sont fortement corrélés avec l'indice ATHEX. Les corrélations entre les titres montrent 3 relations moins corrélés que les autres (AB-BOFC, AB-EXAE, BOFC-EFG) ;

---

114. Il ne s'agit ici que d'un constat établi à partir d'une mesure linéaire. Pour plus de précisions sur les relations d'interdépendance dans la zone euro, voir Hennani et Terraza (2014), La crise des dettes souveraines : contagions ou interdépendances des principaux indices de la zone euro ?, Document de recherche Lameta 14-04

- l'analyse des corrélations entre les titres et l'indice espagnol montre de fortes corrélations entre titres (exceptés pour le titre GS) et entre titre et indice ;
- pour le Portugal, nous notons de fortes corrélations positives entre indice et titres bancaires ;
- enfin, les corrélations entre indice et titres italiens sont marqués par une corrélation négative entre le titre EXO et tous les autres actifs.

Une analyse des corrélations entre les différents titres bancaires et les indices retenus, reportés dans les tableaux 31 et 32, met en exergue de nouveaux éléments :

- Deux titres (EXO et GS) et un indice (DAX) ne sont pas corrélés avec les autres indices (ATHEX, CAC, ISEQ, SP et PSI). Cela confirme l'idée d'une cassure entre d'une part l'indice allemand et d'autre part les autres indices et titres retenus. Ce constat est à relativiser compte tenu du calcul particulier de l'indice DAX. Par ailleurs, l'absence de corrélations des titres bancaires Grupo Santander et Exor, respectivement espagnol et italien, montre une évolution particulière de ces titres qui semblent n'avoir aucune relation avec les autres indices boursiers. De plus, la corrélation entre ces deux titres est faible.
- Outre les fortes corrélations de l'indice PSI avec les indices ATHEX, CAC et IBEX, nous relevons de très fortes corrélations de l'indice portugais avec les titres helléniques BOFC et EXAE. Ce résultat montre que la dynamique de l'indice PSI est plus proche de celles des titres helléniques et indices boursiers précités.
- Contrairement aux indices ISEQ, SP, PSI, ATHEX et CAC, l'indice espagnol est marqué par l'absence de corrélations avec 40% des titres retenus. Ce constat est assez révélateur d'un indice partiellement intégré au marché financier européen, constat que l'on peut mettre en perspective avec d'un part l'indice allemand décorrélé avec tous les indices et titres retenus et d'autre part une décorrélation des indices ISEQ, SP, PSI, ATHEX et CAC avec seulement 12,5% des titres bancaires retenus. Tout se passe comme si les indices européens étaient subdivisés en 3 groupes : le premier constitué uniquement du DAX, le second comprend les indices ISEQ, SP, PSI, ATHEX et CAC et le dernier est constitué de l'IBEX.

|       | ATHEX | CAC  | DAX  | IBEX | ISEQ | SP   | PSI  |
|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| ATHEX | 1     | 0,90 | 0,14 | 0,81 | 0,89 | 0,96 | 0,91 |
| CAC   | 0,90  | 1    | 0,48 | 0,89 | 0,89 | 0,93 | 0,94 |
| DAX   | 0,14  | 0,48 | 1    | 0,58 | 0,13 | 0,13 | 0,44 |
| IBEX  | 0,81  | 0,89 | 0,58 | 1    | 0,65 | 0,76 | 0,94 |
| ISEQ  | 0,89  | 0,89 | 0,13 | 0,65 | 1    | 0,96 | 0,79 |
| SP    | 0,96  | 0,93 | 0,13 | 0,76 | 0,96 | 1    | 0,88 |
| PSI   | 0,91  | 0,94 | 0,44 | 0,94 | 0,79 | 0,88 | 1    |

Tableau 23 – Corrélations entre les différents indices

|     | BNP  | CA   | CAC  | SG   |
|-----|------|------|------|------|
| BNP | 1    | 0,89 | 0,94 | 0,93 |
| CA  | 0,89 | 1    | 0,84 | 0,98 |
| CAC | 0,94 | 0,84 | 1    | 0,90 |
| SG  | 0,93 | 0,98 | 0,90 | 1    |

Tableau 24 – Corrélations entre les titres et l'indice français

|     | CB   | DAX  | DB   | DBO  | DPB  |
|-----|------|------|------|------|------|
| CB  | 1    | 0,14 | 0,96 | 0,83 | 0,91 |
| DAX | 0,14 | 1    | 0,17 | 0,43 | 0,24 |
| DB  | 0,96 | 0,17 | 1    | 0,83 | 0,91 |
| DBO | 0,83 | 0,43 | 0,83 | 1    | 0,78 |
| DPB | 0,91 | 0,24 | 0,91 | 0,78 | 1    |

Tableau 25 – Corrélations entre les titres et l'indice allemands

|      | AIB  | BIR  | FBD  | IFG  | ISEQ |
|------|------|------|------|------|------|
| AIB  | 1    | 0,99 | 0,94 | 0,50 | 0,97 |
| BIR  | 0,99 | 1    | 0,92 | 0,47 | 0,96 |
| FBD  | 0,94 | 0,92 | 1    | 0,65 | 0,95 |
| IFG  | 0,50 | 0,47 | 0,65 | 1    | 0,64 |
| ISEQ | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,64 | 1    |

Tableau 26 – Corrélations entre les titres et l'indice irlandais

|       | AB   | BOFC | PIRA | ATHEX | NBG  | EFG  | EXAE |
|-------|------|------|------|-------|------|------|------|
| AB    | 1    | 0,59 | 0,86 | 0,87  | 0,87 | 0,96 | 0,67 |
| BOFC  | 0,59 | 1    | 0,89 | 0,89  | 0,87 | 0,67 | 0,94 |
| PIRA  | 0,86 | 0,89 | 1    | 0,99  | 0,98 | 0,91 | 0,90 |
| ATHEX | 0,87 | 0,89 | 0,99 | 1     | 0,99 | 0,92 | 0,90 |
| NBG   | 0,87 | 0,87 | 0,98 | 0,99  | 1    | 0,91 | 0,89 |
| EFG   | 0,96 | 0,67 | 0,91 | 0,92  | 0,91 | 1    | 0,72 |
| EXAE  | 0,67 | 0,94 | 0,90 | 0,90  | 0,89 | 0,72 | 1    |

Tableau 27 – Corrélations entre les titres et l'indice helléniques

|        | BP    | BS    | GS    | BINTER | BBVA  | IBEX |
|--------|-------|-------|-------|--------|-------|------|
| BP     | 1     | 0,94  | -0,28 | 0,91   | 0,95  | 0,70 |
| BS     | 0,94  | 1     | -0,01 | 0,96   | 0,94  | 0,84 |
| GS     | -0,28 | -0,01 | 1     | -0,02  | -0,15 | 0,14 |
| BINTER | 0,91  | 0,96  | -0,02 | 1      | 0,92  | 0,80 |
| BBVA   | 0,95  | 0,94  | -0,15 | 0,92   | 1     | 0,82 |
| IBEX   | 0,70  | 0,84  | 0,14  | 0,80   | 0,82  | 1    |

Tableau 28 – Corrélations entre les titres et l'indice espagnols

|     | BC   | BE   | BPI  | PSI  |
|-----|------|------|------|------|
| BC  | 1    | 0,95 | 0,95 | 0,84 |
| BE  | 0,95 | 1    | 0,86 | 0,72 |
| BPI | 0,95 | 0,86 | 1    | 0,88 |
| PSI | 0,84 | 0,72 | 0,88 | 1    |

Tableau 29 – Corrélations entre les titres et l'indice portugais

|      | BP2   | BMPS  | EXO   | MB    | UBI   | UCG   | SP    | ISP   | BPE   | PMI   |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| BP2  | 1,00  | 0,80  | -0,66 | 0,78  | 0,86  | 0,85  | 0,86  | 0,89  | 0,83  | 0,85  |
| BMPS | 0,80  | 1,00  | -0,65 | 0,96  | 0,96  | 0,97  | 0,97  | 0,94  | 0,96  | 0,96  |
| EXO  | -0,66 | -0,65 | 1,00  | -0,62 | -0,76 | -0,65 | -0,62 | -0,61 | -0,60 | -0,65 |
| MB   | 0,78  | 0,96  | -0,62 | 1,00  | 0,95  | 0,96  | 0,97  | 0,95  | 0,96  | 0,97  |
| UBI  | 0,86  | 0,96  | -0,76 | 0,95  | 1,00  | 0,97  | 0,96  | 0,96  | 0,95  | 0,97  |
| UCG  | 0,85  | 0,97  | -0,65 | 0,96  | 0,97  | 1,00  | 0,98  | 0,96  | 0,96  | 0,97  |
| SP   | 0,86  | 0,97  | -0,62 | 0,97  | 0,96  | 0,98  | 1,00  | 0,98  | 0,97  | 0,97  |
| ISP  | 0,89  | 0,94  | -0,61 | 0,95  | 0,96  | 0,96  | 0,98  | 1,00  | 0,97  | 0,98  |
| BPE  | 0,83  | 0,96  | -0,60 | 0,96  | 0,95  | 0,96  | 0,97  | 0,97  | 1,00  | 0,98  |
| PMI  | 0,85  | 0,96  | -0,65 | 0,97  | 0,97  | 0,97  | 0,97  | 0,98  | 0,98  | 1,00  |

Tableau 30 – Corrélations entre les titres et l'indice italiens

| Séries | AB    | AIB   | ATHEX | BBVA  | BC    | BE    | BINTER | BIR   | BMPS  | BNP   | BOFC  | BP    | BP2   | BPE   | BPI   | BS    | CA    | CAC   | CB    | DAX   |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AB     | 1,00  | 0,93  | 0,87  | 0,84  | 0,91  | 0,97  | 0,76   | 0,94  | 0,87  | 0,73  | 0,59  | 0,91  | 0,81  | 0,81  | 0,82  | 0,76  | 0,90  | 0,69  | 0,88  | -0,23 |
| AIB    | 0,93  | 1,00  | 0,89  | 0,90  | 0,94  | 0,94  | 0,82   | 0,99  | 0,96  | 0,81  | 0,66  | 0,95  | 0,79  | 0,90  | 0,91  | 0,84  | 0,96  | 0,81  | 0,95  | -0,07 |
| ATHEX  | 0,87  | 0,89  | 1,00  | 0,96  | 0,94  | 0,88  | 0,94   | 0,86  | 0,93  | 0,90  | 0,89  | 0,95  | 0,92  | 0,95  | 0,93  | 0,95  | 0,90  | 0,90  | 0,95  | 0,14  |
| BBVA   | 0,84  | 0,90  | 0,96  | 1,00  | 0,92  | 0,84  | 0,92   | 0,88  | 0,95  | 0,95  | 0,85  | 0,95  | 0,83  | 0,96  | 0,96  | 0,94  | 0,95  | 0,92  | 0,95  | 0,16  |
| BC     | 0,91  | 0,94  | 0,94  | 0,92  | 1,00  | 0,95  | 0,88   | 0,94  | 0,96  | 0,85  | 0,78  | 0,96  | 0,88  | 0,93  | 0,95  | 0,88  | 0,94  | 0,86  | 0,95  | 0,03  |
| BE     | 0,97  | 0,94  | 0,88  | 0,84  | 0,95  | 1,00  | 0,78   | 0,94  | 0,89  | 0,74  | 0,64  | 0,93  | 0,86  | 0,85  | 0,86  | 0,80  | 0,90  | 0,73  | 0,89  | -0,18 |
| BINTER | 0,76  | 0,82  | 0,94  | 0,92  | 0,88  | 0,78  | 1,00   | 0,79  | 0,89  | 0,86  | 0,86  | 0,91  | 0,83  | 0,93  | 0,91  | 0,96  | 0,85  | 0,84  | 0,89  | 0,12  |
| BIR    | 0,94  | 0,99  | 0,86  | 0,88  | 0,94  | 0,94  | 0,79   | 1,00  | 0,95  | 0,79  | 0,62  | 0,94  | 0,76  | 0,88  | 0,90  | 0,81  | 0,96  | 0,77  | 0,93  | -0,13 |
| BMPS   | 0,87  | 0,96  | 0,93  | 0,95  | 0,96  | 0,89  | 0,89   | 0,95  | 1,00  | 0,88  | 0,77  | 0,96  | 0,80  | 0,96  | 0,98  | 0,91  | 0,98  | 0,87  | 0,97  | 0,04  |
| BNP    | 0,73  | 0,81  | 0,90  | 0,95  | 0,85  | 0,74  | 0,86   | 0,79  | 0,88  | 1,00  | 0,86  | 0,87  | 0,78  | 0,92  | 0,91  | 0,90  | 0,89  | 0,94  | 0,90  | 0,31  |
| BOFC   | 0,59  | 0,66  | 0,89  | 0,85  | 0,78  | 0,64  | 0,86   | 0,62  | 0,77  | 0,86  | 1,00  | 0,78  | 0,86  | 0,85  | 0,84  | 0,90  | 0,70  | 0,90  | 0,82  | 0,47  |
| BP     | 0,91  | 0,95  | 0,95  | 0,95  | 0,96  | 0,93  | 0,91   | 0,94  | 0,96  | 0,87  | 0,78  | 1,00  | 0,87  | 0,96  | 0,95  | 0,94  | 0,95  | 0,84  | 0,95  | -0,02 |
| BP2    | 0,81  | 0,79  | 0,92  | 0,83  | 0,88  | 0,86  | 0,83   | 0,76  | 0,80  | 0,78  | 0,86  | 0,87  | 1,00  | 0,83  | 0,83  | 0,86  | 0,77  | 0,80  | 0,85  | 0,12  |
| BPE    | 0,81  | 0,90  | 0,95  | 0,96  | 0,93  | 0,85  | 0,93   | 0,88  | 0,96  | 0,92  | 0,85  | 0,96  | 0,83  | 1,00  | 0,96  | 0,96  | 0,94  | 0,90  | 0,95  | 0,12  |
| BPI    | 0,82  | 0,91  | 0,93  | 0,96  | 0,95  | 0,86  | 0,91   | 0,90  | 0,98  | 0,91  | 0,84  | 0,95  | 0,83  | 0,96  | 1,00  | 0,93  | 0,95  | 0,91  | 0,96  | 0,15  |
| BS     | 0,76  | 0,84  | 0,95  | 0,94  | 0,88  | 0,80  | 0,96   | 0,81  | 0,91  | 0,90  | 0,90  | 0,94  | 0,86  | 0,96  | 0,93  | 1,00  | 0,87  | 0,88  | 0,92  | 0,17  |
| CA     | 0,90  | 0,96  | 0,90  | 0,95  | 0,94  | 0,90  | 0,85   | 0,96  | 0,98  | 0,89  | 0,70  | 0,95  | 0,77  | 0,94  | 0,95  | 0,87  | 1,00  | 0,84  | 0,95  | -0,02 |
| CAC    | 0,69  | 0,81  | 0,90  | 0,92  | 0,86  | 0,73  | 0,84   | 0,77  | 0,87  | 0,94  | 0,90  | 0,84  | 0,80  | 0,90  | 0,91  | 0,88  | 0,84  | 1,00  | 0,92  | 0,48  |
| CB     | 0,88  | 0,95  | 0,95  | 0,95  | 0,95  | 0,89  | 0,89   | 0,93  | 0,97  | 0,90  | 0,82  | 0,95  | 0,85  | 0,95  | 0,96  | 0,92  | 0,95  | 0,92  | 1,00  | 0,14  |
| DAX    | -0,23 | -0,07 | 0,14  | 0,16  | 0,03  | -0,18 | 0,12   | -0,13 | 0,04  | 0,31  | 0,47  | -0,02 | 0,12  | 0,12  | 0,15  | 0,17  | -0,02 | 0,48  | 0,14  | 1,00  |
| DB     | 0,85  | 0,93  | 0,92  | 0,96  | 0,94  | 0,86  | 0,87   | 0,92  | 0,96  | 0,93  | 0,81  | 0,94  | 0,81  | 0,94  | 0,96  | 0,89  | 0,96  | 0,92  | 0,96  | 0,17  |
| DBO    | 0,57  | 0,73  | 0,81  | 0,84  | 0,71  | 0,59  | 0,83   | 0,69  | 0,81  | 0,84  | 0,85  | 0,78  | 0,64  | 0,85  | 0,83  | 0,88  | 0,75  | 0,89  | 0,83  | 0,43  |
| DPB    | 0,82  | 0,91  | 0,84  | 0,85  | 0,87  | 0,83  | 0,73   | 0,89  | 0,87  | 0,81  | 0,70  | 0,85  | 0,74  | 0,82  | 0,86  | 0,77  | 0,86  | 0,88  | 0,91  | 0,24  |
| EFG    | 0,96  | 0,97  | 0,92  | 0,91  | 0,94  | 0,94  | 0,84   | 0,97  | 0,94  | 0,82  | 0,67  | 0,95  | 0,80  | 0,90  | 0,90  | 0,84  | 0,95  | 0,80  | 0,94  | -0,10 |
| EXAE   | 0,67  | 0,72  | 0,90  | 0,85  | 0,84  | 0,72  | 0,87   | 0,68  | 0,81  | 0,82  | 0,94  | 0,82  | 0,87  | 0,84  | 0,87  | 0,88  | 0,75  | 0,89  | 0,84  | 0,40  |
| EXO    | -0,80 | -0,72 | -0,66 | -0,57 | -0,68 | -0,81 | -0,60  | -0,73 | -0,65 | -0,40 | -0,37 | -0,72 | -0,66 | -0,60 | -0,58 | -0,60 | -0,64 | -0,33 | -0,63 | 0,56  |
| FBD    | 0,80  | 0,94  | 0,85  | 0,88  | 0,85  | 0,79  | 0,82   | 0,92  | 0,93  | 0,83  | 0,67  | 0,88  | 0,67  | 0,89  | 0,89  | 0,84  | 0,91  | 0,85  | 0,93  | 0,10  |
| GS     | -0,42 | -0,42 | -0,14 | -0,15 | -0,40 | -0,47 | -0,02  | -0,46 | -0,30 | -0,10 | 0,05  | -0,28 | -0,20 | -0,15 | -0,26 | -0,01 | -0,33 | -0,19 | -0,28 | 0,13  |
| IFG    | 0,34  | 0,50  | 0,58  | 0,64  | 0,51  | 0,35  | 0,52   | 0,47  | 0,58  | 0,73  | 0,70  | 0,52  | 0,47  | 0,59  | 0,63  | 0,60  | 0,55  | 0,80  | 0,65  | 0,68  |
| IBEX   | 0,47  | 0,56  | 0,81  | 0,82  | 0,68  | 0,51  | 0,80   | 0,51  | 0,68  | 0,85  | 0,94  | 0,70  | 0,74  | 0,80  | 0,76  | 0,84  | 0,64  | 0,89  | 0,73  | 0,58  |
| ISEQ   | 0,86  | 0,97  | 0,89  | 0,92  | 0,94  | 0,88  | 0,83   | 0,96  | 0,96  | 0,85  | 0,74  | 0,93  | 0,78  | 0,91  | 0,94  | 0,86  | 0,94  | 0,89  | 0,96  | 0,13  |
| ISP    | 0,84  | 0,90  | 0,98  | 0,98  | 0,94  | 0,86  | 0,94   | 0,87  | 0,94  | 0,93  | 0,89  | 0,95  | 0,89  | 0,97  | 0,95  | 0,96  | 0,92  | 0,93  | 0,96  | 0,17  |
| MB     | 0,87  | 0,93  | 0,94  | 0,96  | 0,92  | 0,86  | 0,90   | 0,92  | 0,96  | 0,90  | 0,76  | 0,94  | 0,78  | 0,96  | 0,93  | 0,91  | 0,96  | 0,87  | 0,95  | 0,05  |
| NBG    | 0,87  | 0,87  | 0,99  | 0,94  | 0,92  | 0,87  | 0,93   | 0,84  | 0,90  | 0,87  | 0,87  | 0,92  | 0,91  | 0,92  | 0,91  | 0,93  | 0,87  | 0,87  | 0,93  | 0,12  |
| PIRA   | 0,86  | 0,89  | 0,99  | 0,95  | 0,93  | 0,86  | 0,93   | 0,87  | 0,93  | 0,89  | 0,89  | 0,94  | 0,90  | 0,94  | 0,94  | 0,95  | 0,89  | 0,90  | 0,96  | 0,16  |
| PMI    | 0,85  | 0,91  | 0,97  | 0,97  | 0,93  | 0,86  | 0,93   | 0,90  | 0,96  | 0,91  | 0,84  | 0,95  | 0,85  | 0,98  | 0,96  | 0,96  | 0,94  | 0,89  | 0,96  | 0,08  |
| PSI    | 0,66  | 0,72  | 0,91  | 0,89  | 0,84  | 0,72  | 0,87   | 0,69  | 0,81  | 0,89  | 0,96  | 0,83  | 0,86  | 0,89  | 0,88  | 0,90  | 0,78  | 0,94  | 0,85  | 0,44  |
| UCG    | 0,90  | 0,95  | 0,95  | 0,97  | 0,95  | 0,91  | 0,89   | 0,94  | 0,97  | 0,92  | 0,80  | 0,98  | 0,85  | 0,96  | 0,96  | 0,92  | 0,97  | 0,88  | 0,97  | 0,04  |
| UBI    | 0,92  | 0,94  | 0,95  | 0,94  | 0,93  | 0,92  | 0,90   | 0,93  | 0,96  | 0,87  | 0,77  | 0,97  | 0,86  | 0,95  | 0,93  | 0,92  | 0,95  | 0,82  | 0,95  | -0,07 |
| SP     | 0,89  | 0,95  | 0,96  | 0,97  | 0,96  | 0,91  | 0,89   | 0,94  | 0,97  | 0,92  | 0,82  | 0,97  | 0,86  | 0,97  | 0,96  | 0,92  | 0,96  | 0,93  | 0,98  | 0,13  |
| SG     | 0,85  | 0,94  | 0,92  | 0,96  | 0,94  | 0,87  | 0,88   | 0,94  | 0,98  | 0,93  | 0,78  | 0,95  | 0,79  | 0,96  | 0,97  | 0,91  | 0,98  | 0,90  | 0,97  | 0,11  |

Tableau 31 – Coefficients de corrélations entre titres et indices européens (Partie 1)



|        | DB    | DBO   | DPB   | EFG   | EXAE  | EXO   | FBD   | GS    | IFG   | IBEX  | ISEQ  | ISP   | MB    | NBG   | PIRA  | PMI   | PSI   | UCG   | UBI   | SP    | SG    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AB     | 0,85  | 0,57  | 0,82  | 0,96  | 0,67  | -0,80 | 0,80  | -0,42 | 0,34  | 0,47  | 0,86  | 0,84  | 0,87  | 0,87  | 0,86  | 0,85  | 0,66  | 0,90  | 0,92  | 0,89  | 0,85  |
| AIB    | 0,93  | 0,73  | 0,91  | 0,97  | 0,72  | -0,72 | 0,94  | -0,42 | 0,50  | 0,56  | 0,97  | 0,90  | 0,93  | 0,87  | 0,89  | 0,91  | 0,72  | 0,95  | 0,94  | 0,95  | 0,94  |
| ATHEX  | 0,92  | 0,81  | 0,84  | 0,92  | 0,90  | -0,66 | 0,85  | -0,14 | 0,58  | 0,81  | 0,89  | 0,98  | 0,94  | 0,99  | 0,99  | 0,97  | 0,91  | 0,95  | 0,95  | 0,96  | 0,92  |
| BBVA   | 0,96  | 0,84  | 0,85  | 0,91  | 0,85  | -0,57 | 0,88  | -0,15 | 0,64  | 0,82  | 0,92  | 0,98  | 0,96  | 0,94  | 0,95  | 0,97  | 0,89  | 0,97  | 0,94  | 0,97  | 0,96  |
| BC     | 0,94  | 0,71  | 0,87  | 0,94  | 0,84  | -0,68 | 0,85  | -0,40 | 0,51  | 0,68  | 0,94  | 0,94  | 0,92  | 0,92  | 0,93  | 0,93  | 0,84  | 0,95  | 0,93  | 0,96  | 0,94  |
| BE     | 0,86  | 0,59  | 0,83  | 0,94  | 0,72  | -0,81 | 0,79  | -0,47 | 0,35  | 0,51  | 0,88  | 0,86  | 0,86  | 0,87  | 0,86  | 0,86  | 0,72  | 0,91  | 0,92  | 0,91  | 0,87  |
| BINTER | 0,87  | 0,83  | 0,73  | 0,84  | 0,87  | -0,60 | 0,82  | -0,02 | 0,52  | 0,80  | 0,83  | 0,94  | 0,90  | 0,93  | 0,93  | 0,93  | 0,87  | 0,89  | 0,90  | 0,89  | 0,88  |
| BIR    | 0,92  | 0,69  | 0,89  | 0,97  | 0,68  | -0,73 | 0,92  | -0,46 | 0,47  | 0,51  | 0,96  | 0,87  | 0,92  | 0,84  | 0,87  | 0,90  | 0,69  | 0,94  | 0,93  | 0,94  | 0,94  |
| BMPS   | 0,96  | 0,81  | 0,87  | 0,94  | 0,81  | -0,65 | 0,93  | -0,30 | 0,58  | 0,68  | 0,96  | 0,94  | 0,96  | 0,90  | 0,93  | 0,96  | 0,81  | 0,97  | 0,96  | 0,97  | 0,98  |
| BNP    | 0,93  | 0,84  | 0,81  | 0,82  | 0,82  | -0,40 | 0,83  | -0,10 | 0,73  | 0,85  | 0,85  | 0,93  | 0,90  | 0,87  | 0,89  | 0,91  | 0,89  | 0,92  | 0,87  | 0,92  | 0,93  |
| BOFC   | 0,81  | 0,85  | 0,70  | 0,67  | 0,94  | -0,37 | 0,67  | 0,05  | 0,70  | 0,94  | 0,74  | 0,89  | 0,76  | 0,87  | 0,89  | 0,84  | 0,96  | 0,80  | 0,77  | 0,82  | 0,78  |
| BP     | 0,94  | 0,78  | 0,85  | 0,95  | 0,82  | -0,72 | 0,88  | -0,28 | 0,52  | 0,70  | 0,93  | 0,95  | 0,94  | 0,92  | 0,94  | 0,95  | 0,83  | 0,98  | 0,97  | 0,97  | 0,95  |
| BP2    | 0,81  | 0,64  | 0,74  | 0,80  | 0,87  | -0,66 | 0,67  | -0,20 | 0,47  | 0,74  | 0,78  | 0,89  | 0,78  | 0,91  | 0,90  | 0,85  | 0,86  | 0,85  | 0,86  | 0,86  | 0,79  |
| BPE    | 0,94  | 0,85  | 0,82  | 0,90  | 0,84  | -0,60 | 0,89  | -0,15 | 0,59  | 0,80  | 0,91  | 0,97  | 0,96  | 0,92  | 0,94  | 0,98  | 0,89  | 0,96  | 0,95  | 0,97  | 0,96  |
| BPI    | 0,96  | 0,83  | 0,86  | 0,90  | 0,87  | -0,58 | 0,89  | -0,26 | 0,63  | 0,76  | 0,94  | 0,95  | 0,93  | 0,91  | 0,94  | 0,96  | 0,88  | 0,96  | 0,93  | 0,96  | 0,97  |
| BS     | 0,89  | 0,88  | 0,77  | 0,84  | 0,88  | -0,60 | 0,84  | -0,01 | 0,60  | 0,84  | 0,86  | 0,96  | 0,91  | 0,93  | 0,95  | 0,96  | 0,90  | 0,92  | 0,92  | 0,92  | 0,91  |
| CA     | 0,96  | 0,75  | 0,86  | 0,95  | 0,75  | -0,64 | 0,91  | -0,33 | 0,55  | 0,64  | 0,94  | 0,92  | 0,96  | 0,87  | 0,89  | 0,94  | 0,78  | 0,97  | 0,95  | 0,96  | 0,98  |
| CAC    | 0,92  | 0,89  | 0,88  | 0,80  | 0,89  | -0,33 | 0,85  | -0,19 | 0,80  | 0,89  | 0,89  | 0,93  | 0,87  | 0,87  | 0,90  | 0,89  | 0,94  | 0,88  | 0,82  | 0,93  | 0,90  |
| CB     | 0,96  | 0,83  | 0,91  | 0,94  | 0,84  | -0,63 | 0,93  | -0,28 | 0,65  | 0,73  | 0,96  | 0,96  | 0,95  | 0,93  | 0,96  | 0,96  | 0,85  | 0,97  | 0,95  | 0,98  | 0,97  |
| DAX    | 0,17  | 0,43  | 0,24  | -0,10 | 0,40  | 0,56  | 0,10  | 0,13  | 0,68  | 0,58  | 0,13  | 0,17  | 0,05  | 0,12  | 0,16  | 0,08  | 0,44  | 0,04  | -0,07 | 0,13  | 0,11  |
| DB     | 1,00  | 0,83  | 0,91  | 0,92  | 0,83  | -0,54 | 0,90  | -0,32 | 0,67  | 0,75  | 0,96  | 0,95  | 0,93  | 0,90  | 0,92  | 0,94  | 0,87  | 0,97  | 0,92  | 0,97  | 0,97  |
| DBO    | 0,83  | 1,00  | 0,78  | 0,70  | 0,82  | -0,32 | 0,84  | 0,03  | 0,75  | 0,83  | 0,81  | 0,85  | 0,80  | 0,79  | 0,84  | 0,84  | 0,83  | 0,80  | 0,76  | 0,82  | 0,83  |
| DPB    | 0,91  | 0,78  | 1,00  | 0,87  | 0,76  | -0,49 | 0,89  | -0,44 | 0,68  | 0,64  | 0,94  | 0,86  | 0,84  | 0,82  | 0,85  | 0,83  | 0,77  | 0,88  | 0,83  | 0,91  | 0,88  |
| EFG    | 0,92  | 0,70  | 0,87  | 1,00  | 0,72  | -0,73 | 0,90  | -0,35 | 0,45  | 0,58  | 0,93  | 0,91  | 0,95  | 0,91  | 0,91  | 0,93  | 0,73  | 0,95  | 0,95  | 0,95  | 0,93  |
| EXAE   | 0,83  | 0,82  | 0,76  | 0,72  | 1,00  | -0,41 | 0,70  | -0,12 | 0,64  | 0,88  | 0,78  | 0,89  | 0,78  | 0,89  | 0,90  | 0,84  | 0,96  | 0,82  | 0,78  | 0,84  | 0,80  |
| EXO    | -0,54 | -0,32 | -0,49 | -0,73 | -0,41 | 1,00  | -0,58 | 0,20  | 0,03  | -0,18 | -0,59 | -0,61 | -0,62 | -0,67 | -0,65 | -0,65 | -0,36 | -0,65 | -0,76 | -0,62 | -0,58 |
| FBD    | 0,90  | 0,84  | 0,89  | 0,90  | 0,70  | -0,58 | 1,00  | -0,24 | 0,65  | 0,62  | 0,95  | 0,88  | 0,93  | 0,84  | 0,88  | 0,90  | 0,71  | 0,90  | 0,89  | 0,91  | 0,92  |
| GS     | -0,32 | 0,03  | -0,44 | -0,35 | -0,12 | 0,20  | -0,24 | 1,00  | -0,05 | 0,14  | -0,41 | -0,14 | -0,20 | -0,12 | -0,13 | -0,11 | -0,09 | -0,28 | -0,19 | -0,30 | -0,30 |
| IFG    | 0,67  | 0,75  | 0,68  | 0,45  | 0,64  | 0,03  | 0,65  | -0,05 | 1,00  | 0,73  | 0,64  | 0,61  | 0,56  | 0,54  | 0,62  | 0,57  | 0,71  | 0,58  | 0,47  | 0,62  | 0,62  |
| IBEX   | 0,75  | 0,83  | 0,64  | 0,58  | 0,88  | -0,18 | 0,62  | 0,14  | 0,73  | 1,00  | 0,65  | 0,83  | 0,72  | 0,79  | 0,80  | 0,78  | 0,94  | 0,72  | 0,67  | 0,76  | 0,71  |
| ISEQ   | 0,96  | 0,81  | 0,94  | 0,93  | 0,78  | -0,59 | 0,95  | -0,41 | 0,64  | 0,65  | 1,00  | 0,91  | 0,92  | 0,87  | 0,91  | 0,91  | 0,79  | 0,94  | 0,90  | 0,96  | 0,96  |
| ISP    | 0,95  | 0,85  | 0,86  | 0,91  | 0,89  | -0,61 | 0,88  | -0,14 | 0,61  | 0,83  | 0,91  | 1,00  | 0,95  | 0,96  | 0,97  | 0,98  | 0,92  | 0,96  | 0,96  | 0,98  | 0,95  |
| MB     | 0,93  | 0,80  | 0,84  | 0,95  | 0,78  | -0,62 | 0,93  | -0,20 | 0,56  | 0,72  | 0,92  | 0,95  | 1,00  | 0,92  | 0,93  | 0,97  | 0,82  | 0,96  | 0,95  | 0,97  | 0,96  |
| NBG    | 0,90  | 0,79  | 0,82  | 0,91  | 0,89  | -0,67 | 0,84  | -0,12 | 0,54  | 0,79  | 0,87  | 0,96  | 0,92  | 1,00  | 0,98  | 0,95  | 0,88  | 0,92  | 0,94  | 0,94  | 0,89  |
| PIRA   | 0,92  | 0,84  | 0,85  | 0,91  | 0,90  | -0,65 | 0,88  | -0,13 | 0,62  | 0,80  | 0,91  | 0,97  | 0,93  | 0,98  | 1,00  | 0,96  | 0,89  | 0,94  | 0,95  | 0,96  | 0,92  |
| PMI    | 0,94  | 0,84  | 0,83  | 0,93  | 0,84  | -0,65 | 0,90  | -0,11 | 0,57  | 0,78  | 0,91  | 0,98  | 0,97  | 0,95  | 0,96  | 1,00  | 0,86  | 0,97  | 0,97  | 0,97  | 0,96  |
| PSI    | 0,87  | 0,83  | 0,77  | 0,73  | 0,96  | -0,36 | 0,71  | -0,09 | 0,71  | 0,94  | 0,79  | 0,92  | 0,82  | 0,88  | 0,89  | 0,86  | 1,00  | 0,85  | 0,80  | 0,88  | 0,83  |
| UCG    | 0,97  | 0,80  | 0,88  | 0,95  | 0,82  | -0,65 | 0,90  | -0,28 | 0,58  | 0,72  | 0,94  | 0,96  | 0,96  | 0,92  | 0,94  | 0,97  | 0,85  | 1,00  | 0,97  | 0,98  | 0,97  |
| UBI    | 0,92  | 0,76  | 0,83  | 0,95  | 0,78  | -0,76 | 0,89  | -0,19 | 0,47  | 0,67  | 0,90  | 0,96  | 0,95  | 0,94  | 0,95  | 0,97  | 0,80  | 0,97  | 1,00  | 0,96  | 0,94  |
| SP     | 0,97  | 0,82  | 0,91  | 0,95  | 0,84  | -0,62 | 0,91  | -0,30 | 0,62  | 0,76  | 0,96  | 0,98  | 0,97  | 0,94  | 0,96  | 0,97  | 0,88  | 0,98  | 0,96  | 1,00  | 0,97  |
| SG     | 0,97  | 0,83  | 0,88  | 0,93  | 0,80  | -0,58 | 0,92  | -0,30 | 0,62  | 0,71  | 0,96  | 0,95  | 0,96  | 0,89  | 0,92  | 0,96  | 0,83  | 0,97  | 0,94  | 0,97  | 1,00  |

Tableau 32 – Coefficients de corrélations entre titres et indices européens (Partie 2)

---

L'analyse des corrélations linéaires entre indices et titres bancaires a mis en évidence plusieurs éléments. Au-delà des résultats commentés précédemment, l'étude des corrélations entre titres bancaires met en exergue de fortes corrélations pour une grande partie des titres considérés.

Néanmoins, ces constats et résultats sont à relativiser compte tenu de l'utilisation du coefficient de corrélation. La nature linéaire de cette mesure peut altérer la réalité des relations qui peuvent exister entre ces indices et titres bancaires.

### C.1.1.3 LES DROITES DE MARCHÉ

Dans le cadre de la gestion des risques, les droites de marché constituent un outil intéressant. Elles sont définies selon le modèle de régression suivant :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i \quad (424)$$

où  $R_i$  est le rendement du titre,  $R_M$  le rendement du marché.  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires. Le coefficient  $\beta$  quantifie la sensibilité des rentabilités du titre aux variations des rentabilités du marché. L'analyse des droites de marché montre une sensibilité des titres par rapport à leur indice de référence (▷ Tableau 33). Si l'on compare les bétas estimés à 1, nous notons que tous les actifs bancaires portugais amplifient les mouvements du marché, ce qui accrédite la thèse selon laquelle ces actifs influent fortement leur indice de référence. Un constat similaire peut être établi pour les titres helléniques. Cinq titres sur six sont caractérisés par un béta estimé supérieur à 1. Il est intéressant de noter que le titre français CA a tendance à amplifier les mouvements du CAC contrairement aux deux autres titres bien qu'il soit celui dont la part dans l'indice est la plus faible. En ce qui concerne le DAX, ce sont les indices ayant les parts les plus faibles et les plus fortes qui sont caractérisées par un béta supérieur à 1.

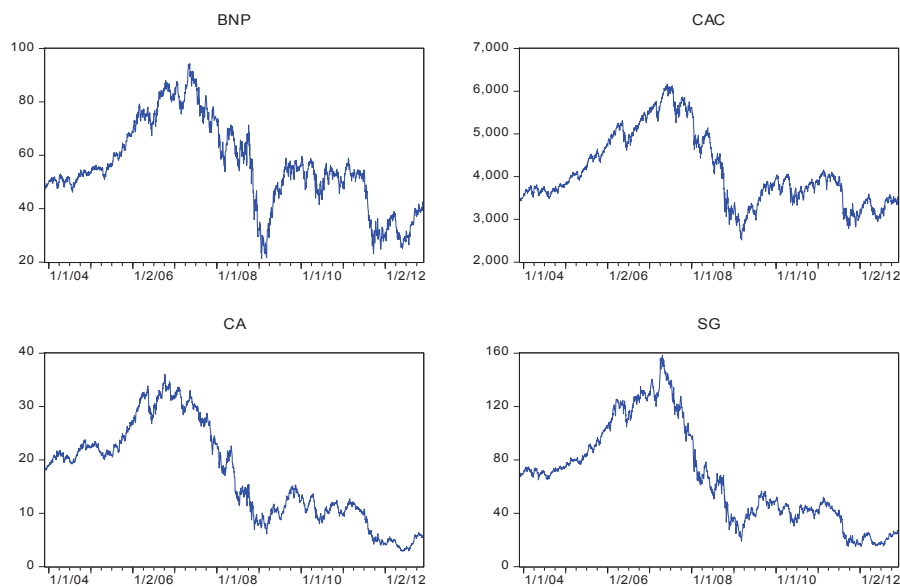
En ce qui concerne les titres irlandais, AIB et BIR sont les seuls à présenter des bétas supérieur à 1. Ce sont aussi les titres dont la part dans l'indice est respectivement la plus faible et la plus importante. Trois titres espagnols sur cinq et la moitié des titres italiens amplifient les mouvements de leurs indices respectifs.

| Actifs  | Constante   | RCAC      | RDAX      | RISEQ     | RATHEX   | RIBEX     | RPSI     | RSP       |
|---------|-------------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| RBNP    | -0,0000517  | 0,336***  |           |           |          |           |          |           |
| RCA     | -0,00051    | 1,494***  |           |           |          |           |          |           |
| RSG     | -0,000389   | 0,5037*** |           |           |          |           |          |           |
| RCB     | -0,0015**   |           | 1,418***  |           |          |           |          |           |
| RDB     | -0,0007     |           | 1,436***  |           |          |           |          |           |
| RDBO    | -0,00026    |           | 0,953***  |           |          |           |          |           |
| RDPB    | -0,00025    |           | 0,8706*** |           |          |           |          |           |
| RAIB    | -0,0021     |           |           | 1,6476*** |          |           |          |           |
| RFBD    | -0,000023   |           |           | 0,4139*** |          |           |          |           |
| RBIR    | -0,00166    |           |           | 1,7432*** |          |           |          |           |
| RIFG    | 0,00022     |           |           | 0,3474*** |          |           |          |           |
| RBOFC   | -0,00024    |           |           |           | 1,161*** |           |          |           |
| RAB     | -0,00027    |           |           |           | 1,517*** |           |          |           |
| RNBG    | -0,00012    |           |           |           | 1,508*** |           |          |           |
| REFG    | -0,000396   |           |           |           | 1,524*** |           |          |           |
| REXAE   | 0,00025     |           |           |           | 0,828*** |           |          |           |
| RPIRA   | -0,00052    |           |           |           | 1,413*** |           |          |           |
| RBP     | -0,001151** |           |           |           |          | 1,1128*** |          |           |
| RBS     | -0,00034    |           |           |           |          | 0,7552*** |          |           |
| RGS     | 0,00017     |           |           |           |          | -0,06***  |          |           |
| RBINTER | -0,00036    |           |           |           |          | 1,0016*** |          |           |
| RBBVA   | -0,00024    |           |           |           |          | 1,3018*** |          |           |
| RBC     | -0,0012**   |           |           |           |          |           | 1,208*** |           |
| RBE     | -0,0011**   |           |           |           |          |           | 1,135*** |           |
| RBPI    | -0,0004     |           |           |           |          |           | 1,096*** |           |
| RBP2    | -0,00096**  |           |           |           |          |           |          | 0,996***  |
| RBMPS   | -0,0009**   |           |           |           |          |           |          | 1,0111*** |
| RPMI    | -0,0008     |           |           |           |          |           |          | 1,2045*** |
| REXO    | 0,0011      |           |           |           |          |           |          | 0,956***  |
| RMB     | -0,000087   |           |           |           |          |           |          | 0,866***  |
| RUBI    | -0,00044    |           |           |           |          |           |          | 1,056***  |
| RUCG    | -0,0006     |           |           |           |          |           |          | 1,581***  |
| RBPE    | -0,0002     |           |           |           |          |           |          | 0,765***  |

\*\*\* : significatif à 1%, \*\* : significatif à 5%

---

L'analyse menée précédemment a permis de mettre en exergue les relations qui peuvent exister entre les indices boursiers et titres bancaires européens. Les 3 critères retenus permettent de mettre en évidence la nature des économies des pays GIPSI, de l'Allemagne et de la France. Nous avons constaté, par l'utilisation d'instruments linéaires, l'existence de relations particulières marquées par trois groupes distincts. Les droites de marché ont mis en évidence l'influence des rentabilités des titres sur les rentabilités des indices.

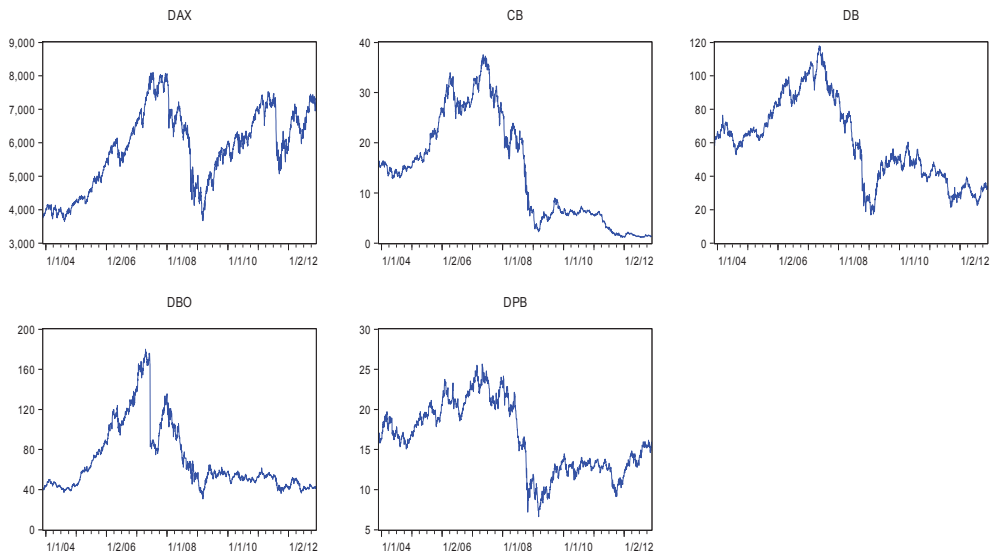


Graphique 48 – Indice et titres bancaires français

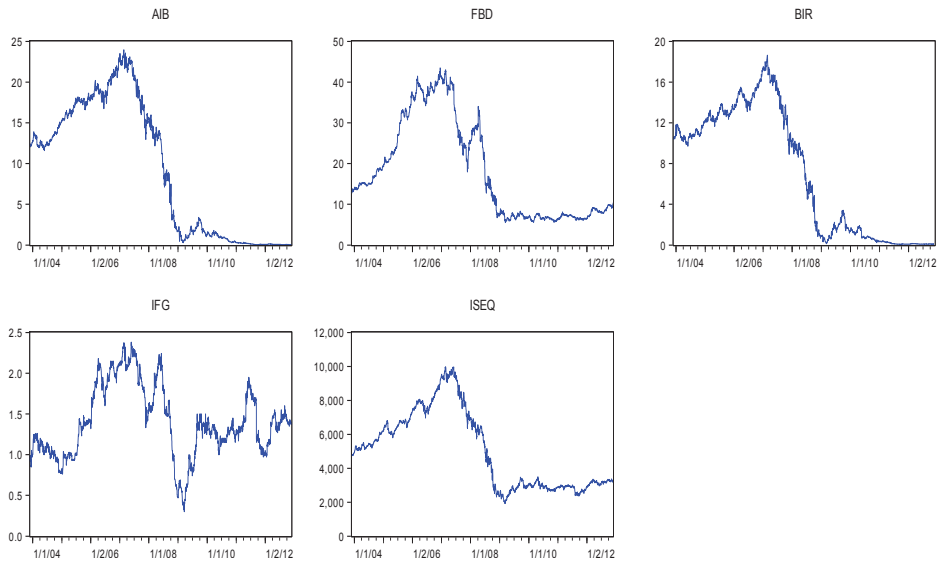
### C.1.2 TESTS PRÉLIMINAIRES

Les tests préliminaires se décomposent en 3 groupes :

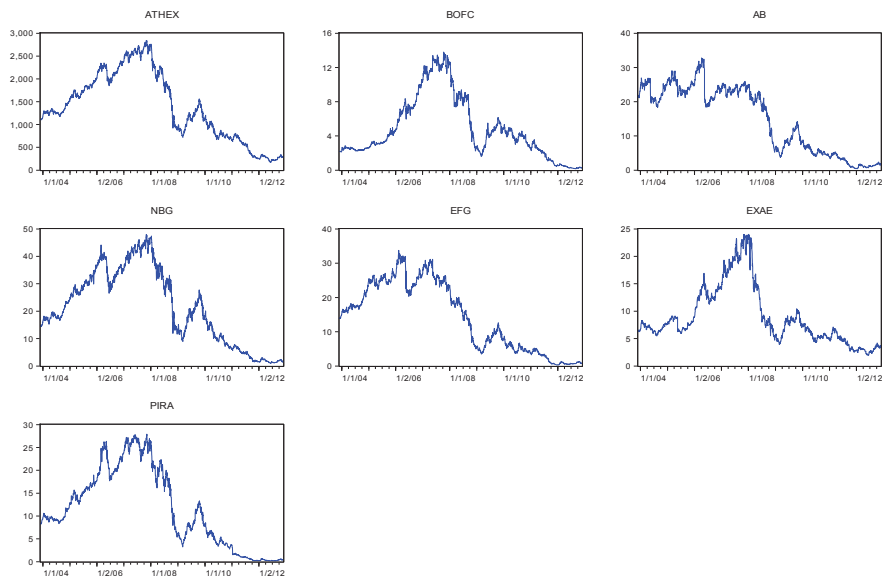
- les tests de saisonnalité ;
- les tests de racine unitaire ;
- les tests de linéarité.



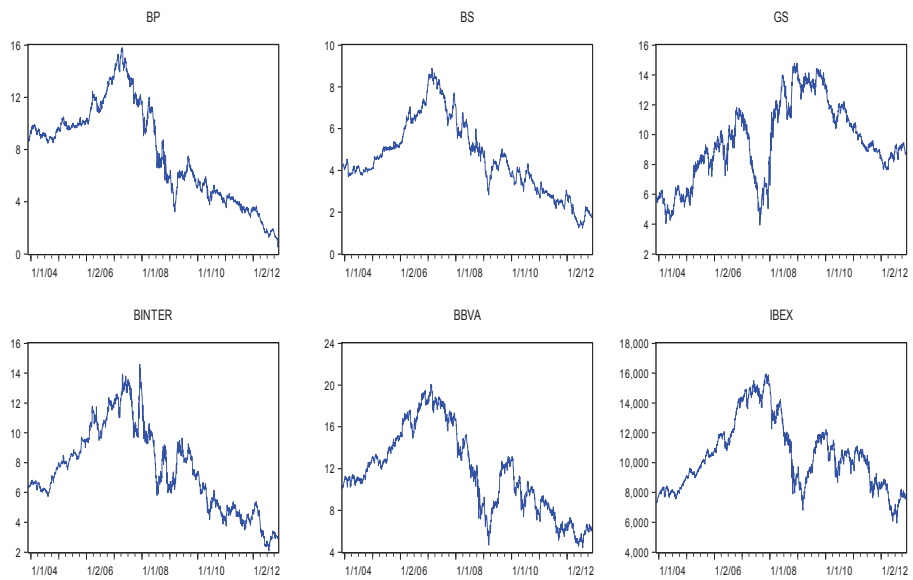
Graphique 49 – Indice et titres bancaires allemands



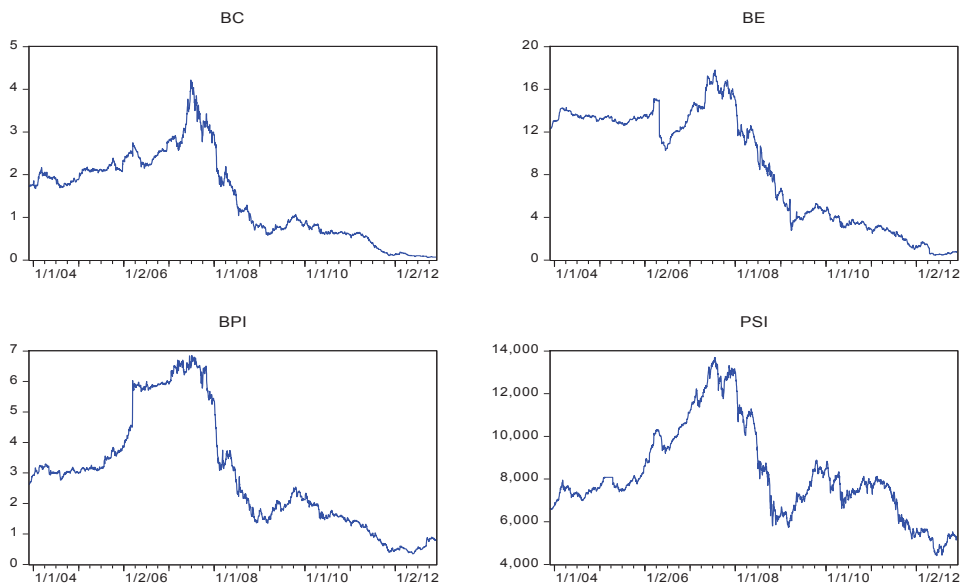
Graphique 50 – Indice et titres bancaires irlandais



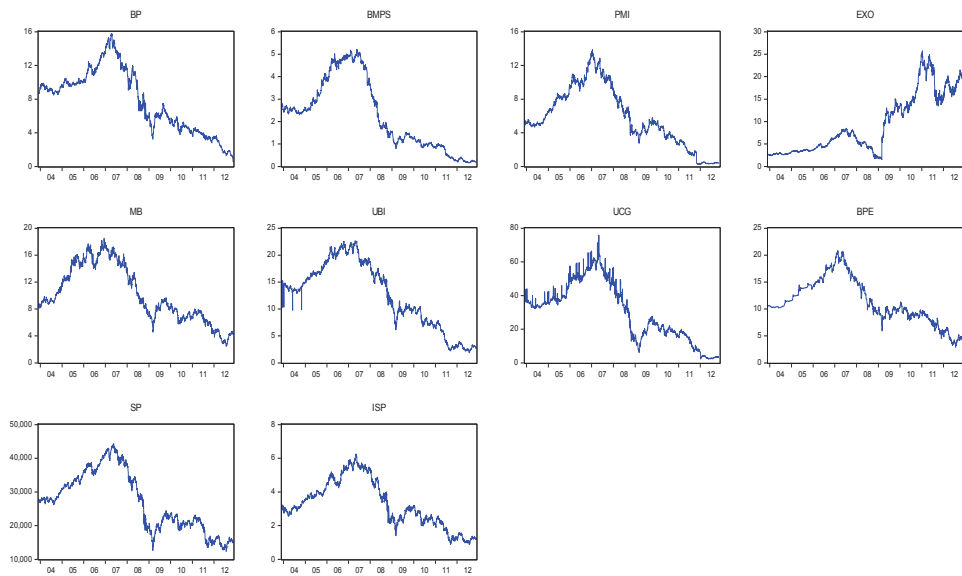
Graphique 51 – Indices et titres bancaires helléniques



Graphique 52 – Indices et titres bancaires espagnols



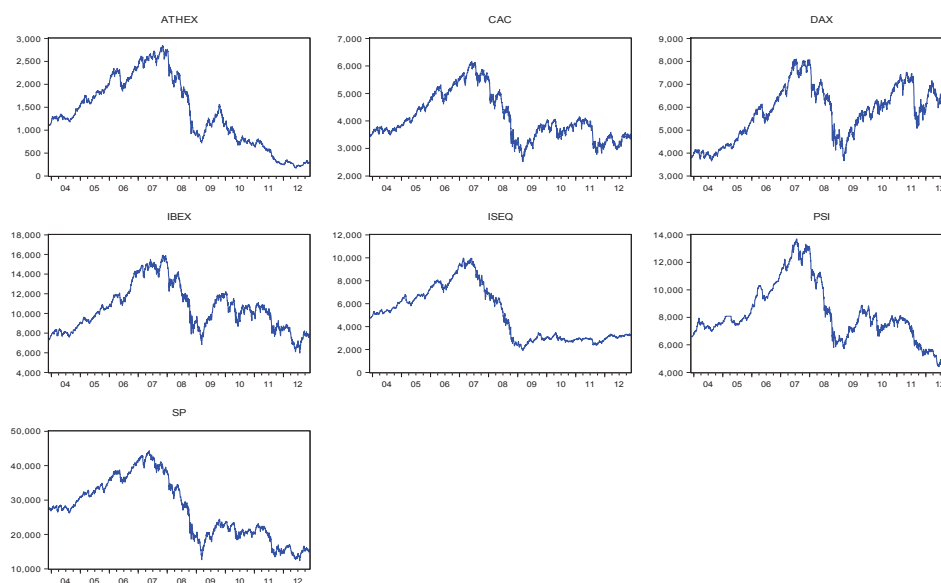
Graphique 53 – Indice et titres bancaires portugais



Graphique 54 – Indice et titres bancaires italiens

Afin de mettre en évidence une composante saisonnière, nous recourons aux tableaux de Buys-Ballot et aux tests de Laloire(1972). La détection de racine unitaire est menée au moyen de 4 tests : deux tests dits standards (le test DF et KPSS), un test efficient (ERS) et un test avec ruptures (ZA). Les tests de linéarité retenus sont les tests RESET et BDS.

### C.1.2.1 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES INDICES EUROPÉENS



Graphique 55 – Les différents indices boursiers retenus

### C.1.2.2 TESTS DE SAISONNALITÉ

#### C.1.2.2.1 Tableau de Buys-Ballot



| Jours                          | Lundi      | Mardi      | Mercredi   | Jeudi      | Vendredi   |
|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                                |            | DAX        |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 19,5378151 | 15,5462185 | 15,7563025 | 16,1764706 | 32,9831933 |
| % des valeurs les plus faibles | 30,3719008 | 17,9752066 | 15,0826446 | 13,8429752 | 22,7272727 |
|                                |            | CAC        |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 22,8571429 | 14,4897959 | 13,2653061 | 17,3469388 | 32,0408163 |
| % des valeurs les plus faibles | 26,6393443 | 19,4672131 | 15,1639344 | 13,5245902 | 25,204918  |
|                                |            | ISEQ       |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 24,0585774 | 16,1087866 | 11,9246862 | 16,1087866 | 31,7991632 |
| % des valeurs les plus faibles | 26,8498943 | 17,3361522 | 15,4334038 | 12,4735729 | 27,9069767 |
|                                |            | SP         |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 22,8033473 | 16,1087866 | 12,9707113 | 16,5271967 | 31,5899582 |
| % des valeurs les plus faibles | 29,1836735 | 16,3265306 | 15,1020408 | 13,877551  | 25,5102041 |
|                                |            | PSI        |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 24,5614035 | 15,7894737 | 14,2300195 | 18,5185185 | 26,9005848 |
| % des valeurs les plus faibles | 29,6296296 | 17,3489279 | 14,4249513 | 16,374269  | 22,2222222 |
|                                |            | IBEX       |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 22,8571429 | 14,4897959 | 13,2653061 | 17,3469388 | 32,0408163 |
| % des valeurs les plus faibles | 26,6393443 | 19,4672131 | 15,1639344 | 13,5245902 | 25,204918  |
|                                |            | ATHEX      |            |            |            |
| % des valeurs les plus élevées | 29,6523517 | 16,3599182 | 10,4294479 | 14,1104294 | 29,4478528 |
| % des valeurs les plus faibles | 23,9175258 | 19,3814433 | 15,0515464 | 15,0515464 | 26,5979381 |

Tableau 34 – Tableau de Buys-Ballot [1]

### C.1.2.2.2 Les tests de Laloire : présentation et résultats

Le premier test consiste à vérifier l'absence de saisonnalité (hypothèse nulle) par le calcul de la statistique de Fisher donnée par :

$$F_c = \frac{V_p}{V_r} = \frac{\frac{S_p}{(p-1)}}{\frac{S_r}{(p-1)(N-1)}} \quad (425)$$

Où  $V_p, V_r, S_p, S_r, p, N$  désignent respectivement la variance de la période, la variance résiduelle, la somme des carrés périodiques, la somme des carrés résiduels, la périodicité et le nombre de cycles. Cette statistique est à comparer au Fisher théorique. Le problème de ce test réside dans l'hypothèse implicite de l'absence d'un extrasaisonnier dont l'influence sur la variance des cycles peut être importante. Aussi, il est possible de tester la présence de cette composante par un test de Fisher. Dans le cas où l'influence d'un extrasaisonnier serait détectée, une transformation préalable des données au test de saisonnalité sera nécessaire. Le test de Fisher est donné par :

$$F_c = \frac{V_a}{V_r} = \frac{\frac{S_a}{(N-1)}}{\frac{S_r}{(p-1)(N-1)}} \quad (426)$$

| Séries             | VP         | VA         | VR         | FC (Saisonnalité)      | FC (Extrasaisonnier)  |
|--------------------|------------|------------|------------|------------------------|-----------------------|
| DAX                | 2541,71179 | 7075976,55 | 6357,82726 | 0,399776792            | 1112,955142           |
| IBEX               | 9010,71327 | 27115143,3 | 22332,444  | 0,403480841            | 1214,159244           |
| CAC                | 958,212046 | 3606964,56 | 2869,65913 | 0,333911452            | 1256,931362           |
| ATHEX              | 942,05311  | 2845525,71 | 592,094277 | 1,59105255             | 4805,865927           |
| SP                 | 162437,49  | 386905505  | 117092,026 | 1,387263464            | 3304,285676           |
| PSI                | 7075,56236 | 23032699,7 | 8827,73939 | 0,801514641            | 2609,127738           |
| ISEQ               | 5396,20352 | 26039168,1 | 5520,789   | 0,977433392            | 4716,566431           |
| Valeurs théoriques |            |            |            | <b>F(4 ;1876)=2.37</b> | <b>F(468 ;1876)=1</b> |

Tableau 35 – Test de Laloire(1972)

### C.1.2.3 TESTS DE RACINE UNITAIRE

| Séries | Modèle retenu | Statistique de Dickey Fuller<br>(Test individuel) | V.C.    | Statistique de Dickey Fuller<br>(Test joint) | V.C.         |
|--------|---------------|---|---------|--|--------------|
| ATHEX  | 2             | -0,1509   | -2,8626 | 0,01179192                                   | [4,59; 4,61] |
| CAC    | 6             | -1,502  | -2,8626 | 1,12881755                                   | [4,59; 4,61] |
| DAX    | 2             | -1,8627   | -2,8626 | 1,73482286                                   | [4,59; 4,61] |
| IBEX   | 2             | -1,6839   | -2,8626 | 1,81346978                                   | [4,59; 4,61] |
| ISEQ   | 2             | -0,5724   | -2,8626 | 0,16384144                                   | [4,59; 4,61] |
| PSI    | 2             | -0,7195   | -2,8626 | 0,25984405                                   | [4,59; 4,61] |
| SP     | 2             | -0,4816   | -2,8626 | 0  | [4,59; 4,61] |

Tableau 36 – Résultats définitifs du test de Dickey-Fuller

| Série | LM Stat (Tendance et constante) | V.C.  | LM stat (Constante) | V.C.  |
|-------|---------------------------------|-------|---------------------|-------|
| ATHEX | 1,0989                          | 0,146 | 3,468               | 0,463 |
| CAC   | 0,7792                          | 0,146 | 1,883               | 0,463 |
| DAX   | 0,56527                         | 0,146 | 2,0887              | 0,463 |
| IBEX  | 0,996                           | 0,146 | 1,1438              | 0,463 |
| ISEQ  | 0,7135                          | 0,146 | 3,5514              | 0,463 |
| PSI   | 0,9085                          | 0,146 | 1,8314              | 0,463 |
| SP    | 0,8302                          | 0,146 | 3,7546              | 0,463 |

Tableau 37 – Résultats du test KPSS

| Série | Constante et tendance | V.C.  | Constante | V.C.   |
|-------|-----------------------|-------|-----------|--------|
| ATHEX | -0,516                | -2,89 | -0,387    | -1,941 |
| CAC   | -1,205                | -2,89 | -1,159    | -1,941 |
| DAX   | -1,7945               | -2,89 | -0,1313   | -1,941 |
| IBEX  | -1,1045               | -2,89 | -0,9009   | -1,941 |
| ISEQ  | -0,7669               | -2,89 | -0,625    | -1,941 |
| PSI   | -0,6508               | -2,89 | -0,7858   | -1,941 |
| SP    | -0,9293               | -2,89 | -0,4853   | -1,941 |

Tableau 38 – Résultats du test ERS

| Série | Constante   | Point de rupture | Tendance     | Point de rupture | Constante et Ten-<br>dance | Point de rupture |
|-------|-------------|------------------|--------------|------------------|----------------------------|------------------|
| ATHEX | -3,4705     | 03/06/2008       | -2,7426      | 03/01/2006       | -4,4965                    | 02/01/2008       |
| CAC   | -3,7394     | 19/05/2008       | -2,6245      | 21/12/2005       | -4,268                     | 01/01/2008       |
| DAX   | -4,093      | 19/05/2008       | -2,4078      | 26/01/2006       | -4,2647                    | 01/01/2008       |
| IBEX  | -2,855      | 19/05/2008       | -3,3354      | 27/10/2006       | -4,1687                    | 12/12/2007       |
| ISEQ  | -4,2935     | 19/05/2008       | -1,9149      | 11/07/2011       | -3,6755                    | 07/10/2007       |
| PSI   | -2,8955     | 07/05/2008       | -2,4153      | 27/09/2006       | -3,9368                    | 26/12/2007       |
| SP    | -3,491      | 18/05/2008       | -2,498       | 01/12/2005       | -3,8285                    | 12/12/2007       |
| V.C.  | <b>-4,8</b> |                  | <b>-4,42</b> |                  | <b>-5,08</b>               |                  |

Tableau 39 – Résultats du test de Zivot-Andrews

### C.1.2.4 TESTS DE LINÉARITÉ

#### C.1.2.4.1 Test RESET

| Rentabilités | Puissance carrée  | Puissance cubique  | Puissance quadratique |
|--------------|-------------------|--------------------|-----------------------|
| RATHEX       | 0,12<br>(0,73)    | 0,87<br>(0,35)     | 0,65<br>(0,42)        |
| RCAC         | 0,29<br>(0,5876)  | 0,63<br>(0,13)     | 1,7<br>(0,19)         |
| RDAX         | 0,0142<br>(0,905) | 1,1818<br>(0,28)   | 0,006<br>(0,94)       |
| RIBEX        | 1,87<br>(0,171)   | 0,489<br>(0,48)    | 0,91<br>(0,34)        |
| RISEQ        | 0,54<br>(0,46)    | 0,048<br>(0,83)    | 1,07<br>(0,3)         |
| RPSI         | 0,895<br>(0,34)   | 0,67<br>(0,4126)   | 1,16<br>(0,283)       |
| RSP          | 0,0315<br>(0,86)  | 0,2753<br>(0,5998) | 0,005<br>(0,94)       |

Entre parenthèses : P-value

Tableau 40 – Résultats du test RESET

#### C.1.2.4.2 Test BDS

Nous donnons ci-dessous une présentation succincte du test BDS. Les filtres linéaires retenus pour chaque indice et les résultats du test sont présentés dans un deuxième point.

##### C.1.2.4.2.1 Présentation

À partir d'une série observée  $x_1, \dots, x_n$  nous pouvons reconstruire l'espace de phase au moyen de m-uples, l'espace des phases étant un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié :

$$X_t = (X_t, \dots, X_{t-m+1}) \quad (427)$$

L'intégrale de corrélation  $C_{m,N}(r)$  mesure la proportion de vecteurs  $(X_t, X_s)$  de l'espace d'immersion  $R^m$  qui sont distants de moins de  $r$ . À la limite, pour  $N$  grand, cette proportion nous indique la probabilité que deux vecteurs de cet espace soient écartés de moins de  $r$ .

$$C_m(r) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} m(r) \equiv Pr(d(X_{t+i}, X_{s+i}) < r) \quad (428)$$

$d(\cdot)$  est une distance de  $R_m$  que l'on choisit usuellement égale à la norme supérieure. Si les variables sont indépendantes, la probabilité jointe se décompose comme le produit des probabilités individuelles (dans  $R$  la distance euclidienne entre deux points n'est autre que la valeur absolue de leur différence) :

$$[C_{m,N}(r) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{m-1} Pr[|x_{t+i} - x_{s+i}| < r]] \quad (429)$$

Or, chacune de ces probabilités individuelles n'est autre que  $C_1(r)$ . On en déduit que, si notre série est composée de variables identiquement distribuées, alors :

$$C_{m,N}(r) = [C_1(r)]^m \quad (430)$$

Le but est donc de trouver une statistique susceptible de prendre en compte cette particularité afin de tester si l'on se trouve en face d'une série de variables i.i.d. ou s'il y a une structure cachée dans les données.

Principe du test BDS :

À partir du résultat présenté ci-dessus, Brock, Dechert et Sheinkman déduisent que si  $x_i$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors pour tout  $m$  et pour tout  $r$ , on peut écrire :  $C_{m,N}(r) = [C_1(r)]^m$

La réciproque n'est pas vraie : si on observe ce résultat, cela n'implique pas que la série  $x_i$  soit forcément i.i.d. Le résultat ci-dessus est donné par les vraies valeurs  $C_m(r)$  et  $C_1(r)$ , nous pouvons les approcher par leurs estimateurs :  $C_{m,N}(r)$  et  $C_{1,N}(r)$ . À partir des statistiques U, BDS démontrent que l'hypothèse nulle de la série examinée  $x_t$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. et établissent une statistique qui porte leur nom :

$$[z_{m,N}(r) = \frac{\sqrt{N}(C_{m,N}(r) - [C_{m,1}(r)]^m)}{\sigma_{m,N}(r)}] \quad (431)$$

Qui suit asymptotiquement une loi normale  $N(0,1)$ . Au dénominateur nous avons l'estimateur de la variance asymptotique de la quantité au numérateur. En finance, on ne dispose généralement que de petits échantillons pour conduire des études empiriques. Or, nous avons vu que le test BDS repose sur des raisonnements asymptotiques. C'est pourquoi il est fondamental de s'assurer que la distribution de la statistique BDS en petit échantillon est bien approchée par sa distribution asymptotique. Des études ont été menées par Brock, Hsieh et Lebaron sur des séries pseudo aléatoires de 3 tailles différentes (100, 500,1000). Ils appliquent le test BDS et réitère l'opération 5000 fois en faisant varier  $m$  de 2 à 10 et  $r$  de 0,25 à 2 fois l'écart type de la série. Ils aboutissent aux résultats suivant :

- Plus grand est l'échantillon, plus large est la plage de valeurs de  $r$  pour laquelle les statistiques BDS calculées sont bien approchées par la distribution asymptotique.
- Plus grand est  $m$ , moins bonnes sont les propriétés de la statistique BDS en petits échantillons.
- En ce qui concerne les deux distributions inhabituelles que sont l'uniforme et la bimodale, les propriétés du BDS en petit échantillon sont très mauvaises.

- Pour les autres distributions, il faudrait 500 observations ou plus, une dimension  $m$  inférieure à 5 et des  $r$  compris entre 0,5 et 2 fois l'écart-type, pour que la distribution asymptotique approche celle en petits échantillons.

La principale limite de ce test est qu'il ne définit pas clairement l'hypothèse alternative. Ainsi, le rejet de l'hypothèse nulle peut avoir diverses causes (non-stationnarité de la série, présence d'une structure de dépendance linéaire dans les données, d'une structure non linéaire chaotique ou stochastique.) L'utilisation de ce test peut être double :

- Tester l'hypothèse d'une série i.i.d.. C'est la principale utilité de ce test ;
- Tester la non linéarité d'une série. Cette deuxième fonction du test BDS requiert l'élimination préalable de toutes les hypothèses alternatives linéaires du test BDS.

#### C.1.2.4.2.2 Choix des filtres linéaires et résultats du test BDS

| Séries de rentabilités | Modèle autorégressif de filtrage |
|------------------------|----------------------------------|
| RATHEX                 | AR(2)                            |
| RCAC                   | AR(1)                            |
| RDAX                   | AR(1)                            |
| RIBEX                  | AR(2)                            |
| RISEQ                  |                                  |
| RPSI                   | AR(1)                            |
| RSP                    | AR(3)                            |

Tableau 41 – Sélection des filtres pour le test BDS

|        | Dimensions |          |          |          |
|--------|------------|----------|----------|----------|
|        | 2          | 3        | 4        | 5        |
| RATHEX | 9.094804   | 14.33876 | 20.58403 | 27.72357 |
| RCAC   | 7.469484   | 12.49401 | 16.36752 | 20.35298 |
| RDAX   | 5.901510   | 9.518128 | 13.32398 | 16.44955 |
| RIBEX  | 9.045480   | 14.23889 | 19.73311 | 25.79447 |
| RISEQ  | 14.13150   | 20.72315 | 27.12018 | 34.59728 |
| RPSI   | 11.87835   | 14.19842 | 15.78675 | 16.60725 |
| RSP    | 11.13993   | 17.50675 | 24.32496 | 32.85987 |

Tableau 42 – z-stat du test BDS ( $\epsilon = 0.5$ )

|        | Dimensions |          |          |          |
|--------|------------|----------|----------|----------|
|        | 2          | 3        | 4        | 5        |
| RATHEX | 10.16009   | 14.83872 | 19.42263 | 23.99655 |
| RCAC   | 7.729220   | 12.84071 | 16.26604 | 19.45432 |
| RDAX   | 6.331004   | 10.18444 | 13.41021 | 15.76727 |
| RIBEX  | 9.609613   | 14.29375 | 18.13902 | 22.24408 |
| RISEQ  | 14.45729   | 20.20904 | 24.49109 | 28.81878 |
| RPSI   | 14.24536   | 19.38035 | 23.46813 | 27.82274 |
| RSP    | 11.80158   | 17.73984 | 22.33096 | 27.04232 |

Tableau 43 – z-stat du test BDS ( $\epsilon = 1$ )

|        | Dimensions |          |          |          |
|--------|------------|----------|----------|----------|
|        | 2          | 3        | 4        | 5        |
| RATHEX | 9.838977   | 13.18210 | 16.15129 | 18.92468 |
| RCAC   | 8.263269   | 12.87020 | 15.41519 | 17.72100 |
| RDAX   | 8.178040   | 12.19330 | 14.91781 | 16.72442 |
| RIBEX  | 9.836844   | 13.51110 | 15.92187 | 18.33662 |
| RISEQ  | 13.19065   | 18.48425 | 21.59543 | 24.31356 |
| RPSI   | 13.38501   | 17.51609 | 20.47778 | 22.81046 |
| RSP    | 11.24863   | 16.36229 | 19.57515 | 22.45968 |

Tableau 44 – z-stat du test BDS ( $\epsilon = 1.5$ )

|        | Dimensions |          |          |          |
|--------|------------|----------|----------|----------|
|        | 2          | 3        | 4        | 5        |
| RATHEX | 9.272730   | 12.01213 | 14.66467 | 16.85978 |
| RCAC   | 9.206488   | 13.53248 | 15.60116 | 17.37087 |
| RDAX   | 8.692273   | 13.15251 | 15.59274 | 17.01750 |
| RIBEX  | 9.912907   | 13.16733 | 15.39735 | 17.34135 |
| RISEQ  | 11.19966   | 16.07799 | 18.67579 | 20.95075 |
| RPSI   | 12.76770   | 16.30204 | 18.83219 | 20.50047 |
| RSP    | 10.49958   | 14.79874 | 17.38331 | 19.50697 |

Tableau 45 – z-stat du test BDS ( $\epsilon = 2$ )



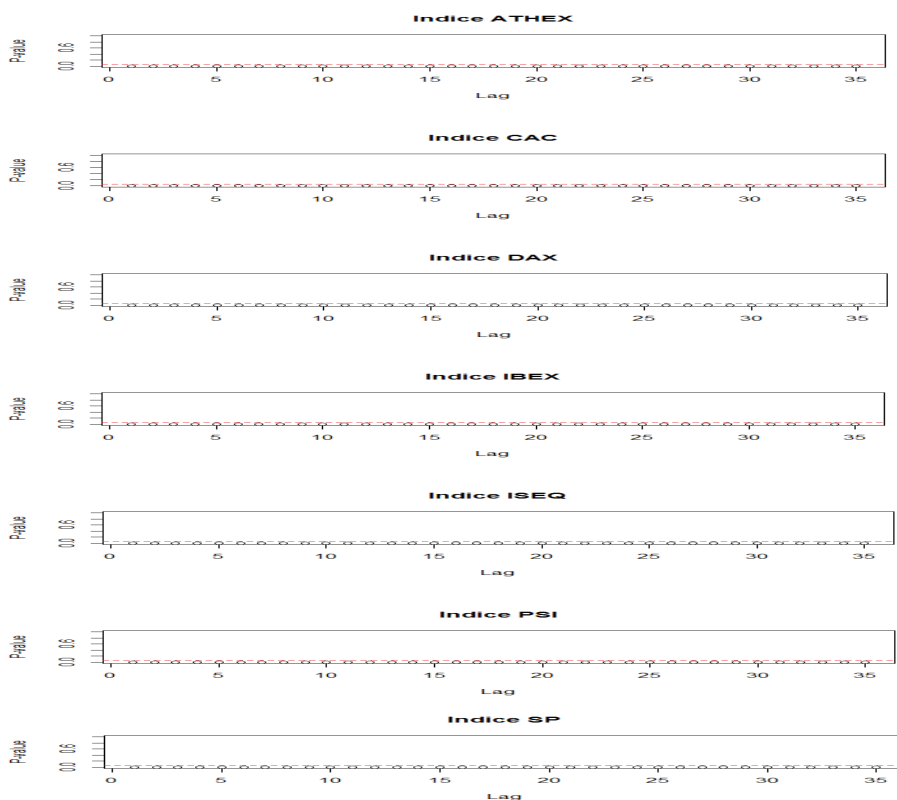
### C.1.3 TESTS D'HOMOSCÉDASTICITÉ ET DE NON-AUTOCORRÉLATION SUR LES RENTABILITÉS

#### C.1.3.1 TESTS ARCH

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| RATHEX            | 80,2529935 | 201,910015 | 291,372935 | 294,941976 | 311,799717 |
| RCAC              | 197,732349 | 405,170662 | 441,166492 | 484,282056 | 539,146917 |
| RDAX              | 185,841618 | 350,217862 | 425,901202 | 501,709951 | 588,620126 |
| RIBEX             | 134,686424 | 305,018397 | 326,755956 | 349,028324 | 356,432988 |
| RISEQ             | 220,060175 | 442,575521 | 588,860665 | 621,606191 | 628,743257 |
| RPSI              | 128,919561 | 314,586338 | 339,593418 | 393,220802 | 423,569098 |
| RSP               | 173,813714 | 383,921498 | 435,52069  | 467,179345 | 492,074073 |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 46 – Test ARCH sur les séries de rentabilités

#### C.1.3.2 TEST DE MCLEOD ET LI



Graphique 56 – Résultats du test de McLeod et Li

### C.1.3.3 TESTS D'AUTOCORRÉLATION

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| RATHEX            | 7,71507403 | 9,17526173 | 15,0360133 | 34,3369427 | 40,7170526 |
| RBINTER           | 9,96751627 | 11,0793881 | 15,1392359 | 23,683413  | 34,9750542 |
| RCAC              | 10,3917478 | 35,9081562 | 45,0912167 | 50,1697812 | 59,6453811 |
| RDAX              | 3,01228482 | 14,0561971 | 17,4476793 | 22,5803168 | 36,4454136 |
| RIBEX             | 7,30705534 | 19,0021784 | 22,509194  | 39,798283  | 49,6391548 |
| RISEQ             | 2,98373956 | 4,75549547 | 17,4939724 | 42,7969    | 61,2298182 |
| RPSI              | 7,24314692 | 11,0146872 | 22,3311196 | 30,6895838 | 41,3339654 |
| RSP               | 2,51016617 | 25,3551954 | 33,0381325 | 42,1078695 | 64,9602078 |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 47 – Q-stat des séries de rentabilités

| Rentabilités      | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| RATHEX            | 7,70291679 | 9,1593425  | 14,9979971 | 34,1783278 | 40,5065956 |
| RBINTER           | 9,95121135 | 11,0603211 | 15,1038309 | 23,5956291 | 34,7940815 |
| RCAC              | 10,3764148 | 35,8302573 | 44,9710958 | 50,0175022 | 59,4182092 |
| RDAX              | 3,00715857 | 14,0232688 | 17,3990464 | 22,5003179 | 36,2497088 |
| RIBEX             | 7,29474766 | 18,9613066 | 22,4512111 | 39,6283763 | 49,3922692 |
| RISEQ             | 2,9796966  | 4,7474213  | 17,4389115 | 42,5772108 | 60,8499246 |
| RPSI              | 7,2337805  | 10,9949458 | 22,2665175 | 30,5699413 | 41,1305543 |
| RSP               | 2,50592752 | 25,2903066 | 32,939354  | 41,952777  | 64,6221204 |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 48 – Test de Box-Pierce sur les rentabilités

### C.1.4 TESTS DE DÉTECTION DE STRUCTURES À MÉMOIRE LONGUE

#### C.1.4.1 TEST GPH

|        | d          | obs | tols       | tasy       | sigols     | sigasy     |
|--------|------------|-----|------------|------------|------------|------------|
| RATHEX | 0,17090708 | 48  | 1,69154788 | 1,61924776 | 0,09735349 | 0,11208569 |
| RCAC   | 0,18651339 | 48  | 2,10890363 | 1,76710865 | 0,04030916 | 0,08370272 |
| RDAX   | 0,09277474 | 48  | 1,17411902 | 0,87898805 | 0,24626247 | 0,38387967 |
| RIBEX  | 0,24625952 | 48  | 2,28098698 | 2,33316937 | 0,02712561 | 0,02396957 |
| RISEQ  | 0,29516994 | 48  | 2,91966287 | 2,79656794 | 0,00536526 | 0,00745983 |
| RPSI   | 0,20754443 | 48  | 2,04098746 | 1,96636589 | 0,0468901  | 0,0551777  |
| RSP    | 0,1472323  | 48  | 1,55935106 | 1,39494265 | 0,12562223 | 0,16959082 |

Tableau 49 – Test GPH sur les séries de rentabilités

C.1.4.2 TEST DE SHIMOTSU(2006)

| m            | d           | $\bar{d}$   |             | $W_c$      |            |
|--------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|
| Indice ATHEX |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,05055283  | 0,03198861  | 0,05168897  | 0,12408653 | 0,52764672 |
| 400          | 0,02734667  | 0,02321456  | 0,0192387   | 0,14555968 | 0,50539182 |
| 600          | 0,02198996  | 0,02744166  | 0,02370067  | 0,90551212 | 0,45550152 |
| 800          | 0,03912096  | 0,04247556  | 0,03980934  | 0,5764193  | 1,00632064 |
| Indice CAC   |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | -0,03535713 | -0,04092773 | -0,04941348 | 0,00041379 | 0,5322109  |
| 400          | -0,05697698 | -0,0475909  | -0,0619883  | 0,99640513 | 3,12585365 |
| 600          | -0,05767084 | -0,04396204 | -0,05093153 | 1,58383099 | 1,6087191  |
| 800          | -0,03557979 | -0,02229209 | -0,02138057 | 1,87141636 | 2,34605355 |
| Indice DAX   |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | -0,01520906 | -0,02588777 | -0,01571727 | 0,15478598 | 0,40186792 |
| 400          | -0,02506572 | -0,01902166 | -0,02141707 | 0,22351907 | 2,53536718 |
| 600          | -0,02282199 | -0,00432163 | -0,00028204 | 2,0643037  | 1,67576057 |
| 800          | 0,00324824  | 0,02463886  | 0,03369628  | 3,66451335 | 3,98796834 |
| Indice IBEX  |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | -0,02655465 | -0,02284486 | -0,01169412 | 0,72766244 | 0,65354409 |
| 400          | -0,05691034 | -0,03284815 | -0,03095601 | 4,72678196 | 6,85946039 |
| 600          | -0,04277505 | -0,02578566 | -0,02147892 | 3,20498134 | 3,62245944 |
| 800          | -0,00768569 | 0,00455348  | 0,01367329  | 1,9812046  | 2,78758357 |
| Indice ISEQ  |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,01065512  | 0,00637788  | -0,00285889 | 0,005274   | 2,97365178 |
| 400          | -0,00255424 | -0,00139897 | -0,00745368 | 0,06611733 | 8,31436017 |
| 600          | 0,00269228  | 0,00951473  | 0,01166549  | 0,48704214 | 14,2769776 |
| 800          | 0,04013297  | 0,04867986  | 0,0513647   | 0,69336024 | 5,83510575 |
| Indice PSI   |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,01320947  | 0,05087369  | 0,06297316  | 5,77227979 | 7,03114446 |
| 400          | -0,00120403 | 0,03810514  | 0,03891798  | 10,1193396 | 12,8176237 |
| 600          | 0,02898976  | 0,06520886  | 0,05511682  | 10,9727718 | 13,3920209 |
| 800          | 0,05354355  | 0,06791996  | 0,0689155   | 3,15811669 | 2,76735734 |
| Indice SP    |             |             |             |            |            |
|              |             | b=2         | b=4         | b=2        | b=4        |
| 200          | -0,00446895 | -0,0071793  | -0,00859422 | 0,01938947 | 0,04162725 |
| 400          | -0,02744127 | -0,01599114 | -0,0187649  | 0,99704407 | 2,63802732 |
| 600          | -0,01713    | 0,00099915  | -0,00157546 | 1,66610699 | 1,54627958 |
| 800          | 0,00821358  | 0,02696324  | 0,02789858  | 2,12860122 | 1,73607006 |

Tableau 50 – Estimations et résultats du test de Shimotsu(2006) sur les rentabilités

| m            | d          | $\bar{d}$  |            | $W_c$      |            |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Indice ATHEX |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,372671   | 0,30569053 | 0,30339313 | 0,66174531 | 11,6225685 |
| 400          | 0,25069398 | 0,22109192 | 0,21730046 | 0,25440872 | 14,663979  |
| 600          | 0,23013491 | 0,21228904 | 0,19959672 | 0,88103435 | 4,82621404 |
| 800          | 0,19195945 | 0,18240692 | 0,18795205 | 2,5956913  | 3,29906874 |
| Indice CAC   |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,40046338 | 0,33147404 | 0,31038763 | 3,54251235 | 5,19622288 |
| 400          | 0,42768791 | 0,39321426 | 0,33706478 | 2,03966629 | 11,7854614 |
| 600          | 0,2583818  | 0,29535996 | 0,26860893 | 5,78305947 | 7,17714553 |
| 800          | 0,25967723 | 0,2542544  | 0,24236567 | 0,01044997 | 0,59206376 |
| Indice DAX   |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,42182525 | 0,31638256 | 0,32727798 | 10,6042167 | 9,58603888 |
| 400          | 0,36210511 | 0,33118465 | 0,30661897 | 1,55691546 | 6,0026159  |
| 600          | 0,28209692 | 0,30547084 | 0,28432714 | 2,61561411 | 5,57507304 |
| 800          | 0,2607509  | 0,25042805 | 0,2494779  | 0,07380959 | 0,1622639  |
| Indice IBEX  |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,38274223 | 0,3123437  | 0,30083735 | 3,48400648 | 4,68226291 |
| 400          | 0,34180243 | 0,33939365 | 0,29889574 | 0,09590983 | 5,00592441 |
| 600          | 0,22706763 | 0,26511239 | 0,24021244 | 7,95498302 | 6,694693   |
| 800          | 0,22328889 | 0,21964697 | 0,22722023 | 0,25368864 | 1,44013678 |
| Indice ISEQ  |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,60392611 | 0,48177438 | 0,3416501  | 17,5176319 | 36,3880967 |
| 400          | 0,34136859 | 0,31872299 | 0,24680874 | 0,37791725 | 21,2660458 |
| 600          | 0,2443222  | 0,263253   | 0,22967579 | 1,76846432 | 22,1436416 |
| 800          | 0,24387203 | 0,24373719 | 0,20991334 | 0,15341213 | 20,8171792 |
| Indice PSI   |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,40256583 | 0,3442692  | 0,3068849  | 2,36339778 | 8,4014792  |
| 400          | 0,36323331 | 0,32619984 | 0,26864601 | 1,60338202 | 17,7671308 |
| 600          | 0,21583725 | 0,22070691 | 0,19564788 | 0,79488987 | 9,39086861 |
| 800          | 0,23420138 | 0,20074966 | 0,17421268 | 2,4961592  | 9,99771204 |
| Indice SP    |            |            |            |            |            |
|              |            | b=2        | b=4        | b=2        | b=4        |
| 200          | 0,39078629 | 0,30559876 | 0,27035456 | 3,56469654 | 10,3463503 |
| 400          | 0,40075947 | 0,33685471 | 0,27879226 | 5,35430442 | 18,9508293 |
| 600          | 0,24662254 | 0,25092021 | 0,21680245 | 1,24893276 | 5,97809503 |
| 800          | 0,24005488 | 0,22958222 | 0,21435228 | 0,10546991 | 1,09621514 |

Tableau 51 – Estimations et résultats du test de Shimotsu(2006) sur la volatilité

| Test de Shimotsu(2006) sur les volatilités |            |             |            |
|--|------------|-------------|------------|
| m  | d          | Zt          | $\eta$     |
| Indice ATHEX                               |            |             |            |
| 200  | 0,372671   | -1,76887612 | 0,15801548 |
| 400  | 0,25069398 | -0,20453084 | 0,79180434 |
| 600  | 0,23013491 | -0,00266121 | 1,03268759 |
| 800  | 0,19195945 | 0,32104751  | 1,6808659  |

Tableau 52 – 2ème test de Shimotsu (2006) sur les volatilités

## C.1.5 TESTS DE DÉTECTION DE STRUCTURES CHAOTIQUES

### C.1.5.1 TEST DE Bensaïda

| Test de Bensaïda(2012) sur les rentabilités |   |         |           |               |              |
|---|---|---------|-----------|---------------|--------------|
| Séries                                      | H | P-value | $\lambda$ | Triplet L,M,Q | IC           |
| ATHEX                                       | 1 | 0       | -0,52     | 3,6,3         | [-0,56 ;Inf] |
| CAC   | 1 | 0       | -0,44     | 2,6,1         | [-0,46 ;Inf] |
| DAX   | 1 | 0       | -0,40     | 4,6,1         | [-0,41 ;Inf] |
| IBEX  | 1 | 0       | -0,43     | 2,6,3         | [-0,45 ;Inf] |
| ISEQ  | 1 | 0       | -0,38     | 1,6,4         | [-0,4 ;Inf]  |
| PSI   | 1 | 0       | -0,47     | 5,6,2         | [-0,49 ;Inf] |
| SP  | 1 | 0       | -0,38     | 1,6,3         | [-0,4 ;Inf]  |

Tableau 53 – Résultats du test de Bensaïda(2012) sur les rentabilités

| Type de modèle  | % d'acceptation de $H_0$ | % de rejet de $H_0$ | $\bar{\lambda}$ sous $H_0$ | $\bar{\lambda}$ sous $H_1$ |
|-----------------|--------------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|
| MG déterministe | 15                       | 85                  | 0,4753717                  | -0,6329718                 |
| MGGARCH         | 0                        | 100                 | -0,510787                  |                            |
| MGBB            | 0                        | 100                 | -0,4105808                 |                            |

Tableau 54 – Résultats du test de Bensaïda sur les simulations du modèle Mackey–Glass

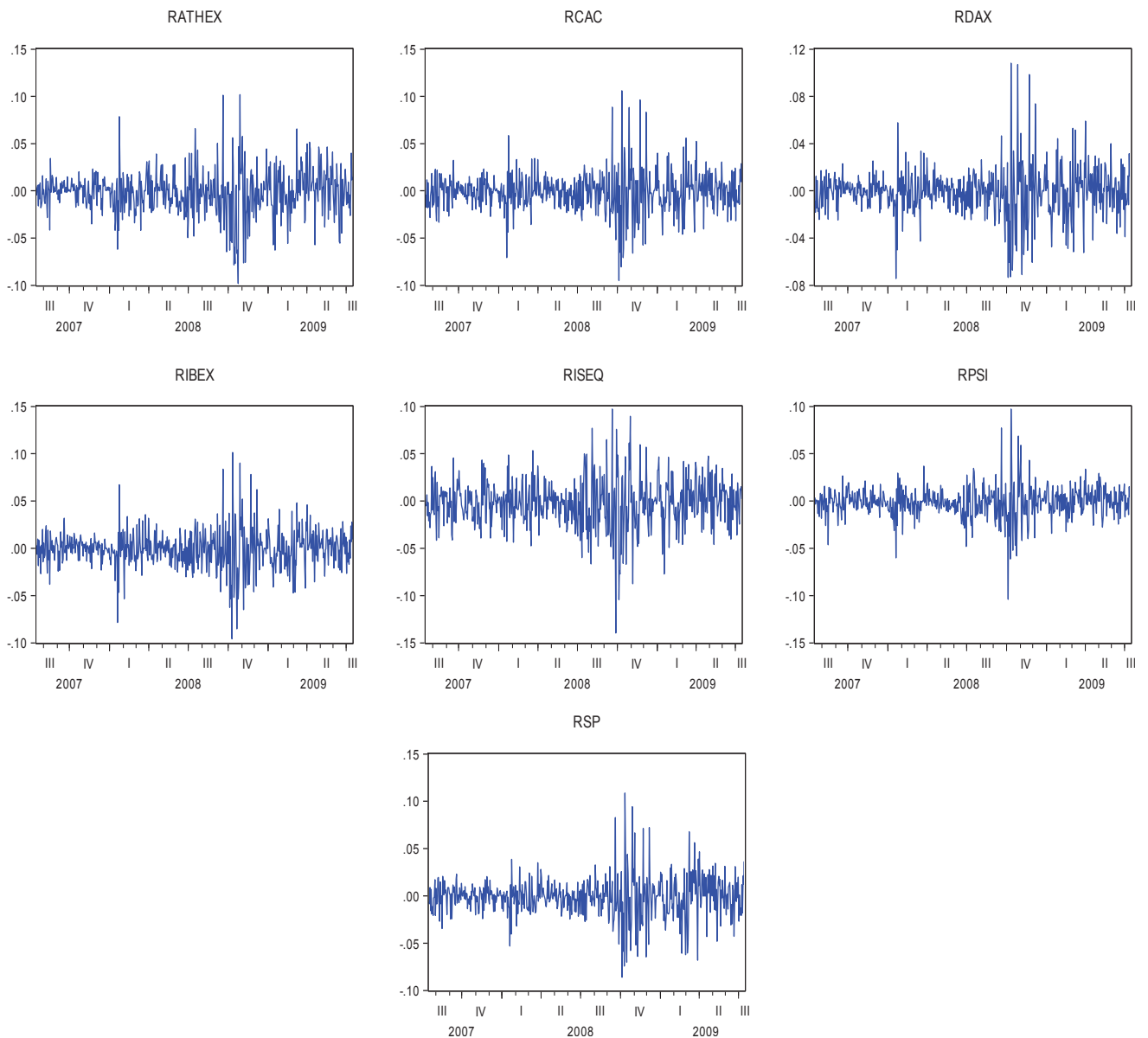
### C.1.5.2 TESTS DE APARICIO ET AL.(2011)

| Séries | %DET  | E(%DET) | STAT %DET | $\bar{L}$ | E( $\bar{L}$ ) | STAT $\bar{L}$ | ALL  | E(ALL) | STAT ALL | Pvalue |
|--------|-------|---------|-----------|-----------|----------------|----------------|------|--------|----------|--------|
| RATHEX | 78,27 | 77,3    | 704,8     | 4,77      | 3,2            | 876,8          | 2,3  | 2,1    | -157,7   | 0      |
| RCAC   | 77,2  | 77,13   | 7,28      | 4,03      | 3,18           | 474,21         | 2,21 | 2,09   | -103,02  | 0,006  |
| RDAX   | 77,11 | 76,95   | 19,78     | 3,81      | 3,17           | 364,57         | 2,18 | 2,08   | -81,3    | 0      |
| RIBEX  | 78,73 | 78,2    | 263,4     | 4,69      | 3,3            | 768,9          | 3,32 | 2,14   | -145,09  | 0      |
| RISEQ  | 80,33 | 78,9    | 1671,6    | 5,3       | 3,36           | 1044,48        | 2,47 | 2,18   | -218,57  | 0      |
| RPSI   | 80,1  | 78,4    | 2413,1    | 5,6       | 3,3            | 1243,4         | 2,44 | 2,15   | -217,6   | 0      |
| RSP    | 79,1  | 78,43   | 436,78    | 5,17      | 3,31           | 1012,1         | 2,39 | 2,15   | -180,7   | 0      |

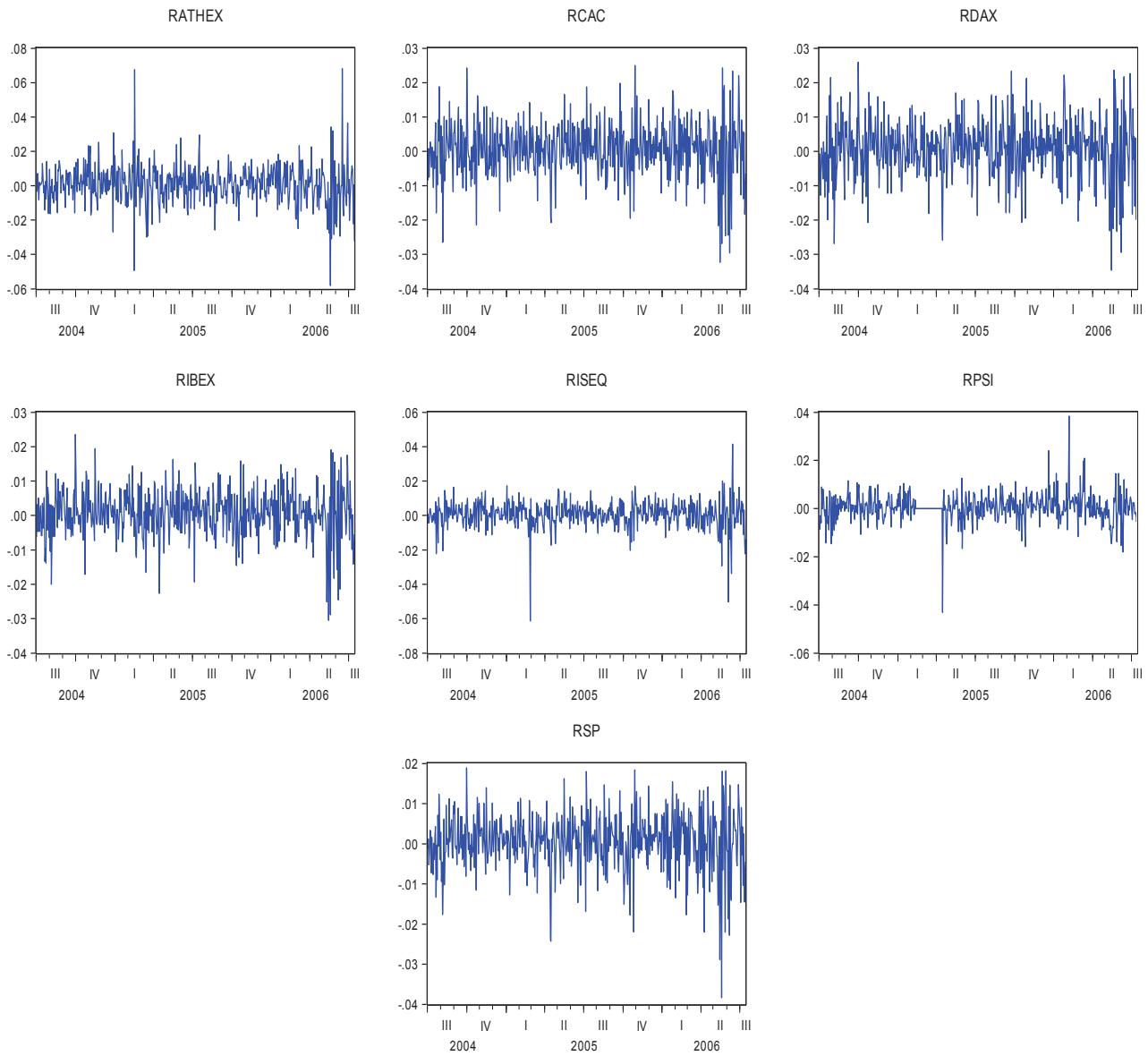
Tableau 55 – Résultats du test de Aparicio et al.(2011) sur les rentabilités

## C.2 ANALYSE PRÉLIMINAIRE DES SOUS-PÉRIODES [2004-2006] & [2007-2009]

### C.2.1 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES



Graphique 57 – Rentabilités des indices européens sur la période [2007-2009]



Graphique 58 – Rentabilités des titres bancaires et indices européens sur la période [2004-2006]

## C.2.2 STATISTIQUES DESCRIPTIVES DES SOUS-PÉRIODES

| Période stressée [2007-2009] |           |           |           |          |             |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|-------------|
|                              | Mean      | Std. Dev. | Skewness  | Kurtosis | Jarque-Bera |
| RATHEX                       | -0,001671 | 0,023471  | -0,080318 | 5,634449 | 151,8035    |
| RCAC                         | -0,001242 | 0,021336  | 0,244632  | 7,378912 | 423,0688    |
| RDAX                         | -0,00094  | 0,020353  | 0,342166  | 8,282776 | 618,3611    |
| RIBEX                        | -0,00079  | 0,020622  | 0,065837  | 7,079036 | 362,9593    |
| RISEQ                        | -0,002355 | 0,025705  | -0,264763 | 5,628235 | 156,6389    |
| RPSI                         | -0,001231 | 0,016731  | -0,07275  | 9,666126 | 968,8229    |
| RSP                          | -0,00151  | 0,021162  | 0,173575  | 7,033411 | 357,1418    |
| Période calme [2004-2006]    |           |           |           |          |             |
|                              | Mean      | Std. Dev. | Skewness  | Kurtosis | Jarque-Bera |
| RATHEX                       | 0,000799  | 0,011577  | 0,19558   | 8,711945 | 726,6083    |
| RCAC                         | 0,000461  | 0,008126  | -0,373872 | 4,407453 | 56,30428    |
| RDAX                         | 0,000554  | 0,008814  | -0,375897 | 3,940886 | 32,15185    |
| RIBEX                        | 0,000609  | 0,007056  | -0,478382 | 4,857594 | 96,78088    |
| RISEQ                        | 0,000526  | 0,007956  | -1,461887 | 14,08008 | 2910,854    |
| RPSI                         | 0,000462  | 0,005843  | -0,252293 | 12,47806 | 1996,954    |
| RSP                          | 0,000439  | 0,007195  | -0,794674 | 5,518223 | 196,5624    |

Tableau 56 – Statistiques descriptives sur les sous-périodes [2004-2006] & [2007-2009]



### C.2.3 TESTS D'HOMOSCÉDASTICITÉ ET D'AUTOCORRÉLATION

| Retards             | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Période [2004-2006] |            |            |            |            |            |
| RATHEX              | 28,3190859 | 31,7186578 | 38,7457266 | 40,2304473 | 89,2356299 |
| RCAC                | 16,0270222 | 50,5679819 | 59,4184512 | 62,8040303 | 74,1822049 |
| RDAX                | 7,55450986 | 32,0065775 | 42,569108  | 43,8912712 | 50,3406661 |
| RIBEX               | 8,1482661  | 67,7567526 | 77,1198564 | 78,7367526 | 90,1792493 |
| RISEQ               | 5,53484094 | 11,7307981 | 26,7172286 | 32,4336217 | 33,1730482 |
| RPSI                | 0,43975957 | 0,67841371 | 2,832226   | 3,86715384 | 5,52295985 |
| RSP                 | 10,3627332 | 44,5874081 | 60,4309452 | 69,824824  | 73,0915388 |
| Période [2007-2009] |            |            |            |            |            |
| RATHEX              | 26,0747417 | 72,6431116 | 94,9021018 | 96,2903163 | 96,938948  |
| RCAC                | 36,3720802 | 88,0327349 | 101,676989 | 118,345331 | 143,543988 |
| RDAX                | 29,7350935 | 64,5805029 | 87,6780024 | 111,435053 | 134,514278 |
| RIBEX               | 40,4064908 | 79,599502  | 87,9146931 | 98,1522587 | 104,361731 |
| RISEQ               | 26,7661333 | 71,9125421 | 112,083549 | 120,971395 | 122,299216 |
| RPSI                | 24,1639507 | 79,3184852 | 81,7739248 | 104,609268 | 117,858633 |
| RSP                 | 31,33715   | 90,9376828 | 118,079376 | 131,694706 | 143,53148  |
| Valeurs critiques   | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 57 – Test ARCH sur les rentabilités des sous-périodes

| Retards             | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Période [2004-2006] |            |            |            |            |            |
| RATHEX              | 1,81279745 | 4,20343064 | 7,84216371 | 17,7825819 | 34,1791715 |
| RCAC                | 2,43406486 | 2,68820232 | 6,68222786 | 13,5768377 | 19,3101542 |
| RDAX                | 1,62440095 | 2,5564166  | 5,21688517 | 8,53766824 | 15,7806408 |
| RIBEX               | 0,36151268 | 6,25293209 | 11,4294177 | 16,5233477 | 21,3533448 |
| RISEQ               | 0,46084988 | 5,9915945  | 11,6798882 | 14,0538672 | 17,0998021 |
| RPSI                | 3,80710156 | 3,90730076 | 11,8429092 | 16,0198101 | 25,0016602 |
| RSP                 | 3,99365033 | 6,06145341 | 7,71083773 | 9,33599388 | 10,1470467 |
| Période [2007-2009] |            |            |            |            |            |
| RATHEX              | 2,35656328 | 6,94044468 | 15,0108791 | 28,8877788 | 38,086264  |
| RCAC                | 8,38807825 | 29,0749131 | 36,5003408 | 40,4229332 | 46,3633332 |
| RDAX                | 3,14434331 | 12,0799243 | 18,5439475 | 22,4062672 | 29,8493149 |
| RIBEX               | 2,85989548 | 19,9662398 | 25,0645296 | 31,8639899 | 42,3154488 |
| RISEQ               | 1,09697656 | 1,63595094 | 10,3471301 | 23,902993  | 32,5651811 |
| RPSI                | 0,59673909 | 7,1213779  | 16,6869383 | 22,6516414 | 32,5180318 |
| RSP                 | 0,67270951 | 32,4614122 | 41,8753478 | 47,9294425 | 64,4949381 |
| Valeurs critiques   | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 58 – Test d'autocorrélation sur les rentabilités des sous-périodes

## C.3 RELATIONS ENTRE LES INDICES DE LA ZONE EURO : TEST D'ENGLÉ ET SHEPPARD(2001)

| Échantillon 1 |       |                     |           |
|---------------|-------|---------------------|-----------|
| Équation      |       | Engle-Sheppard test |           |
| Y             | X     | Stat.               | Pvalue    |
| DAX           | CAC   | 10,8393             | 0,0284    |
| DAX           | PSI   | 0,1593              | 0,9234    |
| DAX           | IBEX  | 0,4574              | 0,7956    |
| DAX           | ATHEX | 2,9399              | 0,2299    |
| DAX           | SP    | 19,73               | 0,0000518 |
| DAX           | ISEQ  | 1,41025             | 0,494     |
| CAC           | PSI   | 2,2583              | 0,323     |
| CAC           | IBEX  | 11,3807             | 0,0443    |
| CAC           | ATHEX | 1,5545              | 0,4597    |
| CAC           | SP    | 9,8361              | 0,02      |
| CAC           | ISEQ  | 0,6239              | 0,7319    |
| PSI           | IBEX  | 0,5425              | 0,7624    |
| PSI           | ATHEX | 7,3183              | 0,0258    |
| PSI           | SP    | 1,2211              | 0,543     |
| IBEX          | ATHEX | 0,8879              | 0,6415    |
| IBEX          | SP    | 7,9904              | 0,0184    |
| IBEX          | ISEQ  | 1,53                | 0,46      |
| ATHEX         | SP    | 1,6193              | 0,445     |
| ISEQ          | ATHEX | 3,74                | 0,154     |
| ISEQ          | SP    | 0,0142              | 0,992     |
| ISEQ          | PSI   | 0,0619              | 0,969     |

| Échantillon 2 |       |                     |         |
|---------------|-------|---------------------|---------|
| Équation      |       | Engle-Sheppard test |         |
| Y             | X     | Stat.               | Pvalue  |
| DAX           | CAC   | 270,2844            | 0       |
| DAX           | PSI   | 0,7496              | 0,6874  |
| DAX           | IBEX  | 65,194              | 0       |
| DAX           | ATHEX | 0,1058              | 0,94853 |
| DAX           | SP    | 96,9158             | 0       |
| DAX           | ISEQ  | 0,36                | 0,83    |
| CAC           | PSI   | 2,9096              | 0,2334  |
| CAC           | IBEX  | 3,201               | 0,2018  |
| CAC           | ATHEX | 11,435              | 0,0434  |
| CAC           | SP    | 10,5077             | 0,0052  |
| CAC           | ISEQ  | 1,23                | 0,53    |
| PSI           | IBEX  | 0,4026              | 0,8177  |
| PSI           | ATHEX | 0,4012              | 0,8182  |
| PSI           | SP    | 3,2041              | 0,2015  |
| PSI           | ISEQ  | 0,7                 | 0,701   |
| IBEX          | ATHEX | 0,1607              | 0,9228  |
| IBEX          | SP    | 4,4675              | 0,1071  |
| IBEX          | PSI   | 0,13                | 1,93    |
| ATHEX         | SP    | 0,1461              | 0,9296  |
| ATHEX         | ISEQ  | 1,69                | 0,43    |
| ISEQ          | SP    | 0,146               | 0,92    |

Tableau 59 – Test d’Engle et Sheppard(2001)

| Modèles retenus |          |                  |               |               |
|-----------------|----------|------------------|---------------|---------------|
| $X_{1t}$        | $X_{2t}$ | Période complète | Échantillon 1 | Échantillon 2 |
| DAX             | CAC      | EDCC             | DCC           | DCC           |
| DAX             | PSI      | CCC              |               |               |
| DAX             | IBEX     | EDCC             | DCC*          | DCC           |
| DAX             | ATHEX    | ECC              |               |               |
| DAX             | SP       | DCC              | DCC           | DCC           |
| CAC             | PSI      | CCC              |               |               |
| CAC             | IBEX     | ECCC             | DCC           | DCC*          |
| CAC             | ATHEX    | ECCC             |               | DCC           |
| CAC             | SP       | DCC              | DCC           | DCC           |
| PSI             | IBEX     | DCC              |               |               |
| PSI             | ATHEX    | CCC              | DCC           |               |
| IBEX            | ATHEX    | CCC              |               |               |
| IBEX            | SP       | EDCC             | DCC           | DCC           |
| ATHEX           | SP       | CCC              |               |               |

\*Nous estimons sur cet échantillon le modèle (MG)-DCC pour le comparer aux résultats de l'autre échantillon

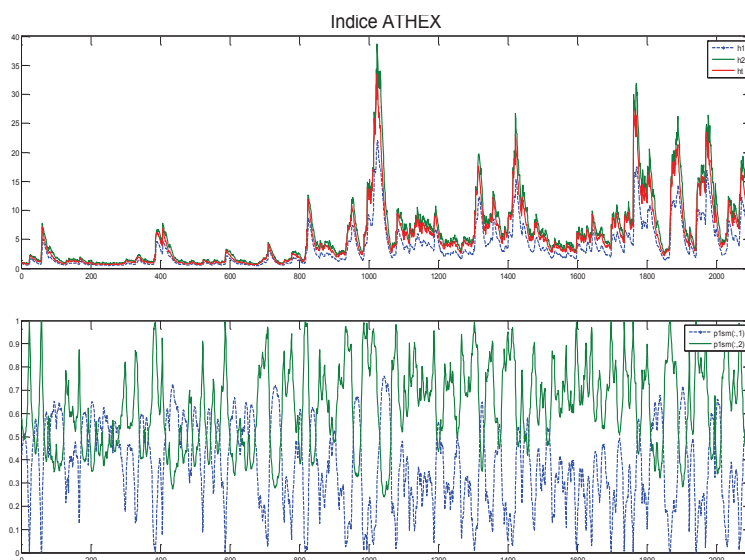
Tableau 60 – Modèles retenus pour l'équation de la variance

Note : Le tableau 60 résume les résultats du test de Engle et Sheppard(2001) sur les deux sous échantillon et sur la période complète [2003-2011]. Nous donnons uniquement les relations caractérisées par des corrélations conditionnelles dynamiques.

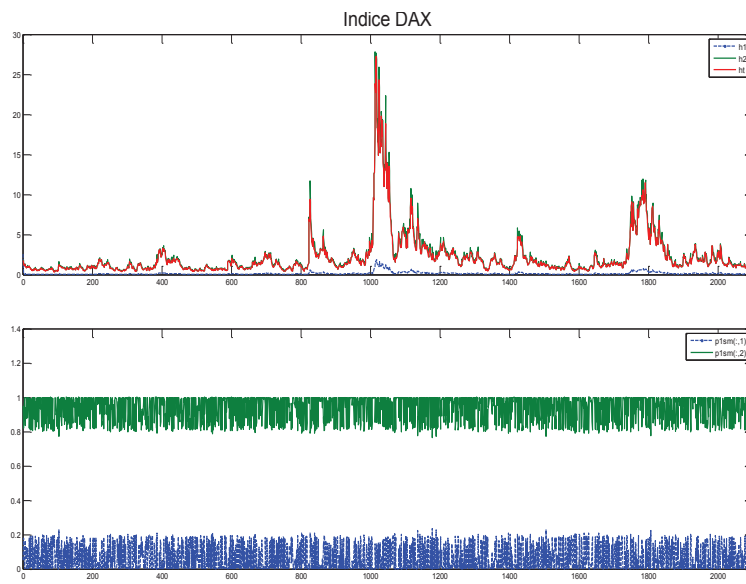
## C.4 MODÉLISATIONS (CHAOS)-STOCHASTIQUES DES INDICES DE LA ZONE EURO : ÉLÉMENTS D'ANALYSE POUR LA PÉRIODE [2003-2011]

Nous donnons ci-dessous les variances et les probabilités lissées des indices modélisés par les modèles de type MRS-G.

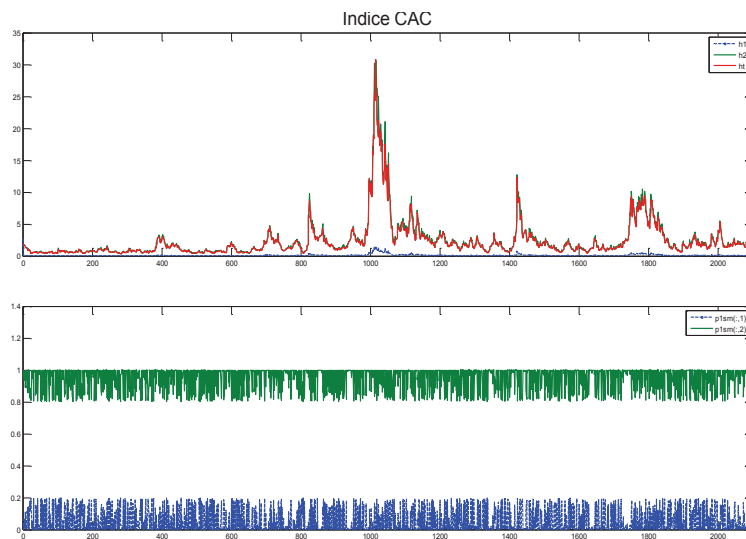
### C.4.1 MODÈLES MG-MRS-G



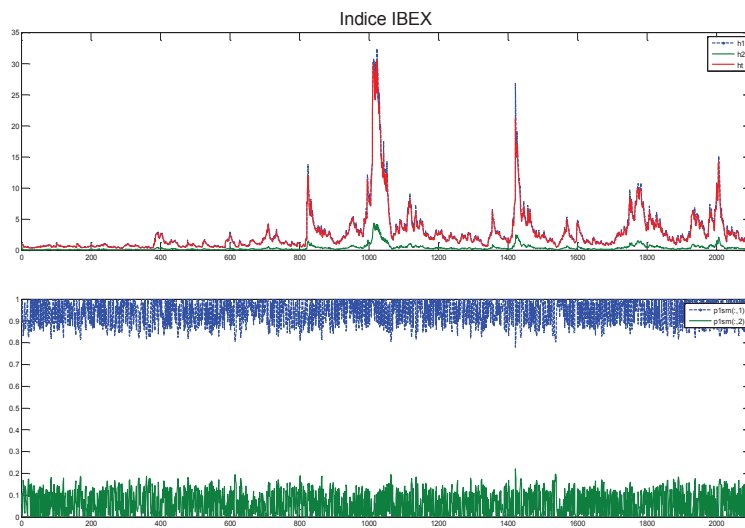
Graphique 59 – Variances et probabilités lissées de l'indice ATHEX (MG-MRS-G)



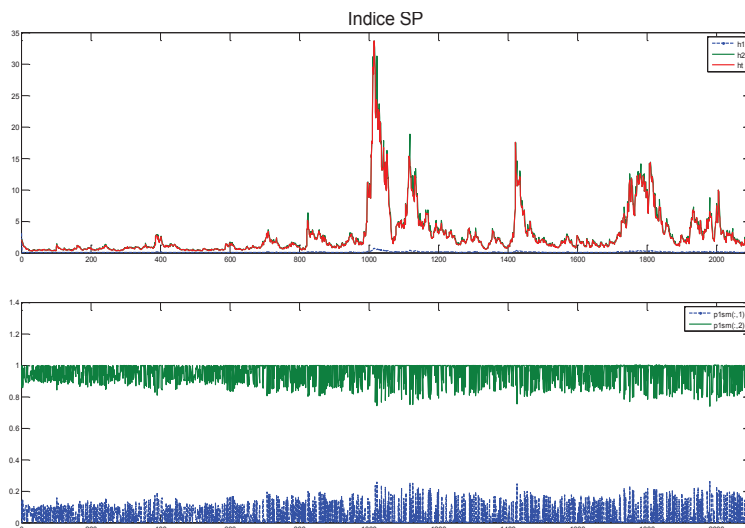
Graphique 60 – Variances et probabilités lissées de l'indice DAX (MG-MRS-G)



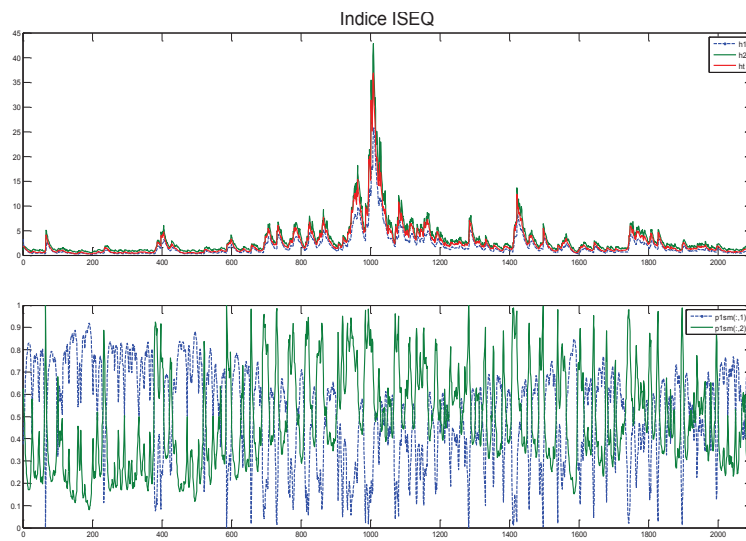
Graphique 61 – Variances et probabilités lissées de l'indice CAC (MG-MRS-G)



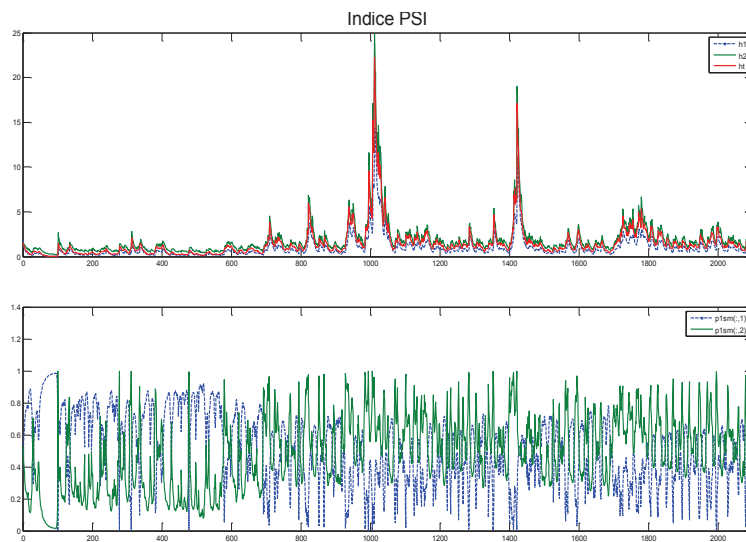
Graphique 62 – Variations et probabilités lissées de l'indice IBEX (MG-MRS-G)



Graphique 63 – Variations et probabilités lissées de l'indice SP (MG-MRS-G)

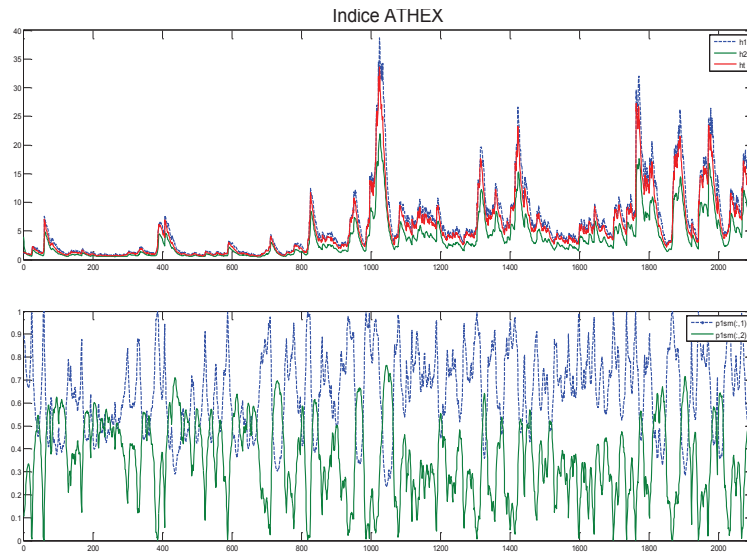


Graphique 64 – Variances et probabilités lissées de l'indice ISEQ (MG-MRS-G)



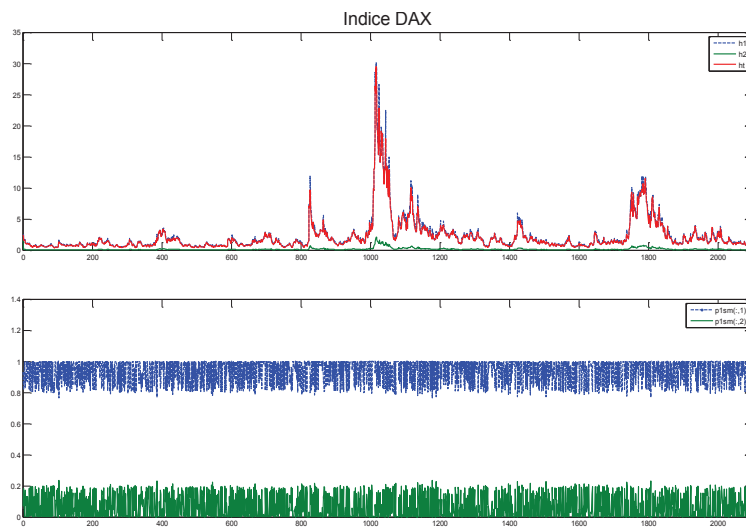
Graphique 65 – Variances et probabilités lissées de l'indice PSI (MG-MRS-G)

## C.4.2 MODÈLE LA-MRS-G

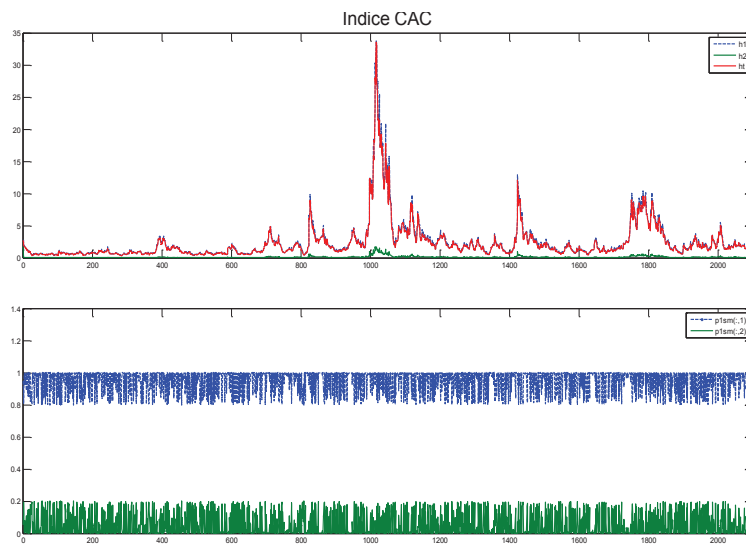


Graphique 66 – Variances et probabilités lissées de l'indice ATHEX (LA-MRS-G)

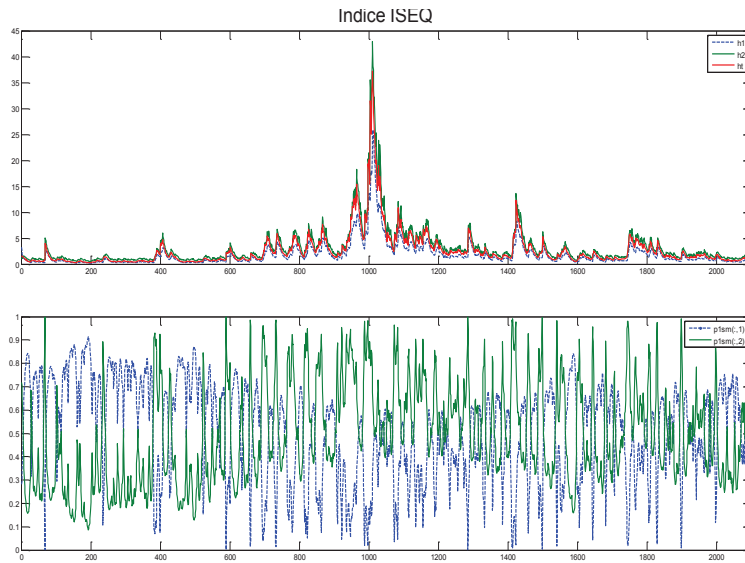




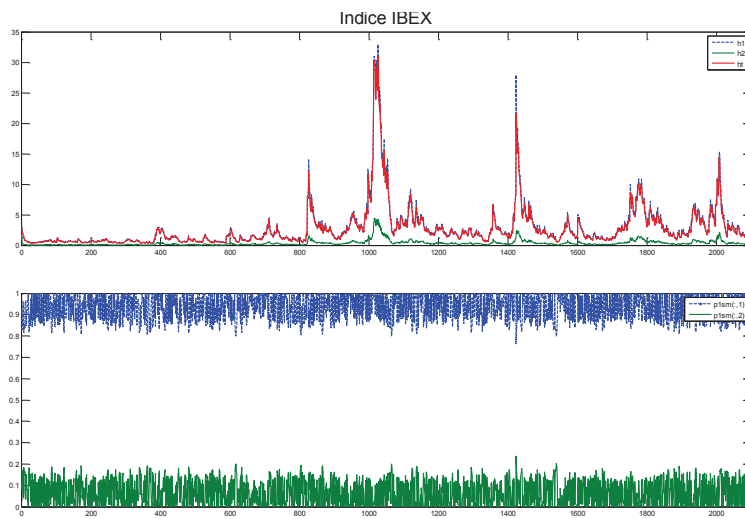
Graphique 67 – Variances et probabilités lissées de l'indice DAX (LA-MRS-G)



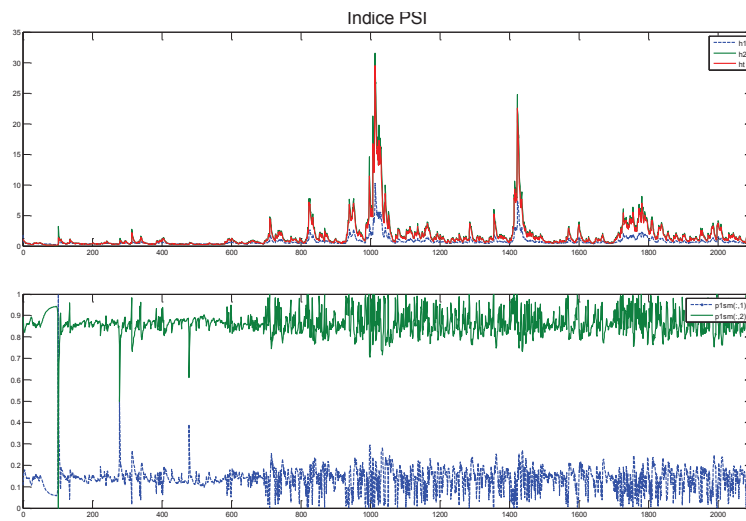
Graphique 68 – Variances et probabilités lissées de l'indice CAC(LA-MRS-G)



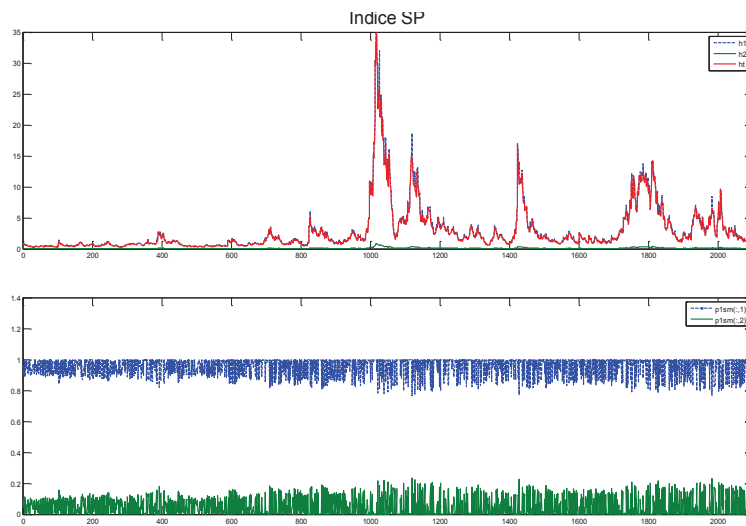
Graphique 69 – Variances et probabilités lissées de l'indice ISEQ (LA-MRS-G)



Graphique 70 – Variances et probabilités lissées de l'indice IBEX (LA-MRS-G)



Graphique 71 – Variations et probabilités lissées de l'indice PSI (LA-MRS-G)



Graphique 72 – Variations et probabilités lissées de l'indice SP (LA-MRS-G)

## C.5 ÉVALUATIONS DANS L'ÉCHANTILLON

### C.5.1 APPROCHES STATISTIQUES

#### C.5.1.1 MESURES STATISTIQUES

##### C.5.1.1.1 Période [2003-2011]

| Résidus ordinaires |            |            |            |            |           |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| MGG                |            |            |            |            |           |
|                    | $MSE_1$    | $MSE_2$    | $MAD_1$    | $MAD_2$    | AIC       |
| ATHEX              | 0,00039696 | 0,00032854 | 0,01348664 | 0,00039696 | -5.396082 |
| DAX                | 0,00020488 | 8,7562E-05 | 0,00960812 | 0,00020488 | -6.057926 |
| CAC                | 0,00021584 | 9,7083E-05 | 0,00988584 | 0,00021584 | -6.052283 |
| IBEX               | 0,00022201 | 0,00010282 | 0,00982238 | 0,00022201 | -6.057155 |
| PSI                | 0,00014332 | 4,2846E-05 | 0,00769193 | 0,00014332 | -6.529098 |
| LAG                |            |            |            |            |           |
| ATHEX              | 0,00039686 | 0,00032839 | 0,01348643 | 0,00039686 | -5.396061 |
| DAX                | 0,00020493 | 8,7606E-05 | 0,00960749 | 0,00020493 | -6.057841 |
| CAC                | 0,00021621 | 9,7518E-05 | 0,00986619 | 0,00021621 | -6.053186 |
| IBEX               | 0,00022233 | 0,00010312 | 0,00982305 | 0,00022233 | -6.056743 |
| PSI                | 0,00014333 | 4,2857E-05 | 0,00769085 | 0,00014333 | -6.528859 |
| ARMAG              |            |            |            |            |           |
| ATHEX              | 0,00039949 | 0,00033291 | 0,01350765 | 0,00039949 | -5.399302 |
| DAX                | 0,00020506 | 8,7755E-05 | 0,0095828  | 0,00020506 | -6.061852 |
| CAC                | 0,00021719 | 9,8402E-05 | 0,00986735 | 0,00021719 | -6.055198 |
| ISEQ               | 0,00026682 | 0,00014858 | 0,01073641 | 0,00026682 | -5.928894 |
| IBEX               | 0,0002214  | 0,0001023  | 0,00981304 | 0,0002214  | -6.057994 |
| PSI                | 0,00014329 | 4,2831E-05 | 0,00768928 | 0,00014329 | -6.534021 |
| SP                 | 0,00022728 | 0,00010781 | 0,00981763 | 0,00022728 | -6.127351 |

Tableau 61 – Mesures statistiques sur les résidus ordinaires des modèles de type GARCH [2003-2011]

##### C.5.1.1.2 Périodes [2004-2006] & [2007-2009]

#### C.5.1.2 TESTS STATISTIQUES

| Résidus standardisés |            |            |            |            |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|
| MGG                  |            |            |            |            |
|                      | $MSE_1$    | $MSE_2$    | $MAD_1$    | $MAD_2$    |
| ATHEX                | 0,9999729  | 2084,88701 | 0,74750758 | 0,9999729  |
| DAX                  | 0,99919917 | 2082,66029 | 0,75172015 | 0,99919917 |
| CAC                  | 0,99905888 | 2080,07927 | 0,76455818 | 0,99905888 |
| IBEX                 | 0,99964728 | 2084,5287  | 0,74881772 | 0,99964728 |
| PSI                  | 0,99943564 | 2083,64615 | 0,72357152 | 0,99943564 |
| LAG                  |            |            |            |            |
| ATHEX                | 0,99996812 | 2084,86708 | 0,74750871 | 0,99996812 |
| DAX                  | 0,99920104 | 2082,66806 | 0,75168196 | 0,99920104 |
| CAC                  | 0,99918466 | 2082,59978 | 0,76261278 | 0,99918466 |
| IBEX                 | 0,99964487 | 2084,51866 | 0,74875844 | 0,99964487 |
| PSI                  | 0,99943719 | 2083,6526  | 0,72351488 | 0,99943719 |
| ARMAG                |            |            |            |            |
| ATHEX                | 0,99951645 | 2083,98312 | 0,74739336 | 0,99951645 |
| DAX                  | 0,99823225 | 2079,62795 | 0,74980474 | 0,99823225 |
| CAC                  | 0,99920686 | 2082,69234 | 0,76228354 | 0,99920686 |
| ISEQ                 | 0,99912376 | 2083,34419 | 0,74708199 | 0,99912376 |
| IBEX                 | 0,9988835  | 2082,34233 | 0,74774863 | 0,9988835  |
| PSI                  | 0,99908147 | 2082,16965 | 0,72636605 | 0,99908147 |
| SP                   | 0,99959088 | 2085,29269 | 0,75348796 | 0,99959088 |

Tableau 62 – Mesures statistiques sur les résidus standardisés des modèles de type GARCH[2003-2011]

| Résidus ordinaires |                  |                  |                  |                  |         |
|--------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|---------|
|                    | MSE <sub>1</sub> | MSE <sub>2</sub> | MAD <sub>1</sub> | MAD <sub>2</sub> | AIC     |
| MRS-G              |                  |                  |                  |                  |         |
| ATHEX              | 5,0247           | 5,5135           | 13,4159          | 9,0997           | 1,2959  |
| CAC                | 2,3015           | 2,1283           | 19,0261          | 2,5200           | 4,4378  |
| DAX                | 2,7067           | 4,8977           | 1,5421           | 2,6126           | 3,8758  |
| IBEX               | 2,3028           | 2,1291           | 19,0164          | 2,5181           | 4,0652  |
| ISEQ               | 2,7062           | 4,8918           | 1,5421           | 2,6151           | 2,6800  |
| PSI                | 52,7758          | 44,7514          | 3525,2980        | 64,5147          | 2,1904  |
| SP                 | 72,6916          | 153,3059         | 29,6684          | 58,7292          | -1,0928 |
| MG-MRS-G           |                  |                  |                  |                  |         |
| ATHEX              | 178,5109         | 196,2909         | 1572,2625        | 699,2363         | 1,8162  |
| CAC                | 47,8457          | 43,4209          | 3455,5673        | 61,7829          | 0,3030  |
| DAX                | 72,9881          | 152,6213         | 30,0209          | 57,3681          | 3,8296  |
| IBEX               | 1,0421           | 0,9893           | 2,7796           | 1,0677           | -1,0192 |
| ISEQ               | 1,1042           | 1,5444           | 0,8261           | 1,0866           | 1,0593  |
| PSI                | 1,0330           | 0,9859           | 2,7812           | 1,0629           | 0,9847  |
| SP                 | 1,1027           | 1,5436           | 0,8229           | 1,0831           | 1,3097  |
| LA-MRS-G           |                  |                  |                  |                  |         |
| ATHEX              | 1,5287           | 1,6152           | 2,4082           | 2,0388           | 1,8472  |
| CAC                | 2,3367           | 2,1391           | 19,1103          | 2,5391           | 1,1686  |
| DAX                | 2,7172           | 4,9163           | 1,5582           | 2,6221           | 3,0722  |
| IBEX               | 2,3015           | 2,1283           | 19,0261          | 2,5200           | -0,8895 |
| ISEQ               | 2,7067           | 4,8977           | 1,5421           | 2,6126           | 1,0849  |
| PSI                | 2,3028           | 2,1291           | 19,0164          | 2,5181           | -1,1715 |
| SP                 | 2,7062           | 4,8918           | 1,5421           | 2,6151           | 1,5848  |

Tableau 63 – Mesures statistiques sur les résidus ordinaires des modèles de type MRSG

| Résidus standardisés |                  |                  |                  |                  |          |
|----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------|
|                      | MSE <sub>1</sub> | MSE <sub>2</sub> | MAD <sub>1</sub> | MAD <sub>2</sub> | AIC      |
| MRS-G                |                  |                  |                  |                  |          |
| ATHEX                | 0,9805           | 22,8974          | 0,0001           | 3,3735           | 0,9675   |
| CAC                  | 0,9164           | 0,8973           | 0,8677           | 0,9578           | 0,9632   |
| DAX                  | 0,9371           | 0,9489           | 0,9689           | 0,9517           | 0,9447   |
| IBEX                 | 0,9602           | 4,4546           | 113385,5199      | 0,               | 77,4980  |
| ISEQ                 | 3,0416           | 3,2896           | 0,               | 3,3892           | 2,6740   |
| PSI                  | 5,3203           | 4,0996           | 3,6606           | 3,7696           | 62,7609  |
| SP                   | 4,5846           | 3,7639           | 3,8959           | 5,5942           | 3,8947   |
| MG-MRS-G             |                  |                  |                  |                  |          |
| ATHEX                | 4,3074           | 4,7996           | 7,0583           | 4,3385           | 3,6294   |
| CAC                  | 0,7532           | 0,0005           | 3,2658           | 4,8740           | 0,7384   |
| DAX                  | 0,7161           | 0,6960           | 0,7503           | 0,7443           | 0,7342   |
| IBEX                 | 0,7389           | 0,7382           | 0,7164           | 0,6923           | 0,7445   |
| ISEQ                 | 0,7437           | 0,7331           | 0,7164           | 0,7275           | 0,7380   |
| PSI                  | 0,0001           | 3,3735           | 0,9675           | 0,9656           | 0,       |
| SP                   | 0,9254           | 0,9070           | 0,0001           | 24,3667          | 249,3229 |
| LA-MRS-G             |                  |                  |                  |                  |          |
| ATHEX                | 0,9621           | 0,9362           | 0,9100           | 0,9675           | 0,9530   |
| CAC                  | 0,9184           | 0,8970           | 0,9735           | 0,9602           | -0,1220  |
| DAX                  | 2,4032           | -1,1147          | 1,1595           | 4,6833           | 4,4790   |
| IBEX                 | 2,1103           | -0,4071          | 0,3714           | -0,2393          | 0,5939   |
| ISEQ                 | 1,4782           | 4,0914           | 1,4806           | -3,4857          | 2,6038   |
| PSI                  | -0,2641          | 0,6275           | -0,0205          | 3,7881           | 0,6636   |
| SP                   | -2,8045          | 2,5668           | 1,4193           | 3,4464           | 0,9953   |

Tableau 64 – Mesures statistiques sur les résidus standardisés des modèles de type MRSG

| Résidus ordinaires |            |            |            |            |          |           |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|----------|-----------|
| Période 2004-2006  |            |            |            |            |          |           |
|                    | $MSE_1$    | $MSE_2$    | $MAD_1$    | $MAD_2$    | LL       | AIC       |
| LAG                |            |            |            |            |          |           |
| ATHEX              | 0,0001342  | 9,581E-06  | 0,00821906 | 0,00013445 | 1660,233 | -6,234401 |
| DAX                | 8,0753E-05 | 3,4692E-06 | 0,00660363 | 8,0905E-05 | 1776,967 | -6,674076 |
| IBEX               | 4,9743E-05 | 1,3164E-06 | 0,00522344 | 4,9837E-05 | 1898,69  | -7,119163 |
| MGG                |            |            |            |            |          |           |
| IBEX               | 4,9747E-05 | 1,3166E-06 | 0,00522337 | 4,984E-05  | 1895,35  | -7,119962 |
| ATHEX              | 0,00013113 | 9,1477E-06 | 0,0081566  | 0,00013138 | 1659,71  | -6,232428 |
| DAX                | 7,7156E-05 | 3,167E-06  | 0,00653261 | 7,7301E-05 | 1776,94  | -6,673981 |
| ISEQ               | 6,6793E-05 | 2,3734E-06 | 0,00564305 | 6,6919E-05 | 1817,55  | -6,830703 |
| ARMAG              |            |            |            |            |          |           |
| ATHEX              | 0,00013385 | 9,5317E-06 | 0,00813417 | 0,00013411 | 1662,98  | -6,236754 |
| DAX                | 7,7603E-05 | 3,2038E-06 | 0,00652666 | 7,7749E-05 | 1780,99  | -6,680429 |
| CAC                | 6,5954E-05 | 2,3141E-06 | 0,00609466 | 6,6078E-05 | 1827,47  | -6,855163 |
| ISEQ               | 6,3332E-05 | 2,1338E-06 | 0,00548991 | 6,3451E-05 | 1846,14  | -6,925337 |
| IBEX               | 4,9747E-05 | 1,3166E-06 | 0,00521453 | 4,9841E-05 | 1900,76  | -7,130674 |
| SP                 | 5,1744E-05 | 1,4244E-06 | 0,00528718 | 5,1841E-05 | 1894,73  | -7,108009 |

Tableau 65 – Mesures statistiques sur les résidus ordinaires [2004-2006]



| Résidus standardisés |            |            |            |            |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|
| Période 2004-2006    |            |            |            |            |
|                      | $MSE_1$    | $MSE_2$    | $MAD_1$    | $MAD_2$    |
| LAG                  |            |            |            |            |
| ATHEX                | 1,00987294 | 542,556664 | 0,75039786 | 1,01177477 |
| DAX                  | 1,01331248 | 546,258765 | 0,75892591 | 1,01522079 |
| IBEX                 | 0,99875938 | 530,680799 | 0,75410496 | 1,00064028 |
| MG                   |            |            |            |            |
| ATHEX                | 0,9977417  | 529,599881 | 0,74663552 | 0,99962069 |
| DAX                  | 1,0011998  | 533,277348 | 0,75538428 | 1,00308529 |
| ISEQ                 | 0,99851279 | 530,418785 | 0,69803542 | 1,00039323 |
| IBEX                 | 0,9977869  | 529,647866 | 0,7539214  | 0,99966597 |
| ARMAG                |            |            |            |            |
| ATHEX                | 0,99825557 | 530,145546 | 0,7434209  | 1,00013552 |
| DAX                  | 1,00158181 | 533,684376 | 0,75409984 | 1,00346803 |
| CAC                  | 0,99981614 | 531,804388 | 0,76965663 | 1,00169903 |
| ISEQ                 | 0,99863699 | 530,550742 | 0,71177664 | 1,00051766 |
| IBEX                 | 0,9989884  | 530,924204 | 0,75486404 | 1,00086974 |
| SP                   | 0,99836401 | 530,260735 | 0,75458291 | 1,00024417 |

Tableau 66 – Mesures statistiques sur les résidus standardisés [2004-2006]

| Résidus ordinaires |            |            |            |            |          |           |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|----------|-----------|
| Période 2007-2009  |            |            |            |            |          |           |
|                    | $MSE_1$    | $MSE_2$    | $MAD_1$    | $MAD_2$    | LL       | AIC       |
| LAG                |            |            |            |            |          |           |
| CAC                | 0,00044901 | 0,00010726 | 0,01498625 | 0,00044986 | 1345,19  | -5,15459  |
| IBEX               | 0,00042717 | 9,7076E-05 | 0,01450384 | 0,00042797 | 1353,21  | -5,205442 |
| PSI                | 0,00028419 | 4,2966E-05 | 0,01159083 | 0,00028472 | 1479,08  | -5,647804 |
| MGG                |            |            |            |            |          |           |
| DAX                | 0,00041354 | 9,0981E-05 | 0,01375102 | 0,00041432 | 1384,81  | -5,28663  |
| CAC                | 0,00044968 | 0,00010758 | 0,01499878 | 0,00045052 | 1345,266 | -5,154868 |
| PSI                | 0,00028452 | 4,3065E-05 | 0,01159608 | 0,00028505 | 1479,11  | -5,647926 |
| SP                 | 0,00044667 | 0,00010614 | 0,01459686 | 0,00044751 | 1367,01  | -5,218439 |
| ARMAG              |            |            |            |            |          |           |
| ATHEX              | 0,00055121 | 0,00016164 | 0,03257176 | 0,14191657 | 1285,91  | -4,905952 |
| DAX                | 0,00041526 | 9,174E-05  | 0,01366371 | 0,00041605 | 1385,72  | -5,287659 |
| CAC                | 0,00045183 | 0,00010861 | 0,01490052 | 0,00045268 | 1348,57  | -5,151606 |
| ISEQ               | 0,00065647 | 0,00022927 | 0,01879523 | 0,0006577  | 1227,22  | -4,677719 |
| IBEX               | 0,00042522 | 9,6191E-05 | 0,01441706 | 0,00042602 | 1363,96  | -5,210559 |
| PSI                | 0,00028409 | 4,2937E-05 | 0,01152148 | 0,00028463 | 1480,87  | -5,65151  |
| SP                 | 0,00044958 | 0,00010753 | 0,0145492  | 0,00045043 | 1368,97  | -5,223601 |

Tableau 67 – Mesures statistiques sur les résidus ordinaires [2007-2009]

| Résidus standardisés |            |            |            |            |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|
| Période 2004-2006    |            |            |            |            |
|                      | $MSE_1$    | $MSE_2$    | $MAD_1$    | $MAD_2$    |
| LAG                  |            |            |            |            |
| CAC                  | 1,01195338 | 544,794415 | 0,77122808 | 1,01385913 |
| IBEX                 | 1,01608592 | 549,253077 | 0,76206302 | 1,01799945 |
| PSI                  | 1,01146011 | 544,263429 | 0,75266878 | 1,01336493 |
| MGG                  |            |            |            |            |
| DAX                  | 1,01212722 | 544,981602 | 0,7450409  | 1,0140333  |
| CAC                  | 1,01535893 | 548,4674   | 0,77282727 | 1,01727109 |
| PSI                  | 1,01146223 | 544,265705 | 0,75268948 | 1,01336705 |
| SP                   | 1,01368536 | 546,660863 | 0,75837473 | 1,01559437 |
| ARMAG                |            |            |            |            |
| ATHEX                | 1,01333856 | 546,286876 | 0,74539526 | 1,01524692 |
| DAX                  | 1,01369713 | 546,673558 | 0,74204622 | 1,01560617 |
| CAC                  | 1,01272689 | 545,627578 | 0,7664824  | 1,01463409 |
| ISEQ                 | 1,01269368 | 545,591794 | 0,78058589 | 1,01460082 |
| IBEX                 | 1,01300125 | 545,923255 | 0,75955249 | 1,01490897 |
| PSI                  | 1,01224095 | 545,104089 | 0,74985416 | 1,01414724 |
| SP                   | 1,01471959 | 547,776906 | 0,75529876 | 1,01663055 |

Tableau 68 – Mesures statistiques sur les résidus standardisés[2007-2009]

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Résidus LAG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 0,2073     | 2,35       | 4,97       | 8,22       | 16,04      |
| DAX               | 3,21       | 6,49       | 7,39       | 15,37      | 21,99      |
| CAC               | 3,53       | 8,36       | 9,23       | 20,02      | 24,86      |
| ISEQ              | 0,8        | 2,54       | 3,21       | 12,7       | 15,5       |
| IBEX              | 0,93       | 26,56      | 28,3       | 34,84      | 41,9       |
| PSI               | 0,50       | 0,58       | 1,39       | 3,30       | 4,05       |
| SP                | 2,7        | 9,2        | 12,7       | 19,44      | 26,4       |
| Résidus MGG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 0,29       | 4,65       | 7,35       | 10,67      | 18,38      |
| DAX               | 3,19       | 6,46       | 7,35       | 15,32      | 21,94      |
| CAC               | 3,76       | 8,78       | 9,39       | 19,72      | 24,41      |
| ISEQ              | 1,01       | 2,63       | 3,22       | 12,48      | 15,39      |
| IBEX              | 0,95       | 26,65      | 28,4       | 35,01      | 42,03      |
| PSI               | 0,29       | 0,45       | 1,45       | 3,52       | 4,35       |
| SP                | 3,3        | 10,23      | 13,95      | 20,42      | 27,68      |
| Résidus ARMAG     |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 0,24       | 2,17       | 4,35       | 7,27       | 15,9       |
| DAX               | 3,93       | 7,32       | 8,35       | 16,08      | 13,17      |
| CAC               | 5,65       | 10,79      | 11,75      | 21,39      | 27,45      |
| ISEQ              | 0,88       | 2,84       | 3,6        | 12,97      | 15,65      |
| IBEX              | 1,3        | 25,87      | 28,38      | 34,46      | 42,18      |
| PSI               | 0,54       | 0,6        | 1,48       | 3,38       | 4,09       |
| SP                | 3,09       | 12,48      | 14,48      | 19,07      | 27,09      |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 69 – Test ARCH sur les résidus des modélisations de type GARCH [2003-2011]

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Résidus LAG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 1,37       | 5,38       | 7,69       | 11,67      | 14,67      |
| DAX               | 1,17       | 3,49       | 4,23       | 7,56       | 12,41      |
| CAC               | 0,67       | 3,8        | 6,16       | 7,33       | 11,27      |
| ISEQ              | 1,05       | 3,7        | 4,7        | 8,6        | 17,7       |
| IBEX              | 1,22       | 3,67       | 4,68       | 13,91      | 17,69      |
| PSI               | 0,81       | 7,71       | 18,49      | 29,11      | 40,02      |
| SP                | 1,01       | 2,23       | 4,12       | 8,39       | 15,7       |
| Résidus MGG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 2,06       | 7,36       | 9,89       | 16,75      | 20,22      |
| DAX               | 1,18       | 3,49       | 4,24       | 7,56       | 12,4       |
| CAC               | 0,64       | 2,08       | 4,08       | 4,93       | 8,87       |
| ISEQ              | 1,2        | 4,07       | 4,92       | 8,87       | 17,97      |
| IBEX              | 1,28       | 3,75       | 4,73       | 14,08      | 17,84      |
| PSI               | 1,36       | 7,5        | 16,68      | 24,69      | 38,05      |
| SP                | 0,69       | 1,95       | 3,86       | 7,56       | 14,93      |
| Résidus ARMAG     |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 6,46       | 9,69       | 11,41      | 14,8       | 17,5       |
| DAX               | 0,006      | 2,65       | 3,99       | 6,14       | 11,26      |
| CAC               | 0,95       | 8,34       | 9,57       | 10,63      | 14,58      |
| ISEQ              | 1,99       | 4,27       | 5,94       | 9,22       | 17,9       |
| IBEX              | 1,35       | 2,95       | 4,82       | 12,45      | 15,89      |
| PSI               | 0,28       | 4,14       | 11,08      | 18,12      | 26,82      |
| SP                | 0,1        | 2,39       | 4,69       | 8,2        | 16,87      |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 70 – Test d'autocorrélation sur les résidus des modélisations de type GARCH [2003-2011]

| JB-STAT |          |         |         |
|---------|----------|---------|---------|
|         | LAG      | MGG     | ARMAG   |
| ATHEX   | 286,9    | 288,15  | 244,38  |
| DAX     | 230,97   | 230,79  | 208,71  |
| CAC     | 123,43   | 133,32  | 159,5   |
| ISEQ    | 1268,4   | 1270,06 | 1261,92 |
| IBEX    | 340,66   | 336,6   | 338,98  |
| PSI     | 3576,023 | 3068,84 | 3879,69 |
| SP      | 197,9    | 210,78  | 223,56  |

Tableau 71 – Statistiques de Jarque-Bera calculées sur les résidus standardisés des modèles de type GARCH [2003-2011]

| TEST ARCH |          |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|           | 2        | 5        | 10       | 15       | 20       |
| MRS-G     |          |          |          |          |          |
| ATHEX     | 1,7241   | 2,7929   | 9,6099   | 12,4930  | 19,5064  |
| CAC       | 17,8846  | 19,3537  | 22,6295  | 28,9560  | 38,9987  |
| DAX       | 12,1600  | 13,9666  | 17,2476  | 27,2400  | 39,5472  |
| IBEX      | 9,1575   | 18,0601  | 20,0049  | 25,7567  | 29,2591  |
| ISEQ      | 8,9799   | 14,8317  | 19,1945  | 36,4738  | 41,3483  |
| PSI       | 113,7614 | 279,3327 | 300,9547 | 346,8351 | 371,6799 |
| SP        | 0,0130   | 0,0259   | 0,1502   | 0,2415   | 0,2902   |
| MG-MRS-G  |          |          |          |          |          |
| ATHEX     | 0,1089   | 2,5741   | 5,6983   | 9,0408   | 17,7743  |
| CAC       | 6,0196   | 10,3596  | 11,8333  | 22,3904  | 25,5996  |
| DAX       | 6,0648   | 9,5156   | 11,6860  | 22,1897  | 28,9584  |
| IBEX      | 4,1413   | 32,9535  | 35,7453  | 44,0485  | 48,2660  |
| ISEQ      | 5,0103   | 6,1298   | 7,3727   | 19,6460  | 23,4458  |
| PSI       | 0,7915   | 0,9506   | 1,6300   | 5,3720   | 5,6060   |
| SP        | 2,8517   | 14,7137  | 16,6950  | 22,6340  | 28,9002  |
| LA-MRS-G  |          |          |          |          |          |
| ATHEX     | 0,1936   | 2,7135   | 5,7721   | 8,9704   | 17,8841  |
| CAC       | 6,5971   | 10,5960  | 12,2939  | 22,9344  | 26,2339  |
| DAX       | 6,5795   | 9,8563   | 12,1958  | 22,5105  | 29,4145  |
| IBEX      | 4,7372   | 32,5053  | 35,2230  | 43,2975  | 47,3156  |
| ISEQ      | 4,8848   | 6,0175   | 7,2858   | 19,3567  | 23,2532  |
| PSI       | 1,0524   | 1,5598   | 3,5503   | 6,8661   | 7,7818   |
| SP        | 2,5148   | 15,1300  | 17,2213  | 23,3275  | 29,6735  |

Tableau 72 – Tests ARCH sur les résidus des modèles de type MRS-G

| TEST LJUNG-BOX |         |         |         |         |         |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                | 2       | 5       | 10      | 15      | 20      |
| MRS-G          |         |         |         |         |         |
| ATHEX          | 6,0679  | 6,7483  | 9,2705  | 16,3191 | 20,8161 |
| CAC            | 11,3878 | 21,5680 | 23,4364 | 24,8751 | 29,5238 |
| DAX            | 2,9547  | 9,0487  | 10,7796 | 14,9184 | 20,8131 |
| IBEX           | 2,8593  | 6,5512  | 8,1075  | 16,8220 | 21,1694 |
| ISEQ           | 3,7328  | 5,3675  | 8,2073  | 12,3740 | 22,9907 |
| PSI            | 6,5496  | 10,4050 | 21,0938 | 29,0579 | 39,3089 |
| SP             | 0,6857  | 1,4779  | 4,0321  | 14,4987 | 17,0546 |
| MG-MRS-G       |         |         |         |         |         |
| ATHEX          | 0,7566  | 4,5651  | 6,8938  | 13,8148 | 16,9580 |
| CAC            | 2,2508  | 6,6767  | 7,1882  | 9,2092  | 13,5207 |
| DAX            | 0,3761  | 3,7959  | 4,5283  | 9,6484  | 15,3375 |
| IBEX           | 1,7839  | 2,5400  | 3,2032  | 12,8887 | 16,7280 |
| ISEQ           | 0,2584  | 1,1979  | 1,9685  | 7,3170  | 17,9797 |
| PSI            | 0,5986  | 3,2783  | 10,1209 | 16,5525 | 26,3692 |
| SP             | 0,0408  | 2,3369  | 3,9734  | 8,4646  | 16,1783 |
| LA-MRS-G       |         |         |         |         |         |
| ATHEX          | 0,6935  | 4,5975  | 6,8698  | 13,6135 | 16,6821 |
| CAC            | 1,6442  | 5,5939  | 6,0286  | 8,2360  | 12,6493 |
| DAX            | 0,2032  | 3,4602  | 4,2521  | 9,4407  | 15,0889 |
| IBEX           | 1,9739  | 2,6942  | 3,3587  | 13,0619 | 16,9676 |
| ISEQ           | 0,2262  | 1,1536  | 1,9207  | 7,2000  | 17,9310 |
| PSI            | 1,0190  | 5,6388  | 12,4383 | 18,7710 | 29,7078 |
| SP             | 0,0033  | 2,1390  | 3,7878  | 8,4735  | 16,2136 |

Tableau 73 – Tests d'autocorrélation sur les résidus des modèles de type MRS-G

|       | Statistiques de Jarque-Bera |          |          |
|-------|-----------------------------|----------|----------|
|       | MRS-G                       | MG-MRS-G | LA-MRS-G |
| ATHEX | 244,9443                    | 233,6055 | 237,2155 |
| CAC   | 6,43007                     | 109,4866 | 102,2344 |
| DAX   | 29,73574                    | 172,9373 | 163,6996 |
| IBEX  | 80,07966                    | 392,7928 | 384,9493 |
| ISEQ  | 7,906526                    | 236,6845 | 251,2502 |
| PSI   | 7527,813                    | 1816,735 | 1301,811 |
| SP    | 13704054                    | 190,386  | 187,3533 |

Tableau 74 – Tests de normalité sur les résidus des modèles de type MRS-G



| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Résidus LAG       |            |            |            |            |            |
| CAC               | 0.1591     | 6.2897     | 7.5831     | 10.401     | 18.813     |
| ISEQ              | 0.1907     | 0.7027     | 1.7978     | 3.9033     | 4.1506     |
| IBEX              | 0.2578     | 9.7752     | 12.347     | 14.715     | 21.024     |
| SP                | 1.3305     | 8.2780     | 14.637     | 20.760     | 23.639     |
| Résidus ARMAG     |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 8.0886     | 9.1686     | 11.663     | 14.532     | 42.004     |
| DAX               | 0.5261     | 5.0774     | 7.8840     | 13.090     | 18.091     |
| CAC               | 0.2740     | 7.9371     | 9.2122     | 12.395     | 21.206     |
| ISEQ              | 0.2500     | 0.8683     | 1.8469     | 3.4966     | 3.6119     |
| IBEX              | 0.6496     | 12.969     | 15.473     | 17.993     | 25.728     |
| SP                | 0.7452     | 6.8666     | 12.204     | 18.506     | 23.287     |
| Résidus MGG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 5.5016     | 6.3307     | 8.5506     | 11.456     | 42.046     |
| DAX               | 0.4021     | 4.5020     | 6.9773     | 10.537     | 14.600     |
| CAC               | 0.1591     | 6.2973     | 7.5879     | 10.401     | 18.808     |
| ISEQ              | 0.1737     | 2.1805     | 9.9928     | 17.105     | 18.347     |
| IBEX              | 0.2580     | 9.5100     | 12.047     | 14.366     | 20.649     |
| SP                | 1.1369     | 5.9159     | 10.720     | 16.426     | 19.742     |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 75 – Test ARCH sur les résidus des modélisations [2004-2006]

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Résidus LAG       |            |            |            |            |            |
| CAC               | 0.3992     | 0.6256     | 2.6879     | 9.3736     | 13.390     |
| ISEQ              | 0.8170     | 3.4407     | 5.3265     | 8.0075     | 10.220     |
| IBEX              | 0.3643     | 4.0043     | 5.6569     | 8.3769     | 10.946     |
| SP                | 0.1838     | 0.2973     | 2.4847     | 5.4764     | 6.2514     |
| Résidus ARMAG     |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 0.7828     | 1.7667     | 2.5863     | 7.4847     | 12.404     |
| DAX               | 0.4378     | 1.3522     | 2.7591     | 6.0093     | 11.353     |
| CAC               | 1.6462     | 2.0681     | 4.5331     | 11.207     | 14.973     |
| ISEQ              | 0.6640     | 5.8443     | 8.4207     | 10.739     | 12.969     |
| IBEX              | 0.0935     | 3.0670     | 5.4430     | 7.9194     | 10.973     |
| SP                | 0.9184     | 1.4680     | 3.0950     | 6.1450     | 6.9197     |
| Résidus MGG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 0.5706     | 1.8252     | 2.9336     | 7.9251     | 12.742     |
| DAX               | 0.6197     | 0.9742     | 1.9683     | 5.3020     | 10.255     |
| CAC               | 0.3986     | 0.6256     | 2.6915     | 9.3781     | 13.394     |
| ISEQ              | 5.0993     | 9.6634     | 14.246     | 17.222     | 20.113     |
| IBEX              | 0.3191     | 4.1306     | 5.8094     | 8.1112     | 10.921     |
| SP                | 0.5983     | 1.7924     | 3.3329     | 6.7960     | 7.4874     |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 76 – Test d'autocorrélation sur les résidus des modélisations [2004-2006]

| JB-STAT |         |        |          |
|---------|---------|--------|----------|
|         | LAG     | MGG    | ARMAG    |
| ATHEX   | 81,68   | 82,18  | 74,53    |
| DAX     | 19,06   | 19,05  | 17,8     |
| CAC     | 15,83   | 15,84  | 14,98    |
| ISEQ    | 3444,83 | 4111,3 | 3509,244 |
| IBEX    | 47,95   | 48,13  | 51,27    |
| SP      | 55,52   | 60,9   | 58,55    |

Tableau 77 – Statistiques de Jarque-Bera calculées sur les résidus standardisés [2004-2006]

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Résidus LAG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 2.0856     | 6.5531     | 9.3696     | 14.323     | 18.808     |
| DAX               | 2.1387     | 3.4494     | 5.3216     | 8.6611     | 10.928     |
| CAC               | 2.6733     | 5.8817     | 7.5555     | 21.656     | 23.042     |
| ISEQ              | 1.8856     | 4.4673     | 10.520     | 14.970     | 19.752     |
| IBEX              | 2.5157     | 18.187     | 19.410     | 27.749     | 29.838     |
| PSI               | 0.8435     | 1.3284     | 2.4921     | 24.794     | 27.638     |
| SP                | 4.3363     | 8.0463     | 10.144     | 20.061     | 24.005     |
| Résidus MGG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 2.0569     | 6.3778     | 9.0906     | 14.298     | 19.120     |
| DAX               | 2.1084     | 3.5189     | 5.3863     | 8.7949     | 11.275     |
| CAC               | 2.6580     | 5.8528     | 7.5077     | 21.605     | 22.959     |
| ISEQ              | 2.5873     | 3.3957     | 8.7650     | 14.371     | 19.747     |
| IBEX              | 2.4899     | 17.328     | 18.929     | 27.762     | 29.855     |
| PSI               | 0.7743     | 1.2175     | 2.4392     | 24.865     | 27.726     |
| SP                | 4.1531     | 7.9408     | 10.374     | 17.005     | 21.315     |
| Résidus ARMAG     |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 2.1178     | 6.6282     | 9.4186     | 14.851     | 19.262     |
| DAX               | 2.2131     | 3.9944     | 5.9018     | 9.4015     | 12.015     |
| CAC               | 2.9323     | 6.1280     | 7.8970     | 22.565     | 24.258     |
| ISEQ              | 1.8450     | 3.0418     | 8.3136     | 14.060     | 19.758     |
| IBEX              | 2.4325     | 17.321     | 18.791     | 27.936     | 30.040     |
| PSI               | 1.1625     | 2.1300     | 3.6173     | 26.537     | 29.992     |
| SP                | 4.3800     | 8.8089     | 11.476     | 18.248     | 23.100     |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 78 – Test ARCH sur les résidus des modélisations [2007-2009]

| Retards           | 2          | 5          | 10         | 15         | 20         |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Résidus LAG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 0.9975     | 7.4326     | 9.3764     | 18.816     | 23.313     |
| DAX               | 3.1458     | 6.4279     | 7.7678     | 11.943     | 18.741     |
| CAC               | 0.1664     | 2.7290     | 4.4889     | 5.7668     | 12.018     |
| ISEQ              | 0.0252     | 0.4555     | 2.7515     | 13.460     | 21.762     |
| IBEX              | 0.1529     | 3.3466     | 5.6579     | 8.3284     | 20.012     |
| PSI               | 0.5826     | 5.4879     | 8.0480     | 9.5456     | 14.905     |
| SP                | 1.4438     | 4.7425     | 6.7279     | 8.7271     | 16.763     |
| Résidus MGG       |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 1.0133     | 7.2109     | 9.3536     | 18.954     | 23.419     |
| DAX               | 3.1678     | 7.1803     | 9.2112     | 13.375     | 20.805     |
| CAC               | 0.1632     | 2.7502     | 4.5166     | 5.7699     | 12.041     |
| ISEQ              | 0.0463     | 0.7524     | 3.0109     | 12.978     | 20.090     |
| IBEX              | 0.6269     | 4.7714     | 7.3509     | 9.5940     | 19.476     |
| PSI               | 0.5736     | 5.5159     | 8.0254     | 9.5904     | 14.914     |
| SP                | 2.2902     | 8.1108     | 11.594     | 13.546     | 21.492     |
| Résidus ARMAG     |            |            |            |            |            |
| ATHEX             | 1.4127     | 7.6555     | 9.6545     | 19.220     | 23.830     |
| DAX               | 2.9736     | 8.2590     | 10.695     | 15.158     | 21.879     |
| CAC               | 0.1107     | 5.9737     | 8.3134     | 9.9780     | 17.015     |
| ISEQ              | 0.2086     | 0.9812     | 3.4302     | 13.198     | 20.684     |
| IBEX              | 0.2325     | 4.4875     | 7.0609     | 9.4531     | 19.391     |
| PSI               | 0.5003     | 5.1452     | 7.0748     | 8.2808     | 15.338     |
| SP                | 2.3571     | 9.4724     | 13.390     | 15.455     | 23.139     |
| Valeurs critiques | 5,99146455 | 11,0704977 | 18,3070381 | 24,9957901 | 31,4104328 |

Tableau 79 – Test d'autocorrélation sur les résidus des modélisations [2007-2009]

| JB-STAT |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
|         | LAG    | MGG    | ARMAG  |
| ATHEX   | 26,34  | 26     | 26,18  |
| DAX     | 127,12 | 142,96 | 159,59 |
| CAC     | 40,92  | 40,28  | 51,66  |
| ISEQ    | 1,58   | 1,99   | 2,51   |
| IBEX    | 74,07  | 75,89  | 77,23  |
| PSI     | 76,41  | 77,3   | 84,47  |
| SP      | 23,48  | 21,48  | 23,69  |

Tableau 80 – Statistiques de Jarque-Bera calculées sur les résidus standardisés [2007-2009]

| Résidus ordinaires   |          |         |          |         |
|----------------------|----------|---------|----------|---------|
|                      | DM       | P-value | DBM      | P-value |
| MRS-G VS MG-MRS-G    |          |         |          |         |
| ATHEX                | 3,6327   | 0,0003  | 4,1073   | 0,00028 |
| CAC                  | 6,6334   | 0,      | 7,5626   | 0,0     |
| DAX                  | 0,0454   | 0,9638  | 0,9781   | 0,96377 |
| IBEX                 | 7,5590   | 0,      | 7,6292   | 0,0     |
| ISEQ                 | 7,0448   | 0,      | 7,5413   | 0,0     |
| PSI                  | -38,7449 | 0,      | -38,1105 | 0,0     |
| SP                   | 9,1937   | 0,      | 9,2623   | 0,0     |
| MRS-G VS LA-MRS-G    |          |         |          |         |
| ATHEX                | 1,2274   | 0,2197  | 1,8558   | 0,21968 |
| CAC                  | 2,9580   | 0,0031  | 3,8434   | 0,00310 |
| DAX                  | 0,5525   | 0,5806  | 0,7499   | 0,58062 |
| IBEX                 | 1,3208   | 0,1866  | 2,0292   | 0,18657 |
| ISEQ                 | 1,5819   | 0,1137  | 2,3304   | 0,11366 |
| PSI                  | -7,3897  | 0,      | -7,2329  | 0,0     |
| SP                   | 2,0249   | 0,0429  | 2,2294   | 0,04288 |
| MG-MRS-G VS LA-MRS-G |          |         |          |         |
| ATHEX                | 0,0921   | 0,9266  | 1,0021   | 0,92664 |
| CAC                  | 0,8965   | 0,3700  | 1,7699   | 0,37001 |
| DAX                  | 15,3612  | 0,      | 16,0118  | 0,0     |
| IBEX                 | 0,0233   | 0,9814  | 0,9802   | 0,98139 |
| ISEQ                 | 0,0342   | 0,9727  | 0,7752   | 0,97270 |
| PSI                  | -1,9695  | 0,0489  | -1,6752  | 0,04890 |
| SP                   | 0,5411   | 0,5885  | 0,7615   | 0,58846 |

Tableau 81 – Tests DM et DBM sur les résidus ordinaires des modèles de type MRS-G

| Résidus standardisés |         |         |         |         |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|
|                      | DM      | P-value | DBM     | P-value |
| MRS-G VS MG-MRS-G    |         |         |         |         |
| ATHEX                | -0,4174 | 0,6764  | 0,5784  | 0,67638 |
| CAC                  | 8,1197  | 0,      | 8,2684  | 0,0     |
| DAX                  | 0,8629  | 0,3882  | 1,2563  | 0,38818 |
| IBEX                 | 8,5857  | 0,      | 8,6919  | 0,0     |
| ISEQ                 | 8,3096  | 0,      | 8,4098  | 0,0     |
| PSI                  | -4,3663 | 0,      | -3,5636 | 0,1     |
| SP                   | -0,2008 | 0,8408  | 0,3227  | 0,84084 |
| MRS-G VS LA-MRS-G    |         |         |         |         |
| ATHEX                | -0,1435 | 0,8859  | 0,4780  | 0,88591 |
| CAC                  | 3,7755  | 0,0002  | 4,1098  | 0,00016 |
| DAX                  | 1,3390  | 0,1806  | 2,2629  | 0,18057 |
| IBEX                 | 2,7047  | 0,0068  | 3,0783  | 0,00684 |
| ISEQ                 | 2,3674  | 0,0179  | 3,2765  | 0,01791 |
| PSI                  | -4,4367 | 0,      | -4,1738 | 0,1     |
| SP                   | -0,1785 | 0,8583  | 0,3022  | 0,85832 |
| MG-MRS-G VS LA-MRS-G |         |         |         |         |
| ATHEX                | 0,0733  | 0,9416  | 1,0490  | 0,94155 |
| CAC                  | 0,8875  | 0,3748  | 1,5400  | 0,37483 |
| DAX                  | 23,6453 | 0,      | 24,3495 | 0,0     |
| IBEX                 | 0,0232  | 0,9815  | 0,1033  | 0,98149 |
| ISEQ                 | 0,0167  | 0,9867  | 0,0574  | 0,98668 |
| PSI                  | -1,2830 | 0,1995  | -1,0709 | 0,19948 |
| SP                   | 0,5084  | 0,6112  | 1,3668  | 0,61116 |

Tableau 82 – Tests DM et DBM sur les résidus standardisés des modèles de type MRS-G

| Résidus ordinaires           |             |            |             |            |
|------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                              | DM-STAT     | P-value    | DBM-STAT    | P-value    |
| ARMAG vs MGG                 |             |            |             |            |
| Période complète [2003-2011] |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -31,39      | 0          | -31,38      | 0          |
| DAX                          | -6,09       | 0          | -6,09       | 0          |
| CAC                          | -31,72      | 0          | 31,7        | 0          |
| IBEX                         | -2,14       | 0,03       | -2,14       | 0,03       |
| PSI                          | -3,39       | 0          | -3,39       | 0          |
| Période [2004-2006]          |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -21,9871344 | 0          | -21,9457273 | 0          |
| DAX                          | -5,12065129 | 3,04E-07   | -5,11100788 | 4,48E-07   |
| IBEX                         | -7,39217234 | 1,45E-13   | -7,37825111 | 6,23E-13   |
| ISEQ                         | -27,6421861 | 0          | -27,5901292 | 0          |
| Période [2007-2009]          |             |            |             |            |
| DAX                          | 1,49697519  | 0,13439971 | 1,49415603  | 0,13572994 |
| CAC                          | 5,45307125  | 4,95E-08   | 5,44280182  | 8,03E-08   |
| PSI                          | -7,88637983 | 3,11E-15   | -7,87152789 | 2,00E-14   |
| SP                           | 2,70352872  | 0,00686075 | 2,69843733  | 0,00718877 |

Tableau 83 – Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus ordinaires(ARMAG versus MGG)

| Résidus standardisés         |             |            |             |            |
|------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                              | DM-STAT     | P-value    | DBM-STAT    | P-value    |
| ARMAG vs MGG                 |             |            |             |            |
| Période complète [2003-2011] |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -7,99       | 0          | -7,99       | 0          |
| DAX                          | -6,87       | 0          | -6,87       | 0          |
| CAC                          | -9,58       | 0          | -9,58       | 0          |
| IBEX                         | -3,49       | 0          | -3,49       | 0          |
| PSI                          | -4,21       | 0          | -4,21       | 0          |
| Période [2004-2006]          |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -12,5366262 | 0          | -12,5130167 | 0          |
| DAX                          | -6,55435482 | 5,59E-11   | -6,5420114  | 1,43E-10   |
| IBEX                         | -9,21232626 | 0          | -9,19497725 | 0          |
| ISEQ                         | -23,7849024 | 0          | -23,7401098 | 0          |
| Période [2007-2009]          |             |            |             |            |
| DAX                          | 1,86592654  | 0,06205164 | 1,86241256  | 0,06309807 |
| CAC                          | 6,54421462  | 5,98E-11   | 6,5318903   | 1,52E-10   |
| PSI                          | -7,90178023 | 2,66E-15   | -7,88689929 | 1,78E-14   |
| SP                           | 2,11775451  | 0,03419586 | 2,11376627  | 0,0350018  |

Tableau 84 – Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus standardisés(ARMAG versus MGG)



| Résidus ordinaires           |             |            |             |            |
|------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                              | DM-STAT     | P-value    | DBM-STAT    | P-value    |
| ARMAG vs LAG                 |             |            |             |            |
| Période complète [2003-2011] |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -27,01      | 0          | -26,99      | 0          |
| DAX                          | -6,09       | 0          | -6,09       | 0          |
| CAC                          | -2,28       | 0,03       | -2,28       | 0,03       |
| IBEX                         | -2,6        | 0,03       | -2,59       | 0,03       |
| PSI                          | -3,73       | 0          | -3,73       | 0          |
| Période [2004-2006]          |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -20,7206481 | 0          | -20,6816262 | 0          |
| DAX                          | -5,06433055 | 4,10E-07   | -5,05479321 | 5,94E-07   |
| IBEX                         | -10,3777033 | 0          | -10,3581596 | 0          |
| Période [2007-2009]          |             |            |             |            |
| CAC                          | 0,68962701  | 0,49042878 | 0,68832828  | 0,49154724 |
| PSI                          | 5,45065219  | 5,02E-08   | 5,4403873   | 8,13E-08   |
| IBEX                         | 3,28874306  | 0,00100636 | 3,28254957  | 0,00109654 |

Tableau 85 – Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus ordinaires (ARMAG versus LAG)

| Résidus standardisés         |             |            |             |            |
|------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                              | DM-STAT     | P-value    | DBM-STAT    | P-value    |
| ARMAG vs LAG                 |             |            |             |            |
| Période complète [2003-2011] |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -8,23       | 0          | -8,22       | 0          |
| DAX                          | -6,88       | 0          | -6,88       | 0          |
| CAC                          | -3,88       | 0,03       | -3,88       | 0,03       |
| IBEX                         | -3,73       | 0,03       | -3,72       | 0,03       |
| PSI                          | -4,36       | 0          | -4,36       | 0          |
| Période [2004-2006]          |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -11,9649174 | 0          | -11,9423846 | 0          |
| DAX                          | -6,4998762  | 8,04E-11   | -6,48763538 | 2,00E-10   |
| IBEX                         | -13,4799734 | 0          | -13,4545874 | 0          |
| Période [2007-2009]          |             |            |             |            |
| CAC                          | 0,47503694  | 0,63476064 | 0,47414233  | 0,63559369 |
| PSI                          | 8,97894173  | 0          | 8,96203224  | 0          |
| IBEX                         | 3,66839472  | 0,00024408 | 3,66148625  | 0,00027591 |

Tableau 86 – Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus standardisés (ARMAG versus LAG)

| Résidus standardisés         |             |            |             |            |
|------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                              | DM-STAT     | P-value    | DBM-STAT    | P-value    |
| MGG vs LAG                   |             |            |             |            |
| Période complète [2003-2011] |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -4,53       | 0          | -4,53       | 0          |
| DAX                          | -13,58      | 0          | -13,57      | 0          |
| CAC                          | 6,85        | 0          | 6,85        | 0          |
| IBEX                         | -7,17       | 0          | -7,17       | 0          |
| PSI                          | -6,56       | 0          | -6,56       | 0          |
| Période [2004-2006]          |             |            |             |            |
| ATHEX                        | 3,58826745  | 0,00033288 | 3,58150989  | 0,00037306 |
| DAX                          | 15,7967215  | 0          | 15,7669725  | 0          |
| IBEX                         | 0,2895951   | 0,77212602 | 0,28904972  | 0,77265636 |
| Période [2007-2009]          |             |            |             |            |
| CAC                          | -1,69000571 | 0,09102686 | -1,68682303 | 0,09222583 |
| PSI                          | -1,07503207 | 0,28236037 | -1,07300753 | 0,28375605 |

Tableau 87 – Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus standardisés (MGG versus LAG)

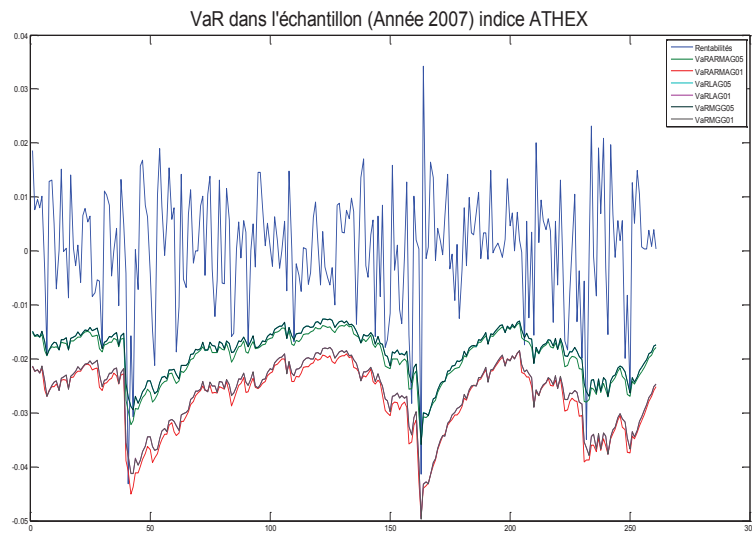
| Résidus ordinaires           |             |            |             |            |
|------------------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                              | DM-STAT     | P-value    | DBM-STAT    | P-value    |
| MGG vs LAG                   |             |            |             |            |
| Période complète [2003-2011] |             |            |             |            |
| ATHEX                        | -3,02       | 0          | -3,01       | 0          |
| DAX                          | -5,57       | 0          | -5,57       | 0          |
| CAC                          | 3,94        | 0          | 3,94        | 0          |
| IBEX                         | -4,18       | 0          | -4,18       | 0          |
| PSI                          | -4,16       | 0          | -4,16       | 0          |
| Période [2004-2006]          |             |            |             |            |
| ATHEX                        | 4,01892811  | 5,85E-05   | 4,01135951  | 6,91E-05   |
| DAX                          | 11,0759452  | 0          | 11,0550866  | 0          |
| IBEX                         | 0,05515635  | 0,95601391 | 0,05505247  | 0,95611741 |
| Période [2007-2009]          |             |            |             |            |
| CAC                          | -3,34202206 | 0,0008317  | -3,33572823 | 0,00091037 |
| PSI                          | -0,41283093 | 0,67973049 | -0,41205347 | 0,68046683 |

Tableau 88 – Résultats du test de Diebold et Mariano(1995) et du test modifié sur les résidus ordinaires (MGG versus LAG)

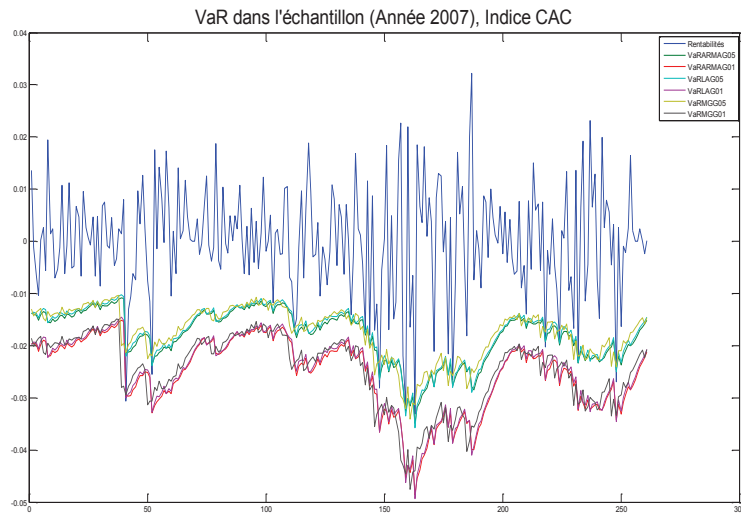
## C.5.2 APPROCHE PAR LA VAR

### C.5.2.1 PÉRIODE [2003-2011]

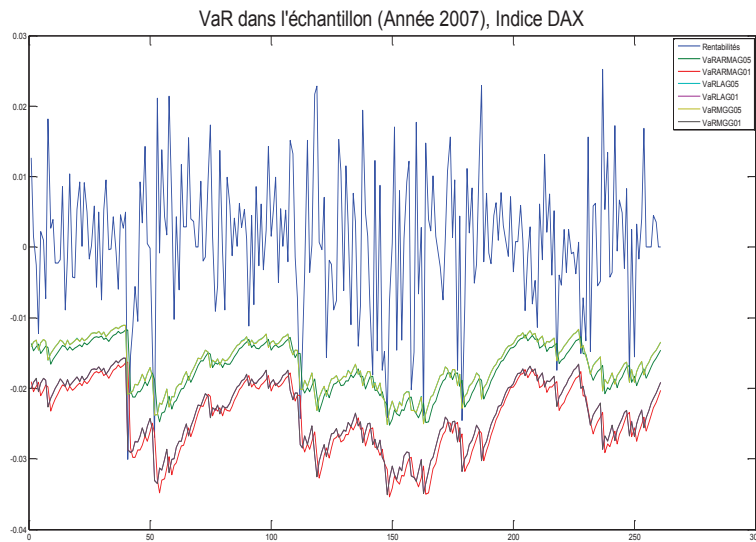
#### C.5.2.1.1 Représentations graphiques



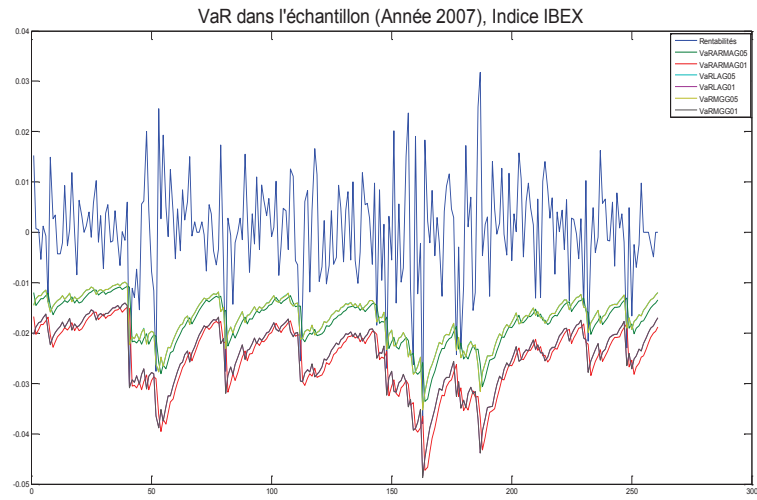
Graphique 73 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2007) (ATHEX)



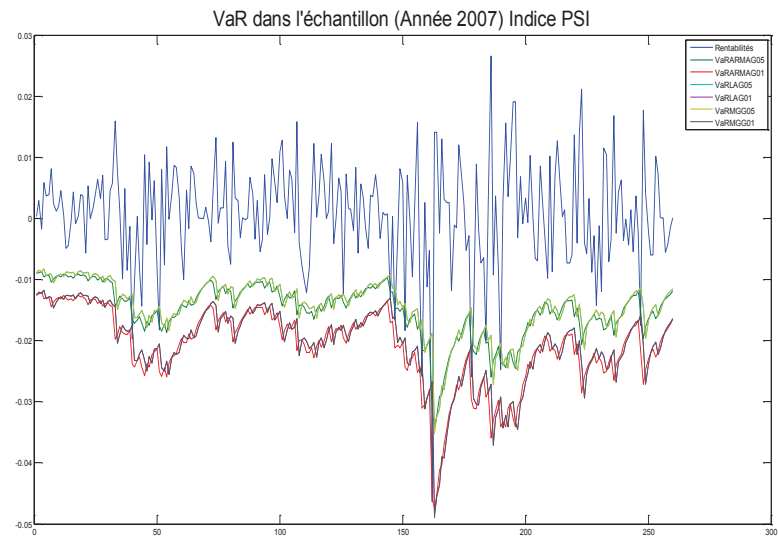
Graphique 74 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2007) (CAC)



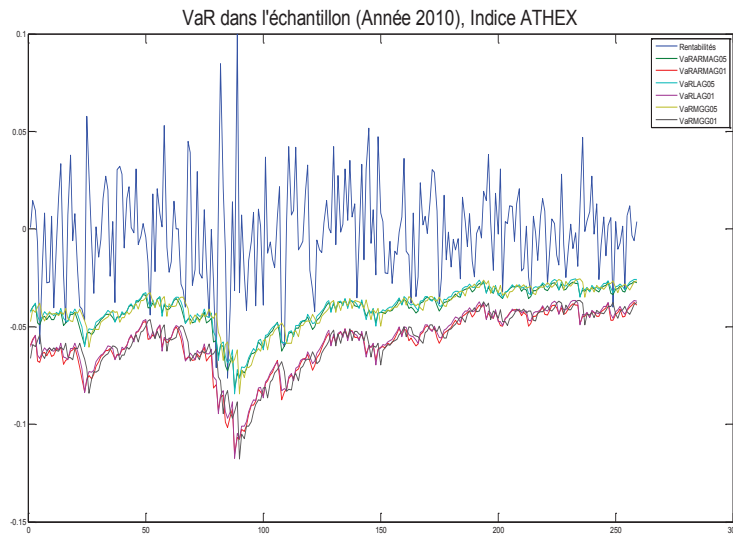
Graphique 75 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2007) (DAX)



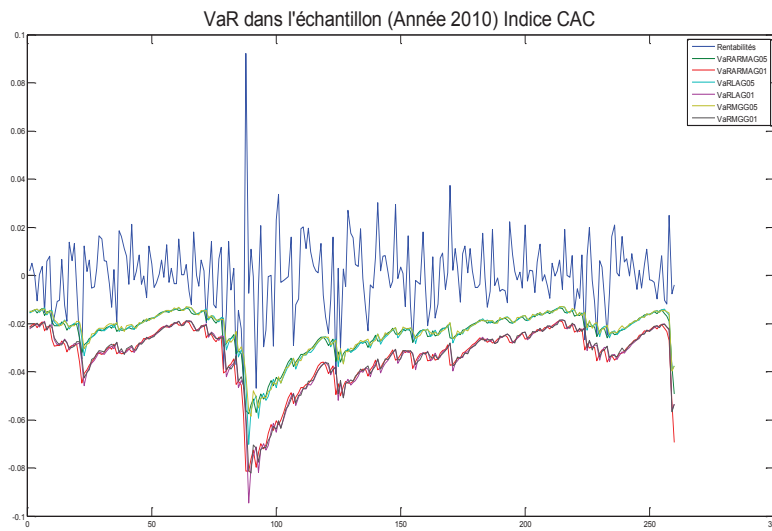
Graphique 76 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2007) (IBEX)



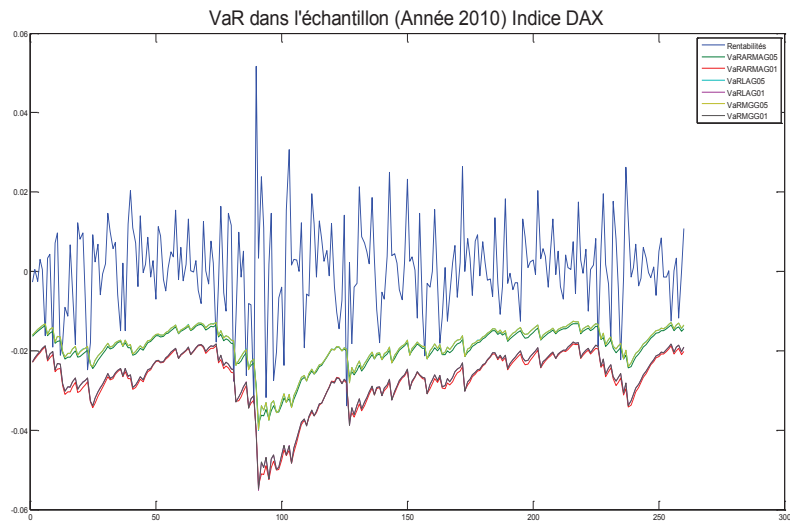
Graphique 77 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2007) (PSI)



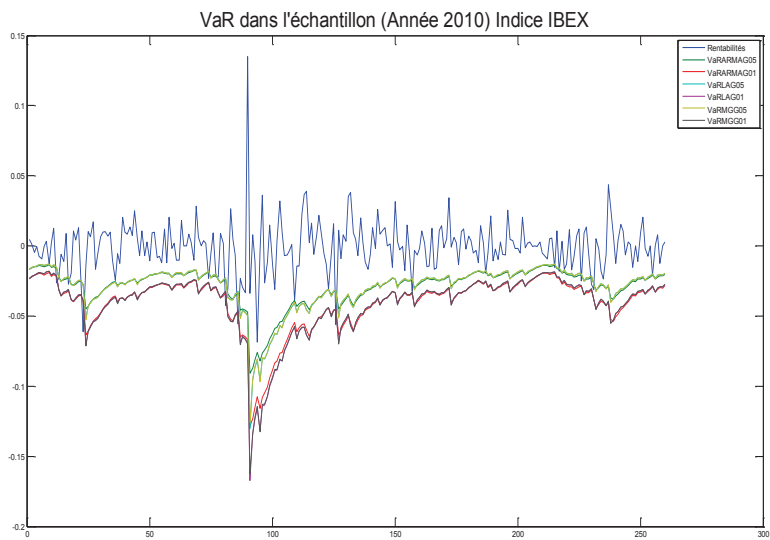
Graphique 78 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (ATHEX)



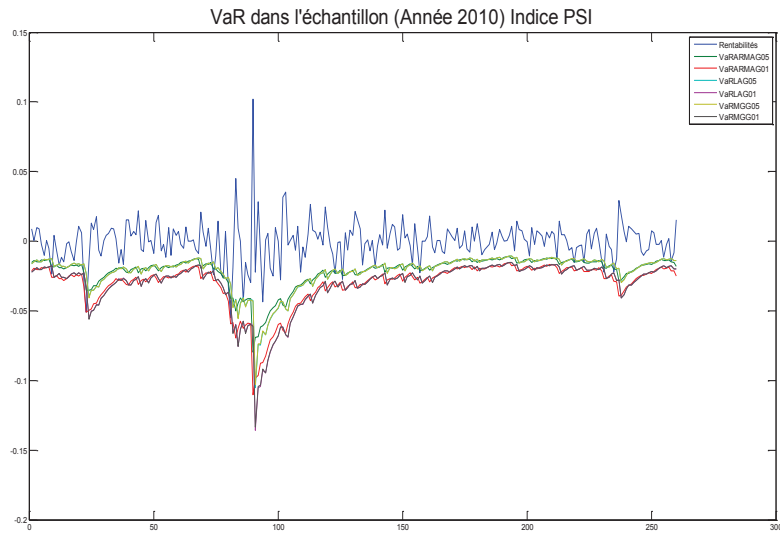
Graphique 79 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (CAC)



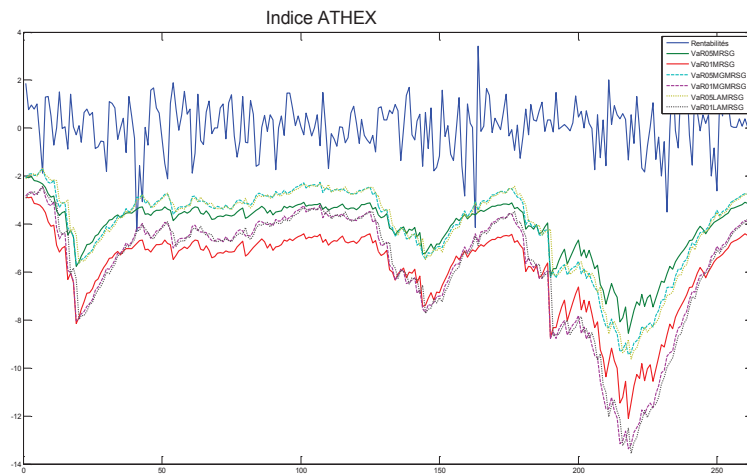
Graphique 80 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (DAX)



Graphique 81 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (IBEX)

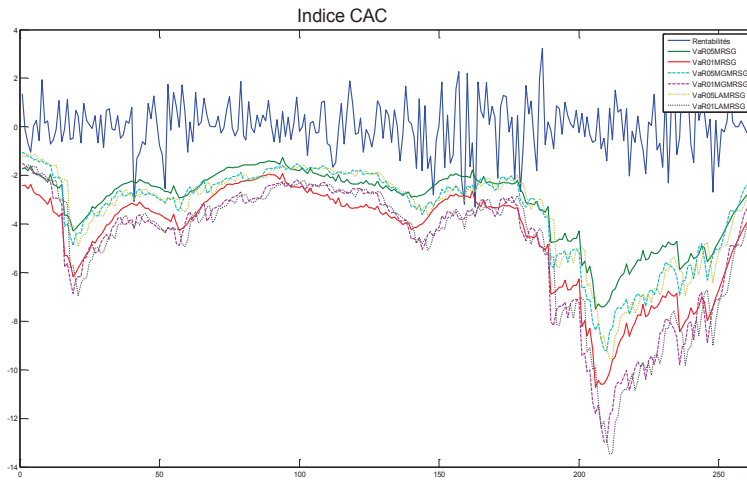


Graphique 82 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH (2010) (PSI)

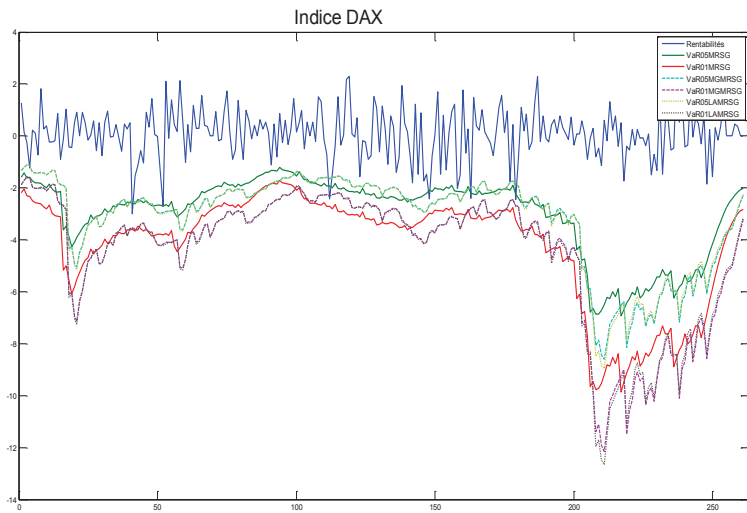


Graphique 83 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSRG pour l'indice ATHEX (2007)

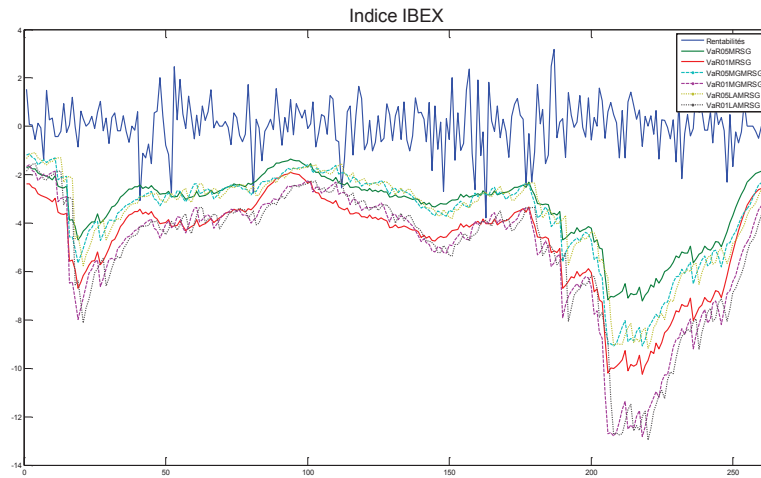




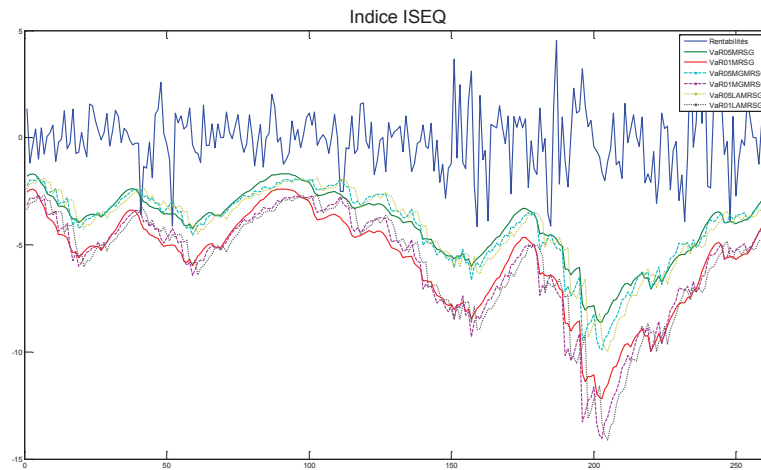
Graphique 84 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice CAC (2007)



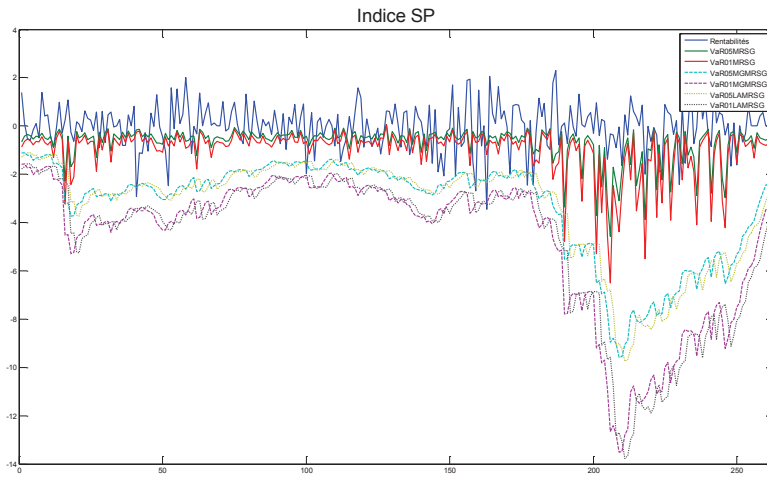
Graphique 85 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice DAX (2007)



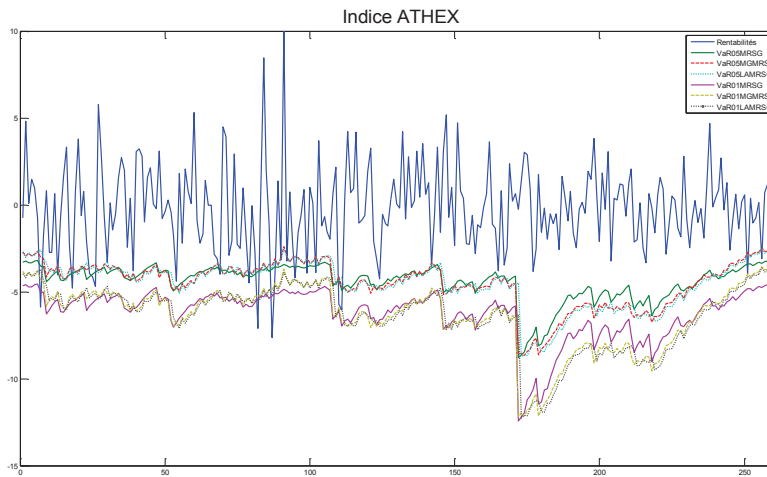
Graphique 86 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSRSG pour l'indice IBEX (2007)



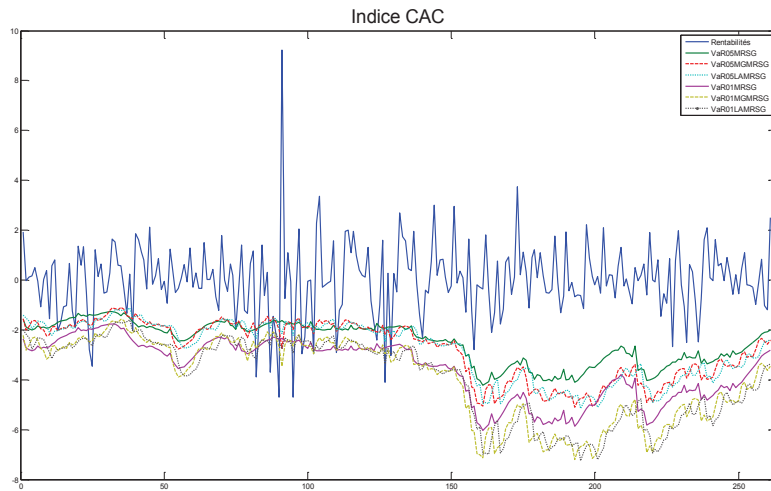
Graphique 87 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSRSG pour l'indice ISEQ (2007)



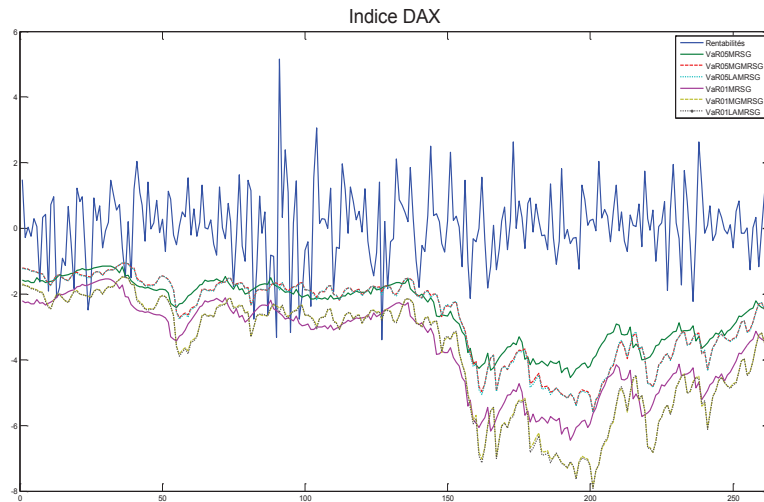
Graphique 88 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice SP (2007)



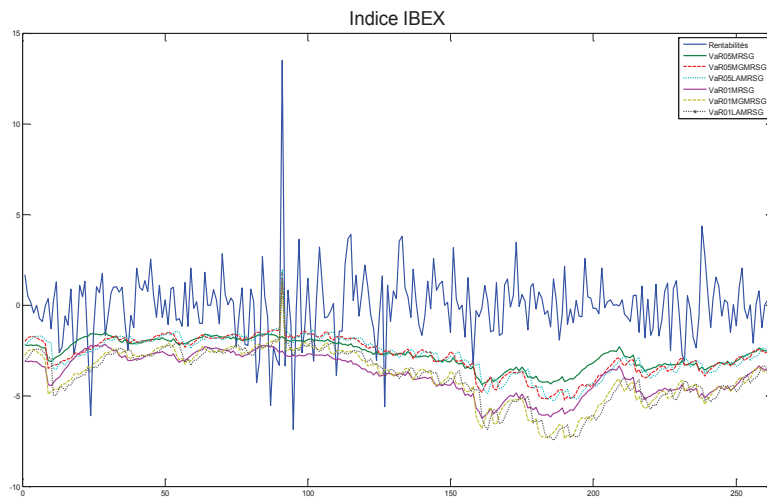
Graphique 89 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice ATHEX (2010)



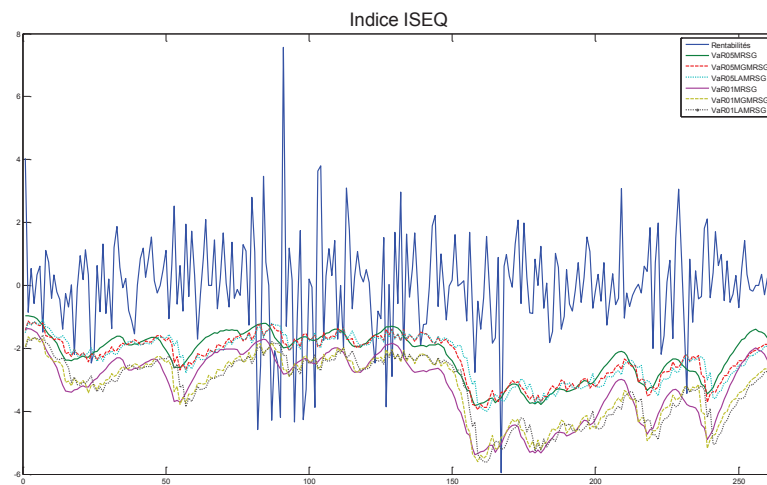
Graphique 90 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice CAC(2010)



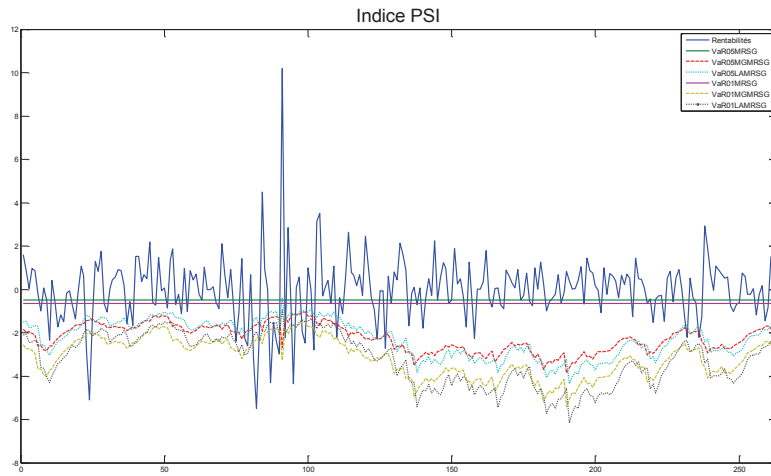
Graphique 91 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSG pour l'indice DAX (2010)



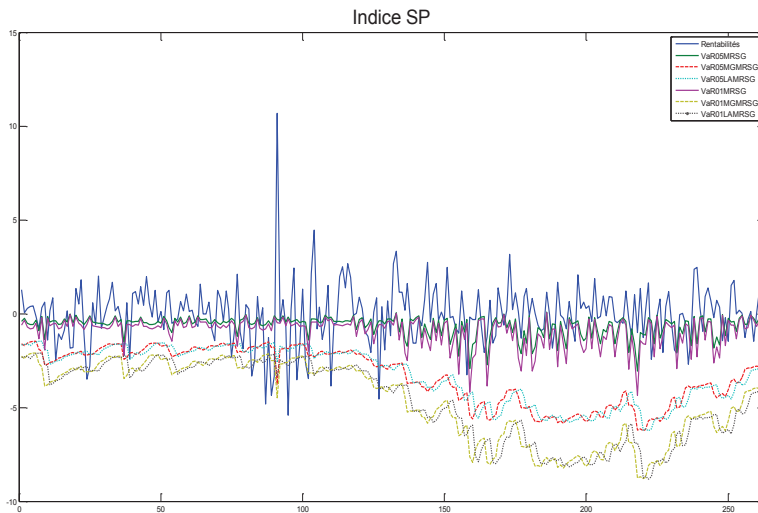
Graphique 92 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRS pour l'indice IBEX (2010)



Graphique 93 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRS pour l'indice ISEQ (2010)



Graphique 94 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSRG pour l'indice PSI (2010)



Graphique 95 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type MRSRG pour l'indice SP (2010)

### C.5.2.1.2 Tests de backtesting

| 2007    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|--------|--------|
|         | DB1  | DB2  | DB3  | DB4  | DB5  | DB6  | DB7  | LR   | DQ1  | DQ2  | DQ3  | DQVaR1 | DQVaR2 | DQVaR3 |
| ARMAG05 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,04 | 0,07 | 0,13 | 0,16 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,17 | 0,27 | 0,03   | 0,00   | 0,00   |
| CAC     | 0,18 | 0,13 | 0,09 | 0,15 | 0,23 | 0,26 | 0,34 | 0,07 | 0,07 | 0,15 | 0,24 | 0,15   | 0,23   | 0,37   |
| DAX     | 0,49 | 0,03 | 0,07 | 0,12 | 0,07 | 0,12 | 0,70 | 0,37 | 0,48 | 0,63 | 0,74 | 0,68   | 0,87   | 0,95   |
| PSI     | 0,82 | 0,21 | 0,18 | 0,27 | 0,34 | 0,48 | 0,84 | 0,53 | 0,69 | 0,74 | 0,81 | 0,75   | 0,88   | 0,69   |
| ISEQ    | 0,50 | 0,41 | 0,07 | 0,07 | 0,53 | 0,62 | 0,66 | 0,38 | 0,30 | 0,08 | 0,06 | 0,46   | 0,09   | 0,12   |
| SP      | 0,24 | 0,12 | 0,16 | 0,12 | 0,21 | 0,32 | 0,42 | 0,24 | 0,20 | 0,10 | 0,08 | 0,34   | 0,17   | 0,12   |
| ARMAG01 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,53 | 0,74 | 0,87 | 0,94 | 0,87 | 0,94 | 0,74 | 0,54 | 0,62 | 0,81 | 0,92 | 0,52   | 0,00   | 0,00   |
| CAC     | 0,95 | 0,09 | 0,16 | 0,25 | 0,16 | 0,18 | 0,99 | 0,04 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| DAX     | 0,95 | 0,84 | 0,93 | 0,97 | 0,72 | 0,84 | 0,01 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,55   | 0,74   | 0,90   |
| IBEX    | 0,18 | 0,04 | 0,08 | 0,13 | 0,09 | 0,16 | 0,09 | 0,16 | 0,08 | 0,15 | 0,22 | 0,11   | 0,13   | 0,28   |
| PSI     | 0,40 | 0,48 | 0,65 | 0,65 | 0,58 | 0,72 | 0,51 | 0,36 | 0,29 | 0,44 | 0,58 | 0,35   | 0,56   | 0,58   |
| ISEQ    | 0,70 | 0,55 | 0,72 | 0,84 | 0,56 | 0,71 | 0,55 | 0,67 | 0,64 | 0,80 | 0,90 | 0,36   | 0,63   | 0,75   |
| SP      | 0,18 | 0,08 | 0,15 | 0,25 | 0,21 | 0,32 | 0,34 | 0,16 | 0,09 | 0,15 | 0,23 | 0,16   | 0,09   | 0,10   |
| LAG05   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,48 | 0,69 | 0,43 | 0,38 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,50 | 0,48 | 0,48 | 0,39 | 0,31   | 0,28   | 0,06   |
| CAC     | 0,49 | 0,69 | 0,83 | 0,24 | 0,83 | 0,86 | 0,16 | 0,52 | 0,49 | 0,70 | 0,58 | 0,56   | 0,00   | 0,00   |
| DAX     | 0,83 | 0,60 | 0,70 | 0,44 | 0,75 | 0,86 | 0,94 | 0,53 | 0,70 | 0,74 | 0,81 | 0,86   | 0,80   | 0,89   |
| IBEX    | 0,79 | 0,18 | 0,28 | 0,31 | 0,29 | 0,42 | 0,79 | 0,33 | 0,47 | 0,36 | 0,40 | 0,58   | 0,44   | 0,64   |
| PSI     | 0,92 | 0,28 | 0,23 | 0,25 | 0,42 | 0,57 | 0,98 | 0,54 | 0,73 | 0,81 | 0,84 | 0,83   | 0,95   | 0,63   |
| LAG01   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,69 | 0,82 | 0,86 | 0,78 | 0,90 | 0,96 | 0,87 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,81   | 0,85   | 0,69   |
| CAC     | 0,70 | 0,62 | 0,78 | 0,88 | 0,83 | 0,91 | 0,87 | 0,67 | 0,64 | 0,81 | 0,90 | 0,61   | 0,00   | 0,00   |
| DAX     | 0,95 | 0,84 | 0,93 | 0,97 | 0,73 | 0,84 | 0,01 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,56   | 0,77   | 0,92   |
| IBEX    | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,04 | 0,06 | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,02   | 0,00   | 0,01   |
| PSI     | 0,07 | 0,10 | 0,10 | 0,12 | 0,12 | 0,20 | 0,15 | 0,06 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,04   | 0,00   | 0,00   |
| MGG05   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,48 | 0,69 | 0,43 | 0,38 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,50 | 0,48 | 0,48 | 0,39 | 0,31   | 0,29   | 0,06   |
| CAC     | 0,09 | 0,13 | 0,00 | 0,01 | 0,20 | 0,00 | 0,14 | 0,08 | 0,05 | 0,00 | 0,00 | 0,07   | 0,00   | 0,00   |
| DAX     | 0,83 | 0,60 | 0,70 | 0,44 | 0,75 | 0,86 | 0,94 | 0,53 | 0,70 | 0,74 | 0,81 | 0,86   | 0,79   | 0,88   |
| IBEX    | 0,79 | 0,18 | 0,28 | 0,31 | 0,29 | 0,42 | 0,79 | 0,33 | 0,47 | 0,36 | 0,40 | 0,58   | 0,45   | 0,64   |
| PSI     | 0,92 | 0,28 | 0,23 | 0,25 | 0,42 | 0,57 | 0,98 | 0,54 | 0,73 | 0,81 | 0,84 | 0,83   | 0,95   | 0,63   |
| MGG01   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,69 | 0,82 | 0,86 | 0,78 | 0,90 | 0,96 | 0,87 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,81   | 0,84   | 0,68   |
| CAC     | 0,07 | 0,06 | 0,04 | 0,08 | 0,11 | 0,15 | 0,13 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| DAX     | 0,95 | 0,84 | 0,93 | 0,97 | 0,73 | 0,84 | 0,01 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,56   | 0,77   | 0,92   |
| IBEX    | 0,07 | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,04 | 0,06 | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,02   | 0,00   | 0,01   |
| PSI     | 0,07 | 0,10 | 0,10 | 0,12 | 0,12 | 0,20 | 0,15 | 0,06 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,04   | 0,00   | 0,00   |

Tableau 89 – Tests DB, LR et DQ pour les VaR prévues de l'année 2007

| 2010    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|--------|--------|
|         | DB1  | DB2  | DB3  | DB4  | DB5  | DB6  | DB7  | LR   | DQ1  | DQ2  | DQ3  | DQVaR1 | DQVaR2 | DQVaR3 |
| ARMAG05 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,09 | 0,15 | 0,24 | 0,33 | 0,04 | 0,07 | 0,01 | 0,08 | 0,14 | 0,26 | 0,39 | 0,08   | 0,00   | 0,00   |
| CAC     | 0,51 | 0,06 | 0,10 | 0,16 | 0,10 | 0,18 | 0,01 | 0,32 | 0,32 | 0,45 | 0,41 | 0,41   | 0,65   | 0,61   |
| DAX     | 0,92 | 0,45 | 0,86 | 0,01 | 0,46 | 0,61 | 0,08 | 0,54 | 0,73 | 0,74 | 0,02 | 0,64   | 0,81   | 0,05   |
| IBEX    | 0,35 | 0,47 | 0,63 | 0,62 | 0,10 | 0,00 | 0,06 | 0,30 | 0,24 | 0,40 | 0,55 | 0,07   | 0,20   | 0,33   |
| PSI     | 0,83 | 0,26 | 0,20 | 0,10 | 0,27 | 0,35 | 0,42 | 0,18 | 0,08 | 0,11 | 0,19 | 0,13   | 0,25   | 0,43   |
| ISEQ    | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | NaN  | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| SP      | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | NaN  | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| ARMAG01 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,07 | 0,16 | 0,27 | 0,39 | 0,27 | 0,39 | 0,16 | NaN  | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| CAC     | 0,08 | 0,16 | 0,28 | 0,40 | 0,28 | 0,40 | 0,16 | NaN  | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| DAX     | 0,95 | 0,94 | 0,97 | 0,99 | 0,96 | 0,99 | 0,99 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,97   | 1,00   | 0,43   |
| IBEX    | 0,39 | 0,44 | 0,61 | 0,74 | 0,65 | 0,78 | 0,53 | 0,36 | 0,28 | 0,44 | 0,57 | 0,43   | 0,56   | 0,50   |
| PSI     | 0,53 | 0,74 | 0,87 | 0,94 | 0,87 | 0,94 | 0,74 | 0,53 | 0,62 | 0,81 | 0,91 | 0,81   | 0,77   | 0,92   |
| ISEQ    | 0,08 | 0,16 | 0,27 | 0,40 | 0,27 | 0,40 | 0,16 | NaN  | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| SP      | 0,08 | 0,16 | 0,27 | 0,40 | 0,27 | 0,40 | 0,16 | NaN  | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| LAG05   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,50 | 0,14 | 0,36 | 0,07 | 0,03 | 0,08 | 0,04 | 0,36 | 0,27 | 0,25 | 0,39 | 0,11   | 0,02   | 0,05   |
| CAC     | 0,77 | 0,91 | 0,45 | 0,41 | 0,18 | 0,00 | 0,07 | 0,81 | 0,80 | 0,66 | 0,47 | 0,40   | 0,54   | 0,47   |
| DAX     | 0,95 | 0,38 | 0,16 | 0,07 | 0,33 | 0,47 | 0,08 | 0,50 | 0,69 | 0,67 | 0,03 | 0,49   | 0,58   | 0,06   |
| IBEX    | 0,35 | 0,23 | 0,36 | 0,27 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,30 | 0,24 | 0,40 | 0,45 | 0,02   | 0,09   | 0,17   |
| PSI     | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,01   | 0,00   |
| LAG01   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,70 | 0,81 | 0,91 | 0,96 | 0,16 | 0,25 | 0,04 | 0,68 | 0,65 | 0,82 | 0,91 | 0,04   | 0,00   | 0,00   |
| CAC     | 0,39 | 0,59 | 0,30 | 0,23 | 0,75 | 0,86 | 0,59 | 0,35 | 0,28 | 0,43 | 0,00 | 0,46   | 0,51   | 0,00   |
| DAX     | 0,95 | 0,94 | 0,97 | 0,99 | 0,96 | 0,99 | 0,99 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,98   | 0,99   | 0,47   |
| IBEX    | 0,39 | 0,44 | 0,61 | 0,74 | 0,64 | 0,77 | 0,56 | 0,36 | 0,28 | 0,44 | 0,57 | 0,41   | 0,58   | 0,69   |
| PSI     | 0,18 | 0,05 | 0,12 | 0,19 | 0,03 | 0,06 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| MGG05   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,40 | 0,14 | 0,21 | 0,32 | 0,07 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| CAC     | 0,77 | 0,91 | 0,45 | 0,41 | 0,18 | 0,00 | 0,08 | 0,81 | 0,80 | 0,66 | 0,47 | 0,43   | 0,54   | 0,41   |
| DAX     | 0,95 | 0,38 | 0,16 | 0,07 | 0,33 | 0,47 | 0,08 | 0,50 | 0,69 | 0,67 | 0,03 | 0,49   | 0,58   | 0,06   |
| IBEX    | 0,35 | 0,23 | 0,36 | 0,27 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,30 | 0,24 | 0,40 | 0,45 | 0,02   | 0,09   | 0,17   |
| PSI     | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,01   | 0,00   |
| MGG01   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX   | 0,50 | 0,14 | 0,36 | 0,07 | 0,03 | 0,08 | 0,04 | 0,36 | 0,27 | 0,25 | 0,39 | 0,11   | 0,02   | 0,06   |
| CAC     | 0,07 | 0,06 | 0,11 | 0,02 | 0,09 | 0,14 | 0,15 | 0,03 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,00   | 0,00   |
| DAX     | 0,95 | 0,94 | 0,97 | 0,99 | 0,96 | 0,99 | 0,99 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,98   | 0,99   | 0,46   |
| IBEX    | 0,39 | 0,44 | 0,61 | 0,74 | 0,64 | 0,77 | 0,56 | 0,36 | 0,28 | 0,44 | 0,57 | 0,41   | 0,57   | 0,67   |
| PSI     | 0,18 | 0,05 | 0,12 | 0,19 | 0,03 | 0,06 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00   | 0,00   | 0,00   |

Tableau 90 – Tests DB, LR et DQ pour les VaR prévues de l'année 2010



| Année 2010 |         |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|------------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 5%         | DB1     | DB2      | DB3      | DB4      | DB5      | DB6      | DB7      | LR       | DQ1      | DQ2      | DQ3      | DQVaR1   | DQVaR2   | DQVaR3   |
|            | MRSG    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| ATHEX      | 0,65    | 0,0349   | 0,0540   | 0,0097   | 8,40E-05 | 4,34E-06 | 0,0026   | 0,1393   | 0,0400   | 0,0334   | 0,0241   | 0,0092   | 0,0101   | 0,0069   |
| CAC        | 0,3597  | 0,0023   | 0,0056   | 0,0064   | 3,42E-07 | 6,35E-07 | 3,68E-06 | 0,0354   | 0,0030   | 0,0085   | 0        | 2,27E-06 | 1,52E-05 | 1,62E-05 |
| DAX        | 0,65    | 0,0114   | 0,0209   | 0,0088   | 1,85E-05 | 2,12E-05 | 2,41E-05 | 0,4319   | 0,3314   | 0,5292   | 0,0047   | 0        | 0        | 0        |
| IBEX       | 0,09    | 3,05E-06 | 1,05E-05 | 1,13E-06 | 1,23E-07 | 4,03E-08 | 5,48E-08 | 0        | 2,98E-06 | 1,17E-05 | 6,72E-11 | 9,93E-11 | 9,62E-10 | 1,86E-12 |
| ISEQ       | 0,09    | 4,75E-05 | 0        | 0        | 8,08E-06 | 1,12E-05 | 8,03E-06 | 0,0068   | 0        | 0        | 9,81E-05 | 6,23E-07 | 3,33E-06 | 7,92E-06 |
| PSI        | 0       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| SP         | 0       | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
|            | MG-MRSG |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| ATHEX      | 0,09    | 0        | 0,0028   | 0,0051   | 6,60E-06 | 3,46E-07 | 2,22E-06 | 0,0248   | 0,0039   | 0,0066   | 0,0021   | 1,96E-06 | 1,19E-05 | 1,17E-05 |
| CAC        | 0,4993  | 0,0050   | 0,0121   | 0,0162   | 3,66E-05 | 0        | 2,31E-05 | 0,1422   | 0,0484   | 0,0844   | 0,0025   | 5,80E-05 | 0        | 0        |
| DAX        | 0,2441  | 0,0023   | 0,0056   | 0,0052   | 6,65E-06 | 1,19E-05 | 1,89E-06 | 0,1114   | 0,0473   | 0,0957   | 0        | 8,53E-06 | 6,84E-05 | 9,77E-06 |
| IBEX       | 0,1565  | 1,61E-05 | 4,81E-05 | 9,12E-06 | 1,16E-06 | 1,92E-06 | 1,12E-06 | 0,0074   | 0        | 0        | 7,44E-10 | 4,38E-09 | 1,97E-09 | 4,74E-13 |
| ISEQ       | 0,0301  | 3,34E-05 | 0        | 0        | 6,20E-06 | 6,44E-07 | 4,72E-06 | 0,0045   | 0        | 0        | 0        | 1,48E-07 | 1,41E-06 | 5,64E-06 |
| PSI        | 0,0548  | 7,63E-08 | 2,88E-07 | 8,98E-08 | 3,82E-08 | 1,13E-08 | 1,85E-06 | 2,82E-05 | 1,03E-10 | 2,32E-10 | 0        | 5,69E-13 | 1,46E-12 | 0        |
| SP         | 0,65    | 0        | 0        | 0        | 1,51E-06 | 5,54E-09 | 1,67E-06 | 0,0035   | 8,65E-06 | 3,46E-05 | 5,13E-07 | 1,71E-07 | 1,65E-06 | 2,62E-07 |
|            | LA-MRSG |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| ATHEX      | 0,0548  | 0        | 0        | 0,0020   | 1,34E-06 | 9,79E-09 | 3,67E-07 | 0,0185   | 0,0032   | 0,0063   | 0,0027   | 1,14E-06 | 1,22E-05 | 1,62E-05 |
| CAC        | 0,2441  | 0,0029   | 0,0069   | 0,0140   | 4,06E-06 | 1,22E-05 | 1,36E-06 | 0,1114   | 0,0473   | 0,0342   | 0,0042   | 2,84E-06 | 2,40E-05 | 5,03E-05 |
| DAX        | 0,2441  | 0,0023   | 0,0056   | 0,0052   | 6,39E-06 | 1,07E-05 | 1,82E-06 | 0,1114   | 0,0473   | 0,0957   | 0        | 8,23E-06 | 6,70E-05 | 8,96E-06 |
| IBEX       | 0,1565  | 2,46E-05 | 7,31E-05 | 1,51E-05 | 2,40E-06 | 5,62E-06 | 2,33E-06 | 0,0074   | 0        | 0        | 7,44E-10 | 6,49E-09 | 6,19E-09 | 1,16E-12 |
| ISEQ       | 0,0301  | 3,34E-05 | 0        | 0        | 9,15E-06 | 7,49E-05 | 1,81E-05 | 0,0045   | 0        | 0        | 0        | 1,92E-07 | 1,77E-06 | 9,28E-06 |
| PSI        | 0,0548  | 1,30E-07 | 4,64E-07 | 2,59E-07 | 1,15E-11 | 4,45E-11 | 6,66E-11 | 2,82E-05 | 1,03E-10 | 2,32E-10 | 2,33E-15 | 2,22E-16 | 0        | 0        |
| SP         | 0,65    | 0        | 0        | 0        | 1,75E-06 | 5,23E-06 | 1,14E-06 | 0,0035   | 8,65E-06 | 3,46E-05 | 5,13E-07 | 1,22E-07 | 1,11E-06 | 2,10E-07 |

Tableau 91 – Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des  $VaR_{95\%}$  de l'année 2010 par les modèles de type MRSG

| Année 2010 |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1%         | DB1      | DB2      | DB3      | DB4      | DB5      | DB6      | DB7      | LR       | DQ1      | DQ2      | DQ3      | DQVaR1   | DQVaR2   | DQVaR3   |
|            | MRS      |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| ATHEX      | 0,9564   | 0,9542   | 0,9971   | 0,9226   | 0,4223   | 0,5429   | 0,2912   | 0,9325   | 0,9462   | 0,9848   | 0,9955   | 0,5589   | 0,8119   | 0,9370   |
| CAC        | 0        | 6,55E-05 | 0        | 0        | 2,48E-06 | 5,76E-07 | 9,66E-07 | 0        | 2,43E-07 | 3,37E-07 | 5,21E-11 | 1,10E-14 | 5,44E-14 | 1,78E-15 |
| DAX        | 0,0242   | 0,0154   | 0,0643   | 0,0279   | 0        | 0        | 0        | 0,0119   | 7,99E-05 | 0        | 8,44E-06 | 4,91E-08 | 1,22E-07 | 1,11E-07 |
| IBEX       | 0        | 2,15E-06 | 6,62E-06 | 1,68E-05 | 7,44E-08 | 2,67E-09 | 1,90E-08 | 9,07E-05 | 1,23E-11 | 1,85E-14 | 0        | 0        | 0        | 0        |
| ISEQ       | 9,62E-05 | 1,15E-06 | 3,58E-06 | 1,74E-06 | 1,05E-05 | 3,03E-05 | 5,68E-06 | 2,65E-05 | 2,96E-12 | 1,30E-11 | 0        | 2,22E-16 | 1,11E-15 | 0        |
| PSI        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| SP         | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
|            | MG-MRS   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| ATHEX      | 0,7021   | 0,7521   | 0,8711   | 0,9173   | 0,0239   | 0,0169   | 0,0177   | 0,6658   | 0,6414   | 0,8037   | 0,8951   | 0,0717   | 0,1632   | 0,2814   |
| CAC        | 0,0071   | 0,0024   | 0,0060   | 0        | 9,09E-06 | 6,41E-06 | 3,33E-05 | 0,0043   | 2,03E-05 | 3,68E-05 | 5,34E-12 | 3,74E-10 | 4,79E-10 | 2,00E-14 |
| DAX        | 0,0071   | 0,0024   | 0,0060   | 0        | 9,09E-06 | 6,41E-06 | 3,33E-05 | 0,0043   | 2,03E-05 | 3,68E-05 | 5,34E-12 | 3,74E-10 | 4,79E-10 | 2,00E-14 |
| IBEX       | 1,90E-05 | 1,95E-09 | 8,24E-09 | 2,08E-08 | 6,28E-11 | 9,76E-11 | 6,20E-11 | 1,43E-07 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| ISEQ       | 1,36E-08 | 1,08E-11 | 4,16E-11 | 1,02E-10 | 9,34E-12 | 2,04E-13 | 4,54E-11 | 1,31E-10 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| PSI        | 1,90E-05 | 2,46E-09 | 1,02E-08 | 1,08E-08 | 2,61E-10 | 5,42E-10 | 1,04E-10 | 1,43E-07 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| SP         | 9,62E-05 | 6,16E-07 | 2,13E-06 | 2,33E-06 | 5,18E-09 | 3,87E-11 | 1,30E-09 | 2,65E-05 | 2,96E-12 | 1,30E-11 | 0        | 0        | 0        | 0        |
|            | LA-MRS   |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| ATHEX      | 0,0719   | 0,0049   | 0,0099   | 0,0234   | 0        | 0        | 0        | 0,0024   | 6,12E-13 | 1,59E-12 | 1,02E-12 | 2,22E-16 | 5,44E-15 | 2,55E-14 |
| CAC        | 1,90E-05 | 5,92E-06 | 1,73E-05 | 4,13E-05 | 2,74E-07 | 7,94E-08 | 7,29E-08 | 1,76E-05 | 3,61E-10 | 1,24E-09 | 5,14E-12 | 0        | 1,11E-16 | 0        |
| DAX        | 0,07     | 0,15     | 0,27     | 0,39     | 0,2724   | 0,3980   | 0,1612   | NaN      | NaN      | NaN      | NaN      | NaN      | NaN      | NaN      |
| IBEX       | 5,85E-07 | 1,86E-10 | 8,19E-10 | 1,70E-09 | 4,16E-12 | 3,06E-12 | 3,65E-12 | 1,43E-08 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| ISEQ       | 0,3988   | 0,0179   | 0,0390   | 0,0729   | 0,0029   | 0,0208   | 0,0038   | 0,0808   | 7,14E-05 | 9,97E-07 | 6,55E-08 | 2,59E-06 | 6,94E-07 | 3,43E-07 |
| PSI        | 9,62E-05 | 9,74E-08 | 3,74E-07 | 1,50E-07 | 1,16E-09 | 4,02E-09 | 1,48E-09 | 4,09E-06 | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| SP         | 9,62E-05 | 6,16E-07 | 2,13E-06 | 2,33E-06 | 5,18E-09 | 3,87E-11 | 1,30E-09 | 2,65E-05 | 2,96E-12 | 1,30E-11 | 0        | 0        | 0        | 0        |

Tableau 92 – Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2010 par les modèles de type MRS

| Année 2007 |          |          |          |          |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 5%         | DB1      | DB2      | DB3      | DB4      | DB5      | DB6      | DB7      | LR         | DQ1        | DQ2        | DQ3        | DQVaR1     | DQVaR2     | DQVaR3     |
|            | MRSG     |          |          |          |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
| ATHEX      | 6,00E-04 | 6,16E-04 | 1,67E-03 | 3,86E-03 | 3,35E-03 | 7,58E-03 | 1,27E-03 | 0,0006218  | 0,00783868 | 0,02129658 | 0,04574687 | 0,02036735 | 0,08030814 | 0,19754326 |
| CAC        | 8,83E-02 | 5,76E-02 | 9,26E-02 | 7,35E-02 | 1,79E-02 | 1,66E-02 | 2,13E-02 | 0,02689801 | 0,03791731 | 0,0784066  | 0,14533325 | 0,05488701 | 0,14028542 | 0,30226243 |
| DAX        | 3,66E-02 | 1,99E-02 | 4,19E-02 | 7,74E-02 | 4,46E-02 | 8,14E-02 | 2,09E-02 | 0,03492508 | 0,07680653 | 0,15943091 | 0,26559982 | 0,11648626 | 0,29458661 | 0,51106747 |
| IBEX       | 1,24E-02 | 2,14E-03 | 5,56E-03 | 1,49E-02 | 1,49E-07 | 6,58E-07 | 1,11E-02 | 0,01223395 | 0,03908477 | 0,08945517 | 0,16308638 | 0,07177759 | 0,21593789 | 0,40920736 |
| ISEQ       | 6,00E-04 | 1,67E-03 | 4,35E-03 | 9,98E-03 | 2,94E-03 | 6,03E-03 | 1,10E-03 | 0,0006218  | 0,00783868 | 0,02129658 | 0,04574687 | 0,02001734 | 0,07818389 | 0,19407345 |
| PSI        | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| SP         | 0,00E+00 | 0        | 0        | 0        | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0        | 0,00E+00   | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
|            | MG-MRSG  |          |          |          |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
| ATHEX      | 1,24E-02 | 2,01E-02 | 1,10E-02 | 1,58E-02 | 2,21E-03 | 3,64E-03 | 2,83E-03 | 0,0122     | 0,0391     | 0,0108     | 0,0245     | 0,0644     | 0,0322     | 0,0888     |
| CAC        | 3,24E-03 | 9,46E-03 | 1,33E-02 | 1,84E-02 | 1,49E-02 | 2,93E-02 | 6,30E-03 | 0,0033     | 0,0183     | 0,0457     | 0,0907     | 0,0427     | 0,1463     | 0,3124     |
| DAX        | 6,52E-04 | 6,83E-04 | 1,85E-03 | 5,23E-03 | 9,49E-04 | 2,35E-03 | 3,79E-04 | 0,0120     | 0,0768     | 0,1594     | 0,2656     | 0,0929     | 0,2536     | 0,4630     |
| IBEX       | 8,83E-02 | 5,85E-02 | 1,13E-01 | 1,88E-01 | 1,09E-02 | 2,30E-02 | 2,07E-02 | 0,0805     | 0,1384     | 0,2584     | 0,3919     | 0,1465     | 0,3393     | 0,5547     |
| ISEQ       | 0,0366   | 0,0170   | 0,0205   | 0,0405   | 1,87E-05 | 2,42E-05 | 0        | 0,0077     | 0,0136     | 0,0306     | 0,0635     | 0,0234     | 0,0768     | 0,1882     |
| PSI        | 0,0124   | 0,0272   | 0,0473   | 0,0577   | 0,0245   | 0,0455   | 0,0112   | 0,0122     | 0,0391     | 0,0895     | 0,1631     | 0,0727     | 0,2187     | 0,4215     |
| SP         | 0,0366   | 0,0642   | 0,1341   | 0,1787   | 0,0428   | 0,0724   | 0,0206   | 0,0349     | 0,0768     | 0,1594     | 0,2656     | 0,1175     | 0,3091     | 0,5115     |
|            | LA-MRSG  |          |          |          |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
| ATHEX      | 0,0124   | 0,0201   | 0,0110   | 0,0158   | 0,0039   | 0,0052   | 0        | 0,0122     | 0,0391     | 0,0108     | 0,0245     | 0,0674     | 0,0351     | 0,0995     |
| CAC        | 0,0124   | 0,0272   | 0,0473   | 0,0577   | 0,0314   | 0,0593   | 0,0160   | 0,0122     | 0,0391     | 0,0895     | 0,1631     | 0,0771     | 0,2295     | 0,4238     |
| DAX        | 0        | 0        | 0        | 0,0052   | 0        | 0,0022   | 0        | 0,0120     | 0,0768     | 0,1594     | 0,2656     | 0,0921     | 0,2522     | 0,4602     |
| IBEX       | 0,0883   | 0,0426   | 0,0847   | 0,1480   | 0,0969   | 0,0262   | 0,0539   | 0,0805     | 0,1384     | 0,2584     | 0,3919     | 0,1783     | 0,3935     | 0,6185     |
| ISEQ       | 0,0366   | 0,0170   | 0,0205   | 0,0405   | 4,88E-05 | 0        | 0,0064   | 0,0077     | 0,0136     | 0,0306     | 0,0635     | 0,0233     | 0,0770     | 0,1888     |
| PSI        | 0,0366   | 0,0643   | 0,1341   | 0,1513   | 0,0128   | 0,0045   | 0,0067   | 0,0349     | 0,0768     | 0,1594     | 0,2656     | 0,0952     | 0,2607     | 0,4710     |
| SP         | 0,0883   | 0,1253   | 0,0931   | 0,1711   | 0,0191   | 0,0077   | 0,0279   | 0,0805     | 0,1384     | 0,0860     | 0,1566     | 0,1601     | 0,1858     | 0,3344     |

Tableau 93 – Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des  $VaR_{95\%}$  de l'année 2007 par les modèles de type MRSG

| Année 2007 |             |             |             |            |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
|------------|-------------|-------------|-------------|------------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1%         | DB1         | DB2         | DB3         | DB4        | DB5      | DB6      | DB7      | LR         | DQ1        | DQ2        | DQ3        | DQVaR1     | DQVaR2     | DQVaR3     |
|            | MRSG        |             |             |            |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
| ATHEX      | 0,65        | 0,03        | 0,05        | 0,009      | 8,40E-05 | 4,34E-06 | 0,002    | 0,13       | 0,03       | 0,03       | 0,02       | 0,009      | 0,01       | 0,006      |
| CAC        | 0,359695386 | 0,002318439 | 0,005574036 | 0,00635183 | 3,42E-07 | 6,35E-07 | 3,68E-06 | 0,03536011 | 0,00304175 | 0,00847434 | 0,00044144 | 2,27E-06   | 1,52E-05   | 1,62E-05   |
| DAX        | 0,650756123 | 0,011358053 | 0,020881445 | 0,00878111 | 1,85E-05 | 2,12E-05 | 2,41E-05 | 0,43193794 | 0,33141192 | 0,52922642 | 0,00471833 | 0,00023401 | 0,00067659 | 0,00017817 |
| IBEX       | 0,095025322 | 3,05E-06    | 1,05E-05    | 1,13E-06   | 1,23E-07 | 4,03E-08 | 5,48E-08 | 0,00135719 | 2,98E-06   | 1,17E-05   | 6,72E-11   | 9,93E-11   | 9,62E-10   | 1,86E-12   |
| ISEQ       | 0,095025322 | 4,75E-05    | 0,000148031 | 0,00032478 | 8,08E-06 | 1,12E-05 | 8,03E-06 | 0,00684384 | 0,00018675 | 0,0001316  | 9,81E-05   | 6,23E-07   | 3,33E-06   | 7,92E-06   |
| PSI        | 0           | 0           | 0           | 0          | 0        | 0        | 0        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| SP         | 0           | 0           | 0           | 0          | 0        | 0        | 0        | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
|            | MG-MRSG     |             |             |            |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
| ATHEX      | 5,27E-01    | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,7981   | 0,8941   | 0,6465   | 5,30E-01   | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,7793     | 0,9411     | 0,9885     |
| CAC        | 0,07        | 0,15        | 0,27        | 0,39       | 0,2703   | 0,3955   | 0,15     | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        |
| DAX        | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,3742   | 0,0134   | 0,2387   | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,7301     | 0,9348     | 0,9882     |
| IBEX       | 0,07        | 0,15        | 0,27        | 0,39       | 0,2702   | 0,3954   | 0,1597   | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        |
| ISEQ       | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,5298   | 0,6737   | 0,3661   | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,7175     | 0,9279     | 0,9863     |
| PSI        | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,83     | 0,92     | 0,69     | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,79       | 0,95       | 0,99       |
| SP         | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,79     | 0,89     | 0,64     | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,78       | 0,96       | 0,99       |
|            | LA-MRSG     |             |             |            |          |          |          |            |            |            |            |            |            |            |
| ATHEX      | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,81     | 0,9      | 0,67     | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,79       | 0,95       | 0,99       |
| CAC        | 0,07        | 0,15        | 0,27        | 0,39       | 0,27     | 0,39     | 0,15     | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        | NaN        |
| DAX        | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,36     | 0,5      | 0,23     | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,73       | 0,93       | 0,98       |
| IBEX       | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,3      | 0,43     | 0,19     | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,69       | 0,92       | 0,98       |
| ISEQ       | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,57     | 0,71     | 0,4      | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,72       | 0,92       | 0,98       |
| PSI        | 0,92        | 0,92        | 0,96        | 0,99       | 0,84     | 0,92     | 0,7      | 0,92       | 0,93       | 0,98       | 0,99       | 0,86       | 0,97       | 0,99       |
| SP         | 0,53        | 0,73        | 0,86        | 0,94       | 0,78     | 0,88     | 0,63     | 0,53       | 0,61       | 0,8        | 0,91       | 0,77       | 0,9541     | 0,98       |

Tableau 94 – Tests DB, LR, et DQ sur les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007 par les modèles de type MRSG

| Année 2007 | 5%   | Tests $J_{CC}$ |      |      |      |      |      | Tests $J_{IND}$ |      |      |      |      |      |
|------------|------|----------------|------|------|------|------|------|-----------------|------|------|------|------|------|
|            |      | Actifs         | FEV  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  | p=5             | p=6  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  |
| ARMAG      |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,02 | 0,01           | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,01            | 0,63 | 0,70 | 0,81 | 0,87 | 0,88 |
| CAC        | 0,02 | 0,01           | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,00            | 0,05 | 0,53 | 0,58 | 0,69 | 0,77 |
| DAX        | 0,03 | 0,33           | 0,16 | 0,17 | 0,23 | 0,27 | 0,31 | 0,11            | 0,23 | 0,19 | 0,18 | 0,19 | 0,22 |
| IBEX       | 0,05 | 0,65           | 0,77 | 0,82 | 0,88 | 0,91 | 0,90 | 0,57            | 0,52 | 0,63 | 0,76 | 0,77 | 0,77 |
| PSI        | 0,04 | 0,77           | 0,28 | 0,16 | 0,21 | 0,23 | 0,22 | 0,31            | 0,12 | 0,09 | 0,10 | 0,14 | 0,17 |
| ISEQ       | 0,07 | 0,26           | 0,29 | 0,31 | 0,30 | 0,30 | 0,31 | 0,81            | 0,57 | 0,33 | 0,27 | 0,29 | 0,37 |
| SP         | 0,07 | 0,09           | 0,15 | 0,18 | 0,21 | 0,24 | 0,26 | 0,86            | 0,86 | 0,52 | 0,45 | 0,54 | 0,62 |
| LAG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,07 | 0,25           | 0,33 | 0,46 | 0,53 | 0,58 | 0,64 | 0,81            | 0,89 | 0,95 | 0,90 | 0,91 | 0,94 |
| CAC        | 0,06 | 0,48           | 0,68 | 0,76 | 0,83 | 0,88 | 0,91 | 0,68            | 0,65 | 0,76 | 0,89 | 0,93 | 0,93 |
| DAX        | 0,04 | 0,72           | 0,59 | 0,65 | 0,71 | 0,78 | 0,82 | 0,27            | 0,40 | 0,42 | 0,48 | 0,59 | 0,67 |
| IBEX       | 0,06 | 0,45           | 0,63 | 0,71 | 0,78 | 0,82 | 0,83 | 0,69            | 0,49 | 0,61 | 0,71 | 0,70 | 0,68 |
| PSI        | 0,05 | 0,90           | 0,87 | 0,57 | 0,53 | 0,60 | 0,57 | 0,33            | 0,53 | 0,32 | 0,28 | 0,35 | 0,40 |
| MGG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,07 | 0,25           | 0,33 | 0,47 | 0,54 | 0,59 | 0,65 | 0,80            | 0,89 | 0,95 | 0,89 | 0,90 | 0,94 |
| CAC        | 0,07 | 0,09           | 0,14 | 0,19 | 0,23 | 0,27 | 0,30 | 0,87            | 0,91 | 0,65 | 0,65 | 0,77 | 0,79 |
| DAX        | 0,04 | 0,72           | 0,60 | 0,65 | 0,71 | 0,78 | 0,83 | 0,29            | 0,41 | 0,43 | 0,49 | 0,59 | 0,68 |
| IBEX       | 0,06 | 0,47           | 0,64 | 0,72 | 0,79 | 0,84 | 0,84 | 0,68            | 0,48 | 0,61 | 0,71 | 0,70 | 0,67 |
| PSI        | 0,05 | 0,90           | 0,87 | 0,57 | 0,53 | 0,60 | 0,57 | 0,33            | 0,52 | 0,32 | 0,28 | 0,34 | 0,40 |

Tableau 95 – P-values du test GMM pour les prévisions de la  $VaR_{95\%}$  de l'année 2007

| Année 2007 | 1%   | Tests $J_{CC}$ |      |      |      |      |      | Tests $J_{IND}$ |      |      |      |      |      |
|------------|------|----------------|------|------|------|------|------|-----------------|------|------|------|------|------|
|            |      | Actifs         | FEV  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  | p=5             | p=6  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  |
| ARMAG      |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,00 | 0,67           | 0,68 | 0,84 | 0,86 | 0,78 | 0,78 | 0,14            | 0,08 | 0,39 | 0,64 | 0,68 | 0,72 |
| CAC        | 0,00 | 0,57           | 0,67 | 0,84 | 0,86 | 0,78 | 0,78 | 0,13            | 0,09 | 0,40 | 0,64 | 0,68 | 0,72 |
| DAX        | 0,01 | 0,31           | 0,53 | 0,77 | 0,83 | 0,86 | 0,91 | 0,58            | 0,83 | 0,86 | 0,89 | 0,94 | 0,96 |
| IBEX       | 0,02 | 0,03           | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,07 | 0,08 | 0,96            | 0,28 | 0,07 | 0,09 | 0,12 | 0,15 |
| PSI        | 0,02 | 0,13           | 0,08 | 0,08 | 0,11 | 0,17 | 0,23 | 0,92            | 0,98 | 0,99 | 0,97 | 0,89 | 0,84 |
| ISEQ       | 0,02 | 0,20           | 0,31 | 0,36 | 0,37 | 0,37 | 0,35 | 0,70            | 0,30 | 0,08 | 0,09 | 0,13 | 0,17 |
| SP         | 0,02 | 0,03           | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,08 | 0,08 | 0,94            | 0,09 | 0,03 | 0,04 | 0,07 | 0,12 |
| LAG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,02 | 0,16           | 0,22 | 0,33 | 0,51 | 0,57 | 0,60 | 0,77            | 0,88 | 0,80 | 0,80 | 0,86 | 0,91 |
| CAC        | 0,01 | 0,48           | 0,42 | 0,49 | 0,53 | 0,43 | 0,41 | 0,54            | 0,34 | 0,22 | 0,21 | 0,21 | 0,23 |
| DAX        | 0,01 | 0,28           | 0,53 | 0,77 | 0,84 | 0,87 | 0,92 | 0,65            | 0,83 | 0,87 | 0,90 | 0,95 | 0,97 |
| IBEX       | 0,03 | 0,01           | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,97            | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 |
| PSI        | 0,03 | 0,01           | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,97            | 0,97 | 0,56 | 0,23 | 0,22 | 0,24 |
| MGG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,02 | 0,22           | 0,22 | 0,33 | 0,51 | 0,57 | 0,59 | 0,80            | 0,88 | 0,80 | 0,80 | 0,86 | 0,91 |
| CAC        | 0,02 | 0,06           | 0,10 | 0,11 | 0,18 | 0,26 | 0,30 | 0,87            | 0,73 | 0,55 | 0,49 | 0,57 | 0,64 |
| DAX        | 0,01 | 0,30           | 0,53 | 0,78 | 0,85 | 0,87 | 0,92 | 0,54            | 0,84 | 0,87 | 0,90 | 0,95 | 0,97 |
| IBEX       | 0,03 | 0,01           | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,97            | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,06 |
| PSI        | 0,03 | 0,02           | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,97            | 0,97 | 0,56 | 0,23 | 0,22 | 0,24 |

Tableau 96 – P-values du test GMM pour les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007

| Année 2010 | 5%   | Tests $J_{CC}$ |      |      |      |      |      | Tests $J_{IND}$ |      |      |      |      |      |
|------------|------|----------------|------|------|------|------|------|-----------------|------|------|------|------|------|
|            |      | Actifs         | FEV  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  | p=5             | p=6  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  |
| ARMAG      |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,02 | 0,03           | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,02            | 0,39 | 0,32 | 0,32 | 0,40 | 0,47 |
| CAC        | 0,03 | 0,34           | 0,19 | 0,13 | 0,17 | 0,21 | 0,25 | 0,09            | 0,47 | 0,31 | 0,24 | 0,24 | 0,29 |
| DAX        | 0,05 | 0,98           | 0,98 | 0,73 | 0,54 | 0,51 | 0,56 | 0,42            | 0,79 | 0,48 | 0,32 | 0,28 | 0,32 |
| IBEX       | 0,05 | 0,65           | 0,77 | 0,82 | 0,88 | 0,91 | 0,90 | 0,57            | 0,52 | 0,63 | 0,76 | 0,77 | 0,77 |
| PSI        | 0,04 | 0,87           | 0,94 | 0,81 | 0,51 | 0,39 | 0,39 | 0,27            | 0,87 | 0,77 | 0,48 | 0,32 | 0,27 |
| ISEQ       | 0,04 | 0,75           | 0,87 | 0,89 | 0,76 | 0,67 | 0,69 | 0,31            | 0,70 | 0,85 | 0,78 | 0,66 | 0,61 |
| SP         | 0,07 | 0,14           | 0,23 | 0,32 | 0,36 | 0,35 | 0,31 | 0,81            | 0,91 | 0,69 | 0,36 | 0,23 | 0,22 |
| LAG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,06 | 0,27           | 0,45 | 0,56 | 0,56 | 0,54 | 0,56 | 0,71            | 0,96 | 0,63 | 0,47 | 0,48 | 0,57 |
| CAC        | 0,05 | 0,77           | 0,84 | 0,50 | 0,31 | 0,28 | 0,31 | 0,52            | 0,51 | 0,22 | 0,13 | 0,12 | 0,14 |
| DAX        | 0,05 | 0,85           | 0,85 | 0,52 | 0,32 | 0,28 | 0,31 | 0,43            | 0,53 | 0,23 | 0,13 | 0,12 | 0,14 |
| IBEX       | 0,07 | 0,12           | 0,18 | 0,18 | 0,13 | 0,10 | 0,08 | 0,82            | 0,43 | 0,11 | 0,04 | 0,03 | 0,03 |
| PSI        | 0,08 | 0,04           | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,90            | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| MGG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |
| ATHEX      | 0,06 | 0,29           | 0,45 | 0,56 | 0,57 | 0,55 | 0,57 | 0,71            | 0,96 | 0,65 | 0,48 | 0,49 | 0,58 |
| CAC        | 0,05 | 0,77           | 0,84 | 0,51 | 0,32 | 0,29 | 0,32 | 0,50            | 0,51 | 0,23 | 0,13 | 0,12 | 0,15 |
| DAX        | 0,05 | 0,87           | 0,85 | 0,51 | 0,32 | 0,28 | 0,31 | 0,43            | 0,52 | 0,23 | 0,13 | 0,12 | 0,14 |
| IBEX       | 0,07 | 0,12           | 0,18 | 0,17 | 0,13 | 0,10 | 0,08 | 0,82            | 0,43 | 0,11 | 0,04 | 0,03 | 0,04 |
| PSI        | 0,08 | 0,03           | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,90            | 0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,01 | 0,01 |

Tableau 97 – P-values du test GMM pour les prévisions de la  $VaR_{95\%}$  de l'année 2010

| Année 2010 | 1%   | Tests $J_{CC}$ |      |      |      |      |      | Tests $J_{IND}$ |      |      |      |      |      |     |
|------------|------|----------------|------|------|------|------|------|-----------------|------|------|------|------|------|-----|
|            |      | Actifs         | FEV  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  | p=5             | p=6  | p=1  | p=2  | p=3  | p=4  | p=5 |
| ARMAG      |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |     |
| ATHEX      | 0,00 | 1              | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1               | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1   |
| CAC        | 0,00 | 1              | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1               | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1   |
| DAX        | 0,01 | 0,38           | 0,57 | 0,73 | 0,79 | 0,83 | 0,87 | 0,70            | 0,79 | 0,82 | 0,80 | 0,86 | 0,90 |     |
| IBEX       | 0,02 | 0,08           | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,91            | 0,96 | 0,85 | 0,68 | 0,57 | 0,60 |     |
| PSI        | 0,00 | 0,70           | 0,78 | 0,86 | 0,61 | 0,46 | 0,43 | 0,10            | 0,06 | 0,31 | 0,59 | 0,68 | 0,72 |     |
| ISEQ       | 0,01 | 0,40           | 0,51 | 0,51 | 0,39 | 0,31 | 0,19 | 0,66            | 0,35 | 0,10 | 0,08 | 0,07 | 0,08 |     |
| SP         | 0,03 | 0,01           | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,02 | 0,97            | 0,99 | 1    | 0,99 | 0,99 | 0,99 |     |
| LAG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |     |
| ATHEX      | 0,01 | 0,51           | 0,44 | 0,64 | 0,69 | 0,65 | 0,54 | 0,59            | 0,77 | 0,79 | 0,59 | 0,38 | 0,29 |     |
| CAC        | 0,02 | 0,10           | 0,09 | 0,09 | 0,14 | 0,22 | 0,28 | 0,89            | 0,95 | 0,95 | 0,97 | 0,83 | 0,61 |     |
| DAX        | 0,01 | 0,46           | 0,57 | 0,75 | 0,80 | 0,84 | 0,88 | 0,70            | 0,79 | 0,82 | 0,81 | 0,86 | 0,91 |     |
| IBEX       | 0,02 | 0,12           | 0,06 | 0,07 | 0,07 | 0,11 | 0,14 | 0,89            | 0,96 | 0,85 | 0,69 | 0,58 | 0,61 |     |
| PSI        | 0,02 | 0,04           | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,94            | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,11 |     |
| MGG        |      |                |      |      |      |      |      |                 |      |      |      |      |      |     |
| ATHEX      | 0,01 | 0,41           | 0,44 | 0,62 | 0,67 | 0,63 | 0,50 | 0,65            | 0,75 | 0,74 | 0,50 | 0,31 | 0,23 |     |
| CAC        | 0,03 | 0,02           | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,02 | 0,96            | 0,99 | 0,96 | 0,70 | 0,46 | 0,39 |     |
| DAX        | 0,01 | 0,40           | 0,57 | 0,73 | 0,78 | 0,83 | 0,87 | 0,70            | 0,80 | 0,82 | 0,80 | 0,86 | 0,90 |     |
| IBEX       | 0,02 | 0,10           | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,11 | 0,14 | 0,92            | 0,96 | 0,85 | 0,68 | 0,57 | 0,61 |     |
| PSI        | 0,02 | 0,03           | 0,02 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,93            | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,11 |     |

Tableau 98 – P-values du test GMM pour les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  de l'année 2010

| 2010   | 5%     | FEV    | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|        |        |        | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MRSG   |        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX  | 0,0613 | 0,2875 | 0,0062         | 0,0074 | 0,0101 | 0,0107 | 0,0093 | 0,7662 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| CAC    | 0,0690 | 0,1312 | 0,0077         | 0,0081 | 0,0112 | 0,0119 | 0,0114 | 0,8179 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| DAX    | 0,0613 | 0,2535 | 0,0073         | 0,0079 | 0,0109 | 0,0121 | 0,0103 | 0,6978 | 0,0001          | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |
| IBEX   | 0,0805 | 0,0352 | 0,0051         | 0,0052 | 0,0076 | 0,0073 | 0,007  | 0,8845 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| ISEQ   | 0,0805 | 0,0331 | 0,0267         | 0,0155 | 0,0139 | 0,0121 | 0,0127 | 0,8826 | 0,0014          | 0,0006 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0014 | 0,0014 |
| PSI    | 0,3333 | 0,0001 | 0,0005         | 0,001  | 0,001  | 0,001  | 0,0013 | 0,9018 | 0,9804          | 0,5137 | 0,2683 | 0,1985 | 0,1882 | 0,1882 |
| SP     | 0,3180 | 0,0001 | 0,0006         | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,9074 | 0,0842          | 0,2486 | 0,2907 | 0,3014 | 0,3678 | 0,3678 |
| MGMRSG |        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX  | 0,0805 | 0,0467 | 0,0121         | 0,0099 | 0,0119 | 0,0123 | 0,0131 | 0,8882 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| CAC    | 0,0651 | 0,2454 | 0,0075         | 0,0082 | 0,0107 | 0,0117 | 0,0113 | 0,7662 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| DAX    | 0,0728 | 0,1025 | 0,006          | 0,0063 | 0,0094 | 0,0103 | 0,0091 | 0,8515 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| IBEX   | 0,0766 | 0,0923 | 0,015          | 0,0121 | 0,0142 | 0,0155 | 0,0157 | 0,8766 | 0,0001          | 0,0003 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 |
| ISEQ   | 0,0881 | 0,0289 | 0,0173         | 0,0117 | 0,0121 | 0,0105 | 0,0116 | 0,9023 | 0,0016          | 0,0008 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0019 | 0,0019 |
| PSI    | 0,0843 | 0,0312 | 0,0084         | 0,0056 | 0,0069 | 0,0066 | 0,0075 | 0,8991 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| SP     | 0,0613 | 0,2565 | 0,0068         | 0,0079 | 0,0105 | 0,0107 | 0,0086 | 0,6993 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| LAMRSG |        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX  | 0,0843 | 0,0316 | 0,0105         | 0,008  | 0,0108 | 0,0116 | 0,0121 | 0,9001 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| CAC    | 0,0728 | 0,0996 | 0,0081         | 0,0089 | 0,0115 | 0,0121 | 0,0118 | 0,8466 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| DAX    | 0,0728 | 0,103  | 0,0068         | 0,0075 | 0,0107 | 0,011  | 0,0103 | 0,8438 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| IBEX   | 0,0766 | 0,0808 | 0,043          | 0,0299 | 0,0252 | 0,0233 | 0,0227 | 0,8882 | 0,0047          | 0,003  | 0,0044 | 0,0054 | 0,0044 | 0,0044 |
| ISEQ   | 0,0881 | 0,028  | 0,017          | 0,0103 | 0,0102 | 0,009  | 0,0099 | 0,8926 | 0,0013          | 0,0009 | 0,0014 | 0,0015 | 0,0017 | 0,0017 |
| PSI    | 0,0843 | 0,0267 | 0,009          | 0,007  | 0,0089 | 0,0086 | 0,009  | 0,8958 | 0,0001          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| SP     | 0,0613 | 0,2746 | 0,0073         | 0,0081 | 0,011  | 0,0118 | 0,0096 | 0,6966 | 0,0001          | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |

Tableau 99 – P-values du test GMM sur les prévisions des  $VaR_{95\%}$  de l'année 2010 (Modèles de type MRS-G)

| 2010     |        | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|----------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1%       | FEV    | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MRS-G    |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,0115 | 0,3594         | 0,4332 | 0,5783 | 0,6073 | 0,5213 | 0,3964 | 0,6488          | 0,7213 | 0,6393 | 0,317  | 0,2193 | 0,1558 |
| CAC      | 0,0421 | 0,0003         | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9775          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0004 |
| DAX      | 0,0307 | 0,0038         | 0,0016 | 0,0016 | 0,0008 | 0,0006 | 0,0008 | 0,9773          | 0,0022 | 0,0026 | 0,0046 | 0,0105 | 0,0186 |
| IBEX     | 0,0421 | 0,0002         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9803          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |
| ISEQ     | 0,0460 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9799          | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| PSI      | 0,2605 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9786          | 0,9961 | 0,1013 | 0,0668 | 0,1042 | 0,1616 |
| SP       | 0,2490 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9773          | 0,002  | 0,0028 | 0,0078 | 0,0213 | 0,0333 |
| MG-MRS-G |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,0153 | 0,1782         | 0,1471 | 0,2016 | 0,1938 | 0,1228 | 0,1058 | 0,835           | 0,3541 | 0,1053 | 0,0662 | 0,0452 | 0,0392 |
| CAC      | 0,0345 | 0,0016         | 0,0006 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0003 | 0,9763          | 0,0006 | 0,0008 | 0,0015 | 0,0038 | 0,0068 |
| DAX      | 0,0268 | 0,0099         | 0,0081 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0055 | 0,0063 | 0,9692          | 0,0142 | 0,0212 | 0,0632 | 0,137  | 0,1739 |
| IBEX     | 0,0498 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9781          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| ISEQ     | 0,0651 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9791          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| PSI      | 0,0498 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9767          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| SP       | 0,0421 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,979           | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 |
| LAMRS-G  |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,0153 | 0,1795         | 0,155  | 0,2316 | 0,304  | 0,3475 | 0,3399 | 0,7139          | 0,8836 | 0,6665 | 0,3084 | 0,2394 | 0,2082 |
| CAC      | 0,0460 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9818          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| DAX      | 0,0268 | 0,0094         | 0,0068 | 0,0055 | 0,0052 | 0,0044 | 0,0049 | 0,9671          | 0,0148 | 0,0223 | 0,0625 | 0,1364 | 0,1725 |
| IBEX     | 0,0575 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9783          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| ISEQ     | 0,0651 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9766          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| PSI      | 0,0498 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9786          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| SP       | 0,0460 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9802          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |

Tableau 100 – P-values du test GMM sur les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2010 (Modèles de type MRS-G)

| 2007     |        | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|----------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 5%       | FEV    | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MRS-G    |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,0077 | 0,0002         | 0,0018 | 0,0031 | 0,0031 | 0,0031 | 0,0036 | 0,0003          | 0,4579 | 0,4724 | 0,3891 | 0,3495 | 0,348  |
| CAC      | 0,0230 | 0,028          | 0,0148 | 0,0126 | 0,0166 | 0,0152 | 0,0162 | 0,0225          | 0,6835 | 0,5411 | 0,3351 | 0,2166 | 0,18   |
| DAX      | 0,0192 | 0,009          | 0,0256 | 0,0267 | 0,0332 | 0,0389 | 0,0354 | 0,0053          | 0,418  | 0,3474 | 0,3174 | 0,342  | 0,4106 |
| IBEX     | 0,0153 | 0,0023         | 0,0131 | 0,0148 | 0,0193 | 0,0233 | 0,0262 | 0,0035          | 0,3954 | 0,2765 | 0,1932 | 0,1607 | 0,1521 |
| ISEQ     | 0,0077 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002          | 0,4318 | 0,5842 | 0,6352 | 0,6384 | 0,6155 |
| PSI      | 0,2184 | 0,0001         | 0,0019 | 0,0028 | 0,003  | 0,0031 | 0,0033 | 0,9028          | 0,0495 | 0,014  | 0,0123 | 0,0195 | 0,0241 |
| SP       | 0,2299 | 0,0001         | 0,0023 | 0,0026 | 0,0026 | 0,0027 | 0,003  | 0,9093          | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| MG-MRS-G |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,0153 | 0,0022         | 0,0034 | 0,0048 | 0,0051 | 0,0048 | 0,0063 | 0,0028          | 0,6421 | 0,7528 | 0,6795 | 0,496  | 0,3503 |
| CAC      | 0,0115 | 0,0006         | 0,0027 | 0,0032 | 0,0035 | 0,0033 | 0,0041 | 0,0006          | 0,5352 | 0,6072 | 0,7067 | 0,8147 | 0,8433 |
| DAX      | 0,0192 | 0,007          | 0,0252 | 0,0192 | 0,02   | 0,0233 | 0,0235 | 0,0036          | 0,4721 | 0,447  | 0,4835 | 0,5978 | 0,6797 |
| IBEX     | 0,0230 | 0,0285         | 0,0464 | 0,0609 | 0,0734 | 0,0917 | 0,1082 | 0,0206          | 0,4155 | 0,3621 | 0,3462 | 0,3936 | 0,4802 |
| ISEQ     | 0,0192 | 0,005          | 0,0058 | 0,0068 | 0,0073 | 0,0075 | 0,0072 | 0,0036          | 0,629  | 0,6074 | 0,5316 | 0,5264 | 0,5692 |
| PSI      | 0,0153 | 0,0015         | 0,0046 | 0,0051 | 0,0065 | 0,0056 | 0,0067 | 0,0023          | 0,6062 | 0,7265 | 0,8651 | 0,8727 | 0,8294 |
| SP       | 0,0192 | 0,0081         | 0,0258 | 0,018  | 0,0193 | 0,0228 | 0,0245 | 0,0072          | 0,4593 | 0,4352 | 0,4613 | 0,5684 | 0,6532 |
| LAMRS-G  |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,0153 | 0,0033         | 0,0029 | 0,0042 | 0,0044 | 0,0042 | 0,005  | 0,004           | 0,6391 | 0,7472 | 0,6754 | 0,5032 | 0,3409 |
| CAC      | 0,0153 | 0,0029         | 0,0045 | 0,0049 | 0,006  | 0,0057 | 0,0068 | 0,0018          | 0,617  | 0,7348 | 0,8711 | 0,8786 | 0,8321 |
| DAX      | 0,0192 | 0,0101         | 0,027  | 0,0205 | 0,0217 | 0,0258 | 0,0263 | 0,0039          | 0,4713 | 0,4437 | 0,479  | 0,5972 | 0,6703 |
| IBEX     | 0,0230 | 0,0227         | 0,0434 | 0,0599 | 0,0815 | 0,1033 | 0,1188 | 0,0163          | 0,391  | 0,3223 | 0,2931 | 0,3112 | 0,3638 |
| ISEQ     | 0,0192 | 0,0037         | 0,0049 | 0,0054 | 0,0059 | 0,0062 | 0,0057 | 0,0023          | 0,6301 | 0,5994 | 0,5279 | 0,5216 | 0,565  |
| PSI      | 0,0192 | 0,0076         | 0,025  | 0,0191 | 0,0212 | 0,0261 | 0,0266 | 0,0045          | 0,4672 | 0,4391 | 0,4613 | 0,5669 | 0,651  |
| SP       | 0,0230 | 0,0211         | 0,0529 | 0,0296 | 0,0257 | 0,0285 | 0,0307 | 0,0188          | 0,5776 | 0,6686 | 0,8095 | 0,7476 | 0,5667 |

Tableau 101 – P-values du test GMM sur les prévisions de la  $VaR_{95\%}$  de l'année 2007 (Modèles de type MRS-G)



| 2007  |            | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|-------|------------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1%    | FEV        | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MRSG  |            |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| CAC   | 0,00766284 | 0,9015         | 0,9188 | 0,9367 | 0,9565 | 0,9525 | 0,8516 | 0,4361          | 0,6112 | 0,7685 | 0,8141 | 0,868  | 0,884  |
| DAX   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| IBEX  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| ISEQ  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| PSI   | 0,16091954 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9783          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0003 |
| SP    | 0,19157088 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9811          | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| MGMRS |            |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,00383142 | 0,5517         | 0,6777 | 0,8397 | 0,8552 | 0,7785 | 0,7781 | 0,1608          | 0,0896 | 0,3943 | 0,6315 | 0,6717 | 0,7144 |
| CAC   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| DAX   | 0,00383142 | 0,6668         | 0,2774 | 0,1732 | 0,1368 | 0,2077 | 0,2611 | 0,1164          | 0,2087 | 0,3891 | 0,3781 | 0,339  | 0,2921 |
| IBEX  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| ISEQ  | 0,00383142 | 0,5597         | 0,6703 | 0,8375 | 0,8597 | 0,7816 | 0,7769 | 0,0575          | 0,0863 | 0,3965 | 0,6372 | 0,6759 | 0,7213 |
| PSI   | 0,00383142 | 0,6813         | 0,3363 | 0,1956 | 0,227  | 0,31   | 0,3602 | 0,1261          | 0,1875 | 0,4429 | 0,425  | 0,3902 | 0,3485 |
| SP    | 0,00383142 | 0,6039         | 0,3381 | 0,1941 | 0,2275 | 0,306  | 0,3546 | 0,1005          | 0,188  | 0,4328 | 0,4199 | 0,3854 | 0,3462 |
| LAMRS |            |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,00383142 | 0,6595         | 0,6742 | 0,8367 | 0,8625 | 0,781  | 0,7792 | 0,1548          | 0,0957 | 0,4006 | 0,6373 | 0,6715 | 0,7168 |
| CAC   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| DAX   | 0,00383142 | 0,5628         | 0,2656 | 0,1623 | 0,1317 | 0,2025 | 0,256  | 0,1418          | 0,2116 | 0,3982 | 0,3819 | 0,3415 | 0,2927 |
| IBEX  | 0,00383142 | 0,6026         | 0,2893 | 0,1739 | 0,1351 | 0,2059 | 0,2612 | 0,1665          | 0,2066 | 0,3976 | 0,3819 | 0,3408 | 0,2938 |
| ISEQ  | 0,00383142 | 0,6832         | 0,6736 | 0,8397 | 0,8606 | 0,7832 | 0,779  | 0,2018          | 0,0886 | 0,3896 | 0,6402 | 0,6773 | 0,7222 |
| PSI   | 0,00766284 | 0,9654         | 0,9038 | 0,9127 | 0,9263 | 0,95   | 0,9645 | 0,3592          | 0,6301 | 0,7167 | 0,7424 | 0,7772 | 0,831  |
| SP    | 0,00383142 | 0,6453         | 0,3333 | 0,1963 | 0,2303 | 0,2997 | 0,3476 | 0,0552          | 0,1858 | 0,4257 | 0,4149 | 0,3771 | 0,3292 |

Tableau 102 – P-values du test GMM sur les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007 (Modèles de type MRS-G)

| Actifs | Statistique LR <sub>MUC</sub> |        | Couleur du risk map |              |                     |              |
|--------|-------------------------------|--------|---------------------|--------------|---------------------|--------------|
|        | Taux de couverture            | 5%     | 1%                  | Exception 5% | super' exception 1% | Exception 1% |
| LAG    |                               |        |                     |              |                     |              |
| ATHEX  | 1,4432                        | 1,5861 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| CAC    | 2,794                         | 0,5387 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| DAX    | 0,3642                        | 0,3516 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| IBEX   | 1,7711                        | 5,2962 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| PSI    | 0,1647                        | 5,5874 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| MGG    |                               |        |                     |              |                     |              |
| ATHEX  | 1,4432                        | 1,5861 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| CAC    | 6,6802                        | 2,857  | ORANGE              | ORANGE       | VERT                | VERT         |
| DAX    | 0,3642                        | 0,3516 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| IBEX   | 1,7711                        | 5,2962 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| PSI    | 0,1647                        | 5,5874 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| ARMAG  |                               |        |                     |              |                     |              |
| ATHEX  | 6,1584                        | 0,2372 | ORANGE              | ORANGE       | VERT                | VERT         |
| CAC    | 5,6439                        | 0,3447 | ORANGE              | ORANGE       | VERT                | VERT         |
| DAX    | 1,4724                        | 0,3516 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| IBEX   | 0,6659                        | 3,3237 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| PSI    | 0,2086                        | 1,9465 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| ISEQ   | 1,7204                        | 0,8199 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| SP     | 4,5592                        | 3,5676 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |

Tableau 103 – Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2007

| Actifs | Statistique $LR_{MUC}$ |        | Couleur du risk map |              |                     |              |
|--------|------------------------|--------|---------------------|--------------|---------------------|--------------|
|        | Taux de couverture     | 5%     | 1%                  | Exception 5% | super' exception 1% | Exception 1% |
| LAG    |                        |        |                     |              |                     |              |
| ATHEX  | 0,4088                 | 0,5386 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| CAC    | 0,7685                 | 1,7617 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| DAX    | 1,5234                 | 0,0592 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| IBEX   | 2,4429                 | 1,7617 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| PSI    | 5,5791                 | 3,3237 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| MGG    |                        |        |                     |              |                     |              |
| ATHEX  | 0,4088                 | 0,5386 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| CAC    | 0,7685                 | 5,2962 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| DAX    | 1,5234                 | 0,0592 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| IBEX   | 2,4429                 | 1,7617 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| PSI    | 5,5791                 | 3,3237 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| ARMAG  |                        |        |                     |              |                     |              |
| ATHEX  | 4,4744                 | 1,5977 | ORANGE              | ORANGE       |                     |              |
| CAC    | 1,4451                 | NaN    | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| DAX    | 1,327                  | 0,0592 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| IBEX   | 1,8712                 | 1,7617 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| PSI    | 0,341                  | 1,2989 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| ISEQ   | 0,2086                 | 2,9222 | VERT                | VERT         | VERT                | VERT         |
| SP     | 3,8181                 | 5,4112 | VERT                | VERT         | ORANGE              | ORANGE       |

Tableau 104 – Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2010

|       | 5%         |            |            |
|-------|------------|------------|------------|
|       | MRS-G      | MGMRS-G    | LAMRS-G    |
| ATHEX | 0,58731044 | 0,07555633 | 0,03017182 |
| CAC   | 0,02621789 | 0,1775973  | 0,11389536 |
| DAX   | 0,55762055 | 0,17563186 | 0,17563186 |
| IBEX  | 0,00188138 | 1,70E-05   | 1,70E-05   |
| ISEQ  | 0,00050397 | 2,21E-05   | 2,21E-05   |
| PSI   | 0          | 0,00011017 | 0,00011017 |
| SP    | 0          | 0,00574464 | 0,00016293 |
|       | 1%         |            |            |
| ATHEX | 0,23197563 | 0,04856817 | 0,04856817 |
| CAC   | 7,16E-05   | 0,00436961 | 8,48E-05   |
| DAX   | 0,01885679 | 0,02000751 | 0,02000751 |
| IBEX  | 0,0001937  | 5,08E-07   | 1,98E-09   |
| ISEQ  | 1,64E-09   | 1,53E-10   | 1,87E-09   |
| PSI   | 0          | 9,56E-08   | 1,25E-09   |
| SP    | 0          | 5,11E-05   | 1,84E-05   |

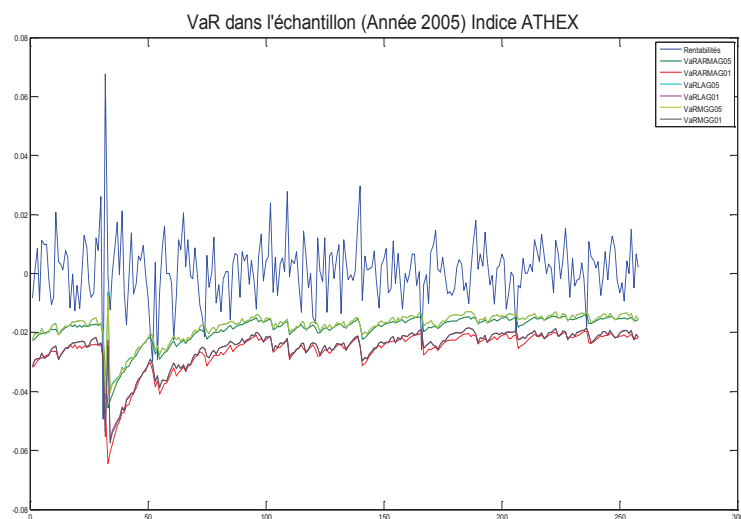
Tableau 105 – P-values du test Risk map pour les VaR de l'année 2010 prévues par les modèles de type MRS-G

|       | 5%         |            |            |
|-------|------------|------------|------------|
|       | MRS-G      | MGMRS-G    | LAMRS-G    |
| ATHEX | 0,00041631 | 0,00699725 | 0,00699725 |
| CAC   | 0,121683   | 0,00195449 | 0,00699725 |
| DAX   | 0,0202806  | 0,0202806  | 0,0202806  |
| IBEX  | 0,00699725 | 0,04948223 | 0,13663263 |
| ISEQ  | 0,00041631 | 0,0202806  | 0,00041631 |
| PSI   | 0          | 0,02629276 | 4,80E-06   |
| SP    | 0          | 0,0202806  | 0,00298453 |
|       | 1%         |            |            |
| ATHEX | 0,04322949 | 0,30708281 | 0,30708281 |
| CAC   | 0,76786548 | 0,04322949 | 0,04322949 |
| DAX   | 0,04322949 | 0,30708281 | 0,30708281 |
| IBEX  | 0,04322949 | 0,04322949 | 0,30708281 |
| ISEQ  | 0,04322949 | 0,30708281 | 0,30708281 |
| PSI   | 0          | 0,5569269  | 0,76786548 |
| SP    | 0          | 0,30708281 | 0,30708281 |

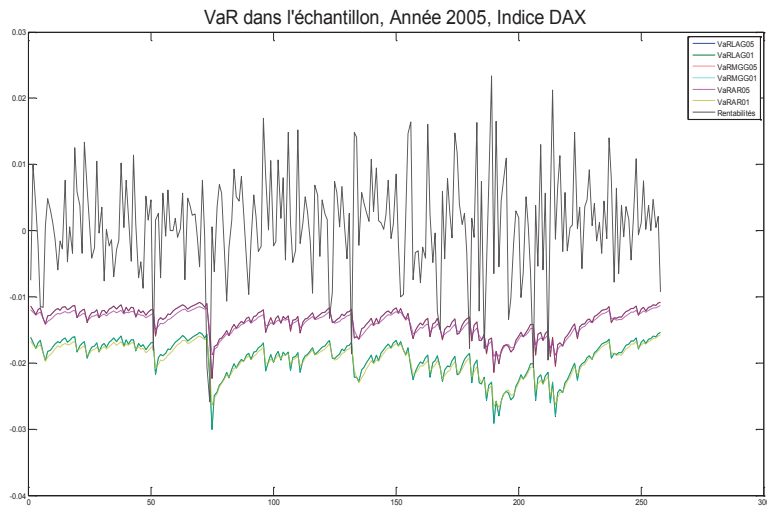
Tableau 106 – P-values du test Risk map pour les VaR de l'année 2007 prévues par les modèles de type MRS-G

## C.5.2.2 SOUS-PÉRIODES [2004-2006] & [2007-2009]

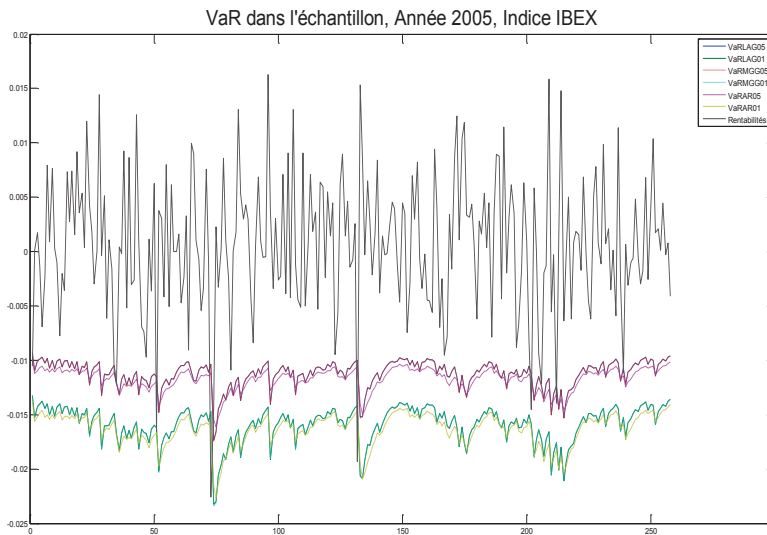
### C.5.2.2.1 Représentations graphiques



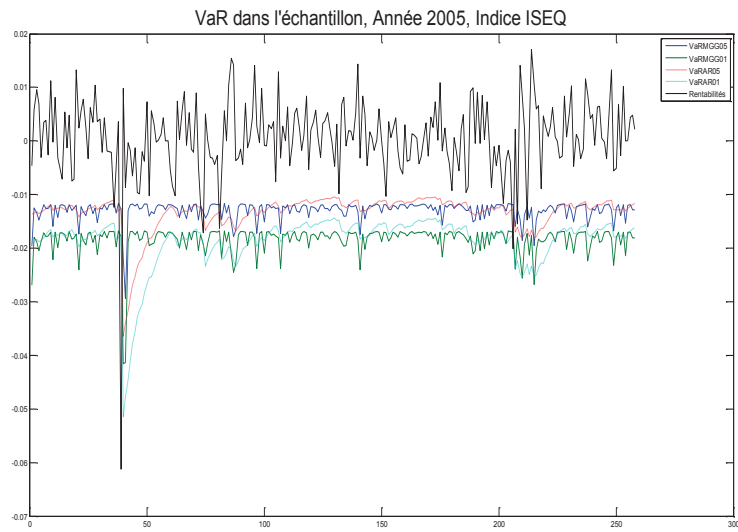
Graphique 96 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (ATHEX)



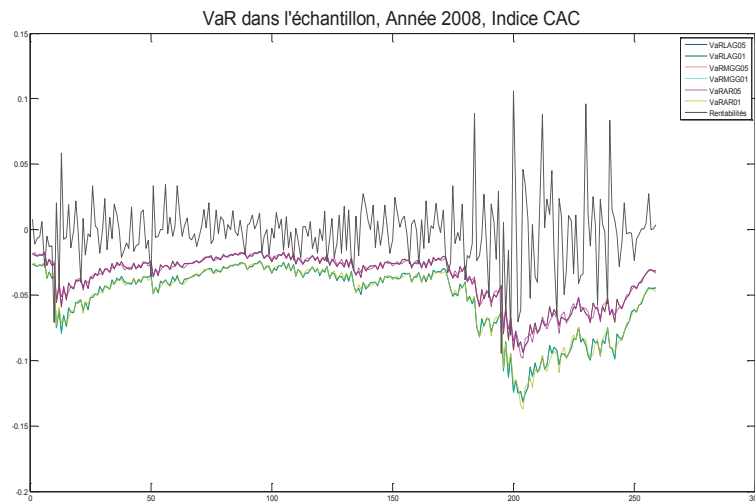
Graphique 97 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (DAX)



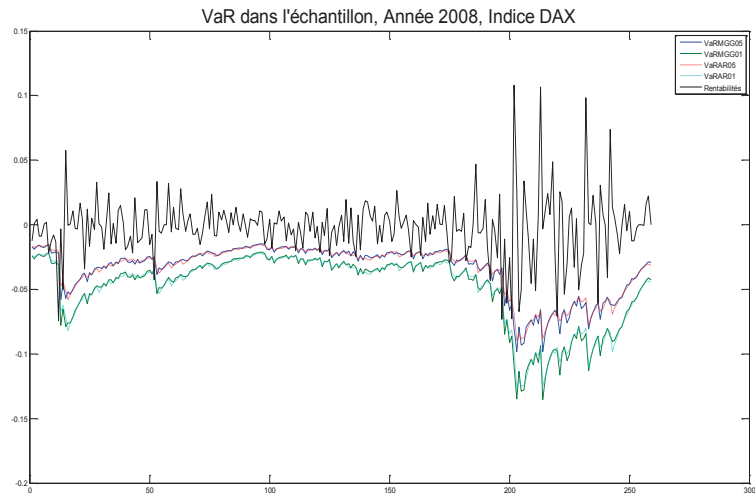
Graphique 98 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (IBEX)



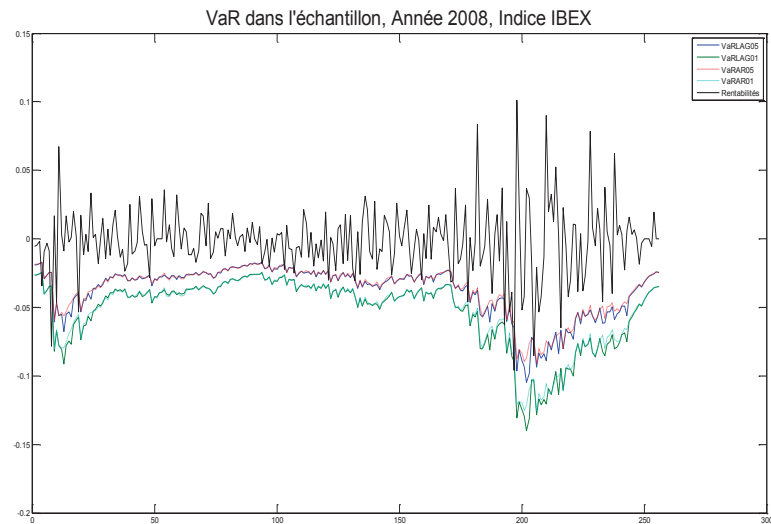
Graphique 99 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2005 (ISEQ)



Graphique 100 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (CAC)

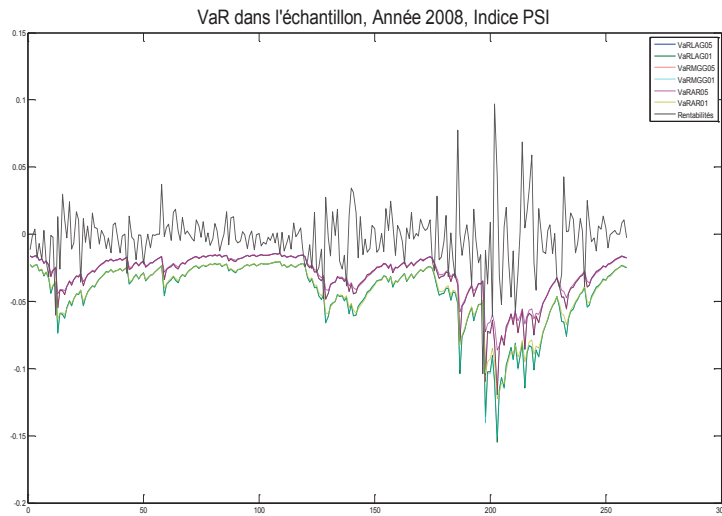


Graphique 101 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (DAX)

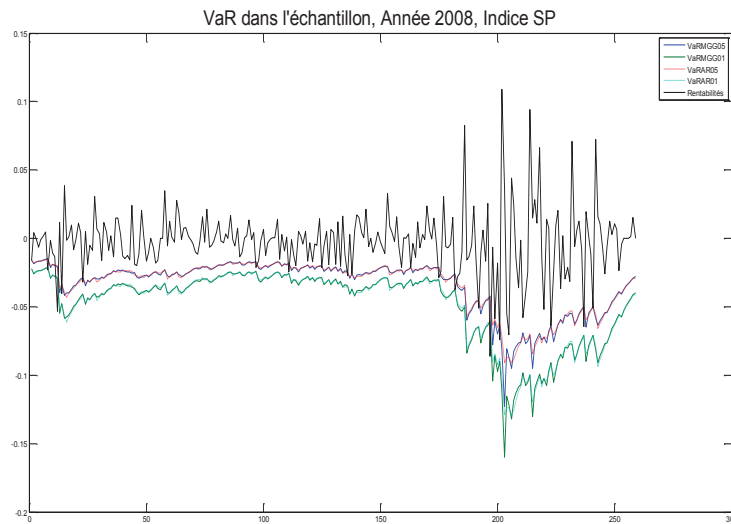


Graphique 102 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (IBEX)





Graphique 103 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (PSI)



Graphique 104 – VaR prévues dans l'échantillon par les modèles de type GARCH pour l'année 2008 (SP)

#### C.5.2.2.2 Tests de backtesting dans l'échantillon

| Année 2008 | 5%     | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|------------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|            |        | Actifs         | FEV    | p=1    | p=2    | p=3    | p=4    | p=5             | p=6    | p=1    | p=2    | p=3    | p=4    |
| ARMAG      |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,0731 | 0,105          | 0,1582 | 0,221  | 0,2794 | 0,318  | 0,352  | 0,8619          | 0,8538 | 0,8779 | 0,7096 | 0,6923 | 0,7487 |
| PSI        | 0,0846 | 0,0363         | 0,0322 | 0,031  | 0,0346 | 0,0421 | 0,0502 | 0,8978          | 0,0142 | 0,0372 | 0,0505 | 0,0735 | 0,0674 |
| DAX        | 0,0731 | 0,113          | 0,1498 | 0,2025 | 0,2714 | 0,3281 | 0,3758 | 0,857           | 0,9676 | 0,9881 | 0,9955 | 0,9864 | 0,8929 |
| SP         | 0,0615 | 0,3918         | 0,4983 | 0,5038 | 0,5628 | 0,6245 | 0,6007 | 0,9309          | 0,3303 | 0,3712 | 0,4519 | 0,3448 | 0,2427 |
| IBEX       | 0,0692 | 0,1467         | 0,1767 | 0,1899 | 0,2107 | 0,2309 | 0,2633 | 0,8202          | 0,4561 | 0,2808 | 0,299  | 0,3763 | 0,3811 |
| ATHEX      | 0,0577 | 0,4162         | 0,6488 | 0,7164 | 0,7305 | 0,7731 | 0,8233 | 0,6739          | 0,9601 | 0,7345 | 0,6647 | 0,773  | 0,7381 |
| ISEQ       | 0,0808 | 0,049          | 0,0741 | 0,0833 | 0,0933 | 0,1045 | 0,1163 | 0,8843          | 0,6024 | 0,3603 | 0,351  | 0,4416 | 0,4463 |
| LAG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,0775 | 0,058          | 0,1036 | 0,1498 | 0,1995 | 0,2464 | 0,2877 | 0,875           | 0,4418 | 0,5604 | 0,6803 | 0,7348 | 0,7396 |
| PSI        | 0,0846 | 0,0326         | 0,0325 | 0,0341 | 0,0414 | 0,0522 | 0,0615 | 0,9068          | 0,0156 | 0,0587 | 0,0471 | 0,0625 | 0,0563 |
| IBEX       | 0,0656 | 0,2418         | 0,2897 | 0,3588 | 0,3848 | 0,4231 | 0,4774 | 0,9137          | 0,8632 | 0,4971 | 0,5263 | 0,6278 | 0,5286 |
| MGG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,0775 | 0,0639         | 0,1112 | 0,1627 | 0,212  | 0,2573 | 0,2984 | 0,9072          | 0,4071 | 0,5588 | 0,6447 | 0,6575 | 0,6699 |
| PSI        | 0,0846 | 0,033          | 0,0313 | 0,0317 | 0,0402 | 0,055  | 0,0614 | 0,9097          | 0,0171 | 0,0599 | 0,0471 | 0,0614 | 0,0554 |
| DAX        | 0,0734 | 0,11           | 0,1558 | 0,2082 | 0,2752 | 0,3323 | 0,3803 | 0,9094          | 0,9913 | 0,9972 | 0,9991 | 0,9876 | 0,8487 |
| SP         | 0,0695 | 0,2119         | 0,2624 | 0,3535 | 0,4081 | 0,3403 | 0,2327 | 0,9031          | 0,2781 | 0,3777 | 0,0601 | 0,0251 | 0,0251 |

Tableau 107 – Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (5%)

| Année 2008 | 1%     | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|------------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Actifs     | FEV    | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| ARMAG      |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,0115 | 0,288          | 0,4223 | 0,5055 | 0,5297 | 0,3718 | 0,2491 | 0,4842          | 0,4839 | 0,2745 | 0,1841 | 0,1311 | 0,0983 |
| PSI        | 0,0192 | 0,119          | 0,11   | 0,1135 | 0,1933 | 0,2759 | 0,2977 | 0,8593          | 0,5322 | 0,2447 | 0,3394 | 0,5059 | 0,5725 |
| DAX        | 0,0154 | 0,1601         | 0,1966 | 0,3044 | 0,5011 | 0,5614 | 0,5814 | 0,8153          | 0,8913 | 0,8326 | 0,8126 | 0,8551 | 0,9098 |
| SP         | 0,0115 | 0,5057         | 0,416  | 0,5056 | 0,5359 | 0,3965 | 0,3192 | 0,5175          | 0,5186 | 0,3037 | 0,2067 | 0,155  | 0,1229 |
| IBEX       | 0,0192 | 0,1095         | 0,0517 | 0,0429 | 0,0238 | 0,018  | 0,0129 | 0,8565          | 0,0058 | 0,005  | 0,0044 | 0,0049 | 0,0092 |
| ATHEX      | 0,0154 | 0,2489         | 0,1666 | 0,2581 | 0,3971 | 0,4782 | 0,5027 | 0,8104          | 0,9534 | 0,9588 | 0,881  | 0,6605 | 0,4918 |
| ISEQ       | 0,0192 | 0,0583         | 0,1049 | 0,109  | 0,1825 | 0,2747 | 0,3225 | 0,8935          | 0,7038 | 0,5559 | 0,6212 | 0,695  | 0,6331 |
| LAG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,0155 | 0,1491         | 0,1648 | 0,2494 | 0,3433 | 0,4155 | 0,4286 | 0,98            | 0,9994 | 0,9646 | 0,461  | 0,3345 | 0,3653 |
| PSI        | 0,0193 | 0,1072         | 0,1081 | 0,1122 | 0,1893 | 0,2645 | 0,2883 | 0,9807          | 0,2612 | 0,1394 | 0,3159 | 0,4606 | 0,4431 |
| IBEX       | 0,0154 | 0,2114         | 0,1381 | 0,0978 | 0,0618 | 0,0353 | 0,0212 | 0,9811          | 0,0054 | 0,0024 | 0,0026 | 0,0034 | 0,0052 |
| MGG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,0155 | 0,1325         | 0,158  | 0,2398 | 0,3422 | 0,4227 | 0,4351 | 0,9804          | 0,9998 | 0,9631 | 0,476  | 0,3534 | 0,3793 |
| PSI        | 0,0193 | 0,1136         | 0,1051 | 0,1096 | 0,1905 | 0,2671 | 0,2945 | 0,9804          | 0,2616 | 0,1404 | 0,314  | 0,4564 | 0,4401 |
| DAX        | 0,0154 | 0,2252         | 0,199  | 0,3072 | 0,5011 | 0,5651 | 0,5921 | 0,9826          | 0,9621 | 0,8797 | 0,9126 | 0,9583 | 0,9723 |
| SP         | 0,0116 | 0,5123         | 0,4149 | 0,5141 | 0,5386 | 0,4041 | 0,3262 | 0,988           | 0,9951 | 0,1498 | 0,0824 | 0,0754 | 0,1033 |

Tableau 108 – Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (1%)

| Année 2005 | 5%     | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|------------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Actifs     | FEV    | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| ARMAG      |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0271 | 0,0766         | 0,1326 | 0,1843 | 0,2084 | 0,1998 | 0,2309 | 0,0417          | 0,5612 | 0,5355 | 0,5408 | 0,5779 | 0,5981 |
| CAC        | 0,0346 | 0,1636         | 0,186  | 0,2233 | 0,1409 | 0,1006 | 0,0983 | 0,991           | 0,3509 | 0,4617 | 0,5511 | 0,4795 | 0,3472 |
| DAX        | 0,0388 | 0,526          | 0,4992 | 0,6322 | 0,5853 | 0,4949 | 0,4793 | 0,1659          | 0,4506 | 0,528  | 0,6488 | 0,6849 | 0,6182 |
| IBEX       | 0,0233 | 0,0057         | 0,0223 | 0,0248 | 0,0246 | 0,0265 | 0,0299 | 0,9997          | 0,1483 | 0,139  | 0,1481 | 0,1835 | 0,2309 |
| ISEQ       | 0,0193 | 0,0059         | 0,0091 | 0,0103 | 0,0108 | 0,0121 | 0,0112 | 0,008           | 0,6871 | 0,8214 | 0,8759 | 0,8815 | 0,9038 |
| SP         | 0,0385 | 0,5279         | 0,4205 | 0,5619 | 0,5512 | 0,4481 | 0,4125 | 0,1784          | 0,4026 | 0,4699 | 0,577  | 0,6343 | 0,5874 |
| LAG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0388 | 0,527          | 0,3494 | 0,4101 | 0,4616 | 0,3789 | 0,2778 | 0,1586          | 0,2884 | 0,3119 | 0,3805 | 0,4631 | 0,4551 |
| DAX        | 0,0388 | 0,4983         | 0,5008 | 0,6411 | 0,592  | 0,493  | 0,4795 | 0,1675          | 0,4689 | 0,5467 | 0,6656 | 0,6909 | 0,6325 |
| IBEX       | 0,0349 | 0,1609         | 0,2079 | 0,2981 | 0,3553 | 0,4196 | 0,4586 | 0,9926          | 0,4149 | 0,473  | 0,566  | 0,6882 | 0,7645 |
| MGG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0388 | 0,5042         | 0,3426 | 0,4102 | 0,4605 | 0,3751 | 0,2788 | 0,1693          | 0,2908 | 0,3154 | 0,3793 | 0,4563 | 0,4466 |
| DAX        | 0,0388 | 0,4823         | 0,4945 | 0,6319 | 0,5824 | 0,4961 | 0,4796 | 0,1611          | 0,4542 | 0,5364 | 0,6548 | 0,6839 | 0,6221 |
| IBEX       | 0,0349 | 0,1644         | 0,2062 | 0,2952 | 0,3559 | 0,4193 | 0,4629 | 0,9949          | 0,4098 | 0,4681 | 0,5646 | 0,6963 | 0,7739 |
| ISEQ       | 0,027  | 0,0564         | 0,0161 | 0,0191 | 0,0201 | 0,0237 | 0,0173 | 0,0388          | 0,3611 | 0,252  | 0,2143 | 0,2342 | 0,2859 |

Tableau 109 – Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (5%)

| Année 2005 | 1%     | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|------------|--------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Actifs     | FEV    | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| ARMAG      |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0078 | 0,8952         | 0,7642 | 0,6106 | 0,6007 | 0,6286 | 0,6542 | 0,2517          | 0,5095 | 0,553  | 0,332  | 0,3658 | 0,4049 |
| CAC        | 0,0115 | 0,2889         | 0,5777 | 0,7349 | 0,7974 | 0,8426 | 0,877  | 0,6419          | 0,7889 | 0,8059 | 0,817  | 0,8668 | 0,876  |
| DAX        | 0,0194 | 0,0797         | 0,116  | 0,1203 | 0,1997 | 0,2353 | 0,2458 | 0,8722          | 0,3047 | 0,1078 | 0,1828 | 0,2632 | 0,3758 |
| IBEX       | 0,0078 | 0,8429         | 0,7046 | 0,4365 | 0,3024 | 0,2956 | 0,2852 | 0,4613          | 0,4328 | 0,2388 | 0,1904 | 0,1624 | 0,1475 |
| ISEQ       | 0,0077 | 0,7472         | 0,8841 | 0,8779 | 0,8938 | 0,8969 | 0,9261 | 0,2575          | 0,6243 | 0,6881 | 0,6879 | 0,6582 | 0,6647 |
| SP         | 0,0192 | 0,1053         | 0,1094 | 0,1131 | 0,1827 | 0,27   | 0,3136 | 0,9233          | 0,6697 | 0,4194 | 0,5217 | 0,6283 | 0,6055 |
| LAG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0116 | 0,4789         | 0,6156 | 0,6517 | 0,6677 | 0,6606 | 0,6484 | 0,5531          | 0,7326 | 0,5805 | 0,4197 | 0,4405 | 0,4598 |
| DAX        | 0,0194 | 0,0611         | 0,1226 | 0,1255 | 0,204  | 0,2334 | 0,2409 | 0,8581          | 0,2975 | 0,1064 | 0,1746 | 0,2575 | 0,3693 |
| IBEX       | 0,0116 | 0,3736         | 0,6381 | 0,6261 | 0,6425 | 0,6304 | 0,6174 | 0,599           | 0,7049 | 0,405  | 0,3021 | 0,3499 | 0,4011 |
| MGG        |        |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0116 | 0,3233         | 0,6134 | 0,6501 | 0,6663 | 0,6577 | 0,6453 | 0,6775          | 0,7438 | 0,5849 | 0,415  | 0,4335 | 0,4538 |
| DAX        | 0,0194 | 0,1061         | 0,1145 | 0,1188 | 0,1927 | 0,2319 | 0,2379 | 0,8744          | 0,2942 | 0,1078 | 0,1833 | 0,2667 | 0,3706 |
| IBEX       | 0,0116 | 0,4554         | 0,6449 | 0,6256 | 0,6353 | 0,6242 | 0,6133 | 0,6573          | 0,7019 | 0,4019 | 0,3018 | 0,3448 | 0,4009 |
| ISEQ       | 0,0077 | 0,7667         | 0,8818 | 0,8751 | 0,8936 | 0,8998 | 0,9255 | 0,2223          | 0,6302 | 0,6908 | 0,6922 | 0,6631 | 0,6716 |

Tableau 110 – Résultats du test GMM pour les prévisions dans l'échantillon (1%)

|        | DB1  | DB2  | DB3  | DB4  | DB5  | DB6  | DB7  | LR   | DQ1  | DQ2  | DQ3  | DQV1 | DQV2 | DQV3 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ARMA05 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| DAX    | 0,69 | 0,64 | 0,32 | 0,45 | 0,79 | 0,84 | 0,85 | 0,50 | 0,49 | 0,61 | 0,72 | 0,63 | 0,80 | 0,90 |
| IBEX   | 0,04 | 0,04 | 0,08 | 0,13 | 0,03 | 0,07 | 0,09 | 0,04 | 0,08 | 0,17 | 0,28 | 0,17 | 0,37 | 0,59 |
| ATHEX  | 0,19 | 0,34 | 0,23 | 0,12 | 0,50 | 0,65 | 0,35 | 0,17 | 0,24 | 0,18 | 0,30 | 0,41 | 0,41 | 0,65 |
| ISEQ   | 0,04 | 0,09 | 0,08 | 0,02 | 0,16 | 0,26 | 0,09 | 0,04 | 0,08 | 0,17 | 0,07 | 0,16 | 0,40 | 0,18 |
| CAC    | 0,33 | 0,28 | 0,22 | 0,33 | 0,42 | 0,50 | 0,52 | 0,17 | 0,18 | 0,29 | 0,43 | 0,30 | 0,43 | 0,66 |
| SP     | 0,68 | 0,64 | 0,34 | 0,45 | 0,77 | 0,87 | 0,32 | 0,49 | 0,48 | 0,60 | 0,71 | 0,35 | 0,62 | 0,82 |
| ARMA01 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| DAX    | 0,39 | 0,14 | 0,06 | 0,11 | 0,24 | 0,31 | 0,22 | 0,08 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| IBEX   | 0,93 | 0,44 | 0,61 | 0,74 | 0,40 | 0,55 | 0,98 | 0,92 | 0,94 | 0,99 | 1,00 | 0,85 | 0,98 | 1,00 |
| ATHEX  | 0,93 | 0,64 | 0,79 | 0,89 | 0,77 | 0,88 | 0,63 | 0,92 | 0,94 | 0,99 | 1,00 | 0,89 | 0,99 | 1,00 |
| ISEQ   | 0,93 | 0,51 | 0,67 | 0,79 | 0,50 | 0,65 | 0,99 | 0,92 | 0,93 | 0,99 | 1,00 | 0,98 | 1,00 | 0,98 |
| CAC    | 0,95 | 0,09 | 0,16 | 0,25 | 0,17 | 0,20 | 0,98 | 0,06 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| SP     | 0,39 | 0,14 | 0,12 | 0,21 | 0,24 | 0,35 | 0,59 | 0,08 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| LAG05  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| DAX    | 0,69 | 0,64 | 0,32 | 0,45 | 0,79 | 0,84 | 0,85 | 0,50 | 0,49 | 0,61 | 0,72 | 0,58 | 0,80 | 0,83 |
| IBEX   | 0,33 | 0,28 | 0,10 | 0,17 | 0,43 | 0,55 | 0,53 | 0,17 | 0,18 | 0,30 | 0,43 | 0,33 | 0,59 | 0,73 |
| ATHEX  | 0,69 | 0,56 | 0,68 | 0,52 | 0,06 | 0,07 | 0,86 | 0,50 | 0,49 | 0,54 | 0,60 | 0,67 | 0,80 | 0,82 |
| LAG01  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| DAX    | 0,39 | 0,14 | 0,06 | 0,11 | 0,24 | 0,32 | 0,22 | 0,08 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| IBEX   | 0,95 | 0,58 | 0,74 | 0,88 | 0,80 | 0,89 | 0,99 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 0,99 | 0,89 | 0,98 | 0,97 |
| ATHEX  | 0,95 | 0,35 | 0,50 | 0,64 | 0,14 | 0,23 | 0,38 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 0,99 | 0,66 | 0,90 | 0,96 |
| MGG05  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| DAX    | 0,69 | 0,64 | 0,32 | 0,45 | 0,79 | 0,84 | 0,85 | 0,50 | 0,49 | 0,61 | 0,72 | 0,58 | 0,80 | 0,83 |
| IBEX   | 0,33 | 0,28 | 0,10 | 0,17 | 0,43 | 0,55 | 0,53 | 0,17 | 0,18 | 0,30 | 0,43 | 0,33 | 0,59 | 0,74 |
| ATHEX  | 0,69 | 0,56 | 0,68 | 0,52 | 0,06 | 0,07 | 0,86 | 0,50 | 0,49 | 0,54 | 0,60 | 0,68 | 0,80 | 0,81 |
| ISEQ   | 0,19 | 0,12 | 0,06 | 0,09 | 0,22 | 0,33 | 0,34 | 0,16 | 0,24 | 0,18 | 0,13 | 0,40 | 0,32 | 0,27 |
| MGG01  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| DAX    | 0,39 | 0,14 | 0,06 | 0,11 | 0,24 | 0,32 | 0,22 | 0,08 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| IBEX   | 0,95 | 0,58 | 0,74 | 0,88 | 0,80 | 0,89 | 0,99 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 0,99 | 0,89 | 0,98 | 0,97 |
| ATHEX  | 0,95 | 0,35 | 0,50 | 0,64 | 0,14 | 0,23 | 0,38 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 0,99 | 0,66 | 0,90 | 0,96 |
| ISEQ   | 0,93 | 0,51 | 0,67 | 0,79 | 0,63 | 0,77 | 0,98 | 0,92 | 0,93 | 0,99 | 1,00 | 0,88 | 0,98 | 1,00 |

Tableau 111 – P-values des tests DB, LR et DQ sur les prévisions dans l'échantillon de l'année 2005

|        | DB1  | DB2  | DB3  | DB4  | DB5  | DB6  | DB7  | LR   | DQ1  | DQ2  | DQ3  | DQV1 | DQV2 | DQV3 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ARMA05 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| CAC    | 0,15 | 0,10 | 0,13 | 0,09 | 0,17 | 0,26 | 0,12 | 0,14 | 0,10 | 0,06 | 0,05 | 0,19 | 0,00 | 0,00 |
| PSI    | 0,00 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,01 | 0,09 | 0,03 | 0,07 | 0,00 | 0,04 | 0,12 | 0,00 |
| DAX    | 0,23 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,10 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,04 | 0,04 | 0,10 | 0,00 | 0,00 |
| SP     | 0,78 | 0,50 | 0,64 | 0,19 | 0,65 | 0,78 | 0,90 | 0,32 | 0,46 | 0,67 | 0,60 | 0,65 | 0,85 | 0,69 |
| IBEX   | 0,03 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,01 | 0,02 | 0,01 | 0,14 | 0,12 | 0,05 | 0,11 | 0,17 | 0,03 | 0,02 |
| ATHEX  | 0,78 | 0,21 | 0,36 | 0,48 | 0,32 | 0,45 | 0,84 | 0,32 | 0,46 | 0,41 | 0,58 | 0,58 | 0,61 | 0,79 |
| ISEQ   | 0,09 | 0,15 | 0,23 | 0,18 | 0,07 | 0,13 | 0,02 | 0,08 | 0,05 | 0,09 | 0,15 | 0,03 | 0,10 | 0,09 |
| ARMA01 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| CAC    | 0,69 | 0,87 | 0,80 | 0,78 | 0,84 | 0,92 | 0,73 | 0,67 | 0,64 | 0,81 | 0,90 | 0,65 | 0,86 | 0,95 |
| PSI    | 0,39 | 0,35 | 0,49 | 0,63 | 0,52 | 0,67 | 0,31 | 0,36 | 0,28 | 0,43 | 0,56 | 0,35 | 0,63 | 0,51 |
| DAX    | 0,69 | 0,50 | 0,65 | 0,77 | 0,49 | 0,64 | 0,53 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,48 | 0,72 | 0,88 |
| SP     | 0,95 | 0,99 | 0,86 | 0,82 | 0,94 | 0,98 | 0,83 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,85 | 0,97 | 0,98 |
| IBEX   | 0,01 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,65 | 0,28 | 0,43 | 0,56 | 0,45 | 0,51 | 0,33 |
| ATHEX  | 0,69 | 0,80 | 0,86 | 0,83 | 0,50 | 0,64 | 0,20 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,34 | 0,62 | 0,63 |
| ISEQ   | 0,39 | 0,48 | 0,64 | 0,73 | 0,59 | 0,73 | 0,44 | 0,36 | 0,28 | 0,44 | 0,57 | 0,32 | 0,60 | 0,80 |
| LAG05  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| CAC    | 0,15 | 0,10 | 0,14 | 0,09 | 0,14 | 0,22 | 0,28 | 0,14 | 0,10 | 0,07 | 0,05 | 0,19 | 0,00 | 0,00 |
| PSI    | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,00 | 0,02 | 0,00 | 0,01 | 0,09 | 0,03 | 0,07 | 0,00 | 0,04 | 0,14 | 0,00 |
| IBEX   | 0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,03 | 0,05 | 0,06 | 0,21 | 0,21 | 0,26 | 0,41 | 0,18 | 0,22 | 0,05 |
| LAG01  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| CAC    | 0,69 | 0,78 | 0,85 | 0,83 | 0,79 | 0,89 | 0,68 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,59 | 0,83 | 0,94 |
| PSI    | 0,39 | 0,35 | 0,49 | 0,63 | 0,53 | 0,68 | 0,32 | 0,36 | 0,28 | 0,43 | 0,56 | 0,35 | 0,64 | 0,66 |
| IBEX   | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,02 | 0,92 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,82 | 0,83 | 0,85 |
| MGG05  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| CAC    | 0,09 | 0,06 | 0,10 | 0,06 | 0,10 | 0,16 | 0,18 | 0,08 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,11 | 0,00 | 0,00 |
| PSI    | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,00 | 0,02 | 0,00 | 0,01 | 0,09 | 0,03 | 0,07 | 0,00 | 0,04 | 0,13 | 0,00 |
| DAX    | 0,23 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,10 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,04 | 0,04 | 0,12 | 0,01 | 0,02 |
| SP     | 0,48 | 0,27 | 0,38 | 0,14 | 0,41 | 0,55 | 0,69 | 0,15 | 0,21 | 0,36 | 0,28 | 0,37 | 0,66 | 0,32 |
| MGG01  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| CAC    | 0,69 | 0,78 | 0,85 | 0,83 | 0,79 | 0,89 | 0,68 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,59 | 0,83 | 0,94 |
| PSI    | 0,39 | 0,35 | 0,49 | 0,63 | 0,53 | 0,67 | 0,31 | 0,36 | 0,28 | 0,43 | 0,56 | 0,35 | 0,64 | 0,66 |
| DAX    | 0,69 | 0,50 | 0,65 | 0,77 | 0,51 | 0,66 | 0,56 | 0,66 | 0,63 | 0,80 | 0,89 | 0,52 | 0,71 | 0,89 |
| SP     | 0,95 | 0,99 | 0,86 | 0,82 | 0,95 | 0,98 | 0,85 | 0,93 | 0,94 | 0,98 | 1,00 | 0,86 | 0,98 | 0,99 |

Tableau 112 – P-values des tests DB, LR et DQ sur les prévisions dans l'échantillon de l'année 2008



| Actifs | Statistique $LR_{MUC}$ |        | Couleur du risk map |              |                     |              |                       |
|--------|------------------------|--------|---------------------|--------------|---------------------|--------------|-----------------------|
|        | Taux de couverture     | 5%     | 1%                  | Exception 5% | super' exception 1% | Exception 1% | super' exception 0,2% |
| LAG    |                        |        |                     |              |                     |              |                       |
| ATHEX  | 0,5066                 | 0,5387 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| DAX    | 1,3548                 | 2,8348 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| IBEX   | 1,0407                 | 2,5244 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| MGG    |                        |        |                     |              |                     |              |                       |
| ATHEX  | 0,5066                 | 0,5387 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| DAX    | 1,3548                 | 2,8348 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| IBEX   | 1,0407                 | 2,5244 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| ISEQ   | 3,3599                 | 0,3765 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| ARMAG  |                        |        |                     |              |                     |              |                       |
| ATHEX  | 2,9768                 | 0,4237 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| DAX    | 0,5066                 | 2,8348 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| IBEX   | 4,4771                 | 0,4237 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| ISEQ   | 6,1614                 | 0,3765 | ORANGE              |              | ORANGE              | VERT         | VERT                  |
| CAC    | 1,9556                 | 0,0592 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |
| SP     | 1,5228                 | 1,7617 | VERT                |              | VERT                | VERT         | VERT                  |

Tableau 113 – Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2005

| Actifs | Statistique $LR_{MUC}$ |        | Couleur du risk map |                     |              |                     |
|--------|------------------------|--------|---------------------|---------------------|--------------|---------------------|
|        | Taux de couverture     | 5%     | 1%                  | Exception 5% super' | exception 1% | Exception 1% super' |
| LAG    |                        |        |                     |                     |              |                     |
| CAC    | 3,7667                 | 2,439  | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| PSI    | 6,0907                 | 2,8082 | ORANGE              | ORANGE              | VERT         | VERT                |
| IBEX   | 2,003                  | 2,439  | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| MGG    |                        |        |                     |                     |              |                     |
| CAC    | 3,4316                 | 2,439  | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| PSI    | 6,0907                 | 2,8082 | ORANGE              | ORANGE              | VERT         | VERT                |
| DAX    | 2,7906                 | 0,7129 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| SP     | 1,3102                 | 0,3516 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| ARMAG  |                        |        |                     |                     |              |                     |
| CAC    | 2,7906                 | 5,579  | VERT                | VERT                | ORANGE       | ORANGE              |
| PSI    | 6,0907                 | 2,8082 | ORANGE              | ORANGE              | VERT         | VERT                |
| IBEX   | 1,9478                 | 1,7617 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| DAX    | 2,7906                 | 0,7129 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| SP     | 1,3102                 | 0,3516 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| ATHEX  | 0,7685                 | 0,6539 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |
| ISEQ   | 4,5863                 | 1,7617 | VERT                | VERT                | VERT         | VERT                |

Tableau 114 – Test de Colletaz et al.(2012) sur les prévisions de l'année 2005

## C.6 ÉVALUATION HORS-ÉCHANTILLON

### C.6.1 APPROCHE STATISTIQUE

#### C.6.1.1 TESTS D'ÉVALUATION DES CAPACITÉS PRÉDICTIVES

##### C.6.1.1.1 Le test Reality Check (RC) de White(2000)

L'idée du test est la suivante : le modèle de référence peut-il conduire à des prévisions moins performantes qu'un ou plusieurs modèles alternatifs ? Afin de tester cette hypothèse, White(2000) propose de retenir les fonctions de pertes associées à chaque modèle candidat. Ainsi, en notant le modèle de référence Modèle 0, nous pouvons tester la capacité des modèles  $k$  avec  $k = 1, \dots, l$  à supplanter le modèle de référence. Il est admis que le modèle le plus performant est celui qui minimise la moyenne des pertes et la performance d'un modèle peut être jugée à partir de la fonction :

$$F_{k,t} = L_{t,0} - L_{t,k} \quad (432)$$

Où  $k = 1, \dots, l$  et  $t = 1, \dots, n$ . En retenant l'hypothèse de stationnarité, White(2000) définit la moyenne des pertes par :

$$\mu_k = E[F_{k,t}] \quad (433)$$

pour  $k = 1, \dots, l$ . Si le modèle  $X$  surperforme le modèle 0 alors  $\mu_X$  est positif. Le test évalue alors la significativité du paramètre  $\mu_k$  pour  $k = 1, \dots, l$ . Le problème de ce test réside dans la définition de la distribution du test statistique sous l'hypothèse  $H_0$ . C'est la principale raison qui conduit Hansen(2005) à amender le test de White(2000).

##### C.6.1.1.2 Le test SPA de Hansen(2005)

Hansen(2005) met en évidence les différentes limites du test de White(2000) notamment le caractère conservatif de la distribution asymptotique du test, la nécessité d'une p-value consistante et la définition d'une borne supérieure et inférieure. Hansen(2005) définit alors un test général qui inclut le test RC de White(2000) comme un cas particulier, adapté aux situations où les modèles retenus sont aussi performants que le benchmark en termes de pertes moyennes. Le test de Hansen(2005) se base sur l'hypothèse suivante :

$$H_0 : \mu_{MAX}^s \equiv \max_{k=1, \dots, l} \frac{\mu_k}{\sqrt{\text{var}(n^{1/2}\bar{F}_{k,n})}} \leq 0 \quad (434)$$

Et retient la statistique :

$$T_n^s = \max_k \frac{n^{1/2}\bar{F}_{k,n}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(n^{1/2}\bar{F}_{k,n})}} \quad (435)$$

Où  $\widehat{var}(\cdot)$  est une variance estimée par la méthode du bootstrap. De telle sorte à obtenir une p-value consistante, Hansen(2005) définit deux bornes :

- une borne supérieure  $SPA_u$  qui permet de calculer la p-value conservative : c'est le test de White(2000) ;
- une borne inférieure  $SPA_l$  qui est calculée en supposant que les modèles dont les performances sont moins bonnes que celles du modèle de référence sont de mauvais modèles.

### C.6.1.1.3 Le test CPA de Giacomini et White(2006)

Dans l'analyse des capacités prédictives dans l'échantillon, nous avons retenus les tests de type DM. Giacomini et White(2006) généralisent ces tests en proposant d'évaluer les capacités prédictives conditionnelles hors échantillon. Le test SPA se décompose en deux sous-tests :

- un test général de l'égalité des capacités prédictives conditionnelles ;
- un test particulier de l'égalité des capacités prédictives inconditionnelles.

L'apport principal de ce test, comparativement aux tests de type DM, réside dans la prise en compte de la méthode d'estimation et des différents choix de l'utilisateur lors de la prévision. Par ailleurs, la définition de deux sous-tests est intimement liée à la finalité des prévisions :

- le test particulier qui s'apparente au test DM, évalue la précision d'un modèle par rapport à un autre modèle en moyenne. Il s'agit plutôt d'un test informatif sur l'efficacité de deux modèles à une date non spécifiée ;
- le test général vise plutôt à savoir si l'utilisation de l'information disponible dans la prévision permet de déterminer les prévisions qui seront les plus précises à une date spécifique.

Giacomini et White(2006) définissent l'hypothèse nulle du test général<sup>115</sup> par :

$$H_0 : E[L_{t+\tau}(Y_{t+\tau}, F_t(\widehat{\beta}_{At})) - L_{t+\tau}(Y_{t+\tau}, F_t(\widehat{\beta}_{Bt})) | \Omega_t] = 0 \quad (436)$$

Où  $\beta_{At}$  et  $\beta_{Bt}$  désignent les vecteurs des paramètres estimés relatifs aux modèles A et B,  $Y_{t+\tau}$  est la rentabilité effective au temps  $t + \tau$ ,  $\tau$  est le pas de temps retenu pour les

115. Nous ne revenons pas sur le test particulier qui est le test DM présenté dans la section précédente

prévisions et  $\Omega_t$ , l'information disponible en t. Comparativement au test DM, le test de Giacomini et White(2006) introduit les paramètres estimés et conditionne l'espérance à l'information disponible. Par ailleurs, ils définissent deux distributions asymptotiques pour les deux tests.

### C.6.1.2 RÉSULTATS DU TEST DE GIACOMINI ET WHITE(2006)

|              | UPA      |           | CPA      |           |
|--------------|----------|-----------|----------|-----------|
|              | Pvalue   | $\mu$     | Pvalue   | $\mu$     |
| MGG VS ARMAG |          |           |          |           |
| ATHEX        | 4,73E-10 | -5,93E-04 | 3,15E-09 | -5,93E-04 |
| CAC          | 0        | -7,06E-04 | 0        | -7,06E-04 |
| DAX          | 0        | -5,29E-04 | 0        | -5,29E-04 |
| IBEX         | 3,64E-04 | -3,34E-04 | 1,56E-03 | -3,34E-04 |
| PSI          | 0        | -4,45E-04 | 0        | -4,45E-04 |
| SCAC         | 5,33E-15 | -7,80E-04 | 1,69E-14 | -7,80E-04 |
| SPSI         | 2,07E-01 | 2,25E-04  | 7,76E-02 | 2,25E-04  |
| LAG VS ARMAG |          |           |          |           |
| ATHEX        | 1,53E-09 | -5,65E-04 | 1,04E-08 | -5,65E-04 |
| CAC          | 6,88E-15 | -3,45E-04 | 6,81E-14 | -3,45E-04 |
| DAX          | 0        | -5,31E-04 | 0        | -5,31E-04 |
| IBEX         | 1,55E-04 | -3,48E-04 | 7,48E-04 | -3,48E-04 |
| PSI          | 0        | -4,49E-04 | 0        | -4,49E-04 |
| SCAC         | 2,34E-05 | -3,86E-04 | 8,97E-06 | -3,86E-04 |
| SIBEX        | 1,73E-01 | 2,32E-04  | 3,80E-04 | 2,32E-04  |
| SPSI         | 2,00E-01 | 2,40E-04  | 8,83E-02 | 2,40E-04  |
| LAG VS MGG   |          |           |          |           |
| ATHEX        | 1,82E-07 | 2,72E-05  | 3,11E-07 | 2,72E-05  |
| CAC          | 1,56E-08 | 3,61E-04  | 7,81E-08 | 3,61E-04  |
| DAX          | 8,32E-05 | -1,87E-06 | 1,01E-05 | -1,87E-06 |
| IBEX         | 5,23E-07 | -1,43E-05 | 1,14E-06 | -1,43E-05 |
| PSI          | 6,38E-11 | -3,54E-06 | 2,95E-10 | -3,54E-06 |
| SCAC         | 1,20E-09 | 3,94E-04  | 7,59E-09 | 3,94E-04  |
| SPSI         | 1,48E-01 | 1,47E-05  | 2,04E-01 | 1,47E-05  |

Tableau 115 – Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type GARCH-(2003-2011)

|                    | UPA    |         | CPA        |         |
|--------------------|--------|---------|------------|---------|
|                    | Pvalue | $\mu$   | Pvalue     | $\mu$   |
| MG-MRSG VS MRSG    |        |         |            |         |
| ATHEX              | 0,0000 | -3,6830 | 0          | -3,6830 |
| CAC                | 0,0000 | 1,1919  | 0          | 1,1919  |
| DAX                | 0,0000 | 1,5916  | 0          | 1,5916  |
| IBEX               | 0,0000 | -2,0729 | 0          | -2,0729 |
| ISEQ               | 0,0000 | 0,9200  | 0          | 0,9200  |
| PSI                | 0,0000 | 0,5632  | 0          | 0,5632  |
| SP                 | 0,0000 | -2,0926 | 0          | -2,0926 |
| LA-MRSG VS MRSG    |        |         |            |         |
| ATHEX              | 0,0000 | -4,1198 | 0          | -4,1198 |
| CAC                | 0,0000 | 0,4150  | 4,85E-06   | 0,4150  |
| DAX                | 0,0000 | 1,0861  | 0          | 1,0861  |
| IBEX               | 0,0023 | -0,3805 | 0,00147424 | -0,3805 |
| ISEQ               | 0,0000 | 1,2828  | 0          | 1,2828  |
| PSI                | 0,0000 | -0,8719 | 0          | -0,8719 |
| SP                 | 0,0000 | -2,6322 | 0          | -2,6322 |
| LA-MRSG VS MG-MRSG |        |         |            |         |
| ATHEX              | 0,0031 | -0,4368 | 0,00965514 | -0,4368 |
| CAC                | 0,0000 | -0,7769 | 5,01E-14   | -0,7769 |
| DAX                | 0,0000 | -0,5055 | 1,36E-08   | -0,5055 |
| IBEX               | 0,0000 | 1,6924  | 0          | 1,6924  |
| ISEQ               | 0,0000 | 0,3628  | 4,47E-07   | 0,3628  |
| PSI                | 0,0000 | -1,4351 | 0          | -1,4351 |
| SP                 | 0,0000 | -0,5396 | 1,61E-08   | -0,5396 |

Tableau 116 – Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type MRS-GARCH-(2003-2011)

### C.6.1.3 RÉSULTATS DES TESTS RC ET SPA

|       | $SPA_c$             | RC    | $SPA_l$ | $SPA_c$             | RC    | $SPA_l$ | $SPA_c$             | RC    | $SPA_l$ |
|-------|---------------------|-------|---------|---------------------|-------|---------|---------------------|-------|---------|
|       | ARMAG VS MGG ET LAG |       |         | MGG VS ARMAG ET LAG |       |         | LAG VS ARMAG ET MGG |       |         |
| ATHEX | 0                   | 0     | 0       | 1                   | 0,517 | 1       | 0                   | 0     | 0,404   |
| CAC   | 0                   | 0     | 0       | 0,503               | 0,503 | 1       | 0                   | 0     | 0       |
| DAX   | 0                   | 0     | 0       | 0                   | 0     | 0,472   | 1                   | 0,491 | 1       |
| IBEX  | 0                   | 0     | 0       | 0                   | 0     | 0,476   | 1                   | 0,507 | 1       |
| PSI   | 0,006               | 0,006 | 0,006   | 0                   | 0     | 0,468   | 1                   | 0,524 | 1       |
| SCAC  | 0                   | 0     | 0       | 0,513               | 0,513 | 1       | 0                   | 0     | 0       |
| SPSI  | 0,542               | 0,542 | 0,859   | 0,126               | 0,126 | 0,126   | 0,127               | 0,127 | 0,127   |
| SIBEX | 0,879               | 0,529 | 0,879   |                     |       |         | 0,141               | 0,141 | 0,141   |

Tableau 117 – Tests RC et SPA-Modèles de type GARCH(2003-2011)



|       | $SPA_c$                         | RC    | $SPA_t$ | $SPA_c$                         | RC    | $SPA_t$ | $SPA_c$                         | RC    | $SPA_t$ |
|-------|---------------------------------|-------|---------|---------------------------------|-------|---------|---------------------------------|-------|---------|
|       | MRS-G VS LAG-MRS-G ET MGG-MRS-G |       |         | MGG-MRS-G VS MRS-G ET LAG-MRS-G |       |         | LAG-MRS-G VS MGG-MRS-G ET MRS-G |       |         |
| ATHEX | 0                               | 0     | 0       | 0,003                           | 0,003 | 0,004   | 0,997                           | 0,539 | 0,998   |
| CAC   | 1                               | 0,491 | 1       | 0                               | 0     | 0       | 0                               | 0     | 0       |
| DAX   | 0,474                           | 0,474 | 1       | 0                               | 0     | 0       | 0                               | 0     | 0       |
| IBEX  | 0                               | 0     | 0       | 0,49                            | 0,49  | 1       | 0                               | 0     | 0       |
| ISEQ  | 1                               | 0,49  | 1       | 0                               | 0     | 0       | 0                               | 0     | 0       |
| PSI   | 0                               | 0     | 0       | 0                               | 0     | 0       | 1                               | 0,508 | 1       |
| SP    | 0                               | 0     | 0       | 0                               | 0     | 0       | 0,485                           | 0,485 | 1       |

Tableau 118 – Tests RC et SPA-Modèles de type MRS-GARCH(2003-2011)

|              | UPA        |             | CPA        |             |
|--------------|------------|-------------|------------|-------------|
| Année 2007   | Pvalue     | $\mu$       | Pvalue     | $\mu$       |
| MGG VS ARMAG |            |             |            |             |
| ATHEX        | 0          | -0,00105344 | 0          | -0,00105344 |
| DAX          | 1,57E-12   | -0,00039497 | 1,83E-12   | -0,00039497 |
| IBEX         | 6,71E-05   | -0,00028289 | 1,17E-05   | -0,00028289 |
| ISEQ         | 7,28E-10   | -0,0019152  | 4,61E-09   | -0,0019152  |
| LAG VS ARMAG |            |             |            |             |
| ATHEX        | 0          | -0,00103468 | 0          | -0,00103468 |
| DAX          | 2,19E-12   | -0,00039344 | 2,62E-12   | -0,00039344 |
| IBEX         | 7,06E-05   | -0,00028171 | 1,35E-05   | -0,00028171 |
| LAG VS MGG   |            |             |            |             |
| ATHEX        | 0,00574174 | 1,88E-05    | 0,00618972 | 1,88E-05    |
| DAX          | 0,00776461 | 1,53E-06    | 0,01961569 | 1,53E-06    |
| IBEX         | 0,16204542 | 1,18E-06    | 0,25673864 | 1,18E-06    |

Tableau 119 – Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type GARCH-(2004-2006)

| Année 2010   | UPA        |            | CPA        |            |
|--------------|------------|------------|------------|------------|
|              | Pvalue     | $\mu$      | Pvalue     | $\mu$      |
| MGG VS ARMAG |            |            |            |            |
| CAC          | 0,51438822 | -5,15E-05  | 0,23909512 | -5,15E-05  |
| PSI          | 8,43E-05   | 0,00077322 | 0,00028869 | 0,00077322 |
| LAG VS ARMAG |            |            |            |            |
| CAC          | 0,62092421 | -3,99E-05  | 0,24439653 | -3,99E-05  |
| IBEX         | 2,00E-05   | 5,99E-04   | 0,00011306 | 5,99E-04   |
| PSI          | 0,00011194 | 0,00079088 | 0,00041833 | 0,00079088 |
| LAG VS MGG   |            |            |            |            |
| CAC          | 0,00055152 | 1,17E-05   | 0,00278107 | 1,17E-05   |
| PSI          | 0,08128573 | 1,77E-05   | 0,13404036 | 1,77E-05   |

Tableau 120 – Test de Giacomini et White(2006)-Modèles de type GARCH-(2007-2009)

| Année 2007 | $SPA_c$             | RC | $SPA_l$ | $SPA_c$             | RC    | $SPA_l$ | $SPA_c$             | RC    | $SPA_l$ |
|------------|---------------------|----|---------|---------------------|-------|---------|---------------------|-------|---------|
|            | ARMAG VS MGG ET LAG |    |         | MGG VS ARMAG ET LAG |       |         | LAG VS MGG ET ARMAG |       |         |
| ATHEX      | 0                   | 0  | 0       | 0,981               | 0,526 | 0,995   | 0,014               | 0,014 | 0,409   |
| DAX        | 0                   | 0  | 0       | 0,991               | 0,497 | 1       | 0,011               | 0,011 | 0,461   |
| IBEX       | 0                   | 0  | 0       | 0,914               | 0,507 | 0,952   | 0,085               | 0,085 | 0,535   |
|            | ARMAG VS MGG        |    |         | MGG VS ARMAG        |       |         |                     |       |         |
| ATHEX      | 0                   | 0  | 0       | 0,489               | 0,489 | 1       |                     |       |         |
| DAX        | 0                   | 0  | 0       | 0,483               | 0,483 | 1       |                     |       |         |
| IBEX       | 0                   | 0  | 0       | 1                   | 0,487 | 1       |                     |       |         |
| ISEQ       | 0                   | 0  | 0       | 1                   | 0,5   | 1       |                     |       |         |

Tableau 121 – Tests RC et SPA-Modèles de type GARCH(2004-2006)

| Année 2010          | $SPA_c$ | RC    | $SPA_l$ |
|---------------------|---------|-------|---------|
| ARMAG VS MGG ET LAG |         |       |         |
| CAC                 | 0,283   | 0,283 | 0,283   |
| PSI                 | 0,999   | 0,543 | 0,999   |
| MGG VS ARMAG ET LAG |         |       |         |
| CAC                 | 0,999   | 0,743 | 0,999   |
| PSI                 | 0,001   | 0,001 | 0,001   |
| LAG VS ARMAG ET MGG |         |       |         |
| CAC                 | 0,436   | 0,252 | 0,436   |
| PSI                 | 0,002   | 0,002 | 0,002   |
| ARMAG VS LAG        |         |       |         |
| IBEX                | 0,52    | 0,52  | 1       |
| LAG VS ARMAG        |         |       |         |
| IBEX                | 0       | 0     | 0       |

Tableau 122 – Tests RC et SPA-Modèles de type GARCH(2007-2009)

## C.6.2 ÉVALUATION HORS ÉCHANTILLON : UNE APPROCHE PAR LA VAR

| Année 2012 |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
|------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|--------|--------|--------|
|            | DB1  | DB2  | DB3   | DB4   | DB5   | DB6   | DB7   | LR    | DQ1  | DQ2  | DQ3  | DQVaR1 | DQVaR2 | DQVaR3 |
| ARMAG      |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX      | 0,93 | 0    | 0     | 0     | 0,42  | 0,57  | 0,27  | 0,92  | 0,93 | 0,98 | 0,99 | 0,48   | 0,77   | 0,91   |
| CAC        | 0,54 | 0,75 | 0,87  | 0,941 | 0     | 0,01  | 0     | 0,54  | 0,62 | 0,81 | 0,91 | 0,45   | 0,75   | 0,91   |
| DAX        | 0,54 | 0,75 | 0,87  | 0,941 | 0     | 0,01  | 0     | 0,54  | 0,62 | 0,81 | 0,91 | 0,61   | 0,86   | 0,96   |
| IBEX       | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| ISEQ       | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| SP         | 0,54 | 0,75 | 0,87  | 0,941 | 0     | 0,014 | 0     | 0,54  | 0,62 | 0,81 | 0,91 | 0,73   | 0,92   | 0,98   |
| MGG        |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX      | 0,93 | 0    | 0,001 | 0,005 | 0,433 | 0,577 | 0,278 | 0,926 | 0,94 | 0,99 | 0,99 | 0,48   | 0,78   | 0,92   |
| CAC        | 0,54 | 0,75 | 0,87  | 0,941 | 0     | 0,014 | 0     | 0,54  | 0,62 | 0,81 | 0,91 | 0,42   | 0,73   | 0,9    |
| DAX        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| IBEX       | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| LAG        |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
| ATHEX      | 0,93 | 0    | 0     | 0     | 0,43  | 0,58  | 0,28  | 0,93  | 0,94 | 0,99 | 0,99 | 0,48   | 0,78   | 0,92   |
| CAC        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| DAX        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| IBEX       | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| SVAR MGG   |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
| CAC        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| SVAR LAG   |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
| CAC        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| IBEX       | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| SVAR ARMAG |      |      |       |       |       |       |       |       |      |      |      |        |        |        |
| CAC        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| IBEX       | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,07 | 0,16 | 0,27  | 0,4   | 0,27  | 0,4   | 0,16  | NaN   | NaN  | NaN  | NaN  | NaN    | NaN    | NaN    |

Tableau 123 – Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la  $Var_{99\%}$  de l'année 2012 (Modèles de type GARCH)

| Année 2012 |         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|            | DB1     | DB2    | DB3    | DB4    | DB5    | DB6    | DB7    | LR     | DQ1    | DQ2    | DQ3    | DQVaR1 | DQVaR2 | DQVaR3 |
|            | MRSG    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0669  | 0,0569 | 0,0141 | 0,0289 | 0,0216 | 0,0399 | 0,0161 | 0,0265 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 |
| CAC        | 0,3835  | 0,0741 | 0,1389 | 0,2230 | 0,0847 | 0,0789 | 0,0342 | 0,3502 | 0,2717 | 0,4212 | 0,5527 | 0,0060 | 0,0201 | 0,0498 |
| DAX        | 0,1746  | 0,0129 | 0,0294 | 0,0566 | 0,0445 | 0,0175 | 0,0212 | 0,1524 | 0,0778 | 0,1404 | 0,2104 | 0,0009 | 0,0036 | 0,0090 |
| IBEX       | 0,1746  | 0,0515 | 0,1024 | 0,1742 | 0,0819 | 0,1551 | 0,0972 | 0,1524 | 0,0778 | 0,1404 | 0,2104 | 0,0407 | 0,0808 | 0,1244 |
| ISEQ       | 0,6861  | 0,1444 | 0,0368 | 0,0668 | 0,0324 | 0,0611 | 0,0408 | 0,0876 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 |
| PSI        | 0,0064  | 0,0096 | 0,0162 | 0,0011 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0039 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| SP         | 0,0669  | 0,0571 | 0,0475 | 0,0875 | 0,0177 | 0,0341 | 0,0113 | 0,0265 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
|            | MG-MRSG |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0000  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| CAC        | 0,0781  | 0,1646 | 0,2771 | 0,4037 | 0,2774 | 0,4041 | 0,1648 | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    |
| DAX        | 0,0781  | 0,1646 | 0,2771 | 0,4037 | 0,2780 | 0,4047 | 0,1652 | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    |
| IBEX       | 0,0000  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| ISEQ       | 0,0781  | 0,1646 | 0,2771 | 0,4037 | 0,2779 | 0,4047 | 0,1651 | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,5398  | 0,7450 | 0,8389 | 0,9208 | 0,7481 | 0,8575 | 0,5864 | 0,5431 | 0,6230 | 0,8135 | 0,9169 | 0,8062 | 0,9533 | 0,9922 |
| SP         | 0,0000  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
|            | LA-MRSG |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0000  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| CAC        | 0,5398  | 0,7450 | 0,8726 | 0,9416 | 0,8148 | 0,9052 | 0,6671 | 0,5431 | 0,6235 | 0,8142 | 0,9176 | 0,6270 | 0,8801 | 0,9705 |
| DAX        | 0,0781  | 0,1646 | 0,2771 | 0,4037 | 0,2775 | 0,4042 | 0,1648 | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    |
| IBEX       | 0,0017  | 0,0025 | 0,0058 | 0,0062 | 0,0061 | 0,0126 | 0,0051 | 0,0011 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| ISEQ       | 0,0781  | 0,1646 | 0,2771 | 0,4037 | 0,2776 | 0,4043 | 0,1649 | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,0000  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| SP         | 0,0000  | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Tableau 124 – Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  de l'année 2012 (Modèles de type MRS-GARCH)

| Année 2007 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|            | DB1    | DB2    | DB3    | DB4    | DB5    | DB6    | DB7    | LR     | DQ1    | DQ2    | DQ3    | DQVaR1 | DQVaR2 | DQVaR3 |
| MGG        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,9259 | 0,3497 | 0,5134 | 0,6601 | 0,4989 | 0,6441 | 0,9811 | 0,9207 | 0,9324 | 0,9849 | 0,9968 | 0,8231 | 0,9461 | 0,9456 |
| DAX        | 0,6982 | 0,5472 | 0,7109 | 0,8318 | 0,5197 | 0,6642 | 0,0828 | 0,6618 | 0,6366 | 0,7999 | 0,8924 | 0,3079 | 0,5180 | 0,6401 |
| IBEX       | 0,0706 | 0,0591 | 0,0325 | 0,0605 | 0,1139 | 0,1630 | 0,0320 | 0,0277 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0018 |
| ISEQ       | 0,6982 | 0,8221 | 0,5759 | 0,4737 | 0,9058 | 0,9604 | 0,8689 | 0,6618 | 0,6366 | 0,7999 | 0,8924 | 0,8224 | 0,7918 | 0,0005 |
| LAG        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,9259 | 0,3497 | 0,5134 | 0,6601 | 0,4964 | 0,6417 | 0,9811 | 0,9207 | 0,9324 | 0,9849 | 0,9968 | 0,8247 | 0,9476 | 0,9473 |
| DAX        | 0,6982 | 0,5472 | 0,7109 | 0,8318 | 0,5194 | 0,6639 | 0,0827 | 0,6618 | 0,6366 | 0,7999 | 0,8924 | 0,3078 | 0,5192 | 0,6399 |
| IBEX       | 0,0706 | 0,0591 | 0,0325 | 0,0605 | 0,1139 | 0,1630 | 0,0320 | 0,0277 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0018 |
| ARMAG      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,9259 | 0,3497 | 0,5134 | 0,6601 | 0,4524 | 0,5978 | 0,9805 | 0,9207 | 0,9324 | 0,9849 | 0,9968 | 0,8047 | 0,9565 | 0,9929 |
| CAC        | 0,9259 | 0,9681 | 0,9764 | 0,9963 | 0,9922 | 0,9983 | 0,9841 | 0,9207 | 0,9324 | 0,9849 | 0,9968 | 0,9589 | 0,9947 | 0,9914 |
| DAX        | 0,6982 | 0,5472 | 0,7109 | 0,8318 | 0,5607 | 0,7026 | 0,0890 | 0,6618 | 0,6366 | 0,7999 | 0,8924 | 0,3298 | 0,4504 | 0,6724 |
| IBEX       | 0,1820 | 0,0808 | 0,1516 | 0,2412 | 0,1958 | 0,3179 | 0,3297 | 0,1591 | 0,0836 | 0,1500 | 0,2236 | 0,1299 | 0,1649 | 0,3378 |
| ISEQ       | 0,6982 | 0,0166 | 0,1791 | 0,3402 | 0,0373 | 0,0740 | 0,8677 | 0,0881 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 |
| SP         | 0,6982 | 0,5460 | 0,7139 | 0,8333 | 0,7224 | 0,8390 | 0,8604 | 0,6618 | 0,6366 | 0,7999 | 0,8924 | 0,5057 | 0,6524 | 0,6932 |

Tableau 125 – Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007

| Année 2010 |               |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|            | DB1           | DB2    | DB3    | DB4    | DB5    | DB6    | DB7    | LR     | DQ1    | DQ2    | DQ3    | DQVaR1 | DQVaR2 | DQVaR3 |
|            | MGG P20072009 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,1820        | 0,1984 | 0,3261 | 0,4598 | 0,0887 | 0,1519 | 0,0892 | 0,1591 | 0,0836 | 0,1500 | 0,2236 | 0,0247 | 0,0767 | 0,1115 |
| PSI        | 0,1820        | 0,2276 | 0,1797 | 0,2785 | 0,0122 | 0,0251 | 0,0168 | 0,1591 | 0,0836 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0218 | 0,0007 | 0,0028 |
|            | LAG           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| CAC        | 0,6982        | 0,3414 | 0,2640 | 0,3512 | 0,1355 | 0,2201 | 0,0894 | 0,6618 | 0,6366 | 0,0000 | 0,0001 | 0,2048 | 0,0001 | 0,0005 |
| IBEX       | 0,0018        | 0,0019 | 0,0020 | 0,0040 | 0,0004 | 0,0010 | 0,0001 | 0,0013 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| PSI        | 0,1820        | 0,2276 | 0,1797 | 0,2785 | 0,0122 | 0,0251 | 0,0168 | 0,1591 | 0,0836 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0221 | 0,0007 | 0,0028 |
|            | ARMAG         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| ATHEX      | 0,0018        | 0,0015 | 0,0038 | 0,0022 | 0,0028 | 0,0006 | 0,0022 | 0,0013 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| CAC        | 0,5300        | 0,7363 | 0,8664 | 0,9380 | 0,8663 | 0,9379 | 0,7362 | 0,5333 | 0,6156 | 0,8081 | 0,9138 | 0,8069 | 0,9626 | 0,9919 |
| DAX        | 0,9259        | 0,7418 | 0,8706 | 0,9406 | 0,2446 | 0,3639 | 0,5135 | 0,9207 | 0,9324 | 0,9849 | 0,9968 | 0,7694 | 0,8205 | 0,9397 |
| IBEX       | 0,0018        | 0,0019 | 0,0020 | 0,0040 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0001 | 0,0013 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| ISEQ       | 0,0757        | 0,1604 | 0,2712 | 0,3965 | 0,2712 | 0,3965 | 0,1604 | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    | NaN    |
| PSI        | 0,1820        | 0,2276 | 0,1797 | 0,2788 | 0,0147 | 0,0299 | 0,0189 | 0,1591 | 0,0836 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0182 | 0,0006 | 0,0022 |
| SP         | 0,0237        | 0,0352 | 0,0436 | 0,0828 | 0,0373 | 0,0699 | 0,0275 | 0,0185 | 0,0020 | 0,0041 | 0,0008 | 0,0011 | 0,0041 | 0,0016 |

Tableau 126 – Tests DB, DQ, et LR sur les prévisions de la  $Var_{99\%}$  de l'année 2010



|       |            | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|-------|------------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1%    | FEV        | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| ARMAG |            |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,0077821  | 0,8245         | 0,7881 | 0,6993 | 0,6693 | 0,708  | 0,7407 | 0,3729          | 0,5295 | 0,5868 | 0,4319 | 0,4561 | 0,4981 |
| CAC   | 0,00389105 | 0,6332         | 0,3889 | 0,4327 | 0,5736 | 0,6486 | 0,6755 | 0,045           | 0,1358 | 0,525  | 0,5428 | 0,5385 | 0,5286 |
| DAX   | 0,00389105 | 0,5898         | 0,389  | 0,4353 | 0,5744 | 0,6453 | 0,6691 | 0,0805          | 0,1356 | 0,5257 | 0,5365 | 0,5276 | 0,5168 |
| IBEX  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| ISEQ  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| PSI   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SP    | 0,00389105 | 0,5797         | 0,3426 | 0,209  | 0,2506 | 0,3375 | 0,3945 | 0,2069          | 0,1775 | 0,4503 | 0,4461 | 0,4129 | 0,3695 |
| SCAC  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SIBEX | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SPSI  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| MGG   |            |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,0077821  | 0,8487         | 0,7778 | 0,6925 | 0,6597 | 0,6998 | 0,7349 | 0,4609          | 0,5255 | 0,5771 | 0,4192 | 0,441  | 0,4909 |
| CAC   | 0,00389105 | 0,6415         | 0,3933 | 0,434  | 0,5758 | 0,6441 | 0,6705 | 0,0863          | 0,1385 | 0,5237 | 0,5398 | 0,5303 | 0,52   |
| DAX   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| IBEX  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| PSI   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SCAC  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SMB   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SPSI  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| LAG   |            |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,0077821  | 0,84           | 0,7858 | 0,7021 | 0,6682 | 0,7066 | 0,7387 | 0,2635          | 0,5309 | 0,5856 | 0,4258 | 0,4478 | 0,4916 |
| CAC   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| DAX   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| IBEX  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| PSI   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SCAC  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SIBEX | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SMB   | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| SPSI  | 0          | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |

Tableau 127 – P-values du test GMM pour les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2012 (Modèles de type GARCH)

|          |      | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|----------|------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1%       | FEV  | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MRS-G    |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,03 | 0,0065         | 0,0128 | 0,0113 | 0,013  | 0,017  | 0,0257 | 0,9696          | 0,8069 | 0,6981 | 0,7653 | 0,823  | 0,8819 |
| CAC      | 0,02 | 0,0741         | 0,1218 | 0,1277 | 0,1725 | 0,1405 | 0,1326 | 0,9268          | 0,0959 | 0,0219 | 0,0243 | 0,0299 | 0,0381 |
| DAX      | 0,02 | 0,0267         | 0,0447 | 0,0467 | 0,0539 | 0,0669 | 0,0635 | 0,9512          | 0,0147 | 0,0124 | 0,0117 | 0,014  | 0,0173 |
| IBEX     | 0,02 | 0,0425         | 0,0404 | 0,0426 | 0,0491 | 0,0674 | 0,0837 | 0,9376          | 0,6787 | 0,235  | 0,2666 | 0,2834 | 0,3338 |
| ISEQ     | 0,02 | 0,1929         | 0,2425 | 0,3793 | 0,4257 | 0,4625 | 0,4699 | 0,7897          | 0,5281 | 0,2001 | 0,2692 | 0,3796 | 0,4742 |
| PSI      | 0,04 | 0,0013         | 0,0011 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0015 | 0,0019 | 0,9793          | 0,9926 | 0,9957 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9996 |
| SP       | 0,03 | 0,0164         | 0,012  | 0,011  | 0,0126 | 0,0158 | 0,0216 | 0,9739          | 0,9724 | 0,9827 | 0,9776 | 0,8498 | 0,7683 |
| MG-MRS-G |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,22 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9776          | 0,0101 | 0,1466 | 0,1728 | 0,1447 | 0,1628 |
| CAC      | 0,00 | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| DAX      | 0,00 | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| IBEX     | 0,19 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9783          | 0,9684 | 0,5789 | 0,3017 | 0,4064 | 0,4771 |
| ISEQ     | 0,00 | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| PSI      | 0,00 | 0,6231         | 0,3275 | 0,1971 | 0,2408 | 0,3243 | 0,3773 | 0,1073          | 0,1874 | 0,4357 | 0,4202 | 0,3857 | 0,3446 |
| SP       | 0,19 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9783          | 0,964  | 0,599  | 0,1201 | 0,1815 | 0,2081 |
| LA-MRS-G |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX    | 0,18 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9775          | 0,9966 | 0,5502 | 0,223  | 0,2182 | 0,2178 |
| CAC      | 0,00 | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| DAX      | 0,00 | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| IBEX     | 0,04 | 0,0004         | 0,0004 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,9749          | 0,9077 | 0,9368 | 0,8515 | 0,5123 | 0,3402 |
| ISEQ     | 0,00 | 1              | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      | 1               | 1      | 1      | 1      | 1      | 1      |
| PSI      | 0,10 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9783          | 0,008  | 0,0746 | 0,2073 | 0,1216 | 0,0409 |
| SP       | 0,19 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9743          | 0,3406 | 0,7129 | 0,76   | 0,7851 | 0,8352 |

Tableau 128 – P-values du test GMM pour les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2012 (Modèles de type MRS-GARCH)

|       |      | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|-------|------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1%    | FEV  | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MGG   |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,01 | 0,882          | 0,665  | 0,3878 | 0,2162 | 0,1134 | 0,1254 | 0,4451          | 0,3784 | 0,168  | 0,1276 | 0,1003 | 0,0842 |
| DAX   | 0,02 | 0,1637         | 0,2417 | 0,375  | 0,4257 | 0,4541 | 0,4527 | 0,8043          | 0,5424 | 0,1937 | 0,2537 | 0,3026 | 0,4256 |
| IBEX  | 0,03 | 0,0097         | 0,0166 | 0,0148 | 0,0167 | 0,0219 | 0,032  | 0,9696          | 0,3152 | 0,1444 | 0,2739 | 0,4196 | 0,5068 |
| ISEQ  | 0,02 | 0,2641         | 0,1472 | 0,209  | 0,2511 | 0,2845 | 0,2457 | 0,8282          | 0,7126 | 0,3095 | 0,2261 | 0,218  | 0,2346 |
| LAG   |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,01 | 0,8679         | 0,668  | 0,3817 | 0,2063 | 0,1068 | 0,117  | 0,277           | 0,3767 | 0,1634 | 0,1224 | 0,0955 | 0,0782 |
| DAX   | 0,02 | 0,1596         | 0,2407 | 0,3723 | 0,4219 | 0,4473 | 0,4465 | 0,811           | 0,5379 | 0,1843 | 0,2492 | 0,3026 | 0,4246 |
| IBEX  | 0,03 | 0,0139         | 0,0149 | 0,0138 | 0,0152 | 0,0208 | 0,0304 | 0,9706          | 0,3153 | 0,1467 | 0,2717 | 0,4179 | 0,4997 |
| ARMAG |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,01 | 0,8565         | 0,6694 | 0,387  | 0,2214 | 0,1134 | 0,1261 | 0,3553          | 0,3857 | 0,1712 | 0,134  | 0,105  | 0,0855 |
| CAC   | 0,01 | 0,8501         | 0,9065 | 0,9202 | 0,9372 | 0,9612 | 0,96   | 0,3185          | 0,6318 | 0,7488 | 0,7833 | 0,8293 | 0,8881 |
| DAX   | 0,02 | 0,1376         | 0,2339 | 0,3674 | 0,4194 | 0,4436 | 0,4454 | 0,8003          | 0,5434 | 0,1847 | 0,2419 | 0,2945 | 0,4164 |
| IBEX  | 0,02 | 0,0354         | 0,0458 | 0,0477 | 0,0524 | 0,0726 | 0,0747 | 0,9486          | 0,1763 | 0,0346 | 0,0485 | 0,0652 | 0,0936 |
| ISEQ  | 0,02 | 0,1303         | 0,1396 | 0,1981 | 0,2424 | 0,277  | 0,2381 | 0,8431          | 0,7366 | 0,3228 | 0,2349 | 0,2247 | 0,2381 |
| SP    | 0,46 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9791          | 0,3615 | 0,545  | 0,1942 | 0,2158 | 0,3095 |

Tableau 129 – P-values du test GMM pour les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2007

|       |      | Tests $J_{CC}$ |        |        |        |        |        | Tests $J_{IND}$ |        |        |        |        |        |
|-------|------|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1%    | FEV  | p=1            | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    | p=1             | p=2    | p=3    | p=4    | p=5    | p=6    |
| MGG   |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC   | 0,02 | 0,2266         | 0,1757 | 0,2684 | 0,4354 | 0,5313 | 0,5557 | 0,7726          | 0,928  | 0,9543 | 0,959  | 0,7809 | 0,5315 |
| PSI   | 0,02 | 0,1159         | 0,1064 | 0,1096 | 0,1779 | 0,2478 | 0,2713 | 0,8875          | 0,3823 | 0,1819 | 0,297  | 0,4659 | 0,5029 |
| LAG   |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| CAC   | 0,02 | 0,247          | 0,1548 | 0,2405 | 0,3404 | 0,4295 | 0,4606 | 0,8216          | 0,9311 | 0,9195 | 0,8161 | 0,7525 | 0,7329 |
| IBEX  | 0,04 | 0,0001         | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,9778          | 0,0084 | 0,0045 | 0,0041 | 0,0059 | 0,0147 |
| PSI   | 0,02 | 0,1186         | 0,1046 | 0,1085 | 0,1752 | 0,2467 | 0,2722 | 0,907           | 0,3728 | 0,1773 | 0,3    | 0,4643 | 0,5019 |
| ARMAG |      |                |        |        |        |        |        |                 |        |        |        |        |        |
| ATHEX | 0,02 | 0,2711         | 0,2448 | 0,3661 | 0,393  | 0,4078 | 0,3906 | 0,8161          | 0,4232 | 0,1388 | 0,1726 | 0,2021 | 0,2263 |
| CAC   | 0,02 | 0,1296         | 0,1002 | 0,104  | 0,1538 | 0,251  | 0,2985 | 0,88            | 0,7496 | 0,5898 | 0,6625 | 0,7238 | 0,7516 |
| DAX   | 0,01 | 0,4979         | 0,385  | 0,3967 | 0,26   | 0,1577 | 0,1257 | 0,6233          | 0,258  | 0,0669 | 0,0573 | 0,0535 | 0,0592 |
| IBEX  | 0,02 | 0,0375         | 0,019  | 0,0174 | 0,0183 | 0,0152 | 0,0145 | 0,9413          | 0,2689 | 0,0432 | 0,0473 | 0,0639 | 0,0965 |
| ISEQ  | 0,01 | 0,8642         | 0,7263 | 0,4731 | 0,357  | 0,3455 | 0,3571 | 0,2603          | 0,4574 | 0,2785 | 0,2246 | 0,1984 | 0,1805 |
| PSI   | 0,02 | 0,1121         | 0,1071 | 0,1109 | 0,1773 | 0,2552 | 0,2765 | 0,9779          | 0,1548 | 0,1047 | 0,2699 | 0,3606 | 0,2417 |
| SP    | 0,02 | 0,0199         | 0,0343 | 0,034  | 0,0398 | 0,0541 | 0,0697 | 0,9598          | 0,9568 | 0,9432 | 0,9733 | 0,9555 | 0,903  |

Tableau 130 – P-values du test GMM pour les prévisions des  $VaR_{99\%}$  de l'année 2010

## C.7 RUPTURES DE CORRÉLATIONS : UNE APPROCHE PAR UN MODÈLE CHAOS STOCHASTIQUE EN SOUS PÉRIODES

### C.7.1 LES MODÈLES GARCH MULTIVARIÉS

L'intérêt suscité par les modèles de type ARCH dans le cas multivarié a engendré une vaste littérature qui a permis le développement et l'amélioration d'un certain nombre de modélisations. En finance, les modèles GARCH multivariés permettent d'analyser l'éventuelle transmission de volatilité entre différents marchés ou actifs. Dans la classification donnée par Bauwens et al.(2006), 3 classes de modèles sont clairement établies : la première recense les modèles qui sont une généralisation des modèles GARCH univariés, la seconde porte sur les modèles construits comme une combinaison linéaire des modèles GARCH univariés tandis que la troisième est consacrée aux modèles construits comme une combinaison non linéaire des modèles GARCH univariés<sup>116</sup>.

La généralisation des modèles ARCH univariés a permis à Engle et Kraft(1983) de formuler les modèles ARCH multivariés. Plus précisément, considérons le modèle suivant :

$$X_t = \mu_t + \epsilon_t \tag{437}$$

Où  $X_t$  est le vecteur des variables étudiées, avec  $\epsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t)$  où  $\Omega_{t-1}$  est l'ensemble de l'information disponible en  $t-1$  et  $\epsilon_t = z_t \sqrt{H_t}$  où  $E(z_t) = 0$  et  $\sigma^2(z_t) = I_N$  et  $N$  désigne le nombre de séries retenues.

$H_t$  est définie par :

$$Vech(H_t) = c + \sum_{j=1}^q A_j vech(\epsilon_{t-j} \epsilon'_{t-j}) + \sum_{i=1}^p B_i vech(H_t) \tag{438}$$

Où  $Vech(.)$  désigne un opérateur permettant d'empiler dans un seul vecteur les éléments de la partie supérieure d'une matrice. Les modèles VEC<sup>117</sup>, généralisés par Bollerslev et al.(1988), font intervenir dans leur forme générale la matrice  $H_t$  comme une fonction linéaire des carrés des erreurs passées et des produits croisés des erreurs et des valeurs passés des éléments de  $H_t$ . Compte tenu du nombre important de paramètres à estimer ( $(N(N+1)(N(N+1)+1)/2)$  paramètres), Bollerslev et al.(1988) proposent un modèle diagonal VEC dans lequel les matrices A et B sont des matrices diagonales. La condition de positivité sur la matrice  $H_t$  conduit à imposer de fortes restrictions sur les paramètres

116. Pour une présentation plus détaillée des différents modèles GARCH multivariés, voir Bauwens et al.(2006), Silvennoinen et Teräsvirta(2009) entre autres.

117. Vector GARCH models

(voir Gouriéroux(1997) pour plus de précisions). Engle et Kroner (1995) tentent de pallier l'insuffisance des modèles VEC en présentant une nouvelle paramétrisation de la matrice  $H_t$  qui conduit aux modèles BEKK. La forme matricielle du modèle BEKK est donnée par :

$$H_t = C'C + \Gamma'\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1}\Gamma + B'H_{t-1}B \text{ Avec}$$

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Les équations des variances conditionnelles et de la covariance entre les erreurs sont définies comme suit :

$$h_{11,t} = c_{11}^2 + \gamma_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2\gamma_{11}\gamma_{21}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + \gamma_{21}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{11}^2 h_{11,t-1} + 2\beta_{11}\beta_{21}h_{12,t-1} + \beta_{21}^2 h_{22,t-1}$$

$$h_{12,t} = c_{12}c_{22} + \gamma_{11}\gamma_{12}\epsilon_{1,t-1}^2 + (\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{11}\gamma_{22})\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + \gamma_{21}\gamma_{22}\epsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{11}\beta_{12}h_{11,t-1} + (\beta_{21}\beta_{12} + \beta_{11}\beta_{22})h_{12,t-1} + \beta_{21}\beta_{22}h_{22,t-1}$$

$$h_{22,t} = (c_{12}^2 + c_{22}^2) + \gamma_{12}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2\gamma_{12}\gamma_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + \gamma_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + \beta_{12}^2 h_{11,t-1} + 2\beta_{12}\beta_{22}h_{12,t-1} + \beta_{22}^2 h_{22,t-1}$$

Pour les mêmes raisons que le modèle VEC, il est possible de retenir un modèle BEKK diagonal. Cependant, le nombre de paramètres à estimer reste relativement important. Engle et al. (1990) proposent les modèles à facteurs qui s'inscrivent dans la classe des modèles BEKK. Leur objet principal consiste à retenir des facteurs communs dans la volatilité des séries étudiées. Ainsi, il est possible de retenir une matrice  $H_t$  qui permet de prendre en compte ces facteurs communs et ainsi de réduire le nombre de paramètres à estimer. Dans la classe des combinaisons non linéaires des modèles ARCH univariés, Bollerslev(1990) propose les modèles à corrélation conditionnelle constante. La méthodologie de Bollerslev(1990) permet de retenir différentes spécifications de type ARCH pour les

séries univariés et, à partir des variances conditionnelles de chaque modèle, de construire la matrice des corrélations conditionnelles. Le modèle qui en résulte, noté CCC<sup>118</sup> peut être spécifié de la manière suivante :

$$H_t = D_t R D_t \quad (439)$$

Avec  $D_t$  une matrice diagonale des écart-types conditionnels

$D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$  et  $R$  la matrice des corrélations entre les variables. Cette classe de modèle permet de réduire sensiblement le nombre de paramètres à estimer, mais elle repose sur une hypothèse fondamentale, à savoir la constance des corrélations conditionnelles. De plus, la condition de positivité de la matrice  $H_t$  implique la positivité de la matrice  $R$ . Cette double contrainte ne permet pas de rendre compte de l'évolution des cours financiers de manière pertinente. Une extension de ces modèles est proposée par Jeantheau(1998) qui suggère de relâcher l'hypothèse de matrices diagonales. Ainsi, les rendements passés au carré et les variances des différentes séries sont pris en compte dans chaque équation individuelle des variances conditionnelles. Engle(2002), Tse et Tsui(2002) proposent une approche alternative qui modélise les variances et les corrélations conditionnelles dynamiques. Les modèles DCC<sup>119</sup> sont une généralisation des modèles CCC et sont définis selon Engle(2002) par :

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (440)$$

$$D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2}) \quad (441)$$

$$R_t = (\text{diag} Q_t)^{-1/2} Q_t (\text{diag} Q_t)^{-1/2} \quad (442)$$

Où  $Q_t$  est une matrice symétrique définie positive :

$$Q_t = (1 - a - b)S + a\nu_{t-1}\nu'_{t-1} + bQ_{t-1}$$

$S$  désigne une matrice de variance-covariance inconditionnelle des erreurs standardisés  $\nu_t$ ,  $a$  et  $b$  sont 2 paramètres à estimer de telle sorte que  $a + b < 1$ . La spécification qui est proposée par Tse et Tsui(2002) est légèrement différente et d'autres modèles de type DCC-GARCH ont été développés (voir Silvennoinen et Teräsvirta(2009)).

---

118. Corrélations Conditionnelles Constantes

119. Corrélations Conditionnelles Dynamiques

### C.7.2 LE MODÈLE MACKEY-GLASS BIVARIÉ

L'équation de Mackey-Glass(1977) est introduite pour la première fois dans l'étude des systèmes de contrôles physiologiques. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire avec retard capable de décrire plusieurs comportements dynamiques complexes. L'objectif premier des auteurs est double :

- porter à l'attention des théoriciens deux exemples médicaux des dynamiques complexes ;
- montrer que des modèles mathématiques simples peuvent décrire des dynamiques périodiques et apériodiques, similaires à celles observées dans les études médicales.

Le succès de cette équation a conduit au développement de nombreuses études dans plusieurs disciplines.

Glass et Mackey(1977) introduisent 3 modèles permettant de décrire respectivement les problèmes respiratoires des adultes atteints du phénomène de Cheyne-Stokes et les fluctuations de globules blancs chez des patients atteints de leucémie myéloïde chronique.

En économétrie financière, les études portant sur le modèle de Mackey-Glass portent sur une version discrète du modèle 3. Ce dernier est défini par :

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x(t) + \frac{\beta x(t - \tau)}{1 + x^n(t - \tau)} \quad (443)$$

Avec  $t > 0$  et la condition initiale  $\phi$  pour  $t \geq 0$  est donnée par  $x(t) = \phi(t)$  où  $\phi \in C[[-\tau, 0], \mathbb{R}^+]$ ,  $\phi(0) = 0$ . La simplicité de l'équation de Mackey-Glass revêt des dynamiques complexes qui peuvent être de nature chaotique. Elle présente la particularité de pouvoir représenter des systèmes de dimensions infinies d'où l'intérêt de définir préalablement l'intervalle temporel dans lequel évolue la trajectoire.

L'étude du modèle de Mackey-Glass en économétrie financière a d'abord été entreprise par Kyrtsou et Terraza(2002) dans le cadre d'une approche chaos-stochastique des séries financières. La mise en évidence des structures chaotiques et l'intérêt croissant de la science économique dans la théorie du chaos a impulsée les recherches sur la modélisation chaotique des séries financières. La mise en évidence par ces auteurs des structures chaotiques et hétéroscédastiques dans les séries financières et la possibilité de prendre en compte conjointement ces structures offrent un renouveau dans l'approche paramétrique des séries financières. Ils proposent une modélisation des forces dites stabilisatrices par un modèle

déterministe chaotique, capable de rendre compte d'un retour vers la valeur fondamentale du titre et une modélisation des forces déstabilisatrices par une partie stochastique, symptomatique d'un marché dominé par des agents spéculatifs bruités.

L'utilisation d'un modèle de Mackey-Glass bruité est justifiée par la capacité de ce modèle à produire des caractéristiques similaires aux séries temporelles financières, notamment en ce qui concerne la non linéarité en moyenne et en variance. Par ailleurs, la combinaison d'un processus déterministe et hétéroscédastique produit une trajectoire aléatoire et l'attracteur de cette combinaison perd sa structure. L'analyse sur données empiriques montre que le recours à un modèle Mackey-Glass-GARCH(1,1) pour expliquer l'évolution du CAC 40 donne des résultats concluants en termes de prédictions, comparativement au modèle GARCH(1,1), à la prédiction naïve, à la régression en composantes principales et à l'utilisation des fonctions à bases radiales.

Kyrtsou(2008) montre comment le modèle de Mackey-Glass peut comporter des structures hétéroscédastiques même lorsqu'il n'est pas couplé à un processus hétéroscédastique. Une mauvaise spécification de la moyenne conditionnelle, notamment lorsque la série temporelle est caractérisée par des breaks ou des outliers peut fausser la sélection du modèle approprié (Lumsdaine et Ng(1999) et Kapetanios et Blake(2007)). Par ailleurs, la présence de structures déterministes peut impacter le bruit stochastique. Kyrtsou(2008) propose donc d'analyser la dynamique du bruit lorsqu'il est impacté par une partie déterministe. En appliquant les tests de McLeod et Li(1983) et Engle(1982), elle montre que les simulations d'un Mackey-Glass associé à un bruit blanc peuvent comporter de l'hétéroscédasticité. Elle propose alors de filtrer le modèle de Mackey-Glass bruité en retirant la partie déterministe. L'application des tests de McLeod et Li(1983) et Engle(1982) sur les résidus indiquent une distribution hétéroscédastique et non linéaire. Elle conclue donc sur un impact significatif de la partie déterministe de la partie déterministe sur la partie stochastique. Melhem et Melhem(2012) discutent les résultats obtenus par Kyrtsou(2008) notamment sur le choix d'un modèle de Mackey-Glass bruité à hautes dimensions. Hommes et Manzan(2006) ont montré dans une précédente étude que les fluctuations des séries temporelles financières pouvaient en partie s'expliquer par la présence de structures chaotiques à faibles dimensions.

Kyrtsou(2006) propose par la suite un modèle de Mackey-Glass Généralisé (GMG) qui inclut une fonction logistique. Elle montre comment il peut filtrer séparément des stratégies de feedback positives et négatives. Kyrtsou et Malliaris(2009) proposent une étude



sur l'impact d'une nouvelle information sur le marché. Ils montrent, en recourant entre autres aux modèles de Mackey-Glass bruités, que l'arrivée d'une nouvelle information modifie fortement la dynamique décrite par ces modèles. Plus précisément, dans le cas du Mackey-Glas bruité, ils mettent en évidence un effet dual :

- l'information exogène se perd dans la structure du bruit blanc et il n'y a pas de modifications significatives des kurtosis et statistiques de Jarque Bera ;
- l'interaction entre l'information exogène et le bruit hétéroscédastique permet une stabilisation du système.

Kyrtsou et Terraza(2010) proposent un modèle de Mackey-Glass-GARCH saisonnier permettant de prendre en compte les éventuelles saisonnalités qui peuvent exister dans la volatilité. Ils montrent tout l'intérêt de cette modélisation dans la prévision des chroniques temporelles financières.

Le modèle de Mackey-Glass avec bruits a aussi été utilisé dans le cas d'analyses bivariées. Ainsi, Kyrtsou et Labys(2006) proposent un modèle de Mackey-Glass avec bruit blanc pour rendre compte des dynamiques complexes qui caractérisent les liens causaux entre l'inflation américaine et le prix des biens. Dans une autre étude(2007), ces auteurs retiennent le même modèle pour mettre en évidence la présence des liens causaux entre l'inflation américaine et le prix du métal. Kyrtsou et Vorlow(2009) proposent alors une amélioration du Mackey-Glass bivarié en le rattachant à un processus BEKK-GARCH pour modéliser les comouvements qui peuvent exister entre deux séries temporelles.

### C.7.2.1 ESTIMATIONS DES MODÈLES

Estimation des équations de la moyenne du modèle MG-DCC-GARCH

-Echantillon 1 (28/11/2003-27/11/2007)-

| $X_{1t}$ | $X_{2t}$ | $\alpha_1$           | $d_1$                | $\alpha_2$           | $d_2$                  | $\alpha_3$            | $d_3$                 | $\alpha_4$            | $d_4$                 | $\tau_1$ | $c_1$ | $\tau_2$ | $c_2$ |
|----------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|-------|----------|-------|
| DAX      | CAC      | -306,7..<br>(181,3)  | -306,8..<br>(181,2)  | 292,7..<br>(176,3)   | 292,8..<br>(176,2)     | -408,6*<br>(173,5)    | -408,6*<br>(173,7)    | 380,4*<br>(168,7)     | 380,5*<br>(169,2)     | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | PSI      | -102,24<br>(120,12)  | -102,16<br>(120,09)  | 162,81*<br>(75,9)    | 162,73*<br>(75,87)     | -71,55<br>(86,87)     | -71,56<br>(86,85)     | 159,68**<br>(54,89)   | 159,57**<br>(54,87)   | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | IBEX     | -171,2<br>(138,3)    | -171,1<br>(138,2)    | 151,9<br>(107,3)     | 150,8<br>(106,8)       | -324,58**<br>(124,55) | -324,38**<br>(124,51) | 331,85***<br>(96,66)  | 331,67***<br>(96,62)  | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | ATHEX    | -65,49<br>(118,02)   | -65,42<br>(117,98)   | 26,89<br>(20,89)     | 26,84<br>(20,87)       | -280,09*<br>(140,15)  | -280,04*<br>(140,11)  | 119,62***<br>(24,81)  | 119,52***<br>(24,79)  | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | SP       | -255,5..<br>(137,8)  | -255,5..<br>(137,6)  | -356,5*<br>(143,7)   | -355,9*<br>(143,6)     | -301,15**<br>(116,2)  | -301,4**<br>(116,5)   | 333,6**<br>(121,2)    | 333,4**<br>(121,1)    | 1        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | PSI      | 13,74<br>(117,08)    | 13,83<br>(117,05)    | 184,35*<br>(75,41)   | 184,26*<br>(75,38)     | 1,613<br>(88,596)     | 1,588<br>(88,571)     | 153,866**<br>(57,065) | 153,751**<br>(57,043) | 1        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | IBEX     | -0,00623<br>(0,031)  | 0,1013<br>(0,064)    | 80,193<br>(87,113)   | 80,138<br>(87,077)     | 0,0132<br>(0,029)     | 0,2022***<br>(0,0596) | 205,9*<br>(81,808)    | 205,66*<br>(81,775)   | 2        | 2     | 2        | 2     |
| CAC      | ATHEX    | -0,01<br>(0,031)     | 0,0099**<br>(0,0358) | 13,59<br>(20,03)     | 13,549<br>(20,011)     | 0,071..<br>(0,038)    | 0,0103<br>(0,0444)    | 116,67***<br>(24,84)  | 116,55***<br>(24,82)  | 2        | 2     | 2        | 2     |
| CAC      | SP       | -0,03657<br>(0,031)  | 0,14496*<br>(0,0673) | 250,52*<br>(116,3)   | 250,36*<br>(116,26)    | -0,03156<br>(0,0274)  | 0,09446<br>(0,0593)   | 175,92..<br>(102,489) | 175,85..<br>(102,456) | 3        | 2     | 1        | 2     |
| PSI      | IBEX     | 0,0222<br>(0,0311)   | -0,03676<br>(0,038)  | 138,814*<br>(65,81)  | 138,708*<br>(65,78)    | 0,0176<br>(0,038)     | 0,033<br>(0,0475)     | 173,56*<br>(82,305)   | 173,51*<br>(82,279)   | 2        | 2     | 1        | 2     |
| PSI      | ATHEX    | 155,93**<br>(53,908) | 155,8**<br>(53,886)  | 8,526<br>(15,089)    | 8,512<br>(15,076)      | 226,95*<br>(88,43)    | 226,9*<br>(88,39)     | 114,59***<br>(24,75)  | 114,47***<br>(24,73)  | 2        | 2     | 1        | 2     |
| IBEX     | ATHEX    | 168,57*<br>(82,36)   | 168,54*<br>(82,33)   | 21,16<br>(18,96)     | 21,14<br>(18,94)       | 47,02<br>(108,38)     | 47,05<br>(108,35)     | 117,75***<br>(24,95)  | 117,63***<br>(24,92)  | 1        | 2     | 1        | 2     |
| IBEX     | SP       | -0,0024<br>(0,031)   | -0,054<br>(0,055)    | 248,26*<br>(109,74)  | 248,28*<br>(109,71)    | 0,0226<br>(0,029)     | 0,047<br>(0,047)      | 170,27..<br>(170,27)  | 170,26..<br>(170,26)  | 2        | 2     | 1        | 2     |
| ATHEX    | SP       | -0,0136<br>(0,0311)  | -0,008<br>(0,035)    | 376,89*<br>(146,936) | 376,755*<br>(146,8966) | -0,014<br>(0,0219)    | -0,035<br>(0,025)     | 186,73..<br>(103,245) | 186,78..<br>(103,217) | 3        | 2     | 1        | 2     |

Significatif à (\*\*\*)0, (\*\*).0.01, (\*)0.05 (..)0.1. Entre parenthèses ( ) : l'écart type

Tableau 131

Estimation des équations de la moyenne du modèle MG-DCC-GARCH

-Echantillon 2 (29/11/2003-25/11/2011)-

| $X_{1t}$ | $X_{2t}$ | $\alpha_1$           | $d_1$              | $\alpha_2$           | $d_2$                | $\alpha_3$              | $d_3$                  | $\alpha_4$           | $d_4$                | $\tau_1$ | $c_1$ | $\tau_2$ | $c_2$ |
|----------|----------|----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|----------|-------|----------|-------|
| DAX      | CAC      | 41,27**<br>(14,97)   | 40,75**<br>(14,9)  | -40,15**<br>(14,51)  | -39,62**<br>(14,44)  | -31,89*<br>(15,62)      | -32,18*<br>(15,55)     | 22,66<br>(15,15)     | 22,96<br>(15,08)     | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | PSI      | -0,125**<br>(0,045)  | -0,0964<br>(0,044) | 0,138**<br>(0,052)   | 0,0954..<br>(0,0517) | -0,112**<br>(0,038)     | -0,0658..<br>(0,0385)  | 0,0762..<br>(0,0446) | 0,00553<br>(0,044)   | 3        | 2     | 3        | 2     |
| DAX      | IBEX     | 5,201<br>(11,234)    | 5,105<br>(11,19)   | 0,509<br>(7,77)      | 0,592<br>(7,738)     | -40,478***<br>(11,946)  | -40,362***<br>(11,901) | 29,722***<br>(8,267) | 29,597***<br>(8,229) | 1        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | ATHEX    | -0,075*<br>(0,031)   | 0,0088<br>(0,0365) | 1,956<br>(4,162)     | 1,929<br>(4,146)     | -0,039<br>(0,045)       | -0,179***<br>(0,0525)  | 16,411**<br>(5,973)  | 16,37**<br>(5,9496)  | 2        | 2     | 1        | 2     |
| DAX      | SP       | 10,14<br>(10,31)     | 10,02<br>(10,27)   | -0,068*<br>(0,03)    | 0,097..<br>(0,06)    | -20,24..<br>(11,35)     | -20,3..<br>(11,31)     | -0,043<br>(0,031)    | 0,054<br>(0,062)     | 1        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | PSI      | -0,206***<br>(0,051) | 0,049<br>(0,05)    | 0,194**<br>(0,0617)  | -0,00748<br>(0,0618) | -0,1581***<br>(0,04212) | 0,0395<br>(0,04213)    | 0,1304*<br>(0,059)   | -0,0871..<br>(0,051) | 3        | 2     | 3        | 2     |
| CAC      | IBEX     | -0,082**<br>(0,031)  | 0,185*<br>(0,076)  | 13,19..<br>(7,27)    | 13,002..<br>(7,24)   | -0,083**<br>(0,032)     | 0,259***<br>(0,077)    | 21,64**<br>(7,41)    | 21,33**<br>(7,382)   | 2        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | ATHEX    | -0,079*<br>(0,031)   | 0,069..<br>(0,038) | 0,89<br>(4,357)      | 0,85<br>(4,34)       | -0,049<br>(0,043)       | -0,117*<br>(0,052)     | 17,301**<br>(5,996)  | 17,25**<br>(5,973)   | 2        | 2     | 1        | 2     |
| CAC      | SP       | -0,087**<br>(0,031)  | 0,244**<br>(0,08)  | -0,097***<br>(0,029) | -0,202**<br>(0,076)  | -0,076*<br>(0,033)      | 0,168*<br>(0,085)      | -0,059..<br>(0,0311) | -0,169*<br>(0,081)   | 3        | 2     | 2        | 2     |
| PSI      | IBEX     | -29,37*<br>(14,06)   | -29,33*<br>(14,04) | 29,47***<br>(8,68)   | 29,36***<br>(8,66)   | -12,2<br>(17,51)        | -12,1<br>(17,48)       | 22,77*<br>(10,8)     | 22,64*<br>(10,78)    | 1        | 2     | 1        | 2     |
| PSI      | ATHEX    | -0,034<br>(0,031)    | -0,027<br>(0,038)  | 0,851<br>(3,599)     | 0,825<br>(3,586)     | -0,077<br>(0,052)       | -0,1569*<br>(0,0637)   | 17,99**<br>(5,991)   | 17,94**<br>(5,969)   | 2        | 2     | 1        | 2     |
| IBEX     | ATHEX    | 18,26*<br>(7,421)    | 18,21*<br>(7,399)  | -0,00078<br>(0,023)  | -0,01<br>(0,0279)    | 20,92*<br>(9,946)       | 20,69*<br>(9,916)      | -0,0697*<br>(0,031)  | 0,032<br>(0,0375)    | 1        | 2     | 2        | 2     |
| IBEX     | SP       | 31,13*<br>(12,36)    | 30,99*<br>(12,33)  | -21,45<br>(16,9)     | -21,35<br>(16,86)    | 25,06*<br>(12,73)       | 24,92*<br>(12,69)      | -23,53<br>(17,4)     | -23,44<br>(17,36)    | 1        | 2     | 1        | 2     |
| ATHEX    | SP       | 17,42**<br>(5,996)   | 17,37**<br>(5,97)  | -0,053<br>(0,041)    | -0,124*<br>(0,049)   | 1,63<br>(4,597)         | 1,602<br>(4,58)        | -0,0578..<br>(0,031) | -0,008<br>(0,037)    | 1        | 2     | 2        | 2     |

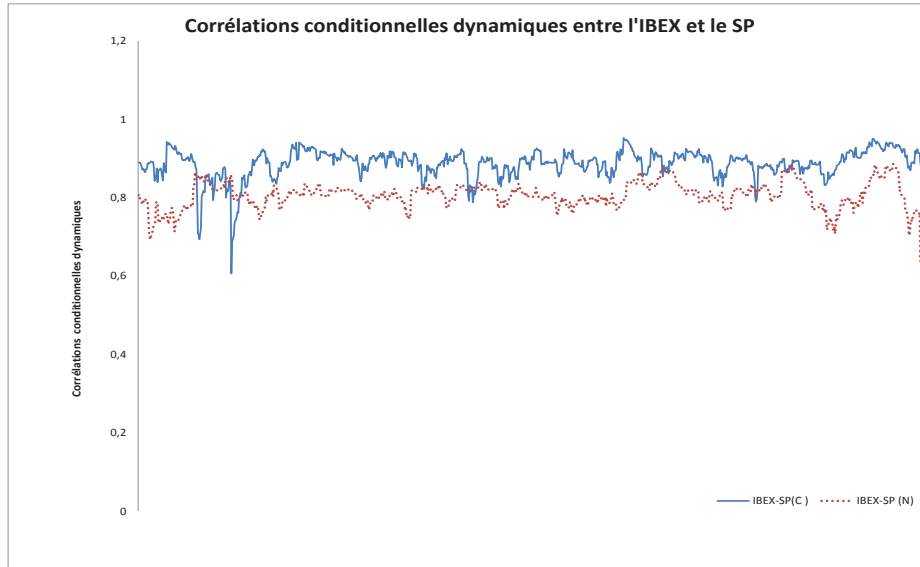
Significatif à (\*\*\*)0, (\*\*\*)0.01, (\*)0.05 (..)0.1. Entre parenthèses () : l'écart type

Estimation des équations de la variance du modèle MG-DCC-GARCH

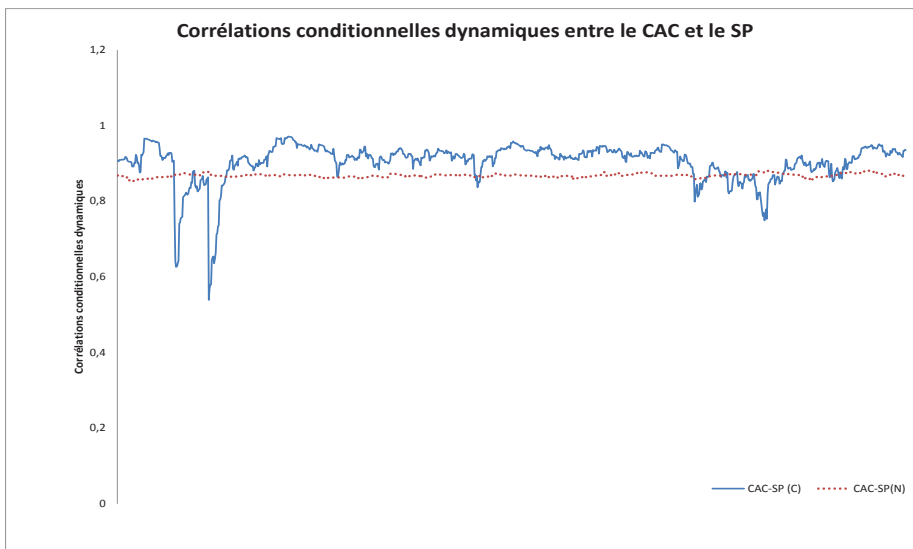
| $X_{1t}$                              | $X_{2t}$ | $a_1$                       | $a_2$                      | $A_{11}$                     | $A_{22}$                  | $B_{11}$                      | $B_{22}$                     | $dcc_\alpha$                 | $dcc_\beta$                  |
|---------------------------------------|----------|-----------------------------|----------------------------|------------------------------|---------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Echantillon 1 (28/11/2003-27/11/2007) |          |                             |                            |                              |                           |                               |                              |                              |                              |
| DAX                                   | CAC      | 0,00001*<br>(0,000005)      | 0,00007<br>(0,032)         | 0,118<br>(0,083)             | 0,081**<br>(0,000051)     | 0,741**<br>(0,0395)           | 0,00039<br>(0,67)            | 0,02<br>(0,052)              | 0,978**<br>(0,041)           |
| DAX                                   | SP       | 0,000012*<br>(0,0000048)    | 0,000053<br>(0,032)        | 0,113<br>(0,0789)            | 0,122***<br>(0,000021)    | 0,75**<br>(0,0449)            | 0,0028<br>(0,3664)           | 0,187*<br>(0,038)            | 0,135<br>(0,343)             |
| DAX                                   | IBEX     | 1,17E-05*<br>(4,92E-06)     | 5,71E-05<br>(0,0308)       | 0,109<br>(0,0808)            | 0,173***<br>(2,31E-05)    | 0,749**<br>(0,0506)           | 0,0028<br>(0,375)            | 0,0147<br>(0,0208)           | 0,974**<br>(0,0449)          |
| CAC                                   | IBEX     | 8,59E-06*<br>(3,47E-06)     | 4,25E-05<br>(0,037)        | 0,138*<br>(0,0666)           | 0,175***<br>(1,84E-05)    | 0,756**<br>(0,0535)           | 0,212<br>(0,313)             | 0,0126<br>(0,0189)           | 0,936**<br>(0,106)           |
| CAC                                   | SP       | 0,00001*<br>(0,0000043)     | 0,0000542<br>(0,0345)      | 0,125<br>(0,081)             | 0,076***<br>(0,0000314)   | 0,74**<br>(0,041)             | 0,016<br>(0,544)             | 0,0047<br>(0,0223)           | 0,935**<br>(0,293)           |
| PSI                                   | ATHEX    | 8,06E-06<br>(5,38E-06)      | 0,00010586<br>(0,0374283)  | 0,1263558<br>(0,1358355)     | 0,097**<br>(6,39E-05)     | 0,67898832**<br>(0,06905097)  | 0,02117849<br>(0,55486321)   | 0,08889932*<br>(0,03920864)  | 3,40E-06<br>(4,63E-01)       |
| IBEX                                  | SP       | 1,17E-05*<br>(4,12E-06)     | 5,42E-05<br>(4,39E-02)     | 0,19299998*<br>(0,07982927)  | 9,87E-02***<br>(2,69E-05) | 0,6574453**<br>(0,04233964)   | 0,02202952<br>(0,45560623)   | 0,02560201<br>(0,03620649)   | 0,922521**<br>(0,1249725)    |
| Echantillon 2 (29/11/2003-25/11/2011) |          |                             |                            |                              |                           |                               |                              |                              |                              |
| DAX                                   | CAC      | 1,42E-04**<br>(3,54E-05)    | 6,3993E-05<br>(0,07120316) | 0,3301743*<br>(0,1565473)    | 2,32E-01***<br>(2,11E-05) | 0,22284812**<br>(0,06123307)  | 0,551991**<br>(0,1202614)    | 0,18832743**<br>(0,02144683) | 0,1105702<br>(0,2871592)     |
| DAX                                   | IBEX     | 4,22E-06<br>(2,41E-06)      | 1,07E-05<br>(2,79E-02)     | 1,15E-01**<br>(2,86E-02)     | 1,33E-01***<br>(4,81E-06) | 0,87645381***<br>(0,03666676) | 0,84216884***<br>(0,0361788) | 0,0892453<br>(0,1402112)     | 0,8362074**<br>(0,1597687)   |
| DAX                                   | SP       | 1,73E-04*<br>(5,51E-05)     | 1,11E-04<br>(7,05E-02)     | 0,3440163<br>(2,19E-01)      | 3,48E-01***<br>(3,27E-05) | 0,14527571<br>(0,07767234)    | 0,3697081*<br>(0,1562011)    | 2,28E-01**<br>(0,03407629)   | 5,25E-09**<br>(7,73E-01)     |
| CAC                                   | IBEX     | 0,00000622*<br>(0,00000309) | 0,0000125<br>(0,0338)      | 0,12347617**<br>(0,03388871) | 0,136***<br>(0,00000553)  | 0,86385782**<br>(0,03791897)  | 0,83328023**<br>(0,03984271) | 0,04016559<br>(0,06944833)   | 0,9322156**<br>(0,1089543)   |
| CAC                                   | ATHEX    | 5,46E-06<br>(2,85E-06)      | 2,63E-05<br>(3,24E-02)     | 0,1203174*<br>(0,03188373)   | 8,77E-02***<br>(1,08E-05) | 0,86928526***<br>(0,02141288) | 0,8771068**<br>(0,02986761)  | 0,01029257<br>(0,01334339)   | 0,9865341***<br>(0,01879934) |
| CAC                                   | SP       | 5,66E-06*<br>(2,79E-06)     | 6,30E-06<br>(3,09E-02)     | 0,1125657*<br>(0,03131882)   | 1,23E-01***<br>(3,23E-06) | 0,87441694**<br>(0,02879145)  | 0,86751773**<br>(0,0286699)  | 0,0520943<br>(0,06611804)    | 0,92396692**<br>(0,09854666) |
| IBEX                                  | SP       | 6,92E-06<br>(4,07E-06)      | 6,31E-06<br>(3,44E-02)     | 0,1275233*<br>(0,03053649)   | 8,92E-02***<br>(3,04E-06) | 0,86649927**<br>(0,02694007)  | 0,89139741**<br>(0,02831627) | 0,05696266<br>(0,03707047)   | 0,875884*<br>(0,1104888)     |

Significatif à (\*\*\*)0, (\*\*\*)0.01, (\*)0.05 (..)0.1. Entre parenthèses () : l'écart type

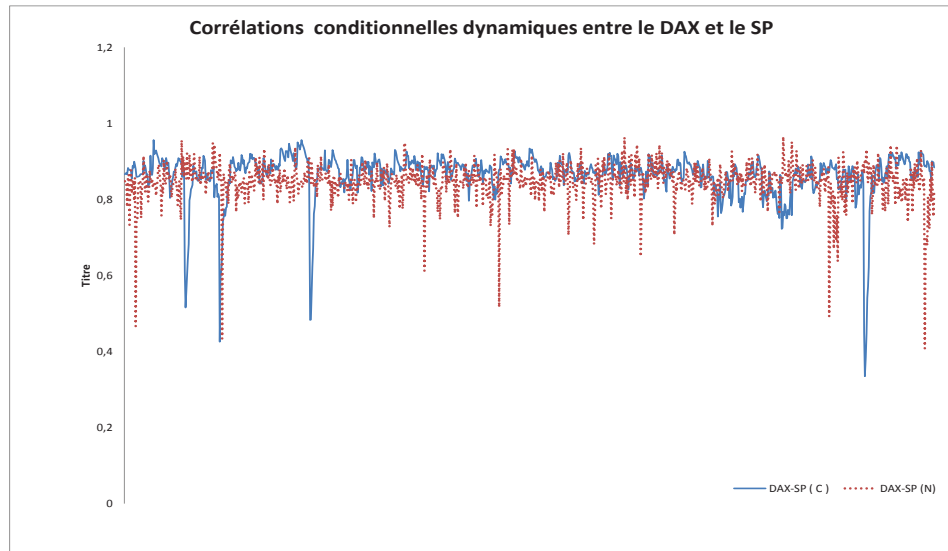
### C.7.3 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES CORRÉLATIONS CONDITIONNELLES DYNAMIQUES



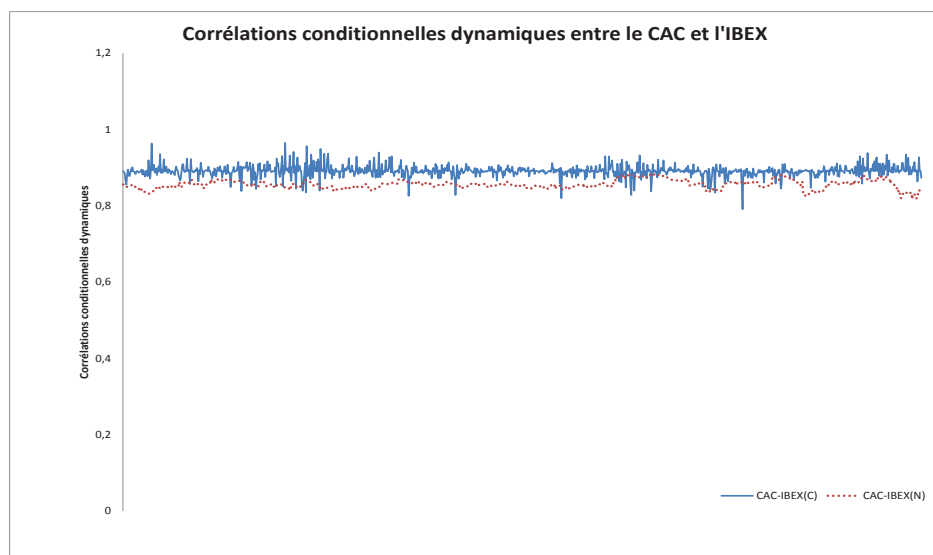
Graphique 105 – Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH



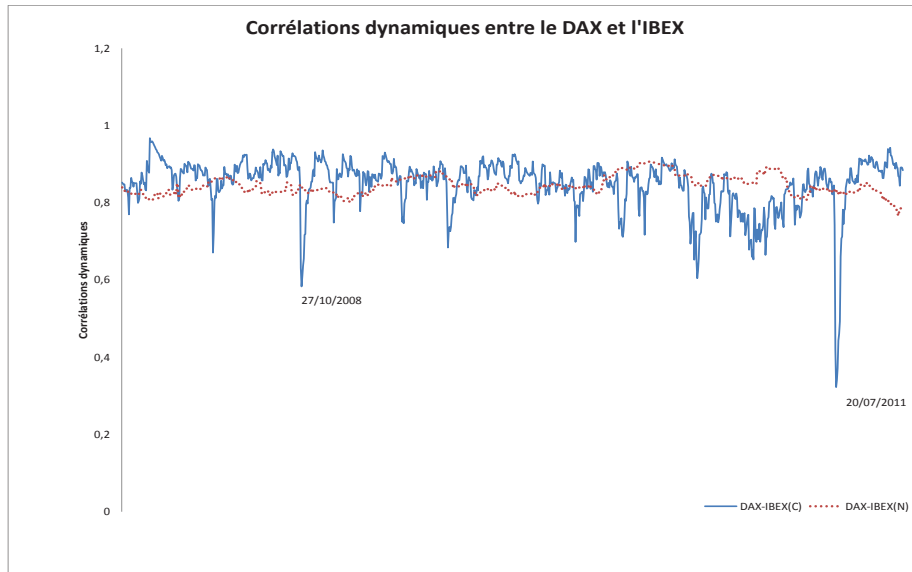
Graphique 106 – Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH



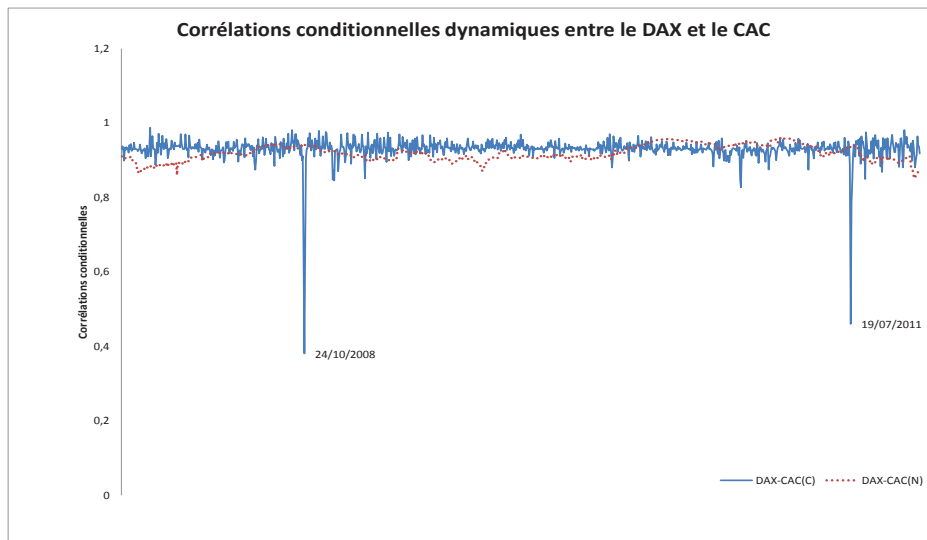
Graphique 107 – Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH



Graphique 108 – Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH



Graphique 109 – Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH



Graphique 110 – Corrélations conditionnelles dynamiques estimées par le modèle MG-DCC-GARCH

Note : Les figures 105 à 110 précédentes représentent les corrélations conditionnelles dynamiques entre deux indices. Les courbes en pointillés décrivent les corrélations en période pré-crise alors que les autres courbes donnent les corrélations en période de crise.

#### C.7.4 ANALYSE EMPIRIQUE POUR LA PÉRIODE [2003-2011]

Alors que la question d'une intensification de l'intégration européenne, notamment en ce qui concerne la politique budgétaire, est en débat, nous proposons une analyse empirique sur six indices boursiers européens. De part leur histoire commune, leur proximité géographique et surtout de leur monnaie unique, il semble intéressant d'étudier les relations qui existent entre ces pays d'un point de vue financier. L'analyse des indices boursiers des pays dits de l'Europe du Nord d'une part (Allemagne [DAX 30], France [CAC 40]) et des pays dits de l'Europe du Sud d'autre part (Espagne [IBEX 35], Portugal [PSI 20], Grèce [ATHEX 20] et Italie [SP 40]) doit permettre une étude des relations d'interdépendances pour la période allant du 28/11/2003 au 25/11/2011.

##### C.7.4.1 ANALYSE DESCRIPTIVE ET TESTS PRÉLIMINAIRES

Les représentations graphiques font apparaître clairement 3 phases : la première est une phase d'expansion qui caractérise les années [2003-2007], la seconde est marquée par une importante chute des indices boursiers du fait notamment de la crise des subprimes intervenue sur le marché américain. Un redémarrage assez timide marque la troisième phase pour la plupart des indices. L'indice de la place d'Athènes montre les difficultés de reprise contrairement à ses partenaires européens. Les séries semblent très volatiles et présentent des non-stationnarités.

L'application des tests de racine unitaires sur les prix des différents indices confirment ces premières observations. Le recours aux différences premières semble indispensable pour stationnariser ces séries. Nous retenons les différences premières du log des prix qui sont une approximation des rentabilités financières.

Nous distinguons clairement 2 périodes : la première caractérisée par de faibles variations traduit une période relativement calme tandis que dans la seconde période nous observons d'importantes variations et des grappes de volatilités. Ces dernières sont assez marquées pour tous les indices sauf pour l'indice Athex puisque ce dernier est caractérisé par de nombreuses fluctuations d'amplitude relativement stable durant la période de crise. Pour les autres indices les tentatives de reprises que nous avons décelées dans la troisième phase permettent de distinguer les périodes très calmes, des périodes très violentes et des périodes volatiles sans mouvement extrême. L'analyse des statistiques descriptives des séries stationnalisées montre les fortes similitudes des différents indices. Le risque, mesuré par



l'écart-type, est quasiment identique pour les différents indices puisqu'il oscille entre 11% et 15%. Il atteint 20% pour l'indice Athex qui apparait comme étant le plus risqué. Le test de Jarque-Bera montre que les distributions des rentabilités des différents indices ne sont pas normales. Cette non-normalité est notamment due au caractère leptokurtique des séries même si l'asymétrie de l'indice Athex est relativement importante. Le test de linéarité de TSAY (1986) indique que le processus générateur des différentes séries est non linéaire puisque l'hypothèse nulle d'un processus générateur autorégressif est rejetée. Ce résultat est confirmé par le test BDS. Le test d'homoscédasticité ARCH-LM révèle une des caractéristiques déjà évoquée à savoir l'hétéroscédasticité des séries. Les tests d'autocorrélation effectués sur différents retards nous amènent à conclure que les séries sont autocorrélées. La détection du caractère non linéaire du processus générateur des différentes séries nous conduit à tester la présence de mémoire longue. L'application du test GPH indique que les structures à mémoire longue n'ont pu être détectées. L'hypothèse de présence de structures non linéaires hautement complexes se confirme au fur et à mesure de l'analyse. L'idée selon laquelle les différentes séries comporteraient des structures chaotiques peut être confirmée par le calcul du plus grand exposant de Lyapunov selon l'algorithme de ROSENSTEIN et al.(1992).

#### C.7.4.2 MODÉLISATION

Nous ne retenons, dans la suite de cette étude, que des modèles bivariés<sup>120</sup>. Ainsi chaque indice est modélisé par lui-même et par un des cinq indices restant. Le choix du modèle adéquat et des paramètres initiaux fait l'objet du premier point. Nous présentons les résultats de la modélisation et les tests de transmission.

##### C.7.4.2.1 Choix des modèles

Compte tenu du nombre important de combinaisons nous utilisons des critères objectifs pour déterminer les modèles à estimer. Les séries des rentabilités des différents actifs sont modélisés pour l'équation de la moyenne par un modèle de Mackey-Glass dont les paramètres  $\tau$  et  $c$  sont déterminés préalablement. En ce qui concerne les équations de la variance pour chaque modèle bivarié, nous retenons 2 tests. Le premier a été développé par ENGLE et SHEPPARD(2002) pour tester l'hypothèse de corrélation conditionnelle constante contre une hypothèse alternative de corrélation conditionnelle dynamique. Le

---

120. Une estimation globale, c'est-à-dire en tenant compte de tous les indices, a été effectuée pour l'équation de la moyenne. Pour l'équation de la variance, le nombre de paramètres à estimer devient rapidement incontrôlable.

second de NAKATANI et TERASVIRTA(2010) permet de vérifier s'il existe une causalité dans la variance conditionnelle. Il s'agit de contrôler si les éléments en dehors des diagonales des matrices A et B, qui caractérisent la causalité en variance conditionnelle, sont significatifs. Sous l'hypothèse nulle, cela suppose qu'un modèle diagonal est suffisant pour modéliser les variances. Nous proposons d'estimer pour chaque couple d'indice l'équation de la moyenne et d'appliquer sur les résidus de chaque modèle bivarié les tests que nous venons de présenter. À partir du choix des modèles estimés pour chaque relation, nous relevons certaines caractéristiques. En premier lieu, nous notons que la dynamique qui régit les (co-) volatilités des indices européens n'est pas unique. L'interaction entre les différents indices européens crée des dynamiques de volatilités très différentes comme en témoigne le nombre important de modèles retenus. Cependant les modèles qui supposent une corrélation conditionnelle constante entre les indices sont plus fréquents. Cela suppose que sur la totalité de la période étudiée les corrélations entre l'indice allemand d'une part et l'indice grec sont constantes. Les mêmes constats peuvent être établis entre l'indice français et les indices espagnol, portugais et grec, ainsi qu'entre l'indice grec et les indices portugais, espagnol et italien.

Des corrélations conditionnelles dynamiques ont été détectées entre l'indice allemand et les indices français, espagnol, portugais, italien. Par ailleurs l'indice italien et les indices de la péninsule ibérique sont caractérisés par des corrélations conditionnelles dynamiques.

#### C.7.4.2.2 Résultats de la modélisation

Nous retenons 14 relations bivariés pour les différents indices européens avec comme critère de sélection l'existence d'une causalité en moyenne ou en variance<sup>121</sup>. L'étude débute par l'estimation de chaque couple d'indice par l'équation de la moyenne :

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \alpha_1 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1+X_{1,t-\tau_1}^{\epsilon_1}} - d_1 X_{1,t-1} + \alpha_2 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1+X_{2,t-\tau_2}^{\epsilon_2}} - d_2 X_{2,t-1} + \epsilon_{1,t} \\ X_{2t} &= \alpha_3 \frac{X_{1,t-\tau_1}}{1+X_{1,t-\tau_1}^{\epsilon_1}} - d_3 X_{1,t-1} + \alpha_4 \frac{X_{2,t-\tau_2}}{1+X_{2,t-\tau_2}^{\epsilon_2}} - d_4 X_{2,t-1} + \epsilon_{2,t} \end{aligned}$$

Avant d'explicitier les résultats obtenus pour analyser les transmissions en moyenne, nous pouvons noter que l'indice français entretient de forts liens avec les indices allemand, espagnol et italien. Au-delà de leur proximité géographique, les principaux indices de ces différents pays sont caractérisés par une forte interdépendance. Nous notons le rôle moteur des indices français et allemands à partir de la significativité de presque tous les coefficients

121. La relation entre l'indice portugais et l'indice italien n'a pas été retenue car aucune causalité n'a été détectée.

de l'équation de la moyenne qui traduisent l'impact du DAX ou du CAC sur les autres indices (alors que l'impact de ces derniers sur les indices français ou allemand n'est pas toujours significatif). Le signe de la différence entre les coefficients  $\alpha$  et  $d$  précise la nature de l'interdépendance. Nous détaillons les résultats obtenus pour chaque indice :

- DAX 30 : Comme nous l'avons évoqué, l'indice allemand joue un rôle particulier puisqu'il influence l'évolution des différents cours européens que nous avons retenus. La significativité des paramètres dans l'estimation DAX-CAC montre que le comportement non linéaire a été pris en compte et conforte l'hypothèse d'une dynamique chaotique hautement complexe. Etant donné que seul l'indice français interagit avec l'indice allemand, la transmission en moyenne est donnée par les coefficients  $\alpha_2$  et  $d_2$ . La différence entre ces 2 coefficients est négative ( $-0.44$ ), ce qui nous amène à penser que l'indice français affecte négativement l'indice allemand quand celui-ci a un impact, de moindre importance mais positif sur l'indice français ( $0.24$ ).
- CAC 40 : Mis à part l'effet feedback avec l'indice allemand mis en évidence précédemment, l'indice français est influencée positivement par les indices espagnol et italien (de 15% et 9% respectivement). Mais il affecte négativement ces 2 indices (de 30% et 22% respectivement). Une forte interdépendance en moyenne entre le CAC 40 d'une part et l'IBEX et le SP d'autre part est confirmée par la significativité de tous les coefficients estimés des équations de Mackey-Glass.
- PSI 20 : L'indice portugais est impacté positivement par l'indice allemand (6%). Mais l'impact le plus important est celui de l'indice espagnol (10%) qui peut s'expliquer par les liens étroits qui existent entre ces 2 indices.
- IBEX 35 : l'indice espagnol est affecté négativement par les 2 indices moteurs que sont le CAC ( $-0.308$ ) et le DAX ( $-0.11$ ) mais cet indice interagit positivement avec l'indice hellénique et l'indice portugais.
- ATHEX : L'indice grecque est affecté positivement par les indices allemand, français et espagnol. On ne peut cependant pas conclure à une interdépendance puisque

l'évolution de l'ATHEX n'a aucun effet sur les différents indices.

- SP : Cet indice est, avec l'indice espagnol, celui dont l'impact des indices moteurs est négatif :  $-2.2\%$  et  $-22\%$ . Par ailleurs, l'indice espagnol affecte positivement l'indice italien.

Ces premières observations révèlent l'existence d'une certaine interdépendance entre les indices européens avec 2 leaders représentés par le DAX et le CAC qui influencent fortement les autres indices. L'effet d'un impact d'un indice sur un autre n'est pas forcément symétrique, il peut être contra-cyclique comme dans le cas de l'indice français et des indices espagnol et italien mais il est souvent procyclique. Une analyse des modèles de variance doit préciser ces observations.

L'analyse des coefficients des différents modèles de variances retenus doit nous indiquer s'il existe une transmission de la volatilité. Nous commentons les résultats obtenus par chacun des modèles :

- Le modèle CCC : Le test de TERASVIRTA et al.(2010) révèle qu'il n'y a pas d'interaction de volatilités pour les 5 relations estimées. La modélisation de la volatilité du DAX et du PSI montre qu'un modèle GARCH(1,1) est adapté pour modéliser les variances. Malgré la faiblesse de ce modèle, il existe néanmoins un lien entre ces 2 indices puisque le coefficient de corrélation estimé est significatif. Malgré l'absence de lien solide en moyenne entre l'indice français et l'indice portugais, le coefficient de corrélation estimé relativement élevé traduit la présence d'une relation d'interdépendance même si elle mérite d'être confortée. Un constat similaire peut être établi pour les relations entre l'indice PSI et l'indice ATHEX d'une part et l'indice ATHEX et l'indice SP d'autre part. Par ailleurs, pour l'indice espagnol et l'indice hellénique dont une transmission en moyenne unilatérale avait été détectée, nous notons que tous les coefficients des modèles GARCH estimés sont significatifs ainsi que le coefficient de corrélation. Ces résultats sont à relativiser compte tenu des insuffisances du modèle CCC-GARCH même s'ils constituent un point de départ pour de futures recherches.

- Le modèle ECCC-GARCH : Les 3 relations estimées par le modèle ECCC-GARCH confirment les observations établies dans l'estimation de la moyenne. En ce qui concerne la relation entre le DAX et l'ATHEX, nous retrouvons un impact significatif de la volatilité du DAX sur la volatilité de l'ATHEX même si la corrélation entre les 2 indices est non significative. Pour ce qui est de la relation entre le CAC et l'IBEX, l'impact du CAC se traduit par la significativité des paramètres de la variance retardée des innovations. De plus, le coefficient de corrélation est significatif. Des résultats similaires sont observés pour la relation CAC-ATHEX.
- Le modèle DCC : Le modèle diagonal a été appliqué aux relations entre le DAX et le SP, le SP et le CAC et le PSI et l'IBEX. Les paramètres de transmission en volatilité sont significatifs pour ces 3 relations : le DAX transmet une partie de sa volatilité à l'indice italien alors qu'il y a une interaction entre les volatilités des indices français et italiens. L'indice portugais transmet une partie de sa volatilité à l'indice espagnol.
- Le modèle EDCC : Cette classe de modèle permet de mettre en évidence les corrélations dynamiques qui existent entre 2 indices mais qui ont été partiellement détectées comme dans le cas de la relation entre le DAX et le CAC. La corrélation dynamique est fortement significative dans le cas de la relation entre le DAX et l'IBEX et il existe une transmission de la volatilité entre les indices IBEX et SP.

Afin de confirmer la pertinence des résultats obtenus, nous proposons d'analyser les séries résiduelles issues de chaque modélisation. Les statistiques descriptives montrent une forte diminution du kurtosis et du coefficient d'asymétrie, et par conséquent de la statistique de Jarque-Bera. Les tests d'autocorrélation montrent qu'il n'y a plus d'autocorrélation sérielle. Les tests ARCH appliqués sur les résidus ne concluent pas toujours sur l'homoscédasticité des résidus. Il n'est pas surprenant d'obtenir ce type de résultats car les séries résiduelles sont le résultat d'une interaction entre différentes séries et l'hétéroscédasticité créée par l'interaction des 2 séries n'est pas toujours prise en compte par les modèles.

# TABLE DES MATIÈRES

---

|   |     |
|---|-----|
| INTRODUCTION GÉNÉRALE   | 29  |
| 1 CHAPITRE 1 : RISQUE DE MARCHÉ : RÈGLEMENTATION PRUDENTIELLE<br>ET TECHNIQUES DE MODÉLISATION          | 43  |
| 1.1 L'évolution du risque de marché à travers la réglementation <sup>122</sup>                          | 48  |
| 1.1.1 Règlementation prudentielle et risques financiers   | 49  |
| 1.1.1.1 Un cadre réglementaire pour les risques financiers  | 50  |
| 1.1.1.1.1 Des risques financiers à la menace du risque sys-<br>témique                                  | 50  |
| 1.1.1.1.1.1 Définitions réglementaires des risques finan-<br>ciers                                      | 51  |
| 1.1.1.1.2 Le risque systémique des EFIS   | 55  |
| 1.1.2 Le risque de marché dans Bâle II  | 58  |
| 1.1.2.1 Approche standardisée du risque de marché   | 61  |
| 1.1.2.2 Exigences de fonds propres pour le risque de marché : une<br>approche par les modèles internes  | 65  |
| 1.1.3 Bâle III : les nouvelles normes prudentielles   | 67  |
| 1.1.3.1 Bâle III : le risque de liquidité   | 70  |
| 1.1.3.2 Bâle III : un accord macroprudentiel sur les fonds propres                                      | 71  |
| 1.2 Approches du risque de marché : cadre théorique et analytique                                       | 78  |
| 1.2.1 Marchés financiers : cadre théorique et résultats empiriques                                      | 79  |
| 1.2.1.1 Hétérogénéité et efficacité des marchés financiers  | 80  |
| 1.2.1.1.1 L'efficacité des marchés financiers   | 81  |
| 1.2.1.1.2 La marche au hasard des cours   | 83  |
| 1.2.1.1.3 Les marchés financiers sont-ils réellement bruités ?  | 84  |
| 1.2.1.2 Les caractéristiques liées à la non-linéarité des séries finan-<br>cières                       | 86  |
| 1.2.1.2.1 La dépendance temporelle des séries financières   | 87  |
| 1.2.1.2.2 La non-stationnarité des séries financières   | 88  |
| 1.2.1.2.3 La non-linéarité des séries financières   | 89  |
| 1.2.1.2.4 La volatilité des séries financières  | 90  |
| 1.2.1.2.5 La mémoire longue des séries financières  | 90  |
| 1.2.1.2.6 Les structures chaotiques des séries financières  | 91  |
| 1.2.2 L'insuffisance des modèles linéaires  | 92  |
| 1.2.2.1 Non-normalité et volatilité des séries financières  | 93  |
| 1.2.2.1.1 L'excès de volatilité des séries des rentabilités fi-<br>nancières                            | 94  |
| 1.2.2.1.2 La non normalité empirique des distributions  | 95  |
| 1.2.2.2 Limites des modèles linéaires classiques  | 96  |
| 1.2.3 Les approches stochastiques de la complexité des marchés financiers                               | 98  |
| 1.2.3.1 Hétéroscédasticité et mémoire longue : une double non-<br>linéarité dans les séries financières | 100 |

|               |   |     |
|---------------|---|-----|
| 1.2.3.1.1     | La non-linéarité en variance : une approche par les modèles de type GARCH . . . . .                           | 101 |
| 1.2.3.1.2     | Hétéroscédasticité et mémoire longue . . . . .  | 103 |
| 1.2.3.2       | Les modèles à changements de régimes . . . . .  | 104 |
| 1.2.3.2.1     | Les modèles ARCH avec changements de régime markoviens . . . . .  | 106 |
| 1.2.3.2.1.1   | Les modèles MRS-GARCH . . . . .   | 108 |
| 1.3           | Risque de marché : une approche à travers la VaR et les ruptures de corrélations . . . . .                    | 110 |
| 1.3.1         | La VaR comme mesure des risques extrêmes : présentation et tests de validation . . . . .                      | 111 |
| 1.3.1.1       | La VaR paramétrique . . . . .   | 112 |
| 1.3.1.2       | Tests de validation des prévisions de la Value-at-Risk . . . . .  | 117 |
| 1.3.1.2.1     | Les différentes stratégies de tests . . . . .   | 120 |
| 1.3.1.2.1.1   | Les tests de durée . . . . .  | 121 |
| 1.3.1.2.1.1.1 | Test de Candelon, Colletaz, Hurlin et Tokpavi(2008) . . . . .   | 122 |
| 1.3.1.2.1.2   | Les tests de différence de martingale . . . . .   | 124 |
| 1.3.1.2.1.2.1 | Test de Berkowitz, Christoffersen et Pelletier(2005) . . . . .  | 124 |
| 1.3.1.2.1.2.2 | Test de Hurlin et Tokpavi(2007a) . . . . .  | 126 |
| 1.3.1.2.1.3   | Les tests fondés sur une régression des hits . . . . .  | 127 |
| 1.3.1.2.1.3.1 | Test de Dumitrescu, Hurlin et Pham(2012) . . . . .  | 127 |
| 1.3.1.2.1.4   | Autres tests . . . . .  | 129 |
| 1.3.2         | Une approche du risque de marché à travers les ruptures de corrélations . . . . .                             | 131 |
| 1.3.2.1       | Identification du phénomène de ' <i>correlations breakdowns</i> ' et impact sur le risque de marché . . . . . | 133 |
| 1.3.2.2       | Ruptures des corrélations et contagions . . . . .   | 136 |
| 2             | CHAPITRE 2 : APPROCHES CHAOS-STOCHASTIQUES DE LA NON-LINÉARITÉ DES SÉRIES FINANCIÈRES . . . . .               | 145 |
| 2.1           | Genèse de l'approche chaotique des marchés financiers . . . . .   | 147 |
| 2.1.1         | Complexités des marchés financiers : une approche par la théorie du chaos . . . . .                           | 148 |
| 2.1.1.1       | Aux origines de la théorie du chaos . . . . .   | 148 |
| 2.1.1.1.1     | De la nécessité d'une nouvelle approche des marchés financiers . . . . .                                      | 149 |
| 2.1.1.1.1.1   | Complexités et non-linéarités des marchés financiers . . . . .  | 152 |
| 2.1.1.1.1.2   | Fondamentalistes et chartistes : des comportements complexes aux dynamiques chaotiques . . . . .              | 154 |
| 2.1.1.1.1.3   | Vers une approche transdisciplinaire des marchés financiers ? . . . . .                                       | 156 |
| 2.1.1.1.2     | De Newton à Poincaré ou comment en est-on arrivé au chaos ? . . . . .   | 159 |
| 2.1.1.1.2.1   | Une présentation de la théorie Newtonienne . . . . .  | 160 |
| 2.1.1.1.2.2   | La vision Newtonienne dans la théorie néo-classique . . . . .   | 162 |

|               |  |     |
|---------------|--|-----|
| 2.1.1.1.2.3   | D'Anaxagoras à Lorenz : les origines de la théorie du chaos . . . . .  | 164 |
| 2.1.2         | La théorie du chaos : concepts clés et tests de détection . . . . .  | 168 |
| 2.1.2.1       | Concepts-clés . . . . .  | 169 |
| 2.1.2.1.1     | Définition et caractéristiques des systèmes chaotiques . . . . .   | 171 |
| 2.1.2.1.2     | Méthodes d'espace des phases . . . . .   | 175 |
| 2.1.2.1.3     | De la théorie à la pratique : le théorème de Takens  | 177 |
| 2.1.2.2       | Tests de détection . . . . .   | 178 |
| 2.1.2.2.1     | Approche métrique . . . . .  | 180 |
| 2.1.2.2.2     | Approche dynamique . . . . .   | 181 |
| 2.1.2.2.3     | Approche topologique . . . . .   | 188 |
| 2.2           | Quelles modélisations chaos-stochastiques pour le risque de marché? . . . .  | 198 |
| 2.2.1         | Chaos, hétéroscédasticité et mémoire longue : quelles combinaisons pour le risque de marché? . . . . .   | 201 |
| 2.2.1.1       | Les chaos en finance . . . . .   | 202 |
| 2.2.1.1.1     | Quelle forme de non-linéarité chaotique pour prendre en compte les structures des séries financières? . .  | 204 |
| 2.2.1.1.1.1   | Le modèle de Mackey-Glass . . . . .  | 206 |
| 2.2.1.1.1.2   | Le modèle de Lasota . . . . .  | 211 |
| 2.2.1.1.1.3   | Comparaison des versions déterministes . .   | 212 |
| 2.2.1.1.1.3.1 | Variation du paramètre $\gamma$ . . . . .  | 213 |
| 2.2.1.1.1.3.2 | Variation du paramètre $\beta$ . . . . .   | 219 |
| 2.2.1.1.1.3.3 | Variations du paramètre $n$ et des conditions initiales . . . . .  | 219 |
| 2.2.1.2       | Modèles chaotiques avec bruits . . . . .   | 224 |
| 2.2.1.2.1     | Modèles chaotiques avec bruits blancs . . . . .  | 225 |
| 2.2.1.2.2     | Le modèle de Mackey-Glass avec bruits hétéroscédastiques . . . . .   | 231 |
| 2.2.1.2.3     | Le modèle de Mackey-Glass avec bruit stochastique fractionnaire (Dung(2012)) . . . . .   | 233 |
| 2.2.2         | Modélisations du risque de marché : modèles chaos-stochastiques et changements de régimes . . . . .  | 235 |
| 2.2.2.1       | Le modèle de Lasota peut-il concurrencer le modèle de Mackey-Glass dans la modélisation non-linéaire des séries financières? . . . . .                 | 237 |
| 2.2.2.2       | Les modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes  | 250 |
| 2.2.2.2.1     | Les modèles chaos-stochastiques avec changements de régime markoviens . . . . .  | 250 |
| 2.2.2.2.1.1   | Présentation de deux modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes . . . . .   | 252 |
| 2.2.2.2.1.2   | Comparaison des modèles . . . . .  | 253 |
| 2.2.2.2.2     | Ruptures de corrélations et modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes . . . . .  | 260 |
| 2.2.2.2.2.1   | Crise financière et bulles spéculatives : une interprétation du problème de 'correlations breakdowns' par un modèle chaotique à deux régimes . . . . . | 261 |



|     |   |   |     |
|-----|---|---|-----|
|     | 2.2.2.2.2   | Modèles chaos-stochastiques avec changements de régimes : une approche bivariee . . . . .                     | 264 |
| 3   | CHAPITRE 3 : MODÉLISATIONS CHAOS-STOCHASTIQUES DES INDICES BOURSIERS DE LA ZONE EURO : ÉVALUATION UNIVARIÉE DE LA VAR ET ANALYSE DES RUPTURES DE CORRÉLATIONS |   | 271 |
| 3.1 | Caractéristiques des indices de la zone euro : une analyse économique et économétrique . . . . .  |   | 278 |
|     | 3.1.1   | Structures et caractéristiques des indices européens . . . . .  | 279 |
|     | 3.1.1.1   | Analyse et tests préliminaires sur la période [2003-2011] . . . . .   | 280 |
|     | 3.1.1.1.1   | Analyse descriptive des prix . . . . .  | 281 |
|     | 3.1.1.1.2   | Étude de la saisonnalité et de la stationnarité des prix . . . . .  | 282 |
|     | 3.1.1.2   | Étude de la non-linéarité . . . . .   | 287 |
|     | 3.1.1.3   | Structures non linéaires des indices européens . . . . .  | 289 |
|     | 3.1.1.3.1   | Autocorrélation et structures hétéroscédastiques . . . . .  | 290 |
|     | 3.1.1.3.2   | Dépendance de long terme . . . . .  | 290 |
|     | 3.1.1.3.3   | Détection des structures chaotiques . . . . .   | 294 |
|     | 3.1.2   | Analyse des caractéristiques économétriques des sous-périodes . . . . .                                       | 298 |
|     | 3.1.3   | Ruptures des corrélations : analyse préliminaire . . . . .  | 299 |
| 3.2 | Évaluations des modélisations univariées (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro . . . . .  |   | 302 |
|     | 3.2.1   | Modélisations (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro : une évaluation dans l'échantillon . . . . . | 305 |
|     | 3.2.1.1   | Résultats d'estimation sur la période [2003-2011] . . . . .   | 305 |
|     | 3.2.1.1.1   | Les modèles incluant un processus GARCH(1,1) . . . . .  | 306 |
|     | 3.2.1.1.2   | Les modèles incluant un processus MRS-GARCH(1,1) . . . . .  | 310 |
|     | 3.2.1.1.2.1   | Les modèles MRS-G . . . . .   | 311 |
|     | 3.2.1.1.2.2   | Les modèles MG-MRS-G . . . . .  | 312 |
|     | 3.2.1.1.2.3   | Les modèles LA-MRS-G . . . . .  | 314 |
|     | 3.2.1.2   | Résultats d'estimation sur les sous-périodes [2004-2006] & [2007-2009] . . . . .                              | 319 |
|     | 3.2.1.3   | Comparaison des modélisations : une approche statistique . . . . .  | 322 |
|     | 3.2.1.3.1   | Analyse descriptive des résidus . . . . .   | 322 |
|     | 3.2.1.3.2   | Analyse statistique des résidus . . . . .   | 326 |
|     | 3.2.1.4   | Comparaison des modélisations : une approche par la Value-at-Risk . . . . .                                   | 331 |
|     | 3.2.1.4.1   | Évaluation de la VaR dans l'échantillon sur longue période . . . . .  | 332 |
|     | 3.2.1.4.1.1   | Test LR de Christoffersen(1998) . . . . .   | 334 |
|     | 3.2.1.4.1.2   | Test DQ de Engle et Manganelli(2004) . . . . .  | 337 |
|     | 3.2.1.4.1.3   | Test DB de Dumitrescu et al.(2012) . . . . .  | 341 |
|     | 3.2.1.4.1.4   | Test GMM de Candelon et al.(2012) . . . . .   | 343 |
|     | 3.2.1.4.1.5   | Risk map . . . . .  | 344 |
|     | 3.2.1.4.2   | Évaluation de la VaR dans l'échantillon sur les sous-périodes . . . . .                                       | 347 |
|     | 3.2.1.4.2.1   | Test LR de Christoffersen(1998) . . . . .   | 348 |
|     | 3.2.1.4.2.2   | Test DQ de Engle et Manganelli(2004) . . . . .  | 349 |
|     | 3.2.1.4.2.3   | Test DB de Dumitrescu et al.(2012) . . . . .  | 350 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| 3.2.1.4.2.4 | Test GMM de Candelon et al.(2011)  | 351 |
| 3.2.1.4.2.5 | Risk map (RM)  | 352 |
| 3.2.2       | Modélisations (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro : une évaluation hors échantillon                                | 353 |
| 3.2.2.1     | Évaluation des capacités prédictives   | 354 |
| 3.2.2.1.1   | Test de Giacomini et White(2006)   | 356 |
| 3.2.2.1.2   | Tests RC et SPA  | 357 |
| 3.2.2.2     | Prévisions hors-échantillon : une évaluation en termes de backtesting  | 360 |
| 3.3         | Ruptures de corrélations : une double analyse chaos-stochastique des indices de la zone euro                                     | 364 |
| 3.3.1       | Résolution du phénomène de corrélations breakdowns par une approche chaos-stochastique standard                                  | 365 |
| 3.3.1.1     | Contagions, interdépendances et relations unilatérales : une intensification en période de crise                                 | 366 |
| 3.3.1.2     | Résultats méthodologiques  | 371 |
| 3.3.1.2.1   | L'effet de persistance à long terme de la volatilité   | 371 |
| 3.3.1.2.2   | La surperformance du modèle MG-DCC-GARCH   | 372 |
| 3.3.2       | Approche unifiée des régimes de volatilité : une modélisation bivariée chaos-stochastique avec changements de régimes markoviens | 375 |
| 3.3.2.1     | Le modèle Mackey-Glass-CCC-GARCH avec changements de régimes markoviens  | 376 |
| 3.3.2.2     | Résultats  | 378 |
| 3.3.2.2.1   | Structures complexes : le rôle particulier des indices DAX et CAC  | 379 |
| 3.3.2.2.2   | Régimes de volatilité et ruptures de corrélations  | 380 |
| 3.3.2.2.3   | Implications économiques   | 383 |
|             | CONCLUSION GÉNÉRALE  | 395 |
|             | BIBLIOGRAPHIE  | 405 |
| A           | ANNEXES CHAPITRE 1   | 473 |
| A.1         | Évaluation des risques relatifs aux titres de créances, de propriété et aux devises  | 474 |
| A.2         | Le nouvel Accord   | 478 |
| A.2.1       | Les instruments dérivés sur titres de créances   | 480 |
| A.2.2       | Le traitement des instruments dérivés sur actions  | 481 |
| A.2.3       | Les positions sur devises  | 481 |
| A.3         | Exigences de fonds propres pour le risque de change et pour les options  | 483 |
| A.4         | Les modèles internes   | 487 |
| A.4.1       | Définition des facteurs de risques de marché   | 487 |
| A.4.2       | Critères qualitatifs   | 488 |
| A.4.3       | Critères quantitatifs  | 489 |
| A.5         | Bâle III   | 491 |
| A.5.1       | Résumé des Accords   | 491 |
| A.5.2       | La crise des subprimes   | 493 |
| A.5.2.1     | Le déroulement de la crise   | 493 |
| A.5.2.2     | Une analyse économique de la crise   | 496 |
| A.5.2.3     | Les politiques ou les pompiers pyromanes   | 498 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| A.5.3       | Ratios de liquidité . . . . .  | 502 |
| A.5.3.1     | Ratio de liquidité à court terme(LCR) . . . . .  | 502 |
| A.5.3.2     | Ratio structurel de liquidité à long terme(NSFR) . . . . .   | 507 |
| A.6         | Les faits stylisés . . . . .   | 510 |
| A.6.1       | Propriétés d'échelles et distributionnelles des rentabilités financières   | 510 |
| A.6.1.1     | La distribution des rentabilités . . . . .   | 510 |
| A.6.1.2     | Les propriétés d'échelles des séries financières . . . . .   | 511 |
| A.6.2       | Les faits stylisés des marchés financiers . . . . .  | 513 |
| A.6.2.1     | Le volume des échanges sur les marchés financiers . . . . .  | 513 |
| A.6.2.2     | Les effets calendriers . . . . .   | 514 |
| A.6.2.2.1   | Les effets intra journaliers . . . . .   | 514 |
| A.6.2.2.2   | Les effets week-end . . . . .  | 514 |
| A.6.2.2.3   | Les effets intra-mensuels . . . . .  | 516 |
| A.6.2.2.4   | L'effet janvier . . . . .  | 517 |
| A.6.2.2.5   | L'effet vacances . . . . .   | 518 |
| A.6.2.2.6   | Anomalie de l'heure d'été . . . . .  | 519 |
| A.6.3       | Mémoire longue . . . . .   | 520 |
| A.6.3.1     | La mémoire longue des séries financières : revue de littérature  | 520 |
| A.6.3.2     | Comment prendre en compte la dépendance de long terme ?  | 522 |
| A.6.3.3     | Les tests de détection des structures à mémoire longue . . .   | 525 |
| A.6.3.3.1   | Rescaled range . . . . .   | 525 |
| A.6.3.3.2   | Le test des rapports de variances . . . . .  | 526 |
| A.6.3.3.3   | Analyse R/S modifiée et exposant de Hurst. . . . .   | 527 |
| A.6.3.3.4   | Test de Shimotsu(2006) . . . . .   | 528 |
| A.6.3.3.4.1 | L'estimation locale Whittle du paramètre d   | 529 |
| A.6.3.3.4.2 | Test basé sur les sous-échantillons . . . . .  | 529 |
| A.6.3.3.4.3 | Test basé sur les différences . . . . .  | 532 |
| A.6.4       | Les modèles GARCH à mémoire longue . . . . .   | 533 |
| A.7         | Les modèles de type GARCH . . . . .  | 536 |
| A.7.1       | Les modèles de variances conditionnelles linéaires . . . . .   | 536 |
| A.7.2       | Les modèles GARCH non linéaires . . . . .  | 537 |
| A.8         | Les modèles à changements de régimes . . . . .   | 541 |
| A.8.1       | Les modèles avec règles de sélection connues . . . . .   | 541 |
| A.8.1.1     | Règle de sélection déterministe : les modèles à seuils . . . .   | 542 |
| A.8.1.2     | Modèle TAR ou à transition brutale . . . . .   | 543 |
| A.8.1.3     | Règle de sélection stochastique : modèles à changements de<br>régimes endogènes . . . . .                          | 548 |
| A.8.2       | Modèle avec règle de sélection du régime inconnue . . . . .  | 551 |
| A.8.2.1     | Modèle à mélange de distribution . . . . .   | 552 |
| A.8.2.2     | Modèles avec changements de régimes markoviens (MS) . .  | 553 |
| A.9         | Estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle com-<br>plet de Goldfeld et Quandt(1973) . . . . . | 557 |
| A.10        | Modèle d'Hamilton(1989) : précisions . . . . .   | 558 |
| A.10.1      | Prévisions . . . . .   | 559 |
| A.10.1.1    | Tendance markovienne en niveau . . . . .   | 559 |
| A.10.1.2    | Tendance markovienne en log . . . . .  | 560 |
| A.10.2      | Filtrage . . . . .   | 562 |
| A.10.3      | Algorithmes . . . . .  | 562 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| A.11     | Évaluation de la fonction de vraisemblance du modèle d'Hamilton et Susmel(1994) | 564 |
| A.11.1   | Prévisions  | 564 |
| A.12     | Méthodes d'estimation de la VaR   | 566 |
| A.13     | Limites et alternatives à la VaR  | 569 |
| A.13.1   | Limites de l'instrument VaR   | 569 |
| A.13.2   | Alternatives  | 571 |
| A.13.2.1 | La Conditional Value-at-Risk  | 572 |
| A.13.2.2 | La mean-modified VaR  | 574 |
| A.13.2.3 | La VaR stressée   | 575 |
| A.13.2.4 | La Stress-VaR   | 575 |
| A.14     | Les procédures de backtesting : cadre statistique et normes prudentielles       | 576 |
| A.14.1   | Concepts et hypothèses théoriques   | 577 |
| A.14.1.1 | Définition des concepts des procédures d'évaluation                             | 577 |
| A.14.1.2 | Les hypothèses de validation de la VaR  | 578 |
| A.14.2   | Les normes prudentielles  | 580 |
| A.14.2.1 | L'approche traffic light  | 581 |
| A.14.2.2 | Les Stress-tests  | 583 |
| A.14.2.3 | Cadre réglementaire   | 589 |
| A.14.2.4 | Application pratique  | 593 |
| A.15     | L'approche Density Forecast Evaluation  | 594 |
| A.15.1   | Le test de Crnkovic et Drachmann(1996)  | 595 |
| A.15.2   | Le test de Diebold, Gunther et Tay(1998)  | 596 |
| A.15.3   | Test de Berkowitz(2001)   | 596 |
| A.16     | L'approche Event Probability Forecast Evaluation                                | 597 |
| A.16.1   | Les tests LR  | 597 |
| A.16.1.1 | Test de Kupiec(1995)  | 597 |
| A.16.1.2 | Tests LR de Christoffersen(1998)  | 600 |
| A.16.2   | Les tests de durée  | 604 |
| A.16.2.1 | Le test Time Until First Failure(TUFF)  | 604 |
| A.16.2.2 | Le test de Kupiec mixte (Haas(2001))  | 605 |
| A.16.2.3 | Test de Christoffersen et Pelletier(2004)                                       | 605 |
| A.16.2.4 | Test de Haas(2007)  | 608 |
| A.16.3   | Les tests fondés sur une régression des hits                                    | 609 |
| A.16.3.1 | Test de Clements et Taylor(2003)  | 609 |
| A.16.3.2 | Test d'Engle et Manganelli(2004)  | 610 |
| A.16.3.3 | Test de Patton(2002)  | 611 |
| A.16.4   | Autres tests  | 612 |
| A.16.4.1 | Test de Dumitrescu, Hurlin et Madkour(2011)                                     | 612 |
| A.16.4.2 | Backtesting basé sur la fonction des pertes                                     | 614 |
| A.16.4.3 | Le test de Colletaz, Hurlin et Pérignon(2011)                                   | 614 |
| A.16.4.4 | Le test de Wong(2010)   | 616 |
| A.16.4.5 | Test de Pérignon et Smith(2008)   | 618 |
| B        | ANNEXES CHAPITRE 2  | 621 |
| B.1      | La non-linéarité  | 621 |
| B.2      | Méthode des surrogates data   | 624 |
| B.3      | Le chaos en finance : une approche par les méthodes non paramétriques           | 625 |
| B.3.1    | La méthode des plus proches voisins   | 626 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| B.3.2       | Les fonctions à bases radiales . . . . .   | 627 |
| B.3.3       | Les réseaux de neurones . . . . .  | 628 |
| B.4         | Value-at-Risk et changements de régimes . . . . .  | 630 |
| B.4.1       | Le modèle de Billio et Pelizzon(2000) . . . . .  | 631 |
| B.4.2       | Modèles avec changements de régimes beta . . . . .   | 632 |
| B.4.3       | Modèle d'Elliot et Miao(2009) . . . . .  | 634 |
| C           | ANNEXES CHAPITRE 3 . . . . .   | 637 |
| C.1         | Analyse des structures et caractéristiques des indices européens sur la période [2003-2011] . . . . .                                  | 637 |
| C.1.1       | Les relations économiques entre indices et titres bancaires : une analyse comparée des GIPSI, de l'Allemagne et de la France . . . . . | 637 |
| C.1.1.1     | La part des actifs bancaires dans chaque indice . . . . .  | 638 |
| C.1.1.2     | Les corrélations entre indices et titres . . . . .   | 642 |
| C.1.1.3     | Les droites de marché . . . . .  | 649 |
| C.1.2       | Tests préliminaires . . . . .  | 651 |
| C.1.2.1     | Représentations graphiques des indices européens . . . . .   | 655 |
| C.1.2.2     | Tests de saisonnalité . . . . .  | 655 |
| C.1.2.2.1   | Tableau de Buys-Ballot . . . . .   | 655 |
| C.1.2.2.2   | Les tests de Laloire : présentation et résultats . . . . .   | 657 |
| C.1.2.3     | Tests de racine unitaire . . . . .   | 658 |
| C.1.2.4     | Tests de linéarité . . . . .   | 660 |
| C.1.2.4.1   | Test RESET . . . . .   | 660 |
| C.1.2.4.2   | Test BDS . . . . .   | 660 |
| C.1.2.4.2.1 | Présentation . . . . .   | 660 |
| C.1.2.4.2.2 | Choix des filtres linéaires et résultats du test BDS . . . . .   | 662 |
| C.1.3       | Tests d'homoscédasticité et de non-autocorrélation sur les rentabilités . . . . .  | 664 |
| C.1.3.1     | Tests ARCH . . . . .   | 664 |
| C.1.3.2     | Test de McLeod et Li . . . . .   | 664 |
| C.1.3.3     | Tests d'autocorrélation . . . . .  | 665 |
| C.1.4       | Tests de détection de structures à mémoire longue . . . . .  | 665 |
| C.1.4.1     | Test GPH . . . . .   | 665 |
| C.1.4.2     | Test de Shimotsu(2006) . . . . .   | 666 |
| C.1.5       | Tests de détection de structures chaotiques . . . . .  | 668 |
| C.1.5.1     | Test de Bensaïda . . . . .   | 668 |
| C.1.5.2     | Tests de Aparicio et al.(2011) . . . . .   | 668 |
| C.2         | Analyse préliminaire des sous-périodes [2004-2006] & [2007-2009] . . . . .   | 669 |
| C.2.1       | Représentations graphiques . . . . .   | 669 |
| C.2.2       | Statistiques descriptives des sous-périodes . . . . .  | 671 |
| C.2.3       | Tests d'homoscédasticité et d'autocorrélation . . . . .  | 672 |
| C.3         | Relations entre les indices de la zone euro : test d'Engle et Sheppard(2001) . . . . .   | 672 |
| C.4         | Modélisations (chaos)-stochastiques des indices de la zone euro : éléments d'analyse pour la période [2003-2011] . . . . .             | 675 |
| C.4.1       | Modèles MG-MRS-G . . . . .   | 675 |
| C.4.2       | Modèle LA-MRS-G . . . . .  | 679 |
| C.5         | Évaluations dans l'échantillon . . . . .   | 683 |
| C.5.1       | Approches statistiques . . . . .   | 683 |
| C.5.1.1     | Mesures statistiques . . . . .   | 683 |

|       |           |   |   |     |
|-------|-----------|---|---|-----|
|       | C.5.1.1.1 | Période [2003-2011]   | 683   |     |
|       | C.5.1.1.2 | Périodes [2004-2006] & [2007-2009]  | 683   |     |
|       | c.5.1.2   | Tests statistiques  | 683   |     |
| c.5.2 |           | Approche par la VaR   | 706   |     |
|       | c.5.2.1   | Période [2003-2011]   | 706   |     |
|       |           | C.5.2.1.1 Représentations graphiques  | 706   |     |
|       |           | C.5.2.1.2 Tests de backtesting  | 718   |     |
|       | c.5.2.2   | Sous-périodes [2004-2006] & [2007-2009]   | 732   |     |
|       |           | C.5.2.2.1 Représentations graphiques  | 732   |     |
|       |           | C.5.2.2.2 Tests de backtesting dans l'échantillon   | 737   |     |
| c.6   |           | Évaluation hors-échantillon   | 746   |     |
|       | c.6.1     | Approche statistique  | 746   |     |
|       |           | c.6.1.1 Tests d'évaluation des capacités prédictives                                      | 746   |     |
|       |           |   | C.6.1.1.1 Le test Reality Check (RC) de White(2000) | 746 |
|       |           |   | C.6.1.1.2 Le test SPA de Hansen(2005)               | 746 |
|       |           |   | C.6.1.1.3 Le test CPA de Giacomini et White(2006)   | 747 |
|       |           | c.6.1.2 Résultats du test de Giacomini et White(2006)                                     | 748   |     |
|       |           | c.6.1.3 Résultats des tests RC et SPA   | 750   |     |
|       | c.6.2     | Évaluation hors échantillon : une approche par la VaR                                     | 756   |     |
| c.7   |           | Ruptures de corrélations : une approche par un modèle chaos stochastique en sous périodes | 763   |     |
|       | c.7.1     | Les modèles GARCH multivariés   | 763   |     |
|       | c.7.2     | Le modèle Mackey-Glass bivarié  | 766   |     |
|       |           | c.7.2.1 Estimations des modèles   | 768   |     |
|       | c.7.3     | Représentations graphiques des corrélations conditionnelles dynamiques                    | 772   |     |
|       | c.7.4     | Analyse empirique pour la période [2003-2011]   | 775   |     |
|       |           | c.7.4.1 Analyse descriptive et tests préliminaires  | 775   |     |
|       |           | c.7.4.2 Modélisation  | 776   |     |
|       |           |   | C.7.4.2.1 Choix des modèles                         | 776 |
|       |           |   | C.7.4.2.2 Résultats de la modélisation              | 777 |



# DECLARATION

---

**VU et PERMIS D'IMPRIMER**

A Montpellier, le 10 Décembre 2015

Le Président de l'Université de Montpellier

**Philippe Augé**