



**HAL**  
open science

# Simulation et reconstruction 3D à partir de caméra Compton pour l'hadronthérapie: Influence des paramètres d'acquisition

Estelle Hilaire

► **To cite this version:**

Estelle Hilaire. Simulation et reconstruction 3D à partir de caméra Compton pour l'hadronthérapie: Influence des paramètres d'acquisition. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. INSA de Lyon, 2015. Français. NNT: 2015ISAL0104 . tel-01368239

**HAL Id: tel-01368239**

**<https://theses.hal.science/tel-01368239v1>**

Submitted on 19 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro d'ordre : 2015 ISAL 0104

Année 2015

## THÈSE

*présentée devant*

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

*pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR

(arrêté du 7 août 2006)

ÉCOLE DOCTORALE : ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE ET  
AUTOMATIQUE

Soutenue publiquement le 18 Novembre 2015 par

Estelle HILAIRE

Ingénieur Polytech Lyon

# Simulation et reconstruction 3D à partir de caméra Compton pour l'hadronthérapie : influence des paramètres d'acquisition

## Jury

<b>Claude COMTAT</b>	Physicien médical, SHFJ, CEA, Orsay	Rapporteur
<b>Jeanpierre GUEDON</b>	Professeur, Université de Nantes	Rapporteur
<b>David SARRUT</b>	Directeur de Recherche CNRS	Examineur
<b>Dimitris VISVIKIS</b>	Directeur de Recherche INSERM	Président du jury
<b>Françoise PEYRIN</b>	Directeur de Recherche INSERM	Directeur de thèse
<b>Voichita MAXIM</b>	Maître de conférences, INSA Lyon	Co-directeur de thèse

# Résumé

L'hadronthérapie est une méthode de traitement du cancer qui emploie des ions (carbone ou proton) au lieu des rayons X. Les interactions entre le faisceau et le patient produisent des radiations secondaires. Il existe une corrélation entre la position d'émission de certaines de ces particules et la position du pic de Bragg. Parmi ces particules, des  $\gamma$ -prompt sont produits par les fragments nucléaires excités et des travaux actuels ont pour but de concevoir des systèmes de tomographie par émission monophotonique (TEMP) capable d'imager la position d'émission de ces radiations en temps réel, avec une précision millimétrique, malgré le faible nombre de données disponibles. Bien que ce ne soit pas actuellement possible, le but in fine est de surveiller le dépôt de dose. La caméra Compton est un des système TEMP qui a été proposé pour imager ce type de particules, car elle offre une meilleure résolution énergétique et la possibilité d'avoir une image 3D. Cependant, en pratique l'acquisition est affectée par le bruit provenant d'autres particules secondaires, et les algorithmes de reconstruction des images Compton sont plus compliqués et encore peu aboutis, mais sur une bonne voie de développement.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé une chaîne complète allant de la simulation de l'irradiation d'un fantôme par un faisceau de protons allant jusqu'à la reconstruction tomographique des images obtenues à partir de données acquises par la caméra Compton. Nous avons étudié différentes méthodes de reconstruction analytiques et itératives, et nous avons développé une méthode de reconstruction itérative capable de prendre en compte les incertitudes de mesure sur l'énergie. Enfin nous avons développé des méthodes pour la détection de la fin du parcours des distributions  $\gamma$ -prompt reconstruites.

Nous avons utilisé trois types de fantômes. Le fantôme homogène composé d'eau a permis de déterminer les fenêtres d'énergies optimales pour obtenir une qualité d'image correcte et de mesurer le parcours  $\gamma$ -prompt. Puis nous avons simulé un fantôme bi-matériaux comportant des inserts d'air et/ou d'os pour mettre en évidence l'influence des hétérogénéités sur la reconstruction des images et sur la détection du parcours  $\gamma$ -prompt. Enfin, avec le fantôme de patient dont nous avons simulé l'irradiation, nous avons montré l'influence de l'atténuation sur les images et les profils reconstruits, qui s'avère non négligeable. Dans la majorité des cas, sélectionner des photons dans une fenêtre d'énergie améliore les résultats que nous avons obtenus. Nous avons calculé les parcours  $\gamma$ -prompt à partir de profils extraits des images reconstruites. Idéalement, nous avons observé moins de 3 mm de décalage entre les parcours des profils reconstruits et simulés. Nous avons induit des décalages sur la fin du parcours en réglant l'énergie du faisceau. Ces variations ont été estimées avec une erreur théorique inférieure à 2 mm.

## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie





# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Sommaire</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Organisation de la thèse . . . . .	3
<b>2 Verrou médical</b>	<b>5</b>
2.1 Hadronthérapie . . . . .	6
2.1.1 Physique de l'hadronthérapie . . . . .	6
2.1.2 Principe de l'hadronthérapie . . . . .	12
2.2 Contrôle en ligne . . . . .	14
2.2.1 Contrôle par TEP . . . . .	14
2.2.2 Contrôle par TEMP (caméra collimatée et caméra Compton) . . . . .	18
<b>3 Principe de la tomographie</b>	<b>25</b>
3.1 Reconstruction analytique . . . . .	28
3.1.1 La transformée de Radon . . . . .	28
3.1.2 Théorème de la coupe centrale ou coupe-projection en 2D . . . . .	29
3.1.3 La rétroprojection filtrée (FBP) . . . . .	30
3.1.4 Filtres lissants . . . . .	31
3.2 Reconstruction itérative . . . . .	32
3.2.1 Méthodes itératives algébriques . . . . .	33
3.2.2 Méthodes itératives statistiques . . . . .	35
3.3 Problèmes de troncature en tomographie classique . . . . .	40
<b>4 Tomographie Compton</b>	<b>43</b>
4.1 Méthodes analytiques . . . . .	43
4.1.1 Reconstruction par calcul des projections faisceau conique . . . . .	44
4.1.2 Reconstruction par calcul des projections Radon . . . . .	46
4.1.3 Rétroprojection filtrée basée sur le théorème coupe-projection . . . . .	49
4.1.4 Exemples . . . . .	52
4.2 Méthodes itératives . . . . .	58
4.2.1 Algorithme MLEM en mode liste (LM-MLEM) . . . . .	59
4.2.2 Méthodes de calcul de la matrice système . . . . .	60
4.2.3 Méthodes de calcul du vecteur de sensibilité . . . . .	62
4.3 Problèmes de troncature en tomographie Compton . . . . .	63

<b>5</b>	<b>Simulation de données : problème direct en tomographie Compton</b>	<b>65</b>
5.1	Simulations Monte-Carlo . . . . .	65
5.1.1	Geant4 . . . . .	66
5.1.2	MEGAlib . . . . .	66
5.1.3	Gate . . . . .	71
5.2	De la simulation de la protonthérapie aux évènements Compton . . . . .	75
5.2.1	Configurations de simulation . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Mise en oeuvre de l'algorithme MLEM et applications sur des données simulées</b>	<b>81</b>
6.1	Mise en oeuvre de l'algorithme MLEM . . . . .	81
6.1.1	Calcul numérique de la matrice système . . . . .	82
6.1.2	Méthodes de calcul du vecteur de sensibilité . . . . .	83
6.2	Reconstruction de sources simples . . . . .	86
6.2.1	Source ponctuelle . . . . .	87
6.2.2	Source linéaire . . . . .	87
6.2.3	Source sphérique . . . . .	89
6.2.4	Conclusions . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Reconstructions de distributions <math>\gamma</math>-prompt</b>	<b>93</b>
7.1	Distribution de $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme homogène . . .	93
7.1.1	Distribution des $\gamma$ -prompt en fonction de l'énergie . . . . .	94
7.1.2	Influence de l'énergie des $\gamma$ -prompt sur les images reconstruites . . .	94
7.1.3	Influence de la sélection sur l'énergie totale mesurée sur les images reconstruites . . . . .	97
7.1.4	Discussions et conclusions . . . . .	99
7.2	Distribution de $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme multi-matériaux	99
7.2.1	Influence de l'énergie des $\gamma$ -prompt sur la détection des inserts . . .	100
7.2.2	Evaluation de la qualité des images reconstruites avec toutes les énergies . . . . .	104
7.2.3	Discussions et conclusions . . . . .	106
7.3	Distribution de $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme patient . . . .	106
7.3.1	Influence de l'atténuation dans le volume . . . . .	107
7.3.2	Discussions et conclusions . . . . .	109
<b>8</b>	<b>Détection de la fin du parcours d'un faisceau de protons</b>	<b>111</b>
8.1	Méthodes . . . . .	111
8.1.1	Méthode basée sur le maximum . . . . .	112
8.1.2	Méthode basée sur les ondelettes . . . . .	112
8.2	Résultats . . . . .	113
8.2.1	Fantôme homogène . . . . .	114
8.2.2	Fantôme multi-matériaux . . . . .	117
8.2.3	Fantôme de patient . . . . .	118
8.3	Discussions et conclusions . . . . .	120
<b>9</b>	<b>Conclusions</b>	<b>121</b>
9.1	Principales contributions . . . . .	121
9.2	Perspectives . . . . .	122

<b>Annexes</b>	<b>127</b>
<b>A Ondelettes</b>	<b>127</b>
A.1 Introduction . . . . .	127
A.1.1 De Fourier aux ondelettes . . . . .	127
A.1.2 Historique des ondelettes . . . . .	129
A.2 Transformée en ondelettes 1D . . . . .	130
A.2.1 Transformée en ondelettes continue . . . . .	130
A.2.2 Transformée en ondelettes discrète . . . . .	131
A.3 Transformée en ondelettes 2D . . . . .	132
A.3.1 Transformée en ondelettes 2D continue . . . . .	132
A.3.2 Transformée en ondelettes discrète et rapide . . . . .	132
<b>B Tomographie à partir de projections tronquées</b>	<b>135</b>
B.1 Introduction . . . . .	135
B.2 Etat de l'art . . . . .	137
B.3 Méthodologie . . . . .	137
B.3.1 Données . . . . .	137
B.3.2 Pré-traitement . . . . .	138
B.3.3 Traitement . . . . .	139
B.4 Analyse . . . . .	140
B.4.1 Création des jeux de données . . . . .	141
B.4.2 Influence de l'interpolation . . . . .	142
B.4.3 Influence du traitement en ondelettes . . . . .	144
B.5 Conclusion . . . . .	145
<b>Bibliographie</b>	<b>160</b>



# Chapitre 1

---

## Introduction

---

### 1.1 Contexte

Il existe différentes solutions pour traiter les personnes atteintes du cancer, une fois celui-ci diagnostiqué. On peut avoir recours à la chirurgie, à la chimiothérapie ou à la radiothérapie. La radiothérapie permet notamment de soigner plus de 50% des patients atteints de tumeurs malignes. Mais certaines tumeurs sont résistantes, voire radiorésistantes. C'est pour cela que Robert Wilson propose en 1946 d'utiliser plutôt des faisceaux d'ions pour traiter ce type de cancers [Wilson (1946)]. Cette méthode, alternative à la radiothérapie classique, est appelée hadronthérapie. Du fait de sa balistique très précise, il est impératif de pouvoir vérifier correctement l'irradiation pour pouvoir corriger les éventuelles erreurs. Avec cette technique, les interactions entre le faisceau et le patient engendrent des réactions nucléaires qui produisent des radiations secondaires. Il existe une corrélation entre la position d'émission de certaines de ces particules et la position du pic de Bragg [Knopf and Lomax (2013)]. Des travaux en cours ont pour but de concevoir des systèmes d'imagerie capables de surveiller le dépôt de dose en exploitant ces radiations. Historiquement, les systèmes de tomographie par émission de positons sont les premiers à avoir été utilisés pour le contrôle en hadronthérapie. En effet, les fragments produisent notamment des positons qui s'annihilent avec des électrons présents dans le patient en émettant deux photons de 511 keV chacun qui peuvent être détectés par un système de tomographie par émission de positons [Paans and Schippers (1992), Litzenberg *et al.* (1992), Tomitani *et al.* (1994), Pawelke *et al.* (1996), Parodi and Enghardt (2000), Enghardt *et al.* (2004)]. En 2003, il a ensuite été proposé d'exploiter les radiations  $\gamma$ -prompt produites par les fragments nucléaires excités dans [Stichelbaut and Jongen (2003)]. De

nombreux systèmes de tomographie par émission monophotonique (TEMP) ont donc été proposés tels que les gamma-caméras à fentes parallèles, à collimateur sténopé, et knife-edge-slit [Bom *et al.* (2012), Smeets *et al.* (2012), Kim *et al.* (2009), Lee *et al.* (2012), Lopes *et al.* (2012), Diblen *et al.* (2012)], ainsi que des caméras Compton [Seo *et al.* (2007), Frandes *et al.* (2010), Kormoll *et al.* (2011), Richard *et al.* (2012), Kurosawa *et al.* (2012)]. Des simulations réalistes de la caméra Compton ont donné de bonnes raisons d'espérer une utilisation de ces systèmes en routine clinique [Lenti and Veltri (2011)]. Cependant, la dose ne peut pas encore être retrouvée par ces systèmes TEMP et seule la fin du parcours de  $\gamma$ -prompt peut être obtenue. Actuellement aucun système d'imagerie Compton n'a été réellement testé en conditions cliniques, mais des équipes ont obtenu des résultats encourageants par simulations sur les performances de la caméra Compton en dosimétrie in vivo pour l'hadronthérapie [Frandes *et al.* (2010), Gillam *et al.* (2011), Mackin *et al.* (2012)].

Les algorithmes classiques utilisés en tomodensitométrie, en tomographie par émission monophotonique classique ou en tomographie par émission de positons, ne peuvent pas être directement appliqués à la caméra Compton. En effet, les projections ne sont plus des intégrales sur des lignes, mais des intégrales sur des surfaces coniques. Ces méthodes de reconstruction tomographique ont donc été adaptées afin de pouvoir reconstruire des images issues de données acquises par ce dispositif, et notamment des images 3D de la distribution  $\gamma$ -prompt. Quelques algorithmes de reconstruction analytiques et itératifs ont été proposés dans la littérature [Cree and Bones (1994), Wilderman *et al.* (1998)b, Parra (2000), Tomitani and Hirasawa (2002), Smith (2005), Maxim *et al.* (2009), Lojacono *et al.* (2013)]. Les algorithmes analytiques offrent l'avantage d'être relativement rapides, mais font face à des problèmes inverses mal posés où la solution est difficile à retrouver. Les méthodes itératives ne permettent pas de retrouver la solution du système mais de s'en rapprocher, et les temps de calculs peuvent être relativement longs. Cependant ils offrent l'avantage de pouvoir modéliser de nombreux paramètres du système d'imagerie.

Cette thèse a donc pour but d'étudier l'applicabilité de la caméra Compton pour une utilisation en vérification de traitement d'hadronthérapie. Pour ce faire, nous avons proposé un processus complet allant de la simulation de l'irradiation d'un fantôme à la reconstruction des images issues des données d'une caméra Compton spécifique inspirée du prototype actuellement en construction à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon. Différentes méthodes de reconstruction pour la caméra Compton ont été étudiées et nous avons proposé une méthode basée sur l'estimateur du maximum de vraisemblance en mode liste avec un modèle pour le calcul des éléments de la matrice système permettant de prendre en compte les incertitudes sur les énergies mesurées dans la caméra Compton. À partir des images obtenues, nous extrayons des profils afin d'estimer la fin du parcours  $\gamma$ -prompt et de le comparer au parcours théorique avec deux méthodes basées sur les ondelettes et une méthode basée sur le maximum.

## 1.2 Organisation de la thèse

Le manuscrit est organisé comme suit. Les trois premiers chapitres sont des rappels. Dans le chapitre 2, nous présentons les processus physiques qui entrent en jeu lors d'un traitement en hadronthérapie et le principe de cette technique de traitement de cancer. Puis nous faisons l'état de l'art des méthodes existantes et/ou en cours de développement pour le contrôle des traitements par hadronthérapie, en particulier le système qui nous intéresse, la caméra Compton. Ensuite, nous passons en revue différentes méthodes de reconstruction analytique et itérative, pour la tomographie classique dans le troisième chapitre. Les méthodes de reconstruction pour la tomographie Compton présentées au chapitre 4 sont basées sur les méthodes du chapitre précédent. Nous abordons à la fin du troisième et du quatrième chapitre les problèmes de troncature respectivement en tomographie classique et en tomographie Compton. Les outils de simulation utilisés et mis en place sont décrits et expliqués dans le cinquième chapitre. Nous avons développé une chaîne de simulation allant de l'irradiation d'un fantôme jusqu'aux événements Compton après l'acquisition de l'interaction des photons dans la caméra. Le sixième chapitre regroupe les méthodes de calcul de la matrice système et du vecteur de sensibilité que nous avons mises en oeuvre et les résultats de reconstruction MLEM des données que nous avons simulées à l'aide des logiciels présentés au cinquième chapitre. Nous reconstruisons des sources simples afin de déterminer les meilleures configurations. Dans le chapitre suivant, nous reconstruisons des distributions de  $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation de fantômes (homogène, bi-matériaux et de patient). Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons développé des méthodes pour la détection de la fin du parcours des distributions  $\gamma$ -prompt et nous les appliquons avec les résultats du chapitre précédent.

Deux annexes font suite à ces chapitres. Dans la première nous présentons la transformée en ondelettes continue et discrète sur une dimension et deux dimensions. La deuxième annexe regroupe l'état de l'art et des méthodes de traitement de données pour la tomographie classique à partir de projections tronquées, en particulier la fusion d'ensemble de données complètes basse résolution et tronquées haute résolution.





## Chapitre 2

---

# Verrou médical

---

Environ 10 millions de personnes sont atteintes de cancer dans le monde. Une fois diagnostiqué, plusieurs solutions de traitement sont possibles suivant le cas : la chirurgie, la chimiothérapie ou la radiothérapie. D'autres techniques telles que la cryothérapie ou les ultrasons focalisés de haute intensité sont apparues récemment et sont encore moins répandues. Plus de 50% des patients atteints de tumeurs malignes sont traités par radiothérapie, et cette technique peut être utilisée pour prévenir les rechutes. Cependant, certaines tumeurs sont résistantes, mêmes aux radiations. En 1946, Robert R. Wilson propose d'utiliser des faisceaux d'ions (carbone ou protons) pour détruire les cellules cancéreuses [Wilson (1946)]. Cette technique, appelée hadronthérapie, est alternative à la méthode classique de radiothérapie qui, elle, emploie des rayons X. Ayant une balistique plus précise et une efficacité biologique plus importante qu'en radiothérapie classique [Fokas *et al.* (2009)], il est nécessaire de contrôler efficacement l'irradiation afin de pouvoir corriger rapidement les éventuelles erreurs de traitement. L'imagerie TEP est le système qui est principalement utilisé actuellement, et d'autres moyens plus efficaces et plus précis sont en cours de développement. C'est le cas de systèmes TEMP qui permettent d'imager des photons secondaires produits lors des interactions des ions avec les cellules cibles. Nous nous intéressons en particulier à la caméra Compton, un système permettant de faire de l'imagerie 3D qui présente des avantages non négligeables tels que l'imagerie 3D de photons appartenant à un large spectre en énergie.

## 2.1 Hadronthérapie

### 2.1.1 Physique de l'hadronthérapie

Différentes particules interviennent en hadronthérapie. Un patient est composé de cellules, elles-mêmes contenant des atomes. Ce patient est irradié avec un faisceau d'ions qui, lors de son interaction avec les cellules, génère des particules secondaires telles que des photons, des électrons ou des neutrons. Les systèmes TEP ou TEMP permettent d'imager uniquement des photons. Bien qu'ils pourraient détecter d'autres particules, celles-ci ne constituent que du bruit.

Selon leur nature et leur énergie, les particules interagissent différemment avec la matière. Les particules peuvent être classifiées selon leur charge et selon leur masse :

		Particules chargées	Particules neutres
Particules lourdes		Ions, muons, pions	Neutrons
	Interactions	Diffusion élastique, Diffusion inélastique, Rayonnement de Tcherenkov Bremsstrahlung	Diffusion élastique Diffusion inélastique Capture nucléaire Réactions nucléaires Fission nucléaire
Particules légères		Électrons, positons	Photons (X ou $\gamma$ )
	Interactions	Bremsstrahlung Diffusion inélastique Diffusion élastique Rayonnement Tcherenkov Réactions nucléaires	Effet photoélectrique Diffusion Compton Création de paires $e^-/e^+$

La probabilité d'interaction d'une particule selon une certaine réaction est décrite par sa section efficace. La section efficace peut être calculée si l'interaction de la particule est connue.

On définit la section efficace totale comme étant le rapport du nombre  $R$  de particules sortantes, dans n'importe quelle direction, ayant interagi dans une cible, sur le produit du flux  $\phi$  par le nombre  $N$  de noyaux cibles par unité de surface.

$$\sigma = \frac{R}{\phi N} \quad (2.1)$$

La section efficace totale  $\sigma$  a la dimension d'une surface.

Dans les sections ci-après, nous verrons plus en détails les interactions des ions et des photons.

### Interaction ions-matière

L'hadronthérapie permet de traiter des tumeurs allant jusqu'à 30 cm de profondeur, ce qui correspond à des énergies allant jusqu'à 220 MeV/u (par unité de masse atomique) pour les protons et 430 MeV/u pour les ions carbone. Lors de leur interaction dans la matière,

les ions sont progressivement ralentis. Ce ralentissement est caractérisé par son pouvoir d'arrêt  $S(E) = -dE/dx$ . Selon la vitesse du projectile, on peut décomposer l'interaction avec la matière en deux catégories. Soit l'ion est ralenti de manière quasi-continue par les électrons du matériau cible et subit des collisions élastiques/inélastiques avec les électrons de la cible, soit il interagit avec les atomes de la cible par des collisions élastiques. Dans le premier cas, on parlera de pouvoir d'arrêt électronique  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_e$  et dans le second, de pouvoir d'arrêt nucléaire  $\left(\frac{dE}{dx}\right)_\nu$ . La perte d'énergie par unité de longueur subie par l'ion a été caractérisée par la formule de Bethe et Bloch [Bethe (1930), Bloch (1933)a, Bloch (1933)b].

La perte d'énergie moyenne que subit un ion dans la matière est le pouvoir d'arrêt total, soit la somme des pouvoirs d'arrêt nucléaire et électronique :

$$S(E)_{total} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{total} = -\left[\left(\frac{dE}{dx}\right)_e + \left(\frac{dE}{dx}\right)_\nu\right] \quad (2.2)$$

Lorsque l'ion se déplace dans la cible, il ionise les atomes du matériau, leur transmet au fur et à mesure une partie de son énergie tout au long de son parcours, et par conséquent ralentit progressivement. Le pouvoir d'arrêt total  $-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{total}$  augmente au cours du ralentissement. La section efficace d'interaction augmente lorsque l'énergie de la particule décroît et au final, le pouvoir d'arrêt chute (cf. figure 2.1). C'est le pic que l'on peut observer si on trace le pouvoir d'arrêt en fonction de la distance parcourue dans le matériau. Ce pic est appelé pic de Bragg d'après Sir Henri Bragg qui a étudié le ralentissement de particules  $\alpha$  dans l'air [Bragg and Kleeman (1905)].

Les énergies utilisées en hadronthérapie étant relativement élevées, l'irradiation de la cible par le faisceau d'ions entraîne des réactions nucléaires qui produisent des fragments de particules voire la désintégration complète du projectile et/ou des noyaux de la cible. Des particules secondaires sont créées lors de ces interactions (fragments d'ions, neutrons, photons, électrons) et contribuent elles aussi à la dose.

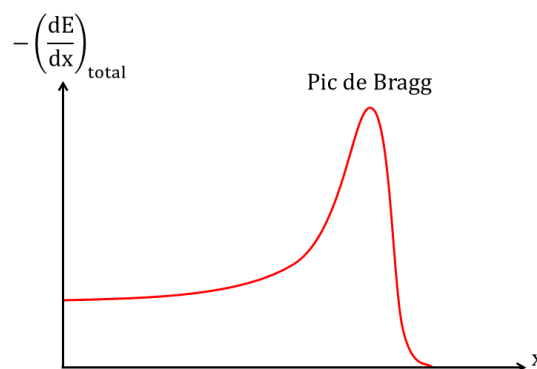


FIGURE 2.1 – Pouvoir d'arrêt de l'ion en fonction de la distance parcourue. Pic de Bragg.

## Interaction photons-matière

Les photons sont des particules de masse nulle transportant les ondes électromagnétiques d'énergie  $E_\gamma = h\nu$  (avec  $h$  constante de Planck). À la différence des particules chargées qui déposent leur énergie le long de leur trajectoire, les photons ont des interactions localisées.

Une interaction se caractérise par l'absorption du photon dans la matière, de sorte que macroscopiquement cela se traduise par un effet d'atténuation via la loi de Beer-Lambert :

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (2.3)$$

où :

- $I_0$  est l'intensité du flux de photons incident,
- $I$  est l'intensité sortante,
- $\mu = N\sigma$  est le coefficient d'absorption linéaire du photon dans la matière  $\mu(h\nu, Z_2)$ ,
- $x$  est la distance parcourue par le photon,
- $N$  est la densité atomique,
- $\sigma$  est la section efficace.

Lors de leur passage dans la matière, les photons traversent une certaine distance sans interagir puis déposent brutalement leur énergie soit par effet photoélectrique, par effet Compton, par création de paires électron/positon ( $e^-/e^+$ ), ou par d'autres réactions moins fréquentes. On a alors :

$$\mu = \mu_{photo} + \mu_{Compton} + \mu_{paire} \quad (2.4)$$

Les réactions minoritaires sont négligées : diffusion de Rayleigh (diffusion sur l'atome dans son ensemble, ou diffusion par tous les électrons de manière cohérente), diffusion Thompson (diffusion sur un électron quasi-libre dans la limite classique), excitation nucléaire, réaction ( $\gamma, n$ ), photofission.

**Effet photoélectrique.** Lorsqu'un photon est absorbé par effet photoélectrique par un atome, celui-ci éjecte sur son passage un électron. L'énergie de l'électron éjecté  $E_e$  sera alors celle du photon incident  $h\nu$  diminuée de l'énergie de liaison  $E_1$ . Le noyau possède une énergie de recul  $E_r$  que l'on néglige la plupart du temps pour écrire :

$$E_e \approx h\nu - E_1 \quad (2.5)$$

Le trou laissé par l'électron éjecté peut soit être comblé par la capture électronique soit par le réarrangement des orbitales atomiques. L'électron éjecté est ensuite capturé et dépose son énergie dans la cible. Si la cible est un détecteur par exemple, une impulsion proportionnelle à l'énergie déposée est créée et on peut ainsi déterminer l'énergie transférée par le photon à l'électron.

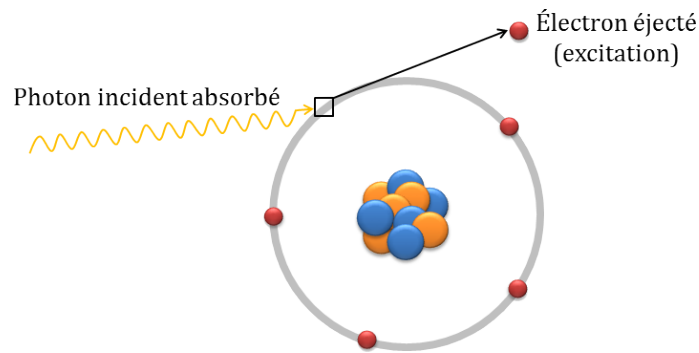


FIGURE 2.2 – Schéma illustrant l'effet photoélectrique.

**Effet Compton.** La diffusion Compton se traduit par la diffusion inélastique d'un photon sur un électron (supposé au repos) : le photon d'énergie initiale  $E_\gamma = h\nu$ , en entrant en collision avec un électron de l'atome, lui transmet une partie de son énergie suffisamment élevée pour l'arracher du cortège électronique et l'éjecter, ionisant ainsi l'atome.

La relation entre l'impulsion et l'énergie cinétique en relativité donne l'énergie du photon après la diffusion Compton :

$$E'_\gamma = h\nu' = \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon(1 - \cos \beta)} \quad (2.6)$$

avec  $\epsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$  et  $m_e c^2 = 511 \text{keV}$ .

L'énergie perdue par le photon est entièrement transférée à l'électron qui acquiert l'énergie cinétique :

$$T_e = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \frac{\epsilon(1 - \cos \theta)}{1 + \epsilon(1 - \cos \beta)} \quad (2.7)$$

Il est alors possible de calculer l'angle sous lequel le photon incident a été diffusé :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 T_e}{E_\gamma (E_\gamma - T_e)} \quad (2.8)$$

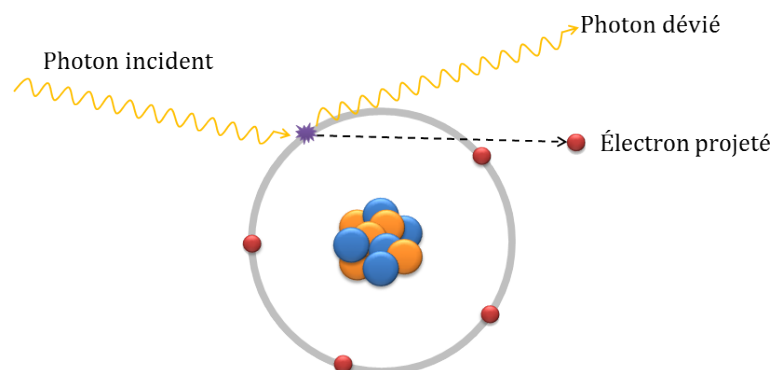


FIGURE 2.3 – Schéma illustrant l'effet Compton.

La section efficace de diffusion Compton est donnée par la formule de Klein-Nishina

[Klein and Nishina (1929)] :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \epsilon(1 - \cos(\beta)))^{-2} \left( 1 + \cos^2(\beta) + \frac{\epsilon^2(1 - \cos(\beta))^2}{1 + \epsilon(1 - \cos(\beta))} \right) \quad (2.9)$$

où  $r_e$  est le rayon classique d'un électron,  $r_e = 7.94 \times 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>.

Sous une forme plus simplifiée, on peut écrire :

$$K(\beta, E_\gamma) \simeq \frac{r_e^2}{2} \alpha^2 \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} - \sin^2 \beta \right) \text{ avec } \alpha = \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \quad (2.10)$$

**Création de paire.** Si l'énergie  $E_\gamma$  du photon est supérieure à deux fois 511 keV, soit la masse de l'électron ( $m_e c^2$ ), alors dans le champ électrique du noyau ou d'un électron, il peut y avoir la création d'une paire électron/positon ou e-/e+.

Le positon ainsi créé parcourt une certaine distance avant de s'annihiler avec un autre électron et de produire des rayons  $\gamma$  de 511 keV chacun, émis dans deux directions opposées.

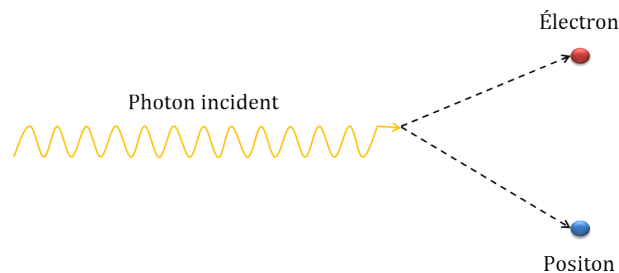


FIGURE 2.4 – Schéma illustrant la création de paire.

**Région des différentes interactions.** Les processus qui prédominent dépendent de l'énergie et de l'élément cible (cf. figure 2.5). Dans le silicium par exemple, la section efficace de diffusion Compton est supérieure à la somme des sections efficaces pour l'effet photoélectrique et la création de paire entre 100 keV et quelques MeV. Dans cette gamme d'énergies, l'effet Compton est donc dominant par rapport à l'effet photoélectrique et à la production de paire.

### Énergie déposée

La perte d'énergie d'une particule et l'énergie que cette particule dépose dans un milieu (par exemple dans un détecteur ou dans un volume biologique) sont deux notions bien différentes.

Pour des particules rapides, une fraction importante de l'énergie cinétique incidente est transférée à des particules secondaires énergétiques qui peuvent ensuite sortir du milieu sans avoir déposé la totalité de leurs énergies. Il n'existe pas de formule précise qui puisse être simplement utilisée pour calculer l'énergie déposée, car le phénomène est assez complexe et dépend de la géométrie et des caractéristiques du milieu. De plus, des partic-

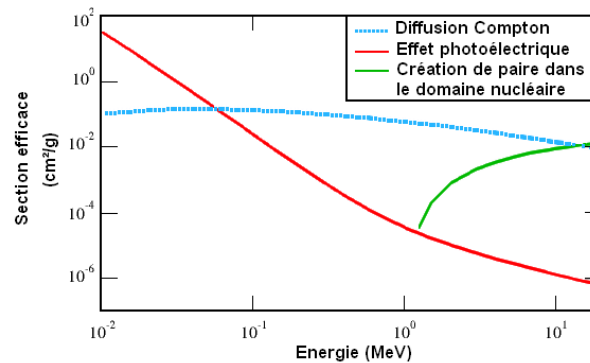


FIGURE 2.5 – Régions de prépondérance des différentes interactions selon l'énergie incidente dans le silicium.

ules secondaires sont mises en jeu assez souvent et sont souvent différentes du projectile incident.

Afin de remédier à ce problème, on a maintenant recours à des calculs sur ordinateurs de type Monte Carlo, qui exécutent une simulation complète de l'histoire de la particule dans un milieu : parcours, collisions, génération de particules secondaires, énergie déposée (cf. section 5.1).

La figure ci-après, extraite de [Schardt *et al.* (2010)] schématise la dose relative, que l'on peut relier à l'énergie déposée, selon le type de particule incidente dans de l'eau.

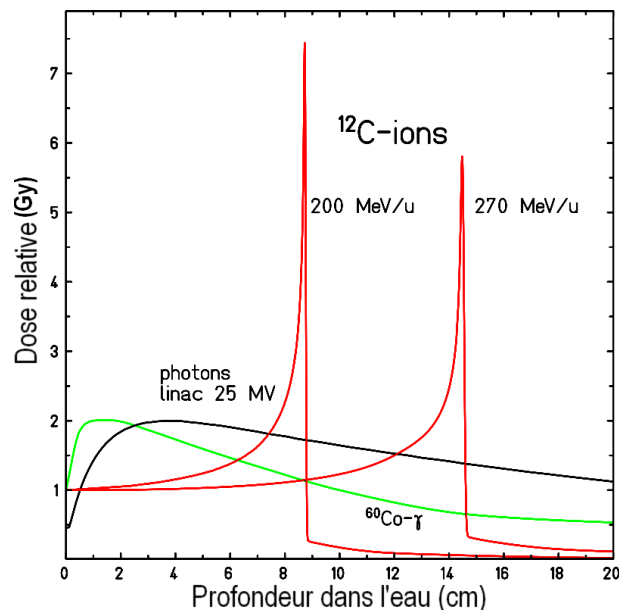


FIGURE 2.6 – Dose relative de différents faisceaux (rayons X, ions carbone) dans l'eau.

Quel que soit le type de rayonnement incident, il y aura mise en mouvement de particules chargées dans la matière. Dans un détecteur, les interactions avec les particules de la cible modifient leur état au repos et déposent une énergie qui peut être quantifiée. Dans un milieu biologique, cela peut causer des dommages plus ou moins permanents.



## Interaction particules-matière biologique

L'interaction de particules avec des organismes vivants peut causer des dommages de plusieurs types. Pour quantifier ces dommages plusieurs unités ont été introduites en dosimétrie. De manière synthétique, la dosimétrie permet de mesurer l'énergie déposée par unité de masse (dose en Gray), afin de quantifier les effets sur la matière biologique. Cette dose absorbée peut être pondérée selon la nature du rayonnement (équivalent de dose en Sievert) et selon l'organe considéré (dose effective en Sievert).

L'effet biologique d'un rayonnement donné est dû à l'ionisation de la matière dans les tissus irradiés. Cette ionisation peut directement endommager les molécules d'ADN, ou indirectement en créant des radicaux libres depuis les molécules d'eau que contiennent les cellules. Ces radicaux attaquent ensuite les molécules biologiques de manière chimique. L'ADN subit quotidiennement des dommages de ce type, donc il existe un mécanisme de réparation de l'ADN qui est assez complexe et qui dépend des dommages causés à la molécule. Si l'ADN ne se répare pas, ou s'il ne se répare que partiellement, la cellule a plusieurs futurs possibles (cf. séquence schématisée 2.7) :

- soit elle meurt,
- soit elle ne fonctionne plus correctement, ce qui entraîne des effets somatiques (i.e. des effets ne concernant que la cellule irradiée) comme le cancer,
- soit elle est altérée de manière permanente, et cette altération sera transmise aux générations suivantes (i.e. un effet génétique).

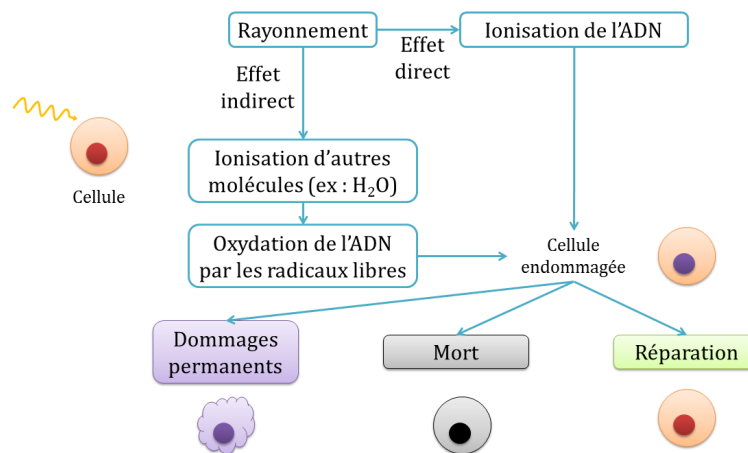


FIGURE 2.7 – Séquence schématisée des effets biologiques.

### 2.1.2 Principe de l'hadronthérapie

Comme nous l'avons vu précédemment (cf. section 2.1.1), les ions déposent une importante quantité d'énergie sur une très courte distance avant de s'arrêter complètement.

Ce type de profil offre des propriétés balistiques très attrayantes qui permettent de cibler précisément certaines tumeurs radiorésistantes ou inopérables tout en évitant les

organes environnants, dits organes à risque [Fokas *et al.* (2009)]. En comparaison avec la radiothérapie classique, les effets indésirables sont donc réduits.

De plus, les ions sont plus efficaces que les photons, car ce sont des particules à haut TLE. Le TLE, ou transfert linéaire d'énergie, est un terme utilisé en radiobiologie qui désigne l'énergie moyenne déposée par unité de longueur de la trajectoire de la radiation. Les ions entraînant plus de dommages sur l'ADN que les photons car, lors d'une irradiation, l'énergie déposée par les photons le long de leur trajectoire est plus faible que celle des particules chargées, ce qui entraîne une influence sur l'efficacité biologique relative, ou EBR. En effet, celle-ci tend à augmenter lorsque le TLE croît et dépend également du milieu considéré. Cela peut varier d'un facteur allant jusqu'à 2 pour les protons et jusqu'à 5 pour les ions carbone. Cependant à partir d'une certaine valeur du TLE ( $100 \text{ keV.m}^{-1}$ ), l'EBR décroît car l'énergie des particules est trop élevée par rapport à celle qui devrait être utilisée pour détruire les cellules cancéreuses. Par conséquent, une irradiation avec les particules chargées utilisées en hadronthérapie est tout de même risquée et nécessite un contrôle précis, car les dommages sont plus faciles à induire aussi bien sur les cellules tumorales que sur les cellules saines. L'efficacité de l'hadronthérapie est donc très attrayante du point de vue biologique.

Les principales méthodes actuellement utilisées sont la chimiothérapie, la radiothérapie et la chirurgie. L'hadronthérapie est généralement utilisée dans le cas de certaines tumeurs en complémentaires ou simultanément à une autre méthode de traitement du cancer, lorsqu'on ne peut pas recourir à la radiothérapie et/ou la chirurgie. Les tumeurs traitées par cette technique sont généralement localisées dans la tête ou le cou, dans la prostate, et certaines tumeurs de l'os. L'irradiation par les ions s'avère alors être une alternative très efficace qui permet de mieux préserver les tissus sains environnants.

Comme en radiothérapie classique, un suivi préalable par imagerie médicale (CT, TEP, etc) est nécessaire afin de veiller à ne détruire que les cellules tumorales. Ce suivi antérieur au traitement permet de déterminer le plan de traitement, c'est-à-dire la cartographie 3D de la tumeur ainsi que la dose à administrer au patient et la manière de l'administrer.

Actuellement, les traitements par hadronthérapie se font soit au moyen d'ions carbone, soit au moyen de protons. On parle de carbonothérapie et de protonthérapie. Selon la spécificité de la tumeur, on utilise l'une ou l'autre. Certaines tumeurs ophtalmiques et pédiatriques sont traitées par protonthérapie. La carbonothérapie est spécifique aux tumeurs inopérables ou incomplètement résécables et radiorésistantes situées dans un environnement d'organes à risque radiosensibles. En effet, à dose équivalente, on observe que les ions carbone détruisent plus efficacement les cellules cancéreuses que les photons ou même les protons.

Bien que l'hadronthérapie présente de nombreux avantages par rapport à la radiothérapie conventionnelle, il est impératif de contrôler efficacement l'irradiation, car les dommages sur les tissus sains environnants sont plus graves qu'avec les méthodes clas-

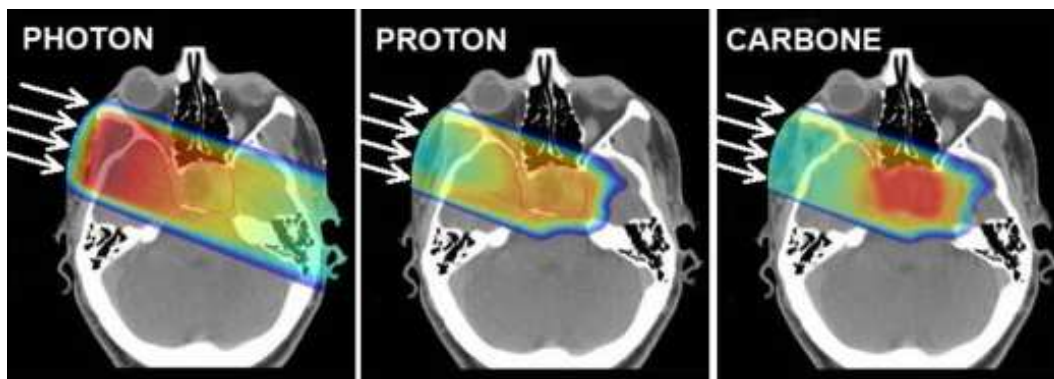


FIGURE 2.8 – Exemple de dépôt de dose pour trois types de traitement différents.  
Source : <http://centre-etoile.org>

siques. Des moyens efficaces et précis de contrôle de traitement en ligne sont en cours de développement ou d'étude. Pour l'instant, c'est la TEP qui est principalement utilisée pour le contrôle de qualité des traitements en hadronthérapie.

## 2.2 Contrôle en ligne

Le contrôle de l'irradiation en ligne est un défi important en hadronthérapie. Au cours du traitement, les interactions entre les ions et les cellules des tissus produisent des noyaux instables. Il en résulte une suite d'interactions qui produisent deux types de particules  $\gamma$ . Certains fragments produisent des positons qui s'annihilent avec des électrons et émettent deux photons  $\gamma$  de 511 keV chacun. Les photons issus de l'annihilation des positons sont détectés à l'aide d'un système d'imagerie TEP et les images obtenues permettent de retrouver l'information de la dose. Autrement, les fragments nucléaires excités produisent des particules appelées  $\gamma$ -prompt dans un intervalle de temps très court ( $< 1$  ps). Ces photons peuvent être observés grâce à un système d'imagerie TEMP. D'autres particules secondaires sont également produites, comme les neutrons ou des protons. L'imagerie d'interaction vertex [Henriquet *et al.* (2012)] permet par exemple de reconstruire les trajectoires de particules secondaires chargées émergeant du patient jusqu'à leur position d'émission, le vertex.

### 2.2.1 Contrôle par TEP

Afin d'utiliser les émetteurs de positons pour faire du contrôle thérapeutique en carbonothérapie, on peut considérer deux scénarios.

La méthode la plus simple consiste à irradier à l'aide d'un faisceau radioactif d'ions  $^{10}\text{C}$  ou  $^{11}\text{C}$  par exemple. Cependant, en pratique le taux de production d'ions radioactifs est très faible de l'ordre de 0.1 à 1%, ce qui augmente les coûts de production. Ainsi, à la fin des années 70, il a été proposé d'utiliser le faisceau radioactif pour une exposition à faible dose avant l'irradiation thérapeutique de l'isotope stable. Cette technique a été développée

au laboratoire Lawrence Berkeley [Llacer (1988)]. La TEP permet alors de mesurer la fin du parcours d'un faisceau radioactif [Tobias *et al.* (1977)]. Les propriétés de pénétration du faisceau d'ions radioactifs et du faisceau stable étant similaires, cette méthode peut-être utilisée pour la vérification du parcours avec une précision millimétrique.

Une autre méthode consiste à considérer que, lors d'une irradiation avec un faisceau d'ions stables, une partie des projectiles entrant en collision avec les noyaux des atomes du volume irradié produisent des fragments émetteurs de  $\beta+$  qui "activent" les tissus le long du faisceau. On parle alors "d'autoactivation". Les principaux isotopes formés lors d'une irradiation sont le  $^{11}\text{C}$ , l' $^{15}\text{O}$  et le  $^{10}\text{C}$  qui ont une durée de vie respective de 20 min, 2 min et 20 s. Dans un premier temps, le contrôle se faisait après le traitement sur un site distant afin de vérifier "l'autoactivation" du faisceau thérapeutique stable d'ion  $^{12}\text{C}$  [Tomitani *et al.* (1994)]. Cependant, on ne peut imager presque que des ions  $^{11}\text{C}$  et des fragments de cible, à cause des sections efficaces de réaction et de l'intervalle de temps entre la fin de l'irradiation et le scanner TEP ( $\sim 5$  mn). Les mesures effectuées dans [Tomitani *et al.* (1994)] montrent qu'on peut retrouver l'information du parcours à partir du pic d'activité formé par les fragments  $^{11}\text{C}$  de projectiles qui s'immobilisent légèrement avant le point d'arrêt des ions  $^{12}\text{C}$  primaires. L'information de dose peut également être quantifiée à partir de l'activité des fragments radioactifs [Enghardt *et al.* (2004)].

Entre 1997 et 2008, plus de 440 patients atteints de tumeurs radiorésistantes (tête et cou) sont traités par carbonothérapie au Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) de Darmstadt (Allemagne). Le premier système TEP utilisé au GSI jusqu'en 2008 (cf. figure 2.10), a été développé par le FZR (Forschungszentrum Rossendorf) de Dresde [Enghardt *et al.* (1992), Pawelke *et al.* (1996), Pawelke *et al.* (1997)]. C'est un dispositif qui permet de faire du contrôle en ligne en mesurant l'autoactivation des tissus, alors que la plupart des autres centres d'hadronthérapie utilisent des systèmes hors ligne, qui nécessitent un déplacement immédiat du patient après son traitement. La capacité de ce système à produire une image 3D répond à la fois à l'exigence de vérification du parcours (déduite à partir des fragments  $^{11}\text{C}$  de projectiles), mais aussi du dépôt de dose latéral (principalement déduit des fragments de cible).



FIGURE 2.9 – GSI Darmstadt.

Peu après, une caméra à positons planaire a été développée et installée à l'HIMAC (Heavy Ion Medical Accelerator in Chiba) au Japon pour déterminer le parcours d'un

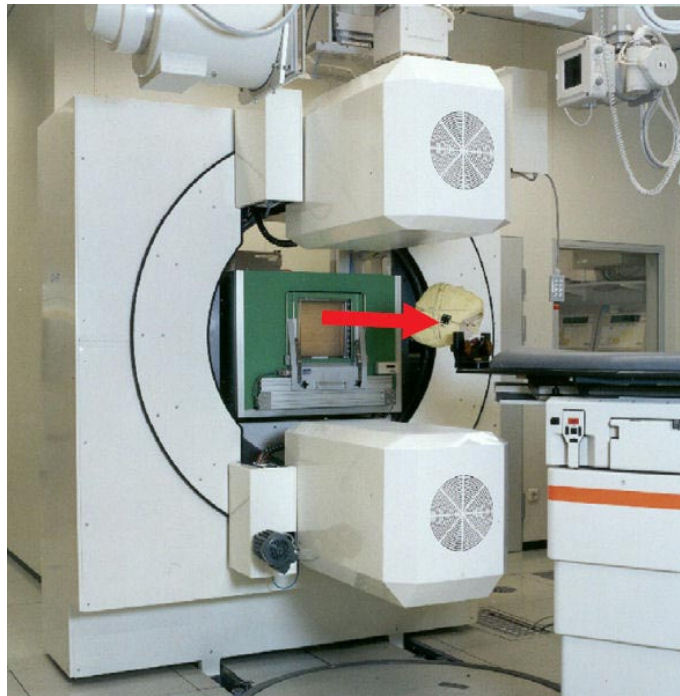


FIGURE 2.10 – Système TEP installé au GSI Darmstadt. La flèche rouge représente la direction du faisceau. Photo : A. Zschau, GSI Darmstadt.

faisceau d'ion  $^{11}\text{C}$  de faible intensité dans un patient avant de lui délivrer le traitement complet. Mais ce système a du être couplé avec un scanner TEP hors ligne pour une acquisition volumétrique [Kanazawa *et al.* (2002)].

En protonthérapie, l'utilisation de la TEP pour le contrôle de qualité est plus difficile à cause du manque de fragmentation de projectiles. Dans [Zhu and El Fakhri (2013)], les avantages et les inconvénients de l'utilisation de la TEP en ligne, en salle et hors ligne pour le contrôle de qualité des traitements de protonthérapie sont passés en revue.

Les premières recherches ont été menées à Brookhaven à la fin des années 70 [Bennett *et al.* (1975), Bennett *et al.* (1978)] : on étudie dans un premier temps l'utilisation potentielle d'un système d'imagerie 2D de fragments cibles émetteurs de  $\beta^+$  induits par l'irradiation de fantômes d'animaux par un faisceau de proton. Dans les années 1990, ce sujet a de nouveau été abordé par plusieurs équipes pour des mesures TEP hors ligne sur des fantômes [Paans and Schippers (1992), Del Guerra *et al.* (1994), Oelfke *et al.* (1996)] et même sur un patient [Vynckier *et al.* (1993)]. Dans [Parodi *et al.* (2007)], une étude a prouvé la faisabilité de l'utilisation d'une TEP/CT post-traitement au Massachusetts General Hospital (États-Unis). Cependant, les délais entre le traitement et l'acquisition TEP hors ligne étant relativement longs, ils entraînent une réduction importante du signal [Knopf *et al.* (2011)]. De plus, l'activité anatomique due uniquement au métabolisme ou la perfusion sanguine induisent des effets de dilution du sang [Knopf *et al.* (2009)]. Dans [Litzenberg *et al.* (1992), Litzenberg *et al.* (1999)], l'utilisation de la TEP en ligne



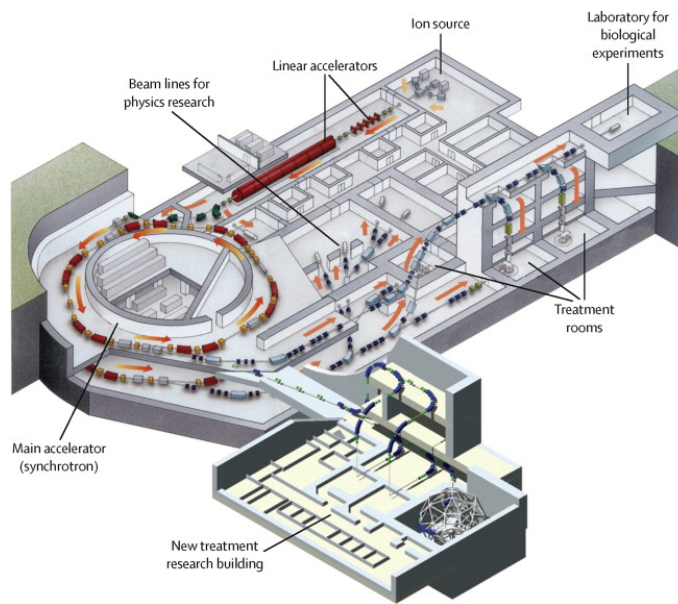


FIGURE 2.11 – HIMAC au Japon.

a été proposée et cela a permis d'éviter ces problèmes [Parodi *et al.* (2008), España and Paganetti (2010)]. Elle offre encore l'avantage unique et très attrayant de la vérification directe du traitement sans aucune exposition supplémentaire du patient aux radiations au-delà de la dose thérapeutique [Kraan *et al.* (2015)]. Mais, le design spécifique de la TEP en ligne entraîne une dégradation de la résolution spatiale des images due à une plus faible couverture angulaire du scanner. La TEP en salle semble donc être la solution alternative la plus rentable pour la plupart des centres d'hadronthérapie, à l'exception des centres de traitement disposant d'un scanner hors ligne à proximité.

La reconstruction de l'image TEP et l'extraction de l'information de dose à partir de l'activité représentent également un verrou important, car ils ne peuvent s'effectuer qu'après l'irradiation [Parodi *et al.* (2007), Shakirin *et al.* (2007), Inaniwa *et al.* (2007), Fourkal *et al.* (2009), Moteabbed *et al.* (2011), Aiello *et al.* (2011), Robert *et al.* (2013)]. Par conséquent les possibles erreurs ne peuvent être corrigées qu'à la prochaine irradiation en changeant le plan de traitement [Kraft (2000)]. Le temps de reconstruction peut être amélioré notamment en augmentant la précision des coïncidences à l'aide du temps de vol (TOF) entre deux photons détectés. Cette augmentation de la vitesse de traitement d'image découle de la possibilité de calculer le point d'annihilation de positons du moment que les coordonnées des interactions dans les détecteurs et que les informations TOF sont connus. Un tel algorithme n'a besoin de traiter qu'une seule itération pour les données recueillies, contrairement aux algorithmes de reconstruction itérative classiques. Cela pourrait ainsi réduire les artéfacts dus aux limitations d'angle solide et ouvrir la voie à l'imagerie quantitative [Knopf *et al.* (2008)].

### 2.2.2 Contrôle par TEMP (caméra collimatée et caméra Compton)

Jusqu'ici, la tomographie par émission de positons était le principal système utilisé pour l'évaluation du contrôle de qualité lors d'un traitement de protonthérapie. Cependant les protons, lors des collisions inélastiques avec la matière, entraînent la formation de  $\gamma$ -prompt. Ces particules contribuent au bruit de fond en imagerie TEP. Par conséquent, ces dernières années ont vu naître l'hypothèse que ce rayonnement permettrait de fournir en temps réel des informations sur la portée du faisceau dans le patient, via l'imagerie TEMP des  $\gamma$ -prompt. La possibilité de surveiller les traitements par faisceaux d'ions avec les  $\gamma$ -prompt a été proposée pour la première fois par [Stichelbaut and Jongen (2003)]. Bien que la carte de densité de ces photons ne soit pas identique à celle de la dose déposée, il a été montré dans [Min *et al.* (2006), Testa *et al.* (2009)] qu'elle devrait permettre de calculer la position du pic de Bragg. Des simulations Monte-Carlo ont prouvé que le taux d'émission de  $\gamma$ -prompt devrait être suffisant pour faire du contrôle en ligne [Polf *et al.* (2009)].

Néanmoins, imager des  $\gamma$ -prompt n'est pas chose facile car cette mesure est affectée par une source de bruit importante provenant de l'émission de particules secondaires comme les neutrons ou la diffusion Compton des photons par exemple. Par conséquent, les systèmes doivent fournir des solutions pour pouvoir imager correctement le profil d'émission  $\gamma$ -prompt.

Ainsi, plusieurs variantes de systèmes de détection ont été étudiées : on peut notamment citer les caméras à collimateur sténopé, à fentes parallèles, et le knife-edge-slit [Ishikawa *et al.* (2001), Min *et al.* (2006), Kim *et al.* (2007), Testa *et al.* (2009), Peloso *et al.* (2011), Smeets *et al.* (2012), Bom *et al.* (2012), Lee *et al.* (2012), Lopes *et al.* (2012), Diblen *et al.* (2012), Roellinghoff *et al.* (2014), Priegnitz *et al.* (2015)]. Le système à collimation mécanique est généralement composé d'un scintillateur, avec une protection contre les neutrons, et d'un collimateur qui sélectionne les photons selon une direction donnée. On mesure alors un profil 1D correspondant à la projection de la cartographie  $\gamma$ -prompt sur la direction du faisceau. Bien que le concept soit attrayant, en particulier lorsque le rapport signal à bruit est faible, la présence du collimateur réduit considérablement l'efficacité de détection des particules.

Depuis les années 1970, la recherche a permis de développer un nouveau dispositif d'imagerie TEMP, appelé gamma-caméra Compton [Todd *et al.* (1974)]. Des travaux menés sur la simulation réaliste de la caméra font espérer une bonne efficacité et la possibilité d'une utilisation en clinique [Seo *et al.* (2007), Lenti and Veltri (2011)]. Des résultats encourageants ont été obtenus en simulation par plusieurs équipes concernant les performances du système d'imagerie Compton pour la dosimétrie in-vivo en hadronthérapie (voir par exemple [Frandes *et al.* (2010), Kormoll *et al.* (2011), Mackin *et al.* (2012), Kurosawa *et al.* (2012), Richard *et al.* (2012)]. Il faut noter que pour l'imagerie  $\gamma$ -prompt, où la source est étendue et où le spectre d'énergie est large, les résolutions spatiales et énergétiques des détecteurs font partie des principaux enjeux.

### Caméra collimatée

La TEMP classique utilise une  $\gamma$ -caméra d'Anger ou caméra à collimation mécanique, et est généralement composée d'un collimateur, d'un cristal scintillateur et de tubes photomultiplicateurs (TPM) reliés à un système électronique (cf. figure 2.12).

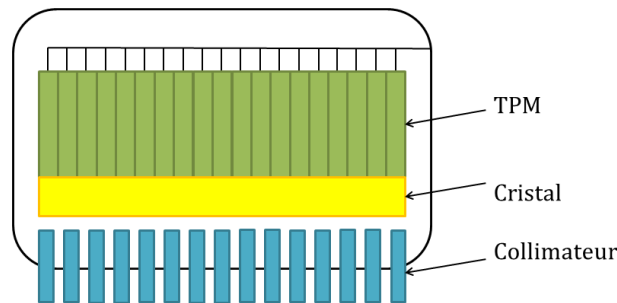


FIGURE 2.12 – Système d'imagerie TEMP classique.

Le collimateur de la  $\gamma$ -caméra d'Anger permet de sélectionner les photons incidents selon un angle désiré, afin de localiser au mieux la source des photons. On distingue notamment le collimateur à canaux parallèles, le collimateur en éventail ou fan-beam, le collimateur sténopé ou pinhole, et le collimateur conique ou cone-beam (cf. figure 2.13). Par exemple, le collimateur à canaux parallèles permet de sélectionner les photons perpendiculaires à sa surface réalisant ainsi une projection de la source d'émission sur le détecteur.

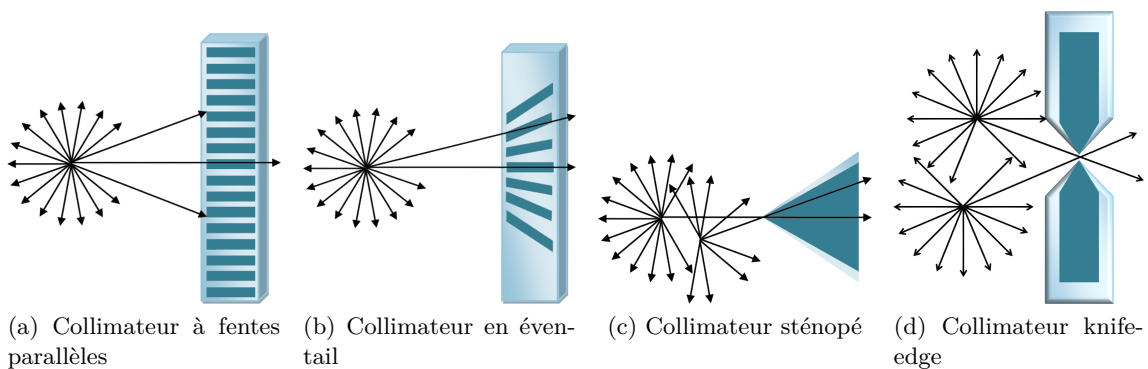


FIGURE 2.13 – Exemples de collimateurs.

Les tubes photomultiplicateurs reliés au cristal sont utilisés comme amplificateur, car ils permettent un gain électronique important (cf. figure 2.14).

La plus récente avancée est très certainement celle des semi-conducteurs en termes de performances et d'efficacité. Ils permettent de s'affranchir des TPMs notamment pour la  $\gamma$ -caméra d'Anger car ils fournissent une conversion directe de l'énergie du rayon  $\gamma$  absorbé en signal électronique.



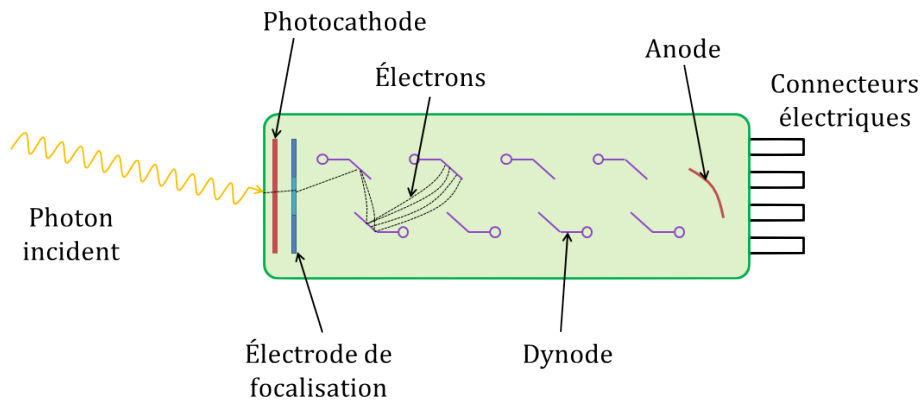


FIGURE 2.14 – Schéma tube photomultiplicateur. Lors de l'interaction d'un photon dans le TPM, des électrons sont arrachés d'un métal par effet photoélectrique à une photocathode. Cela génère un courant amplifié par une série de dynodes afin d'obtenir un gain important.

### Caméra Compton

La camera Compton est un dispositif apparu dans les années 70 [Todd *et al.* (1974)], qui a une sensibilité relativement plus élevée que celle de la  $\gamma$ -caméra classique utilisée couramment en médecine nucléaire. Actuellement, diverses équipes travaillent à la développer, pour une utilisation future dans différentes applications. Son avantage, en comparaison à la gamma-caméra Anger, est sujet d'étude et dépend des technologies utilisées mais également des techniques de traitement des données, dont l'étape principale est la reconstruction d'images. Ceci s'explique par le fait que les algorithmes de reconstruction pour la caméra Compton sont plus compliqués et encore peu aboutis, mais sur une bonne voie de développement grâce aux avancées technologiques récentes.

**Principe de l'imagerie Compton** Le dispositif d'imagerie associé à l'effet Compton, vu précédemment, est formé de deux détecteurs : une partie appelée diffuseur et une autre partie appelée absorbeur. La caméra détecte un photon en deux étapes. Le photon, d'énergie initiale  $E_0$ , est diffusé dans le premier détecteur à une position  $V_1$  et dépose une énergie notée  $E_1$ . Le photon diffusé peut encore interagir dans le premier détecteur et, idéalement, il est finalement absorbé dans le second détecteur par effet photoélectrique (cf. figure 2.15b). L'énergie déposée après la première diffusion Compton sera notée ci-après  $E_2$ . Idéalement, on devrait avoir  $E_0 = E_1 + E_2$ . Selon la loi de conservation de l'énergie, il est alors possible de calculer l'angle sous lequel le photon incident a été diffusé. L'angle Compton, ou angle  $\beta$ , est donné par la formule [Compton (1923)] :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{E_0(E_0 - E_1)}, \text{ avec } m_e c^2 = 511 \text{ keV} \quad (2.11)$$

Les positions de la première et de la deuxième interaction, notées  $V_1$  et  $V_2$ , et les énergies  $E_1$  et  $E_2$  définissent un évènement  $e$ . La source d'où provient le photon incident se trouve

sur la surface du cône défini par son apex  $V_1$ , son demi-angle d'ouverture  $\beta$  (l'angle de diffusion du photon) et son axe de direction  $\overrightarrow{V_2V_1}$ . L'image de la source est reconstruite en utilisant un algorithme analytique ou itératif (cf. chapitres 4 et 6). En général, une partie de l'énergie initiale est déposée dans un matériau non-sensible ou emportée hors du dispositif par le photon ou un de ses dérivés. À ce moment, l'énergie totale mesurée  $E_{tot}$  ne correspond pas forcément à l'énergie initiale  $E_0$ , ce qui entraîne une surestimation de l'angle Compton calculé selon (2.11).

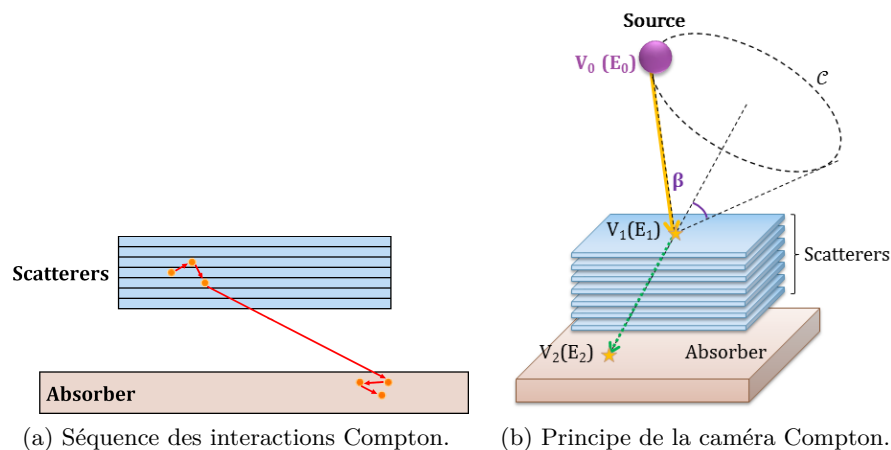


FIGURE 2.15 – (a) Un photon subit une diffusion Compton dans un premier bloc de détecteurs appelé diffuseur et est ensuite absorbé dans un second bloc appelé absorber. (a) L'ordre de la séquence des interactions ne peut pas être établi mais uniquement estimée. (b) À partir des mesures de positions et d'énergies, le point ayant émis le photon se situe sur la surface d'un cône.

**Optimisations** Les détecteurs au gaz peuvent être utilisés pour la fabrication de diffuseurs. Certaines équipes étudient l'applicabilité des détecteurs au gaz pour l'astronomie ou le médical [Kabuki *et al.* (2007), Ueno *et al.* (2012), Azevedo *et al.* (2013)]. Malgré leur faible efficacité comparé aux semi-conducteurs, ils permettent de suivre l'électron de recul [Tanimori *et al.* (2004), Takada *et al.* (2005)] ce qui limite la reconstruction à une petite section de cône.

Les semi-conducteurs sont très souvent employés dans la partie diffuseur de la caméra. Ils ont d'ores et déjà montré leur efficacité en TEMP classique. Par exemple, le silicium favorise la diffusion Compton, le germanium et le CdTe fournissent une meilleure résolution énergétique et une meilleure efficacité [Harkness *et al.* (2009), Oonuki *et al.* (2007)]. Ainsi, depuis le début des années 2000, des caméras Compton au Si/CdTe ont été étudiées dans [Takahashi *et al.* (2003), Watanabe *et al.* (2005), Watanabe *et al.* (2006), Watanabe *et al.* (2014), Mitani *et al.* (2004), Tanaka *et al.* (2004), Odaka *et al.* (2007), Takeda *et al.* (2009), Takeda *et al.* (2012), Suzuki *et al.* (2013), Ichinohe *et al.* (2013), Chmeissani *et al.* (2014)]. Elles permettent d'imager des photons d'énergie allant jusqu'à plusieurs centaines de keV et sont caractérisées par une haute résolution angulaire.

Il a été également montré que les détecteurs au CZT sont plus avantageux que le silicium ou le HPGe pour imager des photons de quelques centaines de keV à plusieurs MeV avec une caméra Compton [Du *et al.* (2001), Xu *et al.* (2004)] et présentent également de nombreux avantages pour les dispositifs portables [Judson *et al.* (2011)]. Un prototype de caméra avec un diffuseur en CZT a ainsi été construit à Dresde [Fiedler *et al.* (2011)]. Dans [Seo *et al.* (2010)], le détecteur au Si/NaI permet de distinguer des sources d'énergies différentes.

En général, l'absorbeur est fabriqué à l'aide de semi-conducteurs ou de scintillateurs. Bien que les semi-conducteurs fournissent une meilleure résolution énergétique et spatiale, les scintillateurs sont plus robustes, moins chers, et leur efficacité est bien meilleure. Le choix du matériau se fait donc en fonction de l'application. Par exemple, à haute énergie, pour une absorption totale des photons diffusés, il vaut mieux favoriser un absorbeur de haute densité avec une grande section efficace photoélectrique.

Ces considérations sont prises en compte dans le développement du prototype de caméra Compton à l'IPN de Lyon [Krimmer *et al.* (2014), Krimmer *et al.* (2015)]. Les diffuseurs sont en silicium et quatre matériaux avaient été considérés pour l'absorbeur : le germanate de bismuth (BGO), l'oxyorthosilicate de lutetium-yttrium (LYSO), l'iodure de sodium (NaI) et le bromure de lanthane (LaBr<sub>3</sub>). Le LYSO et le BGO semblent les plus appropriés, en raison de leur grande section efficace photoélectrique [Richard *et al.* (2012)], et le choix s'est finalement fixé sur un absorbeur composé de cristaux de LYSO.

Outre le perfectionnement de l'instrumentation, il ne faut pas oublier l'amélioration des algorithmes de reconstruction, qui font toute la différence.

## Comparaison caméra Compton et caméra collimatée

L'imagerie TEMP est un domaine qui change rapidement, et ces dernières années ont donné lieu à des nouveaux développements à la fois dans les technologies de l'instrumentation, que dans les algorithmes de traitement d'images. Beaucoup de progrès sont à noter pour les scintillateurs et les transducteurs de photons, et la technologie des semi-conducteurs est de plus en plus accessible.

Les cristaux scintillateurs courants peuvent être utilisés pour les deux systèmes de détection, selon leurs caractéristiques, certains seront plus utilisés pour la caméra d'Anger, d'autres pour la caméra Compton. On retrouve principalement l'iodure de sodium activé au thallium ou NaI(Tl) qui est le plus utilisé en TEMP clinique. L'iodure de césium activé au sodium ou CsI(Na) et l'iodure de césium activé au thallium ou CsI(Tl) sont surtout utilisés pour l'imagerie du petit animal, mais le CsI(Na) est mieux adapté aux TPMs. Le bromure de lanthane ou LaBr<sub>3</sub> donne de bonnes performances et est, de ce fait, très utile pour les applications avec la caméra Compton (grâce aux forts taux de comptage), mais coûte cependant très cher. C'est l'une des raisons pour lesquelles il n'a pas été retenu dans les travaux présentés dans [Krimmer *et al.* (2014)].

Les semi-conducteurs sont également adaptés aux applications avec la caméra Compton car ils ont une bonne résolution spatiale et sont très adaptés pour les faibles énergies (<

500 keV).

Outre les systèmes de détections relativement différents de part la géométrie, mais avec quelques similitudes de part les cristaux de détection, des études ont montré que les  $\gamma$ -caméras d'Anger et Compton ont des performances très différentes.

En effet, selon [Cochran *et al.* (2008)], la TEMP Compton pourrait être une alternative à la TEMP conventionnelle (avec un collimateur mécanique) grâce à un détecteur sensible à la position. Elle permet de s'affranchir du couplage intrinsèque entre l'efficacité et la résolution dans les systèmes classiques car, pour la TEMP conventionnelle, la résolution du détecteur est liée à la taille des trous dans le collimateur (si le collimateur est large, l'efficacité est bonne mais la résolution est faible, alors que si la collimation est fine, l'efficacité est mauvaise mais la résolution est meilleure).

Il a été démontré dans [Cochran *et al.* (2008)] et [Gormley (1997)], que les performances de la  $\gamma$ -caméra Compton sont améliorées quand l'énergie de la source augmente. En effet, les deux parties de la caméra (diffuseur et absorbeur) étant sensibles à la position et à l'énergie, cela permet de mieux localiser les photons incidents sur leur cône correspondant. À basses énergies ( $<300$  keV), le système à collimation mécanique a une meilleure performance que la caméra Compton. À moyennes énergies (300-500 keV), les performances sont relativement similaires, même si la caméra Compton surpasse la caméra d'Anger : la détection de chaque photon considéré individuellement est meilleure, et la caméra à collimation électronique nécessite des taux de comptage bien plus faibles. La caméra d'Anger doit, par exemple, acquérir 20 fois plus de coups pour atteindre les performances de la caméra Compton. Enfin à hautes énergies ( $>500$  keV), les images reconstruites à partir d'acquisitions de caméra Compton sont nettement meilleures que celles avec une  $\gamma$ -caméra à collimation mécanique clinique : en fait, quand l'énergie est élevée, le collimateur du système conventionnel devient translucide, et celui-ci acquiert encore plus de coups que le système d'imagerie Compton (plus de 70 fois plus de coups acquis) dont beaucoup ne sont pas utiles et contribuent uniquement à réduire la résolution et le contraste de l'image reconstruite.

Par ailleurs, d'après [Han *et al.* (2008)], sur une base fixe du nombre d'évènements détectés pour chaque système, indépendamment de la résolution, les performances en bruit et la sensibilité de détection de la caméra Compton seraient meilleures que celles du système à collimation mécanique. On obtiendrait près de 20 fois moins de bruit pour le même temps d'imagerie et la sensibilité de la caméra Compton serait près de 20 fois supérieure à celle du système conventionnel. D'ailleurs, avec une  $\gamma$ -caméra classique, il serait plus difficile de reconstruire l'image d'une source dont la taille est inférieure à 1 cm par exemple, alors que les plus petites sources sont plutôt bien définies avec une caméra Compton.



---

# Principe de la tomographie

---

La tomographie est une technique d'imagerie qui consiste à acquérir un ensemble de projections depuis l'extérieur d'un objet. En imagerie médicale, ce sont les projections de la carte d'atténuation en imagerie de transmission ou de la carte d'activité en imagerie d'émission. En pratique, un détecteur acquiert des projections de l'objet à imager sous différentes incidences angulaires. Dans le cas de la tomographie par transmission (tomodensitométrie), la source de rayonnement se trouve à l'extérieur de l'objet, alors que dans le cas de la tomographie par émission (TEMP, TEP) la source de rayonnement se situe à l'intérieur de l'objet.

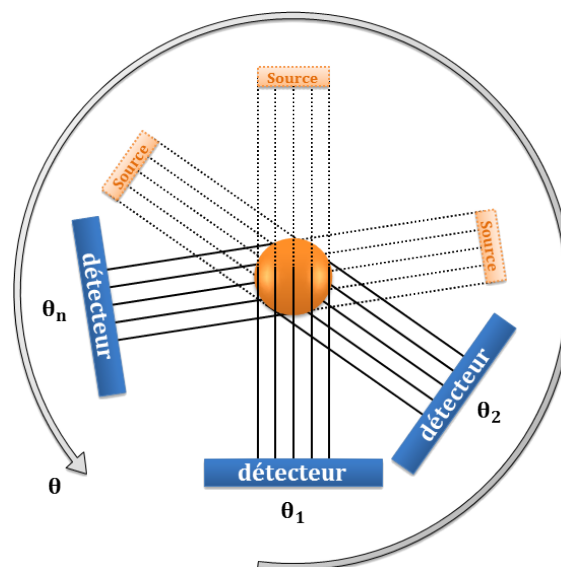


FIGURE 3.1 – Principe de l'acquisition tomographique.

Mathématiquement, il s'agit de mesurer dans un premier temps les projections qui peuvent être vues comme des intégrales sur des lignes d'un point de vue déterministe, ou comme le nombre de particules émises dans un "tube" d'un point de vue statistique. Cela revient à élaborer un modèle direct qui décrit le mieux possible les phénomènes physiques qui entrent en jeu. On peut écrire :

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \text{ où } N = \int f(\ell)d\ell \quad (3.1)$$

avec  $N_i, i = 1, 2, 3, 4$ , est le nombre de particules émises dans le voxel  $i$ .

Pour l'imagerie d'émission,  $N = \int f(\ell)d\ell$  avec  $f$  la densité radioactive et dans le cas de l'imagerie de transmission  $N = N_0 \exp(-\int \mu(\ell)d\ell)$  où  $\mu$  représente le coefficient d'atténuation (cf. equation 2.3).

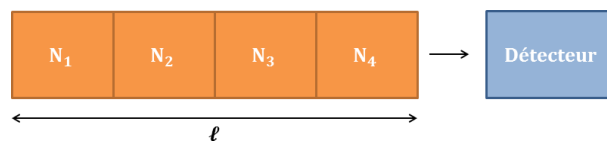


FIGURE 3.2 – Dans un milieu non atténuant et non diffusant, les particules émises dans une certaine direction arrivent sur le détecteur,  $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ .

Le but est de reconstruire la cartographie 3D de la distribution  $f$  en déterminant un modèle inverse fondé sur le modèle direct. La reconstruction tomographique fait donc partie de la classe des *problèmes inverses* car on dispose de mesures et on veut trouver par quoi ces mesures ont été produites. Les problèmes inverses sont caractérisés par le fait que l'information d'intérêt (par exemple la distribution à l'intérieur d'un patient) n'est pas directement accessible. Les détecteurs fournissent une transformation de cette information. Ces informations sont bruitées et incomplètes. L'information d'origine est alors impossible à retrouver exactement. De plus, dans un problème inverse mal posé, la résolution exacte mène à des solutions instables, autrement dit une faible variation dans les données, inévitable et due au bruit, produit une forte variation dans le résultat. En imagerie par rayonnement, on observe majoritairement des émissions qui portent une information exacte, mais aussi des photons diffusés, atténués et des coïncidences aléatoires. Les statistiques de comptage sont donc une version bruitée des données exactes.

Au début des années 1960, Hal Anger propose de détecter les rayons  $\gamma$  au moyen d'une gamma-caméra [Anger (1968)]. Mais les outils mathématiques développés par J. Radon depuis les années 1917 [Radon (1917)] ont permis à Anger d'adapter sa gamma-caméra pour en faire un système tomographique en 1968 et dans le même temps, Kuhl a pu réaliser son premier système tomographique à partir d'un appareil de radiographie [Kuhl (1968)]. Au lieu d'acquérir une unique projection avec leur système d'imagerie, Anger et Kuhl acquièrent différentes projections sous différents angles d'incidence. Ainsi, la première tentative de résolution tomographique remonte aux années 1968 et les premières images ont été obtenues par rétroprojection simple. On faisait l'hypothèse que la distribution était uniforme dans une direction donnée donc pour effectuer l'opération inverse, on répartiss-

---

sait la projection uniformément sur la ligne qui l'avait engendrée : c'est l'opération de rétroprojection non-filtrée ou épandage.

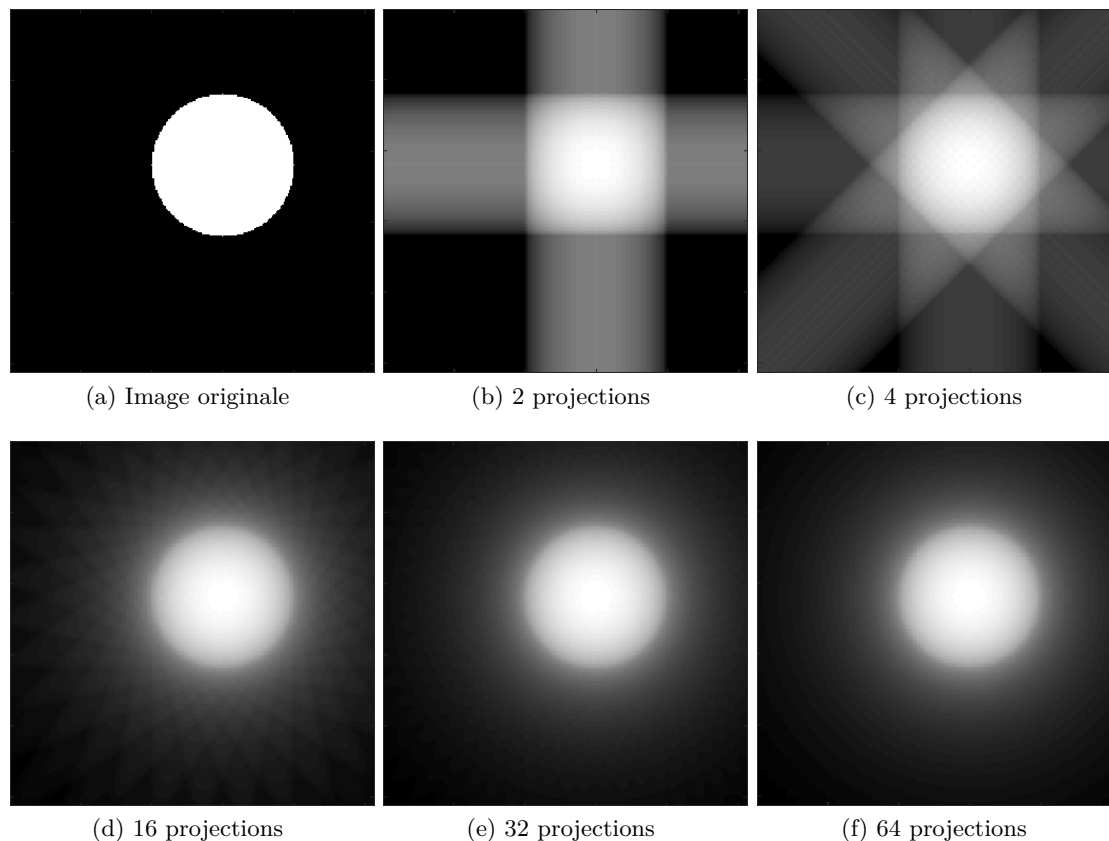


FIGURE 3.3 – Résultat de la rétroprojection non-filtrée (épandage) en fonction du nombre de projections acquises. L'épandage n'est pas l'opération inverse de la projection.

Cependant, la rétroprojection simple n'est pas l'inverse de la projection : comme on peut le voir sur la figure 3.3, en rétroprojetant simplement on obtient des artefacts en étoile. Plus tard, la découverte de la relation entre la transformée de Radon et la transformée de Fourier a été faite par R. Bracewell [Bracewell (1956)] et a permis de développer l'algorithme de rétroprojection filtrée, la vraie opération inverse de la projection. En supposant que l'on dispose de toutes les projections dans toutes les directions, il serait possible de reconstruire la distribution  $f$ .

On distingue deux catégories d'algorithmes de reconstruction : les méthodes analytiques et les méthodes algébriques. Les méthodes analytiques sont généralement plus rapides mais ne permettent pas la modélisation du bruit et le système de détection. En revanche, avec les méthodes algébriques, il est possible de modéliser statistiquement la mesure afin d'inverser le modèle direct grâce à des méthodes issues des statistiques.

Les principales techniques d'imagerie d'émission sont la scintigraphie et la tomoscintigraphie ou tomographie par émission monophotonique (TEMP), et la tomographie par émission de positon (TEP). Parmi les modalités d'imagerie par transmission on retrouve



notamment la radiographie et la tomодensitométrie par rayons X. Avec ces modalités, l'influence du bruit est non négligeable. Les données sont acquises par des détecteurs et leurs statistiques de comptage sont affectées par l'atténuation ainsi que par la diffusion Compton, et par le caractère aléatoire de l'émission dans le cas de l'imagerie d'émission. En TEMP et en TEP, si l'on rajoute à ce bruit le faible nombre de directions de projection et l'imprécision des détecteurs, on reconstruit par rétroprojection filtrée des images assez floues qui présentent des artéfacts. Ce bruit statistique peut éventuellement être pris en compte dans un algorithme d'estimation par maximisation de vraisemblance.

### 3.1 Reconstruction analytique

La reconstruction analytique consiste à obtenir une image en inversant la transformée de Radon. Cette transformée a été introduite au début du vingtième siècle par le mathématicien Johann Radon [Radon (1917)]. La figure 3.4 représente la projection selon un angle  $\theta$  de la distribution  $f$  d'un objet circulaire. Soit  $\vec{\alpha} = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\vec{\beta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Pour chaque  $r$ , la projection  $Rf(\theta, r)$ , que nous noterons aussi  $Rf(\vec{\alpha}, r)$ , est la somme des intensités d'une image le long de la ligne parallèle à l'axe  $Ol$  qui passe par le point dont les coordonnées dans le repère  $(O, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$  sont  $(r, 0)$ .

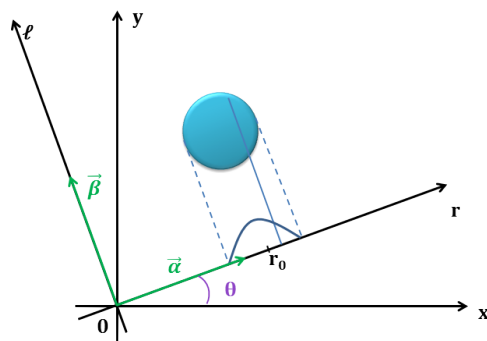


FIGURE 3.4 – Projection selon un angle  $\theta$  d'un objet circulaire.

#### 3.1.1 La transformée de Radon

Plus généralement, la transformée de Radon transforme une fonction en l'ensemble de ses intégrales sur des hyperplans de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$  noté  $\vec{\alpha}$  et pour tout nombre réel  $r$ , la transformée de Radon  $Rf(\vec{\alpha}, r)$  est l'intégrale de  $f$  sur  $\vec{\alpha}^\perp$  l'hyperplan orthogonal à  $\vec{\alpha}$ . Elle s'écrit :

$$Rf(\vec{\alpha}, r) = \int_{\vec{\alpha}^\perp} f(r\vec{\alpha} + \vec{w})d\vec{w} = \int_{\vec{v} \cdot \vec{\alpha} = r} f(\vec{v})d\vec{v}. \quad (3.2)$$

L'ensemble d'intégrales sur des lignes est donné par une autre transformée, appelée  $P$  :

$$Pf(\vec{\beta}, \vec{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v} + l\vec{\beta})dl, \quad (3.3)$$

qui est l'intégrale de  $f$  sur la ligne qui passe par l'extrémité de  $\vec{v}$  et de direction  $\vec{\beta}$ , vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$ . Les deux transformées coïncident en  $\mathbb{R}^2$  (voir figure 3.5). En particulier on a :

$$Pf(\vec{\beta}, r\vec{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r\vec{\alpha} + \ell\vec{\beta})d\ell = Rf(\vec{\alpha}, r). \quad (3.4)$$

Par la suite, nous resterons dans ce cadre simplifié du plan réel.

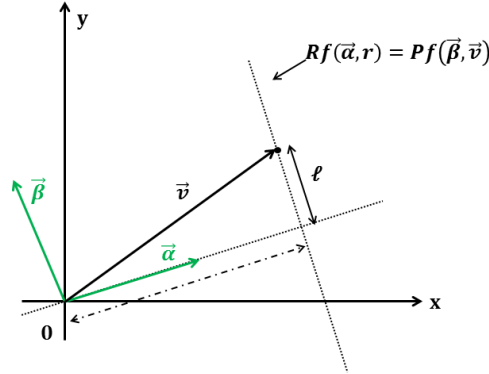


FIGURE 3.5 – L'intégrale de  $f$  sur la ligne en pointillés orthogonale à  $\vec{\alpha}$  représente la transformée de Radon  $Rf(\vec{\alpha}, r)$ . En même temps, elle représente  $Pf(\vec{\beta}, \vec{v})$ ,  $\vec{\beta}$  étant unitaire et orthogonal à  $\vec{\alpha}$ .

La transformée de Radon est inversible : si toutes les projections sont disponibles, dans toutes les directions, on peut reconstruire la fonction  $f$ . L'inversion de la transformée de Radon passe par la transformée de Fourier et s'appuie sur le théorème coupe-projection.

### 3.1.2 Théorème de la coupe centrale ou coupe-projection en 2D

Afin de simplifier l'écriture, nous utiliserons pour la suite l'argument  $\theta$  au lieu de  $\vec{\alpha}$  dans la définition de  $Rf$ ,  $\theta$  étant l'angle fait par le vecteur  $\vec{\alpha}$  avec l'axe  $Ox$ . La transformée de Fourier de la projection d'angle  $\theta$ ,  $Rf(\theta, \cdot)$ , est :

$$\widehat{Rf}(\theta, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\theta, r)e^{-2i\pi\nu r} dr = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r\vec{\alpha} + \ell\vec{\beta})e^{-2i\pi\nu r} dr. \quad (3.5)$$

Soient  $(x, y)$  les coordonnées du vecteur  $r\vec{\alpha} + \ell\vec{\beta}$  dans le repère initial  $xOy$ . Posons  $\nu_x = \nu \cos(\theta)$  et  $\nu_y = \nu \sin(\theta)$ . On obtient :

$$\nu r = \nu(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) = x(\nu \cos(\theta)) + y(\nu \sin(\theta)) = x\nu_x + y\nu_y. \quad (3.6)$$

On effectue alors un changement de variable correspondant à une rotation d'angle  $\theta$ , ce qui donne :

$$\widehat{Rf}(\theta, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2i\pi(x\nu_x + y\nu_y)} dx dy. \quad (3.7)$$

À noter que pour  $\theta$  fixé et  $\nu$  variable, les points de coordonnée  $(\nu_x, \nu_y)$  se trouvent sur

la droite qui passe par l'origine et fait un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses, donc le terme de droite est une ligne de la transformée de Fourier de  $f$ ,

$$\widehat{Rf}(\theta, \nu) = \widehat{f}(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(x\nu_x + y\nu_y)} dx dy. \quad (3.8)$$

L'identité 3.8 est l'expression du théorème coupe-projection (ou théorème de la coupe centrale) :

**Théorème 1** (Théorème coupe-projection).

*La transformée de Fourier de la projection Radon d'angle  $\theta$ , notée  $Rf(\theta, \cdot)$ , correspond à une ligne de la transformée de Fourier  $\widehat{f}$  de l'image, ligne qui passe par l'origine et fait un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses.*

En théorie, ce théorème permet de reconstruire la coupe acquise par tomographie. En supposant le milieu non atténuant et non diffusant, il suffirait de calculer la transformée de Fourier 1D de chaque projection, de reporter les valeurs dans le plan fréquentiel, puis d'appliquer la transformée de Fourier inverse 2D afin d'obtenir la coupe,

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu_x, \nu_y) e^{2i\pi(x\nu_x + y\nu_y)} d\nu_x d\nu_y. \quad (3.9)$$

En pratique, le nombre de projections acquises est fini. Par conséquent, le remplissage du plan fréquentiel est incomplet surtout pour les hautes fréquences. Les valeurs manquantes peuvent être complétées par interpolation à partir des valeurs dans les points les plus proches mais le calcul de la transformée de Fourier et de l'interpolation sur des nombres complexes en font une méthode longue et en pratique inutilisée. La méthode appelée rétroprojection filtrée donne de meilleurs résultats : elle consiste à ne pas utiliser explicitement la transformée de Fourier de l'image mais directement sa transformée de Radon. Cela permet d'éviter l'interpolation et le ré-échantillonnage de l'image dans le plan fréquentiel.

### 3.1.3 La rétroprojection filtrée (FBP)

La rétroprojection filtrée consiste à remplacer dans l'équation (3.9),  $\widehat{f}(\nu_x, \nu_y)$  par  $\widehat{Rf}(\theta, \nu)$ , et à effectuer le changement de variable  $(\nu_x, \nu_y)$  dans  $(\nu, \theta)$ . La valeur absolue du Jacobien étant  $|\nu|$ ,

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Rf}(\theta, \nu) e^{2i\pi\nu(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\nu| d\nu d\theta. \quad (3.10)$$

L'intégrale intérieure est la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier de la projection  $Rf(\theta, \nu)$ , multipliée par le filtre rampe  $|\nu|$  et l'intégrale externe réalise l'opération de rétroprojection. Cette intégrale peut être vue comme le filtrage des projections par le filtre  $k$  (ici le filtre rampe) opération qu'on notera  $(Rf * k)$  pour la suite.

$$f(x, y) = \int_0^\pi (Rf(\theta, \cdot) * k)(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta. \quad (3.11)$$

En multipliant avec le filtre rampe, on met à 0 la moyenne du signal ce qui introduit des valeurs négatives. Ces valeurs négatives ont pour but d'effacer progressivement les artéfacts en étoile laissés par les autres projections lors de l'opération d'épandage (cf. figure 3.6).

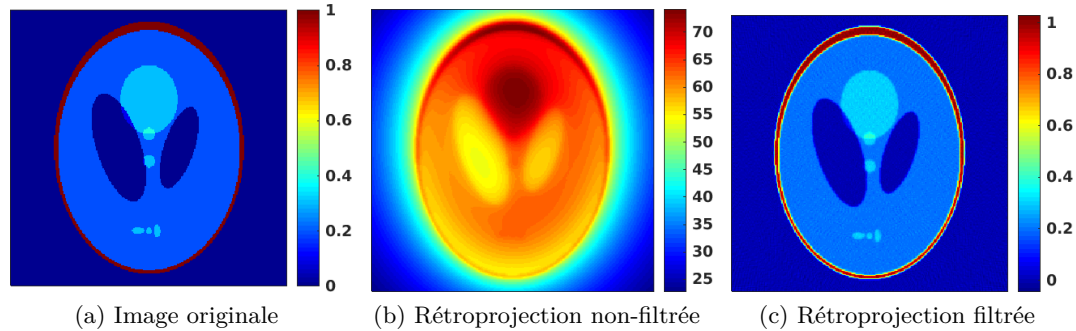


FIGURE 3.6 – Comparaison entre la rétroprojection filtrée et non-filtrée. Images reconstruites à partir de 180 projections.

L'inversion réalisée grâce au théorème coupe-projection nécessite d'effectuer autant de transformée de Fourier 1D qu'il y a d'angles de projection et une transformée de Fourier inverse 2D. La rétroprojection filtrée simplifie l'opération de filtrage qui ne se fait plus qu'à une dimension, puis il suffit de sommer les contributions de chaque projection en rétroprojetant. De plus, il est possible d'obtenir des approximations de l'image au fur et à mesure de l'acquisition : lorsqu'une projection est mesurée, on peut la filtrer et la rétroprojeter, et ce jusqu'à la fin de l'acquisition.

### 3.1.4 Filtres lissants

Dans le domaine de Fourier, le bruit est typiquement représenté dans les hautes fréquences, et celles-ci sont amplifiées par le filtre rampe  $|\nu|$  qui correspond au filtre RamLak. Afin de réduire le bruit, on "coupe" le filtre à une fréquence située entre celle des sources et celle du bruit. Nombre de filtres peuvent être utilisés [Miller and Sampathkumar (1982), Madsen and Park (1985), Gilland *et al.* (1988)] (voir figure 3.7).

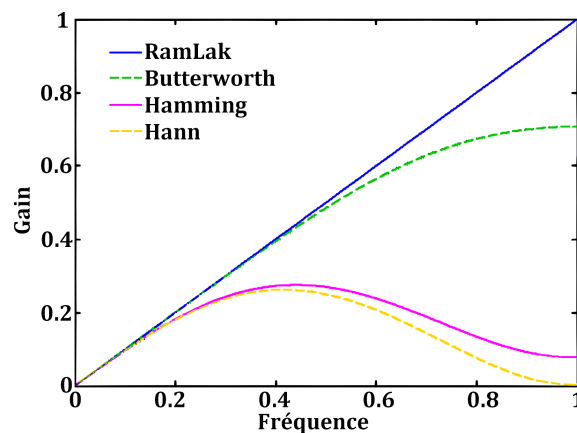


FIGURE 3.7 – Exemples de filtres utilisés pour la rétroprojection filtrée.

Par exemple, le filtre de Hamming généralisé est donné par :

$$F(\nu) = \begin{cases} \lambda + (1 - \lambda) \cos\left(\frac{\pi\nu}{\nu_c}\right) & \text{si } |\nu| < \nu_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $0.5 \leq \lambda \leq 1$ .

La valeur  $\nu_c$  est appelée fréquence de coupure. Plus la fréquence de coupure est faible, moins on préserve les détails de "haute fréquence" et l'image est lissée. Pour  $\lambda = 0.5$ , on obtient le filtre de Hann (appelé aussi filtre hanning), et pour  $\lambda = 0.53836$  on obtient le vrai filtre Hamming.

Le paramètre du filtre gaussien est sa dispersion ( $\text{FWHM} = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma$  pixels). Plus ce paramètre est grand, moins on préserve les détails de haute fréquence. De même pour le filtre de Butterworth, plus son ordre est faible, et moins on préserve les détails de haute fréquence. L'intensité du lissage dépend donc de la "non-préservation" des détails de haute fréquence : moins ils sont préservés, plus fort est le lissage.

Les filtres contrastants amplifient les moyennes fréquences ce qui compense la dégradation de la résolution par le système de détection. C'est le cas des filtres de Metz [Gilland *et al.* (1988), King *et al.* (1988)] et de Wiener [Lemort *et al.* (1980), King *et al.* (1984), Links *et al.* (1990)].

La fréquence de coupure dépend de la fréquence du bruit statistique. La fréquence à partir de laquelle le bruit devient dominant peut être déterminée par l'étude du spectre de puissance de l'image [King *et al.* (1983), King *et al.* (1987), Kubo (1995)]. Une étude d'images de TEMP par courbes ROC [Gilland *et al.* (1988)] a établi le classement suivant pour la qualité des images : Metz > Butterworth > Hann.

Un même filtre ne convient pas dans toutes les situations. Le choix du filtre devrait se faire en fonction de la finalité des images (détection, quantification, ...), de la statistique de comptage, etc. Par exemple, pour une image ayant une grande statistique de comptage on utilisera un filtre ayant une grande fréquence de coupure, et inversement pour une image avec une faible statistique.

## 3.2 Reconstruction itérative

Alors que la reconstruction analytique est basée sur un raisonnement en variables continues suivi d'une discrétisation, la reconstruction itérative consiste à discrétiser l'ensemble du problème avant de concevoir les méthodes de résolution. Ces méthodes permettent de modéliser la distribution de l'intensité des pixels ou voxels de l'image, la géométrie de détection ainsi que la physique de détection (atténuation, diffusion, résolutions du détecteur).

On distingue deux types de méthodes itératives, les méthodes itératives algébriques et les méthodes statistiques. Les méthodes algébriques sont les plus conventionnelles et consistent à résoudre d'un système d'équations linéaires. Parmi les méthodes algébriques, on peut notamment citer les méthodes ART, SIRT, ILST, etc. Les méthodes statistiques,

elles, reposent sur des estimations bayésiennes. Elles permettent de prendre en compte le bruit dans les données. La plupart des méthodes existantes maximisent une fonction de vraisemblance. C'est notamment le cas des méthodes MLEM, OSEM, RAMLA, DRAMA.

### 3.2.1 Méthodes itératives algébriques

Les projections sont représentées discrètement sous la forme d'un système algébrique. Le problème à résoudre consiste à déterminer le vecteur  $n$  solution de :

$$y = Tn, \quad (3.13)$$

où :

- Le vecteur  $y$  contient les mesures, c'est-à-dire l'ensemble des  $y_d$ , le nombre de particules détectées par le détecteur  $d$ ,
- La matrice  $T = (t_{d,v})$  contient les probabilités qu'une particule détectée par le détecteur  $d$  ait été émise dans le voxel  $v$ , elle dépend de l'acquisition et non pas des données donc ses valeurs ne peuvent pas être calculées une fois pour toutes,
- Le vecteur  $n$  contient les valeurs recherchées  $n_v$ , représentant le nombre de particules émises dans le voxel  $v$ .

Dans ce système, le vecteur  $y$  et la matrice  $T$  sont connus.

Si la matrice  $T$  était inversible, on résoudrait le problème simplement, d'autant plus que cette matrice est creuse. Il suffirait alors d'effectuer un produit matriciel afin de reconstruire l'image. Cependant, ce n'est pas si simple car en pratique le bruit rend le problème mal conditionné, la matrice n'est pas forcément carrée et est très grande. En effet, si par exemple on dispose de 128 projections de 128 lignes (dans la direction axiale) et 128 colonnes (bins de projection), on aura un système  $128^3 = 2097152$  équations à autant d'inconnues. La résolution directe d'un système de cette taille est difficile, d'où une préférence pour les méthodes itératives. En général, on initialise  $n$  à  $n^{(0)}$  puis on corrige itérativement l'estimation  $n^{(k)}$  évaluée à la  $k$ -ième itération à partir de la différence entre  $T$  et  $n^{(k-1)}$ .

Le problème est traité comme un problème d'optimisation consistant à approcher au mieux la solution à partir des observations sans trop être sensible au bruit. Plutôt que de chercher la solution exacte, on préfère une solution approchée qui minimise une distance entre les données  $y$  et la projection de la solution  $Tn$ . On peut chercher par exemple à minimiser la norme quadratique de la différence entre  $y$  et  $Tn$  :

$$\hat{n} = \underset{n}{\operatorname{argmin}} \|y - Tn\|_2^2. \quad (3.14)$$

Souvent la solution n'est pas unique, la fonction peut alors avoir plusieurs minima. Dans ce cas, on peut choisir l'un d'entre eux, suivant un critère. Par exemple, on choisit la solution de plus faible norme ou de plus faible entropie. Mais ces solutions sont souvent instables : une faible variation dans les données produit une forte variation dans les résultats.

On préfère donc les solutions "régularisées". Par exemple, on ajoute au terme d'attache aux données  $\|y - Tn\|_2^2$  un terme de pénalisation  $pen(y)$  et on résoud :

$$\hat{n} = \underset{n}{\operatorname{argmin}}(\|y - Tn\|_2^2 + pen(y)). \quad (3.15)$$

En introduisant ce terme de pénalisation, on crée un compromis entre une solution qui s'ajuste bien aux données et une solution qui satisfait d'autres contraintes. On peut préférer par exemple les solutions plutôt lisses, ou celles ayant des contours bien définis, ou encore celles qui se rapprochent d'un certain a priori que l'on a sur le résultat. La grande difficulté consiste alors à définir le terme de régularisation.

### Méthodes algébriques

Une des méthodes les plus courantes est ART (Algebraic Reconstruction Technique). [Gordon *et al.* (1970)] a d'abord montré son utilisation en reconstruction d'image, mais cette méthode est plus connue sous le nom de méthode de Kaczmarz en algèbre linéaire numérique [Herman (2009), Natterer (1986)]. C'est une méthode itérative différente qui consiste à corriger les coefficients de  $y$  en utilisant une projection à chaque fois. De manière géométrique, on part du système (3.13) et on cherche l'intersection entre les hyperplans qui vérifient ce système. On initialise l'itération avec une valeur arbitraire (0 par exemple) et à chaque nouvelle itération on projette l'estimation courante sur l'hyperplan suivant. Ces hyperplans peuvent être vus comme des contraintes que doit respecter la solution.

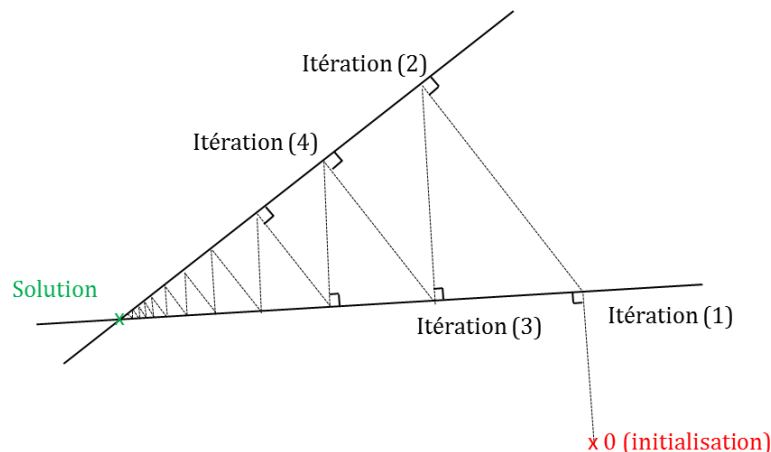


FIGURE 3.8 – Principe de l'algorithme ART.

L'expression mathématique de l'algorithme ART est donnée par :

$$n_i^{(k+1)} = n_i^{(k)} + \frac{y_j - t_{i,j} n_i^{(k)}}{\|t_{i,j}\|^2} t'_{i,j} \quad (3.16)$$

Il existe des variantes de la méthode ART telle que SART qui consiste à traiter toutes les mesures d'une projection et non pas rayon par rayon comme dans ART [Andersen and Kak (1984)], d'autres versions multiplicatives où le rapport entre la projection donnée et

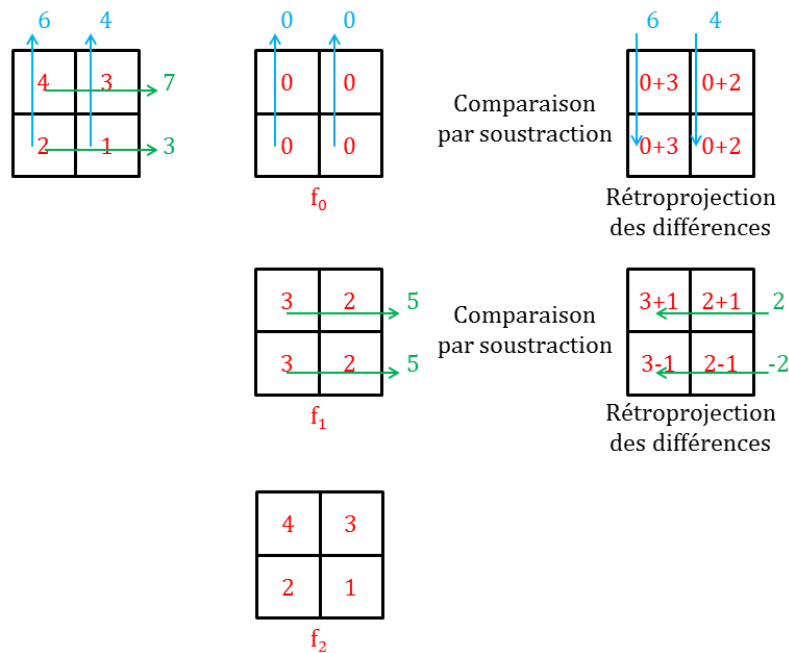


FIGURE 3.9 – Fonctionnement de l’algorithme ART. Source : [www.guillemet.org/irene](http://www.guillemet.org/irene)

la projection recalculée permet d’effectuer la correction, des versions où des contraintes de positivité doivent être respectées et des versions qui tiennent compte du bruit.

Les méthodes algébriques présentent néanmoins certains inconvénients. Elles consistent uniquement à résoudre un grand système d’équations linéaires et ignorent le bruit présent dans les données, alors que les méthodes statistiques modélisent les propriétés statistiques des projections mesurées et de l’objet à reconstruire.

### 3.2.2 Méthodes itératives statistiques

Les méthodes itératives statistiques utilisent outre le modèle discret des modèles statistiques sur les mesures et l’image, et sont généralement basées sur la maximisation de la vraisemblance. Elles sont apparues après les méthodes algébriques bien que la théorie des estimateurs du maximum de vraisemblance existe depuis le début du vingtième siècle.

Les photons émis dans un patient suivent une loi de Poisson de la forme :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

où  $\lambda$  est un paramètre.

On considère un champ de vue composé de  $N_V$  voxels et on suppose que la densité d’émission est constante dans chaque voxel  $v_j$ . L’intensité moyenne d’émission dans le voxel  $v_j$  est notée  $\lambda_j$  et  $n_j$  est le nombre d’évènement ayant effectivement eu lieu dans le voxel. Le nombre  $n_j$  suit une loi de Poisson sur un grand nombre d’essais, dont la moyenne est  $\lambda_j$ . Pour chaque voxel  $v_j$ , on cherche à estimer les moyennes  $\lambda_j, j = 1, \dots, N_V$  de la distribution d’émission moyenne.



Le nombre d'évènement ayant eu lieu dans chaque élément  $d_i$  de détecteur est noté  $y_i, i = 1, \dots, N_D$  et les  $y_i$  sont des processus de Poisson indépendants de moyenne  $\mu_i$ . On note également  $n_{i,j}$  le nombre d'évènements produits par le voxel  $v_j$  observés par l'élément de détecteur  $d_i$  et  $\lambda_{i,j}$  le paramètre de sa loi de Poisson. Le nombre d'évènements produits par le voxel  $v_j$  et détectés est noté :

$$n_{.,j} = \sum_{i=1}^{N_D} n_{i,j}, j = 1, \dots, N_V, \quad (3.18)$$

On voit donc que :

$$\lambda_j \geq \lambda_{.,j} = \sum_{i=1}^{N_D} \lambda_{i,j}, j = 1, \dots, N_V. \quad (3.19)$$

On note  $t_{i,j}$  la probabilité qu'un évènement produit dans le voxel  $v_j$  soit détecté dans  $d_i$ . Cette probabilité est supposée indépendante des autres émissions et dépend de la géométrie de détection.

On montre alors que :

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{N_V} \lambda_{i,j} = \sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j, i = 1, \dots, N_D. \quad (3.20)$$

Cette relation est analogue au système (3.13) et peut-être résolue par exemple grâce à un algorithme MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization).

### Maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance a été proposé par le statisticien Ronald Aylmer Fisher en 1922 [Fisher (1922)].

On note respectivement  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N_V}), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{N_D})$  les vecteurs des moyennes des données complètes (mesures) et des données incomplètes (image). On cherche les paramètres  $\lambda$  qui ont le plus de chances de produire simultanément les observations  $(y_i)_{i=1, \dots, N_D}$ . La probabilité d'observer  $y_i$  pour une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de moyenne  $\mu_i$  est :

$$P(y_i | \mu_i) = e^{(-\mu_i)} \frac{(\mu_i)^{y_i}}{y_i!} \quad (3.21)$$

La **fonction de vraisemblance des données observées** décrit la probabilité que les mesures  $y$  aient été générées avec les émissions  $\lambda$  et est donnée par :

$$\mathcal{L}(y | \lambda) = \prod_{i=1}^{N_D} P(y_i | \mu_i) = \prod_{i=1}^{N_D} e^{-\mu_i} \frac{(\mu_i)^{y_i}}{y_i!} \quad (3.22)$$

La suite de la démarche consiste à chercher si le maximum de cette fonction positive existe, c'est-à-dire trouver le paramètre  $\lambda$  qui a la plus grande probabilité de générer les

données mesurées  $y$ . La maximisation de cette fonction de vraisemblance est fastidieuse, donc en pratique il est plus facile de chercher à maximiser le logarithme de cette fonction. On note  $\ell(\lambda)$  la fonction log-vraisemblance :

$$\ell(\lambda) = \ln(\mathcal{L}(y|\lambda)) = \sum_{i=1}^{N_D} [-\mu_i + y_i \ln(\mu_i) - \ln(y_i!)] \quad (3.23)$$

En remplaçant (3.20) dans (3.23) on obtient :

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_D} \left[ -\sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j + y_i \ln \left( \sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j \right) - \ln(y_i!) \right] \quad (3.24)$$

La non-linéarité de l'équation (3.24) ne permet pas de résoudre le problème de maximisation. Il a donc été suggéré d'utiliser un algorithme d'optimisation numérique pour obtenir la maximisation de la fonction de vraisemblance.

### L'algorithme EM pour le calcul du maximum

L'algorithme itératif EM initialement publié par [Dempster *et al.* (1977)] et repris dans [Lange *et al.* (1984)] est une méthode d'estimation paramétrique s'inscrivant dans le cadre général du maximum de vraisemblance si certaines hypothèses sont vérifiées. Cette méthode a de bonnes propriétés de convergence pour un coût de calcul moindre que pour les algorithmes usuels d'optimisation numérique. On va considérer une particularité de nombre de problèmes statistiques : la variable que l'on observe n'est pas la variable à laquelle on s'intéresse, mais fonction de celle-ci. Ici, les  $n_j$  sont les données complètes (pas directement observables) et les  $y_i$  sont celles que l'on observe. Le nom EM - pour Expectation Maximisation - vient du fait que l'algorithme procède à chaque itération à deux opérations :

- La phase "Expectation" (étape E) consiste à calculer l'espérance des données inconnues, sachant les données observées et les valeurs des paramètres déterminés à l'itération précédente
- La phase "Maximisation" (étape M) maximise cette vraisemblance, rendue possible en utilisant l'estimation des données inconnues (étape "Expectation"), puis met à jour la nouvelle valeur des paramètres pour l'itération suivante.

On choisit plutôt le vecteur  $(n_{\cdot,j})_{j=1,\dots,N_V}$  comme vecteur de données complètes. Comme nous l'avons vu précédemment, les moyennes  $\lambda_j$  et  $\lambda_{\cdot,j}$  sont reliées par :

$$\lambda_{\cdot,j} = \sum_{i=1}^{N_D} \lambda_{i,j} = \sum_{i=1}^{N_D} t_{i,j} \lambda_j = \lambda_j \sum_{i=1}^{N_D} t_{i,j} \quad (3.25)$$

La fonction de vraisemblance des données complètes fait partie d'une famille exponentielle et est donnée par :

$$P((n_{\cdot,1}, \dots, n_{\cdot,N_V})|\lambda) = \prod_{j=1}^{N_V} e^{-\lambda_{\cdot,j}} \frac{(\lambda_{\cdot,j})^{n_{\cdot,j}}}{n_{\cdot,j}!} \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{N_V} n_{\cdot,j}!} \exp \left[ (\log \lambda_{\cdot,1}, \dots, \lambda_{\cdot,j}) \begin{pmatrix} (n_{\cdot,1}) \\ \vdots \\ n_{\cdot,j} \end{pmatrix} \right] \quad (3.27)$$

Tout d'abord, on initialise le vecteur des moyennes  $\lambda$  à une valeur notée  $\lambda^{(0)}$ . À chaque itération, on veut améliorer cette estimation  $\lambda^{(0)}$  et s'approcher au mieux de la valeur  $\hat{\lambda}$  qui maximise la fonction de vraisemblance. La nouvelle estimation de  $\lambda$  est notée  $\lambda^{(k)}$  pour la  $k$ -ième itération.

L'étape (E) consiste alors à calculer la valeur moyenne que prendrait  $n_{\cdot,j}$  si la valeur de  $\lambda$  était  $\lambda^{(k)}$  et compte tenu des mesures  $y$  :

$$(E) \ n_{\cdot,j}^{(k+1)} = \mathcal{E} [n_{\cdot,j}|y, \lambda^{(k)}], \text{ pour } j = 1, \dots, N_V. \quad (3.28)$$

On peut montrer que si  $X_j, j = 1, \dots, J$  sont des variables suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $a_j$  alors la loi conditionnelle de  $X_j$  sachant  $\sum_{i=1}^J X_i = x^*$  est une loi binomiale  $\mathcal{B}(x^*, a_j / \sum_{i=1}^J a_i)$ .

Par conséquent, la loi conditionnelle de  $n_{i,j}$  sachant que  $\sum_{j=1}^{N_V} n_{i,j} = y_i$  et sous l'hypothèse que la moyenne des données complètes est  $\lambda^{(k)}$  est une loi binomiale  $\mathcal{B}(y_i, \lambda_{i,j}^{(k)} / \sum_{j=1}^{N_V} \lambda_{i,j}^{(k)})$  et

$$\mathbb{E} [n_{\cdot,j}|y, \lambda^{(k)}] = \frac{y_i \lambda_{i,j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{N_V} \lambda_{i,j}^{(k)}} \quad (3.29)$$

L'étape (E) devient alors :

$$n_{\cdot,j}^{(k+1)} = \mathbb{E} [n_{\cdot,j}|y, \lambda^{(k)}] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_D} n_{i,j}|y, \lambda^{(k)} \right] = \sum_{i=1}^{N_D} \mathbb{E} [n_{i,j}|y, \lambda^{(k)}] \quad (3.30)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_D} \frac{y_i \lambda_{i,j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{N_V} \lambda_{i,j}^{(k)}} = \sum_{i=1}^{N_D} \frac{y_i t_{i,j} \lambda_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j^{(k)}} \quad (3.31)$$

$$= \lambda_j^{(k)} \sum_{i=1}^{N_D} \frac{y_i t_{i,j}}{\sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j^{(k)}} \quad (3.32)$$

L'étape (M) consiste à maximiser l'espérance de la fonction de vraisemblance des données complètes, définie dans (3.27), dans le but de calculer un nouvel estimateur de  $\lambda_{\cdot,j}$ .

Or, celui-ci est la moyenne de  $n_{\cdot,j}$  qui a été estimée à l'étape (E). Finalement :

$$\lambda_{\cdot,j}^{(k+1)} = n_{\cdot,j}^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} \sum_{i=1}^{N_D} \frac{y_i t_{i,j}}{\sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j^{(k)}} \quad (3.33)$$

et

$$\lambda_j^{(k+1)} = \frac{\lambda_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^{N_D} t_{i,j}} \sum_{i=1}^{N_D} \frac{y_i t_{i,j}}{\sum_{j=1}^{N_V} t_{i,j} \lambda_j^{(k)}} \quad (3.34)$$

**Théorème 2** (Convergence de l'algorithme EM pour la reconstruction tomographique [Shepp and Vardi (1982)]).

1. La fonction log-vraisemblance  $\ell(\lambda)$  est concave, donc tout maximum est un maximum global.
2. L'algorithme EM converge vers un maximum global de  $\ell(\lambda)$ .
3. Le maximum est unique si et seulement si les  $N_D$  vecteurs

$$X_i = \frac{\sqrt{y_i}}{\mu_i} (t_{1,j}, \dots, t_{N_V,j}), \quad i = 1, \dots, N_D \quad (3.35)$$

forment une famille de générateurs de  $\mathbb{R}^{N_V}$ .

### L'algorithme OSEM

L'algorithme OSEM (Ordered Subset Expectation Maximisation, [Hudson and Larkin (1994)]) est une version accélérée de l'algorithme MLEM qui consiste à trier les projections en sous-ensembles ordonnés. En général, on utilise au moins 4 projections par sous-ensemble.

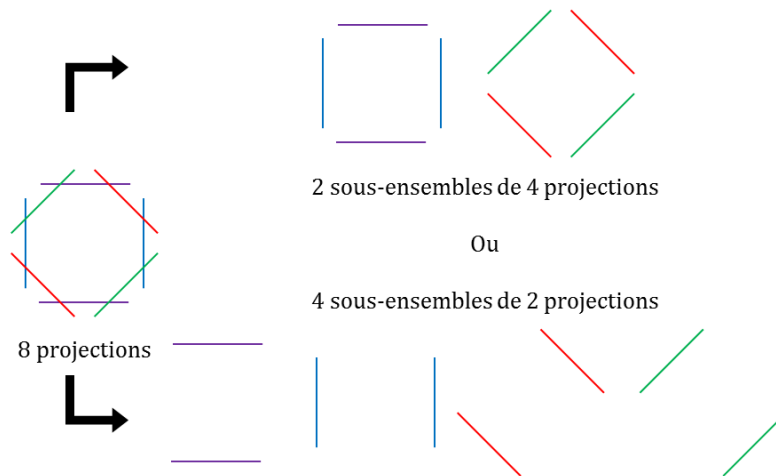


FIGURE 3.10 – Décomposition des ensembles de projections pour l'algorithme OSEM.

Source : [www.guillemet.org/irene](http://www.guillemet.org/irene)

Le temps de calcul se voit diminué car :

- L'utilisation de plusieurs projections sous des angles similaires a peu d'impact sur l'image par rapport à l'utilisation d'une seule projection,
- Le pas qui utilise le deuxième sous-ensemble part d'un estimateur déjà amélioré par le premier sous-ensemble.

Le facteur d'accélération dépend du nombre de sous-ensembles. En fait, le MLEM est un cas particulier de OSEM pour lequel chaque sous-ensemble ne contient qu'un élément. Si  $S$  est le nombre de sous-ensembles et  $K$  le nombre d'itérations, cela revient à effectuer  $S \times K$  itérations de MLEM, mais c'est  $S$  fois plus rapide.

### 3.3 Problèmes de troncature en tomographie classique

Dans de nombreuses applications, les projections acquises sont tronquées car le détecteur est trop petit. Les projections tronquées contiennent de l'information à la fois sur la région d'intérêt et sur l'extérieur de la région. L'image reconstruite avec l'algorithme de rétroprojection filtrée (FBP) présente des artéfacts (dits de troncature) et n'est plus quantitative.

Une projection  $Rf(\theta, \cdot)$  est définie comme complète si pour tout  $r$ ,  $Rf(\theta, r)$  est soit mesurée ou connue comme étant nulle. Les projections tronquées, elles, ont les valeurs non mesurées concaténées aux extrémités des lignes contenant des valeurs non nulles. Le problème lors de la reconstruction FBP est la nécessité d'avoir les projections entières lors du filtrage des projections par le filtre rampe. On appelle *problème intérieur* le fait de disposer de projections sur toute la couverture angulaire qui soient tronquées de part et d'autre de la région d'intérêt. Le but est de reconstruire la région non tronquée dans toutes les projections. La solution du problème intérieur n'est pas unique [Natterer (1986), Maass (1992), Smith *et al.* (1978), Hamaker *et al.* (1980)] car de nombreuses fonctions de densité peuvent donner les mêmes mesures. De nombreuses recherches ont été menées afin de faire face à ce problème.

Dans le cas analytique, la rétroprojection différenciée avec filtrage de Hilbert a permis d'effectuer des reconstructions de région d'intérêt stable à partir de projections tronquées dans certaines situations. En effet, la transformée de Fourier a moins d'importance dans les problèmes de données partielles : la transformée de Hilbert va jouer le rôle central. Le lien entre la transformée de Hilbert et la rétroprojection différenciée est basée sur les travaux de Gel'fand et Graev [Gel'fand and Graev (1991)]. Son application potentielle à la tomographie a été découverte dans [Finch (2002)], et explicitée dans [Noo *et al.* (2004), Zhuang *et al.* (2004), Zou *et al.* (2005)] pour des projections parallèles et des projections à faisceau en éventail. La rétroprojection différenciée avec filtrage de Hilbert s'effectue en deux étapes : la première étape consiste à effectuer une rétroprojection de la dérivée des données de projection (appelé "DBP"), et la seconde étape consiste à traiter cette image de rétroprojection en impliquant la transformée de Hilbert.

Notons  $(Rf * k)(\theta, r)$  la projection filtrée (cf. equation (3.11)) et  $\mathcal{H}Rf(\theta, r)$  la transformée de Hilbert de la projection  $Rf(\theta, r)$ . Cette méthode est basée sur le fait qu'on peut

exprimer le filtre rampe comme une dérivée composée avec une transformée de Hilbert en remarquant que le filtre rampe  $r(\nu) = |\nu| = (1/2\pi)(2\pi i\nu)(-i\text{sgn}(\nu))$ . On a donc :

$$(Rf * k)(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{H}Rf(\theta, r) \quad (3.36)$$

$$\text{avec } \mathcal{H}Rf(\theta, r) = v.p. \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\theta, r) h(r - r') dr' \right] \quad \text{et } h(r) = \frac{1}{\pi r} \quad (3.37)$$

car dans le domaine de Fourier  $\hat{h}(\nu) = -i \text{sgn}(\nu)$ .

Dans [Ogawa *et al.* (1984)], l'auteur suggère d'utiliser deux types de données sources, les projections tronquées et le contour de la section transversale de l'objet, puis d'estimer la zone extérieure à la troncature dans une projection à partir des projections selon d'autres angles de vue et des contours. L'image est ensuite reconstruite après des processus itératifs. En 2007, B. Zhang [Zhang and Zeng (2007)] a proposé de reconstruire des images dont les projections étaient tronquées avec un algorithme itératif MLEM qui résoudrait directement le problème inverse. Il a été montré que ni les méthodes analytiques, ni les méthodes itératives ne pouvaient fournir de reconstruction exacte dans le cas général, mais la reconstruction MLEM fournirait des images informatives sur la région d'intérêt. Même si la matrice système n'est pas totalement pleine en raison de la troncature, une partie de l'image peut avoir des valeurs uniques sur toutes les solutions possibles de l'équation système dans certains cas.



---

# Tomographie Compton

---

La caméra Compton permet d'obtenir une image en trois dimensions de la source observée, par des méthodes de reconstruction tomographiques.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la caméra Compton est une gamma caméra sans collimation mécanique qui permet d'imager des sources de photons en 3D. Dans un premier temps, un photon interagit dans le diffuseur où il transmet une partie de son énergie à un électron. Ce photon, qui peut encore interagir dans le diffuseur, est finalement absorbé dans le second détecteur (cf. section 2.2.2). Une fois l'acquisition des photons terminée, on obtient un ensemble d'évènements qui définissent chacun un cône. À la différence de la tomographie classique, ici on a des projections sur des surfaces coniques.

Quelques algorithmes ont été proposés dans la littérature et sont basés sur des méthodes analytiques ou itératives inspirées des méthodes classiques vues au chapitre 3. Les algorithmes analytiques permettent de calculer la solution d'après le modèle continu, mais ce sont souvent des problèmes inverses mal posés et la solution est difficile à retrouver. Les méthodes itératives sont dérivées d'un modèle discret et offrent l'avantage de pouvoir spécifier de nombreux paramètres du système d'imagerie. Cependant, la solution n'est plus unique et les temps de calculs peuvent être très longs. Nous passons en revue ci-après différentes approches de reconstruction, leurs avantages et leurs inconvénients.

### 4.1 Méthodes analytiques

La reconstruction analytique vise à obtenir l'image de la source en inversant directement les projections. Notons  $V_1$  et  $V_2$  les deux positions d'interaction du photon dans la caméra et  $\beta$  le demi-angle d'ouverture du cône Compton (cf. section 2.2.2). Autrement



dit, pour une source d'intensité  $f$ , la projection Compton  $Sf$  sur le cône  $\mathcal{C}$  défini par l'évènement  $e = (V_1, V_2, \beta)$  est donnée par :

$$Sf(V_1, \overrightarrow{V_2 V_1}, \beta) = K(\beta) \int_{x \in \mathbb{R}^3} h_{V_1, V_2, \beta}(x) f(x) dx, \quad (4.1)$$

où  $K(\beta)$  est la section efficace de diffusion Compton et  $h$  est une fonction de pondération qui dépend du cône  $\mathcal{C}$ . La fonction  $h$  varie selon le modèle direct utilisé. Nous supposons pour la suite que les probabilités pour un photon d'être diffusé dans le premier détecteur puis absorbé dans le second sont égales à 1, de sorte que ces probabilités n'apparaissent pas dans le modèle.

Certaines méthodes consistent à se ramener à des projections faisceau conique ou à des projections Radon à partir des projections Compton. Une première approche d'inversion directe a été proposée dans [Cree and Bones (1994)] : elle est basée sur les transformées de Fourier et de Hankel, proche du théorème coupe-projection vu en section 3.1.2. Les auteurs ont présenté un théorème affirmant que les projections coniques sont redondantes et par conséquent, à partir d'un ensemble restreint de projections il était possible de reconstruire la distribution de la source. Ainsi, cette technique consiste à ne considérer que les cônes dont l'axe directeur  $\overrightarrow{V_2 V_1}$  (voir 2.2.2) coïncide avec l'axe  $\vec{z}$  du repère cartésien. Mais cela limite grandement le nombre de données exploitables. On se ramène également à des projections parallèles en 2D à partir des projections coniques 3D dans les travaux de [Lee and Lee (2012)] afin d'utiliser des méthodes de reconstruction analytique en tomographie bi-dimensionnelle. Une autre méthode a été proposée dans [Basko *et al.* (1998)] et consiste à transformer les projections Compton en projections Radon 3D sur des plans grâce aux harmoniques sphériques. Les harmoniques sphériques sont également utilisées dans les travaux publiés dans [Jung and Moon (2015), Moon (2015)] mais l'accent est mis sur la relation entre la transformée Radon et la transformée Compton et toutes les dimensions des données sont utilisées.

Dans les sections suivantes, nous analyserons trois méthodes d'inversion de l'équation (4.1) publiées respectivement dans [Smith (2005)], [Tomitani and Hirasawa (2002)] et [Maxim (2014)].

#### 4.1.1 Reconstruction par calcul des projections faisceau conique

En 2000, Lucas Parra a proposé une méthode de rétroprojection filtrée consistant à convertir les projections Compton pour obtenir des projections en faisceau conique en utilisant une expansion en harmoniques sphériques. De par l'utilisation de ces harmoniques sphériques, cette méthode est similaire aux travaux publiés dans [Basko *et al.* (1998)].

La méthode de [Parra (2000)] permet de reconstruire l'image d'une source placée sur une surface sphérique  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Autrement dit, cette approche consiste à retrouver l'intensité associée à chaque vecteur  $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}$ . Cependant, on peut aussi voir cette activité comme provenant de la demi-ligne d'extrémité  $V_1$  et de direction  $\vec{\Omega}$  (voir figure 4.1) qui

s'exprime :

$$Pf(\vec{\Omega}, \vec{OV}_1) = \int_0^\infty f(\vec{OV}_1 + r\vec{\Omega}) dr \text{ avec les notations de (3.3)} \quad (4.2)$$

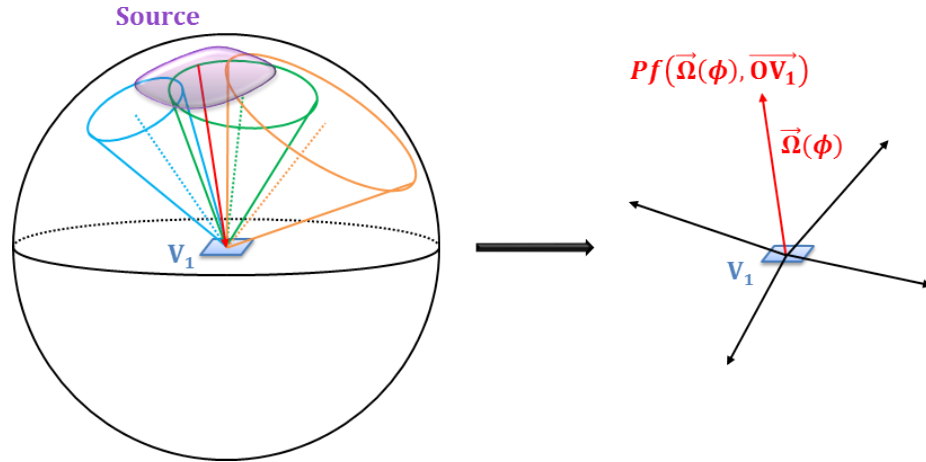


FIGURE 4.1 – À partir d'une transformée qui regroupe toutes les intégrales de surface sur des cônes ayant le même apex, on peut obtenir toutes les projections en faisceau conique reliées à cet apex.

L'intégrale sur la demi-ligne définie par  $V_1$  et  $\vec{\Omega}$  est définie comme une projection en faisceau conique.

Les travaux de [Tomitani and Hirasawa (2002), Hirasawa and Tomitani (2003)] sont une extension de ceux de [Parra (2000)], pour des projections qui s'adaptent à une gamme limitée d'angles de diffusion. Quatre algorithmes ont été proposés mais nous choisissons celui qui est conseillé par les auteurs. La méthode consiste à regrouper en une projection toutes les intégrales de surface sur des cônes ayant le même apex afin d'obtenir des projections en faisceau conique.

On se place dans un repère orthogonal de  $\mathbb{R}^3$ . Pour un cône donné, on note  $\vec{w}$  le vecteur directeur de l'axe du cône. Dans cette méthode, les projections Compton de la distribution d'intensité  $f$  d'une source sont décrites par le modèle :

$$\begin{aligned} Sf(V_1, \vec{w}, \beta) &= K(\beta) \int_S f(\vec{v}) \left( \frac{1}{2\pi} \delta((\vec{v} \cdot \vec{w}) - \cos \beta) \right) d\vec{v} \\ &= K(\beta) \sin(\beta) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\vec{OV}_1 + r\vec{\Omega}(\phi)) dr d\phi \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $S$  est la sphère unité centrée en  $V_1$  et  $\vec{\Omega}(\phi)$  définit une génératrice du cône correspondant à l'angle azimutal  $\phi$  (voir figure 4.2).

Autrement dit, la projection Compton  $Sf$  est aussi une somme d'intégrales en faisceau conique :

$$Sf(V_1, \vec{w}, \beta) = \int_0^{2\pi} Pf(\vec{\Omega}(\phi), \vec{OV}_1) d\phi \quad (4.4)$$

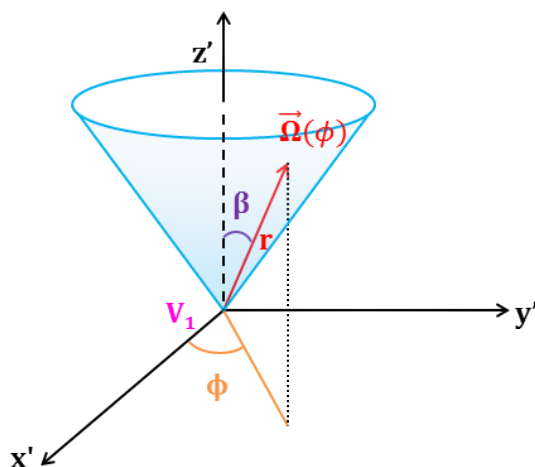


FIGURE 4.2 – Paramètres de projection du cône dans un repère local où l’axe du cône est l’axe vertical.

On peut ensuite calculer indépendamment les valeurs  $Pf(\vec{\Omega}(\phi), \overrightarrow{OV_1})$  d’après la formule :

$$Pf(\vec{\Omega}(\phi), \overrightarrow{OV_1}) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\mathcal{S}} k^{-1}(\vec{w} \cdot \vec{\Omega}, \cos \beta) Sf(V_1, \vec{w}, \beta) d\vec{w} d(\cos \beta) \quad (4.5)$$

avec

$$k^{-1}(s, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{H_n} P_n(s) P_n(t) \quad , s, t \in [-1, 1] \quad (4.6)$$

$$H_n = \int_{\beta_1}^{\beta_2} K(\beta) P_n^2(\cos \beta) d(\cos \beta), \quad (4.7)$$

et  $P_n$  les polynômes de Legendre.

Cette méthode fournit donc un calcul direct de l’image d’une source située sur la surface d’une sphère centrée en  $V_1$ . Si on dispose d’un seul élément de diffuseur, il n’y a pas assez d’information pour reconstruire l’image d’une source tri-dimensionnelle. Il faut alors considérer plusieurs éléments de diffuseur pour obtenir une image 3D. Après avoir calculé les projections en faisceau conique  $Pf(\vec{\Omega}, \overrightarrow{OV_1})$  pour chaque élément de diffuseur, on se retrouve avec un problème classique de reconstruction tomographique tronqué proche de celui rencontré en TEP 3D. En effet, on se retrouve également avec des sinogrammes dans des plans diagonaux. De plus, il a été montré que la variance de l’estimateur diverge . En effet d’après la formule (4.6), si on prend par exemple  $\vec{w} \cdot \vec{\Omega} \simeq \beta$ , le terme  $k^{-1}(\vec{w} \cdot \vec{\Omega}, \beta)$  devient une série divergente.

#### 4.1.2 Reconstruction par calcul des projections Radon

Nous décrivons ici l’une des méthodes proposées et discutées dans [Smith (2005), Smith (2011), Smith (2012)].

L’intégrale de l’intensité  $f$  sur la surface du cône  $\mathcal{C}$  défini par son apex  $V_1$ , son axe de

direction  $\vec{w} = (\sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta, \cos \alpha)$  et son demi-angle d'ouverture  $\beta$ , s'écrit dans ces travaux :

$$Sf(V_1, \vec{w}, \beta) = \sin(\beta) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\overrightarrow{OV_1} + r\vec{\Omega}(\phi)) r dr d\phi, \quad (4.8)$$

où  $\vec{\Omega}(\phi)$  définit une génératrice du cône (voir figure 4.2).

Notons la différence avec le modèle (4.3) utilisé par [Parra (2000), Tomitani and Hirasawa (2002)]. Dans l'équation (4.8), on intègre  $f$  sur la surface du cône  $\mathcal{C}$  et le noyau  $h_{V_1, V_2, \beta}$  est égal à l'unité alors que dans (4.3) on somme des projections sur des demi-lignes correspondant aux génératrices du cône et on a donc  $h_{V_1, V_2, \beta}(\vec{\Omega}) = 1/\|\overrightarrow{OV_1} - \vec{\Omega}\|$ .

On considère que la caméra est composée de paires d'éléments de diffuseur et d'absorbeur. L'axe du cône est défini par la droite reliant les centres de chaque paire d'éléments, et  $\beta$  est le demi-angle d'ouverture du cône.

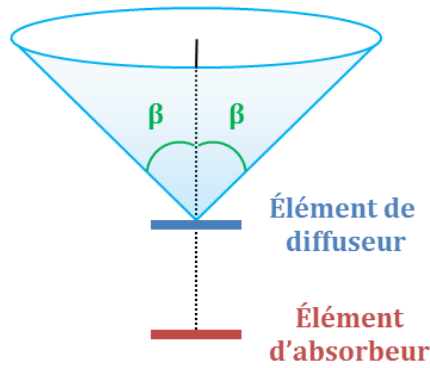


FIGURE 4.3 – Géométrie de la caméra. La caméra est composée de paires d'éléments de diffuseur et d'absorbeur

Pour  $\vec{w}$  vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$ , soit  $Rf(\vec{w}, t)$  la projection Radon 3D de  $f$ , c'est-à-dire :

$$Rf(\vec{w}, t) = \int_{\vec{v} \cdot \vec{w} = t} f(\vec{v}) d\vec{v} \quad (4.9)$$

La transformée de Hilbert  $\mathcal{H}Rf$  de la transformée de Radon  $Rf$  de  $f$  est :

$$\mathcal{H}Rf(\vec{w}, \ell) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\vec{w}, t) h_\epsilon(\ell - t) dt \quad (4.10)$$

où  $h_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/t & \text{pour } |t| > \epsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ .

On montre alors dans [Smith (2005)] que :

$$\mathcal{H}Rf(\vec{w}, \underbrace{\overrightarrow{OV_1} \cdot \vec{w}}_{\ell}) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(V_1, \vec{w}, \beta) h_\epsilon(\cos \beta) d\beta \quad (4.11)$$

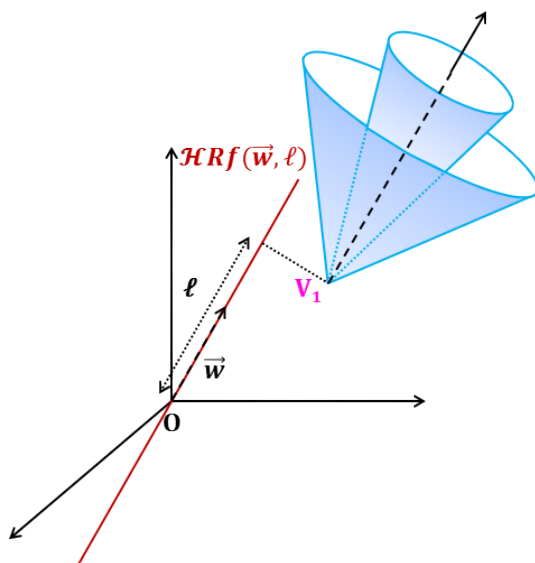


FIGURE 4.4 – Relation entre  $\mathcal{H}Rf$  et  $Sf$ . La transformée de Hilbert de la projection Compton  $Sf(V_1, \vec{w}, \beta)$  est  $\mathcal{H}Rf(\vec{w}, \ell)$  où  $\ell$  est calculé comme  $\overrightarrow{OV_1} \cdot \vec{w}$ .

D'après la formule classique de la rétroprojection 3D on a :

$$f(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rf * k)(\alpha, \delta, \ell) \sin(\alpha) d\alpha d\delta \quad (4.12)$$

Or selon la formule (3.36), on peut calculer  $(Rf * k)$  à partir de  $\mathcal{H}Rf$  en 3D :

$$\begin{aligned} (Rf * k)(\vec{w}, \ell) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{Rf}(\vec{w}, \rho)\rho^2) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{H}Rf}(\vec{w}, \rho)i\rho|\rho|) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ainsi, en remplaçant  $(Rf * k)$  par la valeur obtenue dans l'équation (4.13), on peut calculer la fonction  $f$  :

$$f(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{H}Rf}(\alpha, \delta, \rho)i\rho|\rho|) \sin(\alpha) d\alpha d\delta \quad (4.14)$$

À partir des projections coniques coaxiales  $Sf(V_1, \vec{w}, \cdot)$  on peut donc calculer les projections Radon dans la direction  $\vec{w}$ . Ensuite on peut reconstruire l'image tri-dimensionnelle avec toutes les projections Radon 3D. Il s'agit donc de rétroprojeter  $\mathcal{H}Rf$  avec le filtre  $\rho|\rho|$  et d'en prendre la partie imaginaire, à cause du  $i$  provenant de la transformée de Fourier de la dérivée de  $\mathcal{H}Rf$ . Cette méthode diffère de la rétroprojection filtrée 3D classique car on utilise non pas le filtre  $\rho^2$ , dans le domaine de Fourier, mais  $\rho|\rho|$ .

Notons qu'avec cette méthode, l'auteur a également établi une condition de complétude, qui ne nécessite pas d'avoir des détecteurs infinis comme c'est souvent le cas en imagerie Compton. Si, en presque tous les plans intersectant une boule ayant un rayon supérieur au support de la distribution  $f$ , il y a un apex  $V_1$  où toutes les intégrales sur des surfaces coniques d'apex  $V_1$  dont l'axe de symétrie est perpendiculaire au plan sont connues, alors

la distribution de la radioactivité peut-être obtenue à partir des intégrales connues. La géométrie choisie dans l'article [Smith (2005)] (voir figure 4.3) vérifie cette condition, mais il n'est pas dit qu'une autre configuration satisfera cette condition. De plus, comme souvent en imagerie Compton, il y a redondance dans les données. Sachant cela, il est possible de réduire la quantité de données à traiter ou la sensibilité de l'image au bruit provenant des données.

### 4.1.3 Rétroprojection filtrée basée sur le théorème coupe-projection

Une méthode de reconstruction analytique pour la caméra Compton a été développée dans [Maxim *et al.* (2009)] (théorème coupe-projection) et [Maxim (2014)] (rétroprojection filtrée). Dans cette méthode ayant trait à celle développée par [Cree and Bones (1994)], les projections sur des cônes d'axe non vertical peuvent être utilisées.

Soit une caméra composée d'un diffuseur plan et d'un absorbeur. Nous considérons ici que les deux détecteurs de la caméra sont de taille infinie et disposés parallèlement l'un à l'autre. Le diffuseur est centré à l'origine d'un repère orthogonal et perpendiculaire à l'axe  $z$ . L'absorbeur est centré en  $z_2 < 0$ . Par conséquent, pour tout évènement  $e = (V_1, V_2, \beta)$ , on note  $\vec{u} = (x_1, y_1, 0)$  de l'apex  $V_1$  du cône, la direction de son axe  $\vec{w} = (\sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta, \cos \alpha)$  donnée en coordonnées sphériques et  $\beta$  est le demi-angle d'ouverture donné par la formule (2.11).

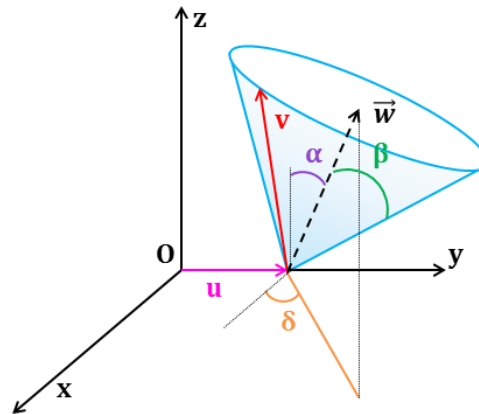


FIGURE 4.5 – Paramètres du cône de projection.

Dans ce paragraphe, la projection Compton  $Sf(V_1, \vec{w}, \beta)$  sera notée  $S_{\alpha, \delta, \beta} f$ . Elle est exprimée comme l'intégrale de l'intensité  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  d'une source de  $\gamma$  sur la surface d'un cône  $\mathcal{C} = (V_1, \vec{w}, \beta)$ , pondérée par un facteur tenant compte de l'efficacité de la caméra :

$$S_{\alpha, \delta, \beta} f(\vec{u}) = K(\beta) \cos \alpha \int_{(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{w}} f(\vec{v}) \frac{z}{\|\vec{v} - \vec{u}\|^2} d\vec{v} \quad (4.15)$$

où  $\vec{v} = (x, y, z)$  désigne un vecteur de l'espace  $\mathbb{R}^3$  et le facteur  $z/\|\vec{v} - \vec{u}\|^2$  est la fonction de pondération  $h$  de la formule (4.1) qui représente le cosinus de la distance angulaire entre  $\vec{v}$  et la surface du cône.

Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  les vecteurs directeurs du repère initial et deux vecteurs  $\vec{d}_1 = (\cos(\delta), \sin(\delta), 0)$  et  $\vec{d}_2 = (-\sin(\delta), \cos(\delta), 0)$ . Alors  $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{e}_3)$  forment une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ . On considère alors les cônes Compton qui intersectent les plans  $z = z_0$  avec  $z_0 > 0$  selon une ellipse (voir figure 4.6) et le diffuseur en un seul point. Cela entraîne les contraintes  $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[$  et  $\beta \in [0; \frac{\pi}{2} - \alpha[$ . Autrement dit,  $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ . Il n'y a pas de restrictions pour  $\delta$  donc on peut écrire  $\delta \in ]-\pi, \pi]$ .

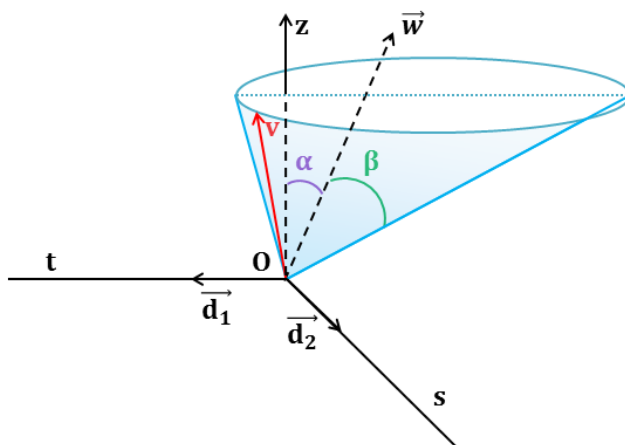


FIGURE 4.6 – L'intersection du cône avec le plan  $z = z_0$  est une ellipse de grand axe parallèle à  $\vec{d}_1$ .

Cela nous permet de définir  $a, b$  et  $c$  tel que :

$$a(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\beta) \cos(\beta)}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta)} \quad (4.16)$$

$$b(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\beta)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta)}} \quad (4.17)$$

$$c(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta)} \quad (4.18)$$

Ces paramètres nous permettent d'avoir l'équation paramétrique du cône d'apex  $t_0 \vec{d}_1 + s_0 \vec{d}_2$  :

$$\begin{cases} t = t_0 + zc(\alpha, \beta) + za(\alpha, \beta) \cos(\phi) \\ s = s_0 + zb(\alpha, \beta) \sin(\phi) \\ z = z \end{cases} \quad z \geq 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (4.19)$$

Finalement pour  $\alpha, \beta \in [0; \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$  et  $\delta \in ]-\pi, \pi]$ , la projection Compton  $\mathcal{S}_{\alpha, \delta, \beta} f$  d'une fonction  $f \in \mathbb{R}^3$  au point  $V_1$  du diffuseur de coordonnée  $(x_1, y_1, 0) = t \vec{d}_1 + s \vec{d}_2$

peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta}f(t\vec{d}_1 + s\vec{d}_2) &= K(\beta)b(\alpha, \beta) \times \\ &\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f((t + zc(\alpha, \beta) + za(\alpha, \beta) \cos(\phi))\vec{d}_1 + (s + zb(\alpha, \beta) \sin(\phi))\vec{d}_2 + z\vec{e}_3)z d\phi dz \end{aligned} \quad (4.20)$$

Avec ce modèle direct, le problème est surestimé car l'image est en trois dimensions alors que les données sont dans un espace à cinq dimensions, du fait que les détecteurs soient initialement supposés de taille infinie.

Si on applique la transformée de Radon 2D selon la direction  $(-\sin(\delta), \cos(\delta))$  à la projection Compton  $\mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta}f$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta}f(s) &= \int_{-\infty}^\infty \mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta}f(t\vec{d}_1 + s\vec{d}_2)dt \\ &= K(\beta)b(\alpha, \beta) \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f((t + zc(\alpha, \beta) + za(\alpha, \beta) \cos(\phi))\vec{d}_1 \\ &\quad + (s + zb(\alpha, \beta) \sin(\phi))\vec{d}_2 + z\vec{e}_3)z d\phi dz dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

Après permutation des intégrales on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta}f(s) &= K(\beta)b(\alpha, \beta) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f((t + zc(\alpha, \beta) + za(\alpha, \beta) \cos(\phi))\vec{d}_1 \\ &\quad + (s + zb(\alpha, \beta) \sin(\phi))\vec{d}_2 + z\vec{e}_3)z dt d\phi dz \end{aligned} \quad (4.22)$$

On définit  $f_z : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y, z)$  la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}^2$ .

La définition de la transformée de Radon et l'équation (4.22) donnent :

$$\mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta}f(s) = b(\alpha, \beta) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}f_z(s + zb(\alpha, \beta) \sin(\phi))z d\phi dz. \quad (4.23)$$

Avec  $\tau = b(\alpha, \beta)$ , quelque soit  $\tau \geq 0$  et  $\delta \in ]-\pi, \pi]$ , la projection  $\mathcal{P}_{\tau,\delta}f$  de la fonction est définie pour tout  $s \in \mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{P}_{\tau,\delta}f(s) = \tau \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}f_z(s + z\tau \sin(\phi))z d\phi dz, \quad (4.24)$$

D'après (4.23), elle correspond à la transformée de Radon composée avec la transformée Compton :

$$\mathcal{P}_{\tau,\delta} = \mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta} \quad (4.25)$$

pour tous  $(\alpha, \beta)$  tels que  $b(\alpha, \beta) = \tau$ . L'équation (4.25) peut être interprétée comme condition de cohérence pour les projections Compton.

Il est possible de réduire davantage la taille du jeu de données produits par  $\mathcal{P}$ , en remarquant que :

$$\mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}_{\alpha,\delta+\pi,\beta} = \mathcal{R}_{\delta+\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}_{\alpha,\delta,\beta} \quad (4.26)$$



La transformée  $\mathcal{P}$  est invertible et la fonction  $f$  peut être retrouvée à partir des projections  $\mathcal{P}_{\tau,\delta}$  en appliquant la formule de rétroprojection filtrée :

$$f(x, y, z) = 2\pi \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \left( \int_0^\infty \widehat{\mathcal{P}_{\tau,\delta} f}(\rho) J_0(2\pi z \tau \rho) d\tau \right) e^{2i\pi\rho(-x \sin \delta + y \cos \delta)} |\rho|^3 d\rho d\delta \quad (4.27)$$

avec  $J_0$  la fonction de Bessel et  $\tau = b(\alpha, \beta)$ .

Cette méthode permet une inversion directe de la transformée Compton, contrairement aux deux méthodes vues précédemment qui emploient d'une part les harmoniques sphériques et d'autre part la transformée de Hilbert. De même qu'avec les autres modèles, il y a une redondance dans les données du fait que les détecteurs sont considérés comme infinis. La transformée  $\mathcal{P}$  produit des jeux de données dans un espace à trois dimensions mais la taille du jeu de données minimum requis peut être réduite davantage. Les images peuvent être reconstruites à partir de projections où le paramètre  $\alpha$  ou le paramètre  $\beta$  est constant dans l'expression de  $\tau$ .

#### 4.1.4 Exemples

Les projections coniques d'une source simple (corps ellipsoïdal ou sphérique) sont générées analytiquement. Un ellipsoïde de centre  $X_0$ , de rayon  $R$  et de matrice  $A$  définie positive (donc inversible) est donnée par son équation :

$${}^t(X - X_0)A(X - X_0) = 1 \quad (4.28)$$

Si la source est une sphère,  $A$  est la matrice identité.

Chaque cône est défini par son apex  $V_1$ , son axe  $\vec{w} = (\sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta, \cos \alpha)$  et ses génératrices.

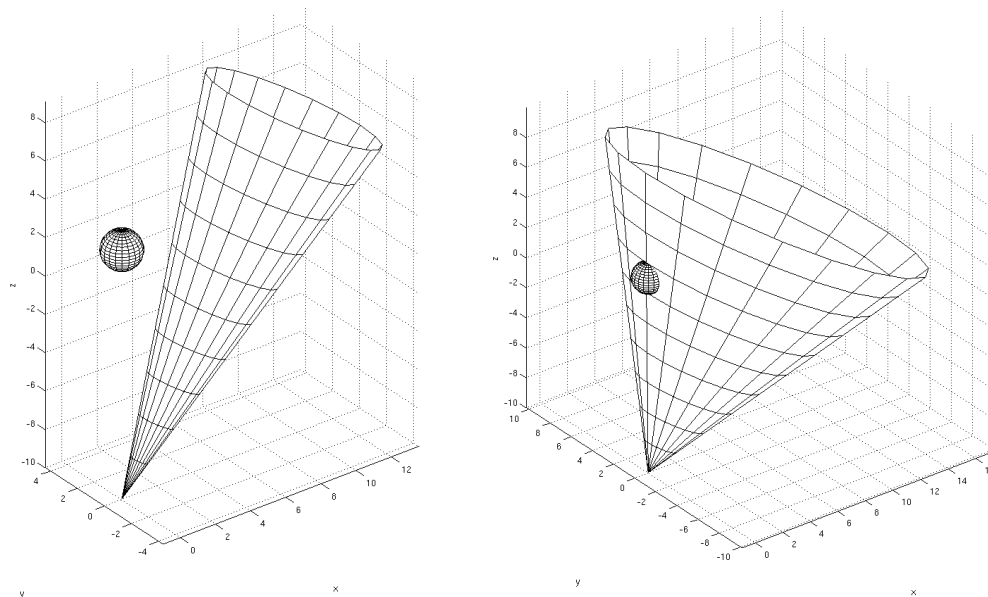


FIGURE 4.7 – Configuration de projection conique. (a) Projection nulle. (b) Projection non nulle.

Nous nous plaçons dans un repère où l'axe du cône  $\vec{w} = (\sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta, \cos \alpha)$  est l'axe vertical. Pour calculer les nouvelles coordonnées dans ce repère, nous utilisons les matrices de rotation  $R_y$  et  $R_z$  :

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec  ${}^tP = R_y R_z$ , notons  $X'_0 = {}^tP(X_0 - X_1)$  et  $A' = {}^tPAP$

Les projections coniques sont alors calculées comme étant la somme des longueurs des segments des intersections des génératrices du cône avec le corps ellipsoïdal. Soit  $X'$  la matrice des coordonnées du vecteur unitaire dirigeant l'une des génératrices dans le nouveau repère indexé sur  $\phi$ . Pour déterminer les intersections avec l'objet, on résoud l'équation :

$${}^t(rX' - X'_0)A'(rX' - X'_0) = 1, \text{ pour } r > 0. \quad (4.29)$$

Cela équivaut à :

$$r^2({}^tX'A'X') - r({}^tX'A'X'_0 + {}^tX'_0A'X') + ({}^tX'_0A'X'_0 - 1) = 0. \quad (4.30)$$

Avec  $a = {}^tX'A'X'$ ,  $-b = {}^tX'A'X'_0 + {}^tX'_0A'X'$  et  $c = {}^tX'_0A'X'_0 - 1$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac$  les solutions sont  $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ . Lorsqu'elles sont réelles on choisit  $r_1 \leq r_2$ .

Notons que  $a$ ,  $b$  et  $\Delta$  dépendent tous les trois de  $X'$  donc de  $\phi$ . Par conséquent, les racines de l'équation  $r_{1,2}$  dépendent également de  $\phi$ , paramètre des génératrices.

### Méthode de Tomitani et Hirashawa

Nous reconstruisons une sphère de 1 cm de diamètre et d'intensité constante, placée en (0,0,0) cm avec la méthode présentée en section 4.1.1. Le détecteur est composé de deux diffuseurs orthogonaux situés à 10 cm de distante de la source. Chaque diffuseur est un segment de droite de 50 cm de longueur (voir 4.8). On reconstruit les projections faisceau conique  $Pf$ , puis l'image 2D de la coupe en  $z=0$  cm.

On remarque que l'image présente des artéfacts en étoile qui rappellent ceux qu'on peut observer en tomographie classique et que le sinogramme est un peu flou.

Outre la qualité de l'image, les temps de calcul nécessaire à l'exécution de cette méthode sont relativement longs, même pour un échantillonnage grossier des angles.

### Méthode de Smith

Nous reconstruisons une sphère de 1 cm de diamètre et d'intensité constante, placée en (3,0,0) avec la méthode présentée en section 4.1.2.

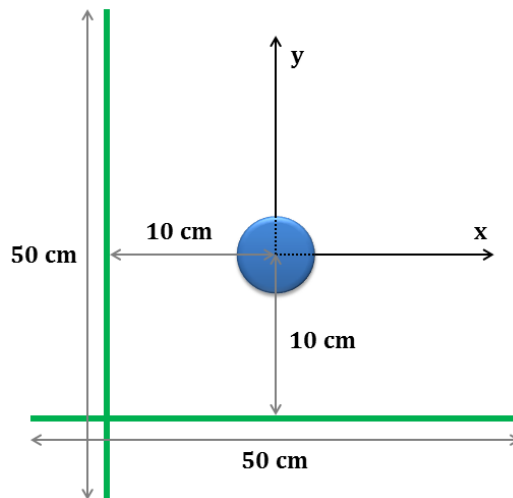


FIGURE 4.8 – Configuration de la simulation pour la méthode de Tomitani : la sphère placée en  $(0,0,0)$  est située à 10 cm de chaque détecteur (lignes vertes).

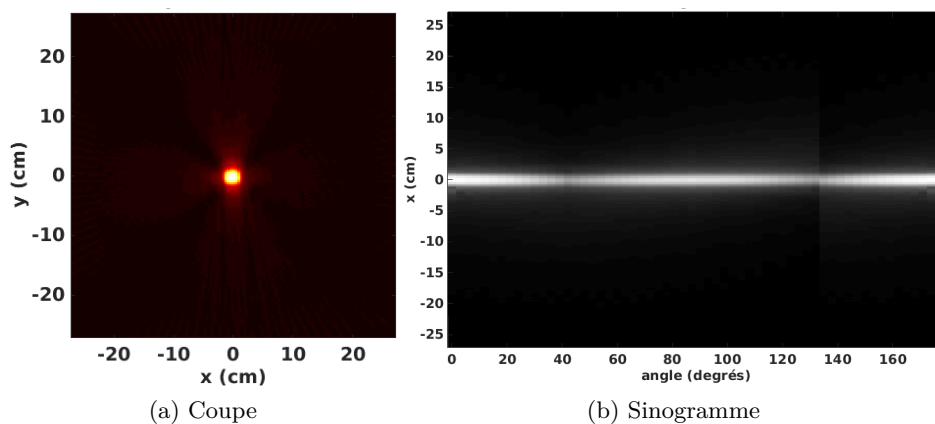
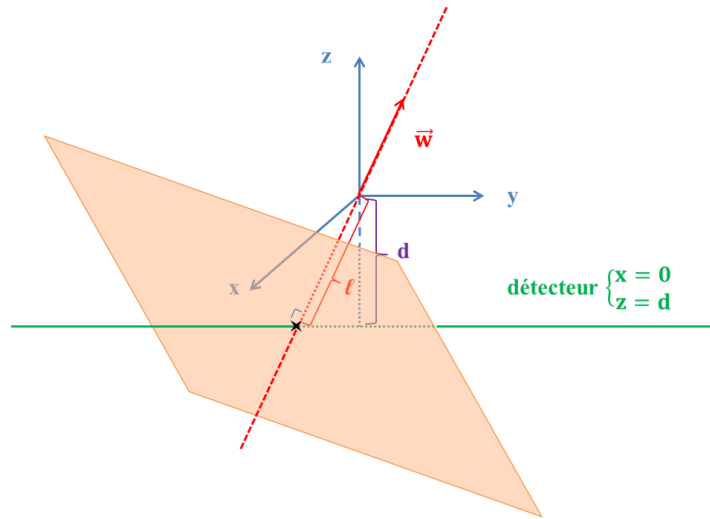


FIGURE 4.9 – Reconstruction de la coupe centrale d'une sphère de 1 cm de diamètre placée en  $(0,0,0)$  cm avec la méthode de Tomitani. (a) Coupe en  $z=0$  cm. (b) Sinogramme.

On dispose d'un certain degré de liberté afin de générer les positions des apex  $V_1$ . Du fait de la redondance dans les données, il existe plusieurs points  $V_1$  dont la projection sur une droite dirigée par  $\vec{w}$  se trouvent à la même coordonnée  $\ell$  de (4.11). Il suffit donc d'en choisir un.

Pour ce faire, nous considérons un détecteur virtuel, par exemple la droite  $(D)$  parallèle à l'axe  $(Oy)$ , telle que  $x = 0$  et  $z = d$ . On détermine le point  $V_1$  tel qu'il soit à la fois sur la droite  $(D)$  et dans le plan orthogonal à l'axe  $\vec{w}$  à  $\ell$  cm de l'origine. Le vecteur de coordonnées  $X_1$  du point  $V_1$  est solution de l'équation :

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \delta & \sin \alpha \cos \delta & \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

FIGURE 4.10 – Détermination de  $V_1$  avec une droite "détecteur".

Pour rajouter une droite détecteur parallèle à  $(Oz)$  et trouver les coordonnées d'un apex  $V_1$  sur la droite  $(D)$  située en  $y = d$ , on résout le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \delta & \sin \alpha \cos \delta & \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

On peut alors utiliser l'un ou l'autre détecteur, ou combiner les deux détecteurs pour trouver la position de  $V_1$  solution des équations.

Pour se rapprocher d'une configuration réelle, nous avons considéré que le détecteur est composé de plusieurs segments coplanaires et parallèles.

Une fois les coordonnées d'un apex  $V_1$  déterminées, pour un cône dont l'axe est dirigé par  $\vec{w}$  et de demi-angle  $\beta$ , on peut estimer l'intégrale  $Sf$  sur la surface du cône  $\mathcal{C}$  de (4.8) par :

$$Sf(V_1, \vec{w}, \beta) = \sin \beta \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\phi \quad (4.32)$$

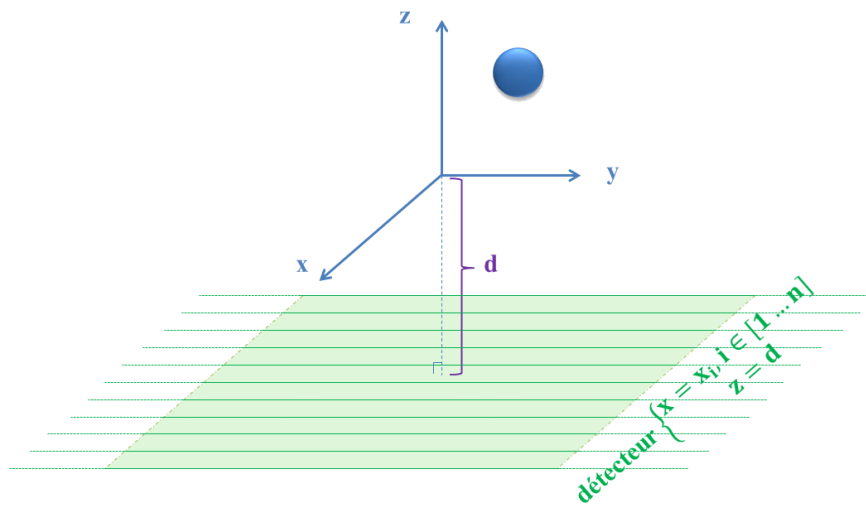
où  $r_1$  et  $r_2$  donnent les points d'intersection de la génératrice d'azimuth  $\phi$  avec l'ellipsoïde (cf. equation (4.32)).

On a alors :

$$\begin{aligned} Sf(V_1, \vec{w}, \beta) &= \sin \beta \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} d\phi \\ &= \sin \beta \int_0^{2\pi} \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{2} d\phi = \sin \beta \int_0^{2\pi} \frac{-b\sqrt{\Delta}}{2a^2} d\phi \end{aligned} \quad (4.33)$$

En discrétisant l'équation (4.33), on obtient :

$$Sf(V_1, \vec{w}, \beta) \simeq \sin \beta \sum_{i=0}^{N_\phi} \frac{\sqrt{-b_i \Delta_i}}{a_i^2} \frac{\pi}{N_\phi} \quad (4.34)$$


 FIGURE 4.11 – Détermination de  $V_1$  avec un plan "détecteur".

Après avoir évalué les projections Compton  $Sf$ , on les somme pour trouver  $\mathcal{H}Rf$  de (4.11) qui permet de trouver  $f$  :

$$p_H(\vec{w}, \overrightarrow{OV_1}, \vec{w}) \simeq - \sum_{i=0}^{N_\beta} \frac{S(V_1, \vec{w}, \beta_i)}{\cos \beta_i} \frac{\pi}{N_\beta}, \text{ avec } \beta_i = \frac{i\pi}{N_\beta} \text{ et } i \neq \frac{N_\beta}{2} \quad (4.35)$$

La source est reconstruite correctement en 3D, mais l'image est légèrement bruitée. De plus, on observe des artefacts semblables à un halo autour de la source pour les images 4.12a et 4.12b et un écho de cet halo dans les directions orthogonales à l'axe ( $Ox$ ). Ces artefacts sont d'autant plus dominants dans la figure 4.12c et pourraient être dus à la discrétisation de la transformée de Hilbert.

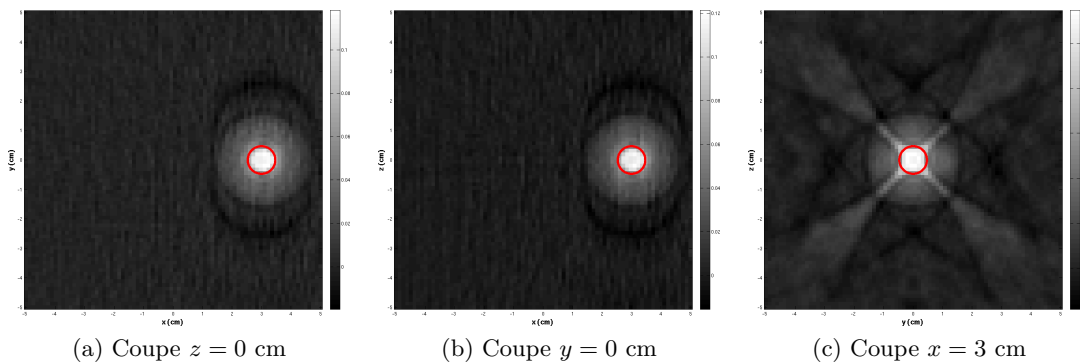


FIGURE 4.12 – Coupes de l'image reconstruite en 3D avec la méthode de Smith d'une source sphérique de 1 cm de diamètre centrée en (3,0,0) cm. Le détecteur est perpendiculaire à l'axe ( $Ox$ ).

### Méthode de Maxim

Nous reconstruisons une sphère de 1 cm de diamètre et d'intensité constante, placée soit en (0,0,-10) cm soit en (3,0,-10) cm avec la méthode présentée en section 4.1.3. Le

détecteur mesure  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  et est placé sous la source en  $(0,0,0) \text{ cm}$ .

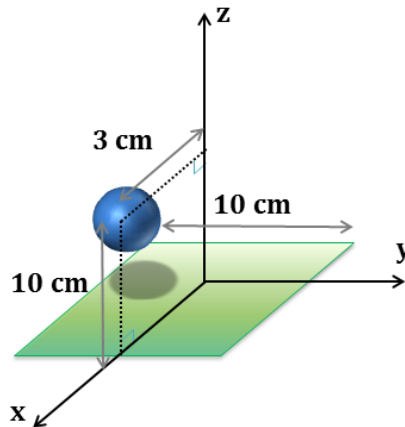


FIGURE 4.13 – Configuration de la simulation : la sphère de diamètre 1 cm est placée en  $(3,0,10) \text{ cm}$  et imagée par un détecteur de taille  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  centré en  $(0,0,0) \text{ cm}$ .

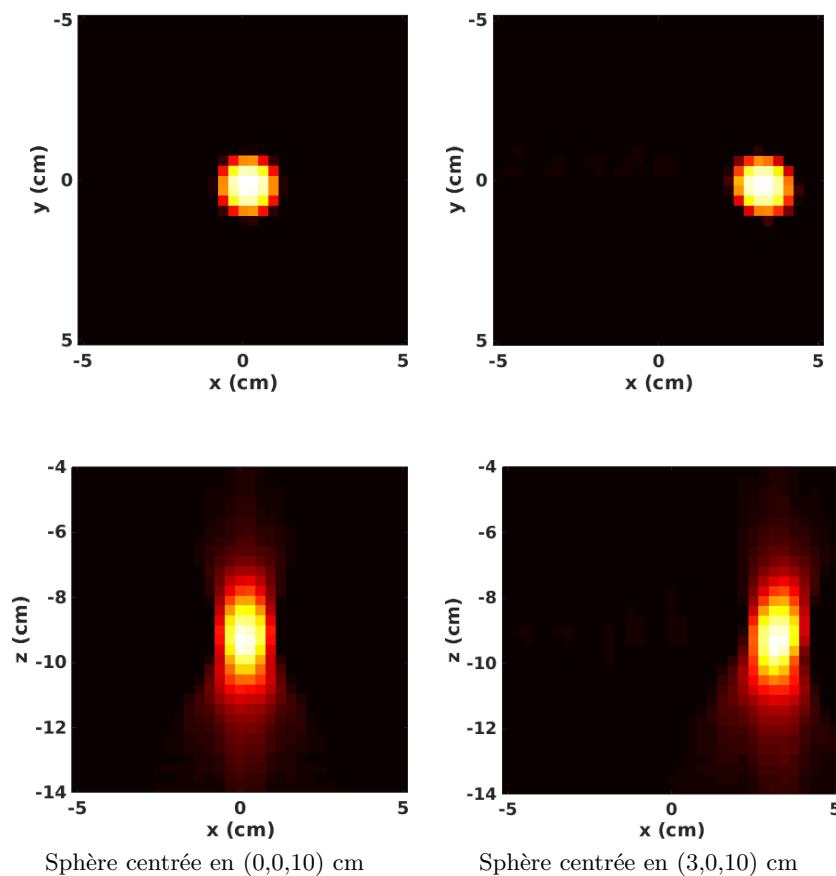


FIGURE 4.14 – Coupes extraites d'images reconstruites d'une sphère de 1 cm de diamètre.

Malgré le fait que la résolution soit assez faible, les images dans les coupes orthogonales à l'axe  $(Oz)$  sont d'une qualité satisfaisante et très peu bruitées. La résolution est conditionnée par la grille d'échantillonnage du diffuseur lors du calcul des projections Compton.

En revanche, dans la direction ( $Oz$ ) orthogonale au détecteur, on observe une élongation de la source due à l'absence de mesure de certaines projections car le détecteur est de dimension finie.

## 4.2 Méthodes itératives

De même qu'en tomographie classique, il est possible de reconstruire une image à partir de données acquises par une caméra Compton avec des méthodes itératives. La modélisation du problème est cependant différente. La majorité des méthodes qui ont été proposées dans la littérature sont des méthodes statistiques, mais les premiers algorithmes étaient basés sur des méthodes algébriques, notamment la méthode ART ou "Algebraic Reconstruction Technique" [Doria and Singh (1982)]. Cette méthode consiste à résoudre un système d'équations linéaires. Elle permet d'introduire des informations a priori durant le processus de reconstruction mais nécessite des ajustements pour se rapprocher des conditions réalistes. Parmi les méthodes statistiques, nombreuses sont les méthodes bayésiennes. On retrouve notamment les techniques basées sur l'estimation du maximum de vraisemblance MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization) [Hebert *et al.* (1990), Wilderman *et al.* (1998)b, Wilderman *et al.* (1998)a, Sauve *et al.* (1999), Wilderman *et al.* (2001), Xu and He (2007), Tornga *et al.* (2009), Lojacono *et al.* (2013)] ou OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximization) [Kim *et al.* (2007), Kim *et al.* (2010)] en version accélérée (voir section 3.2.2). Ces méthodes permettent certes de prendre en compte le bruit dans les données, mais celui-ci est conservé au cours des itérations. Dans [Lingenfelter *et al.* (2009)], trois algorithmes de maximisation de l'estimateur de vraisemblance pénalisé sont étudiés pour des données suivant une loi de Poisson où les images sont connues pour être a priori parcimonieuses dans l'espace, notamment des données de caméra Compton. Les fonctions de pénalisation utilisées sont les norme  $\ell_1$ ,  $\ell_0$  et une fonction de pénalisation basée sur la somme des logarithmes des valeurs de pixels. Avec la norme  $\ell_1$  on obtient une version réduite de la solution du maximum de vraisemblance, la norme  $\ell_0$  est équivalente à l'algorithme MLEM et la dernière fonction produit des images plus parcimonieuses que celles obtenues avec la norme  $\ell_1$ . Strong a développé une technique pour le télescope COMPTTEL fondées sur le principe d'entropie maximale [Strong *et al.* (1990)]. Par la suite, plusieurs équipes ont étudié des approches MAP (Maximum A Posteriori) pour l'imagerie Compton qui offrent la possibilité d'introduire de l'information a priori dans le processus d'estimation. Différents types d'a priori peuvent être intégrées, comme par exemple :

- dans [Lee *et al.* (2008)], l'auteur utilise un lissage convexe non quadratique et applique une méthode RAMLA régularisée convergente vers une solution MAP, afin de préserver les bords qui peuvent survenir occasionnellement dans l'objet sous-jacent,
- dans [Nguyen *et al.* (2007)], l'auteur introduit une fonction d'énergie a priori dans une méthode COSEM (Complete data OSEM).

Enfin, des techniques plus récentes basées sur des méthodes stochastiques ont été proposées dans la littérature [Andreyev *et al.* (2011), Mackin *et al.* (2012)]. Ce sont des algorithmes

rapides fondées sur les chaînes de Markov, similaires au MLEM en termes de résultats. Les temps de calculs sont donc réduits mais en contrepartie, l'image présente beaucoup de variance.

Nous verrons ci-après la méthode MLEM développée en mode liste pour la caméra Compton et quelques modèles pour le calcul de la matrice système.

#### 4.2.1 Algorithme MLEM en mode liste (LM-MLEM)

L'algorithme itératif utilisé est basé sur la maximisation de la fonction de vraisemblance modélisant l'émission des photons par une loi de Poisson vu en section 3.2.2, en mode liste. Il a été adapté pour convenir aux données acquises avec une caméra Compton. Son but est de déterminer la source d'où proviennent les photons, dans l'image constituée de l'ensemble des voxels  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, N_v$ , à partir des mesures des évènements indexés par  $i = 1, \dots, N_\gamma$ . On définit le vecteur  $\lambda$ , représentant les intensités moyennes d'émissions des voxels du volume. On calcule ainsi la suite de vecteurs  $\lambda^{(\ell)}$ , supposée converger vers le vecteur  $\lambda$ , telle que :

$$\lambda_j^{(\ell+1)} = \frac{\lambda_j^{(\ell)}}{s_j} \sum_{i=1}^{N_\gamma} t_{ij} \frac{1}{p_i^{(\ell)}}, \text{ avec } p_i^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{N_v} t_{ik} \lambda_k^{(\ell)}, \quad (4.36)$$

où :

- $N_\gamma$  est le nombre total d'évènements,
- $N_v$  est le nombre total de voxels,
- $t_{ij}$  est la probabilité qu'un photon émis par le voxel  $v_j$  soit détecté en tant qu'évènement Compton  $e_i$ ,
- $s_j$  représente la sensibilité du détecteur, c'est-à-dire la probabilité qu'un photon émis par  $v_j$  soit détecté.

Le mode liste peut être vu comme un cas limite du mode sinogramme, où chaque élément est égal soit à 1 soit à 0. La valeur  $Y_i$  n'apparaît pas dans la formule (4.36) car elle est implicitement égale à 1 pour les évènements acquis et 0 pour l'ensemble des évènements possibles non réalisés.

La formule (4.36) est également utilisée en TEP et en TEMP, à la seule différence que les probabilités  $t_{ij}$  ne sont pas calculées de la même façon.

Le cœur du problème de reconstruction itérative réside dans le calcul de la sensibilité  $S = (s_j)_{j=1, \dots, N_v}$  et le calcul de la matrice système  $T = (t_{ij})$  dans laquelle on peut théoriquement modéliser à la fois la géométrie du dispositif, le procédé de détection et l'absorption dans le patient. Dans les sections suivantes, nous présentons différentes méthodes de calcul des matrices  $T$  et  $S$  développées dans la littérature. Les méthodes que nous avons mises en oeuvre sont abordées au chapitre 6.



## 4.2.2 Méthodes de calcul de la matrice système

La probabilité qu'un photon émis par un voxel  $v_j$  soit détecté en tant qu'évènement  $e_i$  est  $t_{ij}$  donné par :

$$t_{ij} = \int_{M \in v_j} p(V_1, E_1, V_2, E_0 - E_1 | M) dv \quad (4.37)$$

où  $p(M)$  est la densité de la loi d'émission d'un photon prise en un point  $M$  du volume.

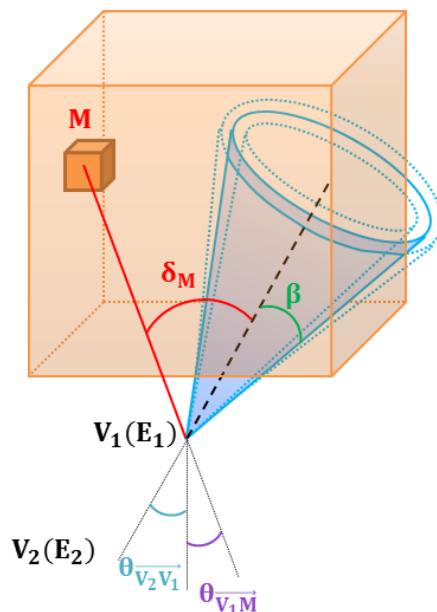


FIGURE 4.15 – Paramètres pour le calcul des probabilités  $t_{ij}$ .

Dans [Xu and He (2007)], la méthode de calcul des probabilités  $t_{ij}$  est basée sur des techniques de déconvolution spectrale qui ne nécessitent pas de connaître l'énergie initiale du photon. Les probabilités des principales interactions sont modélisées et deux cas sont considérés selon le type de la seconde interaction. Si celle-ci est une absorption photoélectrique, on pose :

$$t_{ij} = \frac{\nu}{\sin \beta} e^{-\mu_{E_0} d_1} K(\beta, E_0) \frac{2\pi m_e c^2}{(E_0 - E_1)^2} e^{-\mu_{E_0 - E_1} d_2} \frac{\sigma_p(E_2)}{\sqrt{2\pi(\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2)}} e^{-\frac{(E_0 - E_1 - E_2)^2}{2(\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2)}} \quad (4.38)$$

Si la deuxième interaction est une autre diffusion Compton, on pose :

$$t_{ij} = \frac{\nu}{\sin \beta} e^{-\mu_{E_0} d_1} K(\beta, E_0) \frac{2\pi m_e c^2}{(E_0 - E_1)^2} e^{-\mu_{E_0 - E_1} d_2} K(\beta, E_0 - E_1) \frac{2\pi m_e c^2}{(E_0 - (E_1 - E_2))^2} e^{-\mu_{E_0 - (E_1 - E_2)} d_3} \quad (4.39)$$

où :

- $\nu$  est une constante qui dépend du système de détection,
- $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  sont les distances parcourues respectivement par le photon dans le détecteur avant sa première interaction, entre les deux interactions (première diffu-

sion Compton et absorption/diffusion), et par le photon après la seconde interaction avant de sortir du détecteur,

- $\mu_E$  est le coefficient d'atténuation linéaire à une énergie  $E$ ,
- $\sigma_p(E_2)$  représente la probabilité que le photon diffusé soit absorbé par effet photoélectrique,

Les travaux de [Tornga *et al.* (2009), Sullivan *et al.* (2009)] suggèrent de calculer la matrice des  $t_{ij}$  en modélisant partiellement le processus d'absorption. Leur approche consiste à poser :

$$t_{ij} = K(\beta, E_0) \frac{1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}}{|\vec{V}_2 \vec{V}_1|^2 \cos \theta_{\vec{V}_2 \vec{V}_1}} \quad (4.40)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'interaction dans l'absorbeur à l'énergie  $E_0 - E_1$  qui dépend du matériau et  $t$  l'épaisseur d'absorbeur traversée par le photon diffusé.

Le modèle de [Wilderman *et al.* (1998)b] définit  $p(M)$  comme uniforme et la densité de probabilité  $p(V_1, E_1, V_2, E_0 - E_1 | M)$  comme suit :

$$p(V_1, E_1, V_2, E_0 - E_1 | M) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\mu_C}{\mu_{1,a}} (1 - e^{-\mu_C d_1}) K(\beta, E_0) e^{-\mu_{1,a} d} (1 - e^{-\mu_{2,a} d_2}) \frac{\cos \theta_{\vec{V}_1 \vec{M}} \cos \theta_{\vec{V}_2 \vec{V}_1}}{|\vec{V}_1 \vec{M}|^2 |\vec{V}_2 \vec{V}_1|^2} \delta \left( \arccos \left( \frac{\vec{V}_1 \vec{M} \cdot \vec{V}_2 \vec{V}_1}{|\vec{V}_1 \vec{M}|^2 |\vec{V}_2 \vec{V}_1|^2} \right) - \beta \right) \quad (4.41)$$

où :

- $K(\beta, E_0)$ ,  $\mu_C$  et  $\mu_{1,a}$  sont respectivement les sections efficaces de diffusion Compton, de diffusion Compton dans le premier détecteur, et d'absorption totale dans le premier détecteur,
- $d_1$ ,  $d$  et  $d_2$  sont les distances parcourues respectivement par le photon dans le détecteur avant diffusion, par le photon après diffusion jusqu'à la sortie du premier, et par le photon diffusé avant absorption,
- $\theta_{\vec{V}_1 \vec{M}}$  et  $\theta_{\vec{V}_2 \vec{V}_1}$  sont les angles formés respectivement par  $\vec{V}_1 \vec{M}$  et  $\vec{V}_1 \vec{V}_2$  avec le vecteur normal à la caméra.

Une version de ce modèle [Maxim *et al.* (2015)] tenant compte des incertitudes sur l'énergie consiste à poser :

$$t_{ij} = \int_{M \in v_j} K(\beta, E_0) \frac{\cos \theta_{\vec{V}_1 \vec{M}} \cos \theta_{\vec{V}_2 \vec{V}_1}}{|\vec{V}_1 \vec{M}|^2 |\vec{V}_2 \vec{V}_1|^2} h(\delta_M | \beta, \sigma_\beta) dv \quad (4.42)$$

où :

- $\delta_M = \arccos \left( \frac{\vec{V}_1 \vec{M} \cdot \vec{V}_2 \vec{V}_1}{|\vec{V}_1 \vec{M}| |\vec{V}_2 \vec{V}_1|} \right)$  est la distance angulaire entre  $\vec{V}_1 \vec{M}$  et  $\vec{V}_2 \vec{V}_1$ ,
- $\sigma_\beta = \frac{m_e c^2}{\sin \beta_i} \sqrt{\left( \frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_0^2} \right)^2 dE_1^2 + \frac{dE_0^2}{E_0^4}}$  est l'erreur sur l'angle  $\beta$  calculé à partir des énergies mesurées  $E_1$  et  $E_2$  et des résolutions des détecteurs (voir [Ordonez *et al.* (1997)]),
- $h$  est un noyau spatial modélisant les incertitudes sur l'angle Compton.

### 4.2.3 Méthodes de calcul du vecteur de sensibilité

Un élément  $s_j$  du vecteur de sensibilité  $S = (s_j)_{j=1\dots N_v}$  est la probabilité pour un photon émis par le voxel  $v_j$  d'être détecté. Elle prend en compte tous les évènements qui auraient pu être détectés par la caméra, non pas juste ceux qui se sont produits. Dans l'équation (4.36), ce paramètre influe sur la capacité de l'algorithme à fournir une image quantitative.

La sensibilité peut être évaluée par simulation Monte Carlo. Certains auteurs considèrent la sensibilité constante (égale à 1 par exemple) et d'autres ont développé des méthodes analytiques qui approchent sa valeur en considérant certaines simplifications dans la géométrie de détection et des angles solides. Pour un diffuseur à plusieurs couches, un moyen simple d'obtenir une estimation de la sensibilité est de considérer que le diffuseur est petit et de calculer l'angle solide sous lequel le centre du bloc est vu par  $O_j$ .

Nous abordons ci-après les principales méthodes analytiques actuellement proposées dans la littérature.

Dans [Wilderman *et al.* (2001)], une approche directe et facile à mettre en oeuvre consiste à faire la somme sur tous les éléments du diffuseur :

$$s_j \propto \sum_{V_1 \in D_{diff}} \frac{\cos \theta_{\overrightarrow{V_1 O_j}}}{|\overrightarrow{V_1 O_j}|^2} (1 - e^{-\mu_{1,a} d_1}) \quad (4.43)$$

où :

- $\mu_{1,a}$  est la section efficace totale dans le diffuseur,
- $d_1$  est la longueur de l'intersection entre la droite dirigée par le vecteur  $|\overrightarrow{V_1 O_j}|$  et le diffuseur,
- $|\overrightarrow{V_1 O_j}|$  est la distance entre le centre de l'élément de diffuseur et le centre du voxel  $j$ ,
- $\theta_{\overrightarrow{V_1 O_j}}$  est l'angle entre  $\overrightarrow{V_1 O_j}$  et la normale à la caméra.

Un modèle un peu plus complet a été fourni dans [Sullivan *et al.* (2009)]. Ce modèle combine plusieurs probabilités selon la formule suivante :

$$s_j = \sum_{D_{diff}} \left[ e^{-\frac{d_1}{\Lambda_{air}}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_{diff}}{\Lambda_{diff}}} \right) \frac{A_{diff}}{4\pi} \frac{\cos \theta_{\overrightarrow{V_1 M}}}{|\overrightarrow{V_1 M}|^2} \sum_{D_{abs}} \left( e^{-\frac{d_2}{\Lambda_{air}}} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_{abs}}{\Lambda_{abs}}} \right) K(\beta) A_{abs} \frac{\cos \theta_{\overrightarrow{V_2 V_1}}}{|\overrightarrow{V_2 V_1}|^2} \right) \right] \quad (4.44)$$

où :

- $d_1$  est la distance parcourue par le photon avant d'atteindre la caméra,
- $\Delta$  représente l'épaisseur du diffuseur ou de l'absorbeur,
- $\Lambda$  est la longueur d'interaction dans le diffuseur ou dans l'absorbeur,
- $A$  désigne la surface du diffuseur ou de l'absorbeur.

Les autres paramètres  $d_2, \theta_{\overrightarrow{V_1 M}}, \theta_{\overrightarrow{V_2 V_1}}$  sont les mêmes que pour l'équation 4.41.

### 4.3 Problèmes de troncature en tomographie Compton

Nous avons montré qu'il existe de nombreuses méthodes pour reconstruire les images issues de données acquises par une caméra Compton. Parmi les méthodes analytiques étudiées, il est possible de reconstruire des images à partir des données non déterministes avec uniquement l'algorithme de rétroprojection filtrée basé sur le théorème coupe-projection (cf. section 4.1.3). Cependant, pour une caméra Compton réelle, de largeur finie, les projections Compton sont à la fois tronquées et incomplètes et les images reconstruites présentent des artéfacts.

Pour reconstruire une image 3D en tomographie classique, le sinogramme contenant les données sur les projections est en trois dimensions et on utilise un seul angle,  $\theta$  (voir section 3.1). Par analogie avec la reconstruction tomographique classique, on utilise le terme sinogramme pour désigner la matrice contenant les projections organisées selon les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$  (cf. section 4.1.3). Les données se trouvent alors dans un espace à cinq dimensions. Afin d'illustrer le phénomène de troncature dans les projections, nous avons affiché dans la figure 4.16 des extraits du sinogramme d'une source ponctuelle d'intensité uniforme. Dans cet exemple, nous fixons les angles  $\beta$  et  $\delta$ , tels que  $\tau = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$  (cf. équation (4.17)) et  $\delta = \frac{\pi}{3}$ . De ce fait, nous observons des projections Compton dont le demi-angle d'ouverture et l'azimut de l'axe des cônes sont les mêmes, et seule l'inclinaison de l'axe varie. La symétrie observée dans les images est due à la remarque faite pour l'équation (4.26).

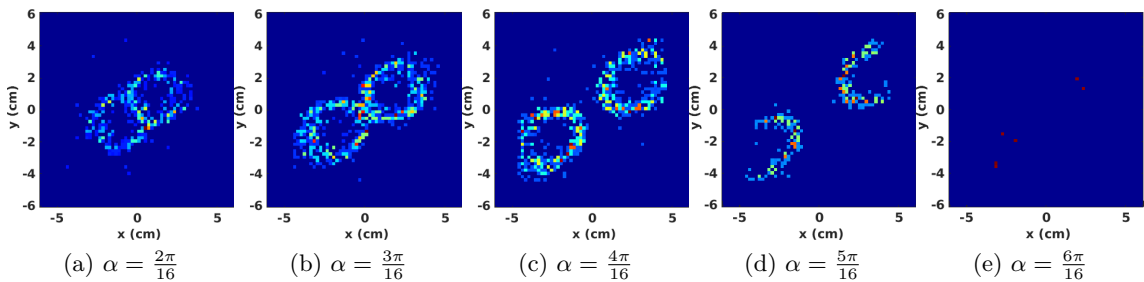


FIGURE 4.16 – Extraits du sinogramme d'une source ponctuelle d'intensité uniforme avec  $\beta$  et  $\delta$  fixés et  $\alpha$  variant entre  $\frac{\pi}{8}$  et  $\frac{3\pi}{8}$ .

Nous constatons qu'à partir d'une certaine inclinaison de l'axe du cône, les projections Compton deviennent de plus en plus tronquées, car le diffuseur n'est plus assez large pour toutes les acquérir. Cette absence d'information est à l'origine des artéfacts que nous observons dans les images reconstruites (cf. section 4.1.4) dans la direction orthogonale à la caméra.

En pratique, il serait plus utile de sélectionner des mesures moins tronquées, afin de pouvoir produire des images quantitatives.

Avec l'algorithme MLEM, ce problème peut être partiellement corrigé grâce à la matrice de sensibilité. Elle joue un rôle important dans la formule de reconstruction. Les artéfacts observés dans la direction orthogonale à la caméra peuvent être légèrement réduits.



---

# Simulation de données : problème direct en tomographie Compton

---

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps les différents outils logiciels qui nous ont permis de générer des données. Nous utilisons deux logiciels de simulation Monte-Carlo, Gate et MEGAlib, basés sur Geant4. Gate est un logiciel de simulation optimisé pour l'imagerie médicale et la radiothérapie. MEGAlib, quant à lui, est dédié à la caméra Compton et permet notamment la simulation, l'analyse de données et la reconstruction d'images Compton. Puis, nous avons développé un processus complet allant de la simulation de la protonthérapie aux événements Compton que nous présentons en deuxième partie.

### 5.1 Simulations Monte-Carlo

Les méthodes Monte Carlo sont des méthodes de résolution d'un problème mathématique complexe qui permettent de calculer des valeurs numériques à l'aide du hasard. Ces techniques probabilistes sont basées sur des répétitions d'expériences par tirages aléatoires. La première publication de ces méthodes a été faite en 1949 dans [[Metropolis and Ulam \(1949\)](#)], bien que le concept remonte à 1947 avec Nicholas Metropolis.

Ces techniques sont très souvent utilisées en biologie, en finance, en ingénierie et notamment en physique des particules et permettent par exemple d'estimer la sensibilité d'un détecteur. Les simulations Monte Carlo sont cependant assez lourdes en temps de calcul, car les transports, les interactions des particules dans la matière et éventuellement les réponses des détecteurs sont modélisés, en plus du dispositif expérimental.

Dans cette section, deux logiciels de simulations Monte-Carlo basés sur Geant4 sont présentés. Le premier logiciel, dénommé MEGAlib, est optimisé pour la simulation de caméras Compton. Le second logiciel, Gate, ne comporte pas actuellement de développements pour la caméra Compton mais, étant dédié aux simulations d'imagerie médicale et de radiothérapie, il est bien adapté pour des simulations réalistes de protonthérapie.

### 5.1.1 Geant4

Geant4 (GEometry ANd Tracking) est un outil logiciel qui permet de simuler le passage de particules dans la matière. Ce logiciel est basé sur les méthodes Monte-Carlo vues précédemment. Il peut être utilisé dans divers domaines tels que la physique des hautes énergies, la physique nucléaire, la physique des accélérateurs et la physique médicale. Initialement développé au CERN, c'est le premier outil à avoir été entièrement écrit en programmation orientée objet (C++) [Agostinelli *et al.* (2003)]. De cette façon, il est plus facile d'y ajouter ou de modifier des modules sans pour autant perturber la structure de base du code, d'implémenter des modèles physiques de façon transparente, et ainsi de faciliter l'évolution et l'amélioration du code.

De gros efforts ont été fournis pour l'écriture des algorithmes de simulation des processus physiques et la modélisation des géométries de détecteurs et des matériaux utilisés. Les modèles physiques inclus dans Geant4 sont très variés et la plupart de processus d'interaction des particules dans la matière, même avec de très larges spectres en énergie, sont décrits.

Le logiciel inclut les méthodes classiques d'imbrication des volumes lors de la définition des géométries. Chaque matériau est défini selon trois paramètres, sa densité, sa masse molaire et son numéro atomique, puis suivant sa composition chimique en terme d'éléments. L'ensemble des propriétés des particules, y compris leurs processus d'interaction hadronique et électromagnétique, en particulier les processus électromagnétique à basse énergie, est contenu dans le PDG (Particle Data Group). Parmi ces processus on peut notamment citer l'effet photo-électrique, les diffusions Compton et Rayleigh, l'émission radiative de freinage (Bremsstrahlung), la diffusion multiple et la perte d'énergie par ionisation, qui s'appliquent aux photons et aux électrons de basse énergie ( $< 1$  MeV).

Parmi les logiciels de simulation basés sur Geant4, on peut notamment citer les plateformes MEGAlib et Gate, que nous verrons plus en détail par la suite.

### 5.1.2 MEGAlib

MEGAlib, pour Medium Energy Gamma-ray Astronomy Library, représente la chaîne d'analyse complète depuis les simulations jusqu'à l'analyse de données comme la reconstruction d'images en régime de diffusion Compton [Zoglauer *et al.* (2006)]. Il a été développé par Andreas Zoglauer d'abord à Max-Planck Institut für Extraterrestrische Physik en Allemagne pour le télescope MEGA, puis à Space Science Laboratory Berkeley aux Etats-Unis et il a permis l'analyse de données d'autres télescopes dont COMPTEL.

Comparé à Gate, ce logiciel est actuellement moins adapté pour simuler des fantômes voxelisés.

Dans ce logiciel, différents modules sont disponibles, et permettent de réaliser les simulations.

### Visualisation de la géométrie

Geomega est un outil qui fournit une géométrie uniforme et une description des configurations de détecteurs pour MEGALib. Toutes les informations sur les caractéristiques et la géométrie des détecteurs sont décrites dans un fichier `ma_geometrie.geo.setup`. Celui-ci comprend aussi bien la description de tous les matériaux, les volumes, les propriétés des détecteurs, les critères de déclenchement, etc, qui permettent de créer et de visualiser la géométrie. La bibliothèque sous-jacente Geomega est à son tour utilisée par les autres programmes de MEGALib pour accéder à ces informations de géométrie. Par exemple :

- L'outil de simulation Cosima, que nous verrons par la suite, utilise Geomega pour importer la géométrie dans son propre format de Geant4.
- Lorsque le fichier de simulation est lu par l'outil de reconstruction des évènements Revan, par exemple, les données de simulation idéales sont bruitées selon la description du détecteur dans le fichier de géométrie.
- Les bibliothèques Revan et Mimrec utilisent Geomega pour calculer les probabilités d'absorption, vérifier où les coups se sont produits, etc.

Un volume est créé avec différents paramètres : son nom, sa forme, son centre, ses dimensions, sa composition, sa couleur d'affichage etc. Geomega comprend de nombreux outils pour faciliter le paramétrage des géométries, telles que des structures de contrôle (boucle "for", structure "if"), des commandes de rotation, d'orientation, de duplication etc. Un certain nombre de matériaux sont déjà pré-programmés dans le logiciel, dans un fichier appelé "Materials.geo". Il peut être personnalisé dans le but de créer ou modifier des matériaux. À ce moment là, les nouvelles probabilités d'absorption sont automatiquement calculées par Geant4.

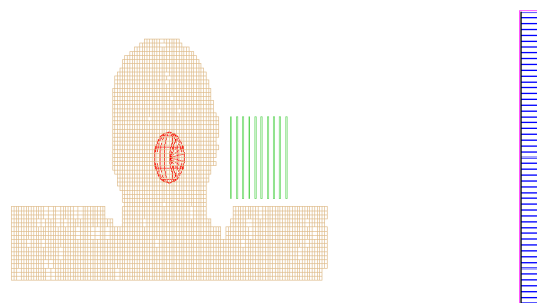


FIGURE 5.1 – Fantôme de patient et caméra Compton affichés avec Geomega.

Geomega comporte néanmoins des contraintes, issues pour certaines de Geant4. Par exemple, les volumes peuvent contenir des volumes "fille" ou *daughter*, qui doivent être



entièrement inclus dans leur volume "mère". Il n'est pas possible de *diviser* un volume en sous-volumes. Les détecteurs doivent obligatoirement être parallélépipédiques. Enfin, Geomega ne permet pas de visualiser le déroulement d'une simulation en temps réel.

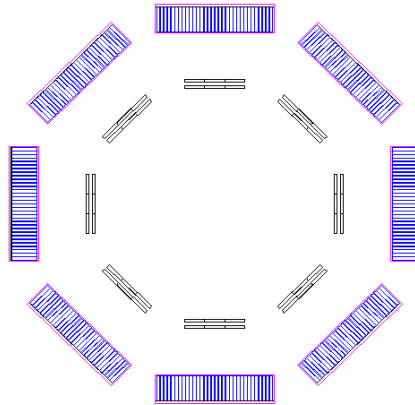


FIGURE 5.2 – Couronne de caméras Compton représentée avec Geomega.

### Données de la simulation

Cosima, pour Cosmic Simulator for MEGAlib, est l'outil de simulation, capable de traiter différents spectres, différentes géométries de sources en entrée, et la détection des rayons gamma par effet photoélectrique, diffusion Compton et création de paire.

Les paramètres de la simulation sont fournis dans un fichier \*.source (également connu comme fichier source), par exemple mes\_sources.source. Ce fichier comprend les informations sur l'exécution de la simulation, c'est-à-dire la description des sources, ainsi que des informations générales sur la simulation telles que le stockage des données, les listes des processus physiques à utiliser, etc. Pour chaque source du fichier, on définit le nombre de particules à générer, le type de particules, la forme (point source, source linéaire, source parallélépipédique etc), l'intensité, le nombre de sources, et l'énergie.

Etant basé sur la librairie Geant, MEGAlib peut faire appel à quasiment tous les processus physiques déjà présents dans Geant4 (effet photo-électrique, diffusion Compton, création de paire). Seul l'effet Doppler n'est pas inclus par défaut dans ces librairies. Cet effet limite fondamentalement la résolution angulaire dès qu'elle s'appuie sur la diffusion Compton. L'extension GLECS résoud ce problème en incluant une extension pour les librairies Geant.

Une fois la simulation terminée, on obtient un fichier en sortie \*.sim, par exemple ma\_simulation.sim. Il est constitué d'une section d'en-tête et une section d'événements. Dans la section d'en-tête, on trouve le type de fichier, la géométrie, la date et la version de MEGAlib utilisée, qui sont communs à la plupart des autres fichiers d'événements MEGAlib. La section d'événements ne comporte que des résultats "purs" (suite des interactions dans les détecteurs) qu'il est nécessaire d'analyser. Dans cette deuxième section, les lignes commençant par "HT-sim" contiennent les positions et les dépôts d'énergie tels

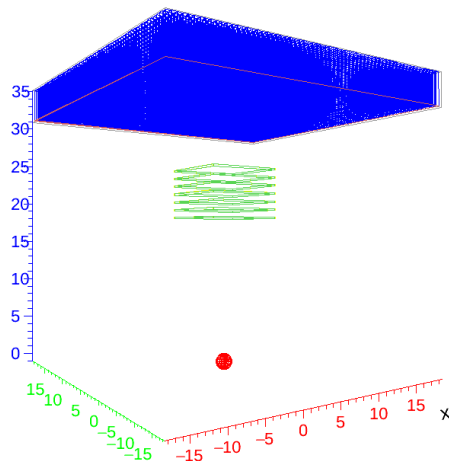


FIGURE 5.3 – Caméra et source sphérique représentés avec Geomega. Les diffuseurs se situent entre  $z = 18$  cm et  $z = 24$  cm. L'absorbeur est centré en  $z = 33$  cm.

qu'ils auraient été détectés par le détecteur, mais sans appliquer de bruit sur les énergies et les positions mesurées.

```

*****
*
*           Cosima - the cosmic simulator of MEGALib
*
*   This program is part of MEGALib version 2.28.01
*   (C) by Andreas Zoglauer and contributors
*
*   Master reference for MEGALib:
*   A. Zoglauer et al., NewAR 50 (7-8), 629-632, 2006
*
*   For more information about MEGALib please visit:
*   http://megalibtoolkit.com
*
*****

```

FIGURE 5.4 – Cosima.

## Reconstruction des séquences Compton

Les évènements obtenus dans le fichier de sortie \*.sim peuvent être pré-traités avec deux modules différents. On peut faire appel soit au programme Revan, soit à Sivan, et ceux-ci permettent la reconstruction des évènements. Autrement dit, ils analysent les résultats purs contenus dans le fichier \*.sim afin de déterminer l'interaction correspondant à l'évènement (diffusion Compton, création de paire etc) pour calculer la trajectoire la plus probable parcourue par chaque photon.

Sivan est destiné à l'analyse des données simulées explicitement à l'aide des informations de simulation : la librairie sous-jacente est principalement utilisée pour déterminer les réponses et l'efficacité maximum possible d'un algorithme de reconstruction. Cette librairie produit des évènements idéaux, c'est-à-dire sans erreurs de détection et sans absorptions incomplètes.

Revan en revanche génère des évènements plus réalistes. Cette librairie permet de déterminer les séquences Compton, c'est-à-dire le chemin le plus probable parcouru par chaque photon, à partir des positions d'interaction et des énergies déposées dans les détecteurs. A cette étape, Revan introduit des incertitudes dans les mesures de positions et d'énergies représentatifs des résolutions des détecteurs.

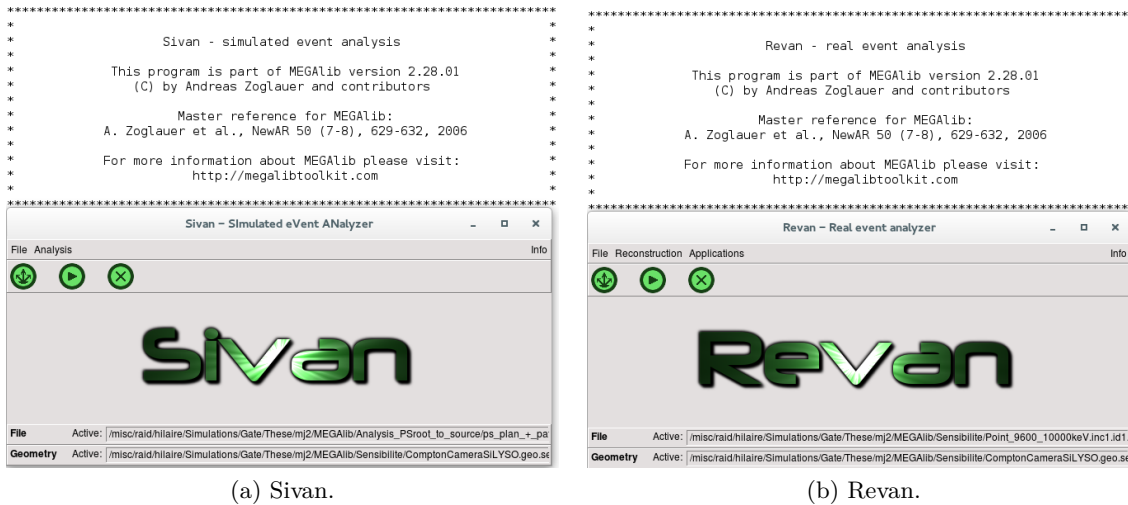


FIGURE 5.5 – Modules Sivan et Revan de MEGALib.

On acquiert en sortie un fichier \*.tra, par exemple ma\_simulation.tra, qui contient tous les évènements sous forme de liste. Pour chaque évènement, on enregistre en particulier les deux positions d'interaction dans les détecteurs et les énergies déposées dans ceux-ci.

### Reconstruction d'images

MEGALib dispose également d'un module de reconstruction d'images. Mimrec est basé sur un algorithme de reconstruction MLEM en mode liste.

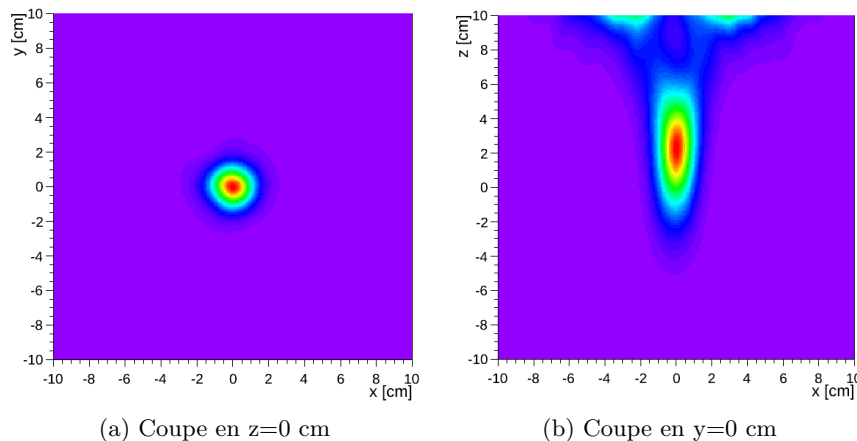


FIGURE 5.6 – Source sphérique de rayon 0.5 cm centrée en (0,0,0) cm. Géométrie de la simulation représentée en figure 5.3.



FIGURE 5.7 – Mimrec.

### 5.1.3 Gate

GATE (Geant4 Application for Tomographic Emission) est un logiciel avancé et open-source, également basé sur Geant4, développé par la collaboration internationale OpenGate et dédiée à la simulation numérique de l'imagerie médicale et la radiothérapie [Jan *et al.* (2004)]. Il supporte actuellement les simulations de tomographie par émission (tomographie par émission de positons - TEP et tomographie par émission monophotonique - TEMP), tomodensitométrie (TDM) et les traitements de radiothérapie. Ce logiciel utilise un système de macros, plus simple à apprendre par un nouvel utilisateur. Ces macros offrent la possibilité de configurer des paramètres de simulations réalistes. Par conséquent, Gate est devenu un logiciel incontournable pour la conception et l'optimisation de dispositifs d'imagerie, le développement et l'évaluation de méthodes de reconstruction d'images et de correction, et permet également de planifier des traitement de radiothérapie en effectuant des calculs de dose.

À la différence de MEGALib vu précédemment, Gate ne contient pas plusieurs modules individuels permettant de réaliser différentes tâches. Comme mentionné précédemment, les simulations sont gérées par des "macros", c'est-à-dire un fichier `ma_simulation.mac`, contenant toutes les informations nécessaires : dans cette macro, on définit les paramètres de détection (géométrie, caractéristiques), la liste des processus physiques utilisés, la source (type, taille, position, nombre de particules simulées), le format de sortie désiré, et il est même possible d'avoir la visualisation de la géométrie et/ou de la simulation. On note qu'il est possible de déclarer ces informations dans plusieurs macros séparées et d'y faire appel dans une macro principale.

#### Description des géométries

Le premier volume à être créé est le *world*. Chaque nouveau volume sera inséré dans celui-ci, avec un nom donné, et sera un sous-volume *daughter* du *world*. Les dimensions du

*world* doivent être suffisamment grandes pour inclure les sous-volumes, tels que la caméra, le fantôme etc. Ces sous-volumes sont caractérisés par leur position, leur géométrie, leur couleur d'affichage, leurs matériaux etc. Chaque niveau doit être affecté à un volume de la géométrie. Un volume d'un certain niveau doit être entièrement inclus dans le volume de niveau supérieur.

Ensuite, le type de système est choisi, en fonction de la modalité d'imagerie à simuler : *scanner*, *PETscanner*, *cylindricalPET*, *ecat*, *CPET* ou *SPECTHead*. Un système peut être utilisé pour modéliser plusieurs scanners qui partagent les mêmes caractéristiques géométriques générales. Il peut être considéré comme une sorte de modèle décrit par des composants clés organisés selon une hiérarchie spécifique (arborescence) lié par un format de données de sortie spécifique. Une fois que le système d'imagerie est construit, chaque élément doit lui être attaché. Seuls certains volumes peuvent enregistrer les coups, c'est à dire garder en mémoire l'historique des particules qui interagissent dans ces volumes : ces volumes sont définis comme "détecteurs sensibles" ou *crystalSD*.

Afin de pallier à l'absence de système prédéfini pour la caméra Compton dans Gate, nous avons proposé d'utiliser deux parties de type *SPECTHead* correspondant au diffuseur et à l'absorbeur, puis de les définir comme détecteurs sensibles ou *crystalSD*. Ces détecteurs enregistrent donc les interactions dans un fichier ROOT, et ce fichier est traité afin de mettre en correspondance les interactions ayant lieu dans les deux *SPECTHead* pour le diffuseur et pour l'absorbeur afin de définir un évènement Compton.

On peut également inclure un fantôme, de la même façon qu'on a inclus le détecteur. L'enveloppe extérieur du fantôme est un sous-volume du *world*. On peut également récupérer les informations sur les interactions Compton et Rayleigh dans le fantôme, en le définissant comme détecteur sensible ou *phantomSD*. À ce moment, deux types d'informations sont enregistrées : le nombre d'interactions de diffusion générées dans tous les volumes physiques attaché au *phantomSD* et le nom du volume physique attaché au *phantomSD* dans lequel la dernière interaction s'est produite.

Gate contient un certain nombre de commandes telles que la rotation, la translation, la répétition des volumes, qui facilitent l'implémentation des géométries. De même que pour MEGALib, Gate contient un certain nombre de matériaux pré-enregistrés dans un fichier "GateMaterials.db" qui est aisément personnalisable.

## Description des processus physiques

Une fois que les volumes et les détecteurs sensibles correspondants ont été décrits, les processus d'interaction ayant un intérêt dans la simulation doivent être spécifiés. Gate utilise les mêmes processus physiques que Geant4. Par exemple, l'effet photoélectrique, la diffusion Compton, la matérialisation et l'effet Rayleigh sont modélisés pour les photons de basse énergie ; pour les électrons, il s'agit de l'ionisation et du rayonnement de freinage ; pour les hadrons, les processus élastiques et inélastiques sont également basés sur les modèles de Geant4. Il est possible de personnaliser la simulation en définissant soi-

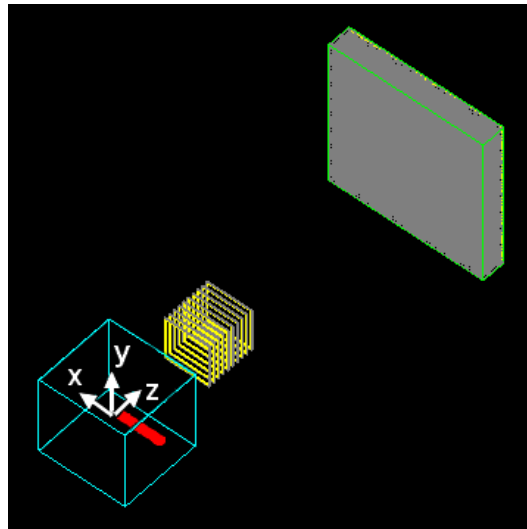


FIGURE 5.8 – Caméra Compton et source parallélépipédique dans un fantôme d'eau représentés dans Gate. La source, représentée par la barre rouge, est de dimension  $8 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$  et centrée en  $(-4,0,0.5) \text{ cm}$ .

même les seuils de production, les coupures, les options électromagnétiques, en activant ou désactivant certains processus etc. Des listes physiques standardisées sont prédéfinies dans le logiciel sous forme de macro, et il est ainsi possible de les intégrer directement à une macro de simulation. Nous avons utilisé la liste "QGSP\_BIC\_HP\_EMY" qui convient aux simulations de protonthérapie.

### Données de simulation

Dans Gate, une source est représentée par un volume dans lequel les particules (positions, gamma, ions, protons, ...) sont émises. Pour introduire une source dans une simulation Gate, l'utilisateur doit définir le type de source (voxélisée, faisceau linac, espace de phase, faisceau crayon, etc) et ses paramètres (angle, énergie, position). De même que pour la géométrie, une source peut être considérée comme un volume et bénéficier de commandes de mouvement, de visualisation etc.

Il existe certains types de sources particuliers tels que les sources voxelisées et les espaces de phase. Gate considère qu'une source voxelisée est un ensemble de sources à la distribution inhomogène. Ce type de sources est utilisé pour les fantômes ou les données de patient afin de produire des simulations réalistes. L'espace de phase est un "acteur" qui enregistre les informations sur les particules qui entrent dans le volume auquel il est attaché. Plusieurs informations telles que la position, la direction, l'énergie, le poids, etc, sont alors enregistrées dans un fichier ROOT ou un fichier IAEA. L'espace de phase peut alors être réutilisé comme une source grâce à toutes les informations stockées au préalable.

Nous avons utilisé une source de type *PencilBeam* pour irradier un fantôme avec un faisceau de protons. En plus de définir la position, l'énergie et le type de particules, il a fallu définir d'autres paramètres. Par exemple, la forme du faisceau et son spectre énergétique

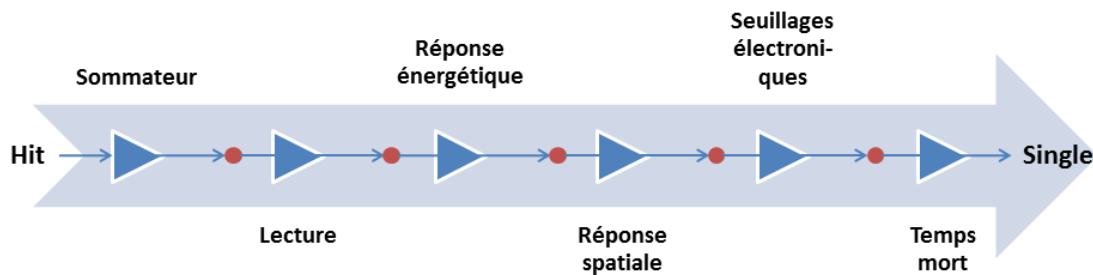


FIGURE 5.9 – Organisation du numériseur en chaîne de modules commençant par le hit et se terminant par le single. Source

[http://wiki.opengatecollaboration.org/index.php/Users\\_Guide\\_V7.1](http://wiki.opengatecollaboration.org/index.php/Users_Guide_V7.1)

étant gaussiens, on spécifie l'écart-type dans les directions orthogonales au faisceau, ainsi que l'énergie moyenne et son écart-type.

À l'issue de la simulation, Gate enregistre un ensemble de données telles que la position, le temps, l'énergie de chaque interaction. L'histoire d'une particule est donc inscrite grâce à tous les hits générés le long de son chemin. Les informations sur ces interactions ayant eu lieu dans les volume sensibles (crystalSD ou phantomSD) ne sont pas exploitables directement. Le but du numériseur est de construire des événements physiquement observables à partir des hits (qui comprennent l'énergie, la position, et le moment de détection de chaque particule), et de modéliser les réponses des détecteurs, les systèmes de lecture et des logiques de déclenchement. Plusieurs fonctions sont regroupées sous le numériseur de Gate, qui permet de déclarer les critères d'enregistrement des données dans un fichier de sortie et qui est composé de différents modules qui peuvent être insérés dans une séquence de traitement de signal linéaire. La numérisation se compose d'une série de traiteurs de signaux. Après chaque passage dans un module, on obtient un "pulse" et à la fin de la chaîne de traitement, les "pulses" de sortie sont appelés "singles". Ces "singles" simulent de manière réaliste la réponse d'un détecteur observable physiquement lorsqu'une particule interagit dans celui-ci.

## Fichiers de sortie

Plusieurs formats de sortie sont disponibles dans Gate. Les deux principaux sont ASCII et ROOT, mais il en existe d'autres plus spécifiques à certaines applications. Le format ASCII est le plus simple possible. Il est facilement exploitable, sans avoir besoin d'être analysé. En revanche, ce format n'est pas très recommandé car les données écrites en ASCII ne sont pas compressées, par conséquent les fichiers de sortie sont très grands. Le format de sortie ROOT, permet d'obtenir un fichier binaire \*.ROOT qui contient les résultats sous forme d'arbres binaires "TTree". "TTree" est une classe du logiciel ROOT, qui peut contenir plusieurs informations pertinentes par entrée. Ce format peut également être utilisé pour enregistrer des informations dans un espace de phase.

## 5.2 De la simulation de la protonthérapie aux évènements Compton

Afin d'étudier l'applicabilité de la caméra Compton au contrôle de qualité en protonthérapie, nous disposons de deux logiciels de simulations ayant chacun leurs avantages et leurs inconvénients. D'une part nous avons MEGALib, qui est optimisé pour la caméra Compton mais moins adapté pour simuler des fantômes, et d'autre part Gate qui comprend de nombreux outils pour les simulations d'imagerie médicale et de radiothérapie.

Le processus comprend trois étapes : l'irradiation d'un fantôme avec un faisceau de protons, la simulation de l'interaction des  $\gamma$ -prompt dans la caméra Compton et le traitement des évènements Compton.

Les verrous de ce travail sont la simulation de l'irradiation du fantôme dans MEGALib et/ou la simulation de l'interaction des  $\gamma$ -prompt dans la caméra Compton dans Gate. Inversement, la première étape est facilement réalisable avec Gate et la dernière avec MEGALib. Par conséquent, la première solution qui a été proposée dans [Hilaire *et al.* (2013)] consiste à simuler la caméra Compton dans Gate en la définissant comme deux parties "détecteurs sensibles" de type *SPECTHead* (cf. section 5.1.3). Les données enregistrées sont traitées dans un programme externe afin d'isoler les interactions ayant eu lieu en coïncidence.

Cependant, soucieux de la validité des simulations de la caméra Compton sous Gate et de la traduction du fichier de sortie de Gate (\*.root) en fichier d'entrée de MEGALib (\*.sim), nous avons trouvé une alternative à cette solution. Lors de la simulation de l'irradiation du fantôme par le faisceau de protons, les  $\gamma$ -prompt sont enregistrés dans un espace de phase puis celui-ci est converti en fichier \*.source utilisable dans MEGALib. Il est alors trivial de simuler l'interaction des  $\gamma$ -prompt dans la caméra puis de reconstruire les séquences Compton avec ce dernier logiciel.

### 5.2.1 Configurations de simulation

Dans cette section, nous verrons plus précisément quelles sont les configurations utilisées pour ces simulations, à savoir le modèle de caméra utilisée, les faisceaux de protons et les fantômes.

Comme nous l'avons vu précédemment, la simulation est réalisée en trois étapes :

1. La première étape, effectuée avec Gate, consiste à irradier un volume (un fantôme de patient, un fantôme homogène ou hétérogène) par un faisceau de protons. Les photons secondaires sont enregistrés dans un espace de phase (voir paragraphe 5.1.3) qui contient les positions, les directions et les énergies de chaque particule. Cet espace de phase est soit attaché au volume du fantôme et les photons sont alors enregistrés directement avec leurs positions et énergies de production, soit attaché à un plan extérieur au volume et par conséquent ils sont enregistrés après atténuation par le volume.



2. À la seconde étape, nous réalisons une seconde simulation en définissant l'espace de phase comme une source de photons qui interagissent dans la caméra. Cette étape peut être gérée par Gate ou par MEGALib.
3. Finalement, nous reconstruisons avec Revan les séquences des événements Comptons en introduisant du bruit qui dépend de la résolution des détecteurs.

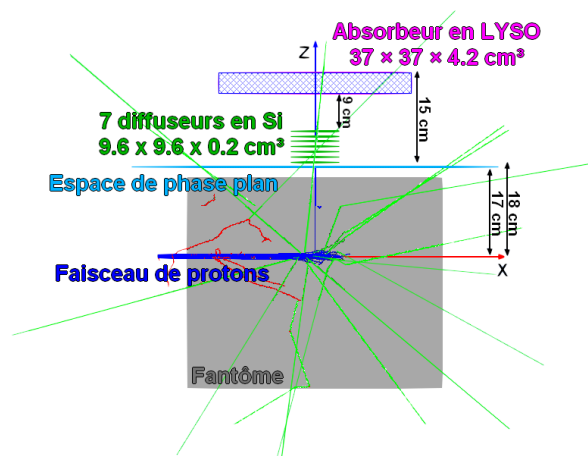


FIGURE 5.10 – Étapes de la simulation.

### Prototype de caméra Compton.

Le modèle de caméra Compton utilisé est inspiré du prototype actuellement en cours de développement à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon [Krimmer *et al.* (2014)]. La caméra, représentée en figure 5.11, est située entre  $z = 18$  cm et  $z = 35.1$  cm. Elle est composée d'un bloc de sept diffuseurs en silicium de dimensions  $9.6 \times 9.6 \times 0.2$  cm<sup>3</sup> chacun, positionné à 9 cm de distance d'un absorbeur de dimensions  $37 \times 37 \times 4.2$  cm<sup>3</sup>.

Chaque diffuseur est séparé d'un autre par 1 cm d'air et composé de  $2 \times 128$  strips. La résolution énergétique du diffuseur est modélisée par une distribution gaussienne dont la FWHM est de 2.35 keV. Les sept diffuseurs permettent d'augmenter la probabilité de diffusion des photons incidents avant qu'ils ne soient captés par l'absorbeur.

L'absorbeur, quant à lui, est composé de cristaux de LYSO qui mesurent chacun  $0.5 \times 0.5 \times 4$  cm<sup>3</sup>, dont la résolution énergétique est également modélisée par une gaussienne et dépend de l'énergie du photon incident. Par exemple, cette résolution est  $\sigma=13.2$  keV à 1 MeV.

### Plan de traitement.

Dans Gate, on simule l'interaction d'un faisceau-crayon de protons de forme gaussienne avec  $(\sigma_y, \sigma_z)=(4,2)$  mm à la fois dans un fantôme d'eau (cf. figure 5.12a), dans un fantôme hétérogène (cf. figure 5.12b) et dans un fantôme de patient (cf. figure 5.12c). Ces protons sont lancés depuis l'extérieur du volume en  $(-30,0,0)$  cm selon l'axe des x. Les dimensions

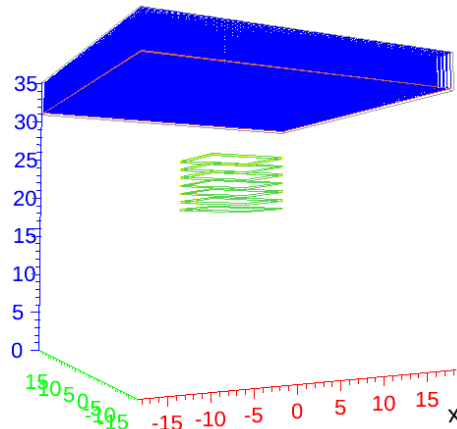
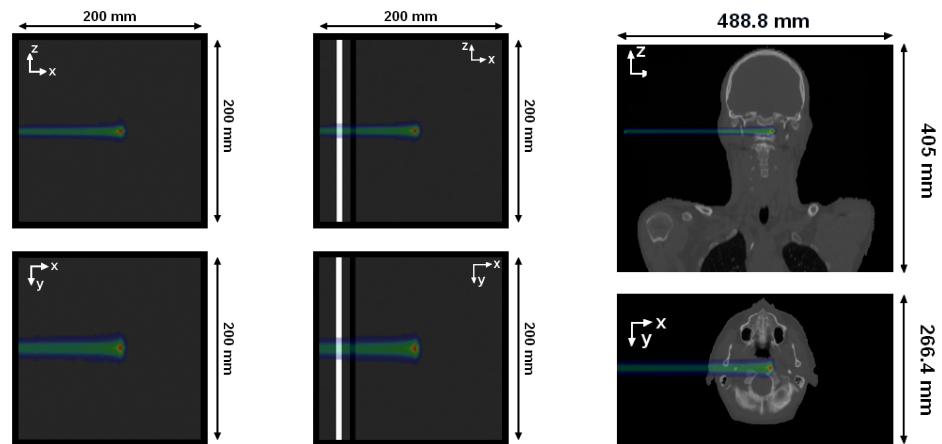


FIGURE 5.11 – Prototype de caméra.

du fantôme d'eau et du fantôme bi-matériaux sont  $20 \times 20 \times 20 \text{ cm}^3$  et il est centré en  $(0,0,0)$ , alors que le fantôme de patient est de dimensions  $48.8 \times 26.6 \times 40.5 \text{ cm}^3$ .



(a) Superposition de la dose déposée sur le fantôme homogène.

(b) Superposition de la dose déposée sur le fantôme d'eau avec un insert d'os en  $x=[-8,-8.5]$  cm puis d'air en  $x=[-6.5,-6]$  cm.

(c) Superposition de la dose déposée sur le CT du fantôme de patient.

FIGURE 5.12 – Coupes frontales et transverses de trois types de fantômes superposées avec le dépôt de dose d'un faisceau de protons.

### Simulation des interactions des photons de l'espace de phase dans la caméra avec Gate (étape 2).

Après avoir simulé l'irradiation du fantôme puis l'interaction des  $\gamma$ -prompt dans la caméra (étapes 1 et 2) avec Gate, on obtient un fichier ROOT qui n'est pas exploitable directement pour reconstruire l'image. Ce fichier contient des arbres binaires tenant compte des interactions ayant eu lieu dans les diffuseurs et dans l'absorbeur telles que les posi-

tions, les énergies, le temps. Pour traduire le fichier ROOT, nous utilisons un programme d'analyse C++ qui considère les événements qui se sont produits à la fois dans le diffuseur et dans l'absorbeur pour établir des coïncidences. Ce programme peut également identifier les cas où plusieurs interactions surviennent dans le même détecteur. Les informations extraites par le programme sont alors triées, et le fichier est transformé dans un format .sim propre à MEGAlib (voir section 5.1.2). Lors de cette conversion, à partir de l'ensemble des particules ayant interagi dans la caméra, illustré dans la figure 5.13a, on sélectionne uniquement les  $\gamma$  qui ont interagi en coïncidence dans les deux détecteurs (cf. figure 5.13b). L'analyse par le module Revan de MEGAlib permet de déterminer les séquences Compton (cf. figure 5.13c), c'est-à-dire le chemin le plus probable parcouru par chaque photon  $\gamma$  à partir des positions d'interaction et énergies déposées dans les détecteurs. L'ordre des interactions n'est pas pris en compte car celui-ci ne peut être déterminé par un dispositif réel. À la suite de cette troisième étape, nous obtenons des séquences Compton qui constituent les données à utiliser lors de la reconstruction d'images.

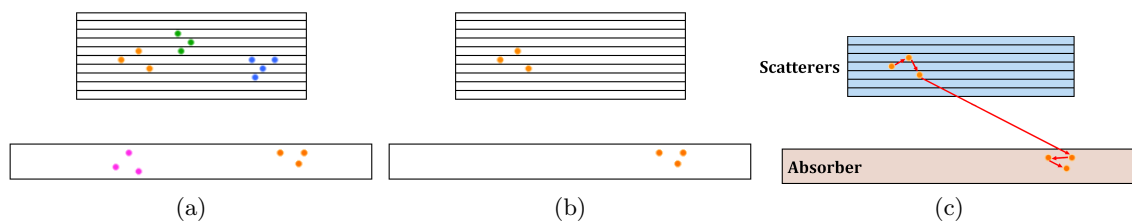


FIGURE 5.13 – Analyse des données de simulation. (a) Données acquises à la fin de la simulation. (b) Détection des particules qui ont interagi dans les deux détecteurs. (c) Reconstruction des séquences Compton avec Revan.

### Simulation des interactions des photons de l'espace de phase dans la caméra avec MEGAlib (étape 2).

Nous nous sommes souciés de la validité des simulations de la caméra Compton sous Gate et de la traduction du fichier \*.root en fichier \*.sim. Gate, contrairement à MEGAlib, n'a pas été validé pour la caméra Compton. Nous avons donc décidé de simuler l'acquisition des photons sortant du volume par la caméra Compton dans MEGAlib. L'espace de phase, sous format ROOT, est transformé en fichier binaire puis converti en fichier de sources de photons \*.source compatible avec MEGAlib.

Dans le cas de l'espace de phase attaché au volume du fantôme, le fichier binaire peut être une distribution 4D spatio-énergétique  $(v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$   $\mapsto \lambda(v, \varepsilon)$  de laquelle on déduit la distribution marginale  $\lambda_{tot} = \sum_{\varepsilon} \lambda(\cdot, \varepsilon)$ . Ces distributions sont utilisées dans les sections 7.1 et 7.2. Ensuite, nous avons défini des intervalles de largeur  $\Delta\varepsilon = 500$  keV pour l'énergie et le fantôme (homogène ou bi-matériaux) a été échantillonné en  $100^3$  voxels de 2 mm de coté. Pour chaque intervalle d'énergie de largeur  $\Delta\varepsilon$  et ayant pour centre  $\varepsilon_k$ , on obtient une distribution 3D  $\lambda(\cdot, \varepsilon_k)$ . Elle associe à chaque voxel  $v_j$  du volume du fantôme, le nombre

$N_{k,j}$  de photons émis dans le voxel  $v_j$  avec une énergie dans  $[\varepsilon_k - \Delta\varepsilon/2, \varepsilon_k + \Delta\varepsilon/2)$ .

La figure 5.14 montre par exemple la distribution marginale  $\sum_v \lambda(v, \cdot)$  du spectre énergétique des  $\gamma$ -prompt dans le fantôme homogène, coupé à l'intervalle [100 keV, 10 MeV]. On observe des lignes de  $\gamma$  discrètes, notamment celles de 4.4 MeV et de 5.2 MeV. Elles sont produites par des réactions induites par les protons sur les atomes d'oxygène à des énergies allant jusqu'à 50 MeV. Dans [Verburg *et al.* (2013)], il a été montré qu'elles caractérisaient la fin du parcours du faisceau.

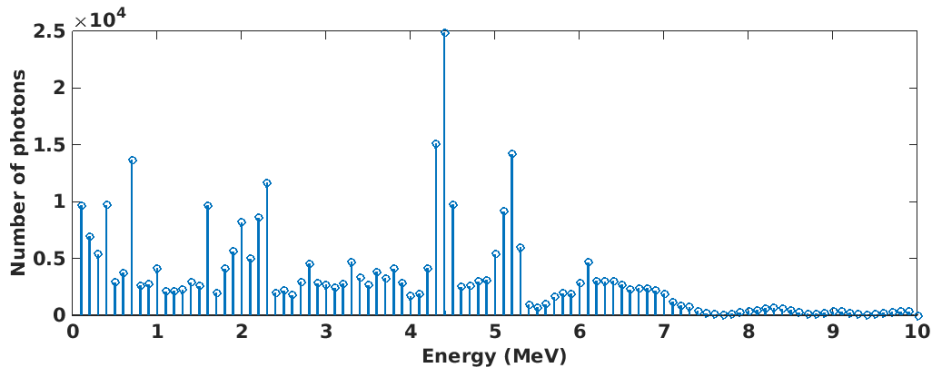


FIGURE 5.14 – Spectre d'énergie  $\sum_v \lambda(v, \cdot)$  des  $\gamma$ -prompt produits par un faisceau de  $4 \times 10^8$  protons d'énergie 120 MeV dans l'eau (intervalles de 100 keV).

La simulation des interactions de  $\gamma$ -prompt dans la caméra Compton est ensuite réalisée par MEGALib, puis la dernière étape de reconstruction des séquences Compton est exécutée une fois la simulation terminée.

### Comparaison des méthodes de simulation des interactions des photons de l'espace de phase dans la caméra avec les deux logiciels.

Nous avons simulé avec Gate une source ponctuelle émettant des photons à 1.2 MeV, centrée en (0,0,8) cm. Cette source interagit avec le prototype de caméra Compton présenté en section 5.2.1. Un espace de phase planaire, placé entre la source et la caméra, enregistre tous les photons. Puis l'interactions des photons de l'espace de phase dans la caméra est simulée soit avec Gate, soit avec MEGALib.

Nous reconstruisons l'image 3D de la source avec l'algorithme MLEM et la méthode de calcul pour la matrice système développée en section 6.1.1. La reconstruction est effectuée avec  $2.5 \times 10^4$  évènements et 20 itérations dans un volume de  $20 \times 20 \times 5$  cm<sup>3</sup> avec des voxels de 2 mm de côté. Nous affichons ci-après des coupes dans les plans  $z = 8$  cm et  $y = 0$  cm des images reconstruites à partir de données issues de simulations avec les deux logiciels.

Les images reconstruites sont très similaires. Par conséquent, cela nous conforte dans la validité des simulations de la caméra Compton dans Gate. Ces travaux ont été présentés dans [Hilaire *et al.* (2013)]. Par la suite, nous utilisons MEGALib pour simuler l'interaction des photons dans la caméra, car ce logiciel fait l'objet de davantage d'optimisations pour la caméra Compton et est plus sécurisant.

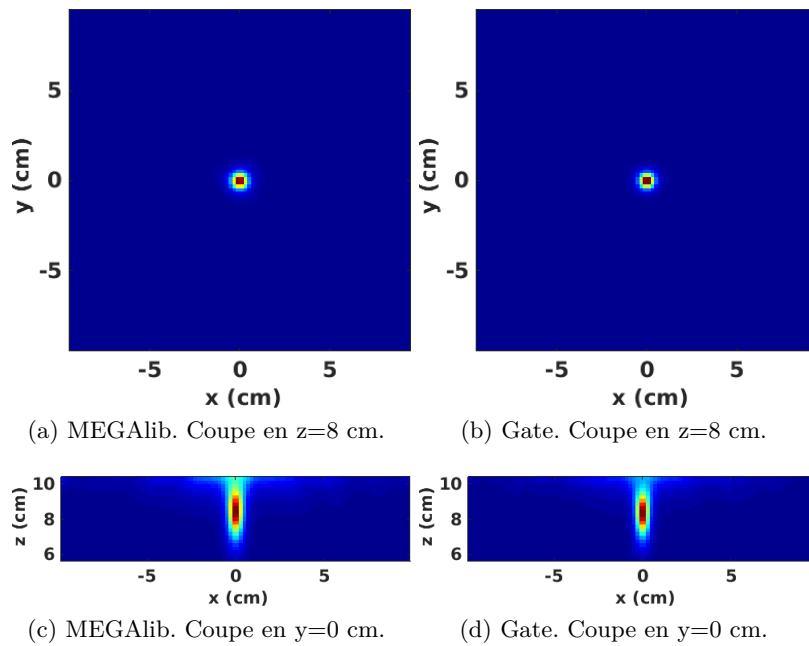


FIGURE 5.15 – Coupes extraites d’images reconstruites avec un algorithme itératif d’une source ponctuelle centrée en  $(0,0,8)$  cm. Les images sont obtenues avec des données issues de la simulation des photons de l’espace de phase dans la caméra soit avec MEGAlib, soit avec Gate.

---

# Mise en oeuvre de l'algorithme MLEM et applications sur des données simulées

---

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps les méthodes que nous avons développées pour le calculs de la matrice système et du vecteur de sensibilité pour l'algorithme LM-MLEM abordé en section 4.2.1. Puis nous reconstruisons des images de sources simples à partir de données simulées grâce aux logiciels présentés dans le chapitre 5 afin de déterminer les meilleures configurations de l'algorithme et de l'absorbeur du prototype de caméra que nous utilisons. L'acquisition de ces sources a été simulée uniquement avec le logiciel MEGAlib.

### 6.1 Mise en oeuvre de l'algorithme MLEM

Nous avons présenté en section 4.2.1 l'algorithme LM-MLEM que nous utilisons. Nous rappelons que cette méthode consiste à calculer la suite de vecteurs  $\lambda^{(\ell)}$ , supposée converger vers le vecteur  $\lambda$ , telle que :

$$\lambda_j^{(\ell+1)} = \frac{\lambda_j^{(\ell)}}{s_j} \sum_{i=1}^{N_\gamma} t_{ij} \frac{1}{p_i^{(\ell)}}, \text{ avec } p_i^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{N_v} t_{ik} \lambda_k^{(\ell)}, \quad (6.1)$$

où :

- $N_\gamma$  est le nombre total d'évènements,
- $N_v$  est le nombre total de voxels,
- $t_{ij}$  est la probabilité qu'un photon émis par le voxel  $v_j$  soit détecté en tant qu'évène-

ment Compton  $e_i$ ,

- $s_j$  représente la sensibilité du détecteur, c'est-à-dire la probabilité qu'un photon émis par  $v_j$  soit détecté.

Nous avons développé une méthode de calcul pour la matrice système  $T = (t_{ij})_{i=1\dots N_\gamma, j=1\dots N_v}$  et deux méthodes pour calculer le vecteur de sensibilité  $S = (s_j)_{j=1\dots N_v}$ , une basée sur des calculs Monte Carlo et une méthode analytique. Ces méthodes sont détaillées ci-après.

### 6.1.1 Calcul numérique de la matrice système

Nous tenons compte seulement de la géométrie de l'acquisition et des incertitudes de mesure de l'énergie des détecteurs pour calculer la matrice système. Dans la réalité, les détecteurs ne peuvent pas mesurer parfaitement les énergies déposées dans la caméra. La valeur de l'angle  $\beta$ , déterminée à partir des énergies déposées dans chacun des détecteurs, comporte donc une certaine erreur. Autrement dit, on devrait considérer que l'origine du photon se trouve, non pas sur la surface du cône Compton, mais dans un volume autour de cette surface (voir figure 4.15). Plus un voxel est loin de la surface du cône plus la probabilité que ce voxel ait produit l'évènement devrait être faible. Pour modéliser la décroissance de la probabilité avec la distance angulaire d'un point  $M$  du volume à la surface conique nous avons choisi une gaussienne de moyenne  $\beta$ . La propagation des incertitudes de mesure aboutit à la formule de l'écart-type  $\sigma_\beta$  suivante [Ordonez *et al.* (1997)] :

$$\sigma_\beta = \frac{m_e c^2}{\sin \beta_i} \sqrt{\left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_{tot}^2}\right)^2 dE_1^2 + \frac{dE_2^2}{E_{tot}^4}}, \quad (6.2)$$

où  $dE_1$  et  $dE_2$  sont les incertitudes de mesure sur  $E_1$  et  $E_2$  connues pour chaque détecteur.

On définit alors le noyau spatial  $h_i$  en chaque point  $M$  du volume par :

$$h_i(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\beta_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_M - \beta_i}{\sigma_{\beta_i}}\right)^2\right), \quad (6.3)$$

où  $V_1, V_2$  sont les deux premières positions d'interaction du photon dans la caméra.

Nous définissons les éléments  $t_{ij}$  de la matrice  $T$  par :

$$t_{ij} = K(\beta_i, E_{tot}) \frac{|\cos(\theta_{\vec{v}_2 \vec{v}_1})|}{V_2 V_1^2} \int_{M \in v_j} \frac{|\cos(\theta_{\vec{v}_1 \vec{M}})|}{V_1 M^2} h_i(M) dv, \quad (6.4)$$

Les facteurs  $\cos(\theta_{\vec{v}_2 \vec{v}_1})$  et  $\cos(\theta_{\vec{v}_1 \vec{M}})$  reflètent l'influence de l'angle incident sur l'efficacité de détection.

Pour évaluer l'intégrale dans (6.4) nous considérons une formule de quadrature à un point, le centre du voxel, et nous négligeons les valeurs de  $t_{ij}$  pour les voxels éloignés de la surface conique. En notant  $O_j$  le centre du voxel  $v_j$ , la formule de calcul des  $t_{ij}$ , issue de la simplification et de la discrétisation de (6.3) et (6.4), est :

$$t_{ij} = K(\beta_i, E_{tot}) \frac{|\cos(\theta_{\vec{v}_2 \vec{v}_1})|}{V_2 V_1^2} \frac{|\cos(\theta_{\vec{v}_1 \vec{M}})|}{V_1 M^2} h_i(O_j), \text{ si } |\delta_{O_j} - \beta_i| \leq 3\sigma_{\beta_i} \quad (6.5)$$

et  $t_{ij} = 0$  sinon.

Cette méthode a été proposée dans [Hilaire *et al.* (2013)], puis utilisée dans [Hilaire *et al.*, Hilaire *et al.* (2014)].

Dans [Lojacono *et al.* (2011)], les incertitudes de mesure sur l'angle  $\beta$  sont négligées : on fait une sélection déterministe d'un sous-ensemble de génératrices du cône qui intersectent le volume et qui échantillonnent tous les voxels. Le noyau  $h$  est alors une distribution de Dirac. Une version plus évoluée de cette technique permet de prendre en compte les incertitudes de mesure : les voxels sont échantillonnés par les génératrices de cônes coaxiaux [Lojacono (2013)]. Enfin la méthode que nous utilisons consiste à calculer le noyau  $h$  comme une gaussienne de moyenne  $\beta$  et d'écart-type  $\sigma_\beta$ . Ce choix a été également fait par [Zoglauer *et al.* (2005), Lojacono (2013)]. Ainsi,  $t_{ij}$  est fonction de la distance angulaire du centre du voxel  $v_j$  au cône Compton.

### 6.1.2 Méthodes de calcul du vecteur de sensibilité

Dans [Maxim *et al.* (2015)], le problème de l'évaluation du vecteur de sensibilité notamment est abordé. Une méthode de calcul numérique par simulations Monte Carlo et une méthode analytique sont proposées.

#### Calcul de la matrice de sensibilité par méthode Monte Carlo

Pour une grande simulation, le nombre  $N_j$  d'évènements détectés ayant été produits par le voxel  $v_j$ , est proportionnel à la probabilité  $s_j$  qu'un photon émis par  $v_j$  soit détecté. Pour déterminer  $N_j$ , on échantillonne le champ de vue en  $21 \times 21 \times 31$  points écartés de 1 cm les uns des autres. Chaque point émet le même nombre de photons  $\gamma$ , soit  $2 \times 10^7$  photons, avec une énergie initiale de 1275 keV. Les particules sont détectées par la caméra Compton décrite en section 5.2.1. On peut donc calculer de manière non-normalisée le vecteur de sensibilité  $S = (s_j)_{j=1\dots J}$  en assignant  $N_j$ , le nombre de photons détectés par la caméra, à chaque élément  $s_j$ . La cartographie 3D composée des valeurs  $N_j$  est finalement adapté à l'échantillonnage du volume imagé par interpolation linéaire.

#### Calcul de la matrice de sensibilité par méthode analytique

La méthode que nous utilisons, inspirée de [Wilderman *et al.* (2001)], consiste à faire la moyenne des matrices de sensibilité calculées pour chaque diffuseur. Une caméra Compton est souvent composée d'un diffuseur de taille relativement faible et d'un absorbeur plus grand. L'absorbeur peut être situé à une distance du diffuseur inférieure à la distance entre la source et le diffuseur. De plus, il est possible que les deux premiers coups aient lieu dans deux couches de diffuseur. Pour une source plus étendue, l'angle solide sous lequel le diffuseur voit un point de la source est très dépendant de la position de ce



point. À l'inverse, les variations de l'angle solide sous lequel l'absorbeur voit les points du diffuseur sont faibles, du fait de la taille négligeable du diffuseur par rapport à celle de l'absorbeur. Si on choisit de négliger les effets de la section efficace de diffusion Compton et la taille d'un voxel pouvant être confondu avec son centre  $O_j$ , on peut voir  $s_j$  comme approximativement égale à l'angle solide sous lequel un élément du diffuseur voit  $O_j$ . Pour un unique diffuseur mince et planaire, composé de  $D_{diff}$  éléments de détecteur (comme par exemple des cristaux ou des surfaces délimitées par des strips) ayant pour centres  $V_1$ , l'angle solide sous lequel le diffuseur voit  $O_j$  peut être assimilé à la somme des angles solides sous lesquels chaque élément de surface du détecteur voit  $O_j$ . À l'exception d'un facteur constant, et en choisissant de négliger les probabilités des différentes interactions dans le détecteur, on peut alors faire l'approximation suivante pour la sensibilité :

$$s_j \propto \sum_{V_1 \in D_{diff}} \frac{|\cos(\theta_{\overrightarrow{V_1 O_j}})|}{\|\overrightarrow{V_1 O_j}\|^2} \quad (6.6)$$

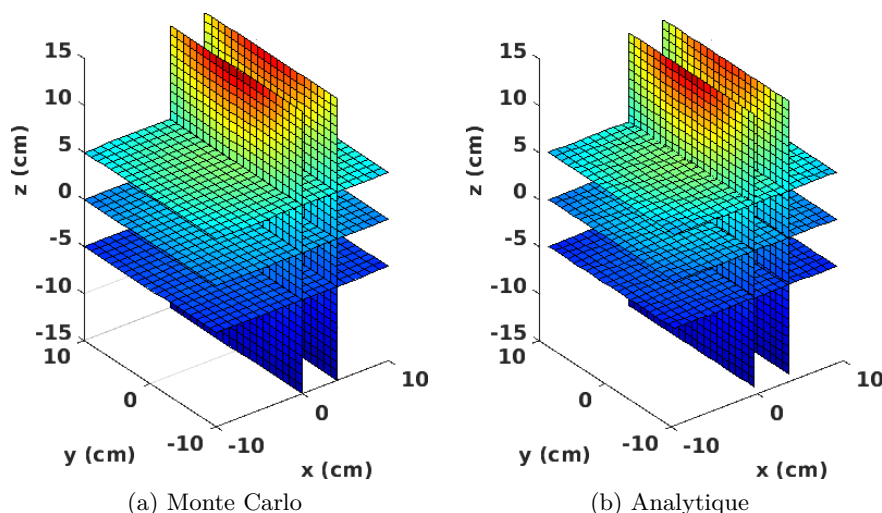


FIGURE 6.1 – Matrices de sensibilité calculées par méthode Monte Carlo et par méthode analytique représentées en échelle logarithmique.

**Comparaison des deux méthodes** La comparaison entre les deux méthodes est présentée en figure 6.2. On compare deux coupes des cartographies prises en  $y = 0$  cm. Comme attendu, pour les deux méthodes la sensibilité est supérieure pour les voxels situés près de la caméra. La différence entre les méthodes de calcul est très faible, de l'ordre de 10% en moyenne. Relativement à la valeur moyenne, dans les coupes supérieures (i.e. proches de la caméra), les éléments des matrices analytiques sont surestimés dans l'axe du détecteur et sous-estimés dans les régions les plus éloignées de l'axe. Bien que le calcul analytique de la matrice de sensibilité soit instantané, il faut environ 15 minutes par voxel pour obtenir un résultat par méthode Monte Carlo. Un calcul Monte Carlo est certainement mieux adapté surtout pour considérer des informations anatomiques, mais l'estimateur analytique donne

des résultats plutôt bons à moindre coût. Les estimateurs analytiques offrent donc une alternative intéressante du point de vue du temps de calcul et des résultats, en particulier pour l'imagerie de sources polyénergétiques.

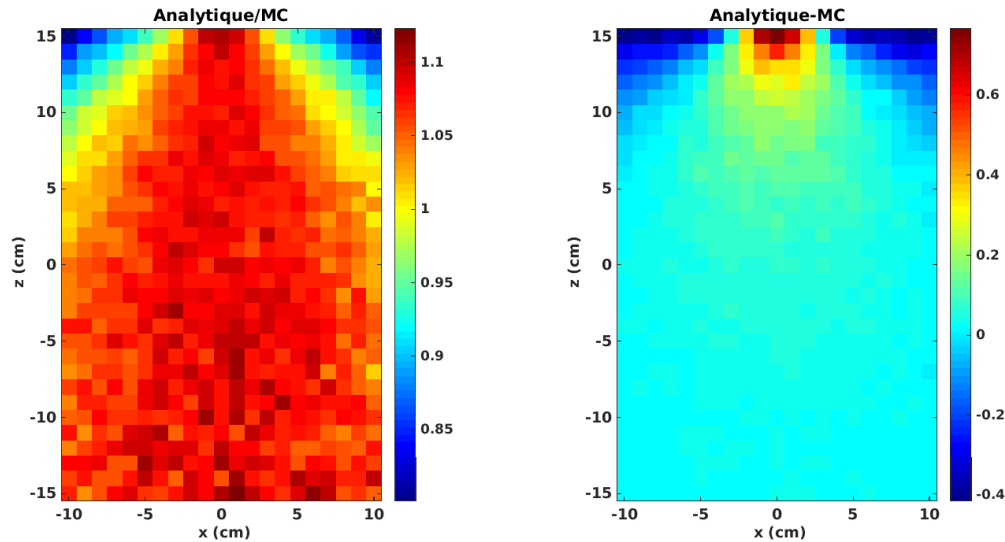


FIGURE 6.2 – Comparaison des matrices de sensibilité calculées avec les deux méthodes. À gauche, rapport entre les deux coupes. À droite, différence entre les deux coupes.

**Influence de l'énergie sur la matrice de sensibilité** La sensibilité dans l'algorithme de reconstruction étant la probabilité qu'un photon émis par un voxel  $v_j$  soit détecté, on peut considérer que, d'après les simulations, la méthode analytique fournit une matrice de sensibilité similaire à la méthode Monte-Carlo à toute énergie. Pour les méthodes présentées précédemment, nous avons négligé l'influence de cette énergie. En effet, pour la méthode Monte-Carlo, nous avons calculé la matrice pour une énergie donnée de 1275 keV, tandis que dans le calcul de la matrice de sensibilité par méthode analytique, l'énergie n'intervient jamais.

Nous nous sommes donc intéressés à l'influence que pouvait avoir l'énergie des particules sur le calcul de cette matrice. Pour ce faire, nous avons simulé avec MEGALib un point source émettant  $5 \times 10^7$  photons, placé dans le repère en  $(0,0,0)$ , avec une énergie  $E_k$  allant de 100 keV à 10 MeV avec un pas de 500 keV, et imagé par la caméra Compton présentée en section 5.2.1. Les fichiers \*.sim obtenus en sortie ont été analysés afin d'obtenir le nombre d'évènements Compton restructuribles. Puis nous avons également vérifié le nombre d'évènements restructuribles par l'algorithme de reconstruction, avec et sans sélection en énergie.

Étant donné que la caméra Compton présente de meilleurs performances à certaines énergies données (cf. section 2.2.2), on pourrait supposer que le facteur  $s_j$  dans l'algorithme de reconstruction diminue avec l'énergie, le coefficient de proportionnalité étant la sensibilité de la caméra. Or ce n'est pas le cas sauf si l'on fait une sélection sur l'énergie.

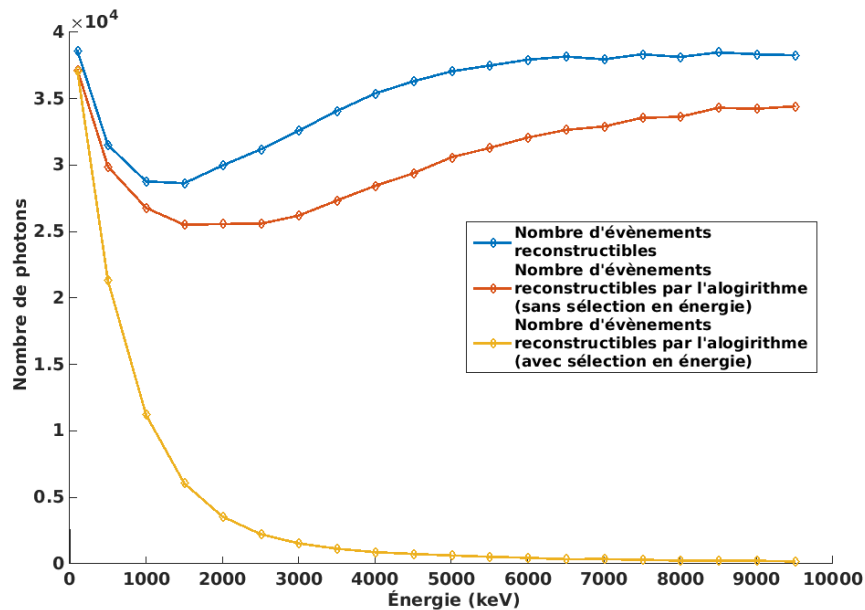


FIGURE 6.3 – Sensibilité de la caméra.

Sur une base d'évènements reconstituables, lorsqu'on considère tous les évènements possibles, il s'avère que la sensibilité de la caméra ne diminue avec l'énergie que jusqu'à un certain seuil situé à environ 1.5 MeV. Ainsi il faudrait appliquer à la matrice de sensibilité calculée un facteur corrélé à ces courbes lorsqu'on reconstruit une source polyénergétique.

Ces résultats ont été obtenus pour une certaine géométrie de caméra et ces observations sont probablement dues à l'épaisseur de l'absorbeur qui n'est probablement pas suffisante. Il faudrait étudier ce phénomène plus en profondeur pour mettre en évidence une éventuelle généralisation et adapter le calcul de la matrice de sensibilité.

## 6.2 Reconstruction de sources simples

Pour évaluer les points forts et les points faibles de l'algorithme itératif de reconstruction MLEM pour la caméra Compton (cf. section 6.1), des sources simples ont été simulées avec MEGALib, puis reconstruites. Nous avons tout d'abord simulé une source ponctuelle pour montrer l'avantage de l'algorithme MLEM par rapport à l'analytique présente en section 4.1.3 et l'effet des projections tronquées qui sera permanent dans le reste du travail, vu le prototype de caméra utilisé. Puis nous avons reconstruit les images d'une source linéaire avec différents modèles pour la matrice système et pour la matrice de sensibilité. Enfin, nous avons simulé une source sphérique à deux énergies différentes afin de montrer l'effet des sources de haute énergie sur les images reconstruites.

### 6.2.1 Source ponctuelle

Nous avons simulé une source ponctuelle émettant des photons à 1.2 MeV, centrée en (0,0,8) cm. Nous reconstruisons l'image 3D de cette source avec l'algorithme analytique présenté en section 4.1.3 et l'algorithme MLEM développé en section 6.1. L'image a été reconstruite avec  $8.7 \times 10^5$  évènements dans un volume de  $16 \times 16 \times 5$  cm<sup>3</sup> avec des voxels de 4 mm de côté en analytique, et  $2.5 \times 10^4$  évènements dans un volume de  $20 \times 20 \times 5$  cm<sup>3</sup> avec des voxels de 2 mm de côté pour l'algorithme MLEM.

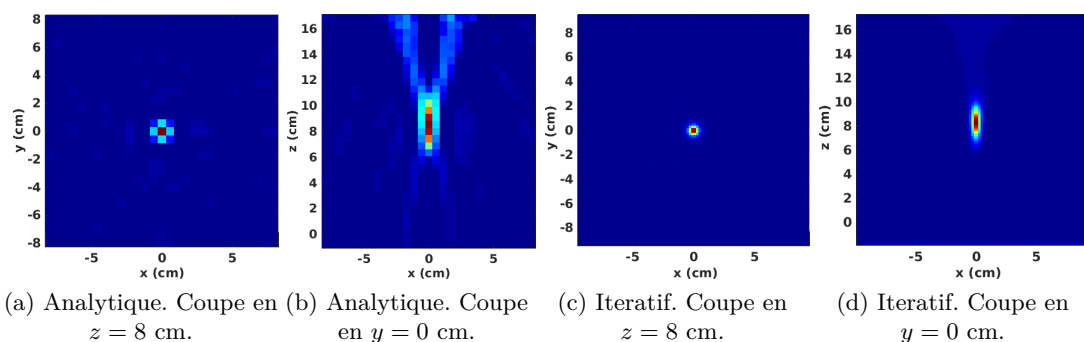


FIGURE 6.4 – Source ponctuelle de 1.2 MeV placée en (0,0,8) cm. Coupes centrales en  $z = 8$  cm et  $y = 0$  cm.

Les images reconstruites avec l'algorithme analytique sont un peu plus bruitées que celles reconstruites avec le MLEM. La qualité de la reconstruction dépend fortement du nombre d'évènements (plus qu'en itératif) et de l'échantillonnage choisi pour les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et de  $\tau$  (cf. section 4.1.3). De plus, on ne peut pas avoir une résolution spatiale aussi fine en analytique qu'en itératif, car la qualité de la reconstruction se dégrade si on l'augmente l'échantillonnage spatial. Par conséquent, nous n'utilisons que la méthode itérative dans la suite de ce travail.

Dans tous les cas, l'image de la source est globalement bien reconstruite, à sa position correcte. Cependant, on constate une élongation de la source dans la direction orthogonale à la caméra. À cause de la faible largeur du dispositif, on acquiert des projections tronquées qui entraînent ce genre d'artéfacts (cf. section 4.3). Ceux-ci peuvent éventuellement être réduits en augmentant la largeur des diffuseurs. Cependant, cette direction importe peu en contrôle de traitement d'hadronthérapie. En effet, il est surtout nécessaire de pouvoir déterminer le parcours du faisceau dans les tissus : pour ce faire, on se réfère à la coupe parallèle à la caméra ( $z = 8$  cm).

### 6.2.2 Source linéaire

Les images affichées ci-après sont issues de la reconstruction d'une source linéaire de 8 cm de longueur placée en (0,[-1,7],8) cm, ayant émis  $10^7$  photons à 500 keV. La reconstruction a été effectuée avec 20 itérations et  $1.3 \times 10^4$  évènements. Pour gagner en temps de calculs, la sensibilité a été calculée analytiquement.

Si l'on néglige la sensibilité dans l'algorithme MLEM, le modèle de calcul de la matrice système n'est pas adapté comme on peut l'observer sur la figure 6.5a. Sur la coupe parallèle à la caméra, la source linéaire tend à disparaître au delà de  $y = 4$  cm, ce qui correspond environ au bord du diffuseur. De plus, la coupe en  $x = 0$  cm n'est pas bien reconstruite car le signal s'écrase totalement sur la caméra. Ainsi, si la sensibilité est définie comme égale à 1, on ne peut pas garder le même modèle pour le calcul de la matrice système, sinon la source s'écrase sur la caméra à cause du facteur  $\cos/\rho^2$  (1ère colonne). En supprimant ce facteur, on obtient les images de la deuxième colonne, qui sont légèrement améliorées.

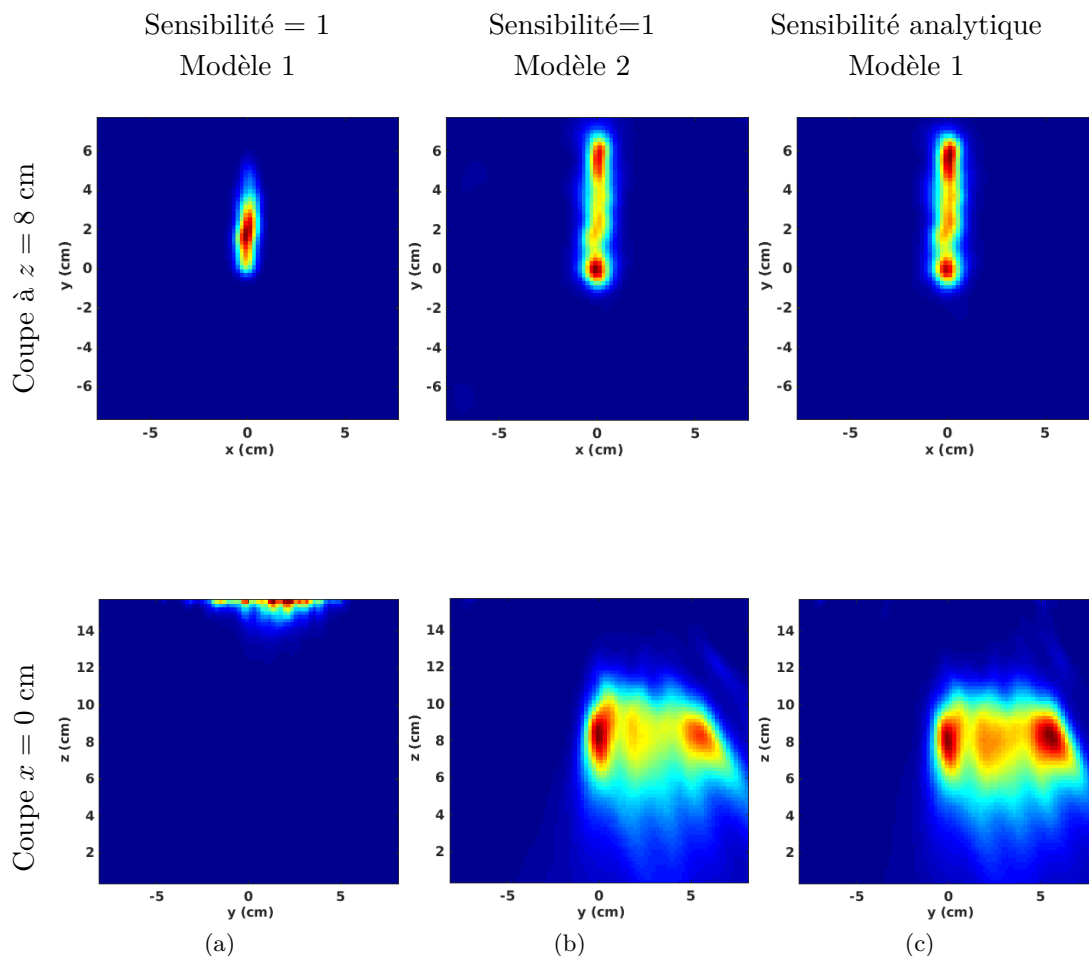


FIGURE 6.5 – Source linéaire de 500 keV placée en  $(0,[-1,7],8)$  cm. Coupes centrales en  $z = 8$  cm reconstruites avec  $1.3 \times 10^4$  évènements et 20 itérations.

Si on se réfère aux profils de la ligne sur la figure 6.6, on remarque une différence de niveau entre les signaux de la courbe bleue et ceux des courbes rouge et jaune d'un facteur  $2 \times 10^3$ . Il apparait également que le signal est de plus en plus sous-estimé quand on s'éloigne des bords de la caméra lorsque la sensibilité est à 1 et le modèle 2. Par conséquent, la meilleure configuration est celle où la sensibilité a été calculée tout en gardant le modèle initial pour le calcul de la matrice système.

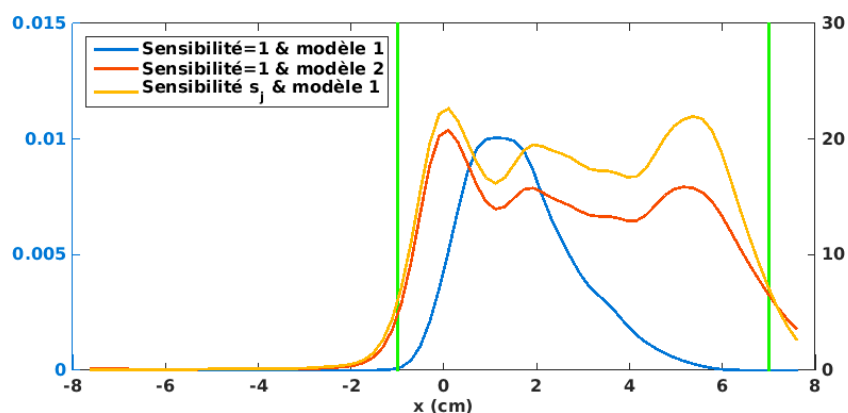


FIGURE 6.6 – Superposition de trois profils obtenus en projetant les images de la figure 6.5 sur la droite  $x = 0$  cm : figure 6.5a (courbe bleue sur l'échelle bleue à gauche), figure 6.5b (courbe rouge), figure 6.5c (courbe jaune). Les traits verts représentent les extrémités de la ligne.

### 6.2.3 Source sphérique

Ci-dessous, nous avons reconstruit une source sphérique de 2 cm de diamètre placée en (0,0,8) cm, ayant émis  $10^7$  photons, avec deux énergies différentes 500 keV et 5 MeV. Les images ont été reconstruites avec 20 itérations et respectivement avec  $1.4 \times 10^4$  évènements et  $7 \times 10^3$  évènements disponibles pour les énergies 500 keV et 5 MeV.

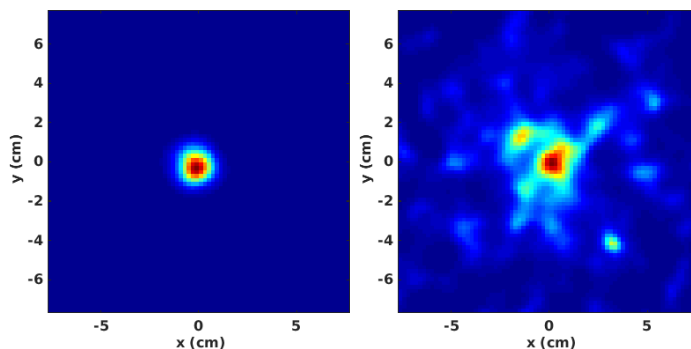


FIGURE 6.7 – Source sphérique de 2 cm de diamètre et d'énergie 500 keV (à gauche) et 5 MeV (à droite) placée en (0,0,8) cm. Coupes centrales en  $z = 8$  cm reconstruites avec 20 itérations.

On constate une très nette différence entre les deux images. L'image de la source de 5 MeV est très bruitée comparée à l'image de la source de 500 keV. Cela s'explique par le fait que cette caméra Compton a du mal à détecter les photons de très haute énergie. D'une part, sur une base fixe du nombre de photons simulés, le nombre de photons détectés en divisé par 2. La statistique étant ainsi réduite, le nombre d'évènements contribuant à la bonne qualité de l'image se voit diminué. D'autre part ceux-ci ne sont pas détectés totalement. En effet, certains photons s'échappent de la caméra et ne sont pas absorbés dans l'absorbeur. Cela crée des absorptions incomplètes et par conséquent, l'angle de demi-ouverture du cône Compton  $\beta$  est mal calculé.

L'amélioration de la qualité de l'image de la source de 5 MeV peut se faire :

- en sélectionnant les photons dont l'énergie totale déposée dans la caméra appartient à une certaine gamme d'énergie, par exemple  $\pm 20\%$  de l'énergie initiale,
- en supposant que l'énergie initiale est connue et en complétant la valeur de l'énergie mesurée dans l'absorbeur  $E_2$  afin que  $E_{tot} = 5$  MeV,
- en augmentant l'épaisseur de l'absorbeur afin d'améliorer la statistique de détection.

Les différents cas de figure sont affichés sur la figure 6.8.

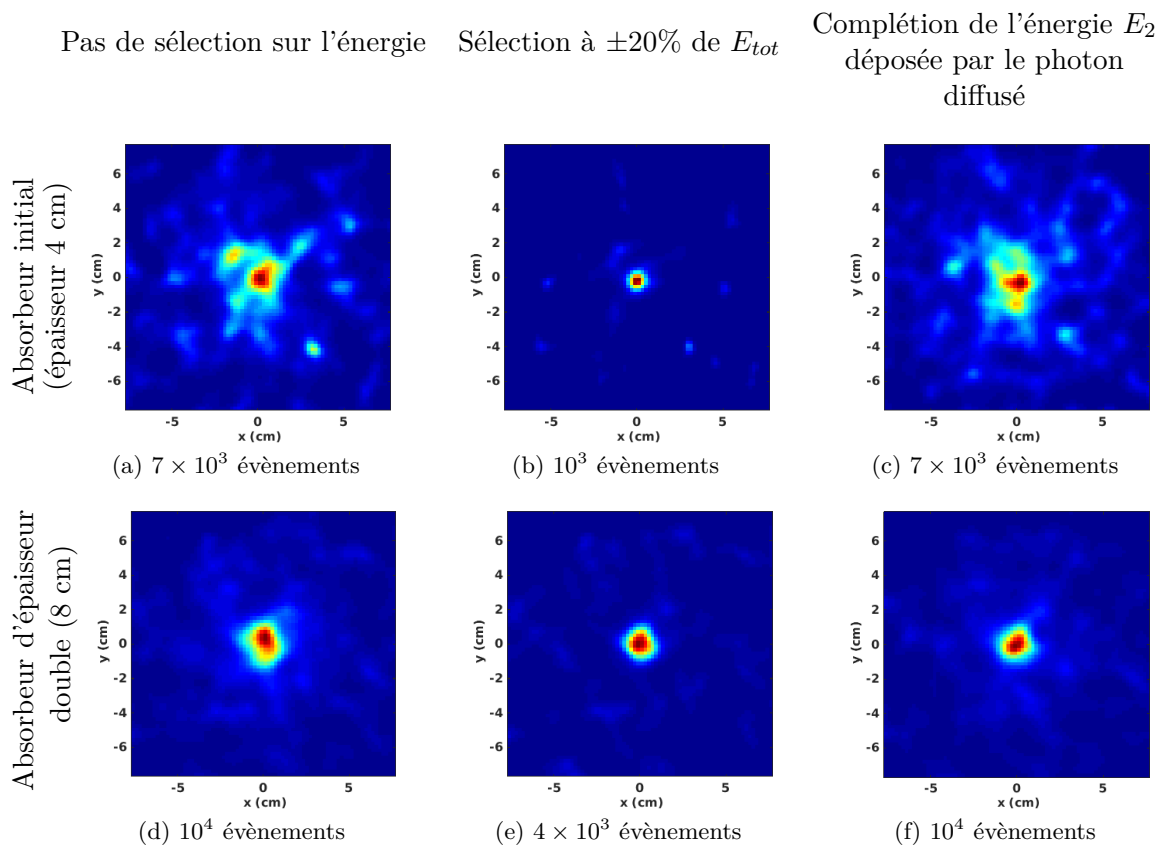


FIGURE 6.8 – Comparaison des différents paramètres de reconstruction d'image pour la source de 5 MeV. Sur la première ligne les événements ont été acquis avec l'absorbeur initial décrit dans la section 5.2.1 et sur la deuxième ligne, l'épaisseur de cet absorbeur a été doublé. (a,d) Tous les événements sont sélectionnés. (b,e) Sélection des événements à  $\pm 20\%$  de  $E_{tot}$ . (c,f) Complétion de l'énergie  $E_2$  déposée dans l'absorbeur.

De manière globale, l'épaisseur de l'absorbeur semble influencer grandement sur la qualité de l'image reconstruite. En effet, les images représentées sur la deuxième ligne de la figure 6.8 sont moins bruitées et la sphère est mieux définie que sur la première ligne. Elles bénéficient entre 0.5 et 4 fois plus de statistique. En revanche, il semblerait que la complétion de l'énergie déposée dans l'absorbeur n'améliore pas énormément l'image reconstruite. Dans le cas de l'absorbeur fin, la sélection sur l'énergie totale déposée dans la caméra est trop brutale : le nombre d'évènements est trop faible et la taille de la sphère se voit considérablement réduite. En conclusion, la meilleure configuration est celle où l'absorbeur est

plus épais et où on applique une sélection sur l'énergie totale (figure 6.8e).

Cependant dans le cas de l'hadronthérapie, le spectre d'énergie d'émission des  $\gamma$ -prompt est très large, contrairement à ce cas de figure où l'énergie d'émission est fixe. La méthode présentée dans [Xu and He (2007)] en section 4.2.2 pourrait être une alternative ou pourrait être combinée avec la méthode que nous utilisons afin de reconstruire ce types d'images car elle ne nécessite pas de connaître l'énergie initiale des photons. Mais les temps de calculs se verraient rallongés et il y aurait davantage d'incertitudes dues à la loi a priori de l'énergie initiale. Si on veut se placer dans le cas de figure le plus favorable, il est possible d'augmenter la taille de l'absorbeur facilement en simulation, mais en réalité, cela entraînerait des coûts de fabrication supplémentaires. Mais la sélection sur l'énergie totale des photons est plus délicate : quelle gamme d'énergie est plus pertinente pour la détection d'anomalies dans le plan de traitement ? C'est ce que nous verrons dans la section 7.1.

#### 6.2.4 Conclusions

La caméra Compton présente de nombreux avantages comme nous l'avons vu en section 2.2.2. L'algorithme MLEM développé permet de reconstruire une image 3D à partir des données acquises par la caméra. Lorsqu'une source est imagée par une seule caméra, on observe un allongement de cette source dans la direction orthogonale au dispositif. Une solution qui pourrait être envisagée serait d'employer deux caméras ou une couronne de caméras par exemple, cependant ce n'est pas fondamentalement nécessaire en vérification de traitement pour l'hadronthérapie. En effet, la caméra est généralement placée dans une direction parallèle au faisceau de particules et cette direction ne pose pas problème dans l'image reconstruite. Par ailleurs, les paramètres modélisés dans l'algorithme de reconstruction sont très importants pour que l'image soit correctement reconstruite. La combinaison du facteur  $|\cos(\theta_{\vec{V}_1\vec{M}})|/V_1M^2$  de l'équation (6.4) avec la sensibilité permet de reconstruire correctement les voxels éloignés du champ de vision de la caméra et d'empêcher que la source reconstruite ne s'écrase sur la caméra. Enfin, la reconstruction des sources de hautes énergies peut être améliorée en sélectionnant certains événements dont l'énergie déposée dans la caméra est proche de l'énergie initiale et/ou en augmentant la taille de l'absorbeur afin d'améliorer l'efficacité de détection. Les algorithmes itératifs ont pour avantage de permettre de modéliser de nombreux paramètres tels que les caractéristiques du système, l'absorption ou la diffusion, grâce à la matrice système. Ici, seule la géométrie du détecteur est modélisée, mais sachant que les irradiations de carbone ou de proton se font dans des milieux différents de l'air, on pourrait envisager d'intégrer des modèles de correction d'atténuation comme en TEP par exemple, car les images seront forcément dégradées à cause de ce phénomène.





---

# Reconstructions de distributions $\gamma$ -prompt

---

Ce chapitre fait suite aux réflexions émises au chapitre 6 et permet d'évaluer les qualités de reconstructions de distributions  $\gamma$ -prompt simulées. Nous retenons la méthode itérative LM-MLEM qui fournit des images moins bruitées et mieux résolues spatialement qu'avec la méthode analytique vue en section 4.1.3. Dans les simulations, presque toutes les données ont été acquises par la même caméra Compton (cf. section 5.2.1). Pour certaines des données, l'épaisseur de l'absorbeur a été doublée. Nous avons simulé un faisceau de  $4 \times 10^8$  protons pour l'irradiation de trois différents types de fantômes (homogène, multi-matériaux et patient) avec Gate. Cela entraîne la formation d'environ  $10^9$  photons dont  $3 \times 10^7$   $\gamma$ -prompt. Des distributions de  $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation de ces fantômes sont simulées avec MEGALib (cf. section 5.2.1), puis reconstruites. Pour la caméra Compton considérée, l'efficacité de détection est d'environ  $10^{-3}$ . Afin de palier à ce problème et d'assurer une statistique suffisante pour la reconstruction, nous multiplions les distributions  $\gamma$ -prompt simulées par un facteur  $10^3$  dans chacune des sections suivantes. C'est équivalent à irradier le fantôme avec  $4 \times 10^{11}$  protons.

### 7.1 Distribution de $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme homogène

Cette section fait suite à la réflexion faite en 6.2.3 et propose de déterminer la fenêtre d'énergie de  $\gamma$ -prompt la mieux adaptée pour détecter la fin du parcours d'un faisceau par l'imagerie Compton. Pour ce faire, nous simulons l'irradiation d'un fantôme d'eau avec un faisceau de protons (cf. section 5.2.1 et figure 5.12a). L'acquisition des  $\gamma$ -prompt générés

avec la caméra Compton est ensuite simulée (cf. section 5.2.1) et les images sont reconstruites avec l'algorithme LM-MLEM présenté au chapitre 6. Dans un premier temps, nous étudions l'influence de l'énergie d'émission des photons sur la distribution  $\gamma$ -prompt reconstruite. Les images reconstruites et les profils extraits dans la direction du faisceau sont comparés aux données  $\gamma$ -prompt simulées. Puis, nous étudions l'influence des absorptions incomplètes en sélectionnant uniquement les évènements dont l'énergie totale est comprise dans une fenêtre de  $\pm 250$  keV autour de l'énergie d'émission. Enfin, nous sélectionnons les  $\gamma$ -prompt dont l'énergie totale déposée est comprise dans trois fenêtres d'énergie identifiées lors de la première étape.

### 7.1.1 Distribution des $\gamma$ -prompt en fonction de l'énergie

La figure 7.1 représente des coupes horizontales centrales des distributions  $\gamma$ -prompt  $\lambda(\cdot, \varepsilon_k)$  décrites en 5.2.1. Notons que l'échelle de couleur diffère d'une coupe à l'autre.

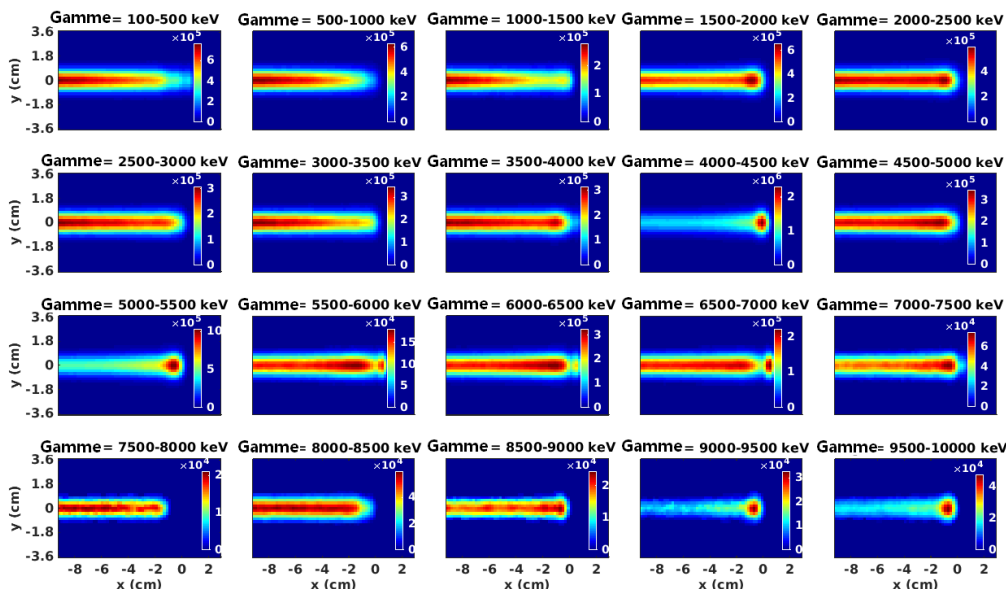


FIGURE 7.1 – Distributions  $\gamma$ -prompt  $\lambda(\cdot, \varepsilon_k)$  obtenues à partir de l'irradiation d'un fantôme d'eau avec un faisceau de protons d'énergie 120 MeV. Fenêtres d'énergie entre 100 keV et 10 MeV échantillonnées avec un pas de 500 keV. Coupes centrales de 2 mm d'épaisseur centrées en  $z = 0$  cm.

On observe que les énergies supérieures à 1.5 MeV sont plus représentées au début du trajet du faisceau. Pour certaines autres énergies, la distribution présente un pic près de la fin du parcours, comme pour les fenêtres d'énergies [4-4.5] MeV et [5-5.5] MeV qui contiennent deux des lignes de  $\gamma$  remarquables mentionnées auparavant.

### 7.1.2 Influence de l'énergie des $\gamma$ -prompt sur les images reconstruites

Les distributions que nous avons simulées, décrites en section 5.2.1 et tracées en figure 7.1 ont été utilisées ensuite pour générer les données caméra Compton. La caméra Compton

utilisée ici est celle dont l'absorbeur a une épaisseur de 4 cm et décrite en section 5.2.1. Pour chaque distribution, un volume de  $20 \times 8 \times 2.5 \text{ cm}^3$  divisé en  $100 \times 41 \times 13$  voxels et centré sur la ligne du faisceau, a été reconstruit avec l'algorithme itératif LM-MLEM. Des coupes centrales extraites des images 3D reconstruites avec 15 itérations sont représentées en figure 7.2. Les images reconstruites ne sont pas quantitatives car un grand nombre des photons ne sont pas émis vers la caméra. Par conséquent, les échelles de couleurs ne sont pas affichées dans les figures 7.2 et 7.3 et diffèrent d'une coupe à l'autre.

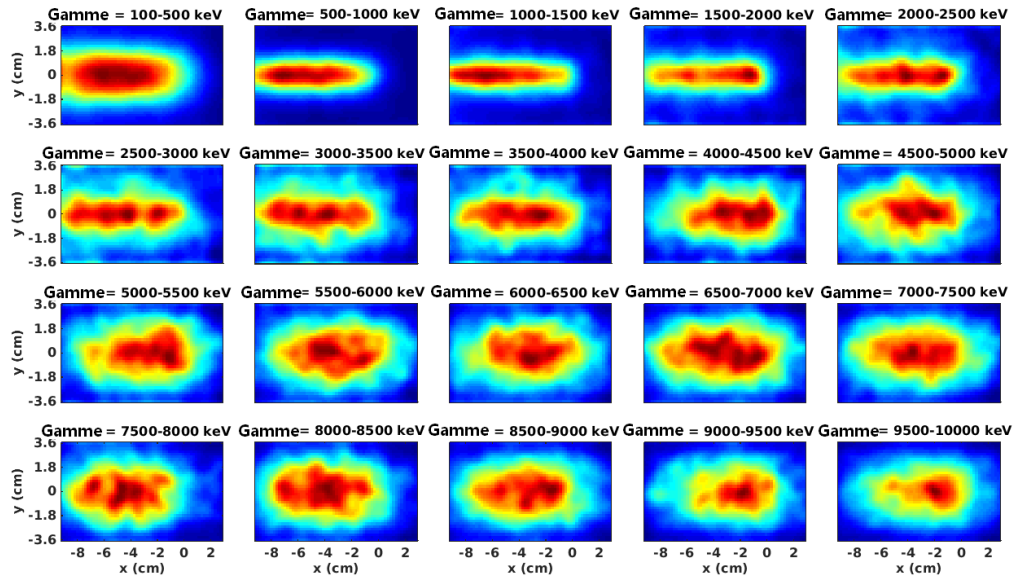


FIGURE 7.2 – Images reconstruites des distributions  $\gamma$ -prompt  $\hat{\lambda}(\cdot, \varepsilon_k)$ . Voir figure 7.1 pour les distributions de référence.

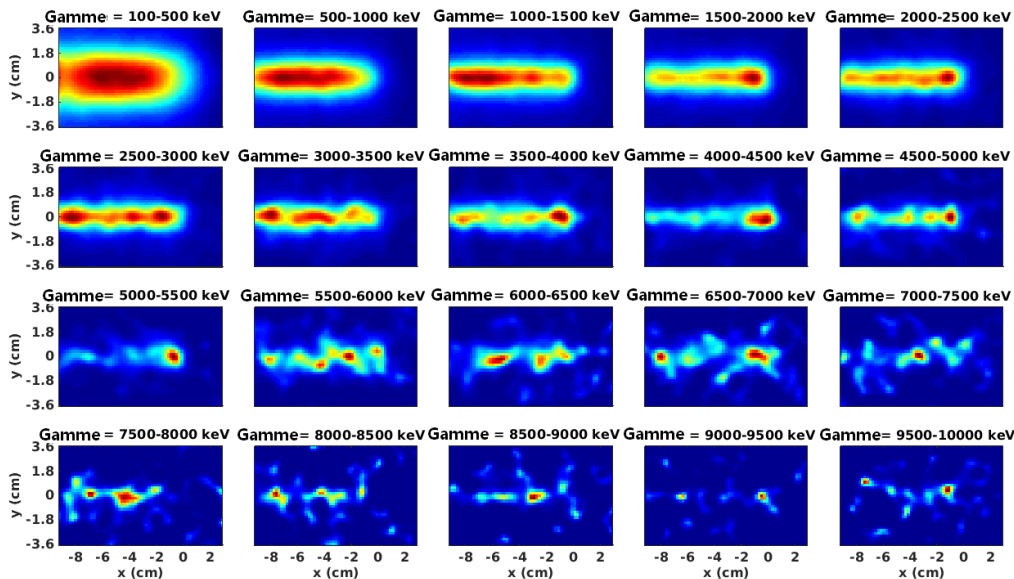


FIGURE 7.3 – Images reconstruites des distributions  $\gamma$ -prompt  $\hat{\lambda}(\cdot, \varepsilon_k)$  après sélection des évènements ayant déposé presque toute leur énergie dans le détecteur. Voir figures 7.1 et 7.2 en comparaison.

On peut remarquer que la précision des images reconstruites diminue lorsque l'énergie augmente. Ceci s'explique par le fait que, pour les énergies relativement hautes, les photons subissent de nombreuses interactions dans la caméra et sont davantage susceptibles de ne pas être complètement absorbés, comme nous l'avons vu en section 6.2.3. Les erreurs sur l'angle Compton estimé et sur la reconstruction de la séquence d'évènements entraînent un effet de flou sur les distributions reconstruites. Bien que le parcours du faisceau soit à peu près identifiable, les distributions  $\gamma$ -prompt sont moins nettes dans les hautes énergies.

De même qu'en section 6.2.3, il est possible d'améliorer les images en faisant une sélection sur l'énergie des évènements détectés, c'est-à-dire en sélectionnant les évènements dont l'énergie totale déposée dans le détecteur appartient à une certaine fenêtre. La figure 7.3 montre des coupes reconstruites seulement à partir d'évènements dont l'erreur absolue sur l'énergie totale  $|E_{tot} - E_0|$  est inférieure à  $\Delta\varepsilon/2 = 250$  keV.

On constate sur les figures 7.2 et 7.3 que pour la fenêtre  $[0.1, 2]$  MeV, l'amélioration fournie par la sélection d'énergie est progressive. Les différences sont plus marquantes au delà de 2.5 MeV et la sélection d'énergie est largement bénéfique aux distributions présentant des pics comme les distributions des fenêtres  $[4, 4.5]$  MeV et  $[5, 5.5]$  MeV.

On observe plus facilement l'évolution de la qualité des images avec l'énergie des photons  $\gamma$  sur les profils tracés sur la figure 7.4. Les profils sont calculés comme des projections à partir de la coupe centrale sur 1 cm d'épaisseur autour de la droite  $y = 0$  cm. L'influence de la sélection en énergie (courbes en tirets bleus) est évidente au dessus de 2 MeV environ.

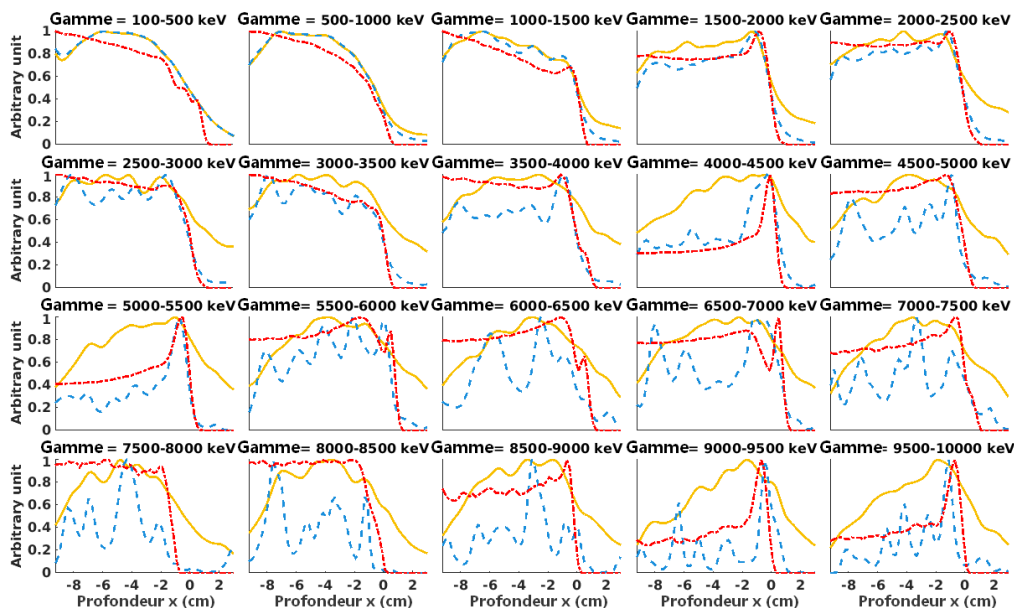


FIGURE 7.4 – Superposition de trois profils  $\gamma$ -prompt : référence (courbe rouge pointillés), reconstruction avec sélection en énergie (courbe en tirets bleus) et reconstruction avec tous les évènements (courbe jaune continue), pour des fenêtres d'énergie entre 100 keV et 10 MeV avec un pas de 500 keV. Projections calculées à partir de la coupe centrale sur 1 cm d'épaisseur autour de la droite  $y = 0$  cm.

Jusqu'à 6 MeV, les profils reconstruits après sélection en énergie sont très proches des profils  $\gamma$ -prompt, en particulier près de la chute de la courbe où ils sont presque confondus. Sans sélection en énergie, les profils reconstruits sont proches du profil simulé mais seulement jusqu'à 2 MeV environ. Pour des énergies supérieures à 6 MeV, le nombre d'événements disponibles pour la reconstruction est inférieur à 1500 et les résultats ne sont guère exploitables que l'ont choisisse de sélectionner sur l'énergie ou pas. En effet, la caméra Compton considérée ne détecte pas correctement les photons de haute énergie, en partie à cause de l'épaisseur de l'absorbeur. Comme le montre la figure 7.5a, le nombre d'événements corrects diminue avec l'énergie. En outre, la figure 7.5b montre que la proportion d'événements complètement absorbés (avec une tolérance de  $\pm 250$  keV) parmi tous les événements acquis diminue rapidement avec l'énergie. Cela signifie que plus l'énergie augmente, plus le nombre d'événements bruités devient grand. La reconstruction du trajet d'un photon dans la caméra devient complexe, l'angle Compton est surestimé et les images sont moins précises.

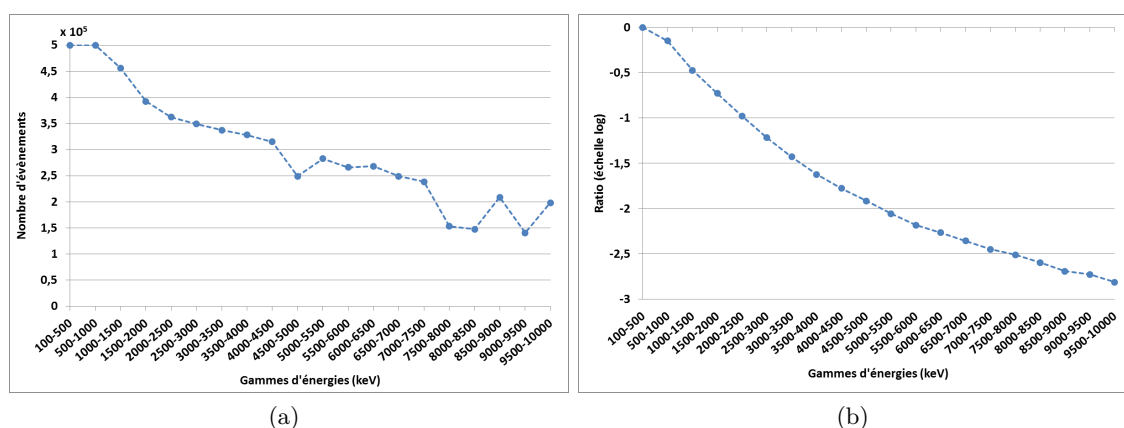


FIGURE 7.5 – (a) Nombre d'évènements sélectionnés par l'algorithme de reconstruction sans sélection en énergie. (b) Proportion des évènements complètement absorbés en fonction de l'énergie d'émission (avec une tolérance de  $\pm 250$  keV) parmi tous les évènements corrects.

### 7.1.3 Influence de la sélection sur l'énergie totale mesurée sur les images reconstruites

La caméra ayant une capacité limitée à mesurer l'énergie totale des photons incidents, il est impossible d'observer la distribution spatiale à une énergie initiale donnée. On peut uniquement faire une sélection sur l'énergie totale déposée. Dans ce cas, chaque distribution contient des absorptions incomplètes venant d'énergies supérieures.

Dans la figure 7.6, la première ligne représente des coupes de la distribution  $\gamma$ -prompt de référence pour une fenêtre d'énergie particulière. À chaque image de la ligne supérieure, on associe sur la deuxième ligne l'image reconstruite correspondante. Les coupes sont obtenues à partir d'images 3D dont les dimensions et le nombre de voxels sont les mêmes

que dans la section 7.1.1. Sur la première colonne, les distributions  $\lambda_{tot}$  et  $\hat{\lambda}_{tot}$  contiennent les  $\gamma$ -prompt de toutes les énergies et les images sont reconstruites à partir de  $4.85 \times 10^6$  évènements en 15 itérations. Sur les trois colonnes suivantes, (figures 7.6b, 7.6c, 7.6d), trois fenêtres en énergie sont sélectionnées :  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV,  $R_2 = [4, 4.5]$  MeV et  $R_3 = [5, 5.5]$  MeV. Les images sont reconstruites à partir d'évènements dont l'énergie totale appartient à ces fenêtres. Le nombre d'évènements disponibles à la reconstruction pour les fenêtres  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  est respectivement  $2 \times 10^6$ ,  $1.58 \times 10^5$  et  $1.1 \times 10^5$ . La première fenêtre d'énergie  $R_1$  est définie pour correspondre à la domination de la section efficace de diffusion Compton pour le silicium montrée en figure 2.5. Les deux autres fenêtres sont sélectionnées selon [Verburg *et al.* (2013)] et selon les figures 7.2 et 7.4.

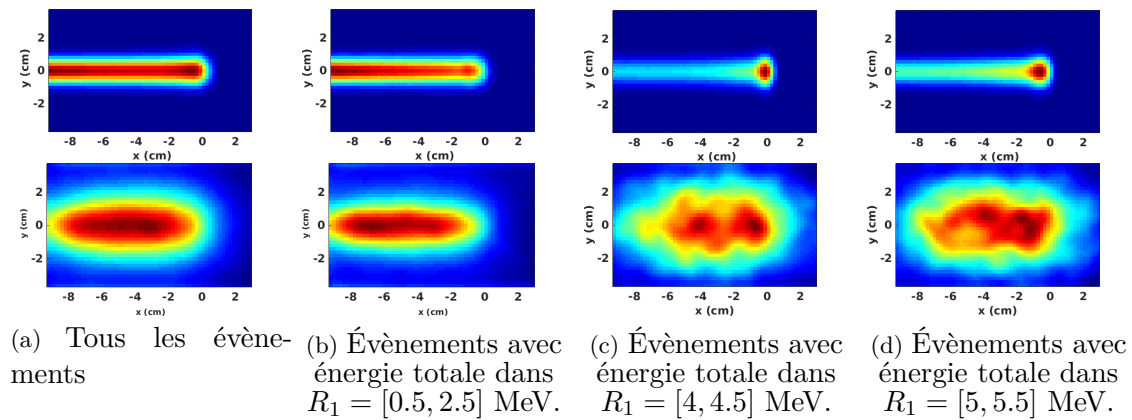


FIGURE 7.6 – Distributions  $\gamma$ -prompt pour différentes fenêtres en énergie. Ligne supérieure : distributions de référence simulées. Ligne inférieure : distributions reconstruites.

Bien que l'indice de similarité soit très bas (voir tableau 7.1), la distribution reconstruite avec tous les évènements est la plus proche de sa distribution de référence correspondante, malgré les apparences. Puis, le SSIM décroît en même temps que la fenêtre en énergie augmente. La qualité de l'image se dégrade progressivement, car la capacité de caméra à détecter les photons de haute énergie est réduite, ce qui entraîne une perte de statistique.

Sélection sur l'énergie	Non	$R_1$	$R_2$	$R_3$
SSIM	$3.26 \times 10^{-4}$	$1.24 \times 10^{-4}$	$4.4 \times 10^{-5}$	$4.1 \times 10^{-5}$

TABLE 7.1 – SSIM entre la distribution de référence et la distribution reconstruite (première ligne et deuxième ligne de la figure 7.6).

Toutes les sources de bruit typiques en imagerie  $\gamma$ -prompt ont été ignorées dans ce travail. L'atténuation dans le volume irradié n'est pas discutée ici car dans ce contexte elle n'avait pas d'influence significative sur les images reconstruites. Les images reconstruites à partir de tous les évènements sont très floues à cause des erreurs de mesure. Cependant, en comparaison avec les images spécifiques aux énergies, elles bénéficient d'une plus grand

statistique et présentent moins de variance. La sélection sur les énergies inférieures à 2.5 MeV mène à une image similaire à celle de la distribution totale. Le nombre d'évènements disponibles est du même ordre de grandeur. Toutefois, cette fenêtre d'énergie est en pratique la plus affectée par le bruit des neutrons. Ce bruit a été ignoré ici, mais d'autres travaux ont montré qu'il était très important à faibles énergies. Par conséquent, la fenêtre d'énergie la plus basse  $R_1$ , qui serait bénéfique pour la caméra Compton, pourrait être défavorisée à cause des neutrons. On pourrait exploiter les photons de haute énergie mais il faudrait améliorer l'efficacité de détection de notre système.

Bien qu'elles soient en théorie mieux adaptées pour l'estimation de la fin du parcours et pour la caractérisation des tissus irradiés, en conditions cliniques les images des hautes énergies sont susceptibles de subir une forte baisse de statistique disponible.

#### 7.1.4 Discussions et conclusions

La distribution de l'émission des  $\gamma$ -prompt pendant une irradiation en protonthérapie est étroitement liée à la dose déposée. Cette étude avait pour but d'étudier la capacité d'une caméra Compton spécifique et de l'algorithme de reconstruction proposé, à fournir une image de la distribution des  $\gamma$ -prompt avec et sans sélection en énergie.

La répartition spatiale des photons varie avec l'énergie et les performances de la caméra Compton sont meilleurs pour la fenêtre [0.5,2.5] MeV. Ainsi, l'influence de l'énergie des photons sur les images reconstruites est très importante. Comme l'énergie initiale des  $\gamma$ -prompt ne peut pas véritablement être retrouvée, il faut faire face au bruit de fond provenant des absorptions incomplètes. La section 6.2.3 a permis de mettre en avant les avantages d'une caméra dont l'épaisseur serait doublée par rapport à celle que nous avons utilisée pour cette étude. Il serait préférable d'utiliser la caméra ayant un absorbeur de 8 cm d'épaisseur plutôt qu'un absorbeur de 4 cm d'épaisseur. À partir des reconstructions obtenues, nous calculerons dans le chapitre 8 les profondeurs  $\gamma$ -prompt afin d'étudier la capacité de la caméra Compton que nous avons utilisée à mettre en évidence les erreurs de traitement.

## 7.2 Distribution de $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme multi-matériaux

Le fantôme utilisé dans la section précédente ne comporte aucune hétérogénéité car il est uniquement composé d'eau. En pratique, un patient est composé de tissus biologiques différents les uns des autres qui peuvent être à l'origine des erreurs de traitement. Afin de mettre en évidence ce type d'erreurs, nous simulons l'irradiation d'un fantôme d'eau par un faisceau de proton de 120 MeV, avec un insert d'air et/ou d'os de 5 mm d'épaisseur selon la direction  $x$  (cf figure 5.12b). L'interaction des  $\gamma$ -prompt dans la caméra Compton ayant un absorbeur d'épaisseur de 8 cm (double de l'épaisseur de l'absorbeur considéré dans 7.1) est simulée de la même façon et les images sont reconstruites avec l'algorithme LM-MLEM.



Nous étudions la capacité de l'algorithme de reconstruction à fournir des images de qualité suffisamment correcte et nous déterminons les énergies qui conviennent mieux pour détecter les inserts. On compare les images reconstruites aux distributions  $\gamma$ -prompt simulées.

### 7.2.1 Influence de l'énergie des $\gamma$ -prompt sur la détection des inserts

Les figures 7.7, 7.8, 7.9 et 7.10 représentent des coupes horizontales de distributions  $\gamma$ -prompt simulées (lignes du haut) et reconstruites (lignes du bas) pour des fenêtres d'énergies entre 500 keV et 4.5 MeV avec un pas de 500 keV. Les autres gammes d'énergies ne sont pas représentées car, comme il a été montré précédemment, la qualité des images diminue quand l'énergie augmente. Les coupes reconstruites sont extraites d'images 3D obtenues avec 20 itérations et aucune sélection en énergie n'a été appliquée pour ces quatre ensembles de figures. Les échelles de couleurs ne sont pas représentées ci-après, les images reconstruites ne sont pas quantitatives.

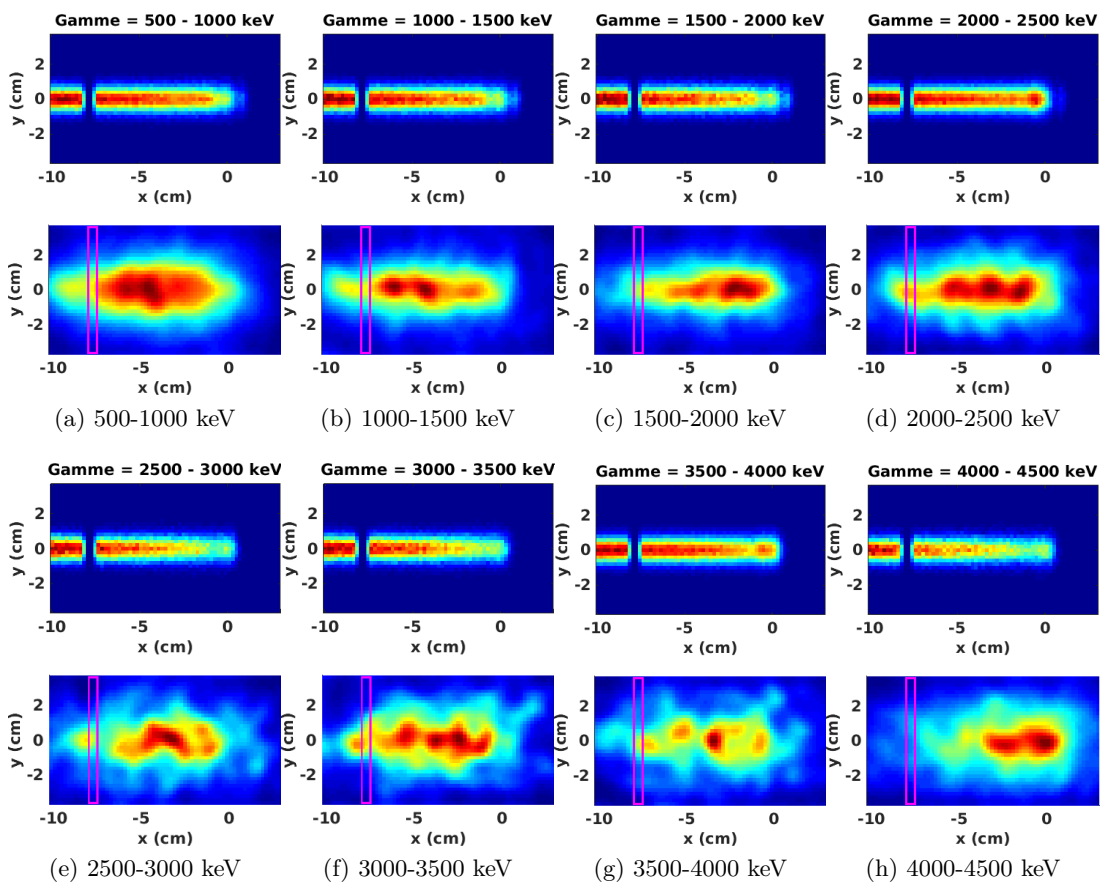


FIGURE 7.7 – Distributions  $\gamma$ -prompt simulées et reconstruites à partir de données issues de l'irradiation d'un fantôme d'eau contenant un insert d'air avec un faisceau de proton d'énergie 120 MeV. Fenêtres d'énergie entre 500 keV et 4.5 MeV échantillonnées avec un pas de 500 keV. Coupes centrales de 2 mm d'épaisseur centrées en  $z = 0$  cm. Lignes supérieures : distributions simulées. Lignes inférieures : distributions reconstruites où le rectangle magenta marque la position de l'insert.

Sur les images reconstruites de la figure 7.7, il n'est pas évident de remarquer l'insert d'air. En effet, l'insert est placé peu après l'entrée dans le fantôme et les images des distributions simulées montrent qu'il y a de l'information  $\gamma$ -prompt avant le trou d'air créé par l'insert. Or ce signal qui devrait apparaître avant les rectangles magenta est totalement perdu. Cela pourrait s'expliquer par la taille et le positionnement des diffuseurs. Ceux-ci sont de largeur inférieure à la taille du fantôme et centrés autour de  $x = 0$  cm près de la position du pic de Bragg. Par conséquent les photons issus du bord gauche du fantôme ne parviennent pas correctement à être acquis par la caméra, d'où l'absence de signal dans cette zone. Par ailleurs, l'absence de signal provenant de l'insert d'air est plus évidente sur les figures 7.7a, 7.7b, 7.7c et 7.7d où l'intensité reconstruite augmente après la position théorique de l'insert.

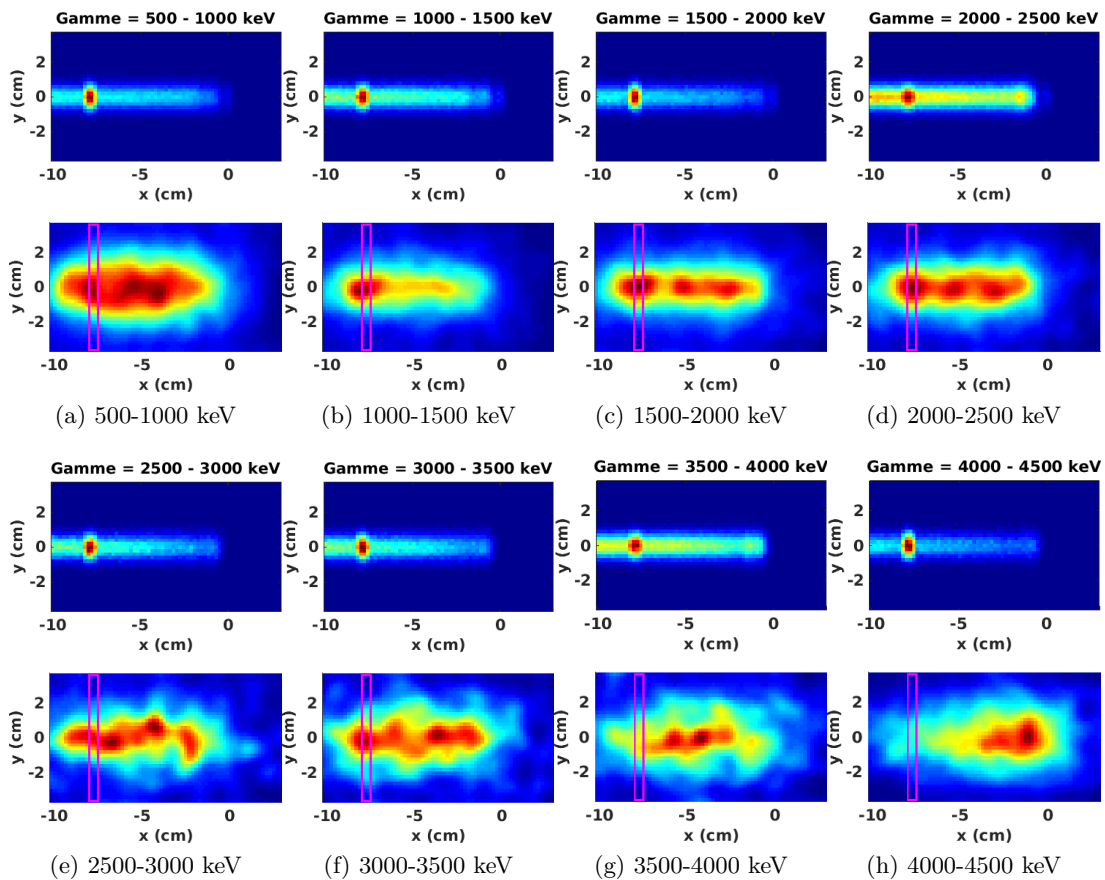


FIGURE 7.8 – Distributions  $\gamma$ -prompt simulées et reconstruites à partir de données issues de l'irradiation d'un fantôme d'eau contenant un insert d'os avec un faisceau de proton d'énergie 120 MeV. Fenêtres d'énergie entre 500 keV et 4.5 MeV échantillonnées avec un pas de 500 keV. Coupes centrales de 2 mm d'épaisseur centrées en  $z = 0$  cm. Lignes supérieures : distributions simulées. Lignes inférieures : distributions reconstruites où le rectangle magenta marque la position de l'insert.

Sur les images de la figure 7.8, l'intensité des  $\gamma$ -prompt provenant de l'insert d'os est plus importante que celle des autres photons provenant de l'eau du fantôme. Cette intensité

est très marquée sur les images 7.8a à 7.8d, en particulier pour la gamme d'énergie [1,1.5] MeV. Les images reconstruites pour les gammes d'énergies plus élevées sont plus bruitées et l'intensité des photons provenant de l'insert d'os est confondue avec celle des  $\gamma$ -prompt provenant de l'eau. Néanmoins, il y a davantage de signal avant l'insert, du fait de la présence de l'os, par rapport aux sous-figures de 7.7, même au delà du champ de vision des diffuseurs de la caméra. Par conséquent, ces énergies ne sont pas adaptées pour discerner la présence de l'os.

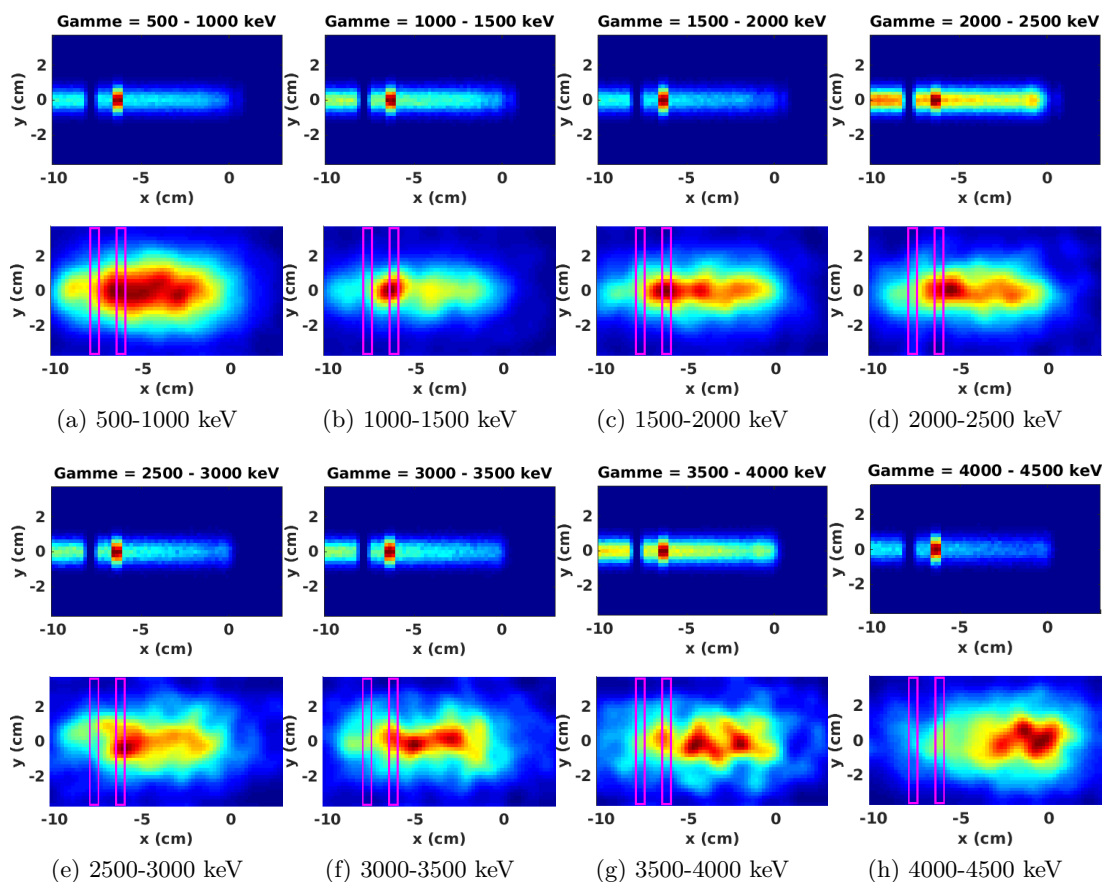


FIGURE 7.9 – Distributions  $\gamma$ -prompt simulées et reconstruites à partir de données issues de l'irradiation d'un fantôme d'eau contenant un insert d'air puis d'os, avec un faisceau de proton d'énergie 120 MeV. Fenêtres d'énergie entre 500 keV et 4.5 MeV échantillonnées avec un pas de 500 keV. Coupes centrales de 2 mm d'épaisseur centrées en  $z = 0$  cm. Lignes supérieures : distributions simulées. Lignes inférieures : distributions reconstruites où le rectangle magenta marque la position de l'insert.

Ensuite, nous avons introduit de l'air puis de l'os dans le fantôme d'eau (figure 7.9). Le même problème que sur les figures 7.7 se pose, c'est-à-dire que les photons émis en début de parcours, avant l'insert d'air, ne sont pas bien détectés et mal reconstruits. De plus, avec la présence de l'insert d'os, l'intensité du signal provenant de cette zone est dominée par l'intensité des  $\gamma$ -prompt émis depuis l'os. Il est donc très difficile de parvenir à reconstruire cette zone. Les quelques photons détectés sont confondus avec la position

théorique de l'insert d'air à cause de la prise en compte des incertitudes sur l'angle  $\beta$  dans l'algorithme de reconstruction, qui tend à flouter l'image. Par ailleurs, on constate comme sur les images de la figure 7.8 que pour les gammes d'énergies allant de 0.5 à 2.5 MeV, l'insert d'os apparaît clairement sur les images, en particulier sur la figure 7.9b. Cette information est perdue par la suite lorsque l'énergie augmente. Cependant, sur certains de ces reconstructions, les zones correspondant à l'insert d'os sont très légèrement décalées par rapport à leur position théorique.

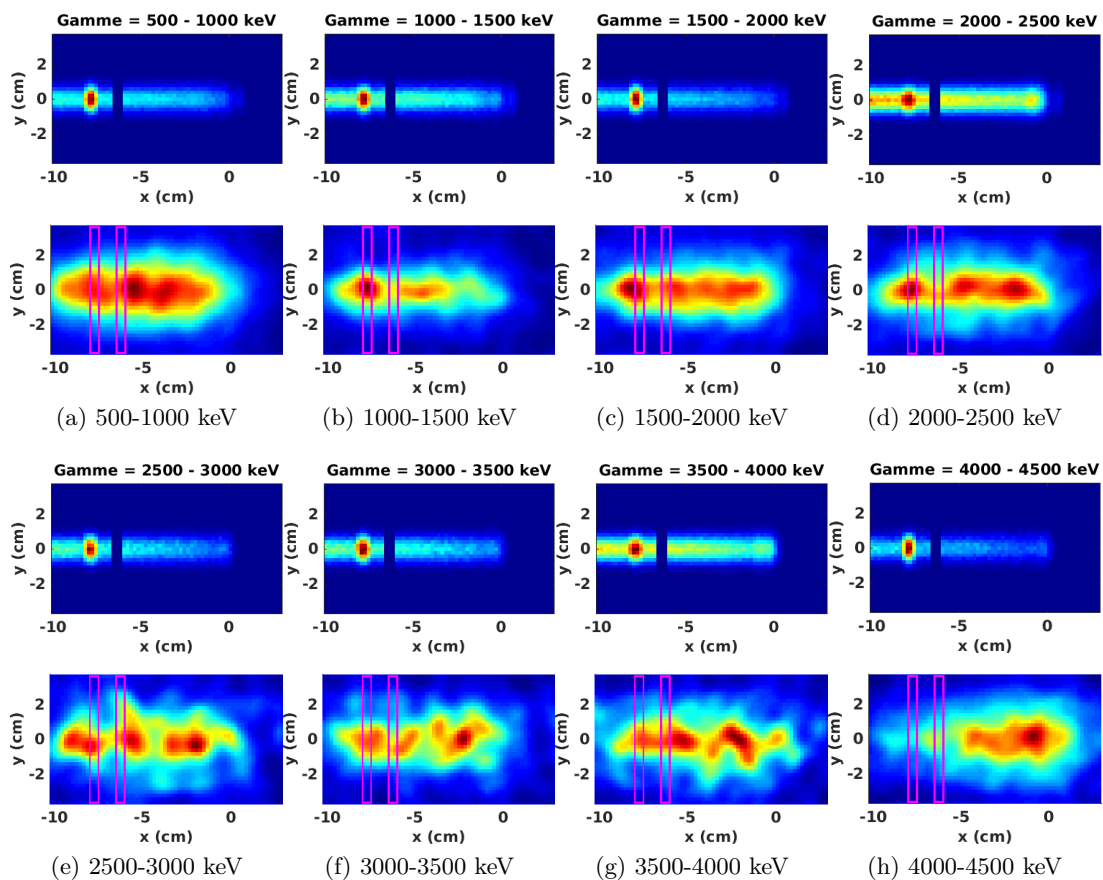


FIGURE 7.10 – Distributions  $\gamma$ -prompt simulées et reconstruites à partir de données issues de l'irradiation d'un fantôme d'eau contenant un insert d'os puis d'air, avec un faisceau de proton d'énergie 120 MeV. Fenêtres d'énergie entre 500 keV et 4.5 MeV échantillonnées avec un pas de 500 keV. Coupes centrales de 2 mm d'épaisseur centrées en  $z = 0$  cm. Lignes supérieures : distributions simulées. Lignes inférieures : distributions reconstruites où le rectangle magenta marque la position de l'insert.

Enfin, les deux matériaux ont été insérés différemment sur les figures 7.10 : l'os a été implanté avant l'air. Les  $\gamma$ -prompt provenant des pixels situés à l'entrée du fantôme sont également mal détectés. Mais, l'os étant placé avant l'air ici, le nombre de photons provenant de l'insert est plus important donc contribue à fournir plus d'information. Ainsi, pour les images 7.10b, 7.10c et 7.10d, l'insert d'os c'est clairement visible. La zone de 5 mm d'épaisseur contenant de l'air est plus difficilement distinguable car elle est entourée de part

et d'autre de voxels émettant des  $\gamma$ -prompt. En effet, la prise en compte des incertitudes de mesure sur les énergies déposées dans la caméra favorise le floutage dans l'image. Dans ce cas-ci également, l'image 7.10b correspondant à la gamme d'énergie [1,1.5] MeV est la mieux reconstruite, c'est celle où les deux inserts apparaissent plus distinctement. Puis, la précision des images se dégrade lorsque les gammes d'énergie augmentent. Même si on distingue globalement le parcours du faisceau, les inserts ne sont plus visibles.

Dans les configurations précédentes, nous avons vu que les meilleures gammes d'énergies sont celles allant de 500 keV à 2.5 MeV. La gamme d'énergie [1,1.5] MeV se démarque notamment des autres car c'est celle qui permet de mieux distinguer les inserts. Or si on se réfère à la figure 7.11, dans tous les cas ce n'est pas celle qui bénéficie de la plus grande statistique. A contrario, pour la gamme [4,4.5] MeV le nombre d'évènements est doublé par rapport à la gamme [1,1.5] MeV et cela n'améliore pas l'image. En effet, plus l'énergie initiale augmente, moins l'énergie des évènements détectés correspond réellement à l'énergie initiale, et nombreux sont les évènements qui constituent du bruit (cf. section 7.1.2).

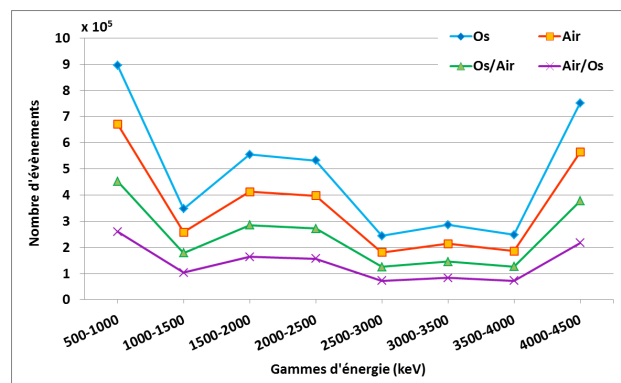


FIGURE 7.11 – Nombre d'évènements sélectionnés comme valides par l'algorithme de reconstruction (sans sélection en énergie).

## 7.2.2 Evaluation de la qualité des images reconstruites avec toutes les énergies

D'après les conclusions de la section précédente 7.1.4 et les résultats obtenus par gamme d'énergies de la section 7.2.1, nous avons choisi la gamme d'énergie  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV afin de faire une sélection sur l'énergie totale déposée dans la caméra, en considérant tous les  $\gamma$ -prompt émis quelque soit leur énergie. Nous comparons les images et les profils avec et sans sélection sur l'énergie totale.

Dans chaque sous-figure 7.12a, 7.12b, 7.12c, 7.12d, on affiche les résultats pour le fantôme d'eau avec respectivement un insert d'air, d'os, d'air puis d'os, et d'os puis d'air. Les lignes supérieures représentent des coupes de la distribution  $\gamma$ -prompt simulées pour une fenêtre d'énergie particulière. Sur la ligne du milieu, on a associé l'image reconstruite correspondante. Puis sur la dernière ligne, on affiche la superposition des profils simulés

et reconstruits.

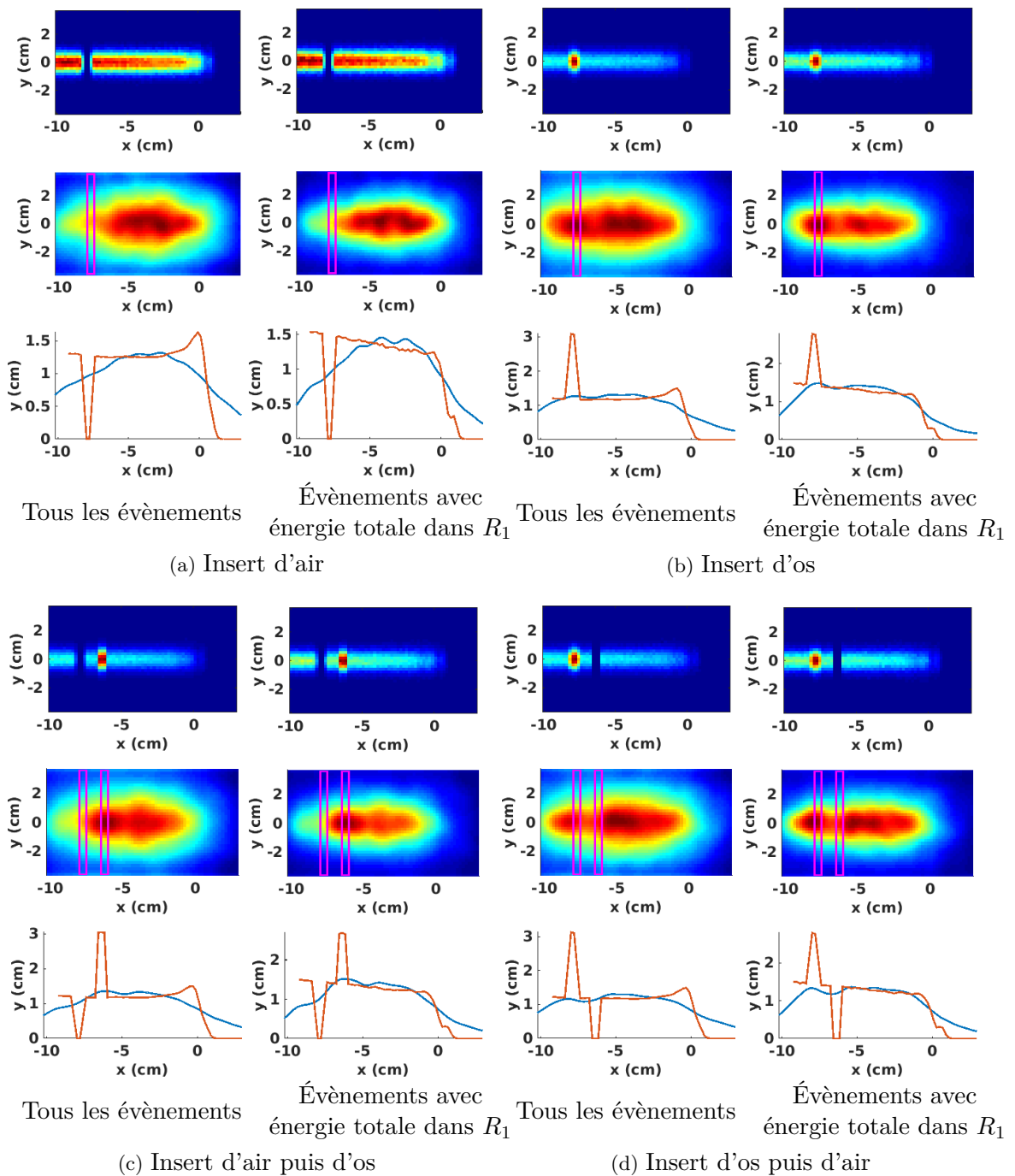


FIGURE 7.12 – Dans chaque sous figure, sont affichées les distributions  $\gamma$ -prompt sans et avec sélection en énergie dans la fenêtre  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV pour chaque configuration du fantôme. Ligne supérieure : distributions de référence simulées. Ligne du milieu : distributions reconstruites. Ligne du bas : superposition de profils de référence (courbe rouge), et reconstruit (courbe bleue) normalisés par rapport à leur moyenne respective.

Les images sont beaucoup plus lisses que précédemment car la statistique est plus importante. En effet, les images avec tous les événements ont été reconstruits avec plus de

$10^6$  évènements chacun, et même si celles qui ont été reconstruites avec sélection en énergie ont bénéficié de moitié moins d'évènements, ces valeurs restent élevées. On remarque que les images obtenues avec sélection en énergie sont plus proches des distributions simulées, car elles sont moins dispersées dans la direction orthogonale à celle du faisceau et les  $\gamma$ -prompt provenant de l'insert d'os ont une intensité plus importante que ceux provenant de l'eau et de surtout de l'air. C'est ce que confirment les résultats du tableau 7.2, même si les indices sont faibles. À l'exception du fantôme avec un simple insert d'air, dans tous les autres cas le SSIM des images reconstruites avec sélections sur l'énergie dans  $R_1$  est supérieur à celui des images obtenues avec tous les évènements. Les profils sont moins explicites que les images 2D car les pics ou les creux dus respectivement à l'os et à l'air sont moins visibles sur les profils reconstruits que sur les profils simulés.

Insert du fantôme	Air		Os		Air/Os		Os/Air	
	Non	$R_1$	Non	$R_1$	Non	$R_1$	Non	$R_1$
SSIM	0.0233	0.0225	0.021	0.0235	0.0215	0.0242	0.0227	0.0236

TABLE 7.2 – SSIM entre la distribution de référence et la distribution reconstruite (première ligne et deuxième ligne des sous-figures de 7.12).

### 7.2.3 Discussions et conclusions

Nous avons mis en évidence l'influence de l'hétérogénéité d'un fantôme irradié par un faisceau de protons. Nous avons simulé un fantôme d'eau comportant différents inserts d'air et/ou d'os. Ces hétérogénéités induites par la présence de ces différents matériaux ne sont pas toujours distinguables sur les images reconstruites. Idéalement, il faudrait se placer dans un cas où seuls les  $\gamma$ -prompt sont pris en compte, sans aucune atténuation dans le volume, et considérer la fenêtre d'énergie [1,1.5] MeV pour pouvoir mettre en évidence les différents matériaux. En pratique, il n'est pas possible de discriminer de la sorte l'énergie initiale des  $\gamma$ -prompt. Ce travail confirme les conclusions de la section précédente 7.1.4, concernant l'amélioration des résultats avec des images reconstruites à partir de photons dont l'énergie totale déposée dans la caméra est dans la fenêtre [0.5, 2.5] MeV. Nous mettrons en évidence dans le chapitre 8 l'influence de la présence des inserts sur le parcours  $\gamma$ -prompt et la capacité de cette caméra Compton à mettre en évidence les erreurs de traitement.

## 7.3 Distribution de $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme patient

Nous avons mis en évidence dans les sections précédentes qu'il était préférable de doubler l'épaisseur de l'absorbeur et sélectionner les photons dans la fenêtre d'énergie [0.5, 2.5] MeV, mais la configuration était plutôt idéale jusqu'ici car l'atténuation du volume n'était pas prise en compte. Nous nous plaçons dans un cas réaliste où nous simulons



l'irradiation d'un fantôme de patient par un faisceau de protons de 120 MeV selon la direction  $x$  (voir figure 5.12c). Notons que le point d'entrée du faisceau est aux coordonnées  $(-30,1,0)$  cm contrairement aux sections précédentes où il était en  $(-30,0,0)$  cm. Ce fantôme est de dimensions  $48.8 \times 26.6 \times 40.5$  cm<sup>3</sup> et le point  $(-0.834, -2.064, 4.5)$  cm est situé au centre du repère. Dans ce cas, le fantôme de patient comporte davantage d'hétérogénéités que le fantôme multi-matériaux et la fin du parcours  $\gamma$ -prompt est moins marquée du fait de ces différences de tissus. De plus, la caméra Compton acquiert en pratique tous les photons sortant du volume. Comme nous pouvons le voir sur la figure 7.13, le nombre de photons issus de désintégrations autre que les fissions de noyaux (i.e. les gamma prompts cf. figure 7.13a) est non négligeable et leur distribution assez étalée dans le volume (cf. figure 7.13b). Ainsi bon nombre de particules acquises contribuent à bruyier les données.

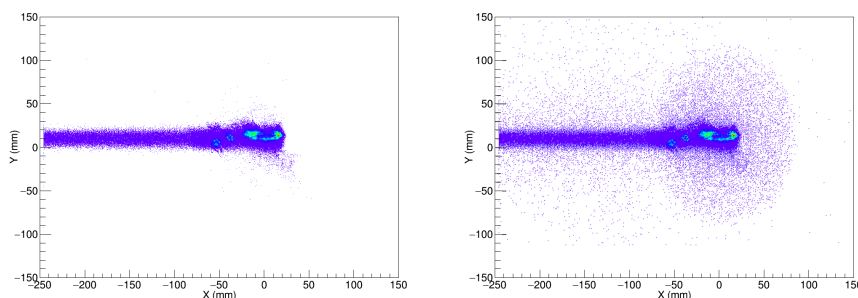


FIGURE 7.13 – Distribution des photons dans le patient. (a) Distribution des  $\gamma$ -prompt. (b) Distribution de tous les photons secondaires.

Afin d'étudier l'influence de l'atténuation dans le patient, nous avons simulé dans un premier temps l'interaction dans la caméra des  $\gamma$ -prompt tels qu'ils ont été produits par les réactions nucléaires entre les protons et les atomes du patient. Puis, nous avons simulé l'interaction des photons sortant du patient, dans le dispositif d'imagerie Compton (cf. première étape section 5.2.1). Nous comparons les images avec et sans atténuation dans le volume, obtenues avec l'algorithme de reconstruction LM-MLEM utilisé dans les sections précédentes.

### 7.3.1 Influence de l'atténuation dans le volume

Sur les figures 7.14 et 7.15, nous comparons les images de la distribution de dose, celles de la distribution  $\gamma$ -prompt simulée et les images des distributions de  $\gamma$ -prompt sans atténuation et avec atténuation dans le patient. Nous affichons les résultats pour un faisceau de protons de 120 MeV. Selon les conclusions des sections précédentes, nous choisissons de faire une sélection sur l'énergie totale déposée dans la caméra dans la fenêtre  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV, en considérant tous les photons émis, quelque soit leur énergie. Les images de la figure 7.15 ont été reconstruites en 20 itérations avec  $4 \times 10^5$  évènements sans sélection sur l'énergie totale et  $1.6 \times 10^5$  évènements si la sélection est effectuée.

Pour l'image où l'atténuation n'est pas prise en compte, nous obtenons la même qualité que dans les sections précédentes. Cependant, les hétérogénéités dues aux différents tissus



présents dans le patient ne sont pas correctement reconstruites, car contrairement à la section précédente, les disparités ne sont pas autant marquées et sont plus nombreuses. Les absorptions incomplètes tendent à dégrader la qualité de la reconstruction.

Nous constatons que l'image avec prise en compte de l'atténuation est de moins bonne qualité que celle où l'atténuation est négligée. Les distributions avec atténuation sont plus bruitées et semblent moins uniforme le long de la direction du faisceau qu'elles aient été reconstruites avec ou sans sélection sur l'énergie totale des photons. Nous remarquons également que les images obtenues avec sélection des évènements dans  $R_1$  sont moins dispersées dans la direction orthogonale au faisceau.

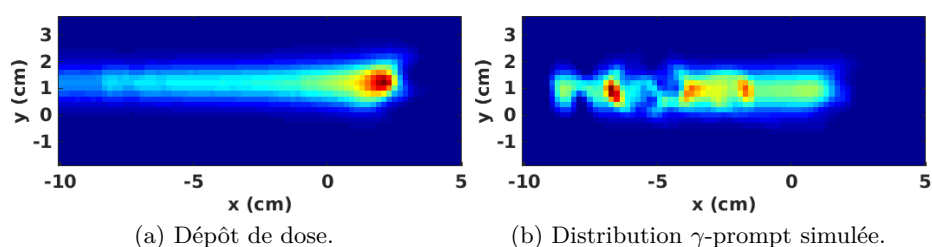


FIGURE 7.14 – Coupes extraites des distributions de dose et  $\gamma$ -prompt dans le fantôme de patient.

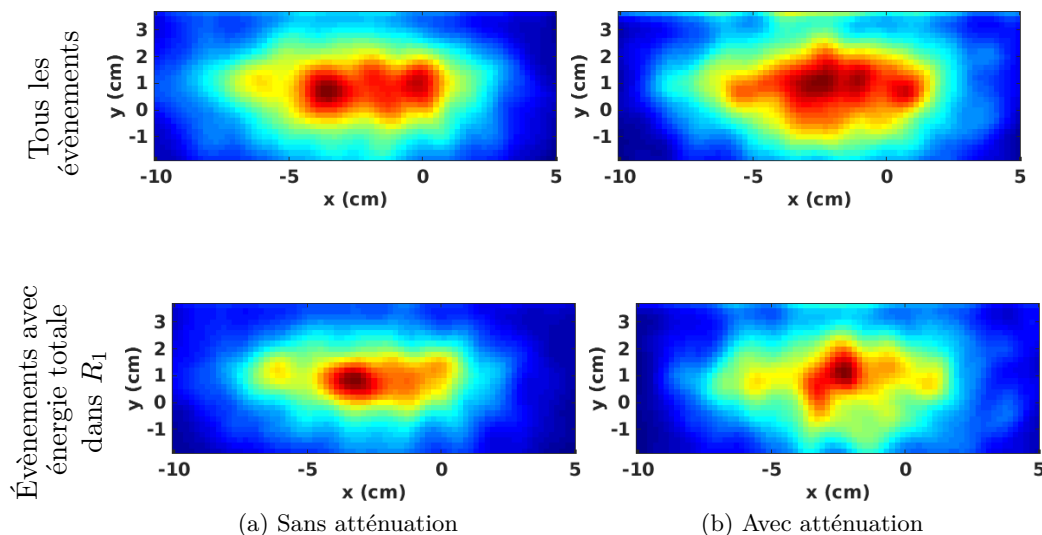


FIGURE 7.15 – Sur la première et la deuxième colonne, sont affichées respectivement les images reconstruites sans et avec atténuation. Ligne du haut : images reconstruites avec tous les évènements. Ligne du bas : images reconstruites avec sélection dans l'intervalle  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV.

Ces remarques sont confirmées par la figure 7.16 et le tableau 7.3. En effet, les détails présents à l'entrée dans le fantôme (jusqu'à environ  $x = -4$  cm) ne sont pas bien reconstruits. Par la suite, les variations présentes entre  $x = -4$  cm et  $x = -1$  cm sur les profils simulés sont plus visibles sur les profils obtenus avec la sélection en énergie (bleu clair

et rose). Toutefois, en comparant ces deux courbes nous constatons que le profil obtenu sans prise en compte de l'atténuation est mieux reconstruit, ce qui reste logique. Ainsi, la sélection en énergie semble bénéfique dans un cas de figure plus concret, où l'atténuation des photons dans le fantôme est intégrée.

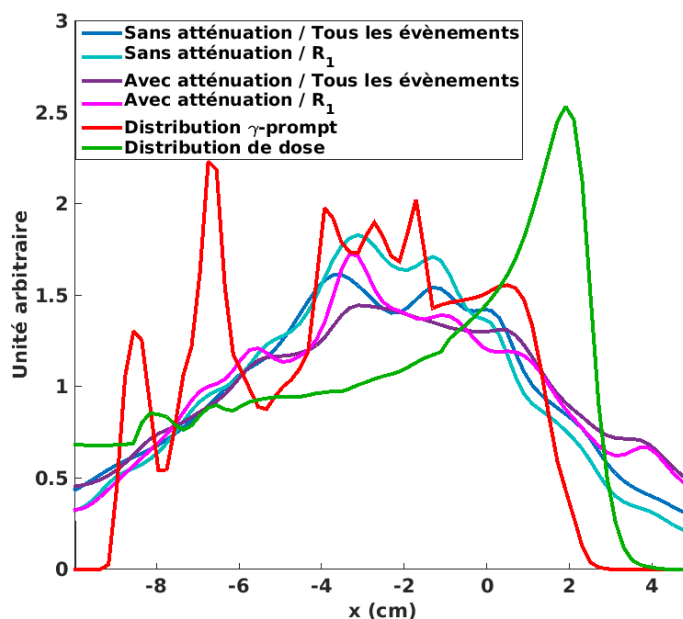


FIGURE 7.16 – Superposition de profils de référence (courbe rouge), de dose (courbe verte) et reconstruits normalisés par rapport à leur moyenne respective. Projections calculées à partir de la coupe centrale sur 1 cm d'épaisseur autour de la droite  $y = 0$  cm.

Atténuation	Oui		Non	
	Non	$R_1$	Non	$R_1$
Sélection sur l'énergie				
SSIM	$4.6 \times 10^{-6}$	$5.7 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-6}$

TABLE 7.3 – SSIM entre la distribution de référence et la distribution reconstruite (figure 7.14b et sous-figures de 7.15).

### 7.3.2 Discussions et conclusions

Nous avons mis en évidence l'influence de l'atténuation dans un fantôme. Nous avons simulé l'irradiation d'un fantôme de patient par un faisceau de protons de 120 MeV, suivie de l'acquisition des  $\gamma$ -prompt par une caméra Compton. Ce type de simulation n'a encore jamais été publié d'après nos informations. Afin de mettre en place ces simulations, nous avons du trouver un moyen de traduction des données entre les deux logiciels Gate et MEGALib pour pouvoir exploiter les atouts de chacun.

Par rapport à des travaux déjà publiés (par exemple [Verburg *et al.* (2013)]) nous avons montré ici la distribution 3D des  $\gamma$ -prompt par gamme d'énergie. La caméra Compton a pour avantage de pouvoir acquérir des images 3D de ces distributions, contrairement aux caméras collimatées.

Nous avons reconstruit les images avec et sans sélection sur l'énergie totale des photons déposée dans la caméra Compton, grâce aux conclusions des sections précédentes. Pour ce faire, nous avons sélectionné la fenêtre d'énergie  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV. Il apparaît que l'atténuation a un effet non négligeable sur la qualité des images et tend à bruite les reconstructions. Il est néanmoins possible de minimiser ce phénomène en sélectionnant certains photons dans une fenêtre d'énergie.

---

# Détection de la fin du parcours d'un faisceau de protons

---

L'un des défis d'un système de contrôle de protonthérapie est de détecter les changements de parcours du faisceau. Le but de cette section est d'évaluer la capacité de la caméra Compton à mettre en évidence ces changements en mesurant les décalages sur la position de la fin du parcours du profil  $\gamma$ -prompt.

Les distributions de dose et les distributions  $\gamma$ -prompt présentent des similitudes. Par analogie avec le parcours du faisceau de protons et par abus de langage, nous définissons le parcours  $\gamma$ -prompt comme la distance depuis l'entrée du faisceau jusqu'à la position d'un point où le profil  $\gamma$ -prompt s'effondre. Les profils reconstruits ne présentant pas de décroissance abrupte, un tel point n'existe pas en réalité, et à plus forte raison dans un fantôme hétérogène. Néanmoins, pour estimer les décalages, nous avons besoin d'une mesure quantitative que nous allons définir comme l'abscisse d'un point, qui signifiera dans ce contexte la fin du parcours  $\gamma$ -prompt. Dans ce chapitre, nous proposons des méthodes pour estimer cette mesure et nous les appliquons aux résultats obtenus dans le chapitre 7.

### 8.1 Méthodes

Trois méthodes ont été développées pour calculer le parcours  $\gamma$ -prompt des profils reconstruits. La première méthode consiste à prendre l'abscisse du point correspondant à certains pourcentages du maximum  $M$  du profil. La seconde et la troisième méthodes ont été proposées dans [Hilaire *et al.* (2014)] et sont basées sur la décomposition du profil sur une base d'ondelettes. D'autres méthodes ont été proposées dans la littérature. Dans [Or-

tega *et al.* (2015)] par exemple, la valeur de  $M$  est la hauteur du pic le plus profond et le parcours  $\gamma$ -prompt est pris à l'abscisse des points  $80\%M$  ou  $50\%M$ . Pour les profils présentant une variabilité importante, un ajustement préalable des données avec une fonction lissante est recommandé [Smeets *et al.* (2012), Gueth *et al.* (2013), Janssen *et al.* (2014)]. Une approche consiste alors à prendre le point d'inflexion de l'approximation dans une base de splines.

Comme dans le chapitre précédent, nous calculons le profil 1D le long de l'axe du faisceau à partir des images reconstruites, en projetant une bande centrale de 1 cm d'épaisseur de la coupe en  $z = 0$  cm sur l'axe  $y = 0$  cm. Nous rappelons que la position du pic de Bragg est usuellement calculée comme l'abscisse du point où le profil de dose passe en dessous de 80% de son maximum. Pour les profils reconstruits, l'abscisse du point correspondant à 80% de la valeur maximum n'est pas toujours adaptée et présente une certaine variabilité. Nous verrons ci-après comment nous avons choisi de contourner cette difficulté.

### 8.1.1 Méthode basée sur le maximum

Soit  $\varphi$  le profil 1D obtenu en projetant la distribution  $\gamma$ -prompt 3D simulée (sommée sur toutes les énergies) le long de la direction du faisceau. Le parcours  $\gamma$ -prompt du profil simulé a été mesuré de la même façon qu'on calcule la position du pic de Bragg, à 80% de sa valeur maximum  $M$  :

$$d = \varphi^{-1}(0.8 \cdot M). \quad (8.1)$$

Pour les profils reconstruits  $\hat{\varphi}$ , afin de réduire la variabilité de l'estimateur, nous calculons la fin du parcours comme la moyenne sur un intervalle de pourcentages  $[p_{min}, p_{max}]$  selon la formule :

$$\hat{d} = \frac{1}{(p_{min} - p_{max})M} \int_{p_{min}M}^{p_{max}M} \hat{\varphi}^{-1}(y) dy \quad (8.2)$$

Les bornes  $p_{min}$  et  $p_{max}$  seront définies plus tard et seront spécifiques à chaque fantôme. Un exemple est donné en figure 8.1. La gamme  $[p_{min} \cdot M, p_{max} \cdot M]$  est affichée en bleu et la valeur moyenne  $\hat{d}$  est représentée par la ligne verte.

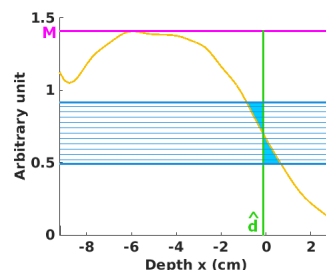


FIGURE 8.1 – Calcul du parcours  $\gamma$ -prompt.

### 8.1.2 Méthode basée sur les ondelettes

Nous décrivons ici deux méthodes basées sur la décomposition en base d'ondelettes (voir annexe A pour un rappel sur les ondelettes) du profil  $\gamma$ -prompt reconstruit.

Dans un premier temps, nous seuillons la coupe en  $z = 0$  cm de l'image reconstruite. Nous sélectionnons dans cette coupe une zone rectangulaire de 2 cm de largeur autour de l'axe ( $Oy$ ) et allant du bord gauche de l'image jusqu'à 1 cm avant le pic de Bragg

(voir figure 8.2a). Nous calculons la moyenne de l'intensité dans cette zone. Le seuillage s'applique ensuite à 50% de cette intensité (voir figure 8.2b).

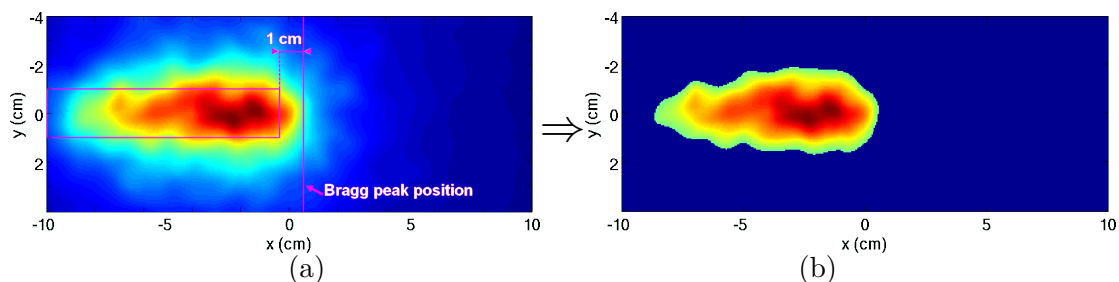


FIGURE 8.2 – Coupe à  $z=0$  cm de l'image reconstruite et région sélectionnée pour le calcul de la moyenne (a). Image seuillée (b).

Le profil est alors calculé à partir de l'image seuillée puis décomposé sur deux échelles dans la base d'ondelettes de Haar.

La première méthode (appelée DWD) estime la fin du parcours  $\gamma$ -prompt à la position du plus grand coefficient d'ondelettes. Pour la seconde méthode (appelée DWA), la profondeur est prise au point où l'approximation basse échelle du signal tombe en dessous de 40% de son maximum. Un exemple est donné en figure 8.3, où l'approximation à l'échelle la plus basse (courbe bleue claire) et les coefficients de détail (bâtons bleus foncés) d'un profil  $\gamma$ -prompt sont représentés.

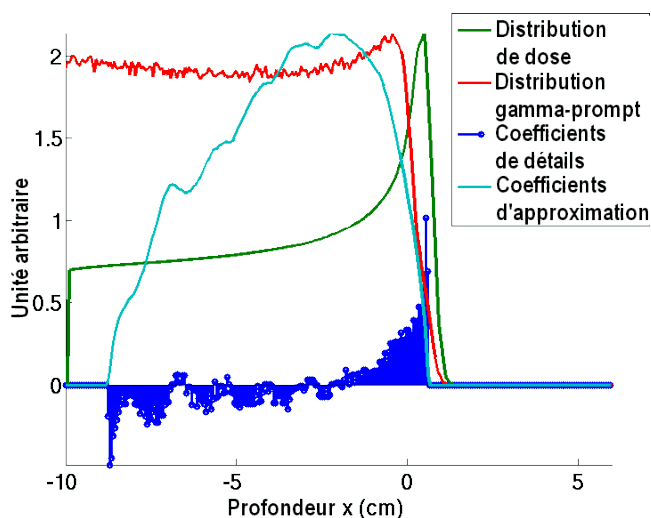


FIGURE 8.3 – Décomposition en ondelette du profil  $\gamma$ -prompt obtenu en projetant la distribution seuillée en fig. 8.2b. La courbe rouge représente le profil  $\gamma$ -prompt de référence et la courbe verte représente l'énergie déposée dans le fantôme.

## 8.2 Résultats

Nous appliquons les méthodes vues en section 8.1 aux résultats obtenus au chapitre 7 pour les trois fantômes. Avec les données obtenues pour le fantôme homogène, nous

évaluons le comportement statistique des trois estimateurs lorsque le nombre d'évènements est faible. Puis, nous déterminons parmi les fenêtres de sélection de l'énergie totale, celle qui est la mieux adaptée à la détection de la fin du parcours  $\gamma$ -prompt reconstruit. Nous étudions ensuite l'influence que l'ajout des inserts dans le fantôme a sur l'estimation des décalages. Enfin, nous observons l'impact de l'atténuation dans le fantôme de patient sur ce même décalage.

### 8.2.1 Fantôme homogène

La configuration de simulation utilisée ci-après est la même que celle de la section 7.1. Un fantôme d'eau est irradié par un faisceau de protons de 120 MeV. Dans une simulation distincte, l'énergie du faisceau est augmentée à 123 MeV ce qui produit un décalage en profondeur du pic de Bragg de 5 mm. Le même décalage est obtenu ensuite en passant de 123 à 126 MeV. À 120 MeV, le pic de Bragg simulé est situé à  $x=6$  mm, ce qui correspond à un parcours de 106 mm du faisceau dans le fantôme. Comme prévu, le parcours  $\gamma$ -prompt est plus court et mesure 100 mm.

### Comparaison des trois méthodes

Nous avons réalisé des mesures de fin de parcours à partir des profils reconstruits sur 100 échantillons de  $10^4$  évènements chacun pour chacune des trois énergies de faisceau. Pour chaque échantillon nous avons calculé le parcours  $\gamma$ -prompt reconstruit, sans aucune sélection en énergie, avec les méthodes décrites en section 8.1. Pour la première méthode, nous choisissons  $p_{min} = 45\%$  et  $p_{max} = 70\%$ . Nous calculons les moyennes ainsi que les valeurs minimum et maximum pour chaque énergie. Les résultats sont affichés sur la figure 8.4. Les valeurs moyennes sont représentés par les losanges sur les segments de ligne. Les extrémités des segments correspondent aux valeurs minimale et maximale. La ligne rouge représente le parcours  $\gamma$ -prompt théorique défini comme l'abscisse du point correspondant à 80% de la valeur maximum du profil  $\gamma$ -prompt simulé.

Pour chacune des trois énergies, la méthode 1 (MAX) basée sur le maximum du profil  $\gamma$ -prompt reconstruit semble la plus stable et permet d'obtenir des valeurs de parcours proches de la valeur théorique. L'erreur sur le parcours pour chaque énergie est inférieure à 2 mm en moyenne (voir tableau 8.1). La méthode 2 (DWD) qui utilise les coefficients de la décomposition en ondelettes, est moins stable et sa variance est très grande : l'écart entre les valeurs extrêmes est très important et l'erreur moyenne varie entre 0 et 5 mm. Enfin la dernière méthode (DWA) semble stable également et la variance est faible, mais on constate un biais négatif systématique et l'erreur moyenne est importante et proche de 10 mm. Connaissant ce biais systématique, il serait possible de le corriger et ainsi réduire l'erreur moyenne.

Nous avons également testé la capacité de ces méthodes à détecter les erreurs de traitement. Comme nous l'avons vu précédemment, un décalage de 5 mm est produit en augmentant l'énergie du faisceau de 120 à 123 MeV et de 123 à 126 MeV. Nous avons calculé la

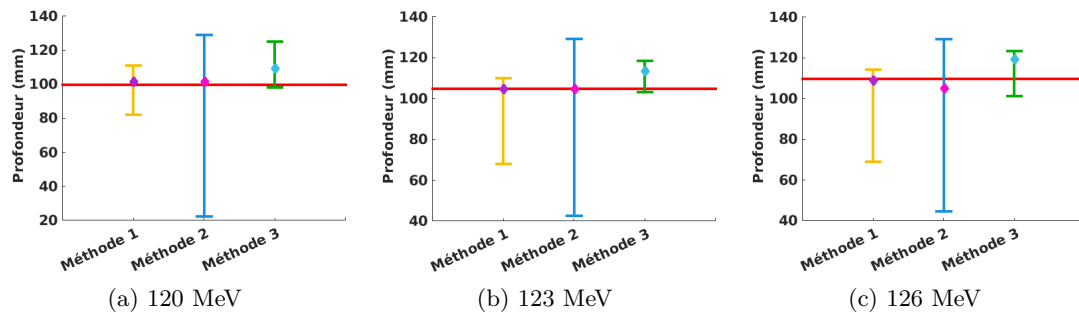


FIGURE 8.4 – Parcours  $\gamma$ -prompt mesuré sur 100 échantillons ( $10^4$  évènements chacun et 15 itérations), avec les trois méthodes. La méthode 1 correspond à la méthode basée sur le maximum, la méthode 2 correspond à la méthode DWD et la dernière est la méthode DWA. Les losanges représentent les moyennes sur les 100 échantillons et les lignes relient les valeurs maximum et minimum.

Énergie du faisceau	120 MeV			123 MeV			126 MeV		
Parcours $\gamma$ -prompt (mm)	100			105			110		
Méthode	MAX	DWD	DWA	MAX	DWD	DWA	MAX	DWD	DWA
Erreur moyenne (mm)	-1.9	-2.1	-9.7	0.1	0	-8.8	0.7	4.9	-9.5

TABLE 8.1 – Erreur moyenne sur le parcours  $\gamma$ -prompt estimé pour les 100 échantillons, en millimètres, pour le fantôme homogène.

différence entre les moyennes sur les 100 échantillons observées pour des énergies consécutives. Ces différences sont reportées dans le tableau 8.2 pour chaque méthode. Le décalage est globalement sous-estimé avec la méthode MAX mais présente une erreur inférieure à 2 mm. Ces résultats confirment l'instabilité de la méthode DWD (erreur pouvant aller jusqu'à 5 mm) alors que la méthode DWA permet de calculer le décalage avec moins de 1 mm d'erreur (voir tableau 8.2).

Augmentation de l'énergie du faisceau	de 120 à 123 MeV			de 123 à 126 MeV		
Décalage $\gamma$ -prompt de référence (mm)	5			5		
Méthode	MAX	DWD	DWA	MAX	DWD	DWA
Décalage estimé (mm)	3.1	3	4.2	4.4	0.2	5.7

TABLE 8.2 – Différences entre les moyennes pour les trois énergies de faisceau avec chacune des trois méthodes.

Nous utilisons la méthode 1 basée sur le maximum pour la suite du travail.

### Détermination de la gamme d'énergie la plus favorable à la détection de la fin du parcours

On reconstruit des images contenant soit tous les évènements disponibles, soit les évènements appartenant aux trois fenêtres d'énergies définies en section 7.1.3 :  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV,  $R_2 = [4, 4.5]$  MeV et  $R_3 = [5, 5.5]$  MeV.

Pour les trois énergies de faisceau de proton, on affiche les superpositions des profils de



référence et des profils reconstruits en figure 8.5. Près du pic de Bragg, la pente des profils reconstruits est assez lisse. Notons que sélectionner les évènements dont l'énergie totale est proche de l'énergie initiale des photons permet d'obtenir des profils dont la décroissance est plus rapide (cf. figure 7.4). Pour toutes les énergies du faisceau de protons, le profil reconstruit avec toutes les énergies est plus proche du profil  $R_1$ , de même que les courbes  $R_2$  et  $R_3$  sont très similaires.

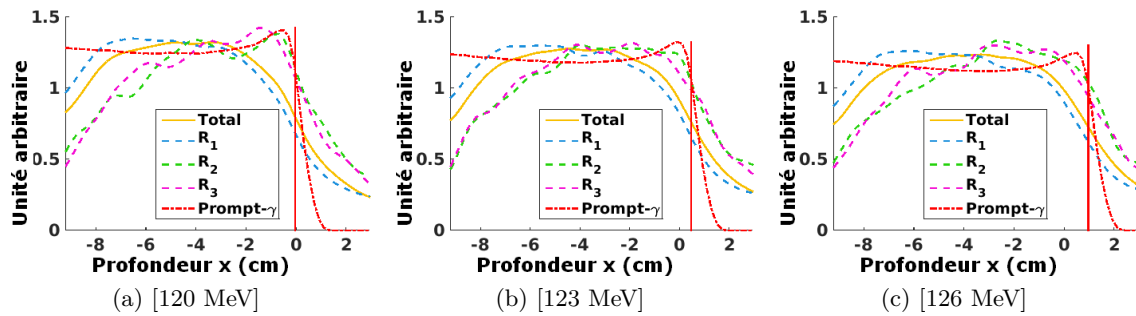


FIGURE 8.5 – Superposition des profils  $\gamma$ -prompt et reconstruits obtenus à partir de projections de la coupe centrale sur 1 cm autour de la droite  $y = 0$  cm. La ligne verticale rouge représente la fin du parcours  $\gamma$ -prompt.

La figure 8.5 montre que le critère 80% utilisé pour calculer la position du pic de Bragg ne peut pas être appliqué aux profils reconstruits. Pour estimer le parcours  $\gamma$ -prompt à partir des courbes de la figure 8.5, nous appliquons la méthode MAX. Afin de prendre en compte la variabilité entre les profils, on choisit des pourcentages compris dans les intervalles [40%,65%] pour les profils total et  $R_1$ , et [75%,80%] pour les profils  $R_2$  et  $R_3$ . Les erreurs entre les valeurs simulées et calculées sont indiquées dans le tableau 8.3.

Énergie du faisceau	120 MeV				123 MeV				126 MeV			
Parcours $\gamma$ -prompt (mm)	100				105				110			
Sélection en énergie	Sans	$R_1$	$R_2$	$R_3$	Sans	$R_1$	$R_2$	$R_3$	Sans	$R_1$	$R_2$	$R_3$
Erreur (mm)	-3.1	0.8	-1.4	0.7	-3	1	-0.6	1.6	-2.8	1.9	-0.1	2.3

TABLE 8.3 – Erreur sur le parcours  $\gamma$ -prompt estimé, en millimètres, pour le fantôme homogène.

Les résultats du tableau 8.3 sont globalement meilleurs avec la sélection en énergie : on observe moins de 2.5 mm de différence entre le parcours  $\gamma$ -prompt et le parcours reconstruit alors qu'on obtient 3 mm de différence en moyenne pour la distribution totale. Cela montre que les intervalles choisis pour les pourcentages ne conviennent pas de la même façon pour tous les types de sélection, et on observe un biais systématique dans tous les cas.

Les trois énergies de faisceau que nous avons choisies assurent des décalages de 5 mm de la position du pic de Bragg. Les décalages observés entre les profils  $\gamma$ -prompt reconstruits sont comparés aux valeurs théoriques dans le tableau 8.4. Notons que le biais systématique observé ci-dessus est éliminé dans la soustraction.

Les données issues du fantôme homogène ont permis d'évaluer les estimateurs proposés.

Augmentation de l'énergie du faisceau	de 120 à 123 MeV				de 123 à 126 MeV			
Décalage $\gamma$ -prompt de référence (mm)	5				5			
Sélection en énergie	Sans	$R_1$	$R_2$	$R_3$	Sans	$R_1$	$R_2$	$R_3$
Décalage estimé (mm)	5.2	4.9	4.3	4.2	4.9	4.3	4.5	4.4

TABLE 8.4 – Décalages mesurés à partir des profils reconstruits pour différentes énergies de faisceau.

Un lissage des profils est bénéfique : ce lissage se fait pour la méthode MAX en calculant la moyenne sur un intervalle de pourcentages, et pour la méthode DWA en descendant de quelques échelles dans la décomposition en ondelettes. On observe généralement un biais dans l'estimation de la fin du parcours  $\gamma$ -prompt reconstruit mais les décalages sont calculés avec moins de 2 mm d'erreur même avec un nombre d'évènements relativement faible. L'étude sur les gammes d'énergies montre que les profils reconstruits pour les hautes énergies se rapprochent davantage du profil théorique dans la zone du pic de Bragg que le profils total et celui pour la basse énergie, mais produisent une variabilité plus importante dans l'estimation de la fin du parcours.

## 8.2.2 Fantôme multi-matériaux

Cette section fait suite aux résultats obtenus en 7.2 où nous avons montré des images reconstruites avec l'algorithme LM-LEM obtenues par acquisition des photons  $\gamma$ -prompt issus de l'irradiation d'un fantôme d'eau avec des inserts d'air et/ou d'os, par un faisceau de protons.

On considère les images reconstruites avec tous les évènements, ainsi que les images reconstruites avec les évènements dont l'énergie totale appartient à la fenêtre d'énergie  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV. Afin de calculer les parcours  $\gamma$ -prompt reconstruits, nous utilisons la méthode MAX et nous choisissons des pourcentages compris dans l'intervalle  $[40\%, 65\%]$  quelque soit le profil.

Dans le tableau 8.5 ci-après, nous rapportons les parcours calculés pour la distribution  $\gamma$ -prompt théorique ainsi que l'erreur sur son estimation. Selon l'insert ajouté, le parcours théorique n'est pas le même. On observe près de 9 mm de différence entre les parcours des  $\gamma$ -prompt dans le fantôme avec un insert d'air ou avec un insert d'os. De plus, le parcours dans le fantôme contenant l'insert d'air et dans le fantôme avec l'insert d'os est respectivement plus grand de 3 mm et plus petit de 5.9 mm que celui sans insert (voir tableau 8.3). En effet, le pouvoir d'arrêt de l'air étant inférieur à celui de l'eau, le parcours des protons, donc des  $\gamma$ -prompt, est décalé. A contrario, lorsque le faisceau traverse l'insert d'os, le parcours est raccourci, car le pouvoir d'arrêt de l'os est plus important. Ainsi, lorsque les deux inserts sont présents dans le fantôme, ces deux effets se compensent et on obtient les mêmes parcours  $\gamma$ -prompt que dans le tableau 8.3 à 0.2 mm près.

On observe un biais négatif systématique sur les erreurs entre les parcours théorique et celui reconstruit avec tous les évènements. Les parcours calculés à partir des profils avec

sélection en énergie sont obtenus avec moins de 3 mm d'erreur.

Insert dans le fantôme	Air		Os		Air os		Os air	
Parcours $\gamma$ -prompt (mm)	103		94.1		100.2		100.2	
Sélection en énergie	Sans	$R_1$	Sans	$R_1$	Non	$R_1$	Sans	$R_1$
Erreur (mm)	-8.1	-1.5	-5.8	1.9	-4.3	3	-5.6	0.4

TABLE 8.5 – Erreur sur le parcours  $\gamma$ -prompt estimé en millimètres, pour les fantômes multi-matériaux.

Nous avons répété la simulation pour les deux autres énergies de faisceau, 123 MeV et 126 MeV. Nous avons ensuite calculé les différences entre les parcours estimés pour les quatre fantômes. Les résultats sont affichés sur la figure 8.6. La figure 8.6a, obtenue pour le passage de 120 MeV à 123 MeV, montre que la sélection en énergie dans l'intervalle  $R_1$  améliore légèrement l'estimation du décalage produit par l'augmentation de l'énergie du faisceau. La précision, inférieure à 2 mm dans le cas sans sélection, descend en dessous de 1 mm dans le cas  $R_1$ . Cependant, les résultats montrés dans la figure 8.6b, concernant le passage de 123 MeV à 126 MeV, sont plus mitigés. La précision sur l'approximation du décalage est moindre. L'erreur sur l'estimation du décalage présente donc une variabilité statistique qui pourrait être supérieure au millimètre.

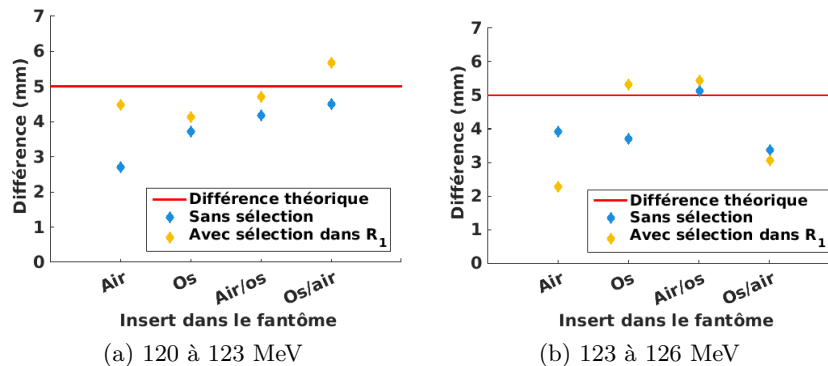


FIGURE 8.6 – Décalage estimé pour les trois énergies de faisceau selon l'insert ajouté dans le fantôme.

### 8.2.3 Fantôme de patient

Cette section présente la suite des résultats obtenus en section 7.3 pour un fantôme de patient. Nous avons considéré deux cas de figure : soit l'atténuation est prise en compte, soit elle est ignorée. Si elle est ignorée, nous avons le même cas de figure que dans les sections 8.2.1 et 8.2.2. Quand l'atténuation est prise en compte, tous les photons sont simulés, et non pas uniquement les  $\gamma$ -prompt.

Dans le tableau ci-après 8.6, sont affichées les erreurs entre la fin du parcours  $\gamma$ -prompt théorique et du parcours reconstruit, cette dernière calculée avec la méthode MAX. Pour

palier aux variabilités dues aux hétérogénéités du patient, ici nous avons choisi des pourcentages dans l'intervalle [40%,70%] .

Énergie du faisceau	120 MeV				123 MeV			
Parcours $\gamma$ -prompt (mm)	111.9				117.4			
Atténuation	Non		Oui		Non		Oui	
Sélection en énergie	Sans	$R_1$	Sans	$R_1$	Non	$R_1$	Sans	$R_1$
Erreur (mm)	-5.4	2.2	-16.2	-4.9	-3.6	3.3	-15.3	-5.2

TABLE 8.6 – Erreur sur le parcours  $\gamma$ -prompt estimé, en millimètres, pour le fantôme de patient.

Selon que l'atténuation soit prise en compte ou pas, les résultats sont meilleurs pour les reconstructions effectuées avec sélection sur l'énergie totale dans  $R_1$ . Par exemple, avec la configuration sans atténuation, si la sélection n'est pas opérée, on obtient 5.4 mm d'erreur entre le parcours théorique et le parcours reconstruit alors que cette erreur est réduite à environ 2 mm lorsque les événements sont sélectionnés dans la fenêtre d'énergie  $R_1$ . L'atténuation a tendance à dégrader les parcours  $\gamma$ -prompt obtenus à partir des profils reconstruits, mais cet effet peut être corrigé grâce à la sélection en énergie. Ainsi, au lieu d'avoir 16 mm d'erreur, la sélection sur l'énergie permet d'améliorer le résultat à 4.9 mm d'erreur.

Enfin, nous avons calculé les différences entre les parcours estimés dans le fantôme entre un faisceau de 120 MeV et un faisceau de 123 MeV, selon les configurations vues précédemment (atténuation, sélection sur l'énergie). Augmenter l'énergie du faisceau de 120 MeV à 123 MeV permet d'obtenir un décalage de 5.5 mm sur la fin du parcours  $\gamma$ -prompt. Les résultats sont affichés dans le tableau 8.7.

Augmentation de l'énergie du faisceau	de 120 à 123 MeV			
Décalage position pic de Bragg (mm)	4.2			
Décalage $\gamma$ -prompt de référence (mm)	5.5			
Atténuation	Non		Oui	
Sélection en énergie	Sans	$R_1$	Sans	$R_1$
Décalage estimé (mm)	3.8	4.5	4.7	5.9

TABLE 8.7 – Erreur sur le parcours  $\gamma$ -prompt estimé, en millimètre.

Nous constatons que la sélection sur l'énergie permet de mieux se rapprocher de la valeur théorique de 5.5 mm de décalage. L'effet de l'atténuation est moins prononcé sur ces résultats, si on compare les décalages estimés avec les décalages  $\gamma$ -prompt de référence : l'atténuation influe essentiellement sur l'estimation du parcours  $\gamma$ -prompt. Cependant, la sélection sur l'énergie est moins favorable lorsqu'on veut estimer directement un décalage dans le dépôt de dose, qui est de 4.2 mm dans cet exemple.

### 8.3 Discussions et conclusions

Nous avons proposé trois méthodes pour le calcul de la fin du parcours  $\gamma$ -prompt. Nous avons comparé ces méthodes avec une étude statistique réalisée sur un fantôme homogène composé d'eau. Nous avons utilisé la méthode basée sur le maximum pour calculer les parcours pour trois types de fantômes (homogène, multi-matériaux, patient).

Nous avons sélectionné plusieurs fenêtres en énergie semblant pertinentes pour l'approximation du pic de Bragg et la fenêtre  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV permet d'obtenir les meilleurs résultats. Cependant, dans un cas réaliste, cette fenêtre serait plus affectée par les neutrons.

En clinique, il faut accorder de l'importance à la capacité du détecteur à mesurer correctement l'énergie initiale des photons. Comme il a été montré dans la section 6.2.3 et dans [Frandes *et al.* (2010)], des absorbeurs épais entourant le bloc de diffuseurs peuvent être un bon moyen d'améliorer la détection.

Les écarts avec le plan de traitement découlent également de changements de composition de volume dus au mauvais positionnement du patient, à l'évolution anatomique ou à la mauvaise estimation du pouvoir d'arrêt des tissus. Du fait de la dépendance du spectre d'énergie aux tissus, la précision de l'estimation de la distribution spatio-énergétique est un problème important pour le contrôle de qualité en protonthérapie.

Pour le fantôme homogène que nous avons étudié, nous n'avons pas observé une influence significative de la sélection en énergie sur les décalages estimés. Les résultats du tableau 8.4 montrent que les décalages théoriques sont bien évalués quelque soit la configuration. L'étude statistique réalisée met en avant la méthode basée sur le maximum qui permet d'estimer le parcours  $\gamma$ -prompt et les décalages entre deux énergies avec une précision inférieure à 2 mm.

Pour le fantôme multi-matériaux étudié, la sélection en énergie dans la fenêtre  $R_1$  améliore sensiblement l'estimation du parcours  $\gamma$ -prompt avec une précision inférieure à 3 mm. Cette étude nous montre que les hétérogénéités dans le fantôme font varier le parcours  $\gamma$ -prompt mais les décalages peuvent également être estimés avec une précision de moins de 3 mm.

Nous avons étudié l'influence de l'atténuation sur les résultats obtenus avec le fantôme de patient. L'atténuation a un effet non négligeable et l'estimation du parcours  $\gamma$ -prompt théorique est moins précise. Il est néanmoins possible de corriger cet effet grâce à la sélection sur l'énergie, qui a été réalisée dans la fenêtre d'énergie  $R_1$  comme pour les autres fantômes. Les décalages sont globalement bien estimés avec une précision inférieure à 2 mm.

---

# Conclusions

---

L'objectif de ces travaux de thèse était d'étudier l'utilisation potentielle de la caméra Compton afin de vérifier les traitements par hadronthérapie. En particulier, nous nous sommes concentrés sur la protonthérapie et sur un prototype de caméra Compton spécifique. Nous avons proposé un processus complet allant de la simulation de l'irradiation d'un fantôme, en passant par la simulation des photons dans la caméra Compton, jusqu'à la reconstruction des images. Puis, nous avons développé des méthodes pour déterminer la position de la fin du parcours reconstruit. Nous résumons ci-après nos principales contributions et nous proposons quelques perspectives.

### 9.1 Principales contributions

La distribution de l'émission gamma-prompt lors de l'irradiation en protonthérapie est étroitement liée à la dose déposée. Le but de ce travail était double. D'une part, nous avons étudié la capacité d'une caméra Compton spécifique et d'un algorithme de reconstruction à fournir une image de la distribution de l'émission des  $\gamma$ -prompt avec et sans sélection sur l'énergie totale déposée dans la caméra. D'autre part, nous avons proposé une méthode pour l'estimation du parcours  $\gamma$ -prompt et nous avons montré qu'il est possible de détecter des décalages avec une erreur millimétrique.

Bien que nous ayons étudié différentes méthodes de reconstruction analytiques existantes pour la caméra Compton, celles-ci n'ont pas été retenues pour la suite du travail. En revanche, l'algorithme MLEM proposé est relativement robuste, si on se réfère aux images reconstruites de sources simples. Malgré le fait qu'on observe des artéfacts dus aux projections tronquées du fait que la caméra soit de taille finie, ceux-ci importent peu pour

ce travail. Cependant, l'algorithme nécessite d'être encore amélioré du point de vue des temps de calcul.

Par rapport à des travaux déjà publiés (par exemple [Verburg *et al.* (2013)]) nous avons montré ici la distribution 3D des  $\gamma$ -prompt par gamme d'énergie, pour différents types de fantômes. L'avantage de la caméra Compton par rapport à la caméra collimatée est sa capacité à acquérir des images 3D de ces distributions. L'algorithme de reconstruction avec prise en compte des incertitudes que nous avons proposé, nous a permis de reconstruire ces images en 3D. Cependant, pour estimer la fin du parcours  $\gamma$ -prompt nous nous ramenons à des profils 1D.

La répartition spatiale des photons varie avec l'énergie et les performances de la caméra Compton sont meilleures pour la fenêtre d'énergie [0.5,2.5] MeV. Ainsi, l'influence de l'énergie des photons sur les images reconstruites est très importante. L'énergie initiale des  $\gamma$ -prompt ne pouvant pas être retrouvée, nous devons tenir compte du bruit provenant des absorptions incomplètes.

Des méthodes de calcul de la fin du parcours  $\gamma$ -prompt ont été proposées auparavant pour des profils 1D et pour les caméras collimatées. Nous avons présenté d'autres méthodes afin d'estimer cette fin de parcours  $\gamma$ -prompt à partir des profils 1D obtenus depuis les images reconstruites. Nous avons observé moins de 3 mm décalage entre les profondeurs des profils reconstruits et simulés, et cela pour différents types de fantômes. Nous avons induit des décalages sur la fin du parcours en réglant l'énergie du faisceau. Des variations théoriques de 5 mm dans le parcours du faisceau ont été estimées avec une erreur inférieure à 2 mm.

Les écarts avec le plan de traitement découlent également de changements dans la composition de volume en raison de mauvais placement du patient, de l'évolution anatomique ou d'une mauvaise estimation de la puissance de freinage des tissus. Comme le spectre d'émission dépend de la composition des tissus, l'estimation précise de la distribution spatiale et énergétique commune est un problème important en vérification de traitement par protonthérapie.

La simulation de l'irradiation d'un fantôme de patient suivie de l'acquisition des  $\gamma$ -prompt par une caméra Compton n'a encore jamais été publiée à notre connaissance. La mise en place de cette simulation a nécessité d'exploiter les atouts de deux logiciels et de trouver le moyen de traduire les données de sortie de l'un en données d'entrée de l'autre, afin qu'ils se complètent.

## 9.2 Perspectives

Toutes les sources de bruit typique en imagerie  $\gamma$ -prompt n'ont pas été prises en compte dans ce travail. L'atténuation dans le volume n'a été prise en compte qu'avec le fantôme de patient, parce que dans le contexte décrit, elle n'a eu aucune influence significative sur les images obtenues à partir de simulations de fantômes homogène ou bi-matériaux. Il pourrait être intéressant d'utiliser des méthodes de correction d'atténuation comme en

imagerie TEP par exemple, dans les cas où celle-ci devient non-négligeable. La composition du volume devrait également être prise en compte dans l'algorithme de reconstruction du fait de la dépendance du spectre énergétique aux hétérogénéités du volume. Le bruit provenant de neutrons a été ignoré ici, mais il a été quantifiée comme très important à basse énergie dans la littérature. Par conséquent, la fenêtre d'énergie  $R_1 = [0.5, 2.5]$  MeV, qui serait bénéfique pour la caméra Compton considérée, pourrait être discriminée contre les neutrons. L'exploitation des photons de haute énergie pourrait être une solution mais nécessite d'améliorer l'efficacité de détection par rapport à la configuration que nous avons utilisée.

Les temps de calculs ont également été un problème non négligeable dans ce travail. D'une part, bien que Gate soit plus adapté que MEGALib pour les simulations du fantôme, la durée des simulations nécessaires à obtenir une statistique correcte est très longue. D'autre part, l'algorithme itératif est défavorisé par rapport à l'analytique en termes de temps de calculs. Il est nécessaire de pouvoir fournir une information en temps réel pour le contrôle de traitement par hadronthérapie, et dans l'état actuel de l'algorithme, ce n'est pas possible. On pourrait envisager de l'améliorer en passant à une méthode OSEM par exemple, ou en l'implémentant en GPU.





# Annexes



---

## Ondelettes

---

### A.1 Introduction

La théorie des ondelettes est utilisée dans de nombreux domaines notamment en traitement du signal et de l'image. La transformée de Fourier permet certes de décomposer et de reconstruire un signal sans perte d'information, mais elle ne permet pas de conserver des informations sur la localisation temporelle (ou spatiale pour les images). Au contraire, la décomposition en ondelettes est similaire à la décomposition de Fourier mais peut rendre compte du temps et de la fréquence simultanément et ainsi de localiser temporellement des petits changements abrupts.

#### A.1.1 De Fourier aux ondelettes

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  peut être représentée temporellement en la décomposant sur une base de distributions de Dirac :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t - u)du \quad (\text{A.1})$$

L'analyse de Fourier consiste à représenter cette fonction en fréquences sur une base de fonctions sinusoidales :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\omega)e^{2i\pi\omega t}d\omega \quad (\text{A.2})$$

ou encore :

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\omega t} dt \quad (\text{A.3})$$

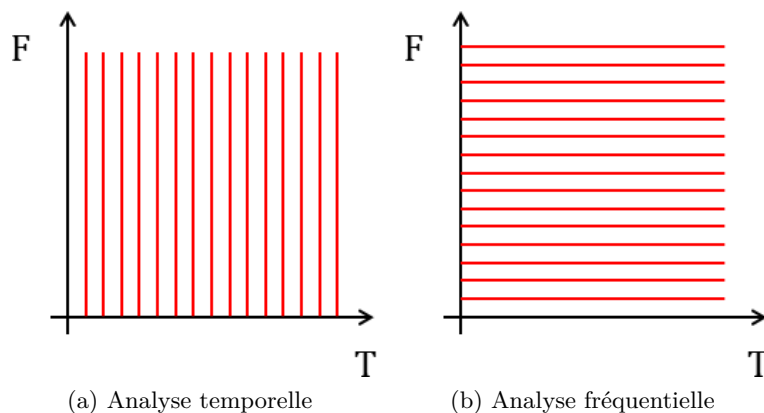


FIGURE A.1 – Différence entre l'analyse temporelle et fréquentielle.

D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg [Heisenberg (1927)], il est impossible de localiser précisément un signal en temps et en fréquence. Cela signifie que la résolution temporelle et la résolution fréquentielle ne peuvent pas être simultanément aussi petites qu'on le souhaiterait. La représentation temporelle permet d'avoir une résolution en temps infinie mais pas de résolution en fréquence. À l'inverse, l'analyse en fréquence ne donne aucune information sur la résolution temporelle, c'est-à-dire la localisation des fréquences. La transformée de Fourier est bien adaptée à l'étude des signaux stationnaires mais tous les aspects temporels (début, fin, existence de singularités, etc) se perdent. D'où la nécessité de pouvoir analyser le signal à la fois en temps et en fréquence pour de nombreuses applications.

La solution proposée a été la transformée de Fourier à fenêtre glissante (TFF). L'idée est de se ramener à l'étude d'un signal stationnaire temporel dans une fenêtre suffisamment petite. On multiplie le signal  $f(t)$  par une fenêtre glissante  $h(t - b)$  et on calcule la transformée de Fourier de ce produit :

$$g(\omega, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h(t - b)e^{-2i\pi\omega t} dt, \quad (\text{A.4})$$

$g(\omega, b)$  permet de savoir ce qui se passe autour de l'abscisse  $b$  et à la fréquence  $\omega$ . La fonction  $h(t)$  définit la fenêtre et est par conséquent nulle en dehors d'un intervalle donné  $] - a, a[$ .

Le problème de la TFF est que la largeur de la fenêtre est fixe. La largeur de la fenêtre dépendant du contenu du signal, elle est a priori difficile à connaître. Si la fenêtre est trop grande, on risque d'analyser un signal non stationnaire, et donc de perdre en résolution temporelle. Si la fenêtre est trop petite, on risque de perdre en résolution fréquentielle car

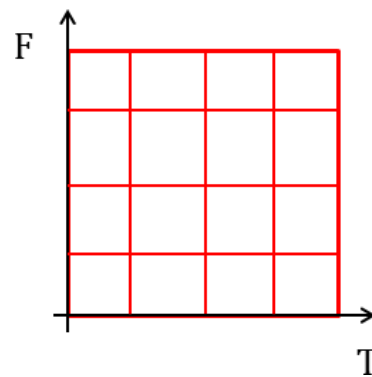


FIGURE A.2 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante.

les différentes composantes seraient moins bien séparées.

### A.1.2 Historique des ondelettes

La première référence à l'ondelette remonte au début du XXe siècle, avec les travaux d'Alfred Haar. Ses recherches sur les systèmes orthogonaux de fonctions a conduit à l'élaboration d'un ensemble de fonctions de base rectangulaires [Haar (1910)]. Plus tard, une famille d'ondelettes, les ondelettes de Haar, a été nommée sur la base de cet ensemble de fonctions, et c'est actuellement la famille d'ondelettes la plus simple jamais développée. Plusieurs individus ont contribué entre les années 1930 et 1970 à faire avancer la recherche sur les ondelettes [Littlewood and Paley (1931), Ricker (1953)], mais le progrès majeur dans le domaine a été attribué à Jean Morlet qui a développé et mis en oeuvre la technique de mise à l'échelle et de déplacement des fonctions de fenêtre d'analyse dans l'étude des échos acoustiques alors qu'il travaillait pour une compagnie pétrolière dans les années 1970.

Après les travaux de Morlet, de nombreux chercheurs ont permis de développer la théorie de la transformée en ondelettes. Les travaux de Yves Meyer en 1985 ont conduit à l'apparition de la notion de base orthogonale, puis à l'invention de l'analyse multirésolution par Stéphane Mallat [Mallat (1989)b, Mallat (1989)a, Mallat (1989)c]. La clé de l'analyse multirésolution est de concevoir la fonction de mise à l'échelle de l'ondelette. Elle a permis à d'autres chercheurs de construire leurs propres base d'ondelettes. Par exemple, Ingrid Daubechies a créé sa propre famille de ondelettes sur la base de la notion de multirésolution [Daubechies *et al.* (1988)].

## A.2 Transformée en ondelettes 1D

### A.2.1 Transformée en ondelettes continue

#### Définition

On considère  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré intégrable. La transformée en ondelettes continue de la fonction  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est définie ainsi :

$$g(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (\text{A.5})$$

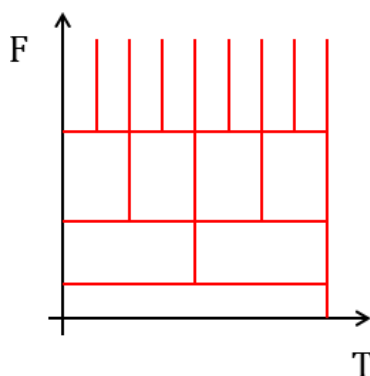


FIGURE A.3 – Transformée en ondelettes.

Les  $g(a, b)$  sont les coefficients d'ondelette. La fonction  $\psi_{a,b}(t)$  est obtenue par translation et dilatation d'une fonction particulière appelée ondelette mère :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi \left( \frac{t-b}{a} \right), a \neq 0 \quad (\text{A.6})$$

Dans l'équation A.6,  $b$  détermine la position et  $a$  détermine l'échelle. En 1D,  $a$  est l'inverse de la fréquence et  $b$  représente le temps.

Une fonction  $\Psi(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est une ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (\text{A.7})$$

où  $\widehat{\Psi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\Psi$ .

Par conséquent, la fonction  $\Psi$  a un support borné, doit être oscillante, d'intégrale nulle et de carré intégrable.

Il existe de nombreuses ondelettes mères  $\Psi$  et elles peuvent avoir des valeurs complexes (exemple : ondelette de Morlet).

La différence avec la TFF est que l'ondelette n'a pas une taille de fenêtre fixe, la fenêtre peut être dilatée ou contractée. Les  $\psi_{a,b(a,b) \in \mathbb{R}^2}$  n'ont ni le même support temporel, ni fréquentiel. La transformée en ondelettes est donc multi-résolution. Les composantes fréquentielles sont analysées à une résolution adaptée à l'échelle :

- À basse fréquence ( $a$  grand), la résolution temporelle est faible, mais la résolution fréquentielle est bonne,
- À l'inverse, quand  $a$  est faible, la résolution temporelle est bonne mais la résolution fréquentielle est plus faible.

### Inversion

La fonction  $f(t)$  peut être reconstruite à partir de  $g(a, b)$  selon la formule :

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{a=-\infty}^{a=\infty} \int_{b=-\infty}^{b=\infty} \frac{g(a, b)}{a^2} \psi_{a,b}(t) da db \quad (\text{A.8})$$

La reconstruction est possible dans ce cas particulier mais la convergence est relativement lente. Il faut noter cependant qu'elle n'est pas triviale dans les cas redondants. À ce moment là, il suffit de connaître la fonction  $g(a, b)$  en un nombre dénombrable de valeurs pour reconstruire  $f(t)$ .

### A.2.2 Transformée en ondelettes discrète

Il est donc possible d'ajuster la transformée en ondelettes si où on se trouve dans un ensemble discret. La compression est alors réalisée en faisant plusieurs approximations successives du signal initial, du plus grossier au plus fin. On réduit la taille du signal en choisissant le niveau de détail. Les deux paramètres  $a$  et  $b$  sont échantillonnés, en particulier  $a$  est échantillonné sur une échelle dyadique :

$$\psi_{k,h}(t) = a_0^{-k/2} \Psi(a_0^{-k} t - hb_0), \quad (\text{A.9})$$

où  $a_0$  et  $b_0$  sont des constantes.

On définit ainsi la transformée en ondelettes discrètes

$$g_{k,h}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{k,h} \rangle \cdot \psi_{k,h}(t) \quad (\text{A.10})$$

Les supports des  $\psi_{k,h}(t)$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et sont disjoints, contigus pour un  $k$  donné. Chaque fonction de base  $\psi_{k,h}(t)$  est caractérisée par sa largeur (ou échelle)  $a_0^{-k/2}$  et sa position  $hb_0$ .

La fonction  $f(t)$  peut être reconstruite par :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} g(k, h) \psi_{k,h}(t) \quad (\text{A.11})$$



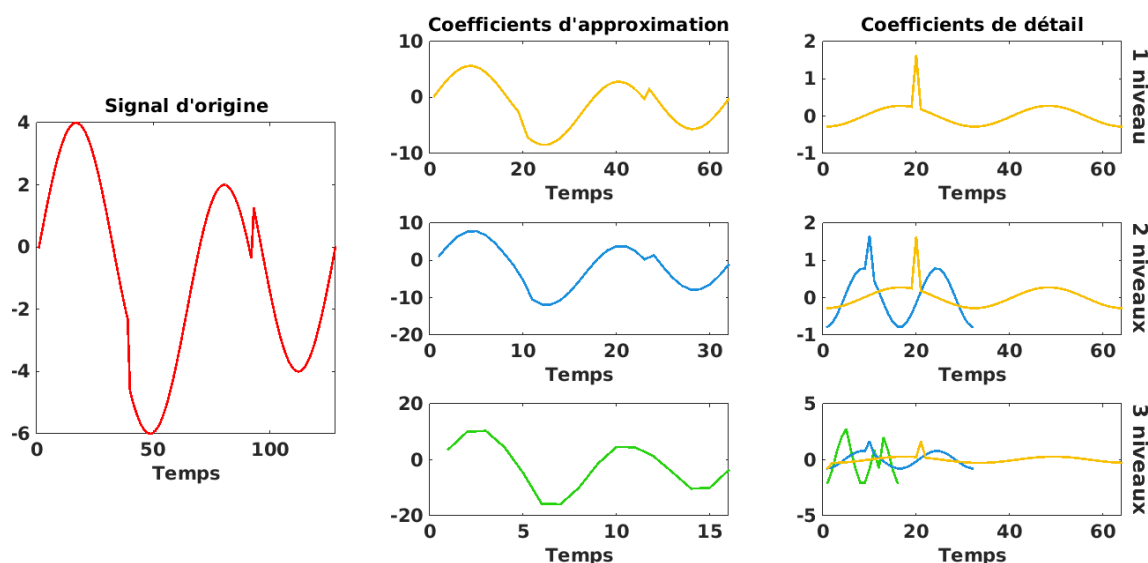


FIGURE A.4 – Exemple de décomposition en ondelettes d'un signal 1D. Trois niveaux de décomposition.

Exemple

### A.3 Transformée en ondelettes 2D

La transformée de Fourier 2D d'une fonction  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}^2$  est définie par :

$$F(\vec{k}) = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) e^{-2i\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \quad (\text{A.12})$$

Si  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ , la transformée de Fourier inverse de  $f$  s'écrit :

$$f(\vec{x}) = \int \int_{\mathbb{R}^2} F(\vec{k}) e^{2i\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} \quad (\text{A.13})$$

#### A.3.1 Transformée en ondelettes 2D continue

Une fonction  $\Psi(\vec{x}) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$  est une ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\Psi = \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{\Psi}(\vec{k})|^2}{\|\vec{k}\|^2} d\vec{k} < \infty, \quad (\text{A.14})$$

où  $\widehat{\Psi}(\vec{k})$  est la transformée de Fourier de  $\Psi$ .

Par conséquent, la fonction  $\Psi$  doit être d'intégrale nulle et de carré intégrable.

#### A.3.2 Transformée en ondelettes discrète et rapide

Dans le cas 2D, la transformée en ondelettes séparable (construite avec des produits tensoriels d'ondelettes 1D) est similaire au cas 1D car elle présente les mêmes propriétés. Cependant, une décomposition unique est réalisée par ligne, par colonne et par niveau, et

elle tient compte de la taille  $m \times n$  de l'image. L'image  $f(i, j)_{i=(1, \dots, m), j=(1, \dots, n)}$  est filtrée selon la direction  $x$  dans un premier temps. On obtient une image  $f_B$  "passe-bas" et une image  $f_H$  "passe-haut". La largeur de bande de  $f_B$  et  $f_H$  étant désormais la moitié de celle de  $f$ , les deux images filtrées peuvent être échantillonnées par un facteur 2 sans perte d'information. Ce sous-échantillonnage est effectué en ignorant un coefficient d'ondelette sur deux dans une image filtrée.

Ensuite, les images  $f_H$  et  $f_B$  sont également filtrées dans la direction  $y$  cette fois-ci. On obtient alors quatre sous-images qui sont sous-échantillonnées une autre fois d'un facteur 2 selon l'axe  $y$  :  $f_{BB}$ ,  $f_{BH}$ ,  $f_{HB}$  et  $f_{HH}$ .

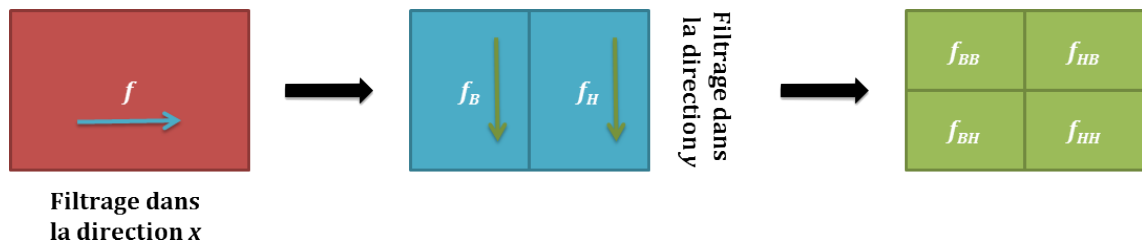


FIGURE A.5 – Décomposition en ondelettes 2D discrète d'une image  $f$ .

Au final, l'image  $f$  est décomposée en une approximation  $f_{BB}$  et trois détails :  $f_{BH}$  représente les caractéristiques horizontales de l'image d'origine,  $f_{HB}$  les caractéristiques verticales. Les images de détail  $f_{BH}$ ,  $f_{HB}$  et  $f_{HH}$  correspondent à des plages de fréquence qui incluent par exemple les contours.

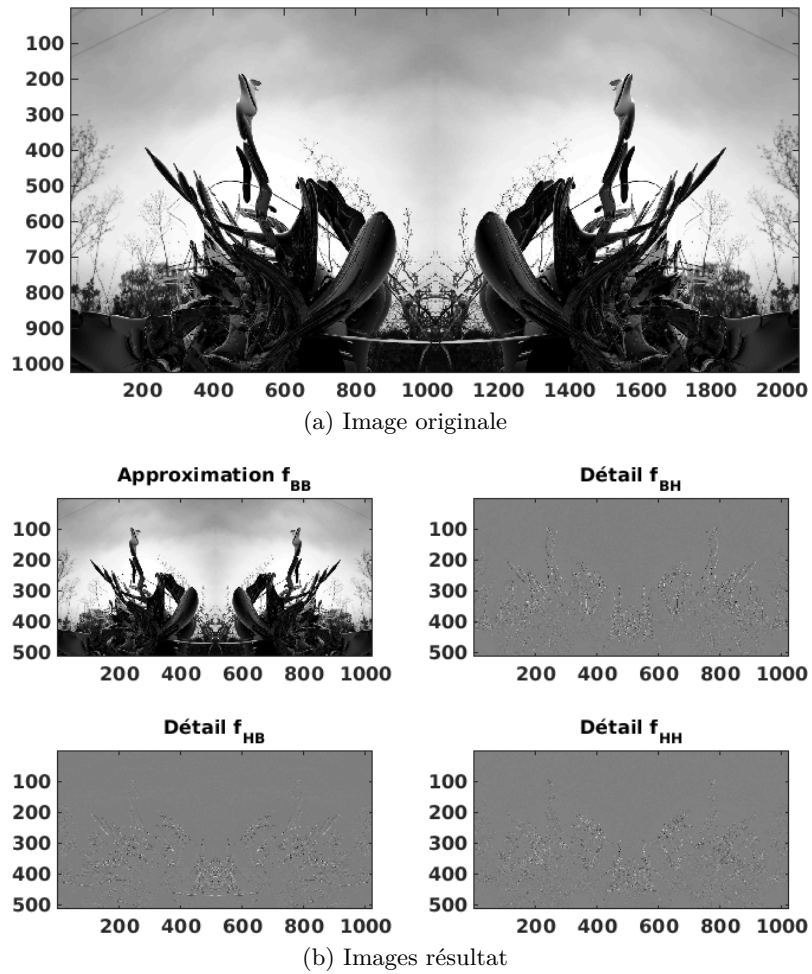


FIGURE A.6 – Exemple de décomposition en ondelettes d’une image sur 1 niveau.

---

# Tomographie à partir de projections tronquées

---

Dans le cadre des problèmes de troncature des projections présent en tomographie à partir de caméra Compton, nous avons abordé ce problème dans le cadre plus simple de la tomographie par rayons X. Nous avons alors étudié une approche consistant à combiner des projections haute résolution tronquées et des projections basse résolution non tronquées. Cette méthode a été appliquée à des données de micro-tomographie par rayonnement synchrotron, acquises en géométrie parallèle 3D.

## B.1 Introduction

L'European Synchrotron Radiation Facility (ou ESRF) de Grenoble est un grand instrument qui va permettre de disposer d'une source synchrotron puissante dite de 3<sup>ème</sup> génération. Celle-ci est générée à partir de l'accélération de faisceaux d'électrons à très haute vitesse mis en rotation dans un anneau de stockage.

La lumière synchrotron possède des caractéristiques exceptionnelles par comparaison aux sources de lumière classiques disponibles en laboratoire : son spectre d'émission s'étend de l'infrarouge aux rayons X avec une brillance (petite taille, intensité) exceptionnelle, le rayonnement est stable, pulsé, et avec une forte cohérence spatiale et temporelle. Il peut ainsi être comparé à un laser accordable sur une grande gamme de fréquences spectrales, depuis l'infrarouge lointain jusqu'aux rayons X durs pour les synchrotrons de 3<sup>ème</sup> génération.

Il permet, par ses propriétés, l'accès à de nombreuses expériences, mises en oeuvre

sur des "lignes de lumière", véritables laboratoires fonctionnant en parallèle à partir d'un même anneau de stockage :

- dans les rayons X : fluorescence (pour la détermination de la composition élémentaire), absorption (par exemple pour l'étude de cinétiques chimiques), diffraction (par exemple pour la cristallographie de protéines), microtomographie, spectroscopie de photo-émission...
- dans l'ultraviolet et le VUV : spectroscopie, dichroïsme circulaire
- dans l'infrarouge : micro-spectrométrie à transformée de Fourier

Un synchrotron se compose principalement des éléments suivants :

- un petit accélérateur, l'injecteur, qui prépare les particules à faible énergie ;
- un anneau magnétique, maintenant les particules sur une trajectoire grossièrement circulaire (elle peut être interrompue par des sections rectilignes) ;
- des cavités accélératrices destinées à augmenter - ou maintenir - l'énergie des particules tournant tout autour de l'anneau ;
- tout un ensemble d'appareillages annexes : alimentation électrique des aimants de courbure et des cavités, systèmes à ultravide, sondes de contrôle de position et de forme du faisceau, systèmes d'injection et d'éjection, systèmes de refroidissement, etc.

Les particules sont maintenues dans un vide extrêmement poussé, tout autour de l'anneau, à l'intérieur d'un tube de forme torique. La caractéristique du synchrotron est que l'intensité du champ magnétique de l'anneau est maintenue adaptée de façon synchrone à l'énergie du faisceau de particules, afin de les maintenir sur une trajectoire fixe.

Un système de micro-tomographie (micro-CT) synchrotron a été mis en place sur la ligne ID19 de l'ESRF [Salomé *et al.* (1999), Weitkamp *et al.* (2010)]. Il utilise un rayonnement X monochromatique extrait du faisceau blanc arrivant sur la ligne de lumière. Il est basé sur une géométrie d'acquisition 3D, en ce sens que des radiographies 2D sous différents angles de vues sont acquises après rotation de l'échantillon autour d'un axe vertical. Compte tenu de la longue distance entre la source et l'objet, le faisceau de rayons X peut être considéré comme parallèle. Le détecteur 2D est constitué d'un scintillateur, d'une optique et d'une caméra CCD rapide (caméra FRELON,  $2048 \times 2048$ , développée à l'ESRF). Différentes optiques peuvent être utilisées de manière à obtenir des tailles de pixels sur le détecteur variant d'environ  $30 \mu\text{m}$  à  $0.3 \mu\text{m}$ . Typiquement un scan revient à acquérir un ensemble de 1500 à 2000 projections sous  $180^\circ$  ou  $360^\circ$ . L'avantage de la micro-CT synchrotron par rapport à la micro-CT standard est de travailler en rayonnement monochromatique, ce qui évite les artéfacts de durcissement de faisceau, et d'avoir un faisceau à fort flux, ce qui permet d'avoir des images à fort rapport signal sur bruit, même à très haute résolution (résolution inférieure à  $1 \mu\text{m}$ ). Il est également possible d'avoir une géométrie parallèle 3D et ainsi d'obtenir une reconstruction exacte, contrairement aux systèmes à géométrie conique utilisés dans la plupart des systèmes de micro-CT commerciaux.

## B.2 Etat de l'art

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la reconstruction tomographique vise à reconstruire l'image d'un objet le plus fidèlement possible, à partir d'un ensemble complet de projections. Cependant dans de nombreuses applications, les projections sont tronquées, elles visent une partie de l'objet qui est la région d'intérêt. Cette troncature compromet la reconstruction quantitative de la région d'intérêt correspondante. En effet, ces projections tronquées contiennent non seulement l'information provenant de la région d'intérêt mais aussi de l'information provenant de l'extérieur. Cette information induit des artéfacts dans l'image reconstruite la rendant imprécise voire inutilisable. Dans [Clackdoyle and Defrise (2010)], plusieurs méthodes pour palier à ce problème sont passées en revue.

Parmi les méthodes de reconstruction à partir de projection tronquées on compte la lambda tomographie (qui reconstruit une sorte de gradient de l'image, et qui n'est donc pas quantitative) et les méthodes basées sur la transformée de Hilbert. Ces dernières permettent la reconstruction exacte lorsque les projections vérifient certaines contraintes géométriques ou bien lorsque la région d'intérêt est polynomiale par morceaux. Ces contraintes restent néanmoins encore trop fortes pour nombre d'applications, c'est pourquoi des approches multi-résolution ou compressive sensing ont été proposées récemment [Yang *et al.* (2010), Langer and Peyrin (2010)].

## B.3 Méthodologie

L'approche multirésolution utilisée ici est une approche en ondelettes permettant de fusionner l'information haute résolution provenant des projections tronquées avec l'information basse résolution provenant d'un second détecteur qui acquiert des projections complètes. Cette approche est particulièrement bien exploitable en nano-CT, une nouvelle technique tomographique qui permet d'atteindre des résolutions spatiales nanométriques, pour des échantillons d'un ordre de grandeur inférieur au millimètre [Langer and Peyrin (2010)].

On cherche à effectuer une reconstruction quantitative à partir de données locales haute résolution en exploitant des données non locales acquises à plus basse résolution. Outre le développement de cette approche multirésolution, le travail consiste également à étudier les problèmes d'interpolation dans le domaine de Radon. Avant de mettre en oeuvre ces méthodes, il est nécessaire d'étudier au préalable des méthodes spécifiques de recalages des différents jeux de données (haute résolution et basse résolution).

### B.3.1 Données

Les jeux de données disponibles à l'ESRF sont des acquisitions de 1503 ou 1504 projections selon que le scan ait été fait sur  $180^\circ$  ou sur  $360^\circ$ . Les 1500 premières projections sont les images dans le scan, puis :

- si le scan a été fait à  $180^\circ$ , les 3 dernières sont des projections à  $180^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $0^\circ$ ,

- si le scan a été fait à  $360^\circ$ , les 4 dernières correspondent aux angles  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $0^\circ$ .

Les images supplémentaires permettent de déterminer l'axe de rotation et/ou d'aligner les projections.

Les projections haute résolution et basse résolution sont acquises avec le même détecteur. La dimension des projections ne change pas, c'est la résolution qui change, car elle est donnée par le grandissement de l'optique dans le cas d'un faisceau parallèle, la position relative de l'échantillon entre le focus et le détecteur.

Étant donné que les échantillons sont de très petite taille, ceux-ci peuvent se briser à cause de la dose reçue, car on enchaîne deux acquisitions : une en haute et une en basse résolution. L'acquisition des projections basse résolution ayant généralement lieu après celle des projections haute résolution, il arrive qu'il faille diminuer le nombre de projection basse résolution afin d'éviter ce genre de problèmes.

### B.3.2 Pré-traitement

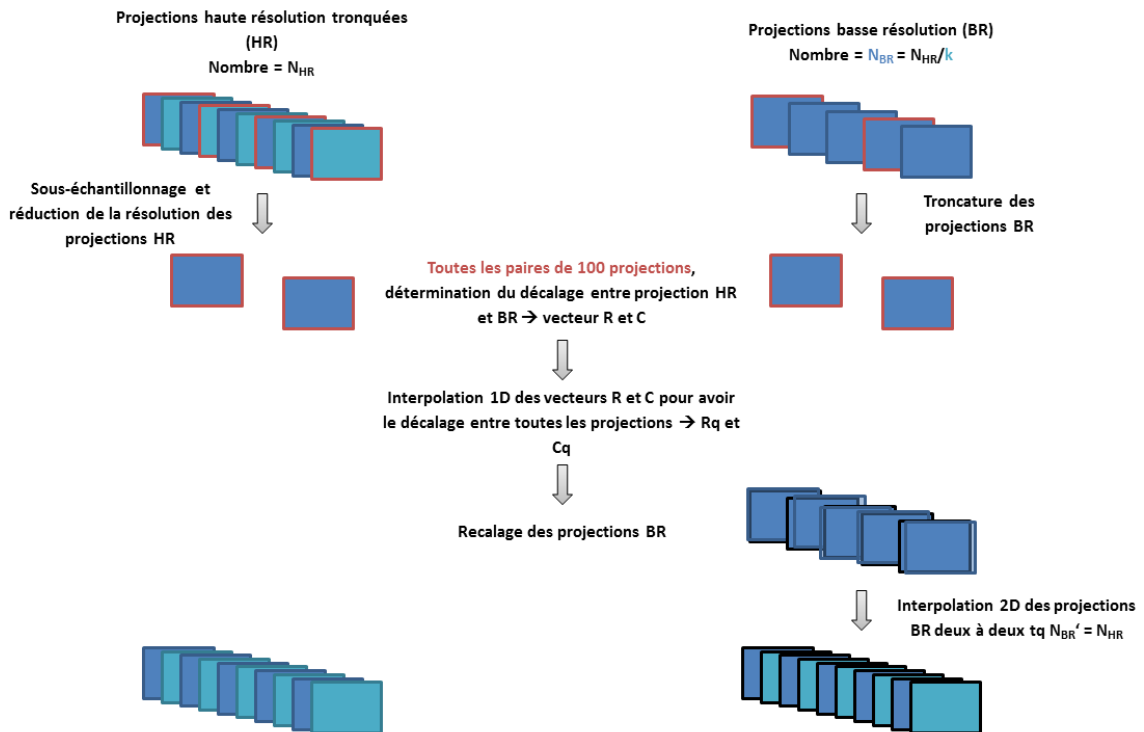
Après l'acquisition des données, il est nécessaire de faire un traitement préalable. Ce pré-traitement permet de recalcr les données entre elles, et d'obtenir le même nombre de projections haute résolution et basse résolution.

Ce pré-traitement est effectué en deux étapes. Notons  $\mathcal{P}_{HR}$  et  $N_{HR}$  l'ensemble et le nombre de projections haute résolution, et  $\mathcal{P}_{BR}$  et  $N_{BR}$  l'ensemble et le nombre de projections basse résolution, tel que  $N_{BR} = N_{HR}/k$  où  $k$  est le facteur de réduction de  $N_{BR}$  par rapport à  $N_{HR}$ .

Le décalage entre les projections est calculé toutes les 100 projections sur la base de  $N_{HR}$ , soit toutes les  $\lceil 100/k \rceil$  projections  $N_{BR}$  (cf. fig, projections en rouge). Afin de pouvoir comparer des images similaires, les projections subissent certaines modification : la résolution des  $\mathcal{P}_{HR}$  sélectionnées est diminuée, et les  $\mathcal{P}_{BR}$  sont tronquées. Puis on calcule le décalage entre les projections modifiées, qu'on note  $\mathcal{P}'_{HR}$  et  $\mathcal{P}'_{BR}$ . Pour chaque projection  $P_{HR} \in \mathcal{P}_{HR}$  et  $P_{BR} \in \mathcal{P}_{BR}$ , le résultat du calcul du décalage entre  $P_{HR}$  et  $P_{BR}$  est un vecteur  $[R, C]$ , où  $R$  est le décalage horizontal et  $C$  le décalage vertical :

La courbe  $R_i = f(i)$  (ou des  $C_i = f(i)$ ) est ensuite affichée, et selon sa forme, on détermine le type d'interpolation à faire pour obtenir le décalage entre toutes les projections, puis on effectue le recalage sur toutes les projections de l'ensemble  $\mathcal{P}_{BR}$ .

La seconde étape permet de faire en sorte d'avoir le même nombre de projections basse résolution et haute résolution. Sachant que  $N_{BR} < N_{HR}$ , on interpole en 2D les projections  $P_{BR}$  deux à deux pour combler l'ensemble  $\mathcal{P}_{BR}$ . On obtient alors le nouvel ensemble  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}$  :



$$\begin{aligned}
 \forall n &= 0, 1, \dots, N_{BR} - 1, \\
 \forall i &= 0, 1, \dots, k, \\
 \bar{P}_{BR}(nk + i) &= \frac{i}{k} P_{BR}(n) + \frac{k-i}{k} P_{BR}(n+1)
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

### B.3.3 Traitement

Une fois que les deux jeux de données sont complets et recalés entre eux, on les fusionne grâce à une méthode en ondelettes. À partir de la projection haute résolution et basse résolution du même angle, on détermine une nouvelle projection.

#### Transformation en ondelette

Considérons deux projections  $P_{HR}$  et  $P_{BR}$ , telle que  $P_{HR}$  corresponde à un zoom  $f$  de  $P_{BR}$ . On décompose  $P_{HR}$  en ondelettes sur  $f$  niveaux : on obtient alors l'image d'approximation  $A(P_{HR})$  et les images de détails horizontaux  $H(P_{HR})$ , verticaux  $V(P_{HR})$ , et diagonaux  $D(P_{HR})$ . L'image d'approximation tronquée est alors à la même résolution que l'image basse résolution. On insère donc  $A(P_{HR})$  dans  $P_{BR}$ , puis on construit trois autres images de "détails" en insérant  $H(P_{HR})$ ,  $V(P_{HR})$  et  $D(P_{HR})$  dans trois images de la taille de  $P_{BR}$  contenant des 0. On applique ensuite la transformée en ondelettes inverse en 2D, dénotée  $IWT2$  ci-après, sur ces quatre nouvelles images, notées  $A(P_{WT})$ ,  $H(P_{WT})$ ,  $V(P_{WT})$  et  $D(P_{WT})$ . On obtient alors l'ensemble :

$$\mathcal{P}_{WT} =$$



$$\{P_{WT}(n) = IWT2(A(P_{WT}(n)), H(P_{WT}(n)), V(P_{WT}(n)), D(P_{WT}(n))), n = 1, \dots, N_{BR}\}$$

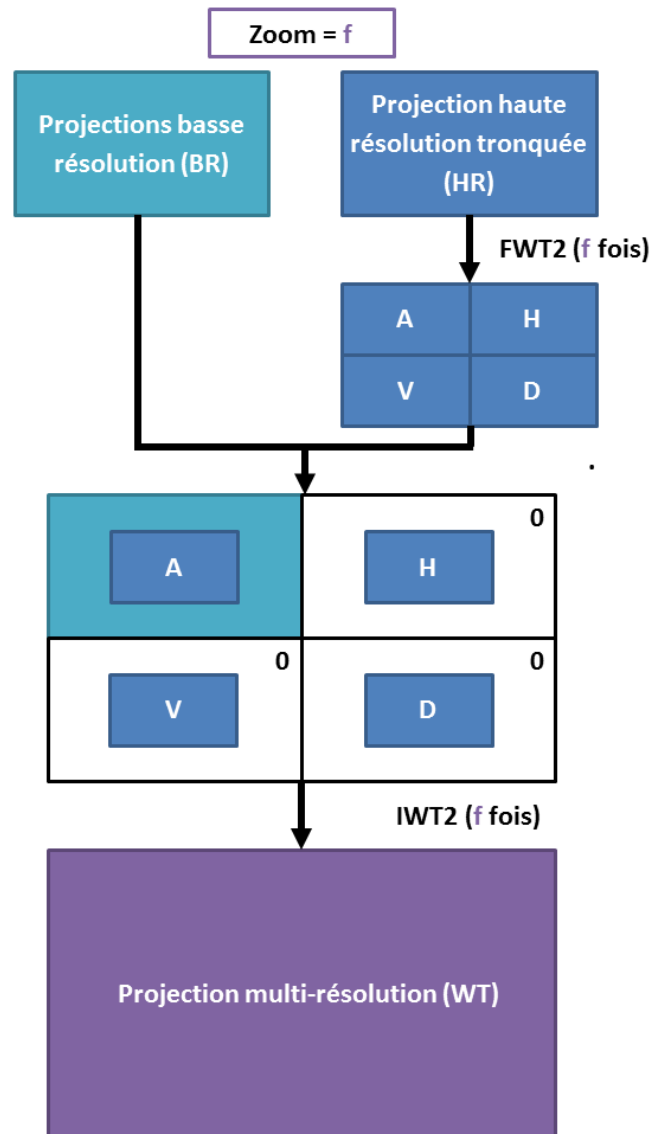


FIGURE B.1 – Fusion d’une projection haute résolution tronquée et d’une projection basse résolution.

## B.4 Analyse

Dans cette section, nous étudions l’influence de l’interpolation des projections basse résolution et du traitement en ondelettes sur la reconstruction par rétroprojection filtrée d’un fantôme.

Nous utilisons comme critère de comparaison la racine carrée de l’erreur quadratique

moyenne (ou RMSE) entre deux images  $I_1$  et  $I_2$  de même taille  $m \times n$ , définie par :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [I_1(i, j) - I_2(i, j)]^2}{m \times n}} \quad (\text{B.2})$$

### B.4.1 Création des jeux de données

Nous disposons d'un jeu de données permettant de reconstruire des images 3D d'un fantôme à partir de projections acquises avec une énergie de 20.5 keV sur un scan de  $180^\circ$ . Nous obtenons 1500 projections de  $2048 \times 1024$  pixels, ce qui permettrait d'avoir 1024 coupes de  $2048 \times 2048$  pixels chacune, grâce à un algorithme de rétroprojection filtrée. Nous transformons les projections initiales pour obtenir un ensemble de projections basse résolution et un ensemble de projections haute résolution tronquées.

Nous affichons sur la figure B.4 une coupe extraite du volume 3D de référence reconstruit et le sinogramme correspondant.

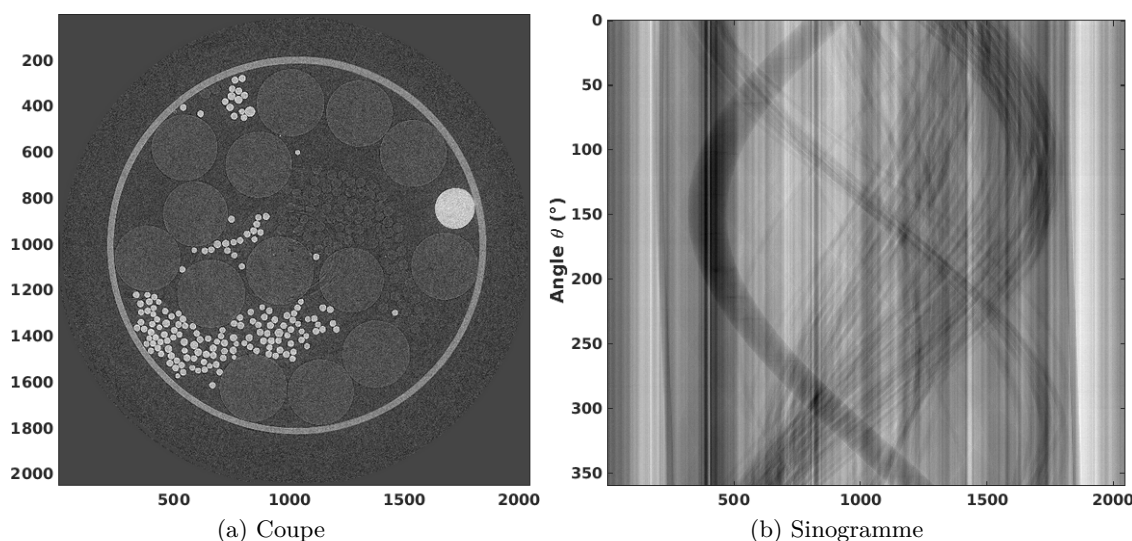


FIGURE B.2 – (a) Coupe extraite de l'image 3D reconstruite par rétroprojection filtrée, d'un fantôme de taille  $2048 \times 2048 \times 1024$ . (b) Sinogramme utilisé pour reconstruire la coupe de la figure B.2a.

Dans notre cas, nous considérons un facteur de zoom  $f$  tel que  $f = 2$ . Par conséquent, nous construisons les projections tronquées haute résolution telles que la région d'intérêt corresponde à un zoom  $\times 2$  dans l'image de référence, et les projections basse résolution de sorte qu'elles aient une résolution deux fois moins grande que celles de la référence (cf. figure B.3). Ainsi, nous obtenons des ensembles de projections haute et basse résolutions de taille  $1024 \times 512$ .

En pratique, on acquiert  $k$  fois moins de projections basse résolution que haute résolution afin de réduire la dose déposée dans l'échantillon (cf. section B.3.2). Pour reproduire ce phénomène, nous supprimons certaines projections basse résolution afin de n'en garder qu'une parmi  $k$ . Le nombre de projections haute résolution ne subit pas de modifications.

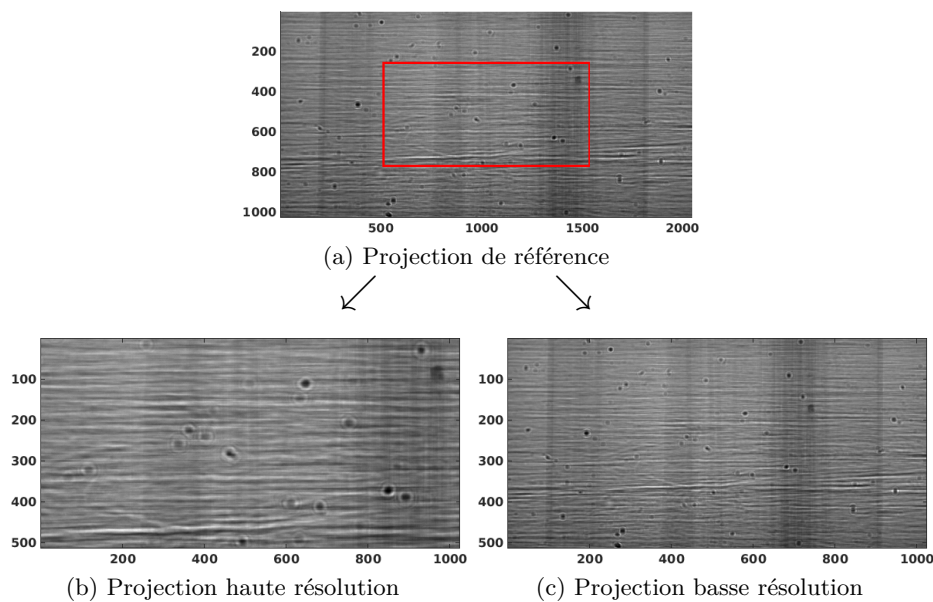


FIGURE B.3 – Une projection issue du jeu de données de référence (a) est tronquée afin d’obtenir une projection haute résolution (b) et sous-échantillonnée pour créer une projection basse résolution (c).

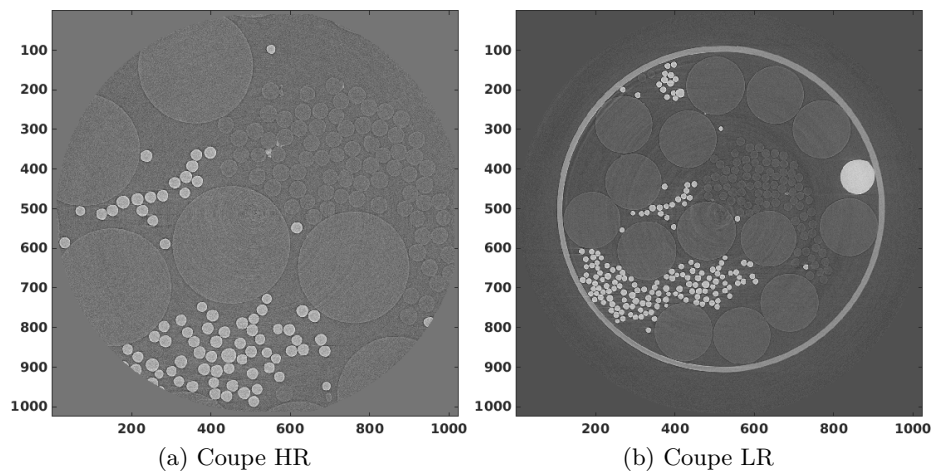


FIGURE B.4 – Coupes reconstruites à partir de projections haute résolution (a) et basse résolution (b). Les deux images sont de même dimension, comme les projections B.3b et B.3c, mais ne contiennent pas les mêmes informations. La figure B.4a contient la région d’intérêt.

### B.4.2 Influence de l’interpolation

Nous comparons ci-après les projections et les coupes basse résolution avec et sans interpolation. Nous considérons trois valeurs pour le facteur de sous-échantillonnage :  $k = 1$ ,  $k = 2$  et  $k = 16$ . Dans le cas où  $k = 1$ , aucune interpolation n’est effectuée : cela équivaut simplement à générer des projections basse résolution à partir des projections de référence. Notons  $\mathcal{P}_{BR}^k$  l’ensemble des projections basse résolution, avec  $k \in \{1, 2, 16\}$ . Pour chaque valeur de  $k$ , on recrée les projections supprimées de  $\mathcal{P}_{BR}$  par interpolation

linéaire entre les projections retenues dans  $\mathcal{P}_{BR}^k$ . On obtient ainsi un ensemble  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^k$  de 1500 projections interpolées.

Sur la figure B.5a, nous affichons la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) calculée entre chaque projection des ensembles  $\mathcal{P}_{BR}^1$  et  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^2$  et entre  $\mathcal{P}_{BR}^1$  et  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^{16}$ . Les valeurs de RMSE de cette figure sont classées par ordre croissant par soucis de lisibilité. Sur la figure B.5b, nous avons calculé de la RMSE entre les coupes des images reconstruites.

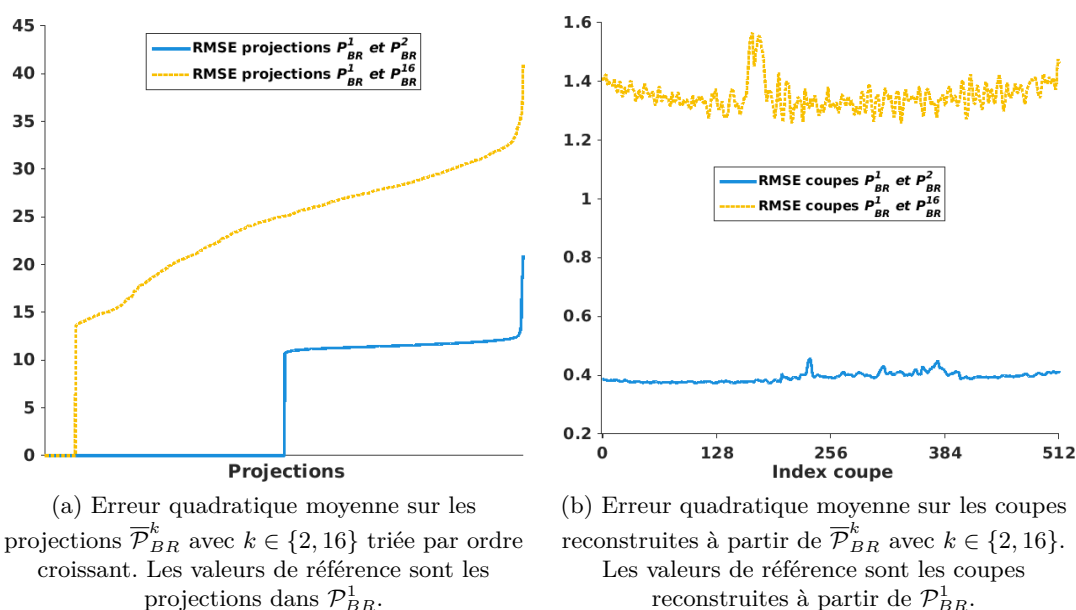


FIGURE B.5 – Erreur quadratique moyenne calculée sur les données de basse résolution.

Globalement la RMSE est plus importante pour les projections interpolées avec un facteur  $k = 16$  que pour celles où  $k = 2$  (cf. figure B.5a). Ce résultat reste logique dans la mesure où l'interpolation introduit de l'erreur, par conséquent, plus le nombre de projections rajoutées est grand plus l'erreur est importante. Elle est nulle pour la moitié des valeurs où  $k = 2$  et pour un 1/16 des projections où  $k = 16$  : cela correspond à la RMSE entre  $\mathcal{P}_{BR}^1$  et les projections de  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^k$  initialement présentes dans  $\mathcal{P}_{BR}^k$ . Elle reste relativement constante par la suite pour  $k = 2$  car l'erreur d'interpolation de l'ensemble  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^2$  est relativement faible. La RMSE augmente progressivement avec une tendance linéaire pour  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^{16}$  car le nombre de projections initiales est très réduit. Sur la figure B.5b, la RMSE des coupes obtenues à partir de  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^{16}$  est entre 3 et 4 fois plus grande que celles obtenues à partir de  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^2$ . On observe des variations relativement faibles d'une coupe à l'autre à cause de la reconstruction par FBP qui combine les projections correctes avec les projections interpolées.

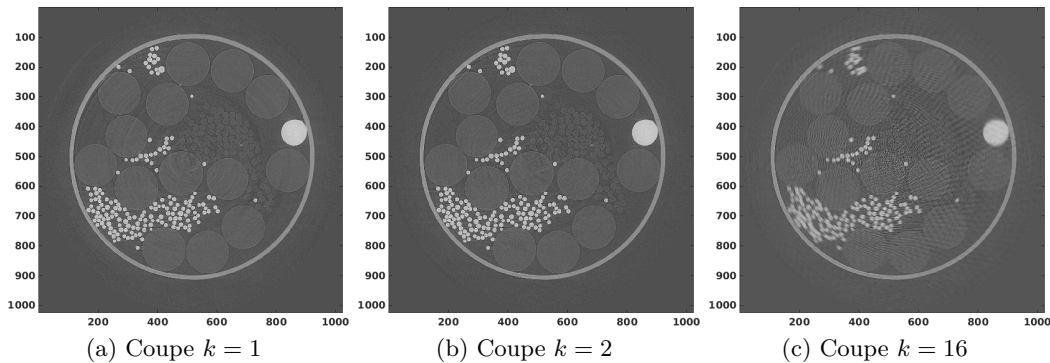


FIGURE B.6 – Coupes reconstruites à partir des ensembles de projection  $\mathcal{P}_{BR}^k$  avec  $k \in \{1, 2, 16\}$ .

### B.4.3 Influence du traitement en ondelettes

Nous fusionnons ensuite les ensembles de projection  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^2$  et  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^{16}$  avec l'ensemble des projections tronquées  $\mathcal{P}_{HR}$  avec la méthode décrite en section B.3.3. Nous notons  $\mathcal{P}_{WT}^2$  et  $\mathcal{P}_{WT}^{16}$  les ensembles de projections obtenus en fusionnant l'ensemble  $\mathcal{P}_{HR}$  avec  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^2$  et  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^{16}$  respectivement. L'ensemble des projections de référence sera noté  $\mathcal{P}$  ci-après.

Sur la figure B.7a, nous affichons la RMSE entre chaque projection des ensembles  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_{WT}^2$  et entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_{WT}^{16}$ . Les valeurs de RMSE de cette figure sont classées par ordre croissant par soucis de lisibilité. Sur la figure B.7b, nous avons calculé de la même manière la RMSE entre les coupes des images reconstruites.

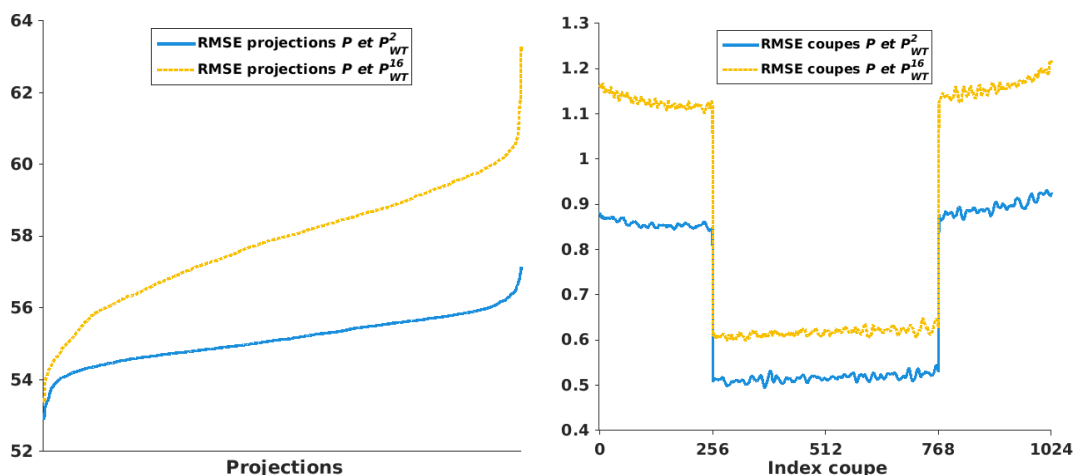


FIGURE B.7 – Erreur quadratique moyenne calculée après traitement en ondelettes.

Nous remarquons comme précédemment que la RMSE augmente plus rapidement pour les projections de  $\mathcal{P}_{WT}^{16}$  que pour celles de  $\mathcal{P}_{WT}^2$  (cf. figure B.7a). Cela est du principalement

aux projections interpolées provenant de  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^{16}$  qui comportent plus d'erreurs que celles de  $\overline{\mathcal{P}}_{BR}^2$ . Sur la figure B.7b, la RMSE est relativement faible quelque soit la valeur de  $k$  puis augmente brutalement sur les coupes extrêmes. En effet, le traitement en ondelettes combine des projections haute résolution tronquées avec des projections basse résolution (cf. figure B.1). Les projections haute résolution sont tronquées en largeur et en hauteur (cf. figure B.3). En réduisant la projection de référence en largeur, on la tronque au niveau de la région d'intérêt, et en la tronquant en hauteur, on réduit le nombre de coupes. Par conséquent, lors de la reconstruction, l'information provenant des projections de  $\mathcal{P}_{HR}$  permet de compenser légèrement l'erreur introduite dans les projections basse résolution, mais uniquement lorsqu'elle est présente. Les images de la figure B.8 montrent que la coupe de la figure B.8c est moins bruitée que sur la figure B.6c. Dans les deux cas  $k = 2$  et  $k = 16$ , la région d'intérêt contenue dans les projections haute résolution est correctement reconstruite.

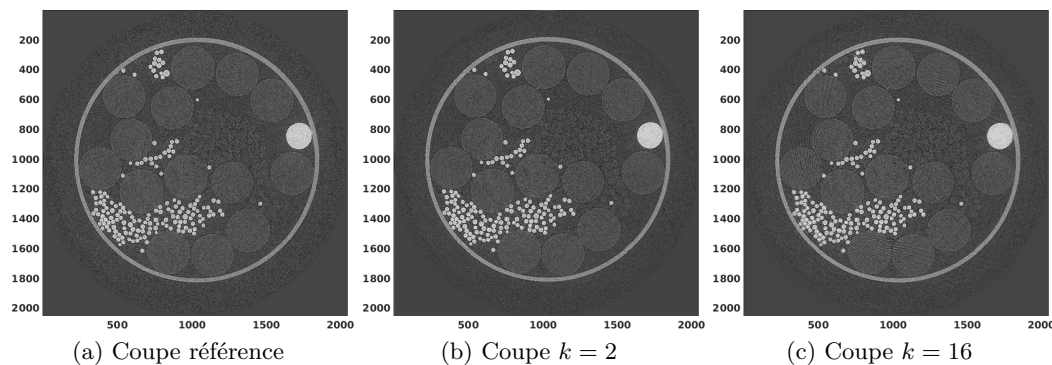


FIGURE B.8 – Coupes reconstruites à partir des ensembles de projection  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_{WT}^k$  avec  $k \in \{1, 2, 16\}$ .

## B.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons abordé le problème des projections tronquées en tomographie classique. Nous avons étudié une approche permettant de fusionner les projections haute résolution tronquées avec les projections basse résolution, grâce à la décomposition en ondelettes. Nous appliquons cette méthode à des données obtenues à l'European Synchrotron Radiation Facility de Grenoble. Un traitement préalable des données permet de se ramener au même nombre de projections haute et basse résolution, en interpolant les projections deux à deux, dans le cas où l'acquisition basse résolution se ferait en moins de projections afin de réduire la dose administrée à l'échantillon. Puis, les projections sont recalées entre elles car en pratique, l'échantillon est susceptible de bouger pendant l'acquisition.

À partir d'un jeu de données contenant 1500 projections acquises sur  $180^\circ$ , nous créons des jeux de projections haute résolution tronquées et basse résolution. Nous étudions dans

un premier temps l'influence de l'interpolation des projections. Les erreurs augmentent globalement lorsque le nombre de projections basse résolution à rajouter est important par rapport au nombre initial. Bien que l'erreur sur l'écart type augmente selon le niveau d'interpolation, lorsqu'on combine les deux jeux de données haute résolution et basse résolution, l'erreur sur les moyennes de reconstructions est relativement faible quelque soit le niveau d'interpolation. L'information provenant des projections haute résolution permet de compenser les erreurs introduites dans les projections basse résolution interpolées. Cette approche multirésolution permet donc d'obtenir des résultats satisfaisant en tomographie locale. Elle nécessite cependant d'être validée sur des données expérimentales.



# Bibliographie

- [Agostinelli *et al.* (2003)] Agostinelli, S., Allison, J., Amako, K. a., Apostolakis, J., Araujo, H., Arce, P., Asai, M., Axen, D., Banerjee, S., Barrand, G., *et al.* (2003). Geant4 - a simulation toolkit. *Nuclear instruments and methods in physics research section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 506(3) :250–303.
- [Aiello *et al.* (2011)] Aiello, M., Attanasi, F., Belcari, N., Rosso, V., Straub, K., and Guerra, A. D. (2011). A dose determination procedure by pet monitoring in proton therapy. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2011 IEEE*, pages 3534–3538. IEEE.
- [Andersen and Kak (1984)] Andersen, A. and Kak, A. C. (1984). Simultaneous algebraic reconstruction technique (sart) : a superior implementation of the art algorithm. *Ultrasonic imaging*, 6(1) :81–94.
- [Andreyev *et al.* (2011)] Andreyev, A., Sitek, A., and Celler, A. (2011). Fast image reconstruction for compton camera using stochastic origin ensemble approach. *Medical physics*, 38(1) :429–438.
- [Anger (1968)] Anger, H. O. (1968). Transmission scintiphotography. *Journal of Nuclear Medicine*, 9(6) :267–269.
- [Azevedo *et al.* (2013)] Azevedo, C., Pereira, F., Lopes, T., Correia, P., Silva, A., Caramate, L., Covita, D., and Veloso, J. (2013). A gaseous Compton camera using a 2d-sensitive gaseous photomultiplier for nuclear medical imaging. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 732 :551–555.
- [Basko *et al.* (1998)] Basko, R., Zeng, G. L., and Gullberg, G. T. (1998). Application of spherical harmonics to image reconstruction for the Compton camera. *Physics in Medicine and Biology*, 43 :887–894.
- [Bennett *et al.* (1975)] Bennett, G., Goldberg, A., Levine, G., Guthy, J., Balsamo, J., and Archambeau, J. (1975). Beam localization via  $^{15}\text{O}$  activation in proton-radiation therapy. *Nuclear Instruments and Methods*, 125(3) :333–338.
- [Bennett *et al.* (1978)] Bennett, G., Archambeau, J., Archambeau, B., Meltzer, J., and Wingate, C. (1978). Visualization and transport of positron emission from proton activation in vivo. *Science*, 200(4346) :1151–1153.
- [Bethe (1930)] Bethe, H. (1930). Zur theorie des durchgangs schneller korpuskularstrahlen durch materie. *Annalen der Physik*, 397(3) :325–400.
- [Bloch (1933)a] Bloch, F. (1933a). Bremsvermögen von atomen mit mehreren elektronen. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 81(5) :363–376.
- [Bloch (1933)b] Bloch, F. (1933b). Zur bremsung rasch bewegter teilchen beim durchgang durch materie. *Annalen der Physik*, 408(3) :285–320.



- [Bom *et al.* (2012)] Bom, V., Joulaeizadeh, L., and Beekman, F. (2012). Real-time prompt gamma monitoring in spot-scanning proton therapy using imaging through a knife-edge-shaped slit. *Physics in medicine and biology*, 57(2) :297.
- [Bracewell (1956)] Bracewell, R. N. (1956). Strip integration in radio astronomy. *Australian Journal of Physics*, 9(2) :198–217.
- [Bragg and Kleeman (1905)] Bragg, W. H. and Kleeman, R. (1905). Xxxix. on the  $\alpha$  particles of radium, and their loss of range in passing through various atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10(57) :318–340.
- [Chmeissani *et al.* (2014)] Chmeissani, M., de Lorenzo, G., Puigdengoles, C., Cabruja, E., *et al.* (2014). Characterization of a module with pixelated cdte detectors for possible pet, pem and Compton camera applications. *Journal of Instrumentation*, 9(05) :C05046.
- [Clackdoyle and Defrise (2010)] Clackdoyle, R. and Defrise, M. (2010). Tomographic reconstruction in the 21st century. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 27(4) :60–80.
- [Cochran *et al.* (2008)] Cochran, E., Burdette, D., Chesi, E., Clinthorne, N., Honscheid, K., Huh, S., Kagan, H., Lacasta, C., Mikuz, M., Smith, D., *et al.* (2008). Performance of electronically collimated SPECT imaging system in the energy range from 140 keV to 511 keV. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2008. NSS'08. IEEE*, pages 4618–4621.
- [Compton (1923)] Compton, A. H. (1923). A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Physical review*, 21(5) :483.
- [Cree and Bones (1994)] Cree, M. J. and Bones, P. J. (1994). Towards direct reconstruction from a gamma camera based on Compton scattering. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 13(2) :398–407.
- [Daubechies *et al.* (1988)] Daubechies, I. *et al.* (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on pure and applied mathematics*, 41(7) :909–996.
- [Del Guerra *et al.* (1994)] Del Guerra, A., Di Domenico, G., Gambaccini, M., and Marziani, M. (1994). A monte carlo simulation of the possible use of positron emission tomography in proton radiotherapy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 345(2) :379–384.
- [Dempster *et al.* (1977)] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, pages 1–38.
- [Diblen *et al.* (2012)] Diblen, F., Espana, S., Holen, R. V., and Vandenberghe, S. (2012). Detector design for range monitoring in hadron therapy by means of image reconstruction. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2012 IEEE*, pages 3887–3889.
- [Doria and Singh (1982)] Doria, D. and Singh, M. (1982). Comparison of reconstruction algorithms for an electronically collimated gamma camera. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 29(1) :447–451.
- [Du *et al.* (2001)] Du, Y., He, Z., Knoll, G., Wehe, D., and Li, W. (2001). Evaluation of a Compton scattering camera using 3-d position sensitive cdznte detectors. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 457(1) :203–211.

- [Enghardt *et al.* (1992)] Enghardt, W., Fromm, W., Geissel, H., Heller, H., Kraft, G., Magel, A., Manfrass, P., Munzenberg, G., Nickel, F., Pawelke, J., *et al.* (1992). The spatial distribution of positron-emitting nuclei generated by relativistic light ion beams in organic matter. *Physics in Medicine and Biology*, 37(11) :2127.
- [Enghardt *et al.* (2004)] Enghardt, W., Parodi, K., Crespo, P., Fiedler, F., Pawelke, J., and Pönisch, F. (2004). Dose quantification from in-beam positron emission tomography. *Radiotherapy and Oncology*, 73 :S96–S98.
- [España and Paganetti (2010)] España, S. and Paganetti, H. (2010). The impact of uncertainties in the ct conversion algorithm when predicting proton beam ranges in patients from dose and pet-activity distributions. *Physics in medicine and biology*, 55(24) :7557.
- [Fiedler *et al.* (2011)] Fiedler, F., Dersch, U., Golnik, C., Kormoll, T., Rohling, H., Schöne, S., Enghardt, W., *et al.* (2011). The use of prompt  $\gamma$ -rays for in-vivo dosimetry at therapeutic proton and ion beams. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2011 IEEE*, pages 4453–4456. IEEE.
- [Finch (2002)] Finch, D. (2002). Mathematisches forschungsinstitut oberwolfach (private conversation).
- [Fisher (1922)] Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 309–368.
- [Fokas *et al.* (2009)] Fokas, E., Kraft, G., An, H., and Engenhardt-Cabillic, R. (2009). Ion beam radiobiology and cancer : time to update ourselves. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA)-Reviews on Cancer*, 1796(2) :216–229.
- [Fourkal *et al.* (2009)] Fourkal, E., Fan, J., and Veltchev, I. (2009). Absolute dose reconstruction in proton therapy using pet imaging modality : feasibility study. *Physics in medicine and biology*, 54(11) :N217.
- [Frandes *et al.* (2010)] Frandes, M., Zoglauer, A., Maxim, V., and Prost, R. (2010). A tracking Compton-scattering imaging system for hadrontherapy monitoring. *IEEE Trans. on Nuclear Science*, 57 :144–150.
- [Gel'fand and Graev (1991)] Gel'fand, I. M. and Graev, M. I. (1991). Crofton's function and inversion formulas in real integral geometry. *Functional Analysis and Its Applications*, 25(1) :1–5.
- [Gillam *et al.* (2011)] Gillam, J. E., Lacasta, C., Torres-Espallardo, I., Juan, C. C., Llosá, G., Solevi, P., and Barrio, J. (2011). A Compton imaging algorithm for on-line monitoring in hadrontherapy. In *SPIE Medical Imaging 2011 : Physics of Medical Imaging conference*, volume 7961.
- [Gilland *et al.* (1988)] Gilland, D. R., Tsui, B., McCartney, W. H., Perry, J. R., and Berg, J. (1988). Determination of the optimum filter function for spect imaging. *Journal of nuclear medicine : official publication, Society of Nuclear Medicine*, 29(5) :643–650.
- [Gordon *et al.* (1970)] Gordon, R., Bender, R., and Herman, G. T. (1970). Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of theoretical Biology*, 29(3) :471–481.
- [Gormley (1997)] Gormley, J. E. (1997). *Experimental comparison of mechanical and electronic gamma-ray collimation*. PhD thesis, University of Michigan.
- [Gueth *et al.* (2013)] Gueth, P., Dauvergne, D., Freud, N., Létang, J., Ray, C., Testa, E., and Sarrut, D. (2013). Machine learning-based patient specific prompt-gamma dose monitoring in proton therapy. *Physics in medicine and biology*, 58(13) :4563.

- [Haar (1910)] Haar, A. (1910). Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, 69(3) :331–371.
- [Hamaker *et al.* (1980)] Hamaker, C., Smith, K., Solmon, D., and Wagner, S. (1980). The divergent beam x-ray transform. *JOURNAL OF MATHEMATICS*, 10(1).
- [Han *et al.* (2008)] Han, L., Rogers, W. L., Huh, S. S., and Clinthorne, N. (2008). Statistical performance evaluation and comparison of a Compton medical imaging system and a collimated anger camera for higher energy photon imaging. *Physics in medicine and biology*, 53(24) :7029.
- [Harkness *et al.* (2009)] Harkness, L., Boston, A., Boston, H., Cooper, R., Cresswell, J., Grint, A., Nolan, P., Oxley, D., Scraggs, D., Beveridge, T., *et al.* (2009). Optimisation of a dual head semiconductor Compton camera using geant4. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 604(1) :351–354.
- [Hebert *et al.* (1990)] Hebert, T., Leahy, R., and Singh, M. (1990). Three-dimensional maximum-likelihood reconstruction for an electronically collimated single-photon-emission imaging system. *JOSA A*, 7(7) :1305–1313.
- [Heisenberg (1927)] Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3-4) :172–198.
- [Henriquet *et al.* (2012)] Henriquet, P., Testa, E., Chevallier, M., Dauvergne, D., Dedes, G., Freud, N., Krimmer, J., Létang, J., Ray, C., Richard, M., *et al.* (2012). Interaction vertex imaging (ivi) for carbon ion therapy monitoring : a feasibility study. *Physics in medicine and biology*, 57(14) :4655.
- [Herman (2009)] Herman, G. T. (2009). *Fundamentals of computerized tomography : image reconstruction from projections*. Springer Science & Business Media.
- [Hilaire *et al.*] Hilaire, E., Robert, C., Lojacono, X., Sarrut, D., Buvat, I., Peyrin, F., and Maxim, V. Compton imaging in proton therapy : reconstructed image of the simulated prompt- $\gamma$  distribution. In *ICTR-PHE 2014*, page S43.
- [Hilaire *et al.* (2013)] Hilaire, E., Robert, C., Lojacono, X., Lartizien, C., Buvat, I., and Maxim, V. (2013). Imagerie Compton en protonthérapie : de la simulation gate à la reconstruction d’images. In *XXIVème Colloque GRETSI - Traitement du Signal et des Images (GRETSI’13)*, pages 1–4, Brest, France.
- [Hilaire *et al.* (2014)] Hilaire, E., Sarrut, D., Peyrin, F., and Maxim, V. (2014). Compton imaging of prompt- $\gamma$  radiation in proton therapy : simulation of the influence of the detector response and of the patient attenuation. In *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*, Seattle, USA.
- [Hirasawa and Tomitani (2003)] Hirasawa, M. and Tomitani, T. (2003). An analytical image reconstruction algorithm to compensate for scattering angle broadening in Compton cameras. *Physics in Medicine and Biology*, 48 :1009–1026.
- [Hudson and Larkin (1994)] Hudson, H. M. and Larkin, R. S. (1994). Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 13(4) :601–609.
- [Ichinohe *et al.* (2013)] Ichinohe, Y., Takeda, S., Odaka, H., Watanabe, S., Fukuyama, T., Ohta, M., Takahashi, T., Nakazawa, K., Tajima, H., Fukazawa, Y., *et al.* (2013). Study of event reconstruction algorithm for a large-scale si/cdte multilayer Compton camera. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2013 IEEE*, pages 1–4. IEEE.

- [Inaniwa *et al.* (2007)] Inaniwa, T., Kohno, T., Yamagata, F., Tomitani, T., Sato, S., Kanazawa, M., Kanai, T., and Urakabe, E. (2007). Maximum likelihood estimation of proton irradiated field and deposited dose distribution. *Medical physics*, 34(5) :1684–1692.
- [Ishikawa *et al.* (2001)] Ishikawa, M., Kobayashi, T., Sakurai, Y., and Kanda, K. (2001). Optimization technique for a prompt gamma-ray spect collimator system. *Journal of radiation research*, 42(4) :387–400.
- [Jan *et al.* (2004)] Jan, S., Santin, G., Strul, D., Staelens, S., Assie, K., Autret, D., Avner, S., Barbier, R., Bardies, M., Bloomfield, P., *et al.* (2004). Gate : a simulation toolkit for pet and spect. *Physics in medicine and biology*, 49(19) :4543.
- [Janssen *et al.* (2014)] Janssen, F., Landry, G., Lopes, P. C., Dedes, G., Smeets, J., Schaart, D., Parodi, K., and Verhaegen, F. (2014). Factors influencing the accuracy of beam range estimation in proton therapy using prompt gamma emission. *Physics in medicine and biology*, 59(15) :4427–4441.
- [Judson *et al.* (2011)] Judson, D., Boston, A., Coleman-Smith, P., Cullen, D., Hardie, A., Harkness, L., Jones, L., Jones, M., Lazarus, I., Nolan, P., *et al.* (2011). Compton imaging with the porgamrays spectrometer. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 652(1) :587–590.
- [Jung and Moon (2015)] Jung, C.-Y. and Moon, S. (2015). Inversion formulas for cone transforms arising in application of compton cameras. *Inverse Problems*, 31(1) :015006.
- [Kabuki *et al.* (2007)] Kabuki, S., Hattori, K., Kohara, R., Kunieda, E., Kubo, A., Kubo, H., Miuchi, K., Nakahara, T., Nagayoshi, T., Nishimura, H., *et al.* (2007). Development of electron tracking Compton camera using micro pixel gas chamber for medical imaging. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 580(2) :1031–1035.
- [Kanazawa *et al.* (2002)] Kanazawa, M., Kitagawa, A., Kouda, S., Nishio, T., Torikoshi, M., Noda, K., Murakami, T., Suda, M., Tomitani, T., Kanai, T., *et al.* (2002). Application of an ri-beam for cancer therapy : in-vivo verification of the ion-beam range by means of positron imaging. *Nuclear Physics A*, 701(1) :244–252.
- [Kim *et al.* (2007)] Kim, S., Lee, J., Lee, M., Lee, J., Lee, C., Kim, C.-H., Lee, D., and Lee, S. (2007). Two approaches to implementing projector-backprojector pairs for 3D reconstruction from Compton scattered data. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 571 :255–258.
- [Kim *et al.* (2009)] Kim, D., Yim, H., and Kim, J.-W. (2009). Pinhole camera measurements of prompt gamma-rays for detection of beam range variation in proton therapy. *Journal of the Korean Physical Society*, 55(4) :1673–1676.
- [Kim *et al.* (2010)] Kim, S. M., Lee, J. S., Lee, C. S., Kim, C. H., Lee, M. C., Lee, D. S., and Lee, S.-J. (2010). Fully three-dimensional osem-based image reconstruction for compton imaging using optimized ordering schemes. *Physics in medicine and biology*, 55(17) :5007.
- [King *et al.* (1983)] King, M. A., Doherty, P. W., Schwinger, R. B., Jacobs, D. A., Kidder, R. E., and Miller, T. R. (1983). Fast count-dependent digital filtering of nuclear medicine images : concise communication. *Journal of nuclear medicine : official publication, Society of Nuclear Medicine*, 24(11) :1039–1045.

- [King *et al.* (1984)] King, M. A., Schwinger, R. B., Doherty, P. W., and Penney, B. C. (1984). Two-dimensional filtering of spect images using the metz and wiener filters. *J Nucl Med*, 25(11) :1234–40.
- [King *et al.* (1987)] King, M. A., Glick, S. J., Penney, B. C., Schwinger, R. B., and Doherty, P. W. (1987). Interactive visual optimization of spect prereconstruction filtering. *Journal of nuclear medicine : official publication, Society of Nuclear Medicine*, 28(7) :1192–1198.
- [King *et al.* (1988)] King, M. A., Penney, B. C., and Glick, S. J. (1988). An image-dependent metz filter for nuclear medicine images. *J Nucl Med*, 29 :1980–1989.
- [Klein and Nishina (1929)] Klein, O. and Nishina, Y. (1929). Über die streuung von strahlung durch freie elektronen nach der neuen relativistischen quantendynamik von dirac. *Zeitschrift für Physik*, 52(11-12) :853–868.
- [Knopf *et al.* (2008)] Knopf, A., Parodi, K., Paganetti, H., Cascio, E., Bonab, A., and Bortfeld, T. (2008). Quantitative assessment of the physical potential of proton beam range verification with pet/ct. *Physics in medicine and biology*, 53(15) :4137.
- [Knopf *et al.* (2009)] Knopf, A., Parodi, K., Bortfeld, T., Shih, H., and Paganetti, H. (2009). Systematic analysis of biological and physical limitations of proton beam range verification with offline pet/ct scans. *Physics in medicine and biology*, 54(14) :4477.
- [Knopf *et al.* (2011)] Knopf, A.-C., Parodi, K., Paganetti, H., Bortfeld, T., Daartz, J., Engelsman, M., Liebsch, N., and Shih, H. (2011). Accuracy of proton beam range verification using post-treatment positron emission tomography/computed tomography as function of treatment site. *International Journal of Radiation Oncology\* Biology\* Physics*, 79(1) :297–304.
- [Knopf and Lomax (2013)] Knopf, A.-C. and Lomax, A. (2013). In vivo proton range verification : a review. *Physics in medicine and biology*, 58(15) :R131.
- [Kormoll *et al.* (2011)] Kormoll, T., Fiedler, F., Golnik, C., Heidel, K., Kempe, M., Schoene, S., Sobiella, M., Zuber, K., and Enghardt, W. (2011). A prototype Compton camera for in-vivo dosimetry of ion beam cancer irradiation. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2011 IEEE*, pages 3484–3487. IEEE.
- [Kraan *et al.* (2015)] Kraan, A., Battistoni, G., Belcari, N., Camarlinghi, N., Ciocca, M., Ferrari, A., Ferretti, S., Mairani, A., Molinelli, S., Pullia, M., *et al.* (2015). Online monitoring for proton therapy : A real-time procedure using a planar pet system. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 786 :120–126.
- [Kraft (2000)] Kraft, G. (2000). Tumor therapy with heavy charged particles. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 45 :S473–S544.
- [Krimmer *et al.* (2014)] Krimmer, J., Ley, J.-L., Abellan, C., Cachemiche, J.-P., Caponetto, L., Chen, X., Dahoumane, M., Dauvergne, D., Freud, N., Joly, B., *et al.* (2014). Development of a Compton camera for medical applications based on silicon strip and scintillation detectors. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*.
- [Krimmer *et al.* (2015)] Krimmer, J., Ley, J.-L., Abellan, C., Cachemiche, J.-P., Caponetto, L., Chen, X., Dahoumane, M., Dauvergne, D., Freud, N., Joly, B., *et al.* (2015). Development of a Compton camera for medical applications based on silicon strip and scintillation detectors. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 787 :98–101.

- [Kubo (1995)] Kubo, N. (1995). [restoration filtering based on projection power spectrum for single-photon emission computed tomography]. *Kaku igaku. The Japanese journal of nuclear medicine*, 32(4) :395–403.
- [Kuhl (1968)] Kuhl, D. E. (1968). The current status of tomographic scanning. *IN FUNDAMENTAL PROBLEMS IN RADIOISOTOPES SCANNING. Charles C. Thomas, Springfield, Ill*, pages 179–188.
- [Kurosawa *et al.* (2012)] Kurosawa, S., Kubo, H., Ueno, K., Kabuki, S., Iwaki, S., Takahashi, M., Taniue, K., Higashi, N., Miuchi, K., Tanimori, T., *et al.* (2012). Prompt gamma detection for range verification in proton therapy. *Current Applied Physics*, 12(2) :364–368.
- [Lange *et al.* (1984)] Lange, K., Carson, R., *et al.* (1984). Em reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *J Comput Assist Tomogr*, 8(2) :306–16.
- [Langer and Peyrin (2010)] Langer, M. and Peyrin, F. (2010). A wavelet algorithm for zoom-in tomography. In *Biomedical Imaging : From Nano to Macro, 2010 IEEE International Symposium on*, pages 608–611. IEEE.
- [Lee *et al.* (2008)] Lee, S.-J., Lee, M. N., Nguyen, V.-G., Kim, S. M., and Lee, J. S. (2008). Three-dimensional edge-preserving regularization for compton camera reconstruction. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2008. NSS'08. IEEE*, pages 4223–4228. IEEE.
- [Lee *et al.* (2012)] Lee, H. R., Park, J. H., Kim, C. H., *et al.* (2012). Design optimization of a 2d prompt-gamma measurement system for proton dose verification. *Journal of the Korean Physical Society*, 61(2) :239–242.
- [Lee and Lee (2012)] Lee, M. N. and Lee, S.-J. (2012). Rebinning of conical projection data in compton imaging. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2012 IEEE*, pages 2374–2376. IEEE.
- [Lemort *et al.* (1980)] Lemort, J., Bizais, Y., and de Larminat, P. (1980). Use of finite-memory wiener filters in scintigram processing. *European journal of nuclear medicine*, 5(5) :447–452.
- [Lenti and Veltri (2011)] Lenti, M. and Veltri, M. (2011). GEANT4 simulation of a 3D Compton imaging device. In *Nuclear Science Symposium - Medical Imaging Conference, 2011. IEEE*, pages 4175–4179.
- [Lingenfelter *et al.* (2009)] Lingenfelter, D. J., Fessler, J. A., and He, Z. (2009). Sparsity regularization for image reconstruction with poisson data. In *IS&T/SPIE Electronic Imaging*, pages 72460F–72460F. International Society for Optics and Photonics.
- [Links *et al.* (1990)] Links, J. M., Jeremy, R. W., Dyer, S. M., Frank, T. L., and Becker, L. C. (1990). Wiener filtering improves quantification of regional myocardial perfusion with thallium-201 spect. *Journal of nuclear medicine : official publication, Society of Nuclear Medicine*, 31(7) :1230–1236.
- [Littlewood and Paley (1931)] Littlewood, J. E. and Paley, R. E. (1931). Theorems on fourier series and power series. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(3) :230–233.
- [Litzenberg *et al.* (1992)] Litzenberg, D., Bajema, J., Becchetti, F., Brown, J., Raymond, R., Roberts, D., Caraher, J., Hutchins, G., Ronningen, R., Smith, R., *et al.* (1992). On-line monitoring and pet imaging of proton radiotherapy beams. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1992., Conference Record of the 1992 IEEE*, pages 954–956. IEEE.

- [Litzenberg *et al.* (1999)] Litzenberg, D., Roberts, D., Lee, M., Pham, K., Vander Molen, A., Ronningen, R., and Becchetti, F. (1999). On-line monitoring of radiotherapy beams : experimental results with proton beams. *Medical physics*, 26(6) :992–1006.
- [Llacer (1988)] Llacer, J. (1988). Positron emission medical measurements with accelerated radioactive ion beams. *Nuclear Science Applications*.
- [Lojacono (2013)] Lojacono, X. (2013). *Image reconstruction for Compton camera with application to hadrontherapy*. PhD thesis, Lyon, INSA.
- [Lojacono *et al.* (2011)] Lojacono, X., Maxim, V., and Prost, R. (2011). Calcul de la matrice des probabilités de transfert en imagerie compton 3d. In *XXIIIe Colloque GRETSI-Traitement du Signal et des Images (GRETSI'11)*.
- [Lojacono *et al.* (2013)] Lojacono, X., Richard, M.-H., Ley, J.-L., Testa, E., Ray, C., Freud, N., Létang, J. M., Dauvergne, D., Maxim, V., and Prost, R. (2013). Low statistics reconstruction of the Compton camera point spread function in 3D prompt- $\gamma$  imaging of ion beam therapy. *IEEE Trans. on Nuclear Science*, 60 :3355–3363.
- [Lopes *et al.* (2012)] Lopes, P. C., Pinto, M., Simões, H., Biegun, A., Dendooven, P., Oxley, D., Parodi, K., Schaart, D., and Crespo, P. (2012). Optimization of collimator designs for real-time proton range verification by measuring prompt gamma rays. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2012 IEEE*, pages 3864–3870.
- [Maass (1992)] Maass, P. (1992). The interior radon transform. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(3) :710–724.
- [Mackin *et al.* (2012)] Mackin, D., Peterson, S., Bedar, S., and Polf, J. (2012). Evaluation of a stochastic reconstruction algorithm for use in Compton camera imaging and beam range verification from secondary gamma emission during proton therapy. *Physics in Medicine and Biology*, 57 :3537–3553.
- [Madsen and Park (1985)] Madsen, M. T. and Park, C. H. (1985). Enhancement of spect images by fourier filtering the projection image set. *Journal of nuclear medicine : official publication, Society of Nuclear Medicine*, 26(4) :395–402.
- [Mallat (1989)a] Mallat, S. G. (1989a). Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 37(12) :2091–2110.
- [Mallat (1989)b] Mallat, S. G. (1989b). Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ). *Transactions of the American Mathematical Society*, 315(1) :69–87.
- [Mallat (1989)c] Mallat, S. G. (1989c). A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 11(7) :674–693.
- [Maxim (2014)] Maxim, V. (2014). Filtered backprojection reconstruction and redundancy in Compton camera imaging. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 23(1) :332–341.
- [Maxim *et al.* (2009)] Maxim, V., Frandes, M., and Prost, R. (2009). Analytical inversion of the Compton transform using the full set of available projections. *Inverse Problems*, 25(9) :1–21.
- [Maxim *et al.* (2015)] Maxim, V., Lojacono, X., Hilaire, E., Krimmer, J., Testa, E., Dauvergne, D., Magnin, I., and Prost, R. (2015). Probabilistic models and numerical calculation of the system matrix and of the sensitivity in list-mode mlem 3d reconstruction of compton camera image. *Physics in Medicine and Biology*.

- [Metropolis and Ulam (1949)] Metropolis, N. and Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, 44(247) :335–341.
- [Miller and Sampathkumaran (1982)] Miller, T. R. and Sampathkumaran, K. S. (1982). Digital filtering in nuclear medicine.
- [Min *et al.* (2006)] Min, C.-H., Kim, C. H., Youn, M.-Y., and Kim, J.-W. (2006). Prompt gamma measurements for locating the dose falloff region in the proton therapy. *Applied Physics Letters*, 89 :183517.
- [Mitani *et al.* (2004)] Mitani, T., Tanaka, T., Nakazawa, K., Takahashi, T., Takashima, T., Tajima, H., Nakamura, H., Nomachi, M., Nakamoto, T., and Fukazawa, Y. (2004). A prototype si/cdte Compton camera and the polarization measurement. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 51(5) :2432–2437.
- [Moon (2015)] Moon, S. (2015). On the determination of a function from its cone transform with fixed central axis. *arXiv preprint arXiv :1503.07616*.
- [Moteabbed *et al.* (2011)] Moteabbed, M., Espana, S., and Paganetti, H. (2011). Monte carlo patient study on the comparison of prompt gamma and pet imaging for range verification in proton therapy. *Physics in medicine and biology*, 56(4) :1063.
- [Natterer (1986)] Natterer, F. (1986). *The mathematics of computerized tomography*, volume 32. Siam.
- [Nguyen *et al.* (2007)] Nguyen, V.-G., Lee, S.-J., and Lee, M. (2007). GPU-accelerated 3D Bayesian image reconstruction from Compton scattered data. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 571 :255–258.
- [Noo *et al.* (2004)] Noo, F., Clackdoyle, R., and Pack, J. D. (2004). A two-step hilbert transform method for 2d image reconstruction. *Physics in Medicine and Biology*, 49(17) :3903.
- [Odaka *et al.* (2007)] Odaka, H., Takeda, S., Watanabe, S., Ishikawa, S.-n., Ushio, M., Tanaka, T., Nakazawa, K., Takahashi, T., Tajima, H., and Fukazawa, Y. (2007). Performance study of si/cdte semiconductor Compton telescopes with monte carlo simulation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 579(2) :878–885.
- [Oelfke *et al.* (1996)] Oelfke, U., Lam, G., and Atkins, M. (1996). Proton dose monitoring with pet : quantitative studies in lucite. *Physics in medicine and biology*, 41(1) :177.
- [Ogawa *et al.* (1984)] Ogawa, K., Nakajima, M., and Yuta, S. (1984). A reconstruction algorithm from truncated projections. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 3(1) :34–40.
- [Oonuki *et al.* (2007)] Oonuki, K., Tanaka, T., Watanabe, S., Takeda, S., Nakazawa, K., Ushio, M., Mitani, T., Takahashi, T., and Tajima, H. (2007). A stacked cdte pixel detector for a Compton camera. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 573(1) :57–60.
- [Ordonez *et al.* (1997)] Ordonez, C. E., Bolozdynya, A., and Chang, W. (1997). Dependence of angular uncertainties on the energy resolution of Compton cameras. In *Nuclear Science Symposium, 1997. IEEE*, volume 2.
- [Ortega *et al.* (2015)] Ortega, P. G., Torres-Espallardo, I., Cerutti, F., Ferrari, A., Gillam, J. E., Lacasta, C., Llosá, G., Oliver, J. F., Sala, P. R., Solevi, P., and Rafecas, M. (2015). Noise evaluation of Compton camera imaging for proton therapy. *Physics in Medicine and Biology*, 60 :1845–1863.



- [Paans and Schippers (1992)] Paans, A. and Schippers, J. (1992). Proton therapy in combination with pet as monitor : a feasibility study. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1992., Conference Record of the 1992 IEEE*, pages 957–959. IEEE.
- [Parodi *et al.* (2007)] Parodi, K., Paganetti, H., Shih, H. A., Michaud, S., Loeffler, J. S., DeLaney, T. F., Liebsch, N. J., Munzenrider, J. E., Fischman, A. J., Knopf, A., *et al.* (2007). Patient study of in vivo verification of beam delivery and range, using positron emission tomography and computed tomography imaging after proton therapy. *International Journal of Radiation Oncology\* Biology\* Physics*, 68(3) :920–934.
- [Parodi *et al.* (2008)] Parodi, K., Bortfeld, T., Enghardt, W., Fiedler, F., Knopf, A., Paganetti, H., Pawelke, J., Shikirin, G., and Shih, H. (2008). Pet imaging for treatment verification of ion therapy : Implementation and experience at gsi darmstadt and mgh boston. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 591(1) :282–286.
- [Parodi and Enghardt (2000)] Parodi, K. and Enghardt, W. (2000). Potential application of pet in quality assurance of proton therapy. *Physics in medicine and biology*, 45(11) :N151.
- [Parra (2000)] Parra, L. C. (2000). Reconstruction of cone-beam projections from Compton scattered data. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 47(4) :1543–1550.
- [Pawelke *et al.* (1996)] Pawelke, J., Byars, L., Enghardt, W., Fromm, W., Geissel, H., Hasch, B., Lauckner, K., Manfrass, P., Scharadt, D., and Sobiella, M. (1996). The investigation of different cameras for in-beam pet imaging. *Physics in medicine and biology*, 41(2) :279.
- [Pawelke *et al.* (1997)] Pawelke, J., Enghardt, W., Haberer, T., Hasch, B., Hinz, R., Krämer, M., Lauckner, K., and Sobiella, M. (1997). In-beam pet imaging for the control of heavy-ion tumour therapy. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 44(4) :1492–1498.
- [Peloso *et al.* (2011)] Peloso, R., Busca, P., Fiorini, C., Basilavecchia, M., Frizzi, T., Smeets, J., Roellinghoff, F., Prieels, D., Stichelbaut, F., and Benilov, A. (2011). Application of the hcam camera for imaging of prompt gamma rays in measurements of proton beam range. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2011 IEEE*, pages 2285–2289. IEEE.
- [Polf *et al.* (2009)] Polf, J., Peterson, S., Ciangaru, G., Gillin, M., and Beddar, S. (2009). Prompt gamma-ray emission from biological tissues during proton irradiation : a preliminary study. *Physics in Medicine and Biology*, 54(3) :731–743.
- [Priegnitz *et al.* (2015)] Priegnitz, M., Helmbrecht, S., Janssens, G., Perali, I., Smeets, J., Vander Stappen, F., Sterpin, E., and Fiedler, F. (2015). Measurement of prompt gamma profiles in inhomogeneous targets with a knife-edge slit camera during proton irradiation. *Physics in medicine and biology*, 60(12) :4849.
- [Radon (1917)] Radon, J. (1917). On determination of functions by their integral values along certain multiplicities. *Ber. der Sachische Akademie der Wissenschaften Leipzig, (Germany)*, 69 :262–277.
- [Richard *et al.* (2012)] Richard, M.-H., Dahoumane, M., Dauvergne, D., De Rydt, M., Dedes, G., Freud, N., Krimmer, J., Létang, J., Lojaco, X., Maxim, V., *et al.* (2012). Design study of the absorber detector of a Compton camera for on-line control in ion beam therapy. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 59(5) :1850–1855.
- [Ricker (1953)] Ricker, N. (1953). The form and laws of propagation of seismic wavelets. *Geophysics*, 18(1) :10–40.

- [Robert *et al.* (2013)] Robert, C., Dedes, G., Battistoni, G., Böhlen, T., Buvat, I., Cerutti, F., Chin, M., Ferrari, A., Gueth, P., Kurz, C., *et al.* (2013). Distributions of secondary particles in proton and carbon-ion therapy : a comparison between geant4 and fluka monte carlo codes. *Physics in medicine and biology*, 58(9) :2879.
- [Roellinghoff *et al.* (2014)] Roellinghoff, F., Benilov, A., Dauvergne, D., Dedes, G., Freud, N., Janssens, G., Krimmer, J., Létang, J., Pinto, M., Prieels, D., *et al.* (2014). Real-time proton beam range monitoring by means of prompt-gamma detection with a collimated camera. *Physics in medicine and biology*, 59(5) :1327.
- [Salomé *et al.* (1999)] Salomé, M., Peyrin, F., Cloetens, P., Odet, C., Laval-Jeantet, A.-M., Baruchel, J., and Spanne, P. (1999). A synchrotron radiation microtomography system for the analysis of trabecular bone samples. *Medical Physics*, 26(10) :2194–2204.
- [Sauve *et al.* (1999)] Sauve, A. C., Hero, A. O., Rogers, W. L., Wilderman, S. J., and Clinthorne, N. H. (1999). 3D image reconstruction for a Compton SPECT camera model. *IEEE Transactions in Nuclear Science*, 46(6) :2075–2084.
- [Schardt *et al.* (2010)] Schardt, D., Elsässer, T., and Schulz-Ertner, D. (2010). Heavy-ion tumor therapy : Physical and radiobiological benefits. *Reviews of modern physics*, 82(1) :383.
- [Seo *et al.* (2007)] Seo, H., An, S. H., Kim, J. K., and Kim, C. H. (2007). Monte carlo study of a double-scattering Compton camera with geant4. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 580(1) :314–317.
- [Seo *et al.* (2010)] Seo, H., Kim, C. H., Park, J. H., Kim, J. K., Lee, J. H., Lee, C. S., Kim, S. M., and Lee, J. S. (2010). Multitracing capability of double-scattering Compton imager with nai (tl) scintillator absorber. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 57(3) :1420–1425.
- [Shakirin *et al.* (2007)] Shakirin, G., Crespo, P., and Enghardt, W. (2007). A method for system matrix construction and processing for reconstruction of in-beam pet data. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 54(5) :1710–1716.
- [Shepp and Vardi (1982)] Shepp, L. A. and Vardi, Y. (1982). Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 1(2) :113–122.
- [Smeets *et al.* (2012)] Smeets, J., Roellinghoff, F., Prieels, F., Stichelbaut, F., Benilov, A., Fiorini, C., Peloso, R., Basilavecchia, M., Frizzi, T., Dehaes, J., *et al.* (2012). Prompt gamma imaging with a slit camera for real-time range control in proton therapy. *Physics in medicine and biology*, 57(11) :3371.
- [Smith (2005)] Smith, B. (2005). Reconstruction methods and completeness conditions for two Compton data models. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22 :445–459.
- [Smith (2011)] Smith, B. (2011). Line-reconstruction from Compton cameras : data sets and a camera design. *Optical Engineering*, 50 :1–11.
- [Smith (2012)] Smith, B. (2012). Computer simulations to demonstrate new inversion methods for Compton camera data. *Optical Engineering*, 51 :1–12.
- [Smith *et al.* (1978)] Smith, K., Solmon, D., Wagner, S., and Hamaker, C. (1978). Mathematical aspects of divergent beam radiography. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 75(5) :2055–2058.
- [Stichelbaut and Jongen (2003)] Stichelbaut, F. and Jongen, Y. (2003). Verification of the proton beam position in the patient by the detection of prompt gamma-rays emission. In *39th PTCOG meeting, San Francisco*.

- [Strong *et al.* (1990)] Strong, W., Bennett, K., Cabeza-Orcel, P., Deerenberg, A., Diehl, R., den Herder, W., Hermsen, W., Lichti, G., Lockwood, J., McConnell, M., *et al.* (1990). Maximum entropy imaging with comptel data. In *International Cosmic Ray Conference*, volume 4, page 154.
- [Sullivan *et al.* (2009)] Sullivan, J., Tornga, S., and Rawool-Sullivan, W. (2009). Extended radiation source imaging with a prototype Compton imager. *Applied Radiation and Isotopes*, 67 :617–624.
- [Suzuki *et al.* (2013)] Suzuki, Y., Yamaguchi, M., Odaka, H., Shimada, H., Yoshida, Y., Torikai, K., Satoh, T., Arakawa, K., Kawachi, N., Watanabe, S., *et al.* (2013). Three-dimensional and multienergy gamma-ray simultaneous imaging by using a si/cdte Compton camera. *Radiology*, 267(3) :941–947.
- [Takada *et al.* (2005)] Takada, A., Hattori, K., Kubo, H., Miuchi, K., Nagayoshi, T., Nishimura, H., Okada, Y., Orito, R., Sekiya, H., Tada, A., *et al.* (2005). Development of an advanced Compton camera with gaseous tpc and scintillator. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 546(1) :258–262.
- [Takahashi *et al.* (2003)] Takahashi, T., Nakazawa, K., Kamae, T., Tajima, H., Fukazawa, Y., Nomachi, M., and Kokubun, M. (2003). High resolution cdte detectors for the next-generation multi-compton gamma-ray telescope. In *Astronomical Telescopes and Instrumentation*, pages 1228–1235. International Society for Optics and Photonics.
- [Takeda *et al.* (2009)] Takeda, S. I., Aono, H., Okuyama, S., Ishikawa, S.-n., Odaka, H., Watanabe, S., Kokubun, M., Takahashi, T., Nakazawa, K., Tajima, H., *et al.* (2009). Experimental results of the gamma-ray imaging capability with a si/cdte semiconductor Compton camera. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 56(3) :783–790.
- [Takeda *et al.* (2012)] Takeda, S. I., Odaka, H., Ishikawa, S.-n., Watanabe, S., Aono, H., Takahashi, T., Kanayama, Y., Hiromura, M., and Enomoto, S. (2012). Demonstration of in-vivo multi-probe tracker based on a si/cdte semiconductor Compton camera. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 59(1) :70–76.
- [Tanaka *et al.* (2004)] Tanaka, T., Mitani, T., Watanabe, S., Nakazawa, K., Oonuki, K., Sato, G., Takahashi, T., Tamura, K., Tajima, H., Nakamura, H., *et al.* (2004). Development of an si/cdte semiconductor Compton telescope. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 229–240. International Society for Optics and Photonics.
- [Tanimori *et al.* (2004)] Tanimori, T., Kubo, H., Miuchi, K., Nagayoshi, T., Orito, R., Takada, A., Takeda, A., and Ueno, M. (2004). MeV  $\gamma$ -ray imaging detector with micro-tpc. *New Astronomy Reviews*, 48(1) :263–268.
- [Testa *et al.* (2009)] Testa, E., Bajard, M., Chevallier, M., Dauvergne, D., Foulher, F. L., Freud, N., Létang, J.-M., Poizat, J., Ray, C., and Testa, M. (2009). Dose profile monitoring with carbon ions by means of prompt-gamma measurements. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 267(6) :993–996.
- [Tobias *et al.* (1977)] Tobias, C., Benton, E., Capp, M., Chatterjee, A., Cruty, M., and Henke, R. (1977). Particle radiography and autoactivation. *International Journal of Radiation Oncology\* Biology\* Physics*, 3 :35–44.
- [Todd *et al.* (1974)] Todd, R. W., Nightingale, J. M., and Everett, D. B. (1974). A proposed gamma camera. *Nature*, 251 :132–134.

- [Tomitani *et al.* (1994)] Tomitani, T., Yoshikawa, K., Kanazawa, M., Wada, Y., and Kanai, T. (1994). Preliminary measurements of autoactivation of  $^{12}\text{C}$  beams with a commercially available pet. In *Proc. of NIRS International Seminar on the Application of Heavy Ion Accelerator to Radiation Therapy of Cancer in connection with XXI PTCOG Meeting, November*, pages 14–16.
- [Tomitani and Hirasawa (2002)] Tomitani, T. and Hirasawa, M. (2002). Image reconstruction from limited angle Compton camera data. *Physics in Medicine and Biology*, 47 :2129–2145.
- [Tornga *et al.* (2009)] Tornga, S. R., Sullivan, M. R., and Sullivan, M. W. R. (2009). Three-dimensional Compton imaging using list-mode maximum likelihood expectation maximization. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 56(3) :1372–1376.
- [Ueno *et al.* (2012)] Ueno, K., Mizumoto, T., Hattori, K., Higashi, N., Iwaki, S., Kabuki, S., Kishimoto, Y., Komura, S., Kubo, H., Kurosawa, S., *et al.* (2012). Development of the balloon-borne sub-MeV gamma-ray Compton camera using an electron-tracking gaseous TPC and a scintillation camera. *Journal of Instrumentation*, 7(01) :C01088.
- [Verburg *et al.* (2013)] Verburg, J. M., Riley, K., Bortfeld, T., and Seco, J. (2013). Energy- and time-resolved detection of prompt gamma-rays for proton range verification. *Physics in Medicine and Biology*, 58 :L37–L49.
- [Vynckier *et al.* (1993)] Vynckier, S., Derreumaux, S., Richard, F., Bol, A., Michel, C., and Wambersie, A. (1993). Is it possible to verify directly a proton-treatment plan using positron emission tomography? *Radiotherapy and Oncology*, 26(3) :275–277.
- [Watanabe *et al.* (2005)] Watanabe, S., Tanaka, T., Nakazawa, K., Mitani, T., Oonuki, K., Takahashi, T., Takashima, T., Tajima, H., Fukazawa, Y., Nomachi, M., *et al.* (2005). A Si/CDTE semiconductor Compton camera. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 52(5) :2045–2051.
- [Watanabe *et al.* (2006)] Watanabe, S., Tanaka, T., Oonuki, K., Mitani, T., Takeda, S., Kishishita, T., Nakazawa, K., Takahashi, T., Kuroda, Y., and Onishi, M. (2006). Development of CDTE pixel detectors for Compton cameras. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 567(1) :150–153.
- [Watanabe *et al.* (2014)] Watanabe, S., Tajima, H., Fukazawa, Y., Ichinohe, Y., Enoto, T., Fukuyama, T., Furui, S., Genba, K., Hagino, K., Harayama, A., *et al.* (2014). The Si/CDTE semiconductor Compton camera of the ASTRO-H soft gamma-ray detector (SGD). *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 765 :192–201.
- [Weitkamp *et al.* (2010)] Weitkamp, T., Tafforeau, P., Boller, E., Cloetens, P., Valade, J.-P., Bernard, P., Peyrin, F., Ludwig, W., Helfen, L., and Baruchel, J. (2010). Parallel-beam imaging at the ESRF beamline ID19 : current status and plans for the future. In *SRI 2009, 10TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON RADIATION INSTRUMENTATION*, volume 1234, pages 83–86. AIP Publishing.
- [Wilderman *et al.* (1998)a] Wilderman, S., Rogers, W., Knoll, G., and Engdahl, J. (1998a). Fast algorithm for list mode back-projection of Compton scatter camera images. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 45 :957–962.
- [Wilderman *et al.* (1998)b] Wilderman, S. J., Clinthorne, N. H., Fessler, J. A., and Rogers, W. L. (1998b). List-mode maximum likelihood reconstruction of Compton scatter camera images in nuclear medicine. In *Nuclear Science Symposium, 1998. Conference Record. 1998 IEEE*, volume 3, pages 1716–1720.

- [Wilderman *et al.* (2001)] Wilderman, S., Fessler, J., Clinthorne, N., LeBlanc, J., and Rogers, W. (2001). Improved modeling of system response in list mode EM reconstruction of Compton scatter camera images. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 48 :111–116.
- [Wilson (1946)] Wilson, R. R. (1946). Radiological use of fast protons. *Radiology*, 47(5) :487–491.
- [Xu *et al.* (2004)] Xu, D., He, Z., Lehner, C. E., and Zhang, F. (2004). 4-pi Compton imaging with single 3d position-sensitive cdznte detector. In *Optical Science and Technology, the SPIE 49th Annual Meeting*, pages 144–155. International Society for Optics and Photonics.
- [Xu and He (2007)] Xu, D. and He, Z. (2007). Gamma-ray energy-imaging integrated spectral deconvolution. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 574(1) :98–109.
- [Yang *et al.* (2010)] Yang, J., Yu, H., Jiang, M., and Wang, G. (2010). High-order total variation minimization for interior tomography. *Inverse problems*, 26(3) :035013.
- [Zhang and Zeng (2007)] Zhang, B. and Zeng, G. (2007). Two-dimensional iterative region-of-interest (roi) reconstruction from truncated projection data. *Medical physics*, 34(3) :935–944.
- [Zhu and El Fakhri (2013)] Zhu, X. and El Fakhri, G. (2013). Proton therapy verification with pet imaging. *Theranostics*, 3(10) :731.
- [Zhuang *et al.* (2004)] Zhuang, T., Leng, S., Nett, B. E., and Chen, G.-H. (2004). Fan-beam and cone-beam image reconstruction via filtering the backprojection image of differentiated projection data. *Physics in Medicine and Biology*, 49(24) :5489.
- [Zoglauer *et al.* (2005)] Zoglauer, A. C. *et al.* (2005). *First Light for the next Generation of Compton and Pair telescopes*. PhD thesis, Technische Universität München.
- [Zoglauer *et al.* (2006)] Zoglauer, A., Andritschke, R., and Schopper, F. (2006). MEGAlib—The medium energy gamma-ray astronomy library. *New Astron. Rev.*, 50 :629–632.
- [Zou *et al.* (2005)] Zou, Y., Pan, X., and Sidky, E. Y. (2005). Image reconstruction in regions-of-interest from truncated projections in a reduced fan-beam scan. *Physics in Medicine and Biology*, 50(1) :13.





---

**TITRE EN FRANCAIS**

Simulation et reconstruction 3D à partir de caméra Compton pour l'hadronthérapie : influence des paramètres d'acquisition

---

**RESUME EN FRANCAIS**

L'hadronthérapie est une méthode de traitement du cancer qui emploie des ions (carbone ou proton) au lieu des rayons X. Les interactions entre le faisceau et le patient produisent des radiations secondaires. Il existe une corrélation entre la position d'émission de certaines de ces particules et la position du pic de Bragg. Parmi ces particules, des  $\gamma$ -prompt sont produits par les fragments nucléaires excités et des travaux actuels ont pour but de concevoir des systèmes de tomographie par émission monophotonique capable d'imager la position d'émission ces radiations en temps réel, avec une précision millimétrique, malgré le faible nombre de données acquises. Bien que ce ne soit pas actuellement possible, le but in fine est de surveiller le dépôt de dose. La caméra Compton est un des système TEMP qui a été proposé pour imager ce type de particules, car elle offre une meilleure résolution énergétique et la possibilité d'avoir une image 3D. Cependant, en pratique l'acquisition est affectée par le bruit provenant d'autres particules secondaires, et les algorithmes de reconstruction des images Compton sont plus compliqués et encore peu aboutis, mais sur une bonne voie de développement. Dans le cadre de cette thèse, nous avons développé une chaîne complète allant de la simulation de l'irradiation d'un fantôme par un faisceau de protons allant jusqu'à la reconstruction tomographique des images obtenues à partir de données acquises par la caméra Compton. Nous avons étudié différentes méthodes de reconstruction analytiques et itératives, et nous avons développé une méthode de reconstruction itérative capable de prendre en compte les incertitudes de mesure sur l'énergie. Enfin nous avons développé des méthodes pour la détection de la fin du parcours des distributions  $\gamma$ -prompt reconstruites.

---

**TITRE EN ANGLAIS**

Simulation and reconstruction from Compton caméra for hadrontherapy : influence of the acquisition parameters

---

**RESUME EN ANGLAIS**

Hadrontherapy is a cancer treatment method which uses ions (proton or carbon) instead of X-rays. Interactions between the beam and the patient produce secondary radiation. It has been shown that there is a correlation between the emission position of some of these particles and the Bragg peak position. Among these particles, prompt- $\gamma$  are produced by excited nuclear fragments and current work aims to design SPECT systems able to image the emission position the radiation in real time, with a millimetric precision, despite the low data statistic. Although it is not currently possible, the goal is to monitor the deposited dose. The Compton camera is a SPECT system that proposed for imaging such particles, because it offers a good energy resolution and the possibility of a 3D imaging. However, in practice the acquisition is affected by noise from other secondary particles and the reconstruction algorithms are more complex and not totally completed, but the developments are well advanced. In this thesis, we developed a complete process from the simulation of irradiation of a phantom by a proton beam up to the tomographic reconstruction of images obtained from data acquired by the Compton camera. We studied different reconstruction methods (analytical and iterative), and we have developed an iterative method able to consider the measurement uncertainties on energy. Finally we developed methods to detect the end-of-range of the reconstructed prompt- $\gamma$  distributions.

---

**MOTS-CLES**

Hadronthérapie, protonthérapie,  $\gamma$ -prompt, surveillance de traitement, caméra Compton, tomographie, reconstruction d'images 3D, reconstruction analytique, reconstruction itérative, détection de fin de parcours

---

**INTITULE ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE**

Université de Lyon, CREATIS ; CNRS UMR5220 ; Inserm U1044 ; INSA-Lyon ; Université Lyon 1, 7 Av. Jean Capelle, 69621 VILLEURBANNE, France.