HAL
open science

Modélisation du contact entre matériaux hétérogènes : Application au contact Aube/Disque.

Koffi Espoir Koumi

To cite this version:

Koffi Espoir Koumi. Modélisation du contact entre matériaux hétérogènes : Application au contact Aube/Disque.. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ISAL0120 . tel-01371012

HAL Id: tel-01371012

https://theses.hal.science/tel-01371012v1

Submitted on 23 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre 2015-ISAL–0120 Année 2015

THÈSE

Modélisation du contact entre matériaux hétérogènes : Application au contact Aube/Disque

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Koffi Espoir KOUMI

Thèse soutenue le 04 Décembre 2015 devant la Commission d'examen

Jury

David HILLS	Professeur, University of Oxford	Président
Giuseppe CARBONE	Professeur, Politecnico di Bari	Rapporteur
Sylvie POMMIER	Professeur, ENS-Cachan	Rapporteur
Stéphane BERBENNI	DR CNRS, Université de Lorraine	Rapporteur
Philippe BOISSE	Professeur, INSA-Lyon	Examinateur
Frédéric FEYEL	HdR, SAFRAN-TECH	Examinateur
Daniel NELIAS	Professeur, INSA Lyon	Dir. de thèse
Thibaut CHAISE	Maître de Conférences, INSA Lyon	Invité
Julien LEROUX	Ingénieur-Docteur, SNECMA	Invité

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** **http://www.edchimie-lyon.fr** Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** **http://edeea.ec-lyon.fr** Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 65 55 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	**EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION** **http://e2m2.universite-lyon.fr** Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@ univ-lyon1.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** **http://www.ediss-lyon.fr** Sec : Samia VUILLERMOZ Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	**INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES** **http://infomaths.univ-lyon1.fr** Sec :Renée EL MELHEM	Mme Sylvie CALABRETTO Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 infomaths@univ-lyon1.fr
Matériaux	**MATERIAUX DE LYON** **http://ed34.universite-lyon.fr** Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** **http://mega.ec-lyon.fr** Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	**ScSo*** **http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/** Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Remerciements

J'aimerai tout d'abord rappeler combien cette aventure a été formidable, magnifique et profondément enrichissante aussi bien sur le plan scientifique qu'humain.
Je remercie mon directeur de thèse, le Professeur Daniel Nélias de m'avoir donné cette immense chance de faire ma thèse avec lui au LAMCOS. Merci pour ta confiance, tes conseils avisés et ta rigueur scientifique qui m'ont permis de mener à bien ce projet. Je tiens également à remercier mon co-encadrant Thibaut Chaise, pour les discussions enrichissantes, les conseils et tout le temps passé à debugger le code semi-analytique. Je remercie SNECMA d'avoir financé cette thèse et mon encadrant industriel, Julien Leroux pour son soutien inconditionnel et sa disponibilité durant ces trois années de thèse.
Je souhaite également exprimer toute ma reconnaissance à l'ensemble des membres du jury pour avoir eu la gentillesse de m'accorder un peu de leur temps. Je remercie David Hills qui m'a fait l'immense honneur de présider ce jury de thèse. Mes sincères remerciements à Giuseppe Carbone, Sylvie Pommier, Stéphane Berbenni d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce travail de recherche. Je remercie Frédéric Feyel et Philippe Boisse d'avoir examiné ce travail.
Je tiens à remercier tout le personnel administratif et technique du LAMCOS, particulièrement Isabelle Comby, secrétaire de l'équipe MSE du LAMCOS, pour son indéfectible efficacité et sa gentillesse ; Arnaud Duval pour la partie informatique et numérique. Je tiens également à remercier sincèrement Philippe Chaudet, Lv, Amira, Tristan pour leurs aides sur la partie expérimentale.
Je remercie l'ensemble de mes collègues du LAMCOS : Didier, pour avoir relu le manuscrit , Lv, Dam (mon coloc de bureau), Titi, Clem, Coco, Eric, Hana, Yaya, Fatma, Lan, Nicolas, Rob, Caro, Nacer, Louis, Shaocheng, Guillermo, Wenjun, Samy, père Alex, Alexandre, Paul, Jerôme, Guillaume, Bhavesh, Shuai, Ye, Wenqi et tous ceux que j'ai pu oublier (et qui j'espère m'excuseront). Je te remercie Manu pour ton aide dans la constitution du dossier de soutenance, l'impression de tous les manuscrits de thèse. Merci à toi Pipo pour le pot de thèse.
Je tiens également à remercier mes camarades thésards de la SNECMA, J.P (bientôt papa) et A.C pour tous les bons moments passés ensemble. Je remercie Marion pour son soutien. Fabien pour sa bonne humeur. Arnaud et Mikhael pour les conseils par rapport à la soutenance, Sylvain, Christian, MarieO, Didier, Geoffray, Mathias, Adrien, Loic, Francis, Fabrice, Raul, Florence, Antoine, Juan-Antonio. Marion, Lionel, Laurent, Asmae, Bruno et Geoffray de m'avoir considérablement simplifié la fin de la thèse.
Un mot pour ceux qui étaient à la genèse de cette aventure. Pierre, que j'appelle affectueusement grand frère ; Mr Merlet, Mme Beaumadier et Mr Plante.
A mes petits frères Jean-Claude et Junior, je vous remercie pour votre soutien inconditionnel. A celle qui m'a accompagné et soutenu durant ces années. Ta présence m'a rassuré et comblé de bonheur. Tes précieux conseils ont su guider mes pas. Enfin à mes parents Jean-Pierre et Monique qui ont sacrifié leur vie pour rendre la

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

mienne la plus agréable possible. Je ne vous remercierai jamais assez. Je vous dédie ce mémoire de thèse.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la problématique du contact entre matériaux hétérogènes. L'industrie (automobile, aéronautique, spatiale, ...) s'intéresse de plus en plus à ces types de matériaux. Il s'agira par exemple des alliages métalliques, des matériaux poreux, matériaux composites (composites tissés, interlocks 3D, interlocks 2D), des billes céramiques contenant des impuretés (porosités/précipités),... Dans ce manuscrit, un modèle de contact basé sur les méthodes semi-analytiques a été développé. Un algorithme de gradient conjugué est utilisé afin de résoudre rapidement le problème de contact. Le modèle permet de prendre en compte la présence d'une ou de plusieurs hétérogénéités isotropes/anisotropes dans le problème de contact. Une approche inspirée de la méthode de l'inclusion équivalente proposée par Eshelby est utilisée dans le solveur de contact pour prendre en compte l'effet de ces hétérogénéités. Les méthodes de transformées de Fourier rapides (FFT) permettent d'accélérer les calculs. Une méthode numérique a été mise en œuvre afin de prendre en compte l'interaction entre plusieurs hétérogénéités. Le massif peut être élastique ou viscoélastique. L'approche développée dans la thèse peut résoudre à la fois les problèmes d'indentation, de roulement/glissement ou de fretting en présence de matériaux élastiques hétérogènes, viscoélastiques homogènes ou hétérogènes. Les solutions sont données en termes de champs de pressions, de cisaillements et de contraintes. Dans le cas des matériaux viscoélastiques le code de calcul est capable de fournir le coefficient de frottement apparent ainsi que toutes les variables de contact aussi bien en régime permanent que transitoire. Le modèle a été validé par comparaison avec la méthode des éléments finis classiques en utilisant le logiciel commercial Abaqus v6.11. Le temps de calcul ainsi que l'espace mémoire nécessaire sont considérablement réduits par rapport à la méthode éléments finis. La parallélisation a été introduite dans le code de contact afin de réduire toujours plus le temps de calcul. Il s'agit d'un code robuste, rapide et facilement utilisable en Bureau d'Etudes. Une approche expérimentale originale a été mise en place afin de mesurer les champs de déplacements à l'interface des corps en contact. De bonnes corrélations essais/calculs ont été obtenues. Enfin quelques applications industrielles ont été présentées. Un couplage entre un code éléments finis structurel et le code semi-analytique de résolution de contact a été également réalisé.

Mots clés: contact, fretting, semi-analytique, matériaux hétérogènes, composites tissés, viscoélasticité, anisotropie, approche multi-échelle, couplage de code, parallélisation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Abstract

The present PhD thesis deals with contact problems between heterogeneous materials. Nowadays heterogeneous materials are extensively used in several industrial domains (automotive, aeronautics, aerospace, ...). Heterogeneous materials involve porous materials, aluminum alloys, composites materials (woven composites, interlocks 3D, interlocks 2D), metallic or ceramics materials containing impurities (porosities/precipitates). In this work, a contact model based on semi-analytical method is proposed. A conjugate gradient algorithm is used for a fast resolution of contact equations. The model can account for one or more isotropic/anisotropic inhomogeneities. An approach taking inspiration from the Eshelby equivalent inclusion method is used in the contact solver to account for the effect of inhomogeneities. 2D and 3D Fast Fourier Transforms (FFT) are used to speed up the computation. A numerical method is implemented in order to take into account interactions between many heterogeneities. The semi-infinite space/ matrix can be either elastic or visco-elastic. The model developed in the present PhD thesis can solve indentation, rolling/sliding or fretting contact problems between heterogeneous elastic materials, homogeneous or heterogeneous visco-elactic materials. In the case of visco-elastic materials, the model permits to get the solution in terms of contact pressure distribution, subsurface stresses, apparent friction coefficient, both in the transient and then steady-state regimes. The model has been validated by performing a comparison with the results of a finite element model. The CPU time and memory necessary are greatly reduced in comparison with the classical finite element method. The model developed is fast, robust and extremely easy to use. An original experimental approach was proposed in order to measure the displacement fields at interface of two contacting bodies. A good agreement between experimental results and numerical simulations is obtained. Finally, the model is applied on some industrial applications. A coupling between a finite element model and the semi-analytical code allow to take into account the effects of structure on contact problem.

Keywords: contact mechanics, fretting, semi-analytic method, heterogeneous materials, woven composites , viscoelasticity, anisotropy, multiscale modeling, code coupling, parallelization.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Table des matières

Table des matières **i**

Introduction **1**

1 Etat de l'art **5**
1.1 Contexte industriel 7
1.1.1 Présentations des turboréacteurs 7
1.1.2 Objectif de l'étude 9
1.1.3 Impuretés matériaux, inclusions, défauts 9
1.1.4 Contact aube/disque. 10
1.1.5 Modes de défaillances du contact aube/disque sous chargement de fretting. 13
1.2 Matériaux composites. 21
1.2.1 Nature de la matrice 21
1.2.2 Forme des renforts 23
1.2.3 Structure des pièces composites. 24
1.3 Homogénéisation et méthodes numériques multi-échelles 27
1.3.1 Théorie de l'homogénéisation classique 27
1.3.2 Quelques approches d'homogénéisation 31
1.3.3 Méthode FE2 34
1.3.4 Calcul direct 34
1.4 Modélisation en mécanique des contacts 38
1.4.1 Approches analytiques 38
1.4.2 Approches numériques 39
1.4.3 Cas spécifique du contact aube/disque, aube métallique 41
1.4.4 Cas spécifique du contact aube/disque pour une aube composite 43
1.5 Synthèse 44

2 Méthodes semi-analytiques en mécanique du contact **47**
2.1 Introduction 49
2.2 Mise en équation du problème 50
2.2.1 Cinématique du contact 50
2.3 Discrétisation numérique 52

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

2.3.1 Equations du problème de contact 53
2.3.2 Contact normal 53
2.3.3 Contact tangentiel 54
2.3.4 Couplage du problème normal et tangentiel 55
2.3.5 Contraintes en sous-couche 55
2.4 Résolution numérique 56
2.4.1 Transformées de Fourier discrètes et FFT 56
2.4.2 Méthode DC-FFT 61
2.4.3 Cas 2D 61
2.4.4 Cas 3D 62
2.5 Résolution du problème de contact 62
2.6 Algorithme général du solveur de contact 64
2.7 Synthèse 65

3 Massif élastique hétérogène 67
3.1 Etat de l'art 69
3.2 Formulation générale du problème de contact 71
3.3 Prise en compte des hétérogénéités 71
3.3.1 Solution en espace infini 71
3.3.2 Solution en espace semi-infini 74
3.3.3 Déplacement normal dû aux hétérogénéités 76
3.3.4 Prise en compte de l'inclinaison de l'inclusion 77
3.3.5 Prise en compte de l'effet des hétérogénéités dans l'algorithme de contact 78
3.4 Validation du modèle développé 81
3.5 Résultats et étude paramétrique 84
3.5.1 Hétérogénéité isotrope 84
3.5.2 Hétérogénéité anisotrope 88
3.6 Cas connexes 96
3.6.1 Hétérogénéités cubiques 96
3.6.2 Hétérogénéités et contact tangentiel 97
3.7 Prise en compte de plusieurs hétérogénéités 100
3.7.1 Equations du problème 100
3.7.2 Méthodologie numérique 101
3.7.3 Algorithmes de résolution numérique 102
3.7.4 Validation dans le cas d'un matériau revêtu 105
3.8 Améliorations numériques : nouvelle méthode de décomposition . . . 111
3.9 Améliorations numériques : parallélisation 113
3.9.1 Différents types d'architecture 114
3.9.2 Mesure de la performance 116
3.9.3 Mémoire partagée : environnement OpenMP 117
3.9.4 Mémoire distribuée : environnement MPI 120
3.10 Synthèse 122

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4 Théorie du contact viscoélastique 125
4.1 Introduction 127
4.2 Généralités sur les matériaux viscoélastiques 130
4.3 Contact normal sur massif homogène viscoélastique 134
4.3.1 Equations du modèle 134
4.3.2 Mise en œuvre numérique 137
4.3.3 Validation 138
4.3.4 Quelques résultats 141
4.4 Contact normal sur massif viscoélastique hétérogène 146
4.4.1 Equations du modèle 146
4.4.2 Validation. 151
4.4.3 Résultats 154
4.5 Bilan partiel 162
4.6 Roulement sur massif homogène 164
4.6.1 Equations du modèle 164
4.6.2 Validations 166
4.6.3 Résultats 169
4.6.4 Cas d'une sphère viscoélastique ou élastique en contact roulant/glissant avec un massif viscoélastique 180
4.7 Roulement sur massif viscoélastique hétérogène 185
4.7.1 Brève description du problème 185
4.7.2 Résultats 188
4.8 Bilan partiel 198
4.9 Fretting viscoélastique 199
4.9.1 Mise en équation 199
4.9.2 Résultats 200
4.10 Bilan partiel 212
4.11 Synthèse 212

5 Vers une validation expérimentale 215
5.1 Introduction 217
5.2 Dispositif expérimental 217
5.2.1 Cahier de charges 217
5.2.2 Principe de fonctionnement 218
5.3 Eprouvette 223
5.3.1 Eprouvette homogène 224
5.3.2 Eprouvette hétérogène 225
5.3.3 Eprouvette composites 225
5.4 Réalisation des essais 226
5.4.1 Propriétés matériaux des corps en contact 226
5.4.2 Détermination du coefficient de frottement 226
5.4.3 Protocole opératoire 227

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

5.4.4 Post-traitement des résultats et méthode de corrélation d'images numériques. 228
5.5 Quelques résultats d'essais 230
5.5.1 Éprouvette homogène 231
5.5.2 Éprouvette composite 233
5.6 Vers une estimation expérimentale de la pression de contact 236
5.7 Synthèse 237

6 Applications sur quelques cas industriels 239
6.1 Méthodologie multi-échelle de calculs sur pièces 240
6.1.1 Description du modèle éléments finis 240
6.1.2 Cycles de chargement 241
6.1.3 Résultats 241
6.2 Etude de la nocivité des défauts dans les billes céramiques. 247
6.3 Applications sur matériaux composites idéalisés 250
6.4 Synthèse 254

Conclusions et perspectives 255

A Coefficients d'influences 259
A.1 Espace élastique semi-infini. 259
A.2 Prise en compte des hétérogénéités. 263

B Dispositif expérimental 267
B.1 Objectifs. 267
B.2 Compléments sur le dispositif expérimental 267
B.2.1 Capteur multi-composants. 267
B.2.2 Actionneur pour appliquer le moment suivant l'axe Z. 267
B.2.3 Actionneur pour appliquer la force/déplacement tangentiel Y. 267
B.2.4 Guidages à Billes suivant Y. 267
B.2.5 Caractéristiques de la caméra haute résolution utilisée pour l'acquisition d'images. 267
B.2.6 Caractéristiques géométriques, optiques et mécaniques de la vitre utilisée. 267
B.3 Eprouvette 280
B.3.1 Billes céramiques. 280
B.3.2 Processus de broyage de la résine. 280
B.3.3 Enrobage à chaud. 280
B.3.4 Dimensions. 281
B.4 Tomographie 283
B.4.1 Phoenix v—tome—x s, système informatisé utilisé pour la tomographie. 283
B.4.2 Protocole de traitement des images issues de la tomographie. . 283
B.4.3 Tableau récapitulatif. 283

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

B.5 Essais 290
B.5.1 Réglages acquisitions images 290
B.5.2 Protocole de traitement des résultats 290
B.6 Film de mesure de la distribution des champs de pression 292
B.7 Résultats éprouvette hétérogéne 295

Bibliographie **297**

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Introduction

Contexte industriel et scientifique

L'étude et la compréhension des problèmes de contact est une problématique omniprésente dans plusieurs domaines : automobiles, nucléaires, aéronautiques, aérospatiales, transports ferroviaires, la marine, les turbines à vapeur, escalators, ascenseurs, ... Les endommagements liés aux problèmes de contact sont nombreux : amorçage et propagation de fissures entraînant la rupture de pièces, l'usure des surfaces en contact, écaillage de fatigue, grippage, ...
Le sujet a fait l'objet de plusieurs travaux. La littérature recense par exemple plus de 3000 articles scientifiques qui traitent des problèmes d'usure de contact. Cependant l'évolution incessante des matériaux de structures utilisés, la nécessité d'une meilleure prédiction de la durée de vie des composants, l'optimisation des méthodes et pratiques de conception, la recherche incessante de performances toujours plus élevées obligent les industriels à revoir sans cesse leurs outils de modélisation des problèmes de contact.
Des entreprises comme SKF, leader mondial dans la conception et la fabrication de roulements pour les industries aéronautiques et aérospatiales, ont introduit depuis peu une nouvelle génération de roulements appelés roulements hybrides. Ces roulements avec des billes céramiques permettent de réduire la masse des composants, ont de très bonnes propriétés isolantes, supportent des vitesses plus élevées et ont une longue durée de vie en comparaison avec des roulements tout acier. Le seul inconvénient réside dans le fait que ces billes présentent des défauts (type porosités et inclusions) et sont donc hétérogènes. La quasi totalité des outils de dimensionnement de roulements existant sur le marché, supposent un contact Hertzien entre matériaux homogènes. L'évolution technologique engendrée par l'avènement des roulements hybrides nécessite une évolution des outils de calculs et de dimensionnement des roulements prenant en compte le caractère hétérogène des billes céramiques, l'effet de la plasticité, ... Les modèles et outils de calculs doivent évoluer afin de répondre à ces problématiques.
La société SNECMA du groupe SAFRAN, leader dans le domaine de la conception et la fabrication des moteurs d'aviations civiles et militaires, a toujours été intéressée par les problématiques de fretting au niveau du contact aube/disque. Dans le cadre de la nouvelle génération de moteurs (LEAP-1A, LEAP-1B), les aubes sont

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

fabriquées en matériaux composites tissés 3D à matrice organique (CMO) ou à matrice céramique (CMC). Ces modifications ont permis de réduire considérablement la masse du moteur et donc la consommation de carburant (15%), les émissions d'oxyde d'azote (50%) et le bruit (jusqu'à 15 décibels). Les pieds d'aubes sont soumis à des sollicitations de type fretting, qui peuvent engendrer l'amorçage et la propagation de fissures ainsi que l'usure des surfaces en contact. Si la tribologie maîtrise assez bien la résolution du problème de contact entre matériaux homogènes, ceci n'est pas encore le cas avec des matériaux contenant des hétérogénéités ou pour les matériaux composites. Les résultats obtenus depuis des années dans le cas des aubes en titane sont donc difficilement transposables au cas des aubes composites. Surtout qu'il est désormais bien établi que l'orientation locale des fibres peut avoir un effet prépondérant sur le problème de contact, l'usure, ... Une difficulté supplémentaire peut être relevée dans le cas des matériaux composites à matrices organiques, où la matrice est viscoélastique. La viscoélasticité implique la prise en compte des effets d'histoire sachant que le contact viscoélastique en soi, contrairement au contact élastique, est très peu étudié dans la littérature. Les méthodes d'homogénéisation classiques ne peuvent plus s'appliquer de manière automatique dans le cas de ces matériaux composites. Le caractère très localisé des problèmes de contact ne rend pas possible la séparabilité des échelles. Cette rupture technologique doit être suivie d'une rupture au niveau des approches de résolution des problèmes de contact. L'objectif de cette thèse est donc de proposer une méthode de résolution de contact entre matériaux hétérogènes/composites. Le modèle doit pouvoir prendre en compte des hétérogénéités isotropes/anistropes noyées dans des matrices élastiques ou viscoélastiques. Il s'agit d'un modèle basé sur les méthodes semi-analytiques. Une approche expérimentale a été développée afin de proposer des pistes pour valider les méthodes numériques.

Présentation du manuscrit

Le premier chapitre introduit le contexte industriel notamment la problématique du contact dans les moteurs aéronautiques. Une présentation succincte des turboréacteurs sera faite afin de faciliter la compréhension du contexte industriel de l'étude. Un zoom sera fait sur le contact aube disque ainsi que sur les différents modes de défaillances. Une classification des matériaux composites suivant plusieurs critères sera réalisée. Les différentes méthodes multi-échelles d'estimation du comportement ou de modélisation des matériaux multi-échelles seront présentées. Les différentes approches de résolution des problèmes de contact seront ensuite détaillées. Un accent particulier sera mis sur la difficulté inhérente à la modélisation du contact entre matériaux hétérogènes.
Le deuxième chapitre présente les méthodes semi-analytiques appliquées à la mécanique du contact. Ces approches sont utilisées depuis plus d'une dizaine d'années maintenant par l'équipe du Professeur Daniel Nélias au LaMCos de l'INSA

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

de Lyon. Ces méthodes sont basées sur des solutions analytiques et utilisent des méthodes numériques spécifiques. Ainsi donc, dans ce chapitre seront présentés successivement les méthodes de FFT et DC-FFT ainsi que les algorithmes de Gradient-conjugué. La méthode utilisée pour la discrétisation du massif et des équations du contact sera également détaillée.
Dans le troisième chapitre, le modèle permettant de prendre en compte des hétérogénéités isotropes/anisotropes dans une matrice élastique isotrope sera présenté. Les notions d'inclusion équivalente d'Eshelby et les fonctions potentiels seront reprises en se basant sur les travaux d'Eshelby [ESH 57, ESH 59], Moschovodis et Mura [MOS 75]. Le modèle sera validé par une comparaison avec la méthode des éléments finis. Une méthode numérique a été mise en œuvre pour la prise en compte de l'interaction entre plusieurs hétérogénéités. Des cas d'applications sur massif revêtu, avec revêtement élastique seront présentés. Beaucoup d'améliorations numériques ont été apportées afin de rendre le code plus robuste et plus rapide. Une parallélisation OpenMP/MPI et une nouvelle méthode de décomposition ont été introduites. Les gains en terme de temps de calcul obtenus peuvent aller jusqu'à 11 sur un PC portable classique comparé au cas initial.
Le quatrième chapitre s'intéressera à la théorie du contact viscoélastique. Une approche originale basée sur les méthodes semi-analytiques pour résoudre le problème de contact entre matériaux viscoélastiques, homogènes ou hétérogènes est présentée. Des applications au cas d'indentation, de roulement et de fretting sont présentées. Le modèle permet entre autres de quantifier le coefficient de frottement apparent induit par l'effet de la viscoélasticité dans le cas du roulement, glissement ou du fretting. Le modèle fournit des solutions en termes de champs de pression mais aussi de champs de contraintes aussi bien en régime permanent que transitoire. Il s'agit des résultats tout à fait nouveaux comparés à ceux existants dans la littérature.
Dans le chapitre 5, il s'agira principalement de présenter le dispositif expérimental développé au LAMCOS pour mesurer des champs de déplacements à l'interface des corps en contact. Ce dispositif a fait l'objet de très nombreuses modifications durant cette thèse afin d'arriver à des mesures quantitatives et qualitatives. Le dispositif ainsi que le protocole expérimental seront présentés. La tomographie sera utilisée afin de connaitre la microstructure des éprouvettes d'essais en contact. Les techniques de corrélation d'images 2D permettront de remonter aux champs de déplacements à l'interface des deux corps en contact. Les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus au travers d'une simulation numérique ou de calculs analytiques. Le dispositif expérimental a fait l'objet d'un dépôt de brevet SNECMA/LAMCOS.
Dans le dernier chapitre, le modèle sera appliqué sur trois cas industriels différents. Une méthodologie multi-échelle de calculs sur pièces sera présentée. Un prototype de couplage entre un modèle éléments finis et le code semi-analytique sera réalisé pour résoudre le contact aube/disque. Ensuite l'étude de la nocivité de défauts dans les billes céramiques sera effectuée et enfin une application dans le cas d'un matériau composite idéalisé. Les résultats dans le cas de tissages 3D ne pouvant être présentés pour des raisons de confidentialité.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Enfin, une conclusion générale sera formulée ainsi qu'un ensemble de perspectives.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 1

Etat de l'art

La première partie de ce chapitre s'intéresse au contexte industriel de ce sujet de thèse. Un état de l'art portant sur la problématique du contact entre matériaux hétérogènes est ensuite exposé.

Sommaire

1.1 Contexte industriel 7

1.1.1 Présentations des turboréacteurs 7

1.1.2 Objectif de l'étude 9

1.1.3 Impuretés matériaux, inclusions, défauts 9

1.1.4 Contact aube/disque. 10

1.1.5 Modes de défaillances du contact aube/disque sous chargement de fretting. 13

1.2 Matériaux composites. 21

1.2.1 Nature de la matrice 21

1.2.2 Forme des renforts 23

1.2.3 Structure des pièces composites. 24

1.3 Homogénéisation et méthodes numériques multi-échelles . 27

1.3.1 Théorie de l'homogénéisation classique 27

1.3.2 Quelques approches d'homogénéisation 31

1.3.3 Méthode FE2 34

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

1.3.4 Calcul direct 34
1.4 Modélisation en mécanique des contacts 38
1.4.1 Approches analytiques 38
1.4.2 Approches numériques 39
1.4.3 Cas spécifique du contact aube/disque, aube métallique . . . 41
1.4.4 Cas spécifique du contact aube/disque pour une aube composite 43
1.5 Synthèse 44

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

1.1 Contexte industriel

La problématique du contact entre matériaux homogènes/hétérogènes est ancienne et récurrente. Elle est présente dans de nombreux domaines ; de l'automobile à l'aérospatiale en passant par l'aéronautique. Les bureaux d'études doivent tenir compte des endommagements liés au contact dans le dimensionnement et la conception des mécanismes. Chez les motoristes aéronautiques, les problématiques liées au contact se posent à plusieurs endroits du moteur. Il est essentiel de disposer d'outils de calculs robustes permettant de résoudre les problèmes de contact. La robustesse et la fiabilité de ces outils permettront de réduire les campagnes d'essais, d'optimiser les dimensions des pièces, de mieux prédire les durées de vie, ...
Dans un premier temps, le principe de fonctionnement d'un turboréacteur sera présenté. La deuxième partie mettra en relief la problématique du contact entre matériaux hétérogènes dans le cas des turboréacteurs civils.

1.1.1 Présentations des turboréacteurs

Le turboréacteur est un système de propulsion essentiellement utilisé sur les avions de type commercial ou militaire. Il est apparu à la fin du XIXème siècle et a supplanté tous les autres modes de propulsion. Le turboréacteur peut être mono-, double-, ou triple corps. Un corps est un ensemble compresseur-turbine accouplé sur un même arbre et tournant donc à la même vitesse. Les turboréacteurs font appel à deux types de technologies : les turboréacteurs simple-flux et les turboréacteurs double-flux. Les turboréacteurs à simple flux sont bruyants, polluants et ont une consommation spécifique élevée. Ils n'atteignent de bons rendements qu'au-delà du $Mach$ 1. Le turboréacteur simple-flux est surtout utilisé pour les grandes vitesses de vol et dans le domaine militaire (avions de combat).

Dans le cas des turboréacteurs à double-flux, on admet plus d'air qu'il n'est nécessaire au générateur de gaz afin de réduire la consommation de carburant et d'augmenter le rendement de propulsion. Le débit (ou flux) supplémentaire s'écoule en dérivation autour du générateur de gaz. Les turboréacteurs double-flux sont plus économiques aux vitesses subsoniques. Dans ces moteurs une soufflante de grande dimension permet d'absorber un gros débit massique qui ne passe qu'en partie dans le compresseur BP. L'air pré-comprimé par la soufflante qui ne passe pas dans le compresseur BP, appelé flux froid, contourne la partie chaude jusqu'à la tuyère où il est éjecté, mélangé ou non avec les gaz chauds (Fig.1.1). Cela permet, pour des vitesses modérées, en dessous de Mach 1.5 environ, d'augmenter la poussée par augmentation du débit de gaz, et de réduire considérablement le bruit.

La plupart des moteurs civils développés ou co-développés par SNECMA ($CFM56-5B$, $LEAP-1A$, $LEAP-1B$) sont des turboréacteurs « double-corps/double flux (Fig.1.1) ». Tout turboréacteur « double-corps/double flux » est composé des quatres entités suivantes

– la soufflante ou fan. Les dimensions de la soufflante sont beaucoup plus grandes

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

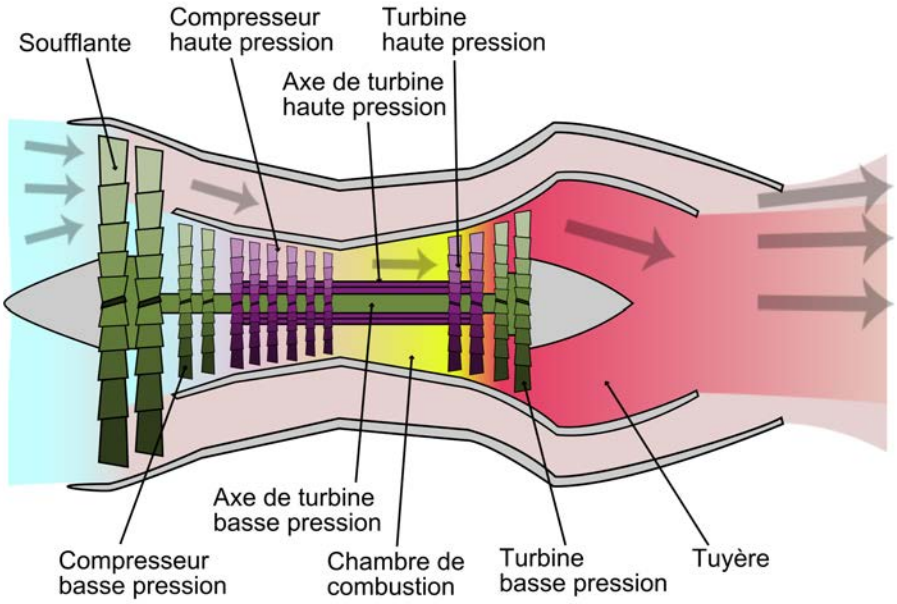


FIGURE 1.1 – Représentation simplifiée d'un turboréacteur civil double corps et double flux.

que celles des étages d'après. La soufflante comprime le flux d'air qui serait divisé en un flux primaire et secondaire. Le flux secondaire fournit l'essentiel de la poussée (80%).

- le compresseur Basse Pression (BP) et Haute Pression (HP). Le flux d'air passe dans les compresseurs BP et HP où il est accéléré avant d'arriver à la chambre de combustion.
- la chambre de combustion. C'est l'endroit où est injecté le carburant. L'ajout de carburant à l'air comprimé permet la combustion du mélange ce qui augmente l'énergie et la température du flux.
- les turbines Haute Pression et Basse Pression. Une partie de l'énergie cinétique des gaz de combustion est utilisée pour actionner le compresseur Haute Pression, l'ensemble du compresseur Basse Pression et la soufflante. Les gaz de combustion sont ensuite éjectés à grande vitesse à l'arrière du moteur et leur énergie cinétique restante assure la propulsion par réaction.

Au sein du moteur, l'ensemble des pièces en contact peuvent être soumis à des sollicitations de matage, de fretting, de type roulement (avec ou sans glissement). Suivant la nature des sollicitations, différents types endommagement peuvent être rencontrés : rayure, écaillage, usure, oxydation, grippage, fissuration, formation de débris ... Dans le moteur, les endommagements liés à des problématiques de fretting, peuvent être observés sur des pièces aussi diverses que les aubes, disques, paliers, cannelures, roulements, douilles, tambours, joints d'étanchéité, ... Les conséquences peuvent alors aller de la perte de cote, à la perte de fonctionnalité, voire à la rupture des pièces en fatigue. Pour les motoristes, il est essentiel d'acquérir une solide

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

connaissance de l'évolution des contacts soumis au fretting, de prédire les durées de vie des pièces et de rechercher de nouvelles solutions palliatives. Les enjeux sont la garantie de la sécurité et de l'intégrité des composants, l'optimisation de la maintenance et l'innovation technologique. Cette thèse a été réalisée au sein du département « Méthodes et Outils de Calculs ». Le but des « Méthodes » est de fournir des méthodologies et outils aux autres départements (cannelures, roulements, ...). Les approches développées dans cette thèse peuvent trouver des applications dans une grande partie des domaines cités plus haut (roulements, cannelures, ...). Les exemples d'applications s'intéresseront principalement au contact aube/disque ainsi qu'au cas des roulements (roulements hybrides).

1.1.2 Objectif de l'étude

L'objectif de cette thèse est de développer des modèles permettant une résolution rapide du problème de contact entre matériaux hétérogènes élastiques ou viscoélastiques. La problématique du contact hétérogène se pose à plusieurs niveaux du moteur. Le contact aube/disque, les roulements hybrides acier/céramique (contenant des impuretés/porosités), les matériaux métalliques contenant des défauts ... Les prochains paragraphes mettront en exergue de manière très précise la problématique du contact hétérogène en passant en revue quelques types d'hétérogénéités matériaux rencontrés dans les turboréacteurs.

1.1.3 Impuretés matériaux, inclusions, défauts

Certains matériaux utilisés dans l'industrie sont hétérogènes. Il arrive assez souvent que ces hétérogénéités soient dues à des défauts durant le processus de fabrication du matériau (Fig.1.2). Ces défauts microstructuraux peuvent être liés à des précipités, à des changements de phase, des porosités, ... Ils sont rencontrés assez fréquemment dans les métaux et matériaux céramiques. L'un des modes d'endommagement, non des moindres dans les problèmes de contact est l'endommagement initié en sous-couche. L'origine de ce mode d'endommagement est liée à des défauts microstructuraux qui agissent comme de véritables concentrateurs de contraintes locaux. Pour les aciers, l'endommagement se traduit par une transformation microstructurale appelée papillon de fatigue (Fig. 1.3) autour des défauts microstructuraux de type inclusions (ici inclusion d'alumine). Ces papillons de fatigue peuvent entraîner l'amorçage et la propagation de fissures qui, sous certaines conditions, rejoignent la surface et finissent par provoquer un écaillage. Plusieurs lois phénoménologiques et physiques existent, ([LAM 96], [STI 09]). Ces lois sont basées sur les champs de pression et/ou de contraintes en sous-couche difficilement accessibles avec la théorie classique de Hertz. Aussi, au vue du nombre et de la taille des hétérogénéités, il serait parfois difficile de faire appel à des modèles types éléments finis pour résoudre ce genre de problème. La problématique du contact entre matériaux hétérogènes prend tout son sens dans ces cas de figure.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

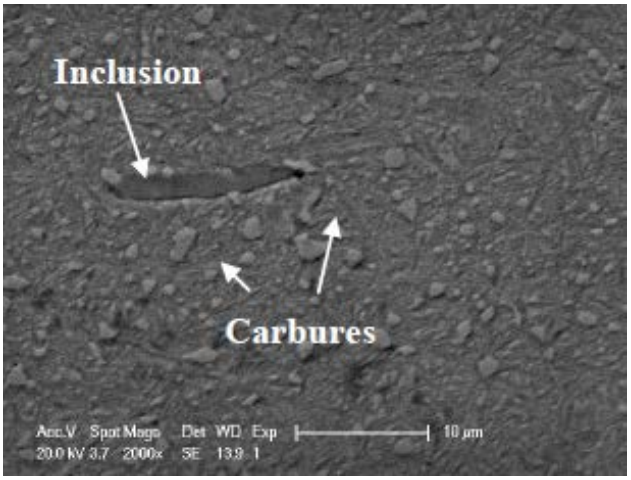


FIGURE 1.2 – Exemple de défauts de type carbures et inclusions dans les roulements hybrides ([AZE 15]).

1.1.4 Contact aube/disque.

L'aube mobile est assemblée au disque par l'intermédiaire d'une attache. Celle-ci est composée du pied de l'aube ou bulbe, et d'une alvéole, servant de logement au pied d'aube. Les attaches aube/disque ont pour fonction essentielle d'assurer la rétention radiale de l'aube et la transmission des efforts tangentiels entre l'aube et le disque. Trois familles d'attaches sont employées dans les turboréacteurs actuels : attache en forme de queue d'aronde, attache marteau et attache sapin. Cette étude s'intéressera plutôt à des attaches queue d'aronde (Fig.1.4) qui sont les plus utilisées (compresseurs BP, HP, les turbines BP et la soufflante, ...).

Le disque est toujours en matériau métallique. Cependant, l'aube peut être constituée d'un matériau métallique ou d'un matériau composite. L'aube métallique est souvent revêtue. La problématique du contact hétérogène se pose bien évidemment au niveau de l'aube composite, mais également au niveau de l'aube métallique dans la mesure où cette dernière est toujours revêtue.

1.1.4.1 Contact aube revêtue/disque métallique.

Sur les moteurs $CFM56$ le matériau utilisé pour la fabrication des aubes et du disque est un alliage de titane : le $Ti - 6Al - 4V$. Cet alliage de titane présente de très bonnes propriétés mécaniques pour une très faible masse volumique. Il est également peu sensible à la corrosion. Toutefois les propriétés tribologiques des alliages de titane en général sont souvent très médiocres. Pour pallier à ce problème, un revêtement d'une épaisseur moyenne de 150 microns peut être ajouté. La nature de ce revêtement peut varier grandement d'un moteur à un autre. Assez souvent un lubrifiant solide (Molydag) à très faible coefficient de frottement est déposé sur le

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

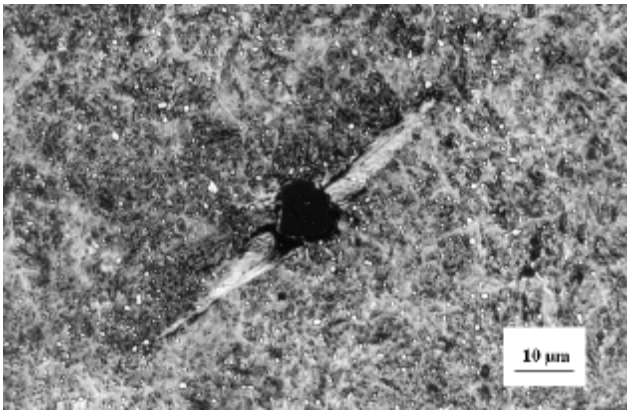


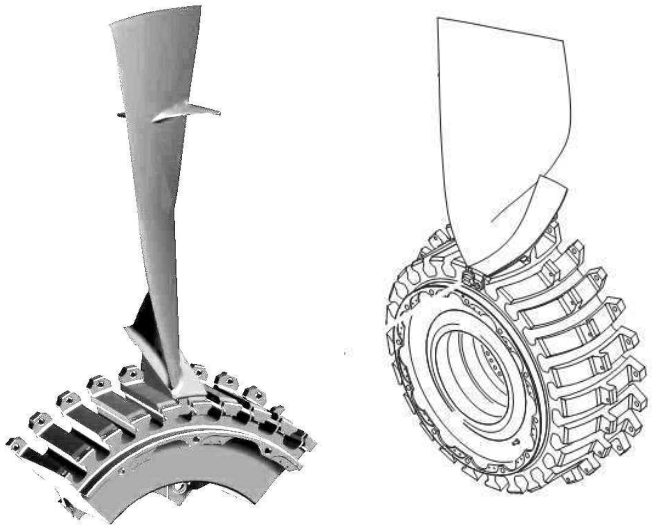
FIGURE 1.3 – Papillon de fatigue dans le 100cr6 autour d'une inclusion d'alumine [SAN 93].

revêtement (Fig.1.5). Il faut toutefois rappeler qu'avant de rajouter le revêtement et le lubrifiant solide, les aubes sont grenaillées au niveau des portées. Ainsi, en plus du revêtement, du lubrifiant solide, on est également en présence des contraintes résiduelles (en surface) générées par le grenaillage. Le motoriste SNECMA est donc en présence d'un contact entre matériaux hétérogènes, le matériau hétérogène étant en effet l'aube en $Ti-6Al-4V$ revêtue. Même si les moteurs CFM56 demeurent une « success story » unique dans l'histoire de l'aéronautique civile, ils seront remplacés dans un futur proche par une nouvelle génération de moteurs plus économiques, plus performants, plus respectueux de l'environnement : les moteurs LEAP avec des aubes en matériaux composites.

1.1.4.2 Contact aube composite/disque métallique.

Dans le cadre de la nouvelle génération de moteurs (LEAP-1A, LEAP 1-B, LEAP-1C), les aubes sont fabriquées en matériaux composites (Fig.1.6). Ces modifications permettent au motoriste de réduire considérablement la masse du moteur, la consommation de carburant, les émissions d'oxyde et enfin le bruit. Les travaux menés depuis plusieurs années sur l'endommagement par fretting du contact aube/disque sont remis à plats avec l'arrivée de ces aubes composites. Il est donc indispensable de développer de nouvelles méthodes pour prendre en compte la structure composite dans la résolution du problème de contact, dans la mise en place des lois d'endommagement, ... Ces aubes étant fortement hétérogènes, le modèle présenté dans cette thèse peut donc trouver une application dans la problématique du contact aube/disque avec une aube en matériau composite. La compréhension des mécanismes d'endommagement passe dans un premier temps par l'identification des types de chargements subis par le contact aube-disque.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 1.4 – Vues du disque de la soufflante du CFM56-5 **(a)** et de la soufflante du CFM56-7 **(b)**.

1.1.4.3 Chargements subis par le contact aube/disque

Le contact aube/disque est soumis à deux grandes catégories de sollicitations. Les sollicitations dites :

- Oligocycliques : Ces sollicitations sont caractérisées par de fortes intensités et de faibles fréquences. Elles sont associées aux phases de changement de régime moteur au cours du vol mais sont le plus souvent simplifiées à la phase de décollage et d'atterrissage. Durant la phase de décollage, la force centrifuge entraîne le déplacement radial des aubes qui viennent se plaquer contre le disque au niveau des interfaces. Il en résulte un effort normal et des micro-déplacements relatifs entre l'aube et le disque.
- Polycycliques : Il s'agit des sollicitations de faibles intensités mais de fortes fréquences. Les sollicitations polycycliques sont créées par les modes vibratoires de la structure et les instabilités aérodynamiques. La figure 1.7 représente assez schématiquement ce type de chargement. Le contact aube disque est donc soumis à un type de chargement particulier : le fretting. Par définition, le fretting est un mouvement oscillatoire de faible amplitude, souvent tangentiel, appliqué aux deux surfaces en contact.

La finalité de la modélisation du contact est de prédire aux mieux les défaillances du contact aube/disque sous chargement de fretting.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

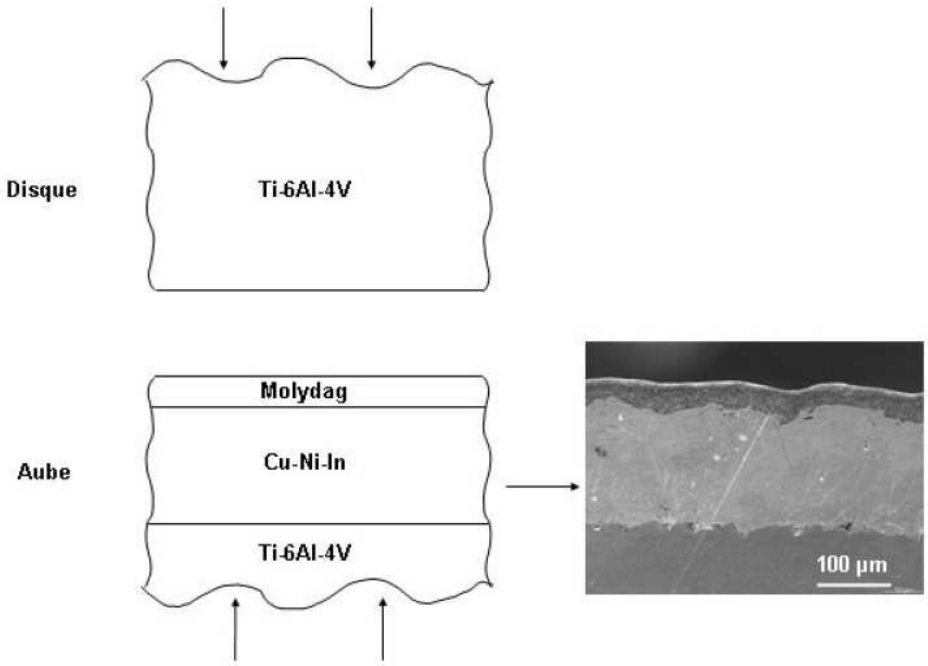


FIGURE 1.5 – Structure du contact aube-disque revêtu [PAU 06]

1.1.5 Modes de défaillances du contact aube/disque sous chargement de fretting.

1.1.5.1 Cas d'une aube métallique

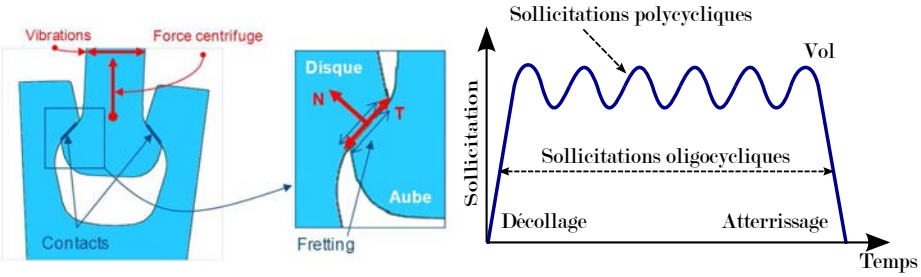
Comme susmentionné, le contact aube/disque est soumis à des chargements de type fretting. Plusieurs travaux se sont intéressés à l'étude de l'endommagement par fretting du contact aube/disque durant cette dernière décennie. Suivant l'amplitude de glissement imposée, deux types d'endommagement peuvent être rencontrés : la fatigue (fissuration) ou l'usure. L'usure peut être assimilée à une réponse du système tribologique suite à une déformation locale excessive. La fatigue peut être considérée comme une réponse du système tribologique à une contrainte locale excessive. Ces deux phénomènes ne sont pas totalement découplés. Il arrive parfois d'observer une compétition entre l'usure et la fatigue.

Usure

Il existe plusieurs types d'usure : l'usure liée au frottement, l'usure par érosion (enlèvement de matière par un fluide chargé de particules en contact avec la surface du matériau), l'usure par cavitation (induite par des ondes de chocs créées par l'implosion de bulles de vapeur dans les liquides) . . . Dans notre cas de figure, l'usure observée sur l'aube est une « usure liée au frottement (fig.1.9) ». Plusieurs approches de prédiction de l'usure de frottement existent dans la littérature. Elles peuvent être

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

FIGURE 1.6 – Représentation photographique du nouveau moteur LEAP avec des aubes FAN en matériaux composites.



(a) (b)

FIGURE 1.7 – Sollicitations mécaniques en pieds d'aubes (a) durant les différentes phases de vols (b).

classées selon 4 grandes catégories :

- les lois d'Archard et dérivée [ARC 53]. Le volume usé est fonction de la distance de glissement s, et du chargement normal.

$$W = Ks\frac{P}{p_m} \tag{1.1}$$

  où p_m représente la limite d'écoulement en terme de pression (approximativement équivalente à la dureté) du matériau le plus mou. Le coefficient d'usure K est une constante déterminée expérimentalement.
  On peut remarquer que cette loi ne prend pas en compte le coefficient de frottement qui, expérimentalement, joue un rôle prépondérant dans le phénomène d'usure.
- le concept du troisième corps. L'interface des deux corps en contact est prise en compte dans la modélisation de l'usure. Cette interface est baptisée « troisième corps » par Godet [GOD 84]. Selon Godet l'usure est gouvernée par trois

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

FIGURE 1.8 – Photo d'une aube métallique nue.

phénomènes essentiels : la création, la circulation et l'éjection de débris. La prise en compte du troisième corps sur des zones de contact assez grandes (cas du contact aube/disque) est très coûteuse en temps de calculs et est difficilement envisageable dans le cas du fretting Aube/Disque.

- les approches thermodynamiques [DRA 01]. L'usure est considérée dans cette approche comme un phénomène dissipatif lié à l'évolution du mécanisme de détachement des particules. Une analyse micromécanique est ensuite réalisée à l'aide des lois de thermodynamique des processus irréversibles. Ces approches sont très difficiles à mettre en place.
- les approches énergétiques [FOU 03b, FOU 03a]. Les modèles d'usure développés dans le cas du contact aube/disque (SNECMA) sont basés sur les approches énergétiques. Le concept consiste à relier le volume usé à la quantité d'énergie dissipée dans le contact durant un cycle de fretting. La particularité de cette approche repose sur le concept de l'énergie dissipée, qui prend en compte à la fois le chargement normal, le coefficient de frottement et l'amplitude du débattement durant l'essai. Ces approches sont très intéressantes en raison de leur relative simplicité. Cependant elles ne donnent aucune information sur les mécanismes locaux gouvernant le phénomène d'usure.

Les lois d'usure développées depuis des années pour le contact aube/disque $(Ti-6Al-4V)$/disque $(Ti-6Al-4V)$ par l'équipe de Fouvry sont donc toutes basées sur des approches énergétiques. Plusieurs modèles numériques EF ou semi-analytique d'usure sont basés sur ces lois. Les objectifs des travaux menés par l'équipe du Professeur Daniel Nélias ne consistent pas à développer des lois d'usure mais d'utiliser ces lois afin de prédire l'usure des pièces (aubes) sur de grands nombres de cycles.
Le but de cette thèse est donc de fournir les **champs mécaniques nécessaires** à l'utilisation des lois d'usures classiques (approches énergétiques, ...).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

FIGURE 1.9 – Usure des portées de pieds d'aubes d'une soufflante.

Fissuration

Les études expérimentales mettent en évidence l'amorçage et la propagation de fissures en fretting (chargement en glissement partiel). L'amorçage de la fissure a lieu la plupart du temps en bordure de contact ou à la limite entre la zone d'adhérence et la zone de glissement. Compte tenu du fait que l'endommagement par fissuration est lié au caractère cyclique de la sollicitation tangentielle, les notions classiques de la mécanique de la rupture sont les plus souvent utilisées. Ainsi l'amorçage suit les même phases que celles décrites par Lemaitre et Chaboche [LEM 96] : (i) Phase d'accommodation : les concentrations de contraintes créent des microdéformations plastiques cycliques qui peuvent mettre en jeu des mouvements de dislocations et des élévations de températures locales. Ces concentrations de contraintes peuvent être générées au voisinage des défauts existants ou être induites par la géométrie de la pièce ou par le chargement appliqué. (ii) Phase d'amorçage : l'accommodation de déformations plastiques va induire l'amorçage d'une première fissure. La phase d'amorçage est essentiellement contrôlée par le cisaillement. (iii) Phase de propagation : une fois amorcée, la fissure commence par se propager.

Plusieurs critères d'amorçage basés sur des critères de fatigue multiaxiaux : critères de type Tresca (critères de Findley [FIN 58], Matake [MAT 77], ...), critères de type Von Mises (critère de Sines [SIN 59], de Crossland [CRO 56]), approches macroscopiques (critère de Dang-Van [DAN 93]) sont alors utilisés pour prédire l'amorçage de la fissure. Après amorçage, la fissure se propage en deux étapes [FOR 61, LIS 04]. Elle se comporte dans un premier temps comme une fissure courte puis ensuite comme une fissure longue (Fig. 1.10). La phase de transition fissure courte/ fissure longue a été étudiée en détails par [LIS 03, NIX 88]. La propagation de la fissure peut être alors décrite par la Mécanique Elastique Linéaire de la Rupture. Cette description s'appuie sur une solution analytique des contraintes au voisinage de la pointe de fissure et l'introduction du facteur d'intensité de contraintes K. Il convient de présenter dans un premier temps les différents modes de fissuration puis ensuite définir ce qu'est le facteur d'intensité de contrainte K.

- **modes de fissuration** : De manière générale, il existe trois modes de propagation de fissures (Fig.1.11). Dans la plupart des cas, le chemin de fissuration

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

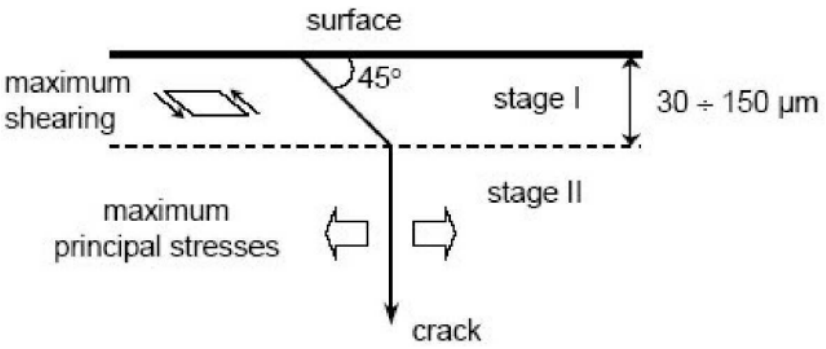


FIGURE 1.10 – Propagation de fissure en deux étapes en condition de fretting-fatigue [FOR 61].

sera perpendiculaire à la direction de traction qui tend à ouvrir la fissure (mode I).

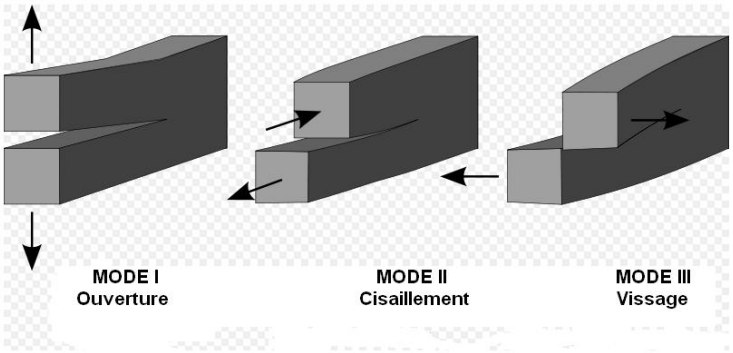


FIGURE 1.11 – Différents modes d'ouverture.

– **Facteur d′ Intensité des Contraintes**. Le facteur d'intensité des contraintes (FIC ou SIF : Stress Intensity Factor) a été introduit par Irwin [IRW 97]. Le cas d'une fissure de longueur $2a$ dans une plaque soumise à une contrainte σ à l'infini dans le cas d'un chargement en mode I est considéré (Fig.1.12).
Les solutions analytiques des champs de contraintes en pointe de fissure (Fig.1.12), dans le cadre de l'élasticité linéaire, sont données par :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

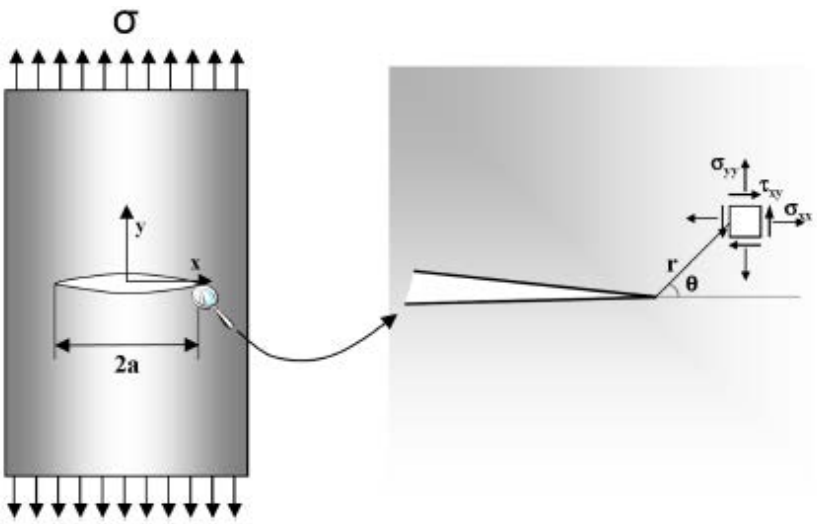


FIGURE 1.12 – Plaque infinie contenant une fissure en mode I.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \times \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_{yy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \times \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
\sigma_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \times \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Les contraintes tendent donc vers l'infini quand ($r \rightarrow 0$). En réalité les contraintes en pointe de fissure sont finies du fait de la plasticité. Mais en élasticité pure, les contraintes tendent vers l'infini. Il est alors difficile de travailler avec ces champs de contraintes. Les équations précédentes peuvent se mettre sous la forme :

$$\sigma_{i,j} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \times f_{i,j}(\theta) \tag{1.3}$$

où K est une variable finie représentant le facteur d'intensité de contraintes du mode considéré et s'exprime en MPa.m$^{1/2}$.

Dans le cas général K s'exprime sous la forme :

$$K = \beta.\sigma.\sqrt{\pi a} \tag{1.4}$$

où β représente un facteur de correction géométrique.

L'amorçage et la propagation des fissures dans le cas du contact aube/disque ont été et continuent d'être l'objet de nombreuses études [MER 11, DIC 06c, SUN 12].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La quasi-totalité des modèles développés que cela soit en fissuration/usure, est basée sur des champs mécaniques (variables de contact, champs de contrainte en sous-couche,...). Le but de cette thèse est de fournir les variables nécessaires à la mise en place de ces lois.
Cette thèse ne traite pas directement de l'endommagement par usure ou par fretting mais se propose de fournir les champs mécaniques nécessaires à la mise en place de ces diverses lois.

1.1.5.2 Aubes composites

L'endommagement sous contact des matériaux composites interlocks (utilisés pour le pied d'aube) est très peu étudié. Il s'agit d'un sujet assez nouveau.
Rappelons que les toutes premières études de l'endommagement des composites CMO (Composite à Matrice Organique) se sont limitées à un chargement classique de traction. Les mécanismes d'endommagement identifiés sont décrits ci-après. Lorsque le matériau composite CMO 3D est sollicité mécaniquement en traction, les torons parallèles à l'axe de sollicitations auront tendance à se tendre entraînant une dégradation du matériau. L'endommagement s'initie à l'interface des torons sens chaîne et de la matrice ainsi qu'à l'interface entre les torons sens chaîne et sens trame. Ensuite il y a une fissuration inter-torons. Cette fissuration se traduit par propagation des fissures matricielles d'une interface toron à une autre. Une décohésion interface toron/matrice est ensuite observée. Le scénario d'endommagement est complété par une multiplication de la fissuration des torons sens trame. La rupture finale intervient par rupture transverse des torons parallèles à la direction de chargement et par rupture longitudinale des torons orthogonaux à la direction de chargement [COU 08, TAN 00].

La figure 1.13 résume les différents mécanismes de dégradation mis en évidence par El Hage sur un composite tissé 3D CMO sollicité en traction uniaxiale dans le sens chaîne [ELH 06].

Comme mentionné plus haut, les premières études sur l'endommagement par fretting des aubes composites (CMO, CMC) sont encore balbutiantes. On peut espérer retrouver certains mécanismes d'endommagements identiques à ceux décrits plus haut dans le cadre des essais de tractions classiques.
Deux modèles proposent aujourd'hui une description des mécanismes d'endommagements observés dans le cas de l'endommagement des matériaux composites interlocks (sollicitations classiques) : le modèle ODM (Onera Damage Model) [MAR 10] et le modèle du LMT [CAM 00]. Sans toutefois rentrer dans les détails, il est important de souligner qu'il s'agit des modèles macroscopiques homogénéisés. Dans ces modèles se pose donc l'épineuse question de séparabilité des échelles qui n'est pas forcément respectée dans le cas du contact aube/composite. Il s'agit cependant des études pionnières qui permettront d'ouvrir la voie à d'autres types d'approches.

Il convient maintenant de présenter les matériaux composites de manière générale puis de situer les composites SNECMA dans la large gamme de matériaux compo-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

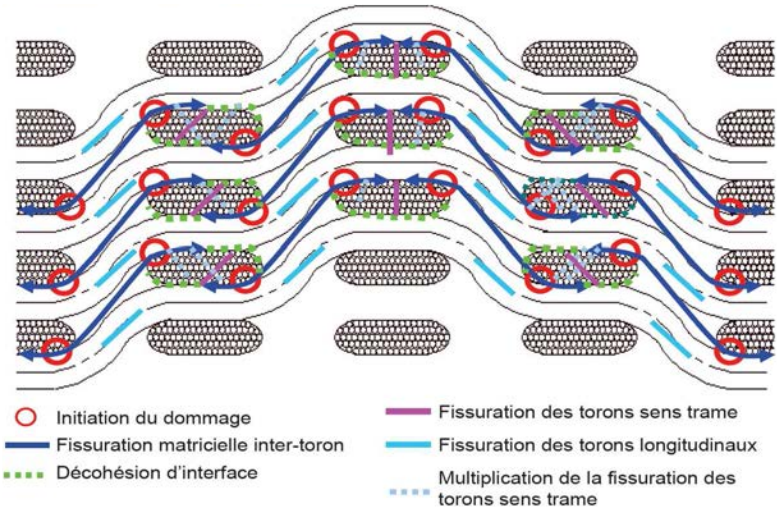


FIGURE 1.13 – Mécanismes de dégradation observés sur un tissé 3D CMO [ELH 06].

sites existants dans la littérature.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

1.2 Matériaux composites.

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux de natures différentes non miscibles, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Un matériau composite est généralement constitué :

- de renforts, prenant généralement la forme de fibres ou de particules, assurant l'essentiel des propriétés mécaniques du composite.
- d'une matrice dans laquelle sont noyés les renforts, assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques.

L'utilisation des matériaux composites permet de réduire considérablement la masse des structures du fait de l'excellent rapport : masse/rigidité/résistance. Ces matériaux présentent d'autres avantages. On peut citer entre autres :

- Obtention de propriétés spécifiques : En effet il est possible de concevoir spécialement des matériaux permettant de répondre à un besoin spécifique. Il est possible de citer le cas des stents (avec des matériaux à coefficients de Poisson négatifs), ou des matériaux à coefficient de dilatation thermique nulle pour des applications aérospatiales.
- Matériaux multifonctionnels : le cas des matériaux ayant à la fois de bonnes propriétés acoustiques, thermiques, une bonne conductivité, une bonne résistance au feu,...
- Faible sensibilité à la fatigue,...

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans l'industrie (aéronautique, aérospatial, automobile, ...). Ainsi en intégrant les composites dans sa chaîne de fabrication, le motoriste SNECMA a réussi à réduire considérablement la masse du moteur (nouveau moteur LEAP). Cette réduction de masse a entraîné une diminution de la consommation moteur d'environ 15%, des émissions d'oxyde d'azote de 50%, le bruit (jusqu'à 15 décibels),... Les matériaux composites peuvent être classés selon plusieurs critères : la nature de la matrice, la forme des renforts, l'architecture.

1.2.1 Nature de la matrice

Les matériaux composites peuvent être classés en trois grandes familles de part la nature de leurs matrice.

1.2.1.1 Composite à matrice organique

Compte tenu de leurs faibles coûts de mise en œuvre, les Composites à Matrice Organique (CMO) sont les plus répandus. Les matrices employées sont des résines polymères (thermoplastiques, thermodurcissables ou thermostables). D'un point de vue mécanique, les thermoplastiques (époxy) sont moins rigides et moins résistants

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

que les thermodurcissables (polyester, époxy). Par contre, compte tenu du fait qu'ils sont plus ductiles, les thermoplastiques résistent mieux à la fissuration. Ils existent également des matrices thermostables pour des applications hautes températures.

(a) Aube Fan - Snecma/Safran

(b) Contre-fiche train d'atterrissage - Messier-Dowty/Safran

FIGURE 1.14 – Quelques applications des composites à matrice organique (CMO) hautes performances dans l'industrie aéronautique

1.2.1.2 Composite à matrice céramique

Les matériaux Composites à Matrice Céramique (CMC) sont beaucoup moins répandus en raison d'un coût très élevé. Ils sont caractérisés par de très bonnes propriétés thermiques qui les rendent particulièrement intéressants pour des applications à haute température. Les renforts sont souvent constitués de carbures de silicium, de fibres de carbones ou d'alumine (Al_2O_3). Ils ont généralement un taux de porosité assez élevé. La durée de vie des CMC fait l'objet de plusieurs études de nos jours.

(a) Volets froids en composites thermostructuraux C/SiC (Avion de combat Rafale).

(b) Prototype de mélangeur en CMC sur moteur CFM56-5C.

FIGURE 1.15 – Quelques applications des composites à matrice céramique (CMC) sur les moteurs civils et militaires.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

1.2.1.3 Composite à matrice métallique

Les Composites à Matrice Métallique (CMM) ont été élaborés pour tenter de concilier les qualités des métaux (ductilité, bonne tenue face au vieillissement, ...) avec la légèreté et les bonnes caractéristiques mécaniques propres aux structures composites. Ils comportent une matrice en métal léger et des renforts pouvant être soit des fibres courtes céramiques ou particules, soit des fibres longues céramiques métalliques. Les matériaux composites à matrice métallique (CMM) sont utilisés le plus souvent dans les zones de température relativement élevées (jusqu'à 500° C). L'un des matériaux phares de SNECMA est le disque ANAM (anneau aubagé monobloc) fabriqué en une matrice de titane renforcée par des fibres longues SiC. L'utilisation de ce matériau a par exemple permis, à performance égale, de réduire la masse de la structure de manière conséquente. Compte tenu du coût de revient assez élevé, les composites à matrice métallique sont réservés plutôt pour des applications assez exigeantes.

Différents types de renforts peuvent être utilisés : les fibres de verre (ultra-répandues), les fibres de carbone, les fibres d'aramides, les fibres végétales. Les applications « hautes performances », comme dans l'industrie aéronautique ou aérospatiale, utilisent des fibres longues tissées ou encore empilées en plis unidirectionnels, ce qui permet d'optimiser les propriétés mécaniques du composite. Les renforts quant à eux sont plutôt classés en fonction de leur forme.

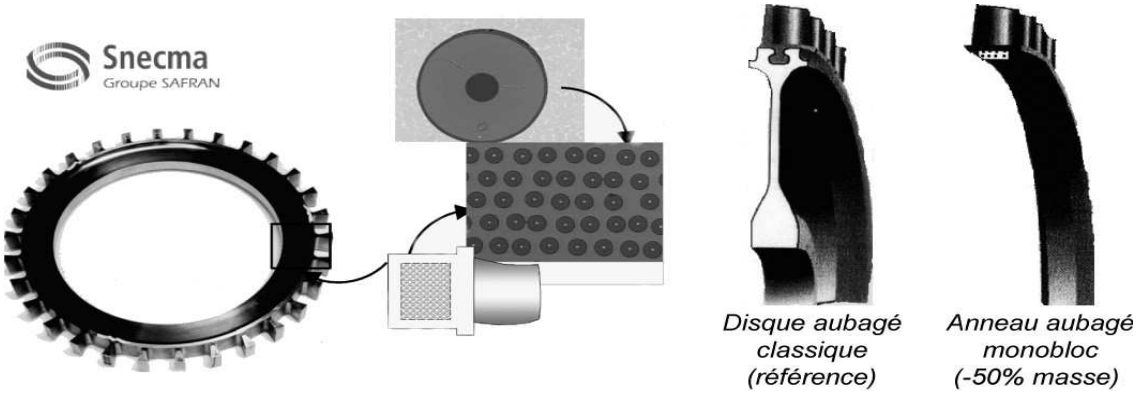


FIGURE 1.16 – Utilisation du composite SiC/Titane pour la fabrication de disque ANAM.

1.2.2 Forme des renforts

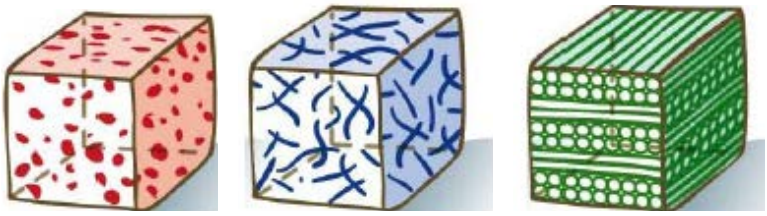
- **Particules/Inclusions**. Les renforts sont des particules, des billes de petite taille sans orientation particulière et ayant une distribution aléatoire ou quasi-aléatoire.
- **Renforts fibres courtes** : c'est-à-dire de longueur faible devant les dimensions de la pièce. Les fibres courtes peuvent également avoir une distribution

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

et une orientation aléatoires.

– **Renforts fibres longues** : ceux sont des fibres dont la longueur est comparable aux dimensions de la pièce. Ces types de renforts se retrouvent le plus souvent dans les stratifiés et les tissés.

L'expérience a montré, dans la plupart des cas, l'existence d'une interphase entre les renforts et la matrice. Cette interphase peut se former spontanément ou être ajoutée volontairement. Les effets de l'interphase sur les propriétés mécaniques peuvent être très importants. Par contre dans ce document on ne s'intéressera pas aux effets de l'interphase. Le matériau composite sera constitué d'une matrice et d'un renfort.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.17 – renforts en forme de (a) particules (b) fibres courtes (c) fibres longues.

1.2.3 Structure des pièces composites.

Outre la microstructure, les matériaux composites peuvent aussi être caractérisés de par la structure des pièces composites. Les composites à particules ou à fibres courtes sont généralement de simples matrices chargées. Leur conception et leur fabrication ne présentent pas de signes distinctifs particuliers. Par contre les composites à fibres longues possèdent la plupart du temps des structures assez particulières. Il est alors possible de les classer selon ces structures caractéristiques particulières.

1.2.3.1 Composites tissés

Le matériau utilisé pour l'aube fan du LEAP est en structure composite tissé. Dans les composites tissés, les fibres sont tressées ou alignées en « câbles » nommés torons ou fils. Chaque toron peut contenir des centaines ou des milliers de fibres. Les fils ainsi constitués sont ensuite tissés selon des motifs plus ou moins complexes. Il existe une large gamme de motifs de tissus. Ils peuvent être tridimensionnels ou bidimensionnels en fonction des performances mécaniques souhaitées. La figure 1.18 présente une synthèse des préformes textiles les plus répandues. Le matériau de l'aube est un interlock 3D.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Pour ces types de matériaux, il existe trois échelles de modélisation : échelle micro (fibres), échelle méso (torons), échelle macro (échelle de la pièce). En fonction du type de problème certaines échelles peuvent se révéler non pertinentes pour une simulation numérique. Par exemple, dans le cas du contact composite pied d'aube, la simulation peut se limiter à l'échelle mésoscopique.

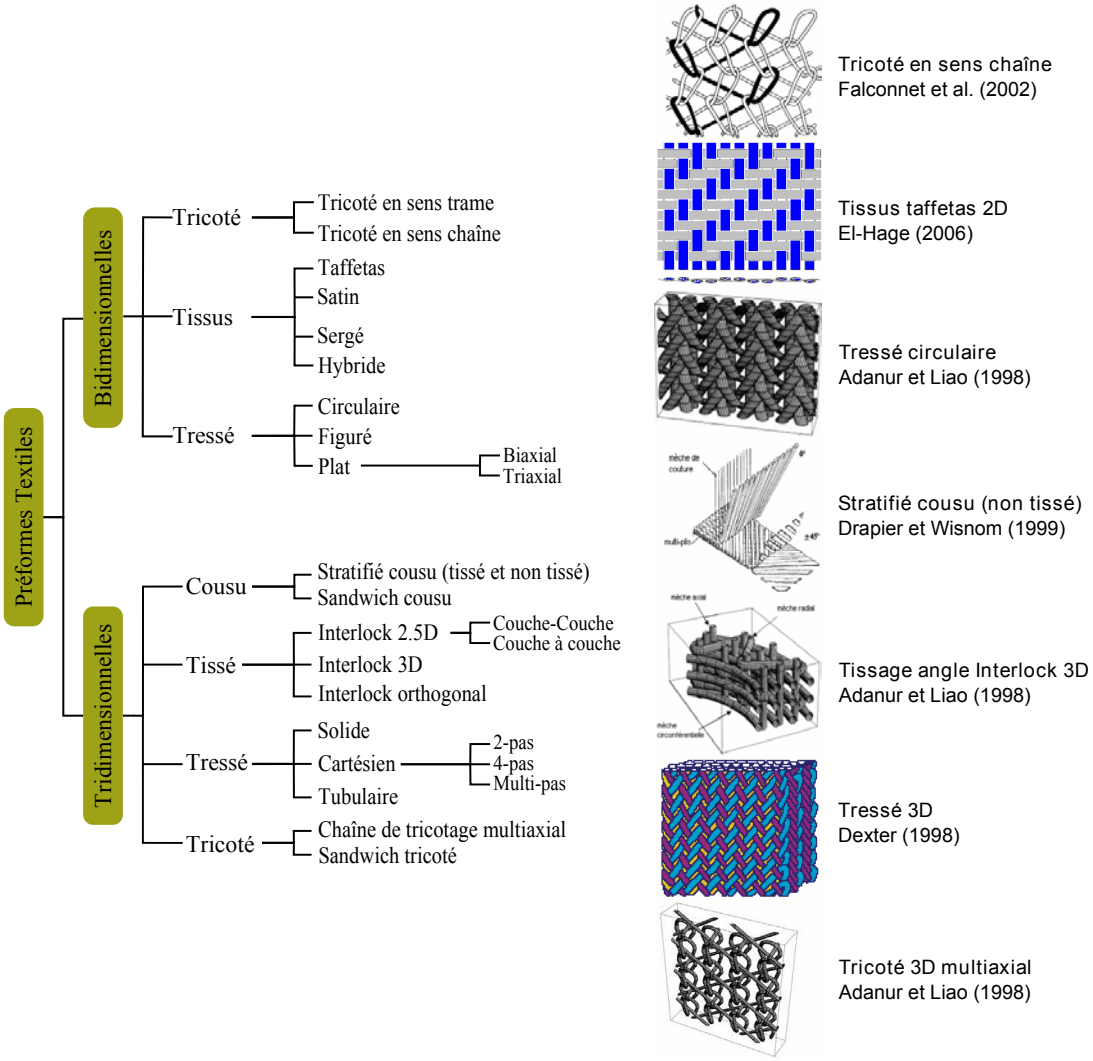


FIGURE 1.18 – La structure des types de préforme textile

1.2.3.2 Composites stratifiés

Le composite stratifié est formé de plusieurs plis d'orientations variées. Le pli est composé de torons. Au sein d'un pli, les renforts peuvent avoir n'importe quel type de disposition pourvue qu'elle soit plane. Les torons sont liés entre eux par la matrice qui joue un rôle de liant. Un toron est constitué de plusieurs fibres (Fig.1.19). Il est

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

possible d'adapter finement les propriétés mécaniques du stratifié aux sollicitations extérieures en jouant sur l'ordre et l'orientation des plis. Ils sont moins coûteux que les tissés. L'inconvénient majeur de ce type de composite est lié au phénomène de délaminage.

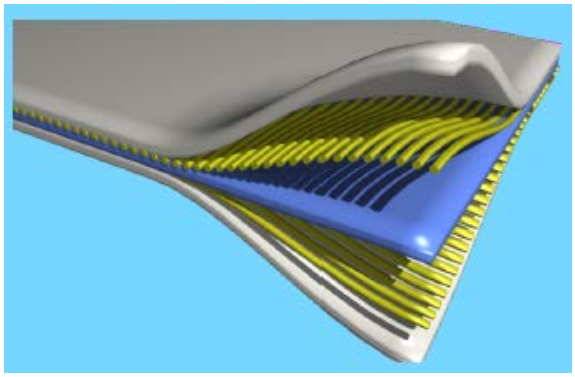


FIGURE 1.19 – Composites stratifiés.

1.2.3.3 Structures en sandwich

Les structures sandwich sont constituées de deux peaux (généralement ayant de bonnes caractéristiques mécaniques) collés sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésif (Fig. 1.20). Avec cette structure, il est possible d'obtenir des pièces ultra-légères, résistantes et rigides en flexion et en torsion. Plusieurs échelles peuvent exister en fonction du type de

FIGURE 1.20 – Structures sandwich (image NASA).

matériau composite considéré. Entre l'échelle micro et macro une échelle méso peut être rajoutée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Dans le reste de tout ce document lorsqu'on parlera de matériaux composites, il s'agira donc de matériaux composites à fibres longues tissés 3D (Fig. 1.21) à matrice organique (CMO) ou à matrice céramique (CMC).

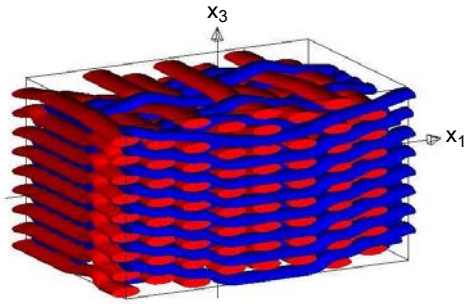


FIGURE 1.21 – Image virtuel d'un VER du composite tissé tridimensionnel CMO orienté dans le repère du contact.

La modélisation mécanique des matériaux composites/hétérogènes demeure très compliquée. Cette difficulté est principalement liée au fait que ces matériaux font intervenir plusieurs échelles : 2 (micro, macro) à minima et parfois 3 (micro, méso, macro).

1.3 Homogénéisation et méthodes numériques multi-échelles

La description fine des matériaux hétérogènes en général, et celle des composites en particulier reste assez complexe du point de vue modélisation mécanique. La nécessité de pouvoir prédire le comportement de ces types de matériaux a fait naître au milieu du XXème siècle le concept de l'homogénéisation micromécanique. L'objectif étant de remplacer le matériau hétérogène par un milieu homogène équivalent (MHE). Ceci permet de revenir à un milieu homogène, milieu dans lequel serait valide les hypothèses de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) classique. Dans cette partie nous présenterons les bases de la théorie de l'homogénéisation ainsi que les méthodes numériques multi-échelles applicables aux matériaux hétérogènes en général. L'exposé partira de la méthode la moins coûteuse à la méthode la plus coûteuse.

1.3.1 Théorie de l'homogénéisation classique

La démarche d'homogénéisation comporte trois étapes :

- La représentation : C'est la première étape de toute démarche d'homogénéisation. Il s'agit ici de décrire le milieu hétérogène. A ce stade, il

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

faut préciser la constitution de cet ensemble (milieu hétérogène). On doit définir les constituants, leurs morphologies, leur répartition spatiale, les propriétés mécaniques qu'on leur affecte ... La représentation conduit si possible (séparabilité des échelles) à la définition d'un VER.
- La localisation : Cette étape consiste à établir des relations de passage entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique (tenseur de localisation). Elle permet de déterminer les champs, à l'échelle microscopique (c'est à dire au sein d'un VER), induits par un chargement à l'échelle macroscopique (structure).
- L'homogénéisation : Cette étape consiste à déterminer le comportement effectif homogénéisé.

1.3.1.1 Représentation

Avant de construire le VER, il faudrait vérifier l'hypothèse de séparabilité des échelles.

Séparation des échelles

La taille caractéristique de l'échelle microscopique d est celle des hétérogénéités. Cette échelle doit être pertinente. Elle ne doit pas être inutilement trop fine, et surtout les outils de mécanique des milieux continus doivent être encore applicables. On s'imagine bien que si on choisit des hétérogénéités de l'ordre de l'Angström, il faudrait faire de la dynamique moléculaire au lieu de la MMC. Ceci n'est évidemment pas le but. Soit l la taille du VER, L_{app} la longueur d'onde du chargement, L la longueur de la structure. Il y a séparabilité des échelles si et seulement si :
- $l << L, Lapp$: La structure doit être pouvoir traitée comme un milieu continu. Le VER de dimension l doit pouvoir être traité comme un point à l'échelle de la structure.
- $l >> d$ sans cette hypothèse le comportement de la structure fluctuerait fortement d'un point à un autre. La taille des défauts doit être petite devant la taille du VER.

La condition de séparabilité des échelles est très importante dans toute démarche d'homogénéisation. Une fois cette condition remplie, on passe à l'étape de la représentation du VER.

Représentation du VER

- Milieu périodique : Certaines répartitions spatiales se prêtent bien à la construction d'un VER périodique (Fig.1.22). Une description déterministe du milieu hétérogène est obtenue (cf.[BOR 01]).
- Milieu aléatoire : Dans le cas des milieux aléatoires (Fig.1.23), la description géométrique et mécanique ne peuvent plus être déterministes. Une description statistique sera donc faite à l'échelle microscopique tout en gardant une

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

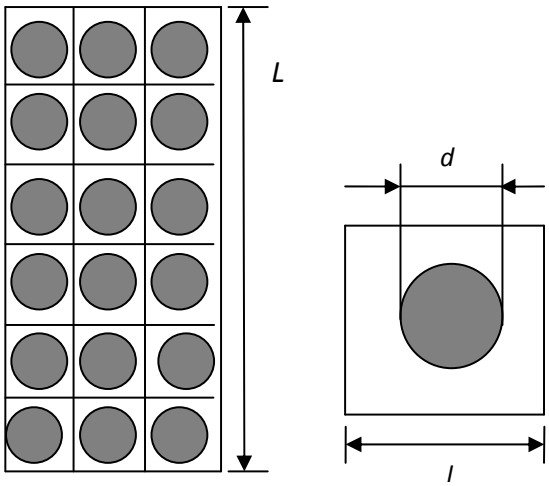


FIGURE 1.22 – Exemple de microstructure périodique.

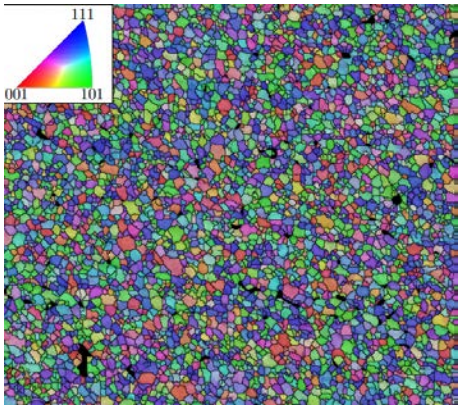


FIGURE 1.23 – Exemple de microstructure à orientation cristalline aléatoire [POU 13].

physique déterministe à l'échelle macroscopique (Monte-Carlo classique).

1.3.1.2 Localisation

Cette étape consiste à obtenir des champs microscopiques de contraintes ou de déformations, induits au sein du VER par le chargement macroscopique de déformations ou de contraintes.

Dans la suite de ce chapitre, x désignera le vecteur position au sein du VER, V le volume du VER, ∂V le contour du VER, $u(x)$, $\sigma(x)$, $\varepsilon(x)$ désigneront respectivement les champs de déplacements, de contraintes et de déformations microscopiques. Les champs de contraintes et de déformations macroscopiques sont désignés respectivement par : Σ, E.
σ^0, ε^0 seront les champs macroscopiques imposés.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

<> définit l'opérateur de moyenne sur V tel que :

$$< \sigma >= \frac{1}{V} \times \int_V \sigma dV \quad et \quad < \varepsilon >= \frac{1}{V} \times \int_V \varepsilon dV \tag{1.5}$$

Les moyennes des champs microscopiques doivent être égales aux champs macroscopiques.

$$< \varepsilon >= E, \quad et \quad < \sigma >= \Sigma \tag{1.6}$$

L'égalité entre la moyenne des champs locaux et les champs macroscopiques imposés est vérifiée pour certains types de conditions limites données.

Les conditions limites

Les chargements appliqués au VER doivent correspondre aux sollicitations ([BOR 01]) que le VER subirait au sein de la structure globale. On peut citer les :

- Conditions de déformations homogènes sur le contour

$$u(x) = \varepsilon^0.x, sur \partial V \tag{1.7}$$

- Conditions de contrainte homogène sur le contour

$$\sigma.n = \sigma^0.n, sur \partial V \tag{1.8}$$

- Conditions aux limites périodiques

$$u(x) = \varepsilon^0.x + v, sur \partial V \tag{1.9}$$

où n est le vecteur normal à la frontière et v un champ périodique de moyenne nulle.

Le tenseur de localisation

Cette étape consiste à établir des relations explicites (ou implicites) entre les champs microscopiques et macroscopiques. Les tenseurs de localisation des déformations A et des contraintes B peuvent se mettre sous la forme fonctionnelle générique suivante :

$$\varepsilon(x,t) = A\left[E(t'), Y(x',t')\right] x, x' \in V t' \leq t \tag{1.10}$$

avec $< A >= I_d$

$$\sigma(x,t) = B\left[\Sigma(t'), Y(x',t')\right] x, x' \in V t' \leq t \tag{1.11}$$

avec $< B >= I_d$
où Y est l'ensemble des paramètres attachés à la description géométrique et mécanique retenue du VER.

La différence principale entre les différents schémas classiques d'homogénéisation réside dans la détermination des tenseurs de localisation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

1.3.1.3 Bases de l'homogénéisation

Le but de l'homogénéisation est de trouver le comportement effectif du VER c'est à dire de trouver une relation entre la déformation macroscopique imposée ε^0 (ou la contrainte macroscopique imposée σ^0) et $\Sigma =< \sigma >$ la contrainte résultante (ou $E =< \varepsilon >$ la déformation résultante).

Exemple : Elasticité linéaire (contrainte homogène σ^0 imposée au contour).

Dans le cas particulier de l'élasticité linéaire :

$$\varepsilon(x) = s(x) : \sigma(x) \quad x \in V \tag{1.12}$$

où $s(x)$ correspond au tenseur de souplesses local. En utilisant l'équation 1.6 il est possible d'écrire :

$$E =< \varepsilon(x) >=< s(x) : \sigma(x) > \quad x \in V \tag{1.13}$$

Or, les contraintes locales sont déterminées par la relation de localisation (eq.1.11).

$$\sigma(x) = B(x) : \sigma^0 \tag{1.14}$$

D'où :

$$E =< s(x) : B(x) : \sigma^0 >=< s(x) : B(x) >: \sigma^0 \tag{1.15}$$

L'expression des modules de souplesses homogénéisés S^{Hom} se met sous la forme :

$$S^{Hom} =< s(x) : B(x) > \tag{1.16}$$

La figure 1.24 résume les différentes étapes d'une démarche d'homogénéisation.

Dans la démarche qui vient d'être présentée, la principale difficulté se trouve donc dans la détermination du tenseur de localisation c'est à dire les tenseurs A et B. Plusieurs approches et plusieurs schémas existent dans la littérature pour déterminer ces tenseurs de localisation.

1.3.2 Quelques approches d'homogénéisation

1.3.2.1 Approches à champs moyens

- Bornes d'ordre 1 et d'ordre 2.
  Certains scientifiques ont proposé des bornes permettant d'encadrer le comportement effectif homogénéisé des matériaux hétérogènes. Les bornes de Voigt et de Reuss sont des bornes d'ordre 1 qui s'apparentent beaucoup plus à la loi des mélanges. Voigt fait l'hypothèse des déformations uniformes en tout point c'est à dire $A = I$. Le comportement ainsi obtenu correspond à la borne supérieure du comportement réel du matériau hétérogène. La borne de Reuss résulte d'une approximation duale à celle proposée par Voigt [PAU 60] $B = I$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

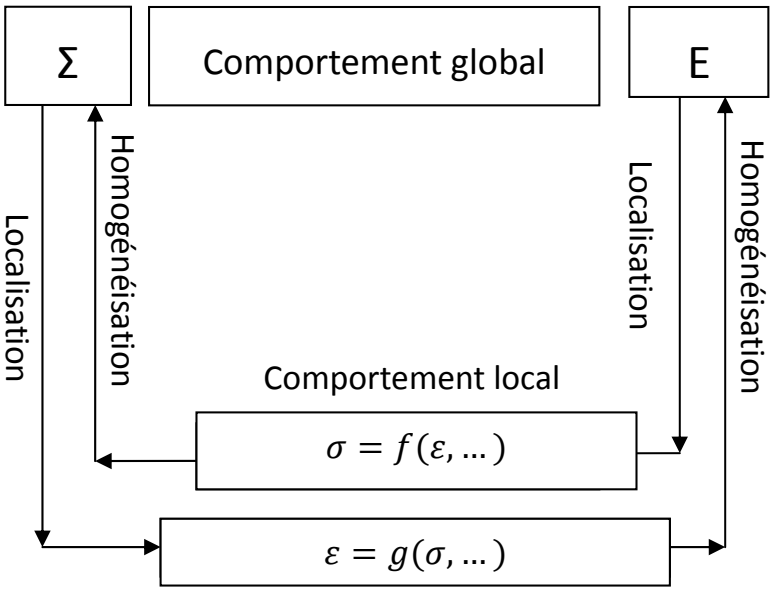


FIGURE 1.24 – Différentes étapes d'une démarche d'homogénéisation [BER].

Le comportement obtenu avec l'hypothèse de Reuss correspond à la borne inférieure du comportement réel du matériau hétérogène. Il existe également des bornes d'ordre supérieur. Ces bornes donnent des encadrements beaucoup plus étroits du comportement effectif homogénéisé. L'une des plus connues dans la littérature est celle de Hashin et Shtrikman [HAS 62, HAS 63]. Cette borne est une borne d'ordre 2 basée sur les tenseurs de polarisation.

– Schéma de Mori-Tanaka.
  La méthode de Mori-Tanaka est basée sur la solution du « problème de l'inclusion d'Eshelby ». Le tenseur de localisation est construit à partir de la solution d'Eshelby [ESH 59, ESH 57]. Le principe est de considérer que les hétérogénéités sont noyées dans une matrice infinie soumise à une déformation moyenne ε_m inconnue. Le tenseur de localisation est obtenu en faisant une opération de moyenne. Il existe plusieurs variantes à ce schéma d'homogénéisation.
– Schéma Auto-cohérent.
  Contrairement au schéma de Mori-Tanaka, le schéma auto cohérent suppose que chaque inclusion est entourée du milieu homogène équivalent. Le calcul du comportement effectif se fait le plus souvent de manière numérique. Des problèmes de convergence de la solution peuvent apparaître. Il est également très coûteux en temps de calcul. Cependant les résultats obtenus sont plus précis que ceux obtenus avec les approches de Mori-Tanaka. Plusieurs variantes du schéma auto-cohérent existent dans la littérature.

Le livre [BOR 01] présente plus en détails les schémas d'homogénéisation classiques ainsi que leurs différentes variantes. Les méthodes à champs moyens permettent

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

uniquement de déterminer les champs mécaniques moyens par phase. Les champs locaux microscopiques sont donc moyennés. Il n'y alors aucune information sur la variation des champs locaux, ni sur leurs répartitions spatiales.

1.3.2.2 TFA et NTFA

Les approches TFA et NTFA, contrairement aux approches à champs moyens, permettent d'avoir une variation des champs locaux autour de leur valeur moyenne. Elles sont beaucoup plus riches que les approches à champs moyens classiques et peuvent être appliquées à un certain nombre de problématiques industrielles, comme l'étude du comportement des combustibles nucléaires [LAR 12].

- TFA [DVO 92a, DVO 92b, DVO 94].
  Les méthodes d'analyse par champs de transformation développées par Dvorak permettent de prendre en compte la variation des champs moyens. Dvorak [DVO 92a, DVO 94] propose d'approcher les champs locaux réels par des distributions uniformes par morceaux. La cellule élastique microscopique est décomposée en une série de sous-volumes. Pour que la méthode donne de bons résultats, le nombre de sous-volumes doit être important. Même dans ce cas, la TFA prédit un comportement trop raide de la microstructure. Le fait d'approcher un champ de déformation non-uniforme par des champs uniformes par morceaux, ne suffit pas à reproduire le comportement effectif du matériau. Pour pallier à ce déficit, l'analyse par champs de transformations non-uniformes (NTFA) a été développée.
- NTFA [MIC 00, MIC 03].
  La NTFA ou " Nonuniform Transformation Field Analysis" a été initialement développée par [MIC 00] dans le cas des modes plastiques scalaires. Le concept a été légèrement modifié en se basant, non plus sur des modes plastiques scalaires, mais sur des modes plastiques tensoriels [MIC 03]. Le principe de base est de décomposer les déformations inélastiques (qui sont vues comme des champs locaux de déformations libres) sur un ensemble de modes empiriques non-uniformes. Ces fonctions non uniformes sont définies par l'utilisateur. Elles peuvent être déterminées par des calculs préliminaires (éléments finis par exemple). Cela implique que l'utilisateur ait une idée de l'intensité du chargement puisque le résultat dépend entièrement de la détermination de ces fonctions ou modes plastiques. La méthode NTFA est très peu coûteuse en temps de calcul. Elle a été appliqué avec succès à plusieurs problèmes d'homogénéisation, notamment dans le nucléaire [LAR 12].

Les approches TFA et NTFA ont été passées en revue assez succinctement. Le lecteur pourra se référer pour plus de détails aux travaux de Pierre Suquet et son équipe [MIC 00, MIC 03]. Il faut retenir par contre qu'elles sont difficilement utilisables dans le cas d'un contact entre matériaux hétérogènes. Plusieurs limitations existent. Outre la séparabilité des échelles, il faudrait recalculer les modes plastiques à chaque incrément de charge ou de modification des géométries en contact, ...

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Toutes les approches présentées dans cette partie du manuscrit sont difficilement transposables au cas d'un contact entre matériaux hétérogènes. L'une des limitations majeures étant l'hypothèse de séparabilité des échelles.

1.3.3 Méthode FE2

La méthode des éléments finis à deux niveaux (FE^2) [FEY 00] propose de discrétiser la structure macroscopique par des éléments finis et d'associer à chaque point d'intégration un problème microscopique (VER) représentant la microstructure élémentaire du matériau (Fig.1.25). Le concept s'inspire directement de la théorie d'homogénéisation (localisation, homogénéisation). L'étape de la "localisation" est remplacée par la résolution d'un second problème éléménts finis (eq. 1.18) dans le VER, avec des conditions limites périodiques.

$$u(x) = \varepsilon^0.x + v \tag{1.17}$$

avec ε^0 le tenseur des déformations obtenu à chaque point d'intégration du problème EF macroscopique, v étant un champ périodique.

La loi de comportement matériau à l'échelle microscopique est intégrée et un second problème EF est résolu avec des conditions limites de l'équation 1.17.

$$\begin{aligned} div\sigma &= 0 \\ \sigma &= c : \varepsilon, surV \\ \sigma \quad et \quad \varepsilon \quad & periodiques \\ < \sigma >= \Sigma \quad et \quad & < \varepsilon >= E \end{aligned} \tag{1.18}$$

avec c la loi de comportement local.
Le problème microscopique revient donc à déterminer les champs de contraintes et de déformations dans le VER. Connaissant les champs de contrainte dans le VER, on peut remonter à la contrainte macroscopique par une simple opération de moyenne. Les calculs EF à l'échelle micro sont complètement indépendants et sont donc aisément parallélisables [FEY 00]. La méthode FE2, certes performante, possède néanmoins les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation classique ; elle reste pertinente uniquement lorsque les échelles sont bien séparées. Elle s'avère également assez coûteuse en temps de calculs.

1.3.4 Calcul direct

Le calcul direct permet de se passer de l'hypothèse de séparabilité des échelles. Toutes les hétérogénéités sont maillées. Il existe plusieurs variantes optimisées du calcul direct.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

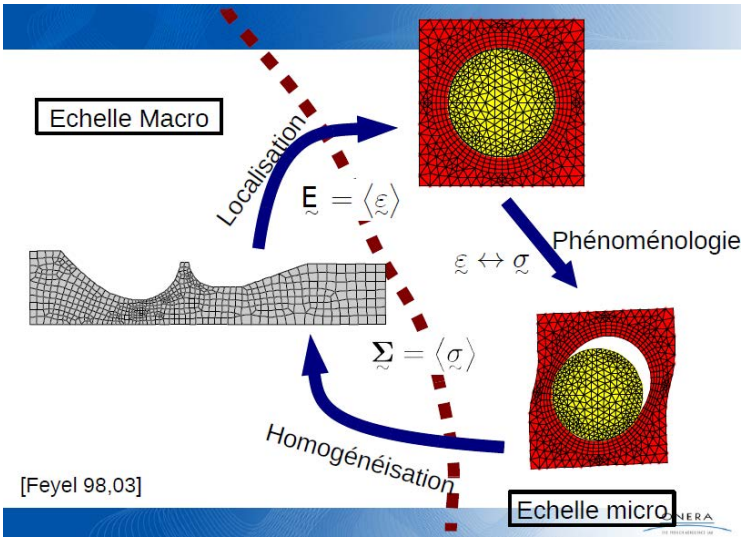


FIGURE 1.25 – Principe de la méthode FE^2[FEY 00].

1.3.4.1 Décomposition de domaines

Les méthodes de décomposition de domaine proposent de diviser une structure en sous-structures et relations d'interface. Le but principal est de pouvoir introduire et surtout de profiter des avantages du calcul parallèle. Les différentes étapes de cette méthode sont :

- un découpeur décompose le maillage en sous-domaines en fonction de la nature du problème à résoudre (Figs. 1.26 et 1.27)
- Résolution itérative globale.
- Accélération par résolution exacte dans les sous-structures (solution d'un problème condensé aux interfaces). Les sous modèles sont résolus en parallèle.
- La vérification des conditions de continuité aux interfaces. Il existe plusieurs approches : approches en déplacements ou primales (Balancing Domain Decomposition Method [MAN 93]), approches duales (méthode FETI [FAR 91, FAR 96]) et les approches mixtes (méthode LATIN [LAD 99], méthode du Lagrangien augmenté [GLO 90]).

Cette méthode quoique très coûteuse peut résoudre une très grande variété de problèmes multi-échelles. Elle n'est pas limitée par l'hypothèse de séparabilité des échelles. Il s'agit d'une utilisation intelligente et optimale du calcul direct. Il est possible de résoudre un problème de contact entre matériaux hétérogènes ou matériaux composites (à architectures complexes). La principale limitation est liée au fait que toute la zone de contact doit impérativement se situer dans un seul domaine. Ceci limite considérablement le nombre de sous-domaines qu'on peut construire. La méthode de décomposition peut être aussi très coûteuse en temps de calcul.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

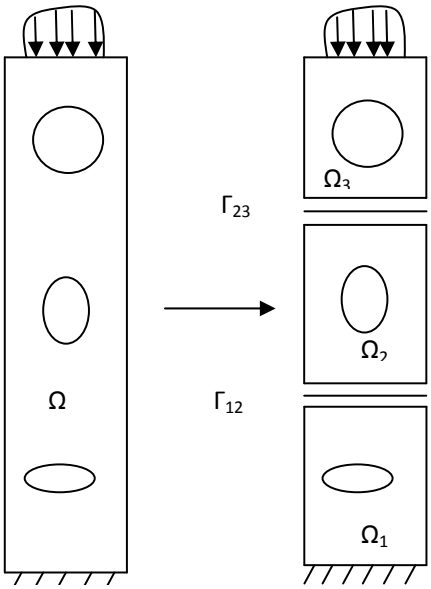


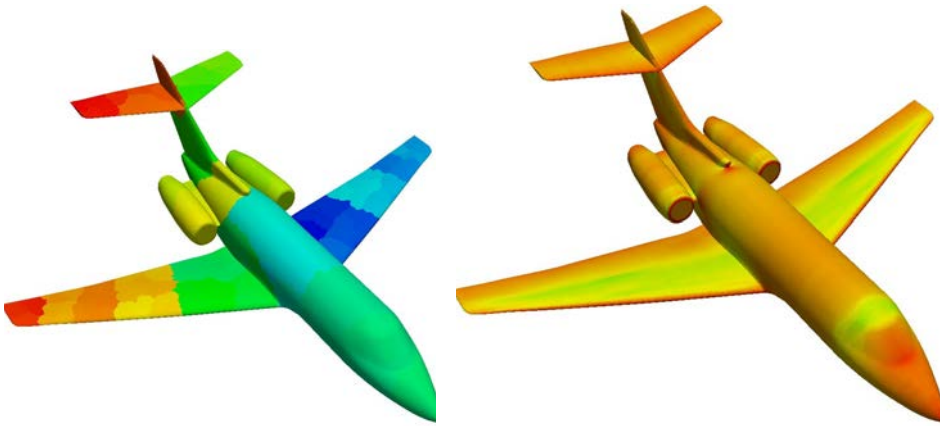
FIGURE 1.26 – Schématisation de la méthode de décomposition de domaine sur une plaque avec plusieurs trous.

1.3.4.2 Méthode Arlequin

Il s'agit d'une approche très originale. Cette méthode a été développée par Ben Dhia [BEN 98, BEN 99] pour la résolution numérique de problèmes mécaniques pour lesquels une représentation macro (grossière) est suffisante, sauf en des zones localisées (zones d'intérêts). Dans ces zones, des représentations micro sont nécessaires. La méthode peut aussi être utilisée pour coupler des modèles différents comme par exemple des modèles discrets/continus. Cette méthode est fondée sur trois constituants clés : la superposition de modèles, la partition des énergies et les couplages énergétiques des modèles superposés.

Considérons le cas d'un solide élastique, occupant un domaine Ω_0 (Fig.1.28). Ce domaine contient par exemple une fissure qui occupe un sous-domaine Ω_1, dans lequel la modélisation héritée de celle mise en place dans Ω_0, n'est pas assez précise. Le sous-domaine est donc notre zone d'intérêt micro dans lequel on a besoin d'une modélisation très fine. Le concept de la méthode Arlequin est de concevoir le modèle local complet souhaité et de le superposer au modèle global dans la zone d'intérêt. Dans la zone d'intérêt, il existe deux représentations mécaniques différentes donc deux états mécaniques différents. Une partition énergétique est ensuite réalisée dans la zone d'intérêt par l'introduction de fonctions poids qui forment une partition de l'unité. Le dernier constituant clé de la méthode est le raccord entre les deux domaines. La liaison entre les deux domaines est faite via l'introduction d'une zone de recouvrement Ω_{1g} (Fig.1.29). La méthode Arlequin peut s'appliquer à plusieurs problèmes industriels : pièces tournantes de turboréacteur en structures composites

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 1.27 – Mise en œuvre de la méthode de décomposition de domaine sur un problème d'acoustique, [MAG].

stratifiées [TOU 12] ; au couplage stochastique-déterministe [PRU 08, PRU 09] ; aux problèmes d'impact [BEN 04]. Elle a également été utilisée pour la modélisation du fretting wear [BEN 11] dans le cas d'un contact entre matériaux homogènes. On peut très bien imaginer une extension de l'approche dans le cas d'un contact entre matériaux hétérogènes. La difficulté de la méthode Arlequin réside dans le choix des multiplicateurs de Lagrange recollant les domaines dans leur zone de transition. Cette difficulté est principalement numérique. Pour certains types de problème cette méthode est beaucoup plus lourde à mettre en place, avec des temps de calculs plus élevés que le calcul direct. C'est le cas du contact hétérogène avec une, deux ou une dizaine d'hétérogénéités par exemple.

Ces dernières solutions même si elles peuvent fournir des résultats assez précis, sont difficilement envisageables dans un contexte industriel du fait du temps de calcul et du coût humain que cela peut engendrer. Au problème hétérogène se superpose la problématique assez complexe de la modélisation du contact.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

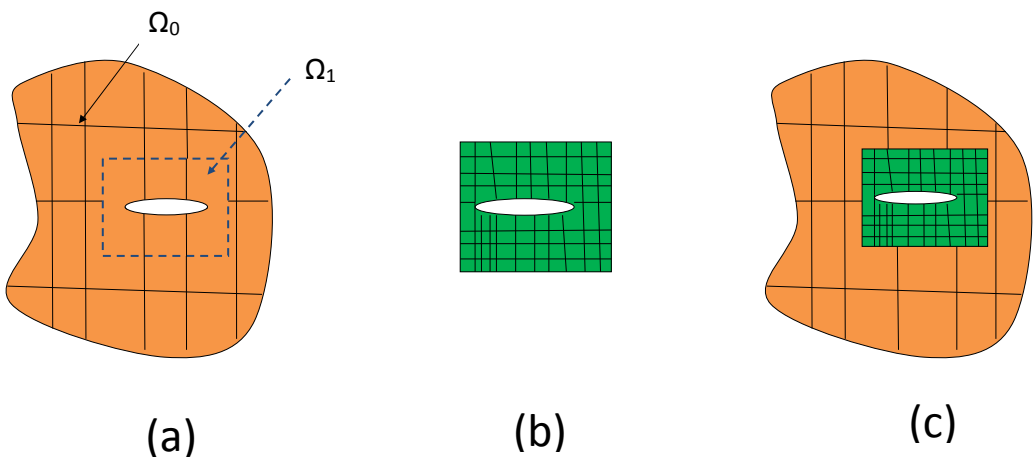


FIGURE 1.28 – Principe de la méthode Arlequin (a) Modèle initial (b) Modèle local (c) Superposition.

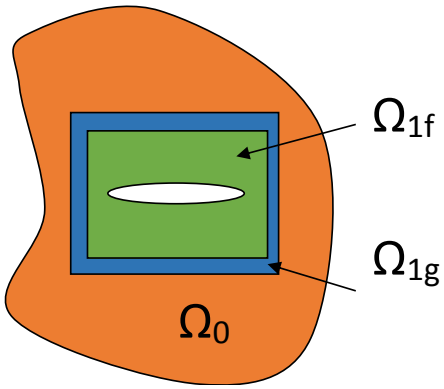


FIGURE 1.29 – Représentation des modèles macroscopique Ω_0 et microscopique Ω_1 avec une zone de recouvrement Ω_{1g}.

1.4 Modélisation en mécanique des contacts

1.4.1 Approches analytiques

1.4.1.1 Contact Hertzien

La mécanique des contacts a réellement émergé suite à l'article de Heinrich Rudolf Hertz « On the contact of elastic solids [HER 82] » publié en 1882. Ce papier est considéré aujourd'hui comme le début de la mécanique de contact qui est devenue ainsi une branche entière de la mécanique. Hertz s'intéresse à un problème de contact élastique sous un chargement normal statique. Les corps en contact sont de type paraboloïde elliptiques et non-conformes. La non-conformité implique que les surfaces non déformées des deux corps en contact ne sont superposables autrement

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

qu'en un point (contact pseudo-ponctuel) ou une ligne (contact pseudo-linéique). Le cas d'un contact normal sphère/plan peut être résolu avec l'hypothèse classique de Hertz. Cependant sa théorie ne peut s'appliquer au contact aube/disque. La théorie de Hertz repose sur trois hypothèses fortes :

- Absence de frottement.
- Matériaux homogènes isotropes.
- Hypothèse des massifs élastiques semi-infinis. Cette troisième hypothèse est vérifiée si la taille de la zone de contact est faible par rapport à la dimension des corps en contact d'une part et si les rayons de courbure de ces derniers sont grands par rapport à la dimension du contact.

Les hypothèses de Hertz, bien qu'assez restrictives, suffisent souvent à l'étude d'une importante partie des problèmes industriels. Beaucoup d'autres modèles analytiques apparaîtront plus tard, traitant des contacts dits non-hertziens.

1.4.1.2 Géométries non-hertziennes

Sont regroupées sous le terme « Géométries non-hertziennes », des géométries en contact ne pouvant être assimilées à des ellipsoïdes. Des solutions existent pour ces types de géométries. Elles sont pour la plupart basées sur l'hypothèse de massif semi-infini. Les solutions d'Aleksandrov [ALE 86] dans le cas des contacts poinçon/plan peuvent être citées en exemple. Le cas des surfaces rugueuses ayant un profil sinusoïdal fut également abordé par Westergaard [WES 39]. D'autres solutions [GRE 66] traitant le cas d'un contact plan rugueux sont obtenues cette fois-ci à partir d'une méthode statistique qui suppose une distribution gaussienne d'aspérités sphériques dont la position des sommets diffère.

1.4.2 Approches numériques

1.4.2.1 Méthodes des éléments finis

Il s'agit de la méthode reine en mécanique numérique. Il existe de nombreux logiciels commerciaux avec des Interfaces Homme-Machine simplifiant considérablement la prise en main et l'utilisation. Une importante quantité de phénomènes physiques (dynamique, thermique, plasticité, viscosité, champs magnétiques,...) peut être prise en compte simultanément. Il existe une littérature très riche (plus de 3000 références sur science direct) sur la résolution des problèmes de contact en utilisant les méthodes éléments finis. Les livres de Wriggers [WRI 06] et Laursen [LAU 03] constituent de très riches synthèses. Cependant compte tenu de la forte non-linéarité induite par la physique du contact, les solutions peuvent parfois diverger. Le problème de contact tangentiel à l'inverse du contact normal demeure toujours du domaine de la recherche. Ainsi la convergence et parfois l'unicité de la solution ne sont pas toujours assurées pour des coefficients de frottement très élevés. Certains cas industriels, comme les surfaces rugueuses ou des surfaces avec des inclusions dures, ne peuvent être résolus efficacement avec la méthode des éléments

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

finis classiques. Il faut également rappeler que les temps de calculs sont assez élevés, et le sont d'autant plus que l'existence de forts gradients de contraintes oblige à utiliser un maillage assez fin. Il s'agit cependant de la méthode la plus aboutie en mécanique numérique.

1.4.2.2 Méthodes des éléments de frontières

Les méthodes des éléments de frontières sont une alternative à la méthode des éléments finis en mécanique du contact. Il existe une littérature abondante sur le sujet. Ces approches, comparées à la méthode des éléments finis classiques, sont plus rapides mais offrent peu de flexibilité en matière de modélisation numérique de géométries 3D complexes. Plusieurs ouvrages de référence existent sur le sujet comme celui de Man [MAN 94] ou de Aliabadi et Brebbia [ALI 93].

1.4.2.3 Différences finies et méthodes multi-grilles

Les méthodes des différences finies furent utilisées pour la première fois en mécanique du contact par Terzopoulos [TER 87, TER 88]. Ils s'intéressent dans un premier temps à un contact entre corps élastique [TER 87], puis ensuite au cas de la plasticité et de la fissuration fragile [TER 88]. Les schémas de type différences finies sont peu souples du fait de l'utilisation d'une grille régulière. Il est donc très difficile d'approximer des géométries complexes et de gérer correctement les conditions limites. Pour pallier à cette difficulté, Lubrecht [LUB 91] s'est tourné vers les méthodes multigrilles. Il y aura par la suite plusieurs développements basés sur ces méthodes ; pour prendre en compte les contacts dans le cas des matériaux revêtus ou à gradients de propriétés [BOF 12a], puis des matériaux hétérogènes et élastiques [BOF 14, BOF 15]. Des développements importants sont encore nécessaires pour prendre en compte entre autres, l'anisotropie de comportement, la plasticité, certaines distributions d'hétérogénéités, ...

1.4.2.4 Méthodes semi-analytiques

Lorsque les solutions analytiques s'avèrent difficiles à obtenir, il est alors possible de discrétiser le problème et de le résoudre en sommant numériquement les solutions analytiques de problèmes élémentaires. Ces types d'approches seront appelés « méthode semi-analytique ». Ces méthodes se retrouvent dans plusieurs domaines de la mécanique : de l'homogénéisation mécanique à la mécanique du contact en passant par les problèmes de thermique, de plasticité, de calcul des fonctions de Green .... Les techniques numériques utilisées par les différents auteurs varient grandement selon le type de problème résolu. Les premiers modèles destinés aux problèmes de contact sous chargement normal statique furent présentés d'une part par [BEN 67, JOH 85a] puis par Paul et Hashemi [PAU 81]. Kalker [KAL 90] publie un ouvrage qui formalise la méthode semi-analytique. Nowell et Dini [DIN 04, NOW 98] l'applique alors à la problématique de fretting contact dans

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

le cas des contacts bidimensionnels. Les approches de Kalker d'origine utilisent des algorithmes de type Newton-Raphson. La méthode de Newton Raphson sera remplacée plus tard par celle de Gauss-siedel dans l'article de Jaeger [JAE 04]. Plusieurs techniques d'accélération de temps de calcul seront ensuite introduites. C'est le cas par exemple des méthodes multi-grilles [BRA 90, LUB 91], les transformées de Fourier rapides [JU 96a, NOG 97, POL 00, LIU 01]. La finesse des discrétisations rendue possible par ces méthodes les rendent quasiment incontournables [AI 99] dans l'étude des contacts rugueux. L'équipe du Professeur Daniel Nélias développe depuis quelques années un code de contact robuste basé sur les méthodes semi-analytiques. Les premiers travaux remontent à ceux de Christophe Jacq [JAC 02a, JAC 02b] qui utilise les approches semi-analytiques pour résoudre un contact élastoplastique 3D. Le code s'est développé depuis et a été appliqué avec succès à des problématiques :

- de contacts thermo-élasto-plastiques [BOU 05, BOU 07]
- de plasticité et d'accumulation de déformation plastique en mécanique du contact [BOU 07]
- de roulement élasto-plastique [NEL 07b, CHA 11c]
- d'usure de contacts mécaniques [GAL 06, GAL 07b, GAL 10a, GAL 10b]
- de contact entre matériaux anisotropes [BAG 13, BAG 12b, GAO 15]
- de contact entre matériaux hétérogènes [LER 10, LER 11, KOU 14b]
- du grenaillage [CHA 12a, CHA 11c, CHA 11d]
- de prise en compte des effets dynamiques dans la résolution du contact
- de prise en compte des contacts viscoélastiques hétérogènes, du roulement viscoélastique sur massif homogène/hétérogène [KOU 14a, KOU 15]
- de fretting contact en présence de massif viscoélastique

Les méthodes semi-analytiques, comparées aux autres méthodes numériques, présentent l'avantage d'être très rapides. Elles peuvent prendre en compte des géométries complexes 3D, des phénomènes physiques complexes comme la plasticité, la viscoélasticité ... Les approches développées dans cette thèse se baseront sur ces méthodes semi-analytiques.

1.4.3 Cas spécifique du contact aube/disque, aube métallique

La recherche sur le contact aube/disque a été activement soutenue par les motoristes aéronautiques comme Rolls-Royce, MTU Aero engines, Snecma, ... Évidemment les études sur cette problématique ne sont pas toutes dans le domaine public. Nous présenterons ici les quelques approches existantes dans la littérature.

Une première approche basée sur les modèles analytiques a été intensément développée par Nowell et Hills [NOW 98, HIL 88]. Il s'agit de modèles bidimensionnels dont l'objectif est d'étudier le contact aube/disque dans le cadre des problèmes de fretting-fatigue. Dans ces travaux, le contact aube-disque est supposé équivalent à un contact poinçon-plan avec des rayons de courbure en sortie de portée comme

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

l'illustre la figure 1.30.

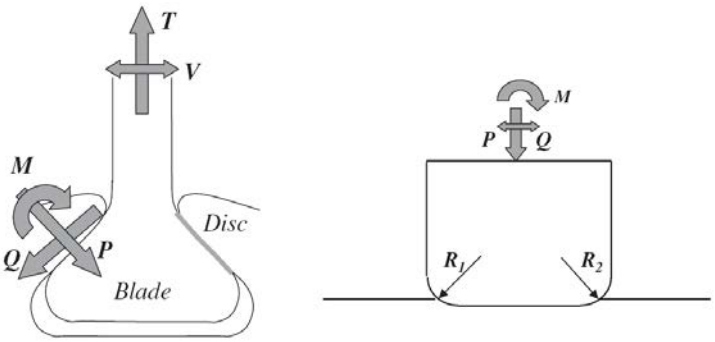


FIGURE 1.30 – Approximation géométrique du problème de contact aube-disque [RAJ 06]

Une deuxième approche ayant une forte composante expérimentale a été développée par Fouvry. Une première partie des travaux [MAR 09b, FRI 02, PAU 06] a consisté au développement des solutions technologiques pour limiter l'endommagement de l'interface aube/disque. Ces solutions passent par l'étude des revêtements et des lubrifiants utilisés dans le contact aube/disque. Une deuxième partie [MER 11, VAN 13] s'est consacrée à l'étude expérimentale du fretting-fatigue, à la mise en place des lois d'usure en vue de prévoir l'amorçage et de déterminer la durée de vie des contacts aube/disque.
Il existe une troisième approche basée sur la méthode éléments finis avec validation expérimentale. Il s'agit ici principalement des travaux de Pommier [MON 15b, MON 15a] du LMT Cachan et de Cailletaud et Feyel [YAS 11, DIC 06c] de l'école des Mines de Paris. Les travaux de Pommier ont consisté principalement, à partir d'un calcul éléments finis, de faire une décomposition des champs mécaniques en une partie non-locale dépendant du chargement extérieur, et en une partie locale dépendant de la géométrie des corps en contact. L'avantage de cette approche réside dans le fait que la composante non-locale est indépendante de la géométrie. L'équipe de Cailletaud et Feyel a développé durant la thèse de Vladislav Yastrebov [YAS 11] des méthodes numériques avancées de résolution des problèmes de contact avec application au contact aube/disque (Fig.1.31). Une technique de zoom structural (Fig.1.32) inspiré de [COR 99, SIN 02, BEI 03] fut utilisée pour obtenir un maillage plus fin au niveau de la portée de l'aube. Le modèle fin est piloté à partir des déplacements relevés sur le modèle global. Une attention particulière fut également accordée à l'impact du matériau (TA6V) sur les sollicitations en fretting-fatigue [DIC 06b, DIC 06a].

Une dernière approche basée sur un couplage entre la méthode semi-analytique pour résoudre le problème de contact et simuler l'usure, et un modèle éléments finis permettant de prendre en compte le chargement et la géométrie de la structure réelle a été mise en place par l'équipe de Daniel Nélias [FUL 11, GAL 07a].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

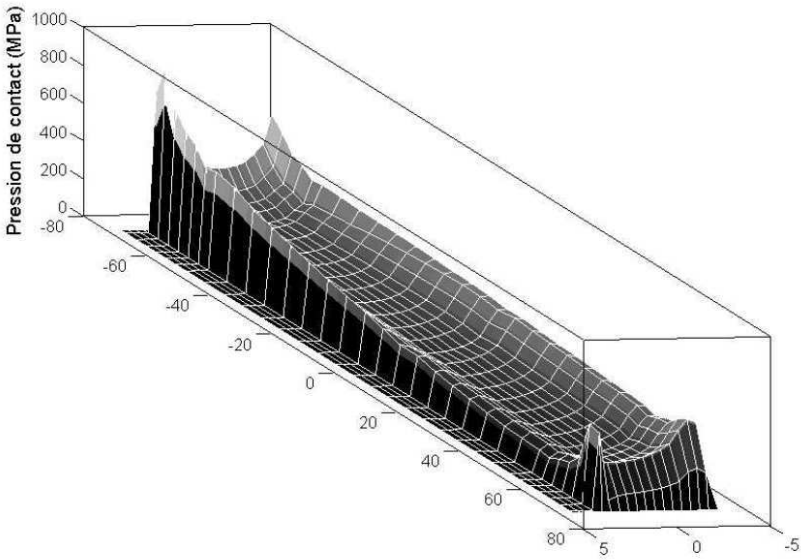


FIGURE 1.31 – Distribution de pression au niveau du contact aube/disque obtenue par la méthode des éléments finis (EF) [GAL 07a].

Tous les travaux mentionnés ci-dessus se sont limités au cas des matériaux homogènes isotropes. A notre connaissance, aucune étude complète n'existe de nos jours sur le contact aube/disque dans le cas des matériaux composites tissés 3D.

1.4.4 Cas spécifique du contact aube/disque pour une aube composite

De manière générale très peu d'études existent sur le contact entre matériaux hétérogènes ou matériaux composites. Les rares études existantes dans la littérature se sont consacrées principalement aux composites stratifiées d'un point de vue numérique [GOO 97, WU 93, CHE 08a] et expérimental [WU 94, YAN 82].

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de Benjamin Fulleringer [FUL 11] et de Julien Leroux [LER 13a]. Durant leurs thèses, ils ont pris en compte les hétérogénéités de formes diverses (cube, ellipsoïde, sphère, prolate, ...), tout d'abord plastiques (i.e. incompressibles) puis élastiques. Un couplage entre un logiciel WiseTex et le code semi-analytique, fournissant les premières descriptions du tissage du composite fut réalisé par Leroux [LER 13a]. Cependant, plusieurs verrous restaient encore à surmonter afin d'arriver à un code fonctionnel utilisable de manière industrielle. Les objectifs portaient sur :

– La description géométrique : Arriver à prendre en compte des ellipsoïdes in-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

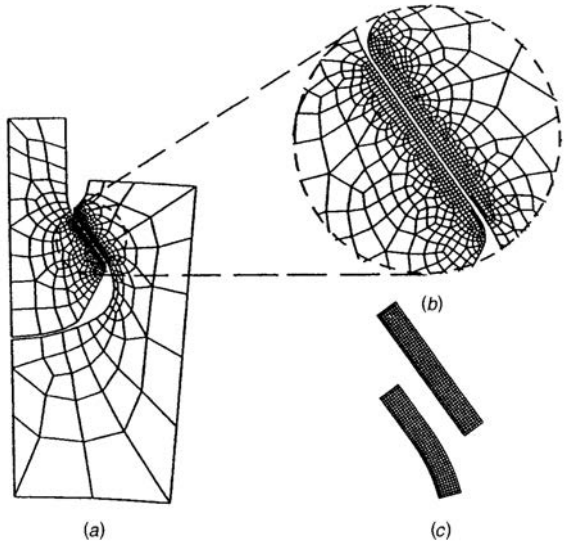


FIGURE 1.32 – Modélisation du contact aube-disque par zoom strucural [SIN 02]

clinées facilitant une meilleure description du tissage mais aussi permettant de traiter des géométries de type penny-shape.
- Les propriétés matériaux : Arriver à prendre en compte la viscoélasticité de la matrice, l'anisotropie ainsi que la bonne orientation des fibres dans la résolution des problèmes de contact.
- Réduire les temps de calculs et optimiser le code de calcul afin de pouvoir aller vers des maillages encore plus fins.
- Faire un couplage entre le modèle structurel (EF) et le problème de contact "pied d'aube" résolu par la méthode semi-analytique.
- Mettre en place une procédure de validation expérimentale et de compréhension des contacts composites.

1.5 Synthèse

Ce premier chapitre a permis de mettre en exergue la problématique du contact entre matériaux hétérogènes dans le cas du contact aube composite/disque, aube revêtu/disque ou des roulements hybrides, ... Il s'agit d'une problématique très peu étudiée dans la littérature et qui nécessite de revoir les outils de modélisation et de résolution des problèmes de contact. Les différentes catégories de composites ont été ensuite présentées et un accent particulier a été mis sur la spécificité des composites tissés 3D CMO et CMC utilisés par SNECMA. Les différentes méthodes de modélisation multi-échelles, utilisées dans la littérature pour la modélisation des matériaux hétérogènes, ont été ensuite détaillées. Il a été montré que les méthodes d'homogénéisation ne peuvent s'appliquer au contact hétérogène du fait du caractère très local d'un problème de contact. Les méthodes semi-analytiques

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

ainsi que les autres approches de résolution des problèmes de contact ont été présentées. A la complexité des problèmes de contact s'ajoute la complexité inhérente à la modélisation des matériaux hétérogènes. Finalement, ce sont les méthodes semi-analytiques qui seront retenues et utilisées dans ce manuscrit. Ces méthodes présentent beaucoup d'avantages. Outre le fait que le temps de calcul et l'espace mémoire sont considérablement réduits par rapport à la méthode des éléments finis, ces méthodes peuvent également prendre en compte simultanément plusieurs géométries et phénomènes complexes comme la plasticité, la viscoélasticité, ...
Le chapitre prochain présentera les bases de la méthode semi-analytique afin de faciliter la compréhension du reste du manuscrit.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 2

Méthodes semi-analytiques en mécanique du contact

Ce chapitre présente les bases de la méthode semi-analytique utilisée pour la résolution des problèmes de contact. Cette méthode est basée d'une part sur des solutions analytiques élémentaires et d'autre part sur des approches numériques. Les algorithmes de résolution numérique comme la méthode de gradient conjugué (CGM) et les techniques de transformées de Fourier (DC-FFT) seront détaillés afin de faciliter la compréhension du reste du manuscrit.

Sommaire

2.1 Introduction **49**

2.2 Mise en équation du problème **50**

2.2.1 Cinématique du contact 50

2.3 Discrétisation numérique **52**

2.3.1 Equations du problème de contact 53

2.3.2 Contact normal 53

2.3.3 Contact tangentiel 54

2.3.4 Couplage du problème normal et tangentiel 55

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

2.3.5 Contraintes en sous-couche 55
2.4 Résolution numérique 56
2.4.1 Transformées de Fourier discrètes et FFT 56
2.4.2 Méthode DC-FFT 61
2.4.3 Cas 2D 61
2.4.4 Cas 3D 62
2.5 Résolution du problème de contact 62
2.6 Algorithme général du solveur de contact 64
2.7 Synthèse 65

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

2.1 Introduction

Les méthodes semi-analytiques sont de plus en plus utilisées dans la résolution des problèmes de contact complexes. En plus d'être simples d'utilisation en comparaison aux méthodes éléments finis, elles permettent d'avoir des gains considérables en termes de temps de calcul. L'équipe de Nélias développe depuis quelques années des modèles de contact basés sur ces méthodes. Les premiers travaux remontent à ceux de Christophe Jacq [JAC 01, JAC 02a] qui utilise pour la première fois les méthodes semi-analytiques pour la résolution d'un contact élasto-plastique en présence d'indents et de défauts de surface. Les travaux de Jacq [JAC 01, JAC 02a] sont basés sur les solutions intégrales de Chiu [CHI 78a, CHI 77a]. Les « solutions analytiques élémentaires » développées par Jacq [JAC 01, JAC 02a] permettent ainsi de déterminer les contraintes résiduelles induites par un cuboïde élémentaire de déformation plastique noyé dans un massif semi-infini. Les solutions analytiques ont été intégrées à un algorithme de résolution d'un contact tridimensionnel afin de prendre en compte l'effet des déformations plastiques induites en sous-couche. Les développements de Jacq [JAC 01, JAC 02a] ouvrirent la porte à d'autres problématiques de contacts élastoplastiques et de contact entre surfaces fractales. Le code s'est développé depuis et a permis de prendre en compte des phénomènes physiques assez complexes. En se basant sur les travaux de Jacq, Boucly [BOU 05] prend en compte les aspects d'échauffement thermique dans la résolution du problème de contact élastoplastique. En parallèle, le modèle de plasticité est enrichi avec un algorithme de retour radial initialement développé par Simo et Taylor [SIM 85]. La finesse de discrétisation rendue possible par cette méthode fait qu'elle a été également utilisée pour l'étude des contacts rugueux. Antaluca et al [ANT 05, ANT 08] étudia l'effet sur, des surfaces dentées, d'un chargement tangentiel (hypothèse de glissement total). Il étudia également le cas d'une charge roulante sur un massif ayant un comportement élasto-plastique pour des applications sur roulement à rouleaux cylindriques [NEL 07a, CHA 11c]. Le cas d'un contact roulant/glissant en présence d'aspérités en surface a été également étudié par [BOU 07]. En se basant sur l'approche simplifiée de Antaluca en glissement total [ANT 05], Gallego [GAL 07a] propose un modèle élastique de contact sous condition de stick-slip. Le modèle ainsi développé a été appliqué avec succès à des problématiques de fretting wear en glissement total [GAL 06], glissement partiel [GAL 07c]. Il est dès lors possible de simuler les 3 modes de fretting [GAL 10a, GAL 10c]. Dans le modèle de Gallego, les problèmes de contact normal et tangentiel sont résolus alternativement. Une extension du modèle de Gallego au cas de massifs élastiques revêtus a été introduite par [WAN 10]. Chaise [CHA 11a, CHA 12a, CHA 11b, CHA 12b] a étendu l'usage des modèles semi-analytiques aux problématiques d'impacts. Son modèle a été utilisé pour étudier la mise en compression des surfaces par des procédés de grenaillage. Le modèle a été amélioré afin de prendre en compte les effets d'inertie dans les problématiques d'impact. Fulleringer [FUL 11] durant sa thèse a déterminé des solutions analytiques permettant de prendre en compte l'effet de la plasticité dans la

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

résolution du problème tangentiel [FUL 10]. Il développa également les premières approches permettant de prendre en compte une hétérogénéité sphérique dans la résolution du problème de contact.

Les travaux de Fulleringer [FUL 11] ont été poursuivis par Leroux [LER 13a]. Durant la thèse de ce dernier, les méthodes semi-analytiques ont été appliquées à la simulation du fretting dans le cas des matériaux composites à fibres longues [LER 13b, LER 13a]. Plusieurs méthodologies ont été utilisées pour prendre en compte diverses formes géométriques d'hétérogénéités [LER 10, LER 11].

De récents travaux permettent de coupler les modèles semi-analytiques de contact sec avec les contacts lubrifiés [BOS 11, REN 10].

Des développements récents permettent de traiter à la fois des problèmes d'hétérogénéités et de plasticité. Il est alors possible de prendre en compte la plasticité induite par la présence d'une hétérogénéité.

Enfin, Bagault [BAG 12a, BAG 13] a introduit les différentes formulations analytiques en déplacements et en contraintes traduisant l'anisotropie de l'un des deux corps en contact. Des cas d'applications au contact en présence de revêtement anisotrope élastique ou au contact entre matériaux anisotropes élastiques ont été étudiés et validés. Une application à la caractérisation du graphène en couche extrêmement mince a récemment abouti à [GAO 15].

Suite aux diverses thèses, il est de nos jours très difficile de faire ressortir un algorithme unique pour le code semi-analytique. Plusieurs phénomènes sont pris en compte de diverses manières. Pour faciliter la compréhension du reste du manuscrit, nous allons présenter la méthode juste dans le cas d'un problème de contact normal/tangentiel élastique avec calculs des contraintes en sous couche. Ce cas permettra de se familiariser avec la méthode tant d'un point de vue mise en équation que modélisation numérique. Cette étape est très importante et facilitera amplement la compréhension du document. Plusieurs algorithmes numériques avancés seront présentés et seront intensivement utilisés dans les chapitres 3 et 4.

2.2 Mise en équation du problème

2.2.1 Cinématique du contact

Soit deux corps élastiques définis par leurs surfaces non déformées dans un repère orthonormal $OX_1X_2X_3$, soumis à une force normale W (Fig.2.1).

Le plan $X_1 - X_2$ sépare les 2 corps en contact. Dans le cas du contact entre surfaces non-conformes, il s'agit du plan tangent au premier point (ou ligne) en contact. Les surfaces sont alors définies par :

$$x_3^{(1)} = f^{(1)}(x_1, x_2), x_3^{(2)} = f^{(2)}(x_1, x_2), \tag{2.1}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

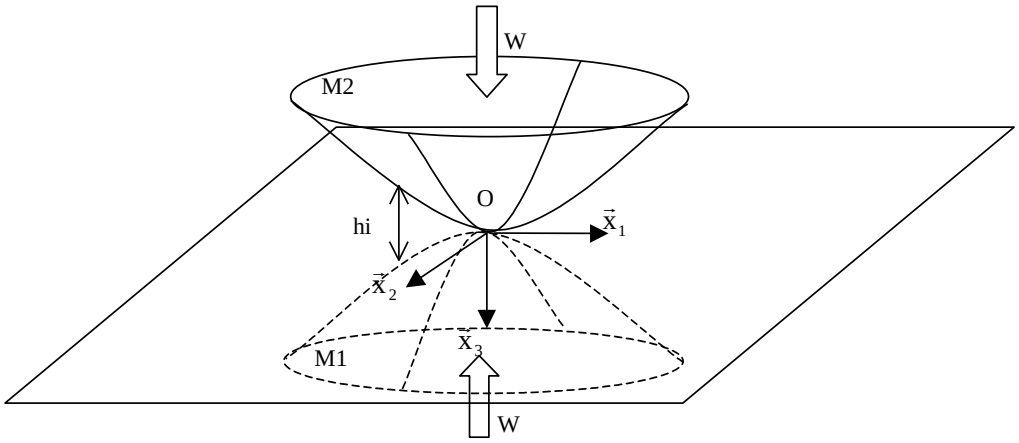


FIGURE 2.1 – Description du problème de contact.

La séparation de corps en contact est définie par :

$$h_i(x_1, x_2) = f^{(1)}(x_1, x_2) - f^{(2)}(x_1, x_2) \tag{2.2}$$

On supposera que les pentes de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont assez faibles pour approcher ces surfaces par le plan $X_1 - X_2$. Cette hypothèse est très importante pour la suite des travaux présentés dans cette thèse.

La force normale W est transmise au contact par l'intermédiaire des contraintes surfaciques $(p\,(x_1, x_2))$ dans la zone de contact Γ_C. La distance entre les deux corps en contact $h(x_1, x_2)$, qui permet de définir la condition de contact, est construite à partir de la séparation initiale des corps $h_i(x_1, x_2)$, le déplacement de corps rigide $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ et le déplacement normal élastique des deux surfaces $u_3 = u_3^{(1)} + u_3^{(2)}$,

$$h(x_1, x_2) = h_i(x_1, x_2) + u_3 - \delta \tag{2.3}$$

La condition de contact est alors définie par

$$h(x_1, x_2) = 0, \text{ dans le contact,} \tag{2.4}$$

$$h(x_1, x_2) > 0, \text{ à l'extérieur du contact.} \tag{2.5}$$

Le contact tangentiel fait intervenir, des glissements à l'interface des deux corps en contact. Le terme « glissement » sera défini par le vecteur $\mathbf{s}$ à deux composantes s_{x1} et s_{x2}. $\mathbf{s}^t$ sera le vecteur glissement à l'instant t. L'opérateur $\dot{} = \frac{d}{dt}$ sera l'opérateur dérivé par rapport au temps. Soit $\mathbf{x}^{t(1)}$ et $\mathbf{x}^{t(2)}$, les coordonnées de deux points en contact des corps 1 et 2 à l'instant t. Soit $\mathbf{u}_\tau^{t(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{t(1)} \\ u_2^{t(1)} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_\tau^{t(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{t(2)} \\ u_2^{t(2)} \end{pmatrix}$ les déplacements élastiques tangentiels des surfaces en contact. Quand le système passe d'un instant t à t', la variation de chaque terme sera supposée linéaire. Les points

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

en contact subissent un déplacement de corps rigide et se retrouve en $\mathbf{x}^{t'(1)}$ et $\mathbf{x}^{t'(2)}$. Le glissement s'écrit

$$\mathbf{s}^t = \dot{\mathbf{s}}^t\,(t-t') = \left\{\left(\mathbf{u}_\tau^{t(1)} - \mathbf{u}_\tau^{t(2)}\right) - \left(\mathbf{u}_\tau^{t'(1)} - \mathbf{u}_\tau^{t'(2)}\right)\right\} - \left(\dot{\mathbf{x}}^{t(1)} - \dot{\mathbf{x}}^{t(2)}\right)(t-t') \quad (2.6)$$

Les vecteurs $\mathbf{s^t}$ et $\dot{\mathbf{s}}^{\mathbf{t}}$ sont colinéaires. Le terme $\left(\dot{\mathbf{x}^{t(1)}} - \dot{\mathbf{x}^{t(2)}}\right)$ est la contribution des déplacements de corps rigide et est fonction de la variation de δ_{x1}, δ_{x2}. Il ressort que :

$$\left(\dot{\mathbf{x}^{t(1)}} - \dot{\mathbf{x}^{t(2)}}\right)(t-t') = \left(\mathbf{x}^{t(1)} - \mathbf{x}^{t'(1)}\right) - \left(\mathbf{x}^{t(2)} - \mathbf{x}^{t'(2)}\right), \quad (2.7)$$

$$\left(\dot{\mathbf{x}^{t(1)}} - \dot{\mathbf{x}^{t(2)}}\right)(t-t') = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{x_1}}{}^{t(1)} - \delta_{\mathbf{x_1}}{}^{t'(1)} + \delta_{\mathbf{x_1}}{}^{t(2)} - \delta_{\mathbf{x_1}}{}^{t'(2)} \\ \delta_{\mathbf{x_2}}{}^{t(1)} - \delta_{\mathbf{x_2}}{}^{t'(1)} + \delta_{\mathbf{x_2}}{}^{t(2)} - \delta_{\mathbf{x_2}}{}^{t'(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Pour des raisons de simplicité, Δ sera utilisée pour indiquer la différence d'une grandeur entre les instants t et t'. Ce qui revient à écrire :

$$\left(\dot{\mathbf{x}^{t(1)}} - \dot{\mathbf{x}^{t(2)}}\right)(t-t') = \begin{pmatrix} \Delta\delta_{\mathbf{x1}}{}^{t(1)} + \Delta\delta_{\mathbf{x1}}{}^{t(2)} \\ \Delta\delta_{\mathbf{x2}}{}^{t(1)} + \Delta\delta_{\mathbf{x2}}{}^{t(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Le vecteur glissement à instant t peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{s}^t = \begin{pmatrix} \Delta u_1^t - \Delta\delta_{\mathbf{x_1}}{}^t \\ \Delta u_2^t - \Delta\delta_{\mathbf{x_2}}{}^t \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

2.3 Discrétisation numérique

Comme il s'agit d'une méthode semi-analytique, une discrétisation du massif semi-infini et donc des équations sera donc nécessaire. Dans la suite de ce chapitre, les équations du problème peuvent être présentées sous forme continues ou sous forme discrétisées. La surface de contact est définie par une grille de points de taille $N_p = N_1 \times N_2$ (Fig.2.2), chaque point étant espacé d'une distance Δx_1 suivant X_1 et Δx_2 suivant X_2. On verra par la suite que l'utilisation de la transformée de Fourier discrète obligera à garder des pas constants suivant chaque direction. Chaque point représente une zone rectangulaire sur laquelle est appliquée des champs de pression p et de cisaillements q_{x1}, q_{x2} supposés uniformes. L'aire de ces zones est donnée par $dS = \Delta x_1 \times \Delta x_2$. Une discrétisation en profondeur suivant X_3 de pas Δx_3 pour la détermination des contraintes en sous-couche peut être rajoutée. Le pas de discrétisation Δx_3 suivant X_3 doit impérativement être constant, méthode FFT oblige. Les coordonnées (x_1, x_2, x_3) des points sont définies par $i\Delta x_1, j\Delta x_2, k\Delta x_3$ ou (i, j, k).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

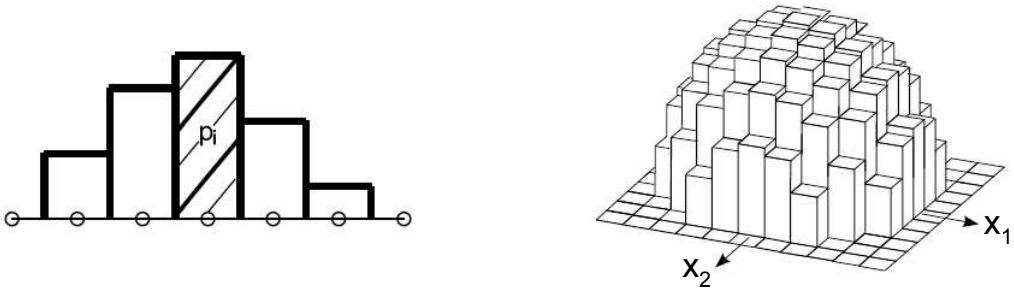


FIGURE 2.2 – Discrétisation de la surface de contact.

2.3.1 Equations du problème de contact

2.3.2 Contact normal

La résolution du problème de contact entre ces deux corps élastiques revient à résoudre simultanément un système d'équations et d'inéquations qui vérifient les conditions limites à l'interface du contact. Pour un problème piloté en effort, l'effort normal W est connu. La zone réelle de contact quant à elle est à priori inconnue.

$$p(x_1, x_2) > 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_c \tag{2.11}$$

$$h_i(x_1, x_2) + u_3(x_1, x_2) - \delta = 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_c \tag{2.12}$$

$$p(x_1, x_2) = 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \ni \Gamma_c \tag{2.13}$$

$$h_i(x_1, x_2) + u_3(x_1, x_2) - \delta > 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \ni \Gamma_c \tag{2.14}$$

$$\sum_{\Gamma_p} p(x_1, x_2) \cdot S = W \tag{2.15}$$

où $u_3(x_1, x_2)$ représente le déplacement élastique total des deux corps au point (x_1, x_2), i.e. $u_3(x_1, x_2) = u_3^{(1)}(x_1, x_2) + u_3^{(2)}(x_1, x_2)$. Les variables $p(x_1, x_2)$ et $u_3(x_1, x_2)$ sont inconnues. L'équation comprend donc deux inconnues. Il est donc nécessaire de trouver une relation entre les champs de pression et le déplacement normal $u_3(x_1, x_2)$. Dans le cas d'un contact entre matériaux élastiques, le déplacement normal et les champs de pression sont reliés entre eux par la relation suivante :
Sous forme continue

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} \tag{2.16}$$

Sous forme discrétisée

$$u_3(i, j) = u_3^p(i, j) = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} K_3^p(i-k, j-l)\, p(k, l) \tag{2.17}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Ces résultats sont basés sur les solutions de Love [LOV 20] pour un massif élastique. Les expressions analytiques de $p(x_1, x_2)$ et de $u_3(x_1, x_2)$ sont à priori inconnues. Et pour des géométries de contact complexes, il est quasiment impossible de faire une résolution analytique du problème de contact. C'est ici qu'intervient l'approche numérique (de la partie semi-analytique), on utilisera la discrétisation présentée à la figure 2.2 ainsi que la méthodologie du gradient conjugué, la méthode FFT ainsi que d'autres méthodes numériques avancées pour résoudre efficacement les équations du problème. Il faut toutefois rappeler que dans la plupart des travaux de thèses présentés au paragraphe 2.1, les solutions analytiques élémentaires ne sont pas connues à priori. Il faudrait d'abord déterminer les solutions analytiques élémentaires avant de dérouler la méthode semi-analytique (cas dynamique, ...).

2.3.3 Contact tangentiel

Lorsque les déplacements élastiques tangentiels $\mathbf{u}_\tau$ de composantes u_1 et u_2 sont non nuls, il convient de résoudre le problème de contact tangentiel. Ce cas de figures apparait lorsqu'un chargement tangentiel $\mathbf{Q}$ est appliqué, ou lorsque les deux corps en contact ont des propriétés matériaux différentes. Le problème tangentiel découlera du problème normal. Les inconnues du problème tangentiel sont :

- les cisaillements en surface q_{x_1} et q_{x_2} ;
- les déplacements normaux élastiques relatifs $u_1^{q_{x1}}$ et $u_2^{q_{x2}}$;
- la zone de glissement Γ_{sl} ;
- la zone d'adhérence Γ_{st} ;
- les déplacements de corps rigide δ_{x1} et δ_{x2} ;
- les amplitudes de glissement s_{x1} et s_{x2}, on note le vecteur glissement $\mathbf{s}$.

Les données du problème sont

- le chargement tangentiel Q_{x_1} et Q_{x_2} ;
- la zone de contact Γ_c, elle vérifie $\Gamma_c \equiv \Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st}$;
- les conditions aux limites à l'infini sont celles du massif élastique semi-infini.

Les cisaillements seront exprimés à partir d'une loi de Coulomb.

$$q_\tau(x_1, x_2) = -\mu_{coul} \cdot p(x_1, x_2) \cdot \frac{\Delta s_\tau(x_1, x_2)}{\| \Delta s_\tau(x_1, x_2) \|} \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl} \tag{2.18}$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x_1, x_2) - \Delta\delta_\tau = \Delta s_\tau(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl} \tag{2.19}$$

$$\| q_\tau(x_1, x_2) \| < \mu_{coul} \cdot p(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{st} \tag{2.20}$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x_1, x_2) - \Delta\delta_\tau = 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{st} \tag{2.21}$$

$$\sum_{\Gamma_p} q(x_1, x_2) S = Q_\tau \tag{2.22}$$

$$\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st} = \Gamma_c \tag{2.23}$$

où le domaine Γ_{st} définit la zone en adhérence (stick), Γ_{sl} la zone de glissement (slip) et μ_{coul} le coefficient de frottement de Coulomb. La variable q_τ, le vecteur cisaillement de composantes q_{x1} et q_{x2}, δ_τ le vecteur déplacement de corps rigide

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

de composantes δ_{x1} et δ_{x2}, s_τ le vecteur glissement de composantes, s_{x1} ou s_{x2}. Les déplacements en surfaces $\mathbf{u}_\tau$ sont la résultante des déplacements élastiques générés par le champ de cisaillements et de pression (cas d'un couplage normal/tangentiel).

2.3.4 Couplage du problème normal et tangentiel

Les résultats les plus précis sont obtenus en faisant un couplage entre le problème normal et tangentiel. On résout alternativement le contact normal puis tangentiel, jusqu'à atteindre convergence des deux problèmes.

1. Le problème normal est résolu sans prise en compte des cisaillements à l'interface du contact. L'aire de contact Γ_c et le champ de pression p sont déterminés.
2. Le problème tangentiel est résolu en considérant le champ de pression p obtenu précédemment. Les cisaillements en surface q_{x1} et q_{x2}, les glissements s_{x1} et s_{x2} ainsi que la zone de glissement Γ_{sl} et d'adhérence Γ_{st} sont obtenus.
3. Si les cisaillements sont non-nuls, le problème normal est de nouveau résolu en considérant les cisaillements en surface q_{x1} et q_{x2}.

Cette boucle itérative est résolue jusqu'à convergence des deux solutions. Les déplacements élastiques s'écrivent dans le cadre d'un couplage normal/tangentiel sous la forme :

$$\begin{aligned} u_{1,2,3}(i,j) &= u^{p}_{1,2,3}(i,j) + u^{q_{x1}}_{1,2,3}(i,j) + u^{q_{x2}}_{1,2,3}(i,j) \\ &= \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2} K^{p}_{1,2,3}(i-k,j-l)\,p(k,l) + \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2} K^{q_{x1}}_{1,2,3}(i-k,j-l)\,q_{x1}(k,l) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2} K^{q_{x2}}_{1,2,3}(i-k,j-l)\,q_{x2}(k,l) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Il arrive assez souvent que le couplage normal/tangentiel ne soit pas pris en compte pour des raisons de simplification. A chaque itération de calcul on résolvera de manière séquentielle une fois le problème normal puis une fois le problème tangentiel.

2.3.5 Contraintes en sous-couche

A partir des solutions en termes de champs de pression, et de cisaillements, il est possible de remonter aux champs de contraintes en sous-couche. Les contraintes en sous-couche peuvent s'avérer indispensable si l'on veut étudier l'endommagement ou la plasticité en sous-couche. Les équations permettant de remonter aux champs de contraintes sont basées sur les équations de Love [LOV 20] et le principe de superposition. L'utilisation du principe de superposition est tout sauf aberrante. Il s'agit d'un problème d'élasticité linéaire en petites déformations. Les champs de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

contrainte en un point du massif 2 de coordonnées $i\Delta x_1, j\Delta x_2, k\Delta x_3$ peuvent être donnés par :

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ}(i,j,k) = &\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} p(l,m)(C_{IJ}^{p}(i-l,j-m,k,\nu_2)) \\ &+\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} q_{x1}(l,m)(C_{IJ}^{q_{x1}}(i-l,j-m,k,\nu_2)) \\ &+\sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} q_{x2}(l,m)(C_{IJ}^{q_{x2}}(i-l,j-m,k,\nu_2))\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dans la suite de ce manuscrit, la contrainte élastique sera notée σ^0. La contrainte induite par les hétérogénéités σ.

Cette section a présenté assez succinctement les équations de base gouvernant le problème de contact normal puis tangentiel. Il convient dès lors de présenter assez rapidement les méthodes numériques mises en œuvre afin de résoudre efficacement les problèmes posés.

2.4 Résolution numérique

Une des premières difficultés réside dans les produits de convolutions des équations 2.24 et 2.25. Le nombre d'opérations nécessaire à une seule double sommation évolue en $O(N^2)$. Dans le cas 3D, le nombre d'opérations évolue en $O(N^3)$. Les temps de calculs peuvent très vite devenir prohibitifs et ainsi faire perdre à la méthode semi-analytique l'un de ses avantages majeurs qu'est le gain en temps de calculs. Il convient donc d'utiliser des techniques d'accélération de calcul. Deux techniques existent dans la littérature : "multi-level-multi-summation" introduite par Brandt et Lubrecht [BRA 90], et l'utilisation de la méthode de transformée de Fourrier rapide (FFT) initiée par Ju et Farris [JU 96b]. Les méthodes FFT offrent beaucoup plus de facilité et de nombreuses librairies existent déjà dans la littérature.

2.4.1 Transformées de Fourier discrètes et FFT

Comme mentionné précédemment, la formulation mathématique des problèmes de contact conduit à des produits de convolution entre une source extérieure (comme la pression) et une fonction modélisant la réponse du matériau considéré (fonctions de Green et coefficients d'influence). L'utilisation du théorème de convolution, transforme un produit de convolution formulé dans le domaine spatial à une simple multiplication dans le domaine fréquentiel grâce à la transformée de Fourier. La

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

convolution linéaire $y(t)$ entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$ est définie par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t-\tau)d\tau \equiv x(t) * h(t) \tag{2.26}$$

Il est possible de faire une analogie entre l'équation ci-dessus (eq.2.26) et l'équation donnant le déplacement en fonction du champ de pression, équation qui sera rappelée ci-dessous :

$$u_3\left(x_1, x_2\right) = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p\left(\xi, \eta\right) d\xi d\eta}{\sqrt{\left(\xi - x_1\right)^2 + \left(\eta - x_2\right)^2}} \tag{2.27}$$

Dans les problèmes de contact, la variable $y(t)$ est inconnue, $x(t)$ et $h(t)$ sont supposées connues. Soit $\widetilde{h}(\omega)$ et $\widetilde{x}(\omega)$ les transformées de Fourier respectives des fonctions $x(t)$ et $h(t)$. La transformée de Fourier du produit de convolution de l'équation 2.26 conduit à :

$$\widetilde{y}(\omega) = \widetilde{x}(\omega)\widetilde{h}(\omega) \tag{2.28}$$

Il s'agit dès lors d'une convolution continue. Il est donc possible d'avoir la variable $y(t)$ en utilisant une transformée de Fourier inverse.

$$y(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{y}(\omega)e^{i\omega t}dt \tag{2.29}$$

Le problème de contact est cependant résolu dans un domaine fini et discret. Le théorème de convolution continue tel que présenté ci-dessus ne peut s'utiliser en l'état. Des définitions équivalentes existent sous forme discrète. Soit h_r et x_r, un échantillon discret de N valeurs de $h(t)$ et $x(t)$ sur une zone de taille L_0. La transformée de Fourier discrète est définie par

$$\widehat{h}_s = \sum_{r=0}^{N-1} h_r e^{-2\pi irs/N}, \quad s = 0, ..., N-1 \tag{2.30}$$

La transformée de Fourier discrète inverse est définie par

$$h_j = (1/N) \sum_{r=0}^{N-1} \widehat{h}_r e^{2\pi irj/N}, \quad j = 0, ..., N-1 \tag{2.31}$$

De façon analogue au cas continu, il existe un théorème de convolution discret, soit

$$\widehat{y}_s = \widehat{x}_s \widehat{h}_s, \quad s = 0, ..., N-1 \tag{2.32}$$

avec

$$y_s = \mathbf{x} \otimes \mathbf{h} = \sum_{r=0}^{N-1} x_r h_{s-r+NH(r-j)}, \quad s = 0, ..., N-1 \tag{2.33}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$H(x) \begin{cases} = 0 & \text{if } x < 0, \\ = 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

La convolution discrète se fait sur une longueur infinie à partir des valeurs de longueurs finies. Ici $\mathbf{x}$ et $\mathbf{h}$ ont le même nombre de termes $j \in [0, N-1]$. La fonction Heaviside H est active lorsque $j - r < 0$ ce qui permet d'éviter un indice négatif pour h et se traduit par le remplacement de celui-ci par $j - r + N$. On a donc une sommation circulaire, et ainsi introduit une périodicité de l'échantillon (périodicité de longueur L_0).

2.4.1.1 Méthodes FFT

Les transformées de Fourier discrètes de $h(t)$ et $x(t)$ sont rarement implémentées dans le sens de la définition donnée aux équations 2.30 et 2.31 car cette opération nécessiterait $(N-1)^2$ produits complexes et $N \times (N-1)$ sommes complexes. Les temps de calcul peuvent devenir conséquents quand N devient élevé. Dans la version rapide, seuls $\frac{N}{2} \times (\log(N) - 2)$ produits et $N \times \log(N)$ sommes sont nécessaire. De manière générale, les algorithmes FFT dépendent de la factorisation de N. Plusieurs algorithmes existent de nos jours : l'algorithme de Cooley-Tukey (pour des tailles N puissance de 2), l'algorithme PFA de Good-Thomas basé sur le théorème des restes chinois, l'algorithme de Winograd qui utilise un polynôme cyclotomique,... Actuellement la méthode FFT utilisée dans le code semi-analytique est une routine développée par Singleton [SIN 69] basée sur l'algorithme de Cooley-Tukey et qui permet de traiter des cas N non puissance de 2. De la même façon, la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) permet d'effectuer la transformée de Fourier inverse (IFT) en $O(N \log N)$ au lieu de $O(N^2)$. Ceci justifie l'utilisation du théorème de convolution pour effectuer une convolution dans le domaine fréquentiel qui coûte $O(N)$ opérations au lieu de la faire dans le domaine initial (temporel ou spatial) en $O(N^2)$ opérations. Au final il aura fallu $O(N + 3N)$ opérations au lieu de $O(N^2)$ ce qui est très avantageux pour un N important.

2.4.1.2 Source de l'erreur des problèmes de contact résolus avec les FFT

L'utilisation de la convolution cyclique induit des erreurs compte tenu de la non-périodicité spatiale des variables de contact. Cette convolution induit un phénomène de recouvrement. Ce phénomène est illustré à la figue 2.3 sur une convolution discrète unidimensionnelle d'un échantillon de pression p et de coefficients d'influence K. La convolution cyclique suppose une périodicité de la pression. Au début et en fin du processus de convolution, les pressions ajoutées à gauche et à droite interfèrent avec les coefficients d'influence. Le résultat sera donc biaisé à cause de ce phénomène de recouvrement. Liu et al. [LIU 00a] ont trouvé une solution à ce problème de recouvrement en introduisant une technique de zero-padding (Fig.2.4) sur la source que sont les champs de pression puis une technique de wrap-around (Figs.2.5 et 2.6) sur les coefficients d'influence que sont les coefficients de Green. Cette méthode est

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

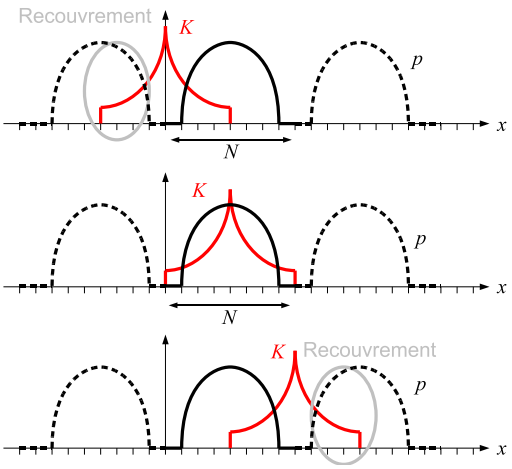


FIGURE 2.3 – Périodicité et recouvrement induits par le produit de convolution discret [GAL 07a].

connue sous le nom DC-FFT (Discrete Convolution and Fast Fourier Transform) et sera présentée ci-dessous.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

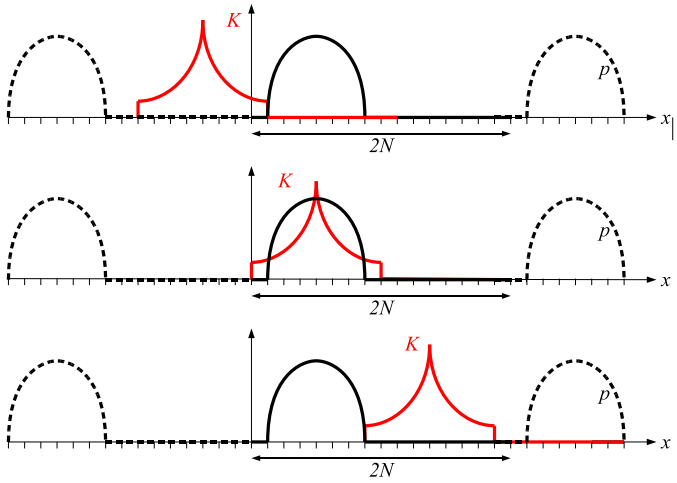


FIGURE 2.4 – Suppression du recouvrement par zero-padding [GAL 07a].

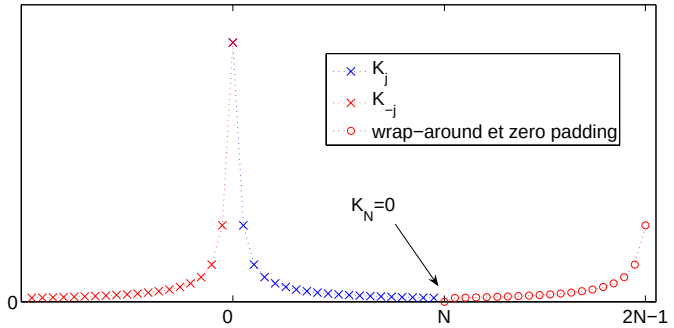


FIGURE 2.5 – Wrap-around et zero-padding de coefficients pairs [GAL 07a].

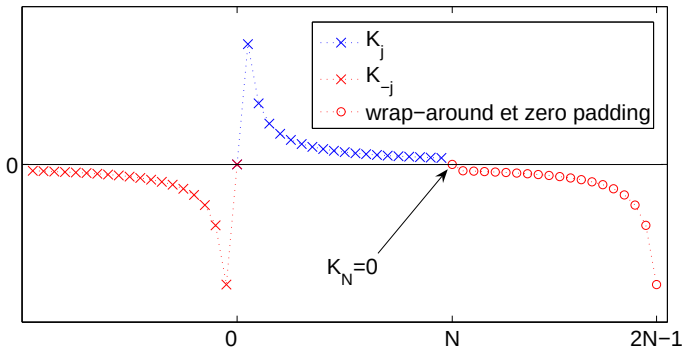


FIGURE 2.6 – Wrap-around et zero-padding de coefficients impairs [GAL 07a].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

2.4.1.3 La méthode DC-FFT

Les détails de la méthode de Liu [LIU 00a], i.e. la DC-FFT (Discrete Convolution and Fast Fourier Transform), seront présentés ci-dessous. Comme mentionné précédemment, la DC-FFT fait appel aux techniques de « zero-padding » et de « wrap-around ».

1. déterminer les coefficients d'influence ; $\{K_j\}_N$,
2. étendre ces coefficients d'influence dans un domaine donné avec le wrap-around order, $\{K_j\}_{2N}$;
3. appliquer la FFT pour obtenir $\left\{\hat{K}_s\right\}_{2N}$;
4. entrer les pressions, $\{p_j\}_N$;
5. étendre les pressions sur le domaine étendu avec zero-padding, $p_j = p_j,\ j \in [0, N-1]\,,\quad p_j = 0,\ j \in [N, 2N-1]$;
6. appliquer la FFT pour obtenir $\{\hat{p}_s\}_{2N}$;
7. effectuer le produit terme à terme dans le domaine fréquentiel, $\{\hat{u}_s\}_{2N}$;
8. appliquer l'IFFT pour obtenir $\{u_j\}_{2N}$;
9. garder les termes $\{u_j\}_{2N}\,,\ j \in [0, N-1]$.

Zero-padding : Des valeurs nulles de N à $2N$+1 sont ajoutées à la distribution de pression déjà définie de 0 à N-1.

Wrap-around order : Le zero-padding n'est pas étendu aux coefficients d'influence. Ces coefficients sont calculés de 0 à N-1, le coefficient d'indice N est mis égal à 0, les coefficients de N+1 à $2N$-1 sont obtenus à partir des coefficients 1 à N-1 mais rangés dans le sens inverse, un signe négatif est éventuellement ajouté à ces derniers suivant la parité de la fonction des coefficients d'influence. Ainsi, les coefficients d'influence K_3^p sont étendus comme indiqué sur la figure 2.5 alors que les coefficients d'influence $K_3^{q_{x1}}$ doivent être étendus comme indiqué à la figure 2.6 dans la direction X_1.

2.4.2 Méthode DC-FFT

Le principe de la DC-FFT a été présenté dans le cas 1D. L'algorithme peut cependant être étendu aisément en 2D puis 3D.

2.4.3 Cas 2D

La transformée de Fourier bidimensionnelle (2D-FFT) consiste à utiliser une transformée de Fourier suivant une première direction, suivie d'une deuxième suivant l'autre direction. L'algorithme est utilisé dans le cas d'une source surfacique. L'image peut quant à elle être :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

– surfacique

$$u_3\left(i,j\right) = u_3^p\left(i,j\right) = \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2} K_c^p\left(i-k,j-l\right)p\left(k,l\right) \tag{2.35}$$

– volumique

$$\sigma_{IJ}(i,j,k) = \sum_{l=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} p(l,m)(C_{IJ}^p(i-l,j-m,k,\nu_2)) \tag{2.36}$$

La méthode 2D-DC-FFT réduit le nombre d'opérations de $O(N_1^2 \times N_2^2)$ à $O(2N_1 \times 2N_2 \times \log(2N_1 \times 2N_2))$. La convolution dans le domaine fréquentiel requiert $O(2N_1 \times 2N_2 \times \log(2N_1 \times 2N_2))$ opérations supplémentaires. Avec la transformée de Fourier inverse, $O(2N_1 \times 2N_2 + 3 \times (2N_1 \times 2N_2) \times \log(2N_1 \times 2N_2))$ opérations sont alors requises au total pour la double sommation. Les algorithmes 2D-DC-FFT peuvent également s'utiliser dans le cas d'une source volumique. Dans ce cas l'algorithme 2D-DC-FFT sera alors exécuté pour chaque profondeur x_3 de la source volumique. Les temps de calculs font que l'algorithme 2D-DC-FFT a été abandonné pour l'algorithme 3D-DC-FFT dans le cas des sources volumiques.

2.4.4 Cas 3D

La transformée de Fourier tridimensionnelle consiste à utiliser la transformée de Fourier rapide suivant les trois directions x_1, x_2, x_3. Cet algorithme est principalement utilisé dans le cas d'une source volumique et d'une image volumique

$$\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{x_3^I=0}^{N_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{N_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{N_1-1} B_{ijkl}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3-x_3^I)\varepsilon_{kl}^*(x_1^I,x_2^I,x_3^I) \tag{2.37}$$

C'est le plus rapide dans le cas des sources volumiques. Le domaine d'étude $N_1 \times N_2 \times N_3$ est d'abord multiplié par 2 dans les trois directions afin d'obtenir un produit de convolution cyclique. La transformée de Fourier 3D requiert alors $O(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3 \times \log(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3))$ opérations. La transformée inverse requiert également le même nombre. Compte tenu du fait que la 3D-DC-FFT requiert 3 transformées directes, le nombre d'opérations pour la triple sommation est de l'ordre de $O(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3 + 3 \times 2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3 \times \log(2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3))$.

2.5 Résolution du problème de contact

La résolution des équations de contact fait intervenir un système d'équations et d'inéquations qu'il faut résoudre simultanément. Les formulations variationnelles associées au problème ont été introduites par [POL 00]. Une unique

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

solution du problème de contact (contact normal) est obtenue en minimisant la forme variationnelle suivante.

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{A}_z^p\mathbf{p}+\mathbf{h}^{*T}\mathbf{p}+c_\tau-\sum\lambda_{ij}p_{ij}\right)\Leftrightarrow\mathbf{A}_z^p\mathbf{p}+\mathbf{h}^{*T}-\lambda=0, \tag{2.38a}$$

$$p_{ij}>0,\quad \lambda_{ij}=0, \tag{2.38b}$$

$$p_{ij}=0,\quad \lambda_{ij}\geq 0. \tag{2.38c}$$

La première partie de l'équation ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$Ax=b \tag{2.39}$$

La résolution du problème revient donc à faire une résolution de systèmes linéaires sous contraintes. Certains auteurs comme [HES 80] ont montré que la méthode de gradient conjugué est bien adaptée à la résolution de ces types de problème. De manière générale, la méthode du gradient conjugué ainsi que ses différentes variantes seront utilisées assez régulièrement dans ce manuscrit pour résoudre les problèmes de contact. Il est donc nécessaire de présenter assez rapidement son algorithme :

Choix d'une valeur initiale x_0 ;
Initialisation des variables : $r_0 \leftarrow Ax_0$,$p_0 \leftarrow -r_0$,$k \leftarrow 0$;
while $r_k \neq 0$

$$\alpha_k \leftarrow \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}; \tag{2.40}$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_{k+1}+\alpha_k p_k; \tag{2.41}$$

$$r_{k+1} \leftarrow r_{k+1}+\alpha_k A p_k; \tag{2.42}$$

$$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}; \tag{2.43}$$

$$p_{k+1} \leftarrow -r_{k+1}+\beta_{k+1}p_k; \tag{2.44}$$

$$k \leftarrow k+1; \tag{2.45}$$

end while

La méthode du gradient conjugué présente deux avantages majeurs :
- Le gradient conjugué s'avère performant en temps de calcul, notamment pour résoudre de grands systèmes linéaires.
- L'autre avantage du gradient conjugué est le gain en mémoire par rapport à certaines méthodes. A chaque itération, la direction conjuguée p_k est obtenue uniquement à partir de l'itération p_{k-1}. Le stockage des itérations précédentes n'est pas nécessaire.

Cette partie fut consacrée exclusivement à la résolution du problème de contact normal entre corps homogènes afin de faciliter la compréhension des méthodes

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

semi-analytiques. Cependant cette approche peut s'appliquer à des physiques plus complexes comme le couplage normal/tangentiel, la prise en compte des hétérogénéités, la prise en compte de la plasticité en sous-couche,...

Dans la prochaine section, un effort sera fait afin d'esquisser un algorithme assez général du code semi-analytique de résolution des problèmes de contact.

2.6 Algorithme général du solveur de contact

Fort de toutes les méthodes numériques présentées dans la section précédente, le fonctionnement global du code SAM peut être défini par l'organigramme de la figure 2.7. Dans le chapitre 4 cet organigramme sera modifié dans le cas des contacts entre matériaux viscoélastiques. Au corps principal constituant le solveur de contact peuvent se greffer différents modules permettant de traiter les problèmes d'impact, d'hétérogénéités et d'usure. Le code doit être d'abord initialisé. Les données d'entrée peuvent être par exemple, la géométrie des deux corps en contact, les propriétés matériaux associées, le chargement, le coefficient de frottement, des contraintes résiduelles suite à des chargements thermomécaniques, ... La première étape consiste à résoudre le problème de contact en utilisant des algorithmes types gradient conjugué présentés au paragraphe 2.5. Si l'on considère les effets tangentiels, les problèmes de contact normal et tangentiel sont résolus alternativement, l'autre étant maintenu constant, jusqu'à convergence des deux problèmes. A cette étape, les champs de pression et de cisaillements sont connus. A partir des champs de pression et de cisaillement déterminés précédemment (si les effets tangentiels sont considérés), les contraintes élastiques σ^0dans le volume sont calculées à partir de solutions analytiques élémentaires (Eq. 2.36) en utilisant les techniques 2D-FFT. Toutes ces solutions analytiques, valides dans un espace semi-infini élastique homogène et isotrope, sont regroupées dans le livre de Johnson [JOH 85a]. Les eigenstress σ générées par les déformations inélastiques provenant d'inclusions hétérogènes ainsi que les contraintes résiduelles σ^{res} sont tout simplement ajoutées aux contraintes élastiques σ^0 afin d'obtenir la contrainte totale.

$$\sigma^{tot}(x) = \sigma^0(x) + \sigma^{res}(x) + \sigma(x) \tag{2.46}$$

Cette superposition n'est valable que sous des hypothèses de petites déformations. La convergence du problème se fait sur les champs de déplacements, en utilisant un algorithme de retour radial dans le cas de la plasticité, en calculant les champs d'eigendisplacements (u_3^*) dans le cas des matériaux hétérogènes. La contrainte totale est alors utilisée, dans le cas de la plasticité, comme entrée pour l'algorithme de Retour Radial (return-mapping). L'incrément de déformation plastique est déterminé en chaque point

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

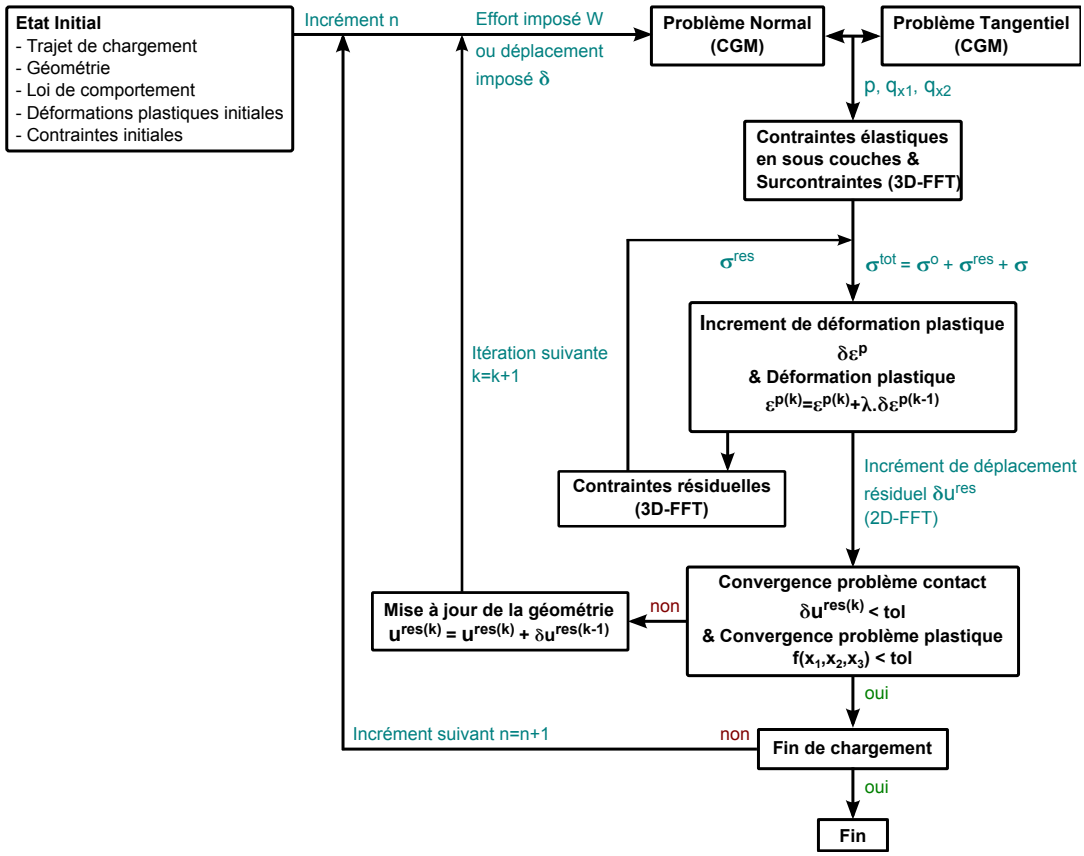


FIGURE 2.7 – Algorithme général du modèle de contact semi-analytique élastoplastique

du volume. Les nouvelles contraintes résiduelles ainsi que les incréments de déplacements résiduels en surface sont alors calculés à partir des incréments de déformations plastiques. La convergence du problème plastique et des déplacements résiduels assurent la convergence du problème de contact. Si le problème converge, on passe à l'étape de chargement suivante. Dans le cas contraire, la géométrie de la surface de contact est actualisée par la prise en compte des déplacements résiduels, le problème de contact est alors de nouveau résolu ainsi que les contraintes et déplacements résiduels.

2.7 Synthèse

Ce chapitre a passé en revue les bases de la méthode semi-analytique, méthode qui sera utilisée dans cette thèse pour la modélisation du contact. L'exposé s'est limité au cas du contact élastique normal/tangentiel afin de faciliter sa compréhension. De manière générale ; qu'il s'agisse d'un problème d'impact, d'un contact élastique, d'un contact élastoplastique, ... ; la mise

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

en place de la méthode semi-analytique se déroulera suivant trois grandes étapes que sont : la mise en équations du problème, la détermination des solutions analytiques élémentaires et enfin la résolution numérique. La mise en équations est basée sur les équations fondamentales de la mécanique. Certaines solutions élémentaires existent déjà dans la littérature. Cependant d'autres doivent être déterminées analytiquement. La méthode du gradient-conjugué a été également présentée et sera utilisée pour la résolution numérique du contact. Les temps de calculs, générés par la réalisation des produits de convolutions, sont considérablement réduits grâce à l'utilisation des algorithmes de transformées de Fourier discrètes (2D-DC-FFT, 3D-DC-FFT). Les méthodes et algorithmes utilisés dans ce chapitre seront intensivement mis à contribution pour la résolution du contact entre matériaux hétérogènes, qui est l'objectif principal de cette thèse.
Le chapitre prochain s'inscrira dans la continuité de la thèse de Julien Leroux et s'intéressera à la prise en compte des hétérogénéités élastiques isotropes/anisotropes dans une matrice élastique isotrope.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 3

Massif élastique hétérogène

Dans ce chapitre, les méthodes semi-analytiques seront utilisées pour résoudre le contact en présence d'hétérogénéités élastiques noyées dans une matrice élastique isotrope. Le modèle développé a été validé par comparaison avec une méthode éléments finis. Une méthodologie numérique a été mise en place afin de prendre en compte l'effet des interactions entre deux ou plusieurs hétérogénéités. Une nouvelle méthode de décomposition ainsi que la parallélisation OpenMP ont été introduites afin de réduire les temps de calculs.

Sommaire

3.1 Etat de l'art 69

3.2 Formulation générale du problème de contact 71

3.3 Prise en compte des hétérogénéités 71

3.3.1 Solution en espace infini 71

3.3.2 Solution en espace semi-infini 74

3.3.3 Déplacement normal dû aux hétérogénéités 76

3.3.4 Prise en compte de l'inclinaison de l'inclusion 77

3.3.5 Prise en compte de l'effet des hétérogénéités dans l'algorithme de contact 78

3.4 Validation du modèle développé 81

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

3.5 Résultats et étude paramétrique 84
3.5.1 Hétérogénéité isotrope 84
3.5.2 Hétérogénéité anisotrope 88
3.6 Cas connexes 96
3.6.1 Hétérogénéités cubiques 96
3.6.2 Hétérogénéités et contact tangentiel 97
3.7 Prise en compte de plusieurs hétérogénéités 100
3.7.1 Equations du problème 100
3.7.2 Méthodologie numérique 101
3.7.3 Algorithmes de résolution numérique 102
3.7.4 Validation dans le cas d'un matériau revêtu 105
3.8 Améliorations numériques : nouvelle méthode de décomposition 111
3.9 Améliorations numériques : parallélisation 113
3.9.1 Différents types d'architecture 114
3.9.2 Mesure de la performance 116
3.9.3 Mémoire partagée : environnement OpenMP 117
3.9.4 Mémoire distribuée : environnement MPI 120
3.10 Synthèse 122

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

3.1 Etat de l'art

Le contact entre matériaux hétérogènes est une problématique très intéressante pour plusieurs raisons. La présence des hétérogénéités modifie fondamentalement la distribution des contraintes en sous-couche mais aussi la distribution de pression. D'une part, pour les matériaux métalliques, alliages d'aluminium ou matériaux céramiques, les mécanismes d'endommagements peuvent être initiés par la présence d'impuretés matériaux comme les cavités, inclusions ou précipités. Les inclusions peuvent augmenter localement les champs de contraintes locaux, qui peuvent être à l'origine de l'amorçage et la propagation de fissures. La présence d'hétérogénéités peut donc réduire la durée de vie des composants mécaniques comme les roulements [VOS 85, NEL 99, NUG 00, VIG 03, CHE 08b]. D'autre part, dans le cas de certains matériaux hétérogènes comme les matériaux composites, l'ajout des renforts modifie considérablement la distribution des contraintes. Il est désormais établi expérimentalement que la présence des renforts dans le cas des matériaux composites [TER 11, TER 09] modifie considérablement le comportement tribologique du matériau composite.

La perturbation induite par la présence des hétérogénéités noyées dans un massif infini a fait l'objet de plusieurs études [ESH 57, ESH 59, ESH 61, WIL 64, WAL 67, ASA 75, MUR 84]. Eshelby [ESH 57, ESH 59] fut le premier à proposer une méthode traitant du cas d'une hétérogénéité ellipsoïdale noyée dans une matrice infinie, méthode connue sous le nom de "Equivalent Inclusion Method". Moschovodis et Mura [MOS 75] se sont basés sur les travaux d'Eshelby pour donner l'expression du tenseur d'Eshelby à l'extérieur d'une hétérogénéité ellipsoïdale comme une fonction des potentiels harmoniques et bi-harmoniques. Tous ces travaux se sont limités au cas d'un massif infini.

Les solutions analytiques en termes de déplacements, de déformations et de contraintes en espace semi-infini sont très difficiles à obtenir. En effet la formulation mathématique est beaucoup plus complexe. La plupart du temps, plusieurs hypothèses sont posées pour simplifier le problème. Mindlin [MIN 50] considère un massif élastique semi-infini contenant une eigenstrain hydrostatique ; Aderogba [ADE 76] suppose une hétérogénéité sphérique avec une eigenstrain arbitraire ; [CHI 77b, CHI 78a] a limité son analyse au cas des inclusions cuboïdales avec une eigenstrain incompressible ; [SEO 70] suppose une inclusion ellipsoïdale avec une eigenstrain purement sphérique.

Plusieurs études se sont intéressées à la concentration des contraintes due à la présence des inclusions ou des hétérogénéités. Cependant, jusqu'à récemment, le contact entre matériaux hétérogènes n'était pas résolu. Les auteurs supposaient un contact Hertzien dans le cas du contact entre matériaux hétérogènes [KAB 02, KAB 05] ou [COU 05]. L'effet d'une hétérogénéité unique de forme ellipsoïdale sur un problème de contact 2D a été abordé par [KUO 07, KUO 08]. La prise en compte des hétérogénéités dans le cas d'un contact 3D

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

a été résolue par Nélias et co-auteurs [JAC 02a, FUL 11, LER 10, LER 11, LER 13a], puis ensuite par [ZHO 1a]. Ces modèles sont basés sur les méthodes semi-analytiques développées par [JAC 02b].
Dans ce chapitre, le cas des hétérogénéités isotropes inclinées et anisotropes a été résolu. Le modèle a été validé par la méthode des éléments finis. Une méthode numérique a été mise en œuvre pour la prise en compte de l'interaction entre plusieurs hétérogénéités. La méthode a été validée dans le cas d'un revêtement élastique. Un accent particulier a été mis sur la réduction du temps de calcul. Une nouvelle méthode de décomposition ainsi qu'une parallélisation du code de calcul ont été mises en œuvre. En combinant la nouvelle méthode de décomposition et la parallélisation, il est possible d'avoir un gain en terme de temps de calculs d'un facteur 11 sur (4 cœurs). Tous les ingrédients sont désormais réunis pour résoudre le problème de contact entre matériaux hétérogènes ou encore entre matériaux composites. Les temps de calculs sont très bas comparés à des modèles éléments finis classiques.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

3.2 Formulation générale du problème de contact

On se place dans un repère de centre O, centré sur le contact. Le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ définit le plan de contact, et $\vec{x}_3$ l'axe vertical descendant (Fig. 2.1).
Le problème du contact normal entre deux corps, $M1$ et $M2$ avec $M2$ hétérogène, consiste à résoudre simultanément deux équations et à satisfaire une inéquation. Il est défini par :

- La conservation de la charge. La charge appliquée sur un massif en contact W doit être égale à l'intégrale des pressions de contact $p(x_1, x_2)$ sur la zone réelle de contact Γ_c :
$$W = \int_{\Gamma_c} p(x_1, x_2) d\Gamma \tag{3.1}$$
- La déformée des deux massifs ($M1$ et $M2$) en contact :
$$h(x_1, x_2) = h_i(x_1, x_2) + \delta + u_3^{(M1+M2)}(x_1, x_2) + u_3^*(x_1, x_2) \tag{3.2}$$
avec $h_i(x_1, x_2)$ la distance initiale entre $M1$ et $M2$, δ est le déplacement relatif des deux corps en contact $M1$ et $M2$, $u_3^{(M1+M2)}(x_1, x_2)$ est le déplacement en surface et u_3^* le déplacement induit par la présence des hétérogénéités.
- Les conditions de contact sont :
$$\begin{gathered} h(x_1, x_2) > 0 \\ \text{contact} : h_i(x_1, x_2) = 0 \text{ et } p(x_1, x_2) > 0 \\ \text{séparation} : h_i(x_1, x_2) > 0 \text{ et } p(x_1, x_2) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Toute la difficulté de la résolution du contact entre matériaux hétérogènes réside dans la détermination du champ de déplacement u_3^* et du champ de contraintes σ induit par la présence des hétérogénéités. Dans la suite de ce chapitre, nous tâcherons de détailler l'approche utilisée pour calculer σ et u_3^* ainsi que l'algorithme permettant de coupler le problème de contact et la prise en compte des hétérogénéités.

3.3 Prise en compte des hétérogénéités

La méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby est utilisée pour prendre en compte la présence d'hétérogénéités dans le massif semi-infini.

3.3.1 Solution en espace infini

La topologie du problème correspond à une inclusion Ω de constantes élastiques C_{ijkl}^I noyée dans un milieu infini (matrice) D de constantes élastiques C_{ijkl}^M. L'ensemble est soumis à un chargement uniforme appliqué à l'infini ε^0 ou

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

σ^0. Le champ de déformations élastiques en tout point du massif semi infini est perturbé par la présence de l'hétérogénéité. Notons σ_{ij} et u_i respectivement le champ de contraintes et de déplacements induit par la présence de l'hétérogénéité. La contrainte totale est $\sigma_{ij}+\sigma^0_{ij}$ et le déplacement total $u_i+u^0_i$. On vérifie l'équation d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{3.4}$$

et $\sigma_{ij} = 0$ à l'infini.
Si on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire, les composantes du tenseur des contraintes sont données par la loi de Hooke :

$$\sigma^0_{ij} + \sigma_{ij} = C^I_{ijkl}(u^0_{k,l} + u_{k,l}) = C^I_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl}) \quad \text{dans } \Omega$$

$$\sigma^0_{ij} + \sigma_{ij} = C^M_{ijkl}(u^0_{k,l} + u_{k,l}) = C^M_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl}) \quad \text{dans } D-\Omega \tag{3.5}$$

La méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby consiste à remplacer l'hétérogénéité par une inclusion ayant les même propriétés matériaux que la matrice mais soumise à une déformation imaginaire appelée déformation libre ou eigenstrain ε^* donnée par la relation :

$$C^I_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl}) = C^M_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon^*_{kl}) \quad \text{dans } \Omega \tag{3.6}$$

L'équation d'équivalence (Eq.3.6) est une équation nécessaire et suffisante au problème d'équivalence entre inclusion et hétérogénéité. Si la déformation appliquée est uniforme alors l'eigenstrain ε^*_{ij} et la déformation induite ε_{ij} sont uniformes et reliées entre elles par la relation suivante, valide uniquement dans Ω.

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \times \varepsilon^*_{kl}, \tag{3.7}$$

où S_{ijkl} est le tenseur d'Eshelby. En remplaçant Eq.(3.7) dans Eq.(3.6) on obtient :

$$\Delta C_{ijkl} S_{klmn} \varepsilon^*_{mn} + C^M_{ijkl}\varepsilon^*_{kl} = -\Delta C_{ijkl}\varepsilon^0_{kl} \tag{3.8}$$

où

$$\Delta C_{ijkl} = C^I_{ijkl} - C^M_{ijkl}$$

Quand l'hétérogénéité contient une déformation inélastique (thermique, ...) initiale (inclusion hétérogène), les équations précédentes (Eq.3.6 - Eq.3.8) deviennent :

$$\sigma^0_{ij} + \sigma_{ij} = C^I_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon^{ine}_{kl}) \quad \text{dans } \Omega$$

$$\sigma^0_{ij} + \sigma_{ij} = C^M_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl}) \quad \text{dans } D-\Omega \tag{3.9}$$

en appliquant la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$C^I_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon^{ine}) = C^M_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon^{ine}_{kl} - \varepsilon^*_{kl}) \tag{3.10}$$

Ainsi,

$$\sigma_{ij} = C^I_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon^{**}_{mn} - \varepsilon^{ine}) = C^M_{ijkl}(S_{klmn}\varepsilon^{**}_{mn} - \varepsilon^{**}_{kl}) \tag{3.11}$$

où

$$\varepsilon^{**} = \varepsilon^* + \varepsilon^{ine}$$

Détermination du champ de déformation ε

La méthode d'Eshelby est valable uniquement dans le cas des déformations uniformes appliquées à l'infini. Cependant dans les problèmes de contact les déformations sont non uniformes. Moschovidis et Mura [MOS 75] ont étendu les travaux d'Eshelby aux cas des déformations appliquées non-uniformes. De manière générale quand la déformation appliquée est un polynôme d'ordre n, l'eigenstrain correspondant sera également de degré n. Dans le cas d'une hétérogénéité ellipsoïdale, si le champ appliqué est donné par :

$$\varepsilon^0_{ij}(x) = E^0_{ij} + E^0_{ijk}x_k + E^0_{ijkl}x_kx_l + \cdots . \tag{3.12}$$

où les coefficients E^0 sont constants. L'eigenstrain est sous la forme :

$$\varepsilon^*_{ij}(x) = B_{ij} + B_{ijk}x_k + B_{ijkl}x_kx_l + \cdots . \tag{3.13}$$

Le champ de déformation associé est donné par :

$$\varepsilon_{ij}(x) = D_{ijkl}(x)B_{kl} + D_{ijklq}(x)B_{klq} + D_{ijklqr}(x)B_{klqr} + \cdots . \tag{3.14}$$

Pour les points situés à l'intérieur de l'hétérogénéité, le tenseur D_{ijkl} est constant et D_{ijklq} est linéaire en x. Les expressions de D_{ijkl}, D_{ijklq} et D_{ijklqr} sont données dans le livre de Mura [MUR 87a]. Dans le cadre de ce manuscrit, on se limitera à une eigenstrain uniforme. Ainsi uniquement les coefficients D_{ijkl} seront calculés.

$$D_{ijkl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}[\Psi_{,ijkl} - 2\nu\delta_{kl}\phi_{,ij} - (1-\nu)(\delta_{kl}\phi_{il} + \delta_{ki}\phi_{,jl} + \delta_{jl}\phi_{,ik} + \delta_{li}\phi_{,jk})] \tag{3.15}$$

$$\Psi(x) = \int_\Omega |x - x'|dx'$$

$$\phi(x) = \int_\Omega \frac{1}{|x - x'|}dx'$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Les potentiels harmoniques et bi-harmoniques $\phi(x)$ et $\Psi(x)$ s'expriment en fonction des intégrales elliptiques $E(\theta', k)$ et $F(\theta', k)$ [GRA 65], où :

$$E(\theta', k) = \int_0^{\theta'} (1 - k^2)^{1/2} dw$$

$$F(\theta', k) = \int_0^{\theta'} \frac{1}{(1 - k^2)^{1/2}} dw \tag{3.16}$$

$$\theta' = \sin^{-1} \left(1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^{1/2}$$

$$k = \frac{3(a_1^2 - a_2^2)}{(a_1^2 - a_3^2)} \tag{3.17}$$

a_1, a_2, a_3 étant les demi-axes de l'inclusion ellipsoïdale. Le tenseur d'Eshelby S_{ijkl} est obtenu à partir de l'équation Eq. (3.15) :

$$S_{ijkl} = D_{ijkl}(x^I) \tag{3.18}$$

où
$x^I = (x_1^I, x_2^I, x_3^I)$ représente les coordonnées cartésiennes du centre de l'inclusion.

3.3.2 Solution en espace semi-infini

Mura [MUR 87a] a introduit des méthodes qui permettent de déterminer l'eigenstrain dans le cadre d'un massif semi-infini. Les solutions qu'il obtient sont assez complexes et ne sont valables que dans le cas d'une eigenstrain purement hydrostatique. Afin de se débarrasser de cette hypothèse simplificatrice Zhou et al. [ZHO 09] ont proposé une méthode permettant d'étendre la solution d'Eshelby, valable uniquement en espace infini, à un espace semi-infini. La méthode consiste donc à décomposer le problème entre trois sous-problèmes (Fig. 3.1), connu sous le nom de décomposition de Chiu [CHI 78b].

- (1) Une inclusion avec une eigenstrain $\varepsilon^* = (\varepsilon_{11}^*; \varepsilon_{22}^*; \varepsilon_{33}^*; \varepsilon_{12}^*; \varepsilon_{13}^*; \varepsilon_{23}^*)$ dans un espace infini
- (2) Une inclusion symétrique de la première par rapport à la surface libre d'eigenstrain $\varepsilon_s^* = (\varepsilon_{11}^*; \varepsilon_{22}^*; \varepsilon_{33}^*; \varepsilon_{12}^*; -\varepsilon_{13}^*; -\varepsilon_{23}^*)$ dans le même espace
- (3) Un champ de pression $-\sigma^n$ distribué sur la surface ($x_3 = 0$). Ce champ est généré par les eigenstrains ε^* et ε_s^*

La somme de ces deux solutions génère uniquement une contrainte normale σ^n sur la surface ($x_3 = 0$). La contrainte en tout point du domaine maillé en $n_1 \times n_2 \times n_3$ cuboïdes est donnée par :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

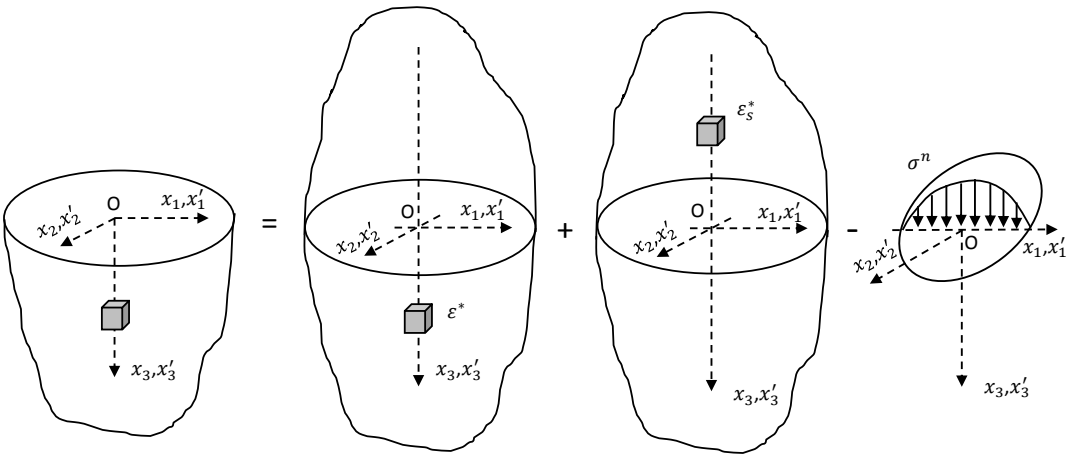


FIGURE 3.1 – Méthode de décomposition de Chiu.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) = &\sum_{x_3^I=0}^{n_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} B_{ijkl}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3-x_3^I)\varepsilon_{kl}^*(x_1^I,x_2^I,x_3^I)\\ &+\sum_{x_3^I=0}^{n_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} B_{ijkl}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3+x_3^I)\varepsilon_{skl}^*(x_1^I,x_2^I,-x_3^I)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M_{ij}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3)\sigma^n(x_1^I,x_2^I,0)\end{aligned} \tag{3.19}$$

où B_{ijkl} sont les coefficients d'influence qui relient les contraintes σ_{ij} au point de coordonnée (x_1, x_2, x_3) à l'eigenstrain constante définie au centre de l'inclusion de coordonnée (x_1^I, x_2^I, x_3^I). Ces coefficients sont reliés au tenseur D_{ijkl} par :

$$B_{ijkl}(x) = C_{ijmn}^M D_{mnkl}(x) \quad \forall \quad \text{x} \quad \in \quad \text{D-}\Omega \tag{3.20}$$

$$B_{ijkl}(x) = C_{ijmn}^M (D_{mnkl}(x) - I_{mnkl}) \quad \forall \quad \text{x} \quad \in \quad \Omega \tag{3.21}$$

où : $I_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right)$, est le tenseur identité d'ordre 4.
Dans le cas d'une inclusion unique centrée en $(x_1^I, x_2^I, 0)$ dans l'espace semi-infini, la contrainte surfacique σ^n en un point (x_1, x_2, x_3) de la surface est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma^n(x_1', x_2', 0) = &- B_{33kl}(x_1'-x_1^I, x_2'-x_2^I, -x_3^I,)\varepsilon_{kl}^*(x_1^I,x_2^I,x_3^I)\\ &- B_{33kl}(x_1'-x_1^I, x_2'-x_2^I, x_3^I,)\varepsilon_{skl}^*(x_1^I,x_2^I,-x_3^I)\end{aligned} \tag{3.22}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Dans l'équation 3.19, chaque composante du tenseur $M_{ij}()$ est obtenue par une double intégration de $F_{ij}()$ sur $2\Delta x_1 \times 2\Delta x_2$ centrée en $(x_1^I, x_2^I, 0)$.

$$M_{ij}(x_1 - x_1^I, x_2 - x_2^I, x_3) = \int_{x_1^I - \Delta x_1}^{x_1^I + \Delta x_1} \int_{x_2^I - \Delta x_2}^{x_2^I + \Delta x_2} F_{ij}(x_1 - x_1', x_2 - x_2', x_3) dx_1' x_2' \tag{3.23}$$

La 3D-FFT est alors utilisée pour accélérer la résolution des sous-problèmes (1) et (2) et la 2D-FFT pour le (3). On utilise les techniques de wrap around et de zero-padding pour s'affranchir de l'erreur de périodicité induite par la FFT [LIU 00b] (cf. chapitre2).

3.3.3 Déplacement normal dû aux hétérogénéités

Les déplacements normaux u_3^* dus aux hétérogénéités sont uniquement générés par le champ de pression σ^n permettant de créer une surface libre (massif semi-infini).

$$u_3^*(x_1, x_2) = \sum_{x_2'=0}^{n_2-1} \sum_{x_1'=0}^{n_1-1} K_3^p(x_1 - x_1', x_2 - x_2') \sigma^n(x_1', x_2') \tag{3.24}$$

L'effet d'une pression uniforme sur une surface rectangulaire a été analysé en détail par Love [LOV 52] et Johnson [JOH 85b]. Les coefficients K_3^p représentent les coefficients d'influence reliant σ^n en un point $(x_1', x_2', 0)$ au déplacement normal au point $(x_1, x_2, 0)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

3.3.4 Prise en compte de l'inclinaison de l'inclusion

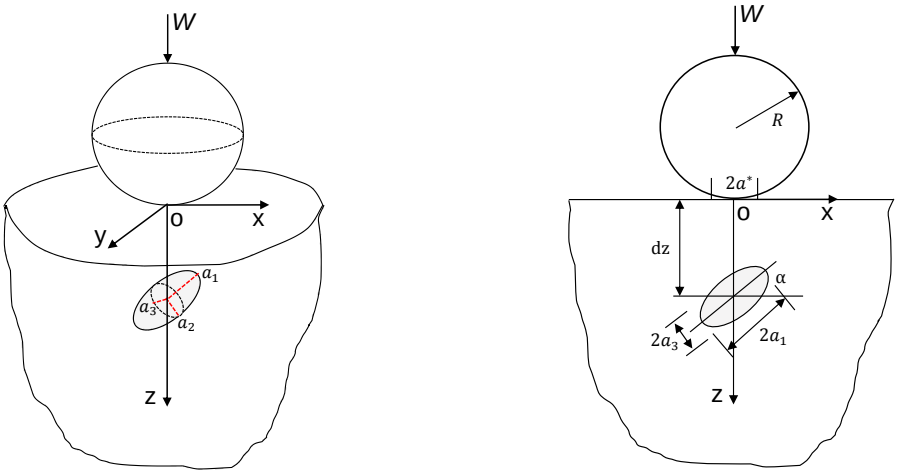
Pour prendre en compte l'orientation de l'inclusion (Fig. 3.2), il faut respecter les trois règles ci-dessous :

- Décomposition de Chiu : Compte tenu du fait que les orientations de l'inclusion (Fig.3.3) source et de l'inclusion miroir sont différentes, on a besoin de deux familles différentes de coefficients. Ceci permet d'annuler les cisaillements à la surface libre $x_3 = 0$. L'inclusion source et l'inclusion miroir n'ayant pas les mêmes orientations, l'équation de calcul de contraintes fait intervenir deux tenseurs différents : B_{ijkl} (pour l'inclusion source) et B^S_{ijkl} (pour l'inclusion miroir).
  Dans le cas des hétérogénéités inclinées, l'équation de calcul de contraintes 3.19 se réécrit :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) = &\sum_{x_3^I=0}^{n_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} B_{ijkl}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3-x_3^I)\varepsilon^*_{kl}(x_1^I,x_2^I,x_3^I)\\ &+\sum_{x_3^I=0}^{n_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} B^S_{ijkl}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3+x_3^I)\varepsilon^*_{skl}(x_1^I,x_2^I,-x_3^I)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M_{ij}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3)\sigma^n(x_1^I,x_2^I,0)\end{aligned} \tag{3.25}$$

  Le calcul des champs de contraintes fait intervenir cette fois-ci 2 3D-FFT (B_{ijkl},B^S_{ijkl}) et 2 3D-FFT inverse (B_{ijkl},B^S_{ijkl}).
- Le wrap around : Dans la technique du wrap-around il faut tenir compte de l'extension de la zone de calcul. Les symétries sur lesquelles sont basées le wrap-around ne sont valables que dans le repère de l'inclusion. A chaque point du maillage du repère de contact, il faudrait donc associer un point image correspondant dans le repère de l'inclusion ainsi que les coefficients de symétrie correspondant. Ceci est lié au fait que les méthodes FFT ne pourront être utilisées que sur les grilles du repère de contact. Il faudrait faire un transfert de champs des grilles du repère de l'inclusion vers les grilles du repère du contact dans le cas des inclusions inclinées. Ci-dessous le type de figure qu'on peut obtenir lorsqu'on ne prend pas en compte les bonnes symétries (Fig.3.4).
- La dernière étape consiste à prendre en compte la bonne orientation pour l'inclusion source et l'inclusion miroir. Ainsi donc on introduit deux matrices de rotation basées sur la convention ZXZ des angles d'Euler, une pour l'inclusion source et une autre pour l'inclusion miroir.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 3.2 – Contact Sphère/Plan en présence d'une hétérogénéité ellipsoïdale inclinée. (a) Configuration 3D et (b) Configuration 2D.

3.3.5 Prise en compte de l'effet des hétérogénéités dans l'algorithme de contact

Les contraintes calculées en sous-couche, à partir de la résolution du contact normal et tangentiel, sont utilisées localement à l'échelle de chaque hétérogénéité afin de déterminer leurs eigenstrains respectives à partir de la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby. Les hétérogénéités engendrent des surcontraintes qui seront ajoutées aux contraintes élastiques engendrées par le problème de contact. La géométrie de la surface de contact doit être actualisée par l'ajout d'« eigen-displacements ». Il faudra établir les relations entre les « eigen-displacements » et les eigenstrains. Après convergence de ces déplacements en surface, on actualise définitivement la géométrie de la surface de contact. L'algorithme du couplage entre hétérogénéités élastiques et le problème de contact normal/tangentiel est présenté à la figure 3.5.
Le modèle ainsi développé a été validé en utilisant la méthode éléments finis [KOU 14b].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

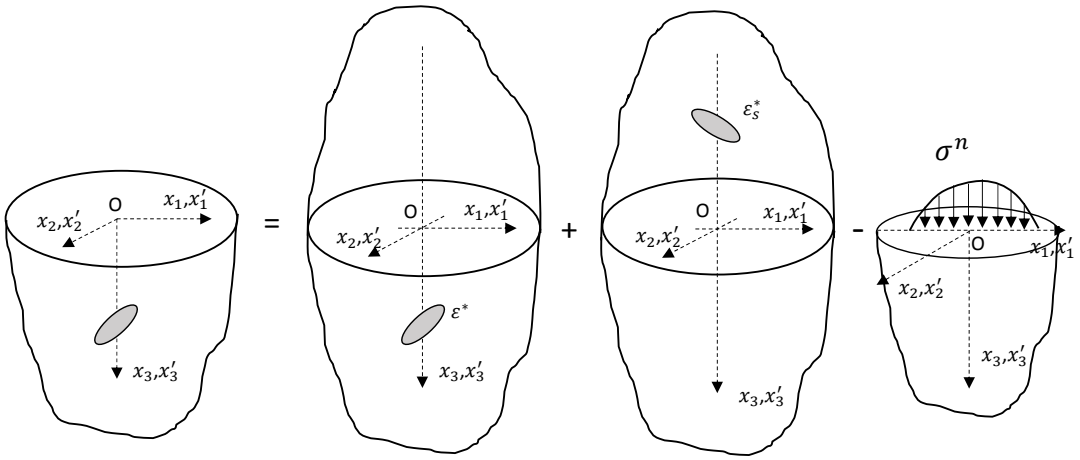
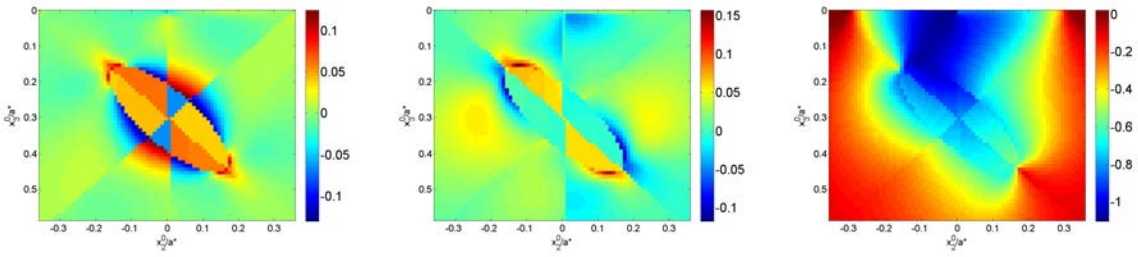


FIGURE 3.3 – Méthode de décomposition dans le cas d'une inclusion inclinée.



(a) (b) (c)

FIGURE 3.4 – Exemple de champs de contraintes obtenus dans le plan $x_2 = 0$ quand le **wrap − around n ′ est pas réalisé correctement** ; pour $\gamma = E^I/E^M = 4$ (avec $\nu^I = \nu^M = 0.3$) pour une inclusion ellipsoïdale isotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3/a^* = 0.4$, $\theta = -30°$) ; (a) σ_{12}/P_0, (b) σ_{13}/P_0, et (c) σ_{13}/P_0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

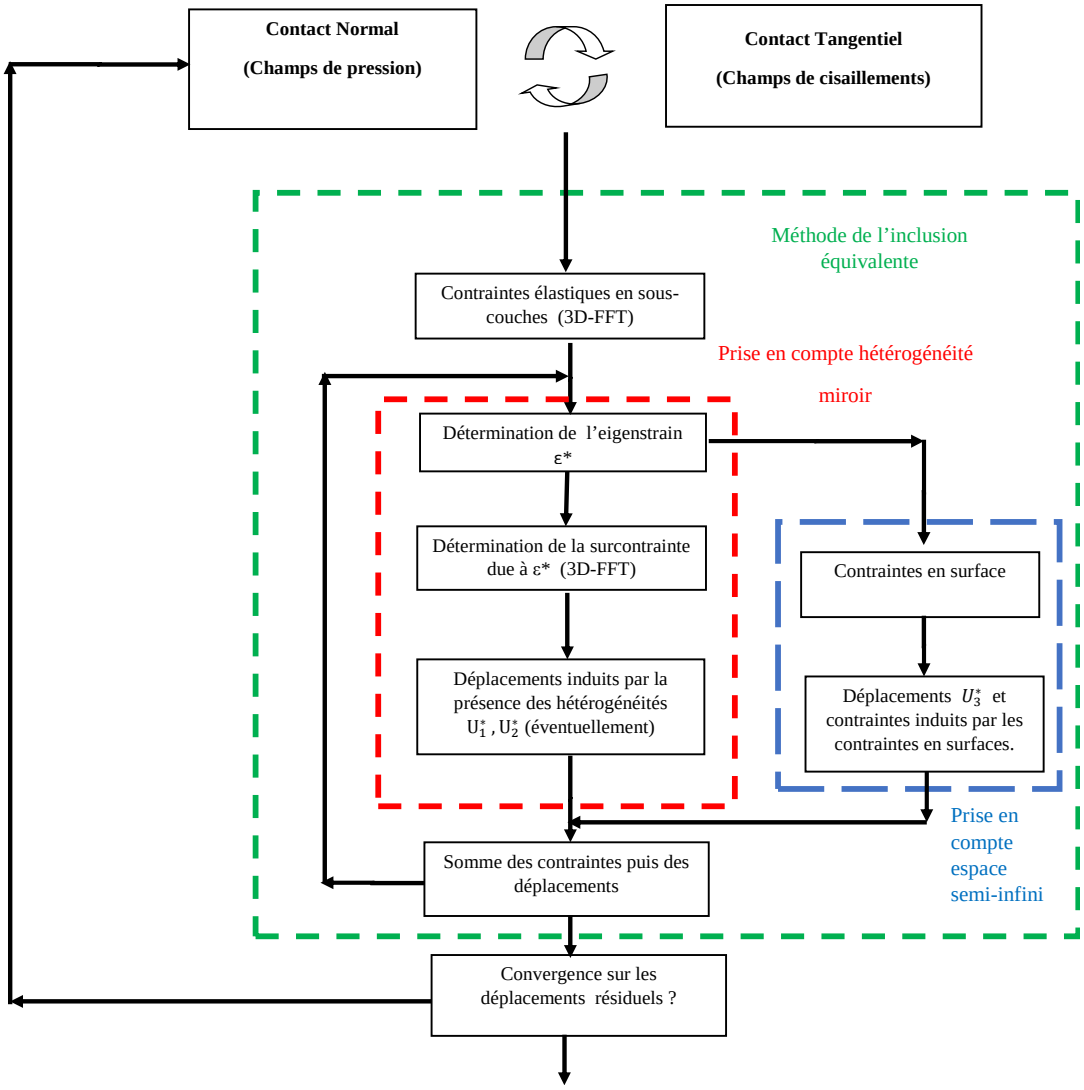


FIGURE 3.5 – Algorithme de résolution lié à la décomposition de Chiu.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

3.4 Validation du modèle développé

Les développements réalisés dans le cadre d'une hétérogénéité isotrope/anisotrope inclinée ont été validés en utilisant un modèle Eléments Finis (Abaqus v6.11). Cette partie décrit rapidement le modèle EF, ainsi que les comparaisons entre ce dernier et le Code Semi- Analytique. La configuration EF est présentée à la figure 3.6. On considère un contact entre une sphère rigide et un solide semi infini contenant une inclusion ellipsoïdale située à une profondeur dx_3. Afin d'avoir une bonne description de l'interface inclusion/matrice, l'inclusion est définie en réalisant une partition dans le repère local relié au repère du contact par une rotation de 30° autour de l'axe x_2 (Fig. 3.7). Les dimensions de la sphère et du solide semi-infini sont données dans le Tableau 3.1.

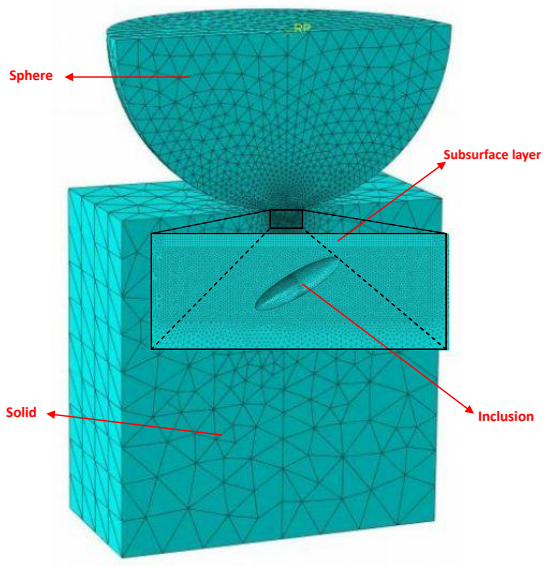


FIGURE 3.6 – Modèle EF utilisé pour la validation.

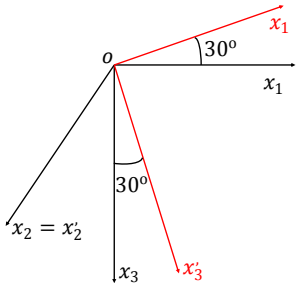


FIGURE 3.7 – Repère local.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Table 3.1 – Géométrie des corps en contact

Région	**Géométrie**(mm)
Sphère	R=31
Solide	$L_1 = L_2 = L_3 = 60$

Table 3.2 – Propriétés géométriques de l'inclusion ellipsoïdale (Cas de référence)

Géométrie	**Position**
$a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$	$dx_3 = 0.4a^*$

Les propriétés géométriques et la position du centre de l'inclusion sont normalisées par la demi-largeur du contact notée a^* (Tableau 3.2).
Une stratégie particulière de maillage a été mise en place. Une partie nommée "couche de subsurface" est maillée en utilisant $30,250$ éléments hexaédriques linéaires (C3D8) de taille $0.02a^*$, alors que le reste du solide est maillé avec $1,088,349$ éléments tétraédriques linéaires (C3D4). La demi-sphère contient $39,671$ éléments tétraédriques quadratiques (C3D10). Enfin l'inclusion est constituée de $11,009$ éléments tétraédriques linéaires (C3D4).
Une force ponctuelle d'une valeur $F_N = 10000N$ est appliquée à la sphère. La demi-largeur du contact de Hertz correspondant à ce chargement est $a^* = 1mm$. Trois calculs ont été réalisés.
- Le premier correspond à un massif homogène : validation entre le modèle EF et le Code Semi-Analytique dans le cadre de la théorie classique de Hertz.
- Le second correspond à une inclusion ellipsoïdale inclinée : validation des développements liés à l'inclusion isotrope inclinée.
- Le dernier considère une inclusion ellipsoïdale élastique orthotrope : validation du modèle lié à l'anisotropie des inclusions.

Les propriétés matériaux de l'inclusion, du solide semi-infini et de la sphère sont données dans le Tableau 3.3.
Le résultat des comparaisons entre le code semi-analytique et la méthode des éléments finis est présenté à la figure 3.8.
On obtient une très bonne corrélation entre le code semi-analytique et le modèle EF. Ce qui valide ainsi les développements réalisés dans le cadre de l'inclusion isotrope/anisotrope inclinée. Dans la suite du document quelques résultats académiques seront présentés.

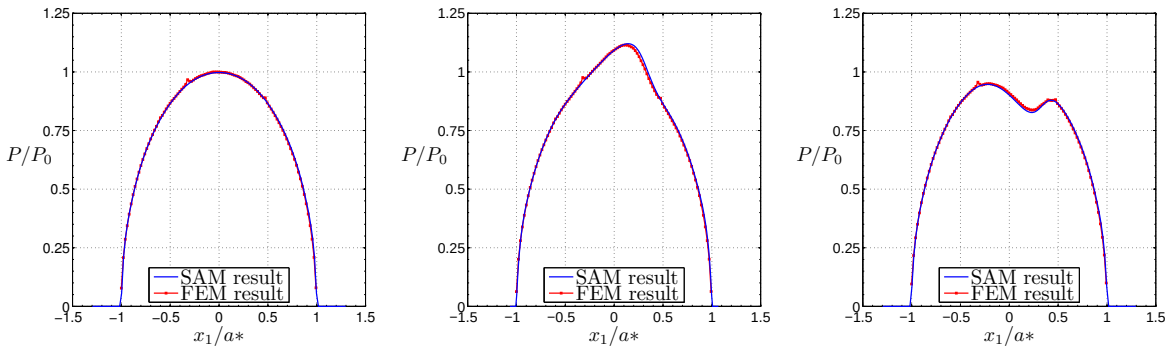
Comparaison du temps CPU

Le modèle éléments finis est un peu lourd, il s'agit d'un modèle à 1.5×10^6 de ddls. Le choix d'un modèle pareil est justifié principalement pour 2 raisons :
- Pour éviter l'influence des conditions limites sur le problème de contact, il faut que les dimensions des corps en contact soient au moins 20 fois

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

TABLE 3.3 – Propriétés Matériaux

Région		**Propriétés Matériaux**		
Sphère		$E^S = 10^{10}$ GPa,		$\nu^S = 0.3$
Solide		$E^M = 210$ GPa,		$\nu^M = 0.3$
Hétérogénéité	cas 1 (Isotrope)	$E^I = 210$ GPa,		$\nu^I = 0.3$
	cas 2 (Isotrope)	$E^I = 840$ GPa,		$\nu^I = 0.3$
	cas 3 (Orthotrope)	$E^I_1 = 210$ GPa,	$E^I_2 = 623$ GPa,	$E^I_3 = 50$ GPa
		$\mu^I_{12} = 83$ GPa,	$\mu^I_{13} = 400$ GPa,	$\mu^I_{23} = 20$ GPa
		$\nu^I_{12} = 0.15$,	$\nu^I_{13} = 0.26$,	$\nu^I_{23} = 0.40$



(a) (b) (c)

FIGURE 3.8 – Comparaison entre la méthode semi analytique (SAM) et la méthode des éléments finis (EF) ; (a) Contact Hertzien, (b) Hétérogénéité isotrope inclinée et (c) Hétérogénéité orthotrope inclinée.

supérieures à la zone de contact
- Un maillage plus ou moins fin est indispensable pour décrire finement le problème hétérogène.
- Il faut un modèle 3D pour décrire le contact hétérogène (hétérogénéité anisotrope). Dans le cas purement homogène et isotrope un modèle axi-symétrique peut être utilisé.

Le maillage du code SA comprend 10^6 points, i.e. $100 \times 100 \times 100$. La simulation des deux modèles (SA et EF) a été réalisée sur le même PC, un processeur Intel-Core i5-3210M @2.5GHz. Le tableau 3.4 présente le temps CPU pour les 2 méthodes. La méthode SA utilise la décomposition de Chiu (section 3.3.2). Le ratio de temps CPU entre les deux méthodes en termes de temps CPU est de 1 : 8. Il faut toutefois rappelé que la simulation EF a été réalisée avec le code commercial Abaqus v6.11 et que le modèle EF considéré est un modèle 3D.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Table 3.4 – Comparaison du temps CPU

Méthode	Eléments Finis	Code SA(méthode de Chiu)
Temps CPU	$44260s(\sim 12h18min)$	$5760s(\sim 1h36min)$

3.5 Résultats et étude paramétrique

Les résultats se limiteront à un cas purement académique. Les propriétés matériaux sont choisies arbitrairement.
Considérons un contact normal entre un indenteur sphérique et un solide élastique semi-infini contenant une inclusion.
L'indenteur de rayon $R = 31mm$ est soumis à une force normale $F_N = 10000N$.
Le module de Young et le coefficient de Poisson de l'espace semi-infini sont respectivement : $E^M = 210GPa$ et $\nu^M = 0.3$ (le module de compressibilité et de cisaillement correspondants sont : $k^M = 175GPa$, $\mu^M = 80.77GPa$).
Pour rappel,

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{3.26}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.27}$$

La pression équivalente de Hertz correspondant à cette configuration est : $P_0 = 4750MPa$ et la demi-largeur de contact $a^* = 1mm$. On étudie donc l'effet de l'inclusion sur la pression de contact et les contraintes en sous-couche. L'étude sera faite ici sur une hétérogénéité unique de forme ellipsoïdale de demi-axes $a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = 0.1a^*$, $a_3 = 0.1a^*$ et située à une profondeur $dx_3 = 0.3a^*$.

3.5.1 Hétérogénéité isotrope

L'effet d'une hétérogénéité isotrope sur la distribution des champs de pression et de contrainte sera étudié. L'analyse sera divisée en trois grandes parties :
- Effet du rapport de module de Young $\gamma = E^I/E^M$ pour $\nu^I = \nu^M = 0.3$;
- Effet du rapport du module de compressibilité $\delta = k^I/k^M$ pour $\mu^I = \mu^M = 80.77GPa$;
- Effet du rapport du module de cisaillement $\eta = \mu^I/\mu^M$ pour $k^I = k^M = 175GPa$.

3.5.1.1 Influence du module de Young

Le coefficient de Poisson est choisi égal à $\nu^I = 0.3$. Le tenseur des modules d'élasticité de l'hétérogénéité est alors donné par :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$C^I_{ijkl} = \frac{E^I \nu^I}{(1+\nu^I)(1-2\nu^I)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E^I}{2\times(1+\nu^I)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3.28}$$

$$\nu^I = \nu_M \quad \text{et} \quad E^I = \gamma E^M \tag{3.29}$$

$$C^I_{ijkl} = \gamma C^M_{ijkl}$$

$$\Delta C = C^I_{ijkl} - C^M_{ijkl} = (\gamma - 1)C^M_{ijkl} \tag{3.30}$$

L'équation (3.10) devient :

$$(\gamma - 1)C^M_{ijkl}S_{klmn}\varepsilon^*_{mn} + C^M_{ijkl}\varepsilon^*_{kl} = (1-\gamma)C^M_{ijkl}\varepsilon^0_{kl} \tag{3.31}$$

La figure 3.9 présente les champs de pression normalisés par la pression de Hertz. Le cas d'une inclusion parallèle à la surface de contact est présenté à la figure 3.9a ($\theta = 0$). La figure 3.9b présente le cas incliné $\theta = 45°$.

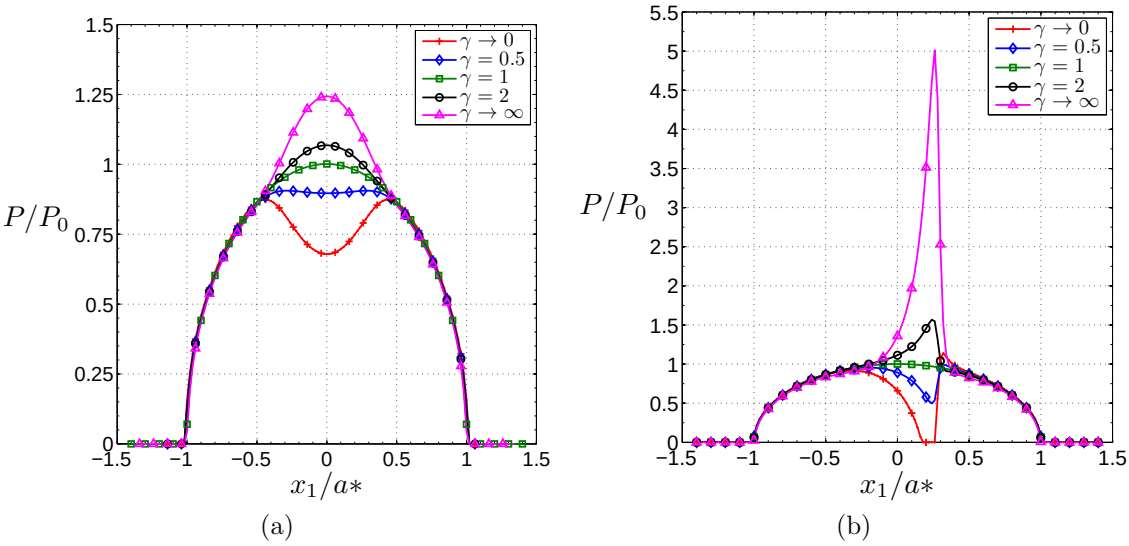


FIGURE 3.9 – Distribution de la pression de contact normalisée pour différentes valeurs de $\gamma = E^I/E^M$ (avec $\nu^I = \nu^M = 0.3$) dans le cas d'une hétérogénéité isotrope ellipsoïdale ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.3a^*$) ; (a) $\theta = 0$ et (b) $\theta = 45°$.

On remarque que la pression de contact augmente considérablement dans le cas des hétérogénéités dures $\gamma > 1$. Et inversement les hétérogénéités molles $\gamma < 1$ réduisent localement la distribution de pression.
Par exemple sur la figure 3.9a, $\gamma \to \infty$ correspond à une augmentation de la pression de 24.3% alors que le cas ($\gamma \to 0$) entraine une réduction de la pression de 32.12%. Le cas référence étant celui correspondant au cas Hertzien c'est-à-dire à un massif homogène $\gamma = 1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

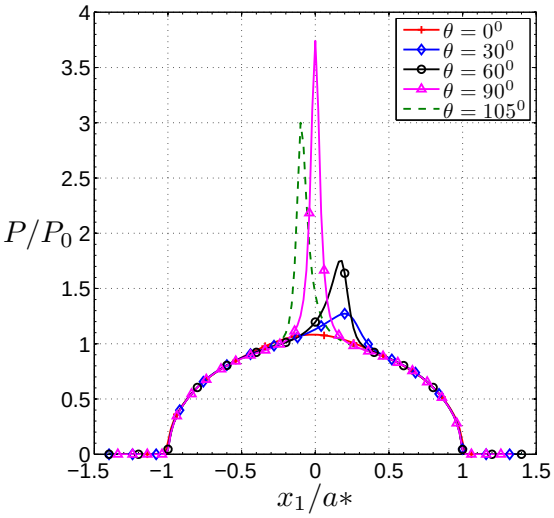


FIGURE 3.10 – Distribution de la valeur adimensionnée de la pression de contact pour différents angles θ dans le cas d'une hétérogénéité ellipsoïdale isotrope dure ($\gamma = 4$) de demi-axes ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$).

Dans le cas d'une inclusion inclinée rigide ($\gamma \to \infty$ et $\theta = 45°$, voir Fig. 3.9b), une forte augmentation du maximum de la pression de contact peut être observée. Dans notre cas ce pic correspond à 5 fois la pression équivalente de Hertz. Lorsque ($\gamma \to 0$), la pression de contact tend localement vers 0.
L'influence de l'angle d'orientation θ de l'inclusion est également étudiée dans le cas d'une hétérogénéité dure : ($\gamma = 4$), (figure 3.10). Lorsque $\theta \neq 0$ les champs de pression et de contraintes en sous-couche perdent la symétrie par rapport au plan $x_1 = 0$. Quand l'angle θ tend vers 90°, hétérogénéité est très proche de la surface, la surpression est 245.47% fois supérieure au cas $\theta = 0$.
La figure 3.11 montre la distribution de pression pour différentes profondeurs. On remarque que lorsque dx_3/a^* dépasse 0.7, l'influence de l'hétérogénéité sur le champ de pression peut être négligée.
Le Code Semi-Analytique permet également d'avoir accès aux champs de contraintes en sous-couche (figures 3.12 et 3.13). Les contraintes en sous-couche augmentent si l'inclusion devient de plus en plus rigide, et inversement diminuent dans le cas des hétérogénéités molles.
Une étude a été également faite sur la contrainte normale et le cisaillement à l'interface fibre/matrice. Ceci est important lorsque l'on s'intéresse à la décohésion des fibres. Quand le point M décrit l'interface Fibre/Matrice (fig 3.2b), l'angle ξ varie de 0° à 360°. Les figures 3.14 et 3.15 présentent la contrainte normale et la contrainte tangentielle à l'interface fibre/matrice en fonction de l'angle ξ pour différentes valeurs du rapport de module de Young. Dans ce cas précis, il est à noter que la contrainte normale est négative, ce qui voudrait dire que l'interface de l'hétérogénéité est sollicitée en compression.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Pour des hétérogénéités rigides ($\gamma \to \infty$) la valeur maximale du cisaillement à l'interface hétérogénéité/matrice, atteint $0.69P_0$ dans le cas de l'hétérogénéité ellipsoïdale (Fig. 3.14). Cette valeur est légèrement plus élevée ($0.86P_0$) dans le cas de l'hétérogénéité sphérique (Fig. 3.15). Il est également important de remarquer que le maximum de la contrainte normale se situe à $\xi = 90°$ alors que le maximum du cisaillement est situé à $\xi = 45°$. Les lois de décohésion fibre/matrice doivent prendre en compte à la fois la contrainte normale et la contrainte tangentielle.

3.5.1.2 Effet du module de compressibilité

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'à l'effet du module de compressibilité ($\mu^I = \mu^M = 80.77GPa$). Physiquement, ce coefficient du tenseur d'élasticité caractérise la variation de volume. Pour ce faire, on choisit $\delta = k^I/k^M$. Dans ce cas précis, en considérant une hétérogénéité de forme sphérique, l'eigenstrain sera purement hydrostatique. En particulier, $\delta \to \infty$ et $\delta \to 0$ correspondent à faire tendre respectivement le coefficient de Poisson $\nu \to 0.5$ et $\nu \to -1$. Compte tenu du fait que le tenseur C^I_{ijkl} est isotrope, il peut se décomposer sur la base des tenseurs isotropes J et K [BER 10].

$$C^I_{ijkl} = 3k^I J_{ijkl} + 2\mu^I K_{ijkl} \tag{3.32}$$

où : $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ et $K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl}$
$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})$, est le tenseur identité d'ordre 4. $J_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}$ (partie sphérique), et $K_{ijkl}\varepsilon_{kl} = e_{ij}$ (partie déviatorique). Les tenseurs J et K présentent d'autres propriétés :

$$\begin{aligned} J : J &= J \\ K : K &= K \\ J : K = K : J &= 0 \\ J : I_2 = I_2 : J &= I_2 \\ K : I_2 = I_2 : K &= 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

où : $(I_2)_{ij} = \delta_{ij}$ est le tenseur identité d'ordre 2.

$$\mu^I = \mu^M, \quad k^I = \delta k^M \tag{3.34}$$

$$\Delta C_{ijkl} = C^I_{ijkl} - C^M_{ijkl} = 3(k^I - k^M)J_{ijkl} = 3(\delta - 1)k^M J_{ijkl} \tag{3.35}$$

L'équation (3.10) devient :

$$3(\delta - 1)k^M J_{ijkl} S_{klmn}\varepsilon^*_{mn} + C^M_{ijkl}\varepsilon^*_{kl} = -3(\delta - 1)k^M J_{ijkl}\varepsilon^0_{kl} \tag{3.36}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$(\delta - 1)k^M \delta_{ij} S_{kkmn} \varepsilon^*_{mn} + C^M_{ijkl} \varepsilon^*_{kl} = -(\delta - 1)k^M \delta_{ij} \varepsilon^0_{kk} \tag{3.37}$$

où ε^0_{kk} représente la partie sphérique de ε^0_{kl}.
Les figures 3.16a et 3.16b présentent la pression de contact adimensionnée pour différentes valeurs du ratio δ.
On observe une augmentation locale de la distribution du champ de pression quand le matériau tend à devenir incompressible (i.e. quand k^I ou $\delta \to \infty$). Le pic de pression est moins élevé dans le cas d'une inclusion parallèle à la surface ($\theta = 0$, Fig. 3.16a) en comparaison avec le cas ($\theta = 45°$, Fig. 3.16b). Une surpression tout à fait non négligeable peut être générée du seul fait de l'augmentation du module de compressibilité.

3.5.1.3 Effet du module de cisaillement

Ici le module de compressibilité de l'hétérogénéité est choisi identique à celui de la matrice $k^I = k^M = 175GPa$. Quand l'hétérogénéité est de forme sphérique, l'eigenstrain est purement déviatorique. Le ratio $\eta = \mu^I/\mu^M$ définit le ratio entre le module de cisaillement de l'hétérogénéité et celui de la matrice. Le tenseur C^I_{ijkl} s'écrit :

$$C^I_{ijkl} = 3k^I J_{ijkl} + 2\mu^I K_{ijkl} \tag{3.38}$$

$$k^I = k^M, \quad \mu^I = \eta\mu^M \tag{3.39}$$

$$\Delta C_{ijkl} = C^I_{ijkl} - C^M_{ijkl} = 2(\eta - 1)\mu^M K_{ijkl} \tag{3.40}$$

L'équation (3.10) devient :

$$2(\eta - 1)\mu^M K_{ijkl} S_{klmn} \varepsilon^*_{mn} + C^M_{ijkl} \varepsilon^*_{kl} = -2(\eta - 1)\mu^M e^0_{ij} \tag{3.41}$$

où e^0_{ij} représente la partie déviatorique de ε^0_{ij}.
Les figures 3.17a et 3.17b présentent l'effet de la valeur adimensionnée du module de cisaillement η, sur la distribution de pression. Il est important de remarquer que les évolutions du champ de pression pour différentes valeurs de η (Fig. 3.17) et de γ (Fig. 3.9) sont assez similaires. Les effets du module de cisaillement et du module de Young sont d'ordre 1 alors que l'effet du module de compressibilité est d'ordre 2. Toutefois, la surpression générée par le module de compressibilité est assez élevée pour ne pas être négligée.

3.5.2 Hétérogénéité anisotrope

Dans cette partie, des propriétés anisotropes seront considérées pour les hétérogénéités. L'analyse se limitera ici au cas d'un matériau orthotrope. Les coefficients d'élasticité dans le repère d'orthotropie $R_{orthotropie}$ sont donnés par : $E^I_1 = 210GPa$, $E^I_2 = 623GPa$, $E^I_3 = 50GPa$, $\mu^I_{12} = 83GPa$, $\mu^I_{13} = 400GPa$

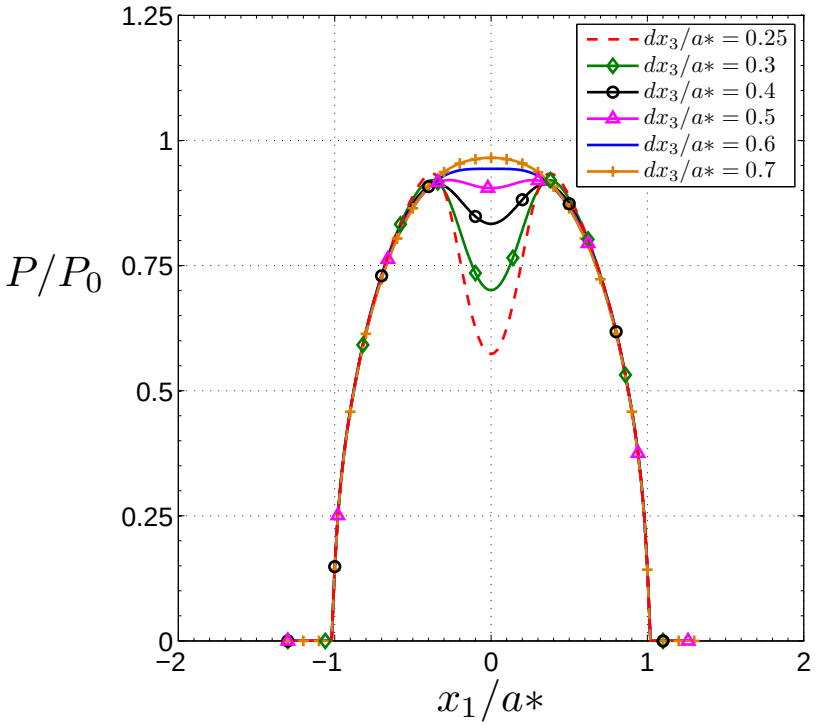
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$\mu_{23}^I = 20GPa$, $\nu_{12}^I = 0.15$, $\nu_{13}^I = 0.26$, et $\nu_{23}^I = 0.4$. L'orientation θ de l'inclusion est prise égale à 45°.
Les angles d'Euler de type ZXZ ont été introduits (Fig. 3.18) afin d'établir une correspondance entre le repère d'orthotropie et le repère du contact en utilisant trois rotations (φ,θ,ψ) autour des axes de contact (x_1,x_2,x_3).
Quatre orientations différentes du repère d'orthotropie seront considérées :

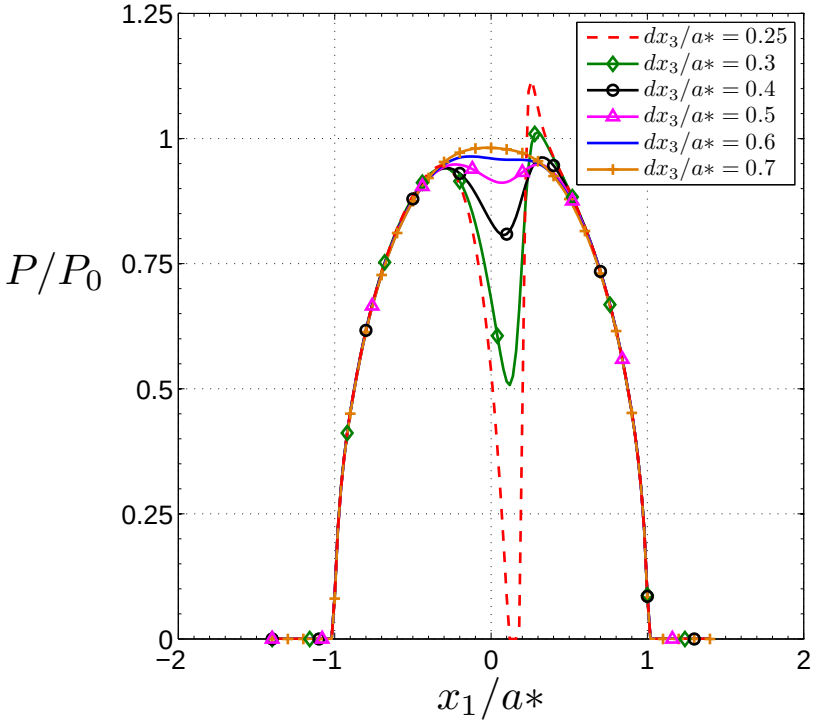
- Cas 1 : $\varphi = 0°$, $\theta = 0°$, $\psi = 0°$, les axes d'orthotropie coïncident avec le repère du contact ;
- Cas 2 : $\varphi = 90°$, $\theta = 45°$, $\psi = 90°$, les axes d'orthotropie coïncident avec les axes de l'ellipsoïde.
- Cas 3 : $\varphi = 45°$, $\theta = 60°$, $\psi = 30°$.
- Cas 4 : $\varphi = -30°$, $\theta = 45°$, $\psi = 30°$.

La figure 3.19 présente la distribution des champs de pression dans le plan $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.
On observe que l'effet de l'hétérogénéité sur le problème de contact varie énormément en fonction de l'orientation du repère d'orthotropie. L'hétérogénéité peut se comporter comme une hétérogénéité dure (Cas 1 et 4), ou une hétérogénéité molle (Cas 2 et 3). Ceci est lié essentiellement au fait que dans les Cas 1 à 4 l'expression du tenseur C_{ijkl} dans le repère du contact varie énormément. Cette remarque en effet évidente, montre cependant l'intérêt de prendre en compte les bonnes orientations matériaux dans la résolution du problème de contact.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a)



(b)

FIGURE 3.11 – Distribution de la valeur adimensionnée des champs de pression pour différentes valeurs de dx_3/a^* pour une cavité ellipsoïdale ($a_1 = 0.3a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $\gamma \to 0$) ; (a) $\theta = 0$ et (b) $\theta = 45°$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

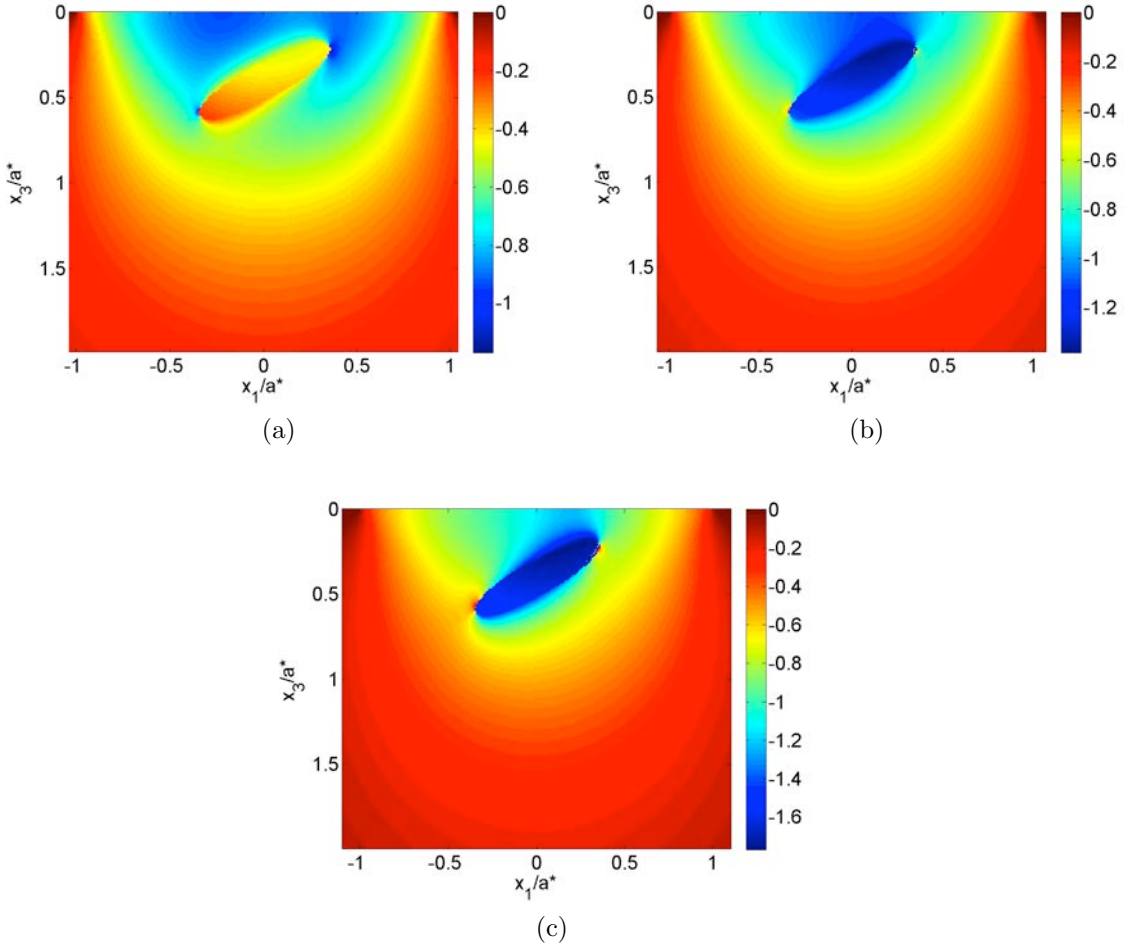


FIGURE 3.12 – Contrainte σ_{33}/P_0 dans le plan $x_2 = 0$ pour différentes valeurs de $\gamma = E^I/E^M$ (avec $\nu^I = \nu^M = 0.3$) pour une inclusion ellipsoïdale isotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3/a^* = 0.4$, $\theta = 30°$) ; (a) $\gamma = 0.25$, (b) $\gamma = 4$, et (c) $\gamma \to \infty$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

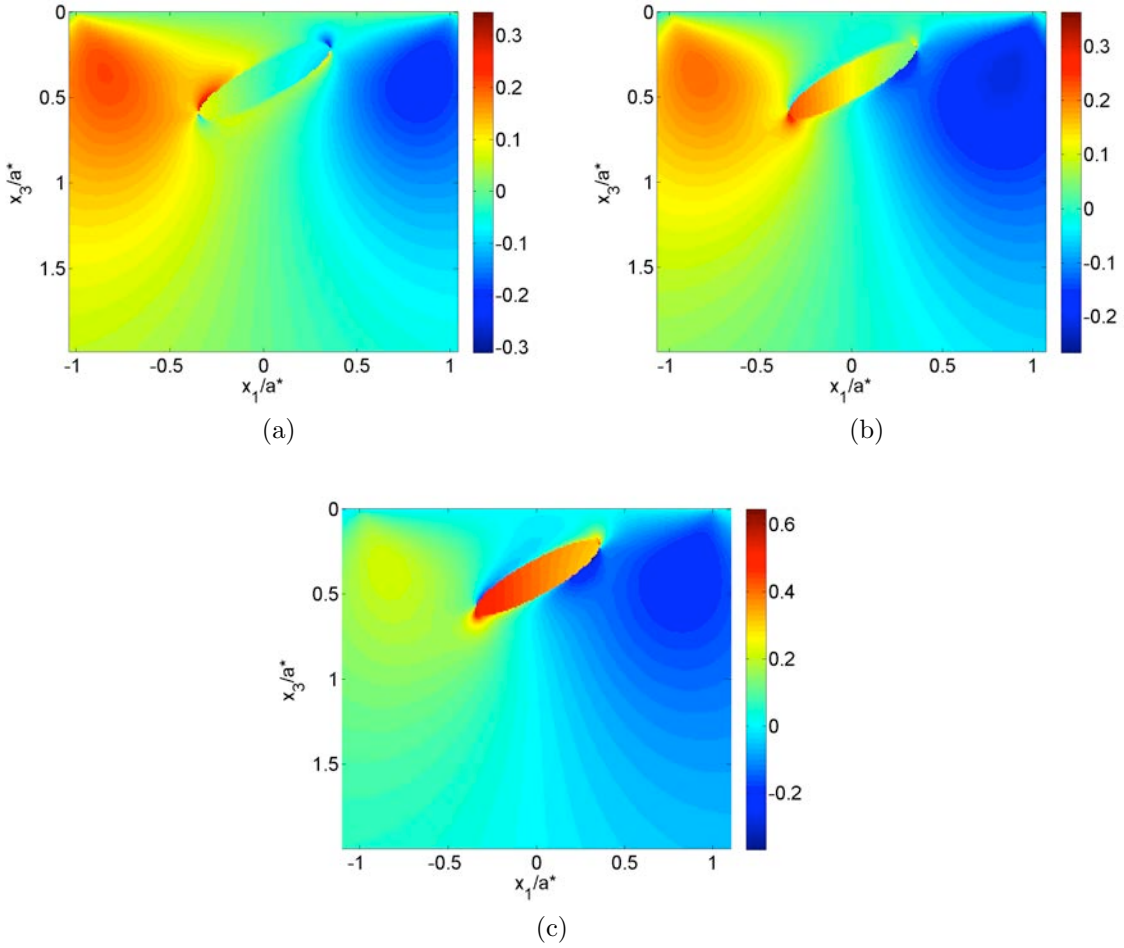


FIGURE 3.13 – Contrainte σ_{13}/P_0 dans le plan $x_2 = 0$ pour différentes valeurs de $\gamma = E^I/E^M$ (avec $\nu^I = \nu^M = 0.3$) pour une inclusion ellipsoïdale isotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3/a^* = 0.4$, $\theta = 30°$) ; (a) $\gamma = 0.25$, (b) $\gamma = 4$, et (c) $\gamma \to \infty$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

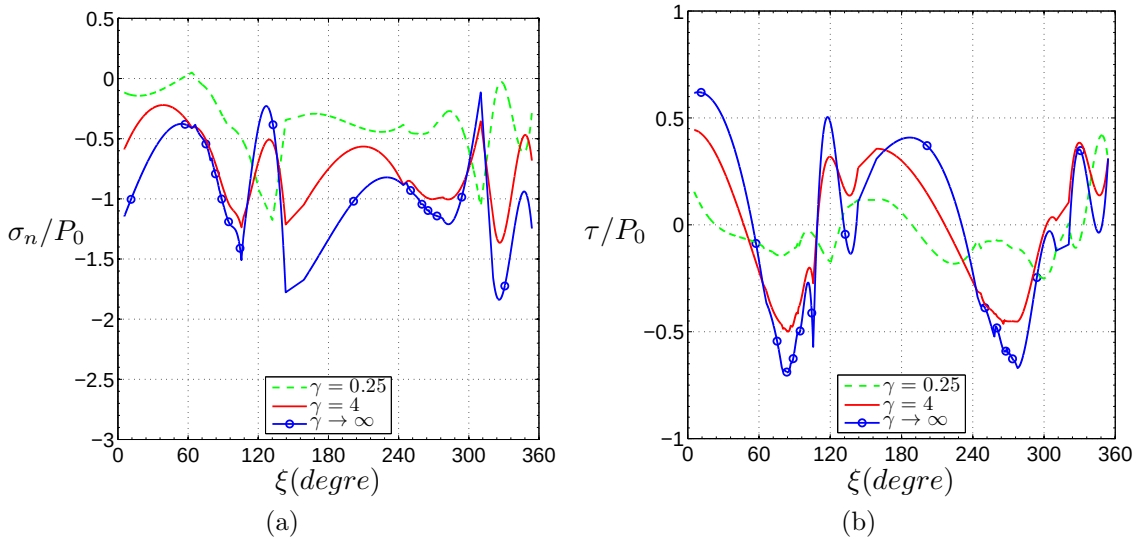


FIGURE 3.14 – Contrainte normale et cisaillement (σ_n/P_0 et τ/P_0) dans le plan $x_2 = 0$ pour différentes valeurs de $\gamma = E^I/E^M$, pour une inclusion ellipsoïdale isotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3/a^* = 0.4$, $\theta = 30°$) ; (a) σ_n/P_0 et (b) τ/P_0.

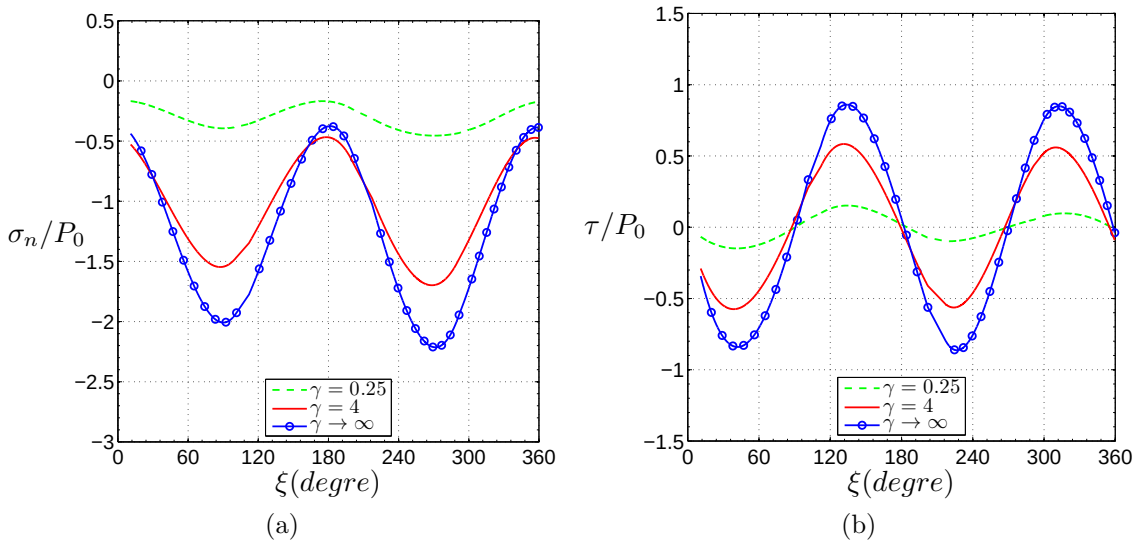
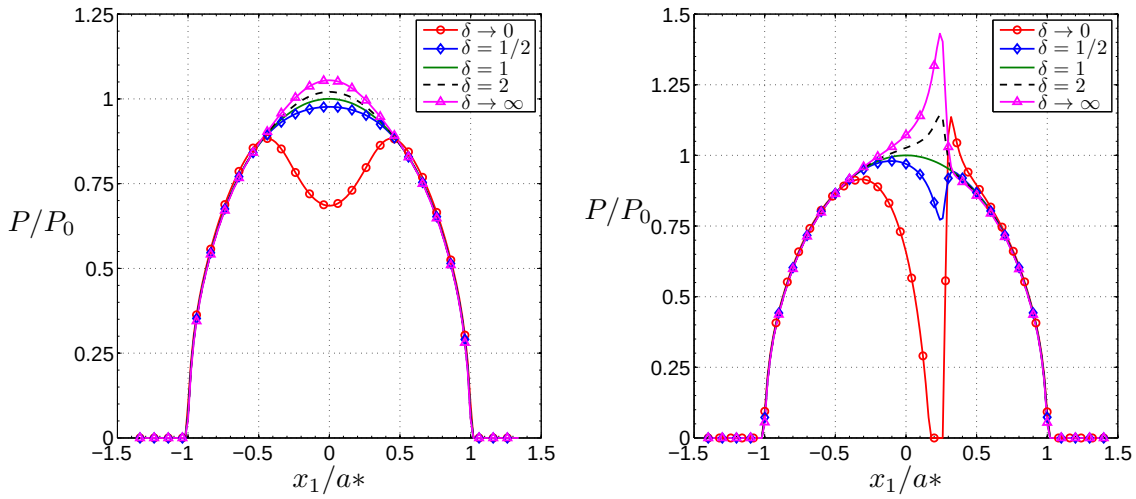


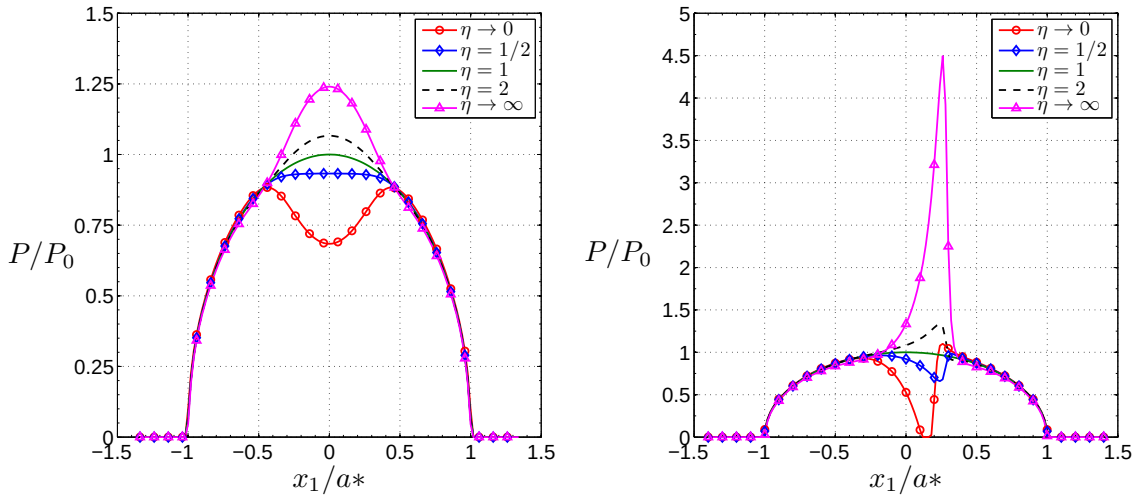
FIGURE 3.15 – Contrainte normale et cisaillement (σ_n/P_0 et τ/P_0) dans le plan $x_2 = 0$ pour différentes valeurs de $\gamma = E^I/E^M$, pour une inclusion sphérique ($a_1 = a_2 = a_3 = 0.2a^*$, $dx_3/a^* = 0.3$) ; (a) σ_n/P_0 et (b) τ/P_0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 3.16 – Étude de l'influence du rapport $\delta = k^I/k^M$ sur les champs de pression pour une hétérogénéité ellipsoïdale isotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.3a^*$) ; (a) $\theta = 0$ et (b) $\theta = 45°$.



(a) (b)

FIGURE 3.17 – Étude de l'influence du rapport $\eta = \mu^I/\mu^M$ sur les champs de pression pour une hétérogénéité ellipsoïdale isotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.3a^*$) ; (a) θ=0 et (b) θ=45°.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

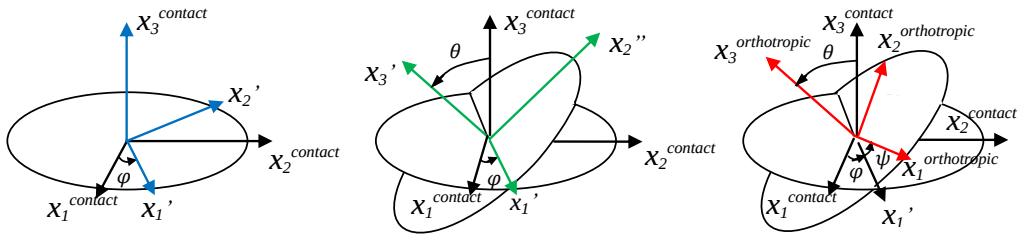


FIGURE 3.18 – Angles d'Euler.

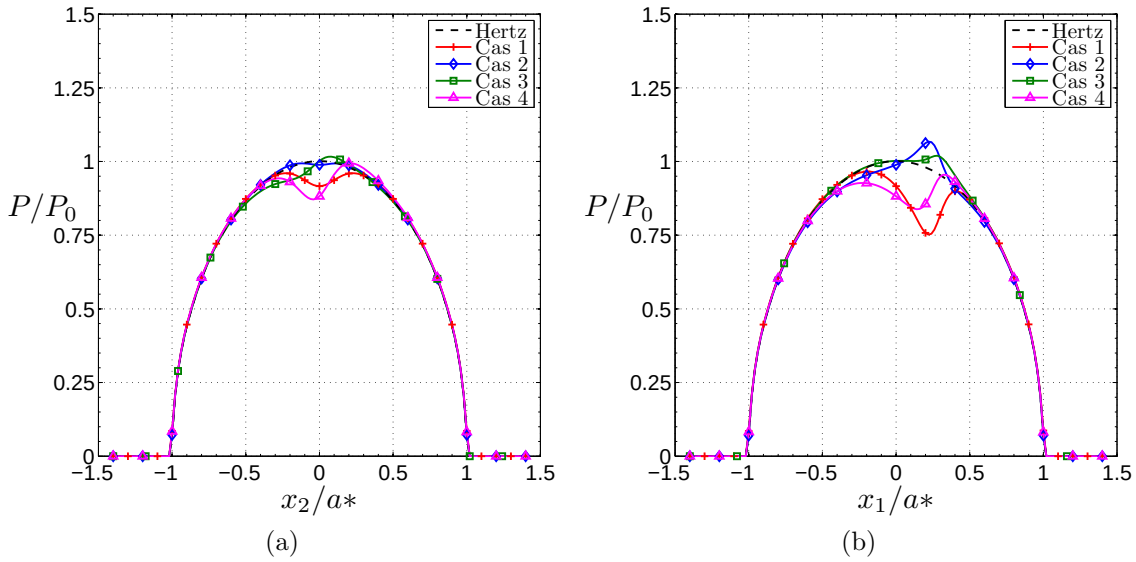


FIGURE 3.19 – Profils de la distribution de pression pour une hétérogénéité anisotrope ellipsoïdale ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 45°$) ; (a) dans le plan $x_1 = 0$ et (b) dans le plan $x_2 = 0$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La prise en compte des hétérogénéités dans la résolution des problèmes de contact a été présentée jusqu'ici exclusivement dans le cas du contact normal et des hétérogénéités ellipsoïdales. Le paragraphe suivant présentera des cas connexes qui s'inspirent fortement de ce qui a été présenté jusqu'ici. Ces cas connexes comprendront des hétérogénéités de formes cubiques ainsi que le contact tangentiel hétérogène.

3.6 Cas connexes

3.6.1 Hétérogénéités cubiques

La prise en compte des hétérogénéités cubiques s'inspirent fortement de ce qui a été présenté aux paragraphes 3.3.1,3.3.2 et 3.3.3. Seul le calcul du tenseur D_{ijkl} d'ordre 4 change. En effet les fonctions potentiels $\phi(x)$ et $\psi(x)$ de l'équation 3.15, seront données, dans le cas des hétérogénéités cubiques par [MAC 58]. Les expressions mathématiques seront rappelées ci-dessous.

$$\phi\left(x\right) = \sum_{n=1}^{8} E\left(c_n\right) \tag{3.42}$$

$$\psi\left(x\right) = \sum_{n=1}^{8} F\left(c_n\right) \tag{3.43}$$

avec

$$E = c_1 c_2 \log\left(R + c_3\right) + c_2 c_3 \log\left(R + c_1\right) + c_3 c_1 \log\left(R + c_2\right) \tag{3.44}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{c_1^2 \tan^{-1}\left(\frac{c_2 c_3}{c_1 R}\right) + c_2^2 \tan^{-1}\left(\frac{c_3 c_1}{c_2 R}\right) + c_3^2 \tan^{-1}\left(\frac{c_1 c_2}{c_3 R}\right)\right\} \tag{3.45}$$

$$F = \frac{1}{4} c_1 c_2 c_3 R + \frac{1}{6}\left\{\left(R^2 - c_1^2\right) c_2 c_3 \log\left(R + c_1\right)\right. \tag{3.46}$$

$$\left. + \left(R^2 - c_2^2\right) c_3 c_1 \log\left(R + c_2\right) + \left(R^2 - c_3^2\right) c_1 c_2 \log\left(R + c_3\right)\right\} \tag{3.47}$$

$$- \frac{1}{12}\left\{c_1^4 \tan^{-1}\left(\frac{c_2 c_3}{c_1 R}\right) + c_2^4 \tan^{-1}\left(\frac{c_3 c_1}{c_2 R}\right) + c_3^4 \tan^{-1}\left(\frac{c_1 c_2}{c_3 R}\right)\right\} \tag{3.48}$$

et

$$R = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2} \tag{3.49}$$

Le vecteur $c = (c_1, c_2, c_3)$ est défini par les équations suivantes,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

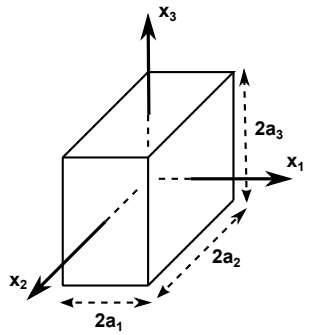


FIGURE 3.20 – Hétérogénéité parallélépipédique rectangle [LER 13a].

$$\begin{aligned}
c_1 &= (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \\
c_2 &= (x_1 + a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \\
c_3 &= (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 - a_3) \\
c_4 &= (x_1 - a_1, x_2 + a_2, x_3 - a_3) \\
c_5 &= (x_1 - a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3) \\
c_6 &= (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 + a_3) \\
c_7 &= (x_1 + a_1, x_2 - a_2, x_3 + a_3) \\
c_8 &= (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Ces fonctions potentiels ont été implémentées dans le code de calcul par Julien Leroux [LER 13a] dans sa thèse.
Soit un contact entre une sphère rigide de rayon $R = 31mm$, soumis à une force normale $F_N = 10000N$, et un solide élastique semi-infini contenant une hétérogénéité de forme cubique. Le module de Young et le coefficient de Poisson de l'espace semi-infini sont respectivement : $E^M = 210GPa$ et $\nu^M = 0.3$.
Les propriétés matériaux du cube sont anisotropes cubiques, $E^I = 420GPa$, $\mu^I = 14GPa$, $\nu^I = 0.45$, $E^I \neq 2 \times \mu^I \times (1 + \nu^I)$
Les champs de pression et de contraintes sont présentés respectivement dans les figures 3.21 et 3.22. La particularité des hétérogénéités cubiques réside dans le fait que les coins du cube agissent parfois comme des concentrateurs de contraintes.

3.6.2 Hétérogénéités et contact tangentiel

Il est possible de prendre en compte l'effet des hétérogénéités dans la résolution du contact tangentiel.
En présence des hétérogénéités, les équations du problème de contact tangen-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

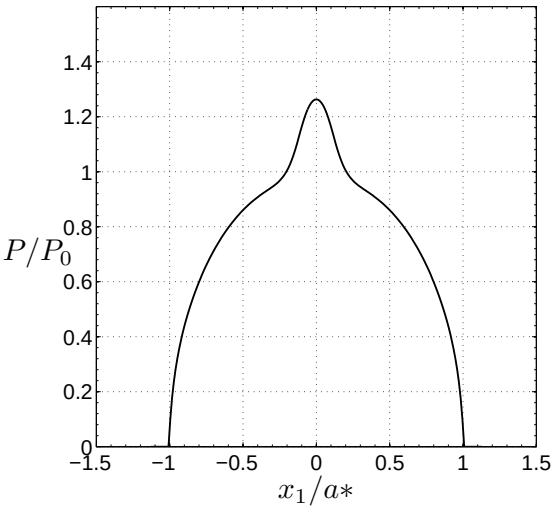


FIGURE 3.21 – Distribution de la valeur adimensionnée de la pression de contact dans le cas d'une hétérogénéité de forme cubique ($a = 0.12a^*$), avec des propriétés anisotropes cubiques.

tiel peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
q_\tau(x_1,x_2) &= -\mu \cdot p(x_1,x_2) \cdot \frac{\Delta s_\tau(x_1,x_2)}{\parallel \Delta s_\tau(x_1,x_2) \parallel} && \forall (x_1,x_2) \in \Gamma_{sl} \\
\Delta u_\tau^{tot}(x_1,x_2) + u_1^*(x_1,x_2) + u_2^*(x_1,x_2) - \Delta\delta_\tau &= \Delta s_\tau(x_1,x_2) && \forall (x_1,x_2) \in \Gamma_{sl} \\
\parallel q_\tau(x_1,x_2) \parallel &< \mu \cdot p(x_1,x_2) && \forall (x_1,x_2) \in \Gamma_{st} \\
\Delta u_\tau^{tot}(x_1,x_2) + u_1^*(x_1,x_2) + u_2^*(x_1,x_2) - \Delta\delta_\tau &= 0 && \forall (x_1,x_2) \in \Gamma_{st} \\
\sum_{\Gamma_p} q(x_1,x_2) S &= Q_\tau \\
\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st} &= \Gamma_c
\end{aligned} \tag{3.51}$$

où le domaine Γ_{st} définit la zone en adhérence (stick) et Γ_{sl} la zone de glissement (slip).
Les champs de déplacements tangentiels u_i^* sont à la fois causés par les eigenstrains et par le champ de pression σ_n. Les champs u_i^* sont donnés par :

$$\begin{aligned}
u_i^*(x_1,x_2) = &\sum_{x_3}\sum_{x_2}\sum_{x_1} D_{ikl}^u \left(x_1 - x_1^{'}, x_2 - x_2^{'}, x_3\right) \varepsilon_{kl}^* \left(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}\right) \\
&+ \sum_{x_3}\sum_{x_2}\sum_{x_1} D_{ikl}^{us} \left(x_1 - x_1^{'}, x_2 - x_2^{'}, x_3\right) \varepsilon_{kl}^{s*} \left(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}\right) \\
&+ \sum_{x_2}\sum_{x_1} K_i^p \left(x_1 - x_1^{'}, x_2 - x_2^{'}\right) \sigma^n \left(x_1^{'}, x_2^{'}\right) \\
&(i = 1,2)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

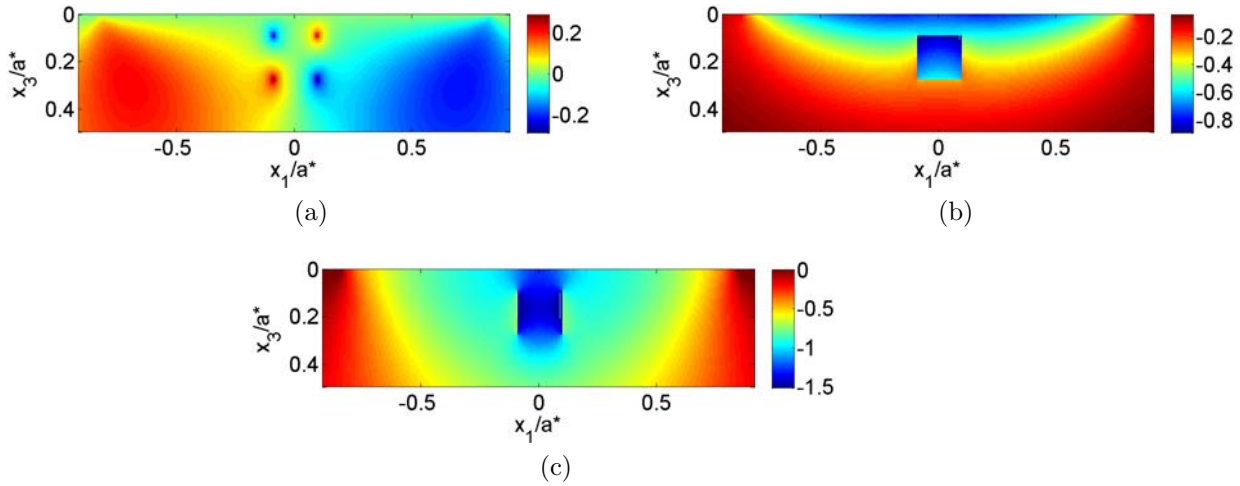


FIGURE 3.22 – Champs de contraintes obtenus dans le plan $x_2 = 0$ pour une hétérogénéité de forme cubique. (a) σ_{13}/P_0, (b) σ_{22}/P_0, et (c) σ_{33}/P_0.

Le tenseur d'ordre 3 D^u_{ikl} est donné par :

$$D^u_{ikl} = \frac{1}{8\pi\left(1-\nu\right)}\left(\psi_{,kli} - 2\nu\delta_{kl}\phi_{,i} - 2\left(1-\nu_m\right)\left[\phi_{,k}\delta_{ij} + \phi_{,j}\delta_{ik}\right]\right) \tag{3.53}$$

Les fonctions potentiels ϕ et ψ sont données soit par [MUR 87a] dans le cas des hétérogénéités de formes ellipsoïdales, soit par [MAC 58] dans le cas des hétérogénéités parallélépipédiques rectangles.
L'algorithme de la figure 3.5 peut toujours s'utiliser, pour faire un couplage entre hétérogénéités, contact normal et contact tangentiel.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

L'approche présentée depuis le début de ce chapitre ne se limitait qu'au cas d'une inclusion unique. La prochaine partie se consacrera à la prise en compte de plusieurs hétérogénéités dans les problèmes de contact.

3.7 Prise en compte de plusieurs hétérogénéités

3.7.1 Equations du problème

Ici il s'agira de prendre en compte plusieurs hétérogénéités (Fig. 3.23) ainsi que les interactions mutuelles entre toutes ces hétérogénéités.

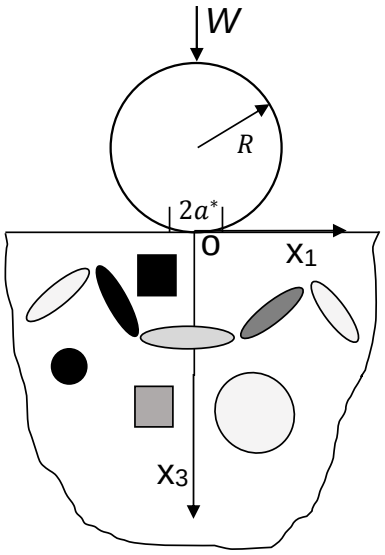


FIGURE 3.23 – Contact dans le cas de plusieurs hétérogénéités.

De manière générale, il est également possible de prendre en compte des hétérogénéités contenant une déformation inélastique initiale. Ce cas de figure se rencontre assez souvent dans la modélisation des revêtements avec une déformation initiale, permettant d'introduire des contraintes résiduelles dues au procédé.
Si on considère le problème initial de la figure (Fig. 3.23), la déformation totale ε en tout point appartenant à une hétérogénéité comporte une partie élastique ε^e et une partie inélastique ε^{ine}.

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{ine} \tag{3.54}$$

La loi de Hooke donne

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\psi}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ine}) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = (C_{ijkl}^{\psi})^{-1}\sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^{ine},\ (\psi = 1, 2, \ldots, n)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Si le problème équivalent est considéré, la déformation élastique s'écrit alors :

$$\varepsilon_{ij}^{e} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij}^{ine} \tag{3.55}$$

La contrainte en tout point appartenant à l'inclusion équivalente s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{*} - \varepsilon_{kl}^{ine}) \tag{3.56}$$

En combinant les équations 3.55 et 3.56 :

$$C_{ijkl}^{\psi}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{ine}) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{*}-\varepsilon_{kl}^{ine}) \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}((C_{klmq}^{\psi})^{-1}\sigma_{mq}-\varepsilon_{kl}^{*}) \tag{3.57}$$

Le tenseur σ_{ij} peut s'écrire en tout point de l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*} + \sigma_{ij}^{ine} + \sigma_{ij}^{0} \tag{3.58}$$

où :
σ_{ij}^{*} est l'eigenstress induite par la présence de l'eingenstrain ε_{ij}^{*}. σ_{ij}^{ine} est l'eigenstress induite par ε_{ij}^{ine}. σ_{ij}^{0} est la déformation macroscopique appliquée.
Ainsi en combinant les équations 3.57 et 3.58 on obtient :

$$\sigma_{ij}^{*}-C_{ijkl}((C_{klmq}^{\psi})^{-1}\sigma_{mq}^{*}-\varepsilon_{kl}^{*}) = C_{ijkl}(C_{klmq}^{\psi})^{-1}(\sigma_{mq}^{ine}+\sigma_{mq}^{0})-\sigma_{ij}^{ine}-\sigma_{ij}^{0},\ (\psi = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.59}$$

L'équation 3.59 est nécessaire mais pas suffisante pour la résolution du problème d'hétérogénéités multiples.
Elle n'est pas résolvable en l'état. Il s'agit là d'une équation à deux inconnues. Il faudrait pour cela trouver une relation entre σ^{*} et ε^{*} ainsi qu'entre σ^{ine} et ε^{ine}.
Pour ce faire, une méthodologie numérique proposée initialement par [ZHO 11] puis reprise ensuite par [LER 13a] sera utilisée :

3.7.2 Méthodologie numérique

Le massif semi-infini contient n inclusions hétérogènes Ω_{ψ} $(\psi = 1, 2, ..., n)$ et est discrétisé en $N_1 \times N_2 \times N_3$ cubes identiques de taille $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$.
La forme discrétisée de l'équation 3.59 peut s'écrire sous la forme :

$$(C_{\alpha,\beta,\gamma}^{I}C^{M^{-1}} - I^{d})\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^{*} + C_{\alpha,\beta,\gamma}^{I}\varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma}^{*} = (I^{d} - C_{\alpha,\beta,\gamma}^{I}C^{M^{-1}})(\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^{0} + \sigma_{\alpha,\beta,\gamma}^{p}),$$
$$(0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \tag{3.60}$$

où $C_{\alpha,\beta,\gamma}^{I}$ est le tenseur matériau élastique de l'inclusion hétérogène $[\alpha, \beta, \gamma]$ centrée en $\left(x_1^{\alpha}, x_2^{\beta}, x_3^{\gamma}\right)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

L'eigenstrain est supposée constante à l'intérieur de chaque hétérogénéité. $\sigma^*_{\alpha,\beta,\gamma}$ au point $\left(x_1^\alpha, x_2^\beta, x_3^\gamma\right)$ de l'élément $[\alpha, \beta, \gamma]$ est induit par chacune des inclusions hétérogènes centrées en $\left(x_1^\xi, x_2^\zeta, x_3^\varphi\right)$ de l'élément $[\xi, \zeta, \varphi]$ et est obtenu en sommant l'ensemble des contributions des eigenstrains de toutes les hétérogénéités contenues dans le domaine d'étude (massif semi-infini).

$$\sigma^*_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon^*_{\xi,\zeta,\varphi}$$
$$(0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \tag{3.61}$$

De façon analogue,

$$\sigma^p_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon^p_{\xi,\zeta,\varphi}$$
$$(0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1) \tag{3.62}$$

L'équation 3.60 se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\left(C^I_{\alpha,\beta,\gamma} C^{M^{-1}} - I^d\right) \sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon^*_{\xi,\zeta,\varphi} + C^I_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon^*_{\alpha,\beta,\gamma} \\
&= \left(I^d - C^I_{\alpha,\beta,\gamma} C^{M^{-1}}\right) \left(\sum_{\varphi=0}^{N_3-1} \sum_{\zeta=0}^{N_2-1} \sum_{\xi=0}^{N_1-1} B_{\alpha-\xi,\beta-\zeta,\gamma-\varphi} \varepsilon^p_{\xi,\zeta,\varphi} + \sigma^0_{\alpha,\beta,\gamma} \right), \\
&(0 \leq \alpha \leq N_1 - 1, 0 \leq \beta \leq N_2 - 1, 0 \leq \gamma \leq N_3 - 1)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

L'équation 3.63 devient l'équation nécessaire et suffisante pour la prise en compte de plusieurs hétérogénéités. La résolution de l'équation 3.63 est réalisée sur l'intégralité du domaine D. Quand les cubes associés à la discrétisation ne contiennent pas les eigenstrains initiales et/ou équivalentes, celles-ci sont simplement mises à 0.
Les équations ci-dessus utilisent massivement des techniques de 3D-FFT pour accélérer les temps de calculs.

3.7.3 Algorithmes de résolution numérique

Il faudrait maintenant trouver une méthode pour résoudre l'équation 3.63. Indépendamment de sa complexité, il s'agit d'un système d'équations linéaires qui peut se mettre sous la forme :

$$Ax = b \tag{3.64}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Il est alors possible de s'inspirer de certains algorithmes de résolution de grands systèmes linéaires pour résoudre le problème.
L'algorithme de CGM modifié proposé par [ZHO 11] et utilisé par [LER 13a] permet d'avoir une bonne convergence pour des matrices symétriques définies positives.
– Algorithme du gradient conjugué.
  Choix d'une valeur initiale ε_0^* ;
  Initialisation du gradient conjugué :

$$\begin{aligned} g_0 &= A\varepsilon_0^* - b \\ w_0 &= g_0 \end{aligned} \tag{3.65}$$

  Itération numéro p du gradient conjugué

$$\begin{aligned} v &= Aw_{p-1} \\ \rho_{p-1} &= -(g_{p-1}.w_{p-1})/(v.w_{p-1}) \\ \varepsilon_p^* &= \varepsilon_{p-1}^* + \rho_{p-1}w_{p-1} \\ g_p &= g_{p-1} + \rho_{p-1}v \\ \textbf{if} \quad (g_p.g_p)/(b.b) &< \epsilon^2 \quad \textbf{then} \\ & Fin \\ & \textbf{end if} \\ \gamma_{p-1} &= -(g_p.v)/(v.w_{p-1}) \\ w_p &= g_p + \gamma_{p-1}w_{p-1} \end{aligned} \tag{3.66}$$

Cependant la matrice A n'est pas toujours symétrique définie positive. Lorsque que l'on est en présence d'un coefficient de frottement, ou de distributions particulières de déformations résiduelles, l'algorithme du gradient-conjugué diverge dès les toutes premières itérations. Même en rajoutant des coefficients de relaxation, il est quasiment impossible de faire converger le problème. Durant la thèse il a fallu étudier et faire appel à d'autres types d'algorithmes de résolution de systèmes linéaires comme :
– le Gradient bi-conjugué stabilisé
– l'Algorithme Orthodir
Avec les méthodes du gradient bi-conjugué stabilisé et la méthode Orthodir, il est possible de prendre en compte aussi bien des matrices symétriques que non-symétriques définies positives.

Algorithme du gradient bi – conjugué stabilisé

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Initialisation de l'algorithme du gradient bi-conjugué stabilisé BiCGSTAB :

$$\begin{aligned} g_0 &= Ax_0 - b \\ d_0 &= g_0 \\ \tilde{g}_0 &= g_0 \\ r_0 &= g_0 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Itération numéro p du gradient bi-conjugué stabilisé

$$\begin{aligned} v &= Ad_{p-1} \\ \rho_{p-1} &= -\frac{(r_{p-1}.\tilde{g}_0)}{(v.g_0)} \\ q_{p-1} &= r_{p-1} + \rho_{p-1}v \\ w &= Aq_{p-1} \\ \omega_{p-1} &= -\frac{(w.q_{p-1})}{\|w\|^2} \\ r_p &= q_{p-1} + \omega_{p-1}w \\ \varepsilon_p^* &= \varepsilon_{p-1}^* + \rho_{p-1}d_{p-1} + \omega_{p-1}q_{p-1} \\ \textbf{if} \quad (r_p.r_p)/(b.b) &< \epsilon^2 \quad \textbf{then} \\ & Fin \\ & \textbf{end if} \\ \gamma_{p-1} &= -\frac{1}{\omega_{p-1}}\frac{r_p.\tilde{g}_0}{v.\tilde{g}_0} \\ d_p &= r_p + \gamma_{p-1}(d_{p-1} + \omega_{p-1}.v) \end{aligned} \tag{3.68}$$

Algorithme Orthodir

Initialisation de l'algorithme Orthodir :

$$\begin{aligned} g_0 &= Ax_0 - b \\ w &= g_0 \\ v &= Aw \\ w_1 &= \frac{w}{\|v\|} \\ Aw_1 &= \frac{v}{\|v\|} \end{aligned} \tag{3.69}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Construction du vecteur p de la base A^tA- orthonormée

$$
\begin{aligned}
w &= Aw_{p-1} \\
v &= Aw \\
\textbf{for} \quad i = 1 \quad \textbf{to} \quad p-1 \\
\alpha_i &= (v.Aw_i) \\
w &= w - \alpha_i.v_i \\
v &= v - \alpha_i.Aw_i \\
&\textbf{end for} \\
w_p &= \frac{1}{\|v\|}.w \\
Aw_p &= \frac{1}{\|v\|}.v \\
\rho_p &= -(g_{p-1}.Aw_p) \\
\varepsilon_p^* &= \varepsilon_{p-1}^* + \rho_p w_p \\
g_p &= g_{p-1} + \rho_p Aw_p \\
\textbf{if} \quad (g_p.g_p)/(b.b) < \epsilon^2 \quad &\textbf{then} \\
Fin \\
&\textbf{end if}
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Il s'agit bien sûr d'une solution approchée, compte tenu du fait que l'eigenstrain est supposée constante dans chaque hétérogénéité. Cependant une bonne précision peut être obtenue si la discrétisation est assez fine et les dimensions des hétérogénéités pas trop grandes ($\leq 0.4a^*$).

La méthode déroulée ci-dessus, permet de déterminer l'eigenstrain de chacune des n inclusions du domaine. Une fois les eigenstrains obtenues, une démarche similaire à celle présentée 3.3.3 permet de remonter aux champs u_3^*. C'est ce champ u_3^* qui permet de prendre en compte la présence d'une ou de plusieurs hétérogénéités dans l'algorithme de résolution du contact.

3.7.4 Validation dans le cas d'un matériau revêtu

La méthodologie de prise en compte des influences mutuelles sera validée ici par la résolution du problème de contact entre une sphère rigide R et un massif revêtu. Le massif revêtu est composé d'un substrat de propriétés élastiques E_s, ν_s, recouvert d'un revêtement uniforme de propriétés matériaux E_c, ν_c. Dans notre cas, $\nu_c = \nu_s$ et $E_c = 2E_s$. Il s'agit donc du cas d'un

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

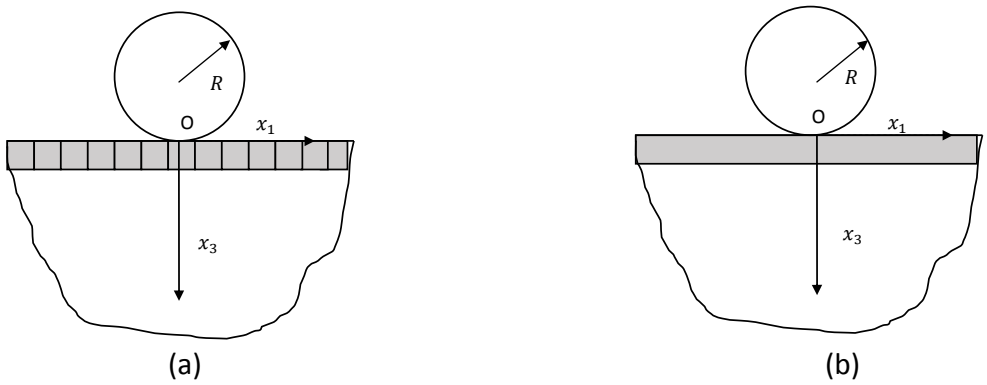


FIGURE 3.24 – Contact entre une sphère rigide et un massif revêtu.

revêtement dur. Le rayon R de l'indenteur est fixé égal à $0.21mm$. Les propriétés matériaux du substrat sont choisies telles que $E_s = 210000MPa$ et $\nu_s = 0.3$. La pression équivalente de Hertz correspondant à la configuration homogène sans revêtement est $P_0 = 2106MPa$ et la demi-largeur de contact $a^* = 0.003mm$. L'épaisseur e_c du revêtement est fixé à $0.25a^*$. Dans la modélisation semi-analytique, le revêtement sera représenté par une série d'hétérogénéités de formes cubiques (cf. Fig.3.24) isotropes de propriétés E_c, ν_c s'étendant sur une profondeur e_c. Ici, le formalisme d'Eshelby sera donc appliqué aux hétérogénéités de formes cubiques. La méthodologie présentée dans les sections (3.7, 3.7.2,3.7.3) sera utilisée pour prendre en compte les influences mutuelles entre les différents cuboïdes.
La comparaison sera faite ici entre le code semi-analytique et un code multi-grille développé par Hugo Boffy durant sa thèse [BOF 12b, BOF 14]. L'avantage, par rapport à la solution classique de O'Sullivan, est qu'il est possible à la fois de comparer les champs de pression et les champs de contraintes en sous-couche. La figure 3.25 présente la comparaison du champ de pression entre le code semi-analytique et la solution basée sur les méthodes multi-grilles [BOF 12b, BOF 14]. La comparaison des champs de contraintes le long des axes X_1 et X_3 est présentée aux figures 3.26 et 3.27. Une bonne corrélation existe entre les deux solutions.

Les nouveaux outils ainsi introduits permettent de prendre en compte des matrices non symétriques. Il devient alors possible de résoudre des problèmes de fretting (coefficient de frottement non nul) en présence de plusieurs hétérogénéités. Au-delà du cas d'un matériau revêtu, ce formalisme permet de traiter le cas des géométries d'hétérogénéités complexes. Il est possible de décrire les fibres d'un matériau composite tissé par une succession d'hétérogénéités de formes cubiques (représentation schématique à la figure 3.28a) ou comme une succession d'hétérogénéités cubiques et ellipsoïdales

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

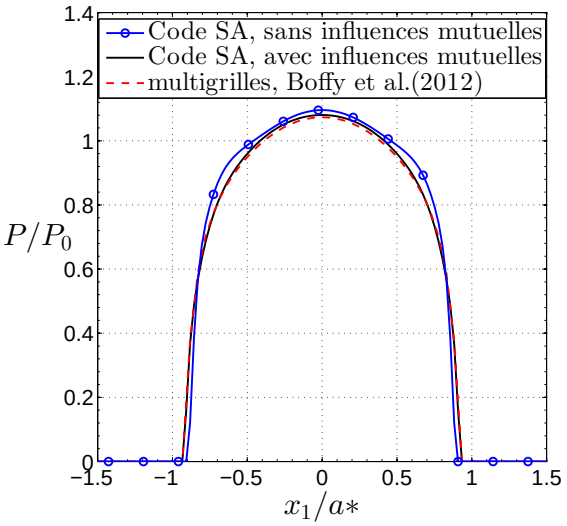


FIGURE 3.25 – Comparaison du champ de pression obtenu par la méthode semi-analytique et la méthode multigrille [BOF 12b].

(représentation schématique à la figure 3.28b). La description avec une série d'hétérogénéités cubiques de sorte que ces hétérogénéités cubiques soient de même dimensions que la taille du maillage est celle qui fournit la meilleure solution.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

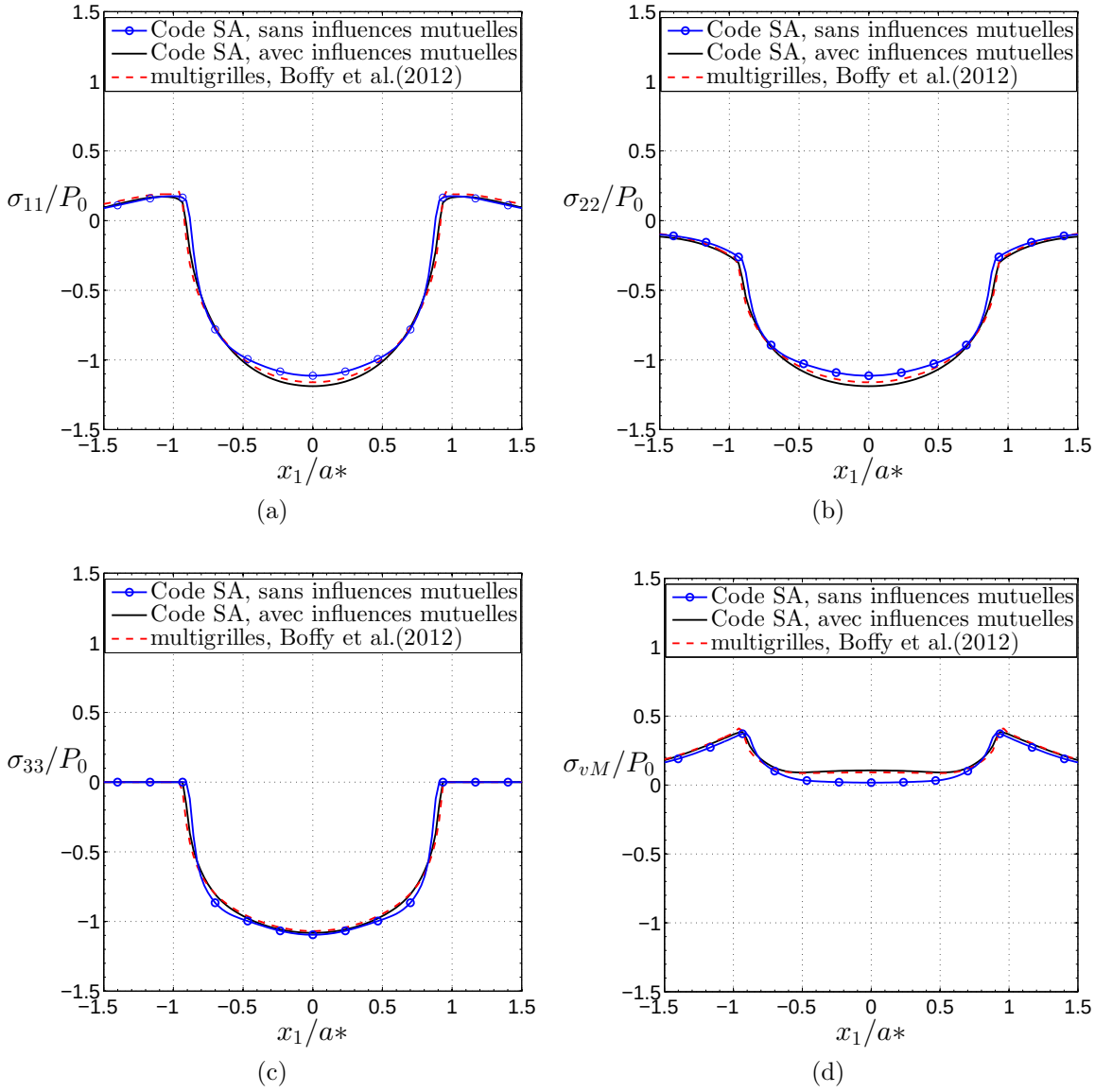


FIGURE 3.26 – Comparaison des champs de contraintes obtenus par la méthode semi-analytique et la méthode multigrille [BOF 12b] suivant la direction X_1 ; (a) σ_{11}/P_0, (b) σ_{22}/P_0, (c) σ_{33}/P_0, (b) σ_{vM}/P_0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

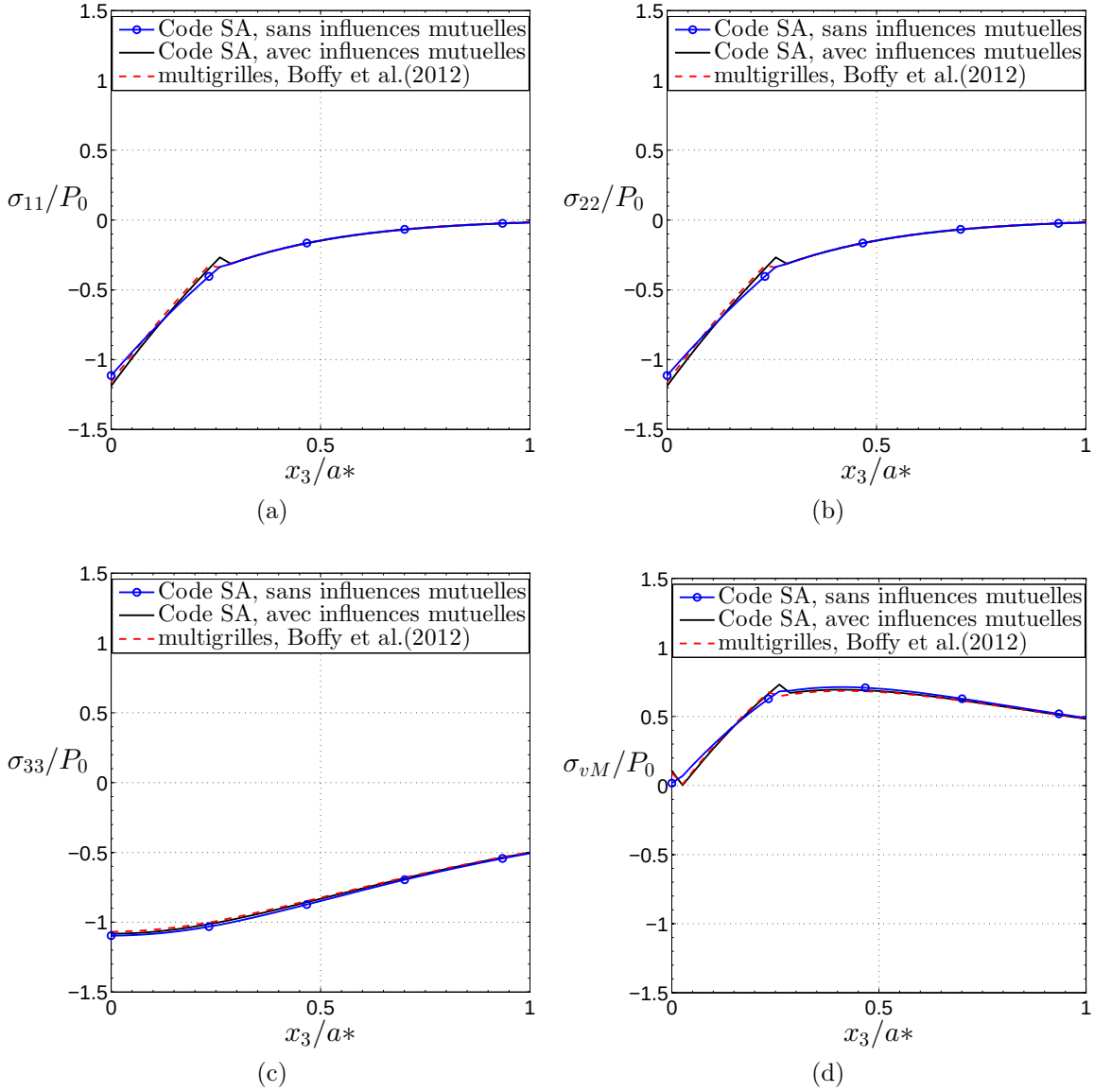


FIGURE 3.27 – Comparaison des champs de contraintes obtenus par la méthode semi-analytique et la méthode multigrille [BOF 12b] suivant la direction X_3 ;(a) σ_{11}/P_0, (b) σ_{22}/P_0, (d) σ_{33}/P_0, (b) σ_{vM}/P_0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

(a) (b)

FIGURE 3.28 – Représentation schématique d'une description géométrique d'une fibre de composites tissés (a) séries de cubes (b) séries de cubes+ellipsoïdes.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La bête noire de l'algorithme de résolution de contact entre matériaux hétérogènes, réside dans le calcul des champs de contraintes élastiques en sous-couche. L'algorithme de calcul de contraintes élastiques est utilisé aussi bien dans le cas d'une hétérogénéité unique, multiples, ou lorsque l'on est en présence de plasticité en sous-couche. Selon le type de problème considéré, les routines de « calcul de contraintes » peuvent représenter jusqu'à 90% du temps de calcul global. Deux approches différentes seront proposées dans les prochains paragraphes de ce chapitre afin de réduire considérablement les temps de calculs liés aux routines de calcul des champs de contraintes. Une nouvelle méthode de décomposition sera utilisée pour simuler l'espace semi-infini (Fig.3.29). Le code de calcul de contact sera ensuite parallélisé. Quel que soit le type de problème considéré ; les temps de calculs seront, dans le pire des cas, divisés au moins par 2.

3.8 Améliorations numériques : nouvelle méthode de décomposition

Dans cette partie une nouvelle méthode de décomposition a été implémentée. La méthode de décomposition classique de Chiu [CHI 78b] fait intervenir en plus de l'eigenstrain ε^* une source miroir ε_s^*. Ceci oblige à utiliser quasiment deux 3D-FFT et une 2D-FFT. La nouvelle méthode (Fig. 3.29, Eq.3.71) se passe de la source miroir, mais fait intervenir trois 2D-FFT. Les 3D-FFT sont évidemment plus coûteuses en temps de calcul que les 2D-FFT. Considérons un maillage tridimensionnel de taille $N_1 \times N_2 \times N_3$. Pour éviter les erreurs liées aux FFT, il est nécessaire de multiplier la taille du domaine par 2 dans chaque direction. Le calcul des champs de contraintes en sous-couche se fait sur un domaine de $2N_1 \times 2N_2 \times 2N_3$. Comme mentionné au chapitre précédent, le calcul se fait en utilisant des techniques de wrap-around et de zero-padding.
Quelle que soit la morphologie de l'inclusion (même dans le cas des inclusions inclinées), la nouvelle méthode (Fig. 3.29, Eq.3.71) fait intervenir 1 3D-FFT et 1 3D-FFT inverse, 3 2D-FFT et 3 2D-FFT inverse. Le temps de calcul T_1 nécessaire à cette opération varie en $O(864N_1N_2N_3\log(8N_1N_2N_3) + 432N_1N_2N_3\log(4N_1N_2))$. Ceci quelle que soit la morphologie de l'inclusion.
Considérons à présent la méthode de Chiu (Fig.3.1, Eq.3.19). Cette décomposition fait intervenir dans le cas des géométries sans orientations (cubes, sphères, ellipsoïdes sans orientations) 2 3D-FFT et 2 3D-FFT inverse, 1 2D-FFT et 1 2D-FFT inverse. Le temps de calcul T_2 nécessaire à cette opération varie en $O(1728N_1N_2N_3\log(8N_1N_2N_3) + 144N_1N_2N_3\log(4N_1N_2))$.
Dans le cas des inclusions inclinées (Fig.3.3, Eq.3.25), il faut remarquer que l'inclusion source et l'inclusion miroir n'ont plus la même orientation. les tenseurs B_{ijkl} et B^S_{ijkl} étant différents. Le temps de calcul T_3 nécessaire à la décomposition de Chiu (dans le cas des inclusions inclinées) varie en

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$O(3456N_1N_2N_3\log(8N_1N_2N_3) + 144N_1N_2N_3\log(4N_1N_2))$.
Afin d'illustrer ce qui vient d'être énoncé, on choisira $N_1 = N_2 = N_3 = N$. L'objectif étant de tracer les ratios $\frac{T_3}{T_1}$ et $\frac{T_2}{T_1}$ en fonction de N (Fig.3.30).
Dans le cas des inclusions inclinées, la nouvelle méthode de décomposition permet d'avoir un gain de temps de calcul de 4 (Fig.3.30) au niveau du calcul des contraintes. Dans le cas des géométries sans orientations (sphères, cubes, inclusions non inclinées) le gain est de 2. Si l'exemple de la partie validation (section 3.4) est reconsidéré, le gain en terme de temps CPU par rapport à la méthode éléments finis, en utilisant la nouvelle méthode de décomposition est 1 : 26.

Table 3.5 – Comparaison du temps CPU en utilisant la nouvelle méthode de décomposition

Méthode	Eléments Finis	Code SA(nouvelle méthode)
Temps CPU	$44260s(\sim 12h18min)$	$1680s(\sim 28min)$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) = &\sum_{x_3^I=0}^{n_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} B_{ijkl}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3-x_3^I)\varepsilon^*_{kl}(x_1^I,x_2^I,x_3^I)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M_{ij}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3)\sigma^n(x_1^I,x_2^I,0)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M_{ij}^{zx}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3)\sigma_{zx}(x_1^I,x_2^I,0)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M_{ij}^{zy}(x_1-x_1^I, x_2-x_2^I, x_3)\sigma_{zy}(x_1^I,x_2^I,0)\end{aligned} \tag{3.71}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

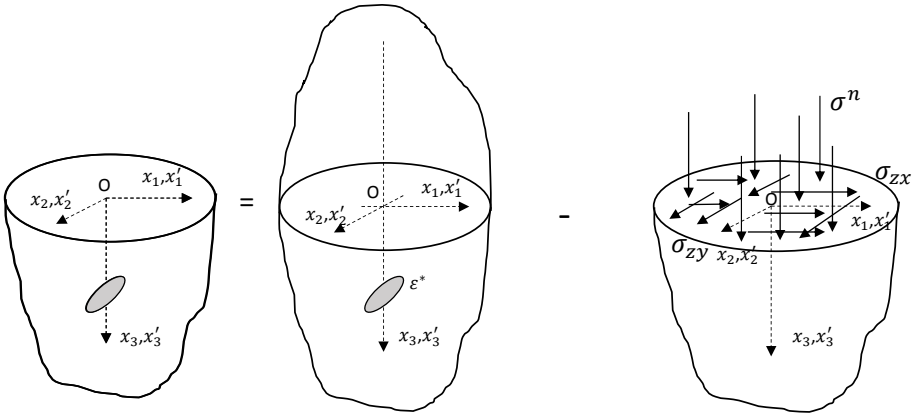


FIGURE 3.29 – Nouvelle méthode de décomposition.

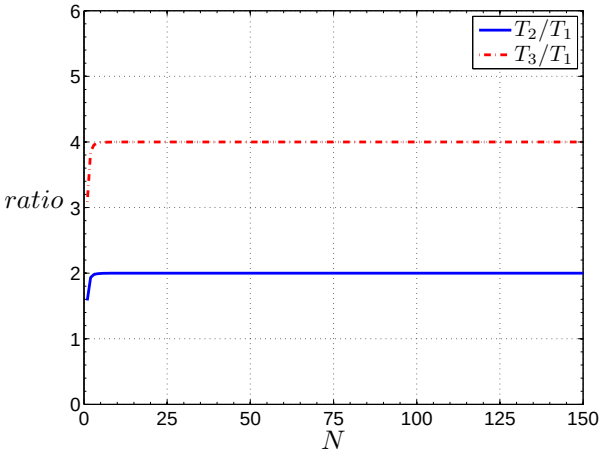


FIGURE 3.30 – Gain en temps de calculs.

3.9 Améliorations numériques : parallélisation

En Avril 1965, Gordon Earle Moore (l'un des trois fondateurs d'Intel), déclarait que la puissance des microprocesseurs sera multipliée par deux tous les 18 mois. La prédiction de Moore devrait normalement fonctionner au moins jusqu'en 2015 avant qu'on ne bute sur des bruits parasites : effets quantiques, désintégration alpha. Cependant depuis 2004, la fréquence des processeurs tend à stagner en raison des difficultés liées à la dissipation thermique, qui empêche une montée en fréquence en dépit de la taille plus faible des composants. De nos jours, les fréquences des processeurs peuvent atteindre $5GHz$. Il est très difficile d'aller au-delà. Ainsi la façon naturelle de se débarrasser la limite de vitesse liée à la fréquence est de dupliquer les unités fonctionnelles arithmétiques ou processeurs. Le recours au calcul parallèle est alors devenu indispensable si l'on veut augmenter les puissances de calcul. Cependant les problèmes posés par le parallélisme demandent alors de repenser les méthodes

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

mathématiques et les méthodes numériques. La quasi-totalité des codes commerciaux en mécanique peuvent aujourd'hui s'exécuter en parallèle. De plus en plus de codes académiques emboîtent le pas en introduisant du calcul parallèle dans les algorithmes de résolution. Le code semi-analytique devrait donc emboîter le pas, en faisant appel au calcul parallèle. Dans cette partie, nous présenterons la manière dont le calcul parallèle a été introduit dans l'algorithme de résolution de contact entre matériaux hétérogènes. Il convient donc dans un premier temps de présenter les différentes architectures de calculateurs parallèles qui existent de nos jours.

3.9.1 Différents types d'architecture

Les instructions de code de calcul font intervenir en plus des opérations arithmétiques, des accès mémoires. Ces accès mémoires sont aussi importants que les opérations arithmétiques elles-mêmes. Il est donc inutile d'augmenter le nombre de processeurs ou les unités arithmétiques si on n'augmente pas en même temps le débit de la mémoire. Cela supposerait donc que la mémoire soit simultanément de grande taille, pour contenir toutes les données, et capable d'avoir un débit élevé pour alimenter tous les processeurs. La mémoire doit donc fonctionner à une cadence plus élevée que les processeurs. Ce fonctionnement est tout simplement impossible car, et la mémoire et les processeurs utilisent une même technologie : celle des semi-conducteurs. Le point le plus important d'un calculateur scientifique est donc l'architecture mémoire.

- Mémoire partagée. Plusieurs processeurs ont accès simultanément à la même mémoire (Fig.3.31). Il s'agit par exemple des ordinateurs de bureau que le LaMCoS offre à ses doctorants. Cette configuration est efficace pour des codes de calculs manipulant des données d'entrée de l'ordre du *Gigabytes*. Le code semi-analytique sera parallélisé dans cet environnement en utilisant la bibliothèque OpenMP.
- Mémoire distribuée. Dans ce type de configurations (Fig.3.32), chaque processeur va disposer de sa propre mémoire, à laquelle il sera le seul à avoir accès. Chaque nœud de calcul est formé d'un processeur et de sa mémoire mais doit pouvoir communiquer avec les autres. Les différents nœuds de calcul seront donc reliés entre eux par un réseau de communication. Le temps de calcul global dépendra également de la vitesse de transmission des données via le réseau. La mémoire distribuée est adaptée à des problèmes de grandes dimensions. L'algorithme d'une parallélisation MPI dans un environnement à mémoire distribuée sera présenté. Cependant, l'implémentation numérique ne sera pas faite.
- Architecture hybride. Il s'agit d'une combinaison de la mémoire partagée et de la mémoire distribuée. Au plus haut niveau, il s'agit des machines à mémoire distribuée, dont les nœuds de calcul ont eux-mêmes une architecture à mémoire partagée, disposant de plusieurs processeurs. La plupart des

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

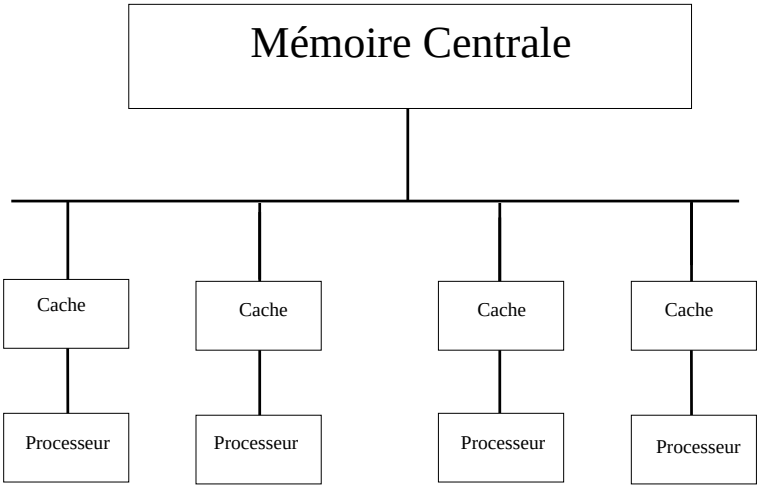


FIGURE 3.31 – Exemple d'architecture à mémoire partagée.

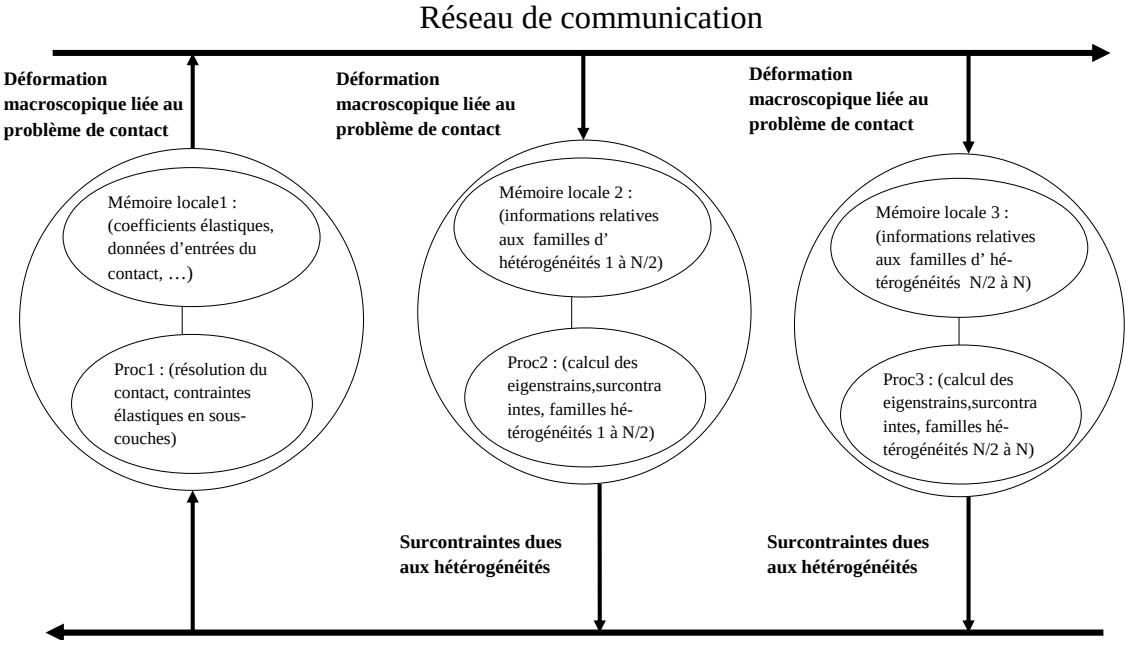


FIGURE 3.32 – Exemple d'architecture à mémoire distribuée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

clusters de calcul de laboratoire ont une architecture hybride. Pour plus de détails sur les différentes architectures, le lecteur pourra se référer au livre de Frédéric Magoulès et de François-Xavier Roux [MAG 13].

Une brève introduction sera faite sur l'évaluation des critères de performances d'un code parallèle. Est-ce que le code de contact en question est parallélisable ?

3.9.2 Mesure de la performance

Avant de faire appel à la parallélisation dans un code de calcul, il convient dans un premier de temps de s'assurer de la pertinence de celle-ci. Il arrive parfois que l'introduction du calcul parallèle fasse exploser les temps calculs. Pour cela il existe des critères de performance qu'il convient d'analyser bien avant [MAG 13].

- Degré de parallélisme. Le degré de parallélisme d'un programme ou d'un code de calcul, est le nombre d'opérations pouvant être exécutées simultanément. Plus le degré de parallélisme sera élevé, plus le nombre de processeurs utilisés est élevé, plus le gain en temps de calcul est élevé. Si on note T le temps total d'exécution, T_p le temps d'exécution parallèle, T_s le temps d'exécution de la part séquentiel. La formule dit d'Amdhal, permet de déterminer le temps minimum d'exécution sur une machine parallèle comportant np processeurs :

$$T_{np} = T_s + \frac{T_p}{np} \tag{3.72}$$

  Bien évidemment il est difficile voire impossible d'atteindre T_{np}. Cela supposerait que la part parallélisable du code soit parfaitement répartie entre les différents processeurs sans que l'exécution parallèle n'entraine de surcoût. La partie séquentielle de la résolution de contact sera par exemple : la lecture et l'écriture de fichiers, la résolution du problème normal et tangentiel. Cependant les algorithmes de calcul de contraintes et de prise en compte des hétérogénéités sont fortement parallélisables.
- Équilibrage des tâches. Un autre critère de performance est la régularité en termes de temps d'exécution des différentes tâches de la partie parallélisable du code. En effet, si une tâche requiert un temps d'exécution plus élevé que les autres, c'est elle qui va donc déterminer le temps minimal d'exécution en parallèle. Les divers algorithmes de la partie parallélisable du code doivent être parallélisés de manière à avoir un bon équilibrage des tâches sur les différents processeurs.
- Granularité. La granularité d'une tâche parallèle peut se définir comme le nombre d'opérations arithmétiques que la tâche réalise et le nombre de données que la tâche doit recevoir. Concrètement il s'agit du rapport entre le temps de calculs et celle des échanges entre processus. En effet, l'exécution en mode parallèle entraînera des coûts supplémentaires qui vont réduire l'effica-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

cité. Sur des machines à mémoire partagée, ces surcoûts sont faibles, liés aux fonctions du système d'exploitation qui activent les différents processeurs et gèrent la synchronisation entre processus. Sur un système à mémoire distribuée, les surcoûts sont principalement liés aux transferts de données entre processeurs qui induisent des délais supplémentaires lors de l'exécution en mode parallèle. De manière simplifiée, ne seront parallélisées que les boucles parallélisables (bien sûr) ayant un temps d'exécution élevé.

– Extensibilité. Un algorithme ou une méthode seront dits extensibles si leur efficacité ne décroît pas avec le nombre de processeurs. Dans le cas d'un environnement OpenMP, on peut établir l'extensibilité en exécutant le même calcul sur un nombre croissant de processeurs et mesurer la décroissance du temps de calcul. Aucun algorithme ne sera extensible à l'infini, ce qui compte c'est d'avoir une bonne extensibilité dans la gamme de processeurs disponibles. Dans le cas de la parallélisation dans l'environnement à mémoire partagée, OpenMP, l'extensibilité est bonne entre 2 et 16 processeurs. Ce qui est très satisfaisant, puisque le code semi-analytique se veut un code de calcul « Bureau d'études (BE) » léger devant tourner sur des ordinateurs de bureaux ayant entre 4 et 8 Cœurs. Par contre dans le cas MPI, l'extensibilité dépend fortement du type de problème à résoudre (couplage normal/tangentiel, nombre d'hétérogénéités, ...).

3.9.3 Mémoire partagée : environnement OpenMP

3.9.3.1 Parallélisme de données

Le code de contact fait intervenir des calculs répétitifs sur de grands nombres de données (calcul du tenseur B_{ijkl}). Ces grands nombres de données apparaissent sous forme de boucles de programme portant sur des tableaux.
Lorsque que le code de calcul effectue par exemple des boucles de programme, les différents processeurs peuvent se partager le travail, en partitionnant l'ensemble ou une partie des itérations. Évidemment toutes les boucles d'un programme ne sont pas parallélisables. Il y a une série de règles assez strictes à respecter.

– Dépendance
  L'exécution en parallèle signifie que les différentes itérations seront effectuées dans un ordre qui est fonction du nombre de processeurs, du mode de découpage, et qui de fait est très aléatoire. La parallélisation ne modifie pas le résultat du calcul si et seulement si il n'existe pas de dépendance entre deux ou une série d'instructions. Il existe deux types de dépendances : la dépendance de données et la dépendance de sorties.
  la dépendance de données : Deux instructions ou une série d'instructions $\mathrm{Inst_A}$ et $\mathrm{Inst_B}$ présentent une dépendance de données, lorsque :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\mathrm{Out}(\mathrm{Inst_A}) \cap \mathrm{In}(\mathrm{Inst_B}) \neq \emptyset \tag{3.73}$$

Exemple :

$$\mathrm{Inst_A} : a = b + c \quad \mathrm{Inst_B} : d = \beta \times a \tag{3.74}$$

la dépendance de sorties : Deux instructions ou série d'instructions $\mathrm{Inst_A}$ et $\mathrm{Inst_B}$ présentent une dépendance de sorties, lorsque :

$$\mathrm{Out}(\mathrm{Inst_A}) \cap \mathrm{Out}(\mathrm{Inst_B}) \neq \emptyset \tag{3.75}$$

Exemple :

$$\mathrm{Inst_A} : a = b + c \quad \mathrm{Inst_B} : a = \beta \times d \tag{3.76}$$

Dans les deux exemples donnés, la dépendance porte sur a.
En résumé une boucle est parallélisable si et seulement si deux instructions ou séries d'instructions associées à des itérations différentes ne présentent aucune dépendances de données ou de sorties.
En pratique cette règle peut, dans certains cas, être contournée, en utilisant des opérations de réduction.
Les principes tels qu'énoncés sont parfois difficilement vérifiables dans le cas des boucles imbriquées.

– Cas des boucles imbriquées
  Une partie importante des calculs réalisés dans le code de calcul réside dans des boucles imbriquées. Les performances les plus élevées seront obtenues si la boucle la plus externe est parallélisable, de sorte que la parallélisation présente la plus forte granularité possible. Cependant l'analyse de la dépendance au niveau de la boucle externe n'est pas toujours facile à faire. Il faudrait alors envisager de permuter les boucles afin d'avoir de bonnes performances.

Plusieurs portions du code de calcul, comme les routines de calculs des tenseurs D_{ijkl}, ont été parallélisées en se basant sur les règles énoncées ci-dessus.

3.9.3.2 Parallélisation des calculs de contraintes

En fonction du type de problème à résoudre, entre 60% et 90% du temps d'exécution est passé dans les routines de calcul de contraintes (Eq. 3.19). L'équation de calcul des contraintes se réécrit dans le domaine de Fourier sous la forme :
Cas de la décomposition de Chiu,

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{ij}(s_1, s_2, s_3) = \widehat{B}_{ijkl}(s_1, s_2, s_3)\widehat{\varepsilon}^*_{kl}(s_1, s_2, s_3) + \widehat{B}_{ijkl}(s_1, s_2, s_3)\widehat{\varepsilon}^*_{skl}(s_1, s_2, s_3) \\ + \widehat{M}_{ij}(s_1, s_2, s_3)\widehat{\sigma}^n(s_1, s_2)\end{aligned} \tag{3.77}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cas de la nouvelle méthode de décomposition,

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{ij}(s_1,s_2,s_3) = \widehat{B}_{ijkl}(s_1,s_2,s_3)\widehat{\varepsilon}^*_{kl}(s_1,s_2,s_3) + \widehat{M}_{ij}(s_1,s_2,s_3)\widehat{\tau}_{zz}(s_1,s_2) \\ +\widehat{M}^{zx}_{ij}(s_1,s_2,s_3)\widehat{\tau}_{zx}(s_1,s_2) + \widehat{M}^{zy}_{ij}(s_1,s_2,s_3)\widehat{\tau}_{zy}(s_1,s_2)\end{aligned} \tag{3.78}$$

Le calcul du tenseur des contraintes $\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$ se déroule donc en trois étapes :
- Une transformée de Fourier rapide des variables spatiales de l'espace réel vers l'espace de Fourier.
- Une série de multiplications et d'additions dans l'espace de Fourier.
- Une transformée inverse de $\widehat{\sigma}_{ij}(s_1,s_2,s_3)$ vers le domaine spatial $\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$.

Transformée de Fourier Directe

Les tenseurs B_{ijkl} et ε^*_{kl} font intervenir des transformées de Fourier tridimensionnelles (3D-FFT). Les 3D-FFT sont très coûteuses en temps de calcul comparées aux 2D-FFT. Il convient de paralléliser en priorité les routines 3D-FFT. Le tenseur B_{ijkl} possède la symétrie en ij, en kl mais pas la symétrie majeure. Il existe alors 36 termes distincts pour le tenseur B_{ijkl}. Il est alors possible de réaliser simultanément la transformée de Fourier de ces 36 (B_{ijkl}) + $6(\varepsilon^*_{kl})$ termes. Il s'agit alors (section 3.9.2) d'une portion de code fortement parallélisable. Ainsi quand l'on est présence de 42 processeurs, la loi d'Amdhal appliquée à cette portion de code permet de dire :

$$T_{\text{execution42FFT}} = T_{\text{execution1FFT}} \tag{3.79}$$

Il s'agit d'un gain considérable en terme de temps de calcul.

Multiplication dans le domaine de Fourier

Le calcul des champs de contrainte dans le domaine de Fourier, fait intervenir une série de multiplications et d'additions.
Cet algorithme a été fortement parallélisé, en utilisant principalement la méthode de réduction.

Transformée inverse

Une fois les champs de contraintes obtenus dans le domaine de Fourier, il convient de les ramener dans le domaine spatial.

$$\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3) = FFT^{-1}(\widehat{\sigma}_{ij}(s_1,s_2,s_3)) \tag{3.80}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

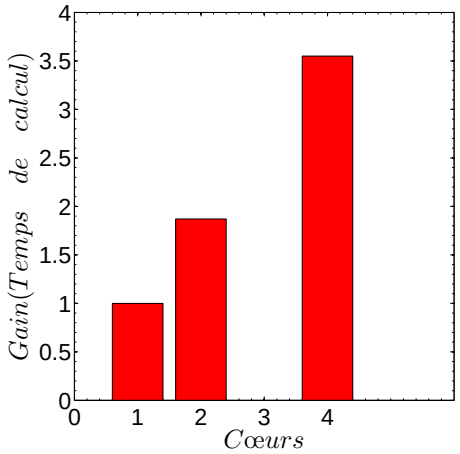


FIGURE 3.33 – Gain en terme de temps de calcul parallélisation OpenMP.

La transformée inverse des champs de contraintes nécessite 6 3D-FFT indépendantes, ce qui permet de paralléliser entièrement cette opération.

3.9.3.3 Évaluation du gain en terme de temps de calcul

En considérant le problème de contact sur un massif revêtu de la section 3.7.4, le gain en terme de temps de calcul pour une parallélisation OpenMP, est de 1.87 sur 2 processeurs et 3.56 sur 4 processeurs (Fig.3.33). Il faut rappeler ici qu'il s'agit d'un code Fortran 90 compilé avec Visual Fortran Studio XE 2010 pour Windows. Afin de pouvoir comparer les temps de calculs, l'exécution a été réalisée sur un processeur Intel Core i7-3740QM avec 4 cœurs. Dans le cadre de la parallélisation OpenMP, la configuration du contact revêtu avec prise en compte de l'influence mutuelle est celle qui permet d'avoir le plus gros gain en terme de temps de calculs.
Ainsi, en combinant la nouvelle méthode de décomposition avec la parallélisation OpenMP, il est possible dans certains cas de figures d'avoir un gain en termes de temps de calcul d'environ 11, en utilisant au mieux toutes les ressources d'un PC classique avec 4 coeurs. Il s'agit d'un gain important, ouvrant la voie à des simulations complexes. Ces améliorations numériques ont été un important coup d'accélérateur pour le déroulement de la thèse. Les simulations prenaient beaucoup moins de temps, plusieurs phénomènes ont pu être étudiés, ...

3.9.4 Mémoire distribuée : environnement MPI

La parallélisation à mémoire distribuée mise en œuvre dans la plupart des codes éléments finis est basée sur la décomposition de domaines, par découpage de maillages. Dans le code de calcul semi-analytique, les propriétés des tenseurs

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

D_{ijkl} seront utilisées pour faire la parallélisation à mémoire distribuée MPI (Fig.3.34).
Pour une matrice considérée, le tenseur D_{ijkl} ne dépend que de la morphologie et des propriétés géométriques des hétérogénéités considérées. Pour une inclusion ellipsoïdale par exemple, le tenseur D_{ijkl} ne dépend que du ratio entre les demi-axes a_1, a_2, a_3 des ellipsoïdes. L'ellipsoïde de demi-axes $a_1 = 0.3a^*, a_2 = 0.1a^*, a_2 = 0.1a^*$ aura le même tenseur D_{ijkl} que l'ellipsoïde de demi-axes $a_1 = 0.6a^*, a_2 = 0.2a^*, a_2 = 0.2a^*$. Une sphère de rayon $r = 0.1a^*$ aura le même tenseur D_{ijkl} qu'une sphère de rayon $r = 0.2a^*$. Les différentes hétérogénéités peuvent donc être classées par familles. Ainsi le calcul de la surcontrainte d'une famille, ou un certain nombres de familles pourraient être affectées à un nœud de calcul MPI (Fig.3.34). Un premier nœud de calcul résout le problème de contact normal/tangentiel. Les autres nœuds de calculs reçoivent en entrée les champs de déformations macroscopiques (σ^0 ou ε^0), calculent et stockent les tenseurs D_{ijkl} et fournissent en sortie la surcontrainte liée à une ou à certains nombres de familles d'hétérogénéités. Ces surcontraintes sont renvoyées au premier nœud de calcul et le problème de contact est résolu à nouveau (Fig.3.34). Le principe et l'algorithme ont été mis au point. Par contre l'implémentation numérique n'a pas été faite pour plusieurs raisons :

- Il s'agit d'un code qui est toujours en cours de développement. La parallélisation MPI sera trop intrusive pour les autres développeurs et futurs utilisateurs.
- Au vue de la dimension des problèmes résolus actuellement, une parallélisation MPI n'est pas forcément prioritaire. Il pourra être possible d'y faire appel dans les années futures.

La parallélisation permet en outre d'envisager aujourd'hui la prise en compte d'eigenstrains d'ordres 1, 2 [LER 13a] ou supérieur. Toute la méthodologie présentée dans ce chapitre se limite exclusivement aux eigenstrains d'ordre 0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

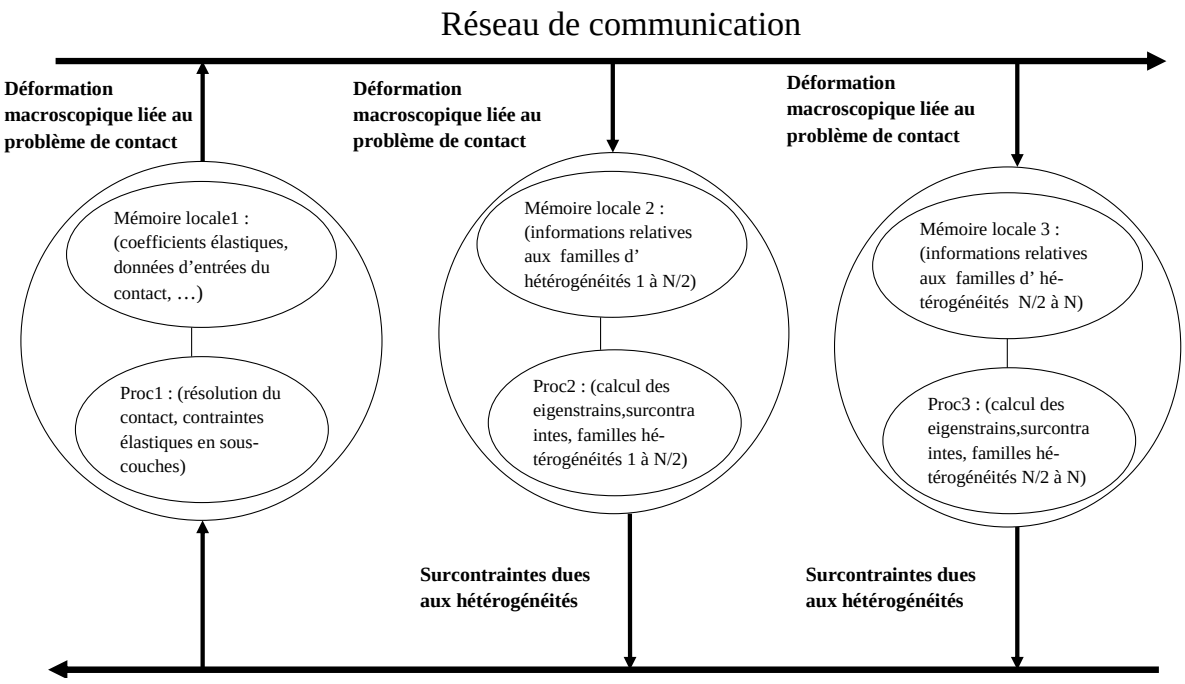


FIGURE 3.34 – Mise en oeuvre la parallélisation MPI code semi-analytique.

3.10 Synthèse

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité des thèses de Julien Leroux [LER 13a] et de Benjamin Fulleringer [FUL 11] qui se sont intéressés au cas des hétérogénéités élastiques isotropes noyées dans un massif semi-infini élastique isotrope. Dans ce chapitre la prise en compte des hétérogénéités anisotropes ou isotropes inclinées dans le cas du contact entre corps élastiques isotropes a été présentée. Le modèle a été validé par comparaison avec un modèle éléments-finis réalisé avec le logiciel commercial Abaqus v6.11. Une étude fine, de l'effet du module de compressibilité/cisaillement de l'hétérogénéité sur le problème de contact, a été réalisée grâce à une décomposition du tenseur d'élasticité C sur la base des tenseurs isotropes J et K. Les résultats de cette analyse ont été utilisés en bureau d'études (BE) pour étudier la nocivité de défauts dans les billes céramiques de roulements hybrides. La méthode permet d'accéder aux champs de contraintes normales/tangentielles à l'interface hétérogénéité/matrice. Ces variables s'avèrent utiles dans la mise en place des lois de décohésions hétérogénéité/matrice. Dans le cas des hétérogénéités anisotropes en particulier, il est indispensable de prendre en compte la bonne orientation du repère d'anisotropie par rapport au repère du contact. Outre les hétérogénéités de forme ellipsoïdale, le modèle pourrait également prendre en compte des hétérogénéités de formes parallélépipédiques.
Une méthode numérique permettant de prendre en compte les interactions mutuelles entre plusieurs hétérogénéités a été ensuite présentée. De nouveaux

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

algorithmes de résolution tels que le Gradient bi-conjugué stabilisé et l'Orthodir ont été introduits pour résoudre le cas des matrices non symétriques (en présence de frottement). L'approche a été validée par une comparaison avec la méthode multi-grille.
Un accent particulier a été mis sur la réduction du temps de calcul et la robustesse du code. Une nouvelle méthode de décomposition a été proposée permettant de diviser le temps de calcul quasiment par 2 ou par 4 en fonction des configurations considérées (hétérogénéité inclinée ou non). La parallélisation a été introduite dans le code de calcul. La parallélisation OpenMP a permis d'avoir un gain de 1.87 sur 2 cœurs et de 3.55 sur 4 cœurs. En combinant la nouvelle méthode de décomposition et la parallélisation il est possible, dans certaines configurations, d'avoir un gain en termes de temps de calcul de 1 : 11.
Ces optimisations numériques ont rendu le code plus rapide. Les temps de développement et de simulation ont été considérablement réduits. Le code est dès lors utilisé de manière optimale en bureau d'études. L'algorithme général d'une parallélisation MPI a été présenté mais n'a pas été implémenté. Cette parallélisation peut se montrer trop intrusive pour les développeurs et utilisateurs futurs. Aussi, au vue de la dimension des problèmes résolus actuellement, une parallélisation MPI n'est pas forcément prioritaire.
Les travaux présentés dans tout ce chapitre sont limités au cas des matrices élastiques isotropes. Cependant, dans certaines configurations, les industriels sont confrontés au cas des matrices viscoélastiques (étanchéités, composites à matrice organiques, contact pneu/chaussée, ...). Le prochain chapitre sera consacré au contact entre matériaux viscoélastiques homogènes ou hétérogènes.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 4

Théorie du contact viscoélastique

Ce chapitre s'intéresse à la modélisation du contact dans le cas des matériaux viscoélastiques homogènes mais aussi dans le cas des matériaux viscoélastiques hétérogènes. Il s'agit d'un modèle pouvant traiter à la fois des problèmes d'indentation, de roulement/glissement et de fretting. Le modèle a été validé par comparaison avec un modèle éléments finis.

Sommaire

4.1 Introduction 127

4.2 Généralités sur les matériaux viscoélastiques 130

4.3 Contact normal sur massif homogène viscoélastique 134

4.3.1 Equations du modèle 134

4.3.2 Mise en œuvre numérique 137

4.3.3 Validation 138

4.3.4 Quelques résultats 141

4.4 Contact normal sur massif viscoélastique hétérogène 146

4.4.1 Equations du modèle 146

4.4.2 Validation. 151

4.4.3 Résultats 154

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.5 Bilan partiel 162
4.6 Roulement sur massif homogène 164
4.6.1 Equations du modèle 164
4.6.2 Validations 166
4.6.3 Résultats 169
4.6.4 Cas d'une sphère viscoélastique ou élastique en contact roulant/glissant avec un massif viscoélastique 180
4.7 Roulement sur massif viscoélastique hétérogène . . . 185
4.7.1 Brève description du problème 185
4.7.2 Résultats 188
4.8 Bilan partiel 198
4.9 Fretting viscoélastique 199
4.9.1 Mise en équation 199
4.9.2 Résultats 200
4.10 Bilan partiel 212
4.11 Synthèse 212

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.1 Introduction

Le contact viscoélastique, contrairement au cas élastique, est très peu étudié dans la littérature. Cependant, de nombreuses applications et solutions industrielles mettent en œuvre la problématique du contact entre deux matériaux dont l'un au moins est viscoélastique. Les applications industrielles les plus répandues sont le contact pneu/chaussée, le phénomène de fretting dans le cas des matériaux composites à matrice organique, la biomécanique, l'étude de revêtements viscoélastiques pour des applications pétrolières, automobiles, aéronautiques et aérospatiales. Dans le cas du contact pneu-chaussée, les industriels du pneumatique cherchent à mieux comprendre et à mieux modéliser l'adhérence (frottement, usure) et ses facteurs influents (texture, vitesse,...). En effet, la viscoélasticité de la gomme du pneu introduit un différentiel de chargement entre l'avant et l'arrière de la zone de contact, induisant un couple résistant. La détermination de cette résistance au roulement est une problématique qui intéresse fortement les industriels du pneumatique. Les concepteurs de chaussée sont quant à eux plutôt intéressés par la compréhension des mécanismes de dégradations des chaussées, donc aux champs de contraintes en surface et en sous-couche. Cela passe bien évidement par une modélisation fine du contact entre matériaux viscoélastiques. Certaines entreprises comme Hexcel, leader dans la fabrication des matériaux composites, sont fortement intéressées par les problématiques de fretting dans le cas de ces matériaux. L'un des objectifs de ces études, est de comprendre l'effet de la matrice viscoélastique sur le comportement à long terme en fretting de divers matériaux composites [TER 11, TER 09]. Dans la biomécanique, certains industriels sont intéressés par la tenue et le confort des implants ou des prothèses. Dans le cas des implants orthopédiques [GER 05] par exemple, le matériau utilisé est un alliage $Ti - 6Al - 4V$ qui est en contact avec des tissus mous dont le comportement est supposé viscoélastique linéaire. Enfin dans le monde aéronautique, les revêtements viscoélastiques sont particulièrement appréciés au niveau des structures froides soumises à des sollicitations de fretting.

La plupart des modèles de la littérature qui se sont intéressés au contact viscoélastique peuvent être subdivisés en 3 grandes parties : l'indentation, le roulement/glissement et le fretting. Contrairement au contact élastique dont les premiers travaux remontent à 1885, le premier modèle traitant du contact viscoélastique a été publié en 1960 par Lee et Radok [LEE 60]. Ils ont donné les solutions en terme de champs de pression ainsi que l'évolution de la zone de contact entre une sphère rigide et un massif viscoélastique linéaire. La solution fournie par [LEE 60] n'est valable que pour une augmentation monotone de la zone de contact. Une pression négative est obtenue lorsque la zone de contact décroit, résultat qui n'est pas réaliste. Hunter [HUN 60] et Graham [GRA 67] ont proposé une amélioration du modèle d'origine de Lee et Radok [LEE 60]

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

permettant de résoudre le problème lorsque l'évolution de la zone de contact au cours du temps ne possède qu'un seul maximum. [TIN 66, TIN 68] s'intéresse au problème d'indentation viscoélastique lorsque la zone de contact est une fonction arbitraire du temps. Le modèle n'est valide que pour des indenteurs ayant un profil axisymétrique. Les trois modèles présentés ci-dessus sont basés sur des formulations analytiques complexes, sont limitées à des géométries simples (cône, sphère) et à des matériaux viscoélastiques idéalisés avec un seul temps de relaxation. Plusieurs auteurs se sont intéressés par la suite à l'indentation dans le cadre des matériaux viscoélastiques avec plusieurs temps de relaxation. Récemment Greenwood [GRE 10] a résolu le problème de contact entre un indenteur axisymétrique et un massif viscoélastique semi-infini. Le modèle proposé par Argatov [ARG 12] permet de résoudre les problèmes d'indentation dans le cas des revêtements viscoélastiques. Les modèles de Greenwood et Argatov mettent en oeuvre des formulations quasi-analytiques complexes. Enfin un dernier modèle [CHE 11], basé sur les approches semi-analytiques, a été développé pour résoudre le problème d'indentation entre une sphère rigide et un massif viscoélastique.

La prise en compte du roulement ou du glissement dans le cadre du contact viscoélastique a fait l'objet de plusieurs études. [HUN 61] a proposé une méthode de résolution du contact roulant entre un cylindre rigide et un massif viscoélastique. Il s'agit d'un modèle 2D en déformations planes qui ne peut prendre en compte qu'un matériau avec un seul temps de relaxation. Plus tard, [PAN 80] ont étendu les travaux de Hunter au cas 3D en se basant sur l'approximation de la théorie du contact linéaire élastique de Kalker ([KAL 72, KAL 77] ; [PAN 77]). Il s'agit d'une hypothèse très forte. Goryacheva [GOR 73] utilise une autre approche analytique pour résoudre le problème de contact glissant entre un cylindre rigide et un massif viscoélastique. Un modèle tridimensionnel du contact glissant entre un indenteur lisse et un massif viscoélastique homogène a été proposé bien plus tard par Aleksandrov [ALE 10]. Les solutions en termes de champs de pression et de contraintes ont été obtenues dans le cas d'un matériau viscoélastique avec un seul temps de relaxation. Persson [PER 10] a également présenté une nouvelle formulation analytique permettant de résoudre le problème de contact glissant entre une sphère/cylindre rigide et un massif viscoélastique. Il obtient une estimation très précise du coefficient de frottement apparent dans le cas des chargements en déplacement imposé. En présence d'un chargement en force imposée, l'approche de Persson [PER 10] ne permet pas d'avoir une bonne estimation de la distribution de pression. Tous les modèles présentés depuis le début de ce paragraphe sont basés sur des modèles analytiques ou quasi-analytiques. Certains auteurs ont résolu le problème de contact roulant viscoélastique en se basant sur des approches types éléments finis [PAD 84, PAD 92, LET 94, NAS 98, NAC 04]. La méthode des éléments finis peut prendre en compte n'importe quelles propriétés géométriques et matériaux des corps en contact. La modélisation du

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

contact roulant en viscoélasticité nécessite un maillage fin, ce qui engendre des temps de calcul conséquents. Compte tenu du fait qu'il y a l'un des corps en contact qui roule, il est parfois difficile d'assurer la convergence du problème. L'utilisateur doit donc être très attentif sur l'algorithme de détection et le solveur de contact car il n'est pas du tout facile d'avoir une bonne estimation des champs de pression. Carbone et Putignano [CAR 13] ont introduit récemment une nouvelle approche originale, basée sur les méthodes des éléments de frontières, pour résoudre le problème de roulement ou de glissement entre un indenteur sphérique et un massif viscoélastique. Leur modèle peut prendre en compte des matériaux viscoélastiques linéaires avec un ou plusieurs temps de relaxation, et peut donc s'appliquer à des matériaux réels. Les solutions en termes de champs de pression et de coefficient de frottement apparent ne sont données qu'en régime permanent. Le régime transitoire n'étant pas pris en compte dans le modèle. Il s'agit d'un des modèles les plus aboutis traitant du contact roulant/glissant en viscoélasticité. Dans la suite du manuscrit, les résultats obtenus par notre modèle seront comparés à ceux obtenus par Carbone [CAR 13].

L'étude du phénomène de fretting dans le cadre du contact viscoélastique a fait l'objet de plusieurs études notamment dans le cas du PMMA (PolyMethylMethAcrylate). Une grande partie de ces travaux s'est limitée à des études expérimentales [BRI 98, KRI 99, BRI 00, CHA 00, DUB 03, TEN 04, GER 09, MAR 09a, CAI 11a, CAI 11b, TRE 13, YAS 15]. Les quelques modèles associés à ces travaux, ne prenaient pas en compte la viscoélasticité et se limitaient simplement à un contact élastique [DUB 03, TEN 04].

Quasiment tous les travaux présentés jusqu'ici ne se sont intéressés qu'au cas des matériaux viscoélastiques homogènes. Très peu d'études se sont intéressées à la modélisation du contact entre matériaux viscoélastiques hétérogènes. Cette problématique est cependant fortement présente dans le cas des composites à matrice organique. Il est depuis bien établi que l'orientation locale des fibres peut avoir une influence notable sur la réponse en fretting du matériau composite [TER 11, TER 09, LER 11, LER 13c]. Les résultats établis dans le cas des matériaux homogènes viscoélastiques ne sont donc pas transposables aux cas hétérogènes viscoélastiques.

Au vue de la problématique industrielle, il est donc nécessaire de pouvoir modéliser correctement le contact dans le cas de matériaux viscoélastiques homogènes mais aussi dans le cas de matériaux viscoélastiques hétérogènes. Dans ce chapitre, une approche semi-analytique de résolution du contact viscoélastique sera présentée. Il s'agit d'un modèle pouvant traiter à la fois des problèmes d'indentation, de roulement/glissement et de fretting. Le modèle peut prendre en compte à la fois des matériaux viscoélastiques homogènes et hétérogènes. Les hétérogénéités seront supposées élastiques et peuvent avoir des propriétés isotropes ou anisotropes. Contrairement aux autres modèles, plusieurs types de géométries peuvent être traités. Il convient également de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

mentionner que l'approche développée dans ce chapitre peut traiter le cas des matériaux viscoélastiques linéaires avec un ou plusieurs temps de relaxation, peut prendre en compte l'effet de la rugosité des surfaces sur le problème de contact, ceci quel que soit le chargement appliqué : force/déplacement imposé, chargement de type rampe, Heavy-side, triangulaire, quelconques, ... Le modèle fournit des solutions en termes de champs de pression, de cisaillements, de coefficient de frottement mais surtout permet d'obtenir des champs de contraintes en sous-couche. Ces champs de contraintes représentent des variables indispensables dans l'étude de l'endommagement en sous-couche. Contrairement à une grande majorité des modèles existants dans la littérature, l'approche développée ici fournit des résultats aussi bien en régime transitoire qu'en régime permanent. Le chapitre sera subdivisé en 3 grandes parties. La première partie s'intéressera au problème d'indentation entre deux massifs viscoélastiques homogènes ou hétérogènes. L'effet des hétérogénéités sur le problème de contact sera étudié. La deuxième partie s'intéressera au problème de roulement/glissement. La dernière partie s'intéressera à des problématiques de fretting dans le cas du contact viscoélastique. Des comparaisons entre les résultats obtenus par le modèle et la méthode des éléments finis seront présentées régulièrement tout au long de ce chapitre. Le gain en terme de temps de calculs entre le modèle et la méthode des éléments finis peut atteindre 110, dans le cas viscoélastique homogène. Il s'agit d'un modèle très rapide.
Les développements présentés dans ce manuscrit se limiteront au cadre de la viscoélasticité linéaire.

4.2 Généralités sur les matériaux viscoélastiques

Cette partie n'a pas vocation à se substituer à un cours d'introduction à la viscoélasticité. L'objectif étant de présenter assez succinctement les variables, les notations ainsi que les bases nécessaires à la compréhension du reste du chapitre. Le comportement d'un matériau viscoélastique est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module μ et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité η. L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver l'énergie alors que la viscosité traduit plutôt la capacité du matériau à dissiper de l'énergie. Dans le cas d'un matériau purement élastique, le déphasage entre contrainte et déformation est nul alors dans le cas du matériau purement visqueux, ce déphasage est de 90°. Le comportement viscoélastique se retrouve chez plusieurs matériaux comme le silly putty, les adhésifs, les polymères, les pneus, ... Deux différents types d'approches permettent de décrire le comportement viscoélastique :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

viscoélasticité non − linéaire

La viscoélasticité non linéaire s'intéresse à des déformations rapides et grandes. La réponse rhéologique dépend donc de l'amplitude de déformation, la vitesse de déformation et la cinétique de déformation. Il n'existe pas de théorie qui prévoit le comportement non-linéaire. Les équations constitutives sont très empiriques. La viscoélasticité non-linéaire est souvent utilisée dans la mise en forme des matériaux polymères.

viscoélasticité linéaire

Il s'agit du comportement viscoélastique le plus simple. La viscoélasticité suffit entièrement pour décrire les déformations lentes et petites. La viscoélasticité linéaire peut s'appliquer aux matériaux dits **matériaux Boltzmanniens**. Si on se place dans l'hypothèse de petites déformations, le matériau Boltzmannien suppose que la superposition des sollicitations implique la superposition homologue des réponses. Soit la fonctionnelle Λ définie par :

$$\sigma \xrightarrow{\Lambda} \varepsilon \tag{4.1}$$

Considérant deux histoires $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ de σ et les deux histoires $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ de ε. Pour un **matériau Boltzmannien**,

$$\Lambda(a\sigma^{(1)} + b\sigma^{(2)}) = a\Lambda(\sigma^{(1)}) + b\Lambda(\sigma^{(2)}) \quad \forall \quad a, b \tag{4.2}$$

Pour un matériau donné, ce principe de superposition peut être vérifié de manière expérimentale sur des sollicitations simples.
Trois tests sont couramment utilisés pour caractériser le comportement des matériaux viscoélastiques :

- Essais de relaxation. Une déformation est imposée et on suit l'évolution de la contrainte. On introduit la fonction de relaxation (Eq.4.3) qui est définie par la relation suivante :

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \tag{4.3}$$

- Essais de fluage. Une contrainte est imposée et on suit l'évolution de la déformation. La fonction de fluage est définie par :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \tag{4.4}$$

  Les fonctions de relaxation et de fluage sont reliées par la relation suivante :

$$\int_0^t J(\xi)R(t-\xi)d\xi = t \tag{4.5}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

– Analyse Mécanique Dynamique (DMA). Ce test consiste à imposer une déformation sinusoïdale, on regarde ensuite les modes et le déphasage. La DMA (Dynamic Mechanical Analysis) permet de déterminer les grandeurs physiques intrinsèques comme les modules complexes de Young, de Coulomb, la viscosité, le facteur de perte, ... Ces modules ne seront pas utilisés ici. Les fonctions de relaxation et de fluage seront les seules variables qui seront utilisées dans ce manuscrit.

Plusieurs modèles rhéologiques existent dans la littérature permettant de décrire le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques linéaires. Il s'agit de modèles empiriques composés d'une combinaison de connexions en série et/ou parallèle de ressorts (coefficients d'élasticité E_i) et d'amortisseurs η_i représentant respectivement les composantes élastiques et visqueuses. Certains de ces modèles sont très performants et approchent de façon très satisfaisante les courbes de caractérisation mécanique. Les modèles les plus connus sont :

– le modèle de Kelvin-Voigt (Fig.4.1). Ce modèle ne décrit pas la relaxation d'un matériau,

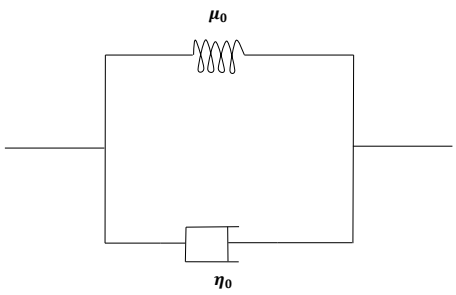


FIGURE 4.1 – Modèle de Kelvin-Voigt.

– le modèle de Kelvin-Voigt généralisé : constitué d'un assemblage en série de n modèles de kelvin-Voigt. Ce modèle n'est pas très bien adapté pour la relaxation,
– le modèle de Maxwell (Fig.4.2) : composé d'un ressort et d'un amortisseur en série,

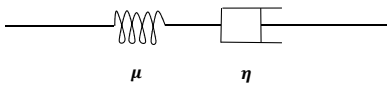


FIGURE 4.2 – Modèle de Maxwell.

– le modèle de Zener (Fig.4.3) composé d'un modèle de Maxwell et d'un ressort assemblé en parallèle. Il s'agit du modèle le plus simple prédisant à la fois la relaxation et le fluage de contraintes,
– le modèle de Maxwell généralisé (Fig.4.4). Ce modèle est composé de n modèles de Maxwell en parallèle, une branche parallèle supplémentaire est composée d'un ressort pour assurer une recouvrance totale. Il s'agit

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

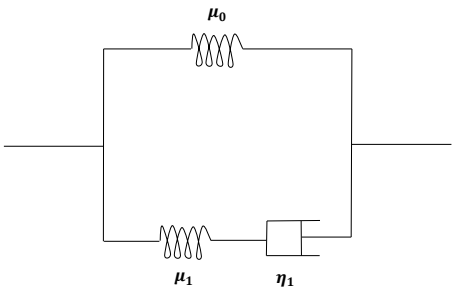


FIGURE 4.3 – Modèle de Zener.

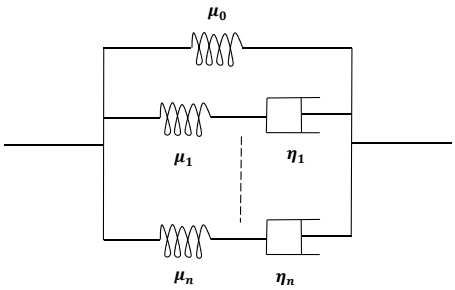


FIGURE 4.4 – Modèle de Maxwell généralisé.

du modèle couramment utilisé en viscoélasticité linéaire. C'est également ce modèle qui sera utilisé dans ce chapitre pour décrire le comportement des matériaux viscoélastiques (Fig. 4.4). Partant du modèle de maxwell généralisé, la fonction de relaxation peut s'écrire sous la forme :

$$R(t) = \left[\mu_0 + \sum_{i=0}^{n} \mu_i \exp(-t/\tau_i)\right] H(t) \tag{4.6}$$

Il s'agit d'une décomposition en séries de Prony. Dans le cadre de la **viscoélasticité linéaire**, les champs de contraintes et de déformations s'écrivent sous la forme :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\xi)\frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi}d\xi \tag{4.7}$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\xi)\frac{d\sigma(\xi)}{d\xi}d\xi \tag{4.8}$$

Les notations présentées ci-dessus reviendront assez régulièrement tout au long de ce chapitre.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

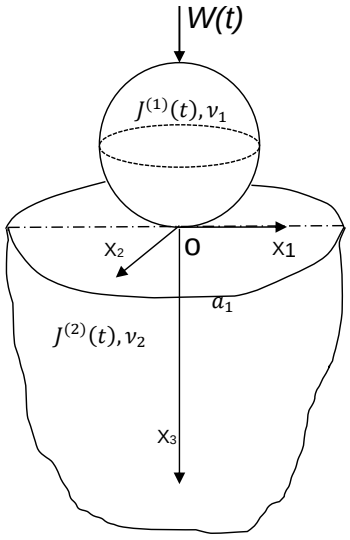


FIGURE 4.5 – Illustration du contact normal viscoélastique dans le cas d'une configuration sphère/plan.

4.3 Contact normal sur massif homogène viscoélastique

4.3.1 Equations du modèle

Considérons un problème d'indentation entre deux corps viscoélastiques $M1$, $M2$ (Fig.4.5). L'aspect viscoélastique de l'un ou l'autre des deux corps en contact ($M1$ et $M2$) nous oblige à prendre en compte en plus des variables spatiales (chapitres 2 et 3), la variable temporelle t. Ainsi les équations de contact présentées au chapitre 2, seront modifiées de façon à prendre en compte l'aspect temporel. Nous négligerons ici l'effet du frottement de Coulomb pour nous concentrer sur la réponse viscoélastique des matériaux, ainsi seul le formalisme du contact normal sera présenté. Le formalisme du contact tangentiel sera présenté plus tard dans la dernière partie de ce chapitre. La notation suivante sera adoptée :

– $W(t)$ sera la charge normale appliquée à un instant t.

La solution du problème de contact normal viscoélastique est obtenue en résolvant simultanément les trois équations suivantes :

– La conservation de la charge à chaque pas de temps. La charge appliquée $W(t)$ et l'intégrale de la pression $p(x_1, x_2, t)$ sur l'aire réelle de contact $\Gamma_c(t)$ doivent être strictement égales.

$$W(t) = \int_{\Gamma_c(t)} p(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \tag{4.9}$$

– La déformée des deux massifs en contact : La déformée des deux massifs ($M1$ et $M2$) en contact $h(x_1, x_2, t)$ est définie par la géométrie initiale

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$h_i(x_1, x_2)$, le déplacement de corps rigide δ ainsi que le déplacement relatif des deux corps $u_3(x_1, x_2, t)$. L'expression du déplacement normal de la surface viscoélastique, $u_3(x_1, x_2, t)$, à l'instant t sera donnée à la partie 4.3.1.1 :

$$h(x_1, x_2, t) = h_i(x_1, x_2) + \delta(t) + u_3(x_1, x_2, t) \tag{4.10}$$

où $h_i(x_1, x_2)$ est la géométrie initiale et δ le déplacement de corps rigide.

– Les conditions de contact : Les conditions supplémentaires doivent être satisfaites notamment sur la déformée de la surface ainsi que sur le champ de pression :

$$\text{contact : } h(x_1, x_2, t) = 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) > 0 \text{ à l'intérieur } \Gamma_c(t)$$

$$\text{séparation : } h(x_1, x_2, t) > 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) = 0 \text{ à l'extérieur } \Gamma_c(t) \tag{4.11}$$

Le modèle présenté ici ne prend pas en compte, l'adhésion des deux surfaces (des pressions négatives ne sont pas autorisées à l'interface des deux corps en contact).
L'une des difficultés du problème consiste dès lors à déterminer le champ de déplacement $u_3(x_1, x_2, t)$ et la contrainte en sous-couche $\sigma^0(x_1, x_2, t)$.

4.3.1.1 Détermination du champ de déplacement normal $u_3(x_1, x_2, t)$

La détermination du champ $u_3(x_1, x_2, t)$ constituera l'une des clés de la résolution du problème de contact normal. Le champ de déplacement normal $u_3(x_1, x_2, t)$ sera calculé en considérant les deux corps en contact ($M1$ et $M2$) viscoélastiques.
Pour un matériau élastique linéaire (cf. chapitre 2), le déplacement normal $u_3(x_1, x_2)$ est relié au champ de pression $p(x_1^{'}, x_2^{'})$ par la relation suivante ([JOH 85b]).

$$u_3(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\nu)p(x_1', x_2')dx_1'x_2'}{2\pi\mu\sqrt{(x_1 - x_1^{'})^2 + (x_2 - x_2^{'})^2}} \tag{4.12}$$

En se basant sur le principe de correspondance élastique/viscoélastique [LEE 60, CHE 11], le déplacement normal de la surface viscoélastique peut s'obtenir à partir de la solution élastique (Eq.4.12), en :

1. remplaçant le module d'élasticité $\frac{1}{2\mu}$, par la fonction de fluage $J(t)$.
2. subdivisant l'historique des champs de pression dans le domaine temporel en intervalles infinitésimales $\frac{\partial p}{\partial \xi}$,
3. prenant en compte l'historique des champs de pression dans le domaine temporel sur un pas infinitésimal.
4. superposant les contributions infinitésimales des champs de pression en utilisant la forme intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}()d\xi$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Le déplacement normal total (les 2 massifs étant viscoélastiques), $u_3(x_1, x_2, t)$, à l'instant t est donné par :

$$u_3(x_1, x_2, t) = u_3^{(1)}(x_1, x_2, t) + u_3^{(2)}(x_1, x_2, t) \quad (4.13)$$

$$u_3(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t (\frac{(1-\nu_1)p(x_1', x_2', \xi)}{\pi\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}} J^{(1)}(t-\xi) + \frac{(1-\nu_2)p(x_1', x_2', \xi)}{\pi\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}} J^{(2)}(t-\xi)) \frac{\partial p(x_1', x_2', \xi)}{\partial \xi} dx_1' x_2' d\xi \quad (4.14)$$

$$u_3(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t (G^{(1)}(x_1 - x_1', x_2 - x_2', t-\xi) + G^{(2)}(x_1 - x_1', x_2 - x_2', t-\xi)) \frac{\partial p(x_1', x_2', \xi)}{\partial \xi} dx_1' x_2' d\xi \quad (4.15)$$

où, $G^{(1,2)}(x_1, x_2, t)$ est le tenseur de Green viscoélastique, représentant le déplacement normal de la surface viscoélastique si celle-ci était soumise à une force unité. $G^{(1,2)}(x_1, x_2, t)$ peut être décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle.

$$G^{(1,2)}(x_1, x_2, t) = \frac{(1-\nu_{1,2})}{\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J^{(1,2)}(t) = \overline{G}(x_1, x_2) \times (1-\nu_{1,2}) \times J^{(1,2)}(t) \quad (4.16)$$

En discrétisant la forme intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}()d\xi$ et en utilisant la méthode des différences finies pour évaluer la dérivée $\frac{\partial p}{\partial \xi}$, l'équation 4.15 peut se réécrire sous la forme :

$$u_3(x_1, x_2, \alpha\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(x_1 - x_1', x_2 - x_2') dx_1' x_2' \times \sum_{k=0}^{\alpha} \big((1-\nu_1) J^{(1)}[(\alpha - k)\Delta t] + (1-\nu_2) J^{(2)}[(\alpha - k)\Delta t]\big) \times [p(x_1', x_2', k) - p(x_1', x_2', k-1)] \quad (4.17)$$

où Δt est le pas de la discrétisation temporelle.
Avec cette expression générale de $u_3(x_1, x_2, t)$, il est possible de remonter aux différents cas limites : contact élastique/élastique, élastique/viscoélastique, rigide/viscoélastique (cas le plus étudié dans la littérature).
A l'aide des équations développées dans cette partie, on peut résoudre complètement le problème de contact normal entre deux matériaux viscoélastiques et ainsi obtenir les champs de pression à chaque pas de la discrétisation temporelle.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.3.1.2 Détermination des contraintes en sous-couche

Les contraintes en sous-couche sont obtenues à partir d'une distribution de champs de pression. Le champ de contraintes en point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3,)$ à l'instant t est donné par la relation :

$$\sigma_{ij}^{0(2)}(x_1, x_2, x_3, \alpha\Delta t) = \sum_{x_1'=1}^{N_1} \sum_{x_2'=1}^{N_2} p(x_1', x_2', \alpha\Delta t)(C_{ij}^p(x_1 - x_1', x_2 - x_2', x_3, \nu_2)) \tag{4.18}$$

Les coefficients d'influence $C_{ij}^p(x_1, x_2, x_3)$ ne dépendent que du module de Poisson ν_2 qui est supposé constant au cours du temps.

4.3.2 Mise en œuvre numérique

La résolution du problème de contact entre matériaux viscoélastiques présente deux difficultés majeures :

- Les équations du contact (Eqs. 4.9 à 4.18) font intervenir une intégrale sur la zone réelle de contact. Dans le cas des matériaux viscoélastiques, les difficultés principales viennent du fait que la zone de contact $\Gamma_c(t)$ à l'instant t est à priori inconnue et change durant toute la durée du chargement.
- La déformation des surfaces en contact et le champ de pression à un instant t dépendent implicitement des informations sur les champs de pression, déplacements, ... durant la période $[0, t[$. Ainsi le problème de contact viscoélastique devient très compliqué quand on considère un chargement quelconque arbitraire. Les méthodes semi-analytiques mises en place dans ce manuscrit permettent de prendre en compte n'importe quel type de chargement et n'importe quel type de géométrie en contact.

La résolution du problème de contact passera par une discrétisation spatiale et temporelle. Le domaine spatial sera subdivisé en $N_1 \times N_2 \times N_3$ parallélépipèdes. La surface en contact sera donc composée de $N_1 \times N_2$ éléments rectangulaires. Le domaine temporel sera subdivisé en N_t pas de temps Δt. Le pas de temps Δt est suffisamment petit pour que le champ de pression puisse être supposé constant durant la période Δt. Autrement dit $p(x_1, x_2, t)$ est supposée constante entre $\alpha\Delta t$ et $(\alpha + 1)\Delta t$. N_t étant le nombre total de pas de temps dans le domaine temporel. Une astuce numérique a été introduite afin d'autoriser des pas de chargements Δt non-constants (maillage non-uniforme en temps). Dans le cas des chargements de formes sinusoïdales (section 4.3.4), cette technique sera utilisée afin de réduire toujours plus le temps de calcul.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La forme discrétisée de l'équation 4.17, peut se réécrire sous la forme :

$$u_3(i,j,\alpha) = \sum_{i'=1}^{N_1}\sum_{j'=1}^{N_2} \overline{K}_3^p(i-i',j-j') \times \sum_{k=0}^{\alpha} \left((1-\nu_1)J^{(1)}[(\alpha-k)\Delta t] + (1-\nu_2)J^{(2)}[(\alpha-k)\Delta t]\right) \times [p(i',j',k) - p(i',j',k-1)] \tag{4.19}$$

En combinant les équations 4.10, 4.11 et 4.19 on obtient :

$$\begin{aligned} -\delta(\alpha) = &\sum_{i'=1}^{N_1}\sum_{j'=1}^{N_2} \overline{K}_3^p(i-i',j-j') \times \\ &\left((1-\nu_1)J^{(1)}[0] + (1-\nu_2)J^{(2)}[0]\right) p(i',j',\alpha) + h_i(x_1,x_2) \\ &+ \sum_{i'=1}^{N_1}\sum_{j'=1}^{N_2} \overline{K}_3^p(i-i',j-j') \times \sum_{k=0}^{\alpha-1}((1-\nu_1)J^{(1)}[(\alpha-k)\Delta t] + \\ &(1-\nu_2)J^{(2)}[(\alpha-k)\Delta t]) \times p(i',j',k) \\ &- \sum_{i'=1}^{N_1}\sum_{j'=1}^{N_2} \overline{K}_3^p(i-i',j-j') \times \sum_{k=0}^{\alpha}((1-\nu_1)J^{(1)}[(\alpha-k)\Delta t] \\ &+(1-\nu_2)J^{(2)}[(\alpha-k)\Delta t]) \times p(i',j',k-1) \end{aligned} \tag{4.20}$$

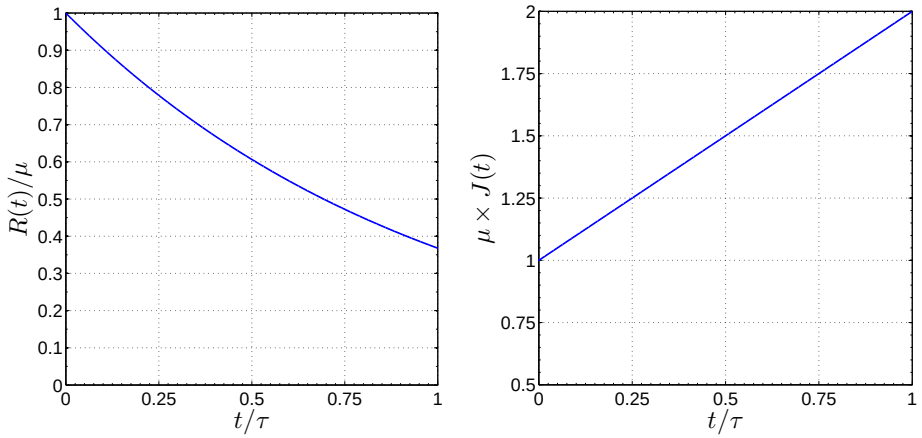
Le problème de contact viscoélastique est résolu en suivant la discrétisation temporelle. La résolution du problème de contact à l'instant $\alpha\Delta t$ suppose que les champs de pression du 1er au $\alpha^{ème} - 1$ pas de temps sont connus. La seule inconnue de l'équation est donc le champ de pression au pas α. Un algorithme de type gradient conjugué est donc utilisé pour déterminer le champ de pression à l'instant courant, i.e. à $\alpha\Delta t$. En résolvant l'équation de contact pas de temps par pas de temps, il est alors possible de remonter à l'historique complet de la distribution des champs de pression. En utilisant la méthode FFT pour évaluer le produit de convolution de l'équation 4.19, le temps de calcul au pas de temps α varie en $O(\alpha \times 2N_1 \times 2N_2 \times \log(2N_1 \times 2N_2))$.

4.3.3 Validation

Pour la validation, on considérera un contact normal sphère/plan. Les deux corps en contact sont supposés homogènes. Le diamètre de la sphère est $D = 62mm$ et une force normale d'intensité $W(t) = 10000N \times H(t)$ est appliquée. a^* et P_0 sont respectivement le rayon de contact et la pression maximum de Hertz correspondant au cas homogène élastique quand le module de cisaillement instantané $R(0) = \mu$ est utilisé (cf. Eq. 4.22). Autrement dit le rayon de contact

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$a^*(t=0) = a^*$ et $Pmax(t=0) = P_0$. Pour les propriétés viscoélastiques, on choisira un modèle de type Maxwell avec un seul temps de relaxation (voir Figs. 4.2 et 4.6). Les fonctions de relaxation et de fluage sont données par :



(a) (b)

FIGURE 4.6 – Fonction de relaxation (a) et la fonction de fluage (b).

$$J(t) = \frac{1}{\mu} + \frac{t}{\eta} \tag{4.21}$$

et :

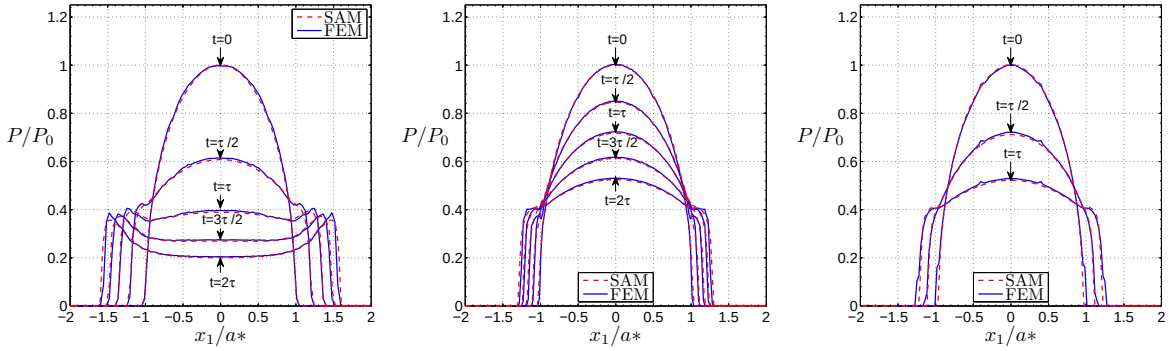
$$R(t) = \mu \exp(-t/\tau) \tag{4.22}$$

où μ est le module purement élastique, η la viscosité, et $\tau = \eta/\mu$ le temps de relaxation. Le coefficient de Poisson du massif viscoélastique est supposé constant ν^M=0.3. Le module de cisaillement instantané est $R(0) = \mu = 80.77GPa$ et le temps de relaxation $\tau = 25$ secondes.
Trois calculs seront réalisés :

1. Contact sphère viscoélastique/massif viscoélastique. La sphère et le massif seront considérés comme viscoélastiques. En considérant cette configuration, la demi-largeur de contact et la pression de Hertz équivalentes à $t = 0$ sont respectivement, $a^*(t=0) = a^* = 1.263mm$ et $Pmax(t=0) = P_0 = 2992.894MPa$
2. Contact sphère élastique/massif viscoélastique. Le massif sera considéré viscoélastique et la sphère élastique. Ceci revient simplement à faire tendre uniquement $\tau \to \infty$. Pour cette configuration $a^*(t=0) = a^* = 1.263mm$ et $Pmax(t=0) = P_0 = 2992.894MPa$
3. Contact sphère rigide/massif viscoélastique. La sphère sera considérée rigide. Ceci revient dans nos formulations à faire tendre $\tau \to \infty$ et $\mu \to \infty$. $a^*(t=0) = a^* = 1.00mm$ et $Pmax(t=0) = P_0 = 4750.923MPa$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Les champs de pression obtenus par le code semi-analytique seront comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.7 – Comparaison entre la méthode semi analytique(SAM) et la méthode des éléments finis (EF) ; (a) Sphère viscoélastique/Massif viscoélastique, (b) Sphère élastique/Massif viscoélastique (c) Sphère rigide/Massif viscoélastique.

Les figures 4.7a, 4.7b, 4.7c présentent respectivement les comparaisons des champs de pression dans le cas du contact sphère viscoélastique/massif viscoélastique, sphère élastique/massif viscoélastique, sphère rigide/massif viscoélastique.
Une bonne corrélation entre le code semi-analytique et le code éléments finis commercial (Abaqus v6.12) peut être observée.

Comparaison du temps CPU

Dans le cas viscoélastique, en plus de la discrétisation spatiale, il y a une discrétisation temporelle. Ce qui fait augmenter considérablement le temps CPU, notamment dans le cas du modèle EF 3D.

TABLE 4.1 – Comparaison du temps CPU, cas de la viscoélasticité homogène

Méthode	EF 3D	Code SA
Temps CPU	$76500s(\sim 21h15min)$	$672s(\sim 12min)$

Le gain en terme de temps de calcul est de l'ordre de 1 : 113. Cette comparaison est un peu exagérée, puisque la comparaison pourrait être réalisée entre le modèle semi-analytique et un modèle EF axisymétrique. En effet ici nous sommes en présence de matériaux homogènes, l'utilisation d'un modèle éléments finis 3D n'est pas justifiée. Cependant l'on a voulu garder le même modèle EF pour la partie viscoélastique homogène et la partie viscoélastique hétérogène, afin d'avoir une comparaison robuste.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

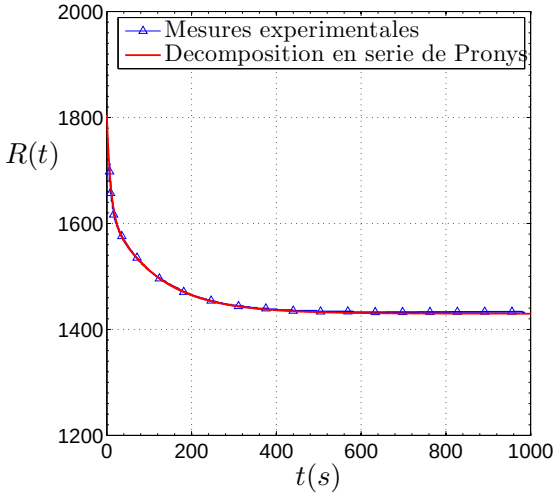


FIGURE 4.8 – Fonction de relaxation du PMMA.

4.3.4 Quelques résultats

Cette partie s'intéressera à un matériau réel : le PMMA(PolyMethylMethAcrylate). Différents types de chargement seront étudiés (triangulaire, sinusoïdal). Des comparaisons seront faites avec des résultats expérimentaux issus de la littérature [RAM 04]. Dans la simulation du test d'indentation, des propriétés viscoélastiques linéaires seront considérées pour le PMMA et la plasticité ne sera guère prise en compte. Les propriétés matériaux retenues pour le PMMA seront celles obtenues par [RAM 04] lors des essais de relaxation. Cette fonction de relaxation sera approximée en utilisant une décomposition en séries de Prony à l'ordre 2. La fonction de relaxation $R(t)$ qui corrèle bien (Fig.4.8) avec les propriétés matériaux du PMMA issues des essais menés par [RAM 04] est donnée par l'équation ci-dessous :

$$R_{PMMA}(t) = 1429.71 + 184.62\exp(-\frac{t}{8.93}) + 191.06\exp(-\frac{t}{117.96}) \tag{4.23}$$

On peut donc en déduire la fonction de fluage en utilisant la relation 4.5 :

$$J_{PMMA}(t) = 7.0 \times 10^{-4} - 6.1710^{-5} \times \exp(-0.1t) - 8.3810^{-5} \times \exp(-7.47 \times 10^{-3}t) \tag{4.24}$$

Le coefficient de Poisson du PMMA sera supposé fixe et égal à $\nu = 0.38$

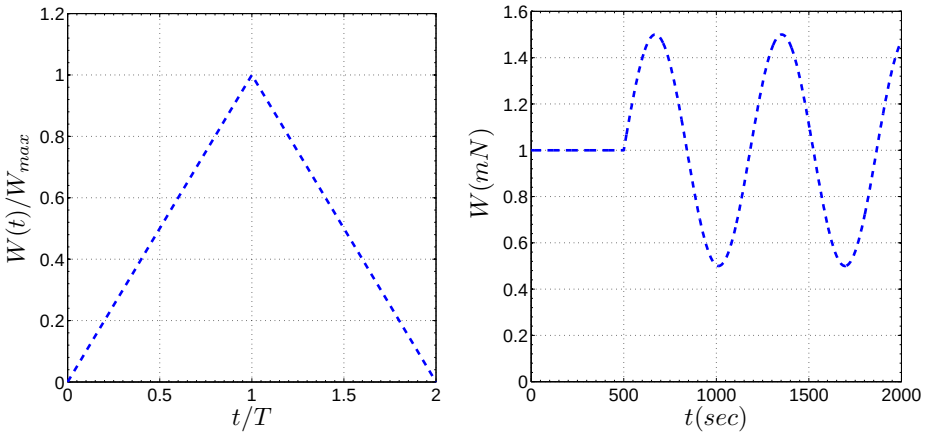
On se propose de résoudre un problème d'indentation entre une sphère en acier de rayon $R = 3.5mm$ et le PMMA supposé viscoélastique linéaire sans prise en compte de la plasticité. Deux types de chargement seront considérés, un chargement/déchargement de type triangulaire, et un cas où la charge normale oscille sinusoïdalement autour d'une valeur nominale.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

– Cas d'un chargement triangulaire
L'indenteur sera soumis à chargement triangulaire (Fig.4.9a) entre $[0, 2T]$ de la forme :

$$W(t) = \lambda t H(t) - 2\lambda(t - T)H(t - T) \tag{4.25}$$

avec $\lambda = W_{max}/T$; $W_{max} = 100N$.



(a) (b)

FIGURE 4.9 – Chargement de forme triangulaire (a) Chargement de forme sinusoïdale (b).

Des simulations seront faites pour diverses valeurs de vitesses de chargement λ.
Pour $\lambda = 10$ N/s une comparaison sera faite avec les résultats d'essais réalisés par [RAM 04]. La figure 4.10 présente donc une comparaison entre la courbe d'indentation obtenue par le modèle et celle obtenue lors des essais menés par [RAM 04]. Malgré les diverses hypothèses (viscoélasticité linéaire, pas de prise en compte d'une éventuelle plasticité), on remarque néanmoins qu'il y a une relative bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et l'approche générique développée pour la résolution des contacts viscoélastiques.
D'autres simulations sont ensuite réalisées pour diverses vitesses de chargement. La distribution de pression (Fig.4.11) ainsi que des courbes d'indentation (Fig.4.12) seront présentées. Une diminution du maximum de pression ainsi qu'une augmentation de la largeur de contact sont observées au fur et à mesure que la vitesse de chargement λ diminue. Pour de fortes vitesses de chargement ($\lambda = 100N/s$), le matériau viscoélastique présente une forte résistance au contact. La courbe charge/décharge coïncide presque (Fig.4.12). L'effet d'hystérésis (aire sous la courbe) induite par l'aspect viscoélastique diminue avec la vitesse de chargement. Ceci s'explique par le fait que dans le cas de grandes vitesses de chargement, la partie élastique de la déformation du

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

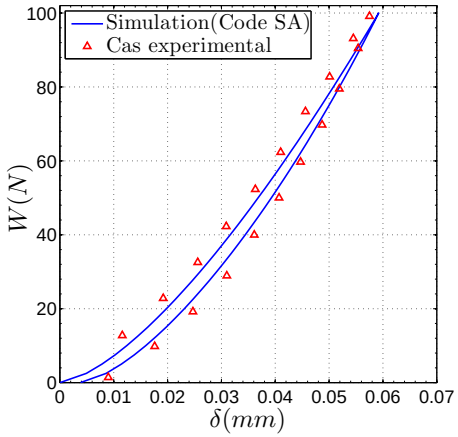


FIGURE 4.10 – Comparaison de la courbe d'indentation obtenue avec le code semi-analytique (code SA) et les résultats expérimentaux ([RAM 04]).

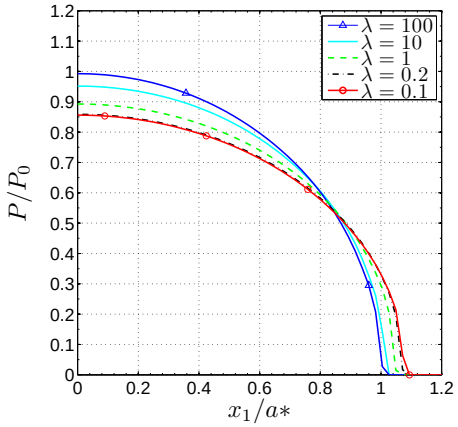


FIGURE 4.11 – Distribution adimensionnée des champs de pression pour différentes valeurs de vitesse de chargement $\lambda(enN/s)$.

matériau viscoélastique est prépondérante. Dans le cas des vitesses de chargement relativement faibles ($\lambda = 0.2N/s, 0.1N/s$), l'effet visqueux est beaucoup plus prépondérant. Il faut toutefois noter que pour des très faibles vitesses de chargements ($\lambda \leq 0.005N/s$) la réponse du matériau redeviendra élastique, avec un module de Young plus faible.

– Cas d'un chargement sinusoïdal :
  Le modèle peut prendre en compte une grande variété de chargement. Un chargement sinusoïdal sera considéré dans cette partie. Le chargement normal s'écrira sous la forme :

$$W(t) = W_{lim} + \Delta W \sin(\omega t) \tag{4.26}$$

  La courbe d'indentation (Fig.4.13) sera tracée pour deux pulsations différentes. L'énergie dissipée est donc fonction de la fréquence de sollicitation. Une étude

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

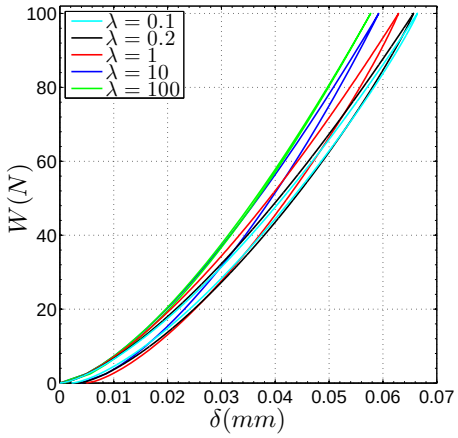


FIGURE 4.12 – Courbe d'indentation pour différentes valeurs de vitesse de chargement $\lambda(enN/s)$.

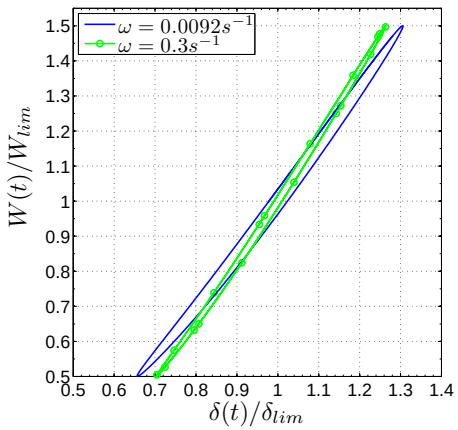


FIGURE 4.13 – Courbe d'indentation dans le cas d'un chargement sinusoïdal pour différentes pulsations d'excitation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

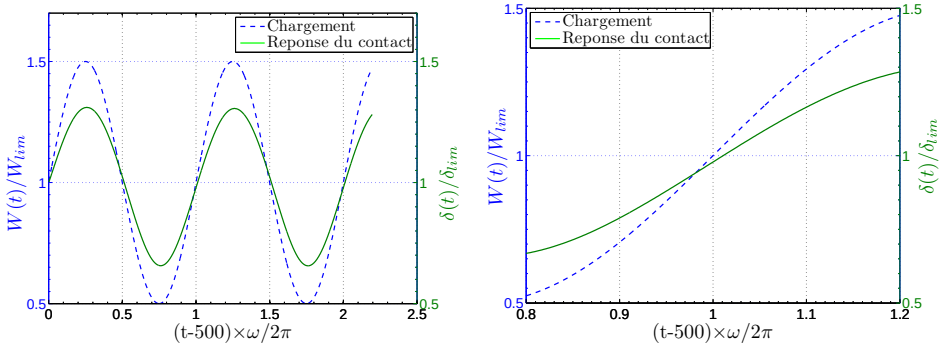


FIGURE 4.14 – Chargement d'indentation et réponse du contact en fonction du temps (a) pour la fréquence $\omega = 0.0092s^{-1}$ (b) zoom pour mettre en évidence le déphasage.

plus approfondie montre qu'il existe une pulsation de résonance pour laquelle cette énergie est maximale.
L'analyse des champs de pression (Fig.4.14) montre qu'il y a un déphasage entre le chargement et la réponse du contact. L'effet visqueux entraîne donc un retard de la réponse du contact sur le chargement.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.4 Contact normal sur massif viscoélastique hétérogène

Seul l'un des corps viscoélastiques en contact, contient des hétérogénéités. Le but de cette section est de présenter le formalisme développé durant la thèse pour prendre en compte les massifs viscoélastiques hétérogènes (4.15). Ce cas se rapproche énormément de l'application composite. La grande variété des matériaux composites utilisée dans l'industrie est constituée d'une matrice viscoélastique (linéaire ou non-linéaire) et des fibres la plupart du temps élastiques isotropes ou anisotropes.
Les équations du contact peuvent se réécrire sous la forme :

$$W(t) = \int_{\Gamma_c(t)} p(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \tag{4.27}$$

La déformée des deux massifs ($M1$ et $M2$) en contact s'écrit :

$$h(x_1, x_2, t) = h_i(x_1, x_2) + \delta + u_3(x_1, x_2, t) + \mathbf{u_3^*}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t}) \tag{4.28}$$

Le terme $\mathbf{u_3^*}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t})$ s'ajoute. Ce terme représente l'eigendisplacement induit par la présence d'hétérogénéités.

Les conditions de contact :

$$\text{contact} : h(x_1, x_2, t) = 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) > 0 \text{ à l'intérieur } \Gamma_c(t)$$

$$\text{séparation} : h(x_1, x_2, t) > 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) = 0 \text{ à l'extérieur } \Gamma_c(t) \tag{4.29}$$

La difficulté du problème de prise en compte des massifs viscoélastiques **hétérogènes**, réside dans le calcul du champ de déplacement $u_3^*(x_1, x_2, t)$. Le calcul du champ $u_3^*(x_1, x_2, t)$ s'inspire de la méthodologie présentée au chapitre 3, et constitue la clé de résolution du problème de contact hétérogène.

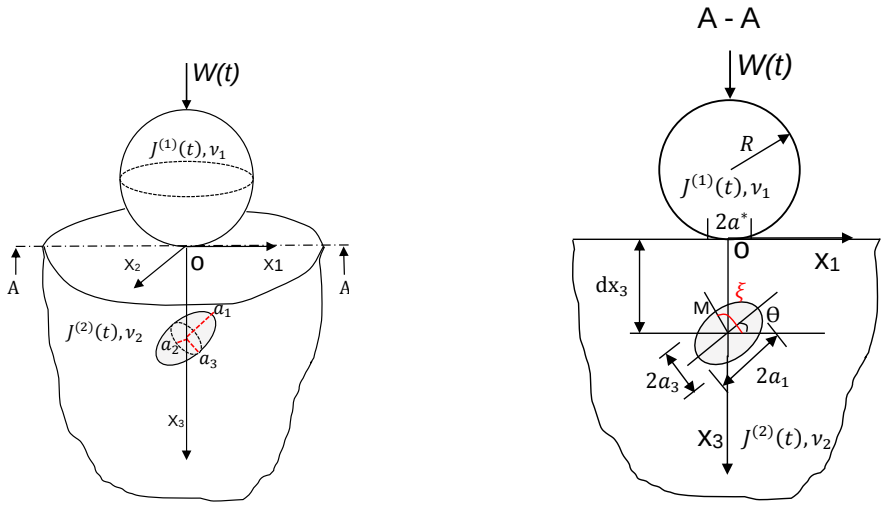
4.4.1 Equations du modèle

La prise en compte des hétérogénéités (voir Fig. 4.15) dans le problème de contact se fait en modifiant l'équation de base du problème (Eq.4.29). Le terme $\mathbf{u_3^*}$ qui est ajouté représente l'eigendisplacement induit par la présence d'une ou plusieurs hétérogénéités. L'algorithme de la figure 4.16 sera utilisé afin de coupler la résolution du problème de contact et la prise en compte des hétérogénéités en sous-couche.

Les paragraphes qui suivent détailleront les différentes étapes du calcul du champ d'eigendisplacement $\mathbf{u_3^*}$.

Le calcul du champ de déformation ε^* en espace infini sera présenté dans un premier temps. Le calcul de l'eigenstrain ε^* en espace semi-infini est présenté ensuite. Enfin la méthodologie du calcul de l'eigendisplacement u_3^* est exposée. La démarche proposée peut prendre en compte des hétérogénéités élastiques isotropes aussi bien qu'anisotropes noyées dans une matrice viscoélastique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.15 – Illustration du contact normal dans le cas d'une sphère et d'un massif viscoélastique hétérogène. (a) Vue 3D et (b) Coupe dans le plan $X_2 = 0$ 2D.

Le formalisme d'Eshelby sera appliqué à chaque pas de la discrétisation temporelle afin de prendre en compte l'effet des hétérogénéités. $C^M_{ijkl}(\alpha\Delta t)$ représentera le tenseur d'élasticité de la matrice viscoélastique à l'instant $t = \alpha \times \Delta t$.

Solution en espace infini

Considérons une matrice infinie D avec des propriétés élastiques $C^M_{ijkl}(\alpha\Delta t)$ contenant une inclusion de forme ellipsoïdale, cubique, cylindrique, $\ldots\Omega$ de tenseur élastique C^I_{ijkl}. L'ensemble est soumis à un champ uniforme ε^0 à l'infini. La présence du domaine inclusionnaire modifie grandement les champs de déformations. En appliquant le formalisme d'Eshelby à un instant $t = \alpha\Delta t$, on peut remplacer l'hétérogénéité ellipsoïdale par une inclusion ayant les mêmes propriétés élastiques que la matrice à l'instant $t = \alpha\Delta t$ mais sujette à une déformation imaginaire libre de contrainte, eigenstrain ε^* donnée par :

$$C^I_{ijkl}(\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl}) = C^M_{ijkl}(\alpha\Delta t) \times (\varepsilon^0_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon^*_{kl}) \quad \text{dans } \Omega \tag{4.30}$$

L'équation 4.30 est une équation nécessaire au problème d'équivalence entre inclusion et hétérogénéité. La relation entre la déformation compatible ε_{ij} et l'eigenstrain ε^*_{ij} est donnée par :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}(\alpha\Delta t) \times \varepsilon^*_{kl} \tag{4.31}$$

où $S_{ijkl}(\alpha\Delta t)$ est le tenseur d'Eshelby à l'instant $t = \alpha\Delta t$. Le tenseur d'Eshelby classique ne dépend que du coefficient de Poisson de la matrice. Compte tenu du fait que dans nos approches, le coefficient de Poisson est supposé constant, on montre

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

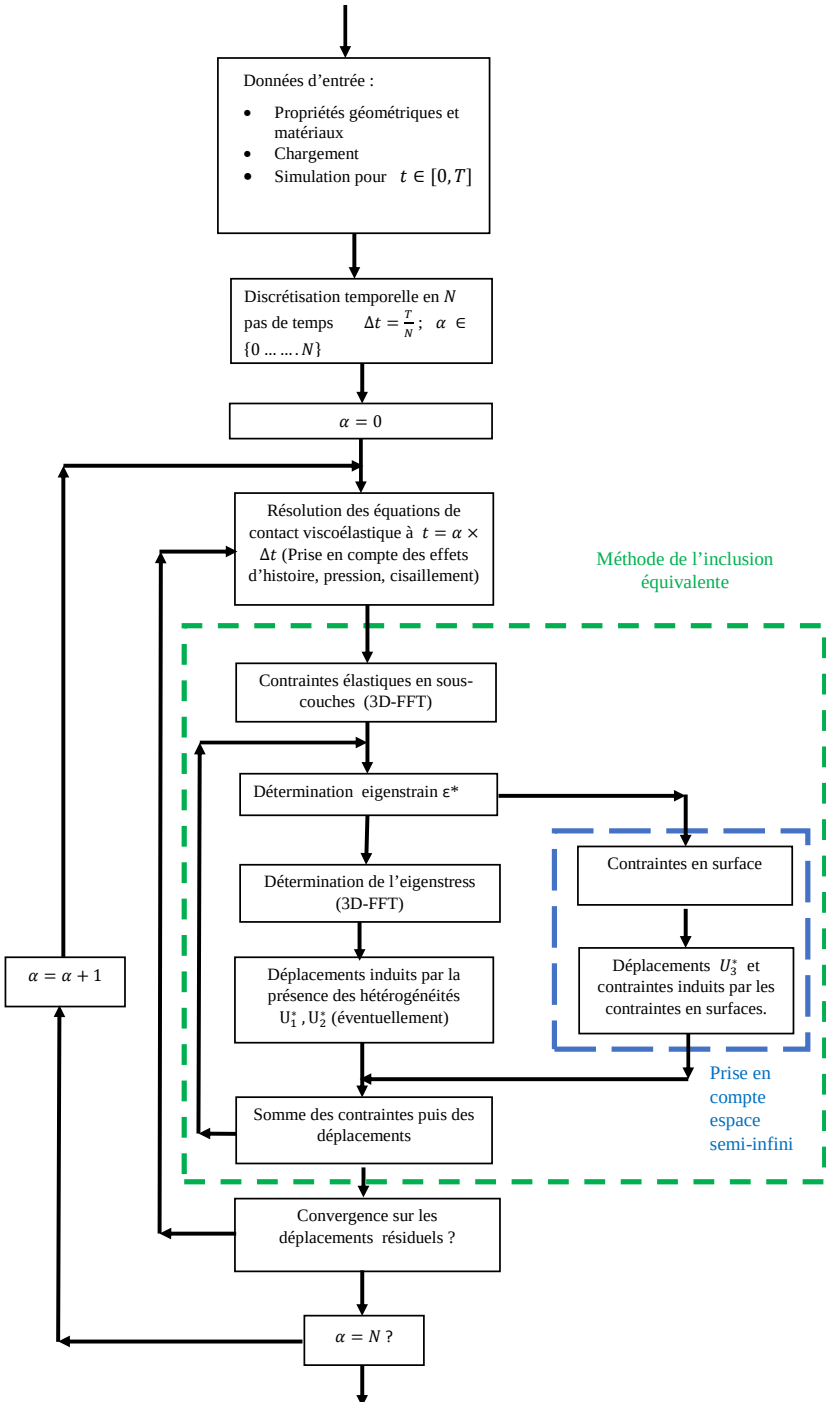


FIGURE 4.16 – Algorithme du couplage entre le problème viscoélastique et le problème hétérogène.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

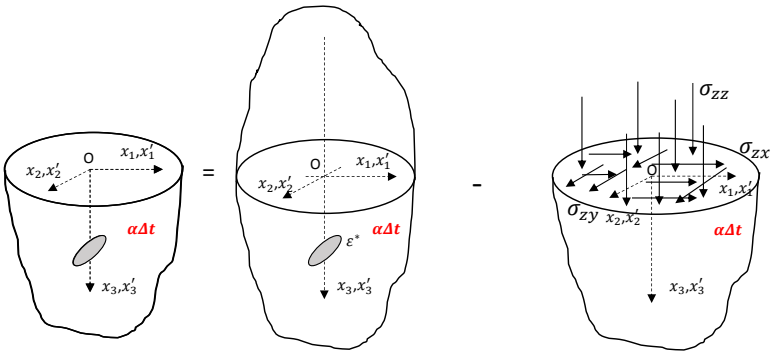


FIGURE 4.17 – Nouvelle méthode de décomposition, cas d'un massif viscoélastique.

que :

$$S_{ijkl}(\alpha\Delta t) = S_{ijkl}(t=0) = S_{ijkl} \tag{4.32}$$

La substitution de l'équation 4.31 dans l'équation 4.30 conduit à :

$$\Delta C_{ijkl}(\alpha\Delta t)S_{klmn}\varepsilon^*_{mn} + C^M_{ijkl}(\alpha\Delta t)\varepsilon^*_{kl} = -\Delta C_{ijkl}(\alpha\Delta t)\varepsilon^0_{kl} \tag{4.33}$$

où :

$$\Delta C_{ijkl}(\alpha\Delta t) = C^I_{ijkl} - C^M_{ijkl}(\alpha\Delta t)$$

Solution en espace semi − infini

Comme cela a été mentionné au chapitre précédent, les solutions d'Eshelby classiques ne sont valables qu'en espace infini. Le problème de contact par contre fait intervenir des espaces semi-infinis. On peut s'inspirer de la décomposition proposée par Chiu [CHI 78a] (cf. chapitre 3) ou de la nouvelle méthode de décomposition présentée à la section 3.8 du chapitre précédent. La nouveauté ici, réside dans le fait que la méthode de décomposition sera utilisée à chaque pas de temps de la discrétisation temporelle $\alpha\Delta t$ (Fig.4.17). Pour une simulation avec plusieurs pas de temps, le gain en terme de temps de calcul devient très vite conséquent lorsque la nouvelle méthode de décomposition est utilisée.

Le champ de contrainte en tout point de l'espace maillé par $n_1 \times n_2 \times n_3$ parallélépipèdes est donné par :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3,\alpha\Delta t) = &\sum_{x_3^I=0}^{n_3-1}\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} B_{ijkl}(x_1-x_1^I,x_2-x_2^I,x_3-x_3^I,\alpha\Delta t)\varepsilon^*_{kl}(x_1^I,x_2^I,x_3^I,\alpha\Delta t)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M_{ij}(x_1-x_1^I,x_2-x_2^I,x_3,\alpha\Delta t)\sigma^n(x_1^I,x_2^I,0,\alpha\Delta t)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M^{zx}_{ij}(x_1-x_1^I,x_2-x_2^I,x_3,\alpha\Delta t)\sigma_{zx}(x_1^I,x_2^I,0,\alpha\Delta t)\\ &-\sum_{x_2^I=0}^{n_2-1}\sum_{x_1^I=0}^{n_1-1} M^{zy}_{ij}(x_1-x_1^I,x_2-x_2^I,x_3,\alpha\Delta t)\sigma_{zy}(x_1^I,x_2^I,0,\alpha\Delta t)\end{aligned} \tag{4.34}$$

où B_{ijkl} sont les coefficients d'influence reliant l'eigenstrain au point (x_1^I, x_2^I, x_3^I), centre de l'inclusion dans l'espace infini, à la contrainte σ_{ij} au point (x_1, x_2, x_3). M_{ij} représente les coefficients d'influence reliant la contrainte normale σ^n à l'intérieur du rectangle centré en $(x_1^I, x_2^I, 0)$ à la contrainte σ_{ij} au point (x_1, x_2, x_3).

$$B_{ijkl}(x,\alpha\Delta t) = C^M_{ijmn}(\alpha\Delta t)D_{mnkl}(x,\alpha\Delta t) \quad \forall \quad \mathrm{x} \quad \in \quad \text{D-}\Omega \tag{4.35}$$

$$B_{ijkl}(x,\alpha\Delta t) = C^M_{ijmn}(\alpha\Delta t)(D_{mnkl}(x,\alpha\Delta t) - I_{mnkl}) \quad \forall \quad \mathrm{x} \quad \in \quad \Omega \tag{4.36}$$

où $I_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta jk + \delta_{ik}\delta jl\right)$ est le tenseur identité d'ordre 4. Le tenseur d'ordre 2 M_{ij} (voir Annexe A) et le tenseur d'ordre 4 D_{ijkl} dépendent uniquement du coefficient de Poisson qui est supposé constant. Ainsi :

$$D_{ijkl}(x,\alpha\Delta t) = D_{ijkl}(x) \tag{4.37}$$

et

$$M_{ij}(x,\alpha\Delta t) = M_{ij}(x) \tag{4.38}$$

$$M^{zx}_{ij}(x,\alpha\Delta t) = M^{zx}_{ij}(x) \tag{4.39}$$

$$M^{zy}_{ij}(x,\alpha\Delta t) = M^{zy}_{ij}(x) \tag{4.40}$$

L'expression du tenseur D_{ijkl} donnée dans [MUR 87b] est rappelée ici.

$$D_{ijkl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}[\Psi_{,ijkl} - 2\nu\delta_{kl}\phi_{,ij} - (1-\nu)(\delta_{kl}\phi_{il} + \delta_{ki}\phi_{,jl} + \delta_{jl}\phi_{,ik} + \delta_{li}\phi_{,jk})] \tag{4.41}$$

$\Psi(x)$ et $\phi(x)$ sont les potentiels harmoniques et bi-harmoniques (cf. chapitre 3) :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Pour une inclusion unique centrée en (x_1^I, x_2^I, x_3^I) dans l'espace semi-infini, la contrainte normale σ^n au point $(x_1', x_2', 0)$ est obtenue par :

$$\begin{aligned}\sigma^n(x_1', x_2', 0, \alpha\Delta t) = &- B_{33kl}(x_1' - x_1^I, x_2' - x_2^I, -x_3^I, \alpha\Delta t)\varepsilon_{kl}^*(x_1^I, x_2^I, x_3^I, \alpha\Delta t) \\ &- B_{33kl}(x_1' - x_1^I, x_2' - x_2^I, x_3^I, \alpha\Delta t)\varepsilon_{skl}^*(x_1^I, x_2^I, -x_3^I, \alpha\Delta t)\end{aligned} \tag{4.42}$$

Déplacement normal de la surface viscoélastique

Les déplacements normaux u_3^* dus aux hétérogénéités sont uniquement générés par le champ de pression σ^n permettant de créer une surface libre (massif semi-infini). A la différence du cas élastique, ces déplacements s'écrivent sous la forme :

$$u_3^*(x_1, x_2, \alpha\Delta t) = \sum_{x_2'=0}^{n_2-1}\sum_{x_1'=0}^{n_1-1} \overline{K}_3^p(x_1 - x_1', x_2 - x_2') \times$$

$$\sum_{k=0}^{\alpha}(1-\nu_2)J^{(2)}[(\alpha-k)\Delta t] \times [\sigma^n(x_1', x_2', k\Delta t) - \sigma^n(x_1', x_2', (k-1)\Delta t)] \tag{4.43}$$

4.4.2 Validation.

Pour la validation, on considérera un contact normal entre une sphère rigide et un matériau viscoélastique contenant une ou plusieurs hétérogénéités. Le diamètre de la sphère rigide est $D = 62mm$ et une force normale $W(t) = 10000N \times H(t)$ est appliquée. a^* et P_0 sont respectivement le rayon de contact et la pression maximum de Hertz correspondant au cas homogène élastique quand le module de cisaillement instantané est utilisé $R(0) = \mu$.

Propriétés matériaux

Les propriétés matériaux retenues pour le massif viscoélastique sont identiques à celles utilisées dans la partie 4.3.3 : un modèle de Maxwell avec un seul temps de relaxation avec $R(t) = \mu \exp(-t/\tau)$.

Pour des raisons de simplicité, les mêmes propriétés viscoélastiques seront utilisées dans la prochaine section « Résultats ».

Validation par la méthode des éléments finis

Afin de valider notre modèle, une comparaison avec la méthode des éléments finis est réalisée en utilisant la version v6.11-2 du code EF commercial Abaqus. Le contact entre une sphère rigide et un massif viscoélastique hétérogène contenant une hétérogénéité ellipsoïdale élastique isotrope est simulé. Une technique de partition particulière a été utilisée pour réaliser l'interface hétérogénéité/matrice. Les propriétés géométriques ainsi que la position du centre de l'inclusion sont normalisées par la demi-largeur de contact a^* (Tableau 4.2).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Table 4.2 – Propriétés géométriques de l'inclusion (Cas de référence)

Géométrie	**Position**
$a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$	$dx_3 = 0.4a^*$

- Maillage du modèle EF.
  La qualité du maillage influe grandement sur la qualité de la solution du problème de contact. En utilisant les propriétés de symétrie du modèle, le maillage peut se limiter à la moitié du domaine. Le modèle comprend en tout 39671 éléments hexaédriques linéaires de taille $0.002a^*$, 39671 éléments quadratiques tétraédriques et enfin 110009 éléments tétraédriques linéaires.
- Maillage du modèle semi-analytique. Contrairement au modèle EF, ici le maillage est limité au volume d'intérêt $[-2a^*, 2a^*] \times [-2a^*, 2a^*] \times [0, 2a^*]$. Il n'est pas nécessaire de mailler les conditions limites. Le maillage comprend $100 \times 100 \times 100$ cubes de même dimension $0.02a^* \times 0.02a^* \times 0.02a^*$.

La simulation correspond au cas d'un contact entre une sphère rigide et un massif viscoélastique hétérogène contenant une hétérogénéité élastique isotrope inclinée. Les propriétés matériaux de l'hétérogénéité sont données dans le tableau 4.3.

Table 4.3 – Propriétés matériaux de l'inclusion

Region	**Propriétés matériaux**	
Hétérogénéité	$E^I = 840$ GPa,	$\nu^I = 0.3$

Les résultats de la comparaison entre le modèle semi-analytique et le modèle EF sont présentés à la figure 4.18. La comparaison se limitera à la distribution de pression pour respectivement $t = 0$, $t = \tau/2$ et $t = \tau$. La corrélation obtenue entre les deux méthodes est très bonne.

Comparaison du temps CPU

Dans le cas viscoélastique hétérogène, le gain en temps de calcul est de l'ordre 1 : 21. Comparé au cas homogène, il s'agit d'un cas où le gain est considérablement réduit. Cependant il faut remarquer que pour des hétérogénéités 10 fois plus dures que la matrice, la convergence du modèle EF est mise à rude épreuve et le temps de calcul peut littéralement exploser.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

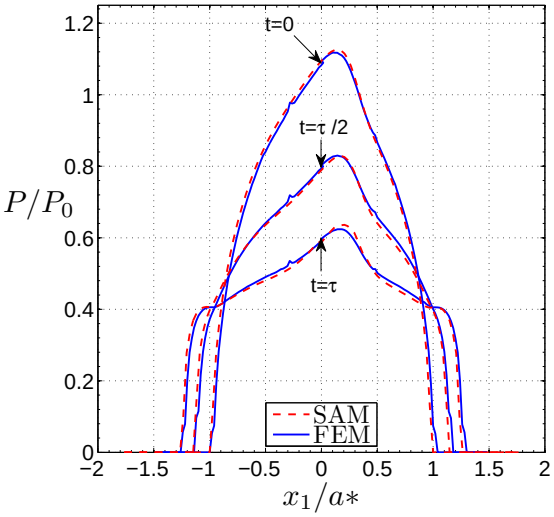


FIGURE 4.18 – Comparaison de la valeur adimensionnée de la distribution des champs de pression (SAM) et le modèle éléments finis (FEM) : Cas d'un massif viscoélastique hétérogène ($dx_3/a^* = 0.4$, $a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $\theta = 30°$)

TABLE 4.4 – Comparaison du temps CPU, cas de la viscoélasticité hétérogène

Méthode	EF(3D)	Code SA(nouvelle méthode)
Temps CPU	$89100s(\sim 23h25min)$	$4210s(\sim 1h10min)$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.4.3 Résultats

Les résultats présentés ici se limiteront à un cas académique. Le contact entre une sphère rigide et un massif viscoélastique hétérogène est considéré. Les propriétés viscoélastiques retenues pour le massif sont identiques à celles utilisées dans la partie validation. Le but de cette partie sera d'étudier l'effet de la présence d'une ou plusieurs hétérogénéités sur la solution du problème de contact viscoélastique. La simulation dans le domaine temporel varie entre $[0, \tau]$ et est divisée en 40 pas de temps. $a^*(t)$ représente le rayon de contact instantané à un instant t donné correspondant au cas homogène élastique c'est-à-dire sans hétérogénéité. Compte tenu du fait que le matériau s'assouplit avec le temps, il est évident que $a^*(t)$ augmentera avec le temps t. On peut introduire une variable γ qui est le ratio entre le module de Young de l'inclusion élastique et le module de Young instantané du massif viscoélastique (Eq. 4.44).

$$E^M(0) = 2 \times (1 + \nu^M) \times R(0) \tag{4.44}$$

Le ratio γ peut s'écrire sous la forme :

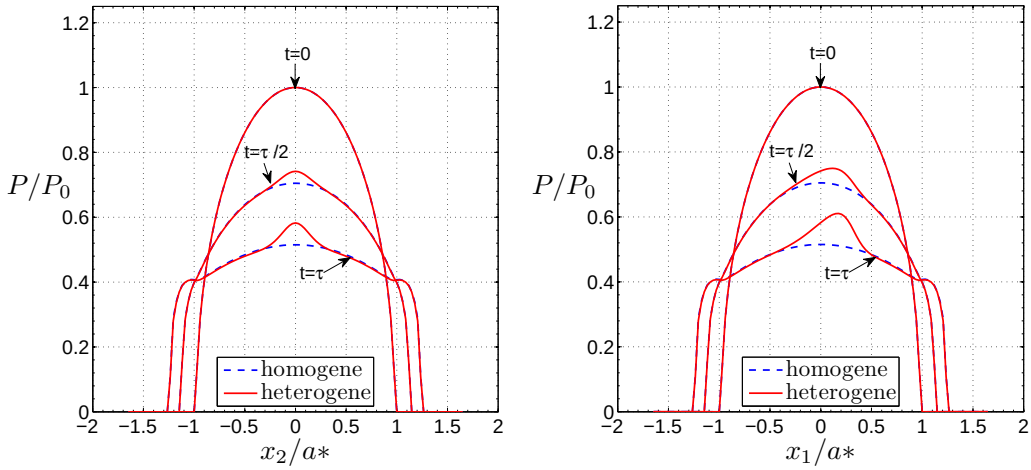
$$\gamma = E^I / E^M(0) \tag{4.45}$$

où E^I est le module de Young de l'hétérogénéité élastique isotrope.

4.4.3.1 Hétérogénéité isotrope

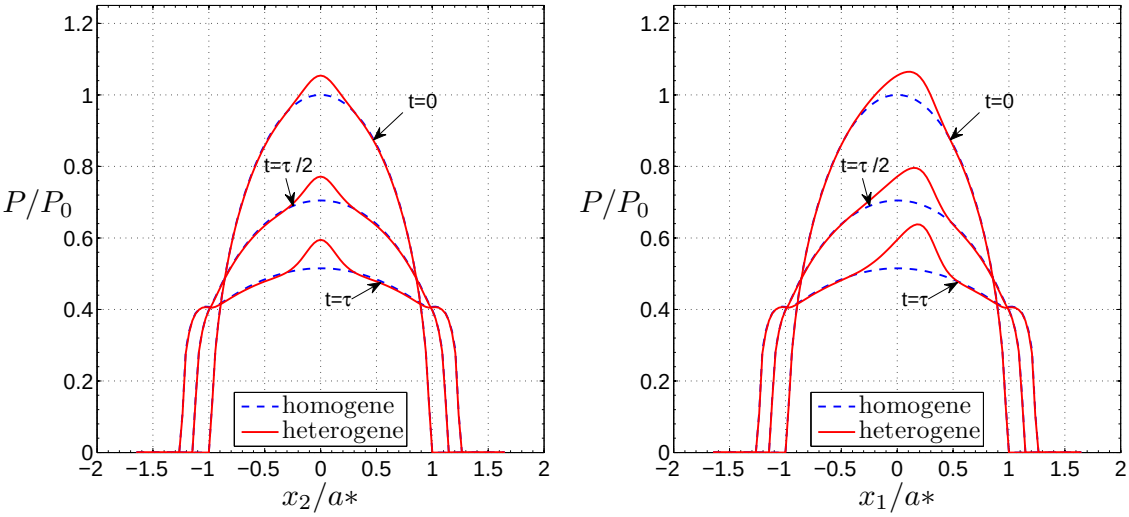
La distribution de pression est présentée aux figures 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22 pour différentes valeurs du module $\gamma = 1$, 2, 0.5 et 0.2. Une hétérogénéité inclinée de demi-axes $a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$ située à la profondeur $dx_3 = 0.4a^*$ avec un angle $\theta = 30°$ est considérée. Les résultats sont tracés dans le plan $x_2 = 0$. Dans le premier cas (Fig. 4.19) c'est-à-dire pour $\gamma = 1$ on observe que pour $t = 0$, l'hétérogénéité n'a aucun effet sur la distribution de la pression de contact (ce qui est normal). Cependant à $t = \tau/2$ et $t = \tau$ la surpression due à l'hétérogénéité passe de 6% à 18% comparé au cas homogène viscoélastique. Ce résultat reste cohérent compte tenu du fait que la matrice est de moins en moins raide alors que l'hétérogénéité quant à elle demeure élastique. Le cas d'une hétérogénéité dure ($\gamma = 2$) est maintenant considéré Fig. 4.20. Ce cas entraine une surpression de 6%, 14% et 24% respectivement pour $t = 0$, $t = \tau/2$, $t = \tau$. Pour $\gamma = 0.5$ (Fig. 4.21), on remarque que la surpression induite par l'hétérogénéité élastique est négligeable pour $t = \tau/2$. Alors qu'à $t = 0$ une réduction du maximum du champ de pression de 9.5% est obtenue ainsi qu'une augmentation du maximum du champ de pression de 10.5% pour $t = \tau$. Pour $\gamma = 0.2$ (Fig. 4.22) le champ de pression a diminué de 17.15% à $t = 0$ et de 12% pour $t = \tau/2$. Pour $t = \tau$, l'effet de l'hétérogénéité élastique sur la distribution de pression est négligeable.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.19 – Distribution de pression pour $\gamma = E^I/E^M(0) = 1$, $\nu^I = 0.3$ ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b)$x_2 = 0$.



(a) (b)

FIGURE 4.20 – Distribution de pression pour $\gamma = E^I/E^M(0) = 2$, $\nu^I = 0.3$ ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b) $x_2 = 0$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

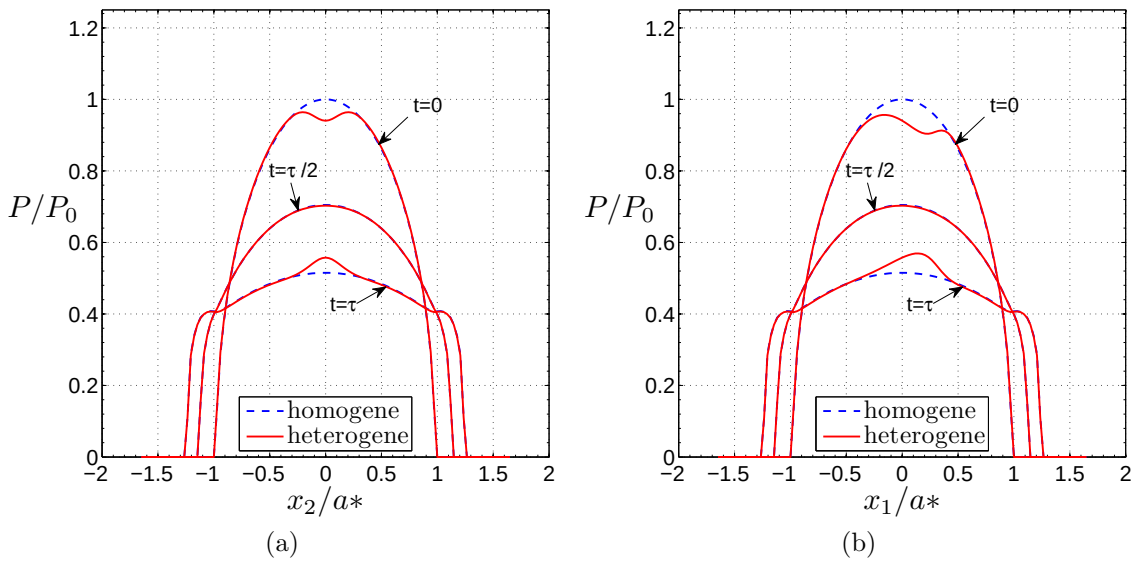


FIGURE 4.21 – Distribution de pression pour $\gamma = E^I/E^M(0) = 0.5$, $\nu^I = 0.3$ ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b) $x_2 = 0$.

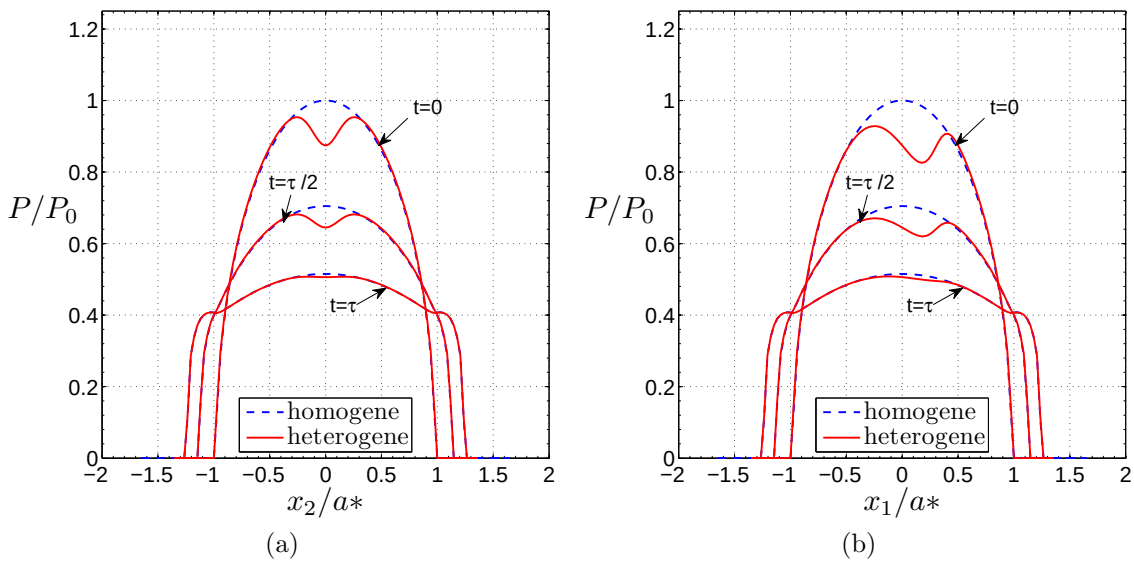


FIGURE 4.22 – Distribution de pression pour $\gamma = E^I/E^M(0) = 0.2$, $\nu^I = 0.3$($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b) $x_2 = 0$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.4.3.2 Deux hétérogénéités sphériques

Le but de cette partie est de montrer la capacité du modèle à prendre en compte plusieurs hétérogénéités ainsi que leurs interactions mutuelles. Le cas de deux hétérogénéités sphériques S_1 et S_2 centrées respectivement en ($dx_1 = -0.3a^*$, $dx_2 = 0$, $dx_3 = 0.4a^*$) et ($dx_1 = 0.3a^*$, $dx_2 = 0$, $dx_3 = 0.4a^*$) est présenté. Les deux hétérogénéités ont le même rayon $r = 0.14a^*$. Les propriétés élastiques sont telles que $\gamma = 0.6$ pour S_1 et 0.8 pour S_2. Les deux hétérogénéités ont le même coefficient de Poisson. L'algorithme de gradient conjugué (CGM) introduit par [ZHO 11] et présenté au chapitre 3 a été utilisé pour prendre en compte l'interaction mutuelle entre les deux hétérogénéités.

Les résultats (Fig.4.23) montrent que pour $t = 0$, les deux inclusions se comportent comme des hétérogénéités souples. A $t = \tau/2$, l'hétérogénéité S_1 se comporte comme une hétérogénéité souple mais S_2 comme une hétérogénéité dure.

A $t = \tau$, les deux hétérogénéités se comportent comme des hétérogénéités dures.

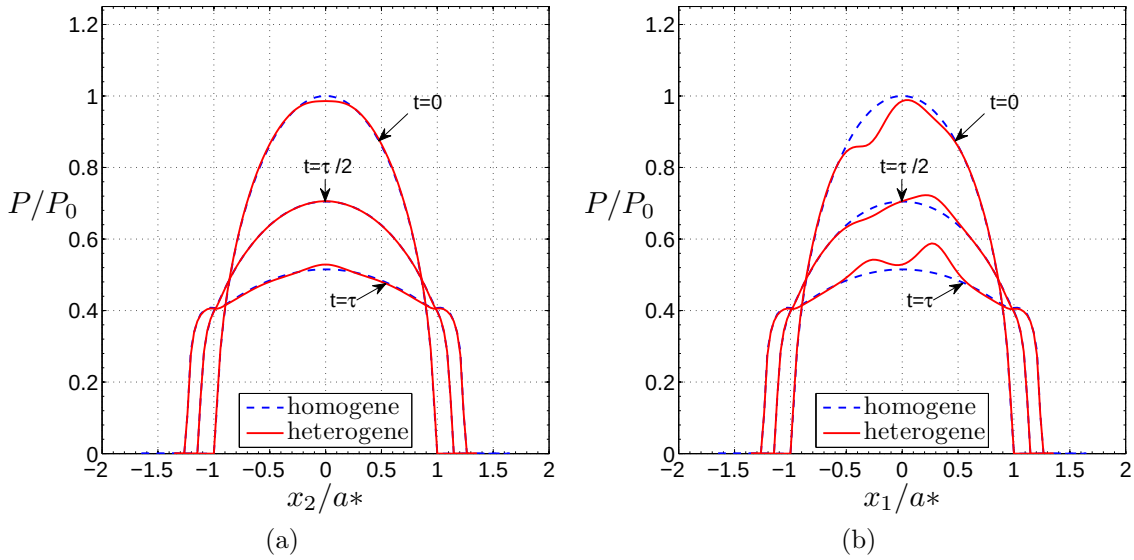


FIGURE 4.23 – Distribution de pression pour le massif viscoélastique contenant deux hétérogénéités sphériques avec $\gamma_1 = E^I/E^M(0) = 0.6$ et $\gamma_2 = E^I/E^M(0) = 0.8$ (avec $\nu^I = \nu^M = 0.3$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b) $x_2 = 0$.

4.4.3.3 Hétérogénéité anisotrope

Le cas anisotrope mérite également d'être présenté (voir Fig.4.24). Le matériau industriel est constitué des fibres élastiques anisotropes dans une matrice viscoélastique. On se limitera ici au cas d'un matériau orthotrope. Mais le formalisme traite également le cas d'anisotropie totale avec 21 coefficients élastiques. Les 9 coefficients dans le cas orthotrope sont donnés par : $E_1^I = 210$ GPa, $E_2^I = 623$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

GPa, $E_3^I = 50$ GPa, $\mu_{12}^I = 83$ GPa, $\mu_{13}^I = 400$ GPa, $\mu_{23}^I = 20$ GPa, $\nu_{12}^I = 0.15$, $\nu_{13}^I = 0.26$, $\nu_{23}^I = 0.40$.

L'orientation du repère d'orthotropie par rapport au repère de contact est donnée par la convention ZXZ des angles d'Euler : $\varphi = 45°$, $\theta = 60°$, $\psi = 30°$. L'on peut remarquer qu'à l'instant initial, l'hétérogénéité se comporte comme une hétérogénéité dure dans le plan $x_2 = 0$ et comme une hétérogénéité souple dans le plan $x_1 = 0$. Ceci est principalement dû aux propriétés anisotropes et à l'orientation de l'inclusion. Dans le plan $x_2 = 0$ la surpression due à l'hétérogénéité varie de 2.1% (à $t = 0$) à 49% (à $t = \tau$).

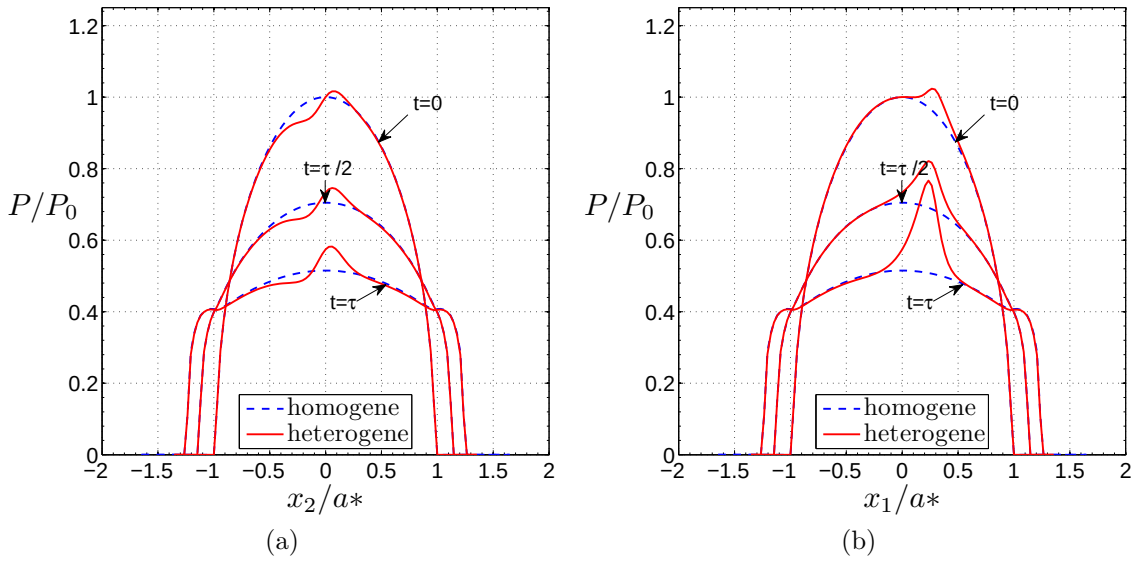


FIGURE 4.24 – Distribution de pression dans le cas d'une hétérogénéité ellipsoïdale anisotrope ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$, $E_1^I = 210$ GPa, $E_2^I = 623$ GPa, $E_3^I = 50$ GPa, $\mu_{12}^I = 83$ GPa, $\mu_{13}^I = 400$ GPa, $\mu_{23}^I = 20$ GPa, $\nu_{12}^I = 0.15$, $\nu_{13}^I = 0.26$, $\nu_{23}^I = 0.40$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b) $x_2 = 0$.

4.4.3.4 Influence de la position de l'hétérogénéité

Considérons à présent une hétérogénéité rigide située à la profondeur $dx_3 = 0.7a^*$. Il a été montré dans le chapitre 3 et dans [KOU 14b] que l'effet de l'hétérogénéité sur le champ de pression peut être négligé dès lors que le rapport $dx_3/a* >= 0.7$. Mais dans notre cas (Fig. 4.25), cette remarque n'est plus valide car l'impact qu'a l'hétérogénéité sur le champ de pression augmente avec le temps. Dans le cas présenté ici, la surpression induite par l'inhomogénéité croit de 2.8% (à $t = 0$) à 6.4% (pour $t = \tau$). L'effet de l'hétérogénéité sur le problème de contact viscoélastique hétérogène augmente donc avec le temps.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

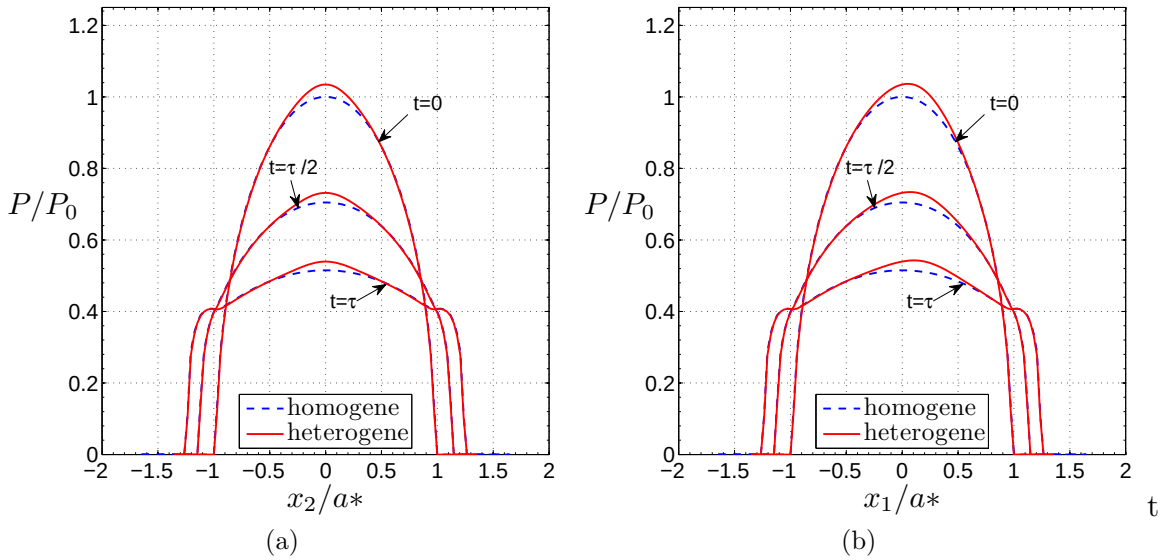


FIGURE 4.25 – Distribution de pression dans le cas d'une hétérogénéité ellipsoidale dure située à $dx_3/a^* = 0.7$ ($a_1 = 0.4a^*$, $a_2 = a_3 = 0.1a^*$, $\theta = 30°$,$\gamma = E^I/E^M(0) \to \infty$, $\nu^I = 0.3$) ; (a) $x_1 = 0$ et (b) $x_2 = 0$.

4.4.3.5 Contrainte en sous-couche

Outre les champs de pression, les méthodes semi-analytiques sont également capables de capter finement les champs de contraintes en sous-couche. Quand on cherche à développer des lois d'endommagement, la connaissance des champs de contraintes en sous-couche est indispensable. Ceci est l'un des avantages de cette méthode par rapport à d'autres modèles existants dans la littérature (modèles quasi-analytiques, BEM,...). L'analyse sera limitée ici dans un premier temps aux champs de contraintes normales puis tangentielles à l'interface hétérogénéité/matrice. La distribution de la contrainte de von Mises dans le massif viscoélastique sera étudiée ensuite. Une hétérogénéité sphérique de rayon $r = 0.15a^*$ et $\gamma = 0.8$ centrée en $(dx_1 = 0, dx_2 = 0, dx_3/a^* = 0.4)$ est considérée.

- Contrainte normale et cisaillement à l'interface hétérogénéité/matrice.
  Dans cette partie, on propose d'étudier la contrainte normale et le cisaillement à l'interface hétérogénéité/matrice. Pour mieux comprendre cette partie il faudrait se référer d'abord à la figure 4.15.
  Quand le point M décrit l'interface inclusion/matrice (Fig. 4.15b), l'angle ξ varie de 0° à 360°. Les figures 4.26a et 4.26b montrent la contrainte normale et le cisaillement à l'interface inclusion/matrice.
  Dans notre cas on remarque que l'hétérogénéité est sollicitée principalement en compression. Les valeurs des pics correspondent respectivement à $0.83P_0$, $0.74P_0$, $0.66P_0$ pour $t = 0$, $\tau/2$ et τ. La valeur absolue de la contrainte de cisaillement à l'interface inclusion/matrice correspond à $0.28P_0$, $0.237P_0$, $0.20P_0$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

pour $t = 0$, $\tau/2$, τ respectivement. Il convient de noter que les maxima locaux du cisaillement ne coïncident pas avec ceux de la contrainte normale.

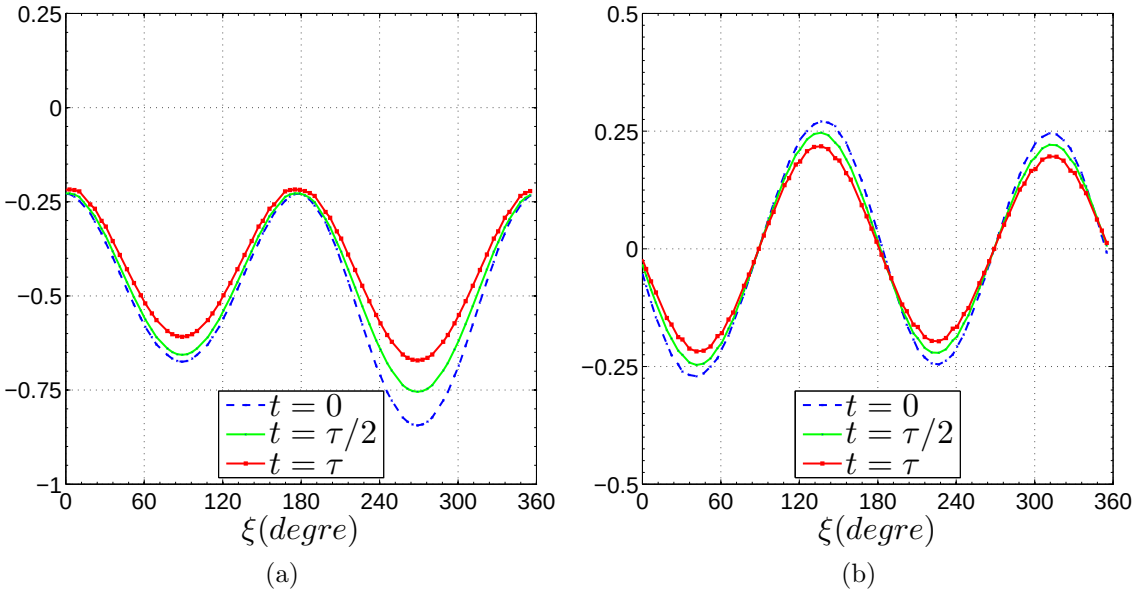
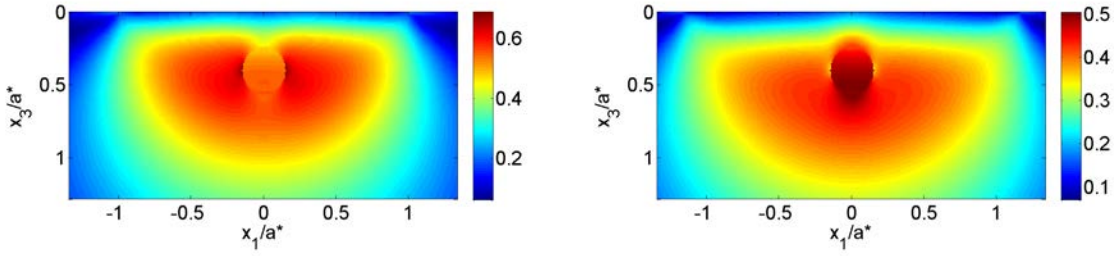


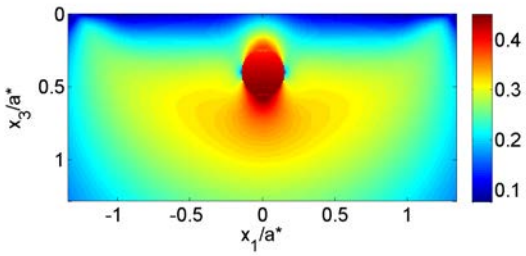
FIGURE 4.26 – σ_n/P_0 et τ/P_0 dans le plan $x_2 = 0$ en présence d'une inclusion sphérique isotrope ($a_1 = a_2 = a_3 = 0.15a^*$, $dx_3/a^* = 0.4$; (a) σ_n/P_0 et (b) τ/P_0.

– Contrainte de von Mises. La contrainte de von Mises est présentée à la figure 4.27. La position de la valeur maximale de la contrainte de von Mises varie en fonction du temps. A $t = 0$, la valeur maximale de la contrainte de von Mises correspond à $0.687P_0$ et est localisée à l'équateur de l'inclusion ($\xi = 0°$ et $\xi = 180°$, voir Fig. 4.15b) de l'interface hétérogénéité/matrice. Quand $t = \tau/2$ puis $t = \tau$ le maximum de la contrainte de von Mises correspond respectivement à $0.502P_0$ et $0.45P_0$; et est situé au pôle sud ($\xi = 270°$, voir Fig. 4.15b) de l'interface inclusion/matrice.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)



(c)

FIGURE 4.27 – Valeur adimensionnée de la contrainte de von Mises (σ_{VM}/P_0) dans le plan $x_2 = 0$ en présence d'une inclusion unique isotrope sphérique ($a_1 = a_2 = a_3 = 0.15a^*$, $dx_3/a^* = 0.4$; (a) $t = 0$, (b) $t = \tau/2$ et (c) $t = \tau$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.5 Bilan partiel

Cette partie s'est intéressée à la résolution du problème d'indentation entre matériaux viscoélastiques homogènes ou hétérogènes. Les hétérogénéités étant élastiques isotropes ou anisotropes.

Dans le cas homogène, le modèle a été validé et des simulations d'indentation ont été réalisées sur le PMMA (PolyMethylMethAcrylate). Les simulations montrent que le contact présente une forte résistance pour de grandes vitesses de chargement λ. Le matériau se comporte quasiment comme un corps élastique. A la fin du chargement d'indentation, les simulations mettent en évidence l'existence d'un déplacement résiduel qui s'efface ensuite avec le temps. Ce dernier est la conséquence d'une dissipation d'énergie liée à l'effet visqueux du matériau. Dans le cas d'un chargement sinusoïdal, un déphasage entre le chargement et la réponse du contact est observé. L'effet visqueux entraîne un retard de la réponse du contact sur le chargement.
L'effet de l'hétérogénéité sur le problème de contact augmente avec le temps dans le cas du massif viscoélastique. Ceci s'explique fondamentalement par le fait que la matrice entourant l'hétérogénéité élastique devient de plus en plus souple avec le temps. Les simulations mettent également en évidence une évolution de la valeur et de la position du maximum de la contrainte de von Mises, qui ne se situe plus à l'équateur mais au pôle sud de l'interface hétérogénéité/matrice. La contrainte normale ainsi que le cisaillement à l'interface hétérogénéité/matrice décroissent également avec le temps. Une validation du modèle a été également réalisée dans le cas hétérogène.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Considérant le problème de roulement, plusieurs configurations peuvent être rencontrées :

1. Cas du **glissement** d'un corps $M1$ de géométrie quelconque sur un corps $M2$ ou inversement. Les corps de géométries quelconques ne peuvent pas tous rouler (exemple : poinçon/plan,...).
2. Cas du **roulement** + **glissement** d'une sphère sur un massif viscoélastique. Il s'agit d'un cas 3D. Avec cette configuration, il est possible de traiter à la fois le **roulement** et le **glissement**.
3. Cas du **roulement** + **glissement** d'un cylindre infini. Il s'agit d'un cas 2D.

Le formalisme qui sera présenté dans cette partie peut prendre en compte les 3 configurations présentées ci-dessus. Cependant, pour des raisons de concisions, l'on s'intéressera uniquement au point 2 c'est à dire au cas de glissement/roulement d'une sphère sur massif viscoélastique. Cette configuration 3D permettra de traiter de manière très concise à la fois le cas du glissement et le cas du roulement.

Un contact sans frottement sera considéré dans les parties 4.6 et 4.7. Soit ω la vitesse angulaire de la sphère dans le cas d'un mouvement de roulement pur (Fig.4.28), et v la vitesse linéaire de glissement dans le cas d'un glissement pur. Remarquons que :

$$v = R \times \omega \tag{4.46}$$

v étant la vitesse de glissement et R le rayon de la sphère. Contrairement aux autres approches existantes dans la littérature, le modèle présenté dans le cadre de cette thèse peut prendre en compte des mouvements de roulement/glissement à vitesse non constante. Une convention sur les repères sera introduite et restera valable tout au long de ce chapitre. $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ correspond au repère du contact à l'instant initial à $t = 0$. Pour $t \neq 0$ le repère courant du contact sera défini par $R(O, X_1, X_2, X_3)$, O étant la projection du centre de la sphère sur la surface de contact. $R(O, X_1, X_2, X_3)$ suit donc le mouvement. Les équations du contact seront résolues dans le repère $R(O, X_1, X_2, X_3)$. L'incrément de déplacement $\Delta\overrightarrow{r}$ de la sphère à chaque pas de temps Δt est de :

$$\Delta\overrightarrow{r} = \Delta t.\overrightarrow{v} \tag{4.47}$$

$\overrightarrow{X_1^0}$, $\overrightarrow{X_2^0}$, $\overrightarrow{X_3^0}$ sont respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes (OX_1^0), (OX_2^0), (OX_3^0).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

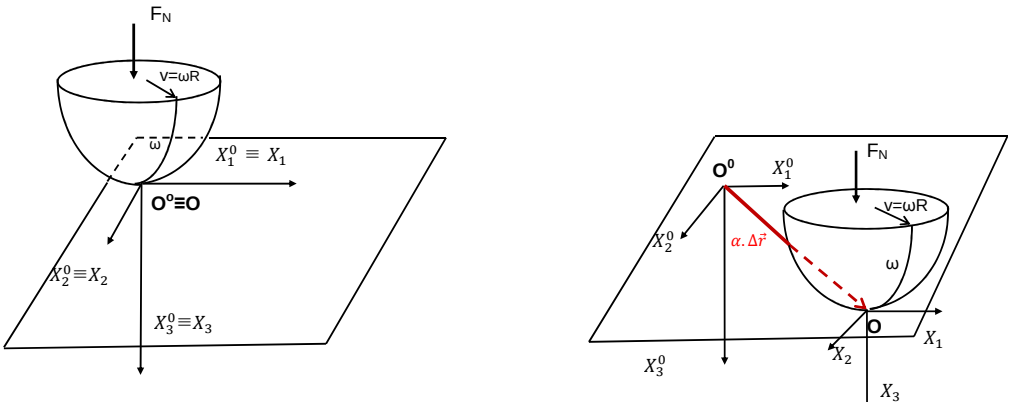


FIGURE 4.28 – Roulement/glissement d'une sphère sur un massif viscoélastique.

4.6 Roulement sur massif homogène

4.6.1 Equations du modèle

4.6.1.1 Contact normal roulant

Les équations du contact viscoélastique dans le cas d'un roulement/glissement peuvent s'écrire sous la forme :

$$W(t) = \int_{\Gamma_c(t)} p(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \tag{4.48}$$

La déformée $h(x_1, x_2, t)$ des deux massifs en contact est définie par :

$$h(x_1, x_2, t) = h_i(x_1, x_2) + \delta(t) + u_3(x_1, x_2, t) \tag{4.49}$$

où $h_i(x_1, x_2)$ représente la géométrie initiale et δ le déplacement de corps rigide.

Dans le cas d'un **roulement pur** le champ de déplacement, $u_3(x_1, x_2, \alpha\Delta t)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, \alpha\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(x_1 - x_1', x_2 - x_2') dx_1' x_2' \times \\ \sum_{k=0}^{\alpha} \left((1-\nu_1) J^{(1)}[(\alpha - k)\Delta t] + (1-\nu_2) J^{(2)}[(\alpha - k)\Delta t]\right) \\ \times [p(x_1'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_1^0}, x_2'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_2^0}, k) - \\ p(x_1'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_1^0}, x_2'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_2^0}, k-1)] \end{aligned} \tag{4.50}$$

Dans le cas d'un **glissement pur**, le champ de déplacement se réécrit sous la forme :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$u_3(x_1, x_2, \alpha\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(x_1 - x_1', x_2 - x_2')dx_1'x_2' \times$$
$$\sum_{k=0}^{\alpha}((1-\nu_1)J^{(1)}[(\alpha-k)\Delta t] \times [p(x_1', x_2', k) - p(x_1', x_2', k-1)]$$
$$+(1-\nu_2)J^{(2)}[(\alpha-k)\Delta t] \times [p(x_1'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_1^0}, x_2'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_2^0}, k) -$$
$$p(x_1'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_1^0}, x_2'^0 - \alpha.\Delta\overrightarrow{r}.\overrightarrow{X_2^0}, k-1)]) \quad (4.51)$$

Dans le cas du contact entre une sphère rigide ou élastique et un massif viscoélastique, et en l'absence de frottement de Coulomb, il n'y a aucune différence entre roulement et glissement. Il sera montré plus tard, dans la partie 4.6.3, que la différence roulement/glissement n'est visible que si les deux corps en contact sont viscoélastiques.

Les conditions de contact :

$$\text{contact} : h(x_1, x_2, t) = 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) > 0 \text{ à l'intérieur } \Gamma_c(t)$$
$$\text{séparation} : h(x_1, x_2, t) > 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) = 0 \text{ à l'extérieur } \Gamma_c(t) \quad (4.52)$$

4.6.1.2 Détermination du coefficient de frottement apparent et du moment résultant

Le coefficient de frottement apparent et le moment résultant représentent deux aspects du même phénomène : l'hystérésis induit par l'effet de la viscosité du matériau. Si on suppose que la sphère roule/glisse suivant l'axe X_1, le coefficient de frottement apparent et le moment résultant s'obtiennent en utilisant les équations 4.53 et 4.54 :

- La force tangentielle induite par le roulement/glissement viscoélastique peut être donnée par :

$$F_V(t) = \int_{\Gamma_c(t)} \frac{\partial u_3(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} p(x_1, x_2, t)dx_1dx_2 \quad (4.53)$$

  où $\Gamma_c(t)$ est l'aire réelle de contact à l'instant t. Le coefficient de frottement apparent peut se déduire de l'équation précédente par la relation $\mu_{app} = \mu_v = F_V/F_N$ (en l'absence du frottement de Coulomb), F_N étant la force normale imposée. La méthode des différences finies sera utilisée pour calculer la dérivée $\partial u_3(x_1, x_2, t)/\partial x_1$, et la méthode des rectangles pour évaluer l'intégrale.
- Dans le cas d'un roulement, un moment résultant s'opposant au mouvement de rotation peut être généré du fait de la viscoélasticité (hystérésis). Ce moment résultant est donné par :

$$M(t) = \int_{\Gamma_c(t)} x_1 p(x_1, x_2, t)dx_1dx_2 \quad (4.54)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La méthode des rectangles peut être utilisée pour évaluer la valeur de l'intégrale $M(t)$. D'un point de vue macroscopique, les variables $M(t)$ et $\mu_{app}(t)$ $/\mu_v(t)$ sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$M(t) = \mu_{app}(t) \times \ F_N \times R \tag{4.55}$$

4.6.2 Validations

Le modèle semi-analytique développé sera validé par deux approches différentes. Dans un premier temps, par une comparaison avec la méthode éléments finis en utilisant le logiciel commercial Abaqus v6.11. Ensuite en utilisant l'approche basée sur les éléments de frontières présentée par [CAR 13].

- Validation en utilisant la méthode éléments finis
  La simulation éléments finis se fera entre $[0, 2\tau]$. Cet intervalle de temps est divisé en 100 pas de temps fixes. Ainsi :

  $$\Delta_{tFEM} = \tau/50 \tag{4.56}$$

  Le calcul a été réalisé en trois « steps ». Le step 1 consiste à faire une translation de la sphère rigide par rapport au centre du contact O d'une distance égale à $-v \times \tau$. Dans le step 2, la charge normale est appliquée de manière instantanée. Le matériau étant considéré comme élastique. Le dernier step, i.e. le step 3 combine à la fois une translation de l'indenteur rigide à chaque incrément de temps d'une distance $\Delta_{XFEM} = v \times \Delta_{tFEM}$ et la résolution du contact viscoélastique.
- Validation en utilisant la méthode basée sur les éléments de frontière [CAR 13]
  Carbone et al. [CAR 13], ont introduit récemment une nouvelle méthode de prédiction du coefficient de frottement apparent dans le cadre du roulement entre une sphère rigide et un matériau viscoélastique. Les résultats obtenus ne sont valides qu'en régime permanent. Le cas transitoire n'étant pas pris en compte. Une revue bibliographique étendue montrait, qu'il s'agissait de l'un des rares travaux qui fournissait des résultats exacts en régime permanent. Le début du mouvement de roulement/glissement (régime transitoire) n'étant pas modélisé.

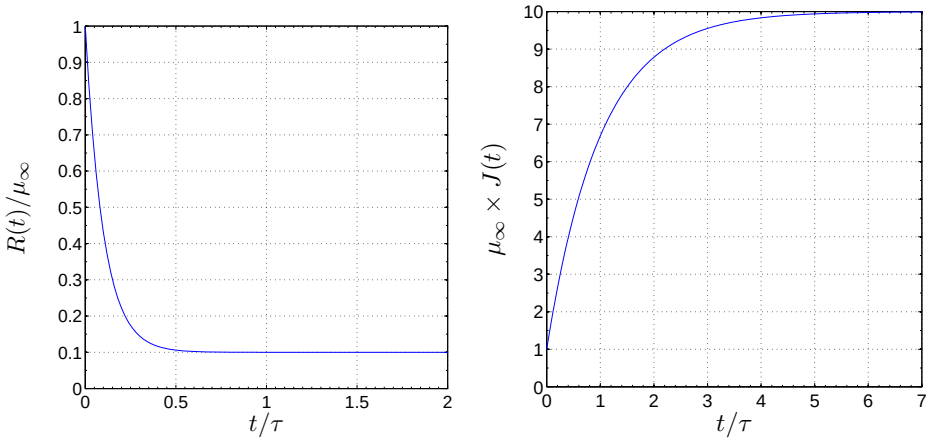
Afin de faciliter la comparaison entre les 3 différentes méthodes, les propriétés matériaux, géométries et chargements considérés seront identiques à ceux utilisés dans [CAR 13]. Ainsi pour la validation, une sphère rigide de rayon $R = 10mm$ roulant à vitesse constante sur un massif viscoélastique sera considérée. Les propriétés matériaux du massif viscoélastique seront données par les équations 4.57 et 4.58. Fonction de fluage :

$$J(t) = \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1}\exp(-\frac{t}{\tau})\right] = \left[\frac{1}{\mu_\infty} + \frac{1}{\mu_1}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))\right] \tag{4.57}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Fonction de relaxation :

$$R(t) = \left[\mu_0 + (\mu_\infty - \mu_0)\exp(-\frac{t}{\frac{\mu_0}{\mu_\infty}\tau})\right] \tag{4.58}$$



(a) (b)

FIGURE 4.29 – Fonction de relaxation (a) et fonction de fluage (b).

où μ est le module de cisaillement (représentant le ressort du modèle de Maxwell) $\mu_\infty = 3.86MPa$, $\mu_\infty/\mu_0 = 10$, et τ le temps de relaxation.

Le module de cisaillement à l'instant initial est $R(0) = \mu_\infty$ et le temps de relaxation $\tau = 0.01s$. Le coefficient de Poisson du matériau viscoélastique sera supposé constant. L'expérience montre en effet que le coefficient de Poisson des matériaux viscoélastiques considérés varie très peu à température ambiante.

La comparaison se concentrera sur la distribution de pression dans un premier temps puis sur le coefficient de frottement apparent ensuite.

- Distribution de pression
  Une comparaison des champs de pression obtenus par les trois méthodes est présentée. Les calculs ont été réalisés dans un premier temps pour un chargement en déplacement imposé (Fig. 4.30), puis ensuite à la figure 4.31 pour un chargement en force imposée. Les résultats sont présentés pour une valeur adimensionnée de la vitesse de glissement $v\tau/a^* = 0.8$. $a*$ et P_0 sont respectivement la demi-largeur du contact et la pression équivalente de Hertz correspondant au cas homogène quand le module de cisaillement instantané $R(0) = \mu_\infty$ est utilisé. Une très bonne corrélation est obtenue entre les trois méthodes.
- Coefficient de frottement apparent :
  Le coefficient de frottement apparent ne fait pas partie des sorties conventionnelles du logiciel commercial Abaqus. On se limitera uniquement à une comparaison entre le code semi-analytique et l'approche des éléments de frontières

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

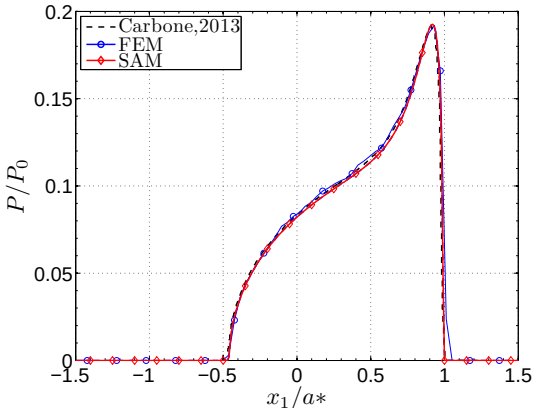


FIGURE 4.30 – Comparaison de la valeur adimensionnée de la distribution de pression entre la méthode semi-analytique (SAM), la méthode des éléments finis (FEM), et la méthode des éléments de frontière (BEM) (voir [CAR 13] pour BEM), solution obtenue en régime permanent pour un chargement en déplacement imposé de $\delta = 0.1mm$.

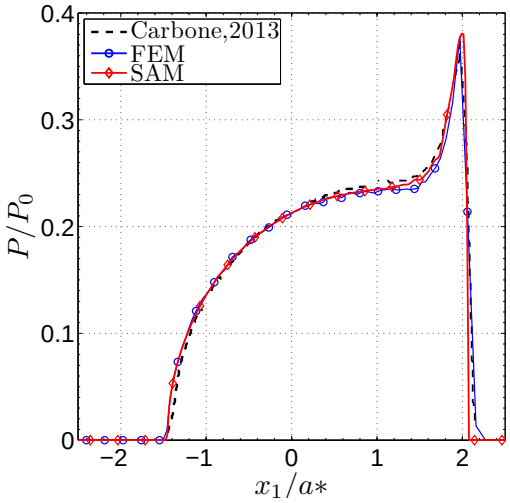


FIGURE 4.31 – Comparaison de la valeur adimensionnée de la distribution de pression entre la méthode semi-analytique (SAM), la méthode des éléments finis (FEM), et la méthode des éléments de frontière (BEM) (voir [CAR 13] pour BEM), solution obtenue en régime permanent pour un chargement en force imposée de $F_N = 0.15N$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

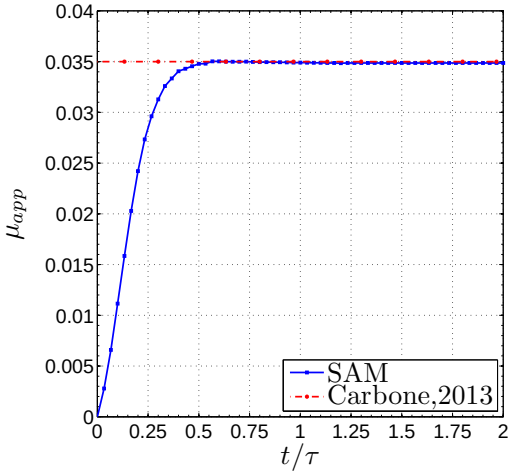


FIGURE 4.32 – Comparaison du coefficient de frottement apparent entre la méthode semi-analytique (SAM), la méthode des éléments finis (FEM), et la méthode des éléments de frontière (BEM) (voir [CAR 13]) pour un chargement en force imposée de $F_N = 0.15N$ avec une valeur adimensionnée de la vitesse $v\tau/a^* = 0.6$.

de [CAR 13]. Les résultats de cette comparaison sont présentés à la figure 4.32 pour une valeur adimensionnée de la vitesse de glissement de $v\tau/a* = 0.6$. Il est quand même important de mentionner qu'ici le régime permanent est atteint pour $t > \tau/2$. La méthode semi-analytique se présente alors comme une méthode de détermination instantanée du coefficient de frottement apparent.

4.6.3 Résultats

4.6.3.1 Cas sphère rigide/massif viscoélastique

Dans ce cas de figure, il n'y a aucune différence entre glissement et roulement, seule compte la vitesse de translation du centre de la sphère.

1. Chargement à vitesse constante
   Il s'agit du cas le plus répandu dans la littérature. La vitesse de roulement/glissement est supposée constante. Le déplacement de corps rigide suivant l'axe de glissement/roulement X_1 sera une rampe (cf. Fig. 4.33).

   L'effet de la nature du chargement (normal) sur la réponse transitoire du contact roulant/glissant sera étudié.

   Chargement en déplacement normal imposé : Un chargement en déplacement normal imposé est fixé à $\delta = 0.1mm$. Les simulations seront faites pour trois valeurs différentes de la vitesse adimensionnée $v\tau/a*$. Le cas correspondant à $t = 0$ n'est pas présenté, car ce cas correspond à la solution classique de Hertz. Les figures 4.34 et 4.35 présentent respectivement la distribution de pression, le coefficient de frottement apparent et le moment résultant pour différentes valeurs de t. Le régime permanent est ici atteint pour $t = \tau/2$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

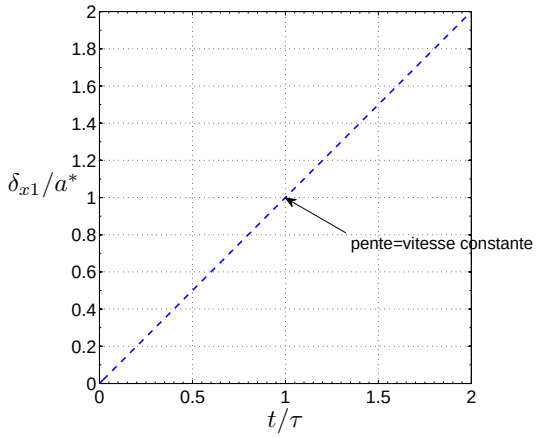


FIGURE 4.33 – Roulement/glissement à vitesse constante, ici $v\tau/a^* = 1.0$.

Le coefficient de frottement apparent atteint 0.045 pour $v\tau/a* = 1.2$. La figure 4.36 présente la déformée de la surface viscoélastique induite par le roulement de la sphère rigide. L'effet de la viscoélasticité est clairement visible à l'arrière du contact dès que le mouvement commence, ce qui produit une dissymétrie du champ de pression et des déplacements normaux de la surface viscoélastique [KOU 15].

Chargement en force imposée : Une force normale $F_N = 1.48N$ est appliquée. Les figures 4.37 et 4.38 présentent respectivement la distribution de pression, le moment résultant et le coefficient de frottement apparent à différents pas de temps. La distribution de pression est très différente, comparée à celle obtenue dans le cas d'un chargement en déplacement imposé. Il convient de remarquer que le régime permanent met plus de temps à s'établir. Ainsi le régime permanent est atteint dans le cas du chargement en force imposée pour $t = 4\tau$.

Cette différence s'explique en remontant à la figure 4.29, figure qui présente les propriétés viscoélastiques du massif semi- infini. L'analyse de cette figure montre que la fonction de relaxation se stabilise pour $t = \tau/2$, alors que la fonction de fluage se stabilise pour $t = 4\tau$. Pour un chargement en déplacement imposé, l'on est en présence d'un chargement de type relaxation, alors que pour un chargement en force imposée il s'agit plutôt du fluage [KOU 15].

En résumé, dans le cas d'un matériau homogène, le temps nécessaire pour l'établissement du régime permanent dépend des propriétés viscoélastiques du matériau, mais aussi et surtout de la nature du chargement considéré (déplacement imposé /force imposée).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

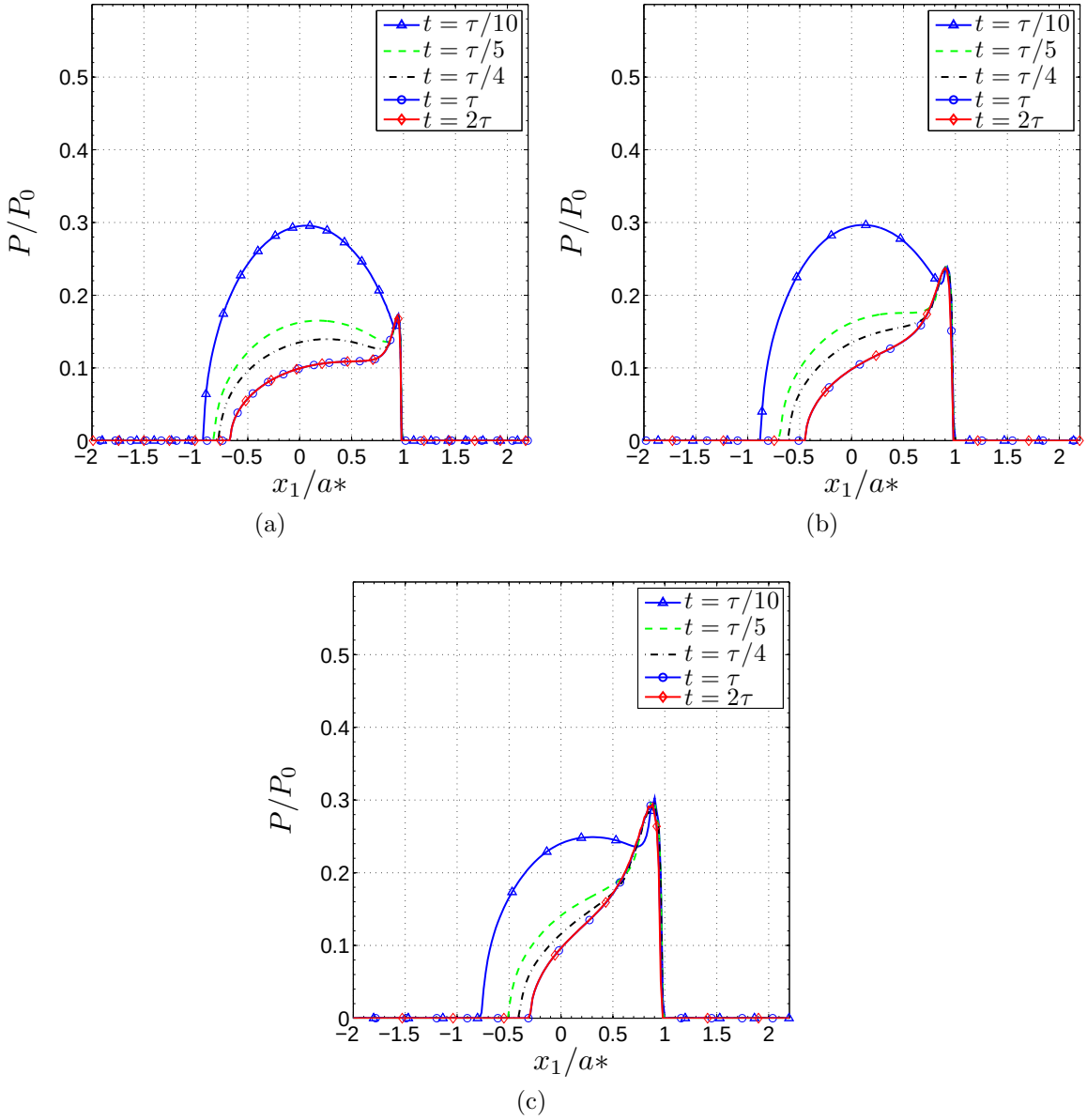


FIGURE 4.34 – Distribution adimensionnée de pression pour un massif viscoélastique homogène pour différents pas de temps et différentes valeurs adimensionnées de la vitesse $v\tau/a^*$ dans le cas d'un chargement en déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$. (a) $v\tau/a^* = 0.4$, (b) $v\tau/a^* = 0.8$, et (c) $v\tau/a^* = 1.2$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

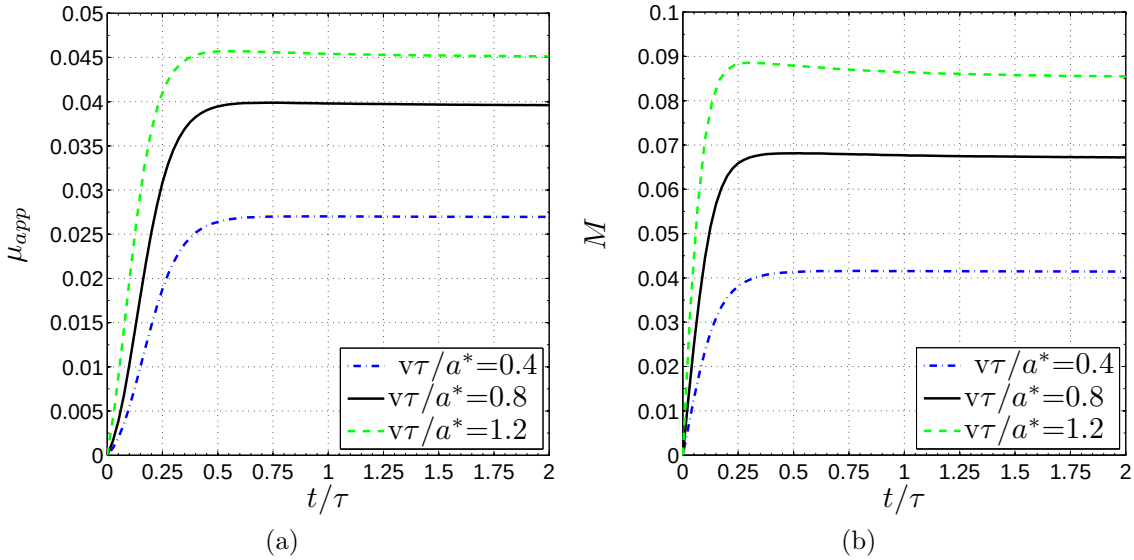


FIGURE 4.35 – Coefficient de frottement apparent (a) et moment résultant (b) en fonction du temps dans le cas d'un chargement en déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$.

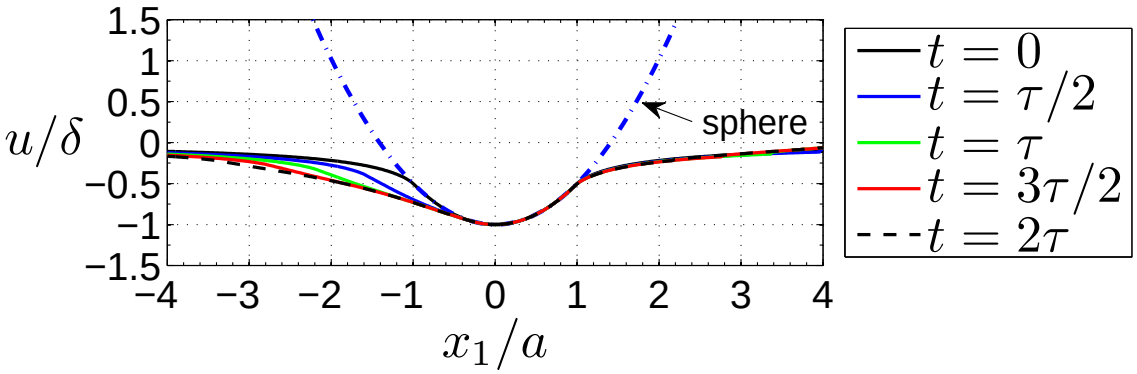


FIGURE 4.36 – Déformation de la surface viscoélastique pour différents pas de temps dans le cas d'un chargement en déplacement imposé de $\delta = 0.1mm$, pour une vitesse $v\tau/a^* = 1.2$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

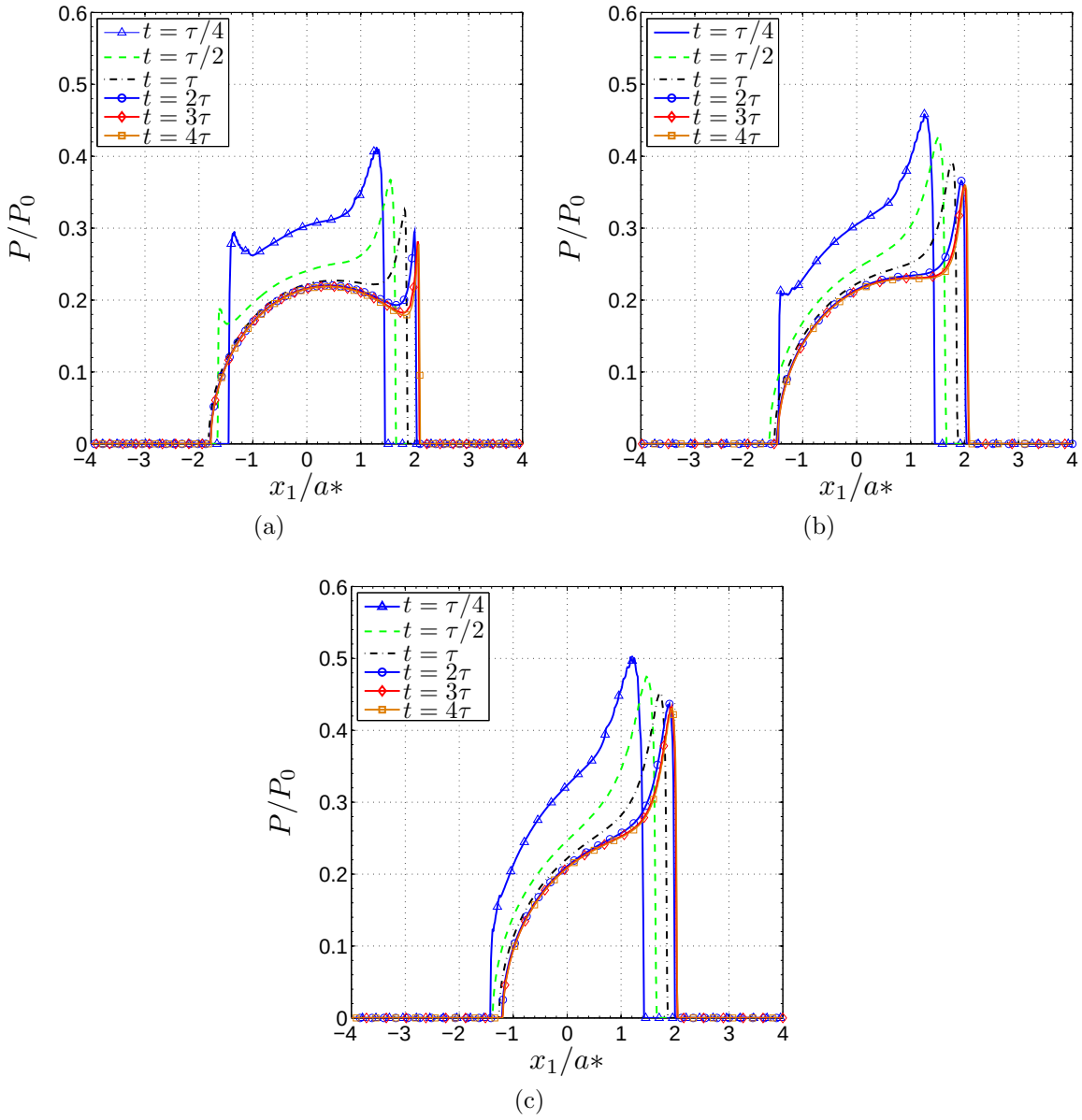
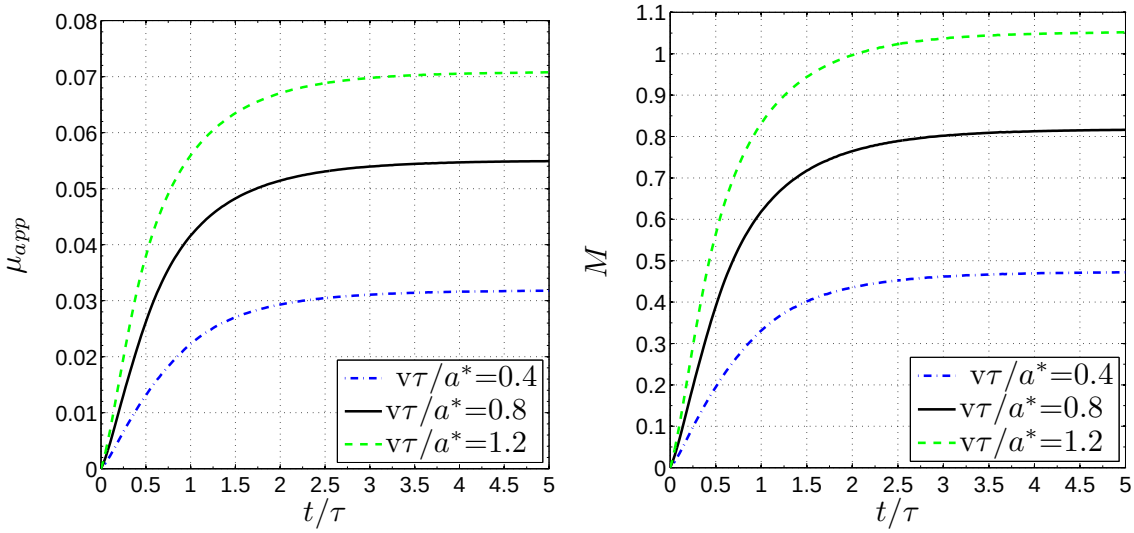


FIGURE 4.37 – Distribution adimensionnée de pression pour un massif viscoélastique homogène pour différents pas de temps et différentes valeurs adimensionnées de la vitesse $v\tau/a^*$ dans le cas d'un chargement en force normale imposée de $F_N = 1.48N$. (a) $v\tau/a^* = 0.4$, (b) $v\tau/a^* = 0.8$, et (c) $v\tau/a^* = 1.2$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.38 – Coefficient de frottement apparent (a) et le moment résultant (b) en fonction du temps dans le cas d'un chargement en force normale imposée de $F_N = 1.48N$.

2. Chargement à accélération constante

   Au lieu de considérer un mouvement à vitesse constante, dans cette partie, une accélération constante sera plutôt supposée.

   Le déplacement de corps rigide suivant X_1 sera une parabole (Fig.4.39a).

$$\delta_{x1} = K \times t^2 \tag{4.59}$$

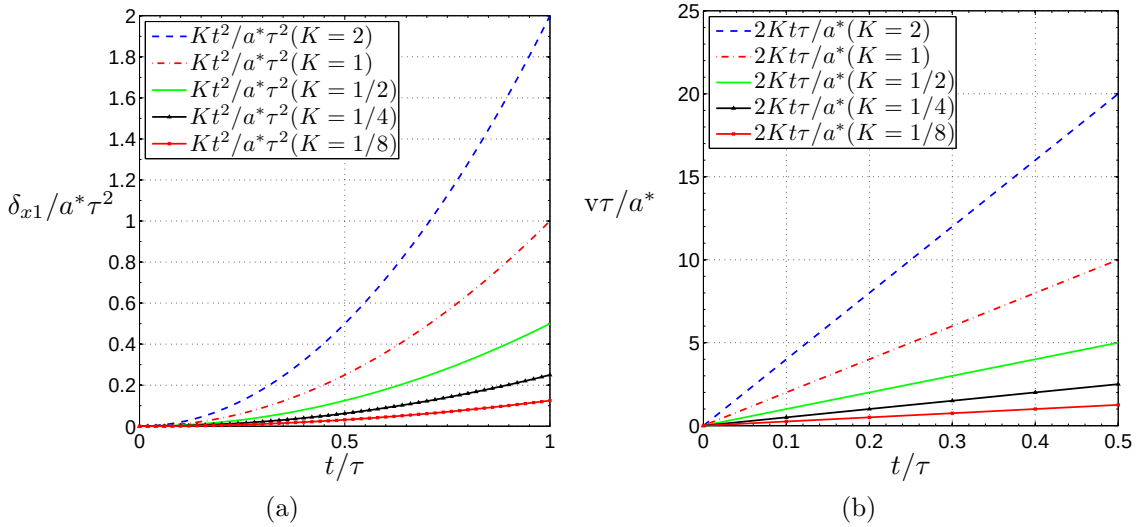
   et la vitesse sera une rampe (Fig.4.39b) de la forme :

$$v = 2 \times K \times t \tag{4.60}$$

   K = accélération/2 (mm/s/s)

   La position et la valeur du pic du coefficient de frottement est fonction de l'accélération (Fig.4.40). Cette méthode est intéressante pour essayer d'estimer la vitesse linéaire qui produit le frottement apparent maximal. Si K est très petit la solution obtenue tend vers la solution en régime permanent. Les courbes tendent donc vers une valeur asymptotique. Au lieu de faire plusieurs simulations ou plusieurs essais pour différentes valeurs de vitesses, on peut faire une seule simulation avec une très faible valeur de K permettant de couvrir toute la gamme de vitesses utiles [CAR 13].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.39 – (a) Déplacement de corps rigide suivant X_1 (b) vitesse de glissement suivant X_1 dans le cas d'un roulement/glissement à accélération constante.

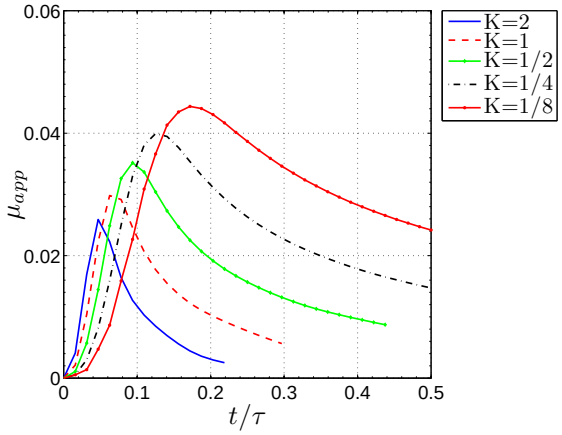


FIGURE 4.40 – Coefficient de frottement pour différentes valeurs d'accélération (constantes) dans le cas d'un chargement en déplacement imposé $\delta = 0.1mm$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

3. Chargement cyclique

   Des chargements cycliques seront considérés (Fig.4.41). Le coefficient de frottement de Coulomb ne sera pas pris en compte. L'on se limitera uniquement à l'étude du coefficient de frottement apparent induit par la viscosité du matériau, parfois appelé frottement visqueux. La vitesse, le déplacement maximal et la fréquence de sollicitation sont reliés par la relation suivante :

$$v_{max} = \frac{\delta_{max}}{4 \times \lambda} \tag{4.61}$$

   L'étude de l'effet de la fréquence λ peut se faire à déplacement tangentiel constant δ_{max} ou à vitesse constante v_{max}.

   Ici l'étude sera faite à vitesse constante afin d'avoir la même valeur limite pour le coefficient de frottement apparent. La figure 4.42 montre le coefficient de frottement pour différentes fréquences de glissement pour un chargement en force normale imposée $F_N = 1.48N$. Pour $\lambda = 1$, la solution en régime permanent est atteinte quasiment après le premier cycle. Ensuite plus la fréquence augmente, plus il faut de cycles pour atteindre la solution en régime permanent.

   Dans le cas d'un chargement en déplacement imposé (Fig.4.43), il faut encore moins de cycles (à fréquence identique) pour tendre vers la solution en régime permanent. Ces constatations restent cohérentes avec les résultats présentés plus haut dans la partie 4.6.3.1.

   Il est important de noter l'augmentation de la taille de la zone de contact ainsi qu'une réduction du pic de pression avec la fréquence de sollicitation λ que l'on soit en force imposée (Fig.4.44) ou en déplacement imposé (Fig.4.45). Les distributions de pression ne sont présentées que pour l'instant $t = 2\tau$.

   Les variations de la zone de contact et des pics de pressions, en fonction de la fréquence de sollicitations λ, sont résumées dans le tableau 4.5 pour un chargement en force imposée et dans le tableau 4.6 pour un chargement en déplacement imposé.

Table 4.5 – Evolution du rayon de contact et du maximum de pression pour un chargement en force imposée (à l'instant $t = 2\tau$).

Fréquence	$2a^*(t)/a^*(0)$	p_{max}/p_0
$\lambda = 1$	3.196	0.4048
$\lambda = 2$	3.314(+3.7%)	0.3251(−19.69%)
$\lambda = 4$	3.6275(+13.49%)	0.2629(−35.05%)
$\lambda = 8$	3.922(+22.72%)	0.2194(−45.80%)

   Cette constatation est loin d'être intuitive.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

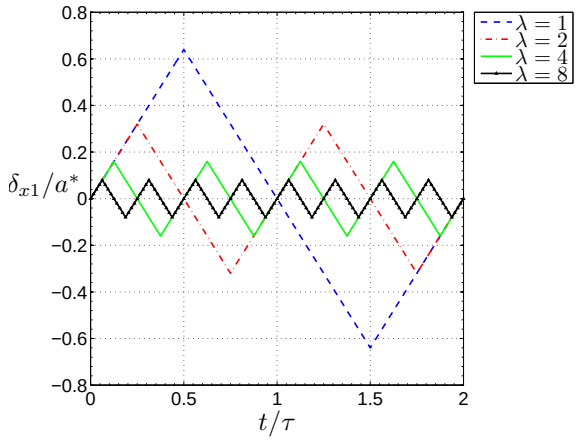


FIGURE 4.41 – Déplacement (tangentiel) de corps rigide suivant X_1 pour différentes fréquences λ.

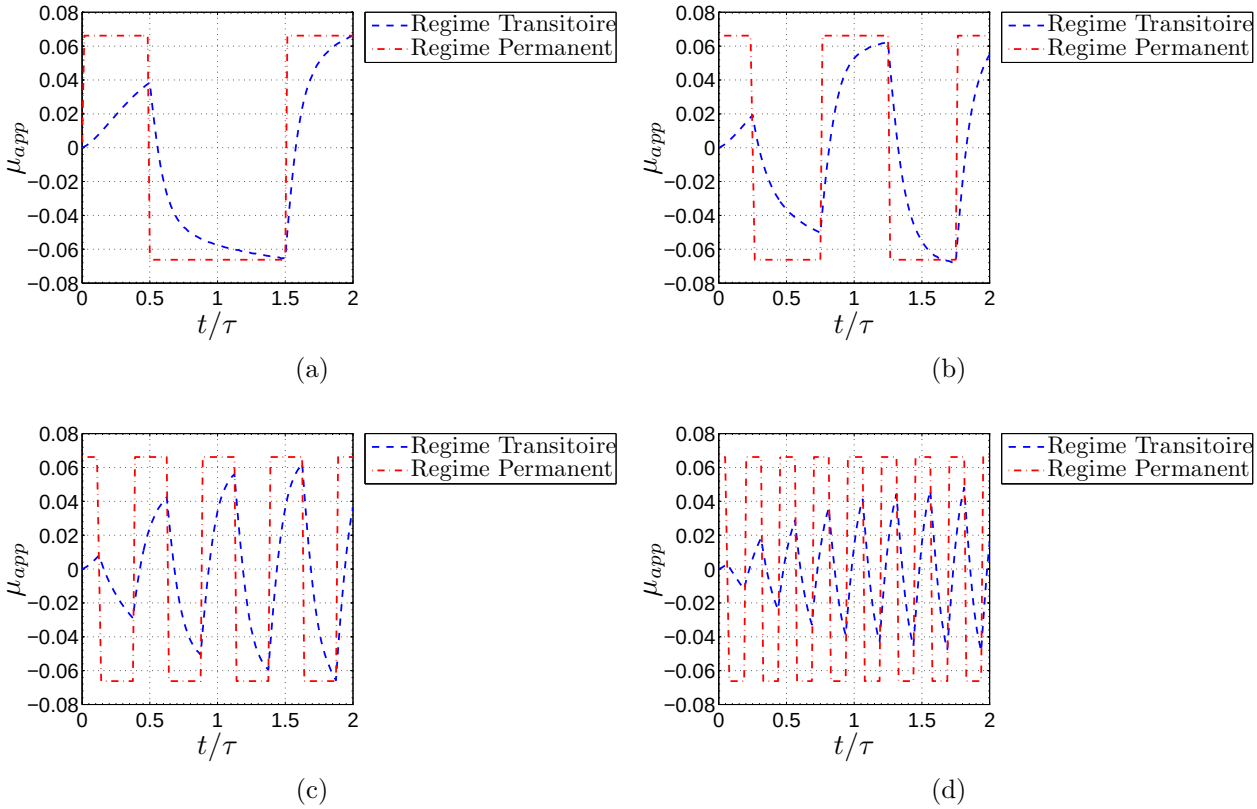


FIGURE 4.42 – Coefficient de frottement apparent pour différentes fréquences de sollicitation (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 2$, (c) $\lambda = 4$, (d) $\lambda = 8$ dans le cas d'un chargement en force imposée $F_N = 1.48N$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

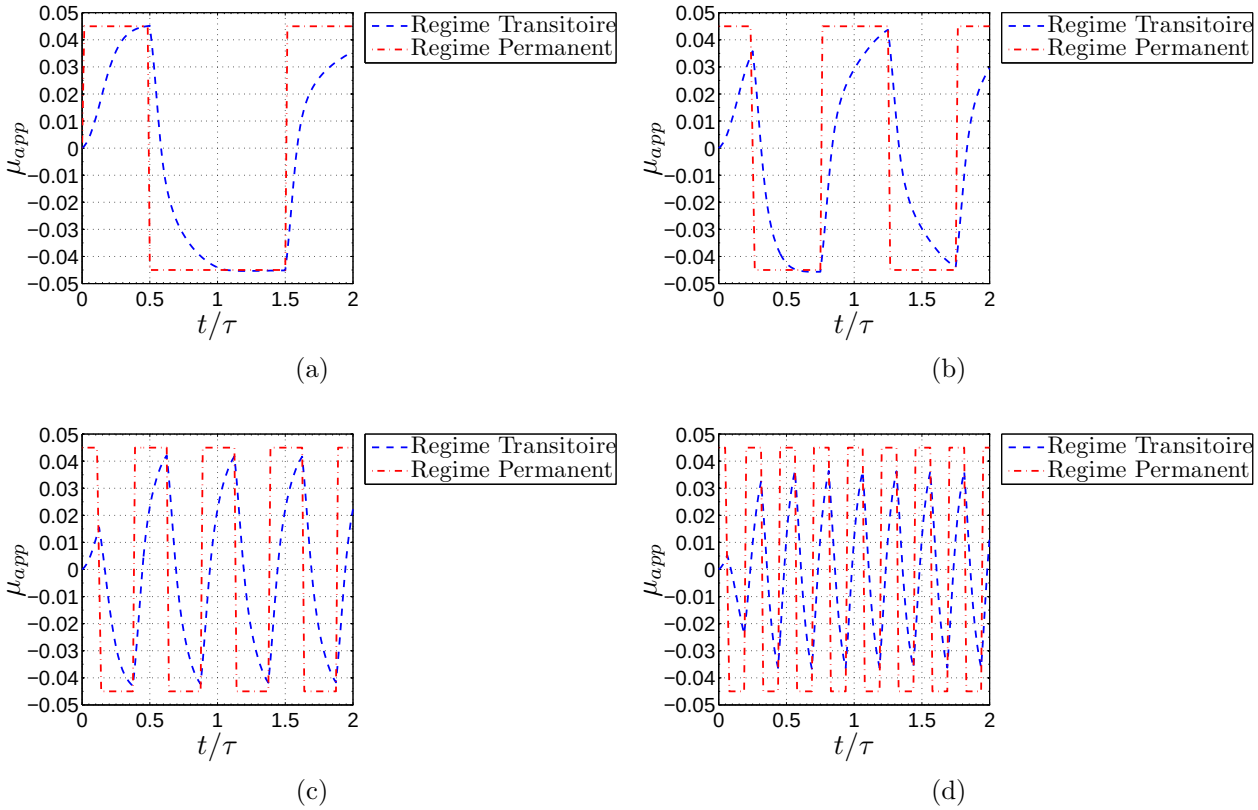


FIGURE 4.43 – Coefficient de frottement apparent pour différentes fréquences de sollicitations (a) $\lambda = 1$, (b) $\lambda = 2$, (c) $\lambda = 4$, (d) $\lambda = 8$ dans le cas d'un chargement en déplacement imposé $\delta = 0.1mm$.

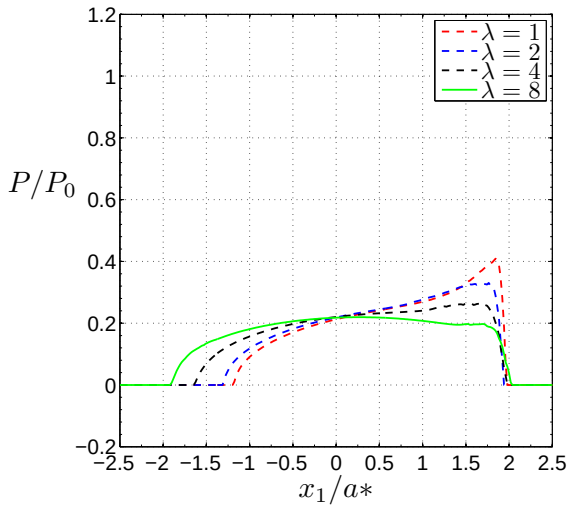


FIGURE 4.44 – Distribution de pression à l'instant $t = 2\tau$ pour différentes fréquences de sollicitations λ dans le cas d'un chargement en force imposée $F_N = 1.48N$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

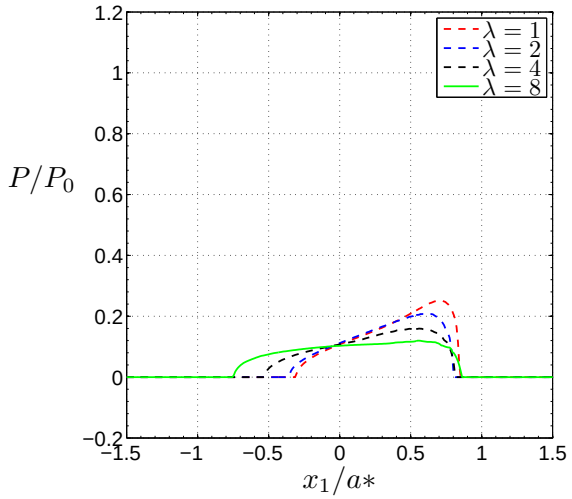


FIGURE 4.45 – Distribution de pression à l'instant $t = 2\tau$ pour différentes fréquences de sollicitations λ dans le cas d'un chargement en déplacement imposé $\delta = 0.1mm$.

TABLE 4.6 – Evolution du rayon de contact et du maximum de pression pour un chargement en déplacement imposé (à l'instant $t = 2\tau$).

Fréquence	$2a^*(t)/a^*(0)$	p_{max}/p_0
$\lambda = 1$	1.1764	0.2508
$\lambda = 2$	1.2156(+3.35%)	0.2076(−17.22%)
$\lambda = 4$	1.3921(+18.34%)	0.1588(−36.68%)
$\lambda = 8$	1.6078(+36.67%)	0.1156(−52.71%)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4. Chargement quelconque
   Tous les cas présentés précédemment sont plus ou moins idéalisés, ces cas sont plutôt rencontrés lors d'essais de laboratoires bien instrumentés. Dans cette partie, il sera également montré que le modèle développé, est capable de prendre en compte le cas d'un chargement quelconque (vitesse constante ou accélération constante ou chargement cyclique). Dans les applications industrielles nous sommes plutôt confrontés à des trajets de chargement quelconques (Fig.4.46), qui peuvent certes dans certaines conditions se ramener à des cas académiques (vitesse constante, accélération constante, . . .). L'évolution du coefficient de frottement apparent sera présentée dans le cas de deux chargements tangentiels quelconques. Une modélisation précise du roulement/glissement viscoélastique évitera toute surestimation de μ_{app} et donc de la force tangentielle F_V, et donc de mieux prédire la dégradation de ces types de matériaux.

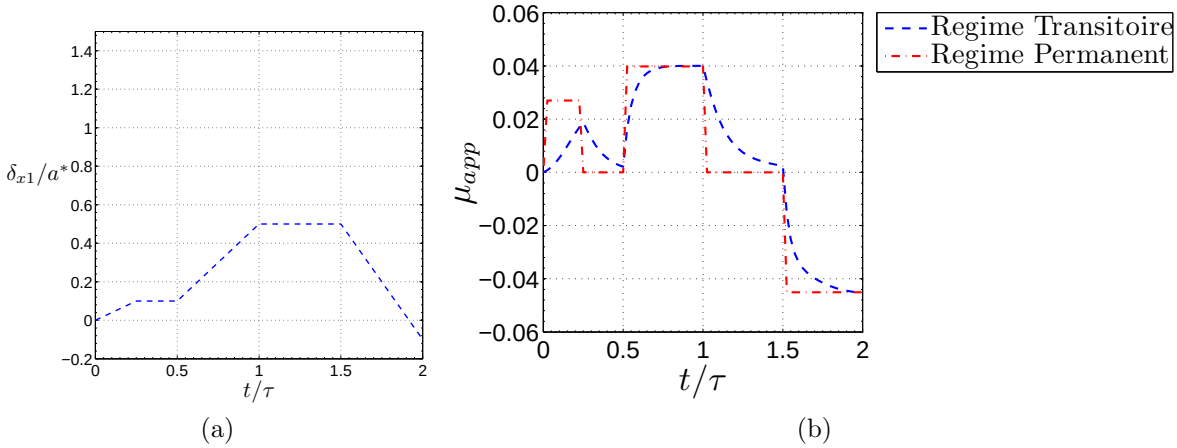


FIGURE 4.46 – (a) Chargement tangentiel quelconque (b) Coefficient de frottement apparent en fonction du temps dans le cas d'un chargement en force normale imposée $F_N = 1.48N$.

Dans le cas où la sphère est rigide, et bien sûr lorsque le frottement de Coulomb est négligé, il n'y a aucune différence entre un mouvement de glissement et de roulement. Par contre, si les deux matériaux sont viscoélastiques, il n'y a plus d'équivalence possible entre roulement et glissement.

4.6.4 Cas d'une sphère viscoélastique ou élastique en contact roulant/glissant avec un massif viscoélastique

La sphère et le massif seront tous les deux supposés viscoélastiques. Pour mettre en évidence la différence entre glissement et roulement, on va faire varier le temps

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

de relaxation τ_1 de la sphère en gardant le temps de relaxation τ_2 du massif viscoélastique constant. Les mouvements de roulement pur et de glissement pur seront successivement simulés.

Dans le cas du glissement (Fig.4.47b), le coefficient de frottement présente d'abord un pic avant de se stabiliser à une valeur inférieure. La valeur maximale du coefficient de frottement n'est donc pas celle obtenue en régiment permanent, i.e. $\max_{t\in[0,\infty]} \mu_{app}(t) \neq \lim_{t\to\infty} \mu_{app}(t)$.
Dans le cas du roulement (Fig.4.47a) par contre, la valeur maximale du coefficient de frottement est celle obtenue en régime permanent, $\max_{t\in[0,\infty]} \mu_{app}(t) = \lim_{t\to\infty} \mu_{app}(t)$. Cependant, dans le cas du roulement, la valeur limite la plus élevée n'est pas celle obtenue dans le cas élastique ($\tau_1 =\to \infty$), $\max_{\tau_1\in[0,\infty]} \left\{ \max_{t\in[0,\infty]} \mu_{app}(t) \right\} \neq \lim_{\tau_1\to\infty} \left\{ \max_{t\in[0,\infty]} \mu_{app}(t) \right\}$. Il existe un temps de relaxation τ_{1c} pour lequel le coefficient de frottement est maximal. Ce temps de relaxation est fonction de la vitesse. A noter également que, lorsque la sphère est élastique, les solutions de roulement pur et de glissement pur sont identiques.

Les coefficients de frottement apparent dans le cas de roulement/glissement sont tracés cette fois-ci sur les mêmes figures (Fig.4.48) pour différentes valeurs de τ_1. Les profils pour le roulement et le glissement sont très différents, sauf lorsqu'on tend vers le cas élastique.

La figure 4.49 présente les valeurs des pics du coefficient de frottement apparent, $\max_{t\in[0,4\tau_2]} \mu_{app}(t)$, en fonction du ratio τ_1/τ_2, pour un cas de roulement et un cas de glissement. Dans le cas du roulement on peut mettre en évidence un phénomène de résonance au voisinage de $\tau_1/\tau_2 = 0.8$ pour $v\tau/a^* = 1.58$ et au voisinage de $\tau_1/\tau_2 = 1.7$ pour $v\tau/a^* = 0.79$. Dans le cas du glissement aucun phénomène de résonance n'est observé et la valeur maximale du coefficient de frottement est celle obtenue pour $t \to \infty$ (i.e. quand la sphère devient élastique).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

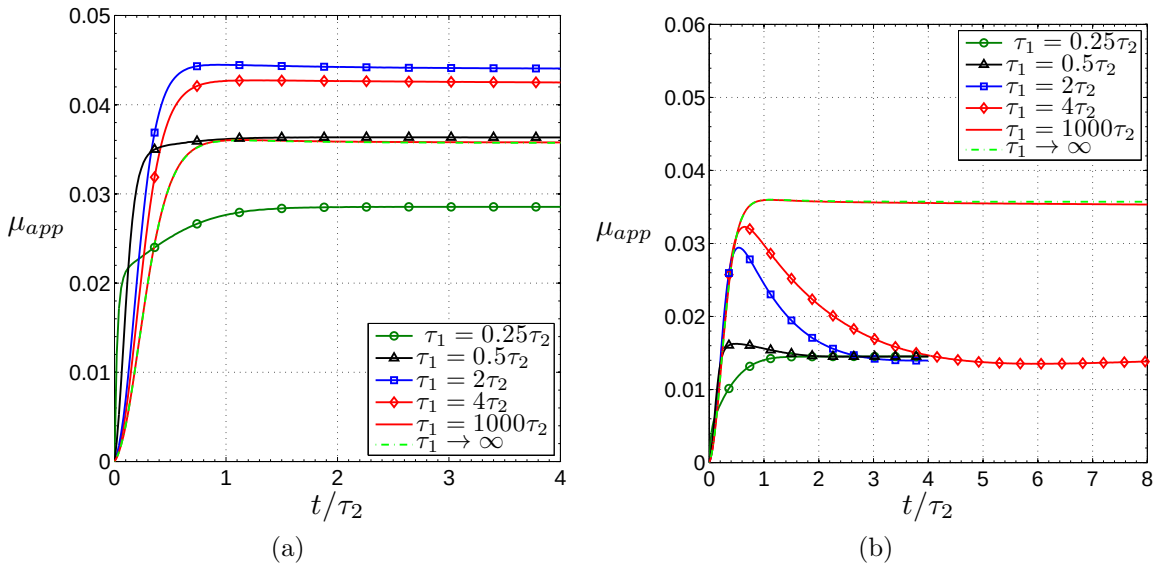


FIGURE 4.47 – Coefficient de frottement apparent pour une valeur adimensionnée de la vitesse $v\tau/a^* = 1.58$ (a) roulement (b) glissement, dans le cas d'un chargement en déplacement normal imposé $\delta = 0.1mm$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

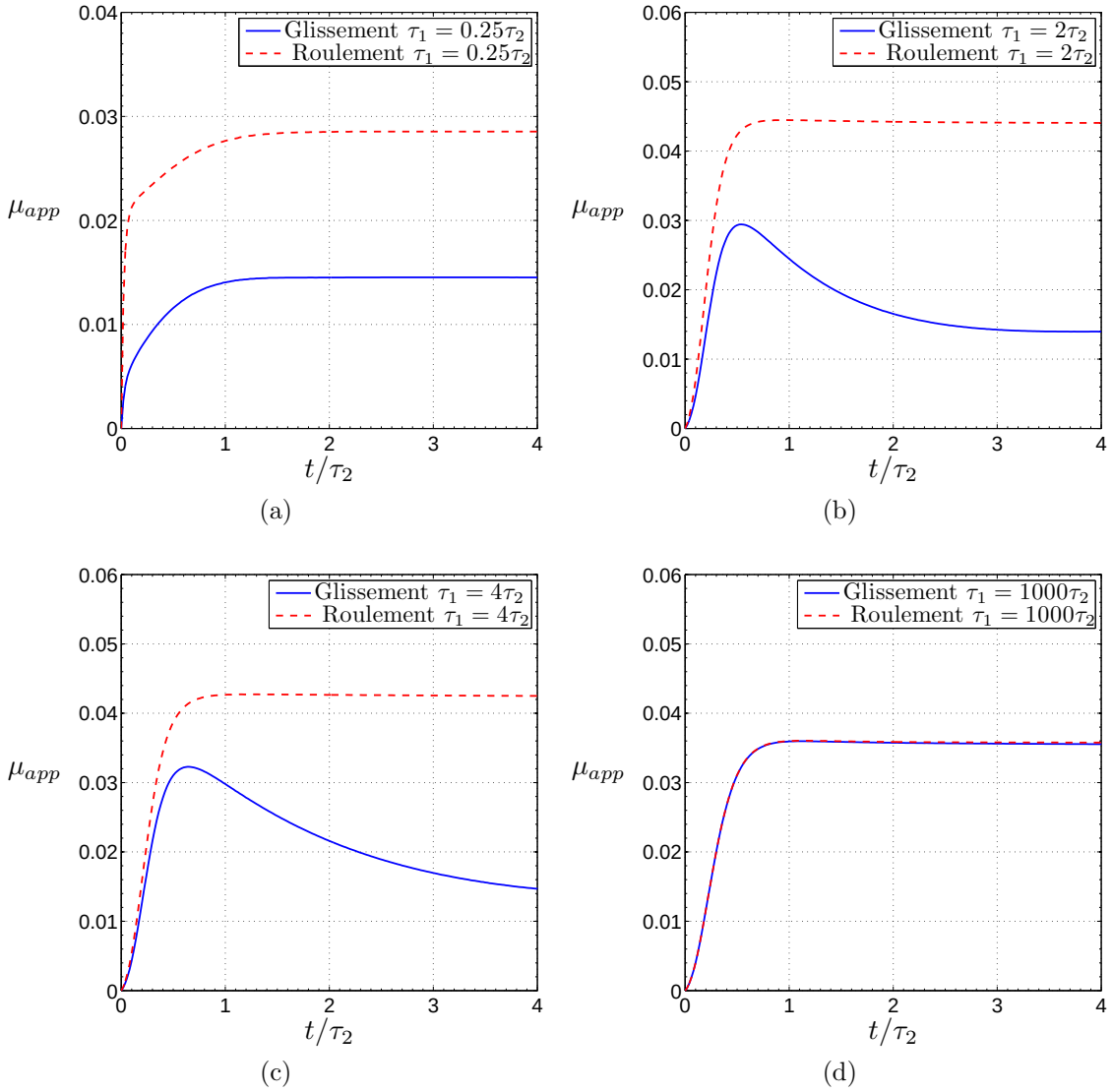


FIGURE 4.48 – Coefficient de frottement apparent pour $v\tau/a^* = 1.58$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

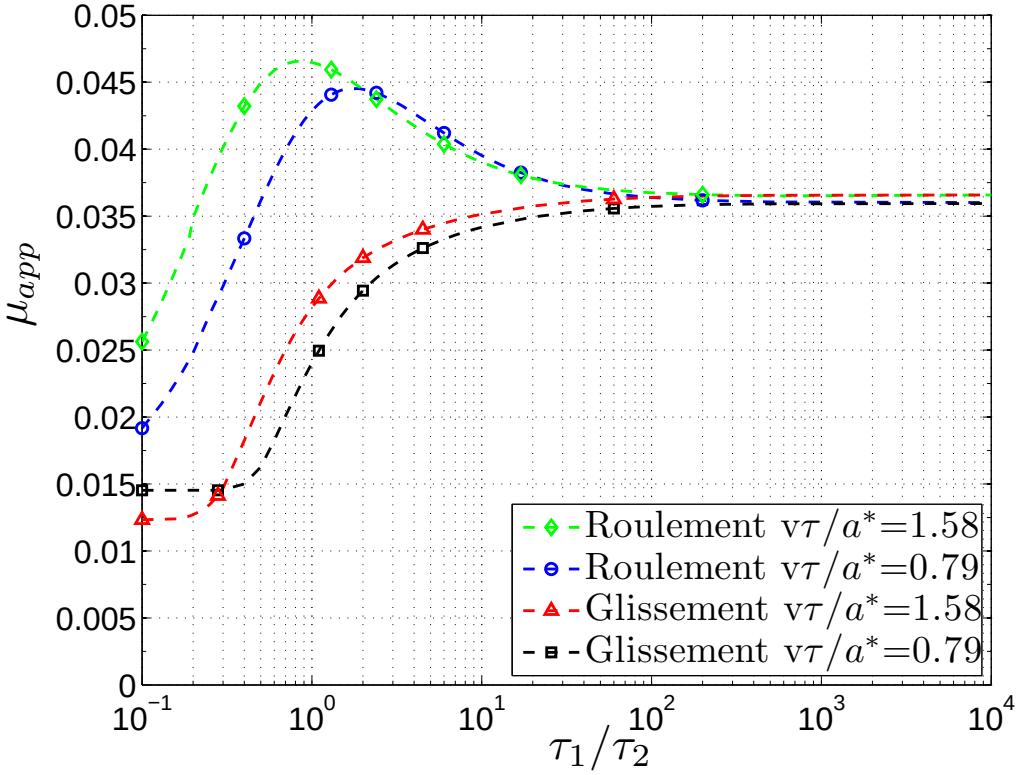


FIGURE 4.49 – Valeur maximale du coefficient de frottement apparent, $\max_{t\in[0,4\tau_2]} \mu_{app}(t)$, en fonction du ratio τ_1/τ_2, dans le cas d'un chargement en déplacement normal imposé $\delta = 0.1mm$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.7 Roulement sur massif viscoélastique hétérogène

4.7.1 Brève description du problème

Pour des raisons de concision, cette section se limitera uniquement au cas du roulement/glissement entre une sphère rigide et un massif viscoélastique hétérogène. Une configuration 3D puis 2D sont présentées respectivement dans les figures 4.50 et 4.51, afin de faciliter la compréhension.

Le formalisme théorique de prise en compte des hétérogénéités peut s'inspirer de ce qui a été présenté dans la partie 4.4.1 de ce chapitre. Toutes les équations du problème hétérogène viscoélastique (Eq. 4.30 à 4.42) doivent être résolues dans le repère courant du contact $R(O, X_1, X_2, X_3)$ à chaque pas de temps. Il n'y a que le corps 2 (massif) qui peut contenir des hétérogénéités. L'algorithme de la figure 4.52 peut être utilisé pour faire un couplage entre le problème hétérogène et le roulement/glissement viscoélastique.

Le formalisme dans son état actuel peut prendre en compte, une ou plusieurs hétérogénéités élastiques isotropes ou anisotropes.
La sphère supposée rigide de rayon $R = 10mm$ roule sur un massif viscoélastique hétérogène avec une vitesse linéaire $v\tau/a^* = 0.6$. Les propriétés viscoélastiques retenues pour le massif viscoélastique sont identiques à celles utilisées dans la partie 4.6.2 de ce chapitre. Autrement dit :

$$J(t) = \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1}\exp(-\frac{t}{\tau})\right] = \left[\frac{1}{\mu_\infty} + \frac{1}{\mu_1}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))\right] \tag{4.62}$$

Avec $\mu_\infty = 3.86MPa$, $\mu_\infty/\mu_0 = 10$, et τ le temps de relaxation.

Le module de Young instantané du massif viscoélastique à l'instant initial est donné par :

$$E^M(0) = 2 \times (1 + \nu^M) \times R(0) \tag{4.63}$$

Les indices ^{M} et ^{I} seront relatifs respectivement au corps 2 (massif viscoélastique, matrice) et à l'hétérogénéité isotrope élastique. Le ratio γ s'exprime sous la forme :

$$\gamma = E^I/E^M(0) \tag{4.64}$$

où E^I est le module de Young de l'hétérogénéité élastique isotrope.

$$\nu^I = \nu^M = 0.3 \tag{4.65}$$

ν^I, ν^M sont respectivement le coefficient de Poisson de l'hétérogénéité et de la matrice.

Soit $dX^I = (dx_1^I, dx_2^I, dx_3^I)$ les coordonnées du centre de l'hétérogénéité dans le repère courant $R(O, X_1, X_2, X_3)$. Comme la vitesse de roulement/glissement est telle que $v\tau/a^* = 0.6$, il ressort donc que $dX^I = (0.6a^*, 0.0, dx_3^I)$ quand $t = 0$; $dX^I = (0.0, 0.0, dx_3^I)$ pour $t = \tau$ et $dX^I = (-0.6a^*, 0.0, dx_3^I)$ à $t = 2\tau$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

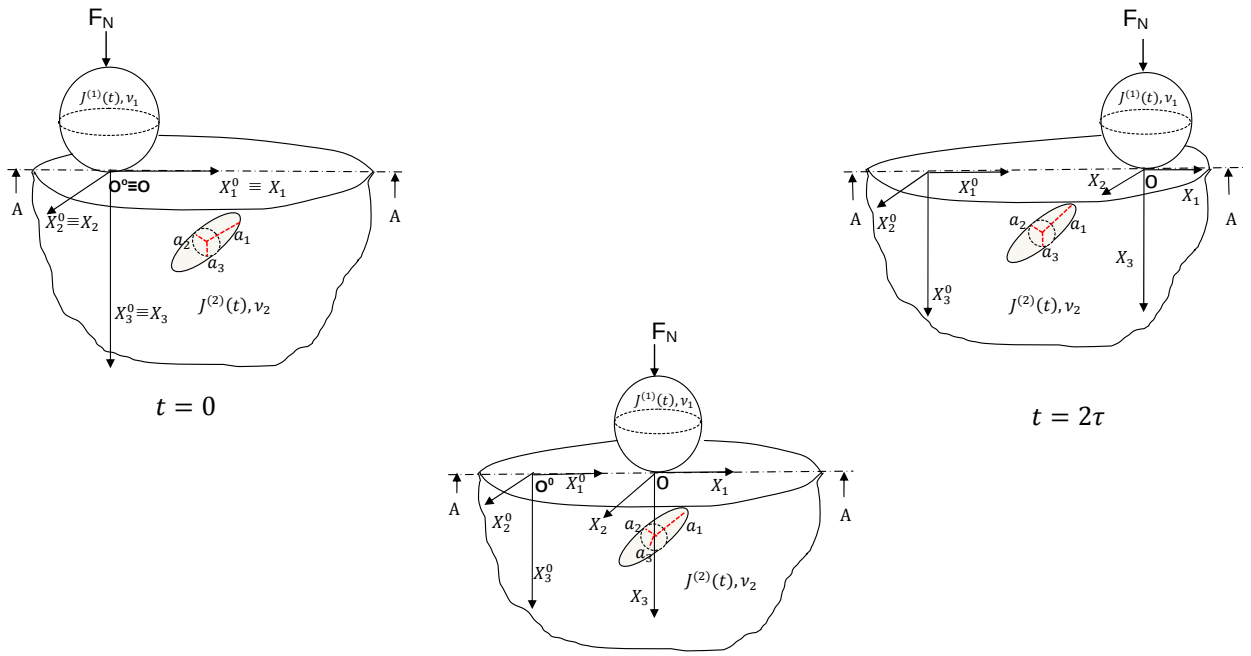


FIGURE 4.50 – Vue 3D du mouvement de roulement/glissement d'une sphère sur un massif viscoélastique hétérogène contenant une hétérogénéité ellipsoïdale, le mouvement ayant lieu suivant l'axe X_1.

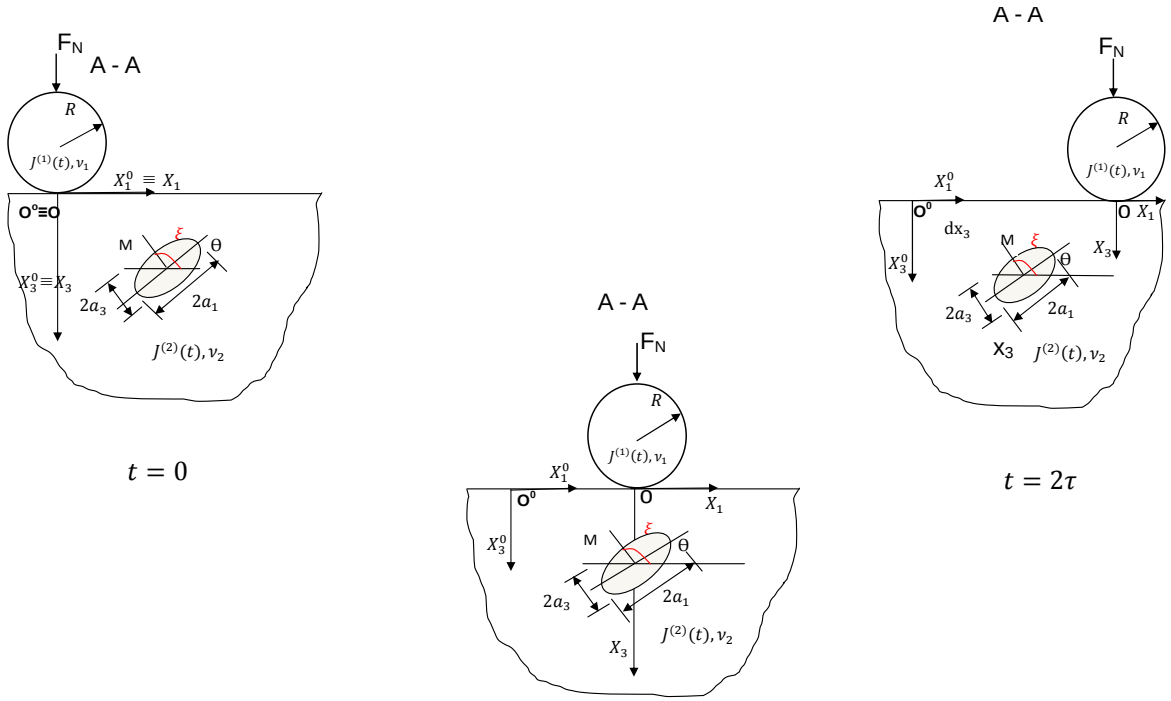


FIGURE 4.51 – Vue 2D du mouvement de roulement/glissement d'une sphère sur un massif viscoélastique hétérogène contenant une hétérogénéité ellipsoïdale, le mouvement ayant lieu suivant l'axe X_1.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

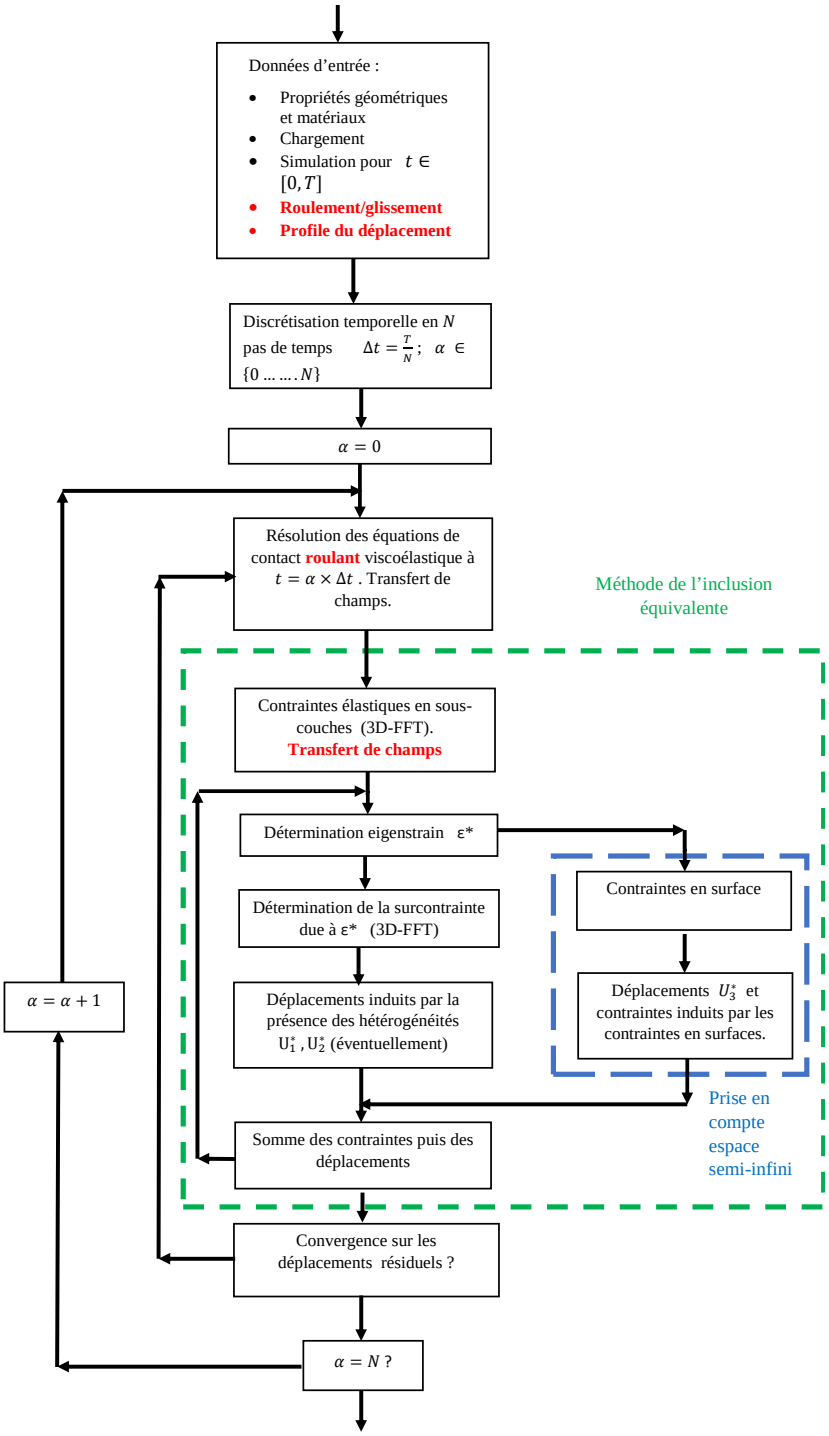


FIGURE 4.52 – Algorithme de couplage entre le roulement viscoélastique et le problème hétérogène.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

L'effet de γ (propriétés matériaux), de la géométrie, de la position et de l'orientation de l'hétérogénéité sur les champs de pression et le coefficient de frottement apparent sera étudié. θ représente l'orientation angulaire spatiale de l'hétérogénéité ellipsoïdale. Pour toutes les simulations qui seront présentées dans la suite de cette partie, $\nu^I = \nu^M = 0.3$. La distribution de pression sera représentée à la fois dans le repère fixe $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ et dans le repère mobile $R(O, X_1, X_2, X_3)$. Les configurations 3D et 2D du problème sont rappelées dans les figures 4.50 et 4.51.

4.7.2 Résultats

4.7.2.1 Hétérogénéité sphérique

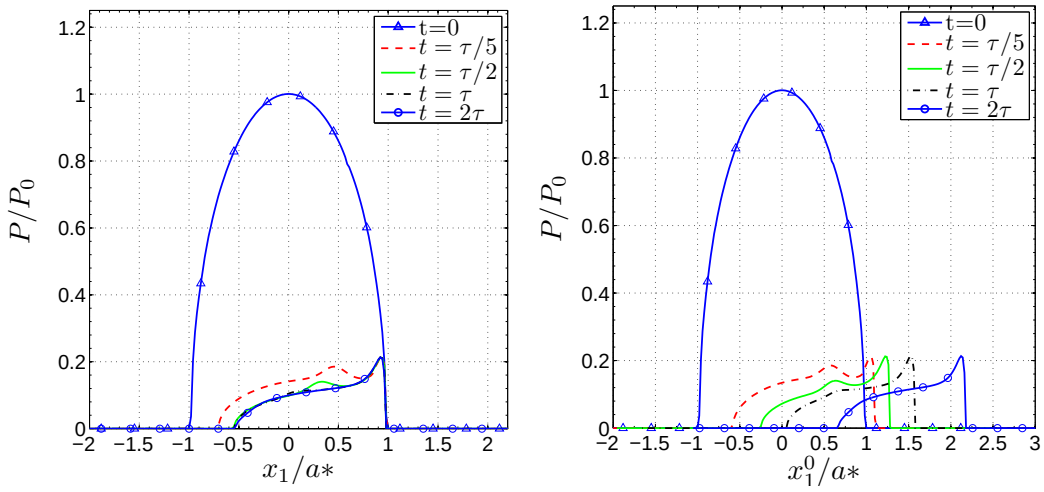
Le massif viscoélastique contient une hétérogénéité sphérique située à $dX^I = (-0.6a^*, 0.0, 0.3a^*)$, de rayon $r = 0.15a^*$. La distribution de pression et le coefficient de frottement apparent seront présentés respectivement dans les figures 4.53 et 4.54 pour un chargement en déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$. Le module de Young de l'hétérogénéité est choisi identique au module de Young instantané de la matrice viscoélastique (à $t = 0$), i.e. $\gamma = E^I/E^M(0) = 1$.

Sur la figure 4.53, pour $t = 0$ on remarque que la présence de l'hétérogénéité n'a aucun effet sur la distribution de pression, le résultat correspond donc à un cas hertzien, ce qui est cohérent puisque $\gamma = E^I/E^M(0)$ est choisi égal à 1. Pour $t = \tau/5$, $t = \tau/2$, $t = \tau$ une surpression du champ de pression, induite par la présence de l'hétérogénéité, peut être observée. Cette surpression devient négligeable au voisinage de 2τ. Ceci est dû au fait que : i) l'effet d'hystérésis induit par le roulement finit par prendre le pas sur la surpression induite par la contribution élastique de l'hétérogénéité. ii) Pour $t = 2\tau$ le centre de l'hétérogénéité ne se trouve plus dans la zone de contact.

Il est évident qu'une hétérogénéité sphérique modifie la distribution de pression. Cependant, en se basant sur la figure 4.54, on remarque que la présence d'une seule hétérogénéité sphérique ne modifie pas le coefficient de frottement apparent. Ceci est lié à la symétrie sphérique. D'après le formalisme d'Eshelby, la contribution d'une hétérogénéité sphérique unique au champ de déplacement ou à la distribution de pression est symétrique. Alors que le coefficient de frottement apparent est lié au caractère non symétrique de la distribution de pression. La conclusion selon laquelle une hétérogénéité sphérique unique n'a aucun effet sur le coefficient de frottement apparent est donc entièrement cohérente avec le formalisme d'Eshelby.

Il sera montré dans la suite, que seules les hétérogénéités inclinées, ou certaines distributions d'hétérogénéités sphériques sont susceptibles de modifier le coefficient de frottement apparent.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.53 – Distribution de pression pour un massif viscoélastique hétérogène contenant une hétérogénéité sphérique $\gamma = E^I/E^M(0) = 1$ ($a_1 = a_2 = a_3 = r = 0.15a^*$, $dx_3 = 0.3a^*$) ; le déplacement normal imposé est de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$; (a) dans le repère du contact (repère mobile) $R(O, X_1, X_2, X_3)$, (b) dans le repère fixe $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$.

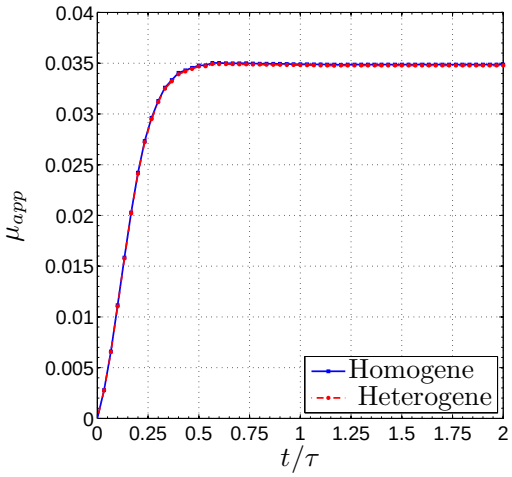


FIGURE 4.54 – Coefficient de frottement apparent pour un massif viscoélastique hétérogène contenant une hétérogénéité sphérique $\gamma = E^I/E^M(0) = 1$ ($a_1 = a_2 = a_3 = r = 0.25a^*$, $dx_3 = 0.3a^*$) ; le déplacement normal imposé est de $\delta = 0.1mm$, la vitesse est $v\tau/a^* = 0.6$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.7.2.2 Hétérogénéité ellipsoïdale

Dans cette partie, l'effet d'une hétérogénéité ellipsoïdale inclinée, d'orientation spatiale angulaire θ, est considérée (voir Figs. 4.50 et 4.51). L'effet de l'orientation θ, et du module de Young sera étudié. Les résultats seront tracés dans le plan $x_2 = 0$.

- Effet de l'orientation angulaire θ. La variable γ est fixée à 1 ($\gamma = 1$). La distribution de pression et le coefficient de frottement apparent seront présentés respectivement à la figure 4.55 et à la figure 4.56 pour différentes orientations angulaires θ de l'hétérogénéité ellipsoïdale.
  Quand θ tend vers 90°, l'hétérogénéité ellipsoïdale devient très proche de la surface de contact, ce qui induit donc une surpression du champ de pression. Une augmentation de 7% du coefficient de frottement apparent, peut être observée durant le régime transitoire (précisément à $t = \tau/2$). Ce pic diminue progressivement jusqu'à disparaître pour $t = 3\tau/2$, i.e. lorsque l'hétérogénéité ne se trouve plus dans la zone de contact.
- Effet du module de Young.
  Les figures 4.57 et 4.58 présentent les résultats pour différents modules de Young de l'hétérogénéité ellipsoïdale isotrope élastique. Il faut rappeler que le cas $\gamma = 0.1$ correspond à un module de Young de l'hétérogénéité $E^I = 2\times(1+\nu)\times\lim_{t\to\infty} R(t) = 2\times(1+\nu)\times\mu_0$. Ainsi dans le cas $\gamma = 0.1$ l'hétérogénéité sera plus souple que la matrice durant toute la durée de la simulation. Une augmentation du maximum de pression peut être observée dans le cas des hétérogénéités dures ($\gamma = 1$, $\gamma = 4$). Inversement, dans le cas de l'hétérogénéité souple ($\gamma = 0.1$), une diminution brusque du champ de pression peut être observée.
  Le coefficient de frottement augmente (par rapport au cas homogène), de 4% et 6% pour $\gamma = 1$ et $\gamma = 4$ en régime transitoire. Il est aussi important de remarquer que même en régime permanent ($t > \tau/2$), une diminution du coefficient de frottement est observée pour l'hétérogénéité souple ($\gamma = 0.1$), alors que les hétérogénéités dures ($\gamma = 1$ ou $\gamma = 4$) induisent plutôt une augmentation du coefficient de frottement apparent.

4.7.2.3 Hétérogénéités multiples avec prise en compte des influences mutuelles

Jusqu'à maintenant on ne s'est intéressé qu'au cas d'une hétérogénéité unique. Le cas de plusieurs hétérogénéités isotropes élastiques sera étudié dans cette partie. Une approche basée sur la méthode de gradient conjugué (cf. chapitre 3) est utilisée pour la prise en compte des influences mutuelles entre les hétérogénéités élastiques. Comme mentionné plus haut dans ce document, cette approche fut déjà utilisée par [ZHO 12] pour déterminer les propriétés effectives d'un composite périodique. Le module de compressibilité et le module de cisaillement obtenus par [ZHO 12] sont bien situés dans les bornes Hashin-Shtrikman, ce qui valide la pertinence de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

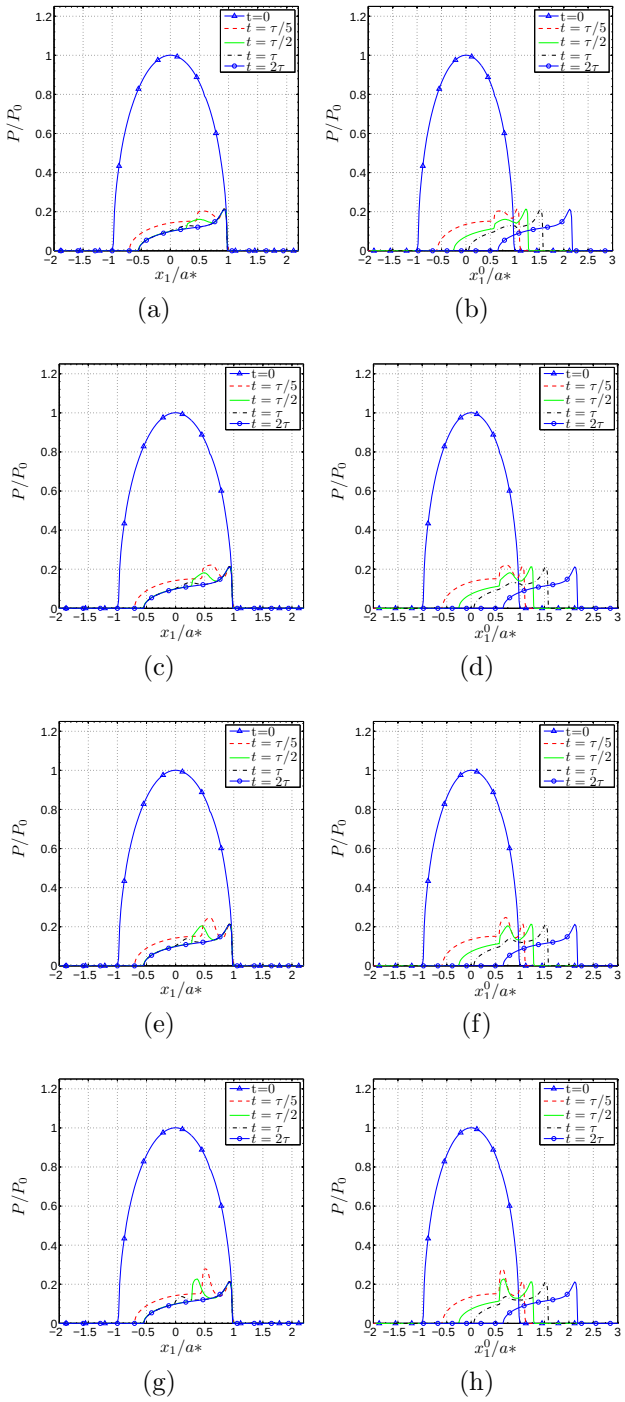


FIGURE 4.55 – Distribution de pression pour différentes orientations angulaires θ d'une hétérogénéité ellipsoïdale $\gamma = E^I/E^M(0) = 1$ ($a_1 = 0.4a^*, a_2 = 0.5a^*, a_3 = 0.2a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$) ; le déplacement normal imposé est de $\delta = 0.1mm$ et la vitesse $v\tau/a^* = 0.6$; dans $R(O, X_1, X_2, X_3)(\theta = 30°$ (a), $\theta = 45°$ (c), $\theta = 60°$ (e), $\theta = 80°$ (g)) dans $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ ($\theta = 30°$ (b), $\theta = 45°$ (d), $\theta = 60°$ (f), $\theta = 80°$ (h)).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

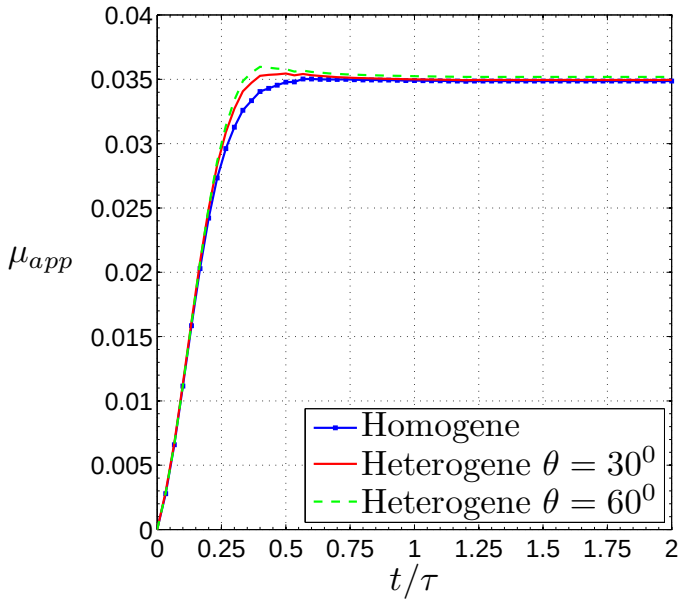


FIGURE 4.56 – Coefficient de frottement apparent pour différentes orientations angulaires θ de l'hétérogénéité ellipsoïdale $\gamma = E^I/E^M(0) = 1$ ($a_1 = 0.4a^*, a_2 = 0.5a^*, a_3 = 0.2a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$) ; pour un déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$.

l'approche.

Neuf hétérogénéités ellipsoïdales inclinées

Le cas de 9 hétérogénéités ellipsoïdales inclinées ($a_1 = 0.2a^*, a_2 = 0.5a^*, a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$) ; situées $dx_1 = -1.6a^*$, $-1.2a^*$, $-0.8a^*$, $-0.4a^*$, 0., $0.4a^*$, $0.8a^*$, $1.2a^*$, $1.6a^*$ sera considéré.

Le coefficient de frottement apparent peut être considérablement modifié. De manière générale les hétérogénéités dures augmentent le coefficient de frottement apparent et les hétérogénéités souples réduisent le frottement apparent (Fig. 4.59a). Dans certains cas, le coefficient de frottement apparent peut être réduit de 40% ou augmenté de 60% (Fig. 4.59b). L'effet des hétérogénéités est bien évidemment plus important en régime transitoire.

Cluster d′ hétérogénéités sphériques

Cette fois-ci un cluster d'hétérogénéités sphériques sera considéré. Les hétérogénéités auront un rayon $r = 0.1a^*$, seront situées à la profondeur $dx_3 = 0.15a^*$ et $dx_3 = 0.4a^*$. Les distances entre les centres des hétérogénéités est de $0.4a^*$.

Dans ce précis, l'effet des hétérogénéités sphériques sur le coefficient de frottement apparent est moins important (Fig. 4.60) mais ne peut pas être négligé. Comme

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

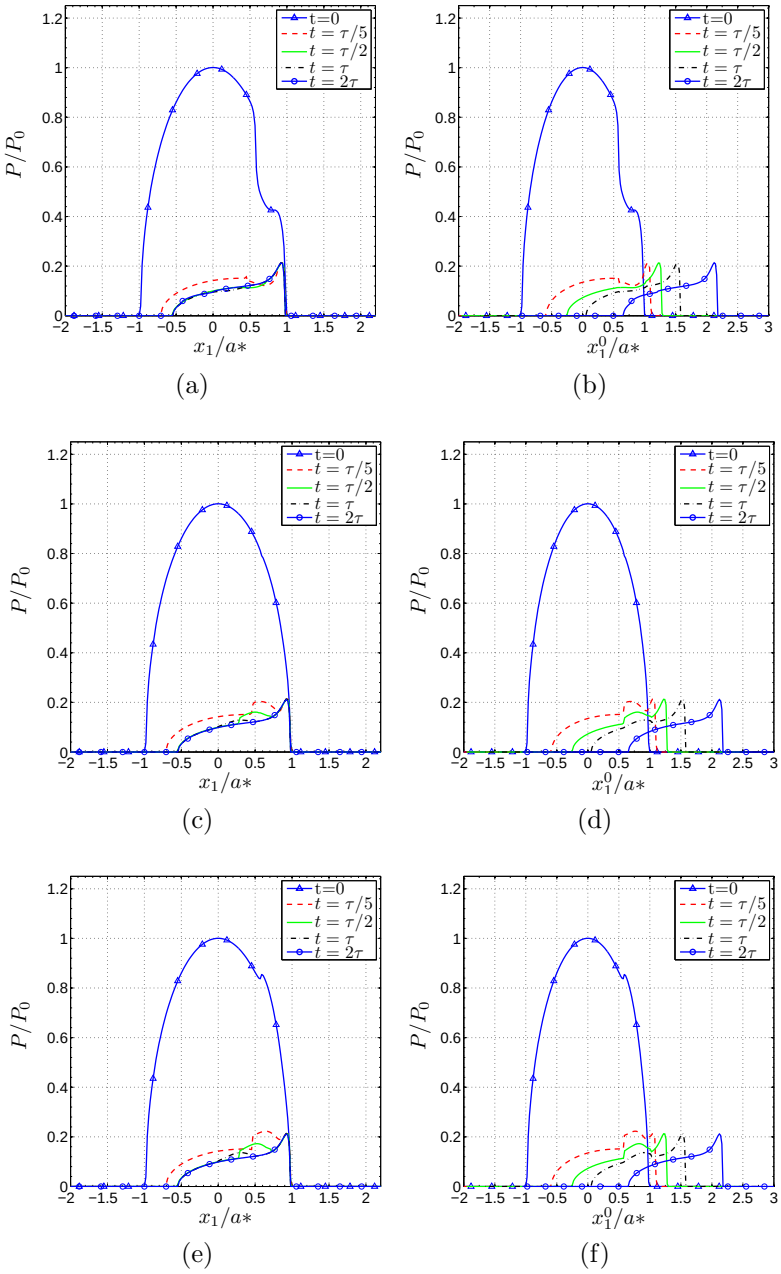


FIGURE 4.57 – Distribution de pression pour différentes valeurs de γ d'une hétérogénéité ellipsoïdale ($a_1 = 0.4a^*, a_2 = 0.5a^*, a_3 = 0.2a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$) ; pour un déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour vitesse $v\tau/a^* = 0.6$; $\gamma = 0.1$ ((a) dans $R(O, X_1, X_2, X_3)$), (b) dans $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$) ; $\gamma = 1$((c) dans $R(O, X_1, X_2, X_3)$, (d) dans $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$) ; $\gamma = 4$ ((e) dans $R(O, X_1, X_2, X_3)$, (f) dans $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

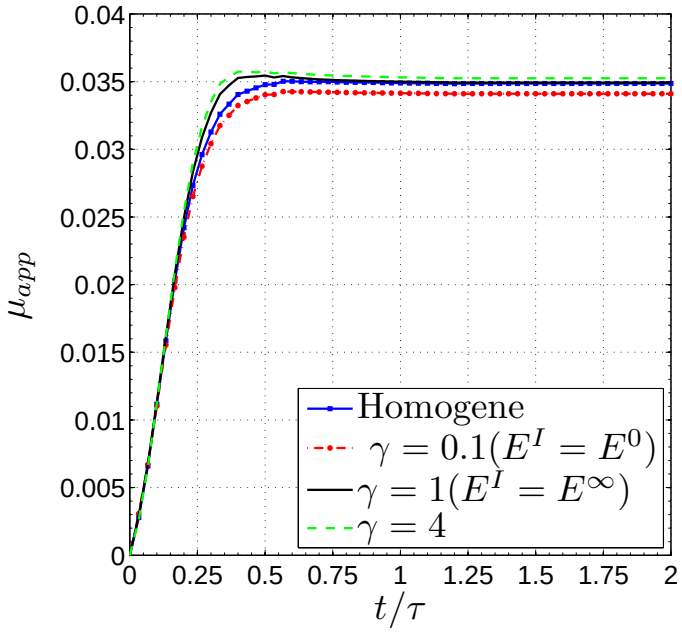


FIGURE 4.58 – Coefficient de frottement apparent pour différentes valeurs de γ quand le massif viscoélastique contient une hétérogénéité ellipsoïdale ($a_1 = 0.4a^*, a_2 = 0.5a^*, a_3 = 0.2a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$, $\theta = 30°$) ; pour un déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$.

dans le cas des hétérogénéités ellipsoïdales cet effet est beaucoup plus marqué en régime transitoire. Il faut toutefois noter que certaines distributions d'hétérogénéités sphériques peuvent avoir des effets beaucoup plus importants sur le coefficient de frottement apparent.

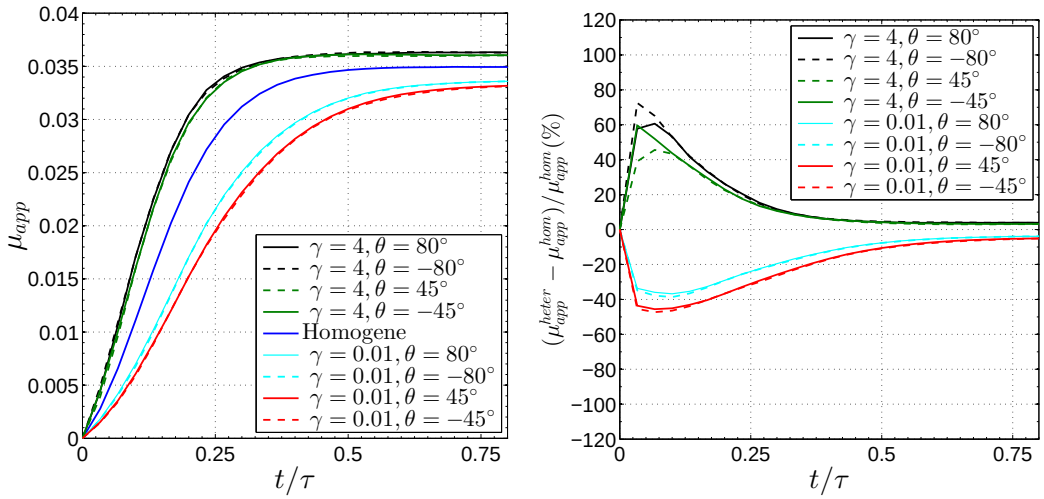
Il est possible d'architecturer des matériaux viscoélastiques hétérogènes de manière à augmenter ou à réduire le coefficient de frottement apparent. Les mêmes simulations peuvent également être réalisées sur un matériau composite réel.

4.7.2.4 Contraintes en sous-couche

Contrairement aux autres approches existant dans la littérature, le modèle présenté ici permet de remonter aux champs de contrainte en sous-couche. Pour l'illustrer, la contrainte de von Mises est présentée dans le cas d'une hétérogénéité sphérique de rayon $r = 0.15a^*$ située à $dx_3^I = 0.3a^*$ avec $\gamma = 0.4$. A l'instant initial, i.e. $t = 0$ l'hétérogénéité est relativement souple par rapport à la matrice mais devient progressivement dure quand t augmente, $E^I = 4E^0$ pour $t = 2\tau$.

La contrainte de von Mises sera tracée dans le repère fixe $R^0(O^0, X_1^0, X_2^0, X_3^0)$, Fig.4.61. A $t = 0$, la valeur maximale de la contrainte de von Mises se situe à l'équateur de l'interface hétérogénéité/matrice. Cette valeur s'élève à $0.8P_0$ au lieu de $0.6P_0$ dans le cas d'un massif homogène. Le maximum de la contrainte de von Mises est localisé à l'interface hétérogénéité/matrice aussi longtemps que l'hétérogénéité

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

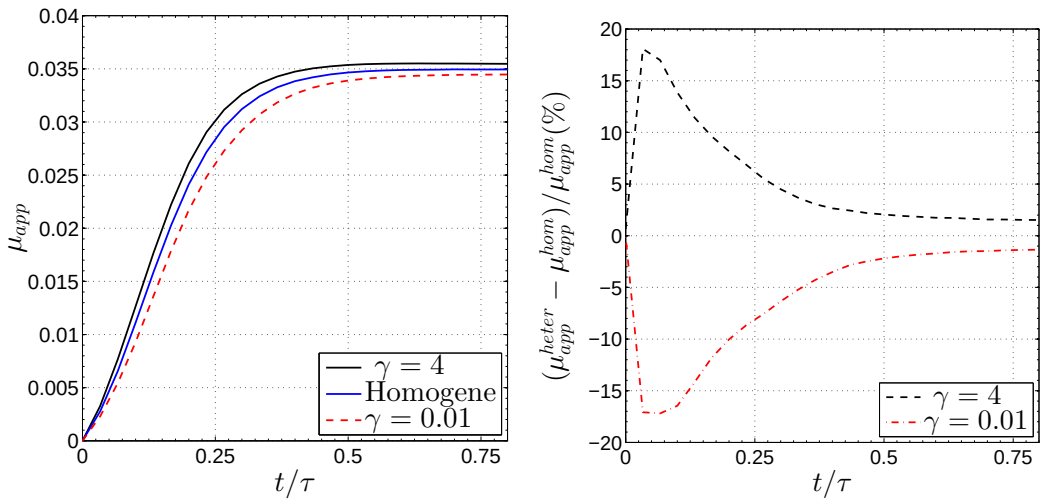


(a) (b)

FIGURE 4.59 – Coefficient de frottement apparent dans le cas de neuf hétérogénéités ellipsoïdales inclinées (avec prise en compte de l'influence mutuelle) ($a_1 = 0.2a^*, a_2 = 0.5a^*, a_3 = 0.1a^*$, $dx_3 = 0.4a^*$) ; $dx_1 = -1.6a^*$, $-1.2a^*$, $-0.8a^*$, $-0.4a^*$, 0., $0.4a^*$, $0.8a^*$, $1.2a^*$, $1.6a^*$; pour un déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$.

se trouve dans la zone de contact, cependant ce maximum chute à $0.14P_0$ pour $t = \tau/2$ et se situe cette fois ici au pôle sud de l'interface hétérogénéité/matrice. Quand l'hétérogénéité ne se trouve plus dans la zone de contact, le maximum de la contrainte de von Mises correspond à $0.1a^*$ et est localisé à $x_1/a^* = 1$. Ce résultat est cohérent car le maximum de pression, dans le cas du massif homogène, se situe à la même position (i.e. en bordure de contact).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.60 – Coefficient de frottement apparent dans le cas d'un cluster d'hétérogénéités sphériques ; pour un déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

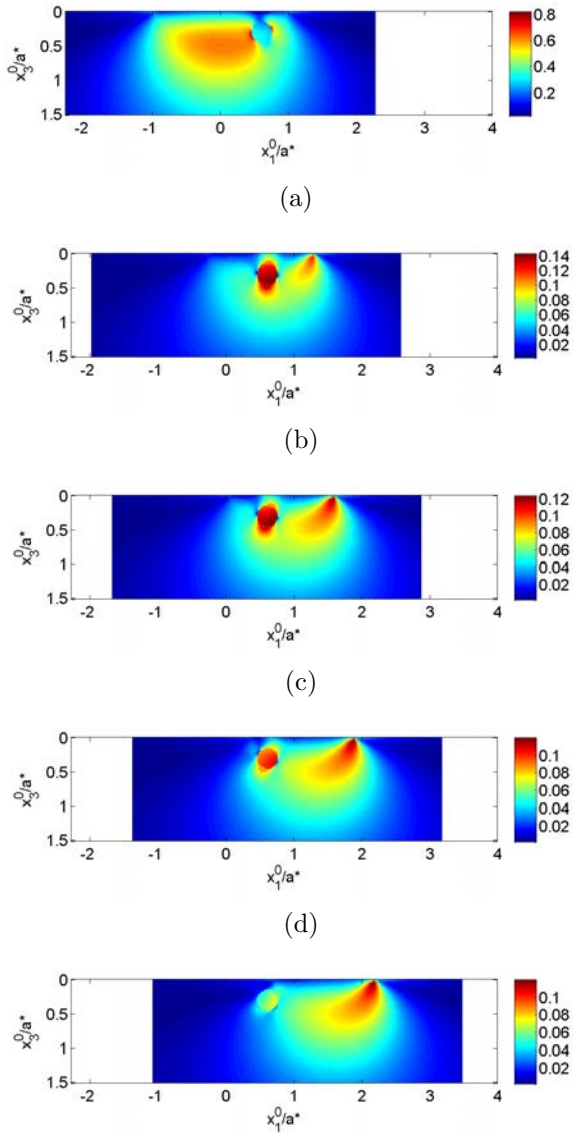


FIGURE 4.61 – Contrainte de von Mises pour différents pas de temps dans le cas d'une hétérogénéité sphérique de rayon $r = 0.15a^*$ située à $dx_3^I = 0.3a^*$ $(\gamma = 0.4)$; pour un déplacement normal imposé de $\delta = 0.1mm$ et pour une vitesse $v\tau/a^* = 0.6$; (a) $t = 0$, (b) $t = \tau/2$, (c) $t = \tau$, (d) $t = 3\tau/2$, (e) $t = 2\tau$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.8 Bilan partiel

Le modèle mis en place dans les parties 4.6 et 4.7 s'intéresse à la résolution du problème de contact roulant/glissant entre matériaux viscoélastiques homogènes ou hétérogènes. Le modèle a été validé dans un premier temps par éléments finis et ensuite par comparaison avec les résultats de Carbone et Putignano [CAR 13]. Le modèle fournit des solutions en termes de champs de pression mais aussi de champs de contraintes aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire. Les principaux résultats sont rappelés ci-dessous :

La nature du chargement normal appliqué (force normal imposée ou déplacement normal imposé) a une influence considérable sur la réponse du contact : distribution de pression/contraintes, coefficient de frottement apparent, ... Le laps de temps nécessaire à l'établissement du régime permanent diffère considérablement selon que l'on soit en force imposée ou en déplacement imposé. Ce laps de temps dépend de la fonction de relaxation du matériau pour un chargement en déplacement normal imposé, et de la fonction de fluage dans le cas d'un chargement en force normale imposée.

Lorsque les deux matériaux sont viscoélastiques et en l'absence de frottement au sens de Coulomb, il y a une différence considérable entre le mouvement de roulement et le mouvement de glissement. Dans le cas du glissement, la valeur maximale du coefficient de frottement apparent n'est pas forcément celle obtenue en régime permanent, d'où la nécessité de traiter le régime transitoire.

Lorsque l'un des corps en contact contient des hétérogénéités, les champs de pression, de contraintes peuvent être fortement perturbés. Cependant, l'effet de l'hétérogénéité sur le coefficient dépend fortement de la morphologie de l'hétérogénéité. Une hétérogénéité unique de forme sphérique n'a aucun effet sur le coefficient de frottement apparent. Seules les hétérogénéités ellipsoïdales inclinées ou des clusters d'hétérogénéités peuvent modifier le coefficient de frottement apparent. Il a été montré que les hétérogénéités souples réduisent le coefficient de frottement apparent et inversement, les hétérogénéités dures augmentent le coefficient de frottement apparent. Il est alors possible d'architecturer les matériaux viscoélastiques hétérogènes (composites) de manière à réduire ou à augmenter le coefficient de frottement apparent.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.9 Fretting viscoélastique

4.9.1 Mise en équation

On résout alternativement le problème normal et tangentiel jusqu'à convergence des deux solutions.

Contact Normal

Les équations du contact peuvent se réécrire sous la forme
- La conservation de la charge à chaque pas de temps.

$$W(t) = \int_{\Gamma_c(t)} p(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \tag{4.66}$$

- La déformée des deux massifs en contact : La déformée des deux massifs ($M1$ et $M2$) en contact $h(x_1, x_2, t)$ est définie par :

$$h(x_1, x_2, t) = h_i(x_1, x_2) + \delta(t) + u_3^p(x_1, x_2, t) + u_3^{q_{x1}}(x_1, x_2, t) + u_3^{q_{x2}}(x_1, x_2, t) \tag{4.67}$$

  où $h_i(x_1, x_2)$ est la géométrie initiale et $\delta(t)$ le déplacement de corps rigide.
- Les conditions de contact :

$$\begin{aligned} &\text{contact : } h(x_1, x_2, t) = 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) > 0 \text{ à l'intérieur } \Gamma_c(t) \\ &\text{séparation : } h(x_1, x_2, t) > 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) = 0 \text{ à l'extérieur } \Gamma_c(t) \end{aligned} \tag{4.68}$$

Contact Tangentiel

Les équations du contact tangentiel viscoélastique peuvent se réécrire sous la forme :

$$q_\tau(x_1, x_2, t) = -\mu_{coul} \cdot p(x_1, x_2, t) \cdot \frac{\Delta s_\tau(x_1, x_2, t)}{\| \Delta s_\tau(x_1, x_2, t) \|} \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl}(t) \tag{4.69}$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x_1, x_2, t) - \Delta\delta_\tau(t) = \Delta s_\tau(x_1, x_2, t) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{sl}(t) \tag{4.70}$$

$$\| q_\tau(x_1, x_2, t) \| < \mu_{coul} \cdot p(x_1, x_2, t) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{st}(t) \tag{4.71}$$

$$\Delta u_\tau^{tot}(x_1, x_2, t) - \Delta\delta_\tau(t) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Gamma_{st}(t) \tag{4.72}$$

$$\sum_{\Gamma_p} q(x_1, x_2, t) S = Q_\tau(t) \tag{4.73}$$

$$\Gamma_{sl}(t) \cup \Gamma_{st}(t) = \Gamma_c(t) \tag{4.74}$$

avec

$$u_\tau^{tot}(x_1, x_2, t) = u_\tau^{q_{x1}}(x_1, x_2, t) + u_\tau^{q_{x2}}(x_1, x_2, t) + u_\tau^p(x_1, x_2, t) \tag{4.75}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

et μ_{coul} le coefficient de frottement de Coulomb.

Détermination des déplacements tangentiels

Les champs de déplacements présentés dans les équations 4.67 et 4.74 sont donnés par :

$$u_{1,2,3}^{q_{x1}}(x_1,x_2,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t (T_{1,2,3}^{q_{x1}(1)}(x_1-x_1^{'},x_2-x_2^{'},t-\xi) + T_{1,2,3}^{q_{x1}(2)}(x_1-x_1^{'},x_2-x_2^{'},t-\xi))\frac{\partial q_{x1}(x_1',x_2',\xi)}{\partial \xi}dx_1'x_2'd\xi \tag{4.76}$$

$$u_{1,2,3}^{q_{x2}}(x_1,x_2,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t (T_{1,2,3}^{q_{x2}(1)}(x_1-x_1^{'},x_2-x_2^{'},t-\xi) + T_{1,2,3}^{q_{x2}(2)}(x_1-x_1^{'},x_2-x_2^{'},t-\xi))\frac{\partial q_{x2}(x_1',x_2',\xi)}{\partial \xi}dx_1'x_2'd\xi \tag{4.77}$$

$$u_{1,2}^{p}(x_1,x_2,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t (T_{1,2}^{p(1)}(x_1-x_1^{'},x_2-x_2^{'},t-\xi) + T_{1,2}^{p(2)}(x_1-x_1^{'},x_2-x_2^{'},t-\xi))\frac{\partial p(x_1',x_2',\xi)}{\partial \xi}dx_1'x_2'd\xi \tag{4.78}$$

Les tenseurs $T_{1,2,3}^{q_{x1}}$, $T_{1,2,3}^{q_{x2}}$ contiennent des propriétés spatiales et matériaux (la fonction de fluage des matériaux viscoélastiques en contact). Ces tenseurs sont présentés dans l'annexe A.

Une approche numérique identique à celle présentée en 4.3.2 sera utilisée pour la résolution du problème.

4.9.2 Résultats

Le couplage normal/tangentiel ne présente d'intérêt qu'en présence de coefficient de frottement de Coulomb μ_{coul}. Ici, un problème de contact avec un indenteur sphérique et un solide élastique semi-infini viscoélastique homogène sera considéré. Le coefficient de frottement de Coulomb est fixé à $\mu_{coul} = 0.7$. L'indenteur de rayon $R = 10mm$ sera supposé rigide.

Les fonctions de fluage et de relaxation du massif semi-infini viscoélastique sont données par :

Fonction de fluage :

$$J(t) = \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1}\exp(-\frac{t}{\tau})\right] = \left[\frac{1}{\mu_\infty} + \frac{1}{\mu_1}(1-\exp(-\frac{t}{\tau}))\right] \tag{4.79}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

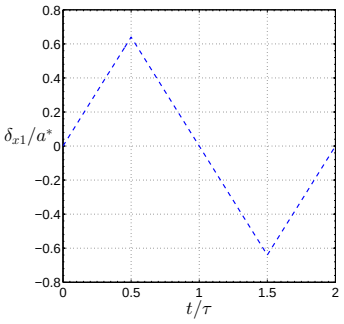


FIGURE 4.62 – Chargement tangentiel $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.62, +0.62]$.

Fonction de relaxation :

$$R(t) = \left[\mu_0 + (\mu_\infty - \mu_0)\exp(-\frac{t}{\frac{\mu_0}{\mu_\infty}\tau})\right] \tag{4.80}$$

L'effet de la nature du chargement sur la transition stick-slip sera étudié. Ensuite l'effet de la viscoélasticité sur les boucles de fretting sera analysé.

4.9.2.1 Effet de la nature du chargement sur la transition stick-slip.

Le coefficient de frottement de Coulomb μ_{coul} est fixé à 0.7. Le chargement normal peut être piloté en force normale imposée ($F_N = 1.4866N$) ou en déplacement normal imposé ($\delta = 0.1mm$). Dans le cas élastique, i.e. à $t = 0$, ces deux chargements sont équivalents en terme de champs de pression, contraintes en sous-couche,... Le chargement tangentiel sera piloté exclusivement en déplacement, $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.62, +0.62]$. La simulation sera faite entre $[0, 2\tau]$. Il faut rappeler dans le cas des matériaux viscoélastiques, le fait que l'on soit en déplacement normal imposé ou en force normale imposée, change considérablement les résultats obtenus. Lorsque le chargement est en déplacement imposé, la force à tendance à diminuer. Alors qu'inversement, en force imposée, le déplacement de corps rigide (δ) a plutôt tendance à augmenter (Fig.4.63).

- Cas d'un chargement en déplacement normal imposé.
  Au début du chargement, on observe une zone d'adhérence (stick) et une zone de glissement (slip). Ce phénomène de stick-slip disparaît assez rapidement pour laisser place à un mouvement de full-slip (Fig.4.64).
  Dans la configuration considérée, la transition stick-slip/full slip a lieu assez rapidement, i.e. pour $t = \tau/9$. Contrairement au cas élastique, cette transition est irréversible (Fig.4.64). Intuitivement, l'on pourrait s'attendre à ce que la zone de transition réapparaisse quand le déplacement tangentiel repasse à nouveau par 0, i.e. $t = \tau$. Ceci n'est pas le cas et s'explique par l'effet d'histoire du matériau viscoélastique et variera considérablement d'un matériau à un autre. Il est alors quasiment impossible de déduire des abaques généraux

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

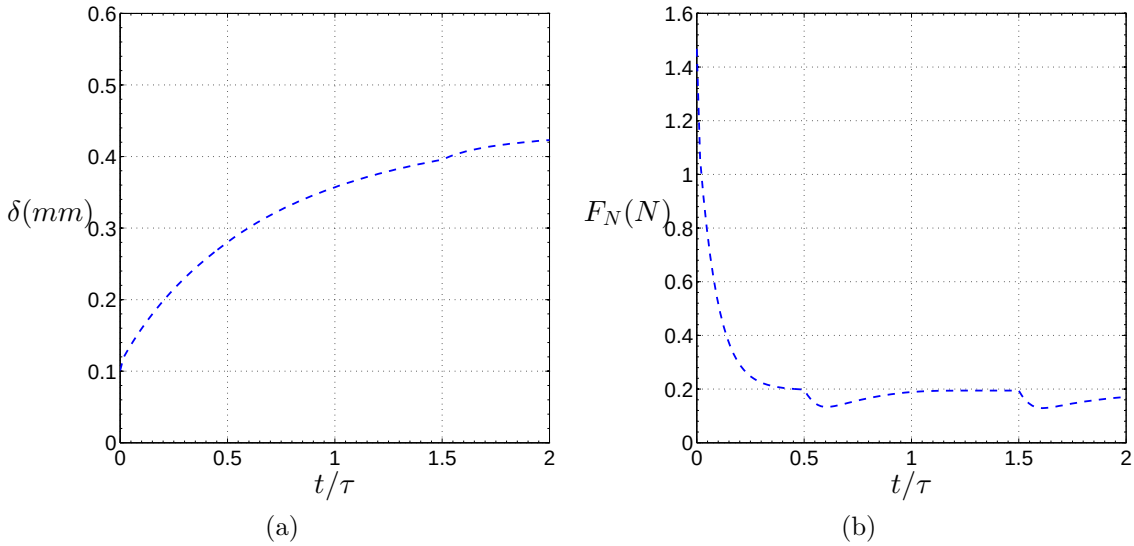


FIGURE 4.63 – (a) Evolution du déplacement normal pour un chargement en force normale imposée $F_N = 1.4866N$ (b) Evolution de la force normale pour un chargement en déplacement normal imposé $\delta = 0.1mm$.

(comme dans le cas de l'élasticité). A chaque problème posé il faudrait donc mettre en place une démarche de modélisation assez fine.

– Cas d'un chargement en force normale imposée.
  Dans le cas d'un chargement en force normale imposée (Fig.4.65), la zone de contact est toujours en stick-slip. Ceci s'implique par le fait que le critère sera toujours vérifié du fait de la constance de la force normale imposée. Ceci n'est pas le cas en déplacement imposé.

4.9.2.2 Boucles et Bûches de Fretting

Les boucles/bûches de fretting décrivent le comportement macroscopique d'un problème de contact. Ces grandeurs, contrairement à certaines variables comme les champs de pression ou de contraintes, peuvent être obtenues de manière expérimentale. Outre le fait qu'elles fournissent des informations sur l'état du contact (stick-slip/ full slip), elles peuvent être utilisées pour prédire l'endommagement et l'usure des corps en contact. L'énergie dissipée dans le contact correspond à l'aire sous la courbe de fretting et peut s'obtenir aisément à partir des boucles de fretting. Il est donc nécessaire d'analyser ces boucles de fretting dans le cas des contacts entre matériaux viscoélastiques.
La simulation sera réalisée entre $[0, 4\tau]$. Un chargement en force normale imposée $F_N = 1.4866N$ sera considéré. Le chargement tangentiel est piloté en déplacement imposé. Dans cette partie, il convient de faire la différence entre :

– μ_v qui est le coefficient de frottement apparent induit par le seul fait de la

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

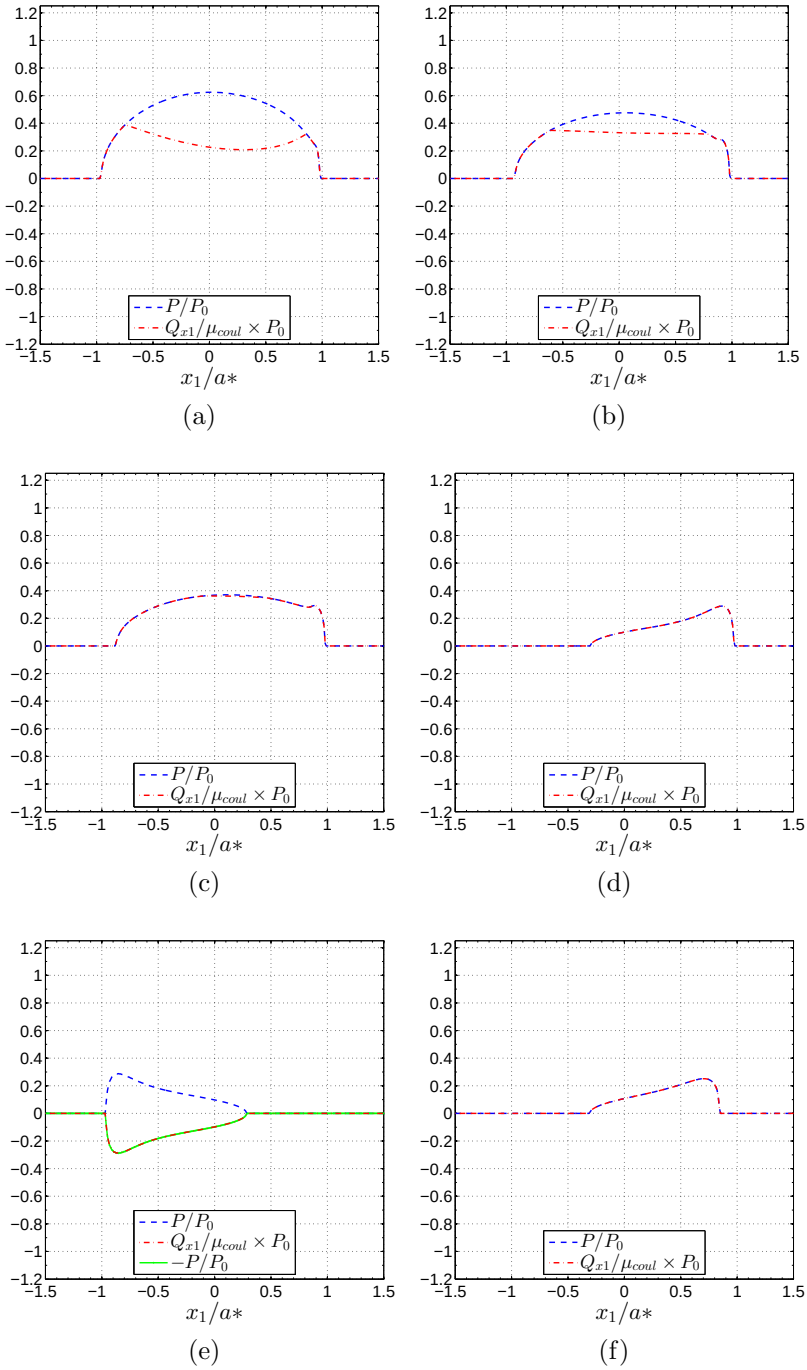


FIGURE 4.64 – Distribution de pression et de cisaillement (adimensionnés) pour différents pas de temps (a) $t = \tau/32$, (b) $t = \tau/16$, (c) $t = \tau/9$, (d) $t = \tau$, (e) $t = 3\tau/2$, (f) $t = 2\tau$, cas d'un chargement en déplacement normal imposé $\delta = 0.1mm$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

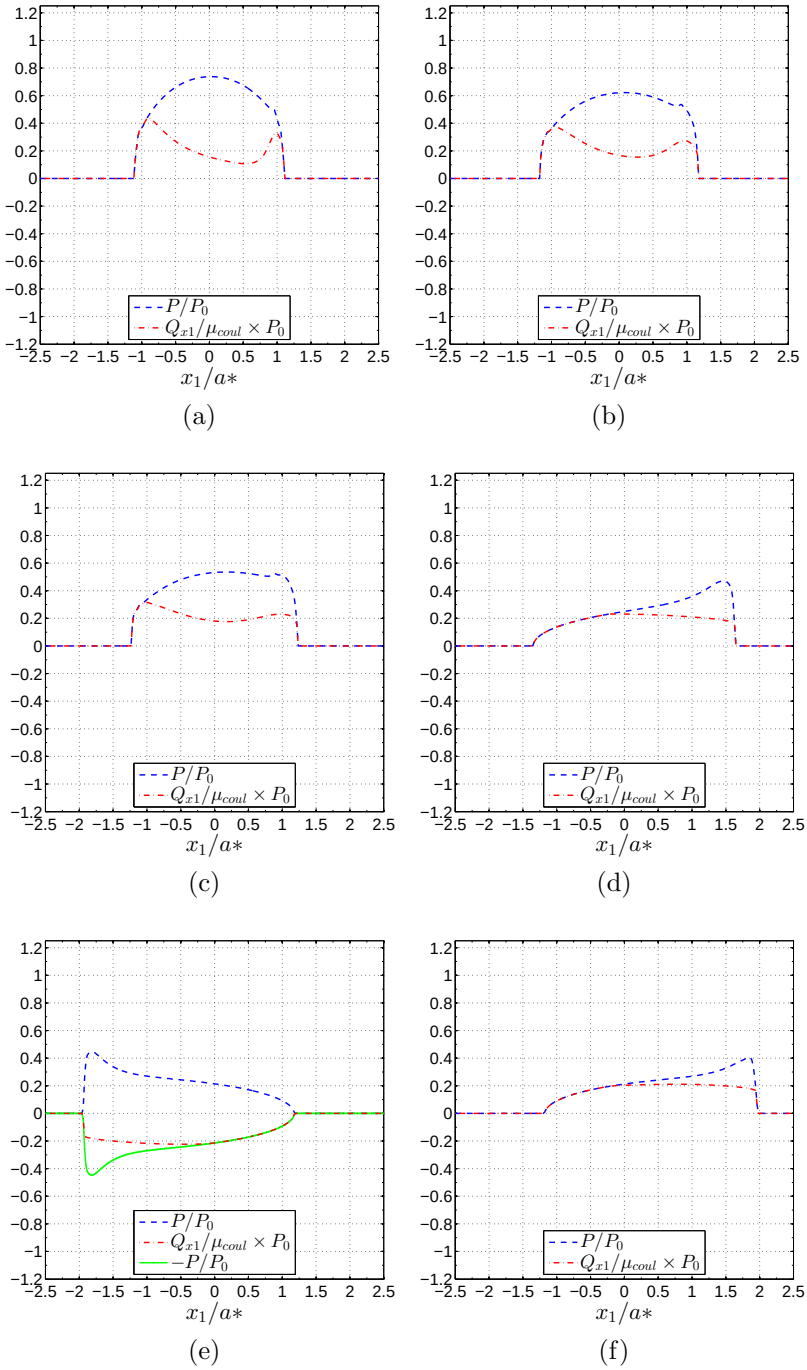


FIGURE 4.65 – Distribution de pression et de cisaillement (adimensionnés) pour différents pas de temps (a) $t = \tau/32$, (b) $t = \tau/16$, (c) $t = \tau/9$, (d) $t = \tau$, (e) $t = 3\tau/2$, (f) $t = 2\tau$, cas d'un chargement en force normale imposée $F_N = 1.48N$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

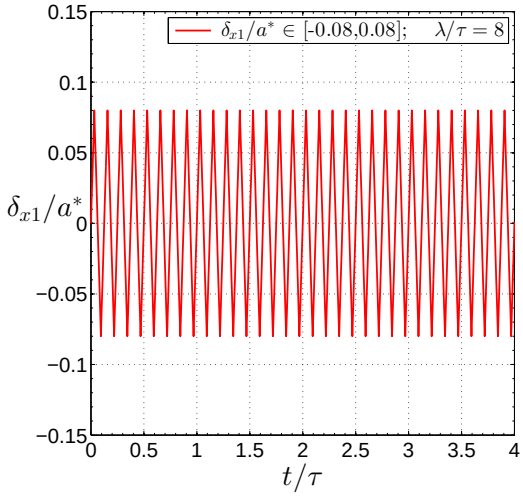


FIGURE 4.66 – Chargement en déplacement tangentiel imposé $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$, $\lambda/\tau = 8$.

dissymétrie des champs de pression, parfois dénommé frottement visqueux.

– et le coefficient de frottement apparent qui prend en compte μ_v et la force tangentielle induit par le coefficient de frottement de Coulomb. Dans cette partie $\mu_{app} \neq \mu_v$, $\mu_{app} = \frac{Q_{x1}+F_V}{F_N}$ ou encore $\mu_{app} = \frac{Q_{x1}}{F_N} + \mu_v$. Q_{x1} étant la force tangentielle induite par le coefficient de frottement de Coulomb.

L'analyse se subdivisera en trois parties : l'effet du coefficient de frottement de Coulomb, l'effet de la fréquence de sollicitation et enfin l'effet de l'amplitude du chargement tangentiel.

Effet du coefficient de frottement Coulomb

Le chargement en déplacement tangentiel imposé est tel que $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$. 32 cycles de fretting ont été réalisés entre $[0, 4\tau]$, ce qui fait un ratio $\lambda/\tau = 8$, Fig.4.66. Les simulations sont réalisées pour différentes valeurs du coefficient de frottement de Coulomb $\mu_{coul} = 0.4, 0.7, 1.0$.

Lorsque $\mu_{coul} = 0.4$ (Fig.4.67b), il n'y a pas une grande différence entre le cas élastique et le cas viscoélastique. Le contact se retrouve très vite en glissement total. Le coefficient de frottement apparent s'obtient facilement en faisant la somme $\mu_{app} = \mu_{coul} + \mu_v$. Pour $\mu_{coul} = 0.7$ (Fig.4.67d), il est important de noter que le cas élastique n'est pas en stick-slip alors que dans le cas viscoélastique, le contact est glissement total. L'énergie dissipée par fretting est quasiment multipliée par 3. Pour $\mu_{coul} = 1.0$ (Fig.4.67f), la boucle élastique reste quasiment inchangée comparé au cas $\mu_{coul} = 0.7$. Par contre, le cas viscoélastique atteint toujours le régime de glissement total. A noter que le régime de glissement total, dans le cas viscoélastique, ne disparait que pour $\mu_{coul} = 1.5$ (Fig.4.68b). Il est important de remarquer que μ_v ne varie quasiment pas avec le coefficient de frottement de Coulomb (Figs. 4.67a,4.67c,4.67e,4.68a).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

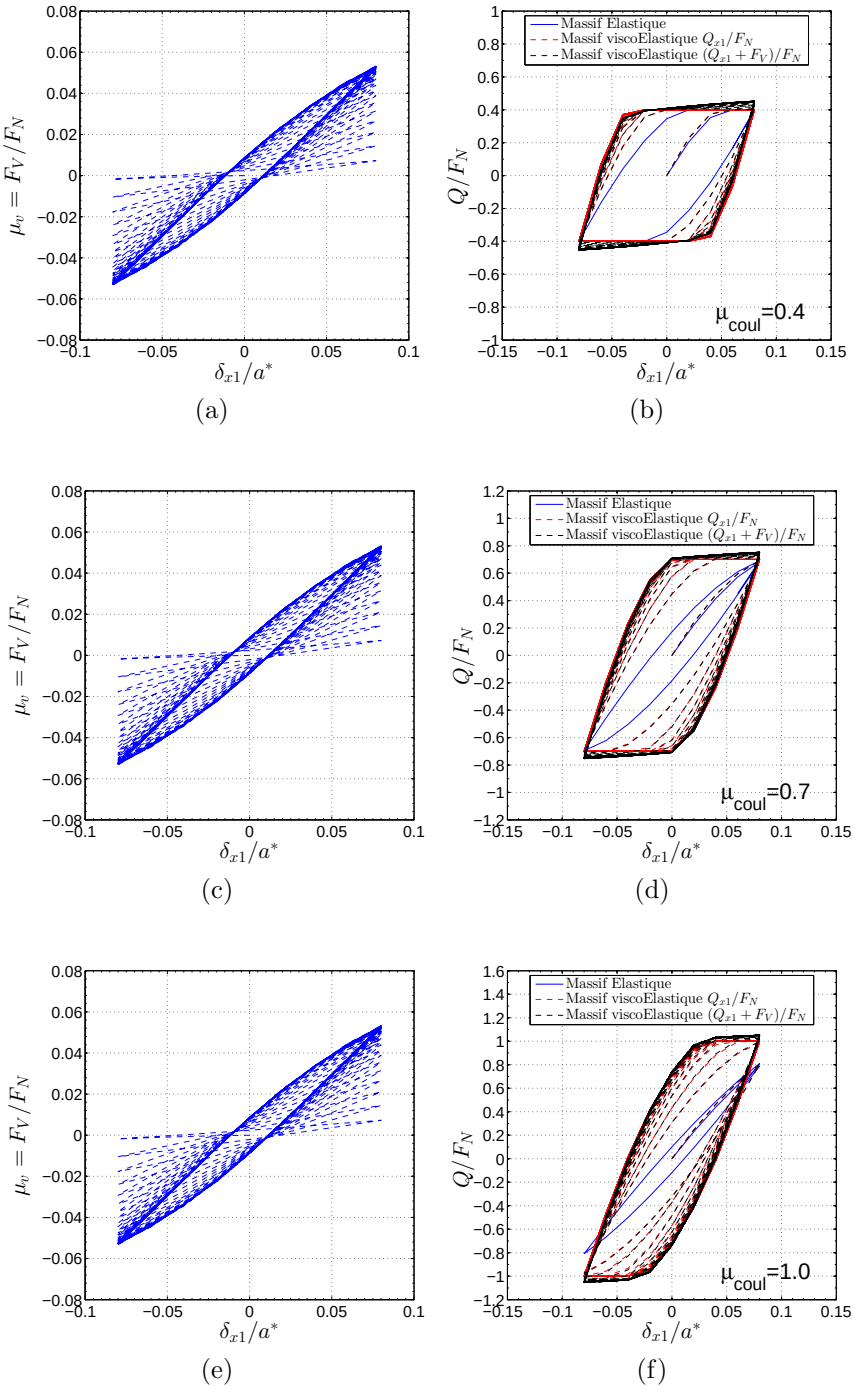
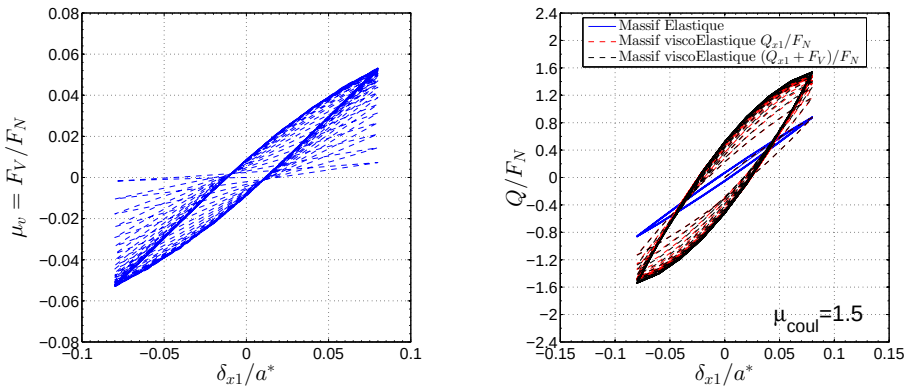


FIGURE 4.67 – Boucles de fretting de μ_v pour différentes valeurs du coefficient de frottement de Coulomb μ_{coul} ; $\mu_{coul} = 0.4$ (a) $\mu_{coul} = 0.7$ (c) $\mu_{coul} = 1.0$ (e) / Boucles de fretting de μ_{app} pour différentes valeurs du coefficient de frottement de Coulomb μ_{coul} ; $\mu_{coul} = 0.4$ (b) $\mu_{coul} = 0.7$ (d) $\mu_{coul} = 1.0$ (f).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 4.68 – Boucles de fretting de μ_v pour $\mu_{coul} = 1.5$ (a) / Boucles de fretting de μ_{app} pour $\mu_{coul} = 1.5$ (b).

Effet de la fréquence de chargement

Ici, la valeur du coefficient de frottement est fixée à $\mu_{coul} = 0.7$. L'effet de la fréquence du chargement sur l'évolution des boucles de fretting est étudié. Deux simulations sont réalisées : une pour $\lambda/\tau = 1$ et une autre pour $\lambda/\tau = 4$. L'amplitude du déplacement tangentiel est supposée constante $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$, Fig.4.69.

Plus la fréquence est élevée ($\lambda/\tau = 4$), plus l'effet visqueux est marqué (Figs. 4.70c et 4.70d). Pour $\lambda/\tau = 1$ le contact reste en stick-slip durant toute la durée de la simulation. Cependant $\lambda/\tau = 4$, un glissement total peut être observé. La boucle de fretting s'élargit, ce qui montre que l'énergie dissipée est plus importante. Une augmentation conséquente de μ_v, de 91.7% peut être observée entre le cas $\lambda/\tau = 1$ et $\lambda/\tau = 4$,(Figs. 4.70a et 4.70b).

Effet de l' amplitude du chargement

La valeur du coefficient de frottement est toujours fixée à $\mu_{coul} = 0.7$. Cette fois-ci la fréquence du déplacement tangentiel est identique pour les deux simulations $\lambda/\tau = 8$. Par contre, l'amplitude varie de la sollicitation varie : $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.32, +0.32]$ pour la première simulation et $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$ pour la seconde, Fig.4.71.

Lorsque l'amplitude est élevée, le contact se retrouve très vite en glissement total (Figs. 4.72c et 4.72d), même dans le cas élastique. Les boucles obtenues dans le cas viscoélastique deviennent très proches de celles obtenues dans le cas élastique. Dans ce cas de figure, le coefficient de frottement μ_v, induit par le seul fait de la dissymétrie des champs de pression, est plus élevé. Ici μ_v est proche de 0.1 (Figs. 4.72a et 4.72b), ce qui représente près de 14% du coefficient de frottement de Coulomb. Ce qui peut

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

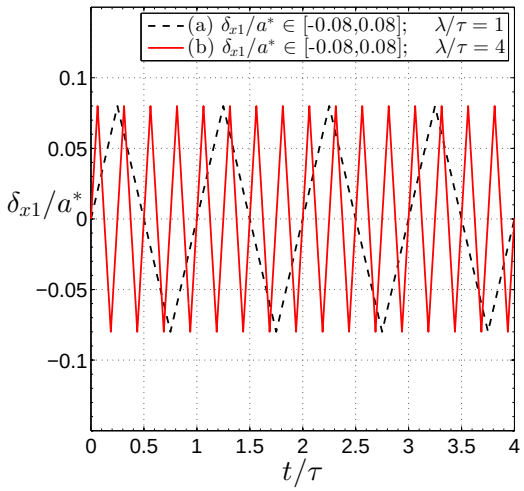


FIGURE 4.69 – Chargement en déplacement tangentiel imposé $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$ pour différentes fréquences $\lambda/\tau = 1$,$\lambda/\tau = 4$.

considérablement modifier la durée de vie.

De part cette analyse, il ressort que le phénomène de glissement total est prépondérant dans les contacts viscoélastiques. Il est dès lors possible de choisir au mieux les propriétés des revêtements viscoélastiques utilisées dans l'aéronautique. En effet en partant des sollicitations polycycliques, on peut choisir de manière optimale le revêtement permettant d'avoir la plus forte/faible adhérence. Car les propriétés d'adhérence, contrairement au cas élastique, sont liées à la nature, à l'amplitude et à la fréquence du chargement considéré. Un revêtement viscoélastique optimal pour des applications automobiles peut s'avérer peu performant pour des applications aéronautiques, et vice-versa. Ceci permettra de réduire considérablement le nombre d'essais.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

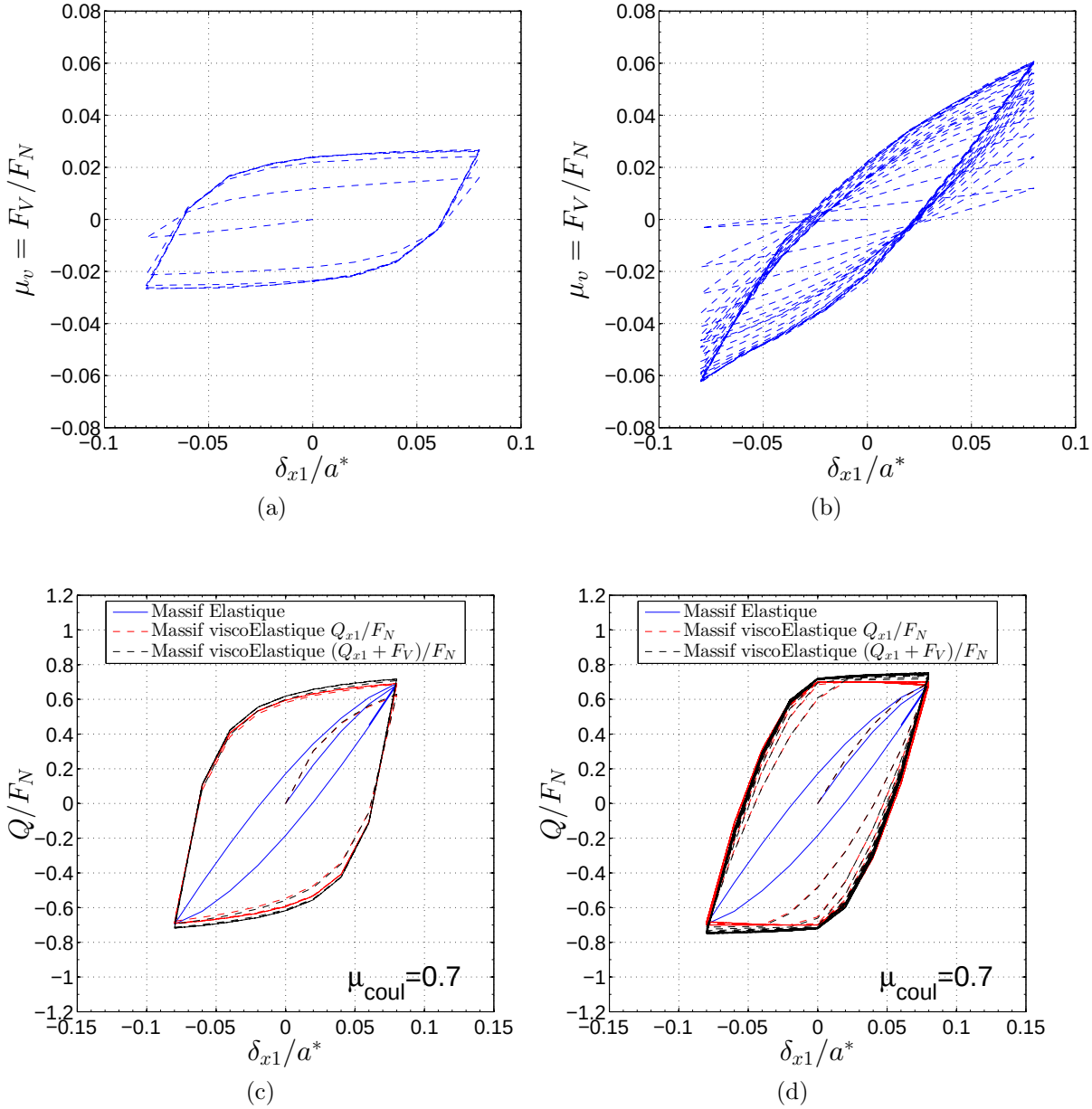


FIGURE 4.70 – Boucles de fretting de μ_v pour différentes fréquences (a) $\lambda/\tau = 1$ (b) $\lambda/\tau = 4$ / Boucles de fretting de μ_{app} pour différentes fréquences (c) $\lambda/\tau = 1$ (d) $\lambda/\tau = 4$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

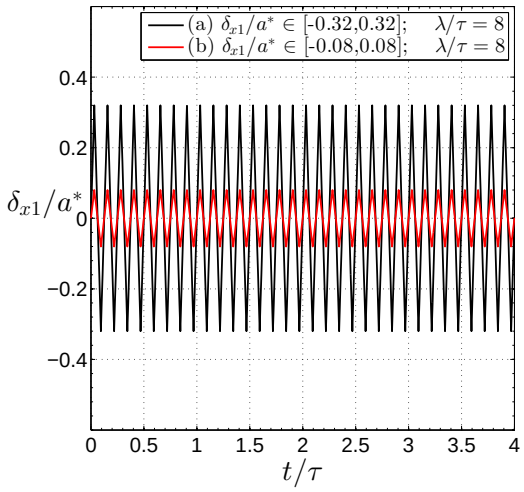


FIGURE 4.71 – Chargement en déplacement tangentiel imposé pour $\lambda/\tau = 8$ pour différentes amplitudes $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.32, +0.32]$, $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

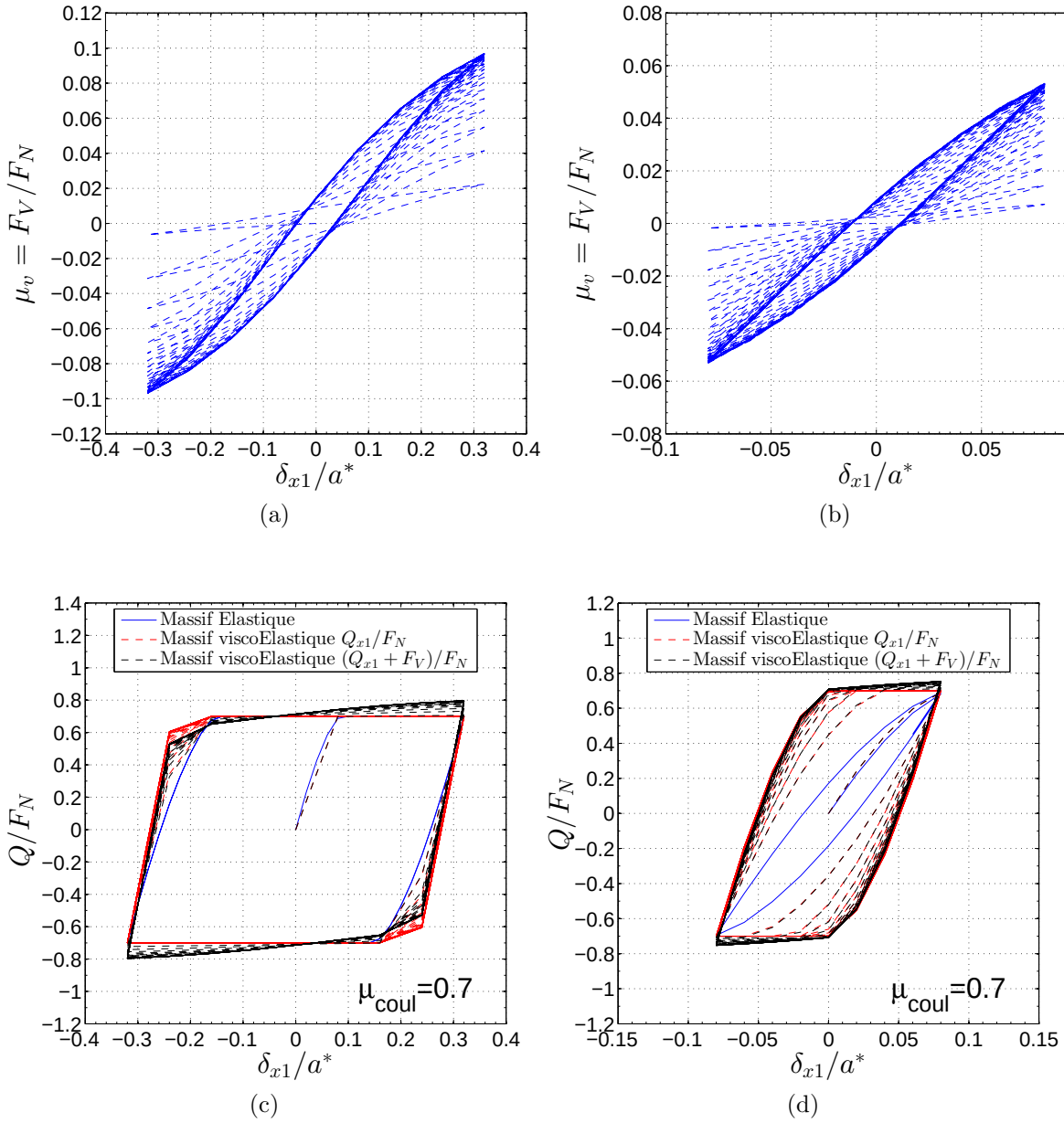


FIGURE 4.72 – Boucles de fretting de μ_v pour différentes amplitudes (a) $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.32, +0.32]$ (b) $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$ / Boucles de fretting de μ_{app} pour pour différentes amplitudes (c) $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.32, +0.32]$ (d) $\frac{\delta_{x1}}{a^*} \in [-0.08, +0.08]$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

4.10 Bilan partiel

Nous nous sommes intéressés à la modélisation du phénomène de fretting. La résolution du problème tangentiel a été réalisée. Pour des raisons de concision, l'analyse s'est limitée à l'étude de la transition entre le phénomène de stick-slip (adhérence/glissement) et le mouvement de full-slip (glissement) et à l'évolution des boucles/bûches de fretting. En déplacement normal imposé, le mouvement de stick-slip disparaît assez rapidement pour laisser place à un mouvement de glissement total. Ceci même si le déplacement tangentiel repasse par 0. Alors qu'en force normale imposée la zone située en bordure de contact reste en adhérence durant toute la durée de simulation. L'analyse des boucles de fretting montre que le phénomène de glissement total est prépondérant. L'énergie dissipée par fretting augmente considérablement par rapport au cas élastique. Les boucles de fretting sont sensibles aux fréquences de chargement.

4.11 Synthèse

Dans ce chapitre, la résolution du contact entre matériaux viscoélastiques homogènes/hétérogènes a été présentée. A noter que le contact viscoélastique est très peu étudié dans la littérature. Dans le modèle, les hétérogénéités sont élastiques (isotropes/anisotropes) et seul l'un des corps en contact peut contenir des hétérogénéités. Le chapitre est subdivisé en trois parties.
La première partie a été consacrée à un problème d'indentation entre matériaux viscoélastiques homogènes et hétérogènes. Dans le cas de l'indentation, seul le problème de contact normal est résolu. L'approche développée a été validée avec un modèle éléments-finis. Plusieurs types de chargement peuvent être pris en compte. Des cas d'applications à l'indentation du PMMA (PolyMethylMethAcrylate) ont été réalisés. Un déphasage entre la réponse du contact et le chargement imposé peut être observé lorsqu'on est présence d'un chargement sinusoïdal. Dans le cas du contact viscoélastique hétérogène, les résultats obtenus au chapitre 3 dans le cas de la matrice élastique ne sont plus valides. L'effet de l'hétérogénéité sur le problème de contact varie avec le temps et nécessite donc une modélisation fine. Le modèle peut prendre en compte une ou plusieurs hétérogénéités et peut traiter le cas des matériaux composites constitués d'une matrice viscoélastique et des renforts élastiques.
La deuxième partie s'est intéressée à des problématiques de roulement/glissement entre deux corps viscoélastiques ou entre un corps rigide et un massif viscoélastique [CAR 13]. L'approche a été validée avec une solution éléments finis et la solution de référence de Carbone [CAR 13] dans le cas des massifs homogènes. Le roulement/glissement entre massif viscoélastique hétérogène a été également étudié. Il a été montré par exemple qu'une hétérogénéité unique sphérique ne modifie pas le coefficient de frottement apparent. Le modèle, contrairement à la plupart des autres méthodes de la littérature, permet de décrire l'évolution des contraintes en sous-couche et notamment au voisinage de l'hétérogénéité.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La dernière partie est consacrée à l'étude du fretting dans le cadre des matériaux viscoélastiques. Le contact tangentiel est résolu et le couplage problème normal et tangentiel a été pris en compte. L'analyse s'est limitée au cas purement homogène pour des raisons de précision et de concision. La transition stick-slip varie considérablement selon que l'on soit en force normale imposée ou en déplacement normal imposé. L'analyse des boucles de fretting montre que le coefficient de frottement apparent augmente considérablement. L'énergie dissipée (aire sous la boucle de fretting) peut être 2 à 5 fois supérieure à celle dissipée dans le cas d'un matériau élastique et varie grandement en fonction de l'amplitude et la fréquence du chargement. Il est dès lors possible de choisir ou de concevoir au mieux des revêtements viscoélastiques en fonction des applications considérées réduisant ainsi le nombre d'essais.
L'étude réalisée dans ce chapitre a permis d'avoir une compréhension approfondie du contact viscoélastique, car il s'agit d'un problème très peu étudié dans la littérature. Le modèle peut prendre en compte des matériaux viscoélastiques avec plusieurs hétérogénéités et donc un matériau composite constitué d'une matrice viscoélastique et des renforts élastiques. L'avantage ici est qu'il est possible de résoudre un problème de contact en prenant en compte toute la microstructure (simulation dite full field), tout en gardant des temps de calculs raisonnables. Jusqu'à présent, l'approche développée a été validée de manière numérique. Il convient maintenant de proposer un dispositif expérimental permettant une validation expérimentale de notre approche.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 5

Vers une validation expérimentale

Dans ce chapitre, une méthodologie expérimentale de validation des modèles numériques développés sera proposée. Le dispositif expérimental mis en place permet de mesurer les champs de déplacements à l'interface des corps en contact à l'aide d'une technique de corrélations d'images. Les résultats obtenus par le dispositif expérimental ont été comparés aux résultats numériques et analytiques. Une bonne corrélation essais/calculs a été obtenue.

Sommaire

5.1 Introduction 217

5.2 Dispositif expérimental 217

5.2.1 Cahier de charges 217

5.2.2 Principe de fonctionnement 218

5.3 Eprouvette 223

5.3.1 Eprouvette homogène 224

5.3.2 Eprouvette hétérogène 225

5.3.3 Eprouvette composites 225

5.4 Réalisation des essais 226

5.4.1 Propriétés matériaux des corps en contact 226

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

5.4.2 Détermination du coefficient de frottement 226
5.4.3 Protocole opératoire 227
5.4.4 Post-traitement des résultats et méthode de corrélation d'images numériques. 228
5.5 Quelques résultats d'essais 230
5.5.1 Éprouvette homogène 231
5.5.2 Éprouvette composite 233
5.6 Vers une estimation expérimentale de la pression de contact 236
5.7 Synthèse 237

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

5.1 Introduction

Un dispositif expérimental développé au LAMCOS et considérablement modifié tout au long de cette thèse, a été utilisé pour réaliser des essais de fretting. L'originalité de l'approche réside dans le fait qu'on peut mesurer les champs de déplacements à l'interface des surfaces en contact. Le dispositif a mis beaucoup de temps à se mettre en place suite à de très nombreux essais infructueux.
Pour les matériaux homogènes, les solutions analytiques ainsi que les essais classiques prédisent assez bien ce qui se passe à l'interface des matériaux en contact. Par contre, avec l'avènement des matériaux composites, notamment dans le cas du contact aube/disque, il devient indispensable de connaître finement ce qui se passe à l'interface afin de valider les modèles numériques, de développer des lois d'endommagements phénoménologiques, ... La plupart des tribomètres existants se limitent à la mesure du coefficient de frottement de Coulomb et ne permettent pas de mesurer les champs de déplacements ou de déformations réelles à l'interface des corps en contact pour les trois modes de fretting. Le but de notre dispositif est donc de fournir une solution économique, simple et efficace permettant de répondre à ce besoin. Le dispositif expérimental a fait l'objet d'un dépôt de brevet SNECMA/LAMCOS.
Le chapitre se structurera en quatre grandes parties. Dans un premier temps la version finale fonctionnelle du dispositif expérimental sera présentée. Ensuite un zoom sera fait sur les différents types d'éprouvettes d'essais utilisées. Le protocole d'essais sera détaillé dans la troisième partie. Enfin, quelques résultats d'essais sur diverses éprouvettes seront présentés. Une comparaison essai/calcul sera effectuée dans le cas de l'éprouvette homogène.

5.2 Dispositif expérimental

5.2.1 Cahier de charges

La mise en place s'est faite progressivement après de nombreux essais infructueux. A chaque nouvel essai, il fallait revoir la conception de la machine, modifier des pièces, acheter de nouveaux composants ... Le fil conducteur de cette démarche était simplement de réussir à mesurer proprement les champs de déplacements de la surface de contact. Partant de ces champs de déplacements, il était alors possible de remonter aux champs de déformations.
Le dispositif expérimental devrait être capable de mesurer les champs de déplacements liés aux trois sollicitations de fretting (Fig.5.1). Il s'agit d'un dispositif expérimental à la pointe sur une thématique encore ouverte. Le terme fretting est employé lorsque les deux surfaces en contact sont soumises à des micro-déplacements tangentiels alternés. Et comme indiqué au chapitre 1, le fretting est l'un des principaux modes de défaillances du contact aube/disque. Cependant, de manière beaucoup plus générale, l'endommagement par fretting est également présent dans d'autres types de contact : liaisons (cannelures, liaisons par axe, pieds

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

d'aube de turbine,. . .), les assemblages rivetés (boulonnés) . . . Suivant l'amplitude de déplacement imposée, plusieurs types d'endommagements peuvent être rencontrés. Outre le fait de pouvoir valider des approches numériques, les essais permettent surtout de comprendre les phénomènes mis en jeu. Les contacts réels sont généralement complexes et très mal définis. Il est donc d'un point de vue expérimental (instrumentations d'essais, techniques de mesure) très difficile de travailler sur des configurations de contact réelles. La recherche académique et parfois même les industriels choisissent des géométries simplifiées, beaucoup plus faciles à instrumenter. Il existe donc trois types d'essais normalisés :

- le contact sphère/plan
- le contact plan/plan
- le contact cylindre/plan

L'analyse mécanique de la configuration « plan/plan » montre que la distribution de pression et de cisaillements se caractérise par une discontinuité en bordure de contact. Ceci n'est pas le cas pour les configurations « sphère/plan » et « cylindre/plan ». Pour des facilités d'instrumentation, la configuration « sphère/plan » sera retenue. Cependant le principe de base du dispositif peut s'appliquer à d'autres types de configuration (« pion/plan (plus proches du contact aube/disque) »). Les trois modes de fretting, définis par Mohrbacher sont bien adaptés au cadre du contact sphère-plan. Ces trois modes sont :

- le mode I : déplacement tangentiel
- le mode II : déplacement radial
- le mode III : déplacement orthoradial

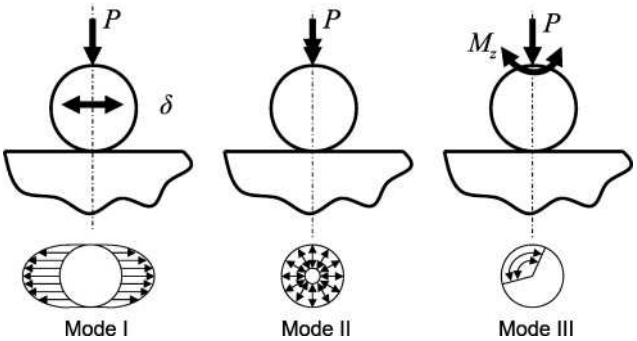


FIGURE 5.1 – Les trois modes de fretting [GAL 10b].

Le but de cette démarche expérimentale est donc de réussir à obtenir les champs de déplacements et de déformations lors des essais des trois modes de fretting, tels que définis par [MOH 95] (Fig.5.1).

5.2.2 Principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement du dispositif expérimental, « tribomètre » sera décrit ci-après.

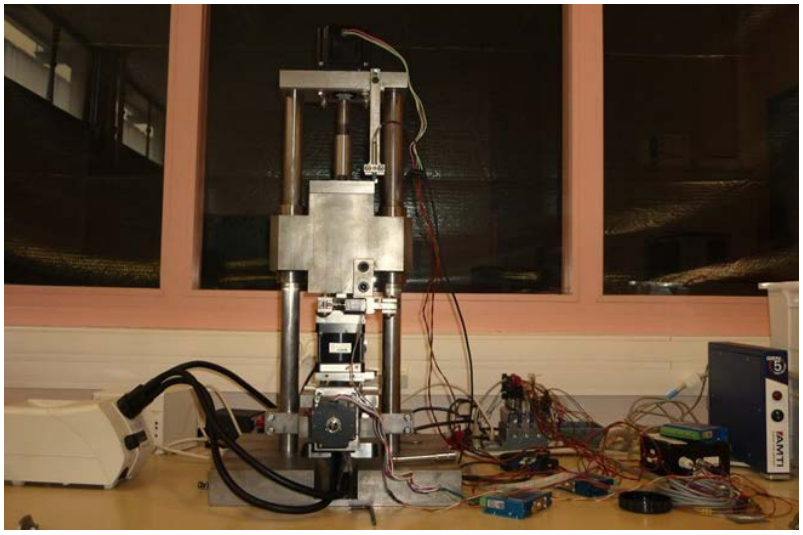
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Le dispositif est composé d'un bâti rigide permettant d'éviter des chargements parasites et d'avoir des mesures assez précises. En effet, les déplacements à mesurer étant de l'ordre du micron, la moindre déformation du tribomètre pourrait entrainer d'importantes erreurs de mesure. Une photo du dispositif expérimental (tribomètre+ caméra) ainsi que tous les composants électroniques qui le composent (contrôleur, ...) sont présentés à la figure 5.2a. La figure 5.2b présente la configuration CAO.

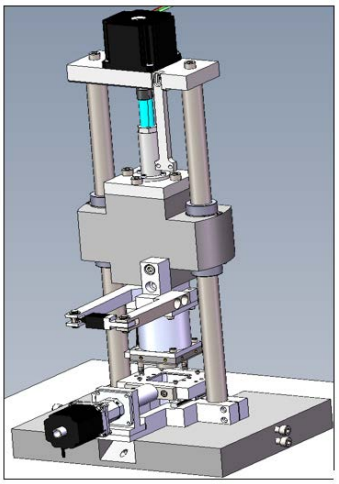
Le tribomètre comprend plusieurs composants

- un bâti rigide.
- une plaque de verre ayant de très bonne qualité optique. Les caractéristiques de la vitre utilisée sont données dans l'annexe B.
- une éprouvette de forme cylindrique dont le bout est surmonté d'une calotte sphérique. L'éprouvette pouvant être homogène, hétérogène ou composite (cf.Paragraphe 5.3). L'éprouvette doit présenter un mouchetis naturel pour pouvoir utiliser la corrélation d'images.
- Un capteur dénommé MC3A (de la société PM Instrumentation) mesurant trois composantes de forces F_X, F_Y, F_Z, et trois composantes de moments M_X, M_Y, M_Z.
- L'éprouvette est donc montée sur le capteur, l'ensemble (capteur, éprouvette) est mis en contact avec un verre rigide (Fig.5.3) ayant de très bonne qualité optique.
- Trois actionneurs permettent de reproduire les trois modes de fretting. Le premier actionneur est un moteur pas à pas configuré pour appliquer une force dans une direction verticale (Z), perpendiculaire à l'interface de contact. Le second actionneur est également un moteur pas à pas électrique configuré pour appliquer un déplacement alternatif suivant une direction parallèle Y, colinéaire à la surface de contact. Un troisième actionneur constitué d'un moteur pas à pas permettant d'appliquer un moment autour de l'axe Z, M_Z.
- Un système asservi permettant de contrôler les différents types de chargements appliqués.
- La surface ou interface de contact est éclairée à l'aide d'une « lampe pieuvre » de part et d'autre de l'échantillon (cf. Fig 5.4). Il s'agit d'un éclairage à incidence rasante de manière à éviter toute surbrillance de la surface à étudier. Il est possible d'envisager l'utilisation d'une lampe annulaire à LED en forme de parabole, de type CCS LDR2 afin d'améliorer l'homogénéité de l'éclairage sur l'interface de contact.
- Deux capteurs LVDT sont utilisés pour mesurer le déplacement de corps rigide suivant Z. Le premier se trouve avant le capteur de force, le second au niveau de l'échantillon. Le dispositif peut être aussi utilisé pour faire des essais **d'indentation**, même si ce n'est pas sa vocation première.
- Une caméra CCD (de 29 Mégapixels) et des moyens informatiques configurés pour déterminer les champs de déplacements sur la surface de contact et ainsi remonter aux champs de déformations. La caméra haute résolution (cf. Fig.5.5) est dotée d'un objectif télé-centrique (caractérisé par un grandisse-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



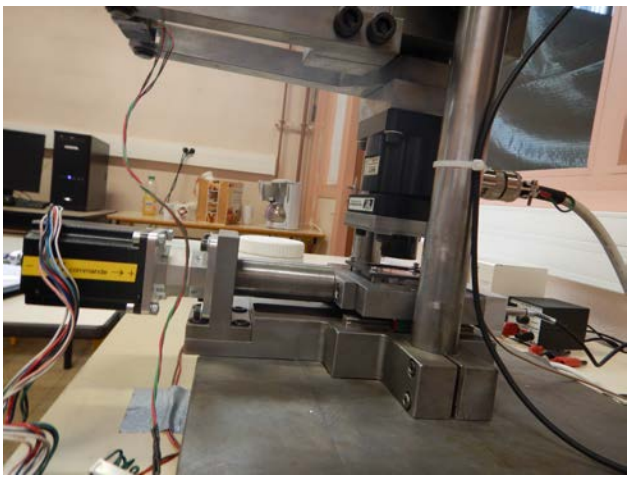
(a)



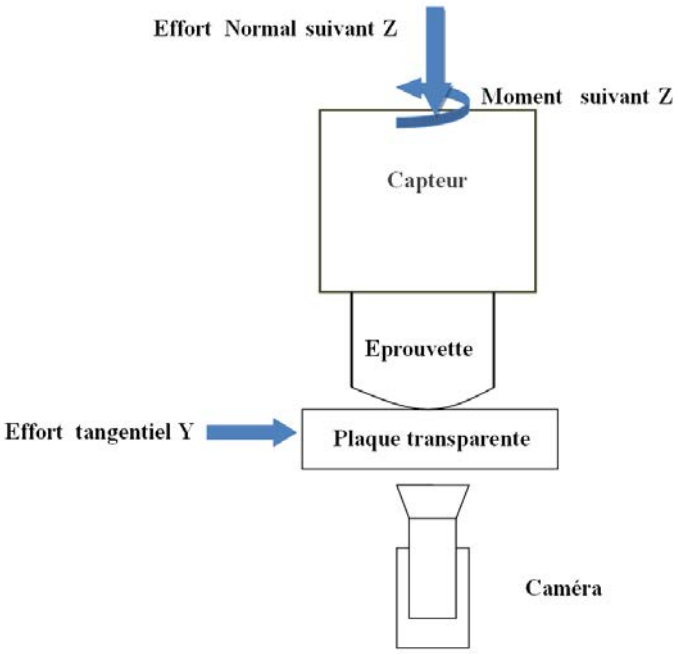
(b)

FIGURE 5.2 – Tribomètre expérimental ; (a) représentation photographique, (b) CAO.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a)



(b)

FIGURE 5.3 – Zoom sur la partie capteur-éprouvette-verre ; (a) représentation photographique, (b) représentation schématique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

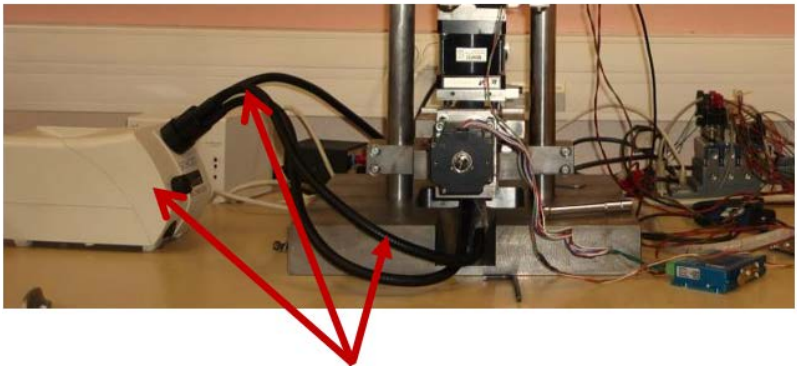


FIGURE 5.4 – Eclairage LED à l'aide des lampes pieuvres.

FIGURE 5.5 – Caméra Haute résolution à 29 Mégapixels.

ment constant quel que soit l'éloignement de l'objet par rapport à l'objectif) est placée en dessous de la vitre transparente.
- A partir des images enregistrées par la caméra, il est possible de remonter aux champs de déplacements et donc de déformations en utilisant une technique de corrélation d'images numériques.

En utilisant ce tribomètre, les conditions de contact ne sont pas perturbées lors de la mesure, ce qui très difficile à réaliser. En résumé, le dispositif expérimental décrit plus haut permet :
- de soumettre l'interface de contact (éprouvette/vitre) à des sollicitations de fretting en mode I, II ou III.
- d'identifier et de suivre les positions des points en contact au fur et à mesure du chargement.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

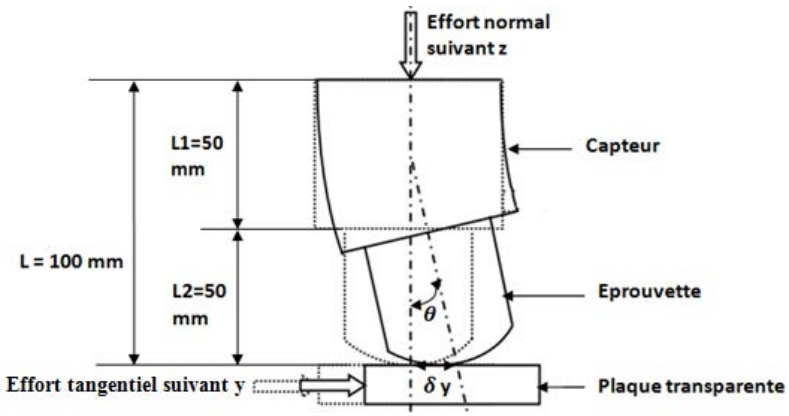


FIGURE 5.6 – Déformation de l'ancien capteur CMAX-010.

- de faire une capture des images à l'aide d'une caméra et des logiciels d'acquisition d'images.
- d'analyser les images enregistrées en utilisant des techniques de corrélations d'images de façon à déterminer les champs de déplacements de ladite interface.

Le principe tel que présenté paraît plus ou moins simple. Par contre, plusieurs difficultés restent à surmonter avant d'aboutir à un dispositif fonctionnel.

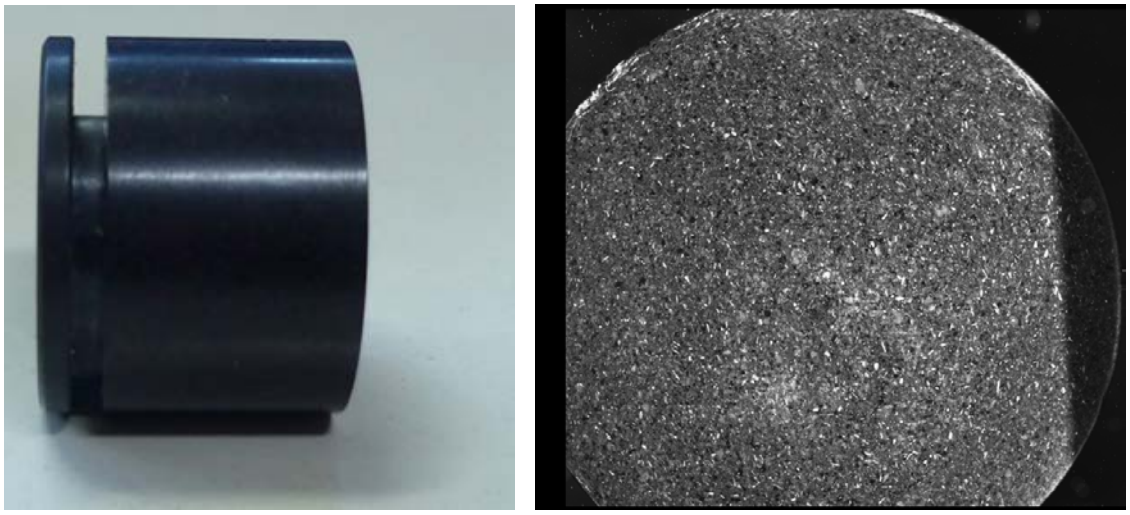
- Il était par exemple très difficile de faire coïncider le point d'application de la force et le centre de la zone de contact.
- d'éviter de perturber la surface de contact.
- Le capteur multi-composants à jauge utilisé initialement se déformait énormément (cf Fig. 5.6). Il en résultait donc un important déplacement de corps rigide suivant Y lors des sollicitations en mode I. Il fallait donc avoir un capteur le plus rigide possible. Ce principe est contraire au caractère intrinsèque même des capteurs à jauge, dont les mesures sont basées sur une déformation d'un corps d'épreuve. L'utilisation des capteurs piézoélectriques éviterait ce type de problème. Cependant les capteurs piézoélectriques se révèleront, après analyse, trop lourds. De plus, ces types de capteurs réalisent une « une mesure relative » et non « une mesure absolue ». Finalement, un capteur à jauge MC3A (cf. Annexe B) à très haute performance, avec de très faibles déflections, sera retenu.

5.3 Eprouvette

La géométrie de l'éprouvette peut être décomposée en deux parties : un corps cylindrique et une extrémité constituée d'une calotte sphérique (Fig.5.7a).

La détermination des champs de déplacements de la surface de contact est basée sur le principe de la corrélation d'images. Cela nécessite la présence d'un mouchetis sur la surface de contact. Deux possibilités s'offrent à nous en ce qui concerne la conception et la fabrication des éprouvettes :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 5.7 – (a)Vue 3D de l'éprouvette, (b) Image de la surface de l'éprouvette obtenue grâce à la caméra rapide.

– Fabriquer des éprouvettes sur lesquelles on rajoute un mouchetis. Le principal inconvénient de cette approche réside dans le fait que l'ajout d'un mouchetis « perturbe le contact ». Il est alors difficile de savoir et de comprendre ce qu'on mesure.

– Concevoir des éprouvettes dont la microstructure peut servir de mouchetis. En jouant sur la microstructure, il est alors possible de diminuer ou d'augmenter le niveau de gris. C'est cette deuxième option qui a été retenue pour la réalisation des essais (Fig.5.7b).

Le processus de fabrication des éprouvettes homogènes et hétérogènes sera présenté dans un premier temps.

5.3.1 Eprouvette homogène

La fabrication de l'éprouvette nécessite un mélange de trois résines de couleurs différentes : rouge, verte et noire (Fig.5.8).

Il a fallu dans un premier temps broyer les trois résines afin d'obtenir une poudre assez fine. Après le broyage des trois résines, il convient de les mélanger suivant la formule suivante : $57\%rouge + 28\%vert + 15\%noir$. Le mélange ainsi obtenu est compacté dans une machine d'enrobage à chaud disponible au laboratoire MATEIS (cf. Annexe B). Il faut toutefois rappeler que cette machine était destinée à l'origine au polissage des éprouvettes pour la microscopie électronique à balayage MEB.

L'éprouvette ainsi obtenue est usinée afin d'obtenir la calotte sphérique (cf. Annexe B).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

(a) (b) (c)

FIGURE 5.8 – Différentes couleurs de résines nécessaires à la fabrication des éprouvettes.

5.3.2 Eprouvette hétérogène

N'étant pas certain de l'arrivée des éprouvettes composites avant la fin de thèse, il a été décidé de concevoir des éprouvettes hétérogènes constituées d'une matrice résine et des billes céramiques. Ces billes céramiques sont des rebuts de roulements dont les propriétés matériaux sont respectivement : $E = 305000$MPa, $\nu = 0.3$. La démarche utilisée pour la fabrication de ces éprouvettes hétérogènes, est assez similaire de celle utilisée pour la fabrication des éprouvettes homogènes. L'enrobage à chaud est réalisé en ajoutant au préalable une ou plusieurs billes céramiques (Si3N4) au mélange des trois résines. Avec ce procédé, il est difficile de maîtriser précisément la position de ces billes (cf. Annexe B). Pour cela, la tomographie a été utilisée à posteriori pour déterminer leur position exacte. Les essais ont été réalisés en utilisant le système de tomographie informatisée à ultra haute résolution, Phoenix x-ray (MATEIS, INSA-Lyon). Le logiciel de traitement d'images fiji permet de remonter assez aisément :

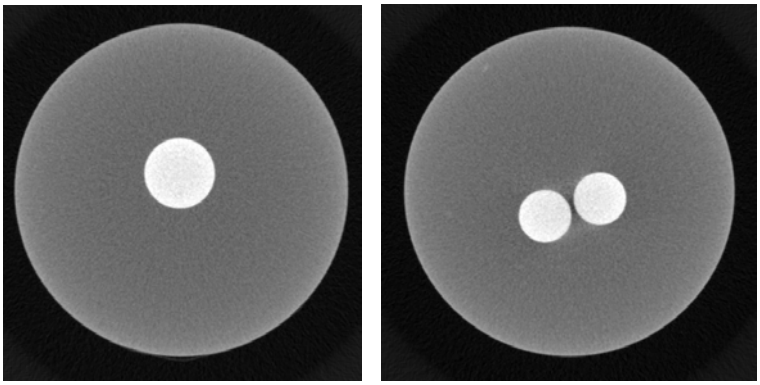
- au centre de gravité des inclusions
- aux dimensions des inclusions
- de connaitre la position du centre de gravité de l'inclusion par rapport à la surface inférieure/supérieure de l'éprouvette. Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer à l'annexe B.

On peut ensuite repositionner l'inclusion par rapport à la surface de contact en enlevant plus ou moins de matière lors du procédé d'usinage de la calotte sphérique.

5.3.3 Eprouvette composites

Les éprouvettes composites CMO présentent une microstructure naturelle qui permet d'avoir un bon niveau de gris pour la corrélation d'images. Cependant si le niveau de gris dans les fibres est élevé, le niveau de gris dans la partie "résine" reste très insuffisant. Plusieurs solutions d'améliorations existent actuellement. Une première approche consisterait à charger légèrement la résine afin d'avoir un bon niveau de gris. Durant cette thèse, nous n'avons pas eu la main sur le processus de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 5.9 – Tomographie d'une éprouvette hétérogène contenant (a) une ou (b) deux billes céramiques.

fabrication de ces éprouvettes composites.

Les éprouvettes sont ensuite réusinées de manière à avoir un bout en forme de calotte sphérique de rayon $R = 250mm$.

5.4 Réalisation des essais

Le dispositif expérimental permet de réaliser les essais de fretting en mode I, II ou III.

5.4.1 Propriétés matériaux des corps en contact

Plusieurs configurations peuvent être rencontrées. L'éprouvette peut être homogène, hétérogène ou composite. Il est également possible de choisir soit la vitre, soit une plaque PVC. La vitre offre de meilleurs résultats comparés à la plaque PVC. Les propriétés matériaux des corps en contact sont énumérées ci-dessous :

- **Propriétés de l'inclusion** (billes en nitrure de silicium Si3N4) : $E = 305000$MPa, $\nu = 0.3$.
- **Propriétés de la plaque PVC** $E = 3400$MPa, $\nu = 0.42$.
- **Propriétés de la vitre** $E = 72700$MPa, $\nu = 0.16$.
- **Propriétés de l'éprouvette** $E = 5758$MPa, $\nu = 0.37$.

5.4.2 Détermination du coefficient de frottement

La réponse des essais en mode I et III dépend fortement du coefficient de frottement. Il faudrait préalablement déterminer le coefficient de frottement entre

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

l'éprouvette et la vitre/plaque PVC transparente. Le coefficient de frottement peut être déterminé grâce au mode I. Il est bien connu qu'en mode I le régime de glissement total est atteint lorsque l'effort tangentiel Q atteint en valeur absolue le produit du coefficient de frottement μ_{coul} par l'effort normal F_Z ($Q = \mu_{coul} F_z$). Un effort normal $Fz = 2000N$ est appliqué, puis un effort tangentiel F_Y progressif est appliqué jusqu'au glissement. Le rapport entre ces deux efforts en début de glissement total donne le coefficient de frottement de Coulomb. En faisant plusieurs essais répétitifs, et prenant une moyenne statistique, le coefficient de frottement matériau homogène/verre s'élève à 0.11233. Le coefficient de frottement matériau composite/verre est de 0.055994. La valeur maximale du coefficient de frottement de Coulomb est de 0.25 et est obtenue pour le couple matériau homogène/plaque PVC. Il est également possible d'augmenter artificiellement le coefficient de frottement en appliquant un point de colle au niveau de la zone de contact pour augmenter légèrement l'adhérence éprouvette/plaque de verre.

5.4.3 Protocole opératoire

Comme mentionné précédemment le tribomètre expérimental peut réaliser des essais suivant les trois modes de Fretting (tels que définis par Mohrbacher [MOH 95] (Fig.5.1).

Les différentes étapes de réalisation d'un essai de fretting (Mode I, II ou III) sont décrites ci-après :

- La première étape consiste à monter l'éprouvette sur le capteur de force MC3A.
- Il faut ensuite faire une mise en contact entre l'ensemble capteur/éprouvette et l'ensemble vitre/bâti.
- Mettre en route le logiciel d'acquisition des images.
- Mettre la caméra en marche et vérifier la netteté de l'image.
- Régler la luminosité.
- Vérifier et régler la netteté de l'image.
- Mettre en route le logiciel d'asservissement. Ce logiciel permet de réduire l'écart entre la valeur mesurée et la consigne donnée en entrée.
- Mode I : En utilisant le logiciel « TriboAsser », fixer la valeur de la force normale F_Z à appliquer suivant Z. Ensuite appliquer une force tangentielle alternative entre $[-F_Y, +F_Y]$ (via le logiciel« TriboAsser ») par incrément de $F_Y/50$. A chaque incrément de chargement, enregistrer via la caméra rapide l'image de la zone de contact.
- Mode II : Augmenter de manière progressive la force normale verticale (via le logiciel« TriboAsser ») jusqu'à atteindre la valeur maximale de F_Z. A chaque incrément de chargement $F_Z/50$, enregistrer via la caméra rapide l'image de la zone de contact.
- Mode III : La valeur de la force normale suivant Z est fixée à F_Z. On augmente progressivement le moment suivant z (« TriboAsser ») jusqu'à atteindre M_Z. A chaque incrément de chargement $M_Z/50$, enregistrer en utilisant la caméra rapide

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

l'image de la zone de contact.

Pour les modes I et III l'utilisateur peut toujours rester en stick-slip ou en full slip. Cela dépendra du chargement appliqué, du coefficient de frottement de Coulomb du couple de matériaux mis en jeu.

Les images enregistrées lors de l'essai sont ensuite transférées vers un logiciel de corrélation d'images. Le logiciel Vic2D sera utilisé pour le post-traitement des essais avec des éprouvettes en résine, alors que le logiciel Uferspeckles sera retenu pour les éprouvettes composites. Les raisons de ces choix sont expliquées dans les paragraphes ci-dessous.

5.4.4 Post-traitement des résultats et méthode de corrélation d'images numériques.

Plusieurs méthodes de mesures de champs cinématiques en mécanique par méthode optique existent de nos jours. On pourra citer par exemple :

- la méthode de Moiré
- la photoélasticimétrie
- l'interférométrie laser
- la corrélation d'images numériques (ou DIC : Digital Image Correlation). Le LaMCoS possède des compétences très avancées en corrélation d'images numériques. C'est cette méthode de mesure qui sera retenue pour la mesure des champs de déplacements à l'interface des surfaces en contact.

Les paragraphes suivants présenteront rapidement le principe de la corrélation d'images. Pour plus de détails, le lecteur se rapportera à [HIL , MAY 12, MAR 15]. La corrélation d'images repose sur la comparaison de deux images : une image de référence correspondant à la configuration initiale et une image déformée correspondant à la configuration courante. Elle s'appuie sur l'équation de la conservation du flux optique et permet de mesurer un déplacement à partir de deux images prises pour deux états différents de sollicitations mécaniques. Il est donc supposé que toute différence entre l'image de référence et l'image déformée provient uniquement du champ de déplacement. Si on note $f(x)$ l'image de référence et $g(x)$ l'image déformée, l'hypothèse de conservation du flux optique [HOR 81] donne :

$$f(x) = g(x + u(x)). \tag{5.1}$$

où $u(x)$ décrit le champ de déplacement d'une image déformée à partir d'une image de référence. Deux approches différentes seront mises en œuvre pour le post-traitement des résultats par corrélation d'images.

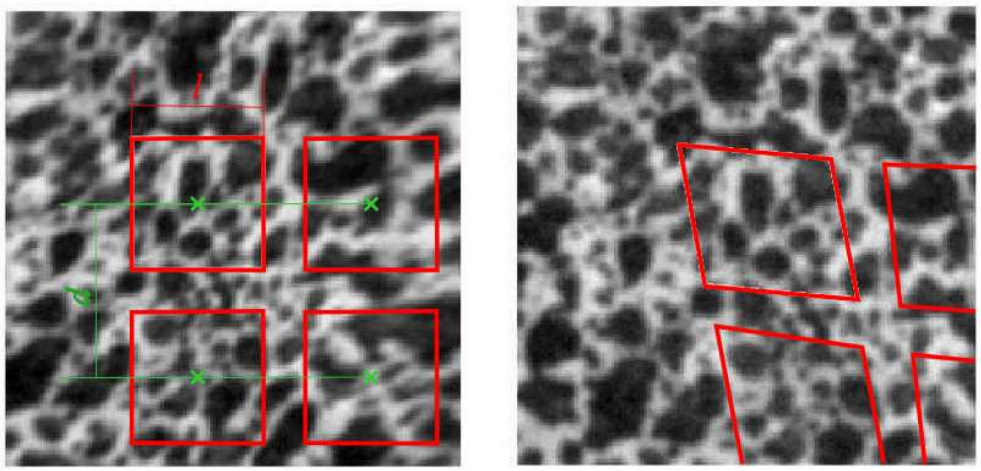
5.4.4.1 Méthode locale

Il s'agit de la méthode mise en œuvre dans le logiciel VIC-2D [SUT 83]. L'image analysée est divisée en une série de petites imagettes Ω_i (cf. Fig.5.10a), dont on va suivre les déplacements. Chaque imagette est ainsi traitée séparément une à une

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

par rapport à l'image de référence pour obtenir le déplacement du centre de chaque imagette, comme représenté sur la figure 5.10b. Le champ de déplacement $u(x)$ peut être estimé en intégrant sur un domaine d'intérêt Ω_i l'écart au carré des deux membres de l'équation 5.1.

$$\phi(u(x)) = \int_{\Omega_i} [f(x) - g(x + u(x))]^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{5.2}$$



(a) (b)

FIGURE 5.10 – Principe de la corrélation d'images locale : (a) image de référence, (b) image dans la configuration déformée.

où $f(x)$ représente l'image de la configuration de référence et $g(x)$ l'image de la configuration déformée.

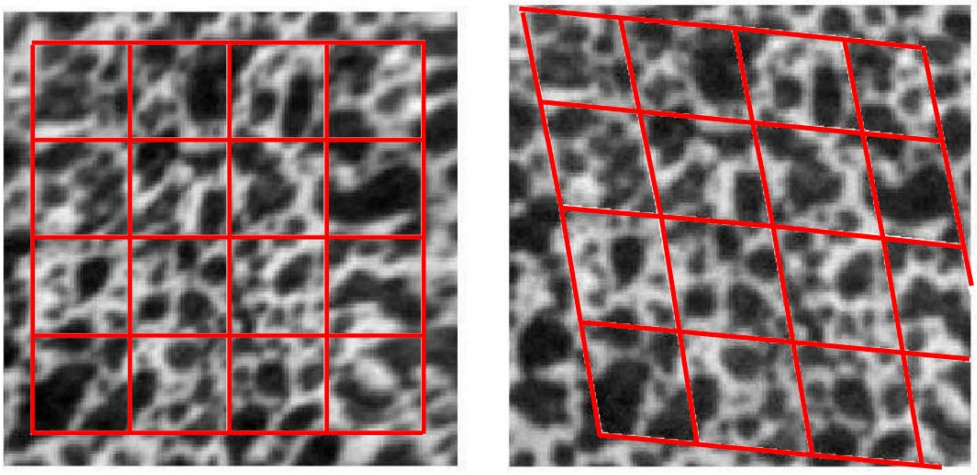
Dans la formulation locale, chaque composante du champ de déplacement $u(x)$ correspond donc au déplacement d'un domaine d'intérêt Ω_i, défini par son centre x. Le déplacement de chaque imagette est indépendant du reste de l'image. Cette méthode peut induire de fortes fluctuations d'une imagette à une autre, provenant par exemple du mouchetis, de la variation d'éclairage. Dans le cas des éprouvettes homogènes, le problème ne se pose pas. Par contre les résultats peuvent être fortement influencés dans le cas des éprouvettes composites.

5.4.4.2 Méthode globale

Un code de corrélation globale [BES 06], Uferspeckles est disponible au LAMCOS depuis peu. La corrélation globale ne considère plus le champ de déplacement comme la juxtaposition d'informations locales mais comme un champ continu, qui a une existence globale. L'approximation du champ solution $u(x)$ se fait en chaque nœud d'un maillage de type éléments finis. Les images étant discrétisées en pixels carrés,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

les éléments de référence (éléments finis) sont des quadrilatères. La méthode globale sera privilégiée pour le post-traitement des essais sur éprouvettes composites. Les éprouvettes composites présentent de fortes variations de microstructures et donc de fortes variations de mouchetis. La méthode globale sera donc la seule à même de donner des résultats fiables.



(a) (b)

FIGURE 5.11 – Principe de la corrélation d'image globale : (a) image de référence avec un maillage éléments finis, (b) image déformée avec le maillage éléments finis déformé.

5.5 Quelques résultats d'essais

Plusieurs tests préliminaires ont été réalisés afin d'étudier finement la répétabilité, la fidélité et la précision du dispositif expérimental. Ces tests ont également permis d'obtenir les paramètres donnant les meilleurs résultats en termes de fidélité, répétabilité, ... Plusieurs séries de tests faisant varier la vitesse de chargement ont été réalisées sur plusieurs jours. Ceci a permis d'étudier l'effet de l'environnement, de la surchauffe des composants électroniques, ... L'analyse des courbes obtenues montre :

- qu'une très bonne reproductibilité des essais est obtenue dès lors que le chargement se fait progressivement par palier de $50N$.
- la nécessité d'utiliser une table anti-vibration pour les essais en mode I et III. Cette table est actuellement en cours d'acquisition.

Les essais se sont donc principalement focalisés sur le mode II. La force normale verticale suivant Z est augmentée de manière progressive par palier de $50N$ jusqu'à $2000N$. Les résultats d'essais seront présentés ici pour l'éprouvette homogène et l'éprouvette composite.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

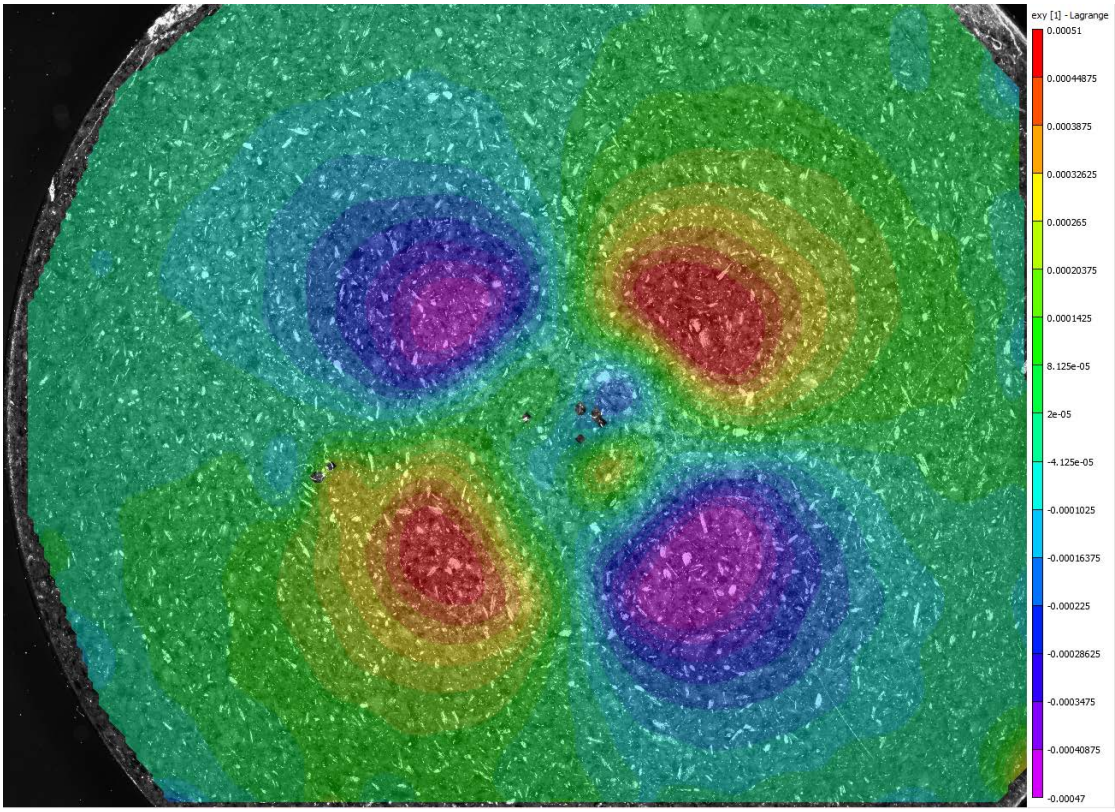


FIGURE 5.12 – Déformation ε_{xy} en utilisant la corrélation locale(VIC 2D).

5.5.1 Éprouvette homogène

– **Champs de déplacements et de déformations** : Les résultats de l'essai en mode II seront post-traités en utilisant à la fois le logiciel VIC 2D (méthode locale) et le logiciel Uferspeckles (méthode globale). Les résultats obtenus sont quasiment identiques aussi bien quantitativement que qualitativement. Les figures 5.12 et 5.13, présentent les champs de déformations ε_{xy} à l'interface des corps en contact.
La figure 5.14 présente les résultats obtenus par la simulation numérique. On remarque donc qu'il y a une très bonne corrélation entre les essais et le calcul, ce qui prouve la fiabilité du dispositif expérimental en ce qui concerne les essais de fretting en mode II.
– **Courbe d ′ indentation** : Outre l'obtention des déformations planes en surface, il est également possible d'utiliser le dispositif expérimental pour tracer la courbe d'indentation. En effet, un capteur LVDT permet de mesurer, au fur et à mesure que l'effort évolue, le déplacement normal vertical δ de la surface de contact. La courbe d'indentation obtenue dans le cas de l'éprouvette homogène est présentée à la figure 5.15.
La corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux, en ce qui concerne

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

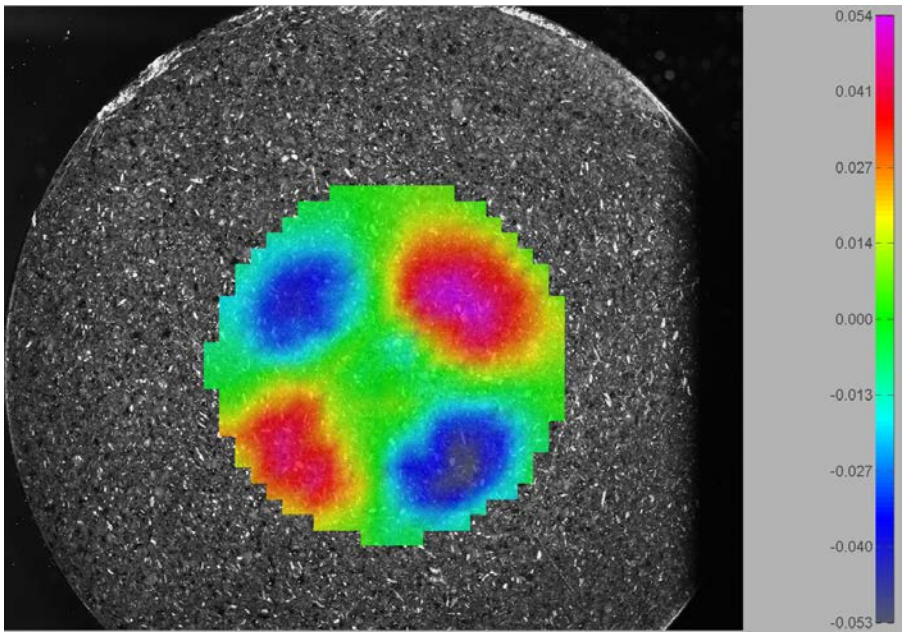


FIGURE 5.13 – Déformation ε_{xy} en utilisant la corrélation globale (Uferspeckles).

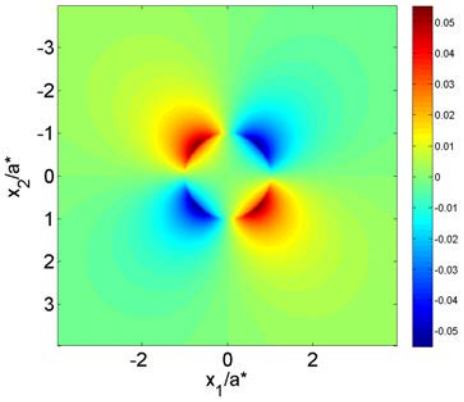


FIGURE 5.14 – Déformation ε_{xy} obtenue par la simulation numérique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

la courbe d'indentation, n'est pas très bonne. Ceci est lié principalement à la résolution du capteur LVDT utilisé pour la mesure du déplacement normal. La précision du capteur est de l'ordre de 10 microns. Il serait possible d'améliorer considérablement les résultats d'indentation en choisissant un capteur avec une meilleure précision, et surtout en utilisant une table anti-vibration.

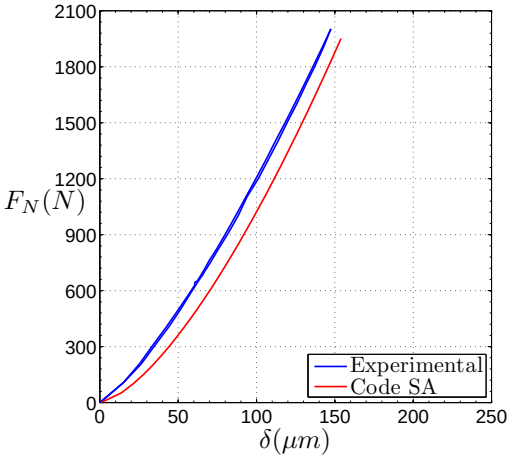


FIGURE 5.15 – Courbe d'indentation sur éprouvette homogène.

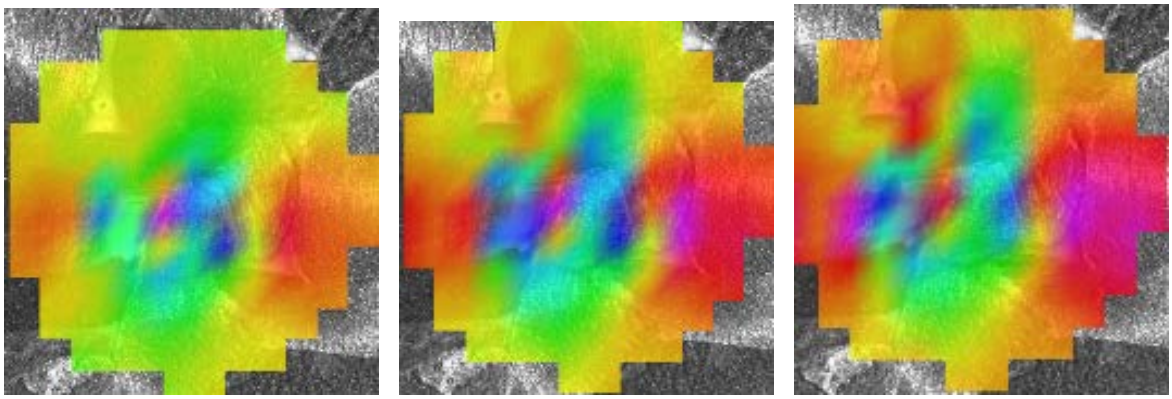
5.5.2 Éprouvette composite

Champs de déplacements et de déformations : Les essais avec l'éprouvette composite ne seront post-traités qu'avec le logiciel Uferspeckles qui utilise une approche de corrélation globale. Les résultats obtenus montrent une forte concentration des champs de déformations ainsi qu'une forte hétérogénéité de leur distribution. Ces résultats sont difficiles à prédire, d'autant plus que la surface de contact est composite (résine+fibre). Ce dispositif présente l'avantage de renseigner sur la compréhension physique du contact composite.

Courbe d′ indentation : De même, il est possible d'obtenir la courbe d'indentation dans le cas de l'éprouvette composite. La théorie de Hertz n'est plus valable car le matériau est fortement hétérogène et fortement anisotrope.

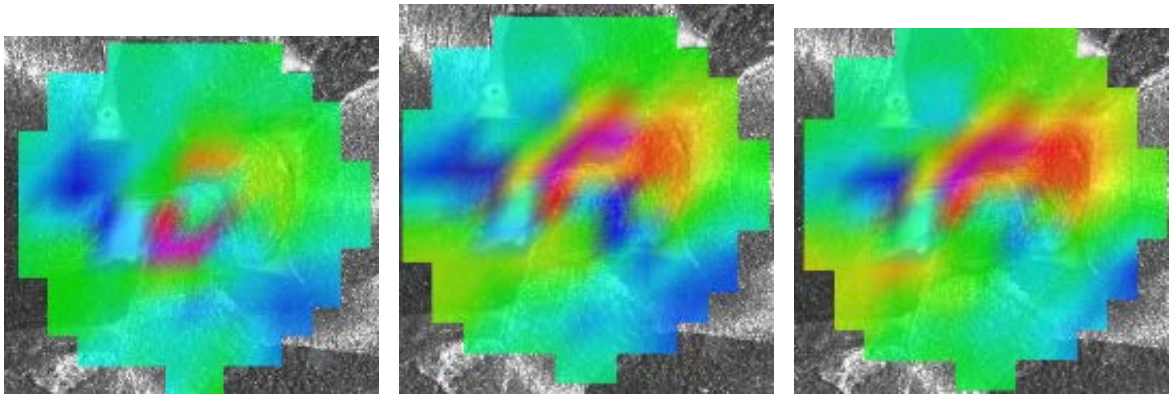
Il est difficile à l'heure actuelle d'envisager une comparaison essais/calculs dans le cas des éprouvettes composites. Les propriétés matériaux sont inconnues. Il faudrait au préalable connaître les propriétés matériaux ainsi que la mésostructure après usinage.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b) (c)

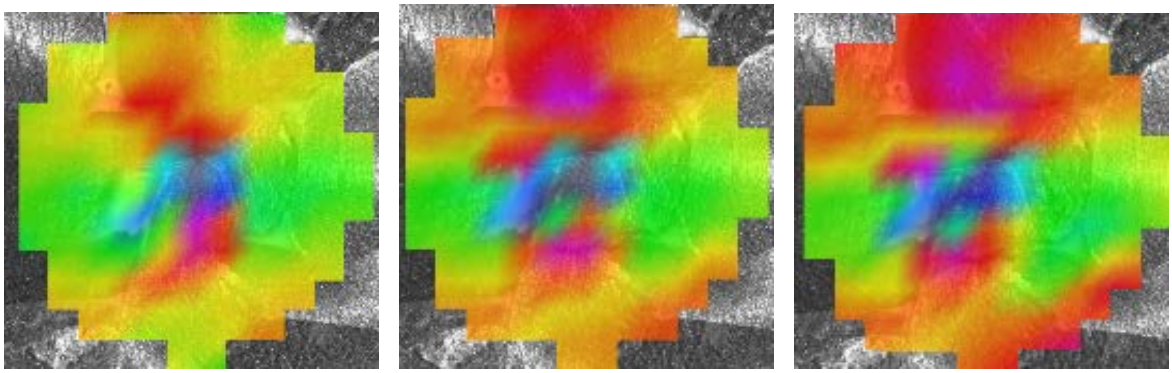
FIGURE 5.16 – Déformation ε_{xx} en utilisant la corrélation globale (Uferspeckles)(a) 200N (b) 1000N (c) 1600N.



(a) (b) (c)

FIGURE 5.17 – Déformation ε_{xy} en utilisant la corrélation globale (Uferspeckles) (a) 200N (b) 1000N (c) 1600N.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b) (c)

FIGURE 5.18 – Déformation ε_{yy} en utilisant la corrélation globale (Uferspeckles) (a) 200N (b) 1000N (c) 1600N.

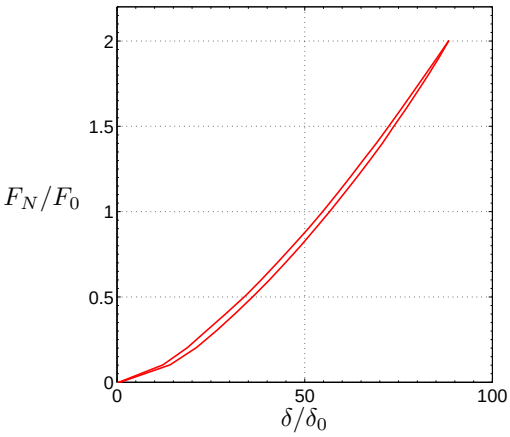


FIGURE 5.19 – Courbe d'indentation sur éprouvette composite.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

5.6 Vers une estimation expérimentale de la pression de contact

Les résultats présentés jusqu'à présent se limitaient aux champs de déformations et de contraintes dans le plan. Les variables telles que les champs de pression ne pouvaient pas être obtenus de manière expérimentale. Cependant des films (cf. Annexe B) existent depuis peu sur le marché permettant de remonter à la distribution spatiale des champs de pression (pas les valeurs). Il s'agit de films fins et flexibles (ne modifiant donc pas la nature du contact), qui placés entre deux solides en contact (cf. Fig.5.20), permet de remonter à la distribution de pression. Ces films ont été testés durant le stage de master de Tristan Bronsard, il s'est avéré que la gamme de pression que couvrent ces films soit relativement trop faible pour nos applications.

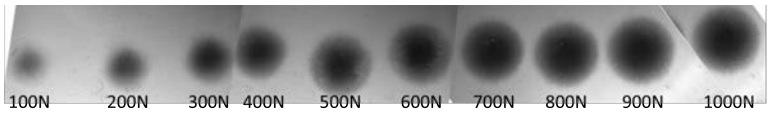


FIGURE 5.20 – Distribution de champs de pression dans le cas d'éprouvette homogène pour différents chargements.

La figure 5.20 présente une distribution des champs de pression dans le cas de l'éprouvette homogène. La gamme de force est limitée entre $[0, 1000N]$. Il est possible de mesurer la demi-largeur de contact et tracer la courbe $a^* = f_{fonc}(F)$, a^* étant la demi-largeur de contact. Une bonne corrélation essai-calcul est obtenue (Fig.5.21). La même démarche peut être appliquée aux éprouvettes composites.

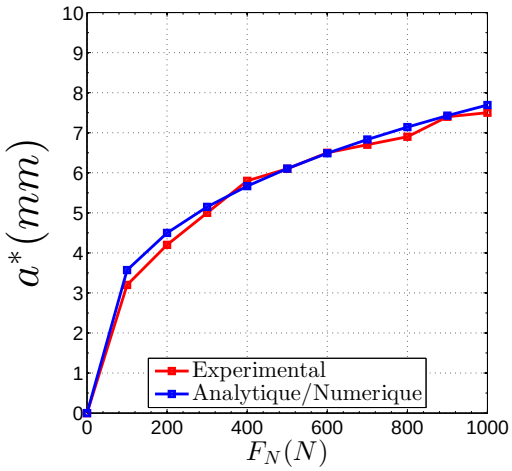


FIGURE 5.21 – Courbe force normale/rayon de contact, éprouvette homogène.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

5.7 Synthèse

Dans ce chapitre, un dispositif expérimental original a été mis en place afin de valider les méthodes numériques développées dans le cas du contact entre matériaux hétérogènes ou composites. Le dispositif expérimental a fait l'objet d'un brevet SNECMA/LAMCOS.
Les différentes composantes du dispositif ont été présentées dans un premier temps. Quelques difficultés liées la mise en place du dispositif ont été énumérées succinctement.
Dans la deuxième partie, diverses éprouvettes d'essais ont été présentées : éprouvettes homogènes, hétérogènes et composites. Un accent particulier a été mis sur le processus de fabrication des éprouvettes polymères. Des compositions spécifiques de résines permettent en effet d'avoir un très bon contraste pour la corrélation d'images. Dans le cas des éprouvettes polymères hétérogènes, des analyses par tomographie ont été réalisées afin de localiser la position des hétérogénéités par rapport à la surface de contact.
Le protocole expérimental a ensuite été présenté dans le cas des trois modes de fretting. Plusieurs tests ont été réalisés afin de s'assurer de la reproductibilité des essais. Une comparaison essais/calculs a été réalisée dans le cas des essais en mode II. La comparaison s'est limitée au cas des éprouvettes polymères. Une bonne corrélation essais/calculs a été obtenue dans le cas de l'éprouvette homogène. Une comparaison n'était pas cependant envisageable dans le cas des éprouvettes composites car les propriétés matériaux ainsi que la mésostructure ne sont pas connues. Dans la dernière partie un film spécifique a été utilisé afin d'évaluer la taille de la zone de contact.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 6

Applications sur quelques cas industriels

Le code développé est appliqué à quelques problématiques industrielles. Le code semi-analytique peut être utilisé comme un zoom dans la résolution des problèmes de contact aube/disque. Il s'agit d'un code robuste et rapide, facilement utilisable en bureau d'études, qui peut également contribuer à l'étude de la nocivité de défauts dans les billes céramiques. Enfin une application dans le cas d'un matériau composite idéalisé sera rapidement présentée.

Sommaire

6.1 Méthodologie multi-échelle de calculs sur pièces 240

6.1.1 Description du modèle éléments finis 240

6.1.2 Cycles de chargement 241

6.1.3 Résultats 241

6.2 Etude de la nocivité des défauts dans les billes céramiques. 247

6.3 Applications sur matériaux composites idéalisés 250

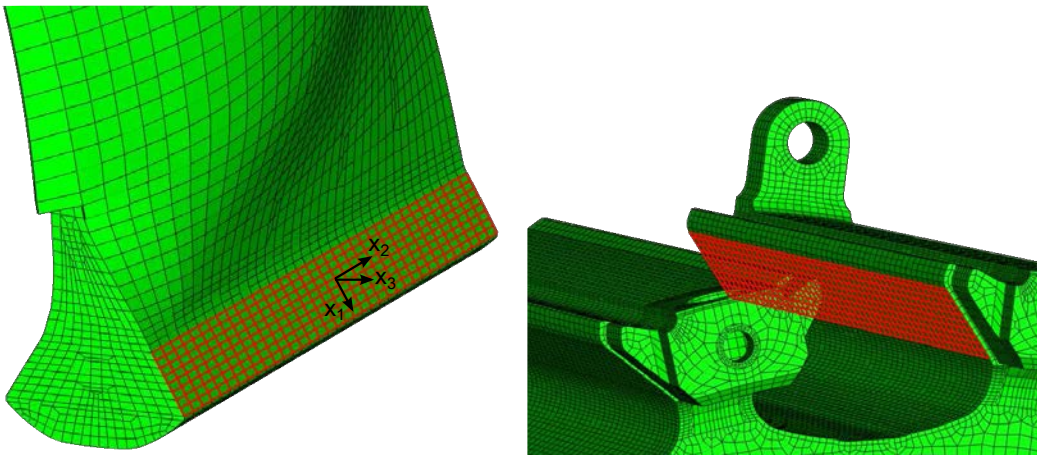
6.4 Synthèse 254

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

6.1 Méthodologie multi-échelle de calculs sur pièces

Le code semi-analytique peut être utilisé comme un zoom dans la résolution des problèmes de contact aube/disque (cf. Fig.6.1). Le problème global à l'échelle de la structure (chargements aérodynamiques) peut être résolu en utilisant un logiciel éléments finis commercial (Abaqus v6.11). Cependant, le contact sera résolu en utilisant le code semi-analytique. On est donc en présence de deux échelles : une première échelle qui est celle de la structure et une seconde échelle qui est celle du contact. La résolution du contact se fera via un couplage éléments finis (Abaqus v6.11)/semi-analytique (Code SA).

Une phase de décollage et d'atterrissage d'un moteur d'avion commercial sera simulée en utilisant un modèle éléments finis (Abaqus v6.11). Les torseurs d'efforts ainsi que leurs points d'application au niveau du contact aube/disque seront récupérés et utilisés comme données pour le code semi-analytique de contact afin de résoudre finement le contact, i.e. sur un maillage beaucoup plus raffiné. Le modèle éléments finis utilisé sera présenté dans un premier temps, le cycle de chargement dans un deuxième temps puis enfin les résultats obtenus en termes de champs de pression, de cisaillements et de contraintes en sous-couche.



(a) (b)

FIGURE 6.1 – Modèles éléments finis des portées extrados de l'aube et du disque (a) aube ; (b) disque.

6.1.1 Description du modèle éléments finis

Le type de chargement appliqué correspond à un démarrage et arrêt du moteur. Cette sollicitation correspond à l'application d'un chargement centrifuge sur l'aube et le disque puis d'un chargement de type pressions aérodynamiques sur les faces de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

l'aube. Un coefficient de frottement de Coulomb de 0.6 sera considéré. Le contact est résolu à partir de la méthode des pénalités afin d'assurer une bonne convergence du problème. Le disque sera la surface maître et l'aube la surface esclave. Le modèle comprend environ 90000 ddls.

Les champs de pression et de cisaillements sont récupérés à chaque incrément du calcul éléments finis. Le torseur des efforts transmis dans le contact est calculé à partir de la sommation des champs de pression et de cisaillements. Ce torseur sera utilisé en entrée du code semi-analytique

6.1.2 Cycles de chargement

L'analyse se limitera ici à la portée intrados. Le trajet de chargement lors d'une phase de démarrage et d'arrêt moteur est présenté à la figure 6.2 :

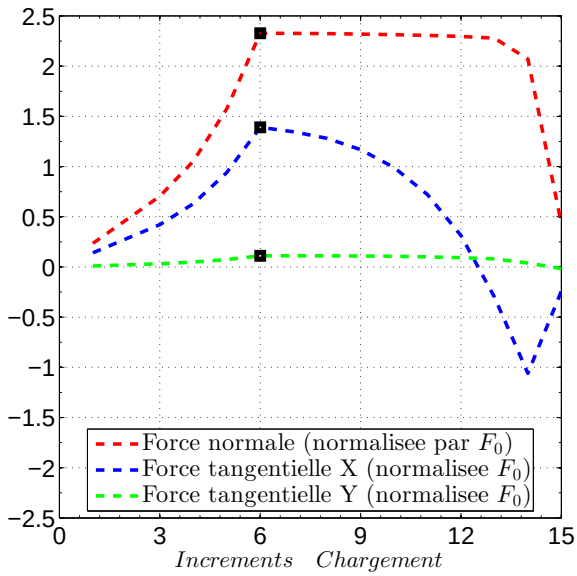


FIGURE 6.2 – Chargement de la portée intrados au contact aube/disque.

Dans la suite, les résultats ne seront présentés que pour l'incrément de chargement $N°$ 6 (cf. Fig.6.2).

6.1.3 Résultats

Les surfaces de la portée seront reconstruites pour leur utilisation dans le code SA. Elles seront définies par des plans et des rayons en sortie de portée. Le maillage du code semi-analytique utilisera 256 points dans la direction x (direction radiale du moteur) et 512 points dans la direction y (direction axiale du moteur). La taille de maille sera de 31 microns suivant x et de 282 microns suivant y.

– Champs de pression

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

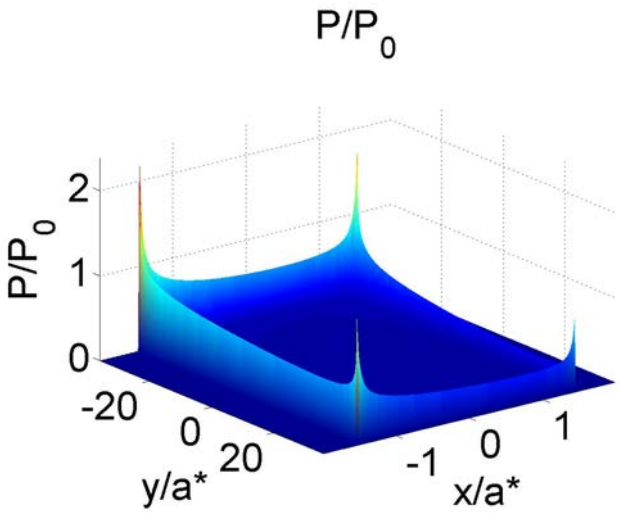


FIGURE 6.3 – Vue 3D de la distribution adimensionnée de champs de pressions sur le pied d'aube.

Il est possible d'avoir une représentation 3D de la distribution du champ de pression sur l'aube. Un premier constat porte sur l'amplitude des pics de pression ainsi que leur fine largeur par rapport aux dimensions du contact. Une représentation optimale de ces pics nécessite un maillage fin, maillage qui n'est pas envisageable avec un code éléments finis (temps de calculs très élevés).

– Champs de cisaillement

Les champs de cisaillements sont des variables très importantes utilisées en entrée de nombreuses lois d'usure [FOU 03b, FOU 03a] et lois d'endommagement par fretting. En plus des champs de pression, le code permet également d'avoir une bonne représentation de la distribution des cisaillements suivant x et suivant y (Figs.6.5, 6.6 et 6.7).

– Contraintes en sous-couche

En mécanique du contact, il est bien connu que le maximum de la contrainte de von Mises est localisé en sous-couche. Il est donc important d'arriver à estimer finement l'évolution des champs de contraintes en sous-couche en fonction du chargement. Le code semi-analytique autorise des niveaux de raffinements inimaginables pour un maillage éléments finis. Les figures 6.8 et 6.9 montrent la distribution des champs de contrainte en sous-couche dans les plans $X = 0$ et $Y = 0$ pour l'incrément 6 (Fig.6.2). Par exemple sur la figure 6.9a, une brusque variation de la contrainte de cisaillement σ_{13}/P_0 peut être observée. A cet endroit, le matériau est fortement sollicité à la fois en traction et en compression. Si amorçage de fissures il devrait y avoir, cela devrait se produire à cet endroit.

En comparaison, la figure 6.10 présente les champs de contraintes obtenus dans le cas d'un modèle éléments finis. Le maillage est assez grossier.

Comme le temps de calcul est très faible avec la méthode semi-analytique, il est possible de faire des calculs d'usure sur des milliers de cycles avec des temps de calculs

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

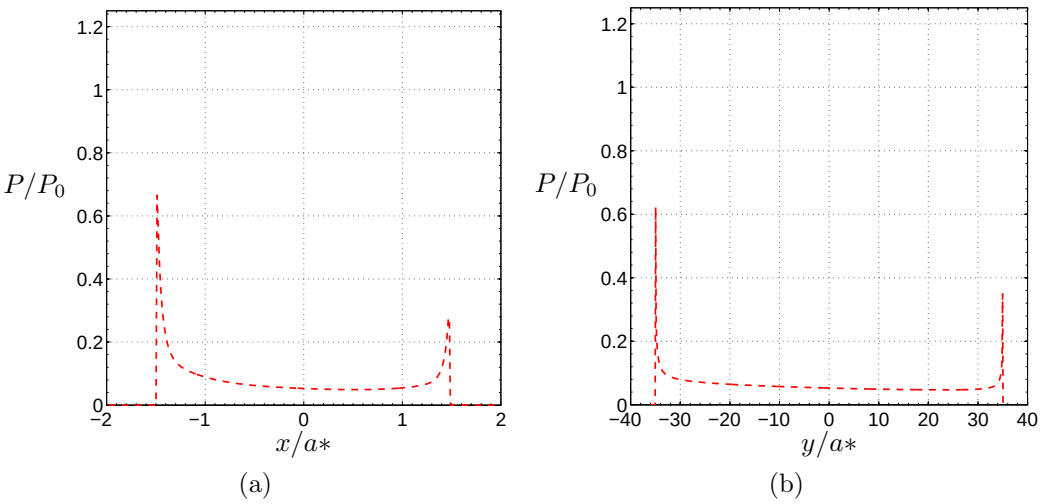


FIGURE 6.4 – Distribution de la valeur adimensionnée des champs de pression sur le pied d'aube (a) dans le plan $X = 0$; (b) puis dans le plan $Y = 0$.

relativement raisonnables. Les mêmes calculs d'usure sur des milliers de cycles avec la méthode éléments finis s'avèrent extrêmement coûteux en temps de calcul. Les lois d'usure utilisées sont obtenues sur des essais bien instrumentés et peuvent être facilement intégrées au code de calcul semi-analytique. La méthode semi-analytique peut être vue comme une méthode de zoom permettant d'accélérer les calculs de contact. Ainsi il est possible de simuler 60000 cycles d'usure avec bouclage (bouclage structure (EF)/contact (SA)) tous les 100 cycles. Le bouclage consiste donc à introduire les géométries usées, obtenues avec le code semi-analytique, dans le modèle structurel éléments finis afin d'avoir les nouveaux torseurs d'efforts.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

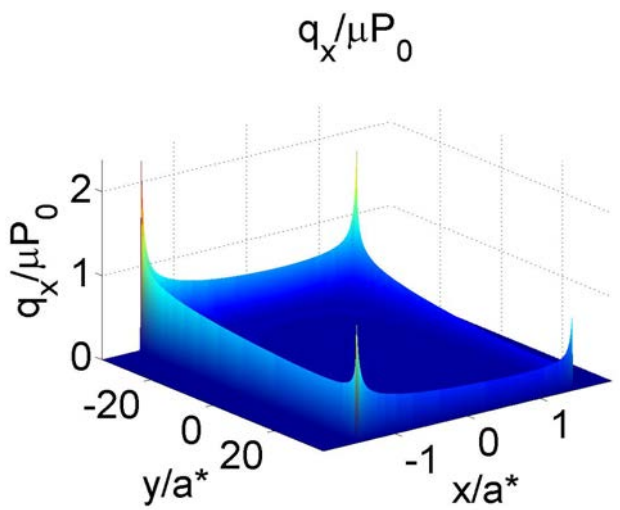


FIGURE 6.5 – Vue 3D de la distribution adimensionnée de champs de cisaillements q_x sur le pied d'aube.

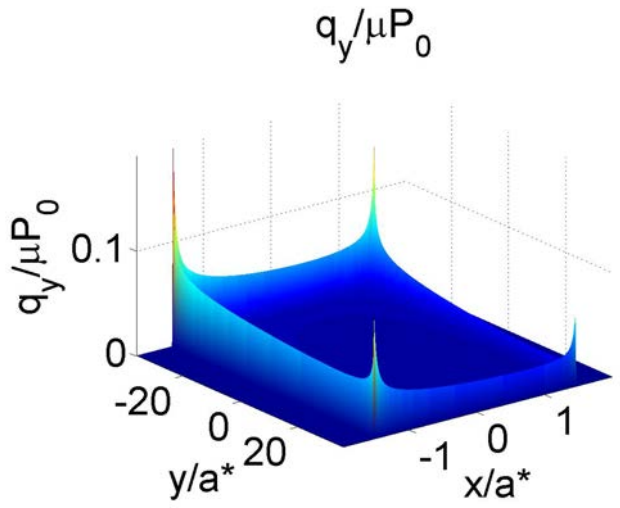


FIGURE 6.6 – Vue 3D de la distribution adimensionnée de champs de cisaillements q_y sur le pied d'aube.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

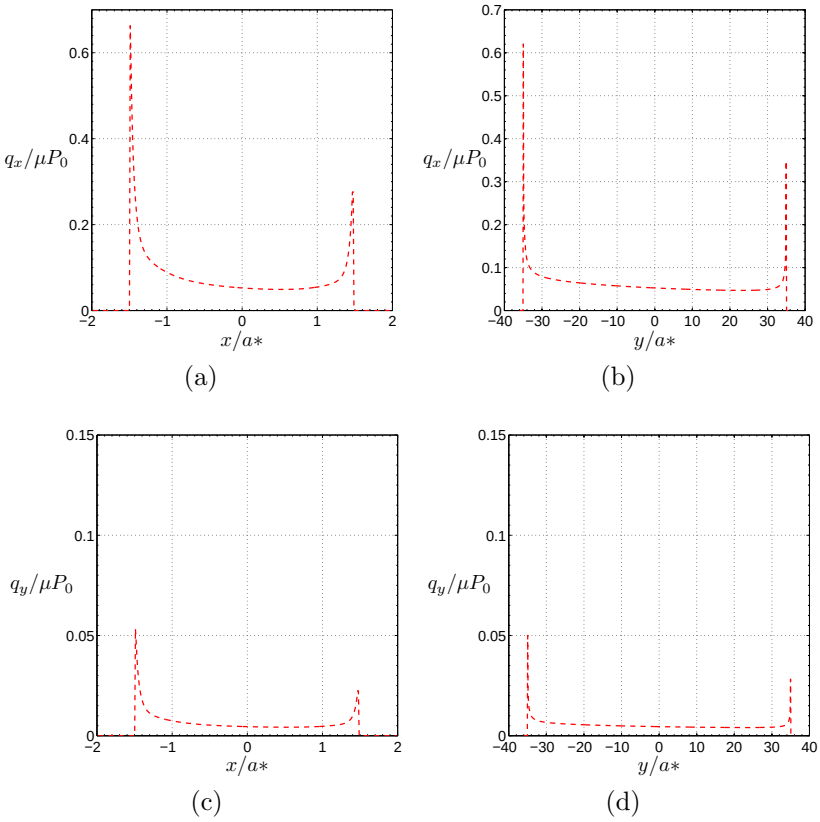


FIGURE 6.7 – Distribution de la valeur adimensionnée des champs de cisaillements q_x (a) dans le plan $X = 0$ et (b) dans le plan $Y = 0$; et des champs de cisaillements q_y (c) dans le plan $X = 0$ et (d) dans le plan $Y = 0$.

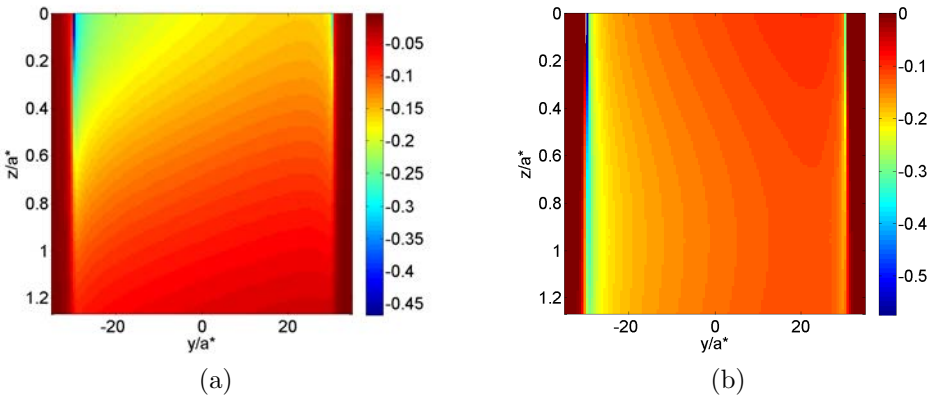
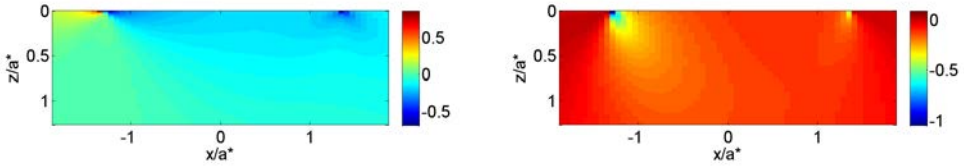


FIGURE 6.8 – Distribution de la valeur adimensionnée des champs de contraintes en sous-couche dans le plan $X = 0$ (a) σ_{13}/P_0 et (b) σ_{33}/P_0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 6.9 – Distribution de la valeur adimensionnée des champs de contraintes en sous-couche dans le plan $Y = 0$ (a) σ_{13}/P_0 et (b) σ_{33}/P_0.

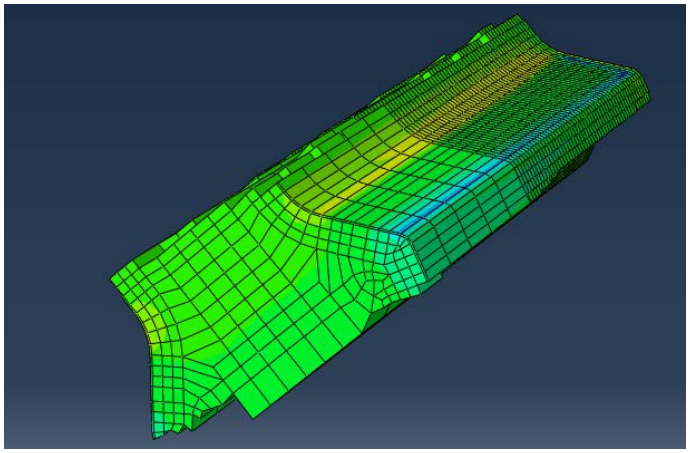


FIGURE 6.10 – Distribution des contraintes avec le modèle EF.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

6.2 Etude de la nocivité des défauts dans les billes céramiques.

Les travaux réalisés sur les hétérogénéités peuvent également s'utiliser en bureau d'études afin d'étudier la nocivité de défauts dans des éléments de roulements, par exemple pour des billes céramiques. Ces billes céramiques du fait des processus de fabrication, peuvent contenir divers défauts qui réduisent leurs durées de vie et leurs performances. Compte tenu du fait que ces types de défauts sont divers et variés (porosités, inclusions, ...), il est impossible de les reproduire industriellement et de les tester un par un.

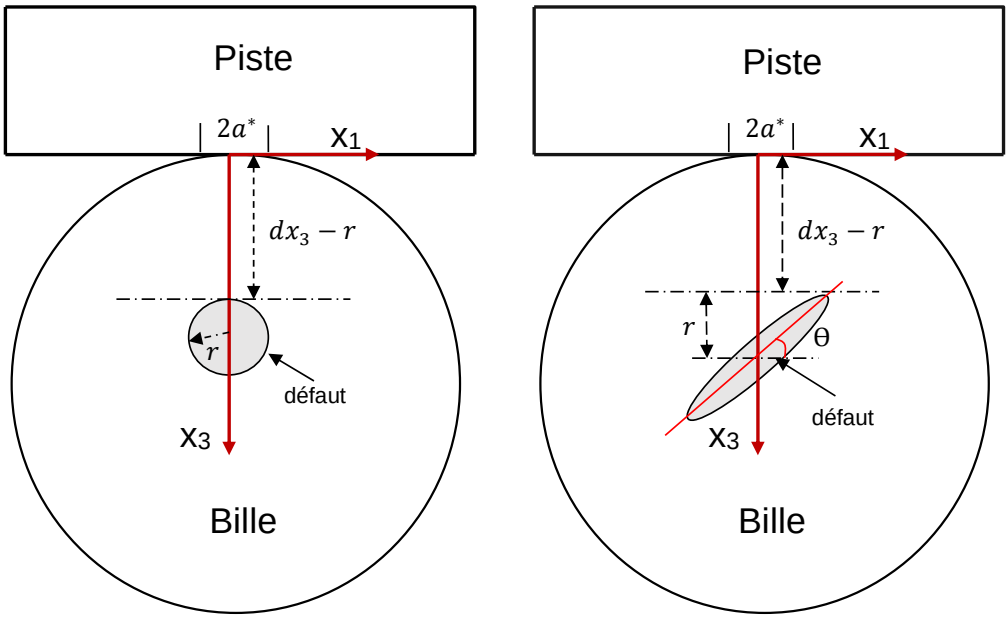
Il faudrait donc arriver à proposer un modèle rapide et générique permettant de faire une étude rapide de nocivité de défauts dans les roulements hybrides sous chargement de contact. Les méthodes analytiques usuelles sont insuffisantes. La méthode des éléments finis classiques n'est pas adaptée à ce genre de modélisation pour plusieurs raisons. La première, il faudrait pour chaque défaut, refaire un maillage, faire une étude de convergence de maillage et s'assurer la convergence du contact à chaque fois. Ce type d'étude (convergence de maillage, convergence du contact) peut s'avérer très lourd et n'est clairement pas envisageable à l'heure actuelle. La seconde raison réside dans le coût de calcul associé à chaque calcul éléments finis ainsi que le post-traitement associé.

Vu la flexibilité et les gains en termes de temps de calculs offerts par le code SA, il est clairement possible d'envisager ce genre d'étude avec une matrice contenant plus de 300 calculs. Il faut rappeler que cette matrice a été conçue puis affinée grâce aux études préliminaires et la compréhension qu'on avait sur les hétérogénéités élastiques isotropes [KOU 14b]. Deux variables d'études seront introduites afin d'évaluer la surcontrainte induite par la présence des défauts.

$$\beta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^{avecdefaut} - \sigma_{ij}^{sansdefaut}}{\sigma_{ij}^{sansdefaut}} = f(\frac{dx_3 - r}{a^*}) \tag{6.1}$$

où : dx_3 est la position du centre du défaut.
r est le rayon de l'hétérogénéité sphérique dans le cas d'une hétérogénéité sphérique (Fig.6.11a).
Dans le cas d'une forme ellipsoïdale, r sera la projection (Fig.6.11b) du grand axe de l'hétérogénéité sur l'axe x_3.
β_{ij} la surcontrainte induite par la présence d'un défaut. La fonction f sera donc unique (quel que soit le chargement), pour un couple matériaux et géométriques donnés. De ce fait, f peut donc se présenter sous forme d'abaques pour différentes familles de défauts donnés. Pour faciliter la compréhension, l'approche sera mise en œuvre sur un cas concret. Considérons un contact roulant entre une bille en céramique ($E = 305GPa$, $\nu = 0.28$) et une piste en acier ($E = 210GPa$, $\nu = 0.3$). Les champs de contraintes en sous-couche correspondant à cette configuration sont bien connus du concepteur BE, et sont présentés à la figure 6.12.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 6.11 – Étude de défauts dans les billes céramiques (a) Cas d'une hétérogénéité sphérique (b) Cas d'une hétérogénéité ellipsoïdale.

Supposons qu'un défaut de type hétérogénéité sphérique dure de rayon r, de propriétés élastiques ($E = 610GPa$, $\nu = 0.28$) est identifié à une position dx_3 dans la bille en céramique par tomographie. Le concepteur BE cherche donc à savoir quelle sera l'influence de ce défaut sur les contraintes. Est-ce que la bille en question peut être utilisée ? doit-elle être rebutée ?

L'abaque f (issu de la méthode semi-analytique) correspondant à ce couple géométrique/matériau est donné à la figure 6.13.

Il ressort clairement que pour $\frac{dx_3 - r}{a^*} \geqslant 0.8$, l'impact du défaut sur le problème global peut donc être totalement négligé.

Ainsi pour le chargement F_0, $a* = a_0$, le BE doit contrôler une profondeur de $0.8a_0 + r$, au-delà de cette profondeur, l'impact du défaut sur le problème de contact peut être négligé. Une étude plus fine de la zone critique à contrôler (ici $\frac{dx_3 - r}{a^*} \leq 0.8$) en prenant en compte éventuellement la plasticité peut être envisagée. Cependant cette étude simple permet d'avoir des critères assez robustes. Il arrive parfois que la zone critique à contrôler représente à peine 2% du volume total de la bille. Ceci réduit considérablement le nombre d'essais, la charge de travail, permet de gagner du temps et d'avoir des cahiers de charges moins restrictifs pour les sous-traitants. Il est possible en se basant sur cette méthode des abaques, de faire une classification

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

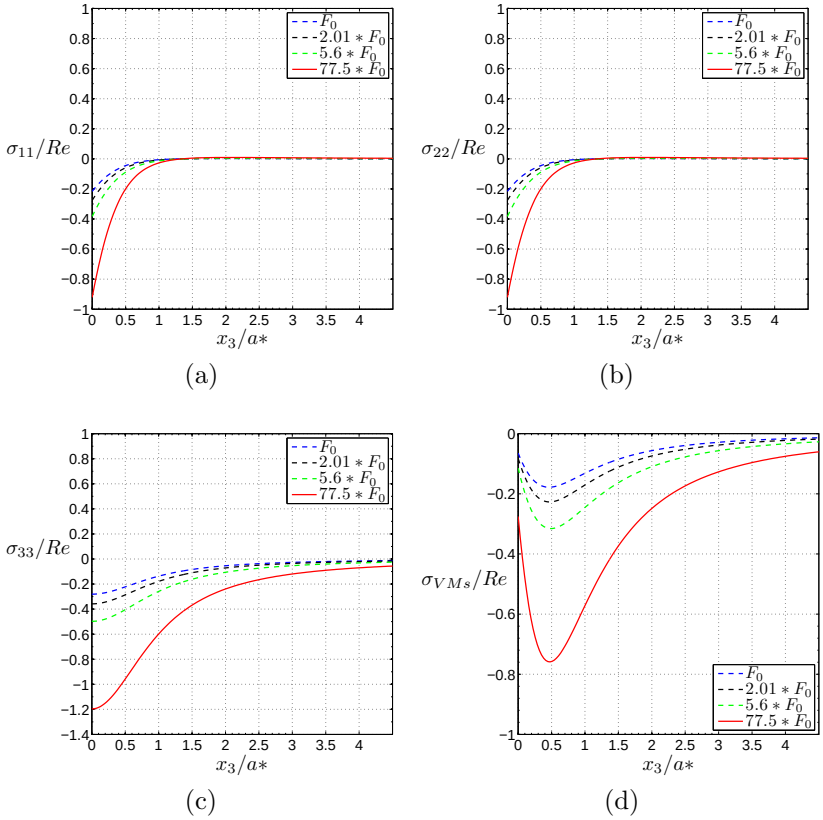


FIGURE 6.12 – Valeur adimensionnée des contraintes suivant l'axe Z dans le cas d'un massif homogène (sans défauts).

des défauts, de mettre en place des méthodes et critères de contrôle. Il s'agit de résultats qualitatifs et une bonne corrélation essais/calculs fut obtenue par la suite. Des études beaucoup plus précises pourront être faites ensuite pour décrire finement les phénomènes d'endommagement, ...

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

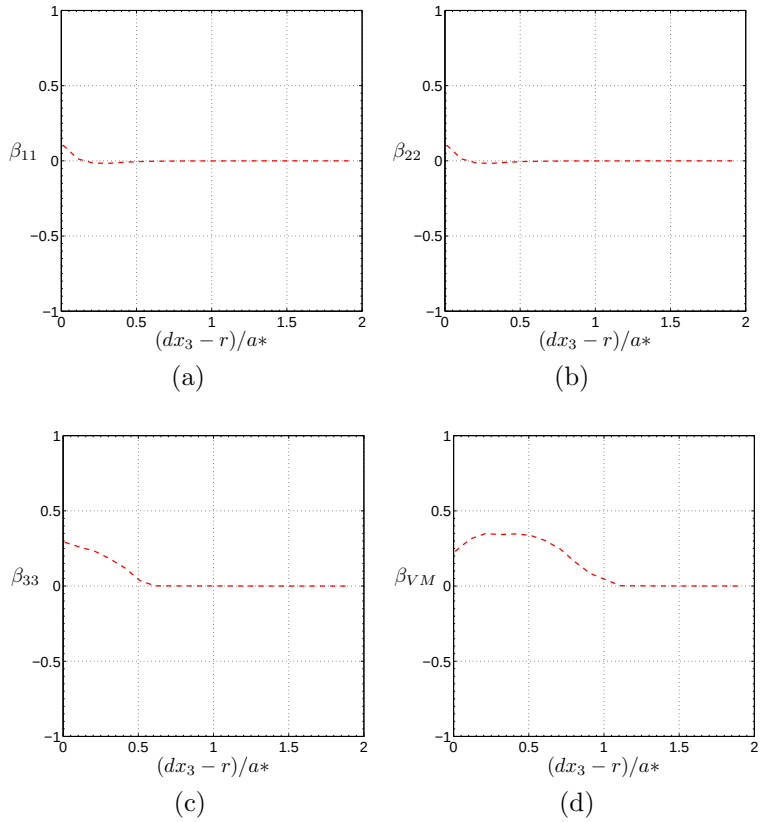


FIGURE 6.13 – La surcontrainte induite par la présence d'une hétérogénéité sphérique dure ($\gamma = E^I/E^M = 2$) pour différentes positions de l'hétérogénéité.

6.3 Applications sur matériaux composites idéalisés

Il est impossible de montrer les résultats de calculs sur un composite réel. Les résultats seront donc présentés ici dans le cas d'un matériau composite idéalisé composé d'une matrice viscoélastique linéaire (matrice organique) contenant des hétérogénéités sphériques réparties de manière périodique. Le contact se faisant donc entre une sphère rigide et le dit matériau composite. Les propriétés de la matrice viscoélastique sont données par la fonction de relaxation :

$$R(t) = \mu \exp(-t/\tau) \tag{6.2}$$

où μ est le module purement élastique, η la viscosité, et $\tau = \eta/\mu$ le temps de relaxation.

Le coefficient de Poisson du massif viscoélastique est supposé constant ν^M=0.3. Le module de cisaillement instantané est $R(0) = \mu = 80.77GPa$ et le temps de relaxation $\tau = 25$ secondes.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Les propriétés des hétérogénéités sphériques sont toutes identiques et sont données par :

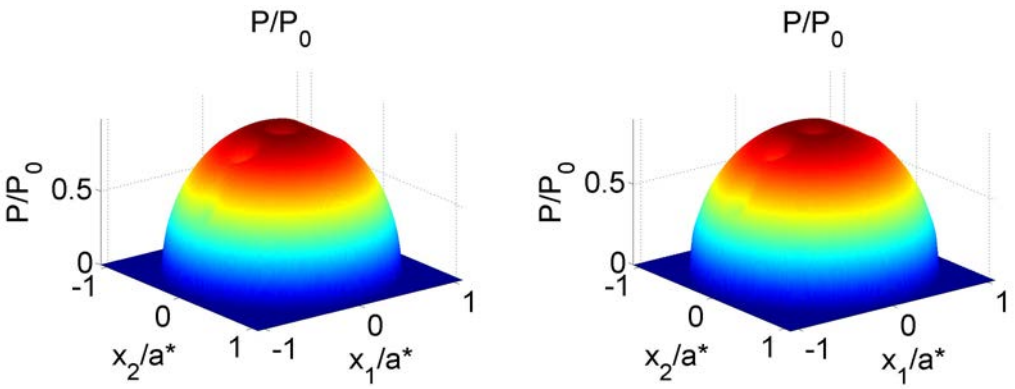
$E^I = 105$ GPa, $\nu^I = 0.3$

En mettant en œuvre toutes les méthodes numériques développées dans les chapitres 3 et 4, il est possible de résoudre finement le problème de contact.

Sur la figure 6.14, on remarque que le problème de contact est fortement perturbé. Cette perturbation évolue considérablement avec le temps et mérite d'être modélisée.

Les figures 6.16, 6.17, 6.18, 6.19 montrent la distribution des champs de contrainte ainsi que leurs évolutions au cours du temps. Dans ces types de matériaux, la connaissance des champs de contraintes en sous-couche s'avère indispensable.

Il est également possible de faire un zoom autour d'une hétérogénéité sphérique afin de connaître les contraintes normales et les cisaillements aux interfaces fibres/matrices. Ces variables sont très utiles dans l'étude de l'endommagement fibre/matrice, des phénomènes de décohésion, ...



(a) (b)

FIGURE 6.14 – Vue 3D de la distribution des champs de pression (a) à $t = 0$ et (b) à $t = \tau/5$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

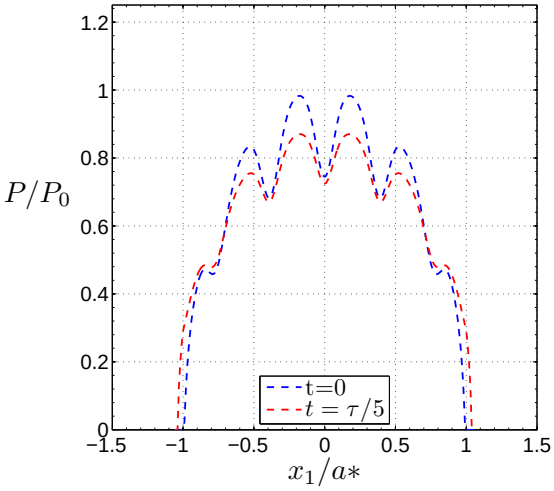
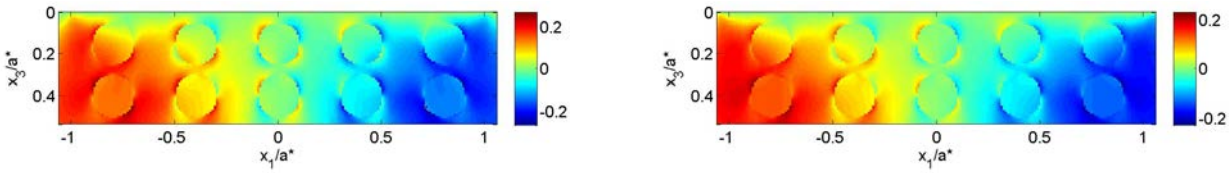
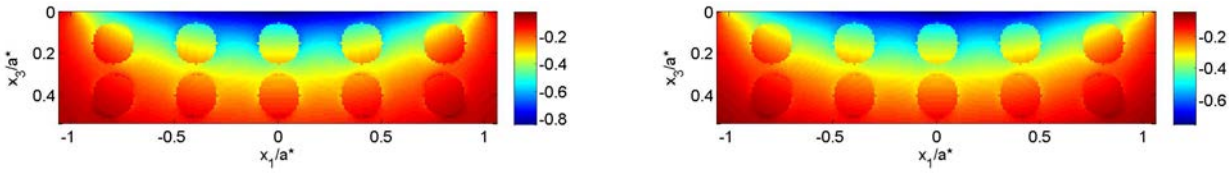


FIGURE 6.15 – Valeur adimensionnée de la distribution de pression dans le plan $X_2 = 0$.



(a) (b)

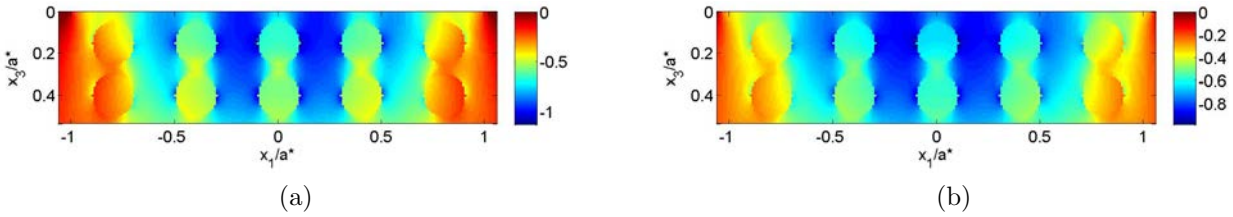
FIGURE 6.16 – Distribution de la valeur adimensionnée de la contrainte σ_{13}/P_0 dans le plan $Y = 0$; (a) à $t = 0$ et (b) à $t = \tau/5$.



(a) (b)

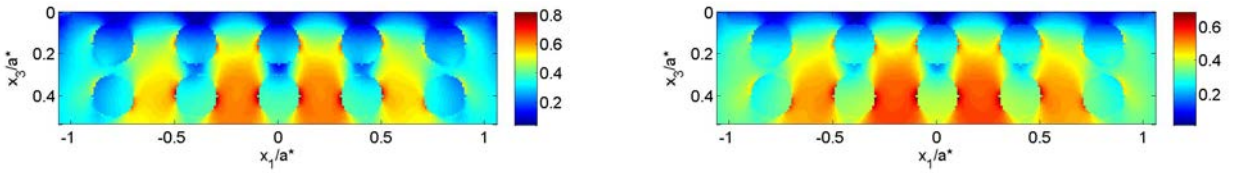
FIGURE 6.17 – Distribution de la valeur adimensionnée de la contrainte σ_{22}/P_0 dans le plan $Y = 0$; (a) à $t = 0$ et (b) à $t = \tau/5$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE 6.18 – Distribution de la valeur adimensionnée de la contrainte σ_{33}/P_0 dans le plan $Y = 0$; (a) à $t = 0$ et (b) à $t = \tau/5$.



(a) (b)

FIGURE 6.19 – Distribution de la valeur adimensionnée de la contrainte σ_{VM}/P_0 dans le plan $Y = 0$; (a) à $t = 0$ et (b) à $t = \tau/5$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

6.4 Synthèse

Le modèle semi-analytique a été appliqué sur 3 cas industriels différents. Un couplage entre un modèle éléments-finis et le code semi-analytique a tout d'abord été réalisé pour résoudre le contact aube/disque. Le modèle éléments finis est utilisé pour simuler une phase de décollage et atterrissage moteur. Les torseurs des efforts sont récupérés du modèle éléments finis et introduits en entrée du code semi-analytique avec un maillage plus fin, ce qui permet de mieux décrire les champs de pression, de cisaillements et les contraintes en sous-couche. Le code semi-analytique a été ensuite utilisé pour réaliser une étude qualitative en ce qui concerne la nocivité des défauts dans les billes céramiques de roulements hybrides. Un premier critère de contrôle des billes a été proposé. Cette étude a permis de réduire considérablement le volume de la zone à contrôler. Le modèle a enfin été appliqué sur un matériau composite idéalisé constitué de renforts sphériques noyés dans une matrice viscoélastique semi-infini.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Conclusions et perspectives

Synthèse

La problématique du contact entre matériaux hétérogènes est de plus en plus présente dans de nombreuses applications industrielles : roulements hybrides pour l'aéronautique et l'aérospatiale, contact entre matériaux composites ... L'introduction des aubes de soufflante en matériaux composites dans les nouveaux moteurs LEAP, développés par la société SNECMA du groupe SAFRAN et GE Aviation, a permis par exemple de réduire de près de 500 Kg le poids de l'avion. Il s'agit donc d'une véritable rupture technologique qui doit être suivie d'une évolution des modèles de résolution des problèmes de contact, plus précisément de contact entre matériaux hétérogènes. Dans ce manuscrit, une méthodologie de résolution de contact entre matériaux hétérogènes est présentée. Les méthodes semi-analytiques sont utilisées pour la résolution du problème contact. Les modèles proposés sont systématiquement validés par comparaison avec la méthode des éléments finis. Le temps de calcul ainsi que l'espace mémoire nécessaire sont considérablement réduits par rapport aux éléments finis.

Dans le premier chapitre, le contexte industriel de la thèse a été introduit ainsi que la problématique du contact entre matériaux hétérogènes dans le cas du contact aube/disque, roulements hybrides, ... Les différents modes d'endommagements du contact aube/disque ont été présentés. Une classification des matériaux composites suivant plusieurs critères a été réalisée afin de mieux cerner la spécificité des composites CMO et CMC utilisés par SNECMA. Les différentes méthodologies multi-échelles utilisées dans la modélisation des matériaux hétérogènes ont été présentées. Les méthodes de résolution des problèmes de contact ont été ensuite détaillées. Un accent particulier a été mis sur la difficulté inhérente au contact entre matériaux hétérogènes.

Dans le second chapitre, les bases de la méthode semi-analytique ont été passées en revue afin de faciliter la compréhension du reste du manuscrit. Les algorithmes de gradient conjugué CGM et les Transformées de Fourrier Rapides furent présentés. L'utilisation de ces transformées de Fourier permet de réduire considérablement les temps de calculs.

Le troisième chapitre s'intéresse à la prise en compte d'hétérogénéités isotropes/anisotropes inclinées dans la résolution des problèmes de contact. Le mas-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

sif est supposé élastique. Une étude fine, de l'effet du module de compressibilité/cisaillement de l'hétérogénéité sur le problème de contact a été réalisée. Une méthode numérique permettant de prendre en compte l'interaction entre plusieurs hétérogénéités a été ensuite présentée. Un accent particulier a été mis sur la réduction du temps de calcul et la robustesse du code. La mise en place d'une nouvelle méthode de décomposition permet de diviser le temps de calcul par 2 ou 4 selon les configurations. Une parallélisation OpenMP a été également introduite permettant d'avoir un gain de 1.87 sur 2 coeurs et de 3.55 sur 4 coeurs. L'algorithme d'une parallélisation MPI a été également présenté.

Le chapitre 4 s'intéresse à la théorie du contact viscoélastique. Une approche originale basée sur les méthodes semi-analytiques a été mise en place pour résoudre le problème de contact entre matériaux viscoélastiques, homogènes ou hétérogènes. Le modèle peut traiter à la fois des cas d'indentation, de roulement/glissement et de fretting. Le modèle fournit des solutions en termes de champs de pression, de cisaillements, de coefficients de frottement apparent mais aussi et surtout les champs de contraintes en sous-couche. Les résultats obtenus sont valables aussi bien en régime permanent que transitoire.

Le chapitre 5 présente essentiellement le dispositif expérimental développé en laboratoire pour mesurer les champs de déplacements à l'interface des corps en contact. La technique de corrélations d'images a été utilisée. Le protocole d'essais ainsi que les éprouvettes utilisées ont été présentés. Les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus au travers de la simulation numérique. Le dispositif a fait l'objet d'un dépôt de brevet SNECMA/LAMCOS.

Dans le dernier chapitre, le modèle sera appliqué sur trois cas industriels différents. Un prototype de couplage entre un modèle éléments finis et le code semi-analytique sera réalisé pour résoudre le contact aube/disque. Il s'agit d'une stratégie multi-échelle de calculs sur pièce. Le modèle a été ensuite utilisé pour étudier la nocivité des défauts dans les billes céramiques. Une application dans le cas d'un matériau composite idéalisé sera présentée. Les résultats dans le cas de tissages 3D SNECMA/Safran Composites ne pouvant être présentés pour des raisons de confidentialités.

Perspectives

Les perspectives pouvant être apportées à ce travail de thèse sont nombreuses. Un premier chantier concerne la mise en place d'une chaîne automatisée, partant de la description de la microstructure des composites tissés 3D via le logiciel WiseTex jusqu'à la résolution du problème de contact avec la méthode semi-analytique. Les fibres anisotropes du composite tissé peuvent être décrites par une série de cubes ou d'ellipsoïdes. Cette description se limitera à l'échelle mésoscopique. Le défi scientifique n'est pas énorme, cependant ce travail est indispensable d'un point de vue industriel.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Une seconde piste concerne la modélisation de la décohésion hétérogénéité /matrice. Le modèle doit arriver à intégrer le phénomène de décohésion dans la résolution des problèmes de contact. Cette étude passera d'abord par la détermination des paramètres gouvernant la décohésion fibre/matrice. Le modèle permet actuellement de remonter à la contrainte normale ainsi qu'au cisaillement à l'interface hétérogénéité/matrice. Cependant, un effort reste à faire afin de déterminer la meilleure méthode de prise en compte du phénomène de décohésion hétérogénéité/matrice dans les problèmes de contact.

Plusieurs améliorations peuvent être apportées à la partie "résolution du contact entre matériaux viscoélastiques". Dans un premier temps, il est possible d'envisager de prendre en compte les effets d'adhésions dans la résolution du problème de contact viscoélastique. Une extension du modèle dans le cas de la viscoélasticité non-linéaire peut également être envisagée. Il convient de rappeler que le modèle développé dans cette thèse se limite uniquement au cas des matrices viscoélastiques linéaires. Il s'agira d'un travail long qui nécessitera des développements conséquents. Toutefois, la viscoélasticité linéaire suffit pour décrire le comportement d'une grande variété de polymères à température ambiante.

Par rapport au dispositif expérimental, il convient de travailler sur l'acquisition d'une table anti-vibration afin d'améliorer la qualité des résultats obtenus en mode I et en mode III. Cette table anti-vibration permettra de supprimer tous les bruits parasites. Les fonctions du dispositif peuvent être étendues à l'étude de l'évolution de la zone de contact au cours d'un chargement d'indentation, glissement ou fretting dans le cas de certains polymères. Une validation expérimentale de tous les résultats présentés au chapitre 4 pourrait être alors envisagée. Le dispositif peut également être mis à contribution pour tester les propriétés d'adhérences de certains revêtements viscoélastiques utilisés dans l'industrie aéronautique.

D'une manière générale, toute évolution de la méthode semi-analytique traitant à la fois des problématiques de 3ème corps, de lubrification dans les problèmes de contact serait très bien accueillie aussi bien par la communauté scientifique que par le monde industriel.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe A

Coefficients d'influences

A.1 Espace élastique semi-infini.

Hertz résout le problème de contact elliptique à partir de la solution en déplacement d'un chargement en forme de demi-ellipsoïde. Love développa la solution du déplacement normal dans le cas d'une pression constante sur une surface rectangulaire [LOV 20]. Ce développement est repris par Vergne [VER 85], et étendu au chargement tangentiel. Tous les champs de déplacements et de contraintes sont formulés. Une zone rectangulaire de taille $\Delta x_1 \times \Delta x_2$ centrée en O est soumise à une pression constante p, ou à un cisaillement q_{x1} ou q_{x2} constant. On donne les solutions des déplacements d'un point $\bar{M}(x_1, x_2)$ en surface et des contraintes d'un point $M(x_1, x_2, x_3)$ dans le volume. On note $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. I et J sont des indices qui font référence à x_1, x_2 ou x_3.

La contribution des pressions p sur les contraintes du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\sigma_{IJ}}{p} = C^p_{IJ}(x_1, x_2, x_3, E, \nu) = S^p_{IJ}(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2}, x_3, E, \nu)+S^p_{IJ}(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2}, x_3, E, \nu)$$
$$+ S^p_{IJ}(x_1 + \frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2 - \frac{\Delta_{x2}}{2}, x_3, E, \nu) + S^p_{IJ}(x_1 - \frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2 + \frac{\Delta_{x2}}{2}, x_3, E, \nu), \quad \text{(A.1)}$$

avec

$$S^p_{x_1x_1}(x_1, x_2, x_3, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{x_3^2 + x_2^2 - x_2\rho}{x_3x_1}\right)+\frac{1-2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - x_2 + x_3}{x_1}\right)+\frac{x_3}{2\pi}\frac{x_1x_2}{(x_1^2 + x_3^2)\rho}, \quad \text{(A.2)}$$

$$S^p_{x_2x_2}(x_1, x_2, x_3, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{x_3^2 + x_2^2 - x_2\rho}{x_3x_1}\right)+\frac{1-2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - x_1 + x_3}{x_2}\right)+\frac{x_3}{2\pi}\frac{x_1x_2}{(x_2^2 + x_3^2)\rho}, \quad \text{(A.3)}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$S^p_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{x_3^2+x_2^2-x_2\rho}{x_3x_1}\right) - \frac{x_3}{2\pi}\frac{x_1x_2}{\rho}\left(\frac{1}{x_1^2+x_3^2}+\frac{1}{x_2^2+x_3^2}\right), \tag{A.4}$$

$$S^p_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{1}{\rho} - \frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left(\rho+x_3\right), \tag{A.5}$$

$$S^p_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3^2}{2\pi}\frac{x_1}{(x_2^2+x_3^2)\rho}, \tag{A.6}$$

$$S^p_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3^2}{2\pi}\frac{x_2}{(x_1^2+x_3^2)\rho}. \tag{A.7}$$

La contribution des cisaillements q_{x1} sur les contraintes du massif semi-infini est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{IJ}}{q_{x1}} = C^{q_{x1}}_{IJ}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) &= S^{q_{x1}}_{IJ}(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu)+S^{q_{x1}}_{IJ}(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu)\\ &+ S^{q_{x1}}_{IJ}(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu)+S^{q_{x1}}_{IJ}(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu),\end{aligned} \tag{A.8}$$

avec

$$S^{q_{x1}}_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{1}{\rho}\left(1+\frac{-x_1^2+x_3x_2}{(\rho+x_3)(\rho-x_2)}\right)+\frac{\nu}{\pi}\frac{x_2}{\rho+x_3}-\frac{1}{\pi}\ln\left(\rho-x_2\right), \tag{A.9}$$

$$S^{q_{x1}}_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{x_2}{\rho(\rho+x_3)}-\frac{\nu}{\pi}\left(\frac{x_2}{\rho+x_3}+\ln\left(\rho-x_2\right)\right), \tag{A.10}$$

$$S^{q_{x1}}_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3^2}{2\pi}\frac{x_2}{\rho(x_1^2+x_3^2)}, \tag{A.11}$$

$$S^{q_{x1}}_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{x_1}{\rho(\rho+x_3)}-\frac{\nu}{\pi}\frac{x_1}{\rho+x_3}-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\rho-x_1\right), \tag{A.12}$$

$$S^{q_{x1}}_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{1}{\rho}, \tag{A.13}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$S^{q_{x1}}_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3}{2\pi}\frac{x_1x_2}{\rho(x_1^2+x_3^2)} + \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{x_3^2+x_2^2-x_2\rho}{x_3x_1}\right). \tag{A.14}$$

La contribution des cisaillements q_{x2} sur les contraintes du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\sigma_{IJ}}{q_{x2}} = C^{q_{x2}}_{IJ}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = S^{q_{x2}}_{IJ}(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu)+S^{q_{x2}}_{IJ}(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu)$$
$$+ S^{q_{x2}}_{IJ}(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu) + S^{q_{x2}}_{IJ}(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2},x_3,E,\nu), \tag{A.15}$$

avec

$$S^{q_{x2}}_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{x_1}{\rho(\rho+x_3)} - \frac{\nu}{\pi}\left(\frac{x_1}{\rho+x_3} + \ln(\rho-x_1)\right), \tag{A.16}$$

$$S^{q_{x2}}_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3}{2\pi}\frac{1}{\rho}\left(1+\frac{-x_2^2+x_3x_1}{(\rho+x_3)(\rho-x_1)}\right) + \frac{\nu}{\pi}\frac{x_1}{\rho+x_3} - \frac{1}{\pi}\ln(\rho-x_1), \tag{A.17}$$

$$S^{q_{x2}}_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3^2}{2\pi}\frac{x_1}{\rho(x_2^2+x_3^2),} \tag{A.18}$$

$$S^{q_{x2}}_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{x_2}{\rho(\rho+x_3)} - \frac{\nu}{\pi}\frac{x_2}{\rho+x_3} - \frac{1}{2\pi}\ln(\rho-x_2), \tag{A.19}$$

$$S^{q_{x2}}_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = \frac{x_3}{2\pi}\frac{x_2x_1}{\rho(x_2^2+x_3^2)} + \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{x_3^2+x_1^2-x_1\rho}{x_3x_2}\right), \tag{A.20}$$

$$S^{q_{x2}}_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3,E,\nu) = -\frac{x_3}{2\pi}\frac{1}{\rho}. \tag{A.21}$$

Identiquement aux contraintes, on peut définir les déplacements élastiques en surface. On note $\bar{\rho} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$. La contribution des pressions p sur les déplacements élastiques en surface du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\bar{u}_J}{p} = K^p_J(x_1,x_2,E,\nu) = U^p_J(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2},E,\nu) + U^p_J(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2},E,\nu)$$
$$+ U^p_J(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2},E,\nu) + U^p_J(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2},x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2},E,\nu), \tag{A.22}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

avec

$$U^p_{x_1}(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E}\left(2x_1 \arctan\left(\frac{\bar{\rho}-x_2}{x_1}\right) - x_2 \ln \bar{\rho}\right), \tag{A.23}$$

$$U^p_{x_2}(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E}\left(2x_2 \arctan\left(\frac{\bar{\rho}-x_1}{x_2}\right) - x_1 \ln \bar{\rho}\right), \tag{A.24}$$

$$U^p_{x_3}(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E}\left(x_2 \ln\ (\bar{\rho}-x_1) + x_1 \ln(\bar{\rho}-x_2)\right). \tag{A.25}$$

La contribution des pressions q_{x1} sur les déplacements élastiques en surface du massif semi-infini est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\bar{u}_J}{q_{x1}} = K^{q_{x1}}_J(x_1, x_2, E, \nu) = U^{q_{x1}}_J(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu)+U^{q_{x1}}_J(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu)\\ + U^{q_{x1}}_J(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu) + U^{q_{x1}}_J(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu),\end{aligned} \tag{A.26}$$

avec

$$U^{q_{x1}}_x(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E}x_1 \ln(\bar{\rho}-x_2) - \frac{1+\nu}{\pi E}\ln(\bar{\rho}-x_1), \tag{A.27}$$

$$U^{q_{x1}}_x{}_2(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{\nu(1+\nu)}{\pi E}\bar{\rho}, \tag{A.28}$$

$$U^{q_{x1}}_{x_3}(x_1, x_2, E, \nu) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E}\left(-2x_1 \arctan\left(\frac{\bar{\rho}-x_2}{x_1}\right) + x_2 \ln \bar{\rho}\right). \tag{A.29}$$

La contribution des pressions q_{x2} sur les déplacements élastiques en surface du massif semi-infini est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\bar{u}_J}{q_{x2}} = K^{q_{x2}}_J(x_1, x_2, E, \nu) = U^{q_{x2}}_J(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu)+U^{q_{x2}}_J(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu)\\ + U^{q_{x2}}_J(x_1+\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2-\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu) + U^{q_{x2}}_J(x_1-\frac{\Delta_{x1}}{2}, x_2+\frac{\Delta_{x2}}{2}, E, \nu),\end{aligned} \tag{A.30}$$

avec

$$U^{q_{x2}}_{x_1}(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{\nu(1+\nu)}{\pi E}\bar{\rho}, \tag{A.31}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

$$U_{x_2}^{q_{x2}}(x_1, x_2, E, \nu) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} x_2 \ln(\bar{\rho} - x_1) - \frac{1+\nu}{\pi E} \ln(\bar{\rho} - x_2), \tag{A.32}$$

$$U_{x_3}^{q_{x2}}(x_1, x_2, E, \nu) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \left(-2x_2 \arctan\left(\frac{\bar{\rho} - x_1}{x_2}\right) + x_1 \ln \bar{\rho} \right). \tag{A.33}$$

A.2 Prise en compte des hétérogénéités.

Le tenseur D_{ijkl} est donné par :

$$D_{ijkl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{\psi_{,klij} - 2\nu\delta_{kl}\phi_{,ij} - (1-\nu)[\phi_{,kj}\delta_{il} + \phi_{,ki}\delta_{jl} + \phi_{,lj}\delta_{ik} + \phi_{,li}\delta_{jk}]\} \tag{A.34}$$

Ces coefficients d'influence dépendent donc des propriétés matériaux de la matrice et de la géométrie des inclusions qui vont conditionner les fonctions potentielles. Pour certaines formes géométriques particulières, des solutions analytiques des fonctions potentielles peuvent être explicitement calculées.

Inclusion ellipsoïdale

Eshelby fut un des premiers à montrer que les coefficients d'influence D_{ijkl} à l'intérieur de l'inclusion sont constants. Considérons une ellipsoïde de demi-axe a_1, a_2, a_3 suivant x_1,x_2, et x_3 respectivement. Les fonctions potentielles peuvent alors s'exprimer comme,

$$\phi = \pi a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{U \mathrm{d}s}{\Delta} \tag{A.35}$$

$$\psi = \pi a_1 a_2 a_3 \frac{1}{2} \int_\lambda^\infty \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s^2 U^2}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \frac{U^2 s}{\Delta} \right] \mathrm{d}s \tag{A.36}$$

Où,

$$U(s) = 1 - \frac{x_i x_i}{a_i^2 + s} \tag{A.37}$$

$$\Delta(s) = \sqrt{(a_1^2 + s) + (a_2^2 + s) + (a_3^2 + s)} \tag{A.38}$$

La borne inférieure de l'intégrale λ est la plus grande racine de l'équation $U(\lambda) = 0$ pour les points extérieurs à l'inclusion et $\lambda = 0$ à l'intérieur. Si l'on pose les intégrales

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

suivantes définies par,

$$I(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\Delta(s)} \tag{A.39}$$

$$I_i(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(a_i^2 + s)\,\Delta(s)} \tag{A.40}$$

$$I_{ij}(\lambda) = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(a_i^2 + s)\left(a_j^2 + s\right)\Delta(s)} \tag{A.41}$$

Les fonctions potentielles s'écrivent alors,

$$\phi = V \tag{A.42}$$

$$\psi_{,i} = x_i \left(V - a_i^2 V_i\right) \tag{A.43}$$

Avec,

$$V(x) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{U(s)}{\Delta(s)}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[I(\lambda) - x_r x_r I_r(\lambda)\right] \tag{A.44}$$

$$V_i(x) = \pi a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{U(s)}{(a_i^2 + s)\,\Delta(s)}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[I_i(\lambda) - x_r x_r I_{ri}(\lambda)\right] \tag{A.45}$$

Les intégrales I sont calculées pour différentes catégories d'ellipsoïdes,

– **Ellipsoïde triaxial** ($a_1 > a_2 > a_3$)
Dans ce cas les intégrales I,I_1,I_2 et I_3 sont exprimées en terme d'intégrales elliptiques du premier F et du second ordre E, définies comme :

$$F(\Theta, K) = \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2(w)}} \qquad \text{avec } 0 < K < 1 \tag{A.46}$$

$$E(\Theta, K) = \int_0^\theta \sqrt{1 - K^2 \sin^2(w)}\mathrm{d}w \qquad \text{avec } 0 < K < 1 \tag{A.47}$$

Où,

$$0 < \Theta = \arcsin\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + \lambda}} < \frac{\pi}{2} \tag{A.48}$$

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}} < 1 \tag{A.49}$$

$$w = \arcsin\sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + s}} \tag{A.50}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Dès lors les expressions des intégrales I deviennent [GRA 65] :

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} F(\Theta, K) \tag{A.51}$$

$$I_1(\lambda) = 4\pi a_1 a_2 a_3 \frac{F(\Theta, K) - E(\Theta, K)}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \tag{A.52}$$

$$I_2(\lambda) = 4\pi a_1 a_2 a_3 \left\{ \frac{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)} E(\Theta, K) - \frac{F(\Theta, K)}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} - \frac{1}{a_2^2 - a_3^2}\sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)}} \right\} \tag{A.53}$$

$$I_3(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{\Delta(\lambda)} - I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \tag{A.54}$$

– **Ellipsoïde oblate** $(a_1 = a_2 > a_3)$

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a_1^2 a_3}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \arccos b_o, \tag{A.55}$$

$$I_1(\lambda) = I_2(\lambda) = 2\pi a_1^2 a_3 \frac{(\arccos b_o - b_o d_o)}{(a_1^2 - a_3^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{A.56}$$

$$I_3(\lambda) = \frac{4\pi a_1^2 a_3}{\Delta(\lambda)} - 2I_1(\lambda) \tag{A.57}$$

Où,

$$b_o = \sqrt{\frac{a_3^2 + \lambda}{a_1^2 + \lambda}} \tag{A.58}$$

$$d_o = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + \lambda}} \tag{A.59}$$

– **Ellipsoïde prolate** $(a_1 > a_2 = a_3)$

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_3^2}{\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} b_p, \tag{A.60}$$

$$I_1(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_3^2 \left(b_p - \frac{d_p}{b_p}\right)}{(a_1^2 - a_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{A.61}$$

$$I_2(\lambda) = I_3(\lambda) = \frac{2\pi a_1 a_3^2}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{2} I_1(\lambda) \tag{A.62}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Où,

$$b_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + \lambda}{a_3^2 + \lambda}} \tag{A.63}$$

$$d_p = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_3^2 + \lambda}} \tag{A.64}$$

– **Sphère** $(a_1 = a_2 = a_3 = a)$

$$I(\lambda) = \frac{4\pi a^3}{\sqrt{a^2 + \lambda}}, \tag{A.65}$$

$$I_1(\lambda) = I_2(\lambda) = I_3(\lambda) = \frac{4\pi a^3}{3\left(a^2 + \lambda\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{A.66}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe B

Dispositif expérimental

B.1 Objectifs.

Cet annexe est fortement complémentaire du chapitre 5. Le chapitre 5 s'est limité, pour des raisons de concisions, à une description très succincte du dispositif expérimental.

B.2 Compléments sur le dispositif expérimental

B.2.1 Capteur multi-composants.

Les caractéristiques du capteur multi-composants sont rappelées ci-dessous.

B.2.2 Actionneur pour appliquer le moment suivant l'axe Z.

B.2.3 Actionneur pour appliquer la force/déplacement tangentiel Y.

B.2.4 Guidages à Billes suivant Y.

B.2.5 Caractéristiques de la caméra haute résolution utilisée pour l'acquisition d'images.

B.2.6 Caractéristiques géométriques, optiques et mécaniques de la vitre utilisée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Capteurs et Systèmes de mesure

Capteur de force Multiaxes MC3A

- Etendues de mesure :
Fz : 440 à 4400 N
Fx et Fy : 220 à 2200 N
Mz : 5.6 à 56 Nm
Mx et My : 11 à 110 Nm

- Fréquence naturel: continue à 1000 Hz
- Non linéarité : +/- 0.2 % PE
- Sensibilité transverse :< 2 % PE au CoF
- Dimensions : 78 x 76 x 76 mm
- Alimentation : 10 Vcc
- Température d'utilisation : de 0°C à 52 °C
- Protection : IP61
- Poids : 0.9 Kg

La société AMTI est spécialisée dans la fabrication de capteurs de force 6 axes et de plateformes multiaxes. Les capteurs AMTI mesurent des forces suivants trois composantes Fx, Fy, Fz et ses trois moments Mx, My, Mz correspondants.

Précises et compactes, ces capteurs remplacent les montages complexes utilisant plusieurs capteurs mono axe. Ils s'installent facilement sur les machines-outils et les bancs de test.
Les gammes standard des capteurs 6 axes sont de 440 N à 4400 N.

Les capteurs d'effort multiaxe AMTI sont de très grandes performances et ont une conception qui permet d'avoir un couplage entre voies très faible.
Cette génération de capteurs de force multiaxe présente de très bonnes sensibilité et précision de mesure dès le premier Newton quelques que soit la gamme et le modèle choisi.
Nous proposons des capteurs multiaxes IP 67 ou IP68 pour une immersion sous 10 m d'eau.

Nos capteurs intègrent une mémoire comportant les informations d'étalonnage et de sensibilité. Nous proposons des électroniques numériques (GEN5) de très haute performance, permettant de lire cette mémoire et de délivrer un signal numérique ou analogique conditionné selon la matrice de découplage et de sensibilités suivant tous les axes de mesure.

Electronique numérique GEN5 compatible avec tous les capteurs AMTI.
- Sortie analogique ± 5Vcc, 14 bits
- Calcul du découplage
- Connexion USB.
- Sortie numérique 16 Bits

Le Gen5 est livré avec un logiciel de configuration et acquisition compatible Windows 32 ou 64bits

*C0F : Centre des Forces, donné dans le certificat de calibration du capteur

PM Instrumentation - 59 rue Emile Deschanel - F92400 Courbevoie – France – tél : (+33) 01 46 91 93 32
Fax : (+33) 01 46 91 93 39 – Web : www.pm-instrumentation.com - Contact : contact@pm-instrumentation.com

PM Instrumentation

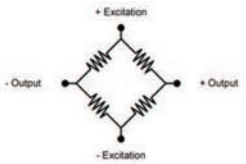
Figure B.1 – Caractéristiques du capteur MC3A.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

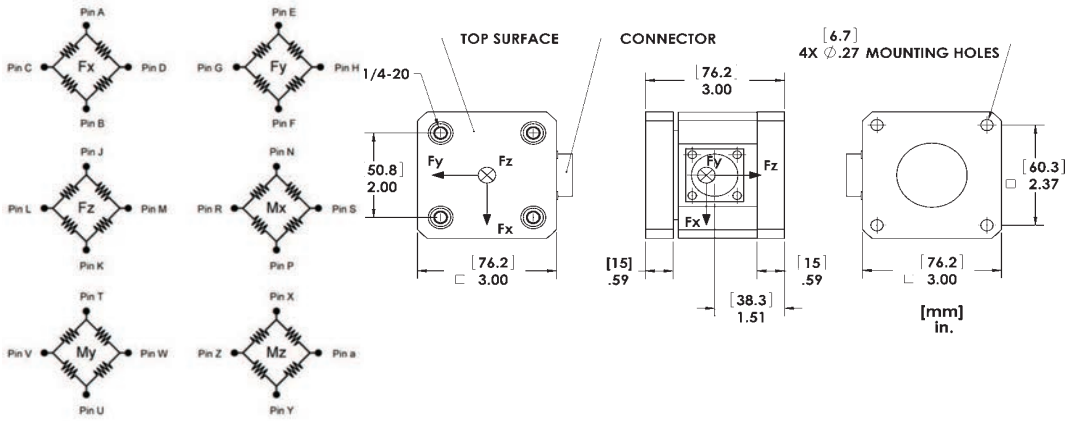
Capteurs et Systèmes de mesure

Caractéristiques et dimensions

Caractéristiques / Model	100	250	500	1000
Etendue de mesure Fz (N)	440	1100	2200	4400
Etendue de mesure Fx,Fy (N)	220	560	1100	2200
Etendue de mesure Mz (Nm)	5.6	14	28	56
Etendue de mesure Mx,My (Nm)	11	28	56	110
Sensibilité Fz (µV/V/N)	1.35	0.67	0.34	0.17
Sensibilité Fx,Fy (µV/V/N)	5.4	2.7	1.35	0.67
Sensibilité Mz (µV/V/Nm)	121	106	53	26
Sensibilité Mx,My (µV/V/Nm)	266	138	71	35
Rigidité Fz (x10^7 N/m)	2.8	7.5	15.0	30.0
Rigidité Fxy (x10^7 N/m)	0.2	0.5	1.0	2.0
Rigidité Mz (x10^4 Nm/rad)	0.2	0.5	1.1	2.2
Fréquence de résonnance Mxy (Hz)	300	500	700	1000



Ponts Fz :700 Ω, Autres : 350 Ω
Connecteur : Souriau 851-02^{E}16-26P50-44
Poids : 0.900 kg
Filetages de fixation : 4 Inserts M6



PM Instrumentation - 59 rue Emile Deschanel - F92400 Courbevoie – France – tél : (+33) 01 46 91 93 32
Fax : (+33) 01 46 91 93 39 – Web : www.pm-instrumentation.com - Contact : contact@pm-instrumentation.com

FIGURE B.1 – Caractéristiques du capteur MC3A.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

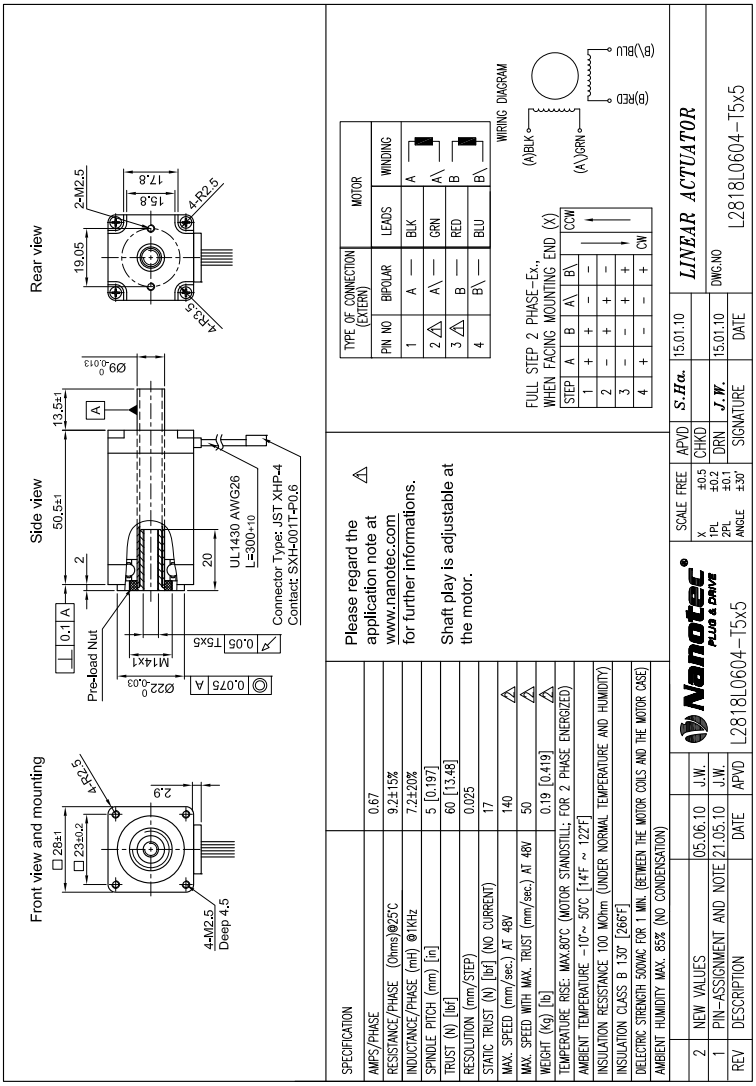


FIGURE B.2 – Actionneur pour appliquer le moment suivant l'axe Z.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

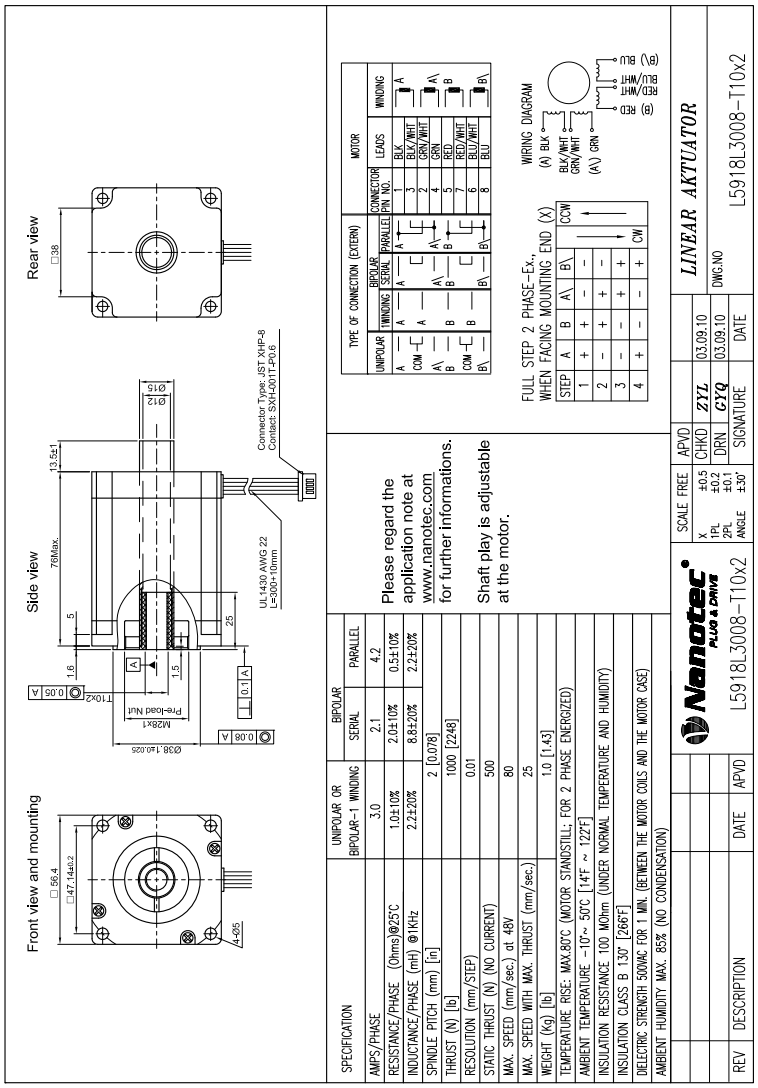
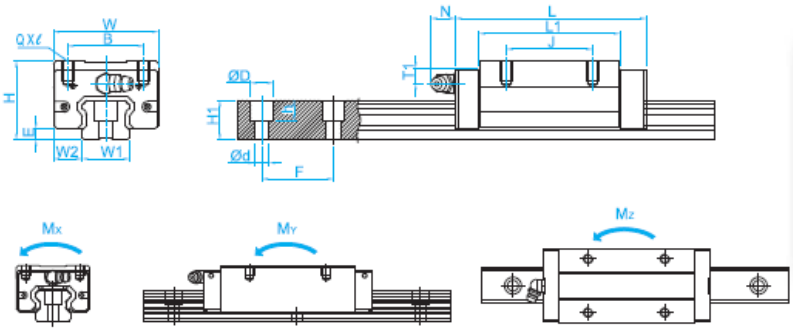


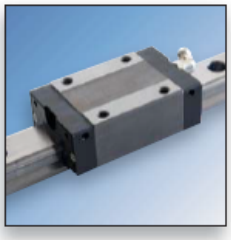
FIGURE B.3 – Actionneur pour appliquer la force/déplacement tangentiel Y.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

GUIDAGES A BILLES - *LINEAR GUIDEWAYS*

Type TRH-V





Patin avec 4 rangées de billes

Référence *Type*	Dimensions - mm									Graisseur *Greaser*			Charges - kN *Basic load*		Moments statiques - kN-m *Static moment*			Poids *Weight*		Rails
	H	W2	E	W	B	J	L	L1	Qxℓ	T1	Montage *Oil hole*	N	Dyn. C	Stat. Co	M_X	M_Y	M_Z	Block	Rail	W1
																		g	g/m	mm
TRH15VN	28	9,5	3,2	34	26	26	55,9	39,5	M4x5	9,5	M4x0,7	7	12,06	22,06	0,164	0,148	0,148	130	1 320	15
TRH15VL							64,4	48					13,43	25,74	0,191	0,204	0,204	200		
TRH20VN	30	12	4,6	44	32	36	74	54	M5x5	6,5	M6x1	14	20,50	36,96	0,373	0,332	0,332	260	2 280	20
TRH20VL							79	59					21,25	38,91	0,392	0,369	0,369	290		
TRH20VE						50	98	78					25,53	50,58	0,510	0,632	0,632	380		
TRH25VN	40	12,5	5,8	48	35	35	80	59	M6x8	11,5	M6x1	14	25,81	45,03	0,522	0,434	0,434	540	3 170	23
TRH25VL							92	71					28,75	52,54	0,609	0,595	0,595	550		
TRH25VE						50	109	88					32,48	62,55	0,725	0,851	0,851	680		
TRH30VN	45	16	7	60	40	40	95,3	69,3	M8x10	11	M6x1	14	38,07	64,83	0,907	0,749	0,749	760	4 540	28
TRH30VL							106	80					40,98	72,03	1,008	0,931	0,931	850		
TRH30VE						60	131	105					47,91	90,04	1,260	1,470	1,470	1 120		
TRH35VN	55	18	7,5	70	50	50	108	79	M8x10	15	M6x1	14	50,90	83,46	1,472	1,060	1,060	1 310	6 270	34
TRH35VL							122	93					55,02	93,28	1,595	1,333	1,333	1 520		
TRH35VE						72	152	123					66,67	122,74	2,098	2,339	2,339	2 000		
TRH45VL	70	20,5	8,9	86	60	60	140	106	M10x15	20,5	PT1/8	12,5	75,72	128,08	2,926	2,220	2,207	2 700	10 400	45
TRH45VE						80	174	140					88,52	160,10	3,658	3,485	3,485	3 580		
TRH55VL	80	23,5	13	100	75	75	163	118	M12x18	21	PT1/8	12,5	147,03	216,13	5,713	4,117	4,117	3 600	16 100	53
TRH55VE						95	201,1	156,1					173,49	273,77	7,236	6,705	6,705	4 700		
TRH65VL	90	31,5	14	126	76	70	197	147	M16x20	19	PT1/8	12,5	225,26	314,86	9,730	6,958	6,958	7 760	22 540	63
TRH65VE						120	256,5	206,5					278,95	427,31	13,206	13,075	13,075	11 150		

Dimensions des rails page 6
Kit de joints addidionnels page 19 / Ajouter à la fin de la désignation ZN ou WZ ex : TRH15VLZ0HZN
Graisseur page 20

Exemple de désignation

TRH	15	V	L	Z0	H

Type de patin	*Block Type*
Taille	*Model of Size*
V : Etroit	*V: Without flange*
N : Normal **L : Long** **E : Extra Long**	*N: Normal* *L: Long* *E: Extra Long*
Z0 : Sans Précharge	*Z0: No preload*
N : Précision standard **H : Précision élévée**	*N: Standard precision* *H: High precision*

FLI www.fli-industrie.fr 13

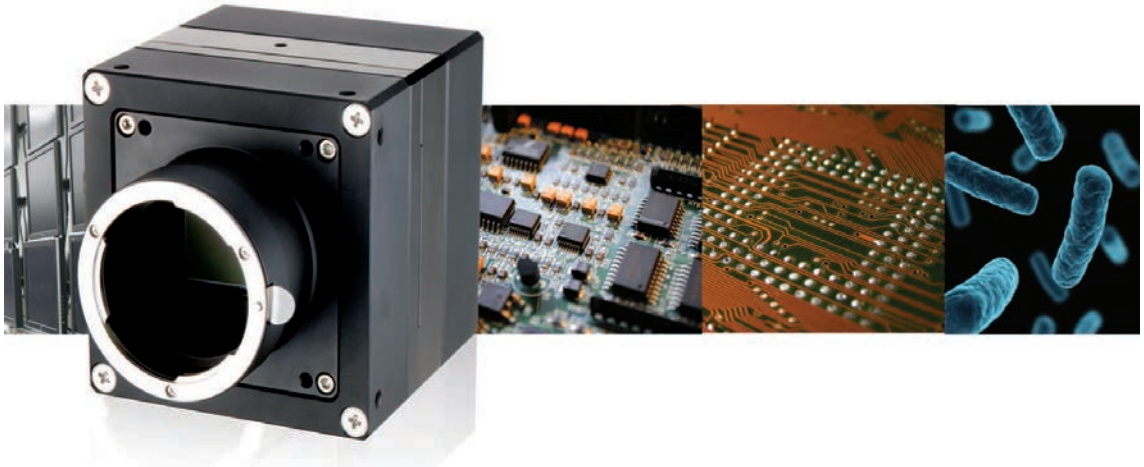
FIGURE B.4 – Guidage à billes-type : MGN.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

vieworks

VN-8MC / VN-11MC
VN-16MC / VN-29MC

NANO STAGE PIXEL SHIFT CAMERA FOR EXTENDED RESOLUTIONS



VN Series pixel shift cameras are designed for applications where the object is stationary and extremely high resolution is required. Vieworks advanced pixel shift technology based on a precise piezoelectric stage allows image captures as high as 99 million pixels using the VN-11MC cameras. Even higher resolutions, up to 260 million pixels can be obtained using the VN-29MC camera. These cameras are ideal for applications such as FPD inspection, document/film scanning, research and scientific imaging.

Main Features

* Nano Stage Pixel Shift Mechanism
* Extended Resolutions up to 260 megapixels
* True Color Full Image Resolution
* Improved Fill Factor
* Progressive Scan Interline Transfer CCD Imager
* Flat Field Correction
* Field Upgradable Firmware
* Pixel Defect Correction

Applications

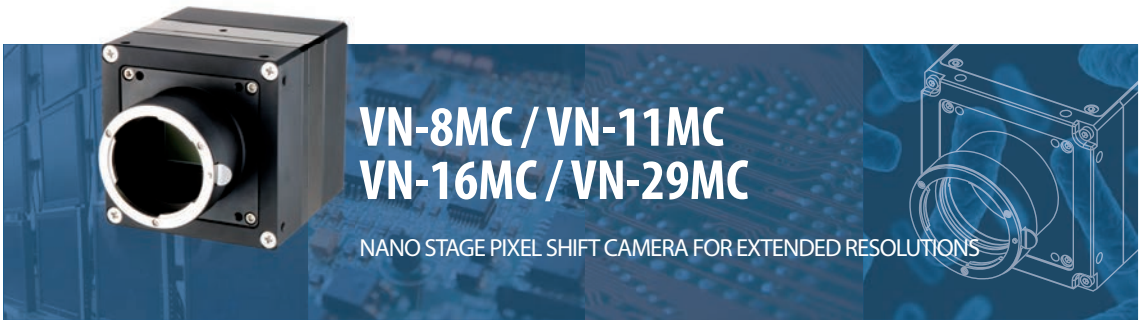
* Flat Panel Inspection
* Electronics, Semiconductor Inspection
* Scanning and Digitizing
* Scientific Imaging

WWW.STEMMER-IMAGING.COM

STEMMER® IMAGING

FIGURE B.5 – Caractéristiques de la caméra haute-résolution utilisée pour l'acquisition d'images.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



Specifications

Model		VN-8M	VN-11M	VN-16M	VN-29M
Resolution (H × V)	×1 Mode	3296 × 2472, 8.1M	4008 × 2672, 10.7M	4872 × 3248, 15.8M	6576 × 4384, 28.8M
	×4 Mode	6592 × 4944, 32.6M	8016 × 5344, 42.8M	9744 × 6496, 63.3M	13152 × 8768, 115.3M
	×9 Mode	9888 × 7416, 73.3M	12024 × 8016, 96.4M	14616 × 9744, 142.4M	19728 × 13152, 259.5M
Sensor (Truesense Imaging)		KAI-08050	KAI-11002	KAI-16000	KAI-29050
Sensor Size (Optical Format)		4/3″	35 ㎜	35 ㎜	35 ㎜
Sensor Type		Progressive Scan Interline Transfer CCD			
Pixel Size		5.5 ㎛ × 5.5 ㎛	9.0 ㎛ × 9.0 ㎛	7.4 ㎛ × 7.4 ㎛	5.5 ㎛ × 5.5 ㎛
Max. Frame Rate (40 ㎒)		8.1M Mode : 16.3 fps 32.6M Mode : 4.1 fps 73.3M Mode : 1.8 fps	10.7M mode : 6.4 fps 42.8M mode : 1.6 fps 96.4M mode : 0.7 fps	15.8M Mode : 4.2 fps 63.3M Mode : 1.1 fps 142.4M Mode : 0.5 fps	28.8M Mode: 5 fps 115.3M Mode: 1.3 fps 259.5M Mode: 0.6 fps
Electronic Shutter		Global Shutter			
Pixel Data Format		8/10/12 bit			
Interface		Base Camera Link			
Data Output Pixel Clock Speed		40/80 ㎒	30/40 ㎒	30/40 ㎒	40/80 ㎒
Trigger Mode		Free-Run , Overlap, Fast, Double Programmable Exposure Time and Trigger Polarity			
Dynamic Range		62 dB			
Shift Range		0 ~ 15 ㎛, 1 ㎚ step			
Shift Resolution		0.001 ㎛			
Shift Control		Manual Mode or Sequence Mode (4/9 Shot Mono, 4/16/36 Shot Color)			
Shift Latency		< 8 ㎳			
Dimension / Weight		90 ㎜ × 90 ㎜ × 123.5 ㎜ / 1.2 kg			
Temperature		Operating : 10℃ ~ 40℃, Storage : -30℃ ~ 65℃			
Lens Mount		F-mount, Custom mount available upon request			
Power		10 ~ 14 V DC MAX. 6 W	10 ~ 14 V DC MAX. 10 W	10 ~ 14 V DC MAX. 8 W	10 ~ 14 V DC MAX. 12 W
Configuration Software		Configurator			

WWW.STEMMER-IMAGING.COM

STEMMER® IMAGING

FIGURE B.5 – Caractéristiques de la caméra haute-résolution utilisée pour l'acquisition d'images.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

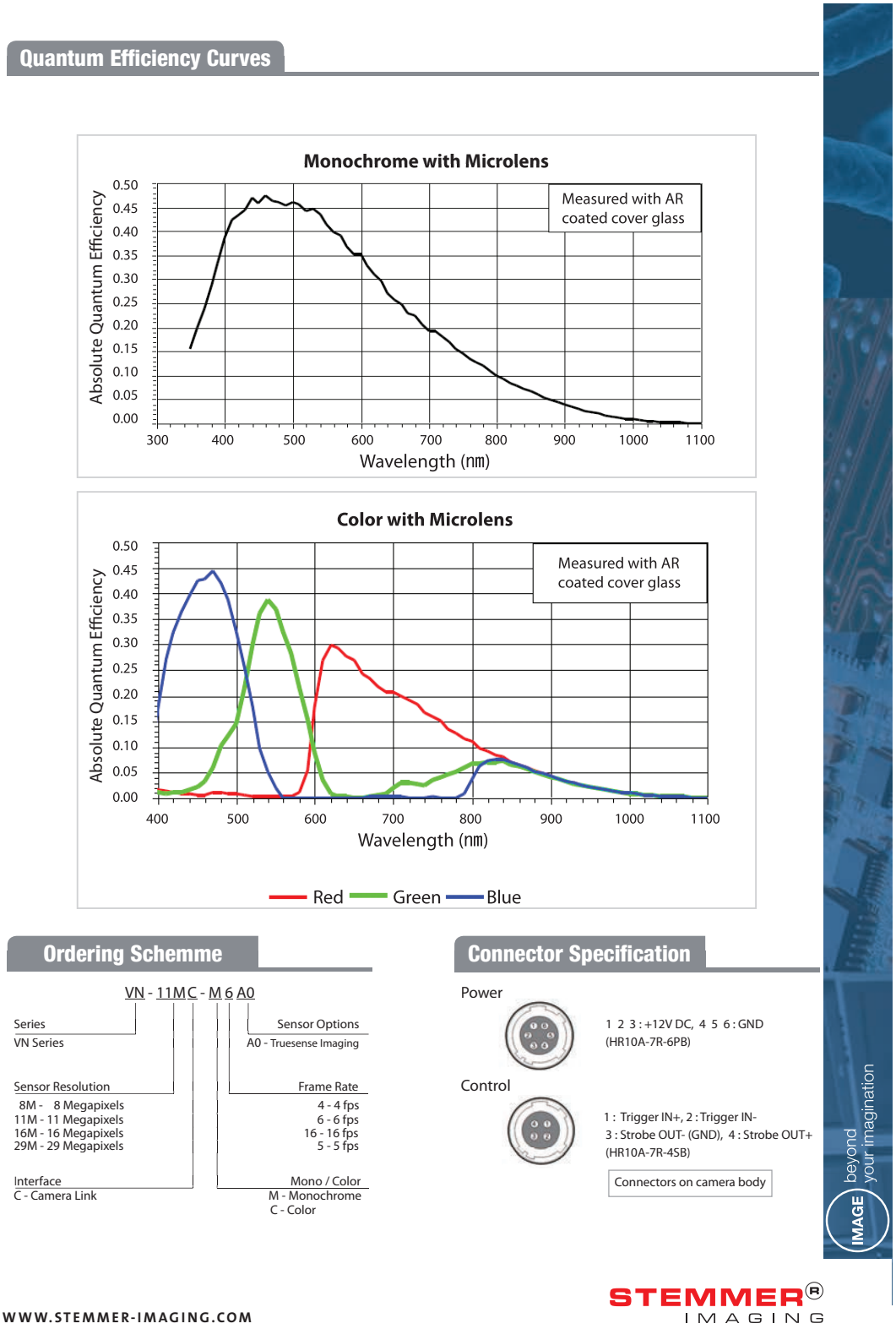


FIGURE B.5 – Caractéristiques de la caméra haute-résolution utilisée pour l'acquisition d'images.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

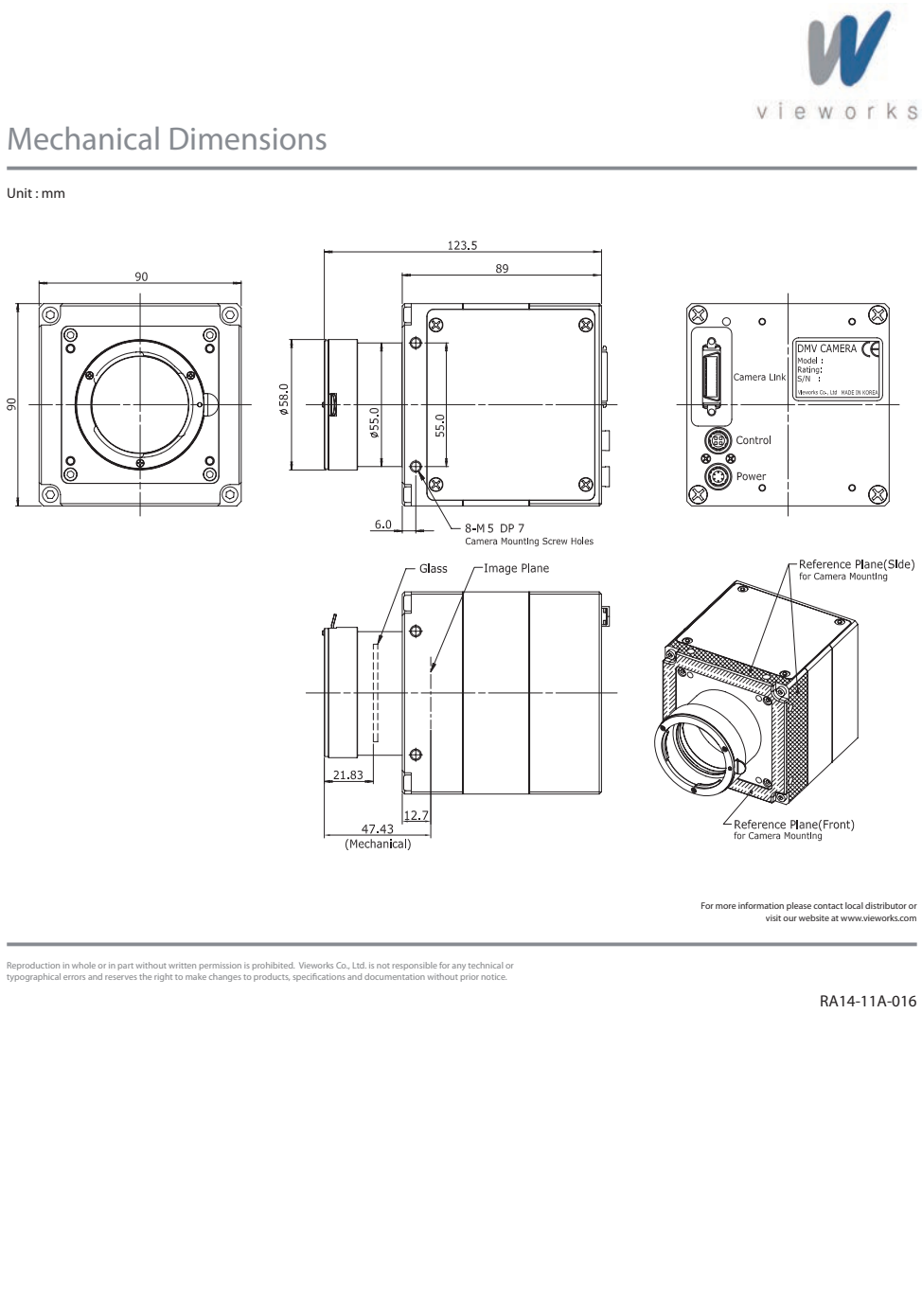
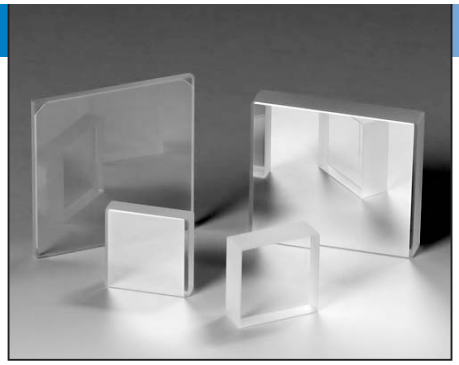


FIGURE B.5 – Caractéristiques de la caméra haute-résolution utilisée pour l'acquisition d'images.

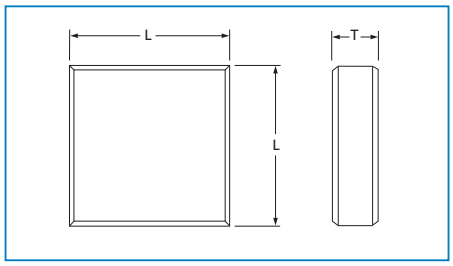
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



Laser Grade Square Windows

SQW series square windows are designed for a wide variety of laser window and beamsplitting applications. Typical transmitted wavefront error is less than λ/10 peak-to-valley @ 633 nm over 85% of the window's dimension. If you don't see the dimension you need, our in house service department can quickly modify stock substrates to supply additional rectangular dimensions. All CVI Melles Griot dielectric and metal coatings can be deposited on SQW series square windows.

- All CVI Melles Griot low loss, high energy AR coatings available
- CVI Melles Griot beamsplitter coatings available
- CVI Melles Griot partially reflective coatings available



Window dimensions layout

SPECIFICATIONS:
Laser Grade Square Windows

Optical Material	UV-grade fused silica, or N-BK7 glass
Transmitted Wavefront Error	λ/10 @ 633 nm
Surface Quality	10-5 scratch and dig
Dimensional Tolerance	+ 0/ – 0.25 mm
Thickness	t ± 0.25 mm
Wedge	≤5 arc min
Clear Aperture	≥85% of central dimension

Laser Grade Square Windows

l (mm)	t (mm)	Transmitted Wavefront Error @ 633 nm	PART NUMBER
Fused Silica			
12.7	6.4	λ/10	SQW-0525-UV
25.4	2.0	λ/10	SQW-1008-UV
25.4	6.4	λ/10	SQW-1025-UV
50.8	1.6	λ/10	SQW-2006-UV
50.8	2.0	λ/10	SQW-2008-UV
50.8	5.1	λ/4	SQW-2020-UV
50.8	6.4	λ/4	SQW-2025-UV
50.8	9.5	λ/10	SQW-2037-UV
N-BK7			
12.7	6.4	λ/10	SQW-0525-C
25.4	2.0	λ/10	SQW-1008-C
25.4	6.4	λ/4	SQW-1025-C
25.4	9.5	λ/10	SQW-1037-C
38.1	9.5	λ/10	SQW-1537-C
50.8	2.0	λ/10	SQW-2008-C
50.8	5.0	λ/2	SQW-2019-C
50.8	6.4	λ/4	SQW-2025-C
50.8	9.5	λ/4	SQW-2037-C
76.2	9.5	λ/4	SQW-3037-C
76.2	12.7	λ/4	SQW-3050-C

FIGURE B.6 – Caractéristiques géométriques, optiques et mécaniques de la vitre utilisée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

HPFS® Standard Grade, Corning code 7980, is a high purity synthetic amorphous silicon dioxide manufactured by flame hydrolysis. The noncrystalline, colorless, silica glass combines a very low thermal expansion coefficient with excellent optical qualities and exceptional transmittance in the ultraviolet. It is available in a number of grades for different applications.

In order to satisfy the challenging quality requirements of our customers in leading edge applications such as microlithography, Corning is dedicated to continuous improvement. The investments in research and development, combined with Corning's quality systems, support our technology leadership position and ensure that we meet our customer's requirements on time, every time.

Quality Grade Selection Chart—HPFS® Standard Grade

Corning defines and certifies the quality of HPFS® glass using three criteria: grade, inclusions and homogeneity

Inclusion Class [1,2]			Homogeneity [3,4]							
Class	Total Inclusion Cross Section	Maximum Size	AA ≤ 0.5	A ≤ 1	B ≤ 1.5	C ≤ 2	D ≤ 3	E ≤ 4	F ≤ 5	G NS
0	≤ 0.03	0.10	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1	≤ 0.10	0.28		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2	≤ 0.25	0.50			✓	✓	✓	✓	✓	✓
3	≤ 0.50	0.76				✓	✓	✓	✓	✓
4	≤ 1.00	1.00					✓	✓	✓	✓
5	≤ 2.00	1.27					✓	✓	✓	✓

Notes:
1. Defines the sum of the cross section in mm^2 of inclusions per 100 cm^3 of glass. Inclusions with a diameter ≤ 0.10 mm are disregarded.
2. Refers to the diameter of the largest single inclusion.
3. Index homogeneity: the maximum index variation (relative), measured over the clear aperture of the blank.
4. Index homogeneity is certified using an interferometer at 632.8 nm. The numerical homogeneity is reported as the average through the piece thickness. Blanks with a diameter up to 450 mm will be analysed over the full aperture. Larger parts will be analysed using multiple overlapping apertures. The minimum thickness for index homogeneity verification is 20.3 mm. For thinner parts, the parent piece is certified.

Mechanical and Thermal Properties: Unless otherwise stated, all values @ 25°C

Elastic (Young's) Modulus	72.7 GPa		Softening Point		1585°C ($10^{7.6}$ poises)
Shear Modulus	31.4 GPa		Annealing Point		1042°C (10^{13} poises)
Modulus of Rupture, abraded	52.4 MPa		Strain Point		893°C ($10^{14.5}$ poises)
Bulk Modulus	35.4 GPa		Specific Heat		0.770 J/g K
Poisson's Ratio	0.16		Thermal Conductivity		1.30 W/m K
Density	2.201 g/cm^3		Thermal Diffusivity		0.0075 cm^2/s
Knoop Hardness (100 g load)	522 kg/mm^2		Average C.T.E.	0.52 ppm/K	5°C-35°C
Compressive Strength	1.14 GPa			0.57 ppm/K	0°C-200°C
Tensile Strength	54 MPa			0.48 ppm/K	–100°C-200°C

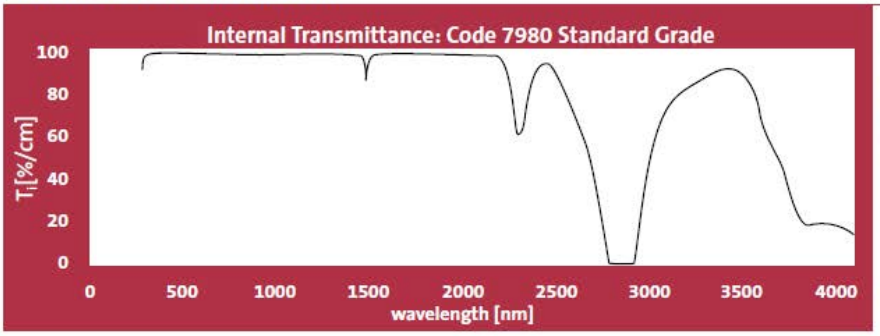
Chemical Durability and Impurities

Solution		Time	Weight Loss [mg/cm^2]	Impurities	
5% HCl by weight	@95°C	24 h	<0.010	OH content (by weight):	800-1000 ppm
5% NaOH	@95°C	6 h	0.453	Impurities other than OH:	≤ 1000 ppb
0.02N NA_2CO_3	@95°C	6 h	0.065		
0.02N H_2SO_4	@95°C	24 h	<0.010		
Deionized H_2O	@95°C	24 h	0.015		
10% HF by weight	@25°C	20 m	0.230		
10% NH_4F*HF by weight	@25°C	20 m	0.220		

FIGURE B.6 – Caractéristiques géométriques, optiques et mécaniques de la vitre utilisée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Internal Transmittance



HPFS® Standard Grade is certified to meet $T_{external} \geq$ 80%/cm@185nm ($T_{internal} \geq$ 88%/cm@185nm), when measured through a polished, uncoated sample. A typical internal transmittance curve for HPFS® Standard Grade fused silica is shown here.

Refractive Index and Dispersion

Data in 22°C in 760mm Hg Dry Nitrogen Gas

Wavelength [air] λ [nm]	Refractive Index *2 n	Thermal Coefficient $\Delta n/\Delta T$*3 (ppm/K)
1128.64	1.448870	9.6
1064.00	1.449633	9.6
1060.00	1.449681	9.6
1013.98 n_t	1.450245	9.6
852.11 n_s	1.452469	9.7
706.52 n_r	1.455149	9.9
656.27 n_C	1.456370	9.9
643.85 $n_{C'}$	1.456707	10.0
632.80 $n_{He\text{-}Ne}$	1.457021	10.0
589.29 n_D	1.458406	10.1
587.56 n_d	1.458467	10.1
546.07 n_e	1.460082	10.2
486.13 n_F	1.463132	10.4
479.99 $n_{F'}$	1.463509	10.4
435.83 n_g	1.466701	10.6
404.66 n_h	1.469628	10.8
365.01 n_i	1.474555	11.2
334.15	1.479785	11.6
312.57	1.484514	12.0
308.00	1.485663	12.1
248.30	1.508433	14.2
248.00	1.508601	14.2
214.44	1.533789	17.0
206.20	1.542741	18.1
194.17	1.559012	20.4
193.40	1.560208	20.5
193.00	1.560841	20.6
184.89	1.575131	22.7

Polynomial Dispersion Equation Constants *1	
A_0	2.104025406
A_1	$-1.456000330 \times 10^{-4}$
A_2	$-9.049135390 \times 10^{-3}$
A_3	$8.801830992 \times 10^{-3}$
A_4	$8.435237228 \times 10^{-5}$
A_5	$1.681656789 \times 10^{-6}$
A_6	$-1.675425449 \times 10^{-8}$
A_7	$8.326602461 \times 10^{-10}$

Sellmeier Dispersion Equation Constants *2	
B_1	0.68374049400
B_2	0.42032361300
B_3	0.58502748000
C_1	0.00460352869
C_2	0.01339688560
C_3	64.49327320000

$\Delta n/\Delta T$ Dispersion Equation Constants *3	
C_0	9.390590
C_1	0.235290
C_2	-1.318560×10^{-3}
C_3	3.028870×10^{-4}

Other Optical Properties	
ν_d	67.79
ν_e	67.64
$n_F - n_C$	0.006763
$n_{F'} - n_{C'}$	0.006802
Stress Coefficient	35.0 nm/cm MPa
*Striae	ISO 101 10-4 Class 5/Thickness Direction
Birefringence	≤ 1nm/cm, lower specifications available

*1 Polynomial Equation: $n^2 = A_0 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^{-2} + A_4\lambda^{-4} + A_5\lambda^{-6} + A_6\lambda^{-8} + A_7\lambda^{-10}$ with λ in µm

*2 Sellmeier Equation: $n^2-1 = B_1\lambda^2/(\lambda^2-C_1) + B_2\lambda^2/(\lambda^2-C_2) + B_3\lambda^2/(\lambda^2-C_3)$ with λ in µm

*3 dn/dT Equation: $dn/dT = C_0 + C_1\lambda^{-2} + C_2\lambda^{-4} + C_3\lambda^{-6}$ with λ in µm

*1 Lower specifications are available upon request.

FIGURE B.6 – Caractéristiques géométriques, optiques et mécaniques de la vitre utilisée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

B.3 Eprouvette

B.3.1 Billes céramiques.

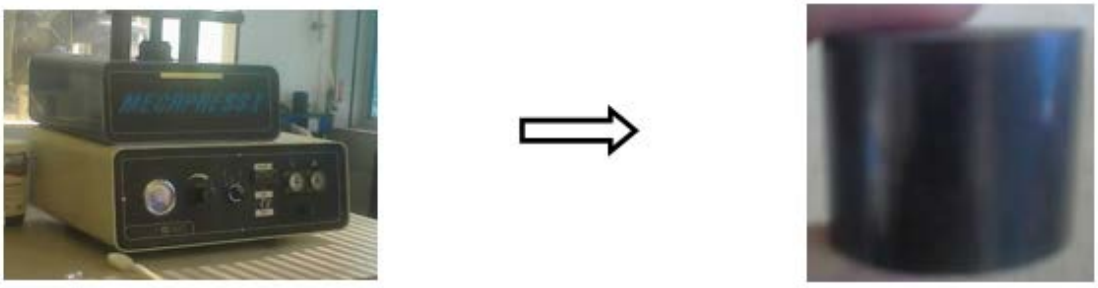
FIGURE B.7 – Inclusions céramiques.

B.3.2 Processus de broyage de la résine.

FIGURE B.8 – Broyage et mélange des trois différentes résines.

B.3.3 Enrobage à chaud.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



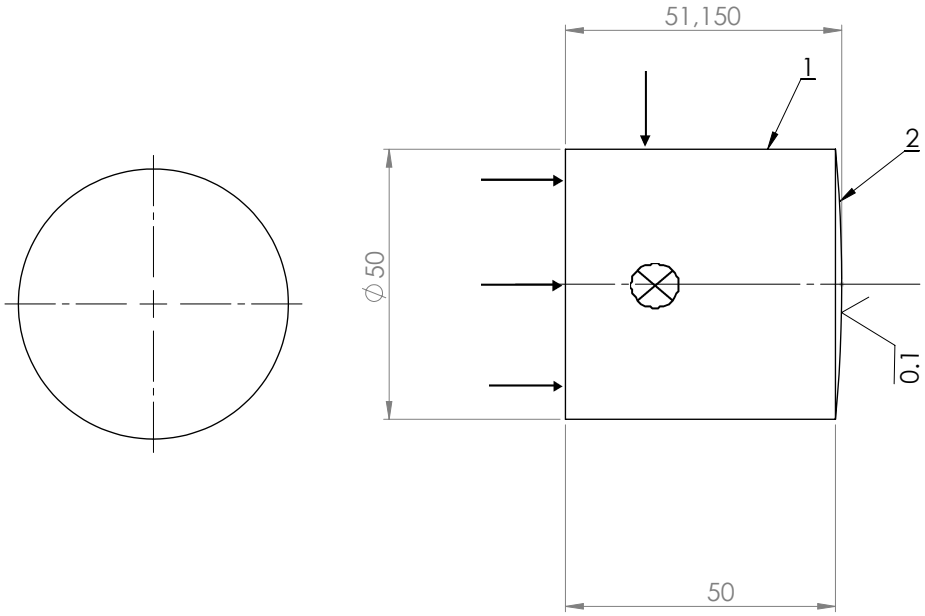
Machine d'enrobage à chaud **Eprouvette**

FIGURE B.9 – Processus d'enrobage à chaud.

B.3.4 Dimensions.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Gamme d'usinage



Phase	Opération	Surface	Outil	Machine
10	Finition	2	outil à charioter	Machine de tournage conventionnel

REP:1		EPROUVETTE	QTE
Echelle:1:1	27/03/2014	**LaMCoS**	1

FIGURE B.10 – Gamme d'usinage de l'éprouvette homogéne.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

B.4 Tomographie

B.4.1 Phoenix v—tome—x s, système informatisé utilisé pour la tomographie.

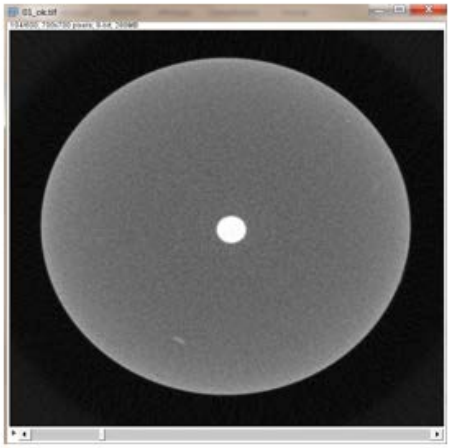
FIGURE B.11 – Phoenix v—tome—x s (modèle GE) utilisé pour la tomographie.

B.4.2 Protocole de traitement des images issues de la tomographie.

B.4.3 Tableau récapitulatif.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Détermination des coordonnées de la bille



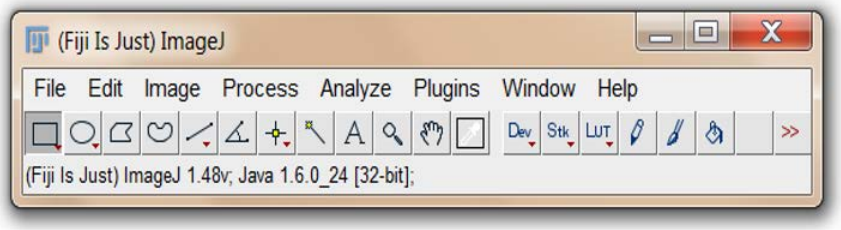


Image-adjust-threshold

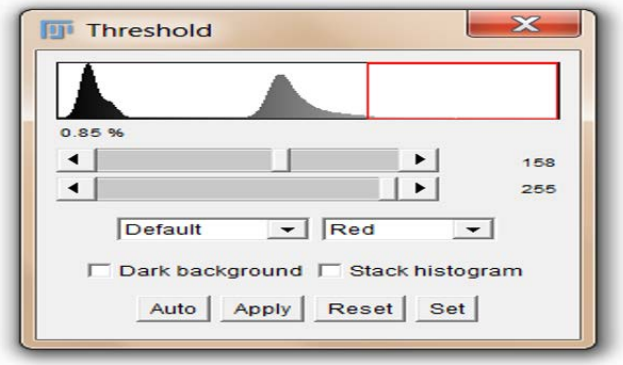
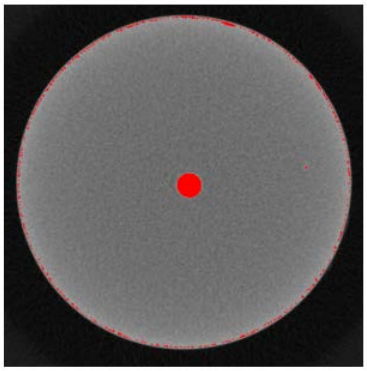
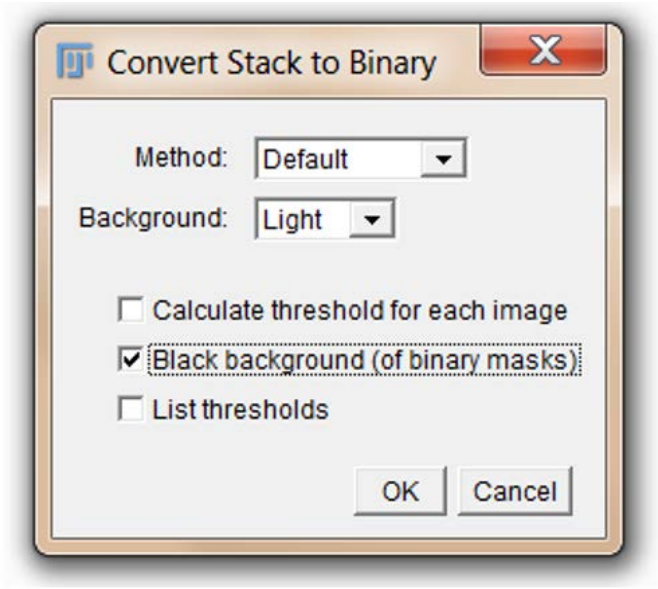


FIGURE B.12 – Différentes étapes de traitement d'images issues de la tomographie.

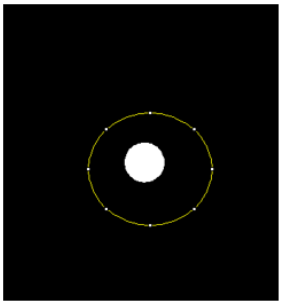
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



Apply



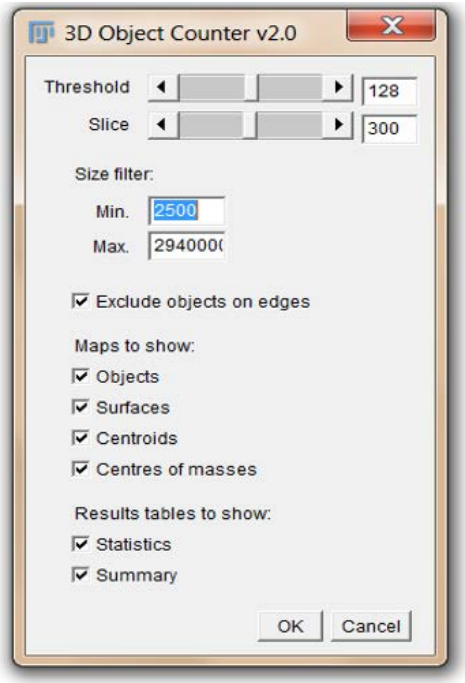
Ok



File-clear outside

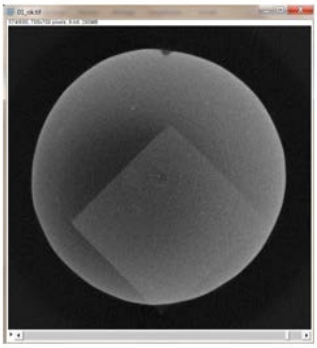
FIGURE B.12 – Différentes étapes de traitement d'images issues de la tomographie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



⇨Xb, Yb, Zb

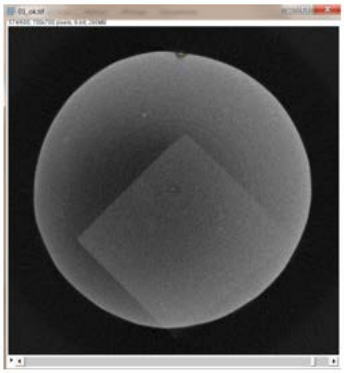
Détermination des coordonnées de l'encoche



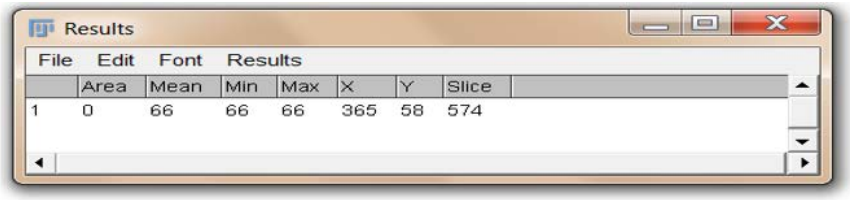
Point en jaune

FIGURE B.12 – Différentes étapes de traitement d'images issues de la tomographie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



Analyse-measure



⇨XE, YE, ZE

Détermination des positions des inclusions grâce à la Tomographie

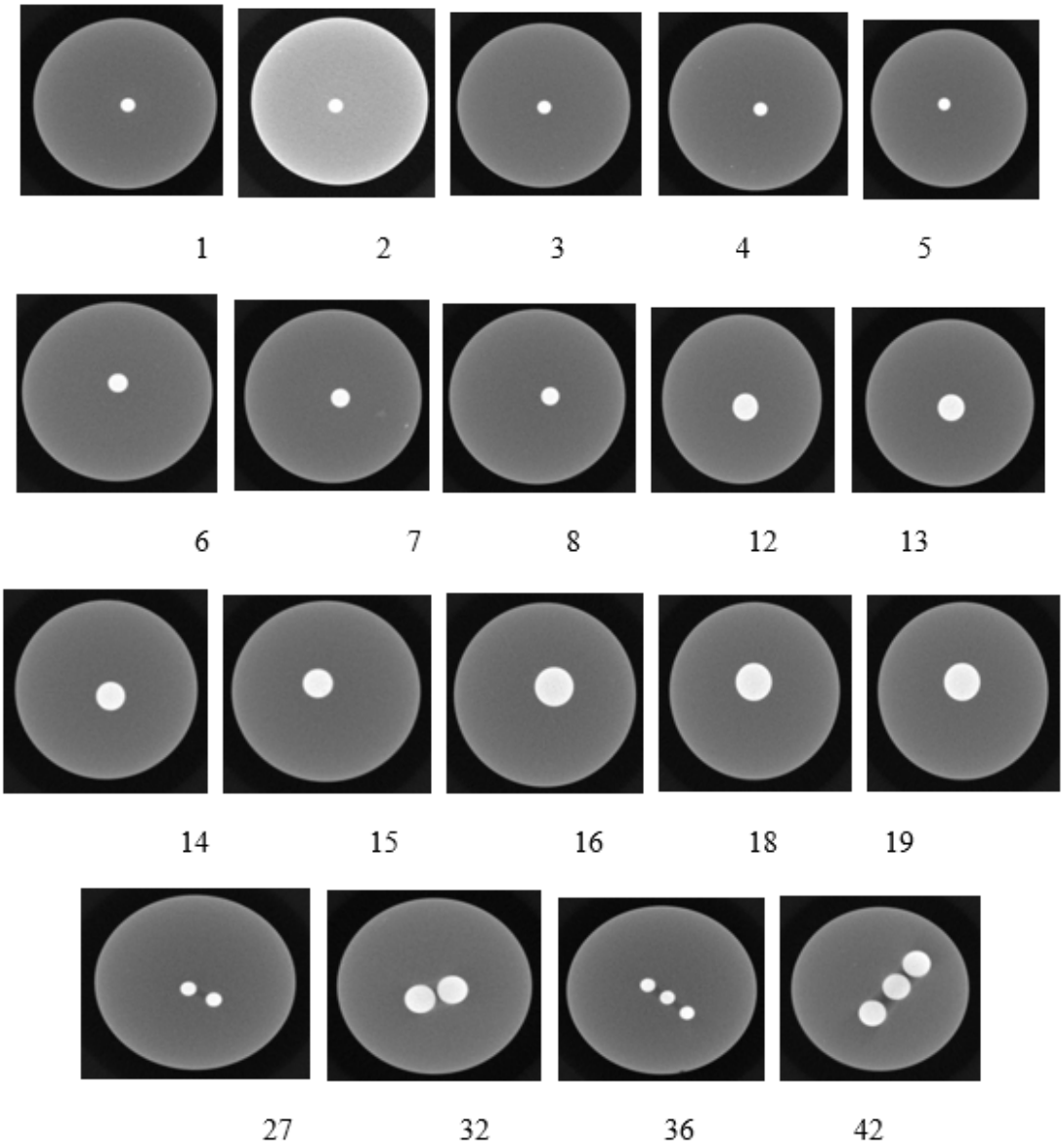
FIGURE B.12 – Différentes étapes de traitement d'images issues de la tomographie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Eprouvette	Hauteur (mm)	Couche (mm)	Diamètre de l'inclusion	Nombre d'Inclusion	XB	YB	ZB	XE	YE	ZE	XEB (mm)	YBE (mm)	ZBE (mm)	H Bille% au bout sphérique mm)
1	25.64	2	2.36	1	357.167	351.937	104.532	364	55	574	0.27332	11.87748	18.77872	6.86128
2	25.88	2.5	2.36	1	337.38	359.679	96.776	351	48	570	0.5448	12.46716	18.92896	6.95104
3	25.23	3	2.36	1	350.172	353.718	114.04	355	52	563	0.19312	12.06872	17.9584	7.2716
4	25.36	4	2.36	1	366.649	359.446	131.195	341	54	577	1.02596	12.21784	17.8322	7.5278
5	25.48	5	2.36	1	330.994	337.268	132.859	364	55	568	1.32024	11.29072	17.8322	7.6478
6	24	2	3.15	1	349.313	313.032	118.663	351	47	560	0.06748	10.64128	17.65348	6.34652
7	24.54	2.5	3.15	1	372.43	350.936	112.428	352	50	563	0.8172	12.03744	18.02288	6.51712
8	24.5	3	3.15	1	391.78	347.265	136.86	371	56	567	0.8312	11.6506	17.2056	7.2944
12	25.82	2.5	4.74	1	360.844	374.973	128.449	344	53	566	0.67376	12.87892	17.50204	8.31796
13	24.84	3	4.74	1	354.345	365.709	143.713	349	56	580	0.2138	12.38836	17.45148	7.38852
14	24.62	4	4.74	1	362.025	367.011	149.560	353	51	568	0.361	12.64044	16.7376	7.8824
15	25.51	5	4.74	1	322.123	319.525	166.348	310	59	563	0.48492	10.421	15.86608	9.64392
16	25.23	2	6.32	1	378.366	318.984	136.985	354	51	571	0.97464	10.71936	17.3606	7.8694
18	24	3	6.32	1	344.209	314.031	146.086	363	52	554	0.74164	10.48124	16.31656	7.68344
19	24.27	4	6.32	1	379.446	375.525	160.977	365	56	565	0.57784	12.781	16.16092	8.10908
27	24.35	2.5	2.36	2	B1 334.651	368.777	100.881	357	49	561	0.89396	12.79108	18.40476	5.94524
					B2 409.884	405.717	100.882				2.11536	14.26868	18.40472	5.94528
32	26.48	2.5	4.74	2	B1 304.450	389.079	109.823	353	51	583	1.942	13.52316	18.92708	7.55292
					B2 403.387	357.540	111.698				2.01548	12.2616	18.85208	7.62792
36	25.20	2	2.36	3	B1 365.417	370.573	94.622	342	46	570	0.93668	12.98292	19.01512	6.18488
					B2 303.911	326.781	96.121				1.52356	11.23124	18.95516	6.24484
					B3 426.951	425.063	99.246				3.39804	15.16252	18.83016	6.36984
42	23.77	2.5	4.74	3	B1 320.272	433.023	130.554	343	55	555	0.90912	15.12092	16.97784	6.79216
					B2 401.218	336.355	132.007				2.32872	11.2542	16.91972	6.85028
					B3 469.005	253.371	146.260				5.0402	7.93484	16.3496	7.4204

FIGURE B.13 – Récapitulatif des propriétés géométriques des diverses hétérogénéités contenues dans les éprouvettes hétérogènes.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés



XE : Position de l'encoche selon x

YE : Position de l'encoche selon y

ZE: Position de l'encoche selon z (L'axe de l'éprouvette)

FIGURE B.14 – Images des hétérogénéités au travers de la tomographie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

B.5 Essais

B.5.1 Réglages acquisitions images

Le réglage de la "mise au point" se fait facilement avec une molette de réglage assez précise. Le réglage de la luminosité peut se faire de trois manières différentes :

– Ouverture du diaphragme (la netteté étant meilleure quand l'ouverture est maximum) ;

– Réglage de la luminosité de la lampe (autour de $80 - 90\%$) ;

– Réglage du temps d'exposition (de l'ordre de 0.1 ms suivant les paramètres précédents) ;

La figure B.15 ci-dessous montre une image avec un bon réglage et son histogramme de répartition des pixels par niveau de gris. La fonction saturation permet de montrer les zones saturée des deux extrémités (endroit o le niveau de gris est maximum ou minimum). Ces zones sont à minimiser pour permettre une bonne corrélation des images.

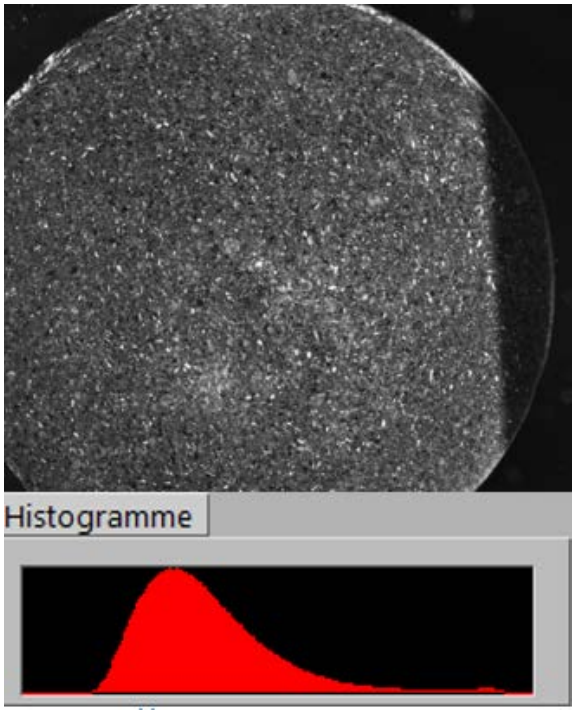


FIGURE B.15 – Image de référence et son histogramme de niveau de gris.

B.5.2 Protocole de traitement des résultats

(Vic 2D) – Réglage de la zone de corrélation

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

La taille du subset contrle l'aire de l'image utilisée pour mesurer les déplacements entre chaque image. Il doit e suffisamment grand pour s'assurer de contenir un nombre important de motifs distinctifs. La taille du Step contrle le décalage du centre de l'aire de corrélation (définie par le subset) pour l'analyse de l'image. Par exemple un step de 1 signifie que le centre de l'aire corrélation va balayer chaque pixel de l'image. L'analyse est donc plus précise pour un step petit. Il faut cependant noter que le temps de l'analyse augmente fortement lorsque le step diminue (il varie inversement avec le carré du step ; par exemple un step de 1 prend 25 fois plus de temps qu'un step de 5). Les deux résultats (Fig.B.16) ci-dessous représentent l'analyse d'un m résultat avec des paramétres différents. Les valeurs des déplacements sont similaires mais la précision du résultat est nettement supérieure avec les paramétres adéquats.

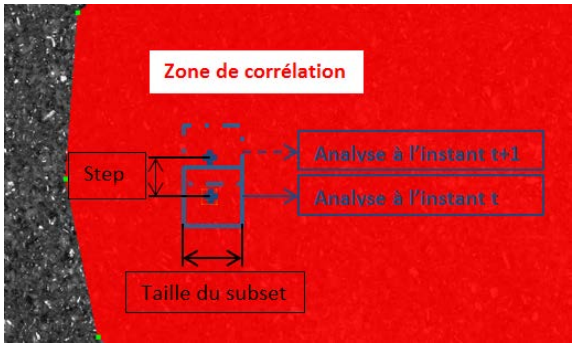


FIGURE B.16 – Représentation du subset et du step.

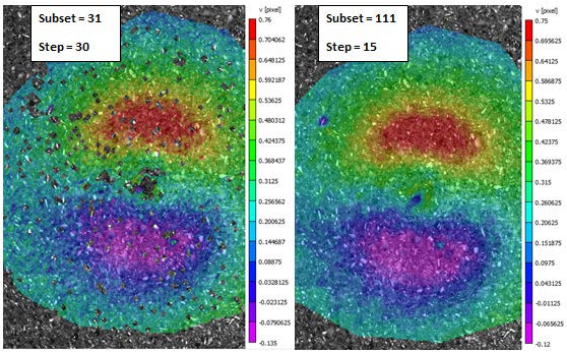


FIGURE B.17 – Influence du subset et du step sur la qualité des résultats de la corrélation d'images.

Un subset d'environ 90 pour un step de 20-25 représente un bon compromis entre temps de traitement des résultats et pertinence des résultats.

Réglage de la zone de corrélation (Vic 2D)

Il est important de :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

– choisir une zone d'étude pas trop large avec la fonction polygone, le minimum nécessaire à l'exploitation des résultats (la surface étant bombée, les bords sont plus flous)
– Déplacer le point de référence hors de la zone de contact
– Choisir un Subset d'environ 90 +/- 10
– Choisir un Step ≤ 25

Paramètres d′ analyse (Vic 2D)

Dans l'onglet option du logiciel (VIC 2D), il est important de choisir :
– Interpolation : optimized 6-tap plus précis (4-tap correct, 8-tap risque de planter)
– Criterion : Normalized squared differences (plus grande flexibilité d'analyse car diminue la sensibilité à la lumière)
– Subset weight : Gaussian weights est le meilleur compromis entre résolution spatial et résolution des déplacements.
– Incremental correlation : à priori non

Enfin, il est conseillé de traiter les déformations : Post-processing − strain computation.

Pour le reste, les paramètres prédéfinis sont corrects dans le cadre de notre étude.

B.6 Film de mesure de la distribution des champs de pression

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

The only thing not green about our product is its color!

Tactile Pressure Indicating Film

Pressure-micro® Green

Pressurex-micro® Green reveals the pressure distribution between contacting or impacting surfaces.

Pressurex-micro® Green is our newest addition to the Pressurex® line. Now, for the first time ever, you'll be able to visualize pressure distribution **on a tight budget**. It has similar performance characteristics to high resolution products at a fraction of the price.

Common Applications

Packaging & Converting:
nip roller impressions, heat sealing, lamination

Automotive:
brake pad, clamping, clutch, battery & fuel cell, impact, gasket/bolted joint, lamination, welding, wiper

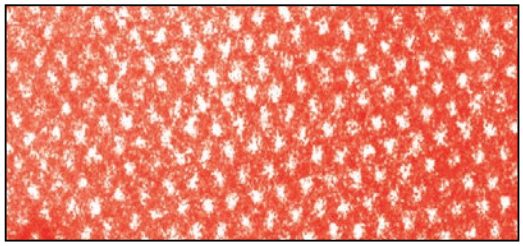
Electronics:
heat sink, BGA, connector, lamination, LCD bonding, wafer bonding / polishing, solar cells

Aerospace:
composite layup, fuel cell, lamination, impact, bolted interface

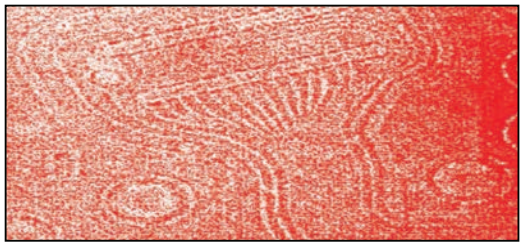
Ergonomics:
biomechanics, body mapping

EXAMPLE APPLICATIONS

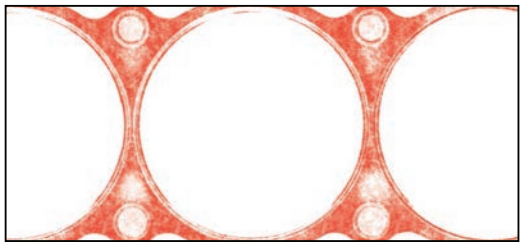
NIP IMPRESSION



LAMINATION PRESS



GASKETED INTERFACE



TIRE TREAD

Pressurex-micro® Green www. sensorprod.com/pmg

FIGURE B.18 – Film de mesure de la distribution des champs de pression.

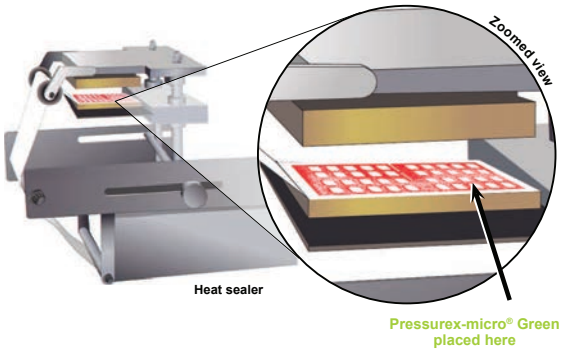
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Pressurex-micro® Green — TACTILE PRESSURE INDICATING FILM

An example of Pressurex-micro® Green in use

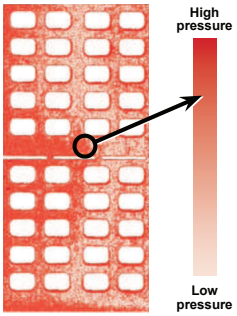
STEP 1

Place Pressurex-micro® Green film between any two contacting surfaces



STEP 2

The sensor film captures a permanent image of relative pressure distribution



How It Works

Simply place Pressurex-micro® Green pressure indicating sensor film between any two surfaces that touch, mate or impact. Apply pressure, remove the film and immediately the pressure distribution profile that occurred between the two surfaces is revealed. Pressurex-micro® Green is extremely thin and flexible (0.2 mm), which enables it to conform to curved surfaces. It is ideal for invasive, intolerant environments and tight spaces not accessible by conventional electronic transducers.

FILM TYPE	ROLL DIMENSION	PRESSURE RANGE	
PMG-A	6 m x 27 cm	8 to 500 PSI	(0.6 to 35 kg/cm²)
PMG-B	12 m x 27 cm	150 to 1,800 PSI	(11 to 127 kg/cm²)
PMG-Custom*	~	~	~

*Custom film types available upon request.

The Science

Microscopic pigmented particles adhered to the donor substrate are attracted to the chemically surface-treated receiver sheet. The receiver sheet coating has been formulated to create a noncovalent bond with the donor coating as described by the Van der Waals force equation. The chemical compatibility between the receiver sheet and the donor sheet cause intermolecular diffusion that creates an interpenetrating network between the pigment donor and the receiver coating. Upon separation, microshear forces compel the particles to dislodge from the pigmented donor substrate, leaving an impression.

Micrograph of film

SPECIFICATIONS	
OPERATING TEMPERATURE	5°C to 35°C
HUMIDITY RANGE	10% to 90% RH
GAUGE	0.2 mm (8 mils)
SPATIAL RESOLUTION	45 microns
ACCURACY	±17%
SHELF LIFE	2 years

TACTILE PRESSURE EXPERTS SPI SENSOR PRODUCTS INC.

Sensor Products Inc.
300 Madison Avenue
Madison, NJ 07940 USA
Phone: 1.973.884.1755
Fax: 1.973.884.1699
info@sensorprod.com

www.sensorprod.com

Exclusive distributor of Pressurex-micro® Green
©2014 Sensor Products Inc.
Updated 10-30-2014

FIGURE B.18 – Film de mesure de la distribution des champs de pression.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

B.7 Résultats éprouvette hétérogéne

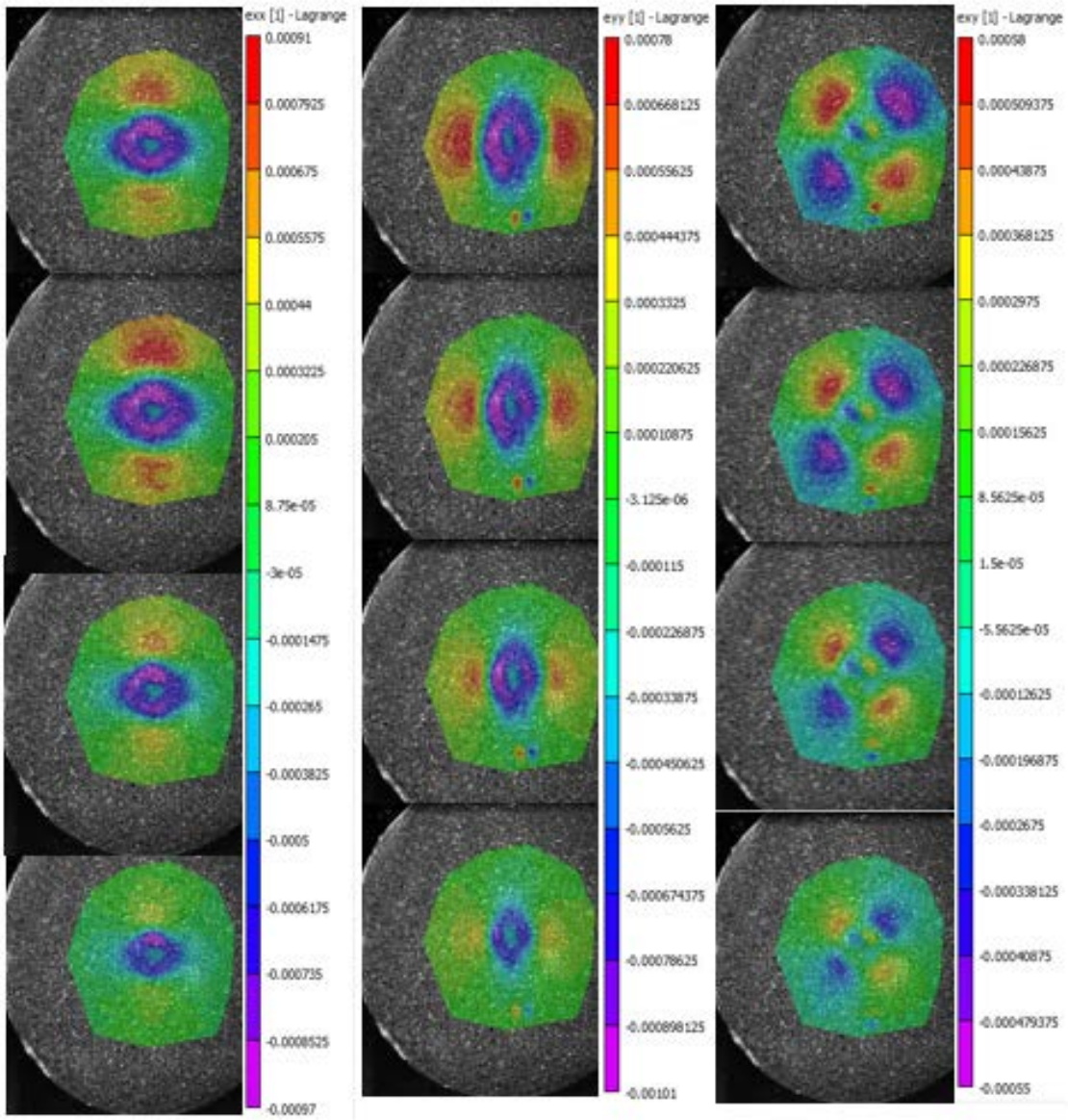


FIGURE B.19 – Eprouvette hétérogéne contenant une seule bille céramique pour des essais en mode II, efforts normaux de $500N$, $1000N$, $1500N$ et $2000N$: ε_{xx}, ε_{yy} et ε_{xy} .

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Bibliographie

[ADE 76] Aderogba K.
On eigenstresses in a semi-infinite solid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 80(3), 1976, p. 555-562.

[AI 99] Ai X., Sawamiphakdi K.
Solving elastic contact between rough surfaces as an unconstrained strain energy minimization by using CGM and FFT Techniques. *ASME J. Tribol.*, vol. 121, 1999, page 639647.

[ALE 86] Alexandrov V., Romalis B.
Contact problems in mechanical engineering. Mashinostroenie, 1986.

[ALE 10] Aleksandrov V., Goryacheva I., Torskaya E.
Sliding Contact of a Smooth Indenter and a Viscoelastic Half-Space (3D Problem). *DOKLADY PHYSICS*, vol. 55, 2010, p. 77-80.

[ALI 93] Aliabadi M. H., Brebbia C. A.
Computational methods in contact mechanics. NASA STI, 1993.

[ANT 05] Antaluca E.
Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques - effet d'un chargement normal et tangentiel. Thèse de doctorat, INSA Lyon, France, 2005.

[ANT 08] Antaluca E., Nelias D.
Contact fatigue analysis of a dented surface in a dry elastic-plastic circular point contact. *Tribology Letters*, vol. 29(2), 2008, p. 139-153.

[ARC 53] Archard J.
Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of applied physics*, vol. 24, n° 8, 1953, p. 981–988, AIP.

[ARG 12] Argatov I.
An analytical solution of the rebound indentation problem for an isotropic linear viscoelastic layer loaded with a spherical punch. *Acta Mech.*, vol. 223, 2012, p. 1441-1453.

[ASA 75] Asaro R., Barnett D.
The nonuniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion. *Journal of the Mechanics of Physics and Solids*, vol. 23, 1975, p. 77-83.

[AZE 15] Azeggagh N., Joly-Pottuz L., Nélias D., Chevalier J., Omori M., Hashida T.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

Hertzian contact damage in silicon nitride ceramics with different porosity contents. *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 35, n° 8, 2015, p. 2269–2276, Elsevier.

[BAG 12a] Bagault C., Nelias D., Baietto M.
Contact Analyses for Anisotropic Half Space : Effect of the Anisotropy on the Pressure Distribution and Contact Area. *Journal of tribology*, vol. 134, n° 3, 2012, American Society of Mechanical Engineers.

[BAG 12b] Bagault C., Nelias D., Baietto M.-C.
Contact analyses for anisotropic half space : effect of the anisotropy on the pressure distribution and contact area. *Journal of Tribology*, vol. 134, n° 3, 2012, page 031401 (8 pages).

[BAG 13] Bagault C., Nelias D., Baietto M., Ovaert T.
Contact analyses for anisotropic half-space coated with an anisotropic layer : Effect of the anisotropy on the pressure distribution and contact area. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, n° 5, 2013, p. 743-754.

[BEI 03] Beisheim J. R., Sinclair G. B.
On the Three-Dimensional Finite Element Analysis of Dovetail Attachments. *J. Turbomach.*, vol. 125, n° 2, 2003, p. 372–379, ASME.

[BEN 67] Bentall R. H., Johnson K. L.
Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 9, 1967, page 389404.

[BEN 98] Ben Dhia H.
Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 326, 1998, page 899904.

[BEN 99] Ben Dhia H.
Numerical modelling of multiscale mechanical problems : the arlequin method. *European Conference on Computational Mechanics*, , 1999, page 757766.

[BEN 04] Bendhia H., Zammali C.
Level-sets and arlequin framework for dynamic contact problems. *Rev. Europ. Elt. Finis.*, vol. 13, 2004, page 403414.

[BEN 11] Bendhia H., Torkhani M.
Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *Int. J. Numer. Mech. Eng*, vol. 85, 2011, page 6183.

[BER] Berbenni S.
Propriétés mécaniques effectives des matériaux hétérogènes : milieux thermo-élastiques. Cours de micromécanique, chapitre III.

[BER 10] Berbenni S., Cherkaoui M.
Homogenization of multicoated inclusion-reinforced linear elastic composites with eigenstrains : Application to thermoelastic behavior. *Philosophical Magazine*, vol. 90, n° 22, 2010, p. 3003–3026, Taylor & Francis.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[BES 06] Besnard G., Hild F., Roux S.
Finite-Element Displacement Fields Analysis from Digital Images : Application to PortevinLe Chlier Bands. *Experimental Mechanics*, vol. 46, n° 6, 2006, p. 789-803, Kluwer Academic Publishers.

[BOF 12a] Boffy H.
Techniques multigrilles et raffinement pour un modèle 3D efficace de milieux hétérogènes sous sollicitations de contact. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2012.

[BOF 12b] Boffy H., Baietto M., Sainsot P., Lubrecht A.
An Efficient 3D Model of Heterogeneous Materials for Elastic Contact Applications Using Multigrid Methods. *Journal of tribology*, vol. 134, n° 2, 2012, American Society of Mechanical Engineers.

[BOF 14] Boffy H., Venner H. C.
Multigrid solution of 3D stress field in strongly hetergeneous materials. *Tribology International*, vol. 74, 2014, p. 121-129.

[BOF 15] Boffy H., Venner C. H.
Multigrid numerical simulation of contact mechanics of elastic materials with 3D heterogeneous subsurface topology. *Tribology International*, vol. 92, 2015, p. 233–245, Elsevier.

[BOR 01] Bornert M., Bretheau T., Gilormini P., Jeulin D., Michel J. C., Moulinec H., Suquet P., Zaoui A.
Mécanique et Ingénierie des Matériaux - Homogénéisation en mécanique des matériaux 1- Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. Hermes Science, 2001.

[BOS 11] Bosman R., Schipper D.
Transition from mild to severe wear including running in effects. *Wear*, vol. 270, n° 7, 2011, p. 472–478, Elsevier.

[BOU 05] Boucly V., Nelias D., Liu S., Wang Q., Keer L.
Contact analyses for bodies with frictional heating and plastic behavior. *Journal of tribology*, vol. 127, 2005, page 355.

[BOU 07] Boucly V., Nelias D., Green I.
Modeling of the rolling and sliding contact between two asperities. *ASME Journal of Tribology*, vol. 129, n° 2, 2007, p. 235-245.

[BRA 90] Brandt A., Lubrecht A. A.
Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *J. Comp. Phys.*, vol. 90, 1990, page 348370.

[BRI 98] Briscoe B., Chateauminois A., Lindley T., Parsonage D.
Fretting wear behaviour of polymethylmethacrylate under linear motions and torsional contact conditions. *Tribology International*, vol. 31, n° 11, 1998, p. 701–711, Elsevier.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[BRI 00] Briscoe B., Chateauminois A., Lindley T., Parsonage D.
Contact damage of poly (methylmethacrylate) during complex microdisplacements. *Wear*, vol. 240, n° 1, 2000, p. 27–39, Elsevier.

[CAI 11a] Cai Z.-B., Gao S.-S., Zhu M.-H., Lin X.-Z., Liu J., Yu H.-Y.
Tribological behavior of polymethyl methacrylate against different counter-bodies induced by torsional fretting wear. *Wear*, vol. 270, n° 3, 2011, p. 230–240, Elsevier.

[CAI 11b] Cai Z.-b., Zhu M.-h., Yang S., Xiao X.-b., Lin X.-z., Yu H.-y.
In situ observations of the real-time wear of PMMA flat against steel ball under torsional fretting. *Wear*, vol. 271, n° 9, 2011, p. 2242–2251, Elsevier.

[CAM 00] Camus G.
Modelling of the mechanical behavior and damage processes of fibrous ceramic matrix composites : application to a 2-D SiC/SiC. *International Journal of solids and Structures*, vol. 37, n° 6, 2000, p. 919–942, Elsevier.

[CAR 13] Carbone G., Putignano C.
A novel methodology to predict sliding/rolling friction in viscoelastic materials : theory and experiments. *J. Mech. Phys. Solid.*, vol. 61, 2013, p. 1822-1834.

[CHA 00] Chateauminois A., Kharrat M., Krichen A.
Analysis of fretting damage in polymers by means of fretting maps. *ASTM SPECIAL TECHNICAL PUBLICATION*, vol. 1367, 2000, p. 352–368, AMERICAN TECHNICAL PUBLISHERS LTD.

[CHA 11a] Chaise T.
Modélisation mécanique par méthode semi analytique : du contact roulant élastoplastique aux impacts multiples. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.

[CHA 11b] Chaise T., Nelias D., Sadeghi F.
On the Effect of Isotropic Hardening on the Coefficient of Restitution for Single or Repeated Impacts Using a Semi-Analytical Method. *Tribology Transactions*, vol. 54, n° 5, 2011, p. 714–722, Taylor & Francis.

[CHA 11c] Chaise T., Nelias D.
Contact Pressure and Residual Strain in 3D Elasto-Plastic Rolling Contact for a Circular or Elliptical Point Contact. *Journal of Tribology*, vol. 133, n° 4, 2011, page 041402, ASME.

[CHA 11d] Chaise T., Nelias D., Sadeghi F.
On the effect of isotropic hardening on the coefficient of restitution for single or repeated impacts using a semi-analytical method. *Tribology Transactions*, vol. 54, n° 5, 2011, p. 714-722, Taylor & Francis Group.

[CHA 12a] Chaise T., Li J., Nelias D., Kubler R., Taheri S., Douchet G., Robin V., Gilles P.
Modelling of multiple impacts for the prediction of distortions and residual stresses induced by ultrasonic shot peening (USP). *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, 2012, p. 2080-2090, Elsevier.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[CHA 12b] Chaise T., Li J., Nelias D., Kubler R., Taheri S., Douchet G., Robin V., Gilles P.
Modelling of multiple impacts for the prediction of distortions and residual stresses induced by Ultrasonic Shot Peening (USP). *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, 2012, p. 2080-2090, Elsevier.

[CHE 08a] Chen P., Xiong J., Shen Z.
Thickness effect on the contact behavior of a composite laminate indented by a rigid sphere. *Mechanics of Materials*, vol. 40, n° 4, 2008, p. 183–194, Elsevier.

[CHE 08b] Chen W., Liu S., Wang Q.
FFT-based numerical methods for elasto-plastic contacts of nominally flat surfaces. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 75, 2008, p. 011022-1-11.

[CHE 11] Chen W., , Wang Q., Huan Z., Luo X.
Semi-analytical viscoelastic contact modeling of polymer-based materials. *Journal of Tribology*, vol. 133, 2011, page 041404.

[CHI 77a] Chiu Y.
On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, 1977, page 587.

[CHI 77b] Chiu Y.
On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, 1977, p. 587-590.

[CHI 78a] Chiu Y.
On the stress field and surface deformation in a half space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 302-306.

[CHI 78b] Chiu Y.
On the stress field and surface deformation in a half space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, page 302.

[COR 99] Cormier N. G., Smallwood B. S., Sinclair G. B., Meda G.
Aggressive submodelling of stress concentrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n° 6, 1999, p. 889–909.

[COU 05] Courbon J., Lormand G., Dudragne G., Daguier P., Vincent A.
Influence of inclusion pairs, clusters and stringers on the lower bound of the endurance limit of bearing steels. *Tribology International*, vol. 36, 2005, p. 921-928.

[COU 08] Couégnat G.
Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé. Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2008.

[CRO 56] Crossland B.
Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

steel. *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, vol. 138 Institution of Mechanical Engineers London, 1956.

[DAN 93] Dang-Van K.
Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue. *ASTM Special Technical Publication*, vol. 1191, 1993, p. 120–120, AMERICAN TECHNICAL PUBLISHERS LTD.

[DIC 06a] Dick T., Cailletaud G.
Fretting modelling with a crystal plasticity model of Ti6Al4V. *Computational Materials Science*, vol. 38, n° 1, 2006, p. 113–125.

[DIC 06b] Dick T., Paulin C., Cailletaud G., Fouvry S.
Experimental and numerical analysis of local and global plastic behaviour in fretting wear. *Tribology International*, vol. 39, n° 10, 2006, p. 1036–1044.

[DIC 06c] Dick T.
Modélisation multiéchelle du phénomene de fretting dans le contact aube-disque. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.

[DIN 04] Dini D., Nowell D.
Flat and rounded fretting contact problems incorporating elastic layers. *International Journal Of Mechanical Sciences*, vol. 46, 2004, page 16351657.

[DRA 01] Dragon-Louiset M.
On a predictive macroscopic contact-sliding wear model based on micromechanical considerations. *International journal of solids and structures*, vol. 38, n° 9, 2001, p. 1625–1639, Elsevier.

[DUB 03] Dubourg M., Chateauminois A., Villechaise B.
In situ analysis and modeling of crack initiation and propagation within model fretting contacts using polymer materials. *Tribology International*, vol. 36, n° 2, 2003, p. 109–119, Elsevier.

[DVO 92a] Dvorak G. J.
Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 437 The Royal Society, 1992, p. 311–327.

[DVO 92b] DVORAK G. J., BENVENISTE Y.
On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 437, 1992, page 291310.

[DVO 94] Dvorak G .-J., Bahei-el din Y., Wafa A.
The modelling of inelastic composite materials with the transformation field analysis. *Model. Simulat. Mater. Sci. Eng*, vol. 2, 1994, page 571586.

[ELH 06] El Hage C.
Modélisation du comportement élastique endommageable de matériaux composites à renfort tridimensionnel. Thèse de doctorat, 2006.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[ESH 57] Eshelby J.
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A241, 1957, p. 376-396.

[ESH 59] Eshelby J.
The elastic field outside an elastic inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A252, 1959, p. 561-569.

[ESH 61] Eshelby J.
Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics*, vol. 2, 1961, p. 89-140.

[FAR 91] Farhat C., Roux F. X.
A method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, p. 1205-1227.

[FAR 96] Farhat C., Chen P. S., Risher F.
A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with Lagrange multipliers : Application to the design of new FETI coarse problems. rapport, 1996, Center for Aerospace Structures, CU.

[FEY 00] Feyel F., Chaboche J. L.
FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, 2000, p. 309-330.

[FIN 58] Findley W. N.
A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. N° 6 Engineering Materials Research Laboratory, Division of Engineering, Brown University, 1958.

[FOR 61] Forsyth P. J. E.
A two stage fatigue fracture mechanism. *Proc. Cranfield Symposium on Fatigue*, 1961.

[FOU 03a] Fouvry S., Liskiewicz T., Kapsa P., Hannel S., Sauger E.
An energy description of wear mechanisms and its applications to oscillating sliding contacts. *Wear*, vol. 255, n° 1-6, 2003, p. 287–298, Elsevier.

[FOU 03b] Fouvry S., Liskiewicz T., Kapsa P., Hannel S., Sauger E.
An energy description of wear mechanisms and its applications to oscillating sliding contacts. *Wear*, vol. 255, n° 1–6, 2003, p. 287 - 298. 14th International Conference on Wear of Materials.

[FRI 02] Fridrici V.
Fretting d'un alliage de titane rev et lubrifié : application au contact aube/disque. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.

[FUL 10] Fulleringer B., Nelias D.
On the tangential displacement of a surface point due to a cuboid of uniform

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

plastic strain in a half-space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 77(2), 2010, p. 021014-1/7.

[FUL 11] Fulleringer B.
Semi-analytical modeling of complex mechanical contacts : application to inclusions and swear of coated surfaces. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2011.

[GAL 06] Gallego L., Nelias D., Jacq C.
A comprehensive method to predict wear and to define the optimum geometry of fretting surfaces. *ASME Journal of Tribology*, vol. 128, n° 3, 2006, p. 476-485.

[GAL 07a] Gallego L.
Fretting et usure des contacts mécaniques : Modélisation numérique. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2007.

[GAL 07b] Gallego L., Nelias D.
Modeling of fretting wear under gross slip and partial slip conditions. *Journal of Tribology*, vol. 129(3), 2007, p. 528-535.

[GAL 07c] Gallego L., Nelias D.
Modeling of fretting wear under gross slip and partial slip conditions. *ASME Journal of Tribology*, vol. 129, n° 3, 2007, p. 528-535.

[GAL 10a] Gallego L., Fulleringer B., Deyber S., Nelias D.
Multiscale computation of fretting wear at the blade/disk interface. *Tribology International*, vol. 43, 2010, p. 708-718.

[GAL 10b] Gallego L., Nelias D., Deyber S.
A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III. *Wear*, vol. 268, n° 1, 2010, p. 208–222, Elsevier.

[GAL 10c] Gallego L., Nelias D., Deyber S.
A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III. *Wear*, vol. 268, 2010, p. 208-222.

[GAO 15] Gao Y., Kim S., Zhou S., Chiu H.-C., Nélias D., Berger C., de Heer W., Polloni L., Sordan R., Bongiorno A. et al.
Elastic coupling between layers in two-dimensional materials. *Nature materials*, , 2015, Nature Publishing Group.

[GER 05] Geringer J., Forest B., Combrade P.
Fretting-corrosion of materials used as orthopaedic implants. *Wear*, vol. 259, n° 7, 2005, p. 943–951, Elsevier.

[GER 09] Geringer J., Atmani F., Forest B.
Friction–corrosion of AISI 316L/bone cement and AISI 316L/PMMA contacts : Ionic strength effect on tribological behaviour. *Wear*, vol. 267, n° 5, 2009, p. 763–769, Elsevier.

[GLO 90] Glowinski R., Le Tallec P.
Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwartz alternating method. *In Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Houston, pages 224-231*, 1990.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[GOD 84] Godet M.
The third-body approach : A mechanical view of wear. *Wear*, vol. 100, n° 1–3, 1984, p. 437 - 452.

[GOO 97] Goo N., Kim S.
Dynamic contact analysis of laminated composite plates under low-velocity impact. *AIAA journal*, vol. 35, n° 9, 1997, p. 1518–1521.

[GOR 73] Goriacheva G.
Contact problem of rolling of a viscoelastic cylinder on a base of the same material. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 37(5), 1973, p. 925-933.

[GRA 65] Gradshteyn, Ryzhik I.
Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, 1965.

[GRA 67] Graham G.
The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the time dependent contact area has any number of maxima and minima. *International Journal of Engineering Sciences*, vol. 5, 1967, p. 495-514.

[GRE 66] Greenwood J. A., Willamson J. B. P.
Contact of normally flat surfaces. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 295, 1966, p. 300–319.

[GRE 10] Greenwood J.
Contact between an axisymmetric indenter and a viscoelastic half-space. *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 52, 2010, p. 829-835.

[HAS 62] Hashin Z.
The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl.Mech*, vol. 29, 1962, page 143150.

[HAS 63] Hashin Z., Shtrikman S.
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, n° 2, 1963, p. 127 - 140.

[HER 82] Hertz H.
Uber die Berhrung fester elastischer Krper. *Journal fr die reine und angewandte Mathematik*, vol. 92, n° 156-171, 1882, p. 22-37.

[HES 80] Hestenes M.
Conjugate direction methods in optimization, vol. 175. Springer-Verlag New York, 1980.

[HIL] Hild F., Roux S.
Techniques expérimentales : Corrélation d'images numériques. Septembre 2011.

[HIL 88] Hills D. A., Nowell D. O. J. J.
On the mechanics of fretting fatigue. *Wear*, vol. 125, 1988, p. 129-146.

[HOR 81] Horn B. K. P., Schunck B. G.
Determining Optical Flow. *Artificial Intelligence*, vol. 17, 1981, p. 1-3.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[HUN 60] Hunter S.
The Hertz Problem for a Rigid Spherical Indenter and Viscoelastic Half-Space. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 8, 1960, p. 219-234.

[HUN 61] Hunter S.
The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 28, 1961, p. 611-617.

[IRW 97] Irwin G. R.
Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Spie milestone series MS*, vol. 137, 1997, p. 167–170, Spie-the international society for optical engineering.

[JAC 01] Jacq C.
Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitrurée en présence d'indentations. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2001.

[JAC 02a] Jacq C., Nelias D., Lormand G., Girodin D.
Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of tribology*, vol. 124, 2002, page 653.

[JAC 02b] Jacq C., Nelias D., Lormand G., Girodin D.
Development of a three-dimensional semi-analytical elastic-plastic contact code. *Journal of Tribology*, vol. 124(4), 2002, p. 653-667.

[JAE 04] Jaegar J.
New solutions in contact mechanics. , 2004.

[JOH 85a] Johnson K.
Contact mechanics. Press syndicate of the university of Cambridge, 1985.

[JOH 85b] Johnson K.
Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.

[JU 96a] Ju Y., Farris T. N.
Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. *ASME J. Tribol.*, vol. 118, 1996, page 320328.

[JU 96b] Ju Y., Farris T.
Spectral analysis of two-dimensional contact problems. *Journal of tribology*, vol. 118, n° 2, 1996, p. 320–328, American Society of Mechanical Engineers.

[KAB 02] Kabo E., Ekberg A.
Fatigue initiation in railway wheels-a numerical study of the influence of defects. *Wear*, vol. 253, 2002, p. 26-34.

[KAB 05] Kabo E., Ekberg A.
Material defects in rolling contact fatigue of railway wheels-the influence of defect size. *Wear*, vol. 258, 2005, p. 1194-1200.

[KAL 72] Kalker J. J.
On elastic line contact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, 1972, p. 1125-1132.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[KAL 77] Kalker J. J.
The surface displacement of an elastic half space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under a roller. *J. Inst. Maths Applics*, vol. 19, 1977, p. 127-144.

[KAL 90] KALKER J. J.
Three dimensional elastic bodies in rolling contact. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[KOU 14a] Koumi K., Nelias D., Chaise T., Duval A.
Modeling of the contact between a rigid indenter and a heteregeneous viscoelastic material. *Mechanics of Materials*, vol. 77, 2014, p. 28-42.

[KOU 14b] Koumi K., Zhao L., Leroux J., Chaise T., Nelias D.
Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, 2014, p. 1390-1402.

[KOU 15] Koumi K. E., Chaise T., Nelias D.
Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 80, 2015, p. 1–25, Elsevier.

[KRI 99] Krichen A., Bradai C., Chateauminois A., Kharrat M.
Surface damage of poly (methylmethacrylate) under fretting loading. *Wear*, vol. 230, n° 2, 1999, p. 146–155, Elsevier.

[KUO 07] Kuo C.
Stress disturbances caused by the inhomogeneity in an elastic half-plane subjected to contact loading. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, 2007, p. 860-873.

[KUO 08] Kuo C.
Contact stress analysis of an elastic half-plane containing multiple inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, 2008, p. 4562-4573.

[LAD 99] Ladevèze P.
Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. 1999.

[LAM 96] Lamagnere P.
Etude et modelisation de l'amore de fissures de fatigue de roulement au voisinage des microheterogeneites dans lacier M50 (80MoCrV4 1 1). Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1996.

[LAR 12] Largenton R.
Modélisation du comportement effectif du combustible Mox par une analyse micro-mécanique en champs de transformation non uniformes. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2012.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[LAU 03] Laursen T.
Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis. Springer, 2003.

[LEE 60] Lee E., , Radok J.
The Contact Problem for Viscoelastic Bodies. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, 1960, p. 438-444.

[LEM 96] Lemaitre J., Chaboche J. L.
Mécanique des matériaux solides. 1996.

[LER 10] Leroux J., Fulleringer B., Nelias D.
Contact analysis in presence of spherical inhomogeneities within a half-space. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, 2010, p. 3034-3049.

[LER 11] Leroux J., Nelias D.
Stick-slip analysis of a circular point contact between a rigid sphere and a flat unidirectional composite with cylindrical fibers. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, 2011, p. 3510-3520.

[LER 13a] Leroux J.
Modélisation numérique du contact pour matériaux composites. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2013.

[LER 13b] Leroux J., Nelias D.
Modélisation d'un contact frottant pour matrériaux composites. *Matériaux et Techniques*, vol. 101, 2013.

[LER 13c] Leroux J., Nelias D., Ruiz-Sabariego J.-A.
Modélisation dun contact frottant pour matériaux composites. *Matériaux & Techniques*, vol. 101, n° 2, 2013, page 205, EDP Sciences.

[LET 94] Le Tallec P., Rahler C.
Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 37, 1994, p. 1159-1186.

[LIS 03] Liskiewicz T., S. F., Wendler B.
Impact of variable loading condtions on fretting wear. *Surface and Coatings Technology*, vol. 163, 2003, p. 465-471.

[LIS 04] Liskiewicz T.
Hard Coatings Durability Under variable Fretting Wear Cionditions. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2004.

[LIU 00a] Liu S., Wang Q., Liu G.
A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, vol. 243, n° 1-2, 2000, p. 101–111, Elsevier.

[LIU 00b] Liu S., Wang Q., Liu G.
A Versatile Method of Discrete Convolution and FFT (DC-FFT) for Contact Analyses. *Wear*, vol. 243(1-2), 2000, p. 101-111.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[LIU 01] Liu S., Q. W., Liu G.
A Three-Dimensional Thermal-Mechanical Asperity Contact Model for Two Nominally Flat Surfaces in Contact. *J. Tribol.*, vol. 123, 2001, page 595602.

[LOV 20] Love A.
A treatise on the mathematical theory of elasticity. at the University Press, 1920.

[LOV 52] Love A.
A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press, 4th edition édition, 1952.

[LUB 91] Lubrecht A., Ioannides E.
A fast solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques. *Journal of tribology*, vol. 113, n° 1, 1991, p. 128–133, American Society of Mechanical Engineers.

[MAC 58] MacMillan W.
The Theory of the Potential : Theoretical Mechanics. Dover publications, 1958.

[MAG] Magoulès F.
Méthodes de décomposition de domaines avec itérations asynchrones pour l'acoustique. Séminaire CNAM 30 Avril 2015, http ://www.lmssc.cnam.fr/en/content/methodes-de-decomposition-de-domaines-avec-iterations-asynchrones-pour-lacoustique.

[MAG 13] Magoulès F., Roux F.-X.
Calcul scientifique parallèle : Cours, exemples avec openMP et MPI, exercices corrigés. Dunod, 2013.

[MAN 93] Mandel J.
Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 9, 1993, p. 233-241.

[MAN 94] Man K. W.
Contact mechanics using boundary elements. Computational Mechanics Publications, 1994.

[MAR 09a] Marcellan A., Bondil O., Boué C., Chateauminois A.
Third body effects in the wear of polyamide : micro-mechanisms and wear particles analysis. *Wear*, vol. 266, n° 9, 2009, p. 1013–1020, Elsevier.

[MAR 09b] Mary C.
Simulation experimentale de l'usure du contact aube/disque de compresseur sous sollicitation de fretting. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2009.

[MAR 10] Marcin L.
Modelisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de materiaux composites à renforts tisses pour le dimensionnement robuste de structures. Thèse de doctorat, Universite Bordeaux 1, 2010.

[MAR 15] Marty J.
Analyse expérimentale des cinématiques de changement d'échelles en mécanique non-linéaire. Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 2015.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[MAT 77] Matake T.
An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of JSME*, vol. 20, n° 141, 1977, p. 257–263, The Japan Society of Mechanical Engineers.

[MAY 12] Maynadier A.
Couplages thermomécaniques dans les alliages à mémoire de forme : mesure de champs cinématique et thermique et modélisation multiéchelle. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 2012.

[MER 11] Meriaux J.
Etude expérimentale et modélisation de l'endommagement d'un contact aube/disque de soufflante soumis à des chargements de fretting fatigue. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2011.

[MIC 00] Michel J. C., Galvanetto U., Suquet P.
Constitutive relations involving internal variables based on a micromechanical analysis. Maugin G., Drouot R., Sidoroff F., Eds., *Continuum Thermomechanics : The Art and Science of Modelling Material Behaviour* Klwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, page 301312.

[MIC 03] Michel J. C., Suquet P.
Nonuniform transformation field analysis. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, 2003, page 69376955.

[MIN 50] Mindlin R., Cheng D.
Thermoelastic stress in the semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, vol. 21, 1950, p. 931-933.

[MOH 95] Mohrbacher H., Blanpain B., Celis J., Roos J., Stals L., Van Stappen M.
Oxidational wear of TiN coatings on tool steel and nitrided tool steel in unlubricated fretting. *Wear*, vol. 188, n° 1-2, 1995, p. 130–137, Elsevier.

[MON 15a] Montebello C., Pommier S., Demmou K., Leroux J., Meriaux J.
Analysis of the stress gradient effect in fretting-fatigue through nonlocal intensity factors. *International Journal of Fatigue*, , 2015, Elsevier.

[MON 15b] Montebello C., Pommier S., Demmou K., Leroux J., Mériaux J.
Multi-scale approach for the analysis of the stress fields at a contact edge in fretting fatigue conditions with a crack analogue approach. *Fracture and Structural Integrity*, , n° 33, 2015, p. 159–166.

[MOS 75] Moschovidis Z., Mura T.
Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, 1975, p. 847-852.

[MUR 84] Mura T., Furuhashi R.
The elastic inclusions with a sliding interface. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, 1984, p. 308-310.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[MUR 87a] Mura T.
Micromechanics of defects in solids, vol. 3. Springer, 1987.

[MUR 87b] Mura T.
Micromechanics of Defects in Solids. Kluwer Academic Publishers, 2nd édition, 1987.

[NAC 04] Nackenhorst U.
The ALE-formulation of bodies in rolling contact : theoretical foundations and finite element approach. *Comput. Method Appl.M*, vol. 193, 2004, p. 4299-4322.

[NAS 98] Nasdala L., Kaliske M., Becker A., Rothert H.
An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures. *Comput. Mech.*, vol. 22, 1998, p. 395-403.

[NEL 99] Nelias D., Dumont M.-L., Champiot F., Vincent A., Girodin D., FougÔøÔøres R., Flamand L.
Role of inclusions, surface roughness and operating conditions on rolling contact fatigue. *Journal of Tribology*, vol. 121(2), 1999, p. 240-251.

[NEL 07a] Nelias D., Antaluca E., Boucly V.
Rolling of an elastic ellipsoid upon an elastic-plastic flat. *ASME Journal of Tribology*, vol. 129, n° 4, 2007, p. 791-800.

[NEL 07b] Nelias D., Antaluca E., Boucly V.
Rolling of an elastic ellipsoid upon an elastic-plastic flat. *Journal of Tribology*, vol. 129, n° 4, 2007, p. 791-800, ASME.

[NIX 88] Nix K., J., Lindley T. C.
The influence of relative slip range and contact material on the fretting properties of 3.5NiCrMoV rotor steel. *Wear*, vol. 125, 1988, p. 147-162.

[NOG 97] Nogi T., Kato T.
Influence on a Hard Surface Layer on the Limit of Elastic Contact-Part I : Analysis Using a Real Surface Model. *ASME J. Tribol.*, vol. 119, 1997, page 493500.

[NOW 98] Nowell D., Dai D. N.
Analysis of surface tractions in complex fretting fatigue cycles using quadratic programming. *Journal Of Tribology-Transactions Of The Asme*, vol. 120, 1998, page 744749.

[NUG 00] Nugent E., Calhoun R., Mortensen A.
Experimental investigation of stress and strain fields in a ductile matrix surrounding an Elastic Inclusion. *Acta Materiala*, vol. 48, 2000, p. 1451-1467.

[PAD 84] Padovan J., Paramadilok O.
Transient and steady state viscoelastic rolling contact. *Comput. Struct.*, vol. 20, 1984, p. 545-553.

[PAD 92] Padovan J., Kazempour A., Tabaddor F., Brockman B.
Alternative formulations of rolling contact problems. *Finite Elem. Anal. Design*, vol. 11, 1992, p. 275-284.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[PAN 77] Panek C., Kalker J.
A solution for the narrow rectangular punch. *J. Elasticity*, vol. 2, 1977, p. 213-215.

[PAN 80] Panek C., Kalker J.
Three-dimensional contact of a rigid roller traversing a viscoelastic half space. *J. Inst. Maths Applics*, vol. 26, 1980, p. 299-313.

[PAU 60] Paul B.
Prediction of elastic constant of multiphase materials. *Trans A.S.M.E*, vol. 218, 1960, page 3641.

[PAU 81] Paul B., Hashemi J.
Contact pressure on closely conforming elastic bodies. *ASME J. Appl. Mech.*, , 1981, page 543548.

[PAU 06] Paulin C.
Etude de lendommagement du contact multicouche aube/disque sous chargement de fretting : Impact des sollicitations variables et de la dimension du contact. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.

[PER 10] Persson B.
Rolling friction for hard cylinder and sphere on viscoelastic solid. *Eur. Phys. J. E*, vol. 33, 2010, p. 327-333.

[POL 00] Polonsky I. A., Keer L. M.
Fast methods for solving rough contact problems : a comparative study. *ASME J.Tribol.*, vol. 122, 2000, page 3640.

[POU 13] Pougis A.
Affinement de microstructures de métaux par des déformations plastiques extrs. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2013.

[PRU 08] Prudhomme S., Bendhia H., Bauman P., Elkhodja N., Oden J.
Computationalanalysis of modeling error for the coupling of particle and continuums models by the arlequin method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, vol. 197, 2008, p. 3399-3409.

[PRU 09] Prudhomme S., Chamoin L., Bendhia H., Bauman P.
An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, vol. 198, 2009, page 18871901.

[RAJ 06] Rajasekaran R., Nowell D.
Fretting fatigue in dovetail blade roots : Experiment and analysis. *Tribology International*, vol. 39, n° 10, 2006, p. 1277–1285.

[RAM 04] Ramesh Kumar M., Narasimhan R.
Analysis of spherical indentation of linear viscoelastic materials. *Curr. Sci.*, vol. 87, 2004, p. 1088-1095.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[REN 10] Ren N., Zhu D., Chen W., Wang Q.
Plasto-Elastohydrodynamic Lubrication (PEHL) in Point Contacts. *Journal of tribology*, vol. 132, n° 3, 2010, American Society of Mechanical Engineers.

[SAN 93] Sanchette-Gosset I.
Contribution à l'analyse et à la modélisation de l'amore des fissures dans l'acier 100Cr6 soumis à la fatigue de roulement. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1993.

[SEO 70] Seo T., Mura T.
The elastic field in half space due to ellipsoidal inclusions with uniform dilatational eigenstrains. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 46, 1970, p. 568-572.

[SIM 85] Simo J., Taylor R.
Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 48, n° 1, 1985, p. 101–118, Elsevier.

[SIN 59] Sines G.
Behavior of metals under complex static and alternating stresses. *Metal fatigue*, vol. 1, 1959, p. 145–169, McGraw Hill, New York.

[SIN 69] Singleton R. C.
An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-17, n° 2, 1969, p. 93–103.

[SIN 02] Sinclair G. B., Cormier N. G., Griffin J. H., Meda G.
Contact Stresses in Dovetail Attachments : Finite Element Modeling. *J. Eng. Gas Turbines Power*, vol. 124, n° 1, 2002, p. 182–189, ASME.

[STI 09] Stienon A.
Contribution à la modélisation de la durée de vie des roulements à partir des caractéristiques inclusionnaires des aciers : concentration, morphologie, propriétés mécaniques. Thèse de doctorat, 2009.

[SUN 12] Sun L.
Etude numérique de l'amorçage et de la propagation de fissures de fretting. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012.

[SUT 83] Sutton M., Wolters W., Peters W., Ranson W., McNeill S.
Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 133 - 139.

[TAN 00] Tan P., Tong L., Steven G., Ishikawa T.
Behavior of 3D orthogonal woven CFRP composites. Part I. Experimental investigation. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 31, n° 3, 2000, p. 259–271, Elsevier.

[TEN 04] Teng J., Sato K.
In situ observations of fretting wear behavior in PMMA/steel model. *Materials & design*, vol. 25, n° 6, 2004, p. 471–478, Elsevier.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[TER 87] Terzopoulos D., Platt J., Barr A., Fleischer K.
Elastically deformable models. *Proceedings of the 14th annual conference on computer graphics and interactive techniques*, vol. 87, 1987, p. 205-214.

[TER 88] Terzopoulos D., Fleischer K.
Modeling inelastic deformation : viscoelasticity, plasticity, fracture. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, vol. 22, 1988, p. 269-278.

[TER 09] Terekhina S., Salvia M., Fouvry S., Malysheva G., Tarasova T.
Fretting wear damage of HexTOOL composite depending on the different fibre orientations. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, vol. 5 IOP Publishing, 2009, page 012019.

[TER 11] Terekhina S.
Comportement en fretting de composite CFRP HexTOOL TM et de sa matrice Bismaléimide. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2011.

[TIN 66] Ting T.
The Contact Stresses Between a Rigid Indenter and a Viscoelastic Half-Space. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, 1966, p. 845-854.

[TIN 68] Ting T.
Contact Problems in the Linear Theory of Viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, 1968, p. 248-254.

[TOU 12] Touzeau J.
Approches numerique multi-echelle/multi-modele de la degradation des materiaux composites. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2012.

[TRE 13] Trejo M., Fretigny C., Chateauminois A.
Friction of viscoelastic elastomers with rough surfaces under torsional contact conditions. *Physical Review E*, vol. 88, n° 5, 2013, page 052401, APS.

[VAN 13] Van Peteghem B.
Fretting et fretting-fatigue à haute température d'alliages de titane revs. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2013.

[VER 85] Vergne F.
Calcul des dacements et des contraintes dans un demi-espace stique charg surface par des actions distribu normales ou tangentielles quelconques. Master's thesis, INSA de Lyon, 1985.

[VIG 03] Vignal V., Oltra R., Josse C.
Local analysis of the mechanical behavior of inclusions-containing stainless steels under strstrain conditions. *Scripta Materiala*, vol. 49, 2003, p. 779-784.

[VOS 85] Voskamp A.
Material response to rolling contact loading. *Journal of Tribology*, vol. 107, 1985, p. 359-366.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[WAL 67] Walpole L.
The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A300, 1967, p. 270-288.

[WAN 10] Wang Z., Wang W., Wang H., Zhu D., HU Y.
Partial slip contact analysis on three-dimensional elastic layered half-space. *ASME Journal of Tribology*, vol. 132, n° 2, 2010.

[WES 39] Westergaard H. M.
Bearing pressures and cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 6, 1939, page 49.

[WIL 64] Willis J.
Anisotropic elastic inclusion problems. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 17(2), 1964, p. 157-174.

[WRI 06] Wriggers P.
Computational contact mechanics. Springer, 2006.

[WU 93] Wu E., Shyu K.
Response of composite laminates to contact loads and relationship to low-velocity impact. *Journal of composite materials*, vol. 27, n° 15, 1993, p. 1443–1464, Sage Publications.

[WU 94] Wu E., Yen C.-S.
The contact behavior between laminated composite plates and rigid spheres. *Journal of applied mechanics*, vol. 61, n° 1, 1994, p. 60–66, American Society of Mechanical Engineers.

[YAN 82] Yang S., Sun C.
Indentation law for composite laminates. *ASTM STP*, vol. 787, 1982, p. 425–449, American Society for Testing and Materials USA.

[YAS 11] Yastrebov V. A.
Computational contact mechanics : geometry, detection and numerical techniques. Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, 2011.

[YAS 15] Yashima S., Romero V., Wandersman E., Frétigny C., Chaudhury M., Chateauminois A., Prevost A.
Normal contact and friction of rubber with model randomly rough surfaces. *Soft matter*, vol. 11, n° 5, 2015, p. 871–881, Royal Society of Chemistry.

[ZHO 1a] Zhou K., Chen W., Keer L., Ai X., Sawamiphakdi K., Glaws P., Wang Q.
Multiple 3D inhomogeneous inclusions in a half space under contact loading. *Mechanics of Materials*, vol. 43, 2011a, p. 444-457.

[ZHO 09] Zhou K., Chen W., Keer L., Wang Q.
A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(9-12), 2009, p. 885-892.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

[ZHO 11] Zhou K., Keer L., Wang Q. J.
Semi-analytic solution for multiple interacting three-dimensional inhomogeneous inclusions of arbitrary shape in an infinite space. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 87, 2011, p. 617-638.

[ZHO 12] Zhou K.
Elastic field and effective moduli of periodic composites with arbitrary inhomogeneity distribution. *Acta Mechanica*, vol. 223, 2012, p. 293-308.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés

FOLIO ADMINISTRATIF

THèSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUéES DE LYON

NOM : KOUMI DATE de SOUTENANCE : 4 décembre 2015

Prénoms : Koffi Espoir

TITRE : Modélisation du contact entre matériaux hétérogènes : Application au contact Aube/Disque

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre :2015-ISAL-0120

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RÉSUMÉ :
Cette thèse s'intéresse à la problématique du contact entre matériaux hétérogènes. L'industrie (automobile, aéronautique, spatiale, ...) s'intéresse de plus en plus à ces types de matériaux. Il s'agira par exemple des alliages métalliques, des matériaux poreux, matériaux composites (composites tissés, interlocks 3D, interlocks 2D), des billes céramiques contenant des impuretés (porosités/précipités),... Dans ce manuscrit, un modèle de contact basé sur les méthodes semi-analytiques a été développé. Un algorithme de gradient conjugué est utilisé afin de résoudre rapidement le problème de contact. Le modèle permet de prendre en compte la présence d'une ou de plusieurs hétérogénéités isotropes/anisotropes dans le problème de contact. Une approche inspirée de la méthode de l'inclusion équivalente proposée par Eshelby est utilisée dans le solveur de contact pour prendre en compte l'effet de ces hétérogénéités. Les méthodes de transformées de Fourier rapides (FFT) permettent d'accélérer les calculs. Une méthode numérique a été mise en œuvre afin de prendre en compte l'interaction entre plusieurs hétérogénéités. Le massif peut e élastique ou viscoélastique. L'approche développée dans la thèse peut résoudre à la fois les problèmes d'indentation, de roulement/glissement ou de fretting en présence de matériaux élastiques hétérogènes, viscoélastiques homogènes ou hétérogènes. Les solutions sont données en termes de champs de pressions, de cisaillements et de contraintes. Dans le cas des matériaux viscoélastiques le code de calcul est capable de fournir le coefficient de frottement apparent ainsi que toutes les variables de contact aussi bien en régime permanent que transitoire. Le modèle a été validé par comparaison avec la méthode des éléments finis classiques en utilisant le logiciel commercial Abaqus v6.11. Le temps de calcul ainsi que l'espace mémoire nécessaire sont considérablement réduits par rapport à la méthode éléments finis. La parallélisation a été introduite dans le code de contact afin de réduire toujours plus le temps de calcul. Il s'agit d'un code robuste, rapide et facilement utilisable en Bureau d'Etudes. Une approche expérimentale originale a été mise en place afin de mesurer les champs de déplacements à l'interface des corps en contact. De bonnes corrélations essais/calculs ont été obtenues. Enfin quelques applications industrielles ont été présentées. Un couplage entre un code éléments finis structurel et le code semi-analytique de résolution de contact a été également réalisé.

MOTS-CLéS : contact, fretting, semi-analytique, matériaux hétérogènes, composites tissés, viscoélasticité, anisotropie, approche multi-échelle, couplage de code, parallélisation

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Daniel Nélias

Président du jury : David HILLS

Composition du jury : Giuseppe CARBONE, Philippe BOISSE, Sylvie POMMIER, Frédéric FEYEL, Stéphane BERBENNI, Daniel NELIAS, David HILLS

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2015ISAL0120/these.pdf
© [K.E. Koumi], [2015], INSA Lyon, tous droits réservés