



**HAL**  
open science

# Modèle d'endommagement à gradient : approche par homogénéisation

Duc Trung Le

► **To cite this version:**

Duc Trung Le. Modèle d'endommagement à gradient : approche par homogénéisation. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066662 . tel-01367480

**HAL Id: tel-01367480**

**<https://theses.hal.science/tel-01367480>**

Submitted on 16 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour obtenir le titre de

## Docteur en Sciences

de l'Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale des Sciences Mécaniques, Acoustique et Électronique de Paris

### Mention : Mécanique

Présentée et soutenue par

LE Duc Trung

## Modèle d'endommagement à gradient : approche par homogénéisation

soutenue le 12 Novembre 2015

### Jury :

<i>Président :</i>	Djimédo Kondo	- Université Pierre et Marie Curie
<i>Rapporteurs :</i>	Jean Claude Michel	- LMA Marseille
<i>Rapporteurs :</i>	Pierre Seppecher	- Université de Toulon
<i>Examineurs :</i>	Hélène Dumontet	- Université Pierre et Marie Curie
<i>Examineurs :</i>	Kim Pham	- ENSTA Paristech
<i>Examineurs :</i>	Stefano Vidoli	- University of Rome La Sapienza
<i>Directeur de thèse :</i>	Jean Jacques Marigo	- École Polytechnique



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Étude bibliographique</b>	<b>5</b>
1.1 Approches variationnelles de l'endommagement . . . . .	6
1.1.1 Les ingrédients fondamentaux . . . . .	6
1.1.2 Les modèles d'endommagement standards . . . . .	8
1.1.3 La nouvelle formulation du problème d'évolution . . . . .	12
1.1.4 Introduction des modèles à gradient . . . . .	15
1.2 Homogénéisation aux ordres supérieurs . . . . .	21
1.2.1 L'approche par développement asymptotique . . . . .	21
1.2.2 Une approche basée sur l'équivalence énergétique . . . . .	27
1.3 Conclusion . . . . .	29
<b>2 Homogénéisation d'un milieu périodique</b>	<b>31</b>
2.1 Position du problème . . . . .	32
2.2 Homogénéisation par l'approche énergétique . . . . .	33
2.2.1 Développement asymptotique de l'énergie $J^\varepsilon$ . . . . .	33
2.2.2 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$ . . . . .	36
2.2.3 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^0$ . . . . .	36
2.2.4 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^1$ . . . . .	39
2.2.5 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^2$ . . . . .	40
2.2.6 Énergie macroscopique et déplacement macroscopique . . . . .	47
2.3 Identification du modèle du second gradient . . . . .	47
2.4 Application à un milieu stratifié . . . . .	50
2.4.1 Position du problème . . . . .	50
2.4.2 Solutions des problèmes de cellule . . . . .	51

2.4.3	Les coefficients homogénéisés . . . . .	53
2.5	Conclusion . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Homogénéisation d'un milieu quasi-périodique</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	58
3.2	Homogénéisation par l'approche énergétique . . . . .	59
3.2.1	Développement asymptotique de l'énergie $J^\varepsilon$ . . . . .	59
3.2.2	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$ . . . . .	62
3.2.3	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^0$ . . . . .	62
3.2.4	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^1$ . . . . .	64
3.2.5	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^2$ . . . . .	66
3.3	Identification d'énergie homogénéisée . . . . .	75
3.3.1	Identification de l'ordre $e^0 : W^{(0)} = J^{(0)}$ . . . . .	77
3.3.2	Identification de l'ordre $e^1 : W^{(1)} = J^{(1)}$ . . . . .	77
3.3.3	Identification de l'ordre $e^2 : W^{(2)} = J^{(2)}$ . . . . .	78
3.3.4	Simplification des coefficients de l'énergie macroscopique . . . . .	80
3.4	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Application au milieu stratifié et micro fissuré</b>	<b>85</b>
4.1	Homogénéisation d'un composite quasi périodique . . . . .	86
4.1.1	Description du milieu . . . . .	86
4.1.2	Solutions des problèmes de cellule . . . . .	87
4.1.3	Les coefficients homogénéisés . . . . .	90
4.1.4	Illustration . . . . .	92
4.2	Homogénéisation d'un milieu microfissuré quasi périodique . . . . .	93
4.2.1	Description du milieu . . . . .	93
4.2.2	Solutions des problèmes de cellule . . . . .	95
4.2.3	Les coefficients homogénéisés . . . . .	113
4.3	Conclusion . . . . .	120

---

<b>5</b>	<b>Construction d'un modèle d'endommagement à gradient</b>	<b>123</b>
5.1	Approche variationnelle pour un modèle 1D . . . . .	124
5.2	Loi d'évolution de l'endommagement . . . . .	126
5.3	Solution homogène d'endommagement . . . . .	130
5.4	Solution localisée au chargement fixé . . . . .	133
5.4.1	Solution à l'extérieur de la zone endommagée . . . . .	134
5.4.2	Solution à l'intérieure de la zone endommagée . . . . .	135
5.5	Simulation numérique . . . . .	140
5.5.1	Paramètre du modèle . . . . .	140
5.5.2	Formulation en temps discret et algorithme de solution . . . . .	141
5.5.3	Résultats numériques . . . . .	143
5.6	Conclusion . . . . .	152
	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>155</b>
	<b>A Annexe A</b>	<b>159</b>
	<b>B Annexe B</b>	<b>161</b>



# Introduction générale

L'endommagement dans les matériaux se produit à travers différents mécanismes qui sont complexes et impliquent généralement l'interaction entre micro-constituants. La complexité de ces matériaux dits "fragiles" est essentiellement liée aux mécanismes de dégradation (fissures, microfissures, vides). Au cours des dernières années, un certain nombre de modèles ont été développés pour simuler l'endommagement et la rupture dans les matériaux. Parmi lesquels, l'approche de l'endommagement continu est particulièrement intéressante en le sens qu'elle fournit un cadre viable pour la description de la distribution de l'endommagement, y compris la dégradation de la rigidité, initiation, évolution et la coalescence des micro-fissures et des vides.

Différents modèles de l'endommagement pour les matériaux fragiles peuvent être classés en 2 types : les approches en micro-mécanique et les approches en macro-mécanique. Dans l'approche macroscopique de l'endommagement, les modèles continus d'endommagement sont généralement phénoménologiques [13], [25]. Le matériau est idéalisé (ou homogénéisé) comme un milieu homogène anisotrope, l'endommagement est pris en compte à l'aide de variables internes. Il s'agit souvent d'une variable scalaire pour l'endommagement isotrope ou des variables tensorielles d'ordre 2, pour l'endommagement anisotrope [12], [14]. La microfissuration est représentée comme une dégradation des modules élastiques. L'approche microscopique de l'endommagement, d'autre part, traite chaque volume élémentaire représentatif (VER) comme un milieu homogène. Les variables d'endommagement local sont définies pour représenter l'état endommagé du VER. La réponse globale est ensuite obtenue par homogénéisation [17],[24], [1]. Au point de vue mathématique, les deux approches peuvent être considérées comme une procédure en deux étapes. La différence principale entre les deux approches se trouve dans l'ordre chronologique dans lequel l'homogénéisation et l'écriture du problème d'évolution d'endommagement sont effectués. Dans l'approche macro-mécanique, l'homogénéisation est effectuée en premier, suivie par l'application des principes de mécanique de l'endomma-



gement pour les milieux anisotropes homogénéisés, tandis que dans l'approche micro-mécanique, la mécanique de l'endommagement est appliquée à chaque VER, avant l'utilisation de la méthode de l'homogénéisation. Dans ce mémoire, nous adoptons la vision macro-mécanique de l'endommagement : la microstructure est le résultat d'une adaptation du matériau à ses sollicitations, elle est la réponse optimale au sens d'un principe d'évolution à découvrir.

Pour les modèles macro-mécaniques, une formulation du problème d'évolution en termes du taux de restitution d'énergie a été précisément écrite et établie pour les lois d'endommagement par Marigo [27] en y introduisant la notion d'irréversibilité et en justifiant le modèle de dégradation à partir d'une approche micro-mécanique. Cependant, ce modèle a posé des problèmes liés au traitement de la non-unicité des solutions ou des discontinuités temporelles qui sont intrinsèques à la nature des matériaux adoucissants. Une nouvelle formulation énergétique basée sur le calcul variationnel dans le cadre des matériaux standards généralisés a été présentée par Pham et Marigo [35], qui se résume à trois principes physiques : d'irréversibilité de l'endommagement, de stabilité et de bilan d'énergie. Malgré cette nouvelle formulation, les simulations numériques à l'aide de ces modèles locaux pour les matériaux adoucissants ont montré de fortes dépendances des résultats au maillage : la taille de zone localisée d'endommagement était fixée par la taille du maillage. Le modèle local a été régularisé en introduisant le gradient d'endommagement dans l'énergie totale (Pham et Marigo [37]). Ce modèle à gradient réussit à éviter les pathologies des modèles locaux mais l'introduction de termes en gradient d'endommagement dans l'énergie est purement phénoménologique, il n'y a pas de justification de base micro-mécanique pour ce terme.

L'objectif de ce travail de thèse est de proposer une démarche de modélisation en partant de la microstructure pour obtenir un modèle d'endommagement à gradient. Avant de décrire plus en détails le contenu de ce mémoire, nous remarquons 2 parties principales de la thèse :

- une méthode d'homogénéisation pour justifier l'introduction des termes en gradient de l'endommagement et ainsi déduire un modèle de comportement non local (chapitre 2,3,4).

- un modèle d'endommagement à gradient formulé dans le cadre variationnel à partir du milieu homogénéisé (chapitre 5).

Plus précisément, ce mémoire est constitué de cinq chapitres :

- Le premier chapitre est essentiellement de nature bibliographique. Dans la première partie, nous présentons la construction d'un modèle d'endommagement dans le cadre variationnel. Nous commençons par la construction du modèle local d'endommagement basé sur une variable scalaire, nous rappelons en suite les résultats principaux de Pham et Marigo [37] sur un modèle régularisé par gradient d'endommagement, qui est formulé directement dans le cadre variationnel. En basant la justification du modèle local sur la donnée d'une microstructure [30], la deuxième partie est consacrée à la présentation de la méthode d'homogénéisation aux ordres supérieurs.
- Au deuxième chapitre, nous présentons une approche basée sur la combinaison de la méthode variationnelle et de la méthode des développements asymptotiques dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Nous construisons une énergie effective du milieu hétérogène dont les coefficients homogénéisés sont obtenus en résolvant des problèmes de cellule. À titre d'illustration, nous déterminons l'énergie effective dans le cas particulier d'un composite stratifié.
- Dans le troisième chapitre, afin de pouvoir formuler les modèles avec la localisation d'endommagement, nous étendons le problème traité dans le deuxième chapitre à un milieu hétérogène quasi-périodique. L'idée de la quasi-périodicité vient de la dégradation de manière non uniforme de la rigidité. Nous formulons les problèmes de cellule ainsi que les expressions des coefficients homogénéisés dans le cas 3D général.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'application de la méthode pour différents types de quasi-périodicité. Le premier exemple est l'homogénéisation d'un composite quasi-périodique qui possède une microstructure 1D et où la quasi périodicité apparaît dans les propriétés des matériaux. Le deuxième porte sur un milieu mi-

crofissuré où la microstructure est 2D et où la quasi- périodicité apparaît dans la géométrie de la cellule. Tandis que les problèmes de cellule dans le premier exemple peuvent être résolus analytiquement, ceux du deuxième exemple sont traités numériquement.

- Au cinquième chapitre, nous construisons un modèle d'endommagement dans le cadre variationnel en utilisant l'énergie totale d'un milieu hétérogène quasi-périodique homogénéisé. Pour des raisons de simplicité, nous ajoutons des hypothèses sur les coefficients de l'énergie totale, et nous pouvons calculer les solutions analytiques dans le cas réduit. Les simulations numériques sont réalisées pour le modèle complet afin d'estimer la capacité d'approximation du modèle de Griffith

# Étude bibliographique

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Approches variationnelles de l'endommagement</b>	<b>6</b>
1.1.1	Les ingrédients fondamentaux	6
1.1.2	Les modèles d'endommagement standards	8
1.1.3	La nouvelle formulation du problème d'évolution	12
1.1.4	Introduction des modèles à gradient	15
<b>1.2</b>	<b>Homogénéisation aux ordres supérieurs</b>	<b>21</b>
1.2.1	L'approche par développement asymptotique	21
1.2.2	Une approche basée sur l'équivalence énergétique	27
<b>1.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

---

*Ce premier chapitre, à caractère bibliographique essentiellement, propose de rappeler la méthode de construction des modèles d'endommagement et la raison conduisant à l'adoption d'une approche par l'homogénéisation. Nous commençons par un modèle d'endommagement formulé dans le cadre des matériaux standards généralisés, où le travail de déformation est une fonction d'état. Après avoir présenté le cadre variationnel à l'écriture du problème d'évolution, basé sur les trois principes physiques d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie, nous étendons les modèles locaux aux modèles régularisés. Une fois que les termes à gradient d'endommagement ont été introduits dans l'énergie, le problème d'évolution s'écrit toujours à partir des trois principes physiques. Dans le but de trouver une justification des termes à gradient à partir de la microstructure, la deuxième partie est consacrée à la méthode d'homogénéisation aux ordres supérieurs*

## 1.1 Approches variationnelles de l'endommagement

### 1.1.1 Les ingrédients fondamentaux

Suivant la démarche initiée par [27], la construction d'un modèle d'endommagement passe par le choix :

- (i) d'une variable interne qui représente l'état d'endommagement du matériau
- (ii) de la dépendance de la relation contrainte-déformation vis-à-vis de ce paramètre
- (iii) d'une loi d'évolution du paramètre d'endommagement

L'objectif cette l'étude n'étant pas de développer un modèle précis, applicable à un matériau précis, mais plutôt de faire une étude qualitative d'un modèle représentatif de cette famille de modèles d'endommagement fragiles standards, les choix les plus simples sont faits. Ces choix consistent en les hypothèses suivantes :

- L'état d'un point matériel de dommages peut être décrit par un scalaire  $\alpha$ . C'est bien sûr une hypothèse très forte qui est essentiellement justifiée par la raison de simplicité. Ces types de modèles phénoménologiques sont consacrés à la simulation numérique, qui exige que les modèles contiennent un petit nombre de paramètres. Le choix du paramètre et par conséquent son interprétation physique reste à ce stade arbitraire. À partir d'un premier choix, nous aurons toujours la possibilité de faire un changement de variable, par conséquent, à ce stade, nous supposons simplement que  $\alpha$  croît de 0 à  $\alpha_m$  où  $0 < \alpha_m \leq +\infty$ , 0 correspond à l'état initial et  $\alpha_m$  à l'état endommagé complet.
- À l'endommagement fixe, le matériau a un comportement élastique linéaire. Mais sa rigidité dépend de son degré d'endommagement. Autrement dit le matériau a une élasticité variable caractérisée par la relation  $\alpha \rightarrow A(\alpha)$  entre le tenseur de rigidité et le paramètre d'endommagement, fonction (évidemment) positive et décroissante :

$$A(0) > 0 \quad , \quad A'(\alpha) < 0 \quad , \quad A(\alpha_m) = 0 \quad (1.1)$$

Les inégalités ci-dessus doivent être compris dans le sens de la positivité des tenseurs. Plus précisément, un tenseur  $A$  d'ordre 4 est positif lorsque l'inégalité suivante est vérifiée :

$$A \varepsilon \cdot \varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{M}_s^n, \varepsilon \neq 0 \quad (1.2)$$

ici  $\mathbb{M}_s^n$  désigne l'espace de tenseurs d'ordre 2 avec la dimension de l'espace  $n$ .

Le comportement de matériau est définie par le potentiel élastique  $\psi(\varepsilon, \alpha)$  qui est supposé être continûment différentiable dans  $\mathbb{M}_s^n \times [0, \alpha_m)$ . Pour simplifier la présentation, nous allons supposer que  $\Psi$  est une fonction quadratique de  $\varepsilon$  et  $\alpha$  donné :

$$\psi(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon \cdot \varepsilon \quad (1.3)$$

- Pour des raisons d'irréversibilité, l'endommagement ne peut pas décroître et sa croissance est régie par une loi à seuil (comme dans la plasticité). Par conséquent, nous supposons qu'il existe une fonction  $\phi(\varepsilon, \alpha)$ , tels que l'évolution de  $\alpha$  est régie par les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\alpha} \geq 0 \quad , \quad \phi(\varepsilon, \alpha) \leq 0 \quad , \quad \dot{\alpha} \phi(\varepsilon, \alpha) = 0 \quad (1.4)$$

La première inégalité de (1.4) stipule l'irréversibilité de l'évolution de l'endommagement. La deuxième inégalité constitue le critère d'endommagement tandis que la dernière égalité n'autorise la croissance de l'endommagement que lorsque les déformations se situent au seuil de la fonction  $\phi$  (défini par  $\phi = 0$ ). Ce type de loi à seuil où les déformations sont contraintes par un critère conduit à l'existence d'un domaine de déformation admissible défini par :

$$\mathcal{R}(\alpha) = \{ \varepsilon \in \mathbb{M}_s^n \quad : \quad \phi(\varepsilon, \alpha) \leq 0 \} \quad (1.5)$$

et qui dépend donc de l'endommagement du fait du critère. Nous supposons que la fonction  $\phi$  soit telle que ce domaine soit un ensemble simplement connexe et fermé de  $\mathbb{M}_s^n$ . En outre nous supposons enfin que l'état de déformation nulle est toujours un point intérieur au domaine i.e.  $\phi(0, \alpha) < 0$ .

### 1.1.2 Les modèles d'endommagement standards

À priori, les fonctions  $\psi$  et  $\phi$  peuvent être choisies de façon indépendante. Les lois dites standards (Nguyen [32]) consistent à définir le seuil d'endommagement  $\phi$  à partir de la force thermodynamique associée à  $\alpha$  :  $Y = -\partial\psi/\partial\alpha$ . Il se trouve que cette loi standard peut être déduite du postulat de Drucker- Ilyushin . Ce résultat fondamental a été prouvé par Marigo [29], [28] et nous rappelons simplement les résultats ici.

En effet, soit  $t \in [0, 1] \rightarrow \varepsilon(t) \in \mathbb{M}_s^n$  un trajet de déformation allant de  $\varepsilon(0) = 0$  à  $\varepsilon(1) = \varepsilon$ . À chaque instant  $t$  nous appelons  $\bar{\alpha}(t)$  l'état d'endommagement dans lequel se trouve le point matériel. Nous supposons que le matériau est sain à l'état initial et que l'état endommagé final est noté par  $\bar{\alpha}(1) = \alpha$ . Le travail de déformation  $W$  durant cette transformation est donné par

$$W = \int_0^1 \sigma(t) \cdot \dot{\varepsilon}(t) dt = \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}(\varepsilon(t), \bar{\alpha}(t)) \cdot \dot{\varepsilon}(t) dt \quad (1.6)$$

**Proposition 1 (Loi d'évolution standard).** *Le travail de déformation est non négatif quel que soit l'état d'endommagement initial et dans tout cycle en déformation compatible seulement si l'endommagement est croissant et que le critère d'endommagement est un critère portant sur le taux de restitution d'énergie élastique, i.e. seulement s'il existe  $\kappa(\alpha) > 0$  tel que  $\phi(\varepsilon, \alpha)$  puisse s'écrire :*

$$\phi(\varepsilon, \alpha) = -\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}(\varepsilon, \alpha) - \kappa(\alpha) \quad (1.7)$$

La première conséquence est que le travail de déformation est une fonction d'état, i.e. travail fourni pour faire passer le matériau de l'état naturel sain (déformation et endommagement nuls) à un état de déformation et d'endommagement  $\varepsilon, \alpha$  est indépendant du trajet de déformation suivi. Plus précisément, nous obtenons :

$$W(\varepsilon, \alpha) = \psi(\varepsilon, \alpha) + w(\alpha) \quad (1.8)$$

ici  $w(\alpha)$  est la primitive de  $\kappa(\alpha)$  nulle en 0 :

$$w(\alpha) = \int_0^\alpha \kappa(\beta) d\beta$$

Nous voyons que  $w(\alpha)$  est l'énergie volumique dissipée pour endommager le matériau depuis l'état sain jusqu'à la valeur  $\alpha$ . Les relations locales (définies à chaque point matériel) de contrainte-déformation et de loi d'évolution de l'endommagement peuvent être réécrites en faisant apparaître les dérivées partielles du travail de déformation  $W$  :

– Équilibre mécanique :

$$\sigma = \frac{\partial W(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon}$$

– Loi d'endommagement :

$$\boxed{\dot{\alpha} \geq 0, \quad \frac{\partial W(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} \geq 0, \quad \dot{\alpha} \frac{\partial W(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} = 0} \quad (1.9)$$

On a montré (Pham [34], proposition 1.5 et 1.6 ) que les propriétés d'écroissage du matériau sont directement liées aux propriétés de convexité de cette énergie de déformation :

**Proposition 2 (Convexité et écroissage).**

1. La condition d'écroissage en déformation est équivalente à la convexité de l'énergie de déformation par rapport à  $\alpha$  à  $\varepsilon$  fixé.
2. La condition d'écroissage en contrainte 2 est équivalente à la convexité de l'énergie de déformation par rapport au couple  $(\varepsilon, \alpha)$ .

### 1.1.2.1 Exemples de potentiels

**En 1D**, le modèle le plus général que nous puissions envisager correspond à :

$$W(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2} E(\alpha) \varepsilon^2 + w(\alpha) \quad (1.10)$$

où  $E(\alpha)$  représente le module d'Young de matériau qui décroît de  $E_0$  à 0 lorsque  $\alpha$  croît de 0 à  $\alpha_m$

**En élasticité anti-plane**, la question de contact unilatéral ne se posant pas, pour un matériau isotrope le modèle s'écrit :

$$W(\varepsilon, \alpha) = \mu(\alpha) (\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) + w(\alpha) \quad (1.11)$$



ici la direction 3 correspond à la direction anti-plane.  $\mu(\alpha)$  représente le module de cisaillement qui décroît de  $\mu_0$  à 0 quand  $\alpha$  croît de 0 à  $\alpha_m$ .

**En 3D**, toujours pour les matériaux isotropes, le modèle le plus général que nous puissions envisager correspond à :

$$W(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2}K(\alpha)(Tr \varepsilon)^2 + \mu(\alpha) \varepsilon^D \cdot \varepsilon^D + w(\alpha) \quad (1.12)$$

ici  $K(\alpha)$  et  $\mu(\alpha)$  représentent le module de compressibilité et le module de cisaillement du matériau endommagé,  $\varepsilon^D$  est le déviateur de  $\varepsilon$ ,  $Tr \varepsilon$  est sa trace.

### 1.1.2.2 Les propriétés variationnelles du modèle standard

Nous considérons une structure dont la configuration de référence naturelle est l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , qui est constituée d'un ou plusieurs matériaux endommageables. Dans le cas où le matériau est hétérogène, toutes les grandeurs introduites dépendent du point matériel (endommagement ultime, potentiel élastique, taux d'énergie critique). La structure est soumise à un chargement dépendant de temps  $t$ . Nous appelons respectivement  $\partial_U \Omega$  et  $\partial_F \Omega$  les parties de la frontière où les déplacements sont imposés à la valeur  $U_t$  et les forces à la valeur  $F_t$ . La structure est soumise à un chargement volumique  $f_t$ .

Le problème quasistatique d'évolution sous forme classique consiste à trouver les champs de déplacements  $u_t$  et d'endommagement  $\alpha_t$  vérifiant sous forme forte, d'une part l'équilibre mécanique :

$$\begin{cases} u_t = U_t & \text{sur } \partial_U \Omega \\ \sigma_t = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_t \cdot n = F_t & \text{sur } \partial_F \Omega \\ -\operatorname{div} \sigma_t + f_t = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

ainsi que d'autre part le système à seuil de Kuhn et Tucker caractérisant l'évolution standard de l'endommagement :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ -\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon(u_t) \cdot \varepsilon(u_t) \leq w'(\alpha_t) & \text{dans } \Omega \\ \dot{\alpha}_t \left( \frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon(u_t) \cdot \varepsilon(u_t) + w'(\alpha_t) \right) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

ici le champ de déformation est la partie symétrique du gradient de déplacement :

$$\varepsilon(u_t) = \frac{1}{2}(\nabla u_t + \nabla u_t^T)$$

Ces équations sont écrites au niveau local. Le traitement du problème à l'aide des outils du Calcul des Variations ou sa résolution numérique requiert une mise sous forme variationnelle. Le traitement variationnel nécessite l'introduction au préalable des espaces fonctionnels d'admissibilité pour les champs de déplacement et d'endommagement :

**Définition 1** (Admissibilité des champs). *Nous notons  $\mathcal{C}_t$  l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles à l'instant  $t$  :*

$$\mathcal{C}_t = \{v : v = U_t \text{ sur } \partial_U \Omega\}$$

Donc  $\mathcal{C}_t$  est un espace affine et  $\mathcal{C}_0$  est l'espace linéaire associé :

$$\mathcal{C}_t = \{v : v = 0 \text{ sur } \partial_U \Omega\}$$

Nous notons  $\mathcal{D}_0$  l'ensemble des champs d'endommagement admissibles :  $\mathcal{D}_0 = \{\alpha : 0 \leq \alpha \leq \alpha_m \text{ dans } \Omega\}$ . Avec  $\alpha \in \mathcal{D}_0$  nous associons l'ensemble  $\mathcal{D}(\alpha)$  des champs d'endommagement accessibles depuis  $\alpha$ , restreints par la condition d'irréversibilité :

$$\mathcal{D}(\alpha) = \{\beta : \alpha \leq \beta \leq \alpha_m \text{ dans } \Omega\}$$

Avec un couple  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  admissible à l'instant  $t$ , nous associons l'énergie totale  $\mathcal{E}_t(v, \beta)$  :

$$\mathcal{E}_t(v, \beta) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(v), \beta) dx - W_t^e(v) \quad (1.15)$$

où  $\varepsilon(v)$  désigne la partie symétrique du gradient de  $v$  (i.e. la déformation associée à  $v$ ) et  $W_t^e(v)$  est le travail des forces extérieures à l'instant  $t$  :

$$W_t^e(v) = \int_{\Omega} f_t \cdot v \, dx + \int_{\partial_F \Omega} F_t \cdot v \, dS$$

Le problème d'évolution (1.14) peut alors s'écrire en termes de variations premières sur l'énergie potentielle et conduire à la formulation variationnelle du problème d'évolution continue en temps : pour  $t > 0$  trouver  $(u_t, \alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  qui satisfait 3 conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (ir) : \quad & \dot{\alpha}_t \geq 0 \\ (st) : \quad & \mathcal{E}'_t(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) \geq 0 \\ (eb) : \quad & \mathcal{E}'_t(u_t, \alpha_t)(0, \dot{\alpha}_t) = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

ici  $\mathcal{E}'_t(u_t, \alpha_t)(v, \beta)$  est la dérivée de  $\mathcal{E}_t(u_t, \alpha_t)$  dans la direction  $(v, \beta)$  :

$$\mathcal{E}'_t(u_t, \alpha_t)(v, \beta) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{E}_t(u_t + hv, \alpha_t + h\beta) \right|_{h=0}$$

**Remarque** (Le problème d'évolution incrémental). *En pratique, la résolution numérique est faite par une discrétisation en temps, pour construire le problème incrémental, il suffit de remplacer la variable de temps continu  $t$  par une suite (discrète) de temps. À pas de temps  $i$ , le problème incrémental consiste alors à trouver les champs  $u_i$  et  $\alpha_i$  vérifiant :*

$$\begin{cases} (u_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D}_i \\ \mathcal{E}'_t(u_i, \alpha_i)(v - u_i, \beta - \alpha_i) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D}_i \end{cases} \tag{1.17}$$

ici  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{D}_i$  désignent respectivement l'ensemble des champs de déplacements et des endommagement admissibles à pas de temps  $i$ , ce dernier tenant compte maintenant de la condition d'irréversibilité :

$$\beta(x) \geq \alpha_{i-1}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

### 1.1.3 La nouvelle formulation du problème d'évolution

Les propriétés du problème d'évolution sont complètement différentes en fonction du comportement du matériau. Pour des matériaux durcissants, le problème incrémental se

ramène à une suite de problèmes de minimisation de l'énergie. Moyennant une condition d'écroissance un peu plus forte (croissance assez rapide vers l'infini des contraintes à la limite d'élasticité quand  $\alpha$  tend vers 1), on peut même démontrer que le problème incrémental possède une solution unique, ce qui rend les modèles d'endommagement durcissants comparables mathématiquement aux matériaux élasto-plastiques écroissables. Cependant, en pratique, on rencontre le plus souvent des matériaux adoucissants. Dans ce cas, il est facile de montrer des exemples où le problème d'évolution admet soit aucune solution (propriété due à la notion de charges limites associée à la bornitude des contraintes), soit au contraire une infinité de solutions (due au caractère non monotone de la relation contrainte-déformation quand l'endommagement évolue). De plus, l'écriture des items (ir) et (eb) n'a de sens que dans la mesure où l'évolution en temps est régulière, ce qui n'est pas toujours vrai même si les données sont régulières du fait de la présence de snap-back dans la réponse globale. Comme ces pathologies subsistent même si nous régularisons les modèles en introduisant des termes non locaux, cf. [7], il est nécessaire d'une part d'introduire un critère de sélection de solution basé sur le concept d'état stable et d'autre part d'avoir une formulation capable de gérer des évolutions irrégulières en temps. Cela va nous demander de changer les trois items.

### 1.1.3.1 La notion d'état stable

Pour des systèmes conservatifs, nous pouvons définir les états stables du système comme ceux qui sont des minima locaux de l'énergie du système. Cette notion peut être élargie aux systèmes dissipatifs régis par des lois standards [32]. Nous suivrons cette méthode ici et nous présentons le concept de la stabilité directionnelle. Cela conduit à la définition suivante :

**Définition 2** (Stabilité directionnelle). *À un instant  $t$  donné, un état  $(u, \alpha)$  de la structure endommageable est dit stable s'il est admissible et si dans toutes les directions accessibles il existe un voisinage où tout autre état a une énergie supérieure ou égale. Autrement*

dit, nous demandons que  $(u, \alpha) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  soit tel que

$$(ST) \quad \begin{cases} \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha), \quad \exists \bar{h} > 0, \quad \forall h \in [0, \bar{h}] \\ \mathcal{E}_t(u + h(v - u) + \alpha + h(\beta - \alpha)) \geq \mathcal{E}_t(u, \alpha) \end{cases} \quad (1.18)$$

Remarquons que si l'état  $u, \alpha_t$  est stable, alors en divisant l'inégalité de (ST) par  $h > 0$  et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , nous retrouvons (st). Autrement dit, l'équilibre et le critère d'endommagement peuvent être vus comme des conditions nécessaires de stabilité, conditions du premier ordre en  $h$ . Mais elles ne sont pas en générale suffisantes. Elles le sont dans le cas de matériaux durcissants, mais pas dans le cas de matériaux adoucissants. Il faut en particulier considérer aussi des conditions du second ordre en  $h$ , ce qui fait apparaître la notion de quotient de Rayleigh [7].

### 1.1.3.2 Le bilan d'énergie

La condition (eb) peut être vue comme une conservation de l'énergie totale quand l'endommagement évolue, le taux de restitution d'énergie élastique étant égal à la puissance dissipée. Sous cette forme, elle suppose implicitement que l'évolution de l'endommagement est régulière en temps. L'idée est d'étendre ce principe de conservation de l'énergie aux cas d'évolutions non régulières (qui sont à envisager dans les modèles adoucissants). Dans ce cas, nous avons le bilan d'énergie suivant :

**Proposition 3** (Le bilan d'énergie). *Dans une évolution régulière d'endommagement, l'évolution de l'énergie totale satisfait le bilan suivant*

$$(EB) \quad \mathcal{E}_t(u_t, \alpha_t) = \mathcal{E}_0(u_0, \alpha_0) + \int_0^t \left( \int_{\Omega} \sigma_{t'} \cdot \varepsilon(\dot{U}_{t'}) dx - W_{t'}^e(\dot{U}_{t'}) - \dot{W}_{t'}^e(u_{t'}) \right) dt' \quad (1.19)$$

où  $\dot{U}_{t'}$  et  $\dot{W}_{t'}^e$  sont les vitesses de chargement à l'instant  $t'$

Preuve formelle : En dérivant par rapport à  $t$  l'énergie totale, en tenant compte de (eb) et en utilisant l'équilibre, il vient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_t(u_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\dot{u}_t) dx - W_t^e(\dot{u}_t) - \dot{W}_t^e(u_t) = \int_{\Omega} \sigma_{t'} \cdot \varepsilon(\dot{U}_{t'}) dx - W_{t'}^e(\dot{U}_{t'}) - \dot{W}_{t'}^e(u_{t'})$$

En intégrant par rapport à  $t$  on obtient (EB). Notons que (st) et (eb) équivalent à (st) et (EB) dans une évolution régulière, mais l'avantage de (EB) est qu'elle conserve le sens même si l'évolution envisagée n'est pas régulière car elle ne fait appel qu'à la régularité (en temps) des données  $U_t$  et  $W_t^e$ . En l'adoptant nous exigeons donc que l'énergie totale soit une fonction absolument continue de  $t$  même si  $t \rightarrow (u_t, \alpha_t)$  est discontinu; c'est l'extension annoncée du principe de conservation de l'énergie.

### 1.1.3.3 La formulation étendue

Nous proposons finalement de remplacer l'item (st) par la condition de stabilité (ST) et l'item (eb) par sa version étendue (EB). Le nouveau problème d'évolution s'écrit donc : Trouver pour tout  $t \geq 0$ ,  $(u_t, \alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (IR) & : \quad t \rightarrow \alpha_t \text{ soit croissant depuis } \alpha_0 \\ (ST) & : \quad (u_t, \alpha_t) \text{ soit stable au sens de la Définition 2} \\ (EB) & : \quad \text{le bilan d'énergie soit satisfait à chaque instant} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Il est d'un côté plus exigeant que le problème initial puisque nous n'autorisons que des états stables et d'un autre plus tolérant puisque nous autorisons des évolutions discontinues. Insistons à ce propos sur la distinction entre stabilité et non régularité. La stabilité telle qu'elle est définie ici est une propriété d'un état alors que la régularité est une propriété de l'évolution. Nous pouvons trouver des évolutions continues satisfaisant (st) mais pas (ST), de même que nous pouvons trouver des évolutions discontinues qui satisfont (ST) à chaque instant

### 1.1.4 Introduction des modèles à gradient

Les résultats dans la partie précédente fournissent un cadre général pour l'écriture de lois d'endommagement. Il s'avère que les concepts introduits pour construire des modèles d'endommagement locaux sont directement extensibles aux modèles non locaux de ce type. Il suffit en fait de changer la forme du travail de déformation. Dans une série des

travaux de Pham et al. [34], [38], [39], Benallal et Marigo [7], ils ont proposé d'introduire des termes en gradient d'endommagement dans le travail de déformation afin de pénaliser la localisation d'endommagement. Le problème d'évolution reste formellement le même et s'écrit toujours en termes des trois principes d'irréversibilité, de stabilité et de conservation de l'énergie.

#### 1.1.4.1 La nouvelle forme du travail de déformation

Le gradient d'endommagement  $\nabla\alpha$  est maintenant considéré comme une variable d'état local ainsi que la valeur  $\alpha$  de l'endommagement à ce point. En conséquence, l'état du point matériel est caractérisé par le triplet  $(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$ . Le travail de déformation devient la fonction d'état suivante :

$$W : \mathbb{M}_s^n \times [0, \alpha_m] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) \rightarrow W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$$

Dans le cadre d'une théorie linéarisée, nous développons  $W$  au voisinage de "l'état d'équilibre thermodynamique"  $(0, \alpha, 0)$  jusqu'à l'ordre 2 en  $\varepsilon$  et  $\nabla\alpha$ . Cette linéarisation n'est que partielle puisque nous ne pouvons pas linéariser en  $\alpha$  à cause des fortes variations de la rigidité. Cela conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = & w(\alpha) + \sigma_0(\alpha) \cdot \varepsilon + \tau(\alpha) \cdot \nabla\alpha + \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon \\ & + \Lambda(\alpha) \cdot (\varepsilon \otimes \nabla\alpha) + \frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \end{aligned} \quad (1.21)$$

où le point désigne le produit scalaire entre vecteurs ou tenseurs du même ordre. Dans (1.21) apparaissent les nouvelles fonctions de la variable d'endommagement  $\tau(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Lambda(\alpha) \in \mathbb{M}_s^n \otimes \mathbb{R}^n$  et  $\Gamma(\alpha) \in \mathbb{M}_s^n$  alors que  $\sigma_0(\alpha)$  représente une précontrainte variant avec l'endommagement que nous supposons nulle comme nous l'avons fait dans le modèle local. Les termes  $w(\alpha)$  et  $\frac{1}{2}E(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon$  sont déjà dans modèle local.

Si nous supposons que le matériau est isotrope et que la variable d'endommagement est un scalaire objectif (i.e. invariant dans tout changement de référentiel),  $W$  doit alors satisfaire les conditions d'invariance :

$$W(Q\varepsilon Q^T, \alpha, Q\nabla\alpha) = W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha), \quad \forall Q \in \mathbb{O}^n, \quad \forall (\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) \in \mathbb{M}_s^n \times [0, \alpha_m] \times \mathbb{R}^n$$

où  $\mathbb{O}^n$  désigne le groupe orthogonal. Dans ce cas le vecteur  $\tau(\alpha)$  et le tenseur d'ordre trois  $\Lambda(\alpha)$  sont nécessairement nuls, alors que le tenseur d'ordre deux  $\Gamma(\alpha)$  est proportionnel à l'identité. Pour des raisons évidentes, si nous voulons que les termes non locaux soient régularisants, il faut que  $\Gamma(\alpha)$  soit défini positif, ce qui permet d'écrire  $\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha)\mathbf{I}$  avec  $\gamma(\alpha) > 0$ .

En résumé, pour un matériau isotrope, en théorie linéarisée et en supposant qu'il n'y a pas de précontrainte, le travail de déformation s'écrit :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = w(\alpha) + \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\gamma(\alpha)\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \quad (1.22)$$

Nous voyons qu'il ne diffère de son homologue local que par l'ajout d'un terme quadratique en  $\nabla\alpha$  dont nous attendons qu'il ait des vertus régularisantes.

À ce stade la variable d'endommagement a été choisie arbitrairement, elle ne sert qu'à paramétrer l'évolution des propriétés thermomécaniques du matériau. Nous pouvons en changer, via un changement de variable, sans changer de modèle. Une infinité de choix sont possibles, mais un autre choix tout aussi intéressant en pratique consiste à faire un changement de variable de façon à faire apparaître une constante devant le terme quadratique non local au lieu de la fonction  $\gamma(\alpha)$ . Il est même autorisé de prendre cette constante égale à 1. Il suffit pour cela de faire le changement de variable :

$$\alpha \rightarrow D = \Delta(\alpha) := \int_0^\alpha \sqrt{\gamma(\beta)} d\beta$$

Toutefois, pour comparer différents matériaux entre eux, nous pouvons avoir intérêt à normaliser la variable d'endommagement en la prenant sans dimension et variant par exemple entre 0 et 1 lorsque  $\alpha$  varie entre 0 et  $\alpha_m$ . Ainsi, en supposant que

$\Delta(\alpha_m) < +\infty$  et en faisant le changement de variable  $\alpha \rightarrow d := \Delta(\alpha)/\Delta(\alpha_m)$ , le travail de déformation peut s'écrire

$$\tilde{W}(\varepsilon, d, \nabla d) = \tilde{w}(d) + \frac{1}{2}\tilde{A}(d)\varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\nabla d \cdot \nabla d \quad (1.23)$$

où la variable  $d$  varie entre 0 et 1 et  $\tilde{\gamma} > 0$  est maintenant une constante caractéristique du matériau qui a la dimension d'une force.



Pour conclusion, nous supposons que la variable d'endommagement a été choisie de comme une fonction variant dans l'intervalle  $[0, 1]$  et que  $\gamma$  est une constante par rapport à la variable d'endommagement. Cette variable d'endommagement sera toujours désigné par  $\alpha$ . En conséquence, la fonction de travail de déformation s'écrit :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = W_0(\varepsilon, \alpha) + \frac{1}{2}\gamma \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \quad (1.24)$$

ici

$$W_0(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w(\alpha)$$

#### 1.1.4.2 Le problème d'évolution de l'endommagement

Du fait du caractère non local du modèle, la loi d'évolution doit se formuler directement au niveau de la structure. Pour cela, Nous le formulons en reprenant les 3 items d'irréversibilité, de stabilité et de conservation de l'énergie introduits dans la partie précédente pour les modèles locaux.

Avec  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$ , i.e. avec une paire admissible au temps  $t$ , nous associons l'énergie totale  $\mathcal{E}_t(v, \beta)$  de la structure dans cet état :

$$\mathcal{E}_t(v, \beta) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(v), \beta, \nabla\beta) dx - W_t^e(v) \quad (1.25)$$

Du point de vue de la régularité, pour que l'énergie de la structure dans un état d'endommagement  $\alpha$  soit finie, il faut que  $\alpha$  soit dans  $H^1(\Omega, [0, 1])$ . De ce fait, il admet une trace sur le bord du domaine et nous pouvons imposer des conditions aux limites à  $\alpha$  sur toute ou une partie de la frontière. Pour simplifier, nous supposons ici que  $\alpha = 0$  sur le bord de  $\Omega$ . Donc, l'ensemble des champs d'endommagement admissible est  $\mathcal{D}_0 = \{\alpha \in H^1(\Omega, [0, 1]) : \alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ . Le problème d'évolution s'écrit :

**Définition 3.** *Le problème de l'évolution consiste à trouver, pour chaque  $t \geq 0$ ,  $(u_t, \alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_0$  tel que :*

$$(IR) \quad : \quad t \rightarrow \alpha_t \text{ soit croissant depuis } \alpha_0$$

(ST) :  $(u_t, \alpha_t)$  soit stable au sens suivant :

$$\begin{aligned} \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha), \quad \exists \bar{h} > 0, \quad \forall h \in [0, \bar{h}] \\ \mathcal{E}_t(u + h(v - u) + \alpha + h(\beta - \alpha)) \geq \mathcal{E}_t(u, \alpha) \end{aligned}$$

(EB) : le bilan d'énergie soit satisfait à chaque instant

$$\mathcal{E}_t(u_t, \alpha_t) = \mathcal{E}_0(u_0, \alpha_0) + \int_0^t \left( \int_{\Omega} \sigma_{t'} \cdot \varepsilon(\dot{U}_{t'}) dx - W_{t'}^e(\dot{U}_{t'}) - \dot{W}_{t'}^e(u_{t'}) \right) dt'$$

Nous voyons donc que le problème d'évolution est formellement le même que celui proposé pour les modèles locaux. Mais, évidemment du fait de la présence de termes non locaux dans l'énergie, ces deux problèmes n'admettent pas en général les mêmes solutions. Notons que les propriétés d'irréversibilité, de stabilité et de conservation de l'énergie sont invariantes par changement de la variable d'endommagement. Si elles sont vérifiées par le modèle normalisé, alors elles le sont aussi par tout représentant du même modèle.

Supposons que le problème d'évolution admette une solution régulière en temps et en espace, de plus, nous ne considérons qu'il n'y a aucune partie dans  $\Omega$  qui est entièrement endommagé, soit nous supposons que  $\alpha < 1$  partout dans  $\Omega$ . En divisant l'inégalité de stabilité (ST) par  $h > 0$  et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , nous en déduisons les conditions nécessaires de stabilité dites d'ordre 1 que  $(u_t, \alpha_t)$  doit vérifier à l'instant  $t$  :

$$\mathcal{E}'(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) \geq 0, \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha_t) \quad (1.26)$$

où  $\mathcal{E}'(u_t, \alpha_t)(\bar{u}, \bar{\beta})$  désigne la dérivée de Gâteaux de  $\mathcal{E}(u_t, \alpha_t)$  dans direction  $(\bar{u}, \bar{\beta})$ , i.e. la forme linéaire définie par :

$$\mathcal{E}'(u_t, \alpha_t)(\bar{u}, \bar{\beta}) = \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\bar{u}) dx - W_t^e(\bar{u}) + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) \bar{\beta} + \gamma \nabla \alpha_t \cdot \nabla \bar{\beta} \right) dx$$

En prenant  $\beta = \alpha_t$  dans (1.26) et en remarquant que  $\mathcal{C}_t$  est un espace affine, nous retrouvons la formulation variationnelle de l'équilibre :

$$\int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\bar{u}) = W_t^e(\bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{C}^0 \quad (1.27)$$

En remplaçant (1.27) dans (1.26) nous obtenons la formulation variationnelle du critère d'endommagement :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t)(\beta - \alpha_t) + \gamma \nabla \alpha_t \cdot \nabla(\beta - \alpha_t) \right) dx \geq 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{D}(\alpha_t) \quad (1.28)$$

En utilisant intégration par parties, nous obtenons  $\forall \beta \in \mathcal{D}(\alpha_t)$  :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \alpha_t) \right) (\beta - \alpha_t) dx + \int_{\partial \Omega} \gamma \frac{\partial \alpha_t}{\partial n} (\beta - \alpha_t) dS \geq 0 \quad (1.29)$$

où  $n$  désigne la normale unitaire sortante à  $\Omega$ . Sous la condition que les champs sont suffisamment régulières, nous obtenons, par un argument classique de Calcul des Variations, les conditions locales suivantes :

$$\boxed{\frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \alpha_t) \geq 0 \quad \text{dans } \Omega} \quad , \quad \boxed{\gamma \frac{\partial \alpha_t}{\partial n} \geq 0 \quad \text{sur } \partial \Omega} \quad (1.30)$$

Équation (1.30) constitue le critère d'évolution de l'endommagement pour le modèle d'endommagement à gradient. Si nous le comparons à son homologue (1.9) pour les modèles locaux, nous voyons que le critère d'évolution contient maintenant un terme impliquant les dérivées secondes du champ d'endommagement. Notons également que (1.30) donne des conditions aux limites naturelles de la dérivée normale du champ d'endommagement, mais ces conditions sont les inégalités.

Nous utilisons maintenant le bilan d'énergie avec les mêmes hypothèses sur la régularité et l'absence de zone totalement endommagée. Dérivons (EB) par rapport à  $t$  nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \mathcal{E}_t(u_t, \alpha_t) - \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon(\dot{U}_t) dx + \dot{W}_t^e(u_t) + W_t^e(\dot{U}_t) \\ &= \int_{\Omega} \sigma_t \cdot \varepsilon((u)_t - \dot{U}_t) dx - W_t^e(\dot{u}_t - \dot{U}_t) + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) \dot{\alpha}_t + \gamma \nabla \alpha_t \cdot \nabla \dot{\alpha}_t \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) \dot{\alpha}_t + \gamma \nabla \alpha_t \cdot \nabla \dot{\alpha}_t \right) dx \end{aligned}$$

En utilisant intégration par parties avec le terme du gradient de l'endommagement, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \alpha_t) \right) \dot{\alpha}_t dx + \int_{\partial \Omega} \gamma \frac{\partial \alpha_t}{\partial n} \dot{\alpha}_t dS = 0 \quad (1.31)$$

Le critère d'endommagement (1.30) et la condition d'irréversibilité  $\dot{\alpha}_t > 0$  conduit à la condition de cohérence :

$$\boxed{\dot{\alpha}_t \left( \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \alpha_t) \right) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega}, \quad \boxed{\dot{\alpha}_t \gamma \frac{\partial \alpha_t}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega} \quad (1.32)$$

En résumé, nous venons de montrer que les relations des comportements généralement adoptées pour les modèles à gradient se déduisent dans l'approche variationnelle de la condition d'irréversibilité, de la condition de stabilité et du bilan d'énergie.

## 1.2 Homogénéisation aux ordres supérieurs

Les analyses de Pham and Marigo [38], Pham et al. [39] montrent que le modèle à gradient construit avec la nouvelle forme d'énergie totale réussit à éviter les pathologies des modèles locaux et il est capable d'approximer la rupture fragile de matériau. Mais l'introduction de termes en gradient d'endommagement dans l'énergie est purement phénoménologique, elle souffre d'un manque de base micro-mécanique. Alors qu'il est facile de justifier les termes locaux par des arguments basés sur le comportement effectif obtenu par l'homogénéisation de matériau micro-fissuré ([17],[30]). Donc la méthode d'homogénéisation devient un bon candidat pour justifier l'apparition des termes en gradient d'endommagement.

### 1.2.1 L'approche par développement asymptotique

Nous rappelons dans cette section les résultats obtenus dans les travaux de Boutin [9], et Gambin et Kroner [23], la formulation des problèmes aux ordres supérieurs pour le milieu ayant la microstructure périodique ainsi que la forme générale de leurs solutions. La méthode de développement asymptotique, initialement introduite par Sanchez-Palencia [41], Bensoussan et al. [8], a été utilisé en considérant les termes d'ordres supérieurs. L'échelle microscopique, décrit par la variable  $y$ , est déterminée par la microstructure, ayant une longueur caractéristique  $\ell$ . La variable  $x$  est associée à l'échelle macroscopique,

ayant la longueur caractéristique,  $L$ , qui est déterminée par le chargement ou les conditions aux limites appliquées. Le petit paramètre  $\varepsilon$  est défini par le rapport entre les deux échelles :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \quad , \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (1.33)$$

L'utilisation des deux variables  $x$  et  $y$  nous conduit à la transformation des dérivées spatiales :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.34)$$

et la transformation de chaque grandeur sous la forme d'expansions asymptotiques en puissance de  $\varepsilon$ . Par exemple, pour les déplacements :

$$u^\varepsilon(x) = u(x, y) = \sum_i \varepsilon^i u^{(i)}(x, y) \quad (1.35)$$

ici  $u^{(i)}(x, y)$  sont les fonctions périodiques en variable microscopique  $y$

### 1.2.1.1 Les équations de base

Dans la théorie de l'homogénéisation des milieux micro-hétérogènes avec la microstructure périodique, ([6],[8],[41]) nous introduisons l'opérateur linéaire :

$$L^\varepsilon(u) = \nabla_x \cdot [ \mathbf{c}^\varepsilon(x) : e_x(u) ]$$

$\varepsilon(u)$  est le tenseur des petites déformations, la constante  $\varepsilon$  représente la taille de la cellule, qui est prise comme une cubique pour les raisons de simplification.  $\mathbf{c}^\varepsilon(x)$  est le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques au point  $x$  du milieu initial. Nous supposons, comme dans les autres travaux d'homogénéisation, que  $\mathbf{c}^\varepsilon(x) = \mathbf{c}(x/\varepsilon)$ , qui est une fonction périodique. Afin de simplifier la présentation, nous supposons qu'il y a pas de déplacement appliqué au bord de  $\Omega$ . Les équations à résoudre sont :

$$L^\varepsilon(u^\varepsilon) + f^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.36)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.37)$$

ici  $f^\varepsilon(x)$  la force volumique appliquée au milieu.

Avec la transformation (1.34), l'opérateur  $L^\varepsilon(x)$  devient :

$$L^\varepsilon(u) \rightarrow L(u) = \frac{1}{\varepsilon^2}L_1(u) + \frac{1}{\varepsilon}L_2(u) + L_3(u) \quad (1.38)$$

où :

$$L_1(u) = \nabla_y \cdot [\mathbf{c}(y) : e_y(u)] \quad (1.39)$$

$$L_2(u) = \nabla_y \cdot [\mathbf{c}(y) : e_x(u)] + \nabla_x \cdot [\mathbf{c}(y) : e_y(u)] \quad (1.40)$$

$$L_3(u) = \nabla_x \cdot [\mathbf{c}(y) : e_x(u)] \quad (1.41)$$

et la contrainte peut être décomposée en :

$$\sigma = \mathbf{c}(y) : [e_x(u) + \varepsilon^{-1}e_y(u)] = \varepsilon^{-1}\sigma^{(-1)}(x, y) + \sigma^{(0)}(x, y) + \varepsilon^1\sigma^{(1)} + \varepsilon^2\sigma^{(2)} + \dots \quad (1.42)$$

où  $\sigma^{(i)}(x, y)$  sont périodiques en  $y$  et définis par :

$$\sigma^{(-1)} = \mathbf{c}(y) : e_y(u^{(0)})$$

$$\sigma^{(i)} = \mathbf{c}(y) : e_y(u^{(i+1)}) + \mathbf{c}(y) : e_x(u^{(i)}) \quad \forall i \geq 0$$

Le tenseur  $\mathbf{c}$  ne dépend explicitement pas de  $x$  car nous considérons le cas strictement périodique. En remplaçant le développement de  $u^\varepsilon(x)$  (1.35) dans (1.36) en tenant compte la nouvelle forme de  $L^\varepsilon(u)$ , nous obtenons l'ensemble infini des équations à résoudre suivant :

$$L_1(u^{(0)}) = 0 \quad (1.43)$$

$$L_1(u^{(1)}) = -L_2(u^{(0)}) \quad (1.44)$$

$$L_1(u^{(2)}) = -L_2(u^{(1)}) - L_3(u^{(0)}) + f_0 \quad (1.45)$$

$$L_1(u^{(3)}) = -L_2(u^{(2)}) - L_3(u^{(1)}) \quad (1.46)$$

$$L_1(u^{(4)}) = -L_2(u^{(3)}) - L_3(u^{(2)}) \quad (1.47)$$

...

ici la force volumique est supposée de ne pas dépendre de la microstructure  $f^\varepsilon = f_0(x)$  [23], le cas où elle dépend de la microstructure a été traité par Boutin [9] pour une forme spéciale de  $f^\varepsilon = \rho(y)f_0(x)$  (où  $\rho(y)$  est la densité des composants cellulaires).

### 1.2.1.2 Résolution des problèmes de différents ordres

**Ordre  $\varepsilon^{-2}$**  : Nous devons résoudre l'équation (1.43) :

$$L_1(u^{(0)}) = \nabla_y \cdot [\mathbf{c} : e_y(u^{(0)})] = 0 \quad (1.48)$$

Nous trouvons facilement que les solutions sont les fonctions indépendantes de  $y$

$$u^{(0)} = Vu^{(0)}(x) \quad (1.49)$$

**Ordre  $\varepsilon^{-1}$**  : l'équation (1.44) peut être réécrite :

$$\nabla_y \cdot [\mathbf{c}(y) : e_y(u^{(1)})] + \nabla_y \cdot [\mathbf{c}(y) : e_x(V^{(0)})] = 0 \quad (1.50)$$

En raison de la linéarité du problème, la solution  $u_1$  devient :

$$u^{(1)}(x, y) = V^{(1)}(x) + \mathbf{X}(y) : e_x(V^{(0)}) \quad (1.51)$$

où le tenseur d'ordre 3, périodique sur la cellule élémentaire,  $\mathbf{X}(y)$  est obtenu par l'équation :

$$\mathbf{c}^0(y) = \mathbf{c} + \mathbf{c} : \nabla_y^s[\mathbf{X}] \quad ; \quad \nabla_y \cdot [\mathbf{c}^0(y)] = 0 \quad (1.52)$$

ici,  $\nabla_y^s$  est le tenseur de gradient symétrisé, le tenseur  $\mathbf{X}(y)$  ne sont définies qu'à une constante près et nous pouvons rendre la détermination unique en imposant :  $\langle \mathbf{X} \rangle = 0$ .

La version indicielle de ces équations s'écrit :

$$u_i^{(1)} = V_i^{(1)} + \mathbf{X}_i^{kl} e_{xkl}(V^{(0)}) \quad (1.53)$$

et le vecteur  $\mathbf{X}^{kl}$  est la solution de l'équation :

$$\mathbf{c}_{ijkl}^0 = \mathbf{c}_{ijkl} + \mathbf{c}_{ijpq} e_{ypq}[\mathbf{X}^{kl}] \quad ; \quad (\mathbf{c}_{ijkl}^0)_{,j} = 0 \quad ; \quad \langle \mathbf{X}_i^{kl} \rangle = 0 \quad (1.54)$$

**Ordre  $\varepsilon^0$**  : l'équation (1.45) peut être réécrite :

$$\nabla_y \cdot \sigma^{(1)} + \nabla_x \cdot \sigma^{(0)} + f_0 = 0 \quad (1.55)$$

En tenant compte de la périodicité de la contrainte, nous obtenons :

$$\langle \nabla_y \cdot \sigma^{(1)} + \nabla_x \cdot \sigma^{(0)} + f_0 \rangle = 0 \Rightarrow \nabla_x \cdot [\langle \sigma^{(0)} \rangle] + \langle f_0 \rangle = 0 \quad (1.56)$$

En utilisant l'expression de  $u^{(1)}$  dans (1.51), nous obtenons équation pour déterminer  $V^{(0)}$

$$\nabla_x \cdot [\mathbf{C}^0 : e_x(V^{(0)})] + \langle f_0 \rangle = 0 \quad , \quad \mathbf{C}^0 = \langle \mathbf{c}^0(y) \rangle \quad (1.57)$$

Le tenseur  $\mathbf{C}^0$  est le tenseur d'élasticité homogénéisé, par sa définition, nous pouvons montrer qu'il est symétrique et défini positif.

Équation (1.55) nous donne aussi l'information sur le champs  $u^{(2)}$ , en effet :

$$\begin{aligned} \nabla_y \cdot \sigma^{(1)} + \nabla_x \cdot \sigma^{(0)} + f_0 &= 0 \\ \Rightarrow \nabla_y \cdot [\mathbf{c} : (e_y(u^{(2)}) + e_x(u^{(1)}))] + \nabla_x \cdot [\mathbf{c} : (e_y(u^{(1)}) + e_x(V^{(0)}))] + f_0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Comme nous avons supposé que la force volumique ne dépend pas de la microstructure :  $f_0 = \langle f_0 \rangle$ , en utilisant l'expression de  $u^{(1)}$ , (1.58) devient :

$$\nabla_y \cdot [\mathbf{c} : (e_y(u^{(2)}) + e_x(V^{(1)} + \mathbf{X} : e_x(V^{(0)})))] = \nabla_x \cdot [\mathbf{C}^0 : e_x(V^{(0)}) - \mathbf{c}^0 : e_x(V^{(0)})] \quad (1.59)$$

Dans le cas de Boutin [9], l'équation (1.59) prend la forme :

$$\nabla_y \cdot [\mathbf{c} : (e_y(u^{(2)}) + e_x(V^{(1)} + \mathbf{X} : e_x(V^{(0)})))] = \nabla_x \cdot [\beta \mathbf{C}^0 : e_x(V^{(0)}) - \mathbf{c}^0 : e_x(V^{(0)})] \quad (1.60)$$

avec  $\beta(y) = \rho(y) / \langle \rho \rangle$ .

En raison de la linéarité du système, la solution de  $u^{(2)}$  est une combinaison linéaire des solutions particulières associées à chacun de ces termes  $e_x(V^{(1)})$  et  $\nabla_x e_x(V^{(0)})$ . Il est important de noter que les problèmes liés au déplacement au premier ordre  $e_x(V^{(1)})$  sont identiques à ceux déjà traités à l'ordre précédent. Par conséquent, nous avons :

$$u^{(2)}(x, y) = V^{(2)}(x) + \mathbf{X}(y) : e_x(V^{(1)}) + \mathbf{Y}(y) : \nabla_x e_x(V^{(0)}) \quad (1.61)$$

le tenseur d'ordre 4, périodique sur la cellule élémentaire,  $\mathbf{Y}(y)$  est obtenu par l'équation :

$$\mathbf{c}^1(y) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c} : \nabla_y^s[\mathbf{Y}] \quad ; \quad \nabla_y \cdot [\mathbf{c}^1(y)] = \mathbf{C}^0 - \mathbf{c}^0(y) \quad ; \quad \langle \mathbf{Y} \rangle = 0 \quad (1.62)$$



**Ordre  $\varepsilon^1$**  : Comme ordre précédent, nous établissons l'équation d'équilibre à cet ordre :

$$\nabla_x \cdot [\langle \sigma^{(1)} \rangle] = 0 \quad , \quad \sigma^{(1)} = \mathbf{c} : (e_y(u^{(2)}) + e_x(u^{(1)})) \quad (1.63)$$

Afin d'avoir une équation avec les déplacements  $V^{(i)}$ , nous introduisons les expressions de ces champs qui ont déjà été déterminés dans la définition de  $\sigma^{(1)}$  :

$$\sigma^{(1)} = \mathbf{c}^0 : e_x(V^{(1)}) + \mathbf{c}^1 : \nabla_x e_x(V^{(0)}) \quad (1.64)$$

Nous obtenons l'équation d'équilibre d'ordre 1 :

$$\nabla_x \cdot [\mathbf{C}^0 : e_x(V^{(1)})] = -\nabla_x \cdot [\mathbf{C}^1 : \nabla_x e_x(V^{(1)})] \quad , \quad \mathbf{C}^1 = \langle \mathbf{c}^1(y) \rangle \quad (1.65)$$

Avec la même méthode pour traiter  $u^{(2)}$ , nous pouvons trouver l'expression de  $u^{(3)}$  sous la forme :

$$u^{(3)}(x, y) = V^{(3)}(x) + \mathbf{X}(y) : e_x(V^{(2)}) + \mathbf{Y}(y) : \nabla_x e_x(V^{(1)}) + \mathbf{Z}(y) :: \nabla_x \nabla_x e_x(V^{(1)}) \quad (1.66)$$

le tenseur d'ordre 5, périodique sur la cellule élémentaire,  $\mathbf{Z}(y)$  est obtenu par l'équation :

$$\mathbf{c}^2(y) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{c} : \nabla_y^s [\mathbf{Z}] \quad ; \quad \nabla_y \cdot [\mathbf{c}^2(y)] = \mathbf{C}^1 - \mathbf{c}^1(y) \quad ; \quad \langle \mathbf{Z} \rangle = 0 \quad (1.67)$$

Les champs d'ordres supérieurs sont obtenus en employant la même stratégie.

### 1.2.1.3 La relation contrainte-déformation macroscopique

En prenant la moyenne de la somme des champs de déplacement microscopique  $u^{(i)}$ , en tenant compte la nullité de la moyenne des tenseur  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \dots$  nous obtenons le déplacement macroscopique :

$$V = \langle \sum \varepsilon^i u^{(i)} \rangle = V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(1)} + \varepsilon^3 V^{(3)} \quad (1.68)$$

et la moyenne des champs de déformation microscopique :

$$E(x) = e_x(V^{(0)}) + \varepsilon e_x(V^{(1)}) + \varepsilon^2 e_x(V^{(1)}) + \varepsilon^3 e_x(V^{(3)}) = e_x(V) \quad (1.69)$$

Le tenseur  $E(x)$  peut donc s'interpréter comme le tenseur des déformations macroscopiques. En prenant maintenant la moyenne du champ de contrainte locale sur le volume de cellule élémentaire, nous obtenons :

$$\langle \sigma(x, y) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \langle \sigma^{(i)} \rangle \quad (1.70)$$

avec :

$$\langle \sigma^{(0)} \rangle = \mathbf{C}^0 : e_x(V^{(0)}) \quad (1.71)$$

$$\langle \sigma^{(1)} \rangle = \mathbf{C}^0 : e_x(V^{(1)}) + \mathbf{C}^1 : \nabla_x e_x(V^{(0)}) \quad (1.72)$$

$$\langle \sigma^{(2)} \rangle = \mathbf{C}^0 : e_x(V^{(2)}) + \mathbf{C}^1 : \nabla_x e_x(V^{(1)}) + \mathbf{C}^2 :: \nabla_x \nabla_x e_x(V^{(0)}) \quad (1.73)$$

*etc.*

Avec la définition de  $V(x)$  et  $E(x)$  nous pouvons réécrire  $\langle \sigma(x, y) \rangle$  sous la forme :

$$\Sigma(x) = \langle \sigma(x, y) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathbf{C}^n \odot_{n+2} \nabla_x^n e_x(V) \quad (1.74)$$

où  $\mathbf{C}^n$  est le tenseur d'ordre  $n + 4$  et  $\odot_n$  le produit contracté d'ordre  $n$ .

### 1.2.2 Une approche basée sur l'équivalence énergétique

Tran et al. [46] a présenté une approche alternative pour la formulation du modèle macroscopique incluant les gradients de la déformation. Elle est basée sur une généralisation du lemme de Hill-Mandel qui permet d'inclure les termes de la série à tous les ordres. Introduisons l'énergie élastique macroscopique définie comme la moyenne sur la de la cellule de base de l'énergie élastique microscopique :

$$W = \frac{1}{2} \langle \sigma(x, y) : \varepsilon(x, y) \rangle \quad (1.75)$$

En se basant sur les résultat de Boutin, ils ont montré que les champs locaux de déformation et de contrainte peuvent être exprimés sous la forme :

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+1} \mathbf{A}^n(y) \odot_{n+2} \nabla_x^n e_x(V) \quad (1.76)$$

$$\sigma(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+1} \mathbf{B}^n(y) \odot_{n+2} \nabla_x^n e_x(V) \quad (1.77)$$

ici  $\nabla_x^n e_x(V)$  désigne la dérivée n-ème de  $e_x(V)$  avec la convention  $\nabla_x^0 e_x(V) = e_x(V)$  et :

$$\mathbf{B}^n = \mathbf{c} : \mathbf{A}^n$$

$\mathbf{A}^n$  sont les tenseurs de localisation, ses composantes sont calculées à partir de celles des tenseurs  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  (c.f. [45] équation (2.37))

En utilisant ces champs de déformation et de contrainte, et notant  $\mathbf{E}(x) = e_x(V)$  nous obtenons :

$$W(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+m} \nabla_x^n \mathbf{E}(x) \odot_{n+2} \mathbf{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla_x^m \mathbf{E}(x) \quad (1.78)$$

ou sous forme développée :

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{2} \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{0,0} : \mathbf{E}(x) \\ &+ \varepsilon \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{0,1} : \nabla_x \mathbf{E}(x) \\ &+ \varepsilon^2 \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{0,2} : \nabla_x^2 \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nabla_x \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{1,1} : \nabla_x \mathbf{E}(x) \\ &+ \varepsilon^3 \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{0,3} : \nabla_x^3 \mathbf{E}(x) + \varepsilon^3 \nabla_x \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{1,2} : \nabla_x^2 \mathbf{E}(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.79)$$

Les tenseurs  $\mathbf{C}^{n,m}$  sont obtenus à partir des champs microscopiques selon la règle de moyenne :

$$\mathbf{C}^{n,m} = \langle [\mathbf{B}^n]^T : \mathbf{A}^m \rangle = \langle [\mathbf{A}^n]^T : \mathbf{B}^m \rangle \quad (1.80)$$

où  $[\mathbf{B}^n]^T, [\mathbf{A}^n]^T$  désignent respectivement les transposées des tenseurs  $\mathbf{B}^n, \mathbf{A}^n$ , obtenus par permutation des deux premiers indices et des n derniers indices. Les tenseurs  $\mathbf{C}^{n,m}$ , d'ordre  $n + m + 4$ , sont appelés tenseurs d'élasticité effectifs ou homogénéisés.

Le modèle macroscopique de milieu à gradient [44] peut être retrouvée en conservant uniquement les termes en déformation et en gradient de la déformation dans  $W$ . Ainsi le potentiel macroscopique (1.78) tronqué des termes en  $\nabla_x^2 \mathbf{E}(x)$  pour  $n \geq 2$  s'écrit :

$$W(x) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{0,0} : \mathbf{E}(x) + \varepsilon \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{0,1} : \nabla_x \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nabla_x \mathbf{E}(x) : \mathbf{C}^{1,1} : \nabla_x \mathbf{E}(x)$$

Notons que cette expression du potentiel ne correspond pas à une troncature à un  $\varepsilon$  donné. Effectivement, c'est l'énergie élastique calculée avec la déformation microscopique

tronquée au premier ordre :

$$\varepsilon(x, y) \simeq \mathbf{A}^0(y) : \mathbf{E}(x) + \varepsilon \mathbf{A}^1(y) : \nabla_x \mathbf{E}(x) \quad (1.81)$$

## 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous introduisons la construction d'un modèle d'endommagement de type fragile où la variable d'endommagement scalaire est régie par une loi à seuil. À partir du postulat de Drucker–Ilyushin, cette loi peut être formulée dans le cadre des matériaux standards généralisés, ce qui fournit automatiquement les concepts de durcissement, d'adoucissement, de stabilité, et un cadre variationnel à l'écriture du problème d'évolution [35]. Dans le cas des matériaux adoucissants, les modèles locaux conduisent à des problèmes mal posés (Comi et al. , [16] ) en raison de leur propriété locale et l'absence des termes limitant la localisation de l'endommagement. Pour éviter ces problèmes, des termes en gradient d'endommagement sont introduits directement dans l'énergie du système [36]. Le problème de l'évolution associé à ce modèle est obtenu en utilisant les principes d'irréversibilité, la stabilité et le bilan d'énergie.

Ce nouveau modèle réussit à éviter les pathologies des modèles locaux et il est capable d'approximer la rupture fragile de matériau. Mais l'introduction de termes en gradient d'endommagement dans l'énergie est purement phénoménologique, elle souffre d'un manque de base micro-mécanique. En se basant sur les justifications du modèle local à partir de la microstructure, nous présentons dans la deuxième partie les résultats principaux de la méthode d'homogénéisation aux ordres supérieurs. En utilisant la méthode des développements asymptotiques, Gambin et Kroner [23], ont proposé une stratégie de calcul successif des champs de déplacement avec les problèmes de cellule de chaque l'ordre qui dépendent des solutions des ordres précédents. À partir de ces résultats, Tran et al. [46] a présenté une formulation alternative basée sur une condition équivalence énergétique aux deux échelles qui aboutit à une énergie élastique homogénéisée avec laquelle nous pouvons trouver les comportements macroscopiques.

Ce résultat nous suggère qu'avec quelques ajustements au niveau de la microstructure, la méthode d'homogénéisation aux ordres supérieurs pourrait être un bon candidat pour justifier l'apparition des termes en gradient dans l'énergie totale.

# Homogénéisation d'un milieu périodique

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>32</b>
<b>2.2</b>	<b>Homogénéisation par l'approche énergétique</b>	<b>33</b>
2.2.1	Développement asymptotique de l'énergie $J^\varepsilon$	33
2.2.2	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$	36
2.2.3	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^0$	36
2.2.4	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^1$	39
2.2.5	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^2$	40
2.2.6	Énergie macroscopique et déplacement macroscopique	47
<b>2.3</b>	<b>Identification du modèle du second gradient</b>	<b>47</b>
<b>2.4</b>	<b>Application à un milieu stratifié</b>	<b>50</b>
2.4.1	Position du problème	50
2.4.2	Solutions des problèmes de cellule	51
2.4.3	Les coefficients homogénéisés	53
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>56</b>

---

*Dans ce chapitre, nous présentons une approche basée sur la combinaison de la méthode variationnelle et des développements asymptotiques dans le cadre de l'homogénéisation périodique pour construire des modèles à gradient de déformation. Similaire à la technique de séparer les ordres utilisée dans la méthode homogénéisation,*

initialement introduite par Bensoussan et al. [8], Sanchez-Palencia [41], le problème de minimisation d'énergie du milieu initial devient une famille des problèmes de minimisation successifs. Par la méthode d'identification des coefficients, nous pouvons établir une connexion entre le modèle macroscopique obtenu et les modèles phénoménologiques de Toupin [44] et Mindlin [31]

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous déterminons les expressions analytiques des coefficients homogénéisés dans le cas d'un composite stratifié.

## 2.1 Position du problème

Nous considérons, sous l'hypothèse de petites déformations, un milieu élastique occupant une région bornée de l'espace  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), caractérisé par une microstructure périodiques  $Y^\varepsilon$  (Figure 2.1). Un point du milieu est identifié par le vecteur de position  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , référence à un système de coordonnées la base orthogonale. Par simplicité, nous étudions le cas une cellule périodique de forme d'un parallélépipède rectangle dont la taille est de l'ordre de  $\varepsilon$ .

Le tenseur de rigidité  $C^\varepsilon$  dépend périodiquement de la variable d'espace  $x$ , est symétrique et défini positif :

$$C_{ijkl}^\varepsilon = C_{jikl}^\varepsilon = C_{klij}^\varepsilon, \quad \alpha_{ij} C_{ijkl}^\varepsilon \alpha_{kl} \geq 0$$

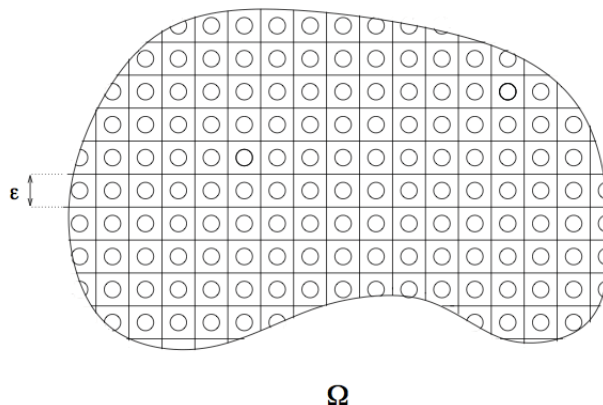
Le milieu est soumis à une force volumique  $f(x) = (f_i(x)), i = 1, 2, 3$ , qui est supposée de ne pas dépendre de la microstructure. La force  $f$  initie une déformation dans le milieu, caractérisé par le champ de déplacement  $u^\varepsilon(x) = (u_i(x)), i = 1, 2, 3$ .

L'équation d'équilibre pour milieu élastique linéaire  $\Omega$ , s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl}^\varepsilon e_{xkl}(u^\varepsilon) \right) + f_i(x) = 0 \quad (2.1)$$

Nous définissons ici  $e_{xkl}$  le tenseur de déformation dans l'hypothèse de petites déformations :

$$e_{xkl}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.2)$$

FIGURE 2.1 – Le milieu périodique  $\Omega$ 

Le problème (2.1) admet une formulation variationnelle équivalente : trouver une fonction  $U^\varepsilon$ , qui minimise la fonction de l'énergie  $J^\varepsilon(u^\varepsilon)$ , sur l'ensemble des fonctions  $u^\varepsilon$  admissibles :

$$J^\varepsilon(U^\varepsilon) = \min_{u^\varepsilon} J^\varepsilon(u^\varepsilon) = \min_{u^\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} C_{ijkl}^\varepsilon(x) e_{xij}(u^\varepsilon) e_{xkl}(u^\varepsilon) - f_i u_i^\varepsilon \right) dx \quad (2.3)$$

## 2.2 Homogénéisation par l'approche énergétique

### 2.2.1 Développement asymptotique de l'énergie $J^\varepsilon$

Nous rappelons les principes de la méthode homogénéisation : la microstructure locale périodique est construite à partir d'une cellule unitaire  $Y$  mise à l'échelle par le petit paramètre  $\varepsilon$ , afin que la période du matériau soit  $Y^\varepsilon$ . Ce paramètre est supposé être assez petit par rapport aux dimensions du milieu, afin que nous puissions distinguer deux variables d'espace, macro- et microscopique, notées respectivement  $x = (x_i)$  et  $y = (y_i)$ . Grâce à cette séparation d'échelles, chaque grandeur  $\Psi$  apparaît comme une fonction de ces deux variables :

$$\Psi = \Psi(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$



Du fait des deux variables d'espace, la dérivation spatiale prend la forme :

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (2.4)$$

et l'intégration sur domaine  $\Omega$  prend la forme :

$$\int_{\Omega} \Psi dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \Psi(x, y) dx dy \quad (2.5)$$

où  $|Y|$  désigne la mesure de  $Y$ , pour simplifier l'écriture, nous considérons dans ce chapitre  $|Y| = 1$ .

Le tenseur de rigidités  $C_{ijkl}^\varepsilon(x)$  est représenté en considérant une fonction  $C_{ijkl}(y)$  définie sur la cellule unitaire  $Y$ , symétrique, défini positif :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}, \quad \alpha_{ij} C_{ijkl} \alpha_{kl} \geq 0$$

et prolongée à tout le milieu par périodicité en posant

$$C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = C_{ijkl}(y) \quad (2.6)$$

Le champ de déplacement  $u^\varepsilon$  est représenté par un développement asymptotique en séparant les variables macro- et microscopiques ([8], [41]) :

$$u^\varepsilon = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \varepsilon^3 u^3(x, y) + \dots \quad (2.7)$$

où les fonctions  $u^i(x, y)$  sont  $Y$ -périodique par rapport à la variable microscopique  $y$ . Avec cette représentation, la déformation, en tenant compte de l'opération (2.4), s'écrit :

$$\begin{aligned} e_{xkl}(u^\varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} e_{ykl}(u^0) + e_{xkl}(u^0) + e_{ykl}(u^1) + \varepsilon [e_{xkl}(u^1) + e_{ykl}(u^2)] + \\ & + \varepsilon^2 [e_{xkl}(u^2) + e_{ykl}(u^3)] + \varepsilon^3 [e_{xkl}(u^3) + e_{ykl}(u^4)] \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

En substituant (2.8) dans la fonction de l'énergie  $J^\varepsilon$  (2.3) et regroupant les termes de même puissance en  $\varepsilon$ , nous obtenons :

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon) = J(u^0, u^1, u^2, \dots) = \frac{1}{\varepsilon^2} J^{(-2)} + \frac{1}{\varepsilon} J^{(-1)} + J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \varepsilon^2 J^{(2)} + \dots \quad (2.9)$$

Où :

$$J^{(-2)}(u^0) = \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{yij}(u^0) e_{ykl}(u^0) dx dy \quad (2.10)$$

$$J^{(-1)}(u^0, u^1) = \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^0) + e_{yij}(u^1)] e_{ykl}(u^0) dx dy \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} J^{(0)}(u^0, u^1, u^2) &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(u^0) + e_{yij}(u^1)] [e_{xkl}(u^0) + e_{ykl}(u^1)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^1) + e_{yij}(u^2)] e_{ykl}(u^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^0 dx dy \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} J^{(1)}(u^0, u^1, u^2, u^3) &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^0) + e_{yij}(u^1)] [e_{xkl}(u^1) + e_{ykl}(u^2)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^2) + e_{yij}(u^3)] e_{ykl}(u^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^1 dx dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} J^{(2)}(u^0, u^1, u^2, u^3, u^4) &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(u^1) + e_{yij}(u^2)] [e_{xkl}(u^1) + e_{ykl}(u^2)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^2) + e_{yij}(u^3)] [e_{xkl}(u^0) + e_{ykl}(u^1)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^3) + e_{yij}(u^4)] e_{ykl}(u^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.14)$$

Posons :

$$\mathcal{U} = \{u(x, y) : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Y\text{-périodique en } y\}$$

Le problème de minimisation  $J^\varepsilon$  dans (2.3) est équivalent à un nouveau problème : trouver des fonctions  $U^i \in \mathcal{U}$ , qui minimise la fonction de l'énergie  $J(u^0, u^1, \dots)$ , sur l'ensemble des fonctions  $u^i \in \mathcal{U}$  admissibles :

$$J^\varepsilon(U^\varepsilon) = J(U^0, U^1, \dots) = \min_{u^i \in \mathcal{U}} J(u^0, u^1, \dots) = \min_{u^i \in \mathcal{U}} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} J^{(-2)} + \frac{1}{\varepsilon} J^{(-1)} + J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \dots \right) \quad (2.15)$$

Similaire à la technique de séparer les ordres de  $\varepsilon$  dans la méthode homogénéisation classique, nous remplaçons (2.15) par une famille des problèmes de minimisation successifs. Commençons par minimiser  $J^{(-2)}(u^0)$ , les équations microscopiques obtenues par les problèmes de minimisation  $J^{(-2)}, \dots, J^{(k)}$  servent à résoudre le problème de l'ordre  $k + 1$ . À partir de ces problèmes, nous pouvons trouver les équations pour identifier  $U^i$ .

### 2.2.2 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$

Le champ  $U^0(x, y)$  est la solution du problème de minimisation de la fonction quadratique  $J^{-2}$  :

$$J^{(-2)} = \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{yij}(u^0) e_{ykl}(u^0) dx dy \quad (2.16)$$

Le tenseur  $C_{ijkl}$  est définie positive donc :

$$\min_{u^0} J^{(-2)} = 0$$

et le point de minimum est atteint pour les fonctions  $U^0$  où :

$$e_y(U^0(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \times Y \quad (2.17)$$

Cette équation montre que  $U^0$  est indépendant de la variable microscopique, représentant un champ de déplacement macroscopique.

$$U^0(x, y) = V^0(x)$$

Substituons (2.17) dans  $J^{(-1)}$  :

$$J^{(-1)}(V^0, u^1) = \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(u^1)] e_{ykl}(V^0) dx dy = 0 \quad (2.18)$$

### 2.2.3 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^0$

Le problème d'ordre  $\varepsilon^{-2}$  montre que  $U^\varepsilon$  est une fonction macroscopique  $V^0(x)$  à laquelle s'ajoute des termes rapidement oscillants  $U^1(x, y), U^2(x, y), \dots$ . Les champs  $V^0(x)$ ,

$U^1(x, y)$  vérifient le problème de minimisation de  $J^0$  :

$$J^{(0)} = \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] [e_{xkl}(V^0) + e_{ykl}(U^1)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f V^0 dx dy \quad (2.19)$$

Ça nous suggère de chercher une relation entre  $U^1(x, y)$  et  $V^0(x)$ . Fixons  $V^0$ , nous faisons une variation de  $J^{(0)}$  autour de  $U^1$  par une petite perturbation  $hv$ , ( $0 < h \ll 1$ ;  $v \in \mathcal{U}_0$ ) en tenant compte également de la symétrie de  $C_{ijkl}$  :

$$J^{(0)}(V^0, U^1 + hv) - J^{(0)}(V^0, U^1) = h \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(v) \geq 0 \quad (2.20)$$

$$J^{(0)}(V^0, U^1 - hv) - J^{(0)}(V^0, U^1) = -h \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(v) \geq 0$$

(2.20) donne la relation entre  $U^1(x, y)$  et  $V^0(x)$  :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(v) dx dy = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0 \quad (2.21)$$

Pour établir un problème au niveau microstructure, nous utilisons dans (2.21) la fonction de test sous la forme  $v_i(x, y) = \tilde{v}(x)\phi_i(y)$ ,  $\tilde{v}(x) \in H_0^1(\Omega)$ ;  $\phi(y)$   $Y$ -périodique :

$$\int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(\phi) dy = 0 \quad \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \quad (2.22)$$

Compte tenu de la linéarité des équations, le champ  $U^1$  dépend linéairement de  $e_x(V^0)$  et peut être écrit sous la forme :

$$U_i^1(x, y) = V_i^1(x) + \chi_{ikl}(y) e_{xkl}(V^0(x)) \quad (2.23)$$

Ici  $V^1(x)$  apparaît comme une constante d'intégration pour la variable  $y$  et  $\chi_{ikl}(y)$  est une fonction périodique de période  $Y$ , remplaçons  $U_i^1(x, y)$  dans (2.22) et obtenons :

$$\int_Y C_{ijkl} [\delta_{km}\delta_{nl} + e_{ykl}(\chi_{mn})] e_{yij}(\phi) dy = 0 \quad \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \quad (2.24)$$

où nous avons défini :

$$e_{ykl}(\chi_{mn}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial y_l} + \frac{\partial \chi_{lmn}}{\partial y_k} \right)$$

Les fonctions  $\chi_{ikl}(y)$  ne sont définies qu'à une constante près et nous pouvons rendre la détermination unique en imposant :

$$\int_Y \chi_{ikl}(y) dy = 0 \quad (2.25)$$

Cette condition nous permet de calculer la moyenne de déplacement  $U^1$  sur la cellule  $Y$  :

$$\int_Y U_i^1 dy = \int_Y (V_i^1 + \chi_{ikl} e_{xkl}(V^0)) dy = V_i^1$$

Donc  $V^1$  est considéré comme le champ de déplacement macroscopique à l'ordre  $\varepsilon^1$  et sa détermination est réalisée dans les ordres suivants. Avec l'expression de  $U_i^1(x, y)$  trouvée dans (2.23),  $J^{(0)}$  est exprimé par :

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] e_{xpq}(V^0) e_{xmn}(V^0) dx dy \\ &- \int_{\Omega \times Y} f_i V_i^0 dx dy = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnpq}^{(0)} e_{xpq}(V^0) e_{xmn}(V^0) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

où :

$$A_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy \quad (2.27)$$

Ici  $A_{mnpq}^{(0)}$  sont les coefficients homogénéisés du milieu, symétrique, défini positif (voir annexe A).

Pour minimiser  $J^{(0)}$ ,  $V^0$  devrait vérifier l'équation :

$$\int_{\Omega} \left( A_{mnpq}^{(0)} e_{xpq}(V^0) e_{xmn}(\bar{v}) - f_k \bar{v}_k \right) dx = 0 \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega) \quad (2.28)$$

En utilisant intégration par parties et tenant compte la symétrie de  $A_{mnpq}^{(0)}$  nous obtenons l'équation d'équilibre dans la méthode d'homogénéisation classique :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{ijkl}^{(0)} e_{xkl}(V^0) \right) + f_i(x) = 0 \quad (2.29)$$

### 2.2.4 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^1$

Le problème d'ordre  $\varepsilon^0$  nous donne l'expression de  $U^1(x, y)$  en fonction de  $(V^0(x), V^1(x))$  (2.23) et une équation pour déterminer  $V^0(x)$  (2.28), en utilisant ces résultats nous pouvons calculer directement  $J^{(1)}$  dans (2.13) :

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f U^1 dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{xkl}(U^1) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_i U_i^1 dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(U^2) dx dy \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nous remplaçons la fonction de test dans (2.21) par  $U^2$  et obtenons :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(U^2) dx dy = 0 \quad (2.31)$$

Expression de  $U^1(x, y)$  dans (2.23) nous donne :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{xkl}(U^1) dx dy = \\ &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{xmn}(V^0) [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] [e_{xkl}(V^1) + \chi_{kpq} \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xpq}(V^0)] dx dy \\ &= \int_{\Omega} A_{iklmn}^{(1)} e_{xkl}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} B_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xkl}(V^1) dx \end{aligned} \quad (2.32)$$

Où nous avons posé :

$$A_{lmnpq}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \chi_{kpq} dy \quad (2.33)$$

$$B_{klmn}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] dy = A_{klmn}^{(0)} \quad (2.34)$$

La relation (2.34) est obtenu à partir de l'équation (2.24) en remplaçant fonction de test  $\phi$  par  $\chi_{kl}$ . Comme nous avons supposé que la force volumique  $f$  ne dépend pas de la microstructure :  $f_i = f_i(x)$ , le travail des efforts extérieurs dans  $J^{(1)}$  s'écrit :

$$\int_{\Omega \times Y} f_i U_i^1 dx dy = \int_{\Omega \times Y} f_i (V_i^1 + \chi_{ikl} e_{xkl}(V^0)) dx dy = \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx \quad (2.35)$$

Substituons (2.31), (2.32) et (2.35) dans  $J^{(1)}$  en tenant compte l'équation (2.28) :

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \int_{\Omega} A_{iklmn}^{(1)} e_{xkl}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xkl}(V^1) dx - \\ &- \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx = \int_{\Omega} A_{iklmn}^{(1)} e_{xkl}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xmn}(V^0) dx \end{aligned} \quad (2.36)$$

À partir des résultats dans le problème de l'ordre 0, nous pouvons trouver une forme macroscopique de  $J^{(1)}$ , mais le problème de minimiser cette énergie ne nous permet pas de calculer le champ  $V^1$  et une analyse de  $J^{(2)}$  est nécessaire pour le déterminer.

### 2.2.5 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^2$

Similaire au problème de l'ordre 1, pour minimiser  $J^{(2)}$  avec  $V^0, U^1$  obtenu dans les ordres précédents, nous devons trouver une relation entre  $U^2$  et  $V^0, U^1$ . Cette relation va servir à calculer la forme macroscopique de  $J^{(2)}$ . Nous rappelons la fonction  $J^{(2)}$  dans (2.14) :

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^2) + e_{yij}(U^3)] [e_{xkl}(V^0) + e_{ykl}(U^1)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^3) + e_{yij}(U^4)] e_{ykl}(V^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_i U_i^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.37)$$

En utilisant les équations obtenues dans sections 2.2.3, 2.2.4, nous pouvons simplifier  $J^{(2)}$  :

- Le champ  $V^0$  ne dépend pas de variable microscopie  $y$  :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^3) + e_{yij}(U^4)] e_{ykl}(V^0) dx dy = 0 \quad (2.38)$$

- Nous remplaçons la fonction de test dans (2.21) par  $U^3$  et obtenons :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{ykl}(U^3) [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] dx dy = 0 \quad (2.39)$$

Donc nous trouvons :

$$\begin{aligned}
J^{(2)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xkl}(U^2)] [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_i U_i^2 dx dy
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Une idée naturelle pour minimiser (3.36) est de remplacer  $U^1$  par (2.23) et varier  $J^{(2)}$  autour de  $U^2$  afin d'obtenir une relation entre ces déplacements. Mais l'apparition du terme  $e_x(U^2)$  dans  $J^{(2)}$  ne nous permet pas d'avoir une relation au niveau microscopique, pour traiter ce problème nous devons utiliser l'intégration par parties des termes en  $e_x(U^2)$  avant d'écrire la variation de  $J^{(2)}$  :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{xkl}(U^2) [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] dx dy \\
&= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{xkl}(U^2) [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) dx dy \\
&= \int_{\partial \Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) U_k^2 n_l ds dy - \\
&- \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Ici nous avons pris en compte la symétrie de  $C_{ijkl}$  et  $n$  est la normale à  $\partial \Omega$ . Pour évaluer l'intégrale sur  $\partial \Omega$  nous avons besoin des conditions aux limites sur les déplacements  $U$ . Toutefois, ces conditions aux limites ne peuvent pas être obtenues dans le cadre des approches asymptotiques présentées dans ce chapitre car le milieu est considéré comme une extension infinie. Afin de déterminer ces conditions, il faut avoir des études sur les correcteurs de couche limite (Dumontet [20], Devries et al. [19] ), mais pour notre but d'identification d'énergie jusqu'à l'ordre 2, les questions relatives à la détermination des conditions aux limites ne sont pas abordées dans ce travail. Nous supposons donc que



l'intégrale de surface a disparu dans l'expression de l'énergie  $J^{(2)}$  :

$$\begin{aligned} J^{(2)} = & - \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy + \\ & + \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_k U_k^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.42)$$

Fixons  $V^0, U^1$ , nous faisons une variation de  $J^{(2)}$  autour de  $U^2$  par une petite perturbation  $hv$ , ( $0 < h \ll 1; v \in \mathcal{U}_0$ ) en tenant compte également de la symétrie de  $C_{ijkl}$  et obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] e_{ykl}(v) dx dy - \\ & - \int_{\Omega \times Y} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) v_k dx dy = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour établir un problème au niveau microstructural, nous utilisons dans (2.43), la fonction de test sous la forme  $v_i(x, y) = \tilde{v}(x) \phi_i(y)$ ,  $\tilde{v}(x) \in H_0^1(\Omega)$ ;  $\phi(y)$   $Y$ -périodique, et obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] e_{ykl}(\phi) dy \\ & = \int_Y \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) \phi_k dy \quad \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Il est bien connue que l'existence des solutions de (2.44) requiert une condition supplémentaire sur le membre de gauche (Persson et al. [33], lemme 4.7) :

$$\int_Y \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(U^0) + f_k \right) dy = 0$$

Cette condition est assurée grâce à la relation (2.34) et l'équation d'équilibre de l'ordre  $\varepsilon^0$  (2.29) :

$$\begin{aligned} & \int_Y \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(U^0) + f_k \right) dy = \\ & = \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(U^0) + f_k \right) dy = \int_Y \left( \frac{\partial}{\partial x_l} (A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0)) + f_k(x) \right) dy = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

En utilisant  $U_i^1(x, y)$  trouvée dans (2.23), l'équation (2.44) devient :

$$\begin{aligned} & \int_Y C_{ijkl} \left( e_{xij}(V^1) + \chi_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{xpq}(V^0) + e_{yij}(U^2) \right) e_{ykl}(\phi) dy \\ &= \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) \phi_k dy \quad \forall \phi(y) \quad Y\text{-périodique} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Similairement au problème de l'ordre  $\varepsilon^0$ , nous voulons exprimer  $U^2$  en fonction des déplacements macroscopiques  $V^0, V^1$  avec les correcteurs obtenus par les problèmes de cellule. Afin d'assurer que ces problèmes sont bien posés, nous avons besoin des fonctions de test ayant la moyenne nulle sur  $Y$ . Cela peut être fait par l'introduction d'une fonction  $\bar{\phi}_i = \phi_i - \langle \phi_i \rangle$  et l'utilisation de la relation  $\phi_i = \bar{\phi}_i + \langle \phi_i \rangle$ ,  $e_{ykl}(\phi) = e_{ykl}(\bar{\phi})$  dans (2.46) :

$$\begin{aligned} & \int_Y C_{ijkl} \left( e_{xij}(V^1) + \chi_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{xpq}(V^0) + e_{yij}(U^2) \right) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy \\ &= \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) (\bar{\phi}_k + \langle \phi_k \rangle) dy \\ &= \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) \bar{\phi}_k dy + \langle \phi_k \rangle \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) dy = \\ &= \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) \bar{\phi}_k dy \end{aligned}$$

Nous trouvons une nouvelle équation pour  $U^2$  :

$$\begin{aligned} & \int_Y C_{ijkl} \left( e_{xij}(V^1) + \chi_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{xpq}(V^0) + e_{yij}(U^2) \right) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy \\ &= \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) \bar{\phi}_k dy \quad \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

La linéarité de l'équation (2.47) nous suggère une expression de  $U^2(x, y)$  :

$$U_i^2(x, y) = V_i^2(x) + \chi_{ikl}(y) e_{xkl}(V^1) + \xi_{ipqr}(y) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) + \chi_i^f \quad (2.48)$$

Ici  $V^2(x)$  apparaît comme une constante d'intégration pour la variable  $y$ ,  $\xi_{ipqr}(y)$  est une fonction périodique de période  $Y$  et  $\chi_i^f$  est la partie de déplacement causé par la force

volumique  $f$  et déterminé par :

$$\begin{cases} \int_Y C_{ijkl} e_{yij}(\chi^f) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy = \int_Y f_k \bar{\phi}_k dy \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \chi_i^f \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

La force volumique  $f$  est supposée de ne pas dépendre de la microstructure :  $f = f(x)$  donc (2.49) nous donne  $\chi_i^f = 0$ . Comme les fonctions  $\chi_{ikl}$ , les fonctions  $\xi_{ipqr}(y)$  ne sont définies qu'à une constante près et nous pouvons rendre la détermination unique en imposant :

$$\int_Y \xi_{ipqr}(y) dy = 0$$

En remplaçant (2.48) dans (2.47) nous trouvons le problème pour calculer  $\xi_{ipqr}$  :

$$\begin{cases} \int_Y C_{ijkl} (e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr} \chi_{ipq}) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy = \int_Y C_{ijk} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] \bar{\phi}_k dy \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \xi_{ipqr} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

**Remarque.** En utilisant intégration par parties et la symétrie de  $C_{ijkl}$  nous pouvons réécrire (2.50) sous la forme :

$$\begin{cases} \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial \xi_{ipqr}}{\partial y_j} \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial y_l} dy = \int_Y \left[ C_{ijk} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] + \frac{\partial}{\partial y_l} (C_{irkl} \chi_{ipq}) \right] \bar{\phi}_k dy \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \xi_{ipqr} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Notons  $F_{kpqr} = C_{ijk} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] + \frac{\partial}{\partial y_l} (C_{irkl} \chi_{ipq})$ , par l'introduction la forme bilinéaire :  $a_Y(\xi, \bar{\phi}) = \int_Y C_{ijkl} \frac{\partial \xi_{ipqr}}{\partial y_j} \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial y_l} dy$ , et un opérateur linéaire  $(F_{kpqr}, \bar{\phi}_k)_Y = \int_Y F_{kpqr} \bar{\phi}_k dy$

(2.51) s'écrit :

$$\begin{cases} a_Y(\xi_{pqr}, \bar{\phi}) = (F_{kpqr}, \bar{\phi}_k)_Y \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \xi_{ipqr} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

À partir de la condition de moyenne nulle sur  $Y$  de  $\bar{\phi}_i$ , nous pouvons montrer facilement que (2.52) est équivalent à l'équation suivante :

$$\begin{cases} a_Y(\xi_{pqr}, \phi) = (F_{kpqr} - \langle F_{kpqr} \rangle, \phi_k)_Y \\ \forall \phi_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \xi_{ipqr} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Nous avons la moyenne sur  $Y$  de  $F_{kpqr} - \langle F_{kpqr} \rangle$  est nulle donc l'existence et l'unicité de solution  $\xi_{ipqr}$  sont assurés.

À partir des conditions de moyenne nulle de  $\chi_i^f$ ,  $\chi_{ikl}$  et  $\xi_{ipqr}$ ,  $V^2$  est égale à la moyenne sur  $Y$  de  $U^2$  et il est considéré comme le déplacement macroscopique de l'ordre  $\varepsilon^2$ . Après d'avoir obtenu l'expression de  $U^1, U^2$  en fonction de  $V^0, V^1, V^2$ , nous les remplaçons dans  $J^{(2)}$  pour trouver l'énergie macroscopique de l'ordre  $\varepsilon^2$ .

Pour éviter d'alourdir les équations, nous allons calculer progressivement les termes de  $J^{(2)}$  dans (2.42) :

- Le premier terme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} A_{lmnst}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) V_k^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} B_{lmnpqr}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ici  $A^{(0)}, A^{(1)}$  sont définis dans (2.27), (2.33) et  $B_{lmnpqr}^{(1)}$  est calculé par :

$$B_{lmnpqr}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \xi_{kpqr} dy \quad (2.55)$$

- Le deuxième terme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} e_{xmn}(V^1) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ici :

$$\begin{aligned} B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} &= \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma} \chi_{k\alpha\beta}] dy \\ A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)} &= \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr} \chi_{ipq}] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma} \chi_{k\alpha\beta}] dy \end{aligned}$$

en utilisant (2.24) nous pouvons montrer que :  $B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} = A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)}$

- Le dernier terme de  $J^{(2)}$  est évalué comme dans les ordres précédents :

$$\int_{\Omega \times Y} f_k U_k^2 dx dy = \int_{\Omega} f_k V_k^2 dx$$

Prenons la somme de ces 3 termes :

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} A_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx - \int_{\Omega} A_{lmnst}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx - \\ &- \int_{\Omega} B_{lmnpqr}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx - \int_{\Omega} \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) V_k^2 dx \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le dernier terme dans (2.57) s'annule grâce à l'équation d'équilibre (2.29). En utilisant intégration par parties avec le quatrième terme nous trouvons une expression de  $J^{(2)}$  en fonction des grandeurs macroscopiques :

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} A_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{lmnpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \int_{\Omega} A_{lstmn}^{(1)} e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^1) dx \end{aligned} \quad (2.58)$$

où :

$$G_{lmnpqr} = A_{lmnpqr}^{(2)} - 2B_{lmnpqr}^{(1)}$$

Pour minimiser  $J^{(2)}$ ,  $V^1$  devrait vérifier l'équation :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left( A_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) + A_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) \right) e_{xst}(\bar{v}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} A_{lstmn}^{(1)} e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(\bar{v}) dx = 0 \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.59)$$

### 2.2.6 Énergie macroscopique et déplacement macroscopique

La solution totale est obtenue en sommant les champs de solution des problèmes d'ordre 0, 1, 2, ... Rappelons les déplacements à chaque l'ordre :

$$\begin{aligned} U_i^0(x, y) &= V_i^0(x) \\ U_i^1(x, y) &= V_i^1(x) + \chi_{ikl}(y)e_{xkl}(V^0(x)) \\ U_i^2(x, y) &= V_i^2(x) + \chi_{ikl}(y)e_{xkl}(V^1) + \xi_{ipqr}(y)\frac{\partial}{\partial x_r}e_{xpq}(V^0) \end{aligned}$$

Le champ de déplacement total, peut donc s'écrire sous la forme :

$$U_i^\varepsilon = (V_i^0 + \varepsilon V_i^1 + \varepsilon^2 V_i^2) + \varepsilon \chi_{ikl} e_{xkl}(V^0 + \varepsilon V^1) + \varepsilon^2 \xi_{ipqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0)$$

Les conditions de moyenne nulle de  $\chi_{ijk}$  et  $\xi_{ipqr}$  nous permet de définir un déplacement macroscopique  $V(x)$  qui est la moyenne de déplacement total sur la cellule élémentaire :

$$V_i = V_i^0 + \varepsilon V_i^1 + \varepsilon^2 V_i^2 \quad (2.60)$$

Nous obtenons aussi une énergie macroscopique homogénéisée en sommant les énergies de chaque l'ordre :

$$J(V_0, V_1, V_2) = J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \varepsilon^2 J^{(2)} \quad (2.61)$$

Nous pouvons établir les lois constitutives, les équations d'équilibre et déterminer  $V^0, V^1$  à partir des problèmes de minimisation de  $J^0, J^2$  respectivement. Mais pour une relation entre les grandeurs totales  $V$  et  $J$ , nous avons besoin une énergie équivalente définie sur le déplacement  $V$ .

## 2.3 Identification du modèle du second gradient

Nous avons obtenu, pour chaque ordre de  $\varepsilon$ , des énergies macroscopiques sous la forme quadratique de la déformation et sa dérivée, qui est aussi trouvé dans le modèle du second gradient de Toupin [44] et Mindlin [31]. Dans cette section, nous établissons la connexion

entre le modèle macroscopique obtenu et ces modèles phénoménologiques.

Introduisons la fonctionnelle d'énergie totale du milieu du second gradient :

$$\begin{aligned}
W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(u) e_{xst}(u) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{A}_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx + \\
& + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{lmnpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(u) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(u) dx - \int_{\Omega} f_i u_i dx
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Afin que  $W$  soit équivalent à l'énergie macroscopique trouvée dans la section précédente, elle devrait satisfaire la condition :

$$W(V) = J(V^0, V^1, V^2) = J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \varepsilon^2 J^{(2)} + \dots \tag{2.63}$$

Nous voulons identifier les coefficients  $\tilde{A}_{mnst}^{(0)}$ ,  $\tilde{A}_{lstmn}^{(1)}$ ,  $\tilde{G}_{lmnpqr}$  pour que le développement de  $W(V)$  jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^2$  soit identique aux résultats obtenus dans la section 2.2. Remplaçons (2.60) dans (2.62) et séparons les ordres de  $\varepsilon$  :

$$W(V) = W^{(0)} + \varepsilon W^{(1)} + \varepsilon^2 W^{(2)} + \dots \tag{2.64}$$

où :

$$W^{(0)} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
W^{(1)} = & \int_{\Omega} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} \tilde{A}_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx - \\
& - \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
W^{(2)} = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} \tilde{A}_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \\
& + \int_{\Omega} \tilde{A}_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{lmnpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) dx + \\
& + \int_{\Omega} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^2) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^2 dx
\end{aligned} \tag{2.67}$$

- Identification de l'ordre  $e^0$  :  $W^{(0)} = J^{(0)}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \quad \Rightarrow \tilde{A}_{mnst}^{(0)} = A_{mnst}^{(0)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

- Identification de l'ordre  $e^1$  :  $W^{(1)} = J^{(1)}$

En utilisant l'égalité  $\tilde{A}_{mnst}^{(0)} = A_{mnst}^{(0)}$  et l'équation (2.28), nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx = 0 \\ & \Rightarrow W^{(1)} = \int_{\Omega} \tilde{A}_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx \end{aligned} \quad (2.69)$$

Comparons avec  $J^{(1)}$  trouvé dans (2.36), nous déduisons :  $\tilde{A}_{lstmn}^{(1)} = A_{lstmn}^{(1)}$

- Identification de l'ordre  $e^2$  :

En utilisant les résultats des ordres précédents,  $W^{(2)}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^1) + \frac{1}{2} \tilde{G}_{lmnpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) \right) dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( A_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) + A_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) \right) dx \end{aligned}$$

Comparons avec  $J^{(2)}$  trouvé dans (2.58), nous déduisons :  $\tilde{G}_{lmnpqr} = G_{lmnpqr}$

Donc nous trouvons l'énergie macroscopique du milieu homogénéisé :

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(u) e_{xst}(u) dx + \varepsilon \int_{\Omega} A_{lstmn}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx + \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{lmnpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(u) \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(u) dx - \int_{\Omega} f_i u_i dx \end{aligned} \quad (2.70)$$



où les coefficients effectifs sont calculés à partir des solutions du problème de cellule  $\chi, \xi$  :

$$A_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy \quad (2.71)$$

$$A_{lmnpq}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \chi_{kpq} dy \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} G_{lmnpqr} &= \int_Y C_{ijst} [e_{yij}(\xi_{lmn}) + \delta_{jn} \chi_{ilm}] [e_{yst}(\xi_{pqr}) + \delta_{tr} \chi_{spq}] dy - \\ &\quad - 2 \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \xi_{kpqr} dy \end{aligned} \quad (2.73)$$

Le modèle macroscopique du milieu obtenu par homogénéisation à l'ordre supérieur coïncide avec le modèle du second gradient [44], [31]. Les tenseurs effectifs sont obtenus à partir de la résolution des problèmes sur la cellule élémentaire, ces tenseurs dépendent donc uniquement des propriétés de la microstructure. Dans le cadre de cette approche, la positivité de ces tenseurs n'est pas assurée par ses définitions, contrairement à ce qui est suggéré dans certains travaux de la littérature (Tran et al. [46]). La différence vient de la choix de stratégie d'approximation : soit une troncature de la déformation microscopique au premier ordre [46], soit notre approche, Bacigalupo [5], de troncature de l'énergie macroscopique au deuxième ordre.

## 2.4 Application à un milieu stratifié

### 2.4.1 Position du problème

À titre d'application, nous proposons de déterminer les expressions exactes de l'énergie macroscopique pour le problème de déformation anti-plane d'un composite stratifié  $\Omega$ . Le composite est décrit par la cellule définie dans la figure 2.2. Il est constitué de 2 phases ayant les épaisseurs  $(1-a)\varepsilon$  et  $a\varepsilon$ ; les modules élastiques  $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$  respectivement. Les phases sont périodiquement distribuées selon l'axe  $x_1$ . Dans cette configuration les champs locaux varient avec la variable  $y_1$  que nous allons noter par  $y$  pour des raisons de simplicité.

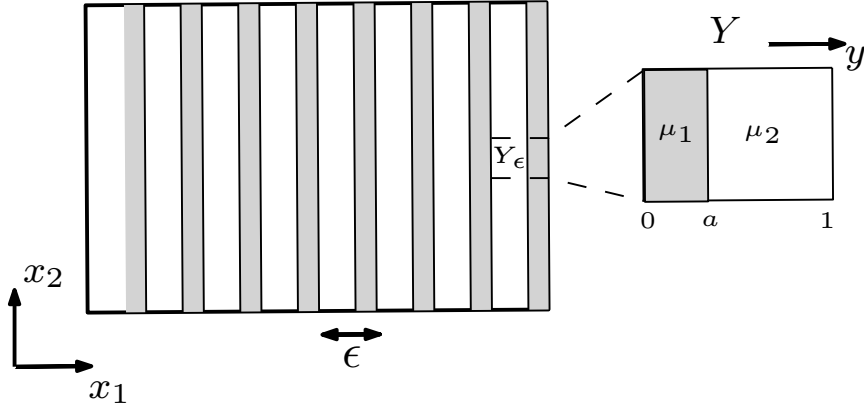


FIGURE 2.2 – Cellule élémentaire du composite stratifié.

Le module de cisaillement dans la cellule élémentaire sont noté par  $\mu(y)$  et définis par :

$$\begin{cases} \mu(y) = \mu_1 & \forall 0 \leq y \leq a \\ \mu(y) = \mu_2 & \forall a < y \leq 1 \end{cases} \quad (2.74)$$

Le milieu est soumis à une force volumique  $f(x) = (f_i(x))$ ,  $i = 1, 2, 3$  où  $f_1 = f_2 = 0$  et  $f_3 = f$ , qui est supposée de ne pas dépendre de la microstructure. La force  $f$  initie une déformation antiplane dans le milieu, caractérisée par le champ de déplacement  $u^\varepsilon(x) = (u_i(x))$ ,  $i = 1, 2, 3$  où les composantes  $u_1$  et  $u_2$  disparaissent ( $u_1 = u_2 = 0$ ), la seule composante non nulle  $u_3$  sera notée par  $u(x_1, x_2)$ . Les résultats obtenus dans les sections précédentes nous donnent l'énergie macroscopique du milieu homogénéisé :

$$W = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} A_{ij}^{(0)} u_{,i} u_{,j} + \varepsilon A_{ijk}^{(1)} u_{,i} u_{,jk} + \frac{\varepsilon^2}{2} G_{ijkl} u_{,ij} u_{,kl} dx - fu \right) dx \quad (2.75)$$

Pour déterminer les tenseur  $A^{(0)}$ ,  $A^{(1)}$ ,  $G$ , nous allons calculer les solutions des problèmes de cellule  $\chi(y)$ ,  $\xi(y)$  dans la section suivante.

### 2.4.2 Solutions des problèmes de cellule

- Les fonctions  $\chi_{ijk}(y)$  :

Dans le problèmes de déformation antiplane, les composantes à calculer de  $\chi$  sont

$\chi_{331} = \chi_{313}$  et  $\chi_{332} = \chi_{323}$ . Notons

$$\chi_1(y) = \chi_{313}(y) \quad ; \quad \chi_2(y) = \chi_{323}(y)$$

nous avons les équations pour déterminer ces fonctions :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [1 + \chi_1'(y)] \phi'(y) dy = 0 & \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \\ \langle \chi_1(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\chi_2'(y)] \phi'(y) dy = 0 & \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \\ \langle \chi_2(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

Après avoir de résolu ces 2 équations (Voir annexe B) nous obtenons :

$$\begin{cases} \chi_1(y) = \frac{(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left(\frac{a}{2} - y\right) & \forall 0 \leq y \leq a \\ \chi_1(y) = \frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left(y - \frac{1+a}{2}\right) & \forall a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.78)$$

$$\chi_2(y) = 0 \quad (2.79)$$

- Les fonctions  $\xi_{ijkl}(y)$  :

Dans notre cas de déformation antiplan, les composantes à calculer de  $\xi$  sont  $\xi_{3311} = \xi_{3131}$  ;  $\xi_{3321} = \xi_{3231}$  ;  $\xi_{3312} = \xi_{3132}$  ;  $\xi_{3322} = \xi_{3232}$ . Notons :

$$\xi_{11}(y) = \xi_{3131}(y) \quad ; \quad \xi_{12}(y) = \xi_{3132}(y)$$

$$\xi_{21}(y) = \xi_{3231}(y) \quad ; \quad \xi_{22}(y) = \xi_{3232}(y)$$

nous avons les équations pour déterminer ces fonctions :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\xi_{11}'(y) + \chi_1(y)] \bar{\phi}'(y) dy = \int_Y \mu(y) [\chi_1'(y) + 1] \bar{\phi}(y) dy \\ \forall \bar{\phi}(y) \text{ } Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{11}(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\xi_{21}'(y)] \bar{\phi}'(y) dy = 0 & \forall \bar{\phi}(y) \text{ } Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{21}(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\xi'_{22}(y) + \chi_2(y)] \bar{\phi}'(y) dy = \int_Y \mu(y) [\chi'_2(y) + 1] \bar{\phi}(y) dy \\ \forall \bar{\phi}(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{22}(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\xi'_{12}(y)] \bar{\phi}'(y) dy = 0 \quad \forall \bar{\phi}(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{12}(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Les solutions de ces équations (voir annexe B) :

$$\begin{cases} \xi_{11}(y) = -\frac{(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{a}{2} \cdot y - \frac{y^2}{2} + \frac{a - 2a^2}{12} \right) \quad \forall 0 \leq y \leq a \\ \xi_{11}(y) = -\frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1+a}{2} \cdot y + \frac{2a^2 + 3a + 1}{12} \right) \quad \forall a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.84)$$

$$\begin{cases} \xi_{22}(y) = -\frac{(1-a) \cdot (\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1} \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{ay}{2} \right) + H_1 \quad \text{avec } 0 \leq y \leq a \\ \xi_{22}(y) = -\frac{a \cdot (\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2} \cdot \left( \frac{1+a}{2} y - \frac{y^2}{2} - \frac{a}{2} \right) + H_1 \quad \text{avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.85)$$

$$\xi_{12}(y) = \xi_{21}(y) = 0 \quad (2.86)$$

Où :

$$H_1 = -\frac{(\mu_1 - \mu_2) \cdot a \cdot (1-a)}{12} \cdot \left( \frac{a^2}{\mu_1} - \frac{(1-a)^2}{\mu_2} \right)$$

### 2.4.3 Les coefficients homogénéisés

- Les composantes du tenseur  $A^{(0)}$  :

Le tenseur  $A^{(0)}$  sont calculé par la formule (2.71), pour notre cas simplifié ces composants sont :

$$A_{11}^{(0)} = \int_Y \mu(y) [\chi'_1(y) + 1]^2 dy = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{(1-a) \cdot \mu_1 + a \cdot \mu_2}$$

$$A_{22}^{(0)} = \int_Y \mu(y) [\chi'_2(y) + 1]^2 dy = a \cdot \mu_1 + (1-a) \cdot \mu_2$$

$$A_{12}^{(0)} = A_{21}^{(0)} = 0$$

- Les composants du tenseur  $A^{(1)}$  :

Le tenseur  $A^{(1)}$  sont calculé par la formule (2.72), pour notre cas toutes les composantes sont nulles :

- Les composants du tenseur  $G$  :

Le tenseur  $G$  sont calculé par la formule (2.73), pour notre cas ces composantes non nulles sont :  $G_{1122}$ ,  $G_{1212}$ ,  $G_{2211}$  et  $G_{2222}$  :

$$G_{1122} = G_{2211} = \frac{a^2(1-a)^2(\mu_1 - \mu_2)^2}{12(a\mu_2 + (1-a)\mu_1)} \quad (2.87)$$

$$G_{1212} = \frac{a^2(1-a)^2(\mu_1 - \mu_2)^2(a\mu_1 + (1-a)\mu_2)}{12(a\mu_2 + (1-a)\mu_1)^2} \quad (2.88)$$

$$G_{2222} = -\frac{a^2(1-a)^2(\mu_1 - \mu_2)^2(a\mu_2 + (1-a)\mu_1)}{12\mu_1\mu_2} \quad (2.89)$$

Donc énergie macroscopique d'un composite stratifié sous chargement antiplan s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( A_{11}^{(0)}(u_{,1})^2 + A_{22}^{(0)}(u_{,2})^2 \right) dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} \left( G_{1212}(u_{,12})^2 + 2G_{1122}u_{,11}u_{,22} + \right. \\ \left. + G_{2222}(u_{,22})^2 \right) dx - \int_{\Omega} f u dx \quad (2.90)$$

À titre d'illustration, nous présentons la variation des coefficients homogénéisés dans le cas où  $\mu_2/\mu_1 = 2$  et la fraction volumique  $a$  varie entre 0 et 1. Dans les deux cas limites

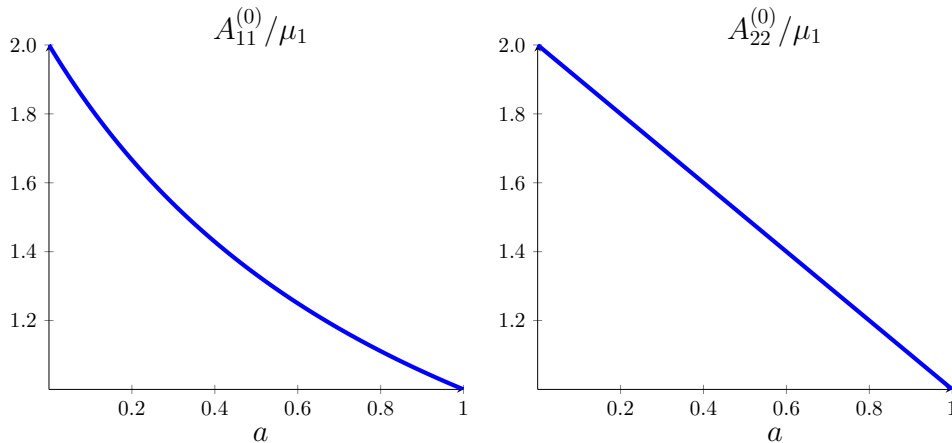
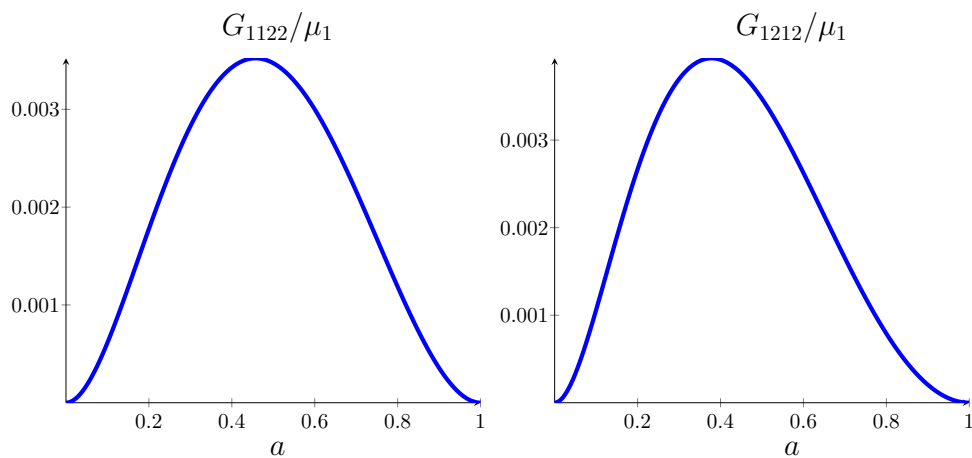
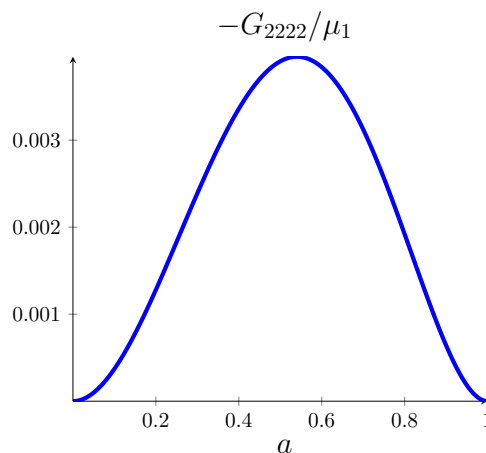


FIGURE 2.3 – Variation des coefficients élastiques  $A_{11}^{(0)}$  et  $A_{22}^{(0)}$

FIGURE 2.4 – Variation des coefficients  $G_{1122}$  et  $G_{1212}$ FIGURE 2.5 – Variation de coefficient  $G_{2222}$ 

où la fraction volumique  $a$  prend les valeurs 0 et 1, les coefficients élastiques effectifs  $A^{(0)}$  s'identifient aux propriétés élastiques des phases 1 ou 2, et les composantes du tenseur élastique de second gradient sont nulles. Nous n'avons donc pas de persistance des effets du second gradient lorsque nous supprimons hétérogénéité dans la cellule.

La négativité du coefficient  $G_{2222}$ , qui correspond au terme de gradient de déformation, peut être trouvée aussi dans les travaux sur les loi constitutives des matériaux granulaires (Chang et Gao [15], Suiker et al. [43]). Des analyses plus approfondies sur l'influence des signes de ces coefficients sont été réalisées par Askes et al. [4]

## 2.5 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons utilisé une combinaison de la méthode variationnelle et des développements asymptotiques pour construire un milieu à gradient de déformation à partir d'un milieu hétérogène périodique. Une séparation des ordres de l'énergie initiale conduit à un système de problèmes de minimisation successifs, et l'énergie macroscopique homogénéisée est obtenue par l'identification des coefficients. L'avantage de cette approche est d'avoir un seul champ de déplacement macroscopique, qui minimise l'énergie homogénéisée. Tandis que dans la méthode d'homogénéisation classique (Boutin [9], Gambin et Kroner [23]), le déplacement macroscopique est une combinaison d'une infinité de champs qui sont déterminés par résoudre successivement une série d'équations d'équilibre.

Les coefficients de cette énergie sont explicitement liés à des solutions de problèmes d'ordre supérieur des cellules unitaires. La résolution du problème de cellule à ordre 2 nécessite de connaître toutes les solutions aux ordres précédents. Ces problèmes élémentaires peuvent être facilement implémentés en utilisant les outils numériques classiques tels que les éléments finis.

# Homogénéisation d'un milieu quasi-périodique

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Homogénéisation par l'approche énergétique</b>	<b>59</b>
3.2.1	Développement asymptotique de l'énergie $J^\varepsilon$	59
3.2.2	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$	62
3.2.3	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^0$	62
3.2.4	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^1$	64
3.2.5	Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^2$	66
<b>3.3</b>	<b>Identification d'énergie homogénéisée</b>	<b>75</b>
3.3.1	Identification de l'ordre $e^0 : W^{(0)} = J^{(0)}$	77
3.3.2	Identification de l'ordre $e^1 : W^{(1)} = J^{(1)}$	77
3.3.3	Identification de l'ordre $e^2 : W^{(2)} = J^{(2)}$	78
3.3.4	Simplification des coefficients de l'énergie macroscopique	80
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>

*Dans ce troisième chapitre, nous utilisons la méthode homogénéisation par l'approche énergétique présentée dans chapitre précédent pour construire une énergie macroscopique à partir d'un milieu hétérogène quasi-périodique. La quasi-périodicité est représentée par la dépendance du tenseur de rigidité non seulement à la variable microscopique mais aussi à la variable macroscopique. Cette dépendance introduit un nouveau problème de cellule,*



et des termes supplémentaires dans le déplacement et dans l'énergie à partir de l'ordre  $\varepsilon$ . Par la méthode d'identification, nous pouvons obtenir explicitement l'expression des coefficients homogénéisés en fonction des solutions des problèmes de cellule.

### 3.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre 2 la construction de l'énergie homogénéisée d'un milieu périodique. Dans ce cas, les coefficients obtenus en résolvant les problèmes de cellule sont indépendants des variables spatiales. Afin de formuler les modèles avec la localisation de l'endommagement, c'est à dire, une dégradation de manière non uniforme de la rigidité, nous avons besoin une variation des coefficients homogénéisés dans le milieu. Cette dépendance peut être obtenu par l'introduction, au niveau microscopique, des variables supplémentaires dans la densité d'énergie (Fish et al. [22]), ou par les microstructures quasi-périodiques (Su et al. [42]).

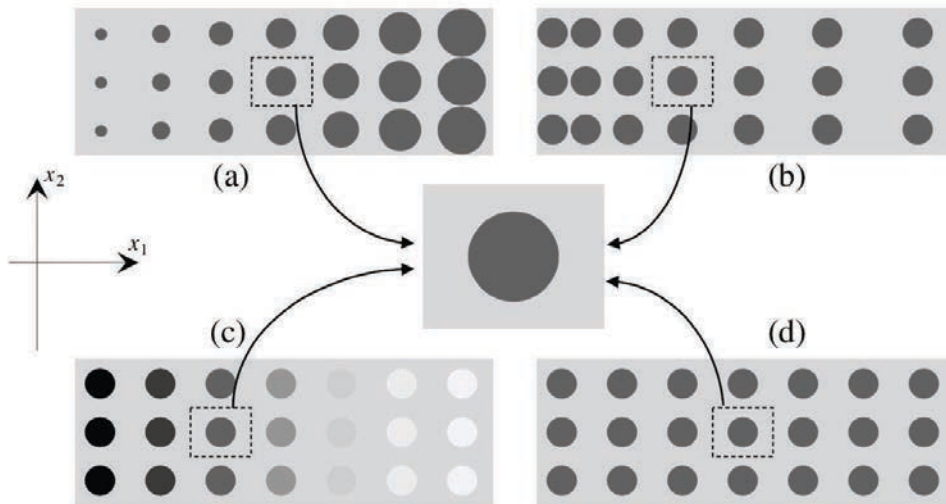


FIGURE 3.1 – Exemple des milieux quasi-périodique (Anthoine [3])

Le terme quasi-périodique signifie que la microstructure est caractérisée par une cellule unitaire qui progressivement évolue suivant une ou toutes les directions, soit en termes de géométrie ou en termes de propriétés des matériaux ou les deux. Des types de milieux

quasi-périodiques sont illustrés sur la figure 3.1 : la variation des microstructures peut être la taille d'inclusion (a), l'espacement d'inclusion (b) ou de la propriété de matériau (c). La description complète d'un milieu quasi-périodique nécessite la description de toutes les cellules successives. Dans la pratique, cela peut être se faire en définissant une cellule de base générique avec la variation spatiale du paramètre quasi-périodique.

Dans ce travail, nous adoptons la dernière approche pour construire une énergie homogénéisée qui peut représenter la localisation de l'endommagement dans le milieu.

## 3.2 Homogénéisation par l'approche énergétique

### 3.2.1 Développement asymptotique de l'énergie $J^\varepsilon$

Nous réutilisons la configuration du milieu  $\Omega$  dans le chapitre précédent en remplaçant les propriétés périodiques par quasi-périodique. Le tenseur de rigidité  $C^\varepsilon$  dépend quasi-périodiquement de la variable d'espace  $x$ , symétrique et défini positif :

$$C_{ijkl}^\varepsilon = C_{jikl}^\varepsilon = C_{klij}^\varepsilon, \quad \alpha_{ij} C_{ijkl}^\varepsilon \alpha_{kl} \geq 0$$

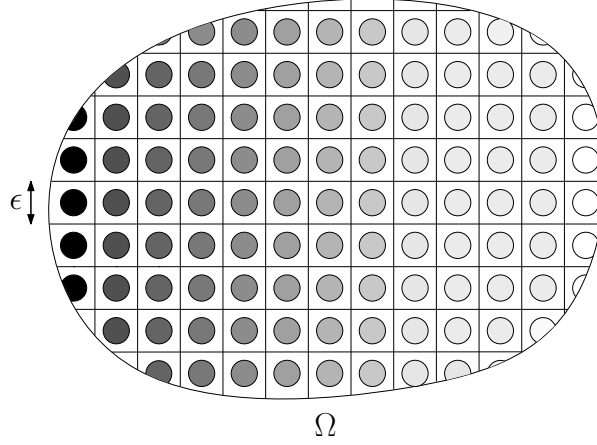
L'équation d'équilibre pour milieu élastique linéaire  $\Omega$ , s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijkl}^\varepsilon e_{xkl}(u^\varepsilon) \right) + f_i(x) = 0 \quad (3.1)$$

Le problème (3.1) admet une formulation variationnelle équivalente : trouver une fonction  $U^\varepsilon$ , qui minimise la fonction de l'énergie  $J^\varepsilon(u^\varepsilon)$ , sur l'ensemble des fonctions  $u^\varepsilon$  admissibles :

$$J^\varepsilon(U^\varepsilon) = \min_{u^\varepsilon} J^\varepsilon(u^\varepsilon) = \min_{u^\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} C_{ijkl}^\varepsilon(x) e_{xij}(u^\varepsilon) e_{xkl}(u^\varepsilon) - f_i u_i^\varepsilon \right) dx \quad (3.2)$$

La microstructure quasi-périodique  $Y^\varepsilon$  est construit à partir d'une cellule unitaire  $Y$ , mise à l'échelle par le petit paramètre  $\varepsilon$ . La propriété d'un point dans la cellule dépend non seulement sa position mais aussi la position de la cellule dans le milieu. Le tenseur de

FIGURE 3.2 – Le milieu quasi-périodique  $\Omega$ 

rigidité  $C_{ijkl}^\varepsilon$  dans ce cas est représenté en considérant une fonction  $C_{ijkl}(\zeta, \gamma)$ , régulière en  $\zeta$  et périodique en  $\gamma$  de période  $Y$  et posant :

$$C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (3.3)$$

Hypothèse de représenter le tenseur de rigidité en fonction des variables microscopique et macroscopique peut être trouvée aussi dans les travaux de Capdeville et al. ([10], [11]) sur l'homogénéisation non périodique des équations des ondes sismiques.

Par l'introduction de nouvelle variable  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  et l'utilisation de technique de séparer des ordres dans chapitre 2, le champ de déplacement  $u^\varepsilon$  est représenté par un développement asymptotique sous la forme :

$$u^\varepsilon = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \varepsilon^3 u^3(x, y) + \dots \quad (3.4)$$

En substituant (3.4) dans la fonction de l'énergie  $J^\varepsilon$  (3.2) et regroupant les termes de même puissance en  $\varepsilon$ , nous obtenons :

$$J^\varepsilon(u^\varepsilon) = J(u^0, u^1, u^2, \dots) = \frac{1}{\varepsilon^2} J^{(-2)} + \frac{1}{\varepsilon} J^{(-1)} + J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \varepsilon^2 J^{(2)} + \dots \quad (3.5)$$

Où :

$$J^{(-2)}(u^0) = \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{yij}(u^0) e_{ykl}(u^0) dx dy \quad (3.6)$$

$$J^{(-1)}(u^0, u^1) = \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^0) + e_{yij}(u^1)] e_{ykl}(u^0) dx dy \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} J^{(0)}(u^0, u^1, u^2) &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(u^0) + e_{yij}(u^1)] [e_{xkl}(u^0) + e_{ykl}(u^1)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^1) + e_{yij}(u^2)] e_{ykl}(u^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^0 dx dy \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} J^{(1)}(u^0, u^1, u^2, u^3) &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^0) + e_{yij}(u^1)] [e_{xkl}(u^1) + e_{ykl}(u^2)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^2) + e_{yij}(u^3)] e_{ykl}(u^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^1 dx dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} J^{(2)}(u^0, u^1, u^2, u^3, u^4) &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(u^1) + e_{yij}(u^2)] [e_{xkl}(u^1) + e_{ykl}(u^2)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^2) + e_{yij}(u^3)] [e_{xkl}(u^0) + e_{ykl}(u^1)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(u^3) + e_{yij}(u^4)] e_{ykl}(u^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^2 dx dy \end{aligned} \quad (3.10)$$

Posons :

$$\mathcal{U} = \{u(x, y) : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Y\text{-périodique en } y\}$$

Le problème de minimisation  $J^\varepsilon$  dans (3.2) est équivalent à un nouveau problème : trouver des fonctions  $U^i \in \mathcal{U}$ , qui minimise la fonction de l'énergie  $J(u^0, u^1, \dots)$ , sur l'ensemble des fonctions  $u^i \in \mathcal{U}$  admissibles :

$$J^\varepsilon(U^\varepsilon) = J(U^0, U^1, \dots) = \min_{u^i \in \mathcal{U}} J(u^0, u^1, \dots) = \min_{u^i \in \mathcal{U}} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} J^{(-2)} + \frac{1}{\varepsilon} J^{(-1)} + J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \dots \right) \quad (3.11)$$

Nous remplaçons (3.11) par une famille des problèmes de minimisation successifs. Commençons par minimiser  $J^{(-2)}(u^0)$ , les équations microscopiques obtenues par les problèmes de minimisation  $J^{(-2)}, \dots, J^{(k)}$  servent à résoudre le problème de l'ordre  $k + 1$ . A partir de ces problèmes, nous pouvons trouver les équations pour identifier  $U^i$ .

### 3.2.2 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$

La minimisation de  $J^{(-2)}, J^{(-1)}$  sont identiques avec celles du chapitre 2, nous obtenons le champs de déplacement  $u^0$  qui est indépendant de la deuxième variable :

$$U^0(x, y) = V^0(x)$$

et ces 2 énergies s'annulent :

$$J^{(-2)} = J^{(-1)} = 0 \quad (3.12)$$

### 3.2.3 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^0$

À partir du problème d'ordre  $\varepsilon^{-2}$  nous trouvons que  $U^\varepsilon$  est une fonction macroscopique  $V^0(x)$  à laquelle s'ajoute des termes rapidement oscillants  $U^1(x, y), U^2(x, y), \dots$ . La détermination de  $V^0(x)$  est réalisée par la minimisation de  $J^{(0)}$ .

Les champs  $V^0(x), U^1(x, y)$  vérifient le problème de minimisation de  $J^0$  :

$$\begin{aligned} J^{(0)} = & \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(u^1)] [e_{xkl}(V^0) + e_{ykl}(u^1)] dx dy - \\ & - \int_{\Omega \times Y} f V^0 dx dy \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ça nous suggère de chercher une relation entre  $U^1(x, y)$  et  $V^0(x)$ . Fixons  $V^0$ , nous faisons une variation de  $J^{(0)}$  autour de  $U^1$  par une petite perturbation  $hv, (0 < h \ll 1; v \in \mathcal{U}_0)$  en tenant compte également de la symétrie de  $C_{ijkl}$  et obtenons :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl}(x, y) [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(v) dx dy = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0 \quad (3.14)$$

Pour établir un problème au niveau microstructure, nous utilisons dans (3.14) la fonction de test sous la forme  $v_i(x, y) = \tilde{v}(x)\phi_i(y)$ ,  $\tilde{v}(x) \in H_0^1(\Omega)$ ;  $\phi(y)$   $Y$ -périodique :

$$\int_Y C_{ijkl}(x, y) [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(\phi) dy = 0 \quad \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \quad (3.15)$$

Compte tenu de la linéarité des équations, le champ  $U^1$  dépend linéairement de  $e_x(V^0)$  et peut être écrit sous la forme :

$$U_i^1(x, y) = V_i^1(x) + \chi_{ikl}(x, y)e_{xkl}(V^0(x)) \quad (3.16)$$

Ici  $V^1(x)$  apparaît comme une constante d'intégration pour la variable  $y$  et  $\chi_{ikl}(x, y)$  est une fonction périodique en  $y$  de période  $Y$ . Remplaçons  $U_i^1(x, y)$  dans (3.15) et nous obtenons les équations, qui s'appelle le problème de cellule, pour déterminer les fonctions  $\chi_{ikl}(x, y)$  :

$$\int_Y C_{ijkl}(x, y) [\delta_{km}\delta_{nl} + e_{ykl}(\chi_{mn})] e_{yij}(\phi) dy = 0 \quad \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \quad (3.17)$$

où nous avons défini :

$$e_{ykl}(\chi_{mn}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial y_l} + \frac{\partial \chi_{lmn}}{\partial y_k} \right)$$

Les fonctions  $\chi_{ikl}(y)$  ne sont définies qu'à une constante près et nous pouvons rendre la détermination unique en imposant :

$$\int_Y \chi_{ikl}(x, y) dy = 0 \quad (3.18)$$

cette condition nous permet de calculer la moyenne de déplacement  $U^1$  sur la cellule  $Y$  :

$$\int_Y U_i^1 dy = \int_Y (V_i^1 + \chi_{ikl}e_{xkl}(V^0)) dy = V_i^1$$

La dépendance des solutions du problème de cellule  $\chi_{mn}$  au variable macroscopique  $x$  représente l'influence de la quasi-périodicité qui apparaît dans le tenseur de rigidité  $C_{ijkl}$ . C'est le point le plus important pour distinguer le cas quasi-périodique avec le cas périodique traité dans le chapitre précédent. Avec une microstructure quasi-périodique, les solutions des problèmes de cellule dépendent non seulement des variables microscopique  $y$  mais aussi des variables macroscopiques  $x$ . Cette dépendance va introduire les termes supplémentaires dans l'énergie macroscopique.

Avec l'expression de  $U_i^1(x, y)$  trouvée dans (3.16),  $J^{(0)}$  est exprimé par :

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] e_{xpq}(V^0) e_{xmn}(V^0) dx dy \\ &- \int_{\Omega \times Y} f_i V_i^0 dx dy = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnpq}^{(0)} e_{xpq}(V^0) e_{xmn}(V^0) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

où :

$$A_{mnpq}^{(0)}(x) = \int_Y C_{ijkl}(x, y) [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy \quad (3.20)$$

Ici  $A_{mnpq}^{(0)}(x)$  sont les coefficients homogénéisés du milieu quasi-périodique. Pour comparer avec le milieu périodique, les formules de calcul sont identiques mais les coefficients homogénéisés ne sont plus constants mais varient avec la variable macroscopique  $x$ .

Pour minimiser  $J^{(0)}$ ,  $V^0$  doit vérifier l'équation :

$$\int_{\Omega} \left( A_{mnpq}^{(0)} e_{xpq}(V^0) e_{xmn}(\bar{v}) - f_k \bar{v}_k \right) dx = 0 \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega) \quad (3.21)$$

En utilisant intégration par parties et tenant compte la symétrie de  $A_{mnpq}^{(0)}$  nous obtenons l'équation d'équilibre dans la méthode d'homogénéisation classique :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{ijkl}^{(0)} e_{xkl}(V^0) \right) + f_i(x) = 0 \quad (3.22)$$

### 3.2.4 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^1$

Le problème d'ordre  $\varepsilon^0$  nous donne l'expression de  $U^1(x, y)$  en fonction de  $(V^0(x), V^1(x))$  (3.16) et une équation pour déterminer  $V^0(x)$  (3.21), en utilisant ces résultats nous pouvons calculer directement  $J^{(1)}$  dans (3.9) :

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f U^1 dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{xkl}(U^1) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_i U_i^1 dx dy \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(U^2) dx dy \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous remplaçons la fonction de test dans (3.14) par  $U^2$  et obtenons :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{ykl}(U^2) dx dy = 0 \quad (3.24)$$

À partir de l'expression dans (3.16), nous pouvons calculer les déformations associées à  $U^1(x, y)$  :

$$e_{yij}(U^1) = e_{yij}(\chi_{pq}) e_{xmn}(V^0) \quad (3.25)$$

$$e_{xkl}(U^1) = e_{xkl}(V^1) + \frac{\chi_{kpq}}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xpq}(V^0) + \frac{\chi_{lpq}}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} e_{xpq}(V^0) + e_{xkl}(\chi_{pq}) e_{xpq}(V^0) \quad (3.26)$$

Le dernier terme dans (3.26) vient de la dépendance des fonctions  $\chi_{ijk}$  par rapport la variable  $x$ . Et cette apparition génère un terme supplémentaire, par rapport au cas périodique, dans l'énergie de l'ordre  $\varepsilon$ . En utilisant l'expression de  $e_{yij}(U^1)$ ,  $e_{xkl}(U^1)$  en tenant compte de la symétrie de  $C_{ijkl}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] e_{xkl}(U^1) dx dy &= \int_{\Omega} A_{iklmn}^{(1)} e_{xkl}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xmn}(V^0) dx + \\ &+ \int_{\Omega} B_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xkl}(V^1) dx + \int_{\Omega} D_{mnpq}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xpq}(V^0) dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

Où nous avons posé :

$$A_{lmnpq}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \chi_{kpq} dy \quad (3.28)$$

$$B_{klmn}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] dy = A_{klmn}^{(0)} \quad (3.29)$$

$$D_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xkl}(\chi_{pq}) dy \quad (3.30)$$

La relation (3.29) est obtenue à partir de l'équation (3.17) en remplaçant la fonction test  $\phi$  par  $\chi_{kl}$ . Comme nous avons supposé que la force volumique  $f$  ne dépend pas de la microstructure :  $f_i = f_i(x)$ , le travail des efforts extérieurs dans  $J^{(1)}$  s'écrit :

$$\int_{\Omega \times Y} f_i U_i^1 dx dy = \int_{\Omega \times Y} f_i (V_i^1 + \chi_{ikl} e_{xkl}(V^0)) dx dy = \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx \quad (3.31)$$



Substituons (3.24), (3.27) et (3.31) dans  $J^{(1)}$  en tenant compte l'équation (3.21) :

$$\begin{aligned}
J^{(1)} &= \int_{\Omega} A_{iklmn}^{(1)} e_{xkl}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} D_{mnpq}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xpq}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xkl}(V^1) - \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx \\
&= \int_{\Omega} A_{iklmn}^{(1)} e_{xkl}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_i} e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} D_{mnpq}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xpq}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Le dernier terme dans  $J^{(1)}$  est le terme que nous ne trouvons pas dans l'énergie à l'ordre  $\varepsilon$  du chapitre précédent. Ce nouveau terme montre que la non périodicité du milieu peut introduire des énergies supplémentaires dans les ordres supérieurs. Nous allons analyser  $J^{(2)}$  dans la section suivante afin d'identifier complètement l'énergie homogénéisée.

### 3.2.5 Problème de minimisation d'ordre $\varepsilon^2$

Similaire au problème de l'ordre 1, pour minimiser  $J^{(2)}$  avec  $V^0, U^1$  obtenus dans les ordres précédents, nous devons trouver une relation entre  $U^2$  et  $V^0, U^1$ . Cette relation va servir à calculer la forme macroscopique de  $J^{(2)}$ . Nous rappelons la fonction  $J^{(2)}$  dans (3.10) :

$$\begin{aligned}
J^{(2)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^2) + e_{yij}(U^3)] [e_{xkl}(V^0) + e_{ykl}(U^1)] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^3) + e_{yij}(U^4)] e_{ykl}(V^0) dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_i U_i^2 dx dy
\end{aligned} \tag{3.33}$$

En utilisant les équations obtenues dans sections 3.2.3, 3.2.4, nous pouvons simplifier  $J^{(2)}$  :

- Le champ  $V^0$  ne dépend pas de variable microscopie  $y$  :  $e_{ykl}(V^0) = 0$  donc le troisième terme de  $J^{(2)}$  s'annule :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^3) + e_{yij}(U^4)] e_{ykl}(V^0) dx dy = 0 \tag{3.34}$$

- Nous remplaçons la fonction de test dans (3.14) par  $U^3$  et obtenons :

$$\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{ykl}(U^3) [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] dx dy = 0 \quad (3.35)$$

Donc nous trouvons :

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy + \\ &+ \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xkl}(U^2)] [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_i U_i^2 dx dy \end{aligned} \quad (3.36)$$

En utilisant les mêmes raisons dans le chapitre précédent, nous utilisons l'intégration par parties des termes en  $e_x(U^2)$  afin de pouvoir écrire les problèmes de cellule au niveau microscopique :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{xkl}(U^2) [e_{xij}(V^0) + e_{yij}(U^1)] dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} e_{xkl}(U^2) [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) dx dy \\ &= \int_{\partial \Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) U_k^2 n_l ds dy - \\ &- \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy - \\ &- \int_{\Omega \times Y} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ici nous avons pris en compte la symétrie de  $C_{ijkl}$  et  $n$  est le vecteur normal à  $\partial \Omega$ . En utilisant les mêmes arguments que dans le chapitre 2, nous supposons donc que l'intégrale de surface a disparu dans l'expression de l'énergie  $J^{(2)}$ , donc :

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy - \\ &- \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy - \\ &- \int_{\Omega \times Y} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_k U_k^2 dx dy \end{aligned} \quad (3.38)$$

Fixons  $V^0, U^1$ , nous faisons une variation de  $J^{(2)}$  autour de  $U^2$  par une petite perturbation  $hv$ , ( $0 < h \ll 1; v \in \mathcal{U}_0$ ) en tenant compte également de la symétrie de  $C_{ijkl}$  et obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] e_{ykl}(v) dx dy - \\ & - \int_{\Omega \times Y} \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) \right) + f_k \right] v_k dx dy = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pour établir un problème au niveau microstructure, nous utilisons dans (3.39), la fonction de test sous la forme  $v_i(x, y) = \tilde{v}(x) \phi_i(y)$ ,  $\tilde{v}(x) \in H_0^1(\Omega)$ ;  $\phi(y)$   $Y$ -périodique, avec l'argument classique du calcul variationnel :

$$\begin{aligned} & \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] e_{ykl}(\phi) dy \\ & = \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) \right) + f_k \right] \phi_k dy \quad \forall \phi(y) Y\text{-périodique} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Il est bien connue que l'existence des solutions de (3.40) requiert une condition supplémentaire à vérifier par le membre de gauche :

$$\int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) \right) + f_k \right] dy = 0$$

Cette condition est assurée grâce à la relation (3.29) et l'équation d'équilibre à l'ordre  $\varepsilon^0$  (3.22) :

$$\begin{aligned} & \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^0) \right) + f_k \right] dy = \\ & = \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) \right) + f_k(x) \right] dy = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

En utilisant  $e_x(U^1)$  trouvée dans (3.26), l'équation (3.40) devient :

$$\begin{aligned} & \int_Y C_{ijkl} \left( e_{xij}(V^1) + \chi_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{xpq}(V^0) + e_{xij}(\chi_{pq}) e_{xpq}(V^0) + e_{yij}(U^2) \right) e_{ykl}(\phi) dy \\ & = \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) \right) + f_k(x) \right] \phi_k dy \quad \forall \phi(y) Y\text{-périodique} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Comme pour le problème à l'ordre  $\varepsilon^0$ , nous voulons exprimer  $U^2$  en fonction des déplacements macroscopiques  $V^0, V^1$  avec les correcteurs obtenus par les problèmes de cellule. Afin d'assurer que ces problèmes sont bien posés, nous avons besoin des fonctions test ayant la moyenne nulle sur  $Y$ . Cela peut être fait par l'introduction d'une fonction  $\bar{\phi}_i = \phi_i - \langle \phi_i \rangle$  et utilisation de la relation  $\phi_i = \bar{\phi}_i + \langle \phi_i \rangle$ ;  $e_{ykl}(\phi) = e_{ykl}(\bar{\phi})$  dans (3.42) :

$$\begin{aligned}
 & \int_Y C_{ijkl} \left( e_{xij}(V^1) + \chi_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{xpq}(V^0) + e_{xij}(\chi_{pq}) e_{xpq}(V^0) + e_{yij}(U^2) \right) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy \\
 &= \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) \right) + f_k(x) \right] (\bar{\phi}_k + \langle \phi_k \rangle) dy \\
 &= \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) \right) + f_k(x) \right] \bar{\phi}_k dy + \langle \phi_k \rangle \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) \right) + f_k(x) \right] \\
 &= \int_Y \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( A_{klmn}^{(0)} e_{xmn}(V^0) \right) + f_k(x) \right] \bar{\phi}_k dy
 \end{aligned}$$

Nous trouvons une nouvelle équation pour  $U^2$  :

$$\begin{aligned}
 & \int_Y C_{ijkl} \left( e_{xij}(V^1) + \chi_{ipq} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{xpq}(V^0) + e_{xij}(\chi_{pq}) e_{xpq}(V^0) + e_{yij}(U^2) \right) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy \\
 &= \int_Y \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + \frac{\partial A_{klmn}^{(0)}}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) \bar{\phi}_k dy \tag{3.43} \\
 & \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0
 \end{aligned}$$

La linéarité de l'équation (3.43) nous suggère une expression de  $U^2(x, y)$  :

$$\begin{aligned}
 U_i^2(x, y) = & V_i^2(x) + \chi_{ikl}(x, y) e_{xkl}(V^1) + \xi_{ipqr}(x, y) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) + \\
 & + \psi_{imn}(x, y) e_{xmn}(V^0) + \chi_i^f
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Ici  $V^2(x)$  apparaît comme une constante d'intégration pour la variable  $y$ ,  $\chi_{ikl}$  est obtenu à partir (3.17),  $\xi_{ipqr}(x, y)$ ;  $\psi_{imn}(x, y)$  sont les fonctions périodiques de période  $Y$  et  $\chi_i^f$  est la partie du déplacement causé par la force volumique  $f$ . Comme les fonctions  $\chi_{ikl}(x, y)$ , la dépendance en la variable macroscopique des fonctions  $\xi_{ipqr}(x, y)$ ;  $\psi_{imn}(x, y)$  vient de la quasi-périodicité du milieu. Par rapport au déplacement à l'ordre  $\varepsilon^2$  trouvé dans au

chapitre 2, nous obtenons un terme supplémentaire lié avec  $e_{xmn}(V^0)$ . Cette dépendance en  $x$  et ce nouveau terme génèrent plusieurs nouveaux termes dans l'énergie homogénéisée qui seront identifiées dans section suivante.

Les fonctions  $\xi_{ipqr}(x, y)$ ;  $\psi_{imn}(x, y)$  et  $\chi_i^f(x, y)$  ne sont définies qu'à une constante près et nous pouvons rendre la détermination unique en imposant :

$$\int_Y \xi_{ipqr}(y) dy = \int_Y \psi_{imn}(x, y) = \int_Y \chi_i^f(x, y) dy = 0$$

Afin d'établir le problème de cellule pour déterminer  $\xi_{ipqr}(x, y)$ ;  $\psi_{imn}(x, y)$ ;  $\chi_i^f(x, y)$ , remplaçons (3.44) dans (3.43) et rappelons  $A_{klmn}^{(0)}$  dans (3.29) :

$$A_{klmn}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] dy$$

Apparaissent ainsi la famille de problèmes suivante :

- Le problème pour calculer  $\chi_i^f(x, y)$  :

$$\begin{cases} \int_Y C_{ijkl} e_{yij}(\chi^f) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy = \int_Y f_k \bar{\phi}_k dy \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \chi_i^f \rangle = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Comme la force volumique  $f$  est supposée ne pas dépendre de la microstructure :  $f = f(x)$ , (3.45) devient :

$$\begin{cases} \int_Y C_{ijkl} e_{yij}(\chi^f) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy = 0 \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \chi_i^f \rangle = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Il est facile d'en déduire que  $\chi_i^f = 0$ .

- Le problème pour calculer  $\xi_{ipqr}$  :

$$\begin{cases} \int_Y C_{ijkl} (e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr} \chi_{ipq}) e_{ykl}(\bar{\phi}) dy = \int_Y C_{ijk} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] \bar{\phi}_k dy \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \xi_{ipqr} \rangle = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

- Le problème pour calculer  $\psi_{imn}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\psi_{mn}) + e_{xij}(\chi_{mn})] e_{ykl}(\bar{\phi}) dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \bar{\phi}_k dy \\ \forall \bar{\phi}_i(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi}_i \rangle = 0; \quad \langle \psi_{imn} \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (3.48)$$

L'existence et l'unicité de la solution pour chaque problème de cellule sont assurées grâce à la condition  $\langle \bar{\phi}_i \rangle = 0$  comme il a déjà été montré au chapitre 2.

À partir des conditions de moyenne nulle de  $\chi_i^f, \chi_{ikl}$  et  $\xi_{ipqr}$ ,  $V^2$  est égale à la moyenne sur  $Y$  de  $U^2$  et il est considéré comme le déplacement macroscopique de l'ordre  $\varepsilon^2$ . Après d'avoir obtenu l'expression de  $U^1, U^2$  en fonction de  $V^0(x), V^1(x), V^2(x)$ , nous les remplaçons dans  $J^{(2)}$  pour trouver l'énergie macroscopique de l'ordre  $\varepsilon^2$ .

Pour éviter d'alourdir les équations, nous allons calculer progressivement les termes de  $J^{(2)}$  dans (3.38) :

$$\begin{aligned} J^{(2)} = & \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy - \\ & - \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy - \\ & - \int_{\Omega \times Y} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy - \int_{\Omega \times Y} f_k U_k^2 dx dy \end{aligned}$$

- Le premier terme de  $J^{(2)}$  :

$$\int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy$$

En utilisant l'expression de  $U^1$  dans (3.16) et de  $U^2$  dans (3.44), nous obtenons :

$$\begin{aligned} e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2) = & [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xmn}(V^1) + \\ & + [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr} \chi_{ipq}] \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) + [e_{xij}(\chi_{mn}) + e_{yij}(\psi_{mn})] e_{xmn}(V^0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2) = & [\delta_{ks} \delta_{lt} + e_{ykl}(\chi_{st})] e_{xst}(V^1) + \\ & + [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma} \chi_{k\alpha\beta}] \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(V^0) + [e_{xkl}(\chi_{st}) + e_{ykl}(\psi_{st})] e_{xst}(V^0) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} C_{ijkl} [e_{xij}(U^1) + e_{yij}(U^2)] [e_{xkl}(U^1) + e_{ykl}(U^2)] dx dy = \\
& = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} e_{xmn}(V^1) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \int_{\Omega} D_{mnst}^{(6)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{2} D_{mnst}^{(7)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx + \int_{\Omega} D_{stpqr}^{(8)} e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Ici  $A_{mnst}^{(0)}$  est définie dans (3.20) et les autres coefficients sont :

$$B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}(x) = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta}] dy \tag{3.52}$$

$$A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)}(x) = \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr}\chi_{ipq}] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta}] dy \tag{3.53}$$

$$D_{mnst}^{(6)}(x) = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] [e_{xkl}(\chi_{st}) + e_{ykl}(\psi_{st})] dy \tag{3.54}$$

$$D_{mnst}^{(7)}(x) = \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(\chi_{mn}) + e_{yij}(\psi_{mn})] [e_{xkl}(\chi_{st}) + e_{ykl}(\psi_{st})] dy \tag{3.55}$$

$$D_{stpqr}^{(8)}(x) = \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}\xi_{pqr} + \delta_{jr}\chi_{ipq}] [e_{xkl}(\chi_{st}) + e_{ykl}(\psi_{st})] dy \tag{3.56}$$

- En utilisant l'expression de  $U^2$  dans (3.44), nous obtenons le deuxième terme de  $J^{(2)}$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy \\
& = \int_{\Omega \times Y} C_{ijkl} [V_k^2 + \chi_{kst} e_{xst}(V^1) + \xi_{kpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) + \psi_{kpq} e_{xpq}(V^0)] \times \\
& \times [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) dx dy = \\
& = \int_{\Omega} A_{lmnst}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} B_{lmnpqr}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx + \\
& + \int_{\Omega} A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) V_k^2 dx + \int_{\Omega} D_{lmnpq}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) e_{xpq}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Ici  $A^{(0)}, A^{(1)}$  sont définies dans (3.20), (3.28) et  $B_{lmnpqr}^{(1)}, D_{lmnpq}^{(1)}$  sont calculés par :

$$B_{lmnpqr}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \xi_{kpqr} dy \quad (3.58)$$

$$D_{lmnpq}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \psi_{kpq} dy \quad (3.59)$$

- En utilisant l'expression de  $U^2$  dans (3.44), nous obtenons le troisième terme de  $J^{(2)}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) e_{xmn}(V^0) U_k^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega \times Y} [V_k^2 + \chi_{kst} e_{xst}(V^1) + \xi_{kpqr} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) + \psi_{kpq} e_{xpq}(V^0)] \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) e_{xmn}(V^0) dx dy = \quad (3.60) \\ &= \int_{\Omega} D_{mnst}^{(2)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} D_{mnpqr}^{(3)} e_{xmn}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx + \\ & + \int_{\Omega} D_{kmn}^{(5)} e_{xmn}(V^0) V_k^2 dx + \int_{\Omega} D_{mnpq}^{(4)} e_{xmn}(V^0) e_{xpq}(V^0) dx \end{aligned}$$

Ici  $D^{(i)}$  sont calculés par :

$$D_{mnst}^{(2)}(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \chi_{kst} dy \quad (3.61)$$

$$D_{mnpqr}^{(3)}(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \xi_{kpqr} dy \quad (3.62)$$

$$D_{mnpq}^{(4)}(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \psi_{kpq} dy \quad (3.63)$$

$$D_{kmn}^{(5)}(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) dy \quad (3.64)$$

À partir de équation (3.29) nous trouvons :  $D_{kmn}^{(5)} = \frac{\partial A_{klmn}^{(0)}}{\partial x_l}$

- Le dernier terme de  $J^{(2)}$  est évalué comme dans les ordres précédents :

$$\int_{\Omega \times Y} f_k U_k^2 dx dy = \int_{\Omega} f_k V_k^2 dx$$



Prenons la somme de ces 4 termes :

$$\begin{aligned}
J^{(2)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} [D_{mnst}^{(6)} - D_{stmn}^{(2)}] e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} [B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} - A_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)}] e_{xmn}(V^1) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} [A_{pq\alpha\beta\gamma}^{(2)} - 2B_{rpq\alpha\beta\gamma}^{(1)}] \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} [D_{mnst}^{(7)} - 2D_{mnst}^{(4)}] e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} [D_{stpqr}^{(8)} - D_{rpqst}^{(1)} - D_{stpqr}^{(3)}] e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx - \\
&- \int_{\Omega} \left( A_{klmn}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + \frac{\partial A_{klmn}^{(0)}}{\partial x_l} e_{xmn}(V^0) + f_k \right) V_k^2 dx
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Le dernier terme dans (3.65) s'annule grâce à l'équation d'équilibre (3.22). Nous trouvons une expression de  $J^{(2)}$  en fonction des grandeurs macroscopiques :

$$\begin{aligned}
J^{(2)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} H_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} H_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} e_{xmn}(V^1) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx \\
&+ \int_{\Omega} G_{stpqr}^{(2)} e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{pq\alpha\beta\gamma}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.66}$$

où :

$$H_{mnst}^{(1)}(x) = D_{mnst}^{(6)} - D_{stmn}^{(2)} \tag{3.67}$$

$$H_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}(x) = B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} - A_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)} \tag{3.68}$$

$$G_{mnst}^{(1)}(x) = D_{mnst}^{(7)} - 2D_{mnst}^{(4)} \tag{3.69}$$

$$G_{stpqr}^{(2)}(x) = D_{stpqr}^{(8)} - D_{rpqst}^{(1)} - D_{stpqr}^{(3)} \tag{3.70}$$

$$G_{pq\alpha\beta\gamma}^{(3)}(x) = A_{pq\alpha\beta\gamma}^{(2)} - 2B_{rpq\alpha\beta\gamma}^{(1)} \tag{3.71}$$

Pour minimiser  $J^{(2)}$ ,  $V^1$  devrait vérifier l'équation :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(\bar{v}) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} H_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(\bar{v}) e_{xst}(V^0) dx + \\ & + \int_{\Omega} H_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} e_{xmn}(\bar{v}) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx = 0 \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.72)$$

En comparant avec l'énergie d'ordre  $\varepsilon^2$  trouvée dans la partie périodique, la quasi-périodicité génère dans l'énergie d'ordre  $\varepsilon^2$  3 termes supplémentaires liés aux coefficients  $H^{(1)}, G^{(1)}, G^{(2)}$ . Ces fonctions dépendent fortement de la dérivée des solutions de cellules par rapport la variable macroscopique.

Identiquement avec section (2.2.6), nous pouvons définir l'énergie homogénéisée  $J$  et déplacement macroscopique  $V$  comme la somme des champs correspondants :

$$V_i = V_i^0 + \varepsilon V_i^1 + \varepsilon^2 V_i^2 \quad (3.73)$$

$$J(V_0, V_1, V_2) = J^0 + \varepsilon J^1 + \varepsilon^2 J^2 \quad (3.74)$$

Nous pouvons établir les lois constitutives, les équations d'équilibre et déterminer  $V^0, V^1$  à partir des problèmes de minimisation de  $J^0, J^2$  respectivement. Mais pour une relation entre les grandeurs totales  $V$  et  $J$ , nous avons besoin une énergie équivalente définie sur le déplacement  $V$ . La construction d'une telle énergie macroscopique est présentée dans la section suivante.

### 3.3 Identification d'énergie homogénéisée

Nous avons obtenu, pour chaque l'ordre de  $\varepsilon$ , des énergies macroscopiques sous la forme quadratique de la déformation et sa dérivée. La différence entre l'énergie obtenue dans ce cas quasi-périodique par rapport le cas périodique est non seulement la dépendance aux variables macroscopiques mais aussi l'apparition des termes supplémentaires dans l'énergie à partir de l'ordre  $\varepsilon$ . Ces termes nous suggèrent de

construire une énergie sous la forme :

$$\begin{aligned}
W(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx - \int_{\Omega} f_i u_i dx + \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{H}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx + \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} e_{xmn}(u) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(u) dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx + \\
&+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \tilde{G}_{stpq}^{(2)} e_{xst}(u) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(u) dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(u) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(u) dx
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Cette énergie peut être considérée comme une extension de l'énergie du milieu second gradient où les tenseurs de rigidité dépendent également à la longueur interne si nous réécrivons  $W$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
W(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\tilde{A}_{mnst}^{(0)} + 2\varepsilon \tilde{H}_{mnst}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{G}_{mnst}^{(1)}] e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx - \int_{\Omega} f_i u_i dx + \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega} [\tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} + \varepsilon \tilde{G}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}] e_{xmn}(u) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(u) dx + \\
&+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(u) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} e_{x\alpha\beta}(u) dx
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Afin que  $W$  soit équivalent à l'énergie homogénéisée trouvée dans la section précédente, elle devrait satisfaire la condition :

$$W(V) = J(V^0, V^1, V^2) = J^{(0)} + \varepsilon J^{(1)} + \varepsilon^2 J^{(2)} + \dots \tag{3.77}$$

Nous voulons identifier les coefficients  $\tilde{A}^{(0)}$ ,  $\tilde{H}^{(i)}$ ,  $\tilde{G}^{(i)}$  pour que le développement de  $W(V)$  jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^2$  soit identique aux résultats obtenus dans la section 3.2. Remplaçons (3.73) dans  $W(V)$  et séparons les ordres de  $\varepsilon$  :

$$W(V) = W^{(0)} + \varepsilon W^{(1)} + \varepsilon^2 W^{(2)} + \dots \tag{3.78}$$

où :

$$W^{(0)} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^{(0)}) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \int_{\Omega} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^{(1)}) dx + \int_{\Omega} \tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{H}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
W^{(2)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^{(1)}) dx + \int_{\Omega} \tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^1) e_{xmn}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^1) dx + \int_{\Omega} \tilde{H}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{H}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{G}_{stpqr}^{(2)} e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^{(2)}) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^2 dx
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Nous allons identifier les énergies pour chaque ordre de  $\varepsilon$  afin de trouver l'expression des coefficients  $\tilde{A}^{(0)}$ ,  $\tilde{H}^{(i)}$ ,  $\tilde{G}^{(i)}$

### 3.3.1 Identification de l'ordre $e^0$ : $W^{(0)} = J^{(0)}$

La condition  $W^{(0)} = J^{(0)}$  nous donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^{(0)}) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^{(0)}) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^0 dx \quad \Rightarrow \tilde{A}_{mnst}^{(0)} = A_{mnst}^{(0)}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

### 3.3.2 Identification de l'ordre $e^1$ : $W^{(1)} = J^{(1)}$

En utilisant l'égalité  $\tilde{A}_{mnst}^{(0)} = A_{mnst}^{(0)}$  et l'équation (3.21), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \tilde{A}_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^0) e_{xst}(V^{(1)}) dx - \int_{\Omega} f_i V_i^1 dx = 0 \\
\Rightarrow W^{(1)} &= \int_{\Omega} \tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} \tilde{H}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Comparons avec  $J^{(1)}$  trouvé dans (3.32), nous déduisons :  $\tilde{H}_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} = A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)}$  et  $\tilde{H}_{mnst}^{(1)} = D_{mnst}^{(0)}$

### 3.3.3 Identification de l'ordre $e^2$ : $W^{(2)} = J^{(2)}$

En utilisant les résultats de ordres précédents,  $W^{(2)}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
W^{(2)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{mnst}^{(0)} e_{mn}(V^1) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^1) e_{xmn}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^1) dx + \int_{\Omega} D_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \\
&+ \int_{\Omega} D_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^0) dx + \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{G}_{stpqr}^{(2)} e_{xst}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(V^0) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Il reste 3 fonctions  $\tilde{G}_{mnst}^{(1)}$ ,  $\tilde{G}_{stpqr}^{(2)}$  et  $\tilde{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)}$  à identifier, une comparaison avec  $J^{(2)}$  trouvé dans (3.66) nous suggère que :

$$\tilde{G}_{mnst}^{(1)} = G_{mnst}^{(1)} ; \tilde{G}_{stpqr}^{(2)} = G_{stpqr}^{(2)} ; \tilde{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} = G_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} \tag{3.85}$$

Dans ce cas, afin que  $W^{(2)}$  et  $J^{(2)}$  soient identiques, ils devraient satisfaire la condition :

$$W^{(2)} = J^{(2)} \quad \forall (V^0, V^1)$$

En utilisant l'expression de  $W^{(2)}$  et  $J^{(2)}$  nous avons une condition équivalente  $\forall (V^0, V^1)$  :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^1) e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^1) dx + \\
&+ \int_{\Omega} D_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} D_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx = \\
&= \int_{\Omega} H_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx + \int_{\Omega} H_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} e_{xmn}(V^1) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) dx
\end{aligned} \tag{3.86}$$

En utilisant l'intégration par parties et négligeant les intégrales de surface, la partie en gauche de (3.86) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^1) e_{xmn}(V^0) dx + \int_{\Omega} A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^1) dx + \\
 & + \int_{\Omega} D_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^0) e_{xst}(V^1) dx + \int_{\Omega} D_{mnst}^{(0)} e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx = \\
 & = \int_{\Omega} [A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} - A_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)}] \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(V^0) e_{xmn}(V^1) dx + \\
 & + \int_{\Omega} [D_{mnst}^{(0)} + D_{stmn}^{(0)} - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} A_{\gamma stmn}^{(1)}] e_{xmn}(V^1) e_{xst}(V^0) dx
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Rappelons  $A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)}$  dans (3.28),  $B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  dans (3.52),  $H_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  dans (3.68), et utilisons équation (3.17), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} & = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta}] dy \\
 & = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta} dy + \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) dy \\
 & = \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \chi_{k\alpha\beta} dy = A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} \\
 & \Rightarrow A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} - A_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)} = B_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} - A_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)} = H_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

En utilisant  $D_{mnst}^{(0)}$  dans (3.30),  $H_{mnst}^{(1)}$  dans (3.67),  $D_{mnst}^{(6)}$  dans (3.54),  $D_{mnst}^{(2)}$  dans (3.61) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 D_{mnst}^{(0)} + D_{stmn}^{(0)} - \frac{\partial}{\partial x_l} A_{lstmn}^{(1)} & = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xkl}(\chi_{st}) dy + \\
 & + \int_Y C_{ijkl} [\delta_{is}\delta_{jt} + e_{yij}(\chi_{st})] e_{xkl}(\chi_{mn}) dy - \int_Y C_{ijkl} [\delta_{is}\delta_{jt} + e_{yij}(\chi_{st})] e_{xkl}(\chi_{mn}) dy - \\
 & - \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{is}\delta_{jt} + e_{yij}(\chi_{st})] \right) \chi_{kmn} dy \\
 & = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xkl}(\chi_{st}) dy - \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{is}\delta_{jt} + e_{yij}(\chi_{st})] \right) \chi_{kmn} dy \\
 & = D_{mnst}^{(6)} - D_{stmn}^{(2)} = H_{mnst}^{(1)}
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

ici nous avons pris en compte la symétrie de  $C_{ijkl}$  et l'équation (3.17) pour simplifier  $D_{mnst}^{(6)}$ .

À partir (3.88) et (3.89) nous pouvons conclure que la condition :  $W^{(2)} = J^{(2)} \quad \forall (V^0, V^1)$  est satisfaite et nous avons identifié tous les coefficients de l'énergie  $W$

### 3.3.4 Simplification des coefficients de l'énergie macroscopique

Par l'identification des coefficients, nous trouvons l'énergie macroscopique du milieu quasi périodique homogénéisé :

$$\begin{aligned} W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} [A_{mnst}^{(0)} + 2\varepsilon D_{mnst}^{(0)} + \varepsilon^2 G_{mnst}^{(1)}] e_{xmn}(u) e_{xst}(u) dx - \int_{\Omega} f_i u_i dx + \\ & + \varepsilon \int_{\Omega} [A_{\gamma mn\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon G_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}] e_{xmn}(u) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(u) dx + \\ & + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{pq\alpha\beta\gamma}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_r} e_{xpq}(u) \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} e_{x\alpha\beta}(u) dx \end{aligned} \quad (3.90)$$

où les coefficients effectifs sont déterminés à partir des solutions du problème de cellule  $\chi(x, y), \xi(x, y), \psi(x, y)$ . Ses calculs sont présentés dans les sections précédentes, mais ils sont complexes et ces coefficients sont exprimés par plusieurs termes intermédiaires. Nous allons reformuler ces calculs afin d'avoir des expressions plus simples de ces coefficients, en fonction des solutions du problème de cellule.

- Équation (3.20) nous donne  $A_{mnpq}^{(0)}$

$$A_{mnpq}^{(0)}(x) = \int_Y C_{ijkl}(x, y) [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy \quad (3.91)$$

- Équation (3.28) nous donne  $A_{lmnpq}^{(1)}$  :

$$A_{lmnpq}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \chi_{kpq} dy \quad (3.92)$$

- Équation (3.30) nous donne  $D_{mnpq}^{(0)}$

$$D_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] e_{xkl}(\chi_{pq}) dy \quad (3.93)$$

- Pour le terme  $G_{mnst}^{(1)}$  nous pouvons réécrire :

$$G_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(u) e_{xst}(u) = \frac{1}{2} (G_{mnst}^{(1)} + G_{stmn}^{(1)}) e_{xmn}(u) e_{xst}(u) := \bar{G}_{mnst}^{(1)} e_{xmn}(u) e_{xst}(u)$$

En utilisant  $G_{mnst}^{(1)}$  dans (3.69),  $D_{mnst}^{(7)}$  dans (3.55),  $D_{mnst}^{(4)}$  dans (3.63) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{mnst}^{(1)} &= \frac{1}{2} (D_{mnst}^{(7)} + D_{stmn}^{(7)}) - D_{mnst}^{(4)} - D_{stmn}^{(4)} = \\ &= \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(\chi_{mn}) + e_{yij}(\psi_{mn})] [e_{xkl}(\chi_{st}) + e_{ykl}(\psi_{st})] dy - \\ &- \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \psi_{kst} dy - \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{is} \delta_{jt} + e_{yij}(\chi_{st})] \right) \psi_{kmn} dy \end{aligned}$$

En remplaçant la fonction de test dans (3.48) par  $\psi_{kst}$  et  $\psi_{kmn}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\psi_{mn}) + e_{xij}(\chi_{mn})] e_{ykl}(\psi_{st}) dy &= \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im} \delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \psi_{kst} dy \\ \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\psi_{st}) + e_{xij}(\chi_{st})] e_{ykl}(\psi_{mn}) dy &= \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{is} \delta_{jt} + e_{yij}(\chi_{st})] \right) \psi_{kmn} dy \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{mnst}^{(1)} &= \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(\chi_{mn}) + e_{yij}(\psi_{mn})] [e_{xkl}(\chi_{st}) + e_{ykl}(\psi_{st})] dy - \\ &- \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\psi_{mn}) + e_{xij}(\chi_{mn})] e_{ykl}(\psi_{st}) dy - \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\psi_{st}) + e_{xij}(\chi_{st})] e_{ykl}(\psi_{mn}) dy = \\ &= \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(\chi_{mn}) e_{xkl}(\chi_{st}) - e_{yij}(\psi_{mn}) e_{ykl}(\psi_{st})] dy \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture nous utilisons dans les parties suivantes  $G_{mnst}^{(1)}$  au lieu de  $\bar{G}_{mnst}^{(1)}$  :

$$G_{mnst}^{(1)} = \int_Y C_{ijkl} [e_{xij}(\chi_{mn}) e_{xkl}(\chi_{st}) - e_{yij}(\psi_{mn}) e_{ykl}(\psi_{st})] dy \quad (3.94)$$

- En utilisant  $G_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  dans (3.70),  $D_{mn\alpha\beta\gamma}^{(8)}$  dans (3.56),  $D_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)}$  dans (3.59) et  $D_{mn\alpha\beta\gamma}^{(3)}$



dans (3.62) nous obtenons :

$$\begin{aligned} G_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} &= D_{mn\alpha\beta\gamma}^{(8)} - D_{\gamma\alpha\beta mn}^{(1)} - D_{mn\alpha\beta\gamma}^{(3)} = \\ &= \int_Y C_{ijkl} [e_{ykl}\xi_{\alpha\beta\gamma} + \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta}] [e_{xij}(\chi_{mn}) + e_{yij}(\psi_{mn})] dy - \\ &- \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + e_{yij}(\chi_{\alpha\beta})] \psi_{kmn} dy - \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \xi_{k\alpha\beta\gamma} dy \end{aligned}$$

En remplaçant la fonction de test dans (3.48) par  $\xi_{k\alpha\beta\gamma}$  nous obtenons :

$$\int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\psi_{mn}) + e_{xij}(\chi_{mn})] e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_{ijkl} [\delta_{im}\delta_{jn} + e_{yij}(\chi_{mn})] \right) \xi_{k\alpha\beta\gamma} dy$$

Donc :

$$G_{mn\alpha\beta\gamma}^{(2)} = \int_Y C_{ijk\gamma} [e_{xij}(\chi_{mn}) + e_{yij}(\psi_{mn})] \chi_{k\alpha\beta} dy - \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + e_{yij}(\chi_{\alpha\beta})] \psi_{kmn} dy \quad (3.95)$$

- En utilisant les mêmes arguments pour  $G_{mnst}^{(1)}$ , nous pouvons réécrire  $G_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)}$  dans (3.71) sous la forme :

$$\bar{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} = \frac{1}{2} (A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)} + A_{\alpha\beta\gamma pqr}^{(2)}) - B_{rpq\alpha\beta\gamma}^{(1)} - B_{\gamma\alpha\beta pqr}^{(1)} \quad (3.96)$$

Remplaçons  $A_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(2)}$  dans (3.53),  $B_{rpq\alpha\beta\gamma}^{(1)}$  dans (3.58) à (3.96) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} &= \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr}\chi_{ipq}] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta}] dy - \\ &- \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{ip}\delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] \xi_{k\alpha\beta\gamma} dy - \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + e_{yij}(\chi_{\alpha\beta})] \xi_{kpqr} dy \end{aligned}$$

En remplaçant la fonction de test dans (3.47) par  $\xi_{k\alpha\beta\gamma}$  et  $\xi_{kpqr}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr}\chi_{ipq}] e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) dy &= \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{ip}\delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] \xi_{k\alpha\beta\gamma} dy \\ \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{j\gamma}\chi_{i\alpha\beta}] e_{ykl}(\xi_{pqr}) dy &= \int_Y C_{ijk\gamma} [\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + e_{yij}(\chi_{\alpha\beta})] \xi_{kpqr} dy \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} &= \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr}\chi_{ipq}] [e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{l\gamma}\chi_{k\alpha\beta}] dy - \\ &- \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{pqr}) + \delta_{jr}\chi_{ipq}] e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) dy - \int_Y C_{ijkl} [e_{yij}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \delta_{j\gamma}\chi_{i\alpha\beta}] e_{ykl}(\xi_{pqr}) dy = \\ &= \int_Y C_{ijkl} [\delta_{jr}\delta_{l\gamma}\chi_{ipq}\chi_{k\alpha\beta} - e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma})e_{yij}(\xi_{pqr})] dy \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture nous utilisons dans les parties suivantes  $G_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)}$  au lieu de  $\bar{G}_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)}$  :

$$G_{pqr\alpha\beta\gamma}^{(3)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{jr}\delta_{l\gamma}\chi_{ipq}\chi_{k\alpha\beta} - e_{ykl}(\xi_{\alpha\beta\gamma})e_{yij}(\xi_{pqr})] dy$$

### 3.4 Conclusion

En se basant sur la méthode homogénéisation d'un milieu périodique par l'approche énergétique présentée dans chapitre 2, nous étendons cette méthode à un milieu quasi-périodique dans ce chapitre. La quasi-périodicité d'un milieu est décrite par une cellule unitaire  $Y$  où la propriété d'un point dans la cellule dépend non seulement sa position mais aussi la position de la cellule dans le milieu. Pour le problème d'homogénéisation, cette description peut être représentée par le tenseur de rigidité qui dépend périodiquement en variable microscopique et régulièrement en variable macroscopique :

$$C_{ijkl}^\varepsilon = C_{ijkl}(x, y)$$

La procédure de l'homogénéisation est réalisée en solvant successivement des problèmes de minimisation pour chaque ordre de  $\varepsilon$ . La quasi-périodicité génère, dans énergie homogénéisée, non seulement les coefficients qui dépendent de variable macroscopique mais aussi les termes supplémentaires par rapport le cas périodique à partir de l'ordre  $\varepsilon^1$ . Par l'identification des coefficients nous pouvons obtenue une énergie macroscopique

équivalente définie sur le déplacement macroscopique :

$$\begin{aligned}
W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} [A_{ijkl}^{(0)} + 2\varepsilon D_{ijkl}^{(0)} + \varepsilon^2 G_{ijkl}^{(1)}] e_{xij}(u) e_{xkl}(u) dx - \int_{\Omega} f_i u_i dx + \\
& + \varepsilon \int_{\Omega} [A_{mijkl}^{(1)} + \varepsilon G_{ijklm}^{(2)}] e_{xij}(u) \frac{\partial}{\partial x_m} e_{xkl}(u) dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{ijklmn}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_k} e_{xij}(u) \frac{\partial}{\partial x_n} e_{xlm}(u) dx
\end{aligned}$$

Cette énergie peut être considérée comme une extension de l'énergie du milieu du second gradient ([44],[31]) où les coefficients dépendent également de la longueur interne. Les propriétés du milieu sont obtenues directement par minimisation de  $W(u)$ , tandis que dans les autres approches d'homogénéisation d'un milieu quasi-périodique, le champ de déplacement macroscopique est obtenu en prenant directement le déplacement à l'ordre  $\varepsilon^0$  (Andrianov et al. [2]) ou en ajoutant les correcteurs au déplacement de l'ordre  $\varepsilon^0$  (Su et al. [21], [42]).

Les coefficients de l'énergie macroscopique sont explicitement liés aux solutions des problèmes d'ordre supérieur des cellules unitaires, qui sont des fonctions régulières en  $x$  et périodique en  $y$ . Le calcul de ces coefficients requiert la dérivée des solutions du problème de cellule par rapport à la variable macroscopique. Cette dérivée pourrait introduire des difficultés pour le calcul numérique de ces coefficients. Ce calcul sera étudié dans le chapitre suivant.

# Application au milieu stratifié et micro fissuré

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Homogénéisation d'un composite quasi périodique</b>	<b>86</b>
4.1.1	Description du milieu	86
4.1.2	Solutions des problèmes de cellule	87
4.1.3	Les coefficients homogénéisés	90
4.1.4	Illustration	92
<b>4.2</b>	<b>Homogénéisation d'un milieu microfissuré quasi périodique</b>	<b>93</b>
4.2.1	Description du milieu	93
4.2.2	Solutions des problèmes de cellule	95
4.2.3	Les coefficients homogénéisés	113
<b>4.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>120</b>

---

*Dans ce chapitre nous présentons des applications du modèle obtenu au chapitre 3 sur 2 exemples. Le premier exemple est l'homogénéisation d'un composite quasi-périodique qui possède une microstructure 1D et où la quasi périodicité apparaît dans les propriétés des matériaux. Le deuxième exemple traite d'un milieu micro-fissuré où la microstructure est 2D et où la quasi-périodicité apparaît dans la géométrie de la cellule. Nous proposons une méthode pour traiter les problèmes de cellule et son implémentation dans le code FEniCS. Dans le dernier exemple, nous analysons la variation des coefficients homogénéisés avec la largeur de cellule.*

## 4.1 Homogénéisation d'un composite quasi périodique

### 4.1.1 Description du milieu

Pour la première application, nous étendons l'exemple du milieu stratifié périodique du chapitre 2 au cas d'un milieu quasi périodique. Toujours dans le cas d'un chargement anti-plan, nous gardons la description du milieu  $\Omega$  et ajoutons la quasi-périodicité par la dépendance à la variable macroscopique  $x$  des modules de cisaillement  $\mu$  :

$$\begin{cases} \mu(x_1, x_2, y) = d_1(x_1, x_2)\mu_1 & \forall 0 \leq y \leq a \\ \mu(x_1, x_2, y) = d_2(x_1, x_2)\mu_2 & \forall a < y \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

ici,  $\mu_1, \mu_2$  sont 2 constantes positives t les fonctions régulières  $d_i(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  caractérisent la variation du module de cisaillement dans  $\Omega$ .

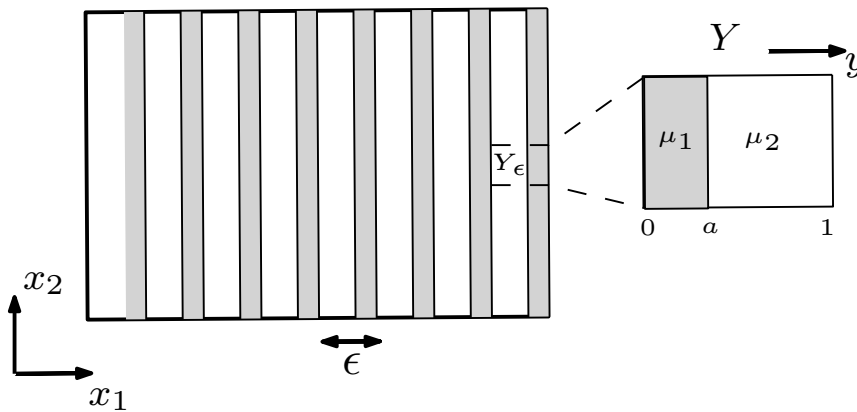


FIGURE 4.1 – Cellule élémentaire du composite stratifié quasi périodique.

Le milieu est soumis à une force volumique  $f(x) = (f_i(x)), i = 1, 2, 3$  où  $f_1 = f_2 = 0$  et  $f_3 = f$ , qui est supposée ne pas dépendre de la microstructure. La force  $f$  initie une déformation anti-plane dans le milieu, caractérisée par le champ de déplacement  $u^\epsilon(x) = (u_i(x)), i = 1, 2, 3$  où les composants  $u_1$  et  $u_2$  disparaissent ( $u_1 = u_2 = 0$ ), la seule composante non nulle  $u_3$  sera notée par  $u(x_1, x_2)$ . Les résultats obtenus dans le

chapitre précédent nous donnent l'énergie macroscopique du milieu homogénéisé :

$$\begin{aligned}
W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} (A_{ij}^{(0)} + 2\varepsilon D_{ij}^{(0)} + \varepsilon^2 G_{ij}^{(1)}) u_{,i} u_{,j} dx - \int_{\Omega} f u dx + \\
& + \varepsilon \int_{\Omega} (A_{ijk}^{(1)} + \varepsilon G_{ijk}^{(2)}) u_{,i} u_{,jk} dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{ijkl}^{(3)} u_{,ij} u_{,kl} dx
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Pour déterminer les tenseur  $A^{(0)}$ ,  $H^{(i)}$ ,  $G^{(i)}$ , nous allons calculer les solutions des problèmes de cellule  $\chi(x_1, x_2, y)$ ,  $\xi(x_1, x_2, y)$ ,  $\psi(x_1, x_2, y)$  dans la section suivante.

### 4.1.2 Solutions des problèmes de cellule

- Les fonctions  $\chi_{ijk}(x_1, x_2, y)$  :

Dans le problème de déformation anti-plane, les composantes à calculer de  $\chi$  sont  $\chi_{331} = \chi_{313}$  et  $\chi_{332} = \chi_{323}$ . Notons

$$\chi_1(x_1, x_2, y) = \chi_{313}(x_1, x_2, y) \quad ; \quad \chi_2(x_1, x_2, y) = \chi_{323}(x_1, x_2, y)$$

Afin de simplifier l'écriture, pour une fonction  $g(x_1, x_2, y)$ , nous notons :

$$g_{,i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} ; \quad g' = \frac{\partial g}{\partial y}$$

Nous obtenons les équations suivantes pour déterminer ces fonctions :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(x_1, x_2, y) [1 + \chi_1'(x_1, x_2, y)] \phi'(y) dy = 0 & \forall \phi(y) \quad Y\text{-périodique} \\ \langle \chi_1(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu(x_1, x_2, y) \chi_2'(x_1, x_2, y) \phi'(y) dy = 0 & \forall \phi(y) \quad Y\text{-périodique} \\ \langle \chi_2(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

La solution de ces équations est identique à celle que nous avons présentée dans le cas périodique :

$$\begin{cases} \chi_1(x_1, x_2, y) = \frac{(1-a)(d_1\mu_1 - d_2\mu_2)}{(1-a)d_1\mu_1 + a d_2\mu_2} \left(\frac{a}{2} - y\right) & \forall 0 \leq y \leq a \\ \chi_1(x_1, x_2, y) = \frac{a(d_1\mu_1 - d_2\mu_2)}{(1-a)d_1\mu_1 + a d_2\mu_2} \left(y - \frac{1+a}{2}\right) & \forall a \leq y \leq 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\chi_2(x_1, x_2, y) = 0 \tag{4.6}$$

- Les fonctions  $\xi_{ijkl}(x_1, x_2, y)$  :

Dans notre cas de déformation anti-plane, les composantes à calculer de  $\xi$  sont  $\xi_{3311} = \xi_{3131}$  ;  $\xi_{3321} = \xi_{3231}$  ;  $\xi_{3312} = \xi_{3132}$  ;  $\xi_{3322} = \xi_{3232}$ . Notons :

$$\xi_{11}(x_1, x_2, y) = \xi_{3131}(x_1, x_2, y) \quad ; \quad \xi_{12}(x_1, x_2, y) = \xi_{3132}(x_1, x_2, y)$$

$$\xi_{21}(x_1, x_2, y) = \xi_{3231}(x_1, x_2, y) \quad ; \quad \xi_{22}(x_1, x_2, y) = \xi_{3232}(x_1, x_2, y)$$

nous avons les équations pour déterminer ces fonctions :

$$\begin{cases} \int_Y \mu [\xi'_{11} + \chi_1] \bar{\phi}' dy = \int_Y \mu [\chi'_1 + 1] \bar{\phi} dy \quad \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{11}(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu \xi'_{21} \bar{\phi}' dy = 0 \quad \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{21}(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu [\xi'_{22} + \chi_2] \bar{\phi}' dy = \int_Y \mu [\chi'_2 + 1] \bar{\phi} dy \quad \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{22}(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu \xi'_{12} \bar{\phi}' dy = 0 \quad \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{12}(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Les solutions de ces équations sont :

$$\begin{cases} \xi_{11}(x_1, x_2, y) = -\frac{(1-a)(d_1\mu_1 - d_2\mu_2)}{(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2} \left( \frac{a}{2}y - \frac{y^2}{2} + \frac{a-2a^2}{12} \right) \quad \forall 0 \leq y \leq a \\ \xi_{11}(x_1, x_2, y) = -\frac{a(d_1\mu_1 - d_2\mu_2)}{(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1+a}{2}y + \frac{2a^2+3a+1}{12} \right) \quad \forall a \leq y \leq 1 \\ \xi_{22}(x_1, x_2, y) = -\frac{(1-a).(d_1\mu_1 - d_2\mu_2)}{d_1\mu_1} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{ay}{2} \right) + H_1 \quad \forall 0 \leq y \leq a \\ \xi_{22}(x_1, x_2, y) = -\frac{a(d_1\mu_1 - d_2\mu_2)}{d_2\mu_2} \left( \frac{1+a}{2}y - \frac{y^2}{2} - \frac{a}{2} \right) + H_1 \quad \forall a \leq y \leq 1 \\ \xi_{12}(x_1, x_2, y) = \xi_{21}(x_1, x_2, y) = 0 \end{cases}$$

Où :

$$H_1(x_1, x_2) = -\frac{(d_1\mu_1 - d_2\mu_2).a.(1-a)}{12} \cdot \left( \frac{a^2}{d_1\mu_1} - \frac{(1-a)^2}{d_2\mu_2} \right)$$

- Les fonctions  $\psi_{ijk}(x_1, x_2, y)$  :

Dans notre cas de déformation anti-plane, les composantes à calculer de  $\xi$  sont  $\psi_{331} = \psi_{313}$  et  $\psi_{332} = \psi_{323}$ . Notons :

$$\psi_1(x_1, x_2, y) = \psi_{313}(x_1, x_2, y) \quad ; \quad \psi_2(x_1, x_2, y) = \psi_{323}(x_1, x_2, y)$$

nous avons les équations pour déterminer ces fonctions :

$$\begin{cases} \int_Y \mu [\psi'_1 + (\chi_1)_{,1}] \bar{\phi}' dy = \int_Y [\mu(1 + \chi'_1)]_{,1} \bar{\phi} dy \quad \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \psi_1(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \\ \int_Y \mu \psi'_2 \bar{\phi}' dy = \int_Y \mu_{,2} \bar{\phi} dy \quad \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \psi_2(x_1, x_2, y) \rangle = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ces équations sont :

$$\begin{cases} \psi_1 = -\frac{[(d_1)_{,1}d_2 - d_1(d_2)_{,1}](1-a)\mu_1\mu_2}{[(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]^2} \left( \frac{a}{2}y - \frac{y^2}{2} + \frac{a-2a^2}{12} \right) \quad \forall 0 \leq y \leq a \\ \psi_1 = -\frac{[(d_1)_{,1}d_2 - d_1(d_2)_{,1}]a\mu_1\mu_2}{[(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]^2} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1+a}{2}y + \frac{2a^2+3a+1}{12} \right) \quad \forall a \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2 = -\frac{(1-a)[(d_1)_{,2}\mu_1 - (d_2)_{,2}\mu_2]}{d_1\mu_1} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{ay}{2} \right) + K_1 \quad \forall 0 \leq y \leq a \\ \psi_2 = -\frac{a[(d_1)_{,2}\mu_1 - (d_2)_{,2}\mu_2]}{d_2\mu_2} \left( \frac{1+a}{2}y - \frac{y^2}{2} - \frac{a}{2} \right) + K_1 \quad \forall a \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ici :

$$K_1 = -\frac{[(d_1)_{,2}\mu_1 - (d_2)_{,2}\mu_2]a(1-a)}{12} \left( \frac{a^2}{d_1\mu_1} - \frac{(1-a)^2}{d_2\mu_2} \right)$$



### 4.1.3 Les coefficients homogénéisés

- Les composantes du tenseur  $A^{(0)}$  :

Le tenseur  $A^{(0)}$  est calculé par la formule (3.91). Dans notre cas, ses composantes sont :

$$A_{11}^{(0)}(x_1, x_2) = \int_Y \mu [\chi'_1 + 1]^2 dy = \frac{d_1 \mu_1 \cdot d_2 \mu_2}{(1-a) \cdot d_1 \mu_1 + a d_2 \mu_2}$$

$$A_{22}^{(0)}(x_1, x_2) = \int_Y \mu [\chi'_2 + 1]^2 dy = a d_1 \mu_1 + (1-a) d_2 \mu_2$$

$$A_{12}^{(0)} = A_{21}^{(0)} = 0$$

- Les composantes des tenseur  $A^{(1)}$ ,  $D^{(0)}$  :

Les tenseurs  $A^{(1)}$ ,  $D^{(0)}$  sont calculés par les formules (3.92),(3.93). Dans notre cas, toutes les composantes sont nulles.

- Les composantes du tenseur  $G^{(1)}$  :

Le tenseur  $G^{(1)}$  est calculé par la formule (3.94). Dans notre cas, ses composantes sont :

$G_{11}^{(1)}$ ,  $G_{12}^{(1)}$ ,  $G_{12}^{(1)}$  et  $G_{22}^{(1)}$  :

$$G_{11}^{(1)} = \frac{a^2(1-a)^2 [(d_{1,1}d_2 - d_1(d_{2,1}))^2 \mu_1^2 \mu_2^2]}{12 [(1-a)d_1 \mu_1 + a d_2 \mu_2]^4} [a d_1 \mu_1 + (1-a) d_2 \mu_2] \quad (4.11)$$

$$G_{12}^{(1)} = G_{21}^{(1)} = \frac{a^2(1-a)^2 [(d_{1,1}d_2 - d_1(d_{2,1})) [(d_{1,2}\mu_1 - (d_{2,2}\mu_2)) \mu_1 \mu_2]}{12 [(1-a)d_1 \mu_1 + a d_2 \mu_2]^2} \quad (4.12)$$

$$G_{22}^{(1)} = -\frac{a^2(1-a)^2 [(d_{1,2}\mu_1 - (d_{2,2}\mu_2))^2 [(1-a)d_1 \mu_1 + a d_2 \mu_2]}{12 d_1 \mu_1 d_2 \mu_2} \quad (4.13)$$

- Les composants du tenseur  $G^{(2)}$  :

Le tenseur  $G^{(2)}$  sont calculé par la formule (3.95), pour notre cas ces composantes sont :

$G_{111}^{(2)}, G_{112}^{(2)}, G_{121}^{(2)}, G_{122}^{(2)}, G_{211}^{(2)}, G_{212}^{(2)}, G_{221}^{(2)}$  et  $G_{222}^{(2)}$  :

$$G_{111}^{(2)} = G_{121}^{(2)} = G_{212}^{(2)} = G_{221}^{(2)} = 0 \quad (4.14)$$

$$G_{112}^{(2)} = \frac{a^2(1-a)^2 [(d_1)_{,1}d_2 - d_1(d_2)_{,1}] [d_1\mu_1 - d_2\mu_2] \mu_1\mu_2}{12 [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]^3} [ad_1\mu_1 + (1-a)d_2\mu_2] \quad (4.15)$$

$$G_{122}^{(2)} = \frac{a^2(1-a)^2 [(d_1)_{,1}d_2 - d_1(d_2)_{,1}] [d_1\mu_1 - d_2\mu_2] \mu_1\mu_2}{12 [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]^2} \quad (4.16)$$

$$G_{211}^{(2)} = \frac{a^2(1-a)^2 [(d_1)_{,2}\mu_1 - (d_2)_{,2}\mu_2] [d_1\mu_1 - d_2\mu_2]}{12 [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]} \quad (4.17)$$

$$G_{222}^{(2)} = -\frac{a^2(1-a)^2 [(d_1)_{,2}\mu_1 - (d_2)_{,2}\mu_2] [d_1\mu_1 - d_2\mu_2]}{12 d_1\mu_1 d_2\mu_2} [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2] \quad (4.18)$$

- Les composantes du tenseur  $G^{(3)}$  :

Le tenseur  $G^{(3)}$  est calculé par la formule (3.96). Dans notre cas, ses composantes sont :

$G_{1122}^{(3)}, G_{2211}^{(3)}, G_{1212}^{(3)}$  et  $G_{2222}^{(3)}$  :

$$G_{1122}^{(3)} = G_{2211}^{(3)} = \frac{a^2(1-a)^2 (d_1\mu_1 - d_2\mu_2)^2}{12 [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]} \quad (4.19)$$

$$G_{1212}^{(3)} = \frac{a^2(1-a)^2 (d_1\mu_1 - d_2\mu_2)^2 (ad_1\mu_1 + (1-a)d_2\mu_2)}{12 [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]^2} \quad (4.20)$$

$$G_{2222}^{(3)} = -\frac{a^2(1-a)^2 (d_1\mu_1 - d_2\mu_2)^2 [(1-a)d_1\mu_1 + ad_2\mu_2]}{12 d_1\mu_1 d_2\mu_2} \quad (4.21)$$

Donc l'énergie macroscopique d'un composite stratifié quasi périodique sous chargement anti-plan s'écrit :

$$\begin{aligned} W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} (A_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 G_{11}^{(1)}) (u_{,1})^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (A_{22}^{(0)} + \varepsilon^2 G_{22}^{(1)}) (u_{,2})^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} G_{12}^{(1)} u_{,1} u_{,2} dx + \\ & + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( G_{112}^{(2)} u_{,1} u_{,12} + G_{122}^{(2)} u_{,1} u_{,22} + G_{211}^{(2)} u_{,2} u_{,11} + G_{222}^{(2)} u_{,2} u_{,22} \right) dx + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} \left( G_{1212}^{(3)} (u_{,12})^2 + 2G_{1122}^{(3)} u_{,11} u_{,22} + G_{2222}^{(3)} (u_{,22})^2 \right) dx - \int_{\Omega} f u dx \end{aligned}$$

#### 4.1.4 Illustration

À titre d'illustration, nous considérons le cas où les variations des modules de cisaillement dans les 2 phases sont caractérisées par une seule fonction

$$\begin{cases} \mu(x_1, x_2, y) = d(x_1, x_2)\mu_1 & \forall 0 \leq y \leq a \\ \mu(x_1, x_2, y) = d(x_1, x_2)\mu_2 & \forall a < y \leq 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Dans ce cas les coefficients homogénéisés non nuls sont :

- Tenseur  $A^{(0)}$  :

$$A_{11}^{(0)} = d \frac{\mu_1 \mu_2}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2}$$

$$A_{22}^{(0)} = d[a\mu_1 + (1-a)\mu_2]$$

- Tenseur  $G^{(1)}$  :

$$G_{22}^{(1)} = -\frac{(d_{,2})^2 a^2 (1-a)^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 [(1-a)\mu_1 + a\mu_2]}{d \cdot 12 \mu_1 \mu_2}$$

- Tenseur  $G^{(2)}$  :

$$G_{211}^{(2)} = d_{,2} \frac{a^2 (1-a)^2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{12 [(1-a)\mu_1 + a\mu_2]}$$

$$G_{222}^{(2)} = -d_{,2} \frac{a^2 (1-a)^2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{12 \mu_1 \mu_2} [(1-a)\mu_1 + a\mu_2]$$

- Tenseur  $G^{(3)}$  :

$$G_{1122}^{(3)} = G_{2211}^{(3)} = d \frac{a^2 (1-a)^2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{12 [(1-a)\mu_1 + a\mu_2]}$$

$$G_{1212}^{(3)} = d \frac{a^2 (1-a)^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 (a\mu_1 + (1-a)\mu_2)}{12 [(1-a)\mu_1 + a\mu_2]^2}$$

$$G_{2222}^{(3)} = -d \frac{a^2 (1-a)^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 [(1-a)\mu_1 + a\mu_2]}{12 \mu_1 \mu_2}$$

Nous pouvons classifier ces coefficients en 2 types : les coefficients qui ne dépendent que de la fonction  $d(x_1, x_2)$  :  $A_{ij}^{(0)}$  et  $G_{ijkl}^{(3)}$ , les autres coefficients qui dépendent non seulement

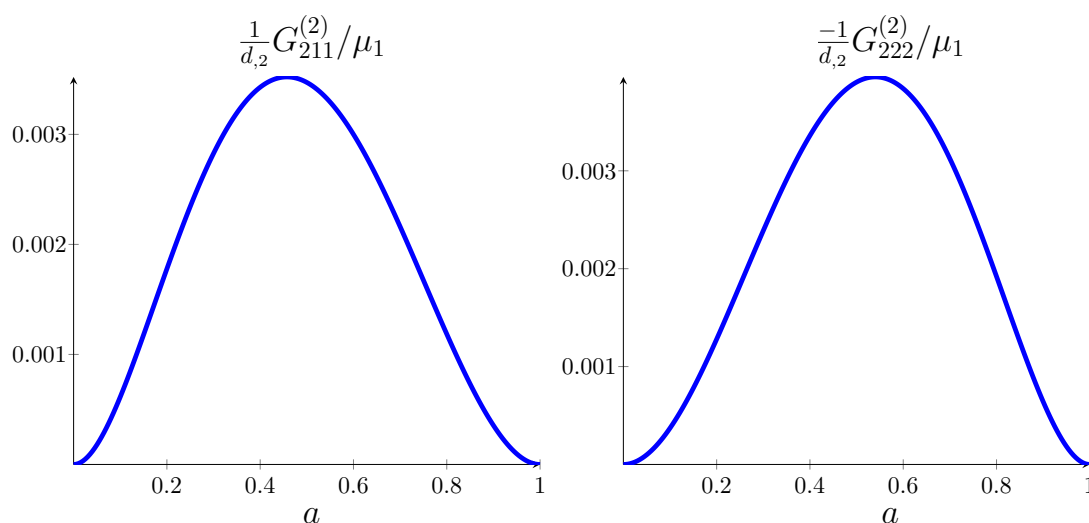


FIGURE 4.2 – Variation des coefficients  $G_{211}^{(2)}$  et  $G_{222}^{(2)}$

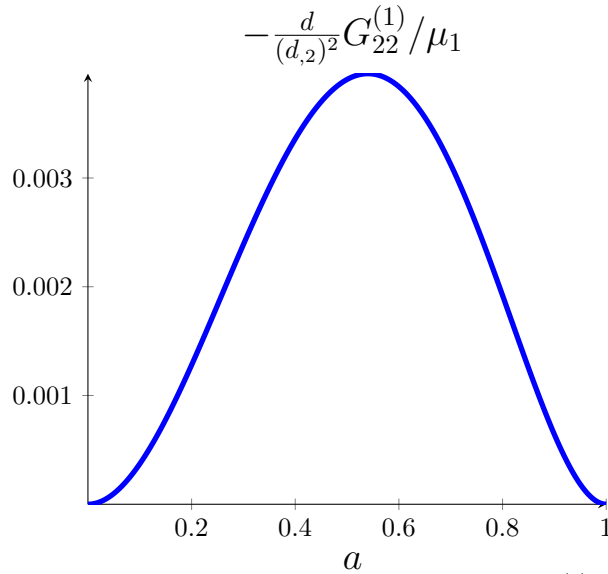
de la fonction  $d(x_1, x_2)$  mais aussi de sa dérivée  $d_{,2}(x_1, x_2)$  :  $G_{ij}^{(1)}$  et  $G_{ijk}^{(2)}$ . En comparant avec les coefficients homogénéisés du cas périodique (cf section 2.4.3) nous voyons que les coefficients  $A_{ij}^{(0)}$  et  $G_{ijkl}^{(3)}$  dans cette section sont obtenus en multipliant les  $A_{ij}^{(0)}$  et  $G_{ijkl}$  trouvés dans la section 2.4.3 par la fonction  $d$ . Les coefficients du deuxième type n'apparaissent pas dans le cas périodique, ces termes confirment que la quasi-périodicité introduit des termes supplémentaires dans l'énergie effective.

Nous présentons dans les figures 4.2 et 4.3 la variation de ces nouveaux coefficients dans le cas où  $\mu_2/\mu_1 = 2$ , lorsque la fraction volumique  $a$  varie entre 0 et 1.

## 4.2 Homogénéisation d'un milieu microfissuré quasi périodique

### 4.2.1 Description du milieu

Dans la section précédente, nous avons présenté un exemple où la quasi périodicité provient des propriétés des matériaux, la cellule ayant une géométrie fixe. Un autre exemple de quasi périodicité, qui porte cette fois-ci sur la géométrie de la cellule, est analysé dans cette section.

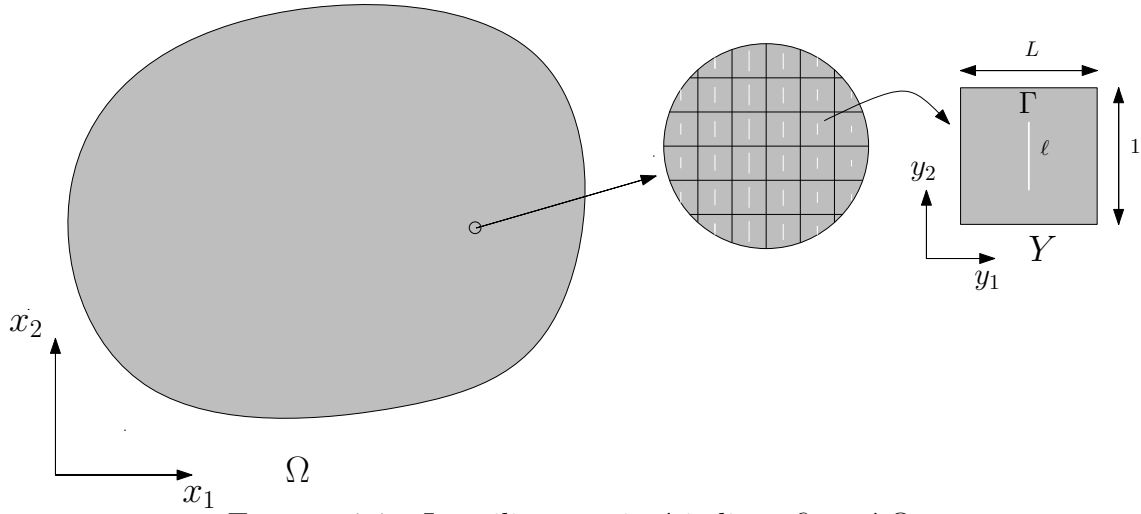
FIGURE 4.3 – Variation de coefficient  $G_{22}^{(1)}$ 

Nous considérons un milieu  $\Omega$  comprenant un grand nombre de microfissures. Nous supposons ces fissures sont distribuées périodiquement dans  $\Omega$  et le domaine peut donc être recouvert par un ensemble de cellules périodiques, contenant une fissure (voir figure 4.4). La cellule unitaire est un rectangle de largeur  $L$  et hauteur est normalisée à 1 avec une fissure  $\Gamma$  au centre et le module de cisaillement  $\mu$  est constant dans toutes les cellules. Nous traitons le cas des fissures verticales ayant la longueur  $\ell$  qui varie en fonction de la position de cellule :

$$\ell = \ell(x)$$

Dans ce cas, la mesure  $|Y|$  de la cellule n'est plus égale à 1 mais égale à  $L$  et il faut l'ajouter dans les formulations. Nous allons analyser dans cet exemple l'influence sur les coefficients homogénéisés de la largeur de cellule unitaire, largeur qui est représentée l'espacement entre des fissures.

Toujours dans le cas de chargement anti-plan, le milieu est soumis à une force volumique  $f(x) = (f_i(x)), i = 1, 2, 3$  où  $f_1 = f_2 = 0$  et  $f_3 = f$ , qui est supposée ne pas dépendre de la microstructure. La force  $f$  initie une déformation anti-plane dans le milieu, caractérisée par le champ de déplacement  $u^\varepsilon(x) = (u_i(x)), i = 1, 2, 3$  où les composants  $u_1$  et  $u_2$  disparaissent ( $u_1 = u_2 = 0$ ), la seule composante non nulle  $u_3$  sera notée par  $u(x_1, x_2)$ .

FIGURE 4.4 – Le milieu quasi-périodique fissuré  $\Omega$ 

Les résultats obtenus dans le chapitre précédent nous donnent l'énergie macroscopique du milieu homogénéisé :

$$\begin{aligned}
 W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} (A_{ij}^{(0)} + 2\varepsilon D_{ij}^{(0)} + \varepsilon^2 G_{ij}^{(1)}) u_{,i} u_{,j} dx - \int_{\Omega} f u dx + \\
 & + \varepsilon \int_{\Omega} (A_{ijk}^{(1)} + \varepsilon G_{ijk}^{(2)}) u_{,i} u_{,jk} dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_{ijkl}^{(3)} u_{,ij} u_{,kl} dx
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Pour déterminer les tenseurs  $A^{(0)}, H^{(i)}, G^{(i)}$ , nous allons calculer les solutions des problèmes de cellule  $\chi(x_1, x_2, y_1, y_2), \xi(x_1, x_2, y_1, y_2), \psi(x_1, x_2, y_1, y_2)$  dans la section suivante.

### 4.2.2 Solutions des problèmes de cellule

- Les fonctions  $\chi_{ijk}(x_1, x_2, y)$  :

Comme dans la section précédente, les composantes à calculer de  $\chi$  sont  $\chi_{331} = \chi_{313}$  et  $\chi_{332} = \chi_{323}$ . Notons

$$\chi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \chi_{313}(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad ; \quad \chi^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \chi_{323}(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

Dans cette section, pour une fonction  $g(x_1, x_2, y_1, y_2)$ , nous notons la dérivée par rapport  $y$  par :  $g_{,i} = \frac{\partial g}{\partial y_i}$ . Les équations pour déterminer ces fonctions sont les suivantes :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(\chi_{,\alpha}^1 \phi_{,\alpha} + \phi_{,1}) dy = 0 & \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \\ \langle \chi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu(\chi_{,\alpha}^2 \phi_{,\alpha} + \phi_{,2}) dy = 0 & \forall \phi(y) \text{ } Y\text{-périodique} \\ \langle \chi^2(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

**Remarque.** Grâce à la formule de dérivation de fonction composée, nous pouvons montrer, par l'introduction un changement de variable  $y_i = -t$ , que la fonction  $\chi^1$  est impaire en  $y_1$  et paire en  $y_2$  alors que la fonction  $\chi^2$  est paire en  $y_1$  et impaire en  $y_2$ .

En faisant une intégration par parties nous pouvons transformer ces problèmes de cellule en des problèmes bidimensionnels d'élasticité posés sur  $Y$ , avec les conditions de périodicité sur le bord  $\partial Y$  et la condition aux limites de Neumann sur la fissure  $\Gamma$ . La résolution de ces problèmes peut être facilement implémentée dans des codes d'éléments finis. Pour nos calculs, nous avons utilisé le code FEniCS ([26]) dans lequel il est possible d'appliquer directement les conditions de périodicité sur le bord et d'utiliser directement les formulations faibles.

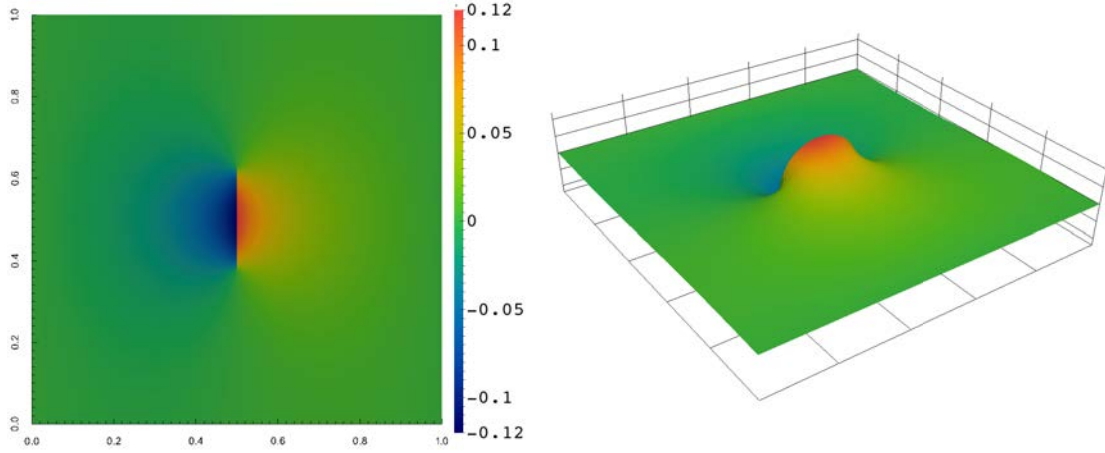
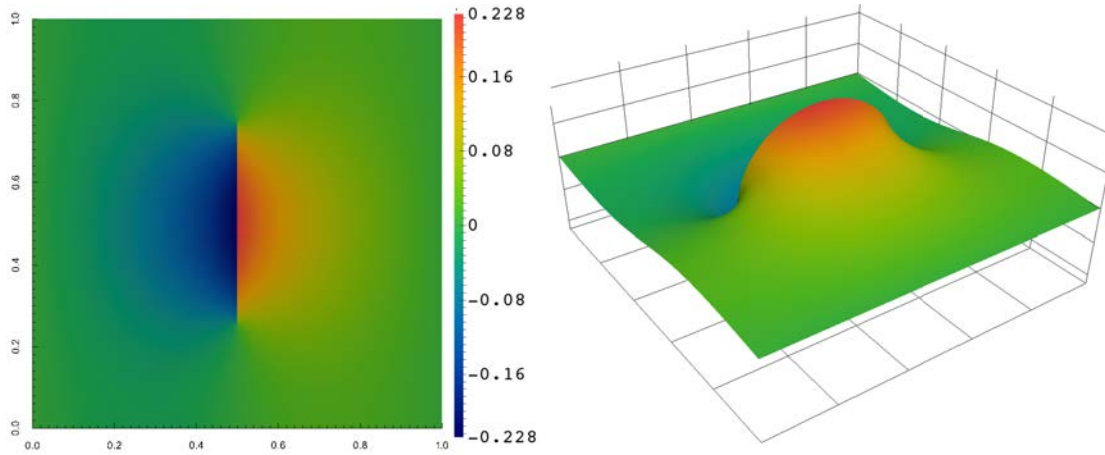
En utilisant des éléments finis classiques linéaires, nous avons réalisé plusieurs calculs, pour différentes largeurs de la cellule  $L$ , et sur chaque cellule, différentes longueurs de la fissure sont examinées. Nous obtenons  $\chi^2 = 0$  et la fonction  $\chi^1$  est présentée dans ces figures pour le cas  $L = 1$  et  $L = 2$  :

- Les fonctions  $\xi_{ijkl}(x_1, x_2, y_1, y_2)$  :

Dans notre cas de déformation anti-plane, les composantes à calculer de  $\xi$  sont  $\xi_{3311} = \xi_{3131}$  ;  $\xi_{3321} = \xi_{3231}$  ;  $\xi_{3312} = \xi_{3132}$  ;  $\xi_{3322} = \xi_{3232}$ . Notons :

$$\xi^{11}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \xi_{3131}(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad ; \quad \xi^{12}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \xi_{3132}(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$\xi^{21}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \xi_{3231}(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad ; \quad \xi^{22}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \xi_{3232}(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

FIGURE 4.5 – La fonction  $\chi^1$  avec  $\ell = 0.25$ ,  $L = 1$ FIGURE 4.6 – La fonction  $\chi^1$  avec  $\ell = 0.5$ ,  $L = 1$ 

Les équations pour déterminer ces fonctions sont les suivantes :

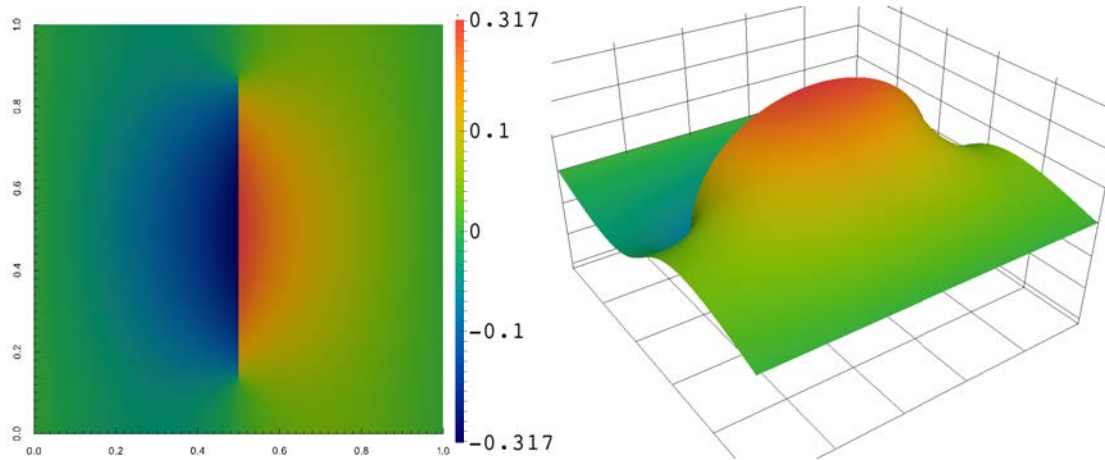
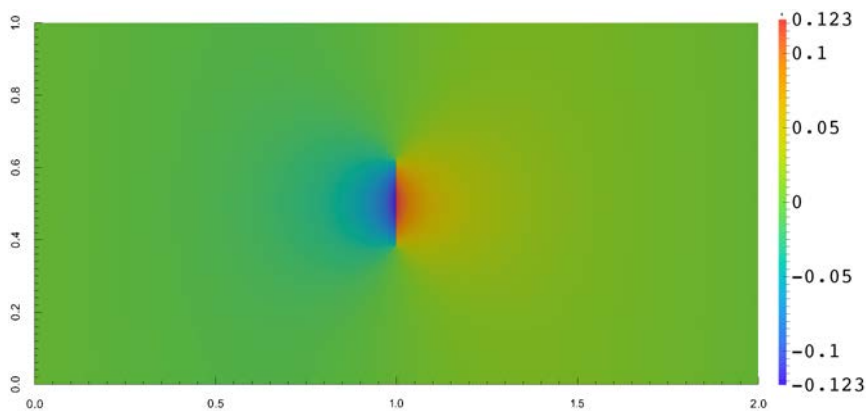
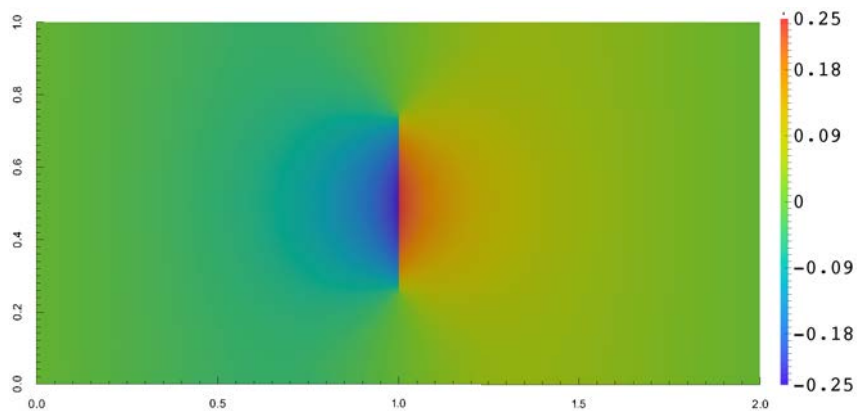
$$\begin{cases} \int_Y \mu(\xi_{,k}^{11} \bar{\phi}_{,k} + \chi^1 \bar{\phi}_{,1}) dy = \int_Y \mu(\chi_{,1}^1 + 1) \bar{\phi} dy & \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi^{11}(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases}$$

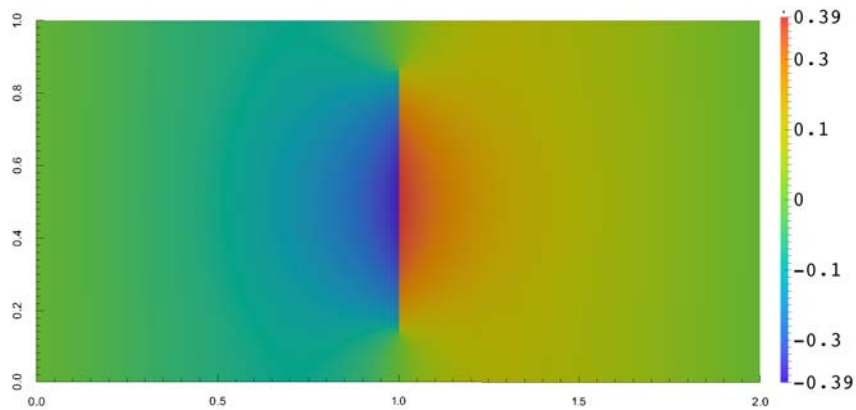
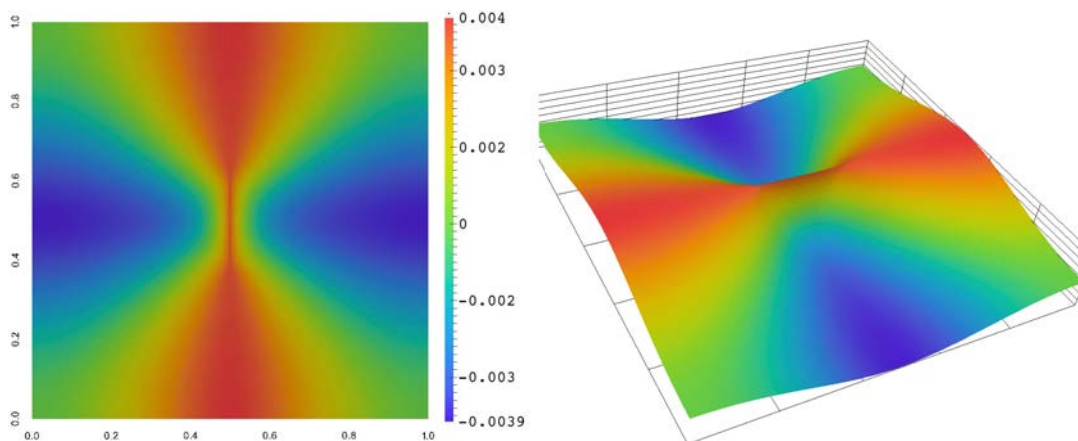
$$\begin{cases} \int_Y \mu(\xi_{,k}^{12} \bar{\phi}_{,k} + \chi^1 \bar{\phi}_{,2}) dy = \int_Y \mu \chi_{,2}^1 \bar{\phi} dy & \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi^{12}(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu \xi_{,k}^{21} \bar{\phi}_{,k} dy = 0 & \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi^{21}(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu \xi_{,k}^{22} \bar{\phi}_{,k} dy = \int_Y \mu \bar{\phi} dy & \forall \bar{\phi}(y) \text{ Y-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi^{22}(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases}$$



FIGURE 4.7 – La fonction  $\chi^1$  avec  $\ell = 0.75$ ,  $L = 1$ FIGURE 4.8 – La fonction  $\chi^1$  avec  $\ell = 0.25$ ,  $L = 2$ FIGURE 4.9 – La fonction  $\chi^1$  avec  $\ell = 0.50$ ,  $L = 2$

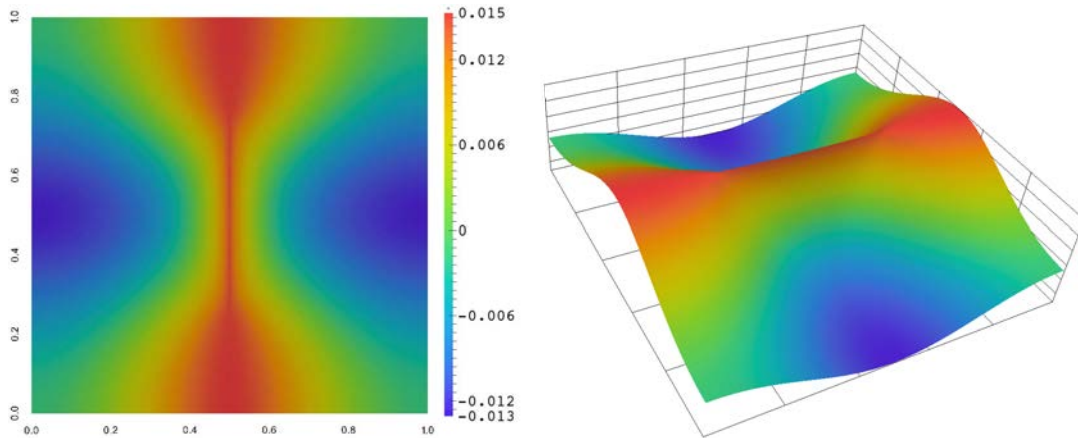
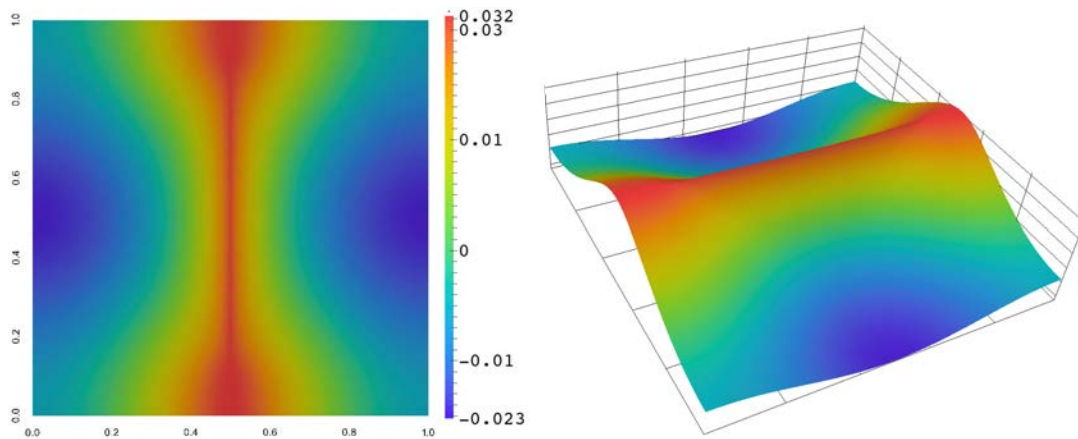
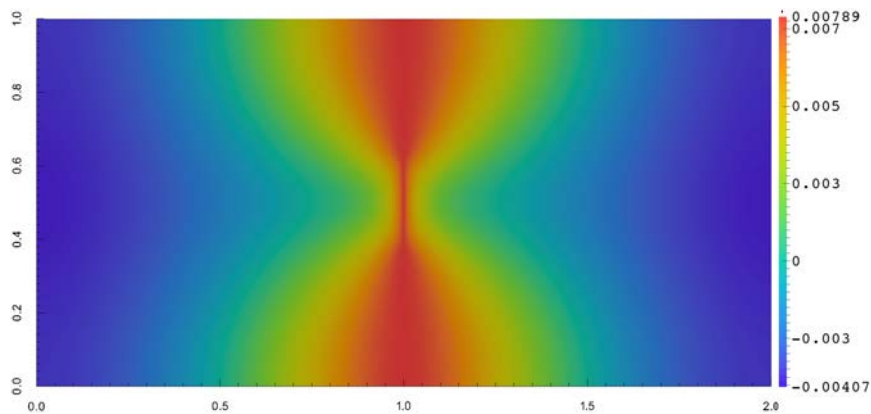
FIGURE 4.10 – La fonction  $\chi^1$  avec  $\ell = 0.75$ ,  $L = 2$ FIGURE 4.11 – La fonction  $\xi^{11}$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 1$ 

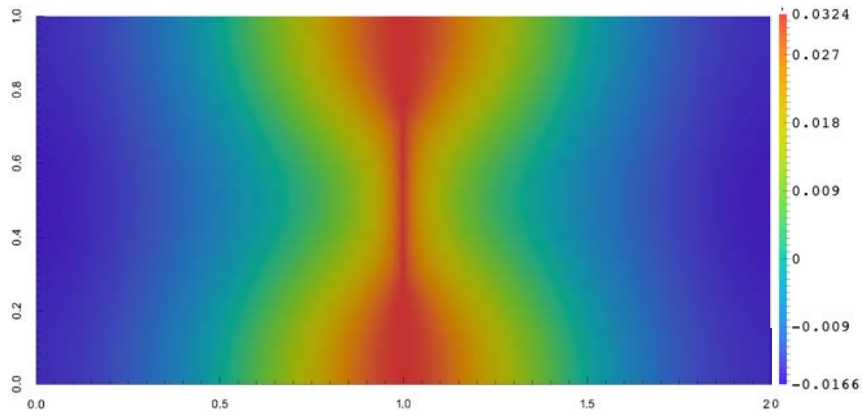
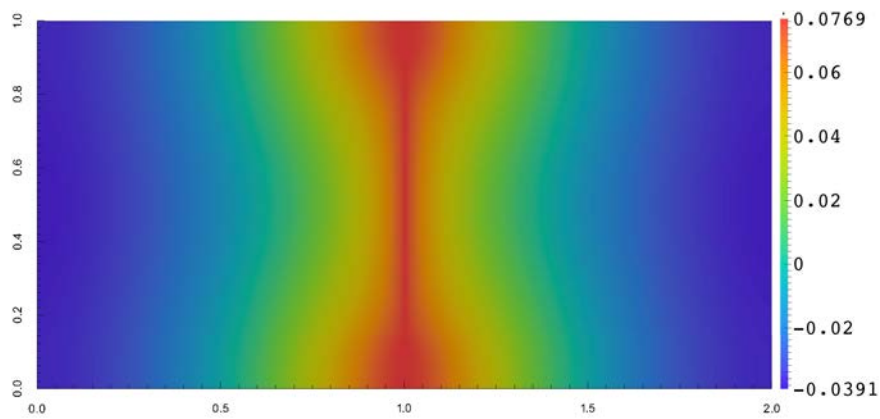
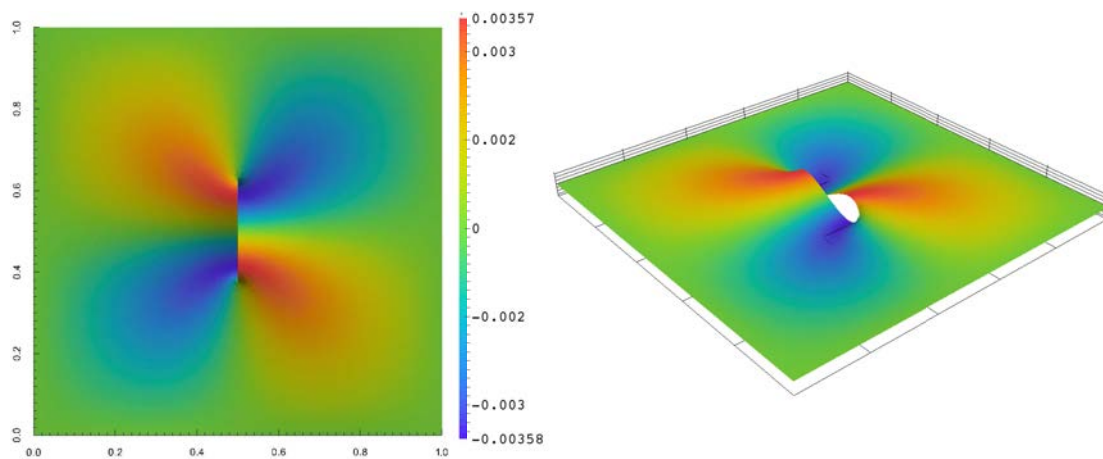
Comme  $\int_Y \mu \bar{\phi} dy = 0$  nous trouvons que :  $\xi^{21} = \xi^{22} = 0$ . Les fonctions  $\xi^{11}$ ,  $\xi^{12}$  sont présentées dans les figures suivantes pour  $L = 1$  et  $L = 2$  :

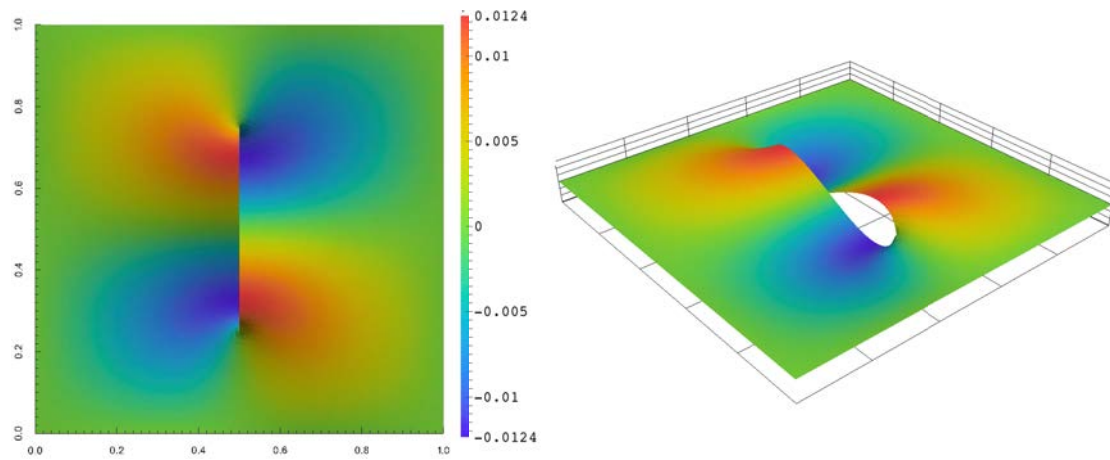
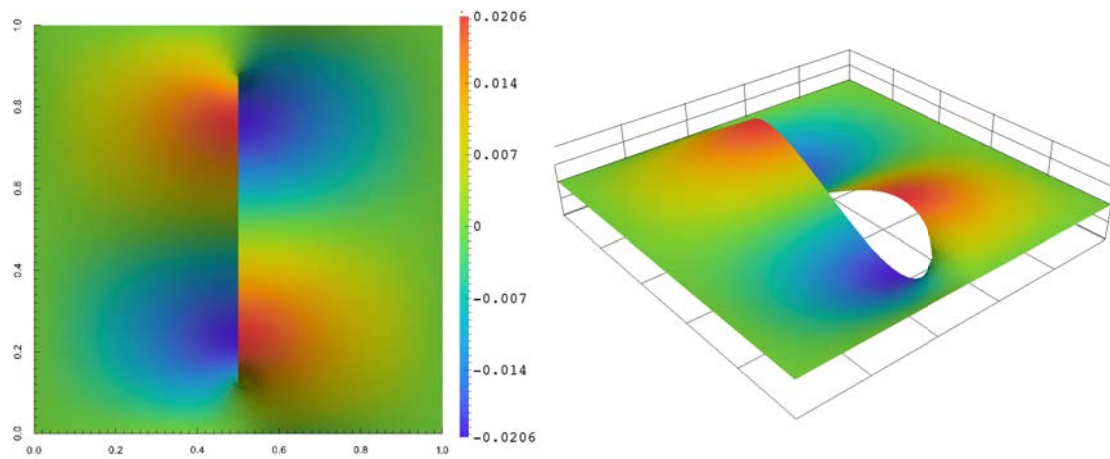
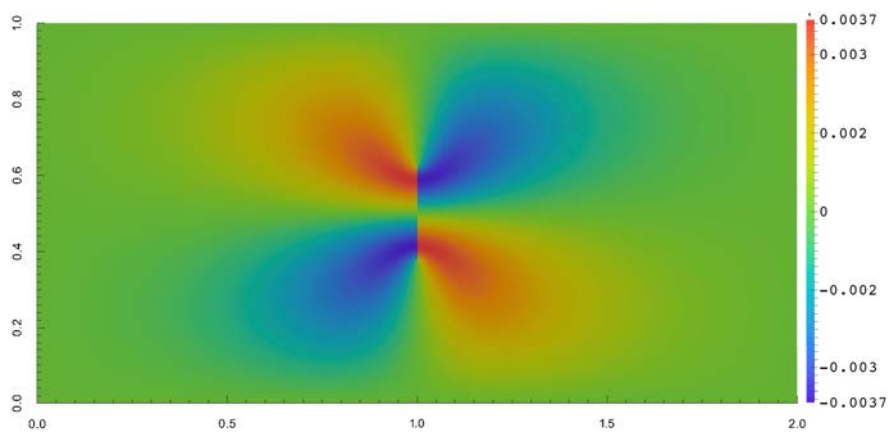
- Les fonctions  $\psi_{ijk}(x_1, x_2, y)$  :

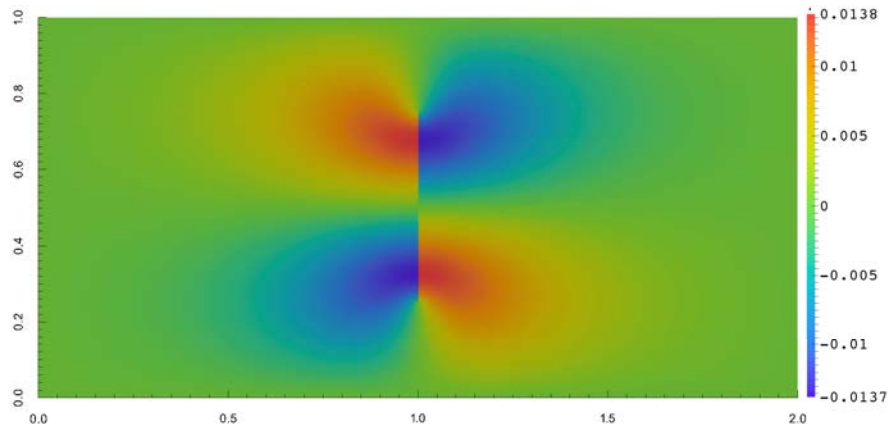
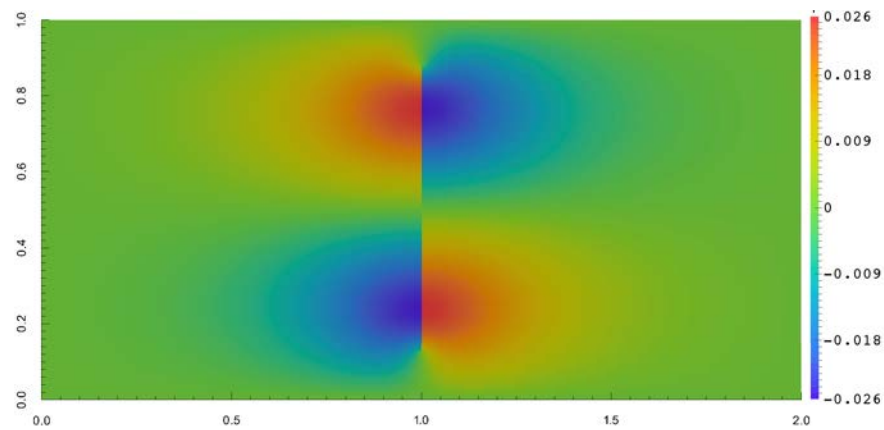
Dans notre cas de déformation anti-plane, les composantes à calculer de  $\xi$  sont  $\psi_{331} = \psi_{313}$  et  $\psi_{332} = \psi_{323}$ . Notons :

$$\psi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \psi_{313}(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad ; \quad \psi^2(x_1, x_2, y) = \psi_{323}(x_1, x_2, y)$$

FIGURE 4.12 – La fonction  $\xi^{11}$  avec  $\ell = 0.5$  et  $L = 1$ FIGURE 4.13 – La fonction  $\xi^{11}$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 1$ FIGURE 4.14 – La fonction  $\xi^{11}$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 2$

FIGURE 4.15 – La fonction  $\xi^{11}$  avec  $\ell = 0.50$  et  $L = 2$ FIGURE 4.16 – La fonction  $\xi^{11}$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 2$ FIGURE 4.17 – La fonction  $\xi^{12}$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 1$

FIGURE 4.18 – La fonction  $\xi^{12}$  avec  $\ell = 0.5$  et  $L = 1$ FIGURE 4.19 – La fonction  $\xi^{12}$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 1$ FIGURE 4.20 – La fonction  $\xi^{12}$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 2$

FIGURE 4.21 – La fonction  $\xi^{12}$  avec  $\ell = 0.50$  et  $L = 2$ FIGURE 4.22 – La fonction  $\xi^{12}$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 2$

Les équations pour déterminer ces fonctions sont les suivantes :

$$\begin{cases} \int_Y \mu \left( \psi_{,k}^1 + \frac{\partial \chi^1}{\partial x_k} \right) \bar{\phi}_{,k} dy = \int_Y \mu \frac{\partial \chi^1}{\partial x_k} \bar{\phi} dy \quad \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \psi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu \psi_{,k}^2 \bar{\phi}_{,k} dy = 0 \quad \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \psi^2(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

À partir de (4.27) nous trouvons que  $\psi^2 = 0$ . Pour résoudre (4.26), nous avons besoin de la dérivée par rapport à la variable macroscopique  $x$  de la solution du problème de cellule d'ordre 1 :  $\chi^1$ . En fait, la dépendance en  $x$  de  $\chi^1$  vient de la variation de la longueur de la fissure par rapport à la variable  $x$ , et cette solution peut être représentée comme une fonction de  $\ell(x_1, x_2)$  et de la variable microscopique  $y_1, y_2$  :

$$\chi^1 = \chi^1(\ell, y_1, y_2)$$

Notons :

$$\frac{\partial \chi^1}{\partial \ell} = \dot{\chi}^1 \quad (4.28)$$

nous pouvons réécrire (4.26) :

$$\begin{cases} \int_Y \mu \psi_{,k}^1 \bar{\phi}_{,k} dy = \int_Y \mu (\dot{\chi}_{,k}^1 \bar{\phi} - \dot{\chi}^1 \bar{\phi}_{,k}) \frac{\partial \ell}{\partial x_k} dy \quad \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \psi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Cette équation nous suggère de chercher  $\psi^1$  sous la forme :

$$\psi^1 = \Phi^1 \frac{\partial \ell}{\partial x_1} + \Phi^2 \frac{\partial \ell}{\partial x_2} \quad (4.30)$$

Ici  $\Phi^k(x_1, x_2, y_1, y_2)$  sont les fonctions périodiques de période  $Y$ . En remplaçant (4.30)

à (4.29) nous obtenons les équations pour déterminer  $\Phi^k$  :

$$\begin{cases} \int_Y \mu \Phi_{,k}^1 \bar{\phi}_{,k} dy = \int_Y \mu (\dot{\chi}_{,1}^1 \bar{\phi} - \dot{\chi}^1 \bar{\phi}_{,1}) dy & \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \Phi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\begin{cases} \int_Y \mu \Phi_{,k}^2 \bar{\phi}_{,k} dy = \int_Y \mu (\dot{\chi}_{,2}^1 \bar{\phi} - \dot{\chi}^1 \bar{\phi}_{,2}) dy & \forall \bar{\phi}(y) Y\text{-périodique}, \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \Phi^2(x_1, x_2, y_1, y_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

**Remarque.** La fonction  $\dot{\chi}^1$  est impaire en  $y_1$ , paire en  $y_2$  donc nous pouvons montrer que  $\Phi^1$  est une fonction paire en  $y_1$  et  $y_2$  tandis que  $\Phi^2$  est une fonction impaire en  $y_1$  et  $y_2$ . La parité de ces fonctions nous aide à simplifier les coefficients homogénéisés dans la section suivante.

La difficulté de la résolution de ces équations est de calculer la dérivée de  $\chi^1$  par rapport  $\ell$ , la longueur de la fissure, tandis que  $\chi^1$  est une fonction définie sur un domaine variable qui dépend de la longueur de la fissure. L'idée est de tout transporter sur un domaine fixe puis de dériver classiquement sous le signe intégral l'équation (4.24) afin d'établir une équation pour  $\dot{\chi}^1$ .

Si nous fixons  $\ell$ , la dérivée  $\dot{\chi}^1$  est calculé par :

$$\dot{\chi}^1 = \left. \frac{d}{dh} \chi^1(\ell + h) \right|_{h=0} \quad (4.33)$$

ce qui revient à envisager une extension de la fissure en ajoutant à  $\Gamma$  un segment de longueur  $h/2$  assez petite à ces 2 extrémités (figure 4.23).

Pour renvoyer  $Y$  sur le domaine fixe  $\tilde{Y}$ , nous utilisons une bijection qui transforme  $\Gamma_h$  en  $\Gamma$  mais laisse les points de  $\partial Y$  invariants. Dans notre cas avec un domaine relativement simple, nous utilisons une transformation  $\underline{G}_h$  définie par :

$$\underline{G}_h(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (\tilde{y}_1, g_h(\tilde{y}_2))$$



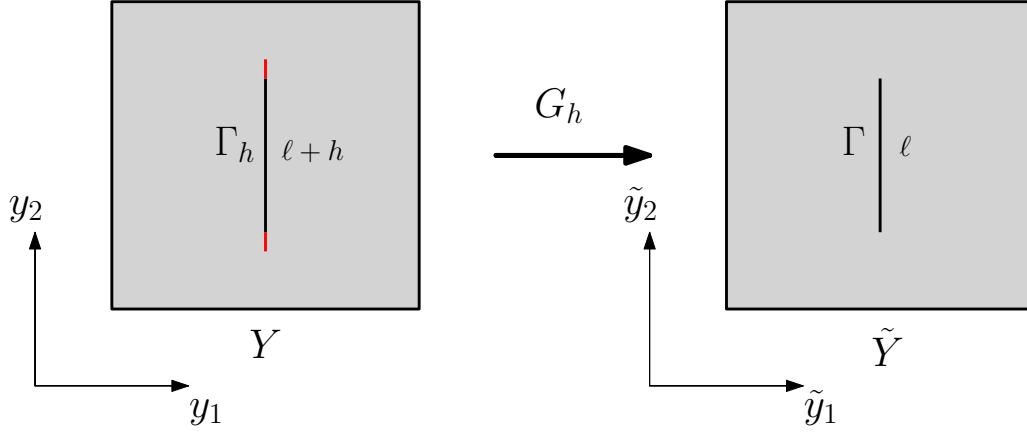


FIGURE 4.23 – La transformation qui permet de travailler sur un domaine fixe

où :

$$\begin{cases} g_h(\tilde{y}_2) = \frac{1-\ell-h}{1-\ell}\tilde{y}_2 & \forall 0 \leq \tilde{y}_2 \leq \frac{1-\ell}{2} \\ g_h(\tilde{y}_2) = \frac{\ell+h}{\ell}\tilde{y}_2 - \frac{h}{2\ell} & \forall \frac{1-\ell}{2} \leq \tilde{y}_2 \leq \frac{1+\ell}{2} \\ g_h(\tilde{y}_2) = \frac{1-\ell-h}{1-\ell}\tilde{y}_2 + \frac{h}{1-\ell} & \forall \frac{1+\ell}{2} \leq \tilde{y}_2 \leq 1 \end{cases} \quad (4.34)$$

$g_h(\tilde{y}_2)$  est une fonction bijective qui transforme  $[0, 1]$  à  $[0, 1]$  mais qui transforme l'intervalle  $[(1-\ell)/2, (1+\ell)/2]$  en l'intervalle  $[(1-\ell-h)/2, (1+\ell+h)/2]$  comme on peut le voir sur la la figure 4.39. Avec cette construction, la transformation  $y = \underline{G}_h(\tilde{y})$  satisfait toutes les conditions pour renvoyer  $Y$  sur le domaine fixe  $\tilde{Y}$ .

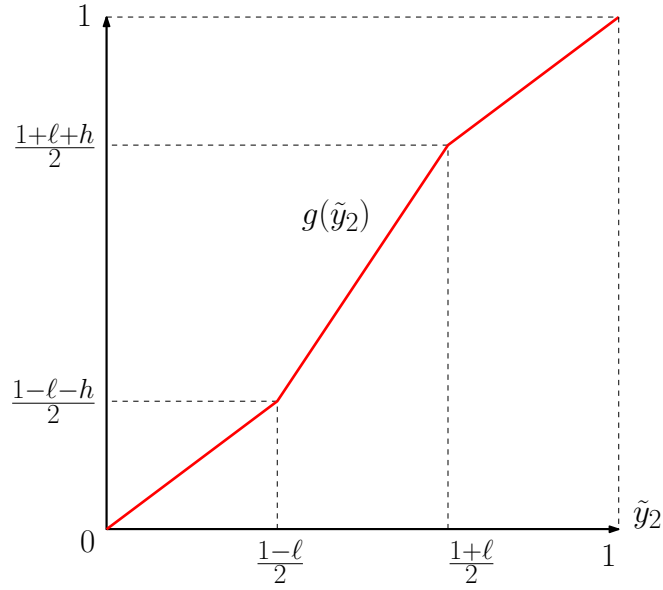
Avec le changement de variable  $y \rightarrow \tilde{y}$ , nous obtenons de nouvelles fonctions définies sur le domaine  $\tilde{Y}$  :

$$\chi^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \tilde{\chi}^1(x_1, x_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2); \quad \Phi^k(x_1, x_2, y_1, y_2) = \tilde{\Phi}^k(x_1, x_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$$

En utilisant les formules classiques de changement de variable et de dérivation de fonction composée, nous avons :

$$dy = \det(\nabla \underline{G}_h) d\tilde{y} = \frac{\partial g_h}{\partial \tilde{y}_2} d\tilde{y} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial y_1} = \frac{\partial \tilde{\Phi}^k}{\partial \tilde{y}_1}; \quad \frac{\partial \Phi^k}{\partial y_2} = \left( \frac{\partial g_h}{\partial \tilde{y}_2} \right)^{-1} \frac{\partial \tilde{\Phi}^k}{\partial \tilde{y}_2} \quad (4.36)$$

FIGURE 4.24 – La fonction de transformation  $g(\tilde{y}_2)$ 

Pour simplifier l'écriture nous notons  $k(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{\partial g_h}{\partial \tilde{y}_2}$ , et utilisons  $\tilde{\chi}$  au lieu de  $\tilde{\chi}^1$ . Grâce aux relations (4.35) et (4.36) nous pouvons trouver l'équation pour déterminer  $\tilde{\chi}$  en se basant sur (4.24) :

$$\begin{cases} \int_{\tilde{Y}} \mu \left( k \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} + \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} + k \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} \right) d\tilde{y} = 0 & \forall \phi(\tilde{y}) \text{ } \tilde{Y}\text{-périodique} \\ \langle \tilde{\chi}(x_1, x_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Comme le domaine  $\tilde{Y}$  ne dépend pas du paramètre  $h$ , nous pouvons déduire une équation de  $\dot{\tilde{\chi}}$  en dérivant directement (4.37) :

$$\begin{cases} \int_{\tilde{Y}} \mu \left( k \frac{\partial \dot{\tilde{\chi}}}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} + \frac{1}{k} \frac{\partial \dot{\tilde{\chi}}}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} \right) d\tilde{y} = \int_{\tilde{Y}} \mu \left( \frac{\dot{k}}{k^2} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} - \dot{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} - k \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} \right) d\tilde{y} \\ \forall \phi(\tilde{y}) \text{ } \tilde{Y}\text{-périodique, } \langle \dot{\tilde{\chi}}(x_1, x_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Ici pour une fonction  $F(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ , on note  $\dot{F}$  la dérivée partielle par rapport à  $h$  en  $h = 0$  :

$$\dot{F}(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \left. \frac{\partial F(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)}{\partial h} \right|_{h=0}$$

A partir de la définition de  $k$  nous pouvons calculer :

$$\begin{cases} k(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{1-\ell-h}{1-\ell} & ; \quad \dot{k}(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{-1}{1-\ell} & \forall 0 \leq \tilde{y}_2 \leq \frac{1-\ell}{2} \\ k(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{\ell+h}{\ell} & ; \quad \dot{k}(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{1}{\ell} & \forall \frac{1-\ell}{2} \leq \tilde{y}_2 \leq \frac{1+\ell}{2} \\ k(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{1-\ell-h}{1-\ell} & ; \quad \dot{k}(h, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \frac{-1}{1-\ell} & \forall \frac{1+\ell}{2} \leq \tilde{y}_2 \leq 1 \end{cases} \quad (4.39)$$

En utilisant la relation entre les dérivées de  $\chi^1$  et  $\tilde{\chi}$  par rapport  $\ell$  :

$$\dot{\chi}^1 = \dot{\tilde{\chi}} - \frac{\dot{g}_h}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \quad (4.40)$$

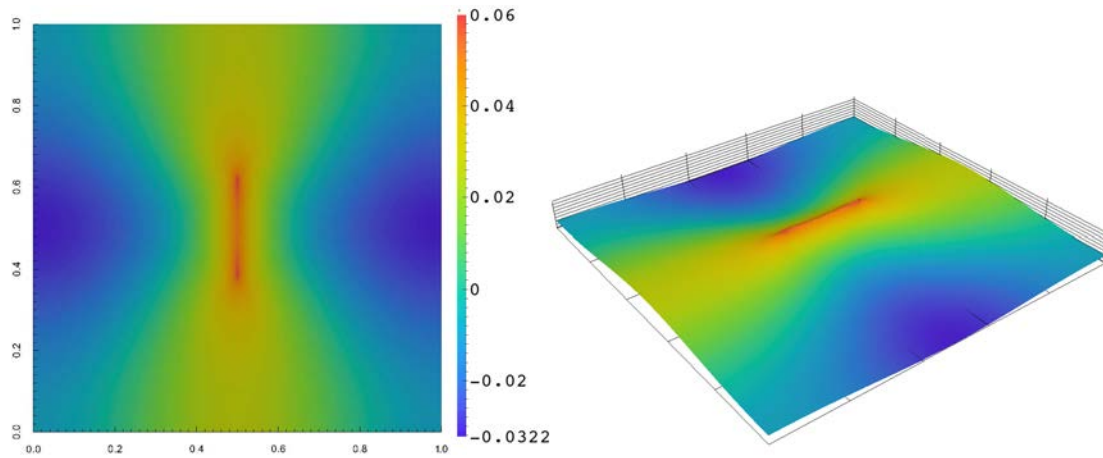
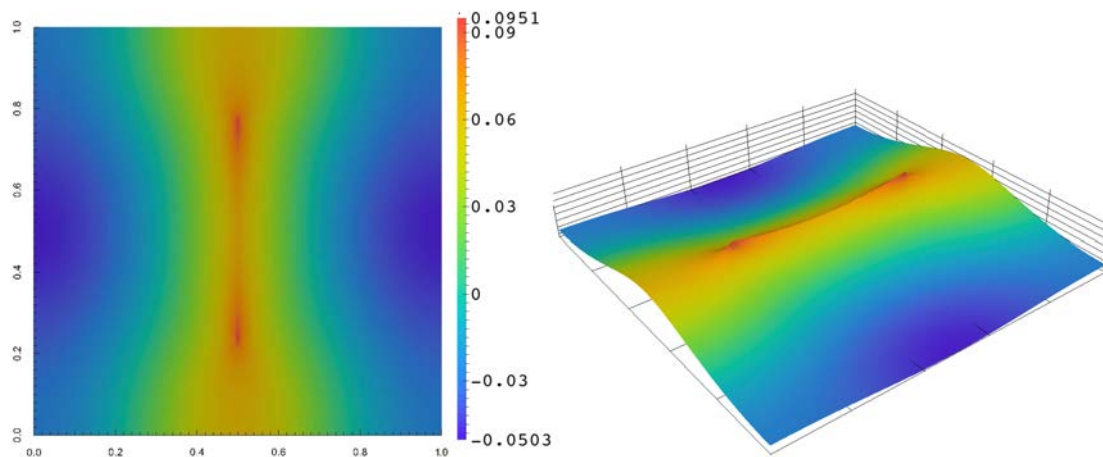
nous pouvons établir les équations pour déterminer  $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$  en se basant sur les équations de  $\Phi_1$  (4.31) et  $\tilde{\Phi}_2$  (4.32), respectivement :

$$\begin{cases} \int_{\tilde{Y}} \mu \left( k \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} + \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} \right) d\tilde{y} = \int_{\tilde{Y}} \mu \left( k \frac{\partial \dot{\tilde{\chi}}}{\partial \tilde{y}_1} \phi + \dot{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_1} \phi + \dot{g}_h \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} \right) d\tilde{y} - \\ - \int_{\tilde{Y}} \mu \left( k \dot{\tilde{\chi}} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} - \dot{g}_h \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} \right) d\tilde{y} \quad \forall \phi(\tilde{y}) \quad \tilde{Y}\text{-périodique} \\ \langle \tilde{\Phi}^1(x_1, x_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

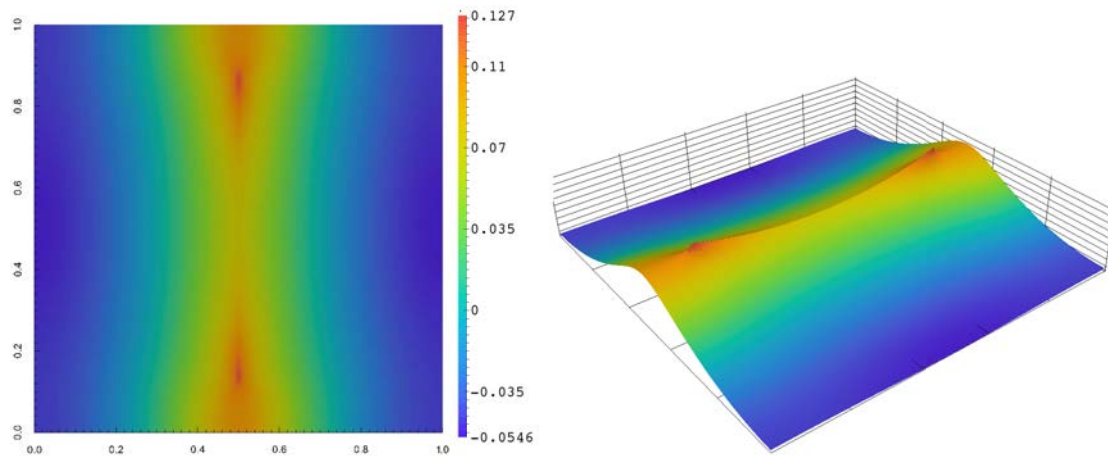
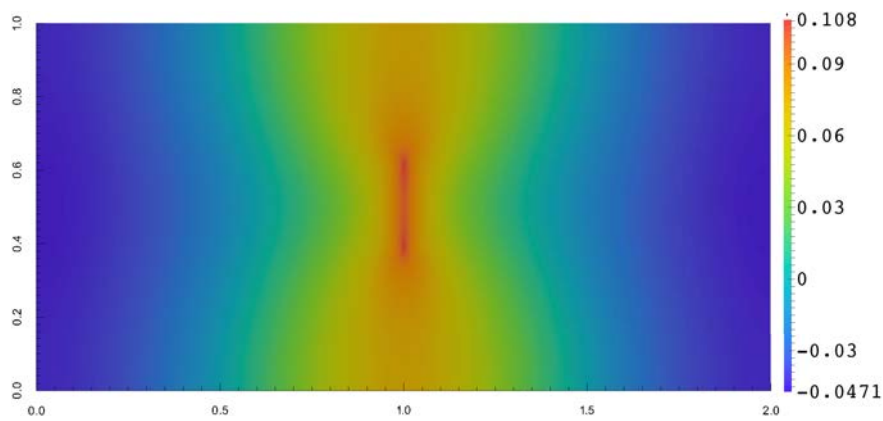
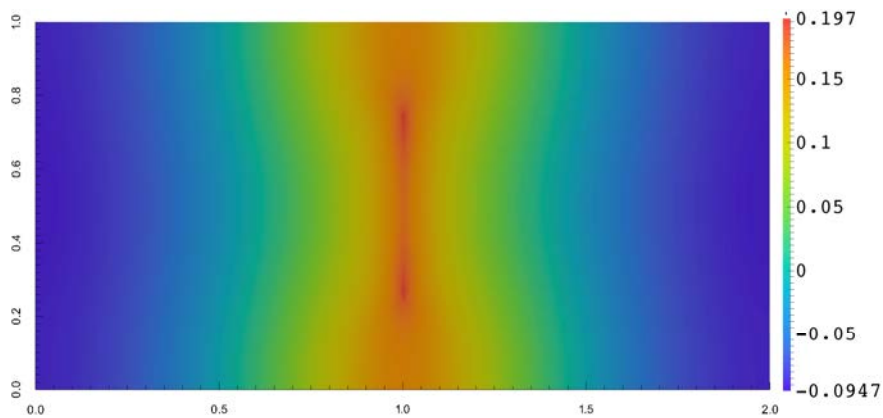
$$\begin{cases} \int_{\tilde{Y}} \mu \left( k \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1} + \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} \right) d\tilde{y} = \int_{\tilde{Y}} \mu \left( \frac{\partial \dot{\tilde{\chi}}}{\partial \tilde{y}_2} \phi + \frac{\dot{g}_h}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} \right) d\tilde{y} - \\ - \int_{\tilde{Y}} \mu \left( \dot{\tilde{\chi}} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} - \frac{\dot{g}_h}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_2} \right) d\tilde{y} \quad \forall \phi(\tilde{y}) \quad \tilde{Y}\text{-périodique} \\ \langle \tilde{\Phi}^2(x_1, x_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

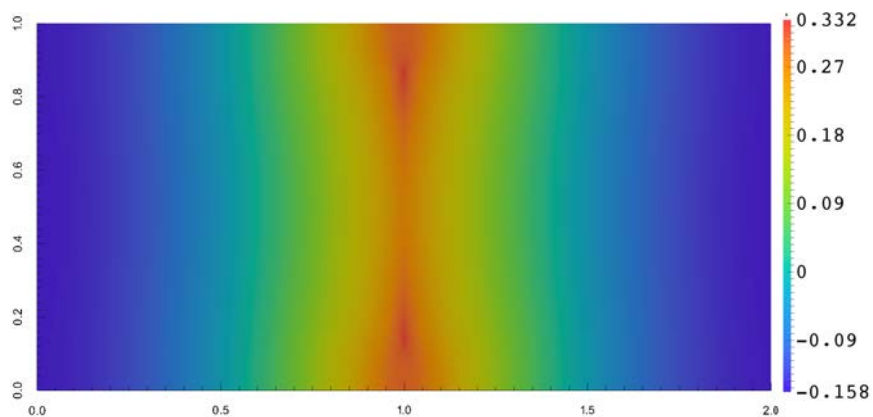
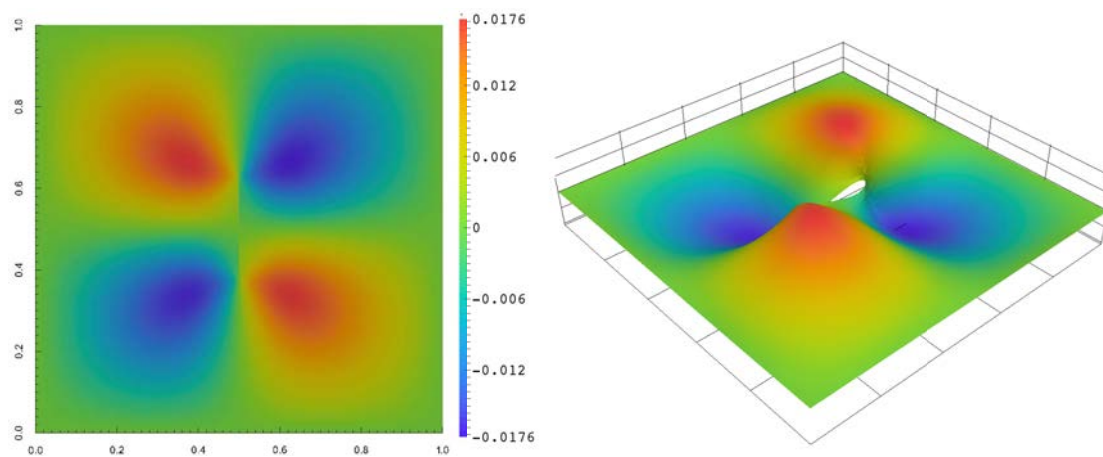
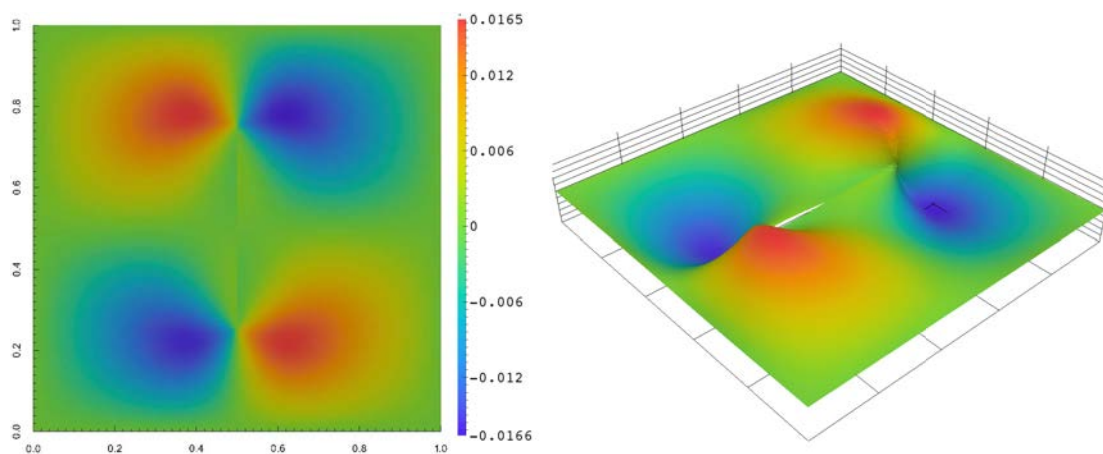
Pour résumer, à une valeur de  $\ell$  donnée, la procédure pour calculer  $\tilde{\Phi}^1(\ell, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2), \tilde{\Phi}^2(\ell, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  passe par 3 étapes :

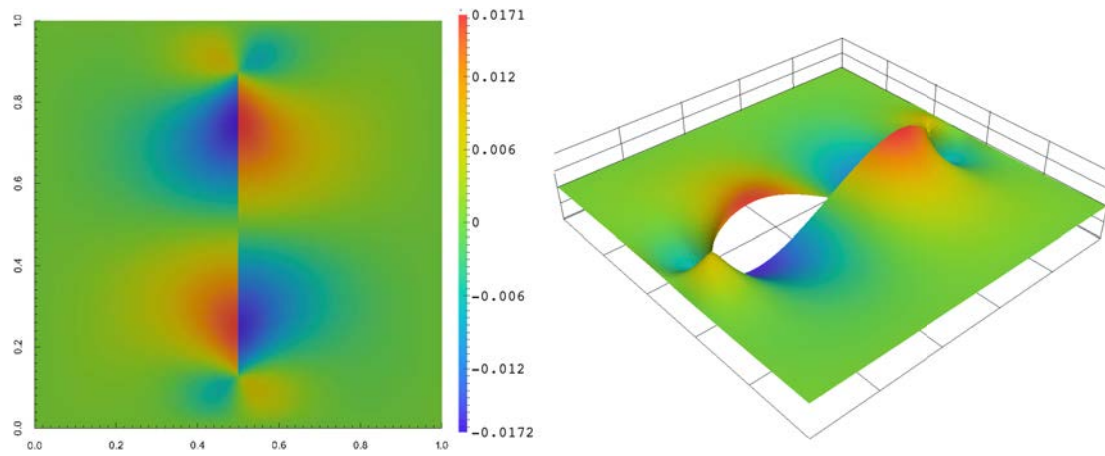
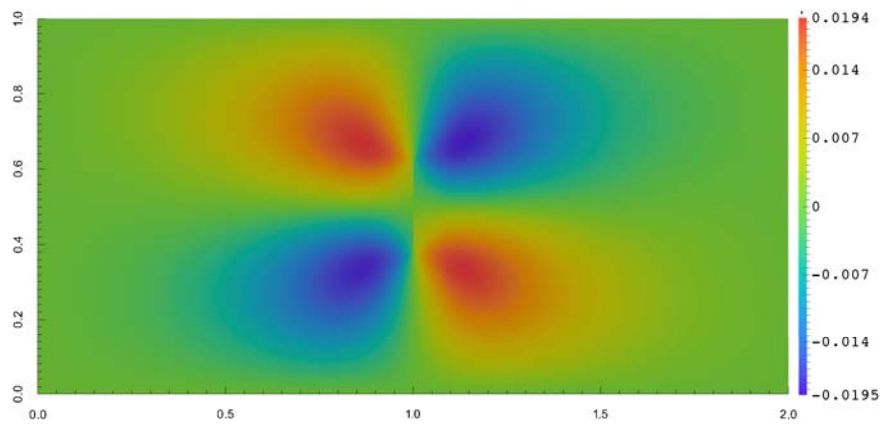
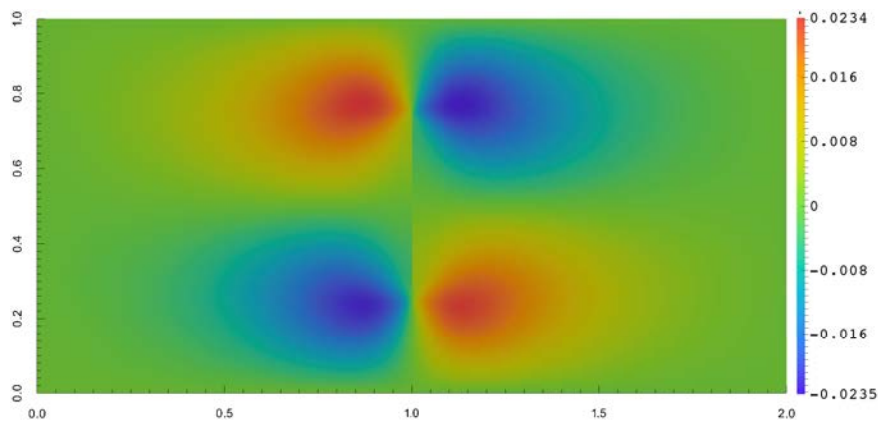
1. Trouver  $\tilde{\chi}$  en résolvant (4.37)
2. Trouver  $\dot{\tilde{\chi}}$  en résolvant (4.38) et en utilisant le  $\tilde{\chi}$  obtenu à l'étape précédente
3. Trouver  $\tilde{\Phi}^1$  en résolvant (4.41),  $\tilde{\Phi}^2$  en résolvant (4.42) et en utilisant  $\tilde{\chi}, \dot{\tilde{\chi}}$  déjà obtenus

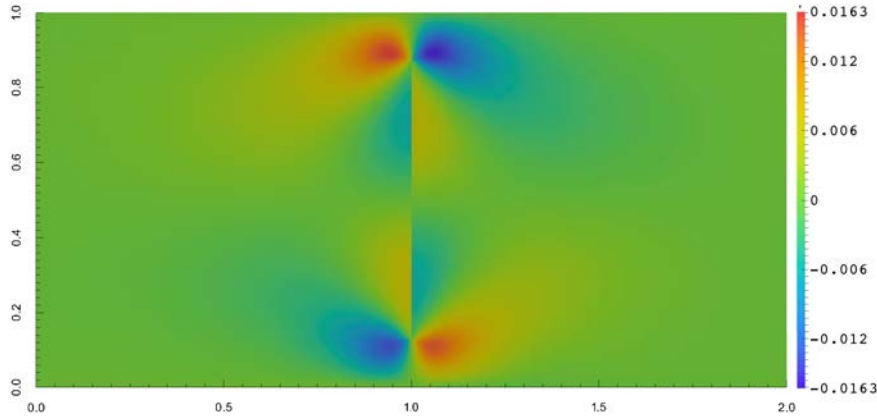
FIGURE 4.25 – La fonction  $\tilde{\Phi}^1$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 1$ FIGURE 4.26 – La fonction  $\tilde{\Phi}^1$  avec  $\ell = 0.50$  et  $L = 1$ 

Le calcul numérique est implémenté sous FEniCS en utilisant des éléments finis classiques triangulaires linéaires. Nous présentons les fonctions  $\tilde{\Phi}^1$  et  $\tilde{\Phi}^2$  dans 2 cas  $L = 1$  et  $L = 2$  :

FIGURE 4.27 – La fonction  $\tilde{\Phi}^1$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 1$ FIGURE 4.28 – La fonction  $\tilde{\Phi}^1$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 2$ FIGURE 4.29 – La fonction  $\tilde{\Phi}^1$  avec  $\ell = 0.50$  et  $L = 2$

FIGURE 4.30 – La fonction  $\tilde{\Phi}^1$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 2$ FIGURE 4.31 – La fonction  $\tilde{\Phi}^2$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 1$ FIGURE 4.32 – La fonction  $\tilde{\Phi}^2$  avec  $\ell = 0.50$  et  $L = 1$

FIGURE 4.33 – La fonction  $\tilde{\Phi}^2$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 1$ FIGURE 4.34 – La fonction  $\tilde{\Phi}^2$  avec  $\ell = 0.25$  et  $L = 2$ FIGURE 4.35 – La fonction  $\tilde{\Phi}^2$  avec  $\ell = 0.50$  et  $L = 2$

FIGURE 4.36 – La fonction  $\tilde{\Phi}^2$  avec  $\ell = 0.75$  et  $L = 2$ 

### 4.2.3 Les coefficients homogénéisés

- Les composantes du tenseur  $A^{(0)}$  :

Le tenseur  $A^{(0)}$  est calculé par la formule (3.91). Dans notre cas ses composantes sont :

$$A_{11}^{(0)}(\ell) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} + 1 \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right)^2 \right] dy$$

$$A_{12}^{(0)}(\ell) = A_{21}^{(0)}(\ell) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} + 1 \right) \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} + \left( \frac{\partial \chi^2}{\partial y_2} + 1 \right) \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} \right] dy = 0$$

$$A_{22}^{(0)}(\ell) = \mu$$

Ici  $A_{12}^{(0)}(\ell)$  et  $A_{21}^{(0)}(\ell)$  s'annulent grâce à la périodicité de  $\chi^1$  et  $\chi^2 = 0$ . Nous avons la variation de  $A_{11}^{(0)}$  en fonction de  $\ell$  pour des largeurs différentes de cellule sur la figure :

- Les composants des tenseurs  $A^{(1)}$ ,  $D^{(0)}$  :

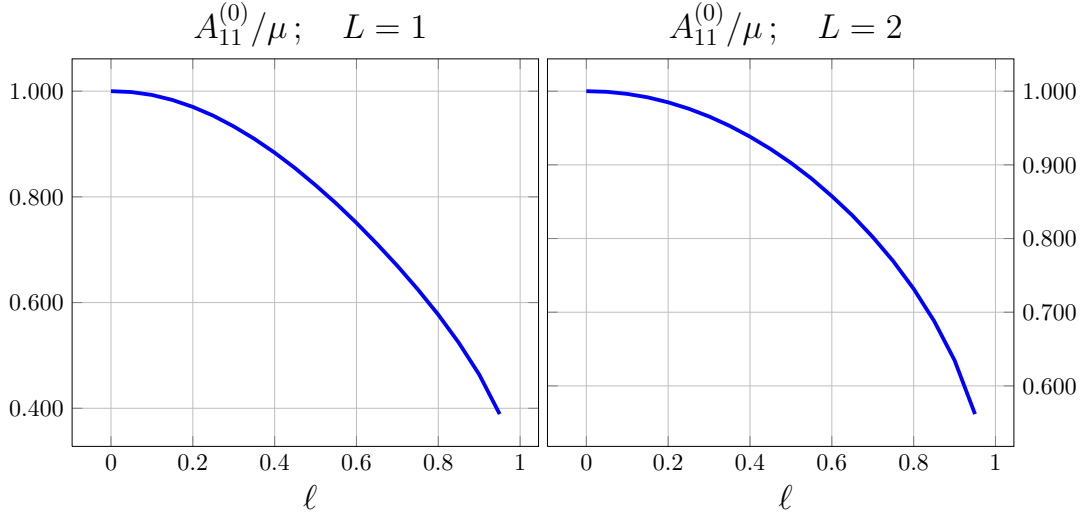
Les tenseurs  $A^{(1)}$ ,  $D^{(0)}$  sont calculés à l'aide des formules (3.92), (3.93). Dans notre cas toutes les composantes sont nulles.

- Les composants du tenseur  $G^{(1)}$  :

Le tenseur  $G^{(1)}$  est calculé à l'aide de la formule (3.94). Dans notre cas ses composantes sont :  $G_{11}^{(1)}$ ,  $G_{12}^{(1)}$ ,  $G_{21}^{(1)}$  et  $G_{22}^{(1)}$  :

$$G_{ij}^{(1)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( \frac{\partial \chi^i}{\partial x_k} \frac{\partial \chi^j}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi^j}{\partial y_k} \right) dy \quad (4.43)$$



FIGURE 4.37 – La fonction  $A_{11}^{(0)}(\ell)$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$ 

Donc nous trouvons :

$$G_{11}^{(1)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( \frac{\partial \chi^1}{\partial x_k} \frac{\partial \chi^1}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^1}{\partial y_k} \frac{\partial \psi^1}{\partial y_k} \right) dy \quad (4.44)$$

$$G_{12}^{(1)} = G_{21}^{(1)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( \frac{\partial \chi^1}{\partial x_k} \frac{\partial \chi^2}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^1}{\partial y_k} \frac{\partial \psi^2}{\partial y_k} \right) dy = 0 \quad (4.45)$$

$$G_{22}^{(1)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( \frac{\partial \chi^2}{\partial x_k} \frac{\partial \chi^2}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^2}{\partial y_k} \frac{\partial \psi^2}{\partial y_k} \right) dy = 0 \quad (4.46)$$

En fait,  $G_{12}^{(1)} = G_{21}^{(1)} = G_{22}^{(1)} = 0$  car les fonctions  $\chi^2$  et  $\psi^2$  sont nulles. En utilisant l'expression de  $\psi^1$  dans (4.30),  $G_{11}^{(1)}$  s'écrit :

$$G_{11}^{(1)} = \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( (\dot{\chi}^1)^2 \delta_{ij} - \frac{\partial \Phi^i}{\partial y_k} \frac{\partial \Phi^j}{\partial y_k} \right) dy = \frac{\partial \ell}{\partial x_i} \frac{\partial \ell}{\partial x_j} \mathcal{G}_{ij}^{(1)} \quad (4.47)$$

où nous notons

$$\mathcal{G}_{ij}^{(1)}(\ell) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( (\dot{\chi}^1)^2 \delta_{ij} - \frac{\partial \Phi^i}{\partial y_k} \frac{\partial \Phi^j}{\partial y_k} \right) dy$$

Comme nous avons obtenu les fonctions  $\tilde{\Phi}^j$  par la transformation  $\underline{G}_h$ , nous pouvons

réécrire  $\mathcal{G}_{ij}^{(1)}(\ell)$  à l'aide des fonctions définies dans le domaine  $\tilde{Y}$  :

$$\mathcal{G}_{11}^{(1)}(\ell) = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \mu \left[ k \left( \dot{\chi} - \frac{\dot{g}_h}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \right)^2 - k \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_1} \right)^2 - \frac{1}{k} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_2} \right)^2 \right] d\tilde{y} \quad (4.48)$$

$$\mathcal{G}_{12}^{(1)}(\ell) = \mathcal{G}_{21}^{(1)}(\ell) = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \mu \left[ -\frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}^2}{\partial \tilde{y}_1} - \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_2} \frac{\partial \tilde{\Phi}^2}{\partial \tilde{y}_2} \right] d\tilde{y} \quad (4.49)$$

$$\mathcal{G}_{22}^{(1)}(\ell) = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \mu \left[ k \left( \dot{\chi} - \frac{\dot{g}_h}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \right)^2 - k \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^2}{\partial \tilde{y}_1} \right)^2 - \frac{1}{k} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}^2}{\partial \tilde{y}_2} \right)^2 \right] d\tilde{y} \quad (4.50)$$

En utilisant les fonctions obtenues dans la section précédente, nous trouvons  $\mathcal{G}_{12}^{(1)}(\ell) = \mathcal{G}_{21}^{(1)}(\ell) = 0$  et  $\mathcal{G}_{11}^{(1)}(\ell)$ ,  $\mathcal{G}_{22}^{(1)}(\ell)$  sont présentés dans les figures suivantes :

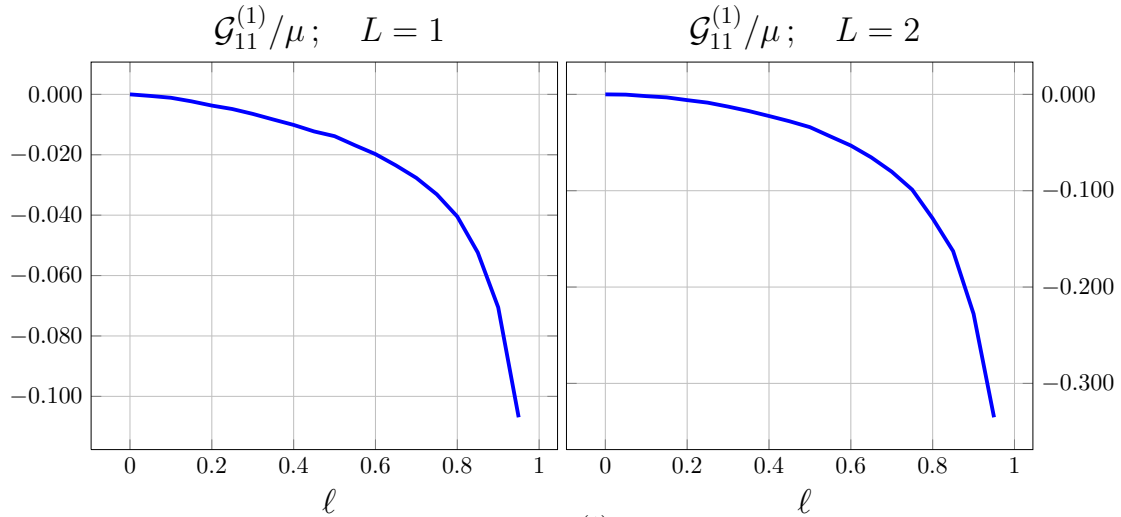


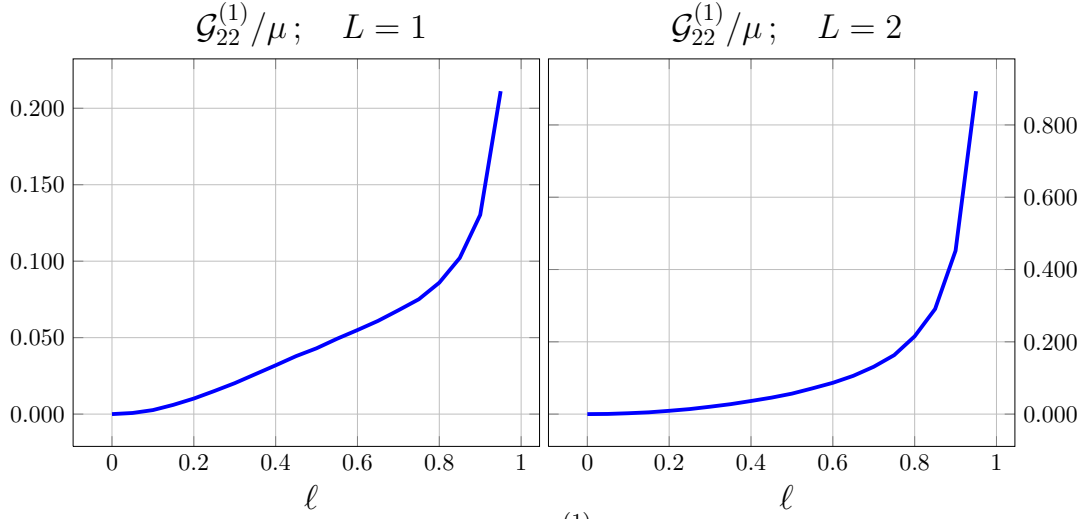
FIGURE 4.38 – La fonction  $\mathcal{G}_{11}^{(1)}(\ell)$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$

- Les composantes du tenseur  $G^{(2)}$ . Le tenseur  $G^{(2)}$  est calculé à l'aide de la formule (3.95) et dans notre cas ses composantes sont :

$$G_{ijk}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \chi^j}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi^j}{\partial y_k} \right) \chi^i - \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} \right) \psi^i \right] dy \quad (4.51)$$

Comme  $\chi^2 = \psi^2 = 0$  on a  $G_{2jk}^{(2)} = 0$ , En utilisant l'expression de  $\psi^1$  dans (4.30) nous avons les expressions des composantes à calculer :

$$G_{111}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial x_1} \dot{\chi}^1 + \frac{\partial \Phi^k}{\partial y_1} \frac{\partial \ell}{\partial x_k} \right) \chi^1 - \left( 1 + \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) \Phi^k \frac{\partial \ell}{\partial x_k} \right] dy \quad (4.52)$$

FIGURE 4.39 – La fonction  $\mathcal{G}_{22}^{(1)}(\ell)$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$ 

$$G_{112}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial x_2} \dot{\chi}^1 + \frac{\partial \Phi^k}{\partial y_2} \frac{\partial \ell}{\partial x_k} \right) \chi^1 - \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} \Phi^k \frac{\partial \ell}{\partial x_k} \right] dy \quad (4.53)$$

$$G_{121}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \chi^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y_1} \right) \chi^1 - \left( \delta_{12} + \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} \right) \psi^1 \right] dy \quad (4.54)$$

$$G_{122}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \frac{\partial \chi^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y_2} \right) \chi^1 - \left( \delta_{22} + \frac{\partial \chi^2}{\partial y_2} \right) \psi^1 \right] dy \quad (4.55)$$

Comme  $\chi^2 = \psi^2 = 0$  nous trouvons :  $G_{121}^{(2)} = 0$ ;  $G_{122}^{(2)} = \langle \mu \psi^1 \rangle = 0$ . En utilisant la parité de  $\chi^1$ ,  $\Phi^1$  et  $\Phi^2$  nous obtenons :

$$G_{111}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \dot{\chi}^1 + \frac{\partial \Phi^1}{\partial y_1} \right) \chi^1 - \left( 1 + \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) \Phi^1 \right] \frac{\partial \ell}{\partial x_1} dy = \frac{\partial \ell}{\partial x_1} \mathcal{G}_{111}^{(2)} \quad (4.56)$$

$$G_{112}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \dot{\chi}^1 + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y_2} \right) \chi^1 - \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} \Phi^2 \right] \frac{\partial \ell}{\partial x_2} dy = \frac{\partial \ell}{\partial x_2} \mathcal{G}_{112}^{(2)} \quad (4.57)$$

Ici nous avons noté :

$$\mathcal{G}_{111}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \dot{\chi}^1 + \frac{\partial \Phi^1}{\partial y_1} \right) \chi^1 - \left( 1 + \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} \right) \Phi^1 \right] dy$$

$$\mathcal{G}_{112}^{(2)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \left( \dot{\chi}^1 + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y_2} \right) \chi^1 - \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} \Phi^2 \right] dy$$

Comme nous l'avons fait pour les fonctions  $\mathcal{G}_{ij}^{(1)}(\ell)$ , nous réécrivons  $\mathcal{G}_{111}^{(2)}$  à l'aide des

fonctions définies dans le domaine  $\tilde{Y}$  :

$$\mathcal{G}_{111}^{(2)} = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \mu \left[ \left( \dot{\tilde{\chi}} - \frac{\dot{g}_h}{k} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} + \frac{\partial \tilde{\Phi}^1}{\partial \tilde{y}_1} \right) \tilde{\chi} - \left( 1 + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_1} \right) \tilde{\Phi}^1 \right] k d\tilde{y}$$

$$\mathcal{G}_{111}^{(2)} = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \mu \left[ \left( k \dot{\tilde{\chi}} - \dot{g}_h \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} + \frac{\partial \tilde{\Phi}^2}{\partial \tilde{y}_2} \right) \tilde{\chi} - \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \tilde{y}_2} \tilde{\Phi}^2 \right] d\tilde{y}$$

Nous présentons  $\mathcal{G}_{111}^{(2)}(\ell)$  et  $\mathcal{G}_{112}^{(2)}(\ell)$  dans les figures 4.40 et 4.41 :

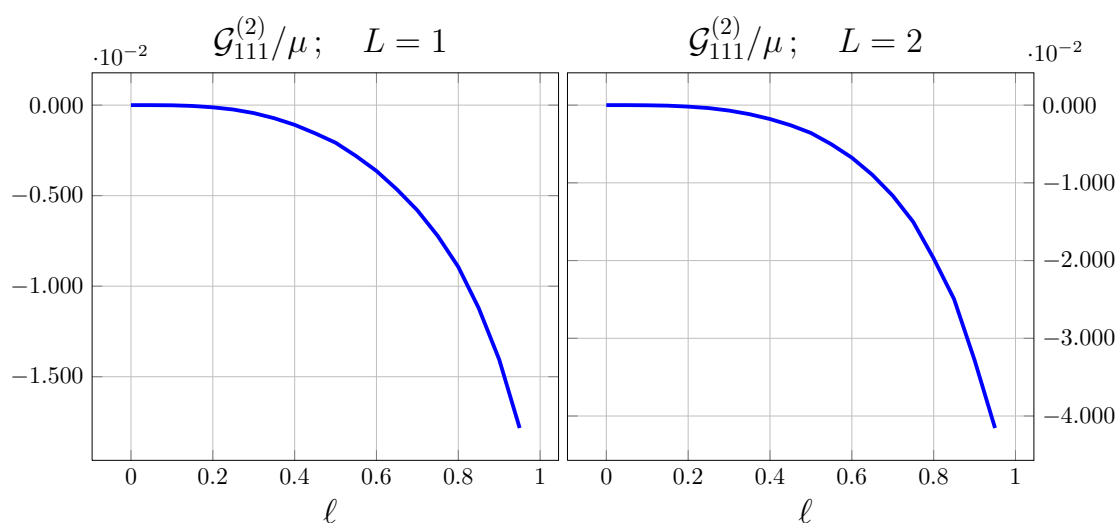


FIGURE 4.40 – La fonction  $\mathcal{G}_{111}^{(2)}(\ell)$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$

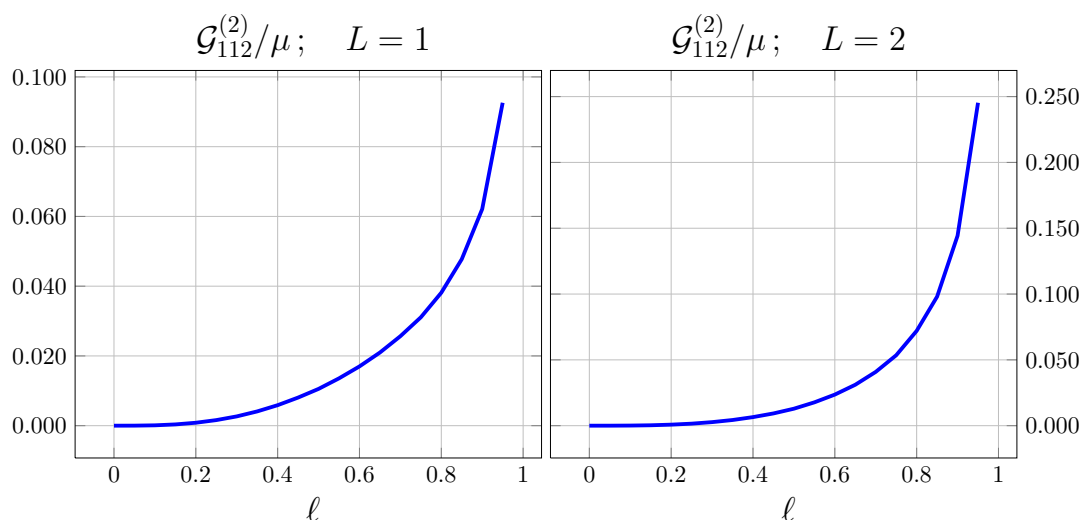


FIGURE 4.41 – La fonction  $\mathcal{G}_{112}^{(2)}(\ell)$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$

- Les composantes du tenseur  $G^{(3)}$  : Le tenseur  $G^{(3)}$  est calculé avec la formule (3.96) et dans notre cas ses composantes sont :

$$G_{ijkl}^{(3)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left( \chi^i \chi^k \delta_{jl} - \frac{\partial \xi^{ij}}{\partial y_m} \frac{\partial \xi^{kl}}{\partial y_m} \right) dy \quad (4.58)$$

Comme  $\chi^2 = \xi^{21} = \xi^{22} = 0$ , les composantes de  $G^{(3)}$  à calculer sont données par :

$$G_{1111}^{(3)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ (\chi^1)^2 - \left( \frac{\partial \xi^{11}}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial \xi^{11}}{\partial y_2} \right)^2 \right] dy \quad (4.59)$$

$$G_{1112}^{(3)} = -\frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \frac{\partial \xi^{11}}{\partial y_1} \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \xi^{11}}{\partial y_2} \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_2} \right] dy \quad (4.60)$$

$$G_{1211}^{(3)} = -\frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_1} \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_2} \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_2} \right] dy \quad (4.61)$$

$$G_{1212}^{(3)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mu \left[ (\chi^1)^2 - \left( \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial \xi^{12}}{\partial y_2} \right)^2 \right] dy \quad (4.62)$$

En utilisant les fonctions  $\chi^1$  et  $\xi^{ij}$  obtenues dans la section précédente, nous trouvons  $G_{1112}^{(3)} = G_{1211}^{(3)} = 0$  et  $G_{1111}^{(3)}(\ell)$ ,  $G_{1212}^{(3)}(\ell)$  sont présentés dans les figures suivantes :

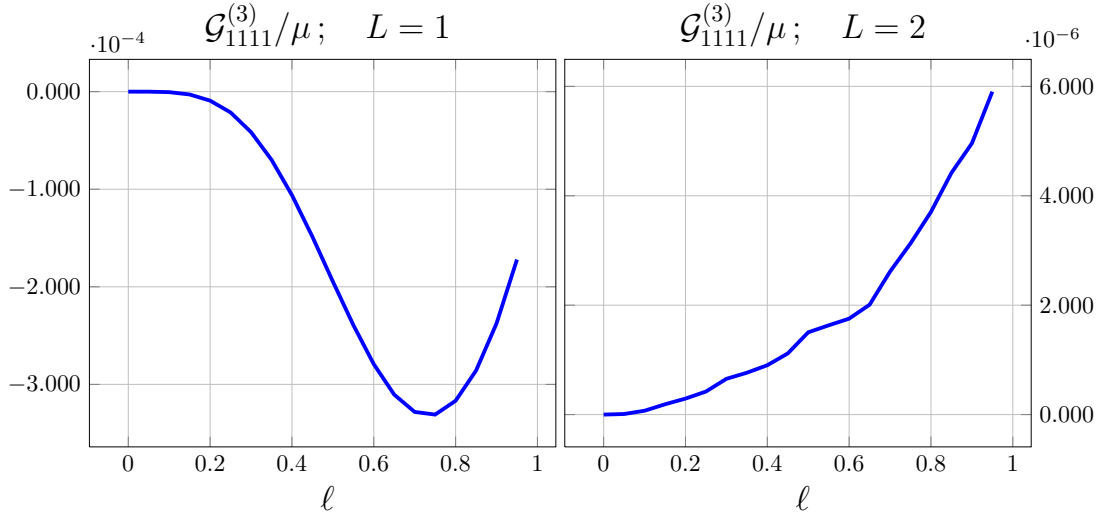
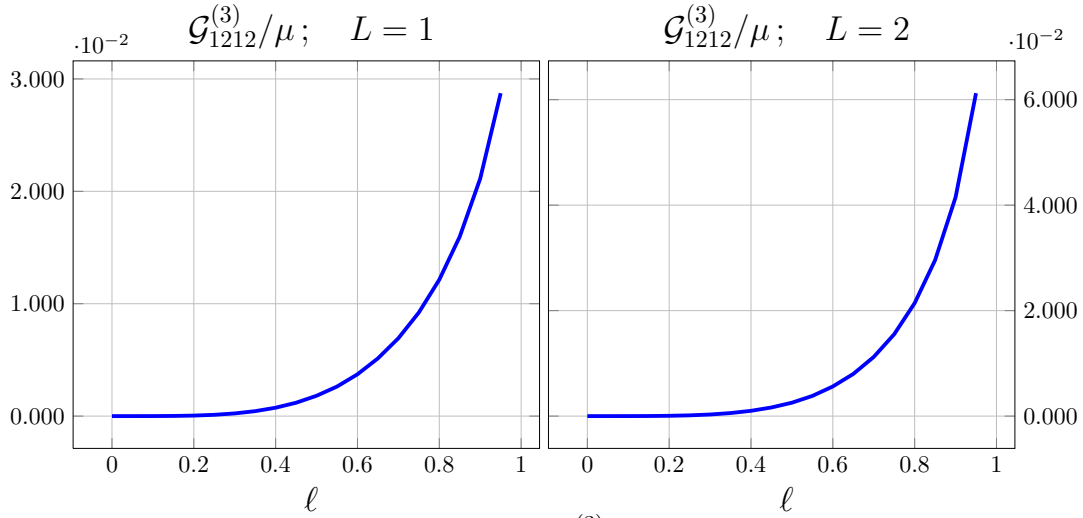


FIGURE 4.42 – La fonction  $G_{1111}^{(3)}$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$

À partir des courbes obtenues, nous trouvons que les coefficients homogénéisés à l'ordre  $\varepsilon^0$  diminuent de la valeur initiale du module de cisaillement  $\mu$  à 0 quand la longueur de la

FIGURE 4.43 – La fonction  $G_{1112}^{(3)}$  avec  $L = 1$  et  $L = 2$ 

fissure croît de 0 à 1. Ce résultat traduit la dégradation progressive du matériau lorsque les fissures croissent. En revanche, les coefficients aux ordres suivants valent 0 dans les cellules sans fissure et tendent vers l'infini quand la longueur de la fissure tend vers 1. Nous observons un changement de signe du coefficient  $G_{1111}^{(3)}$  dans les 2 cas  $L = 1$  et  $L = 2$ , ce qui montre que non seulement l'amplitude mais aussi l'allure des coefficients peuvent être influencées par largeur de la cellule.

Comme dans le cas d'un milieu stratifié, nous pouvons classer les coefficients d'ordre  $\varepsilon^2$  en 2 types : l'un ne dépend que de la longueur de fissure  $\ell$  :  $G_{ijkl}^{(3)}$  et l'autre dépend non seulement de  $\ell$  mais aussi de ses dérivées par rapport la variable  $x$  :  $G_{ij}^{(1)}$ ,  $G_{ijk}^{(2)}$ . Si nous considérons la longueur de la fissure comme une variable d'endommagement (Dascalu et al. [17]) nous pouvons obtenir une énergie totale qui dépend du gradient de l'endommagement, ce qui constitue un premier ingrédient pour la construction d'un modèle d'endommagement à gradient. La construction complète d'un tel modèle à partir de la forme de l'énergie obtenue ici sera présentée au chapitre suivant.

Pour résumer, l'énergie macroscopique d'un milieu micro-fissuré quasi périodique sous

chargement anti-plan s'écrit :

$$\begin{aligned}
W(u) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[ A_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \ell}{\partial x_1} \right)^2 \mathcal{G}_{11}^{(1)} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \ell}{\partial x_2} \right)^2 \mathcal{G}_{22}^{(1)} \right] \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{22}^{(0)} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx + \\
& + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \ell}{\partial x_1} \mathcal{G}_{111}^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \ell}{\partial x_2} \mathcal{G}_{112}^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} G_{1111}^{(3)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} G_{1212}^{(3)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx - \int_{\Omega} f u dx
\end{aligned}$$

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé deux applications de la méthode générale présentée au chapitre 3 : la première application porte traite du cas d'une microstructure 1D où l'origine de la quasi périodicité réside dans les propriétés des matériaux alors que la deuxième application traite d'une microstructure 2D où l'origine de la quasi périodicité réside dans la géométrie de la cellule. Nous obtenons dans les 2 cas lorsque le chargement est anti-plan une énergie homogénéisée qui peut se mettre sous la forme :

$$W(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (A_{ij}^{(0)} u_{,i} u_{,j} - f u) dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} (G_{ij}^{(1)} u_{,i} u_{,j} + 2 G_{ijk}^{(2)} u_{,i} u_{,jk} + G_{ijkl}^{(3)} u_{,ij} u_{,kl}) dx$$

Dans le cas d'un milieu stratifié quasi périodique, nous pouvons obtenir l'expression analytique des coefficients effectifs en résolvant explicitement les problèmes de cellule. La comparaison avec le cas périodique traité au chapitre 2 montre que la quasi périodicité introduit dans l'énergie totale des termes supplémentaires qui dépendent du gradient des paramètres quasi périodiques.

Dans le cas d'un milieu microfissuré quasi périodique, les problèmes de cellule deviennent des problèmes bidimensionnels d'élasticité qui nécessitent un traitement numérique. Les résolutions numériques sont réalisées à l'aide du code FEniCs en utilisant un changement de variable de façon à se ramener à une cellule fixe, indépendante de la longueur de la fissure. Les coefficients homogénéisés sont calculés pour différentes largeurs de la cellule et nous obtenons des coefficients qui dépendent non seulement de la longueur de la fissure mais aussi de son gradient. Cette dépendance conduit à une énergie totale qui peut être

utilisée pour construire un modèle d'endommagement à gradient. Cette possibilité sera examinée dans le chapitre suivant.





# Construction d'un modèle d'endommagement à gradient

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Approche variationnelle pour un modèle 1D</b>	<b>124</b>
<b>5.2</b>	<b>Loi d'évolution de l'endommagement</b>	<b>126</b>
<b>5.3</b>	<b>Solution homogène d'endommagement</b>	<b>130</b>
<b>5.4</b>	<b>Solution localisée au chargement fixé</b>	<b>133</b>
5.4.1	Solution à l'extérieur de la zone endommagée	134
5.4.2	Solution à l'intérieure de la zone endommagée	135
<b>5.5</b>	<b>Simulation numérique</b>	<b>140</b>
5.5.1	Paramètre du modèle	140
5.5.2	Formulation en temps discret et algorithme de solution	141
5.5.3	Résultats numériques	143
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>152</b>

---

*Ce chapitre est dédié à l'étude d'un modèle 1D d'endommagement régularisé contenant des termes en gradient de la variable d'endommagement et de la déformation. Nous adoptons une approche variationnelle basée sur le principe de stabilité et sur la condition d'irréversibilité du champ d'endommagement (Nguyen, [32]). Les solutions analytiques et numériques obtenues dans le cas d'un problème de traction servent à évaluer la capacité de tels modèles à rendre compte de la rupture en les comparant en particulier au modèle de Griffith.*

## 5.1 Approche variationnelle pour un modèle 1D

Les concepts introduits dans le premier chapitre et relatifs aux modèles d'endommagement locaux sont utilisés dans ce chapitre pour construire un modèle d'endommagement à gradient. Nous gardons toujours l'hypothèse que l'état d'endommagement peut être décrit par un scalaire. Il suffit donc en fait de changer la forme de l'énergie élastique  $W_0$  en utilisant la forme d'énergie obtenue par homogénéisation d'un milieu quasi-périodique  $W_h$ . Le problème d'évolution reste formellement le même et s'écrit toujours en termes des trois principes d'irréversibilité, de stabilité et de conservation de l'énergie (Pham et Marigo [37]).

Nous considérons une barre de longueur  $L$  de section homogène, et notons  $u(x)$ ,

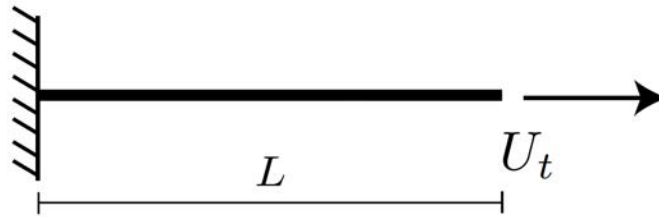


FIGURE 5.1 – La barre en traction.

$u(x) \in [0, 1]$  le déplacement axial et la variable scalaire d'endommagement. On impose à l'extrémité droite de la barre en  $x = L$  un déplacement  $U_t$ , l'autre extrémité en  $x = 0$  est encastree. Les conditions aux limites s'écrivent donc

$$u(x = 0) = 0 \quad ; \quad u(x = L) = U_t \quad (5.1)$$

Les résultats d'homogénéisation d'un milieu microfissuré obtenus dans le chapitre précédent nous suggèrent de prendre comme énergie élastique dans le cas 1D la fonctionnelle suivante

$$W(u, \alpha) = \int_0^L \left[ \left( A(\alpha) + \ell^2 G_1(\alpha) \alpha'^2 \right) u'^2 + \ell^2 \alpha' G_2(\alpha) u' u'' + \ell^2 G_3(\alpha) u''^2 \right] dx \quad (5.2)$$

Avec ce choix, le comportement du matériau est caractérisé par quatre fonctions constitutives et une longueur interne :

$$A(\alpha) \ ; \ G_1(\alpha) \ ; \ G_2(\alpha) \ ; \ G_3(\alpha) \ ; \ \ell$$

Au point de vue microscopique, la longueur interne  $\ell$  peut être interprétée comme la taille de la microstructure périodique et les quatre fonctions constitutives sont théoriquement obtenues par la procédure d'homogénéisation à partir de la microstructure réelle. Ici pour simplifier l'étude qui suit, nous ne précisons pas la microstructure et adoptons les hypothèses suivantes :

- Les fonctions  $A(\alpha)$ ,  $G_1(\alpha)$ ,  $G_2(\alpha)$ ,  $G_3(\alpha)$  sont des fonctions non négatives et différentiables pour tous  $\alpha \in [0, 1]$  ;
- La fonction  $A(\alpha)$  représente le module de Young du matériau à l'état d'endommagement  $\alpha$ , qui est une fonction monotone décroissante de  $\alpha$  :

$$A(0) = A_0, \quad A(1) = 0;$$

- Pour des raisons de simplicité, nous négligeons le terme croisé  $G_2(\alpha)$  dans l'expression de l'énergie. Moyennant un changement de variable nous pouvons fixer une des deux fonctions  $G_1(\alpha)$  ou  $G_3(\alpha)$ . Ici, nous pouvons prendre  $G_1(\alpha) = \text{Constante}$  en faisant le changement de variable (Pham et Marigo [37]) :

$$\alpha \rightarrow \Delta := \int_0^\alpha \sqrt{G_1(\beta)} d\beta;$$

- En ce qui concerne la dernière fonction constitutive  $G_3(\alpha)$ , nous allons analyser le modèle en envisageant les deux situations suivantes : (i)  $G_3(\alpha)$  monotone décroissante ; (ii)  $G_3(\alpha)$  monotone croissante.

Grâce à ces hypothèses et par l'introduction de la densité d'énergie dissipée  $w(\alpha)$  (K. Pham [34]), qui est une fonction et monotone croissante avec  $w(0)=0$ , le modèle d'endommagement à gradient peut être formulé dans le cadre variationnel en considérant le

problème de minimisation d'énergie totale :

$$\mathcal{E}(u, \alpha) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( A(\alpha) + \ell^2 G_1 \alpha'^2 \right) u'^2 + \frac{\ell^2}{2} G_3(\alpha) u''^2 + w(\alpha) \right] dx \quad (5.3)$$

Afin d'éviter toute confusion entre la constante  $G_1$  et la fonction  $G_3(\alpha)$ , nous remplaçons  $G_1$  par  $g_1$  et  $G_3(\alpha)$  par  $G(\alpha)$ . Donc l'énergie totale s'écrit finalement :

$$\mathcal{E}(u, \alpha) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( A(\alpha) + \ell^2 g_1 \alpha'^2 \right) u'^2 + \frac{\ell^2}{2} G(\alpha) u''^2 + w(\alpha) \right] dx \quad (5.4)$$

Il est à noter que ce modèle diffère de ceux qui ont été étudiés par K. Pham [34] du fait du terme en  $u''$  et du fait que le terme en  $\alpha'$  affecte la rigidité du matériau.

## 5.2 Loi d'évolution de l'endommagement

Après avoir défini l'énergie totale  $\mathcal{E}(u, \alpha)$ , le problème d'évolution quasi-statique de l'endommagement peut être obtenu par une formulation variationnelle énergétique. Nous rappelons les ingrédients de base de cette formulation variationnelle.

Les ensembles  $\mathcal{C}_t$  et  $\mathcal{D}$  sont respectivement les espaces de champs de déplacements cinématiquement admissibles à l'instant  $t$  et de champs de l'endommagement admissible :

$$\mathcal{C}_t = \{u \in H^2(0, L) : u(0) = 0, \quad u(L) = U_t\}$$

$$\mathcal{D}_0 = \{\alpha \in H^1(0, L) : \alpha(x) \geq 0\}$$

Donc  $\mathcal{C}_t$  est un espace affine et  $\mathcal{C}_0$  est l'espace linéaire associé :

$$\mathcal{C}_t = \{u \in H^2(0, L) : u(0) = 0, \quad u(L) = 0\}$$

À  $\alpha_t \in \mathcal{D}_0$  nous associons l'espace  $\mathcal{D}(\alpha_t)$  des champs de l'endommagement qui sont accessibles à partir de  $\alpha$  en tenant compte de la condition d'irréversibilité :

$$\mathcal{D}(\alpha_t) = \{\alpha \in H^1(0, L) : \alpha(x) \geq \alpha_t(x)\}$$

En supposant que la barre n'est pas endommagée à l'instant  $t = 0$ , le problème d'évolution de l'endommagement, en supposant *a priori* que cette évolution en temps est régulière, consiste à trouver, pour  $t > 0$ ,  $(u_t, \alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}$  vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t \geq 0 \\ \mathcal{E}'(u_t, \alpha_t)(v - u_t, \beta - \alpha_t) \geq 0, \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}(\alpha_t) \\ \mathcal{E}'(u_t, \alpha_t)(0, \dot{\alpha}_t) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Ici  $\mathcal{E}'(u, \alpha)(v, \beta)$  désigne la dérivée Gâteaux de  $\mathcal{E}$  en  $(u, \alpha)$  dans la direction  $(v, \beta)$  :

$$\mathcal{E}'(u, \alpha)(v, \beta) := \left. \frac{d}{dh} \mathcal{E}(u + hv, \alpha + h\beta) \right|_{h=0}$$

En utilisant l'expression de  $\mathcal{E}(u, \alpha)$  dans (A.1) nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(u, \alpha)(v, \beta) &= \int_0^L \left[ \left( A(\alpha) + \ell^2 g_1 \alpha'^2 \right) u' v' + \ell^2 G(\alpha) u'' v'' \right] dx + \\ &+ \int_0^L \left[ \frac{\beta}{2} \left( A'(\alpha) u'^2 + \ell^2 G'(\alpha) u''^2 + 2w'(\alpha) \right) + \ell^2 g_1 \alpha' \beta' u'^2 \right] dx \end{aligned} \quad (5.6)$$

Supposons que (5.5) admette une solution régulière à la fois en espace et en temps. De plus, supposons que le matériau n'est nulle part complètement endommagé, c'est-à-dire

$$\alpha(x) < 1, \quad \forall x \in [0, L].$$

Prenons  $\beta = \alpha_t$  dans (5.5). En rappelant que  $\mathcal{C}_t$  est un espace affine, nous obtenons la formulation variationnelle de l'équilibre :

$$\int_0^L \left[ \left( A(\alpha_t) + \ell^2 g_1 \alpha_t'^2 \right) u_t' v' + \ell^2 G(\alpha_t) u_t'' v'' \right] dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0 \quad (5.7)$$

En faisant une intégration par parties du dernier terme dans (5.7) nous obtenons l'équation d'équilibre et les conditions aux limites :

$$\sigma'(x) = 0, \quad \forall x \in [0, L] \quad (5.8)$$

$$G(\alpha_t(0)) u_t''(0) = G(\alpha_t(L)) u_t''(L) = 0 \quad (5.9)$$

Ici

$$\sigma(x) = (A(\alpha_t) + \ell^2 g_1 \alpha_t'^2) u_t' - \ell^2 (G(\alpha_t) u_t'')'$$

désigne la contrainte dans la barre. Elle comporte donc un terme supplémentaire due au gradient de déformation.

En utilisant (5.7), la deuxième condition dans (5.5) s'écrit :  $\forall \beta \in \mathcal{D}(\alpha_t)$ ,

$$\int_0^L \left[ \frac{\beta - \alpha_t}{2} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) \right) + \ell^2 g_1 \alpha_t' (\beta - \alpha_t)' u_t'^2 \right] dx \geq 0.$$

Après une intégration par parties du terme  $\ell^2 g_1 \alpha_t' (\beta - \alpha_t)' u_t'^2$ , nous trouvons :  $\forall \beta \in \mathcal{D}(\alpha_t)$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{\beta - \alpha_t}{2} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \right) dx + \\ & + \ell^2 g_1 \left( \alpha_t'(L) u_t'(L)^2 (\beta(L) - \alpha_t(L)) - \alpha_t'(0) u_t'(0)^2 (\beta(0) - \alpha_t(0)) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

À l'aide d'arguments classiques en calcul des variations, nous obtenons d'une part le critère d'endommagement local ainsi que des conditions aux limites naturelles portant sur le gradient de  $\alpha$  aux extrémités :

$$\begin{cases} A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \geq 0, & \forall x \in (0, L) \\ \alpha_t'(0) u_t'(0)^2 \leq 0, & \alpha_t'(L) u_t'(L)^2 \geq 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Nous voyons que le critère d'endommagement contient un terme faisant intervenir la dérivée seconde spatiale de  $\alpha$ . Pour ce qui est des termes de bord, nous remplacerons les inégalités par des égalités afin d'alléger la présentation. Par conséquent le gradient d'endommagement sera nul au bord.

La dernière condition dans (5.5) qui représente le bilan d'énergie total nous donne :

$$\int_0^L \left[ \frac{\dot{\alpha}}{2} \left( A'(\alpha) u'^2 + \ell^2 G'(\alpha) u''^2 + 2w'(\alpha) \right) + \ell^2 g_1 \alpha' \dot{\alpha}' u'^2 \right] dx \quad (5.11)$$

En intégrant par parties le terme contenant le gradient d'endommagement, nous obtenons :

$$\int_0^L \frac{\dot{\alpha}}{2} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \right) dx + \ell^2 g_1 \left( \alpha_t'(L) u_t'(L)^2 \dot{\alpha}(L) - \alpha_t'(0) u_t'(0)^2 \dot{\alpha}(0) \right) = 0$$

La condition d'irréversibilité de l'endommagement  $\dot{\alpha} \geq 0$  et la condition (5.10) conduit à la condition locale suivante dite condition de consistance mais qui peut s'interpréter aussi comme un bilan d'énergie local :

$$\dot{\alpha} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \right) = 0 \quad (5.12)$$

Grâce à (5.10) et (5.12) nous obtenons le problème d'évolution de l'endommagement qui contient une condition d'irréversibilité, un critère d'endommagement, une condition de consistance et les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \geq 0 \\ A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \geq 0 \\ \dot{\alpha} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \right) = 0 \\ \alpha_t'(0) = \alpha_t'(L) = 0 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

En y rajoutant l'équation d'équilibre et les conditions aux limites cinématiques, (5.13) constitue le problème d'évolution de l'endommagement pour un modèle d'endommagement à gradient. Si nous le comparons aux autres modèles à gradient, nous voyons que le critère d'évolution de l'endommagement contient non seulement le terme impliquant les dérivées spatiales secondes de la variable d'endommagement trouvé dans le modèle de Pham et al. [39], mais aussi les dérivées secondes du champ de déplacement (Placidi [40], Peerlings et al. [18]).

Pour résumer, la solution  $(u_t, \alpha_t)$  est obtenu en résolvant le système de l'équation



d'équilibre (5.9) et le problème d'évolution (5.13)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ (A(\alpha_t) + \ell^2 g_1 \alpha_t'^2) u_t' - \ell^2 (G(\alpha_t) u_t'')' \right]' = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(L) = U_t; \quad G(\alpha_t(0)) u_t''(0) = G(\alpha_t(L)) u_t''(L) = 0 \\ A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \geq 0 \\ \dot{\alpha} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) - \ell^2 g_1 (\alpha_t' u_t'^2)' \right) = 0 \\ \dot{\alpha} \geq 0; \quad \alpha_t'(0) = \alpha_t'(L) = 0; \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Il est facile de voir que ce problème admet comme solution particulière celle où l'endommagement et la déformation sont homogènes dans la barre. Nous allons commencer par l'étudier avant d'envisager des solutions où l'endommagement se localise.

### 5.3 Solution homogène d'endommagement

La solution homogène correspond à la solution où le champ de l'endommagement est uniforme en espace :

$$\alpha_t'(x) = 0 \quad \forall x \in [0, L]$$

Dans ce cas, le système des équations (5.14) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\alpha_t) u_t'' - \ell^2 G(\alpha_t) u_t'''' = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(L) = U_t; \quad G(\alpha_t) u_t''(0) = G(\alpha_t) u_t''(L) = 0 \end{array} \right. \quad (5.15a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) \geq 0 \\ \dot{\alpha} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + \ell^2 G'(\alpha_t) u_t''^2 + 2w'(\alpha_t) \right) = 0 \\ \dot{\alpha} \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.15b)$$

Les conditions aux limites sur  $u''$  dans (5.15a) impose que la déformation  $u'$  est aussi constante dans la barre et nous pouvons trouver la solution du problème d'équilibre :

$$u_t = \frac{U_t}{L} x, \quad \varepsilon_t = u_t' = \frac{U_t}{L}, \quad \sigma_t = A(\alpha_t) \frac{U_t}{L} \quad (5.16)$$

En remplaçant ces solutions dans le problème d'évolution d'endommagement (5.15b) nous obtenons :

$$\begin{cases} A'(\alpha_t) \left(\frac{U_t}{L}\right)^2 + 2w'(\alpha_t) \geq 0 \\ \dot{\alpha} \left[ A'(\alpha_t) \left(\frac{U_t}{L}\right)^2 + 2w'(\alpha_t) \right] = 0 \\ \dot{\alpha} \geq 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Étant donné que la barre est saine à l'instant  $t = 0$ , ( $\alpha_0 = 0$ ), la solution du problème de l'évolution est caractérisée par une phase élastique et une phase d'endommagement, comme détaillé ci-dessous.

### 1. Phase élastique

Pour  $t$  croissant de 0, il existe une phase élastique dans laquelle l'endommagement reste nul dans la barre et nous avons une réponse élastique linéaire. Cette phase se termine quand le seuil d'endommagement est atteint dans la barre (égalité dans la première relation de (5.17)). Par homogénéité, il est atteint partout en même temps. Cet instant correspond au moment où le déplacement imposé à l'extrémité de la barre  $U_t$  vaut  $U_c$  :

$$U_c = L \sqrt{-\frac{2w'(0)}{A'(0)}} \quad (5.18)$$

À ce niveau de chargement, la déformation et la contrainte valent :

$$\varepsilon_c = \sqrt{-\frac{2w'(0)}{A'(0)}} \quad , \quad \sigma_c = \sqrt{-\frac{2w'(0) A^2(0)}{A'(0)}}. \quad (5.19)$$

Cette valeur de contrainte  $\sigma_c$  peut être interprétée comme la limite d'élasticité. Si  $w'(0) > 0$ , alors  $U_c > 0$  et le matériau a une phase élastique réelle : tant que  $U_t$  se trouve dans l'intervalle  $[0, U_c]$ , le matériau reste sain avec une rigidité  $A_0 = A(0)$  et la contrainte est donnée par  $\sigma_t = A_0 \frac{U_t}{L}$ . D'autre part, si  $w'(0) = 0$ , alors  $U_c = 0$  et nous ne pouvons pas observer de phase élastique dans le matériau.

### 2. Phase endommagée

Pour  $U_t \geq U_c$  le critère d'endommagement (5.15b) devient une égalité et l'endommagement peut se développer. Par conséquent, (5.15b) donne la relation implicite entre le

déplacement imposé  $U_t$  et la valeur de  $\alpha_t$  associée :

$$\varepsilon_t = \frac{U_t}{L} = \sqrt{-\frac{2w'(\alpha_t)}{A'(\alpha_t)}} \quad (5.20)$$

Si nous considérons le cas d'un matériau adoucissant, c'est-à-dire le cas où  $(-w'/E')$  est une fonction croissante monotone (Pham. [34]), nous obtenons :

$$\alpha_t = \left( -\frac{w'}{E'} \right)^{-1} \left( \frac{U_t^2}{2L^2} \right) \quad (5.21)$$

Pendant cette phase d'endommagement, la contrainte  $\sigma_t$  est donnée par :

$$\sigma_t = \sqrt{-\frac{2w'(\alpha_t) A^2(\alpha_t)}{A'(\alpha_t)}} \quad (5.22)$$

À titre d'illustration, nous considérons les deux cas de fonctions constitutives suivants

$$(LS) \quad : \quad A(\alpha) = A_0 \frac{1 - \alpha}{1 + (k - 1)\alpha} \quad , \quad w(\alpha) = \frac{k}{2} w_1 \alpha, \quad k > 1 \quad (5.23)$$

$$(NS) \quad : \quad A(\alpha) = A_0(1 - \alpha)^2 \quad , \quad w(\alpha) = w_1 \alpha \quad (5.24)$$

La réponse homogène de ces modèles est caractérisée par une phase élastique linéaire suivie d'une phase d'adoucissement linéaire dans le cas (LS) et d'adoucissement non-linéaire dans le cas (NS). En utilisant (5.21) et (5.22) nous obtenons les solutions  $\sigma_t$  et  $\alpha_t$  en fonction de  $\varepsilon_t$ . Dans le cas (LS) on obtient :

$$(\alpha_t, \sigma_t) = \begin{cases} (0; A_0 \varepsilon_t) & \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \\ \left( \frac{1}{k-1} \left( \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_c} - 1 \right); \frac{A_0}{k-1} (k\varepsilon_c - \varepsilon_t) \right) & k\varepsilon_c \geq \varepsilon_t \geq \varepsilon_c \\ (1; 0) & \varepsilon_t \geq k\varepsilon_c \end{cases} \quad (5.25)$$

alors que dans le cas (NS) on obtient :

$$(\alpha_t, \sigma_t) = \begin{cases} (0; A_0 \varepsilon_t) & \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \\ \left( 1 - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_t^2}; \frac{A_0 \varepsilon_c^4}{\varepsilon_t^3} \right) & \varepsilon_t \geq \varepsilon_c \end{cases} \quad (5.26)$$

où  $\varepsilon_c = \sqrt{w_1/A_0}$ ,  $\sigma_c = A_0 \varepsilon_c$ . Ces résultats sont présentés dans la figure 5.2.

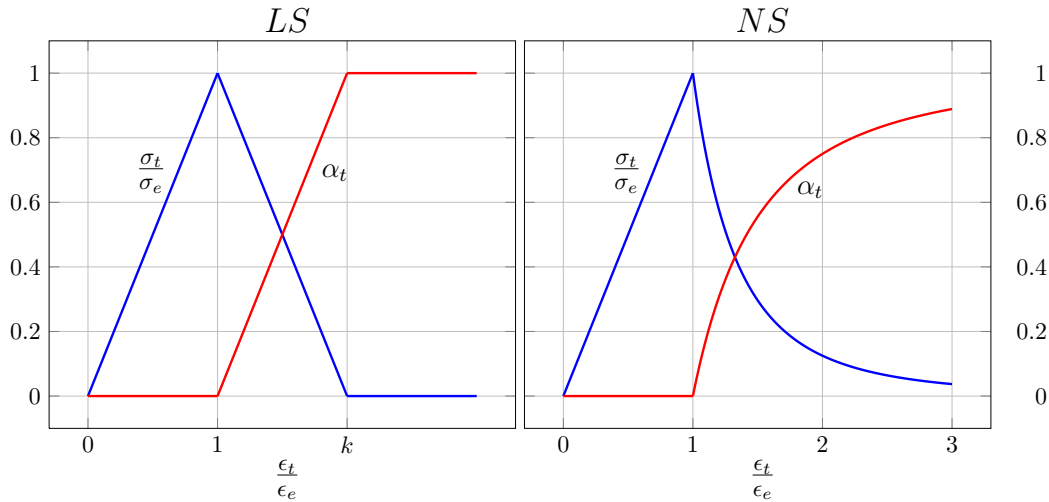


FIGURE 5.2 – La réponse homogène dans cas LS et NS

### 5.4 Solution localisée au chargement fixé

Nous cherchons maintenant une solution non homogène après la phase élastique ( $\sigma < \sigma_c = A_0 \varepsilon_c$ ) du problème de traction de la barre. Pour cela on suppose que l'endommagement est une fonction continue (au moins) de l'espace et se localise dans un intervalle de largeur  $D$  à déterminer :

$$\mathcal{I}_D = [x_0 - D/2, x_0 + D/2] \subset [0, L],$$

$$\alpha \in \mathcal{C}^0(0, L), \quad \alpha(x) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \setminus \mathcal{I}_D, \quad \alpha(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}_D. \quad (5.27)$$

Afin de résoudre analytiquement le problème d'évolution (5.14), nous considérons le cas

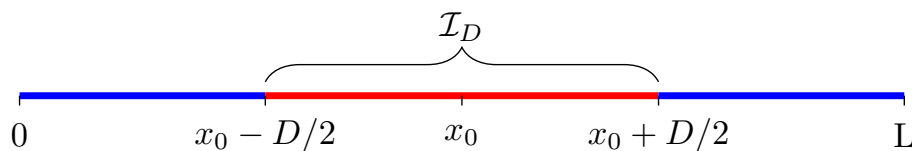


FIGURE 5.3 – État endommagé de la barre.

le plus simple où nous négligeons la contribution du gradient de l'endommagement dans l'énergie totale, la rigidité du gradient de déformation est une constante et  $w(\alpha)$  est une

fonction linéaire de  $\alpha$ . Autrement dit, on pose

$$g_1 = 0 \quad G(\alpha) = \frac{\eta^2}{\ell^2} A_0.$$

Dans ce cas, l'énergie totale s'écrit :

$$\mathcal{E}(u, \alpha) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} A(\alpha) u'^2 + \frac{\eta^2}{2} A_0 u''^2 + w(\alpha) \right] dx \quad (5.28)$$

et le problème (5.14) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ A(\alpha_t) u'_t - \eta^2 (A_0 u''_t)' \right]' = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(L) = U_t; \quad u''_t(0) = u''_t(L) = 0 \\ A'(\alpha_t) u_t'^2 + 2w'(\alpha_t) \geq 0 \\ \dot{\alpha} \left( A'(\alpha_t) u_t'^2 + 2w'(\alpha_t) \right) = 0 \\ \dot{\alpha} \geq 0; \quad \alpha'_t(0) = \alpha'_t(L) = 0; \end{array} \right. \quad (5.29)$$

À chargement fixé, l'état endommagé de la barre est caractérisé par 2 zones : une zone endommagée dans laquelle le critère d'endommagement devient une égalité,

$$A'(\alpha)u'^2 + 2w'(\alpha) = 0$$

et où la réponse  $(u, \alpha)$  est obtenue par l'équation d'équilibre et le critère d'endommagement. L'autre zone est une zone non endommagée où l'endommagement reste à 0, le déplacement  $u$  peut être calculé directement par l'équation d'équilibre. Nous examinons une telle solution pour les fonctions constitutives  $A(\alpha)$ ,  $w(\alpha)$  du cas (LS) dans la section suivante

$$(LS) \quad : \quad A(\alpha) = A_0 \frac{1 - \alpha}{1 + (k - 1)\alpha} \quad , \quad w(\alpha) = \frac{k}{2} w_1 \alpha, \quad k > 1$$

### 5.4.1 Solution à l'extérieur de la zone endommagée

Dans la zone non endommagée, l'endommagement reste nul ( $\alpha = 0$ ), l'équation d'équilibre devient :

$$\left( A_0 \varepsilon - \eta^2 A_0 \varepsilon'' \right)' = 0 \quad (5.30)$$

cette équation impose que la contrainte  $\sigma = A_0 \varepsilon - \eta^2 A_0 \varepsilon''$  est constante dans toute la barre, donc nous obtenons une équation différentielle de second ordre pour la déformation, où  $\sigma$  est une constante inconnue :

$$\varepsilon - \eta^2 \varepsilon'' = \frac{\sigma}{A_0} \quad (5.31)$$

Pour chaque zone  $[0, x_0 - D/2]$  et  $[x_0 + D/2, L]$ , nous avons besoin de deux conditions aux limites pour déterminer  $\varepsilon$ . La première condition vient de (5.29) :  $\varepsilon'(0) = \varepsilon'(L) = 0$  et la deuxième est obtenue par la condition de continuité de déformation en  $x = x_0 \pm D$ . Comme on suppose que l'endommagement est continu et comme la déformation est nécessairement continue, le critère d'endommagement est également une fonction continue de l'espace. Donc, au point  $x = x_0 \pm D/2$  le critère d'endommagement est une égalité avec  $\alpha = 0$  et donc

$$\varepsilon(x_0 - D/2) = \varepsilon(x_0 + D/2) = \varepsilon_c.$$

Avec ces conditions aux limites nous pouvons trouver  $\varepsilon$  en fonction de  $\sigma$  :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{A_0} + \left( \varepsilon_c - \frac{\sigma}{A_0} \right) \frac{\cosh\left(\frac{x}{\eta}\right)}{\cosh\left(\frac{x_0 - D/2}{\eta}\right)} \quad \forall x \in [0, x_0 - D/2] \quad (5.32)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{A_0} + \left( \varepsilon_c - \frac{\sigma}{A_0} \right) \frac{\cosh\left(\frac{L-x}{\eta}\right)}{\cosh\left(\frac{L-x_0 - D/2}{\eta}\right)} \quad \forall x \in [x_0 + D/2, L] \quad (5.33)$$

### 5.4.2 Solution à l'intérieure de la zone endommagée

Dans la zone endommagée on a  $\varepsilon > \varepsilon_c$  et la solution de  $(\varepsilon, \alpha)$  est obtenue en résolvant l'équation d'équilibre et le critère d'endommagement avec les conditions de continuité aux points  $x = x_0 \pm D/2$ . Ces équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \alpha}{1 + (k - 1)\alpha} \varepsilon - \eta^2 \varepsilon'' = \frac{\sigma}{A_0} \\ \frac{-k}{[1 + (k - 1)\alpha]^2} \varepsilon^2 + k \frac{w_1}{A_0} = 0 \\ \varepsilon(x_0 - D/2) = \varepsilon(x_0 + D/2) = \varepsilon_c \\ \alpha(x_0 - D/2) = \alpha(x_0 + D/2) = 0 \end{array} \right. \quad (5.34)$$

comme  $\varepsilon_c = \sqrt{w_1/A_0}$ , nous pouvons obtenir la relation entre  $\varepsilon$  et  $\alpha$  :

$$\varepsilon = [1 + (k - 1)\alpha] \varepsilon_c := \varepsilon_D(\alpha) \quad ; \quad \alpha = \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{(k - 1)\varepsilon_c} := \alpha_D(\varepsilon) \quad (5.35)$$

**Remarque.** Les équations dans (5.35) sont obtenues à partir du critère d'évolution de l'endommagement, qui n'est valable que tant que  $\alpha < 1$ . La valeur limite  $\varepsilon_L$  de la déformation pour laquelle  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$\varepsilon_L = k\varepsilon_c \quad (5.36)$$

Mais le fait que  $\varepsilon_L$  soit finie dépend du choix des fonctions constitutives  $A(\alpha)$  et  $w(\alpha)$ . Par exemple, si l'on prenait  $A(\alpha) = A_0(1 - \alpha)^2$  et  $w(\alpha) = w_0\alpha$ , la condition  $\alpha = 1$  ne serait pas atteinte pour une valeur finie de  $\varepsilon$ .

À partir de l'équation d'équilibre et du critère d'endommagement, nous pouvons calculer :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{A(\alpha)}{2} \varepsilon^2 - \frac{A_0}{2} \eta^2 \varepsilon'^2 + w(\alpha) - \sigma \varepsilon \right) = (A(\alpha)\varepsilon - \eta^2 A_0 \varepsilon'' - \sigma) \varepsilon' + \frac{\alpha'}{2} (A'(\alpha) \varepsilon^2 + k w_1)$$

À partir de l'équation d'équilibre nous avons :

$$A(\alpha)\varepsilon - \eta^2 A_0 \varepsilon'' - \sigma = 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (5.37)$$

À l'extérieur de zone endommagée  $\alpha' = 0$  tandis que à l'intérieur nous avons le critère d'endommagement :  $A'(\alpha) \varepsilon^2 + k w_1 = 0$ . Donc nous trouvons :

$$\frac{\alpha'}{2} (A'(\alpha) \varepsilon^2 + k w_1) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (5.38)$$

En utilisant (5.37) et (5.38) nous obtenons l'intégrale première :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{A(\alpha)}{2} \varepsilon^2 - \frac{A_0}{2} \eta^2 \varepsilon'^2 + w(\alpha) - \sigma \varepsilon \right) &= 0 \quad \forall x \in [0, L] \\ \Rightarrow \frac{A(\alpha)}{2} \varepsilon^2 - \frac{A_0}{2} \eta^2 \varepsilon'^2 + w(\alpha) - \sigma \varepsilon &= C \end{aligned}$$

La constante C peut être évaluée à l'extrémité  $x = L$  où  $\alpha \rightarrow 0$  et  $\varepsilon' \rightarrow 0$  :

$$C = \frac{A_0}{2} \varepsilon(L)^2 - \sigma \varepsilon(L)$$

Pour simplifier la constante  $C$ , nous considérons le cas d'une barre suffisamment longue et où la zone d'endommagement est localisée au centre de la barre ( $x_0 = L/2$ ). Dans ce cas comme  $L - D \gg \eta$ , nous tirons de (5.33) que  $\varepsilon(L) \approx \frac{\sigma}{A_0}$ .

Donc nous pouvons réécrire l'intégrale première sous la forme :

$$(\eta\varepsilon')^2 = \frac{2}{A_0} \left( \frac{A(\alpha)}{2} \varepsilon^2 + w(\alpha) - \sigma\varepsilon + \frac{\sigma^2}{2A_0} \right)$$

En remplaçant  $\alpha$  dans l'intégration première par  $\alpha = \alpha_D(\varepsilon)$ , nous obtenons une équation différentielle du premier ordre pour  $\varepsilon$

$$(\eta\varepsilon')^2 = \frac{1}{1-k} \left( \varepsilon^2 - 2k\varepsilon\varepsilon_c + k\varepsilon_c^2 \right) - \frac{2\sigma\varepsilon}{A_0} + \frac{\sigma^2}{A_0^2} := F_\sigma(\varepsilon) \quad (5.39)$$

La résolution de cette équation nécessite une analyse au préalable des variations de la fonction  $F_\sigma$  avec la déformation  $\varepsilon$  :

$$F_\sigma''(\varepsilon) = \frac{2}{1-k} < 0 \quad ; \quad F_\sigma'(\varepsilon_c) = \frac{2(A_0\varepsilon_c - \sigma)}{A_0} > 0 \quad ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} F_\sigma'(\varepsilon) = -\infty \quad (5.40)$$

$$F_\sigma(\varepsilon_c) = \left( \varepsilon_c - \frac{\sigma}{A_0} \right)^2 > 0 \quad ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} F_\sigma(\varepsilon) = -\infty \quad (5.41)$$

- (5.40) montre qu'il existe une unique valeur de la déformation  $\bar{\varepsilon}_\sigma > \varepsilon_c$  telle que

$$F_\sigma'(\bar{\varepsilon}_\sigma) = 0.$$

De plus,

$$F_\sigma'(\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_c, \bar{\varepsilon}_\sigma] \quad \text{et} \quad F_\sigma'(\varepsilon) < 0 \quad \forall \varepsilon > \bar{\varepsilon}_\sigma.$$

- À partir de (5.41) et de l'existence de  $\bar{\varepsilon}_\sigma$ , nous en déduisons que  $F_\sigma$  est d'abord croissante depuis  $F_\sigma(\varepsilon_c) > 0$  puis décroissante jusqu'à  $-\infty$ . De ce fait, il existe une unique valeur  $\varepsilon$  que nous appelons  $\varepsilon_\sigma^*$  en laquelle  $F_\sigma$  s'annule :

$$F_\sigma(\varepsilon_\sigma^*) = 0 \quad ; \quad \varepsilon_\sigma^* > \varepsilon_c$$

Dans le cas (LS), nous pouvons calculer directement  $\varepsilon_\sigma^*$  :

$$\varepsilon_\sigma^* = \frac{\sqrt{k(k-1)}(A_0\varepsilon_c - \sigma) - (k-1)\sigma + kA_0\varepsilon_c}{A_0} \quad (5.42)$$



La contrainte limite  $\sigma_L$  telle que  $\varepsilon_\sigma^* = \varepsilon_L$  et pour laquelle donc  $\alpha = 1$  est calculée par :

$$\begin{aligned} & \sqrt{k(k-1)}(A_0\varepsilon_c - \sigma_L) - (k-1)\sigma_L + kA_0\varepsilon_c = A_0\varepsilon_L \\ \Rightarrow & \sigma_L = A_0\varepsilon_c(k - \sqrt{k(k-1)}) \end{aligned}$$

C'est une valeur strictement supérieure à zéro pour  $k > 1$ . Ça signifie que même si le module d'Young s'annule en certains points, la contrainte dans la barre ne s'annule pas. À partir de ces analyses, nous pouvons distinguer qualitativement deux situations différentes de la réponse en fonction de la contrainte  $\sigma$  :

- Pour  $\sigma_c > \sigma > \sigma_L$  : la déformation est symétrique par rapport au centre de la barre ( $x_0 = L/2$ ), elle croît depuis la valeur  $\varepsilon_c$  en  $x_0 - D/2$  jusqu'à atteindre la valeur  $\varepsilon_\sigma^*$  au centre puis décroît jusqu'à la valeur  $\varepsilon_c$  en  $x_0 + D/2$ .

La largeur de la zone endommagée  $D$  dépend de la contrainte et elle peut être calculée par la formule :

$$D = 2\eta \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_\sigma^*} \frac{1}{\sqrt{F_\sigma(\varepsilon)}} d\varepsilon \quad (5.43)$$

Dans le cas (LS) nous pouvons calculer explicitement  $D$  :

$$D = 2\eta\sqrt{k-1} \csc^{-1} \left( \sqrt{2k - 2\sqrt{k(k-1)}} \right) \quad (5.44)$$

La solution de la déformation est obtenue en résolvant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \eta\varepsilon'(x) = \sqrt{F_\sigma(\varepsilon(x))}; & \forall x \in [L/2 - D/2, L/2] \\ \varepsilon(L/2 - D/2) = \varepsilon_c & ; \quad \varepsilon(L/2) = \varepsilon_\sigma^* \end{cases} \quad (5.45)$$

La solution de l'endommagement est obtenue directement par la relation :

$$\alpha = \alpha_D(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{(k-1)\varepsilon_c} \quad (5.46)$$

- Pour  $\sigma_L > \sigma$  : la déformation  $\varepsilon_\sigma^*$  introduite dans (5.42) dépasse la valeur limite  $\varepsilon_L$ . Il existe donc une zone, centrée en  $x_0 = L/2$  et de largeur de  $D^*$ , dans laquelle

$\alpha$  atteint la valeur maximale  $\alpha = 1$ . Puis  $\alpha$  décroît de 1 à 0 dans les zones où  $D^*/2 < |x - L/2| < D/2$  ( $\alpha(L/2 \pm D^*/2) = 1$ ;  $\alpha(L/2 \pm D/2) = 0$ ).

Dans cette situation, la fonction  $F_\sigma(\varepsilon)$  est définie par :

$$\begin{cases} F_\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{1-k} \left( \varepsilon^2 - 2k\varepsilon\varepsilon_c + k\varepsilon_c^2 \right) - \frac{2\sigma\varepsilon}{A_0} + \frac{\sigma^2}{A_0^2} & \forall \varepsilon < \varepsilon_L \\ F_\sigma(\varepsilon) = \frac{kA_0\varepsilon_c^2}{2} - \sigma\varepsilon + \frac{\sigma^2}{2A_0} & \forall \varepsilon > \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.47)$$

La condition  $\sigma_L > \sigma$  assure l'existence de la déformation  $\varepsilon_\sigma^{**}$  qui annule  $F_\sigma$ . Cette déformation est donnée par :

$$\varepsilon_\sigma^{**} = \frac{\sigma}{2A_0} + \frac{kA_0\varepsilon_c^2}{2\sigma} \quad (5.48)$$

La largeur de la zone endommagée est calculée par :

$$D = 2\eta \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_\sigma^{**}} \frac{1}{\sqrt{F_\sigma(\varepsilon)}} d\varepsilon \quad (5.49)$$

et la largeur  $D^*$  de la zone où  $\alpha = 1$  par

$$D^* = 2\eta \int_{\varepsilon_L}^{\varepsilon_\sigma^{**}} \frac{1}{\sqrt{F_\sigma(\varepsilon)}} d\varepsilon \quad (5.50)$$

**Remarque.** Dans le cas où  $\varepsilon_L = \infty$ , seule la première situation existe et l'endommagement ne peut pas atteindre la valeur 1. Nous n'observons qu'un élargissement de la zone endommagée avec des valeurs de  $\alpha$  qui s'approchent de 1 sans jamais l'atteindre.

Après avoir distingué les situations, nous avons résolu équation (5.41) afin de trouver le profil de localisation de l'endommagement et de la déformation. La résolution numérique par Mathematica a été utilisée pour traiter ce problème et nous obtenons les profils de  $\alpha$  et  $\varepsilon$  autour du centre de la barre ( $x_0 = L/2$ ). Ces profils sont représentés sur la figure (5.4) pour  $k = 4$  et pour une longueur interne  $\ell = L/20$ .

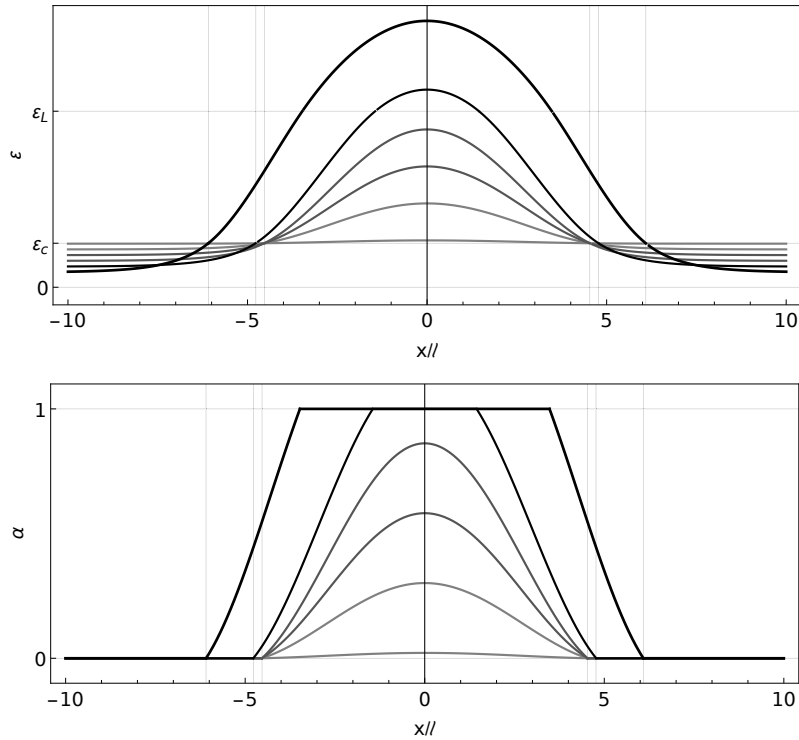


FIGURE 5.4 – Profil de localisation de  $\alpha$  et  $\varepsilon$  au voisinage du centre de la barre

## 5.5 Simulation numérique

### 5.5.1 Paramètre du modèle

Nous cherchons une solution non homogène du problème de traction de la barre avec les fonctions constitutives (LS). Nous savons que la réponse doit commencer par une phase élastique linéaire, où le matériau reste sain, avant d'être suivie par une phase endommagée où l'endommagement localise dans un intervalle  $\mathcal{L}_D$  non nul entre  $[0, L]$ . Afin d'assurer que la localisation apparaisse immédiatement après la phase élastique, nous ajoutons les conditions aux limites de nullité de  $\alpha$  aux bords,

$$\alpha_t(0) = \alpha_t(L) = 0,$$

qui vont interdire la solution homogène. Concernant la fonction  $G(\alpha)$ , nous envisageons les 2 cas présentés au début du chapitre : (i)  $G(\alpha)$  monotone croissante à partir de  $G(0) > 0$ , (ii)  $G(\alpha)$  monotone décroissante jusqu'à  $G(1) > 0$ . Les deux modèles correspondants sont

notés (LS1) et (LS2) :

$$(LS1) \quad : \quad A(\alpha) = A_0 \frac{1 - \alpha}{1 + (k - 1)\alpha} \quad , \quad w(\alpha) = \frac{k}{2} w_1 \alpha, \quad G(\alpha) = G_0(1 + \alpha) \quad (5.51)$$

$$(LS2) \quad : \quad A(\alpha) = A_0 \frac{1 - \alpha}{1 + (k - 1)\alpha} \quad , \quad w(\alpha) = \frac{k}{2} w_1 \alpha, \quad G(\alpha) = G_0(2 - \alpha) \quad (5.52)$$

La barre est supposée d'avoir pour longueur  $L = 1$  et les autres valeurs des constantes sont données dans le tableau

Constante	$A_0$	$g_1$	$G_0$	$w_1$	$\ell$	k
Valeur	1	1	1	1	0.03; 0.04	4

TABLE 5.1 – Valeurs des constantes constitutives

Pour le problème avec localisation de l'endommagement, nous adoptons la méthode numérique pour trouver les solutions de  $u$  et  $\alpha$ . Dans le but de vérifier la capacité de trouver une solution numérique qui ne dépende pas de la taille du maillage, différents maillages ont été comparés.

### 5.5.2 Formulation en temps discret et algorithme de solution

Dans la section 5.2 nous avons formulé le problème de l'évolution de l'endommagement avec une variable de temps continue. Pour la résolution numérique, l'intervalle de temps  $[0, T]$  est discrétisé en un nombre fini  $N + 1$  d'instantes notés  $t_i$  avec un pas temporel  $\Delta_t$  uniforme. Pour le problème en temps discret, nous posons  $U_i = t_i L$  comme déplacement imposé à l'extrémité droite de la barre à l'instant  $t_i$ . Si nous connaissons le champ d'endommagement au pas de temps  $t_{i-1}$ , soit  $\alpha_{i-1}$ , l'état d'endommagement au pas de temps  $t_i$  est obtenu par la solution du problème de minimisation suivante :

$$\min\{\mathcal{E}(u, \alpha) : u \in \mathcal{C}(t_i) \quad , \quad \alpha \in \mathcal{D}(t_i)\} \quad (5.53)$$

Ici  $\mathcal{C}(t_i)$  désigne l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles au pas de temps  $t_i$  :

$$\mathcal{C}(t_i) = \{u \in H^2(0, L) : u(0) = 0, \quad u(L) = U_i\}$$

et  $\mathcal{D}(t_i)$  désigne l'ensemble des champs d'endommagement admissibles :

$$\mathcal{D}(t_i) = \{\alpha \in H^1(0, L) : \alpha(x) \geq \alpha_{i-1}(x) \forall x \in [0, L]\}.$$

La contrainte unilatérale  $\alpha(x) \geq \alpha_{i-1}(x) \forall x \in [0, L]$  est la version en temps discret de la condition d'irréversibilité.

Dans les deux cas (LS1) et (LS2), la fonctionnelle à minimiser à chaque pas de temps  $\mathcal{E}(u, \alpha)$  n'est pas convexe par rapport au couple  $(u, \alpha)$ . Cependant, elle est convexe dans chacun des deux variables  $u$  et  $\alpha$  séparément, l'autre étant fixe. Par conséquent, nous utilisons la méthode de minimisation alternée pour résoudre le problème (5.53) : à l'instant  $t_i$  donné, nous minimisons  $\mathcal{E}(u, \alpha)$  par rapport au déplacement à endommagement fixé, puis par rapport à l'endommagement à déplacement fixé jusqu'à convergence. L'algorithme se lit comme suit :

- *Initialisation* : Poser  $u^{(0)}, \alpha^{(0)} = (u_{i-1}, \alpha_{i-1})$
- *Itération  $p$*  :

1. *Calculer* :

$$u^{(p)} = \arg \min_{u \in \mathcal{C}(t_i)} \mathcal{E}(u, \alpha^{(p-1)}) \quad (5.54)$$

2. *Calculer* :

$$\alpha^{(p)} = \arg \min_{\alpha \in \mathcal{D}(t_i)} \mathcal{E}(u^{(p)}, \alpha) \quad (5.55)$$

- *Fin* : Répéter jusqu'à  $\|\alpha^{(p)} - \alpha^{(p-1)}\|_\infty < \delta_1$ . Poser  $(u_i, \alpha_i) = (u^{(p)}, \alpha^{(p)})$

Le paramètre  $\delta_1$  est la tolérance pour le critère de convergence. Le problème est discrétisé en espace par des éléments finis classiques triangles, et la méthode est implémentée dans FEniCS. À cause de la présence de dérivées d'ordre supérieur dans le problème d'élasticité (5.54), la résolution de ce problème se fait en utilisant une formulation mixte afin d'éviter d'utiliser les éléments finis plus de haut degré tandis que le problème de minimisation de l'endommagement (5.55) est réalisé directement par le solveur non linéaire de FeniCS.

**Remarque.** La formulation mixte du problème d'élasticité s'obtient comme il est indiqué ci-dessous.

À  $\alpha$  fixé, le problème de minimisation en  $u$  (5.54), en tenant compte des conditions aux limites dans (5.9), nous donne l'équation d'équilibre :

$$\left[ (A(\alpha) + \ell^2 g_1 \alpha'^2) u' - \ell^2 (G(\alpha) u'')' \right]' = 0 \quad (5.56)$$

avec les conditions aux limites  $u(0) = 0; u(L) = U_i$ ,  $u''(0) = u''(L) = 0$  (en supposant que  $G(\alpha)$  ne s'annule pas). Par l'introduction une nouvelle variable  $\tau$  définie par  $\tau = u''$ , l'équation d'équilibre devient le système d'équations :

$$\begin{cases} \left[ (A(\alpha) + \ell^2 g_1 \alpha'^2) u' - \ell^2 (G(\alpha) \tau)' \right]' = 0 \\ \tau - u'' = 0 \\ u(0) = 0; u(L) = U_i; \quad \tau(0) = \tau(L) = 0 \end{cases} \quad (5.57)$$

En multipliant les 2 équations de (5.57) par les fonctions test  $\hat{u} \in H_0^1(0, L)$ ,  $\hat{\tau} \in L_0^2(0, L)$ , respectivement, et après intégration par parties, la formulation faible du problème d'élasticité revient à trouver  $u \in H^1(0, L)$  et  $\tau \in L^2(0, L)$  qui, à  $\alpha$  fixé, satisfont :

$$\begin{cases} \int_0^L (A(\alpha) + \ell^2 g_1 \alpha'^2) u' \hat{u}' dx - \int_0^L \ell^2 (G(\alpha) \tau)' \hat{u}' dx = 0 \quad \forall \hat{u} \in H_0^1(0, L) \\ \int_0^L \tau \hat{\tau} dx - \int_0^L u' \hat{\tau}' dx = 0 \quad \forall \hat{\tau} \in L_0^2(0, L) \\ u(0) = 0; u(L) = U_i; \quad \tau(0) = \tau(L) = 0 \end{cases} \quad (5.58)$$

La résolution de ce système d'équations peut être implémentée directement en FEniCS en utilisant le solveur linéaire.

### 5.5.3 Résultats numériques

Nous résolvons numériquement le problème d'évolution en temps discret avec comme pas de temps  $\Delta_t = 0.01$ . Pour représenter l'évolution de l'endommagement et de la déformation, nous présentons ces champs à 6 niveaux de chargement sur chacune des

figures de la (table 5.2), à partir de la limite élastique ( $U_t = 1$ ) jusqu'à la fin de la simulation ( $U_t = 2.5$ ). Dans le but de vérifier la capacité de l'implémentation numérique pour capter et décrire la localisation, des maillages uniformes constitués de 20, 50 et 100 éléments sont utilisés pour vérifier la non dépendance à la taille de maille.

<b>Chargement</b> $U_t$	1	1.05	1.25	1.5	1.7	2.5
<b>Couleur</b>	Bleu	Cyan	Vert	Orange	Violet	Red

TABLE 5.2 – Chargement considéré pour les figures

La simulation numérique se passe alors comme suit :

- De  $t = 0.$  jusqu'à  $t = 1.$ , la réponse est élastique et l'endommagement est nul, la déformation reste uniforme jusqu'à la fin de la phase élastique.

En définissant la déformation équivalente par  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(x) dx$ , nous avons la réponse globale *contrainte - déformation* dans les figures (5.13) et (5.14). Durant cette phase la réponse  $\sigma - \varepsilon$  est représentée par un segment de droite, ce qui correspond à la réponse élastique.

- De  $t = 1.$  jusqu'à  $t = t_L$ ,  $t_L$  correspondant au pas de temps limite auquel l'endommagement du point au milieu de la barre atteint la valeur 1. Durant cette deuxième phase l'endommagement localise dans une bande symétrique par rapport au centre de la barre, avec une valeur maximale qui est inférieure à 1.

Dans le cas (LS2) où la fonction  $G(\alpha)$  est décroissante, la largeur de la zone endommagée est fixe, de l'instant 1 jusqu'à l'instant  $t_L$ . Par contre, dans le cas (LS1) où la fonction  $G(\alpha)$  est croissante, nous observons une évolution de la largeur du profil d'endommagement avec  $t$ .

Dans la réponse globale, cette phase correspond à la partie de la courbe où  $\bar{\varepsilon}$  varie entre 1 et  $\varepsilon_L$  sur les figures (5.13) et (5.14). La contrainte diminue de 1 jusqu'à la valeur limite  $\sigma_L$  qui correspond à la valeur de la contrainte au moment  $t_L$  où l'endommagement au milieu de la barre atteint 1. Contrairement aux modèles d'endommagement à champ de phase, où les fissures sont identifiées avec les régions où

le module d'Young s'annule, nous trouvons, à partir des résultats numériques, que la contrainte  $\sigma_L$  est supérieure à 0 et que de plus elle ne dépend pas de la longueur interne  $\ell$ . Donc la barre n'est pas cassée quand la rigidité d'un point s'annule et une autre phase suit.

- À partir de  $t = t_L$ , nous pouvons diviser la partie endommagée de la barre en 3 zones : une zone centrée en  $x = L/2$  dans laquelle l'endommagement atteint la valeur maximale ( $\alpha = 1$ ) et deux zones symétriques par rapport au centre de la barre où  $\alpha$  varie de 0 à 1.

Nous pouvons voir sur les figures (5.13) et (5.14) qu'à partir de  $\varepsilon_L$  et l'apparition d'une zone dans laquelle le matériau est complètement endommagé, la contrainte dans la barre continue de décroître progressivement avec  $\varepsilon$ . Si nous continuons la simulation, nous observons que la contrainte n'atteint jamais à 0 et que la zone endommagée se propage dans toute la barre.

Les résultats numériques sont présentés dans les figures de (5.5) à (5.12). Les figures (5.5), (5.7), (5.9), (5.11) représentent l'évolution de l'endommagement et les figures (5.6), (5.8), (5.10), (5.12) représentent l'évolution de la déformation. En observant la zone endommagée et la courbe contrainte-déformation avec 2 valeurs de longueur interne  $\ell = 0.03$  et  $\ell = 0.04$ , nous trouvons que la longueur interne peut contrôler la largeur de la zone endommagée et qu'elle a une influence importante sur la réponse globale de la barre.



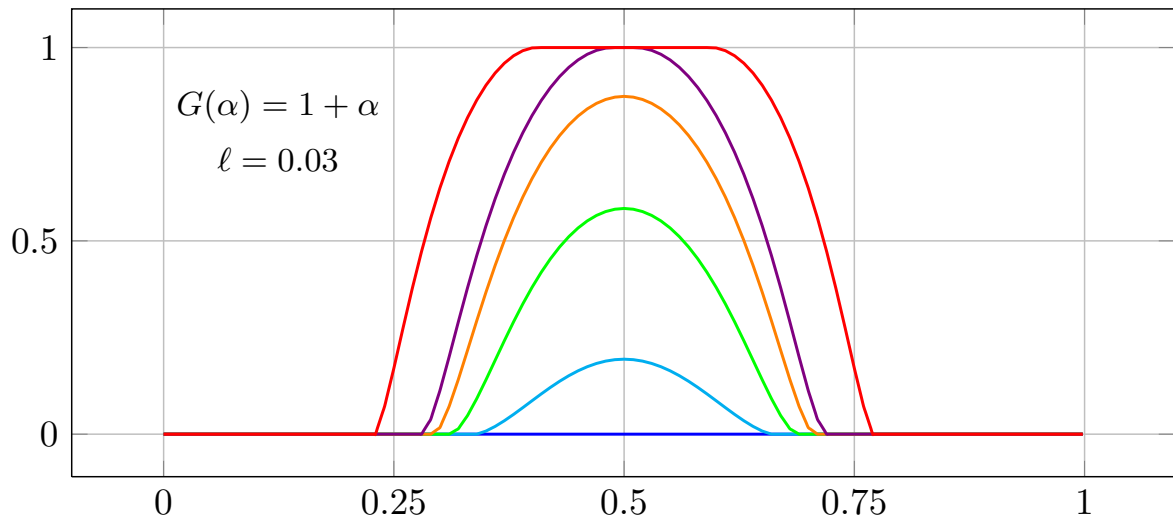


FIGURE 5.5 – Évolution du profil de localisation de l'endommagement dans le cas (LS1) avec  $\ell = 0.03$ .

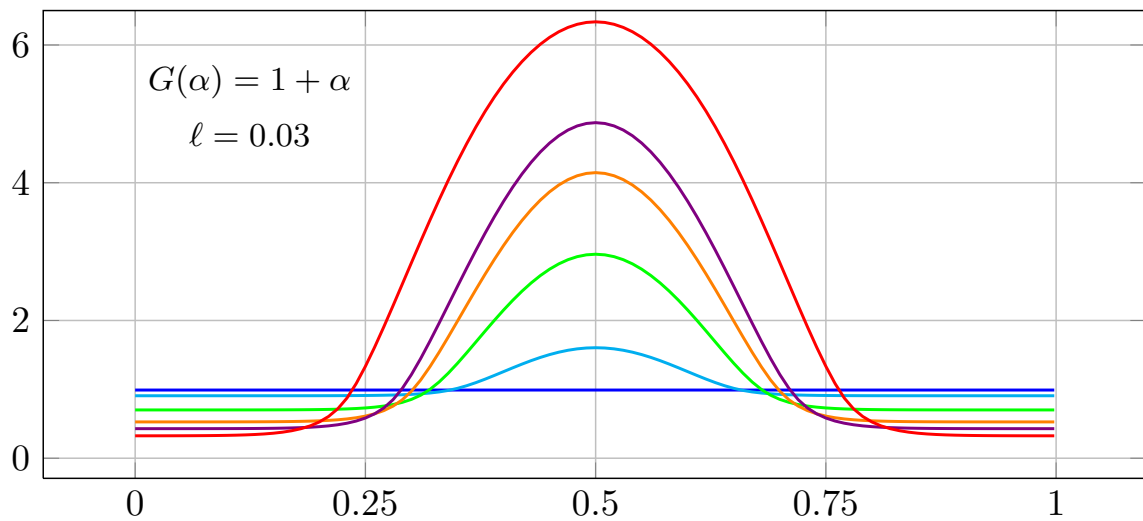


FIGURE 5.6 – Évolution du profil de localisation de la déformation dans le cas (LS1) avec  $\ell = 0.03$ .

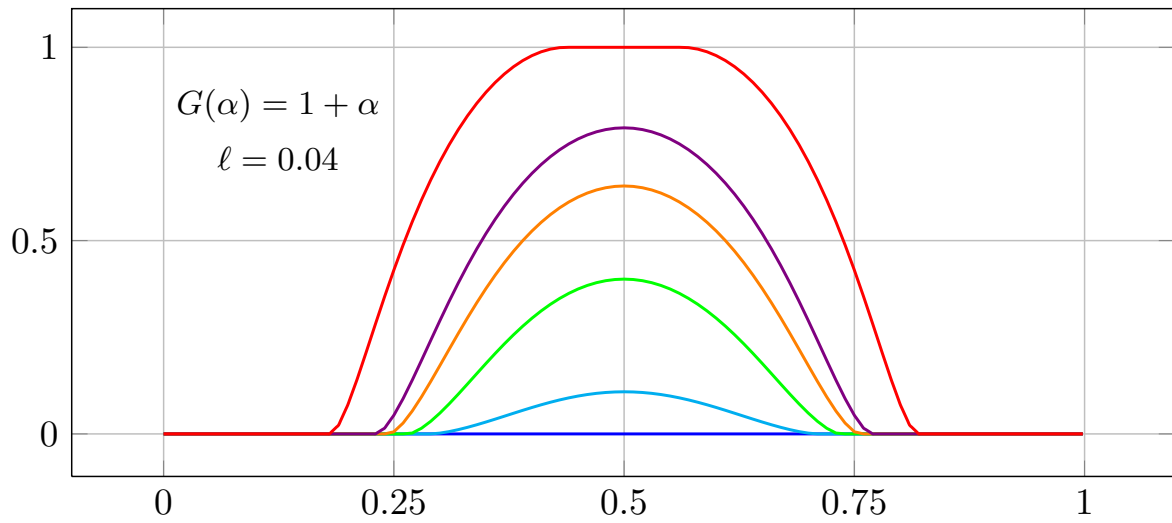


FIGURE 5.7 – Évolution du profil de localisation de l'endommagement dans le cas (LS1) avec  $\ell = 0.04$ .

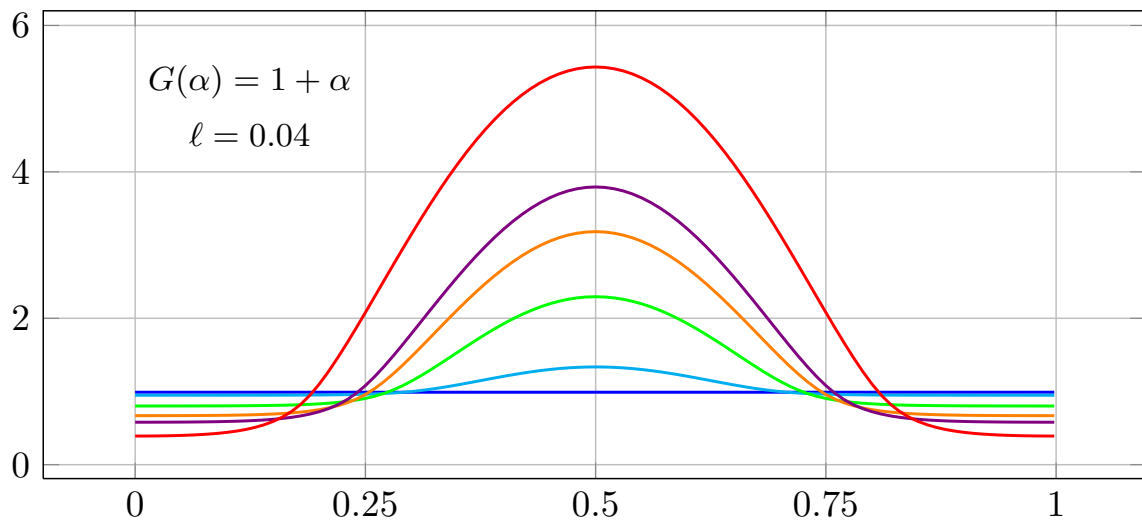


FIGURE 5.8 – Évolution du profil de localisation de la déformation dans le cas (LS1) avec  $\ell = 0.04$ .

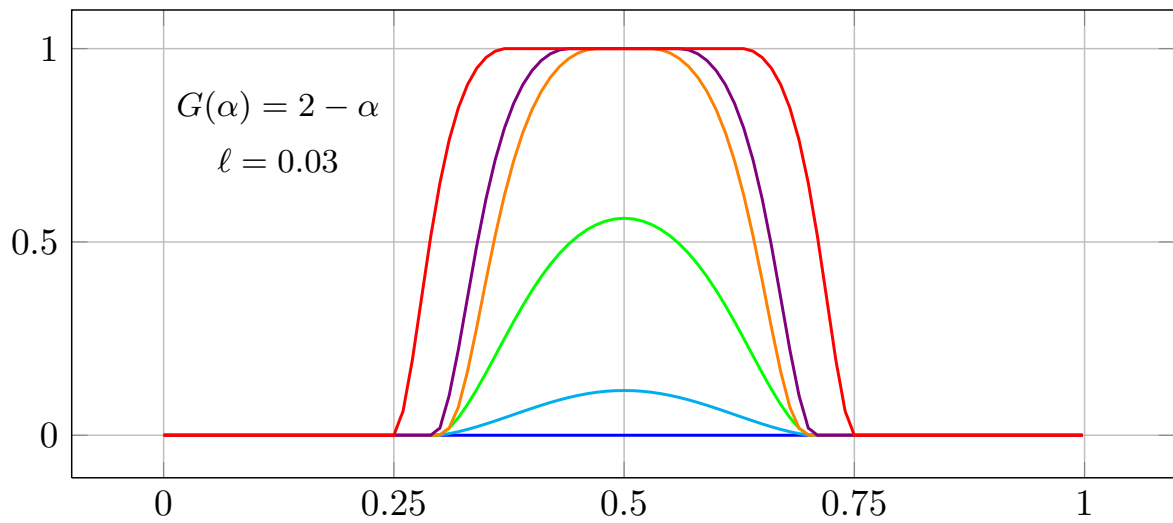


FIGURE 5.9 – Évolution du profil de localisation de l'endommagement dans le cas (LS2) avec  $\ell = 0.03$ .

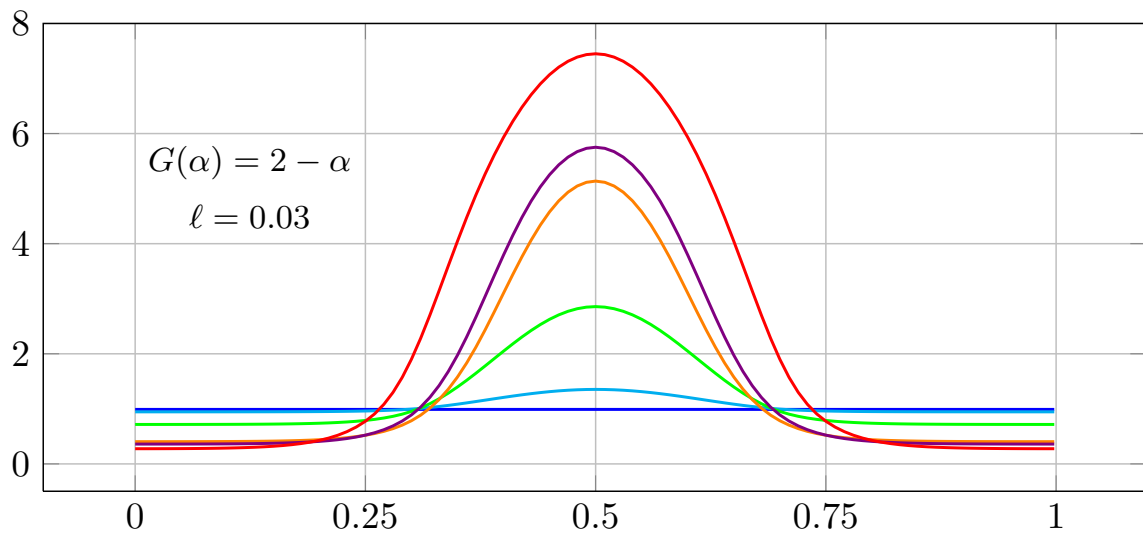


FIGURE 5.10 – Évolution du profil de localisation de la déformation dans le cas (LS2) avec  $\ell = 0.03$ .

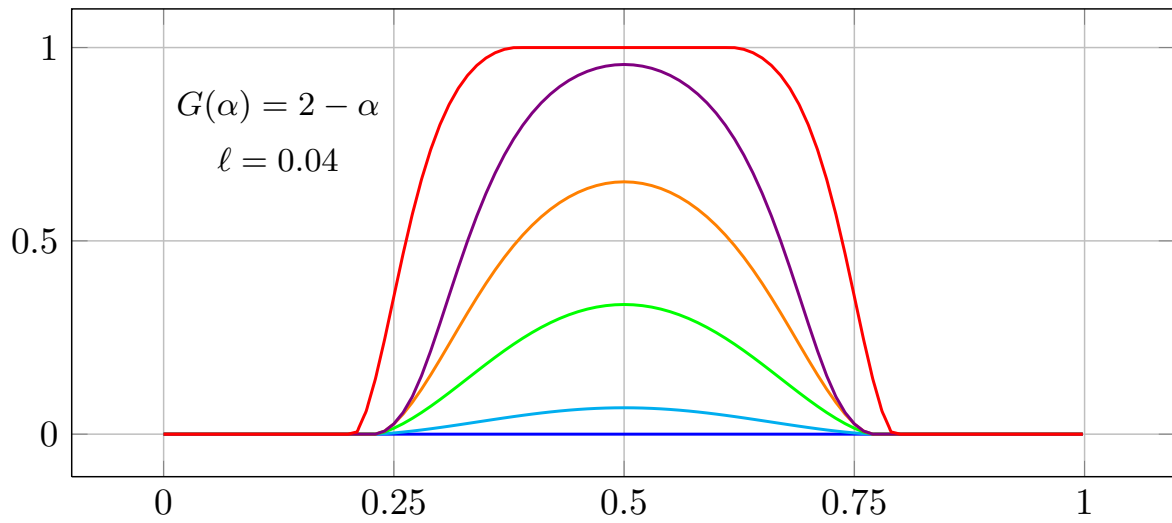


FIGURE 5.11 – Évolution du profil de localisation de l'endommagement dans le cas (LS2) avec  $\ell = 0.04$ .

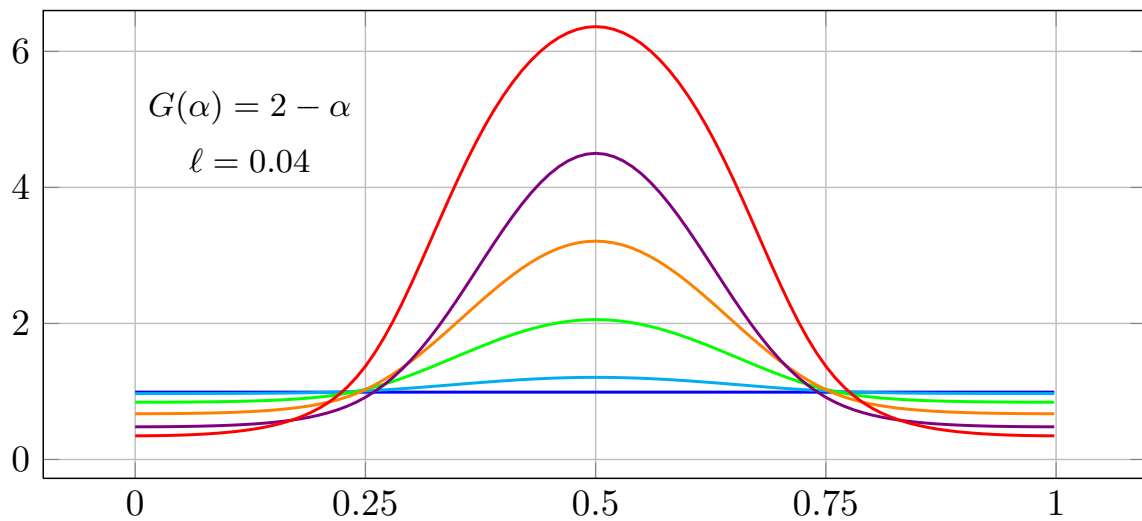


FIGURE 5.12 – Évolution du profil de localisation de la déformation dans le cas (LS2) avec  $\ell = 0.04$ .

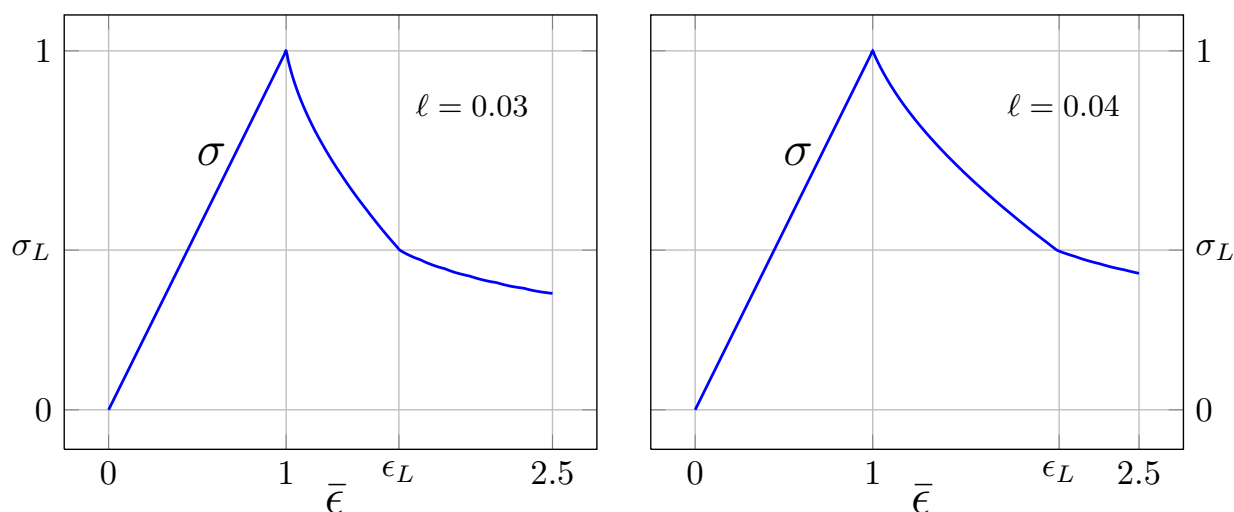


FIGURE 5.13 – Réponse globale contrainte-déformation dans le cas (LS1)

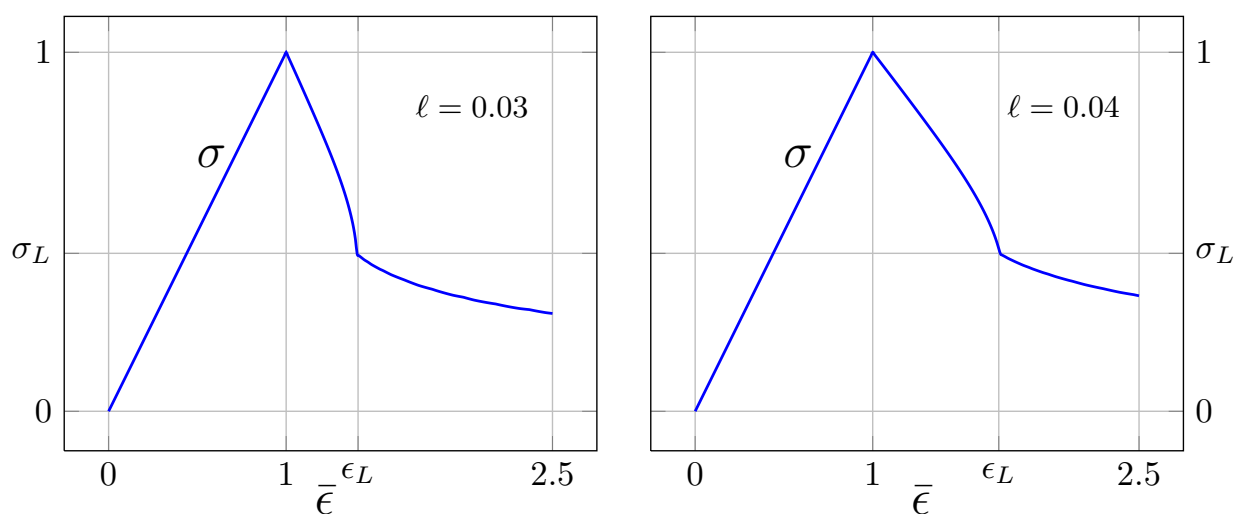


FIGURE 5.14 – Réponse globale contrainte-déformation dans le cas (LS2)

Afin de vérifier l'indépendance au maillage de la solution trouvée avec la méthode des éléments finis, nous considérons trois maillages différents : 20 éléments, 50 éléments et 100 éléments. Les profils de localisation d'endommagement sont montrés dans les figures (5.15) et (5.16). Il est évident que ni la largeur de la bande localisée, ni la courbe de l'endommagement ne présentent une dépendance importante au maillage.

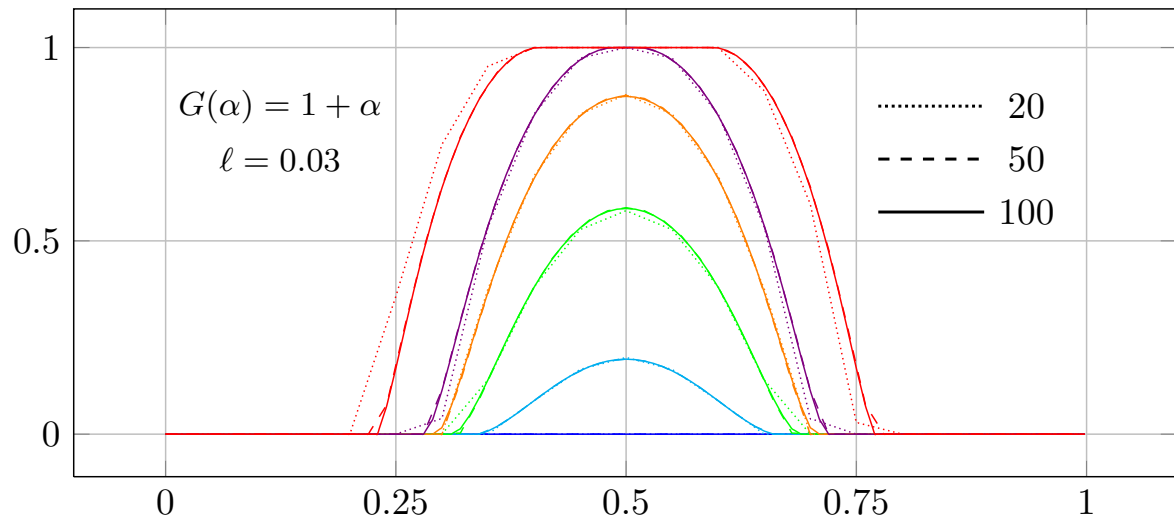


FIGURE 5.15 – Profil d'endommagement pour différents maillages dans le cas (LS1)

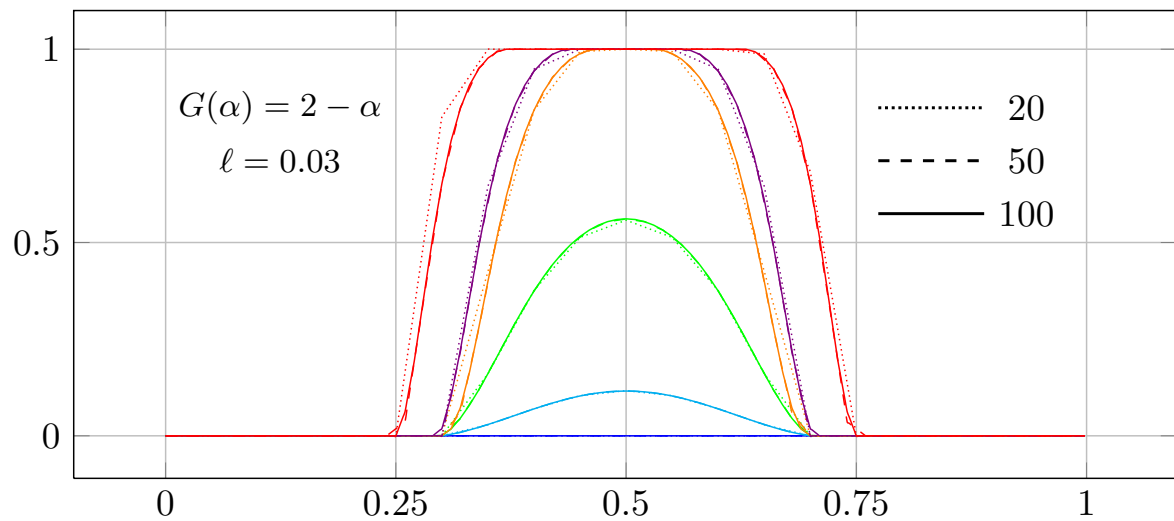


FIGURE 5.16 – Profil d'endommagement pour différents maillages dans le cas (LS2)

## 5.6 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, la construction d'un modèle 1D d'endommagement à gradient en utilisant l'énergie totale  $\mathcal{E}$  obtenue par la méthode d'homogénéisation développée dans le chapitre précédent :

$$\mathcal{E}(u, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( A(\alpha) + \ell^2 g_1 \alpha'^2 \right) u'^2 + \frac{\ell^2}{2} G(\alpha) u''^2 + w(\alpha) \right] dx$$

L'approche variationnelle présentée par Pham ([34]) a été utilisée pour formuler le problème d'évolution de l'endommagement. La procédure de minimisation d'énergie totale conduit à un système d'équations et d'inéquations à résoudre qui prennent en compte l'irréversibilité de l'endommagement, l'équation d'équilibre et le critère d'évolution d'endommagement.

Nous analysons dans un premier temps un modèle simplifié où l'influence de la variable d'endommagement sur le gradient de déformation et la contribution du gradient d'endommagement dans l'énergie totale est négligée ( $G'(\alpha) = g_1 = 0$ ). Nous pouvons alors trouver les solutions analytiques pour  $\alpha$  et  $\varepsilon$ . Dans un deuxième temps, un schéma numérique, basé sur la méthode de minimisation alternée mise en oeuvre avec la méthode des éléments finis, a été utilisé pour résoudre le modèle complet.

Les résultats analytiques et numériques montrent que ce modèle réussit à éviter les défauts des modèles locaux. Avec ce modèle, les localisations d'endommagement ont toujours une taille de support proportionnelle à la longueur interne  $\ell$ . Ce faisant, l'énergie dissipée pour créer une localisation ne sera jamais nulle et les résultats des simulations numériques ne sont pas dépendants du maillage. L'effet d'échelle est aussi bien mise en évidence par l'apparition de la longueur interne dans l'énergie totale  $\mathcal{E}(u, \alpha)$ .

Malgré ces bonnes propriétés de régularisation, ce modèle ne peut pas simuler la rupture fragile et ne peut être pas considéré comme des approximations de type *champ de phase* pour le modèle de Griffith. En effet dans le modèle régularisé par gradient d'endommagement ([34],[37],[39]), les zones endommagées restent localisées dans des bandes de largeur finie qui ne s'élargissent pas indéfiniment avec le chargement, et l'énergie dissipée pour

créer une fissure est finie et peut être identifiée avec les paramètres du modèle à gradient. Par contre dans le modèle étudié ici, la largeur des zones endommagées augmente avec le chargement même si l'endommagement d'un ou plusieurs points a atteint la valeur critique. Et il est impossible de les associer à une énergie dissipée finie et constante.





# Conclusion et perspective

Les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur la construction d'un modèle d'endommagement à gradient à partir de l'homogénéisation d'un milieu élastique ayant une microstructure répartie de façon périodique ou quasi-périodique.

Dans la première partie, le milieu supposé périodique a été homogénéisé à l'aide d'une approche basée sur la combinaison d'une méthode variationnelle et des développements asymptotiques. En postulant un développement de l'énergie totale par rapport au facteur d'échelle, le problème de minimisation d'énergie, qui fournit le champ de déplacement à l'équilibre du milieu hétérogène, conduit à une famille des problèmes de minimisation successifs fournissant les différents termes du développement. En allant jusqu'à l'ordre 2 dans le développement de l'énergie, nous trouvons un milieu homogénéisé dont l'énergie élastique est une fonction quadratique de la déformation et de sa dérivée, avec des coefficients homogénéisés obtenus par résolution de plusieurs problèmes de cellule. L'avantage de cette l'approche par rapport à la méthode d'homogénéisation aux ordres supérieurs classique (Boutin [9], Gambin et Kroner [23]) est d'avoir obtenu un seul champ de déplacement macroscopique qui rend stationnaire l'énergie homogénéisée.

Dans le but de construire des modèles d'endommagement à gradient, nous étendons cette méthode à un milieu quasi-périodique dans la deuxième partie. On entend par quasi-périodicité le fait signifie que la microstructure est caractérisée par une cellule unitaire dont les caractéristiques matérielles ou géométriques dépendent de façon régulière de la variable macroscopique. En utilisant l'approche introduite dans la partie périodique, nous obtenons une énergie homogénéisée qui peut être considérée comme une généralisation des théories de second gradient ([44],[31]) où les coefficients dépendent des caractéristiques de la cellule. La quasi-périodicité fait apparaître dans l'énergie homogénéisée non seulement des coefficients qui dépendent de la variable macroscopique mais aussi des termes supplémentaires par rapport au cas périodique.

Les propriétés des coefficients homogénéisés ont été analysées dans la troisième partie

sur deux exemples de microstructure : l'une où la quasi périodicité provient des propriétés des matériaux et l'autre où la quasi- périodicité est due à la géométrie de la cellule. Le premier exemple se ramène à des problèmes de cellule 1D que nous pouvons résoudre exactement de façon analytique. Les termes supplémentaires qui apparaissent dans l'énergie totale par rapport au cas périodique portent sur le gradient des paramètres quasi périodiques. Autrement dit, on obtient un comportement effectif qui dépend non seulement du gradient des déformations mais aussi du gradient des variables internes. Le deuxième exemple traite d'un milieu micro-fissuré où les problèmes de cellule deviennent des problèmes d'élasticité bidimensionnels dont la résolution numérique est réalisée à l'aide du code FEniCs. L'énergie effective à l'ordre deux comportent non seulement des termes en le gradient de la déformation mais aussi des termes en le gradient de la longueur des microfissures (par rapport à la variable macroscopique). Les coefficients homogénéisés qui pondèrent tous ces termes dépendent de la longueur des microfissures ainsi que de leur espacement. Par conséquent, en exploitant les résultats de ce deuxième exemple, si nous considérons la longueur de la fissure comme une variable d'endommagement (Dascalu et al. [17]) nous obtenons une énergie totale qui dépend du gradient de l'endommagement, ce qui était le but recherché. La ou les longueurs caractéristiques qui apparaissent dans le modèle sont directement liées à la taille de la microstructure.

Le dernier chapitre a été consacré à la construction d'une loi d'évolution d'endommagement à partir de cette forme d'énergie totale. En se basant sur l'approche variationnelle de l'endommagement ([35],[37]), le problème d'évolution s'écrit en termes des trois principes d'irréversibilité, de stabilité et de conservation de l'énergie. Il se déduit donc directement de la construction de l'énergie homogénéisée. En partant de la forme générale de ce type de modèles, nous avons construit explicitement des états localisés d'endommagement et de déformation dans le cas d'un modèle simplifié alors que le traitement du modèle complet a nécessité l'utilisation d'un schéma numérique basé sur la méthode de minimisation alternée, implémenté dans le cadre de la méthode des éléments finis. Les résultats analytiques et numériques obtenus dans sur des problèmes unidimensionnels montrent que ce modèle à gradient permet de pallier les principaux

défauts des modèles non régularisés. Ainsi la taille de la zone endommagée est contrôlée par la longueur interne et les solutions numériques ne présentent pas une dépendance importante au maillage. L'effet d'échelle est aussi bien mise en évidence grâce à la présence de la longueur interne dans l'énergie totale.

Les modélisations présentées ainsi que les résultats obtenus ouvrent de nombreuses perspectives parmi lesquelles, nous pouvons mentionner les suivantes :

- Dans la partie d'homogénéisation quasi-périodique, nous avons supposé que la variation des paramètres quasi-périodiques, tel que les coefficients élastiques dans l'exemple 1D et la longueur de la fissure dans le cas 2D, en fonction des variables spatiales est suffisamment régulière. Cette hypothèse n'est pas applicable dans tous les cas. En particulier si les paramètres sont discontinus par rapport à la variable macroscopique, alors toute la démarche d'homogénéisation à deux échelles doit être revue. On sera alors conduit à traiter des problèmes de couche limite et les énergies régularisées contiendront des termes de surface correspondant aux surfaces macroscopiques où les paramètres sont discontinus.
- Sur un plan pratique, il s'agirait de trouver une méthode générale pour résoudre tous les problèmes de cellule dans le cas quasi-périodique et ce quelle que soit la complexité de la microstructure.
- L'énergie homogénéisée à l'ordre deux présente de façon naturelle à la fois des termes en gradient d'endommagement et en gradient de déformation. Les propriétés qualitatives des modèles d'endommagement régularisés qui en découlent dépendent de façon essentielle à la fois des signes des coefficients homogénéisés et de leur dépendance vis à vis de l'état d'endommagement de la cellule. Les exemples simples traités ont montré que certains coefficients homogénéisés portant sur les termes en gradient peuvent être négatifs ce qui rend ces termes non régularisants. De même leur dépendance vis à vis de la variable d'endommagement peut se révéler suivant les cas trop régularisante ou pas assez. Il s'agirait donc d'une part de comprendre

l'origine de ces signes et de ces dépendances et d'autre part de proposer une alternative à la modélisation proposée ici dans les situations où les termes à gradient sont non régularisants.

## La symétrie du tenseur $A_{mnpq}^{(0)}$

Nous montrons que les coefficients  $A_{mnpq}^{(0)}$  sont symétriques en  $m$  et  $n$ ,  $p$  et  $q$  et par rapport aux couples  $(m, n)$  et  $(p, q)$ . Nous avons la définition de  $A_{mnpq}^{(0)}$  :

$$A_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{ijkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy \quad (\text{A.1})$$

À partir de l'équation (3.17) en remplaçant la fonction test  $\phi$  par  $\chi_{mn}$  et  $\chi_{pq}$  nous trouvons :

$$\int_Y C_{ijkl} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] e_{yij}(\chi_{mn}) dy = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\int_Y C_{ijkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] e_{yij}(\chi_{pq}) dy = 0 \quad (\text{A.3})$$

En reportant ces relations dans  $A_{mnpq}^{(0)}$  nous obtenons

$$A_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{pqkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] dy = \int_Y C_{ijmn} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy \quad (\text{A.4})$$

Comme  $C_{ijkl}$  est symétrique  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ , nous trouvons :

$$A_{nmpq}^{(0)} = \int_Y C_{ijnm} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy = A_{mnpq}^{(0)} \quad (\text{A.5})$$

$$A_{mnpq}^{(0)} = \int_Y C_{qpkl} [\delta_{km} \delta_{ln} + e_{ykl}(\chi_{mn})] dy = A_{mnpq}^{(0)} \quad (\text{A.6})$$

$$A_{pqmn}^{(0)} = \int_Y C_{mni j} [\delta_{ip} \delta_{jq} + e_{yij}(\chi_{pq})] dy = A_{mnpq}^{(0)} \quad (\text{A.7})$$

Donc  $A_{mnpq}^{(0)} = A_{nmpq}^{(0)} = A_{mnpq}^{(0)} = A_{pqmn}^{(0)}$



## La solution des problème de cellule

### Les fonctions $\chi_{ijk}(y)$

Pour la fonction  $\chi_1$  nous avons l'équation a résoudre :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y)[1 + \chi_1'(y)]\phi'(y)dy = 0 & \forall \phi(y) \text{ Y-périodique} \\ \langle \chi_1(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

À partir de la définition de  $\mu$  dans le cas du milieu stratifié, en ajoutant la condition de continuité à l'interface :  $[\chi_1]_{y=a} = 0$ , nous pouvons réécrire les équations donnant  $\chi_1$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( \mu(y)[1 + \chi_1'(y)] \right) = 0 \\ \langle \chi_1(y) \rangle = 0; [\chi_1] = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

(B.2) montre qu'il existe une constante  $A$  telle que  $\mu(y)(1 + \chi_1'(y)) = A$ . D'où

$$1 + \chi_1'(y) = \frac{A}{\mu(y)}$$

et donc

$$1 = \langle 1 + \chi_1'(y) \rangle = A \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle.$$

Finalement

$$A = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2}.$$

En utilisant la définition de  $\mu(y)$  nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d\chi_1}{dy} = \frac{\mu_2}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} - 1 = \frac{(1-a)(\mu_2 - \mu_1)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} & \text{avec } 0 \leq y \leq a \\ \frac{d\chi_1}{dy} = \frac{\mu_1}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} - 1 = \frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} & \text{avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_1(y) = \frac{(1-a)(\mu_2 - \mu_1)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2}y + C_1 & \text{avec } 0 \leq y \leq a \\ \chi_1(y) = \frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2}y + C_2 & \text{avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

À partir de la condition de continuité de  $\chi_1$  et la condition  $\langle \chi_1 \rangle = 0$ , nous pouvons calculer les coefficients  $C_1, C_2$  :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \frac{a(1+a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \frac{a(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Donc nous trouvons l'expression de  $\chi_1(y)$  :

$$\begin{cases} \chi_1(y) = \frac{(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left(\frac{a}{2} - y\right) & \forall 0 \leq y \leq a \\ \chi_1(y) = \frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left(y - \frac{1+a}{2}\right) & \forall a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

En utilisant la même méthode, nous obtenons  $\chi_2 = 0$ .

### Les fonctions $\xi_{ijkl}(y)$

- Pour la fonction  $\xi_{11}$  nous avons l'équation à résoudre :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\xi'_{11}(y) + \chi_1(y)] \bar{\phi}'(y) dy = \int_Y \mu(y) [\chi'_1(y) + 1] \bar{\phi}(y) dy \\ \forall \bar{\phi}(y) \quad Y\text{-périodique; } \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{11}(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

En utilisant la solution de  $\chi_1(y)$ , nous déduisons

$$\int_Y \mu(y) [\chi'_1(y) + 1] \bar{\phi}(y) dy = \int_Y A \bar{\phi}(y) dy = 0.$$

À partir de la définition de  $\mu$  dans le cas du milieu stratifié et en ajoutant la condition de continuité à l'interface  $[\xi_{11}]_{y=a} = 0$ , nous pouvons réécrire les équations pour calculer

$\xi_{11}$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( \mu(y) [\chi_1(y) + \xi'_{11}(y)] \right) = 0 \\ \langle \xi_{11}(y) \rangle = 0; [\xi_{11}] = 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

(B.8) montre qu'il existe une constante  $B$  telle que  $\mu(y)(\chi_1(y) + \xi'_{11}(y)) = B$ . D'où

$$\chi_1(y) + \xi'_{11}(y) = \frac{B}{\mu(y)}$$

et donc

$$0 = \langle \chi_1(y) + \xi'_{11}(y) \rangle = B \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle.$$

Finalement on en déduit  $B = 0$ . En utilisant la définition de  $\mu(u)$  et  $\chi_1$  nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d\xi_{11}}{dy} = -\frac{(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{a}{2} - y \right) \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \frac{d\xi_{11}}{dy} = -\frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( y - \frac{1+a}{2} \right) \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_{11} = -\frac{(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{a}{2}y - \frac{y^2}{2} \right) + D_1 \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \xi_{11} = -\frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1+a}{2}y \right) + D_2 \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

À partir de la condition de continuité de  $\xi_{11}$  et  $\langle \xi_{11} \rangle = 0$  nous pouvons calculer les coefficients  $D_1, D_2$  :

$$\begin{cases} D_1 = -\frac{1}{12} \frac{a(1-a)(1-2a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \\ D_2 = -\frac{1}{12} \frac{a(1+a)(1+2a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Donc nous avons l'expression de la fonction  $\xi_{11}$  :

$$\begin{cases} \xi_{11}(y) = -\frac{(1-a)(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{a}{2}y - \frac{y^2}{2} + \frac{a-2a^2}{12} \right) \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \xi_{11}(y) = -\frac{a(\mu_1 - \mu_2)}{(1-a)\mu_1 + a\mu_2} \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1+a}{2}y + \frac{2a^2 + 3a + 1}{12} \right) \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

En utilisant la même méthode, nous obtenons  $\xi_{12} = \xi_{21} = 0$ .

- Pour la fonction  $\xi_{22}$  nous avons l'équation à résoudre :

$$\begin{cases} \int_Y \mu(y) [\xi'_{22}(y) + \chi_2(y)] \bar{\phi}'(y) dy = \int_Y \mu(y) [\chi'_2(y) + 1] \bar{\phi}(y) dy \\ \forall \bar{\phi}(y) \quad Y\text{-périodique}; \quad \langle \bar{\phi} \rangle = 0 \\ \langle \xi_{22}(y) \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Comme  $\xi_2 = 0$  et  $\langle \bar{\phi} \rangle = 0$  nous obtenons

$$\int_Y \mu(y) [\chi'_2(y) + 1] \bar{\phi}(y) dy = \int_Y (\mu - \langle \mu \rangle) \bar{\phi}(y) dy \quad (\text{B.14})$$

À partir de la définition de  $\mu$  dans le cas du milieu stratifié et en ajoutant la condition de continuité à l'interface  $[\xi_{22}]_{y=a} = 0$ , nous pouvons réécrire les équations pour calculer  $\xi_{22}$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( \mu(y) \xi'_{11}(y) \right) = \langle \mu \rangle - \mu \\ \langle \xi_{11}(y) \rangle = 0; [\xi_{11}] = 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

La première équation de (B.15) nous donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{d\xi_{22}}{dy} \right) = -(1-a)(\mu_1 - \mu_2) \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{d\xi_{22}}{dy} \right) = a.(\mu_1 - \mu_2) \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 \frac{d\xi_{22}}{dy} = -(1-a)(\mu_1 - \mu_2)y + G_1 \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \mu_2 \frac{d\xi_{22}}{dy} = a.(\mu_1 - \mu_2)y + G_2 \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\xi_{22}}{dy} = \frac{-(1-a)(\mu_1 - \mu_2)y + G_1}{\mu_1} \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \frac{d\xi_{22}}{dy} = \frac{a.(\mu_1 - \mu_2)y + G_2}{\mu_2} \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

À partir de la condition de continuité de  $\mu \cdot \frac{d\xi_{22}}{dy}$  et  $\langle \frac{d\xi_{22}}{dy} \rangle = 0$ , nous pouvons calculer les coefficients  $G_1, G_2$  :

$$G_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2).a.(1-a)}{2} \quad (\text{B.19})$$

$$G_2 = -\frac{(\mu_1 - \mu_2).a.(1+a)}{2} \quad (\text{B.20})$$

En remplaçant  $G_1, G_2$  dans (B.18), nous trouvons

$$\begin{cases} \frac{d\xi_{22}}{dy} = -\frac{(1-a)\cdot(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1}\cdot\left(y-\frac{a}{2}\right) \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \frac{d\xi_{22}}{dy} = -\frac{a\cdot(\mu_1-\mu_2)}{\mu_2}\cdot\left(\frac{1+a}{2}-y\right) \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_{22} = -\frac{(1-a)\cdot(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1}\cdot\left(\frac{y^2}{2}-\frac{ay}{2}\right) + H_1 \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \xi_{22} = -\frac{a\cdot(\mu_1-\mu_2)}{\mu_2}\cdot\left(\frac{1+a}{2}y-\frac{y^2}{2}\right) + H_2 \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

A partir de la condition de continuité de  $\xi_{22}$  et  $\langle \xi_{22} \rangle = 0$ , nous pouvons calculer les coefficients  $H_1, H_2$  :

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{(\mu_1-\mu_2)\cdot a\cdot(1-a)}{12}\cdot\left(\frac{a^2}{\mu_1}-\frac{(1-a)^2}{\mu_2}\right) \\ H_2 &= -\frac{(\mu_1-\mu_2)\cdot a\cdot(1-a)}{12}\cdot\left(\frac{a^2}{\mu_1}-\frac{(1-a)^2}{\mu_2}\right) + \frac{(\mu_1-\mu_2)\cdot a^2}{2\mu_2} = H_1 + \frac{(\mu_1-\mu_2)\cdot a^2}{2\mu_2} \end{aligned}$$

Donc nous trouvons :

$$\begin{cases} \xi_{22} = -\frac{(1-a)\cdot(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1}\cdot\left(\frac{y^2}{2}-\frac{ay}{2}\right) + H_1 \text{ avec } 0 \leq y \leq a \\ \xi_{22} = -\frac{a\cdot(\mu_1-\mu_2)}{\mu_2}\cdot\left(\frac{1+a}{2}y-\frac{y^2}{2}-\frac{a}{2}\right) + H_1 \text{ avec } a \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$



# Bibliographie

- [1] D. Allen, R. Jones et J. Boyd. “Micromechanical analysis of a continuous fiber metal matrix composite including the effects of matrix viscoplasticity and evolving damage”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.3 (1994), p. 505–529.
- [2] I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz et A. A. Diskovsky. “Homogenization of quasi-periodic structures”. *Journal of vibration and acoustics* 128.4 (2006), p. 532–534.
- [3] A. Anthoine. “Second-order homogenisation of functionally graded materials”. *International Journal of Solids and Structures* 47.11 (2010), p. 1477–1489.
- [4] H. Askes, A. Suiker et L. Sluys. “A classification of higher-order strain-gradient models—linear analysis”. *Archive of Applied Mechanics* 72.2-3 (2002), p. 171–188.
- [5] A. Bacigalupo. “Second-order homogenization of periodic materials based on asymptotic approximation of the strain energy : formulation and validity limits”. *Meccanica* 49.6 (2014), p. 1407–1425.
- [6] N. Bakhvalov et G. Panasenko. *Homogenisation : Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer academic publishers, 1989.
- [7] A. Benallal et J.-J. Marigo. “Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening”. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 15.1 (2007), S283.
- [8] A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. T. 374. Elsevier Science, 1978.
- [9] C. Boutin. “Microstructural effects in elastic composites”. *International Journal of Solids and Structures* 33.7 (1996), p. 1023–1051.
- [10] Y. Capdeville et J.-J. Marigo. “Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media”. *Geophysical Journal International* 170.2 (2007), p. 823–838.

- 
- [11] Y. Capdeville, L. Guillot et J.-J. Marigo. “1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation”. *Geophysical Journal International* 181.2 (2010), p. 897–910.
- [12] J.-L. Chaboche. “Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition”. *International Journal of Damage Mechanics* 1.2 (1992), p. 148–171.
- [13] J.-L. Chaboche. “Continuum damage mechanics I : general concepts”. *Journal of applied mechanics* 55.1 (1988), p. 59–64.
- [14] J. Chaboche, P. Lesne et J. Maire. “Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites” (1995).
- [15] C. S. Chang et J. Gao. “Second-gradient constitutive theory for granular material with random packing structure”. *International Journal of Solids and Structures* 32.16 (1995), p. 2279–2293.
- [16] C. Comi, Y. Berthaud et R. Billardon. “On localization in ductile-brittle materials under compressive loadings”. *European journal of mechanics. A. Solids* 14.1 (1995), p. 19–43.
- [17] C. Dascalu, G. Bilbie et E. Agiasofitou. “Damage and size effects in elastic solids : A homogenization approach”. *International Journal of Solids and Structures* 45.2 (2008), p. 409–430.
- [18] R. P. R. DE et J. DE VREE. “Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials”. *International Journal for numerical methods in engineering* 39 (1996), p. 3391–3403.
- [19] F. Devries et al. “Homogenization and damage for composite structures”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 27.2 (1989), p. 285–298.
- [20] H. Dumontet. “Study of a boundary layer problem in elastic composite materials”. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 20.2 (1986), p. 265–286.

- [21] S. Fang et al. “A second-order and two-scale computation method for the quasi-periodic structures of composite materials”. *Finite Elements in Analysis and Design* 46.4 (2010), p. 320–327.
- [22] J. Fish, Q. Yu et K. Shek. “Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenization”. *International journal for numerical methods in engineering* 45.11 (1999), p. 1657–1679.
- [23] B. Gambin et E. Kröner. “Higher-Order Terms in the Homogenized Stress-Strain Relation of Periodic Elastic Media”. *physica status solidi (b)* 151.2 (1989), p. 513–519.
- [24] S. Kruch, J. Chaboche et T. Pottier. “Two-scale viscoplastic and damage analysis of a metal matrix composite”. *Studies in Applied Mechanics* 44 (1996), p. 45–56.
- [25] J. Lemaitre et J.-L. CHABOCHE. “Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement”. *J Méc Appl* 2.3 (1978).
- [26] A. Logg, K.-A. Mardal et G. Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method : The FEniCS book*. T. 84. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] J.-J. Marigo. “Formulation de l’endommagement d’un matériau élastique”. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II* 292 (19) (1980), p. 1309–1312.
- [28] J.-J. Marigo. “From Clausius-Duhem and Drucker-Ilyushin inequalities to standard materials”. *Continuum Thermomechanics*. Springer, 2002, p. 289–300.
- [29] J. Marigo. “Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property”. *Nuclear Engineering and Design* 114.3 (1989), p. 249–272.
- [30] J. Marigo. “Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids”. *Engineering Fracture Mechanics* 21.4 (1985), p. 861–874.
- [31] R. D. Mindlin. “Micro-structure in linear elasticity”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 16.1 (1964), p. 51–78.



- 
- [32] Q. S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, 2000, 416 pages.
- [33] L.-E. Persson. *The homogenization method : An introduction*. Studentlitteratur, 1993.
- [34] K. Pham. “Construction et analyse de modèles d’endommagement à gradient”. Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2010.
- [35] K. Pham et J.-J. Marigo. “Approche variationnelle de l’endommagement : I. Les concepts fondamentaux”. *Comptes Rendus Mécanique* 338.4 (2010), p. 191–198.
- [36] K. Pham et J.-J. Marigo. “Approche variationnelle de l’endommagement : II. Les modèles à gradient”. *Comptes Rendus Mécanique* 338.4 (2010), p. 199–206.
- [37] K. Pham et J.-J. Marigo. “Approche variationnelle de l’endommagement : II. Les modèles à gradient”. *Comptes Rendus Mécanique* 338.4 (2010), p. 199–206.
- [38] K. Pham et J.-J. Marigo. “From the onset of damage to rupture : construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models”. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 25.2-4 (2013), p. 147–171.
- [39] K. Pham et al. “Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture”. *International Journal of Damage Mechanics* 20.4 (2011), p. 618–652.
- [40] L. Placidi. “A variational approach for a nonlinear 1-dimensional second gradient continuum damage model”. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* (2014), p. 1–16.
- [41] E. Sánchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. T. 127. Springer-Verlag Berlin, 1980.
- [42] F Su et al. “Multi-scale method for the quasi-periodic structures of composite materials”. *Applied Mathematics and Computation* 217.12 (2011), p. 5847–5852.
- [43] A. Suiker, R De Borst et C. Chang. “Micro-mechanical modelling of granular material. Part 1 : Derivation of a second-gradient micro-polar constitutive theory”. *Acta Mechanica* 149.1-4 (2001), p. 161–180.

- 
- [44] R. A. Toupin. “Elastic materials with couple-stresses”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11.1 (1962), p. 385–414.
- [45] T. H. Tran. “Comportement homogénéisé des matériaux composites : prise en compte de la taille des éléments microstructuraux et des gradients de la déformation”. Thèse de doct. Paris Est, 2013.
- [46] T.-H. Tran, V. Monchiet et G. Bonnet. “A micromechanics-based approach for the derivation of constitutive elastic coefficients of strain-gradient media”. *International Journal of Solids and Structures* 49.5 (2012), p. 783–792.