



HAL
open science

Détection, localisation et estimation de défauts : Application véhicule

Ahmad Farhat

► **To cite this version:**

Ahmad Farhat. Détection, localisation et estimation de défauts : Application véhicule. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : . tel-01372957v1

HAL Id: tel-01372957

<https://theses.hal.science/tel-01372957v1>

Submitted on 27 Sep 2016 (v1), last revised 20 Dec 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Automatique - Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Ahmad FARHAT

Thèse dirigée par **Damien KOENIG**

préparée au sein du **GIPSA-Lab**
dans l'**École Doctorale EEATS**

Détection, localisation et estimation de défauts : Application véhicule

Thèse soutenue publiquement le **22/09/2016**
devant le jury composé de :

M. Luc DUGARD

Directeur de recherche, CNRS Grenoble, Président

M. Saïd MAMMAR

Professeur, Université d'Evry Val-d'Essonne, Rapporteur

M. Didier THEILLIOL

Professeur, Université de Lorraine, Rapporteur

M. Michel BASSET

Professeur, Université de Haute Alsace, Examineur

M. Damien KOENIG

Professeur associé, HDR, Institut Polytechnique de Grenoble, Directeur



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE ALPES
ÉCOLE DOCTORALE EDEEATS
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE
ET TRAITEMENT DU SIGNAL

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Grenoble Alpes

Mention : AUTOMATIQUE PRODUCTIVE

Présentée et soutenue par

Ahmad FARHAT

Détection, localisation et estimation de défauts : Application véhicule

Thèse dirigée par Damien KOENIG

préparée à Laboratoire Image Parole Signal Automatique de Grenoble
(GIPSA-LAB)

soutenue le 22 septembre 2016

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Saïd MAMMAR	-	Université d'Evry Val-d'Essonne
	Didier THEILLIOL	-	Université de Lorraine
<i>Directeur :</i>	Damien KOENIG	-	Institut Polytechnique de Grenoble
<i>Président :</i>	Luc DUGARD	-	CNRS Grenoble
<i>Examineurs :</i>	Michel BASSET	-	Université de Haute Alsace

A Dieu,

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à mon encadrant de thèse, M. Damien Koenig, pour sa disponibilité, son aide, son suivi régulier, et surtout sa bonne humeur et ses encouragements aux moments difficiles sans lesquels cette thèse n'aurait pas pu se dérouler.

Je remercie d'avance messieurs M. Saïd Mammari et M. Didier Theilliol pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je n'ai de doutes concernant leurs observations et remarques à apporter à ce travail.

Je remercie également M. Luc Dugard et M. Michel Basset, examinateurs de cette thèse. Je remercie à l'occasion tous les autres membres de l'équipe MIAM au MIPS de Mulhouse, pour leur accueil durant la préparation et la semaine d'essais sur véhicule.

Je tiens également à remercier Olivier Senname, directeur de mon équipe Système Linéaire et Robustesse (SLR), et responsable du projet ANR INOVE. OÙ durant ma première année de thèse, j'ai eu l'opportunité de participer à la campagne de test sur véhicule, et valider mes approches théoriques sur les données expérimentales.

Je remercie tous les membres de l'équipe SLR, et particulièrement Alina Voda, ma tutrice pendant mes deux années de monitorat. Je remercie l'ensemble du personnel du GIPSA-Lab, surtout Elsa et Marielle pour le côté administratif, et Patricia pour ses concours photos.

Raouia, Insaf, Nassim, Soheib, Quan, Kazusa, Rachid, Maëlle, un grand merci à vous et aux autres doctorants, dont certains ont déjà quitté le navire, pour m'avoir permis de passer ces trois années dans un climat convivial et stimulant. Je remercie l'équipe de foot du GIPSA-2, de m'avoir choisi comme capitaine pour la saison 2015 (on a bien passé la phase de poules!).

Je n'oublierai pas les collègues mexicains : Ruben Morales Menendes pour l'accueil dans le magnifique campus de Tec de Monterrey (avec ses paons et ses gazelles!), Carlos Alberto Vivas et Diana Hernández Alcántara pour les collaborations scientifiques.

Pendant mes trois années Rhone-Alpines, j'ai eu la chance de trouver une nouvelle famille, et je voudrais par ces quelques lignes les remercier. Abbas, Abdullah, Ahmad, Ali, Amjad, Forto, Hassan, Hussein, Ibrahim, Julie, Kassem, Mohamad, Reda, Riham, Sawssan, Victoria, Zeinab et bien d'autres : merci à vous de me rappeler les joies de la vie. Une pensée spéciale à mon ami Kuider, et à mes témoins de mariage : Othmane, Cynthia, Soha et le cher Ali.

Enfin, je remercie la tribu Farhat, avec tous les nouveaux membres qui sont arrivés pendant ces trois dernières années, et surtout mes parents pour leur amour et support inconditionnel.

Et bien sûr, Fatima...

Notations

\mathbb{N}	Ensemble des nombres naturels
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\Re(\cdot)$	Partie réelle d'un nombre complexe
$\mathbb{S}(M)$	Somme de la matrice M et sa transposée
M^T	Transposée de la matrice réelle M
M^*	Transconjugée de la matrice complexe M
M^+	Pseudoinverse de Moore-Penrose de la matrice M
$M \succ (\succeq) 0$	La matrice M est symétrique et définie (semi-définie) positive
$M \prec (\preceq) 0$	La matrice M est symétrique et définie (semi-définie) négative
(\star)	Le bloc opposé symétrique dans une matrice
\mathcal{L}_∞	Espace des matrices de transfert bornées
\mathcal{L}_2	Espace des matrices de transfert à énergie finie
\mathcal{RH}_∞	Espace des matrices de transfert bornées et stables
$\ \cdot\ _2$	Norme 2
$\ \cdot\ _\infty$	Norme ∞
$\ \cdot\ _-$	Indice $-$
LTI	Linear Time Invariant (Linéaire invariant dans le temps)
LTV	Linear Time Variant (Linéaire variant dans le temps)
LPV	Linear Parameter Varying (Linéaires à paramètres variants)
LMI	Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)
BMI	Bilinear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Bilinéaire)
MLF	Multiple Lyapunov Functions (Fonctions de Lyapunov multiples)
SVD	Singular Value Decomposition (Décomposition en valeur singulière)
SER	Speed/Effort Rule (Effort en fonction de vitesse de déflexion)
CoG	Centre de Gravité

Table des figures

I.1	Maquette et voiture d'expérimentation pour la dynamique véhicule	3
I.2	Schéma de principe du diagnostic à base de modèle par génération de résidu	5
II.1	Générateur de résidu à base d'observateur	26
II.2	Générateur de résidu H_-/H_∞ avec modelage fréquentiel	30
II.3	Courbe des différentes étapes du modelage fréquentiel H_-	31
II.4	Schéma bloc du système en boucle fermée	34
II.5	Schéma bloc du système en boucle fermée avec filtre de pondération sur l'erreur	35
II.6	Schéma bloc du système en boucle fermée avec filtres de pondération sur l'erreur et la commande	35
II.7	Problème H_∞ standard	36
II.8	Problème H_∞ standard étendu	37
II.9	Filtre dynamique H_∞ pour l'estimation de défaut	43
II.10	Filtre d'estimation de défaut : Mise sous forme H_∞ standard	44
III.1	Modèle longitudinal global	54
III.2	Effort pneumatique longitudinal en fonction du coefficient de glissement	55
III.3	Modèle bicyclette du véhicule	57
III.4	Le Quart de Véhicule, avec une suspension semi active	59
III.5	Modèles de suspensions : Passive, Semi-active et Active	61
III.6	Force en fonction Vitesse de déflexion : zones d'énergie	62
III.7	Suspension passive : force en fonction de la vitesse de débattement	63
III.8	Suspension active : force en fonction vitesse de débattement	64
III.9	Suspension semi-active : force en fonction vitesse de débattement	65
III.10	Modèle vertical global du châssis	66
III.11	Synopsis du modèle complet du véhicule	70
III.12	Test de sinus wobulé : angle du volant	71
III.13	Test de sinus wobulé : comparaison mesures et simulations	72
III.14	Test de l'élan : trajectoire et angle du volant	73
III.15	Test de l'élan : comparaison mesures et simulations	73
III.16	Schématique du véhicule pour les tests	74
III.17	Piste Car2Road pour la campagne de tests 2014	75
III.18	Les voitures de test pour la campagne d'essais INOVE 2014	76
IV.1	Système à commutations sujet à des défauts et perturbations	81
IV.2	Schéma du générateur de résidu à commutations à base d'observateur	84
IV.3	Synopsis de synthèse H_- pour générateur de résidu à commutations	90
IV.4	Fonctions de sensibilité des résidus aux perturbations et défauts	97
IV.5	Signaux de résidu $r(t)$ avec les différents étapes de synthèse	97
IV.6	Erreur d'estimation d'état dans le cas sans défaut	115
IV.7	Sensibilité du résidu aux défauts	116

IV.8	Illustration de la réduction du polytope	122
IV.9	Entrées du modèle latérale	123
IV.10	Sortie mesurée et résidu	123
V.1	Vitesse longitudinale du véhicule et signal de commutation	143
V.2	Angle au volant	145
V.3	Accélération latérale : mesurée et simulée par modèle commuté	145
V.4	Signal de défaut et son estimé	146
V.5	Filtre commuté pour l'estimation du défaut	148
V.6	Filtre commuté pour l'estimation du défaut, avec pondérations fréquentielles	156
V.7	Signal de perturbation et loi de commutation	160
V.8	Estimation du défaut avec par filtre H_∞ à commutation	161
V.9	Estimation d'un défaut actionneur par filtre H_∞ commuté	162
V.10	Force semi active de l'amortisseur MR et fonction de clip	172
V.11	Estimation d'un défaut paramétrique	174
V.12	Erreurs d'estimation des états z_s et \dot{z}_s	175
VI.1	Effort pneumatique latéral et zones de fonctionnement	179
VI.2	Dimensions du véhicule sous CarSim (en mm)	180
VI.3	Effort pneumatique latéral pour différentes valeurs de la charge normale	181
VI.4	Estimation des efforts non linéaires par observateur PI	182
VI.5	Validation du modèle Pacejka des efforts pneumatiques latéraux	183
VI.6	Variation des coefficients de rigidité des pneus avant et arrière	184
VI.7	Comparaison entre observateur PI et PI robuste pour l'estimation des efforts non linéaires	186

Liste des tableaux

III.1 Notations et paramètres du véhicule I (Châssis)	69
III.2 Notations et paramètres du véhicule II (Suspension)	69
III.3 Notations et paramètres du véhicule III (Pneumatique)	70
III.4 Liste des essais lors de la campagne d'essais INOVE 2014	77
IV.1 Récapitulatif sur la synthèse des générateurs de résidus H_-/H_∞	125
V.1 Récapitulatif sur la synthèse des observateurs PI à commutation	142
V.2 Récapitulatif sur la synthèse des filtres H_∞ à commutation	158
B.1 Paramètres du Renault Mégane pour le modèle bicyclette	195
B.2 Paramètres du véhicule de simulation sous CarSim (Sedan Classe D)	195
B.3 Paramètres du Quart de Véhicule	195
B.4 Coefficients du modèle magnéto-rhéologique	196

Table des matières

I	Introduction	1
I.1	Introduction générale	1
I.2	Structure	6
I.3	Contributions et publications	7
I.3.1	Articles de journaux avec comité de lecture	7
I.3.2	Articles de conférences internationales avec actes	8
I.3.3	Articles de conférences nationales avec actes	8
II	Bases théoriques	9
II.1	Introduction	9
II.2	Systèmes dynamiques	10
II.2.1	Représentation des systèmes dynamiques	10
II.2.2	Linéarisation des systèmes dynamiques	11
II.2.3	Discrétisation des systèmes linéaires	12
II.3	Analyses des systèmes dynamiques	13
II.3.1	Outils mathématiques	13
II.3.2	Stabilité des systèmes linéaires	17
II.3.3	Commandabilité des systèmes linéaires	18
II.3.4	Observabilité des systèmes linéaires	18
II.3.5	Analyse avancée	19
II.4	Synthèse d'observateur	21
II.4.1	Dimensionnement d'un observateur	21
II.4.2	Observateur identité	22
II.4.3	Observateur d'ordre réduit	23
II.4.4	Application à la détection de défaut : Synthèse H_-/H_∞	25
II.5	Commande par synthèse H_∞	33
II.5.1	Formulation du problème H_∞	34
II.5.2	Le problème H_∞ standard	36
II.5.3	Solution du problème H_∞ standard	37
II.5.4	Détection de défaut par synthèse H_∞	43
II.6	Systèmes à commutation	44
II.6.1	Représentation des systèmes à commutation	45
II.6.2	Stabilité des systèmes à commutation	45
II.6.3	Propriétés des systèmes à commutation	47
II.7	Conclusion	50
III	Modélisation de la dynamique de véhicule et validations expérimentales	51
III.1	Introduction	52
III.2	Modélisation longitudinale	52
III.2.1	Dynamique longitudinale du véhicule	52

III.2.2	Dynamique de la roue	54
III.2.3	Modèle longitudinal global	55
III.2.4	Capteurs pour la dynamique longitudinale	56
III.3	Modélisation latérale	56
III.3.1	Modèle cinématique	56
III.3.2	Modèle dynamique	57
III.3.3	Capteurs pour la dynamique latérale	59
III.4	Modélisation verticale	59
III.4.1	Le modèle quart de véhicule	59
III.4.2	Modélisation des suspensions	61
III.4.3	Modèle vertical global du châssis	66
III.4.4	Capteurs pour la dynamique verticale	67
III.5	Modèle global du châssis	68
III.6	Validation du modèle dynamique	70
III.6.1	Validation expérimentale	71
III.6.2	Conclusion de validation	74
III.6.3	Campagne de tests INOVE 2014	74
III.7	Conclusion	77
IV	Détection et localisation de défauts par observateurs H_-/H_∞ commutés	79
IV.1	Introduction	79
IV.2	Observateur identité H_-/H_∞ à commutation	81
IV.2.1	Formulation du problème	81
IV.2.2	Synthèse multi-objectifs	83
IV.2.3	Synthèse pour les systèmes propres	84
IV.2.4	Exemple	95
IV.2.5	Conclusion	97
IV.3	Observateur H_-/H_∞ robuste à commutation	98
IV.3.1	Observateurs pour les systèmes LTI incertains à commutation	98
IV.3.2	Synthèse robuste	99
IV.3.3	Synthèse de générateur de résidu robuste multi-objectifs	104
IV.3.4	Conclusion	105
IV.4	Détection de défaut par observateur généralisé	105
IV.4.1	Introduction	105
IV.4.2	Formulation du problème	106
IV.4.3	Paramétrisation de l'observateur d'ordre réduit	107
IV.4.4	Générateur de résidu à base d'observateur d'ordre réduit à commutation	112
IV.4.5	Exemple	115
IV.4.6	Conclusion	116
IV.5	Détection de défaut à base d'observateur pour les systèmes LPV	117
IV.5.1	Introduction	117
IV.5.2	Générateur de résidu par approche polytopique	118
IV.5.3	Synthèse de générateur de résidu multi-objectifs pour les systèmes LPV	119

IV.5.4 Exemple : application à la détection de défauts dans la dynamique latérale du véhicule	121
IV.5.5 Conclusion	124
IV.6 Conclusion	124
V Estimation de défauts	127
V.1 Introduction	127
V.2 Estimation de défaut par Observateur PI à commutation	128
V.2.1 Formulation du problème	129
V.2.2 Observateur PI à commutation	130
V.2.3 Observateur robuste PI à commutation	131
V.2.4 Observateur PI généralisé	135
V.2.5 Récapitulatif sur l'estimation du défaut par PIO	142
V.2.6 Exemple : estimation de défaut actionneur	143
V.2.7 Conclusion	146
V.3 Estimation de défaut par Filtre H_∞ à commutation	146
V.3.1 Formulation du problème	147
V.3.2 Synthèse H_∞ pour systèmes LTI certains à commutation	148
V.3.3 Estimation robuste des défauts	153
V.3.4 Estimation par synthèse H_∞ avec filtres de pondération	155
V.3.5 Récapitulatif sur l'estimation du défaut par filtre H_∞ à commutation	157
V.3.6 Discussion	158
V.3.7 Exemples	160
V.3.8 Conclusion	163
V.4 Estimation de défaut par Observateur Adaptatif	163
V.4.1 Introduction	163
V.4.2 Formulation du problème	163
V.4.3 Préliminaires	164
V.4.4 Algorithme RLS amélioré	169
V.4.5 Exemple : estimation de défaut dans la dynamique verticale	171
V.4.6 Conclusion	176
V.5 Conclusion	176
VI Application à la détection situations critiques dans la dynamique latérale d'un véhicule automobile	177
VI.1 Introduction et problématique	177
VI.2 Détection de situation critique	178
VI.2.1 Modélisation d'un glissement non linéaire	178
VI.2.2 Estimation d'un effort non-linéaire	179
VI.3 Détection robuste de situation critique	182
VI.3.1 Modèle du coefficient de rigidité variant	182
VI.3.2 Estimation robuste de la situation critique	184
VI.4 Conclusion	186

VII Conclusions générales et perspectives	189
VII.1 Conclusions	189
VII.2 Perspectives	190
A Développement limité des paramètres variants	193
A.1 Développement limité de ρ_1	193
A.2 Développement limité de ρ_2	193
B Tables des paramètres des véhicules	195
Bibliographie	197

Introduction

Sommaire

I.1	Introduction générale	1
I.2	Structure	6
I.3	Contributions et publications	7
I.3.1	Articles de journaux avec comité de lecture	7
I.3.2	Articles de conférences internationales avec actes	8
I.3.3	Articles de conférences nationales avec actes	8

I.1 Introduction générale

L'utilisation mondiale croissante des voitures a motivé la nécessité de développer des véhicules qui permettent d'optimiser l'utilisation des autoroutes (congestion...) et des ressources en carburant, d'assurer un transport sûr et confortable et en même temps d'avoir un impact minimal sur l'environnement. Il est donc devenu un grand défi de développer des véhicules qui satisferont ces exigences diverses et souvent contradictoires. Pour répondre à ce défi, les voitures sont de plus en plus équipées de sous-systèmes électromécaniques qui emploient des capteurs, actionneurs et systèmes de commande automatiques. Les progrès de la micro-électronique, des technologies informatiques et des systèmes de contrôle au cours des deux dernières décennies ont également joué un rôle important dans la promotion de cette tendance. L'automobile est devenue aujourd'hui le deuxième utilisateur de systèmes embarqués derrière l'aéronautique.

Les systèmes embarqués automobiles sont des systèmes distribués, ils peuvent être classés en plusieurs catégories :

- Système de commande du moteur (ou groupe motopropulseur) : sous-divisé en plusieurs sous-systèmes dont les principaux sont les systèmes d'air, d'injection et d'échappement. Ces composants jouent un rôle important dans l'amélioration de performance du véhicule en terme de rendement performance/consommation de carburant/émission de gaz nocifs à l'environnement.
- Système de commande de la transmission : composé notamment de la boîte de vitesses, les ponts et le différentiel entre autres, pour assurer la transmission du couple fourni par l'arbre moteur aux roues afin de permettre le déplacement de l'automobile.
- Système de contrôle châssis : incluant les suspensions, la direction et les freins. Ils jouent un rôle important dans la détermination des performances d'un véhicule (tenue de route, sécurité des passagers) lors de la conduite, dans les virages, et au freinage.
- Système de confort des passagers : tels que la climatisation automatique, l'allumage automatique des phares, déclenchement automatique des essuie-glaces etc...

- Système d'info-divertissement : système de navigation GPS, kits mains-libres, etc...

En plus de ces grandes catégories, d'autres fonctions sont de plus en plus présentes sur les véhicules modernes, qui peuvent se croiser avec les systèmes cités précédemment, tels que les systèmes de sécurité et d'aide à la conduite. Ces derniers peuvent être classés en deux grandes familles :

- Passifs : ils sont simplement déclenchés à la suite d'un événement, tels que les airbags et les prétensionneurs de ceinture de sécurité en cas d'accident ou de collision.
- Actifs : le but étant de protéger contre les accidents en les évitant, les systèmes de sécurité actifs interviennent avant que l'accident ne se produise. Ces systèmes nécessitent des capteurs et des actionneurs. Les prestations de la sécurité active et d'aide à la conduite pour les voitures produites en série ont commencé avec l'ABS ("Antiblockiersystem" en allemand pour système anti-blocage des roues) dans les années 1980, puis les programmes ESP ("Electronic Stability Program" pour programme de stabilité électronique) courant 1990, suivi par les systèmes de régulation/limitation de vitesse début du troisième millénaire, et allant à la multiplication des systèmes avancés d'aide à la conduite (vision 360°, caméra de recul).

Bien que le système de sécurité ABS soit obligatoire sur les nouveaux modèles depuis 2004 et sur les véhicules neufs depuis 2009, l'observatoire national interministériel de la sécurité routière (ONSIR) a recensé une augmentation de +2,4% d'accidentalité en métropole en 2014 par rapport à l'année 2013. Ceci suscite une interrogation sur le niveau de fiabilité des différents organes (capteurs et actionneurs) et sur l'éventuel besoin de nouveaux systèmes de sécurité afin de mieux prévenir les accidents.

Les travaux présentés dans cette thèse se situent dans le cadre du diagnostic et de la commande dans les systèmes de sécurité et d'aide à la conduite. Ces systèmes, critiques pour la sécurité et le confort des passagers, peuvent mal fonctionner en présence d'une défaillance (défaut) d'un de ses capteurs et/ou actionneurs. La problématique à laquelle on cherche une réponse serait : Est-il possible d'éviter des situations drastiques suite à la défaillance d'un capteur/actionneur ? Est-il possible de prévoir et prévenir, par une détection précoce de tel défaut ?

Dans ce travail plusieurs méthodes sont développées afin de détecter, localiser et estimer un défaut capteur et actionneur, dans le cadre d'application à la dynamique du véhicule. Les méthodes proposées sont ainsi illustrées dans un premier temps par des exemples académiques, pour être ensuite validées sur les données réelles de véhicule.

Il est à noter qu'une partie de cette thèse s'inscrivait dans le cadre du projet ANR blanc **INOVE** (INtegrated approach for Observation and control of VEhicle dynamics). Ce projet avait pour objectif d'élaborer de nouvelles méthodologies et des solutions innovantes, pour la modélisation et l'identification du comportement des véhicules, pour l'observation en vue de la détection des situations critiques et pour le contrôle robuste et/ou tolérant au défaut de la dynamique du véhicule. Un autre aspect est d'améliorer la sécurité des véhicules (principalement des voitures, mais aussi des camions) et des passagers.

Ce projet de 2010 à 2014, fut une collaboration entre plusieurs acteurs :

- le laboratoire GIPSA-Lab à Grenoble,
- le laboratoire MIPS de l'université de Haute Alsace, à Mulhouse,
- le CAOR des mines de Paris,



(a) Maquette à échelle 1 : 5
au Gipsa-Lab (Grenoble)



(b) Renault Mégane équipée
du MIPS (Mulhouse)

FIGURE I.1 – Maquette et voiture d’expérimentation pour la dynamique véhicule

- l’équipementier SOBEN.

Dans le cadre de ce projet, la contribution de cette thèse repose sur l’aspect modélisation et observation du véhicule, pour la détection et estimation de défaut.

Une maquette de voiture à échelle 1 : 5, présente au Laboratoire GIPSA-Lab et fournie par l’entreprise Soben, a permis l’étude et l’application sur la dynamique verticale. En plus, la modélisation et l’étude de la dynamique longitudinale et latérale a été simulée et validée en pratique lors d’une campagne d’essai effectuée sur une Renault Mégane du laboratoire MIPS.

Avant de détailler le plan de notre exposé, présentons succinctement quelques notions utilisées dans la communauté de la détection et de localisation de défauts (FDI, pour Fault Detection and Isolation), qui incluent les différentes actions de détection, de localisation, d’identification et d’accommodation. Tout d’abord précisons le sens des différents termes employés [Isermann 1997] :

Défaut : une déviation non autorisée d’au moins une propriété caractéristique ou un paramètre de système à partir de la condition acceptable/habituelle/standard

Défaillance : une interruption permanente de la capacité d’un système à accomplir une fonction requise en vertu des conditions de fonctionnement spécifiées

Perturbation : : entrée non contrôlée agissant sur le système, résultant un écart de l’état du système

Résidu : signal traduisant la présence d’un (ou plusieurs) défaut(s), généré, dans le cas des techniques à base de modèles, par comparaison entre des grandeurs mesurées et leurs valeurs calculées à partir d’équations de modèle

Détection de défaut : détermination de la présence d’un (ou plusieurs) défaut(s) affectant le fonctionnement du système en temps réel, aussi rapidement et aussi sûrement que possible

Localisation de défaut : détermination de l’origine du défaut, en isolant le(s) composant(s) du système dont le fonctionnement est en mode non nominal. Cette opération est consécutive à la détection

Identification de défaut : détermination de l’amplitude, du type ou la nature et de

l'évolution au cours du temps d'un défaut. Cette opération est consécutive à la localisation

L'idée de remplacer la redondance matérielle par la redondance analytique fut introduite en 1971 au MIT par [Beard 1971]. Pour détecter les défauts, Beard a développé des filtres qui génèrent des résidus directionnels. Depuis, diverses techniques ont été proposées pour résoudre le problème de la détection des défauts. Elles peuvent être classées dans deux grandes catégories [Frank 2000] :

Approches qualitatives : basées sur un historique des données, elles peuvent être utilisées en absence d'un modèle du système. Elles ont l'inconvénient d'avoir besoin de série de données dans les cas normal et défaillant. On y retrouve les méthodes d'intelligence artificielle à base de logique floue, des réseaux de neurones, d'algorithmes génétiques [Frank 1997, Samanta 2004], de reconnaissance de forme et les méthodes statistiques et géométriques [Basseville 1993, Cao 2004a, Bokor 2005].

Approches analytiques : ou plus connues sous le nom d'approches à base de modèle [Chen 1999, Ding 2013]. Quand un modèle mathématique (équations différentielles, représentation d'état, fonction de transfert) qui décrit les relations entre les entrées et les sorties (et états) du système est disponible, ces méthodes peuvent être appliquées. Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons exclusivement à cette catégorie.

Largement inspiré des théories de la commande, le principe général de la détection de défaut par approche à base de modèle est de comparer le comportement théorique du système déduit du modèle au comportement mesuré du système réel. A partir de cet écart, est construit un signal appelé résidu noté $r(t)$. Théoriquement, ce signal $r(t)$ doit être proche de zéro en absence de défaut $f(t)$, et différent de zéro en présence de $f(t)$.

$$r(t) \neq 0 \text{ si } f(t) \neq 0 \quad (\text{I.1})$$

Cependant dans le cadre de la génération de résidu robuste, autrement dit en présence de perturbations et d'incertitudes, le test de nullité est trop restrictif, on utilisera :

$$|r(t)| > \gamma \text{ si et seulement si } f(t) \neq 0 \quad (\text{I.2})$$

où γ est une grandeur prédéfinie, fonction du taux de détection et de robustesse de l'algorithme de détection.

Différentes techniques permettent de réaliser cette première étape du processus de diagnostic appelée la génération de résidu.

FDI à base d'observateur : le vecteur de résidu est obtenu par comparaison entre l'estimation et la mesure des sorties. Les principales techniques sont d'utiliser des filtres de détection afin de donner une direction au résidu pour assurer la localisation [Beard 1971, Jones 1973], ou des observateurs à entrées inconnues pour rendre l'estimation de l'état indépendante des perturbations [Wunnenberg 1990] ou l'attribution de la structure propre de l'observateur, dans le but d'insensibiliser le résidu (et non pas l'estimation de l'état) [Patton 1991, Liu 1998]. Dans cette catégorie, on retrouve aussi des observateurs proportionnels intégrateurs [Koenig 2002], intégrateurs multiples [Koenig 2005], et des observateurs adaptatifs [Jiang 2004, Zhang 2008].

Estimation de paramètres : l'écart de comportement est supposé être provoqué par la variation des paramètres physiques, estimés en fonction des signaux mesurés, et à partir desquels est calculé le vecteur de résidu [Zhang 2002, Guyader 2003].

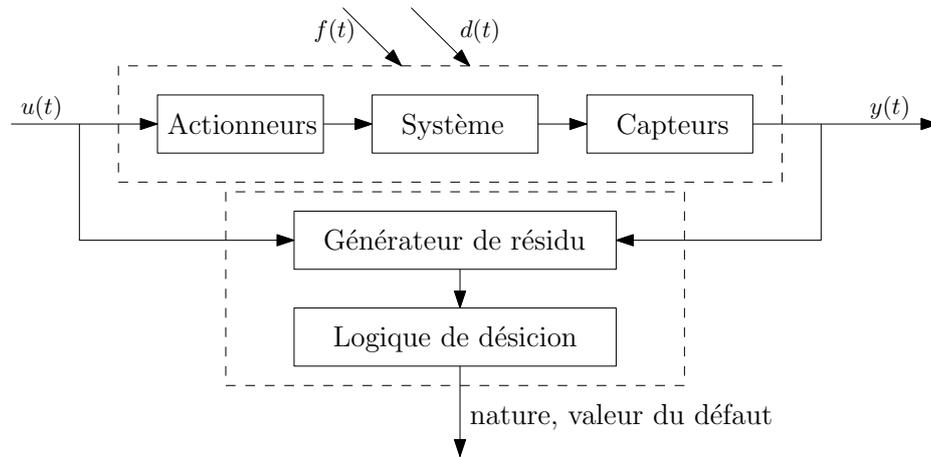


FIGURE I.2 – Schéma de principe du diagnostic à base de modèle par génération de résidu

Projection dans un espace de parité : des relations liant la mesure d’une même grandeur à différents instants (redondance temporelle ou auto redondance), ou les mesures de différentes grandeurs, éventuellement à différents instants (inter redondance), permettent d’éliminer les grandeurs inconnues (variable d’état, perturbations). La validation de ces relations permet de calculer les composantes du vecteur de résidu [Cocquempot 2004, Variier 2014].

Méthode de la base polynomiale minimale : afin d’annuler la dépendance du résidu aux signaux de commande et de perturbation, [Frisk 2001] propose de déterminer l’ensemble des polynômes annulateurs à gauche du transfert de ces entrées vers le résidu. Cette approche a pour but de paramétrer tous les générateurs de résidus et de déterminer celui d’ordre minimal. La localisation est effectuée en incluant tous les défauts, excepté celui à localiser, dans les signaux de perturbation.

En absence de perturbations et d’incertitudes, le signal de résidu en lui même peut suffire pour détecter les défauts, et les localiser quand les signatures de ces derniers sont linéairement indépendantes. Toutefois en présence de ces entrées inconnues, le générateur de résidus doit maximiser sa sensibilité vis à vis des défauts, tout en minimisant l’effet des perturbations et des incertitudes. On parle alors de problème d’optimisation multi-objectifs. Dans la littérature, la formulation du problème de synthèse d’observateurs avec des performances mixtes telles que H_2/H_∞ [Khosrowjerdi 2004], H_-/H_∞ [Hou 1996, Liu 2005, Wang 2007] ou H_∞/H_∞ pour la détection de défaut est abondante. D’autres objectifs pour améliorer la robustesse et/ou les marges de stabilité par des méthodes par placement de pôles se rajoutent souvent à ces formulations.

Une fois généré, le signal de résidu est ensuite analysé par un mécanisme de logique de décision. Cette étape est primordiale pour retirer les informations significatives : nature du défaut, son évolution dans le temps, sa localisation, etc...

Dans ce manuscrit, on s’intéresse aux problèmes de synthèse d’observateurs pour la détection de défaut. Plusieurs types d’observateur sont étudiés : observateurs H_-/H_∞ , observateurs proportionnels intégrateurs, observateurs adaptatifs, et filtrage de sortie.

Les véhicules automobiles sont généralement modélisés par des systèmes non-linéaires. Ces non linéarités proviennent de certaines relations qui apparaissent dans des équations différen-

tielles polynomiales d'ordre supérieur à 1, de fonctions trigonométriques, de cycles d'hystérésis, etc. Pour étudier les systèmes non linéaires, représentés par des équations différentielles ordinaires (ODE pour la notation anglo-saxonne), deux approches sont utilisées : soit on garde le modèle non-linéaire, souvent lourd à manipuler mathématiquement et on y applique directement les méthodes numériques pour l'identification, l'observation et le contrôle, soit on linéarise autour de points de fonctionnement (généralement point d'équilibre).

La classe de systèmes linéaires la plus simple est celle des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI pour *Linear Time Invariant*). Les méthodes classiques d'observation et de commande pour les systèmes LTI sont ainsi générées pour des classes de systèmes pseudo-linéaires pour modéliser les systèmes non linéaires. Sans être exhaustif, on peut citer les classes de : systèmes linéaires à paramètres variants (LPV pour *linear parameter varying*), ou plus généralement les systèmes linéaires variant dans le temps (LTV pour *linear time variant*), mais aussi les systèmes linéaires par morceaux (*piecewise linear functions*), les systèmes hybrides tels que les systèmes à commutations (*switched systems*) et les modèles Takagi-Sugeno à logique floue.

Dans la littérature, les modèles LPV sont souvent utilisés pour modéliser la dynamique du véhicule [Ackermann 1997, Mammar 2002, Poussot-Vassal 2008b]. Cette classe de systèmes introduite par [Apkarian 1995], permet de prendre en compte les non-linéarités des différents organes du véhicule (suspension, dynamique latérale). Des méthodes LPV sont ainsi développées pour la commande [Sename 2013, Do 2011, Poussot-Vassal 2008b] ainsi que pour le diagnostic [Zolghadri 2008, Varrier 2013]. Toutefois, une modélisation par approche système à commutation est moins abordée. Et encore moins, les extensions pour la synthèse de filtre et d'observateur robuste pour le diagnostic, avec leurs validations expérimentales.

I.2 Structure

La problématique de cette thèse repose ainsi sur la synthèse d'algorithmes (observateur ou filtre) pour la détection et localisation des défauts pour les systèmes à commutations, avec pour application la dynamique du véhicule. Les différents aspects (modélisation, synthèse, implémentation et validation) sont traités tout au long du présent manuscrit.

La structure de cette thèse est la suivante :

Chapitre II : Un état de l'art sur le problème traité dans cette thèse est présenté. D'abord, quelques notions de base de mathématiques et de l'automatique et les éléments nécessaires pour la compréhension de la thèse sont exposés. Ensuite la synthèse d'observateurs pour les systèmes LTI est présentée, et son application à la détection de défaut par méthodes H_∞ , et H_- . Puis la formulation du problème H_∞ standard est rappelée ainsi que sa résolution et son extension pour la synthèse de filtre pour l'estimation de défaut. Enfin, quelques notions de stabilité des systèmes à commutations dans les cas continu et discret sont introduites. Ce chapitre renfermera les bases théoriques nécessaires pour le développement des méthodologies dans la suite de l'ouvrage.

Chapitre III : Dans ce chapitre est exposé le modèle dynamique d'un véhicule automobile, le cœur d'application de la présente thèse. Un modèle fortement non linéaire des pneumatiques et du châssis est présenté dans le cadre de la modélisation longitudinale. Ensuite, la dynamique latérale est étudiée selon le modèle bicyclette. Un modèle verticale

dont l'organe d'intérêt est la suspension semi active est enfin développé. Les résultats de simulation du modèle globale sont alors comparés aux données réelles collectées par le laboratoire MIPS, concluant sur la validité du modèle. A la fin de ce chapitre, une brève description de la campagne d'essais dans le cadre du projet INOVE est présentée, sur laquelle sont basées les validations expérimentales des méthodes développées dans ce travail.

Chapitre IV : Ce chapitre présente la première partie des contributions théoriques de l'ouvrage. En effet, de nouvelles méthodologies pour la détection de défaut pour les systèmes à temps variant sont introduites. Ces méthodologies reposent sur une synthèse multi-objectifs H_-/H_∞ avec certaines contraintes temporelles. Premièrement, une synthèse pour les systèmes à commutation est présentée, et est ensuite étendue pour les systèmes commutés incertains. Une généralisation par observateur de Luenberger d'ordre réduit est développée. L'approche d'ordre plein est aussi étendue pour les systèmes linéaires à paramètres variants, en utilisant une approche polytopique. Enfin, pour généraliser cette synthèse, un observateur de Luenberger généralisé à commutation est développé, toujours dans la synthèse H_-/H_∞ . Ces différentes méthodes sont ainsi validées, selon les hypothèses, sur les données de terrain de la campagne de test.

Chapitre V : Dans ce chapitre, en plus de la détection et localisation de défauts, on s'intéresse à l'estimation du défaut. Pour ceci, trois approches sous certaines hypothèses sont proposées. La première consiste à la synthèse d'observateurs proportionnels intégrateurs commutés. La deuxième méthode propose des filtres commutés par une synthèse H_∞ . La dernière méthode est consacrée aux systèmes LTV, où un observateur adaptatif est implémenté pour l'estimation de défaut.

Les méthodes proposées dans ce chapitre sont validées par des exemples pratiques. Les deux premières approches (PI et filtre) sont appliquées à l'estimation d'un défaut agissant sur la dynamique latérale. Un défaut actionneur dans la suspension semi active (dynamique verticale) est estimé par un observateur adaptatif.

Chapitre VI : Ce dernier chapitre présente une extension du problème de détection de défaut, à une problématique de détection de situation critique de conduite dans la dynamique latérale. Cette méthode repose sur une modélisation plus détaillée des efforts pneumatiques, définissant plusieurs zones de fonctionnement. L'approche proposée dans le chapitre V est alors utilisée pour estimer ces efforts non-linéaires. La stratégie de détection de situation critiques est testée et validée avec le logiciel CarSim.

I.3 Contributions et publications

I.3.1 Articles de journaux avec comité de lecture

- J1** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Robust fault detection for switched uncertain systems*. soumis à IEEE Transactions on Automatic Control.
- J2** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Adaptive fault detection : joint state and parameter estimation approach*. soumis à Automatica.
- J3** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Design of generalized switched PI observers for joint state and fault estimation*. soumis à IET Control Theory & Applications.

- J4** Ahmad Farhat, Diana Hernandez, Carlos Vivas-Lopez, Damien Koenig, and Ruben Morales-Menendez. *Non linear lateral tire force estimation : a switched robust PI observer approach*. soumis à Control Engineering Practice.

I.3.2 Articles de conférences internationales avec actes

- C1** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Generalized Luenberger observers for fault detection in switched systems using H_- index*. 15th European Control Conference (ECC), Jul 2016, Aalborg, Danemark.
- C2** Ahmad Farhat, Damien Koenig, Olivier Sename. *Fault detection for LPV systems : Loop shaping H_- approach*. 1st IFAC Workshp on LPV systems, Oct 2015, Grenoble, France.
- C3** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *PI robust fault detection observer for a class of uncertain switched systems using LMIs*. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS), Sep 2015, Paris, France.
- C4** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *H_-/H_∞ robust fault detection observer for uncertain switched systems*. 14th European Control Conference (ECC), Jul 2015, LINZ, Austria.
- C5** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *H_-/H_∞ fault detection observer for switched systems*. 53rd IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2014, Los Angeles, United States.
- C6** Ahmad Farhat, Diana Hernandez, Carlos Vivas-Lopez, Damien Koenig, and Ruben Morales-Menendez. *Fault detection in lateral vehicule dynamics, a comparaison between two approaches*. à soumettre à 20th IFAC World Congress <http://www.ifac2017.org/>.

I.3.3 Articles de conférences nationales avec actes

- N1** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Détection de défauts sur systèmes incertains à commutation*. Actes des Journées "Sûreté Surveillance Supervision", GT- GdrMACS S3 , Février 2016, Paris, France.

Bases théoriques

Sommaire

II.1 Introduction	9
II.2 Systèmes dynamiques	10
II.2.1 Représentation des systèmes dynamiques	10
II.2.2 Linéarisation des systèmes dynamiques	11
II.2.3 Discrétisation des systèmes linéaires	12
II.3 Analyses des systèmes dynamiques	13
II.3.1 Outils mathématiques	13
II.3.2 Stabilité des systèmes linéaires	17
II.3.3 Commandabilité des systèmes linéaires	18
II.3.4 Observabilité des systèmes linéaires	18
II.3.5 Analyse avancée	19
II.4 Synthèse d'observateur	21
II.4.1 Dimensionnement d'un observateur	21
II.4.2 Observateur identité	22
II.4.3 Observateur d'ordre réduit	23
II.4.4 Application à la détection de défaut : Synthèse H_-/H_∞	25
II.5 Commande par synthèse H_∞	33
II.5.1 Formulation du problème H_∞	34
II.5.2 Le problème H_∞ standard	36
II.5.3 Solution du problème H_∞ standard	37
II.5.4 Détection de défaut par synthèse H_∞	43
II.6 Systèmes à commutation	44
II.6.1 Représentation des systèmes à commutation	45
II.6.2 Stabilité des systèmes à commutation	45
II.6.3 Propriétés des systèmes à commutation	47
II.7 Conclusion	50

II.1 Introduction

Ce chapitre présente quelques bases théoriques sur les outils mathématiques et notions utilisées dans cette thèse pour la conception avancée de contrôle et d'analyse. Cela aidera les lecteurs non-experts à mieux comprendre les divers développements présentés dans cette étude.

En conséquence, nous allons d'abord commencer par une brève présentation des systèmes linéaires et non linéaires pour introduire les lecteurs à la physique, la modélisation des systèmes

et des représentations de l'espace d'état. En outre, certains outils qui aident à comprendre la formulation des problèmes de contrôle sont présentés tels que les inégalités matricielles linéaires (LMI pour Linear Matrice Inequalities).

Ensuite, la synthèse d'observateur d'état d'ordre plein et d'ordre réduit est rappelée. Cette synthèse est étendue à la synthèse d'observateur pour la détection de défaut par formulation H_-/H_∞ . La procédure de synthèse de contrôleur H_∞ est développée, puis son adaptation pour le problème de diagnostic est proposée. Ces deux approches sont basées sur l'optimisation convexe par LMI.

Il est intéressant de noter que ces méthodes sont appliquées pour les systèmes LTI. La principale contribution de base de la thèse étant l'extension de ces méthodes pour la classe des systèmes à commutations, une brève présentation de cette classe de systèmes ainsi que les récentes méthodes d'analyse de stabilité sont introduites.

II.2 Systèmes dynamiques

Un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps. Il traduit ainsi un lien de causalité entre entrées (causes) et sorties (effets) qui sont des grandeurs physiques quantifiables. Du point de vue modèle, elles correspondent à des variables externes quantifiées.

Les entrées connues d'un système sont des entrées dites de commande. Elles sont transformées en grandeurs d'action par l'intermédiaire d'actionneurs. Les sorties connues sont les mesures, collectées à l'aide de capteurs. Le système peut avoir des entrées dites inconnues telles que les perturbations, les bruits et les défauts. Elles sont dites inconnues car les informations liées à leurs grandeurs sont soit non disponibles (exemple : perturbation de type vitesse de vent), soit non quantifiables (exemple : bruit d'entrée d'un actionneur ou d'un capteur).

II.2.1 Représentation des systèmes dynamiques

A partir des équations physiques, les modèles mathématiques des systèmes physiques réels sont dérivés grâce à des équations différentielles ordinaires (EDO) pour décrire le comportement dynamique du système aussi bien que possible .

Définition II.1 (*Système dynamique*)

Étant données les fonctions $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^l$, un système dynamique peut être décrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état qui prend des valeurs dans un espace d'état $X \subset \mathbb{R}^n$, $u(t)$ est le vecteur d'entrées prenant des valeurs dans l'espace d'entrées $U \subset \mathbb{R}^m$, et $y(t)$ est la sortie qui appartient à l'espace des sorties $Y \subset \mathbb{R}^l$.

Quand les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont linéaires, on parle alors de système linéaire. Toutefois, la plupart des systèmes physiques modélisés par les équations différentielles ordinaires, sont

par nature non-linéaires. La représentation (II.1) est alors utilisée pour représenter les systèmes non-linéaires.

II.2.2 Linéarisation des systèmes dynamiques

Pour pouvoir appliquer les théories de l'automatique linéaire, le point de départ est de linéariser le modèle autour de points de fonctionnement.

Définition II.2 (*Système dynamique linéaire*)

Étant données les matrices $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$ et $D \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$. Un système linéaire invariant dans le temps (LTI) est décrit, en temps continu, par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Pour le cas discret, la représentation d'état est :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Les systèmes LTI sont également représentés par des matrices de transfert définies par $G(\cdot) = \frac{y(\cdot)}{u(\cdot)}$. Elles peuvent être déduites de la représentation d'état par les relations :

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad , \quad \text{cas continu} \quad (\text{II.4a})$$

$$G(z) = D + C(zI - A)^{-1}B \quad , \quad \text{cas discret} \quad (\text{II.4b})$$

Pour le quadruplet (A, B, C, D) , la matrice de transfert $G(s)$ (ou $G(z)$) est parfois écrite :

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (\text{II.5})$$

Les méthodes de linéarisation sont souvent appliquées autour des points d'équilibres du système. Trois étapes sont utilisées pour obtenir une représentation linéaire du système :

1. Linéariser l'équation différentielle autour du point de fonctionnement (x_e, u_e) par un développement en série de Taylor, où les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligés.
2. Introduire les variables d'écart $\delta x(t)$ et $\delta u(t)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + \delta x(t) \\ u(t) &= u_e(t) + \delta u(t) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

3. Réécrire la nouvelle représentation du modèle local avec $(\delta x, \delta u)$.

$$\frac{d\delta x}{dt} = \left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right)^* \delta x + \left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right)^* \delta u \quad (\text{II.7})$$

où (*) note l'évaluation de la fonction au point (x_e, u_e) . Ainsi, les matrices d'état A , B , C et D sont alors évaluées par les matrices jacobiniennes :

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}}, & B &= \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}}, \\ C &= \left. \frac{\partial g(x,u)}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}}, & D &= \left. \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}}. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Les modèles LTI sont les plus fréquemment utilisés pour le contrôle et l'observation. De nombreux outils théoriques pour l'analyse et la synthèse comme la stabilité, la contrôlabilité, la robustesse, sont disponibles à la fois pour ces systèmes qu'ils soient à entrées et sorties simples (SISO) ou multiples (MIMO), et sont faciles à manipuler contrairement aux modèles non linéaires.

Cependant, le problème principal de l'utilisation des systèmes LTI est qu'elles ne sont valables qu'autour des points de linéarisation et décrivent localement le comportement du système physique réel.

II.2.3 Discrétisation des systèmes linéaires

En temps discret, le système est modélisé par une équation aux différences. La représentation en temps discret est très utile pour la synthèse et l'implémentation par outils informatiques tels que les contrôleurs numériques.

Définition II.3 (*Discrétisation exacte*)

La discrétisation exacte (ou complète) d'un système LTI continu (II.2) en un modèle LTI discret (II.3), à une période d'échantillonnage T_d est donnée par :

$$\begin{aligned} A_d &= e^{A_c k T_d} \\ B_d &= A_c^{-1} (e^{A_c k T_d} - I) B_c T_d \\ C_d &= C_c \\ D_d &= D_c \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Toute la difficulté de la discrétisation est la synthèse de l'exponentielle de matrice. De nombreuses méthodes ont été développées pour éviter les calculs d'exponentielle.

De ces méthodes, la plus simple est la discrétisation rectangulaire, ou discrétisation d'Euler d'ordre 1. En supposant la simplification suivante :

$$e^{A_c k T_d} = I_n + T_d A_c \quad (\text{II.10})$$

les matrices d'état discret sont calculées selon la définition suivante :

Définition II.4 (*Discrétisation rectangulaire*)

La discrétisation d'Euler d'un système LTI continu (II.2) en un modèle LTI discret (II.3), à une période d'échantillonnage T_d est donnée par :

$$A_d = I_n + T_d A_c \quad (\text{II.11a})$$

$$B_d = T_d B_c \quad (\text{II.11b})$$

$$C_d = C_c \quad (\text{II.11c})$$

$$D_d = D_c \quad (\text{II.11d})$$

Dans la suite, la synthèse pour les systèmes LTI en temps continu est présentée.

II.3 Analyses des systèmes dynamiques

Nous allons d'abord rappeler brièvement quelques notions mathématiques et topologiques utiles pour l'analyse des systèmes LTI, et ensuite quelques propriétés nécessaires pour l'étude de ces systèmes.

II.3.1 Outils mathématiques

Définition II.5 (*Produit de Kronecker*)

Le produit de Kronecker de deux matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ est une matrice définie par :

$$A \otimes B = [A_{ij} B]_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Ce produit est utilisé pour la définition de régions LMI.

Lemme II.1 (*Lemme d'inversion matricielle (Identité de Woodbury)*)

Soit une matrice inversible M écrite sous forme $M = A + BCD$, telle que A et C sont inversibles, alors l'égalité suivante est toujours vraie :

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B [DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1} DA^{-1} \quad (\text{II.13})$$

Définition II.6 (*Matrice définie positive*)

Une matrice de taille $n \times n$ est dite définie positive (négative) si $\forall u \in \mathbb{R}^n$, la relation $u^T F u \succ (<) 0$ est vraie.

Considérons un système LTI de la forme (II.2), avec $G(s)$ sa matrice de transfert. Pour un système monovariante, on définit à partir de la fonction G , le gain du système à la pulsation ω , par le module $|G(j\omega)|$. Dans le cas multivariante, on utilise la notion de valeurs singulières.

Définition II.7 (Valeurs singulières)

Les valeurs singulières d'une matrice de transfert $G(j\omega)$ sont définies comme les racines des valeurs propres multipliées par sa transconjuguée :

$$\sigma_i(G(j\omega)) := \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(j\omega)^*)} = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} \quad (\text{II.14})$$

Les valeurs singulières étant des nombres réels positifs ou nuls, elles peuvent être classées. On notera $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ la plus grande valeur singulière et $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ la plus petite :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) \geq \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{II.15})$$

On peut vérifier que pour un système monovarié ($l = m = 1$), il existe qu'une seule valeur singulière, en l'occurrence :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = |G(j\omega)| \quad (\text{II.16})$$

Les valeurs singulières constituent donc une généralisation aux systèmes multivariés de la notion de gain. Elles peuvent être représentées dans le plan de Bode. Pour un système multivarié, avec des vecteurs d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, le "gain" à une fréquence donnée sera compris entre les valeurs singulières inférieure et supérieure.

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|y(j\omega)\|_2}{\|u(j\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{II.17})$$

Définition II.8 (Espace \mathcal{L}_∞)

\mathcal{L}_∞ est un espace de Banach de fonctions matricielles (ou scalaires) sur le corps $\mathbb{C} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ et est constitué de toutes les fonctions matricielles complexes bornées, $f(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[f(j\omega)] \quad (\text{II.18})$$

Définition II.9 (Norme \mathcal{H}_2)

La norme \mathcal{H}_2 d'un signal $e(t)$ appartenant à l'espace \mathcal{L}_2 (espace des fonctions de carré intégrable), est définie comme l'intégrale carré du module du signal. Cette norme notée \mathcal{H}_2 est formulé par :

$$\|e(t)\|_2 = \int_0^\infty e(\tau)^T e(\tau) d\tau \quad (\text{II.19})$$

Elle représente l'énergie induite ou dissipée.

Définition II.10 (\mathcal{H}_∞ et espace \mathcal{RH}_∞)

H_∞ est un sous espace (fermé) de \mathcal{L}_∞ , il contient des fonctions matricielles complexes $f(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ avec $\Re(j\omega) > 0$ (plan à gauche ouvert). Le sous-espace réel rationnel de H_∞ regroupe l'ensemble des fonctions de transfert matricielles stables, de coefficient réels et stable. Il est noté \mathcal{RH}_∞ .

Définition II.11 (Norme \mathcal{H}_∞)

La norme \mathcal{H}_∞ d'un système LTI propre qui appartient à \mathcal{RH}_∞ , est définie comme la valeur la plus élevée de gain énergie-à-énergie induite (norme \mathcal{L}_2 à \mathcal{L}_2) du transfert entre l'entrée $w(t)$ à la sortie $z(t)$. Cette norme notée \mathcal{H}_∞ est formulée par :

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_\infty &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \\ &= \sup_{\omega \in \mathcal{H}_2} \frac{\|z(s)\|_2}{\|w(s)\|_2} \\ &= \max_{\omega \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Définition II.12 (Indexe H_-)

L'indexe H_- d'un système LTI est défini comme la plus petite valeur singulière non nulle sur une bande définie de fréquence $[\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ [Hou 1996], ou bien sur tout le domaine fréquentiel $[0, \infty]$ [Wang 2007].

Ainsi, la forme générale de l'indexe H_- d'une fonction de transfert $G(s)$ est formulé par :

$$\|G(s)\|_-^{[\underline{\omega}, \bar{\omega}]} = \inf_{\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]} \sigma(G(j\omega)) \quad (\text{II.21})$$

où $\underline{\omega}$ peut être égale à 0, et $\bar{\omega}$ peut tendre vers ∞ .

Même si ce n'est pas une norme, cet indexe a les propriétés d'une norme. Il est utile puisqu'il donne une définition efficace de la sensibilité minimale dans les problèmes de détection de défaut.

Définition II.13 (Contrainte d'inégalité linéaire matricielle (LMI))

Une contrainte d'inégalité linéaire matricielle sur un vecteur $x \in R^n$ est définie par :

$$F(x) = F(0) + \sum_{i=1}^m F_i x_i \succ (\prec) 0 \quad (\text{II.22})$$

où les matrices $F_i = F_i^T \forall i \in \{1, \dots, m\}$ sont connues.

Un exemple de contrainte LMI très connu est lié à l'analyse de stabilité d'un système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Soit la fonction de Lyapunov $V(t) = x^T(t)Px(t)$, la stabilité de ce système est garantie si $V(t) > 0$ et $\dot{V}(t) < 0$. Ceci peut être formulé par :

$$x^T P x > 0 \quad (\text{II.23a})$$

$$x^T (A^T P + P A) x < 0 \quad (\text{II.23b})$$

qui est équivalent à

$$F(P) = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & A^T P + P A \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{II.23c})$$

où $P = P^T$ est la variable de décision. L'inégalité $F(P) \prec 0$ est alors linéaire en P .

Si les contraintes LMI $F(x) \prec 0$ sont convexes en x , alors le problème d'optimisation est convexe, et une solution d'optimisation x_{opt} peut être calculée.

Les formulations par contraintes LMIs (ou tout simplement LMIs) sont très utilisées vue leur facilité de résolution par les outils informatiques d'optimisation comme YALMIP ou SeDuMi.

Rappelons maintenant quelques lemmes liés à la manipulation des égalités et inégalités matricielles, et utiles pour leur relaxation.

Lemme II.2 (Complément de Schur)

Soit les matrices symétriques inversibles P et Q , et la matrice M , alors les trois inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{bmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{II.24a})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q \prec 0 \\ P - MQ^{-1}M^T \prec 0 \end{cases} \quad (\text{II.24b})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \prec 0 \\ Q - M^T P^{-1}M \prec 0 \end{cases} \quad (\text{II.24c})$$

Le bloc $P - MQ^{-1}M^T$ est appelé alors complément de Schur de la matrice Q .

Le lemme de Schur est très important puisqu'il permet la transformation d'une contrainte quadratique en une contrainte LMI.

Lemme II.3 (lemme de projection [Doyle 1989])

Soit la matrice symétrique Ψ et les matrices N , θ et M aux dimensions appropriées :

$$\Phi + M^T \theta^T N + N^T \theta M < 0 \quad (\text{II.25})$$

Notons par W_X toute matrice constituant une base du noyau de X . L'inégalité matricielle (II.25) est faisable pour θ si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites :

$$W_M^T \Psi W_M < 0 \quad (\text{II.26a})$$

$$W_N^T \Psi W_N < 0 \quad (\text{II.26b})$$

Ce lemme est utilisé pour transformer une contrainte non linéaire en une contrainte linéaire. Il permet notamment de transformer une BMI en deux LMI.

Lemme II.4 (Lemme d'élimination [P. Shi 1999])

Pour toutes matrices X , Y et Δ de dimension appropriées, telle que $\Delta^T \Delta < I$, alors pour tout scalaire positif $\alpha > 0$, la majoration suivante est satisfaite :

$$X^T \Delta Y + Y^T \Delta X \leq \alpha X^T X + \frac{1}{\alpha} Y^T Y \quad (\text{II.27})$$

Le lemme d'élimination est souvent utilisé pour remplacer une variable bornée par une constante majorante.

Lemme II.5 (Lemme de complétion [Packard 1991])

Soit les matrices $X = X^T$ et $Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que $X > 0$ et $Y > 0$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe des matrices $X_2, Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $X_3, Y_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2^T & Y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.28a})$$

2. Les LMIs sous contrainte de rang sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{et} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + m \quad (\text{II.28b})$$

3. La LMI et la contrainte de rang sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{et} \quad \text{rang}(I - XY) \leq m \quad (\text{II.28c})$$

Ce lemme est très utile pour transformer des contraintes d'égalités matricielles (II.28a) en LMIs sous contraintes de rang (II.28b) (ou (II.28c)).

II.3.2 Stabilité des systèmes linéaires

La notion de stabilité pour les systèmes LTI, et les systèmes dynamiques en générale est très importante. Elle est l'objectif principal de tout problème de contrôle. Elle est définie selon le théorème suivant :

Théorème II.1 (Stabilité asymptotique)

Soit le système LTI régi par (II.2). La propriété de stabilité asymptotique est équivalente à chacune des propriétés suivantes :

- (1) La matrice A est de Hurwitz,
- (2) Les valeurs propres de la matrice A sont toutes à parties réelles strictement négatives pour le cas continu, où de module strictement inférieur à 1 dans le cas discret,
- (3) Il existe une matrice $P > 0$ (définie positive), tel que la contrainte LMI est satisfaite :

$$A^T P + P A < 0 \quad \text{cas continu} \quad (\text{II.29a})$$

$$A^T P A - P < 0 \quad \text{cas discret} \quad (\text{II.29b})$$

La propriété (3) de ce théorème est aussi appelée condition de stabilité quadratique au sens de Lyapunov.

II.3.3 Commandabilité des systèmes linéaires

Si le système est commandable, on pourra toujours synthétiser un contrôleur de ce système dont les dynamiques seront arbitrairement fixées. Il est donc essentiel d'étudier cette notion de commandabilité.

Définition II.14 (*Commandabilité*)

Un système est complètement commandable si, quel que soit l'instant initial t_i , l'état initial x_i à t_i , et l'instant final t_f différent de t_i , il est possible de déterminer une entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[t_i, t_f]$ conduisant tout état initial x_i à 0. Si cette propriété est vraie $\forall t_1$, alors le système est dit complètement commandable.

Théorème II.2 (*Critère de commandabilité au sens de Kalman*)

Soit la matrice de commandabilité définie par :

$$\mathcal{C}_{(B,A)} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

et le rang de commandabilité défini par $\text{rang}(\mathcal{C}_{(B,A)}) = n_C$.

La propriété "la paire (B, A) est complètement commandable" est vrai quand le critère de Kalman : n_C est maximal :

$$n_C = n \quad (\text{II.31})$$

Lorsque la paire (B, A) n'est pas complètement commandable, il faut étudier la stabilisabilité de cette même paire (B, A) .

Définition II.15 (*Stabilisabilité*)

Un système est stabilisable si et seulement si les états non-commandables sont stables.

II.3.4 Observabilité des systèmes linéaires

Si le système est observable, on pourra toujours dimensionner un observateur de ce système dont les dynamiques seront arbitrairement fixées. Il est donc essentiel d'étudier cette notion d'observabilité.

Définition II.16 (*Observabilité*)

Un système est complètement observable si, quel que soit l'instant initial t_i , l'état initial x_i à t_i , et l'instant final t_f différent de t_i , la seule connaissance de sa sortie $y(t)$ et de son entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[t_i, t_f]$ permet de connaître l'état initial x_i .

Théorème II.3 (*Critères d'observabilité*)

Soit la matrice d'observabilité définie par :

$$\mathcal{O}_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

et le rang d'observabilité défini par $\text{rang}(\mathcal{O}_{(A,C)}) = n_{\mathcal{O}}$. La propriété "la paire (A, C) est complètement observable" est équivalente à chacune des propriétés suivantes :

(1) Il n'existe aucune matrice régulière P telle que :

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, CP^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.33})$$

avec A_{11} matrice $(n_{\mathcal{O}} \times n_{\mathcal{O}})$, $n_{\mathcal{O}} < n$, C_1 matrice $(l \times n_{\mathcal{O}})$, A_{21} matrice $((n - n_{\mathcal{O}}) \times (n - n_{\mathcal{O}}))$.

(2) Critère de Kalman : $n_{\mathcal{O}}$ est maximal :

$$n_{\mathcal{O}} = n \quad (\text{II.34})$$

(3) L'identité $C(sI - A)^{-1}B = 0$, $\forall s \in \mathbb{C}$ n'est possible que si B est nulle.

(4) Critère de Popov :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.35})$$

Lorsque la paire (A, C) n'est pas complètement observable, il faut étudier la détectabilité de cette même paire (A, C) .

Définition II.17 (Détectabilité)

Un système est détectable si et seulement si les états non-observables sont stables.

II.3.5 Analyse avancée

Théorème II.4 (Lemme bornée réel)

Soit le système LTI sous la forme (II.2), et soit un scalaire positif $0 < \gamma < \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est de Hurwitz et $\|G(s)\|_{\infty} < \gamma$

(2) Il existe une matrice symétrique définie positive $P = P^T > 0$ telle que la contrainte LMI est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T D \\ \star & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.36a})$$

(3) Il existe une matrice P symétrique définie positive telle que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ \star & -\gamma I & D^T \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.36b})$$

(4) Il existe une matrice S symétrique définie positive, $S = P^{-1}$, telle que l'inégalité

suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} AS + SA^T & B & SC^T \\ \star & -\gamma I & D^T \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.36c})$$

Ces inégalités sont déduites en considérant la fonction de Lyapunov $V = x^T P x$. La stabilité est assurée pour $V > 0$ et $\dot{V} < 0$. La performance H_∞ induit la relation $y^T y < \gamma^2 u^T u$, donc :

$$x^T P x > 0 \quad (\text{II.37a})$$

$$\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + y^T y - \gamma^2 u^T u < 0 \quad (\text{II.37b})$$

puis en appliquant le lemme de Schur, l'énoncé du théorème est retrouvé.

En cherchant la matrice P ou S tout en minimisant le scalaire γ , on tombe sur un problème d'optimisation dont la solution est une matrice P , et un scalaire γ_∞ qui est la norme H_∞ de $G(s)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Solution(II.36a)} = \text{Solution(II.36b)} = \text{Solution(II.36c)} = \|G(s)\|_\infty = \gamma_\infty & & (\text{II.38}) \\ \begin{array}{c} P, \gamma \\ \min \gamma \in \mathbb{R}^+ \end{array} & \begin{array}{c} P, \gamma \\ \min \gamma \in \mathbb{R}^+ \end{array} & \begin{array}{c} S, \gamma \\ \min \gamma \in \mathbb{R}^+ \end{array} \end{array}$$

Les problèmes (II.36a)-(II.36c) sont des LMI en P (ou S) et γ . Il existe de nombreux outils informatiques d'optimisation très efficaces et intuitifs pour la résolution de ce type de problème comme YALMIP ou SeDuMi.

A noter aussi, pour les systèmes en temps discret, des LMI équivalentes peuvent être écrites. On reprend uniquement la LMI équivalente à (II.36b) :

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & B^T P A & C^T \\ \star & B^T P B - \gamma I & D^T \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.39})$$

Définition II.18 (*Région LMI*)

Une région LMI est un sous-ensemble \mathcal{D} du plan complexe qui peut être défini par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\} \quad (\text{II.40a})$$

où L et M sont des matrices réelles telles que $L^T = L$. La fonction matricielle

$$f_{\mathcal{D}} = L + zM + \bar{z}M^T \quad (\text{II.40b})$$

est appelée la fonction caractéristique de \mathcal{D} . Notons par \mathcal{D}_R la région de stabilité, elle est définie par

$$\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}z + R_{12}^T \bar{z} + R_{22}z\bar{z} < 0\} \quad (\text{II.41})$$

où R_{22} est une matrice semi-définie positive.

Théorème II.5 (Région LMI de Stabilité)

Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est \mathcal{D}_R -stable
2. Toutes les valeurs propres de A appartiennent à la région convexe définie par (II.41).
3. Il existe une matrice P symétrique définie positive telle que la LMI suivante est satisfaite :

$$R_{11} \otimes P + R_{12}(PA) + R_{12}^T \otimes (A^T P) + R_{22} \otimes (A^T P A) < 0 \quad (\text{II.42})$$

Par exemple, voici quelques régions de stabilités :

- le demi plan gauche pour les systèmes en temps continu : $R_{11} = 0$, $R_{12} = 1$ et $R_{22} = 0$, soit la LMI (II.29a) ;
- le cercle unité pour les systèmes en temps discret : $R_{11} = -1$, $R_{12} = 0$ et $R_{22} = 1$, soit la LMI (II.29b) ;
- le plan à gauche d'une ligne verticale en $\Re(z) \leq -\delta$ (systèmes en temps continu) : $R_{11} = 2\delta$, $R_{12} = 1$ et $R_{22} = 0$;
- le secteur conique dont le sommet à l'origine à un angle de 2ϕ (correspondant à un coefficient d'amortissement $\xi = \cos(\phi)$, pour le cas temps continu) : $R_{11} = 0_{2 \times 2}$, $R_{12} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\cos(\phi) & \sin(\phi) \end{bmatrix}$ et $R_{22} = 0_{2 \times 2}$.

II.4 Synthèse d'observateur

En général, pour des raisons techniques et économiques, l'état du système n'est pas complètement accessible. En effet, la complexité de la faisabilité technique ainsi que des coûts prohibitifs pour l'implantation de plusieurs capteurs peuvent réduire considérablement le nombre d'états mesurés. On peut alors considérer que, pour la grande majorité des systèmes, la dimension du vecteur d'état est supérieure à celle du vecteur de sortie ($l < n$). Ceci signifie que pour tout instant t , le vecteur $x(t)$ ne peut pas être complètement mesuré ou déduit des sorties.

Cependant, sous certaines hypothèses, l'état peut être reconstruit à l'aide d'un observateur. Ainsi, un dimensionnement judicieux d'un observateur doit permettre une estimation précise et rapide de la valeur des composantes du vecteur d'état $x(t)$.

Avant d'expliquer la procédure générale de la conception d'un observateur, nous devons étudier la possibilité d'identifier l'état du système, ou son observabilité.

II.4.1 Dimensionnement d'un observateur

On considère le système LTI défini par :

$$\Sigma_{LTI} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

La représentation (II.43) peut facilement se déduire de celle en (II.2), par une simple opération de changement de variable de sortie $y(t) \leftarrow y(t) - Du(t)$.

Lorsque le système est observable (ou plus généralement est détectable), l'état $x(t)$ peut être estimé (ou reconstruit) par un système dynamique appelé observateur noté \mathcal{OBSV} , dont la structure est la suivante :

$$\mathcal{OBSV} : \begin{cases} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Ju(t) + Ly(t) \\ w(t) &= Mz(t) + Ny(t) \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^l$ représentent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système. $z(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état de l'observateur, tel qu'il tende asymptotiquement vers $Tx(t)$ et $w(t)$ représente la sortie du système observateur.

Le système dynamique constituant l'observateur doit assurer que l'erreur d'estimation, définie par $e(t) = Tx(t) - z(t)$ tende asymptotiquement vers 0, soit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = Tx(t) - z(t) = 0 \quad (\text{II.45})$$

II.4.2 Observateur identité

Un observateur identité (ou d'ordre plein) permet de reconstruire l'état $x(t)$. On a directement $z(t) = \hat{x}(t)$ où $\hat{x}(t)$ est l'estimation de $x(t)$. La structure de l'observateur peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Le terme de correction $L(y(t) - \hat{y}(t))$ fait apparaître le gain de correction L , également appelé gain de l'observateur, relatif à l'erreur de la reconstruction de la sortie. On peut aussi écrire l'observateur sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \quad (\text{II.47})$$

La dynamique de l'erreur de reconstruction de l'état, définie par $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, peut s'écrire :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) \quad (\text{II.48})$$

A partir de la condition initiale $\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$, l'évolution de cette erreur d'estimation est telle que :

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0) \quad (\text{II.49})$$

Pour que l'observateur soit asymptotiquement stable, il faut que l'erreur d'estimation de l'état tende vers 0 lorsque t augmente. En effet, à $t = 0$, $\tilde{x}(0) \neq 0$ car l'état est inaccessible, on ne peut en général pas choisir $x(0) = \hat{x}(0)$. Afin de garantir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation ($\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$) et donc un bon fonctionnement de l'observateur, il faut choisir L de façon judicieuse.

Théorème II.6 ([Luenberger 1971])

| Les valeurs propres de $A - LC$ peuvent être choisies arbitrairement si et seulement si la |

paire (A, C) est observable.

Si le système n'est pas observable, le théorème suivant peut être appliqué :

Théorème II.7 ([O'Reilly 1983])

Pour un système LTI sous la forme (II.43), il est possible de dimensionner un observateur asymptotiquement stable si et seulement si la paire (A, C) est détectable. Les valeurs propres de $A - LC$ sont alors toutes ou en parties fixées, si et seulement si la paire (A, C) est observable.

Le choix de la matrice L est orienté par les dynamiques souhaitées de l'observateur (valeurs propres de $A - LC$). En pratique, on choisit une dynamique pour que l'erreur de reconstruction soit plus rapide que celle du processus en boucle ouverte. Toutefois, on est limité au niveau de la grandeur de ces dynamiques choisies. Idéalement, on devrait prendre des dynamiques très grandes afin d'assurer une convergence rapide et précise. Cependant, on ne peut utiliser que des gains réalisables, ce qui restreint le choix de L , et de plus, plus la valeur du gain sera élevée plus les bruits influenceront sur la reconstruction de l'état.

Des méthodes de placement de pôles pour le calcul de L sont souvent utilisées. Elle sont simples et offrent des garanties de stabilité et de réponse transitoire facile à interpréter. Dans la présence d'entrées inconnues (bruits, perturbations), il faut trouver un compromis entre bonne estimation, temps de réponse, insensibilité ou réjection des effets non désirables. On se retrouve face à une formulation multi-objectifs d'un problème dont la solution se fait par optimisation.

II.4.3 Observateur d'ordre réduit

L'observateur d'ordre réduit consiste à estimer les états non mesurables. Ainsi pour un système défini par (II.43), l'observateur réduit sera d'ordre $n - l$.

Soit le système défini par (II.43). On pose le partitionnement suivant pour la matrice C et le vecteur d'état $x(t)$:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.50})$$

où $\text{rang}(C_1) = l$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ et $x_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$.

Si $\text{rang}(C_1) = l$, alors en définissant le changement de variables $\bar{x}(t) = Px(t)$, avec :

$$P = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0_{n-l,l} & I_{n-l,l} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.51})$$

le système (II.43) devient :

$$\Sigma_{LTI} : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

avec $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$ et $\bar{C} = CP^{-1}$.

Cet observateur se base sur l'hypothèse que la matrice C est de plein rang ligne, ce qui permet d'utiliser le changement de variable (II.43) en (II.52).

Dans la suite pour la simplification des notations, on considère que le système (II.43) est déjà sous forme (II.52). Ceci est caractérisé par les matrices A , B , C et le vecteur d'état $x(t)$ partitionnés comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}, & x(t) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

L'équation d'état peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Les l premières composantes de l'état sont directement mesurées ($y(t) = x_1(t)$). $x_1(t)$ ne doit donc pas être estimé par l'observateur. L'équation qui régit l'évolution de $x_1(t)$ (II.54) peut alors être considérée comme une mesure, que l'on note $\xi(t)$, dépendante de $x_2(t)$ et de $u(t)$:

$$\xi(t) = \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) = A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \quad (\text{II.55})$$

Pour estimer $x_2(t)$, la variable $v(t)$ est introduite et on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}v(t) + B_2u(t) + K[\xi(t) - \hat{\xi}(t)] \\ x_1(t) &= y(t) \\ \xi(t) &= A_{12}v(t) + B_1u(t) \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

A partir du système précédent, la construction de $\xi(t)$ nécessite la dérivée de la sortie $y(t)$, ce qui constitue un inconvénient. Afin d'éviter de calculer directement cette dérivée, la variable $z(t)$ définie par :

$$z(t) = v(t) - Ly(t) \quad (\text{II.57})$$

est introduite. En dérivant $z(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{v}(t) - L\dot{x}_1(t) \\ &= A_{21}x_1(t) + A_{22}v(t) + B_2u(t) - L[A_{11}x_1(t) + A_{12}v(t) + B_1u(t)] \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

En utilisant les relations $z(t) = v(t) - Ly(t)$ et $y(t) = x_1(t)$, on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Ju(t) + L_1y \quad (\text{II.59a})$$

avec :

$$F = A_{22} - L_1A_{12} \quad (\text{II.59b})$$

$$J = B_2 - L_1B_1 \quad (\text{II.59c})$$

$$L_1 = A_{21} + A_{22}L - LA_{11} - LA_{12}L \quad (\text{II.59d})$$

Ainsi (II.59a) est le système dynamique appelé observateur réduit d'ordre $q = n - l$ pour le système (II.54). La reconstruction de l'état non mesuré $x_2(t)$ est estimée par $v(t)$:

$$v(t) = z(t) + Ly \tag{II.60}$$

L'erreur d'observation $e(t)$ est définie par $e(t) = x_2(t) - v(t)$. De plus $e(t)$ est régie par le système dynamique autonome :

$$\dot{e}(t) = Fe(t) \tag{II.61}$$

où $F = A_{22} - LA_{12}$.

La stabilité du système autonome (II.61) est garantie par le placement de pôles de F . Ainsi, lorsque la paire (A_{22}, A_{12}) est observable, les valeurs propres de F et donc les dynamiques de l'observateur peuvent être fixées arbitrairement grâce à un choix adéquat de L .

Théorème II.8

Si (A, C) est observable alors (A_{22}, A_{12}) est observable.

Démonstration : Le but est de démontrer que si (A, C) est observable alors (A_{22}, A_{12}) l'est également. Si (A, C) est observable on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \text{rang} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI - A_{22} \\ I_l & 0 \end{bmatrix} = n \tag{II.62}$$

ce qui est équivalent à

$$\forall s \in \mathbb{C}, = \text{rang} \begin{bmatrix} A_{12} \\ sI - A_{22} \end{bmatrix} = n - l \tag{II.63}$$

donc (A_{22}, A_{12}) est une paire observable. ■

L'observateur réduit a finalement la structure suivante :

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Ju(t) + L_1y \tag{II.64}$$

où F, J et L sont définies pas les relations (II.64). En notant \hat{x}_1 et \hat{x}_2 les estimations des vecteurs x_1 et x_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= C_1^{-1}[(I - C_2L)y(t) - C_2z(t)] \\ \hat{x}_2(t) &= z(t) + Ly(t) \end{aligned} \tag{II.65}$$

II.4.4 Application à la détection de défaut : Synthèse H_-/H_∞

Les systèmes LTI représentés dans (II.2) sont utiles pour l'analyse des propriétés du système (stabilité, observabilité, commandabilité), mais il leur manque la modélisation des entrées inconnues.

Ainsi en présence de perturbation et de défaut, les systèmes LTI peuvent être décrits, en temps continu, par la représentation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_d d(t) + E_f f(t) \tag{II.66a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_d d(t) + F_f f(t) \tag{II.66b}$$

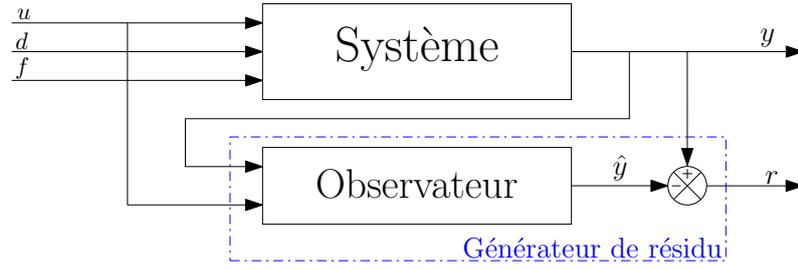


FIGURE II.1 – Générateur de résidu à base d'observateur

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E_d \in \mathbb{R}^{n \times n_d}$, $E_f \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $F_d \in \mathbb{R}^{l \times n_d}$ et $F_f \in \mathbb{R}^{l \times n_f}$ et les vecteurs $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ et $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ désignent respectivement les perturbations et les défauts.

Avant de présenter la procédure de la synthèse d'observateur pour la détection de défaut, rappelons la définition suivante :

Définition II.19 (Déteçtabilité de défaut)

Soit un système sous la forme (II.66) sujet à des défauts. Les défauts sont déteçtables par un observateur si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} sI - A & E_f \\ C & D_f \end{bmatrix} = n + n_f, \forall s \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.67})$$

Bien que ces deux entrées inconnues ont souvent des effets indésirables sur le système, on cherche plus à rejeter la perturbation $d(t)$ et avoir le plus d'information sur le défaut $f(t)$.

On introduit alors le signal $r(t)$ qui décrit un écart entre le système réel mesuré et le modèle. Il est obtenu par un générateur de résidu à base d'un observateur identité représenté par la figure II.1. Sa réalisation est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du \\ r &= y - \hat{y} \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Le résidu doit être le plus sensible possible au défaut tout en rejetant les perturbations. Il est alors soumis à une double contrainte :

1. En présence de perturbations :

$$\|r_d\|_2 < \gamma \|d\|_2 \quad (\text{II.69a})$$

2. En présence de défauts :

$$\|r_f\|_2 > \beta \|f\|_2 \quad (\text{II.69b})$$

On définit l'erreur d'estimation d'état $\tilde{x} = x - \hat{x}$, alors :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= Ax + Bu + E_d d + E_f f - A\hat{x} - Bu - LC\tilde{x} - LF_d d - LF_f f \\ &= (A - LC)\tilde{x} + (E_d - LF_d)d + (E_f - LF_f)f \end{aligned} \quad (\text{II.70a})$$

$$r = C\tilde{x} + F_d d + F_f f \quad (\text{II.70b})$$

Ce système peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A^* \tilde{x} + E_d^* d + E_f^* f \\ r &= C \tilde{x} + F_d d + F_f f \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

où $A^* = A - LC$, $E_d^* = E_d - LF_d$ et $E_f^* = E_f - LF_f$.

On définit respectivement les fonctions de sensibilité du résidu au perturbation et au défaut T_{rd} et T_{rf} par :

$$T_{rf}(s) = C(sI - A^*)^{-1} E_f^* + F_f \quad (\text{II.72a})$$

$$T_{rd}(s) = C(sI - A^*)^{-1} E_d^* + F_d \quad (\text{II.72b})$$

En utilisant les définitions de la norme H_∞ et l'index H_- , l'objectif de l'observateur est d'avoir les transferts :

$$\|T_{rd}\|_\infty < \gamma \quad (\text{II.73a})$$

$$\|T_{rf}\|_- > \beta \quad (\text{II.73b})$$

Ainsi le problème H_-/H_∞ est formulé comme suit : trouver la matrice L qui minimise γ et maximise β tel que le générateur de résidu est stable.

Hypothèse II.1 : Dans cette étude, la paire (A, C) est supposée observable, ou sans perte de généralité, détectable. De plus, les défauts sont assumés détectables. Cette hypothèse est standard pour tous les problèmes de détection de défaut.

Théorème II.9 (Observateur par lemme borné réel)

Considérons le générateur de résidu (II.68) avec objectif H_∞ . Les expressions suivantes sont toutes équivalentes :

1. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$, telle que l'inégalité est satisfaite :

$$\|r_d\|_2 < \gamma \|d\|_2 \quad (\text{II.74a})$$

2. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$, telle que l'inégalité est satisfaite :

$$\|T_{rd}(s)\|_\infty < \gamma \quad (\text{II.74b})$$

3. (Lemme borné réel) Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$, une matrice L et une matrice $P > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P + C^T C & P(E_d - LF_d) + C^T F_d \\ \star & F_d^T F_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.74c})$$

4. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$, une matrice U et une matrice $P > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + UC + C^T U + C^T C & PE_d + UF_d + C^T F_d \\ \star & F_d^T F_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.74d})$$

où la matrice de gain de l'observateur est $L = -P^{-1}U$.

5. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$, une matrice U et une matrice $P > 0$ telle que :

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + UC + C^T U & PE_d + UF_d & C^T \\ \star & -\gamma^2 I & F_d^T \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.74e})$$

où la matrice de gain de l'observateur est $L = -P^{-1}U$.

Démonstration : La preuve suit les éléments suivants :

1. L'équivalence entre (II.74a) et (II.74b) est directement obtenue de la définition de la norme H_∞ .

$$\|r_d\|_2 < \gamma \|d\|_2 \Leftrightarrow \frac{\|r_d\|_2}{\|d\|_2} < \gamma, \quad (\text{II.75a})$$

$$\|T_{rd}(s)\|_\infty = \sup_{d \in \mathbb{R}^{r_d}} \frac{\|r_d\|_2}{\|d\|_2} < \gamma \quad (\text{II.75b})$$

2. La condition suffisante de stabilité au sens de Lyapunov est satisfaite s'il existe une fonction $V > 0$ telle que $\dot{V} < 0$. Soit la fonction candidate : $V|_{f=0} = \tilde{x}^T P \tilde{x}$, $P > 0$ et $\dot{V} < 0$.

En plus, (II.74a) est équivalente à $r_d^T r_d - \gamma^2 d^T d < 0$, donc :

$$\dot{V} + r_d^T r_d - \gamma^2 d^T d < 0 \quad (\text{II.75c})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}} + r_d^T r_d - \gamma^2 d^T d < 0 \quad (\text{II.75d})$$

Sous forme quadratique :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA^* + A^{*T} P + C^T C & PE_d^* + C^T F_d \\ \star & F_d^T F_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.75e})$$

Alors $\forall \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \end{bmatrix} \neq 0$ on a :

$$\begin{bmatrix} PA^* + A^{*T} P + C^T C & PE_d^* + C^T F_d \\ \star & F_d^T F_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.75f})$$

qui est la même inégalité en (II.74c).

3. L'inégalité matricielle (II.74c) n'est pas linéaire. Elle peut être linéarisée par un changement de variable $U = -LP$.
4. Les LMIs (II.74d) et (II.74e) sont équivalentes par le lemme de Schur II.2. ■

Théorème II.10

S'il existe un générateur de résidu défini en (II.68) avec objectif H_- où F_f est plein rang ligne, alors les expressions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ telle l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\|r_f\|_2 > \beta \|f\|_2 \quad (\text{II.76a})$$

2. Il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ telle l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\|T_{rf}(s)\|_- > \beta \quad (\text{II.76b})$$

3. Il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$, une matrice L et une matrice symétrique P telle que :

$$\begin{bmatrix} P(A - LC) + (A - LC)^T P - C^T C & P(E_f - LF_f) - C^T F_f \\ \star & \beta^2 I - F_f^T F_f \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.76c})$$

où la matrice de gain de l'observateur est $L = -P^{-1}U$.

4. Il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$, une matrice U et une matrice symétrique P telle que :

$$\begin{bmatrix} -PA - UC + C^T C - A^T P - C^T U & -PE_f - UF_f + C^T F_f \\ \star & F_f^T F_f - \beta^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.76d})$$

où la matrice de gain de l'observateur est $L = -P^{-1}U$.

Démonstration : L'équivalence entre (II.76a)-(II.76d) peut être facilement démontrée en utilisant les mêmes étapes de calcul que le théorème précédent, en développant :

$$\dot{V}|_{d=0} - r_f^T r_f + \beta^2 f^T f < 0 \quad (\text{II.77}) \quad \blacksquare$$

Remarque II.1

Il a été démontré dans [Wang 2007] que le signe de la matrice P dans la formulation LMI de la propriété \mathcal{H}_- de l'observateur, telle qu'elle est présentée, ne nécessite pas qu'il soit défini. Cette condition n'assure pas la stabilité de l'observateur. Cependant, la stabilité de l'observateur H_-/H_∞ est garantie par la condition H_∞ dans le théorème (II.9) : Comme P est commune dans la synthèse multi-objectifs, la définition de son signe est alors imposée.

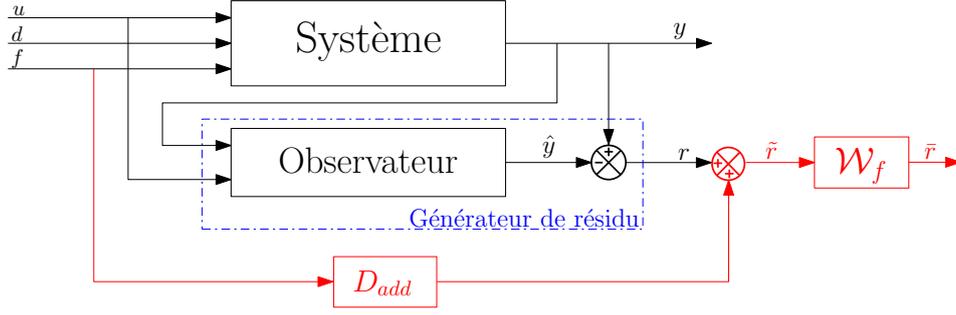
II.4.4.1 Synthèse \mathcal{H}_- avec modelage fréquentiel

D'après la définition du gain en haute fréquence pour les systèmes LTI sous forme (II.2) :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (C(j\omega I - A)^{-1}B + D) = D \quad (\text{II.78})$$

Il est évident pour les systèmes strictement propres c.à.d $D = 0$, ou à déficience de rang colonne, l'indice H_- est toujours nul. Dans cette classe de système, la stratégie ne peut être utilisée car le gain L n'affecte pas les hautes fréquences. Ainsi si la plus petite valeur singulière est en haute fréquence, ce qui est le cas pour la plupart des systèmes, et ce qui est équivalent pour les problèmes de détection de défaut, à un défaut actionneur, la méthode H_- telle qu'elle est présentée par le théorème n'est plus adaptée.

De plus, pour les systèmes propres, la valeur maximale de β est imposée par la relation $D^T D \geq \beta^2 I$ quelque soit le choix de L . Ceci est dû à la présence du terme diagonal $D^T D - \beta^2 I$ dans la LMI (II.76d).

FIGURE II.2 – Générateur de résidu H_-/H_∞ avec modelage fréquentiel

Or la plupart des défauts sont situés en basse fréquence, comme les offsets ($f = 0$) ou variant lentement dans le temps ($f \ll \infty$) comme une dégradation d'un organe mécanique (usure d'un actionneur, fuite...). Donc pour améliorer la sensibilité du défaut dans cette zone de fréquence, il faut modifier la méthode de synthèse.

La plupart des travaux sur les problèmes d'optimisation H_-/H_∞ ne tiennent pas compte de cette limitation. Une solution est proposée dans les travaux de Wang et Liu [Liu 2005, Wang 2007]. Elle consiste à rajouter un filtre de pondération sur la zone de fréquence souhaitée, en plus d'un terme additif virtuel, utilisé uniquement dans la procédure de synthèse. Cette approche est similaire à la résolution du problème H_∞ standard, où les filtres de pondération sur les entrées exogènes et les sorties d'intérêt ne sont pas réellement implémentés.

Le but du terme additif est surtout d'éviter la situation $\underline{\sigma}(G(j\omega)) = 0$. Ensuite, le filtre de pondération qui est passe-haut, est rajouté pour traduire $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ aux basses fréquences là où L peut avoir une action visible.

L'objectif est d'augmenter la sensibilité de résidu au défaut en basse fréquence, i.e. maximiser β sur l'intervalle $[0, \bar{\omega}]$. D'où la définition de l'index H_- (II.21).

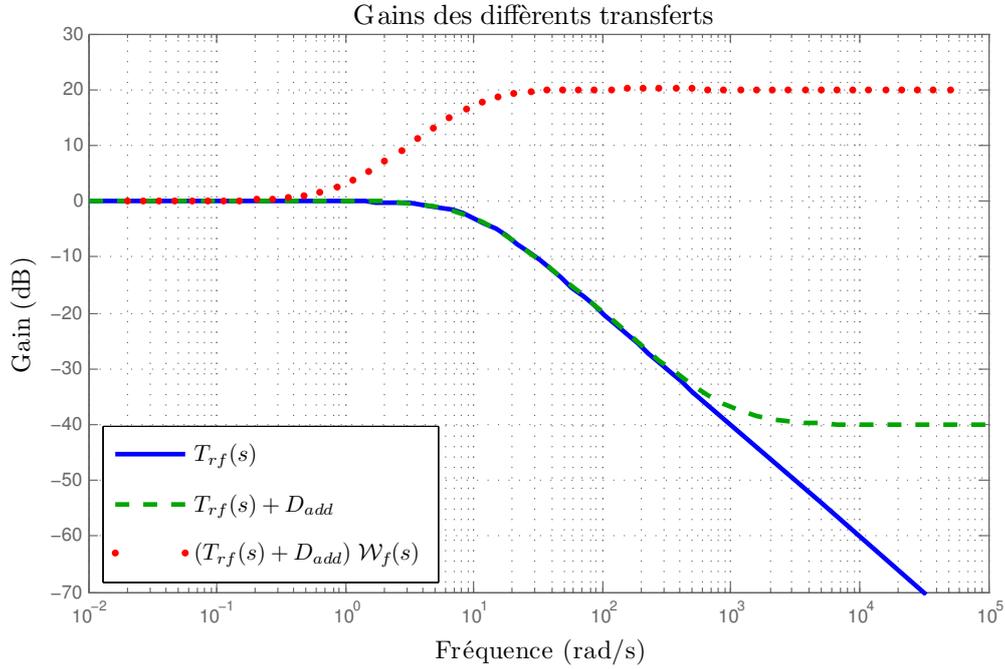
Le terme additif est rajouté aux systèmes par une voie auxiliaire directe comme le montre la figure II.2.

Pour expliquer les effets des différents éléments de la synthèse H_- , on prend le cas simple d'un système SISO. On considère que le système est sujet à un défaut actionneur, soit la matrice $F_f = 0$. On rappelle que $T_{r,f}(s)$ est le transfert du résidu au défaut.

1. La solution des LMIs du théorème (II.10) donne $\beta = 0$. Ceci est visible sur la figure II.3, où le gain $|G(j\omega)|$ est tracé en bleu continu.
2. En rajoutant le terme additif D_{add} , on remarque d'après la courbe en tirets verts que $\underline{\sigma}(G(j\omega) + D_{add}) > 0$, ce qui donne $\beta = D_{add}$ comme solution au problème d'optimisation. Ceci dit, on voit bien qu'on n'est pas dans les basses fréquences.
3. Nous souhaitons que l'indice H_- corresponde à un gain en basses fréquences ; ceci est alors assuré lors de l'ajout du filtre de pondération \mathcal{W}_f . C'est un filtre passe-haut dont la fonction de transfert est de la forme :

$$\mathcal{W}_f(s) = \left(\frac{s/\omega_1 + 1}{s/\omega_2 + 1} \right)^m \quad (\text{II.79})$$

où $\omega_1 < \omega_2$ et m est l'ordre du filtre.

FIGURE II.3 – Courbe des différentes étapes du modelage fréquentiel H_-

Comme on le voit sur la courbe rouge pointillée, la zone en basse fréquence est maintenant "accessible" à la modification par le gain de l'observateur.

En rajoutant les éléments de modelage D_{add} et $\mathcal{W}_f(s)$, le transfert que nous obtenons en fait est celui de $T_{\bar{r}f}(s) = \frac{\bar{r}(s)}{f(s)}$, qui est bien entendu différent de la vraie fonction de sensibilité du générateur de résidu $T_{rf}(s) = \frac{r(s)}{f(s)}$. Cependant, ces deux transferts sont les mêmes en basses fréquences puisque $D_{add} \ll 1$; $\mathcal{W}_f(j\omega)|_{\omega < \omega_1} = 1$.

On aura alors :

$$T_{\bar{r}f}(s)|_{\omega < \omega_1} = T_{rf}(s)|_{\omega < \omega_1} = C(sI - A + LC)^{-1}E_f + F_f \quad (\text{II.80})$$

Soit $\mathcal{W}_f(s) := \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix}$ une réalisation d'état du filtre \mathcal{W}_f . Le générateur de résidu augmenté des filtres de modelage a la représentation suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (\text{II.81a})$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (\text{II.81b})$$

$$\tilde{r} = (y - \hat{y}) + D_{add}f \quad (\text{II.81c})$$

$$\dot{x}_F = A_F x_h + B_F \tilde{r} \quad (\text{II.81d})$$

$$\bar{r} = C_F x_h + D_F \tilde{r} \quad (\text{II.81e})$$

En introduisant l'erreur d'estimation \tilde{x} , on obtient le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - LC & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_d - LF_d \\ B_F F_d \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} E_f - LF_f \\ B_F(F_f + D_{add}) \end{bmatrix} f \quad (\text{II.82a})$$

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} D_F C & C_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_F F_d \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} D_F(F_f + D_{add}) \end{bmatrix} f \quad (\text{II.82b})$$

Soit $x^a = [\tilde{x}^T \ x_F^T]^T$, cette représentation est simplifiée par :

$$\dot{x}^a = A^a x^a + E_d^a d + E_f^a f \quad (\text{II.83a})$$

$$\bar{r} = C^a x^a + F_d^a d + F_f^a f \quad (\text{II.83b})$$

où

$$A^a = \begin{bmatrix} A - LC & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix}, \quad E_f^a = \begin{bmatrix} E_f - LF_f \\ B_F(F_f + D_{add}) \end{bmatrix}, \quad E_d^a = \begin{bmatrix} E_d - LF_d \\ B_F F_d \end{bmatrix} \quad (\text{II.83c})$$

$$C^a = \begin{bmatrix} D_F C & C_F \end{bmatrix}, \quad F_f^a = D_F(F_f + D_{add}) \text{ et } F_d^a = D_F F_d \quad (\text{II.83d})$$

Dans le cas MIMO, pour $F_f = \begin{bmatrix} F_{f1} \\ 0 \end{bmatrix}$, il suffit de choisir la matrice de chaîne directe comme

$$D_{add} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon I \end{bmatrix}.$$

On peut appliquer maintenant les théorèmes H_- et H_∞ sur les systèmes augmentés :

$$T_{\bar{r}f} := \left[\begin{array}{c|c} A^a & E_f^a \\ \hline C^a & F_f^a \end{array} \right], \quad T_{\bar{r}d} := \left[\begin{array}{c|c} A^a & E_d^a \\ \hline C^a & F_d^a \end{array} \right]$$

Ceci est formulé par le théorème suivant.

Théorème II.11 ($\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$ pour le système augmenté)

Considérons le problème de détection de défaut à base d'observateur. Il existe un générateur de résidu H_-/H_∞ tel que les conditions de sensibilité sont satisfaites (i.e. sensibilité aux défauts en basse fréquence), s'il existe des nombres réels γ et β , une matrice U^a et une matrice symétrique $P^a > 0$ tels que les LMI suivantes sont satisfaites :

$$\left[\begin{array}{c|c} P^a A_0 + A_0^T P^a + U^a C_0 & P^a E_{d0} + U^a F_d \\ \hline +C_0^T U^a T + C^a T C^a & +C^a T D_d^a \end{array} \right] < 0 \quad (\text{II.84})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} * & D_d^{aT} D_d^a - \gamma^2 I \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -P^a A_0 - A_0^T P^a - U^a C_0 & -P^a E_{f0} - U^a F_f \\ \hline -C_0^T U^a T + C^a T C^a & +C^a T D_f^a \end{array} \right] > 0 \quad (\text{II.85})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} * & D_f^{aT} D_f^a - \beta^2 I \end{array} \right]$$

où les matrices A_0, B_{f0}, B_{d0}, C_0 , et I_0 sont définies par :

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix}, C_0 = [C \ 0], I_0 = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{d0} = \begin{bmatrix} E_d \\ B_F F_d \end{bmatrix} \text{ et } E_{f0} = \begin{bmatrix} E_f \\ B_F(F_f + D_{add}) \end{bmatrix}$$

Le gain de l'observateur est calculé par $L = I_0^T (P^a)^{-1} U^a$

Démonstration : Seuls les calculs pour démontrer la LMI (II.84) sont développés. Les mêmes étapes sont utilisées pour démontrer la LMI (II.85), ils seront omis pour éviter toute redondance.

Appliquons le théorème II.10 au système augmenté T_{rd} . On obtient alors l'égalité :

$$\left[\begin{array}{c|c} P^a A^a + C^{aT} C^a & P^a E_d^a \\ + A^{aT} P^a & + C^{aT} D_d^a \\ \hline \star & D_d^{aT} D_d^a - \gamma^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{II.86})$$

Puis en développant A^a et E_d^a on obtient :

$$P^a A^a = P^a \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix} + P^a \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix} L [C \ 0] \quad (\text{II.87a})$$

$$P^a E_d^a = P^a \begin{bmatrix} E_d \\ B_F F_d \end{bmatrix} + P^a \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix} L F_d \quad (\text{II.87b})$$

L'inéquation (II.86) devient :

$$\left[\begin{array}{c|c} P^a(A_0 + I_0 L C_0) & P^a(B_0 \\ +(A_0 + I_0 L C_0)^T P^a & + I_0 L F_d) \\ + C^{aT} C^a & + C^{aT} D_d^a \\ \hline \star & D_d^{aT} D_d^a - \gamma^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{II.88})$$

Enfin en effectuant le changement de variable $U^a = P^a I_0 L$, la BMI (II.88) est transformée en la première LMI du théorème. ■

II.5 Commande par synthèse H_∞

Dans les dernières décennies, la théorie de commande H_∞ robuste pour les systèmes physiques s'est propagée dans plusieurs domaines. Les deux communautés industrielles et académiques ont été intéressées par l'utilisation de l'analyse et les outils de synthèse que cette théorie de contrôle fournit. En effet, la conception de commande H_∞ est exprimée comme un problème d'optimisation mathématique et il a l'avantage d'être applicable aux problèmes impliquant des systèmes multivariables.

L'objectif de la synthèse d'un contrôleur H_∞ est de spécifier des pondérations fréquentielles à certaines variables d'intérêt du système, afin de garantir des performances comme la stabilité, les marges de gain et la robustesse.

II.5.1 Formulation du problème H_∞

Le système en boucle fermée se présente sous la forme de la figure II.4. On retrouve la référence r , la commande u et la sortie y du système. Les signaux sont également perturbés par des perturbations sur la commande d_u et sur les mesures d_y . Ces perturbations sont généralement considérées comme étant en basses fréquences. La mesure est également bruitée par le signal η qui lui est en haute fréquence. La différence entre la référence et les signaux mesurés est notée ε .

Notons $G(s)$ et $K(s)$ les fonctions de transfert du système et du contrôleur respectivement. D'après la structure de la figure II.4, la commande $u(s)$ et la mesure $y(s)$ s'écrivent :

$$u(s) = (1 + G(s)K(s))^{-1}(K(s)r(s) - K(s)d_y(s) - K(s)\eta(s) + K(s)G(s)d_u(s)) \quad (\text{II.89a})$$

$$y(s) = (1 + G(s)K(s))^{-1}(G(s)K(s)r(s) + d_y(s) - G(s)K(s)\eta(s) + G(s)d_u(s)) \quad (\text{II.89b})$$

On définit alors les fonctions de sensibilité suivantes :

$$\mathcal{S}(s) \triangleq (1 + G(s)K(s))^{-1} \quad (\text{II.90a})$$

$$\mathcal{T}(s) \triangleq 1 - \mathcal{S}(s) = (G(s)K(s)(1 + G(s)K(s))^{-1}) \quad (\text{II.90b})$$

$$\mathcal{KS}(s) \triangleq K(s)(1 + G(s)K(s))^{-1} \quad (\text{II.90c})$$

$$\mathcal{SG}(s) \triangleq (1 + G(s)K(s))^{-1}G(s) \quad (\text{II.90d})$$

Les signaux de commande et de mesure s'écrivent alors :

$$u(s) = \mathcal{KS}(s)r(s) - \mathcal{KS}(s)d_y(s) - \mathcal{KS}(s)\eta(s) - \mathcal{T}(s)d_u(s) \quad (\text{II.91a})$$

$$y(s) = \mathcal{T}(s)r(s) + \mathcal{S}(s)d_y(s) - \mathcal{T}(s)\eta(s) + \mathcal{T}(s)\mathcal{G}(s)d_u(s) \quad (\text{II.91b})$$

Les quatre fonctions de sensibilité représentent alors les transferts :

$$\mathcal{T}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = -\frac{y(s)}{\eta(s)} = \frac{u(s)}{d_u(s)} \quad (\text{II.92a})$$

$$\mathcal{S}(s) = \frac{y(s)}{d_y(s)} = 1 - \mathcal{T}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} \quad (\text{II.92b})$$

$$\mathcal{KS}(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = -\frac{u(s)}{d_y(s)} = -\frac{u(s)}{\eta(s)} \quad (\text{II.92c})$$

$$\mathcal{SG}(s) = \frac{y(s)}{d_u(s)} \quad (\text{II.92d})$$

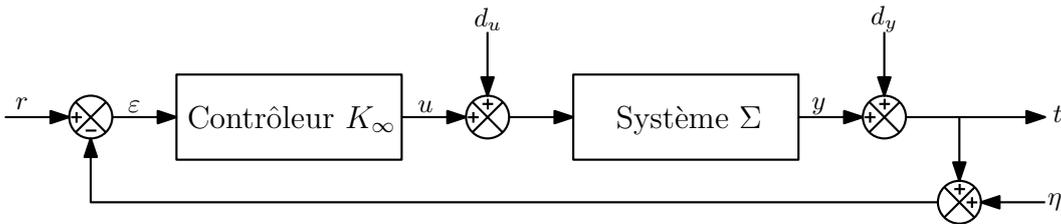


FIGURE II.4 – Schéma bloc du système en boucle fermée

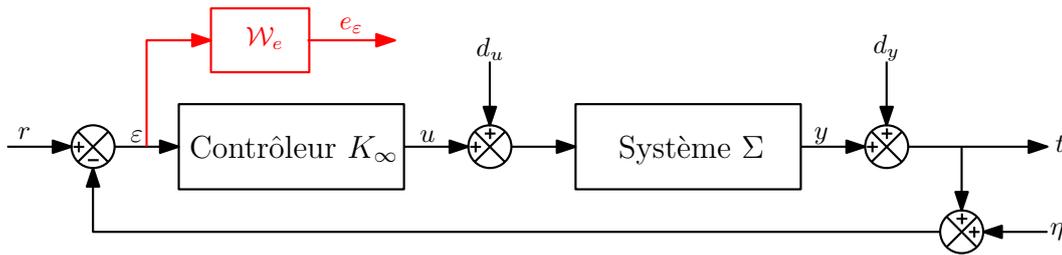


FIGURE II.5 – Schéma bloc du système en boucle fermée avec filtre de pondération sur l'erreur

L'objectif de la synthèse H_∞ est de pouvoir spécifier à chaque fonction de sensibilité (II.90) une forme fréquentielle garantissant des performances.

Soit l'exemple suivant : on souhaite contrôler un système avec un bon suivi de référence. Il s'en suit que la fonction de sensibilité $\mathcal{S}(s)$ doit être très faible en basse fréquence.

Afin de satisfaire cette spécification, on impose au système illustré dans la figure II.4 la spécification fréquentielle via le filtre \mathcal{W}_e :

L'erreur de poursuite e_ε est alors notre variable d'intérêt. L'objectif de la procédure est de garantir que la forme fréquentielle de $\mathcal{S}(s)$ sera bien en dessous de la spécification $\mathcal{W}_e(s)$. Ceci se traduit par l'inégalité :

$$|\mathcal{S}(s)| \leq \left| \frac{1}{\mathcal{W}_e(s)} \right| \quad \forall s \quad (\text{II.93})$$

qui est équivalente à :

$$\|\mathcal{W}_e(s)\mathcal{S}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (\text{II.94})$$

Pour une synthèse plus générale, on ajoute également d'autres filtres comme illustré dans la figure II.6. Ces filtres sont inclus dans les fonctions de sensibilité. On obtient alors le problème suivant :

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathcal{W}_e(s)\mathcal{S}(s) & \mathcal{W}_T(s)\mathcal{T}(s) \\ \mathcal{W}_u(s)\mathcal{K}\mathcal{S}(s) & \mathcal{W}_{SG}(s)\mathcal{S}\mathcal{G}(s) \end{array} \right\|_\infty \leq 1 \quad (\text{II.95})$$

Cependant, pour les problèmes de commande, seules les sensibilités $\mathcal{S}(s)$ et $\mathcal{K}\mathcal{S}(s)$ sont étudiées car elles permettent de définir les performances en boucle fermée et de limiter l'action

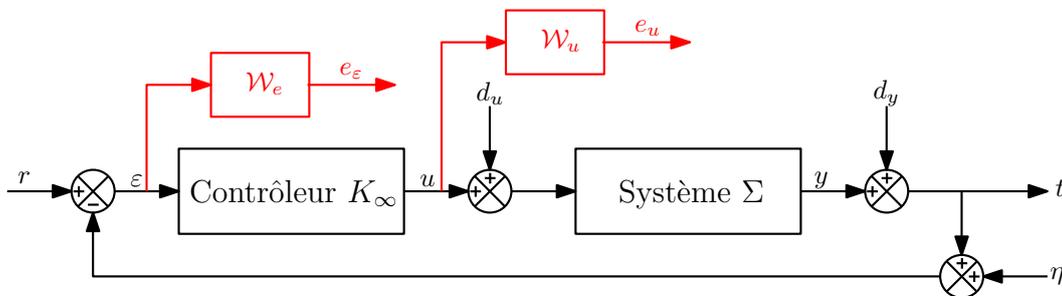


FIGURE II.6 – Schéma bloc du système en boucle fermée avec filtres de pondération sur l'erreur et la commande

du contrôleur u . On obtient le problème de sensibilité suivant, illustré en (II.6) :

$$\left\| \begin{array}{c} \mathcal{W}_e(s)\mathcal{S}(s) \\ \mathcal{W}_u(s)\mathcal{K}\mathcal{S}(s) \end{array} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (\text{II.96})$$

II.5.2 Le problème H_{∞} standard

Le problème H_{∞} standard représenté par la figure II.7 est formulé comme suit : La matrice de transfert $P(s)$ modélise les interactions dynamiques entre deux ensembles d'entrées et deux ensembles de sorties : le vecteur w représente des entrées extérieures ou exogènes, telles que les signaux de référence, perturbation, bruit, le vecteur u représente les commandes, les signaux e sont choisis pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement, enfin y représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

Le schéma de la figure II.4 peut être transformé alors en celui de la figure II.7 en prenant : $w^T = [r \quad d_u^T \quad d_y^T]^T$, $z^T = [\varepsilon \quad u^T]^T$, $y_s = \varepsilon$ et $u_s = u$.

Ce système sous forme standard peut être ensuite augmenté/étendu avec les spécifications fréquentielles, via l'agrégation de filtres \mathcal{W}_I et \mathcal{W}_O comme illustré en (II.8).

Les filtres \mathcal{W}_I et \mathcal{W}_O permettent de spécifier les objectifs fréquentiels du système en boucle fermée. En lien avec l'exemple précédent, ces filtres sont définis par $\mathcal{W}_I = I$ et $\mathcal{W}_O = \text{diag}(\mathcal{W}_e, \mathcal{W}_u)$.

Le système généralisé P (ou P') s'écrit alors sous la forme d'une représentation d'état :

$$P(s) := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{wz} w(t) + D_{uz} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{wy} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (\text{II.97})$$

Le correcteur K est quand à lui représenté par la réalisation suivante :

$$K(s) := \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y_s(t) \\ u_s(t) = C_K x_K(t) + D_K y_s(t) \end{cases} \quad (\text{II.98})$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $u_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $y_s \in \mathbb{R}^{n_y}$ et $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}$

La synthèse de contrôleur H_{∞} consiste à minimiser l'effet des entrées exogènes w sur les sorties régulées z . Ceci peut être décrit par la norme H_{∞} qui est la borne supérieure des transferts des sorties sur les entrées $T_{zw}(s)$ dans les différentes zones de fréquence :

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} < \gamma_{\infty} \quad (\text{II.99})$$

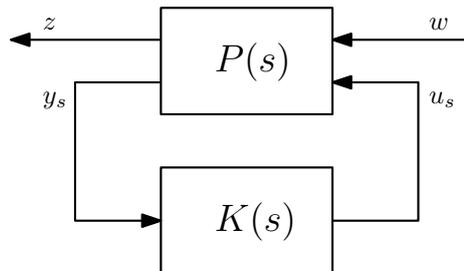
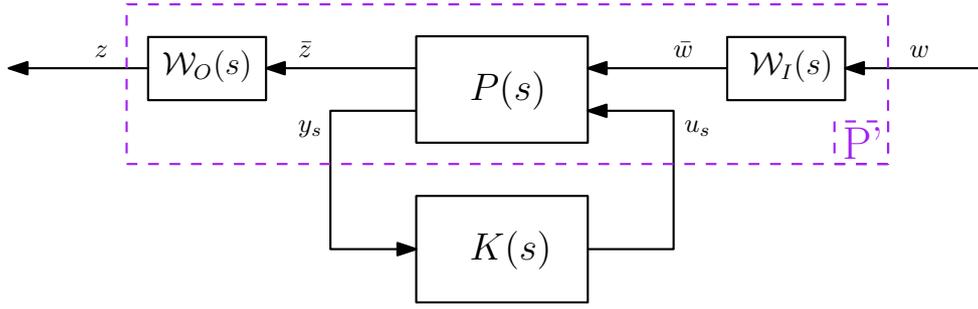


FIGURE II.7 – Problème H_{∞} standard

FIGURE II.8 – Problème H_∞ standard étendu

Le transfert $T_{zw}(s)$ est souvent noté $\mathcal{L}_l(P(s), K(s))$, la transformation fractionnaire linéaire (LFT) inférieure. L'interconnexion $P(s), K(s)$ est elle notée $\mathcal{F}(P(s), K(s))$

Le problème H_∞ est transformé en un problème d'optimisation par la recherche d'un contrôleur K , tel que le système en boucle fermée soit stable, tout en minimisant γ_∞ .

II.5.3 Solution du problème H_∞ standard

Le problème H_∞ standard peut être résolu par la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI) ou par la résolution des et/ou égalités de Riccati (ARE). Dans la suite seul le cadre LMI est utilisé.

Théorème II.12 (Synthèse H_∞)

Soit le problème standard avec la réalisation $\mathcal{F}(P(s), K(s))$. Sous les hypothèses :

1. La paire (A, B_u) est stabilisable,
2. La paire (A, C_y) est détectable,
3. La sortie y_s est indépendante de u_s , i.e. $D_{y_u} = 0$,

le contrôleur dont la réalisation est celle dans (II.98) assure :

- la stabilité quadratique du système en boucle fermée
- la norme \mathcal{L}_2 induite entre w et z est bornée par γ , i.e. $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$

S'il existe un réel $\gamma > 0$ et une matrice symétrique définie positive P_{cl} de taille $(n + n_K) \times (n + n_K)$, tels que les inégalités matricielles suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} P_{cl}A_{cl} + A_{cl}^T P_{cl} & B_{cl}^T P_{cl} & C_{cl}^T \\ \star & -\gamma I & D_{cl}^T \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.100a})$$

$$P_{cl} > 0 \quad (\text{II.100b})$$

où

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix},$$

$$C_{cl} = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K \end{bmatrix} \text{ et } D_{cl} = \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw} \end{bmatrix}.$$

alors la condition de stabilité et de norme induite sont satisfaites

Démonstration : La réalisation $\mathcal{F}(P(s), K(s))$ (l'état de P augmenté de l'état de K) peut être écrite :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_K(t) \\ z(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B_w & B_u \\ B_K C_y & A_K & B_K D_{yw} & 0 \\ \hline C_z & 0 & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & 0 & D_{yw} & D_{yu} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \\ w(t) \\ u_s(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

Sous l'hypothèse 3, le transfert entre w et z est représenté par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_K(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A + B_u D_K C_y & B_u C_K & B_w + B_u D_K D_{yw} & \\ B_K C_y & A_K & B_K D_{yw} & \\ \hline C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K & D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw} & \end{array} \right] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.103})$$

qui est noté :

$$\mathcal{L}_l(P(s), K(s)) = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] \quad (\text{II.104})$$

En appliquant le lemme borné réel sur la réalisation (II.104), les inégalités (II.100) sont déduites directement (en utilisant la formulation (II.36b)). $\square \blacksquare$

Les inégalités matricielles présentées dans le théorème (II.12) ne sont pas linéaires, mais bilinéaires (BMI). Ceci est dû aux termes inconnus P_{cl} et A_K, B_K, C_K et D_K qui sont multipliés. Une simplification en LMI est nécessaire. Deux propositions pour résoudre le problème H_∞ sont utilisées, celle de Scherer par transformation de congruence et changement de variables, et la méthode de Gahinet en utilisant le lemme d'élimination. La première est étendue pour les système LPV, et la deuxième est utilisée pour les systèmes à commutation. Elles sont rappelées dans les deux théorèmes suivants :

Théorème II.13 (Synthèse H_∞ par transformation de congruence [Scherer 1997])

Sous les mêmes hypothèses du théorème II.12, la BMI (II.100) est faisable s'il existe $\gamma > 0$ et les matrices $X, Y, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ et \tilde{D} satisfaisants les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11} & \star & \star & \star \\ \mathbb{M}_{21} & \mathbb{M}_{22} & \star & \star \\ \mathbb{M}_{31} & \mathbb{M}_{32} & \mathbb{M}_{33} & \star \\ \mathbb{M}_{41} & \mathbb{M}_{42} & \mathbb{M}_{43} & \mathbb{M}_{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.105a})$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.105b})$$

avec

$$\mathbb{M}_{11} = AR + RA^T + B_u \tilde{C} + \tilde{C}^T B_u^T \quad (\text{II.106a})$$

$$\mathbb{M}_{21} = \tilde{A} + A^T + C_y \tilde{D}^T B_u^T \quad (\text{II.106b})$$

$$\mathbb{M}_{32} = B_w^T S + D_{yw}^T \tilde{B}^T \quad (\text{II.106c})$$

$$\mathbb{M}_{33} = -\gamma I_{n_u}, \quad \mathbb{M}_{44} = -\gamma I_{n_y} \quad (\text{II.106d})$$

$$\mathbb{M}_{41} = C_z R + D_{zu} \tilde{C} \quad (\text{II.106e})$$

$$\mathbb{M}_{42} = C_z + D_{zu}\tilde{D}C_y \quad (\text{II.106f})$$

$$\mathbb{M}_{43} = D_{zw} + D_{zu}\tilde{D}D_{yw} \quad (\text{II.106g})$$

Finalemment, le contrôleur K est reconstruit de la manière suivante :

$$D_K = \tilde{D} \quad (\text{II.107a})$$

$$C_K = (\tilde{C} - D_K C_y R) M^{-1} \quad (\text{II.107b})$$

$$B_K = N^{-1}(\tilde{B} - S B_u D_K) \quad (\text{II.107c})$$

$$A_K = N^{-1}(\tilde{A} - S A R - S B_u D_K C_y R - N B_u C_k R - S B_u C_K M^T) M^{-1} \quad (\text{II.107d})$$

où les matrices M et N sont déduites à partir d'une décomposition en valeurs singulières (SVD) à partir de l'équation :

$$M N^T = I - R S \quad (\text{II.107e})$$

Démonstration : La matrice P_{cl} et son inverse sont partitionnées comme :

$$P_{cl} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & U \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad P_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & V \end{bmatrix} \quad (\text{II.108})$$

A partir de la relation $P_{cl} P_{cl}^{-1} = I$ et en utilisant $P_{cl} \begin{bmatrix} R \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ on peut écrire :

$$P_{cl} \Pi_1 = \Pi_2 \quad (\text{II.109})$$

$$\text{où } \Pi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$$

Comme Π_1 est de plein rang ligne, on peut alors appliquer la transformation de congruence en pré- et post multipliant la BMI (II.100a) par $\text{diag}(\Pi_1^T, I, I)$ et sa transposée.

Ensuite on applique le changement de variable suivant :

$$\tilde{D} = D_K \quad (\text{II.110a})$$

$$\tilde{C} = C_K M^T + D_K C_z R \quad (\text{II.110b})$$

$$\tilde{B} = N B_K + S B_w D_K \quad (\text{II.110c})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= N A_K M^T + N B_K C_y R \\ &\quad + S B_u C_K M^T + S(A + B_u D_K C_y) R \end{aligned} \quad (\text{II.110d})$$

On retrouve alors les LMIs énoncées par le théorème. ■

Théorème II.14 (Synthèse H_∞ par lemme d'élimination [Gahinet 1994])

Sous les mêmes hypothèses du théorème II.12, la BMI (II.100) est faisable s'il existe $\gamma > 0$ et les matrices symétriques définies positives R et S satisfaisant les inégalités matricielles

suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_z^T & B_w \\ \star & -\gamma I_{n_z} & D_{zw} \\ \star & \star & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.111a})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA^T & B_w S & C_z^T \\ \star & -\gamma I_{n_w} & D_{zw}^T \\ \star & \star & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.111b})$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.111c})$$

où \mathcal{N}_R et \mathcal{N}_S constituent respectivement une base des noyaux de $\begin{bmatrix} B_u^T & D_{zu}^T \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix}$.

Pour un contrôleur d'ordre réduit ($n_k < n$), la condition suivante est rajoutée :

$$\text{rang}(I - RS) \leq n_k \quad (\text{II.111d})$$

Démonstration : La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation du lemme de projection II.3.

On définit la matrice $\theta = \begin{bmatrix} D_i^K & C_i^K \\ B_i^K & A_i^K \end{bmatrix}$ englobant l'ensemble des paramètres du contrôleur et on décompose les matrices A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} et D_{cl} sous la forme affine suivante :

$$\mathcal{L}_l(P(s), K(s)) = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_0 + \mathcal{B}\theta\mathcal{C} & B_0 + \mathcal{B}\theta\mathcal{D}_{yw} \\ \hline C_0 + \mathcal{D}_{zu}\theta\mathcal{C} & D_0 + \mathcal{D}_{zu}\theta\mathcal{D}_{yw} \end{array} \right] \quad (\text{II.112})$$

où

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_k} \end{bmatrix}; \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_z \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I_{n_k} & 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{II.113a})$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_k} \\ C_y & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D}_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & D_{zu} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{yw} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{bmatrix}; \quad (\text{II.113b})$$

En utilisant la décomposition en (II.112), l'inégalité (II.100a) est équivalente à :

$$\Psi_{P_{cl}} + Q^T \theta^T X_{P_{cl}} + X_{P_{cl}}^T \theta Q < 0 \quad (\text{II.114})$$

avec

$$X_{P_{cl}} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T P_{cl} & 0 & \mathcal{D}_{zu}^T \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D}_{yw} & 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{II.115a})$$

$$\Psi_{P_{cl}} = \begin{bmatrix} P_{cl} A_0 + A_0^T P_{cl} & B_0^T P_{cl} & C_0^T \\ \star & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (\text{II.115b})$$

On note $P = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & 0 & \mathcal{D}_{zu} \end{bmatrix}$, et $X_{P_{cl}} = \begin{bmatrix} P_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} P$. Les bases des noyaux de $X_{P_{cl}}$, P

et Q sont notées \mathcal{W}_X , \mathcal{W}_P et \mathcal{W}_Q avec :

$$\mathcal{W}_X = \begin{bmatrix} P_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{W}_P \quad (\text{II.116})$$

La BMI (II.114) dépendante des inconnues P_{cl} et θ peut alors être transformée en deux inégalités par le lemme de projection II.3 :

$$\mathcal{W}_P^T \Phi_{P_{cl}} \mathcal{W}_P < 0 \quad (\text{II.117a})$$

$$\mathcal{W}_Q^T \Psi_{P_{cl}} \mathcal{W}_Q < 0 \quad (\text{II.117b})$$

avec

$$\Phi_{P_{cl}} = \begin{bmatrix} A_0 P_{cl}^{-1} + A_0^T P_{cl}^{-1} & B_0^T & P_{cl}^{-1} C_0^T \\ \star & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (\text{II.117c})$$

La relation (II.117a) est obtenue en développant $\mathcal{W}_X^T \Psi_{P_{cl}} \mathcal{W}_X < 0$:

$$\mathcal{W}_P^T \begin{bmatrix} P_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \Psi_{P_{cl}} \begin{bmatrix} P_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{W}_P < 0 \quad (\text{II.118})$$

Les inéquations (II.117) ne sont toujours pas des LMI à cause du terme P_{cl}^{-1} . Pour s'en débarrasser on utilise la définition de P_{cl}^{-1} et son inverse (II.108), et on réécrit (II.117) avec les paramètres du système :

$$\mathcal{W}_P^T \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & V \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_w \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R & M^T \\ M & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_z^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} B_w^T & 0 \end{pmatrix} & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \hline \begin{pmatrix} C_z \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & V \end{pmatrix} & D_{zw} & -\gamma I \end{array} \right] \mathcal{W}_P < 0 \quad (\text{II.119a})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_P^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & AM & B_w & RC_z^T \\ M^T A & 0 & 0 & MC_z^T \\ B_w^T & 0 & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z R & C_z M & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \mathcal{W}_P < 0 \quad (\text{II.119b})$$

D'après :

$$P = [\mathcal{B} \quad 0 \quad \mathcal{D}_{zu}] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_{n_k} & 0_{n_k \times n_w} \\ B_u^T & 0 & 0_{n_u \times n_w} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ D_{zu}^T \end{array} \right], \quad (\text{II.120})$$

Définissons $\begin{bmatrix} W_1 \\ W_4 \end{bmatrix} = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} B_u^T \\ D_{zu}^T \end{bmatrix} \right)$, alors une base W_P du noyau de P est :

$$W_P \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n_w} \\ W_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.121})$$

En remarquant que la deuxième ligne de W_P est nulle, et en réarrangeant la matrice, la LMI (II.119b) devient :

$$\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_4 & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_z^T & B_w \\ B_w^T & -\gamma I & D_{zw} \\ C_z R & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_4 & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.122})$$

De la même façon, la seconde inégalité (II.117b) est équivalente à :

$$\mathcal{W}_Q^T \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & U \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_w \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_z^T \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \hline \begin{pmatrix} B_w^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & U \end{pmatrix} & -\gamma I & D_{zw}^T \\ \hline (C_z \ 0) & D_{zw} & -\gamma I \end{array} \right] \mathcal{W}_Q < 0 \quad (\text{II.123a})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{W}_Q^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & A^T N & SB_w & C_z^T \\ N^T A & 0 & N^T B_w & 0 \\ B_w^T S & B_w^T N & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z & 0 & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \mathcal{W}_Q < 0 \quad (\text{II.123b})$$

De même, d'après :

$$Q = [\mathcal{C} \quad \mathcal{D}_{yw} \quad 0] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_{n_k} & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0_{n_k \times n_z} \\ 0_{n_y \times n_z} \end{array} \right] \quad (\text{II.124})$$

on définit $\begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \text{Ker} \left(\begin{bmatrix} C_y \\ D_{yw} \end{bmatrix} \right)$, et W_Q une base du noyau de Q :

$$W_Q = \begin{bmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline W_3 & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.125})$$

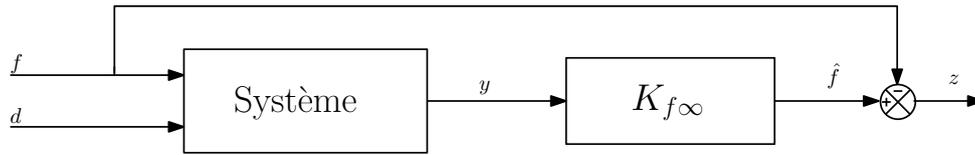
Là encore on observe que la seconde ligne de (II.125) est nulle, si bien que la condition (II.123b) est réduite à l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} W_2 & 0 \\ W_3 & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_z^T \\ B_w^T S & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2 & 0 \\ W_3 & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.126})$$

Avec la notation $\mathcal{N}_R = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_4 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{N}_S = \begin{bmatrix} W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$, on retrouve les LMIs (II.122) et (II.126).

Enfin, la définition de P_{cl} et son inverse représentée par une égalité matricielle, est transformée en une LMI sous contrainte de rang par le lemme de complétion. On obtient directement les conditions (II.111c) et (II.111d).

Ceci complète la démonstration du théorème. ■

FIGURE II.9 – Filtre dynamique H_∞ pour l'estimation de défaut**Remarque II.2**

Dans le cas de la synthèse d'un correcteur d'ordre plein, e.g. $n_k = n$, la contrainte de rang est toujours satisfaite (II.111d), le problème d'optimisation sera un problème totalement linéaire par LMI. Cependant, pour la synthèse d'un contrôleur d'ordre réduit, la contrainte de rang ne peut être omise de la formulation. Il existe des méthodes de linéarisation de telle contrainte de rang telle que l'algorithme de linéarisation conique (CPP pour cone complementarity linearization algorithm) [Ghaoui 1997], méthode de Newton (LMIRank) [Orsi 2006] ou méthode de pondération itérative (PFM pour iterative penalty function method) [Kim 2007]. Les LMIs sous contrainte de rang sont incluses dans les outils d'optimisation numérique comme YALMIP, avec par exemple la fonction LMIRank.

Dans ce mémoire on s'intéresse uniquement à la synthèse de filtre d'ordre plein.

Une fois le problème d'optimisation formulé par les LMIs du théorème II.14 (ou II.13) résolu, on reconstruit le contrôleur K en suivant cet algorithme :

1. A partir des matrices R et S , on déduit M et N par une décomposition SVD de la matrice $I - RS$, et une factorisation de Cholesky ;
2. Une fois ces matrices calculées, on peut retrouver U par la relation : $U = N^T R M^+$, où M^+ est la (Moore-Penrose) pseudo-inverse de M ;
3. Construire P_{cl} selon sa définition II.108
4. Résoudre la LMI (II.100a) dont les variables linéaires sont bien les matrices de la réalisation K

II.5.4 Détection de défaut par synthèse H_∞

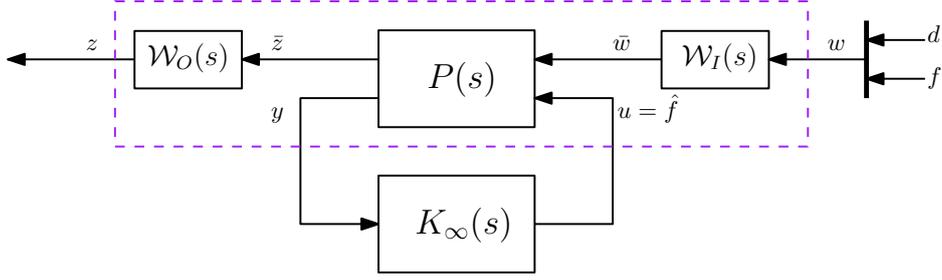
Il est possible d'écrire la synthèse d'un filtre pour l'estimation de défaut sous une forme H_∞ standard. L'intérêt de cette formulation est d'utiliser les méthodes de résolution présentées dans la section précédente.

On rappelle la définition générale d'un système LTI sujet à des défauts et des perturbations (II.66) :

$$\dot{x} = Ax + E_d d + E_f f \quad (\text{II.127a})$$

$$y = Cx + F_d d + F_f f \quad (\text{II.127b})$$

On considère le problème de détection de défaut suivant : synthétiser un filtre de sortie dynamique $K_{f\infty}(s)$ représenté par la figure II.9 tel que le transfert entre l'erreur d'estimation définie par $z = \hat{f} - f$ es les entrées exogènes $w^T = \begin{bmatrix} d^T & f^T \end{bmatrix}$ tends vers 0. Cette formulation permet d'une part d'estimer le défaut et d'autre part minimiser l'effet des perturbations d .

FIGURE II.10 – Filtre d'estimation de défaut : Mise sous forme H_∞ standard

On pose la réalisation du filtre $K_{f\infty}(s)$ suivante :

$$\dot{x}^F = A^F x^F + B^F y \quad (\text{II.128a})$$

$$\hat{f} = C^F x^F + D^F y \quad (\text{II.128b})$$

Le système peut alors être réécrit sous la forme d'un problème H_∞ standard, en considérant $z = \hat{f} - f$ comme seule sortie à réguler ; le vecteur des entrées exogènes regroupe $w = \begin{bmatrix} d^T & f^T \end{bmatrix}^T$, et pour le filtre : $y_s = y$ et $u = \hat{f}$.

On se retrouve alors avec la réalisation standard :

$$P(s) := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{wz} w(t) + D_{uz} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (\text{II.129a})$$

où

$$A = A, \quad B_w = \begin{bmatrix} B & E_d & E_f \end{bmatrix}, \quad B_u = 0 \quad (\text{II.129b})$$

$$C_z = 0, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.129c})$$

$$C_y = C, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} B & F_d & F_f \end{bmatrix}, \quad D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.129d})$$

Comme $D_{yu} = 0$, le problème H_∞ -standard peut être résolu en utilisant les théorèmes présentés précédemment, avec bien sûr, l'intégration des filtres de pondération \mathcal{W}_I et \mathcal{W}_O pour modéliser les zones fréquentielles souhaitées et limiter le conservatisme induit par la norme H_∞ .

II.6 Systèmes à commutation

De nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par des systèmes hybrides (systèmes mécaniques, procédés chimiques, automates industriels, systèmes de contrôle et de gestion du trafic). Un système hybride se compose de plusieurs modes de comportement. Dans chaque mode, le système dispose d'une dynamique différente. La transition entre les différents modes peut dépendre de l'état, du temps, d'une entrée ou de certains événements externes ou une combinaison de ces conditions.

Les systèmes à commutation représentent une classe des systèmes hybrides, décrits par une structure simple mais dont l'analyse s'avère assez complexe.

Dans cette section, on présentera l'analyse de stabilité pour les systèmes linéaires autonomes commutés.

II.6.1 Représentation des systèmes à commutation

Un système à commutation est un ensemble fini de sous-systèmes associé à une loi (ou signal) de commutation qui indique à chaque instant le système actif.

Définition II.20 (*Loi de commutation*)

La loi de commutation est une fonction constante par morceaux, qui prend des valeurs dans un ensemble fini d'indices noté \mathcal{I} .

Cette loi souvent appelée signal de commutation $\alpha(t)$, est définie par :

$$\alpha(t) : t \in \mathbb{R}^+ (\text{ou } \mathbb{Z}^+) \mapsto \mathcal{I} := \{1, 2, \dots, N\} \quad (\text{II.130})$$

Définition II.21 (*Système à commutation*)

Un système dynamique régi par une loi de commutation peut être décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} h \circ x(t) &= f_{\alpha(t)}(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= g_{\alpha(t)}(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (\text{II.131})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^l$ sont les vecteurs d'état, des entrées connues et des sorties connues respectivement ; et $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ et $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^l$, $\forall i \in \mathcal{I}$ sont les champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système.

La notation $h \circ x(\cdot)$ est utilisée pour noter l'opération de dérivée par rapport au temps $h \circ x(t) = \dot{x}(t)$ pour le temps continu, et le terme d'incrément d'un pas de discrétisation $h \circ x(t) = x(t+1)$ dans le cas discret.

Bien évidemment, cette représentation est très générale. Ici, on s'intéresse aux systèmes LTI à commutation. Pour les systèmes linéaires autonomes commutés, (II.131) est équivalente à la représentation d'état :

$$h \circ x(t) = A_{\alpha(t)}x(t) \quad (\text{II.132a})$$

où

$$A_{\alpha(t)} \in \mathcal{A} = A_1, A_2, \dots, A_N \quad (\text{II.132b})$$

II.6.2 Stabilité des systèmes à commutation

L'équation (II.132a) peut être écrite dans le cas continu comme :

$$\dot{x}(t) = A_{\alpha(t)}x(t) \quad (\text{II.133})$$

Théorème II.15 (*Stabilité par fonction de Lyapunov commune*)

| S'il existe une matrice symétrique définie positive $P > 0$, telle que $\forall i \in \mathcal{I}$ les LMI suivantes |

sont satisfaites :

$$P > 0 \quad (\text{II.134a})$$

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (\text{II.134b})$$

alors le système à commutation en temps continu sous forme (II.133) est stable.

Pour le cas discret, les LMIs à satisfaire sont :

$$P > 0 \quad (\text{II.135a})$$

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (\text{II.135b})$$

Démonstration : En considérant la fonction de Lyapunov commune $V(x) = x^T(t)P x(t)$, telle que $V(t) > 0$ et $\dot{V}(t) < 0$ (ou $V(t+1) - V(t) < 0$ pour le cas discret), le système d'équation du théorème (II.15) est retrouvé. ■

L'existence de fonction de Lyapunov commune est une condition suffisante mais non nécessaire. Elle est très facile à implémenter, mais peut induire un grand conservatisme.

Théorème II.16 (Stabilité par Fonction de Lyapunov Multiple (MLF) [Daafouz 2002])

Soit un système linéaire autonome à commutation en temps discret, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction de Lyapunov poly-quadratique définie par :

$$V(k, x(k), \alpha(k)) = x^T(k) P_{\alpha(k)} x(k) \quad (\text{II.136a})$$

strictement décroissante le long des trajectoires du système (II.132a) $\forall \alpha \in \mathcal{I}$

2. Il existe des matrices $P_i \forall i \in \mathcal{I}$, satisfaisant les LMIs :

$$\begin{bmatrix} P_j & A_i^T P_i \\ \star & P_i \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (\text{II.136b})$$

3. Il existe des matrices symétriques P_i et des matrices $G_i \forall i \in \mathcal{I}$, satisfaisant les LMIs :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ \star & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (\text{II.136c})$$

Démonstration : On considère la fonction de Lyapunov Multiple (MLF) définie par : $V(k, x(k), \alpha(k)) = x^T(k) P_{\alpha(k)} x(k)$. La condition suffisante de stabilité est $\forall \alpha(k) \in \mathcal{I}$:

$$V(k, x(k), \alpha(k)) > 0 \quad (\text{II.137a})$$

$$V(k+1, x(k+1), \alpha(k+1)) - V(k, x(k), \alpha(k)) < 0 \quad (\text{II.137b})$$

où (II.137a) garantit le signe de la MLF et (II.137b) sa décroissance le long des trajectoires.

Cette fonction doit être décroissante $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, en développant :

$$x^T(k+1) P_{\alpha(k+1)} x(k+1) - x^T(k) P_{\alpha(k)} x(k) < 0 \quad (\text{II.137c})$$

on obtient

$$x^T(k) \left(A_{\alpha(k)}^T(k) P_{\alpha(k+1)} A_{\alpha(k)} - P_{\alpha(k)} \right) x(k) < 0 \quad (\text{II.137d})$$

Ceci est vrai $\forall x(k) \in \mathbb{R}^n$ si :

$$A_{\alpha(k)}^T P_{\alpha(k+1)} A_{\alpha(k)} - P_{\alpha(k)} < 0 \quad (\text{II.137e})$$

$$\Leftrightarrow A_{\alpha(k)}^T P_{\alpha(k+1)}^T P_{\alpha(k+1)}^{-1} P_{\alpha(k+1)} A_{\alpha(k)} - P_{\alpha(k)} < 0 \quad (\text{II.137f})$$

où par application du lemme de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} -P_{\alpha(k+1)} & -A_{\alpha(k)}^T P_{\alpha(k+1)}^T \\ \star & -P_{\alpha(k)} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \alpha(k) \in \mathcal{I} \quad (\text{II.137g})$$

Notons $\alpha(k) = i$ pour spécifier que le i^{me} -sous système est activé. En tenant compte des instants de commutation c.à.d $i = \alpha(k) \neq \alpha(k+1) = j$, ainsi (II.137g) devient :

$$\begin{bmatrix} -P_j & -A_i^T P_i \\ \star & -P_i \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (\text{II.137h})$$

L'équivalence entre (2) et (3) se déduit en posant $S_i = P_i^{-1}$ et $S_j = P_j^{-1}$ dans (II.136b) :

$$\begin{bmatrix} -S_j^{-1} & -A_i^T S_i^{-1} \\ \star & -S_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (\text{II.137i})$$

Pré- et post multipliant par $\text{diag}(I, S_i)$ et son transposé, puis en appliquant le lemme de Schur on obtient :

$$S_j - A_i^T S_i A_i = T_{ij} > 0 \quad (\text{II.137j})$$

On pose $G_i = S_i + g_i I$ où g_i est un réel positif. Il existe g_i suffisamment petit tel que :

$$g_i^{-2} (S_i + 2g_i I) > A_i^T T_{ij} A_i \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (\text{II.137k})$$

ce qui est équivalent par complément de Schur à :

$$\begin{bmatrix} S_i + 2g_i I & -g_i A_i^T \\ \star & T_{ij} \end{bmatrix} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (\text{II.137l})$$

Par définition de G_i et T_{ij} l'inégalité (3) est obtenue, ceci termine la démonstration du théorème. ■

II.6.3 Propriétés des systèmes à commutation

L'analyse de stabilité par fonction de MLF, ou fonction de Lyapunov commune (qui est un cas particulier de MLF où $P_i = P \forall i \in \mathcal{I}$) ne donne que des conditions suffisantes de stabilité. Nous rappelons ici quelques propriétés des systèmes à commutations. Pour simplifier, on prend le cas $N = 2$.

Théorème II.17

Considérons une paire de systèmes instables $\{A_1, A_2\}$ ($N = 2$). S'il existe une combinaison

convexe stable, c'est-à-dire s'il existe un $\delta \in [0, 1]$ tel que la matrice

$$A_{eq} = \delta A_1 + (1 - \delta)A_2 \quad (\text{II.138})$$

est de Hurwitz, alors il existe une séquence de commutation telle que le système (II.132a) $\alpha(t) \in \{1, 2\}$ est asymptotiquement stable.

Bien sûr, ce théorème donne uniquement une condition suffisante pour la stabilisation. Soit $A_{eq} = \delta A_1 + (1 - \delta)A_2$, $\delta \in [0, 1]$ la combinaison stable. Dans ce cas, il existe deux matrices P et Q définies positives telles que :

$$\delta(A_1^T P + P A_1) + (1 - \delta)(A_2^T P + P A_2) = -Q \quad (\text{II.139})$$

ou encore

$$\delta x^T (A_1^T P + P A_1)x + (1 - \delta)x^T (A_2^T P + P A_2)x = -x Q x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (\text{II.140})$$

Pour assurer la négativité de cette équation, il faut qu'au moins un des deux termes $x^T (A_1^T P + P A_1)x$ ou $x^T (A_2^T P + P A_2)x$ soit négatif $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Autrement dit, il faut qu'au moins un des deux sous systèmes soit stable au sens de Lyapunov. Ainsi, la fonction candidate $V(x) = x^T P x$ est strictement décroissante dans la région décrite par un des deux sous-systèmes.

On vient de démontrer avec ce théorème que même si un des sous-systèmes est instable, le système global peut être stable, ou stabilisable si on a accès à la loi de commutation. Le théorème (II.17) peut avoir deux extensions :

- Généralisation pour le cas de plusieurs sous-systèmes, où la fonction candidate de Lyapunov doit satisfaire un système d'inégalités dit de Lyapunov-Metzler.
- introduction de la notion temporelle sur le temps passé dans chaque sous système : "temps de séjour".

Définition II.22 (*Matrices de Metzler*)

Une matrice A est dite de Metzler si tous ses éléments non diagonaux sont non négatifs :

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{II.141})$$

Les sous-ensembles des Matrices de Metzler notés \mathcal{M}_c et \mathcal{M}_d sont définis par l'ensemble de matrice de Metzler $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ satisfaisant respectivement les contraintes de normalisation suivantes :

$$\Pi \in \mathcal{M}_c : \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 0 \quad (\text{II.142a})$$

$$\Pi \in \mathcal{M}_d : \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 1 \quad (\text{II.142b})$$

$\forall j = 1, \dots, N$

Cette définition de matrices de Metzler est utilisée dans le théorème suivant sur la stabilité de système à commutation :

Théorème II.18 (*[Geromel 2008]*)

S'il existe un ensemble de matrices $P_i > 0$ et $Q_i > 0 \forall i \in \mathcal{I}$ et des matrices $\Pi_c \in \mathcal{M}_c$ et $\Pi_d \in \mathcal{M}_d$ tel que le système d'inégalités de Lyapunov-Metzler est satisfait :

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{cji} P_j + Q_i < 0 \quad \text{cas continu} \quad (\text{II.143})$$

$$A_i^T \left(\sum_{j=1}^N \pi_{dji} P_j \right) A_i - P_j + Q_i < 0 \quad \text{cas discret} \quad (\text{II.144})$$

alors le système linéaire commuté autonome (II.132a) est asymptotiquement stable.

Bien que ce théorème est plus général que l'utilisation de MLF, son principal inconvénient est qu'il n'est pas sous forme de LMIs.

Théorème II.19 (*Temps de séjour minimal [Zhang 1993]*)

Soit le système linéaire autonome à commutation en temps discret sous forme (II.132a).

Si pour un temps de séjour τ_D , $\tau_D \in \mathbb{N}$ il existe un ensemble de matrices $P_i > 0 \forall i \in \mathcal{I}$ tel

$$A_i^T P_i A_i - P_i < 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (\text{II.145})$$

$$(A_i^{\tau_D})^T P_j A_i^{\tau_D} - P_i < 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}, \quad i \neq j \quad (\text{II.146})$$

alors le système est asymptotiquement stable pour un temps minimum de séjour supérieur à τ_D .

Ce théorème introduit des propriétés temporelles sur le système. Dans le cas $\tau_D = 1$, on se retrouve dans le cas du théorème (II.16). Son utilité est importante quand des contraintes temporelles sur la loi de commutation sont présentes et connues d'avance.

Une extension pour ce théorème est donnée par [Hespanha 1999] avec le concept de temps moyen de séjour, τ_{moy} . L'idée est que le système est stable si en moyenne on commute plus lentement que τ_{moy} . Cela permet de tolérer de temps en temps des commutations plus rapides que le temps de séjour moyen τ_{moy} . L'approche a été généralisée pour le cas où tous les sous-systèmes ne sont pas asymptotiquement stables [Yedavalli 2001] :

Lemme II.6 (*Temps de séjour moyen [Hespanha 1999]*)

Notons $N_\alpha(T, t)$ le nombre de commutation entres les sous-systèmes sur l'intervalle $[t, T]$.

Le signal de commutation $\alpha(t)$ a un temps moyen de séjour s'il existe deux nombres réels positifs N_0 et τ_{moy} tels que :

$$N_\alpha(T, t) \leq N_0 + \frac{T - t}{\tau_{moy}} \quad (\text{II.147})$$

où N_0 est appelé la borne de séparation.

En conclusion, les notions de temps minimum de séjour et temps moyen de séjour sont très importantes lors de la synthèse de loi de stabilisation de ce type de système. Toutefois, elles

sont moins pertinentes pour une analyse de stabilité et de synthèse dans le cas de commutations arbitraires non contrôlées. Leur utilité s'avère lors de placement de pôles dans des régions LMI, en rajoutant une contrainte temporelle liée à τ_D ou τ_{moy} , au prix de les coupler à des hypothèses pour que le système respecte ces valeurs.

Dans la suite de l'ouvrage, on considère les résultats du théorème (II.16) pour l'analyse de stabilité des observateurs et filtres. Dans la plupart des travaux, le cas discret sera considéré.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les définitions des systèmes dynamiques et systèmes LTI sont présentées. Ensuite, quelques propriétés et outils d'analyse de ces systèmes sont rappelés. Les méthodes de synthèse d'observateur identité et d'ordre réduit sont également présentées, avec leur extension pour la synthèse de générateur de résidu à base d'observateur, par approche H_-/H_∞ .

De plus, la synthèse de contrôleur H_∞ par approche standard est aussi présentée, avec les méthodes existantes pour la résolution. Le problème H_∞ est aussi utilisé pour la détection de défaut par une certaine formulation.

Enfin, quelques notions sur les systèmes LTI à commutation sont introduites, notamment l'analyse de stabilité et quelques propriétés. Cette classe de systèmes sera principalement utilisée pour modéliser les non-linéarités.

Par la suite, une extension des méthodes présentées dans ce chapitre pour la classe de systèmes à commutation sera l'axe principal du développement théorique, avec pour application la dynamique du véhicule qui sera étudiée dans le chapitre suivant.

Modélisation de la dynamique de véhicule et validations expérimentales

Sommaire

III.1 Introduction	52
III.2 Modélisation longitudinale	52
III.2.1 Dynamique longitudinale du véhicule	52
III.2.2 Dynamique de la roue	54
III.2.3 Modèle longitudinal global	55
III.2.4 Capteurs pour la dynamique longitudinale	56
III.3 Modélisation latérale	56
III.3.1 Modèle cinématique	56
III.3.2 Modèle dynamique	57
III.3.3 Capteurs pour la dynamique latérale	59
III.4 Modélisation verticale	59
III.4.1 Le modèle quart de véhicule	59
III.4.2 Modélisation des suspensions	61
III.4.3 Modèle vertical global du châssis	66
III.4.4 Capteurs pour la dynamique verticale	67
III.5 Modèle global du châssis	68
III.6 Validation du modèle dynamique	70
III.6.1 Validation expérimentale	71
III.6.2 Conclusion de validation	74
III.6.3 Campagne de tests INOVE 2014	74
III.7 Conclusion	77

... Je demandai à Fermi s'il n'a pas été impressionné par l'accord entre les résultats de simulations de notre modèle et ses mesures. Il répondit : "Combien de paramètres arbitraires avez-vous utilisé pour votre modèle ?" J'ai compté dans ma tête et dit : "Quatre". Il a dit : «Je me souviens que mon ami Johnny von Neumann disait, avec quatre paramètres je peux interpoler un éléphant; avec cinq, je peux lui faire tortiller sa trompe.»

– Freeman Dyson en décrivant les prédictions de son modèle pour la diffusion meson-proton à Enrico Fermi en 1953.

III.1 Introduction

Un modèle représente la dynamique d'un système, et permet d'analyser et simuler son évolution. Le modèle choisi dépend à la fois des niveaux de fidélité en fonction des phénomènes d'intérêt et de la complexité de la représentation.

Dans ce chapitre, nous présenterons un modèle du véhicule pour décrire ses dynamiques longitudinales (section III.2), latérales (section III.3) et verticales (section III.4), en prenant en compte certaines hypothèses pour la simplification. Il sera ensuite validé par des données expérimentales, et servira de base pour l'application des méthodes de détection de défaut présentés dans le manuscrit.

Il est à noter que la plupart de ces équations ont été retrouvées, sous formes simplifiées ou étendues, dans [Rajmani 2006]. Elle sont aussi reprises dans des travaux précédents sur les différents aspects de contrôle et diagnostic véhicule au sein du laboratoire GIPSA-Lab au cours des dernières années [Poussot-Vassal 2008b, Do 2011, Varrier 2013, Fergani 2014].

Notation 1

Dans ce chapitre, la notation suivante est utilisée :

*Les indices t , s et us sont respectivement utilisés pour indiquer un vecteur relié à la roue (t : *tire*), la masse suspendue (s : *sprung*) et la masse non suspendue (us : *unsprung*). Les sous-indices $i = \{f, r\}$ et/ou $j = \{l, r\}$ sont utilisés pour identifier respectivement les positions devant (f : *front*), arrière (r : *rear*), gauche (l : *left*) et droite (r : *right*) du véhicule.*

*On notera aussi par (X, Y, Z) le référentiel galiléen, et (x, y, z) le référentiel non galiléen propre au véhicule, dont l'origine est son centre de gravité (CoG pour *Center of Gravity*).*

III.2 Modélisation longitudinale

III.2.1 Dynamique longitudinale du véhicule

En considérant un véhicule qui roule sur un plan incliné d'angle θ , la loi de Newton appliquée aux forces de translation selon l'axe longitudinal permet d'écrire :

$$m\ddot{x} = F_{tx_f} + F_{tx_r} - F_{aero} - R_{tx_f} - R_{tx_r} - mg \sin(\theta) \quad (\text{III.1})$$

où

- F_{tx_f} et F_{tx_r} sont les forces longitudinales des efforts des roues avant et arrière ;
- F_{aero} sont les forces longitudinales de traînée aérodynamiques ;
- R_{tx_f} et R_{tx_r} sont les forces de résistance au roulement ;
- m est la masse du véhicule et g l'accélération de pesanteur.

Contrairement aux forces de pesanteur et des traînée aérodynamiques, les forces liées aux pneus ne peuvent être déduites des équations mécaniques. Un modèle est alors nécessaire pour les décrire.

III.2.1.1 Force de traînée aérodynamique

La force de traînée aérodynamique est donnée par la formule :

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_F (\dot{x} + V_{vent})^2 \quad (\text{III.2})$$

où ρ , C_d , A_F , V_x et V_{vent} sont respectivement la densité de l'air, le coefficient de traînée aérodynamique, l'aire frontale du véhicule, la vitesse longitudinale du véhicule et la vitesse du vent. Les coefficients ρ , C_d , A_F étant connus et constants à priori, la force de traînée aérodynamique peut être formulée par :

$$F_{aero} = c_{aero} (\dot{x} + V_{vent})^2 \quad (\text{III.3})$$

III.2.1.2 Force de résistance au roulement

Au contact avec le sol, les roues subissent des déformations. La perte d'énergie lors du retour non élastique à l'état initial avant ces déformations peut être représentée sous forme de force de résistance au roulement agissant au sens opposé du mouvement du véhicule. Elles sont exprimées en fonction des forces normales des roues par :

$$R_{tx_f} + R_{tx_r} = f(F_{zf} + F_{zr}) \quad (\text{III.4a})$$

où f est un coefficient de résistance au roulement.

Les forces normales des roues avant et arrière sont calculées par les formules suivantes :

$$F_{zf} = - \frac{F_{aero} h_{aero} + m\ddot{x}h + mgh \sin(\theta) - mgl_r \cos(\theta)}{l_f + l_r} \quad (\text{III.4b})$$

$$F_{zr} = \frac{F_{aero} h_{aero} + m\ddot{x}h + mgh \sin(\theta) + mgl_f \cos(\theta)}{l_f + l_r} \quad (\text{III.4c})$$

où l_r et l_f sont les distances entre le CoG et les trains arrière et avant respectivement, h est la hauteur du CoG du véhicule et h_{aero} est la hauteur équivalente à laquelle agit la force aérodynamique.

III.2.1.3 Force longitudinale de la roue

Les forces longitudinales des roues F_{tx_f} et F_{tx_r} , ou plus généralement les efforts agissant sur les roues, notés F_t sont les forces indispensables au mouvement du véhicule. Un modèle cinématique est d'abord proposé pour les décrire.

Ces forces peuvent être modélisées comme des forces de frottement. La majorité des modèles de ces efforts sont obtenus à partir de données expérimentales. Les différents résultats montrent que F_t dépend de plusieurs facteurs :

- du coefficient de glissement
- du coefficient de frottement à l'interface roue-sol
- et de la charge normale sur la roue

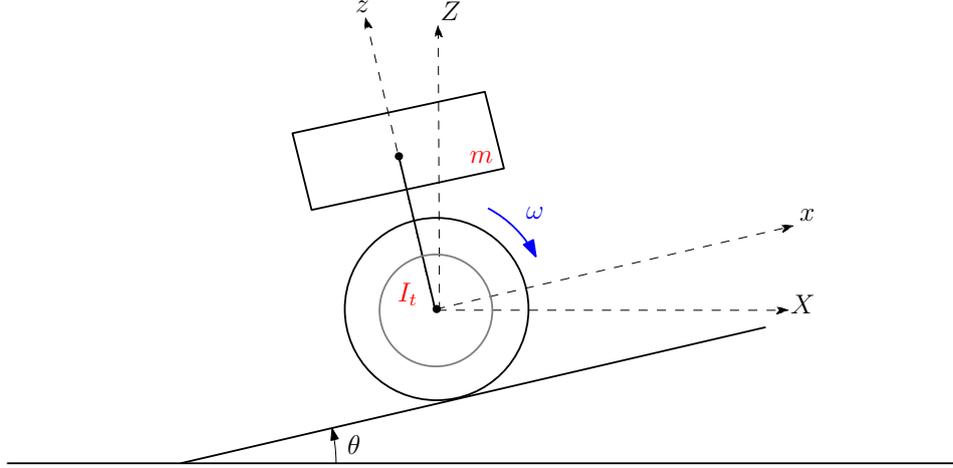


FIGURE III.1 – Modèle longitudinal global

Le glissement longitudinal correspond à la différence entre la vitesse longitudinale dans l'axe de la roue \dot{x} et la vitesse de rotation équivalente $r_{eff}\omega_i$. Le coefficient de glissement longitudinal est défini par la relation :

$$\beta_{x_i} = \rho_1(r_{eff_i}\omega_i - \dot{x}) \quad (III.5a)$$

où ω_i est la vitesse angulaire de la i^{me} roue et r_{eff_s} est son rayon effectif, qui est différent du rayon statique suite à la déformation de la roue (voir la sous-section précédente (III.2.1.2)). Le terme ρ_1 est introduit pour distinguer les phases de décélération ou d'accélération, et est obtenu comme suit :

$$\frac{1}{\rho_1} = \begin{cases} \dot{x} & , \text{ phase de décélération } (\dot{x} < 0) \\ r_{eff}\omega_i & , \text{ phase d'accélération } (\dot{x} > 0) \end{cases} \quad (III.5b)$$

Plusieurs modèles ont été développés en étudiant les valeurs de l'effort pneumatique en fonction du coefficient de glissement, comme ceux de LuGre, Dahl.

Un modèle fortement non linéaire pour décrire les efforts pneumatiques est donné dans [Pacejka 2012] :

$$F_{tx_{ij}} = D_x \sin [(C_x) \arctan (B_x \beta_{x_{ij}} - E_x (B_x \beta_{x_{ij}} - \arctan(B_x \beta_{x_{ij}})))] \quad (III.6)$$

Or, comme le montre la figure (III.2), les forces longitudinales peuvent être approximées en une fonction linéaire au voisinage des faibles valeurs du coefficient de glissement :

$$F_{tx_i} = c_{xi}\beta_{xi} \quad (III.7)$$

où c_{xi} correspondent aux coefficients de rigidité du pneu.

III.2.2 Dynamique de la roue

En réalité, ces forces longitudinales sont celles qui permettent au véhicule de rouler ou de freiner, en transformant le couple de transmission du moteur ou de freinage en mouvement.

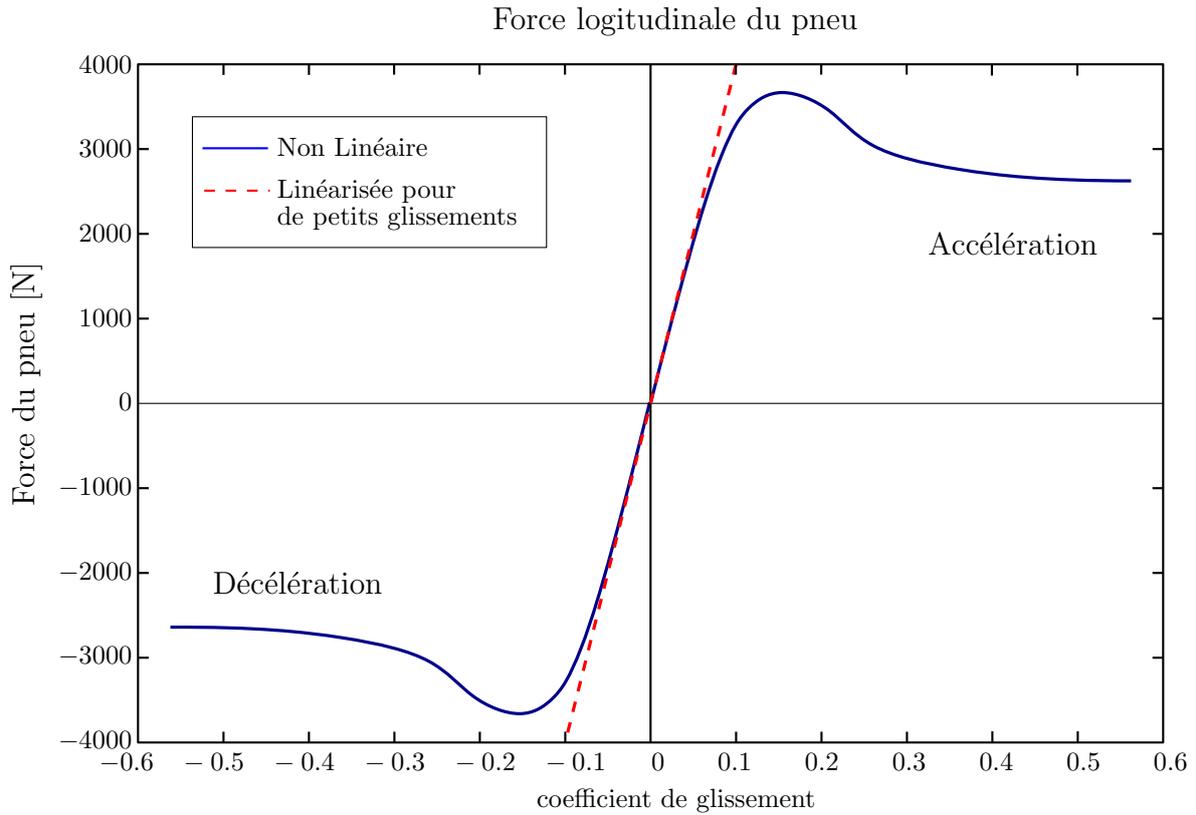


FIGURE III.2 – Effort pneumatique longitudinal en fonction du coefficient de glissement

D'après la loi de Newton, ceci est régi par les équations suivantes :

$$I_{t_f} \dot{\omega}_{t_f} = T_{t_f} - r_{eff_f} F_{x_f} \quad (\text{III.8a})$$

$$I_{t_r} \dot{\omega}_{t_r} = T_{t_r} - r_{eff_r} F_{x_r} \quad (\text{III.8b})$$

où I_t est l'inertie de la roue, T_{t_f} est un couple de transmission de l'engin ou du disque frein, alors que T_{t_r} est uniquement un couple de frein (selon la configuration commune des véhicules actuelles).

III.2.3 Modèle longitudinal global

Le modèle longitudinal global est obtenu en représentant le véhicule par une seule roue équivalente supportant une masse globale m .

En combinant les mouvements agissant sur la dynamique longitudinale du véhicule, on obtient :

$$m\ddot{x} = c_x(r_{eff}\omega - \dot{x})\rho_1 - c_{aero}(\dot{x} + V_{vent})^2 - fmg \cos(\theta) - mg \sin(\theta) \quad (\text{III.9a})$$

$$I_t\dot{\omega} = -r_{eff}c_x(r_{eff}\omega - \dot{x})\rho_1 + T_i \quad (\text{III.9b})$$

En négligeant les termes liés aux résistances de roulement, supposant que le véhicule roule dans un plan horizontale ($\theta = 0$) et que la vitesse de vent est nulle, et introduisant un paramètre

variant $\rho_2 = \dot{x}$, on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_x}{m}\rho_1 - \frac{c_{aero}}{m}\rho_2 & \frac{r_{eff}\beta_x}{m}\rho_1 \\ \frac{r_{eff}\beta_x}{I_t}\rho_1 & -\frac{r_{eff}^2\beta_x}{I_t}\rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_t} \end{bmatrix} T_i \quad (III.10)$$

III.2.4 Capteurs pour la dynamique longitudinale

Parmi les différentes grandeurs liées à la dynamique longitudinale, la vitesse longitudinale est accessible. De même, la vitesse angulaire des roues est facilement obtenue en divisant la vitesse de transmission par un coefficient c_{trans} .

Ainsi, les mesures pour le modèle longitudinal sont données par :

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_{trans}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (III.11)$$

III.3 Modélisation latérale

Pour modéliser la dynamique latérale du véhicule, un modèle bicyclette est utilisé. Dans ce modèle, les deux roues droites et gauches avant sont représentées par une seule roue en point A, et les deux roues arrières sont représentées par une roue au point B. Les distances de A et B au CoG sont notées l_f et l_r respectivement. La distance de A à B est l'empattement $L = l_r + l_f$. L'angle de braquage de la roue notée δ est définie par l'angle entre l'axe longitudinal de la roue et celui du véhicule.

Dans ce modèle, on suppose que le mouvement du véhicule est dans le plan horizontal : ainsi trois coordonnées sont suffisantes pour décrire ce mouvement : X , Y et ψ , où (X, Y) donnent la position du CoG et ψ l'orientation du véhicule. Le vecteur vitesse du CoG est noté $\vec{V} = \vec{X} + \vec{Y}$ et fait un angle β avec l'axe longitudinal du véhicule. Cet angle est appelé l'angle de glissement.

Remarque III.1

Sous l'hypothèse "bicyclette" du modèle, les deux roues droite et gauche sont représentées par une seule roue. Ce n'est pas tout à fait vrai en réalité, car pour un mouvement circulaire donné (virage), les angles de braquage des roues droite et gauche ne sont pas les mêmes $\delta_r \neq \delta_l$, puisque les deux cercles qu'elles décrivent sont de rayons différents. Dans l'industrie automobile, ceci est assuré par une géométrie dite trapézoïdale.

III.3.1 Modèle cinématique

Un modèle cinématique très simple peut être obtenu en supposant que le vecteur de vitesse est dans la même direction de l'axe de la roue frontale. Ce qui est équivalent à dire que l'angle de glissement de chaque roue est égal à zéro. Cette hypothèse est raisonnable pour de faible vitesse (moins de 5 m/s \approx 20 km/h). En effet, la force centrifuge latérale pour un virage de rayon R est :

$$F_l = \frac{mV^2}{R} \quad (III.12)$$

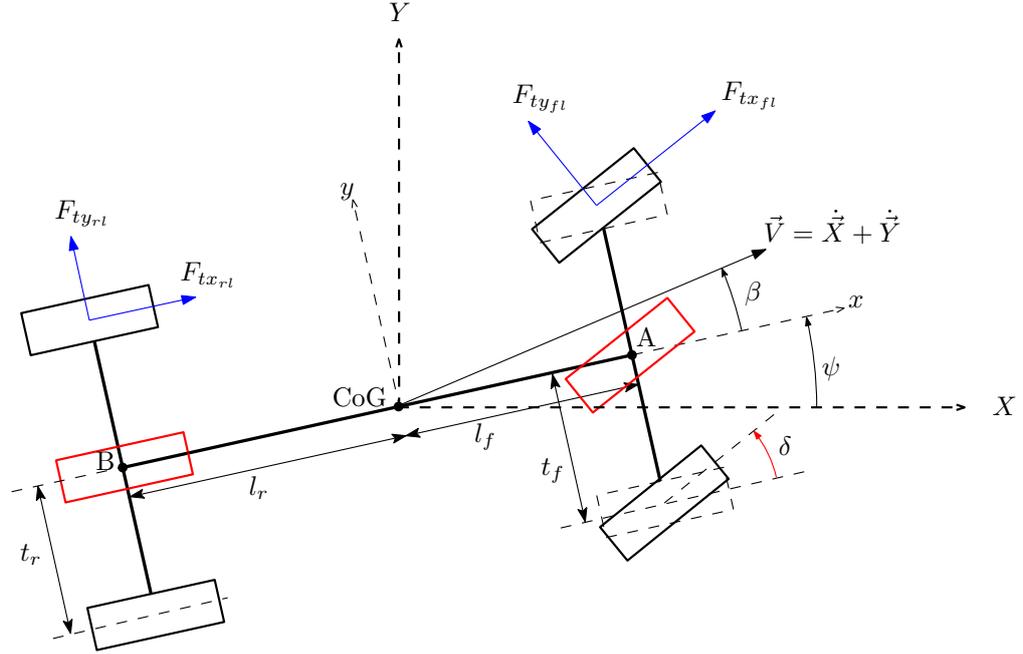


FIGURE III.3 – Modèle bicyclette du véhicule

qui varie quadratiquement en fonction de la vitesse, et peut être considéré négligeable pour les basses vitesses.

Le modèle cinématique peut être déduit en utilisant uniquement les relations géométriques du modèle. On obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = V \cos(\psi + \beta) \\ \dot{Y} = V \sin(\psi + \beta) \\ \dot{\psi} = \frac{V \cos(\beta)}{l_r + l_f} \tan(\delta) \\ \beta = \tan^{-1} \left(\frac{l_f + l_r \tan(\delta)}{l_r + l_f} \right) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Cependant, pour de plus grandes vitesses, ce terme ne peut être négligé. Dans ce cas, un modèle dynamique qui inclut les effets des différentes forces sur le mouvement devient indispensable.

III.3.2 Modèle dynamique

On considère le système dans le référentiel non galiléen qu'est le véhicule. Le modèle bicyclette dynamique est à deux degrés de liberté y et ψ . On notera par v la vitesse selon l'axe longitudinal du véhicule.

La deuxième loi de Newton du mouvement de translation projeté sur l'axe des y est :

$$\begin{aligned} m a_y(t) &= F_{yf} + F_{yr} \\ &= F_{txf} \sin(\delta) + F_{tyf} \cos(\delta) + F_{tyr} + F_{dy} \end{aligned} \quad (\text{III.14a})$$

Dans un mouvement circulaire, les cinématiques latérales sont décrites par :

$$a_y = \ddot{y} + v\dot{\psi} \quad (\text{III.14b})$$

$$\ddot{y} = v\dot{\beta} \quad (\text{III.14c})$$

En supposant que les efforts gauche/droite des trains avant et arrière sont égaux, la deuxième loi de Newton du mouvement de rotation est :

$$\begin{aligned} I_z\ddot{\psi} &= l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \\ &= l_f (F_{txf} \sin(\delta) + F_{tyf} \cos(\delta)) - l_r F_{tyr} + M_{dz} \end{aligned} \quad (\text{III.14d})$$

Pour de petits angles de braquage, on a $\sin(\delta) \cong 0$ et $\cos(\delta) \cong 1$. Les équations (III.14) deviennent :

$$mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = F_{tyf} + F_{tyr} + F_{dy} \quad (\text{III.15a})$$

$$I_z\ddot{\psi} = l_f F_{tyf} - l_r F_{tyr} + M_{dz} \quad (\text{III.15b})$$

Ce modèle simplifié sous plusieurs hypothèses, dépend des efforts non linéaires des pneumatiques F_{tyf} et F_{tyr} . Ces efforts peuvent être décrits pour de faibles angles de glissement β , comme dans le cas des efforts longitudinaux, comme fonctions linéaires de celui ci :

$$F_{tyf} = c_{yf} \beta_{yf} \quad (\text{III.16a})$$

$$F_{tyr} = c_{yr} \beta_{yr} \quad (\text{III.16b})$$

où les coefficients de glissement latéraux sont obtenus par :

$$\beta_{yf} = \delta - \beta + \frac{l_f \dot{\psi}}{v} \quad (\text{III.17a})$$

$$\beta_{yr} = -\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v} \quad (\text{III.17b})$$

En substituant (III.17) dans (III.16) puis dans (III.15), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) &= c_{yf} \left(\delta - \beta + \frac{l_f \dot{\psi}}{v} \right) + c_{yr} \left(-\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v} \right) + F_{dy} \\ I_z\ddot{\psi} &= l_f c_{yf} \left(\delta - \beta + \frac{l_f \dot{\psi}}{v} \right) - l_r c_{yr} \left(-\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v} \right) + M_{dz} \end{cases} \quad (\text{III.18a})$$

En supposant que les forces F_d agissent à une distance l_d du CoG, on peut déduire de (III.18) la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{yr} + c_{yf}}{mv(t)} & \frac{c_{yr} l_r - c_{yf} l_f}{mv^2(t)} - 1 \\ \frac{c_{yr} l_r - c_{yf} l_f}{I_z} & -\frac{c_{yr} l_r^2 + c_{yf} l_f^2}{I_z v(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_{yf}}{mv} \\ \frac{c_{yr} l_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ \frac{l_d}{I_z} \end{bmatrix} F_d(t) \quad (\text{III.19})$$

III.3.3 Capteurs pour la dynamique latérale

Un gyromètre donne la vitesse de lacet, et un accéléromètre celle de l'accélération latérale a_y .

L'accélération latérale est obtenue par la relation (III.14b), soit :

$$a_y = v(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = v \left(\left(-\frac{c_{yr} + c_{yf}}{mv} \right) \beta + \left(\frac{c_{yr}l_r - c_{yf}l_f}{mv^2} - 1 \right) \dot{\psi} + \frac{c_{yf}}{mv} \delta \right) + v\dot{\psi} \quad (\text{III.20})$$

Ainsi, les mesures pour le modèle latéral sont données par :

$$y = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_{yr} + c_{yf}}{m} & \frac{c_{yr}l_r - c_{yf}l_f}{mv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_{yf}}{mv} \end{bmatrix} \delta \quad (\text{III.21})$$

III.4 Modélisation verticale

Le modèle vertical permet d'étudier la dynamique verticale du véhicule selon les caractéristiques des suspensions (actives ou passives). Avant de développer un modèle vertical global, on fait l'étude sur un seul des quatre coins de liaison châssis-amortisseur-roue-sol : c'est le quart de véhicule (QoV pour *quarter of vehicle*).

Il est à noter que dans le modèle développé, les effets de cambrage des roues et leurs aérodynamiques sont négligés.

III.4.1 Le modèle quart de véhicule

Le modèle QoV modélise un seul système de suspension. Ce système est composé de deux masses :

- La masse suspendue m_s qui représente la masse du quart du châssis, son centre d'inertie est à une altitude z_s ,
- La masse non-suspendue m_{us} qui représente la masse de la roue, située à une altitude z_{us} .

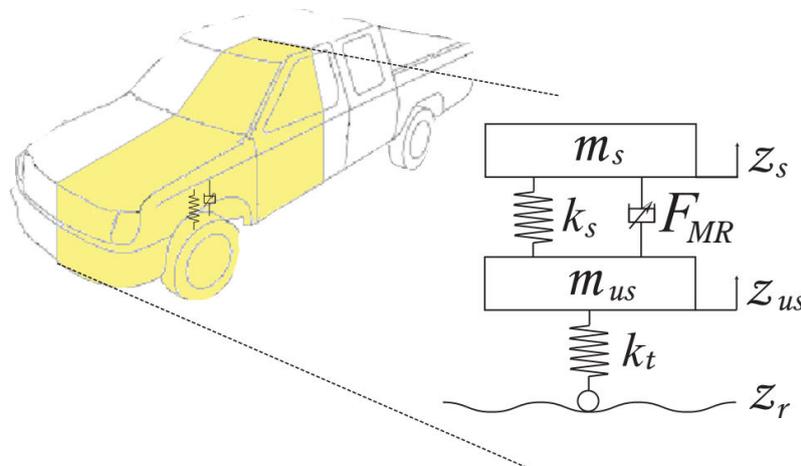


FIGURE III.4 – Le Quart de Véhicule, avec une suspension semi active

Le QoV est sujet à des perturbations dues au profil de route. Notées z_r , elles agissent sur les roues modélisées par un ressort de constante de raideur k_t et d'amortissement c_t . La roue transmet cette excitation au châssis par l'intermédiaire de la suspension, qui peut être modélisée par un ressort de constante de raideur k_s et d'un amortisseur.

D'après la deuxième loi de Newton, les équations générales pour décrire la dynamique verticale du QoV donnent :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s &= -(F_{sz} + F_{dz}) \\ m_{us} \ddot{z}_{us} &= F_{sz} - F_{tz} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

où :

- F_{dz} est la force exercée par le transfert de charge avant/arrière ou droite/gauche, ainsi que le poids de la masse suspendue ;
- F_{tz} est la force exercée par la roue et est considérée linéaire :

$$F_{tz} = k_t(z_{us} - z_r) + c_t(\dot{z}_{us} - \dot{z}_r) \quad (\text{III.23})$$

- F_{sz} est la force exercée par la suspension :

$$F_{sz} = F_k(\cdot) + F_d(\cdot) \quad (\text{III.24})$$

où $F_k(\cdot)$ est la force du ressort et $F_d(\cdot)$ est l'effort de l'amortisseur.

- La force $F_k(\cdot)$ est une fonction non linéaire de la déflexion (ou débattement) de la suspension $z_{def} = z_s - z_{us}$ mais est souvent simplifiée en une fonction linéaire :

$$F_k = k_s z_{def} \quad (\text{III.25})$$

avec k_s la constante de raideur du ressort.

- Quant à l'effort de l'amortisseur $F_d(\cdot)$, c'est lui qui détermine le type de la suspension (cf. figure III.5) :

- (a) si $F_d(\cdot) = F_d(\dot{z}_s - \dot{z}_{us})$, la suspension est dite passive ;
- (b) si $F_d(\cdot) = F_d(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}, u)$ où u est un paramètre d'entrée qui modifie le coefficient d'amortissement, la suspension est dite semi active ;
- (c) si $F_d(\cdot)$ est une fonction indépendante, la suspension est dite active.

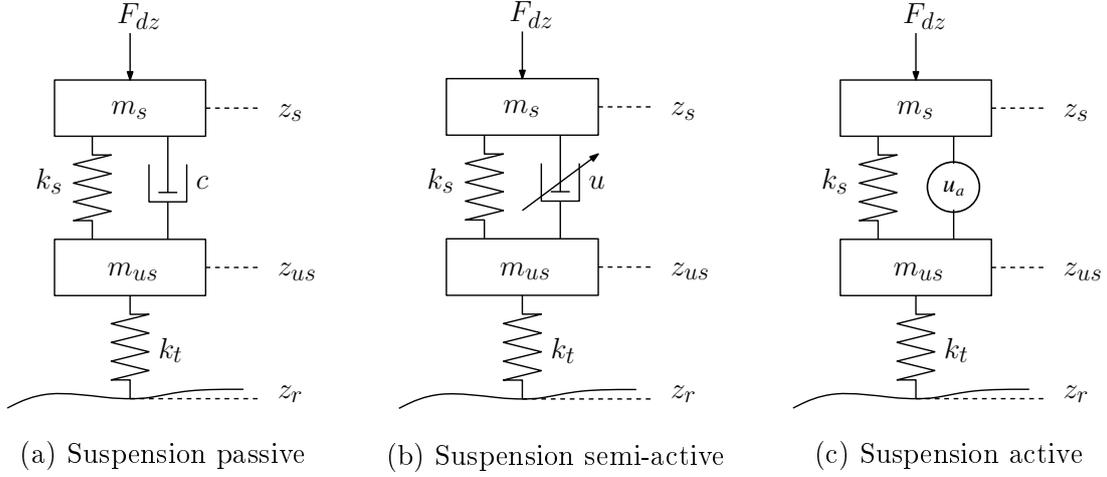


FIGURE III.5 – Modèles de suspensions : Passive, Semi-active et Active

Quand on considère les caractéristiques linéaires de la suspension i.e. $F_k = k_s(z_s - z_{us})$ et $F_d = c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us})$, et en modélisant la roue comme un ressort i.e. $F_{tz} = k_t(z_{us} - z_r)$, alors la dynamique verticale peut être décrite par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s &= -k_s(z_s - z_{us}) - c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) - u - F_{dz} \\ m_{us} \ddot{z}_{us} &= k_s(z_s - z_{us}) + c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) + u - k_t(z_{us} - z_r) \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Dans le cas de suspension semi-active, la représentation d'état est donnée par le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \ddot{z}_s \\ \dot{z}_{us} \\ \ddot{z}_{us} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{c}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{c}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_{us}} & \frac{c}{m_{us}} & -\frac{k_s+k_t}{m_{us}} & -\frac{c}{m_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ z_{us} \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_s} \\ 0 \\ \frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{dz} \quad (\text{III.27})$$

Dans le cas passif, la dynamique des états de la suspension ne dépend que des profils de route et des transferts de charges. La représentation d'état est alors simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \ddot{z}_s \\ \dot{z}_{us} \\ \ddot{z}_{us} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{c}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{c}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_{us}} & \frac{c}{m_{us}} & -\frac{k_s+k_t}{m_{us}} & -\frac{c}{m_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ z_{us} \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{dz} \quad (\text{III.28})$$

III.4.2 Modélisation des suspensions

La suspension est l'élément de connexion entre le châssis et la roue. Elle joue un rôle important dans la définition de la dynamique verticale du véhicule, et de son comportement suite aux irrégularités de la route.

Ainsi, une suspension qui est trop amortie assure une bonne tenue de route, mais n'assure pas l'isolation du châssis des irrégularités du profil de route. Une suspension mal amortie

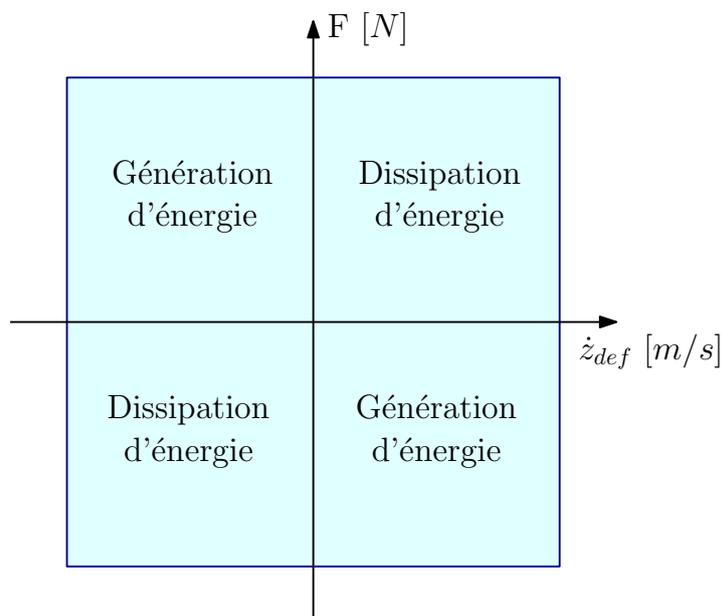


FIGURE III.6 – Force en fonction Vitesse de déflexion : zones d'énergie

améliore le confort des passagers, mais risque la perte de stabilité dans certaines situations de conduite.

Une suspension est généralement composée :

- d'un ressort, pour supporter le poids du véhicule
- d'un amortisseur, dont le rôle principal est de ralentir les mouvements du ressort, et limiter ainsi les oscillations des masses suspendues, pour éviter des rebonds dangereux.

Le ressort est l'élément commun à toutes les suspensions. Selon le type de l'amortissement, la suspension est classée comme passive, active ou semi-active. La caractéristique essentielle pour les distinguer, est de tracer la courbe des efforts ou forces appliquées, en fonction de la vitesse de déflexion (\dot{z}_{def}). Elle est appelée dans la communauté par la courbe SER (*Speed/Effort Rule*).

Comme le montre la figure (III.6), une suspension peut dissiper et/ou générer de l'énergie, selon les quadrants qu'occupe son SER.

III.4.2.1 Suspensions passives

Les suspensions passives sont des systèmes qui dissipent uniquement de l'énergie. Dans ce type de suspension, les caractéristiques du ressort et de l'amortisseur sont fixes et ne varient qu'avec l'usure. Elles sont choisies par les ingénieurs lors du design et la fabrication de la suspension, et selon le cahier de charge des performances souhaitées. Cette technologie est de loin la plus utilisée.

Dans cette catégorie de suspension on retrouve :

- les amortisseurs de frottement, où l'effet d'amortissement est dû au frottement entre deux disques, freiné par le mouvement de rotation sous l'action d'un ressort ajustable.
- les amortisseurs hydrauliques, ils sont les plus utilisés. Ils amortissent en détente et en

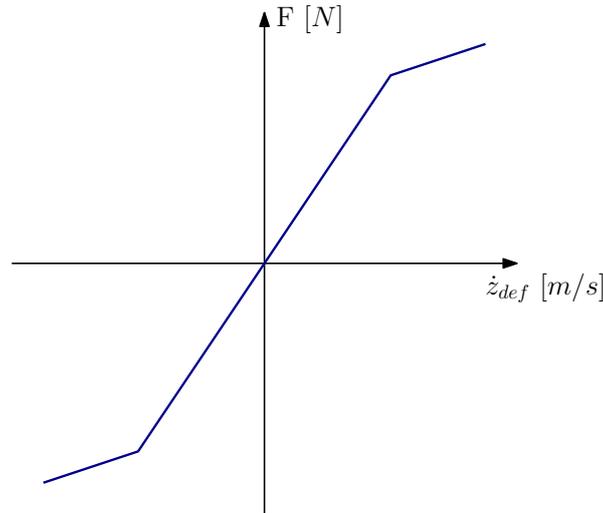


FIGURE III.7 – Suspension passive : force en fonction de la vitesse de débattement

compression avec plus d'énergie dans la phase de détente.

- les amortisseurs pneumatiques : remplis d'air comprimé, ils agissent comme les amortisseurs hydrauliques.

Comme indiqué dans l'équation (III.24), la force exercée par la suspension est $F_{sz} = F_k(\cdot) + F_d(\cdot)$. La force du ressort étant commune à toutes les suspensions, ce qui caractérise une suspension passive est que la force de l'amortisseur $F_d(\cdot)$ est à paramètres constants.

En effet, $F_d(\cdot)$ est une fonction non linéaire de la vitesse de déflexion due aux cycles d'hystérésis, aux frottements secs etc. Cette fonction peut être simplifiée en une fonction linéaire :

$$F_d = c_s \dot{z}_{def} \quad (\text{III.29})$$

où c_s est le coefficient d'amortissement de la suspension.

Dans la figure (III.7), la fonction quasi-linéaire de l'effort d'amortissement est représentée. On peut vérifier que ce type de suspension ne peut que dissiper l'énergie qui lui est transmise, puisque sa courbe est dans les premier et troisième quadrants.

En dépit de leurs bonnes performances, ce type de suspensions actives sont à ce jour peu répandues à cause de leur complexité, de leur coût et de leur consommation d'énergie.

III.4.2.2 Suspensions actives

Les suspensions actives sont des systèmes qui peuvent dissiper mais aussi générer de l'énergie. Leurs amortisseurs comportent des actionneurs actifs (voir figure (III.5), à droite) qui fournissent l'effort demandé pour assurer certaines performances, sans prendre en considération la déflexion et la vitesse de déflexion.

Ce type de suspension permet d'améliorer le confort des passagers et la tenue de route, puisqu'elle peut aussi bien absorber/dissiper de l'énergie qu'en fournir comme le montre la figure (III.8).

Parmi les suspensions actives on retrouve :

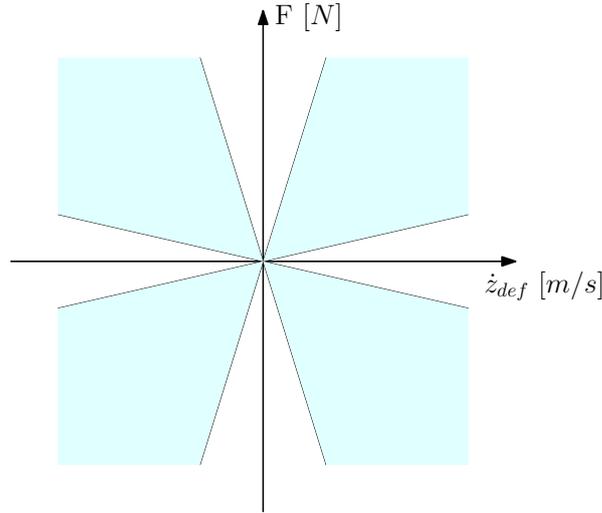


FIGURE III.8 – Suspension active : force en fonction vitesse de débattement

- les amortisseurs hydrauliques et pneumatiques constitués de vérins hydrauliques placés au niveau des suspensions de chaque roue qui compensent l'écrasement des ressorts pour mieux contrôler le mouvement du châssis. Une version commercialisée de ces amortisseurs est utilisée dans le système ABC (*Active Body Control*) de Mercedes.
- les suspensions électromagnétiques récupératrices, où l'actionneur est associé à un amplificateur de puissance. Cette technologie est développée par Bose pour son système LES (*Linear Electromagnetic Suspension*).
- les suspensions par moteur électrique linéaire

La modélisation d'un tel dispositif reste très compliquée. Un modèle simplifié de l'effort de la suspension est de noter $F_d = u$, où l'évolution de u est écrite sous la forme simplifiée :

$$\dot{u} = \omega_f(u - u^0) \tag{III.30}$$

avec u^0 la force demandée, u la force effective fournie par l'actionneur, et ω_f sa fréquence de coupure.

III.4.2.3 Suspensions semi-actives

Les amortisseurs semi-actifs ont été introduits dès les années 1990. Ils ne peuvent que dissiper de l'énergie en changeant la valeur du coefficient d'amortissement de l'amortisseur. Ils sont une alternative économique en terme de consommation d'énergie aux amortisseurs actifs. En effet, contrairement aux suspensions actives qui ont besoin d'une source d'énergie externe pour alimenter l'actionneur et dissiper/générer de l'énergie, les suspensions semi-actives nécessitent uniquement une source d'énergie très faible pour la polarisation des fluides, afin d'adapter le niveau d'amortissement de la suspension. Leur fonctionnement reste alors borné dans les quadrants de dissipation de l'énergie, comme illustré sur la figure (III.9).

Les suspensions semi-actives les plus connues sont :

- Hydropneumatique où l'amortisseur est remplacé par un tube contenant deux fluides : un liquide et un gaz qui constitue l'élément élastique. Ce système contient une pompe

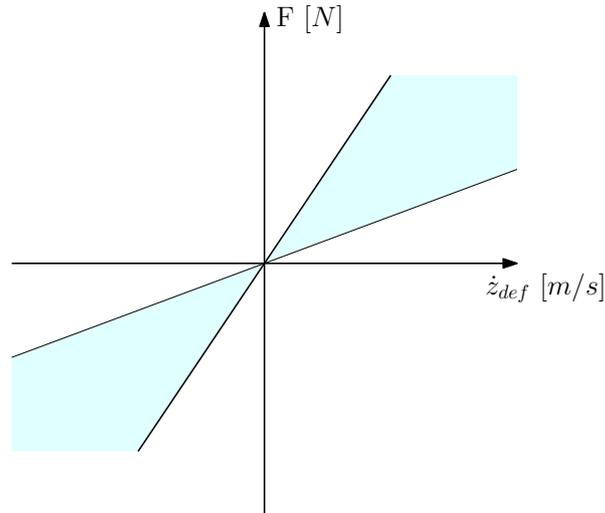


FIGURE III.9 – Suspension semi-active : force en fonction vitesse de débattement

hydraulique entraînée par le moteur et couplée à un accumulateur qui assure la distribution du liquide sous haute pression dans tout le circuit hydraulique. Par exemple, la suspension semi active développée par **Citroën**, où les fluides sont une huile minérale et de l'azote.

- Hydrauliques à orifices variables : où le contrôle est effectué en maîtrisant le passage d'huile, en rétrécissant ou augmentant le diamètre de ces orifices. Ce type de suspension est commercialisé par la société **Soben**.
- Magnéto-rhéologique (MR) : cette suspension utilise un fluide magnéto-rhéologique qui est une huile de synthèse chargée en particules souples magnétisées. En appliquant un courant électrique à la bobine électromagnétique intégrée dans le piston de l'amortisseur, les caractéristiques du fluide se modifient lors de son passage d'une chambre dans l'autre. En modulant jusqu'à 1 000 fois par seconde le courant appliqué à la bobine, qui est l'entrée de la commande, on obtient un amortissement mécaniquement simple et facilement contrôlable en temps réel.

La première application à grande échelle d'un amortissement électro-piloté utilisant un fluide magnéto-rhéologique était en 2002 par la commercialisation de la **Cadillac Seville STS**. Cet amortisseur fût fabriqué par l'équipementier **Delphi**. Pour l'Europe, cette technologie est apparu en 2006 pour équiper la **Ferrari GTB 599 Fiorano** et les nouvelles **Audi TT**, également développée par **Delphi**.

- Électro-rhéologique (ER) : Le fonctionnement est basé sur l'utilisation d'un fluide constitué de fines particules dispersées dans un liquide diélectrique. Sous l'action d'un champ électrique, les particules s'attirent pour modifier les propriétés d'écoulement du fluide. Par l'application d'un signal électrique, on peut contrôler les propriétés mécaniques comme la viscosité. A champ élevé, on obtient un gel solide. Sous champ plus faible, on obtient un fluide à viscosité variable. Dans ce type d'amortisseur, l'entrée de commande des actionneurs est la tension électrique appliquée.

Les amortisseurs ER sont intéressants car ils ont une fréquence de fonctionnement beaucoup

plus élevée que celle de MR, qui sont limités à 10 Hz. Par contre ces amortisseurs pour l'heure sont peu répandus sur le marché.

Afin de tenir compte de son comportement non linéaire (hystérésis, saturation etc...), le modèle de l'effort de l'amortisseur MR est habituellement mis sous forme de fonction polynomiale en fonction du courant électrique [Lozoya-Santos 2009].

Toutefois, un modèle plus simple est introduit par [Guo 2006] et développé par [Do 2011] pour une approche orientée contrôle :

$$F_d(I) = c_0 \dot{z}_{def} + k_0 z_{def} + f_I \tanh(c_1 \dot{z}_{def} + k_1 z_{def}) \quad (\text{III.31})$$

où les coefficients c_0 , c_1 , k_0 , k_1 sont des paramètres constants et f_I est l'effort contrôlable qui est fonction du courant dans la bobine.

Cette représentation permet de montrer les contraintes de dissipativité du courant :

$$I_{\min} \leq I \leq I_{\max} \quad (\text{III.32})$$

et introduit une entrée de commande f_I .

Les paramètres dans (III.31) pour les amortisseurs équipants les 4 quarts de véhicule de la maquette au GIPSA-Lab sont donnés dans le tableau (B.4).

III.4.3 Modèle vertical global du châssis

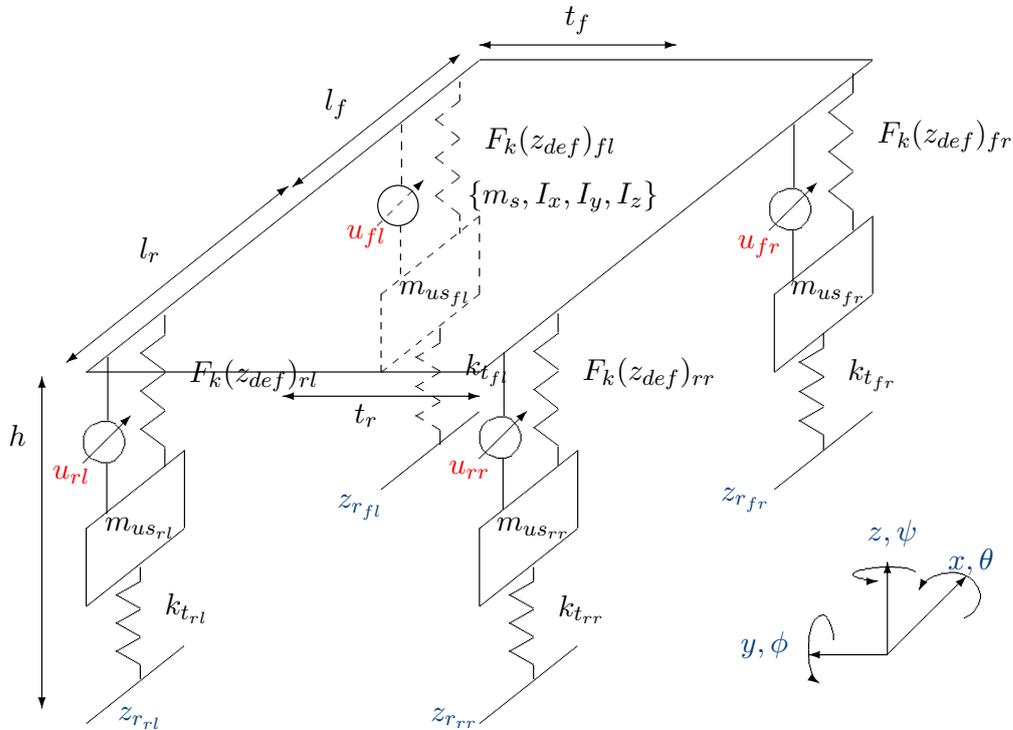


FIGURE III.10 – Modèle vertical global du châssis

La suspension, quand elle est en mouvement, agit sur le déplacement vertical du châssis. Toutefois, lorsque les différentes suspensions ne subissent pas le même déplacement, des mouvements de roulis et tangage apparaissent sur le châssis, qui sont des mouvements de rotation autour des axes x et y sont notées θ et ϕ respectivement.

Les équations cinématiques aux quatre coins du châssis peuvent être exprimées par les équations suivantes :

– pour les positions :

$$\begin{cases} \dot{z}_{sfl} &= z_s + \dot{\phi}l_f \cos(\phi) - \dot{\theta}t_f \cos(\theta) \\ \dot{z}_{sfr} &= z_s + \dot{\phi}l_f \cos(\phi) + \dot{\theta}t_f \cos(\theta) \\ \dot{z}_{srl} &= z_s - \dot{\phi}l_r \cos(\phi) - \dot{\theta}t_r \cos(\theta) \\ \dot{z}_{srr} &= z_s - \dot{\phi}l_r \cos(\phi) + \dot{\theta}t_r \cos(\theta) \end{cases} \quad (\text{III.33a})$$

– pour les vitesses :

$$\begin{cases} \dot{z}_{sfl} &= z_s + \dot{\phi}l_f \cos(\phi) - \dot{\theta}t_f \cos(\theta) \\ \dot{z}_{sfr} &= z_s + \dot{\phi}l_f \cos(\phi) + \dot{\theta}t_f \cos(\theta) \\ \dot{z}_{srl} &= z_s - \dot{\phi}l_r \cos(\phi) - \dot{\theta}t_r \cos(\theta) \\ \dot{z}_{srr} &= z_s - \dot{\phi}l_r \cos(\phi) + \dot{\theta}t_r \cos(\theta) \end{cases} \quad (\text{III.33b})$$

où z_s est le centre de gravité de la masse suspendue.

Par ailleurs, la dynamique du châssis globale affectée par les suspensions en considérant les mouvements de translation et de rotation, sont déduits par application de la deuxième loi de Newton :

$$\begin{cases} \ddot{z}_s &= -(F_{szf} + F_{szr} + F_{dz})/m_s \\ \ddot{z}_{usij} &= (F_{szij} - F_{tzij})/m_{usij} \\ \ddot{\theta} &= -((F_{szrl} + F_{szrr}t_r + (F_{szfl} + F_{szfr}t_f + mh\dot{v}_y)/I_x \\ \ddot{\phi} &= (F_{szfl}l_f + F_{szrl}l_r - mh\dot{v}_x)/I_y \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

où $F_{tz_i} = F_{tz_{il}} + F_{tz_{ir}}$, $F_{sz_i} = F_{sz_{il}} + F_{sz_{ir}}$ sont respectivement les forces verticales de la roue et la suspension, et h est la hauteur du centre de gravité du châssis par rapport au sol.

En ne considérant que les mouvements de translation, et en notant $\rho_1 = \tanh(c_1 \dot{z}_{def} + k_1 z_{def})$, on peut alors décrire la dynamique verticale par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \ddot{z}_s \\ \dot{z}_{us} \\ \ddot{z}_{us} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s+b_2}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{k_s+b_2}{m_s} & -\frac{b_1}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s+b_2}{m_{us}} & \frac{b_1}{m_{us}} & -\frac{k_s+k_t+b_2}{m_{us}} & -\frac{b_1}{m_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ z_{us} \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{f_c \rho_1}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho_1}{m_{us}} \end{bmatrix} I + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} \end{bmatrix} z_r \quad (\text{III.35})$$

III.4.4 Capteurs pour la dynamique verticale

Les capteurs les plus souvent employés sont pour mesurer la déflexion et la vitesse de déflexion de la suspension.

Ainsi, le vecteur de sorties pour le modèle vertical est :

$$y = \begin{bmatrix} z_{def} \\ \dot{z}_{def} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ z_{us} \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Les gyromètres peuvent également être utilisés pour mesurer les différents angles, mais dans ce mémoire seuls les mouvements de translation sont étudiés.

III.5 Modèle global du châssis

En regroupant les modèles vertical, longitudinal et latéral, un modèle global de la dynamique de véhicule peut être défini par les équations non linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s &= \dot{x}_s + \dot{y}_s \dot{\psi}_s = \frac{-F_{tx_f} \cos(\delta) - F_{tx_r} - F_{ty_f} \sin(\delta) - m\dot{\psi}\dot{y}_s + F_{dx}}{m} \\ \ddot{y}_s &= \dot{y}_s + \dot{x}_s \dot{\psi}_s = \frac{-F_{tx_f} \sin(\delta) - F_{ty_r} - F_{ty_f} \cos(\delta) + m\dot{\psi}\dot{x}_s + F_{dy}}{m} \\ \ddot{z}_s &= -\frac{F_{sz_f} + F_{sz_r} + F_{dz}}{m_s} \\ \ddot{z}_{us_{ij}} &= \frac{F_{sz_{ij}} - F_{tz_{ij}}}{m_{us_{ij}}} \end{aligned} \quad (\text{III.37a})$$

pour les mouvements de translation, et

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{(F_{sz_{rl}} - F_{sz_{rr}})t_r + (F_{sz_{fl}} - F_{sz_{fr}})t_f + mh\ddot{y}_s + (I_y - I_z)\dot{\psi}\dot{\phi} + M_{dx}}{I_x} \\ \ddot{\phi} &= \frac{(F_{sz_{rl}} + F_{sz_{rr}})l_r - (F_{sz_{fl}} + F_{sz_{fr}})l_f - mh\ddot{x}_s + (I_z - I_x)\dot{\psi}\dot{\theta} + M_{dy}}{I_y} \\ \ddot{\psi} &= \frac{(- (F_{ty_{rr}} + F_{ty_{rl}})l_r + (F_{ty_{fr}} + F_{ty_{fl}})l_f \cos(\delta) - (F_{tx_{fr}} + F_{tx_{fl}})l_f \sin(\delta) \\ &\quad - (F_{tx_{rr}} - F_{tx_{rl}})t_r - (F_{tx_{fr}} - F_{tx_{fl}})t_f \sin(\delta) - (F_{ty_{fr}} - F_{ty_{fl}})t_f \cos(\delta) \\ &\quad + (I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\phi} + M_{dz})}{I_z} \\ \dot{\omega}_{ij} &= \frac{r_{eff_{ij}} F_{tx_{ij}} - T_{t_{ij}}}{I_\omega} \\ \dot{\beta}_{CoG} &= \frac{F_{ty_f} + F_{ty_r} - m\dot{v} \sin(\beta_{CoG})}{mv \cos(\beta_{CoG})} - \dot{\psi} \end{aligned} \quad (\text{III.37b})$$

pour les mouvements de rotation.

Un récapitulatif des différents symboles utilisés dans ces équations est donné dans les tableaux (III.1), (III.2) et (III.3). On rappelle l'utilisation de la notation $i=\{f,r\}$ pour les positions avant/arrière, et $j=\{r,l\}$ pour celles de droite/gauche.

Symbole	Variable	Unité
a_x	accélération longitudinale	[m/s ²]
a_y	accélération latérale	[m/s ²]
\ddot{z}_s	accélération verticale du châssis	[m/s ²]
$\ddot{\phi}$	accélération de tangage	[rad/s ²]
$\ddot{\psi}$	accélération de lacet	[rad/s ²]
$\ddot{\theta}$	accélération de roulis	[rad/s ²]
v	vitesse résultante au centre de gravité	[m/s]
δ	angle de braquage au roue	[rad]
β	angle de glissement du centre de gravité	[rad]
m	masse totale du véhicule	[kg]
I_n	moment d'inertie selon l'axe n	[kg.m ²]
l_i	distance entre le centre de gravité et l'essieu (i)	[m]
t_i	demi essieu (i)	[m]
M_{dx}	Moment de perturbation longitudinale	[N]
M_{dy}	Moment de perturbation latérale	[N]

TABLE III.1 – Notations et paramètres du véhicule I (Châssis)

Symbole	Variable	Unité
\ddot{z}_s	accélération verticale du châssis	[m/s ²]
\ddot{z}_{usij}	accélération verticale de la suspension (i,j)	[m/s ²]
\dot{z}_{defij}	vitesse de déflexion de la suspension au coin (i, j)	[m/s]
z_{defij}	déflexion de la suspension au coin (i, j)	[m]
z_{usij}	position verticale de la masse non suspendue au coin (i, j)	[m]
z_{sij}	position verticale du châssis au coin (i, j)	[m]
z_{rij}	profil de la route au coin (i, j)	[m]
m_{sij}	masse suspendue au coin (i, j)	[kg]
m_{usij}	masse non suspendue au coin (i, j)	[kg]
k_s	constante de raideur du ressort au coin (i, j)	[N/m]
F_{sij}	Effort vertical de la suspension (i, j)	[N]
F_{si}	Résultante des efforts verticaux (i)	[N]
M_{dz}	Moment de perturbation verticale	[N]
F_{dij}	Force de l'amortisseur MR de la suspension (i, j)	[N]

TABLE III.2 – Notations et paramètres du véhicule II (Suspension)

Symbole	Variable	Unité
ω_{ij}	vitesse de rotation de la roue au coin (i, j)	[rad/s]
$\beta_{y_{ij}}$	coefficient de glissement latéral du pneu au coin (i, j)	[rad]
$r_{eff_{ij}}$	rayon effectif de la roue au coin (i, j)	[m]
$k_{t_{ij}}$	constante de raideur du pneu au coin (i, j)	[N/m]
c_{ij}	coefficient de rigidité du pneu au coin (i, j)	[N/rad]
$I_{ty_{ij}}$	moment d'inertie de la roue (i, j)	[N/rad]
T_{ij}	Couple fourni à la roue au coin (i, j)	[N]
$F_{tx_{ij}}$	Effort longitudinal de la pneumatique (i, j)	[N]
F_{tx_i}	Résultante des efforts longitudinaux des pneumatiques (i)	[N]
$F_{ty_{ij}}$	Effort latéral de la pneumatique (i, j)	[N]
F_{ty_i}	Résultante des efforts latéraux des pneumatiques (i)	[N]
$F_{tz_{ij}}$	Effort vertical de la pneumatique (i, j)	[N]

TABLE III.3 – Notations et paramètres du véhicule III (Pneumatique)

Les équations (III.37) sont alors utilisées comme base de modélisation non-linéaire de la dynamique global de véhicule. Ce modèle non linéaire est implémenté sous Matlab/Simulink, comme illustré par le schéma (III.11).

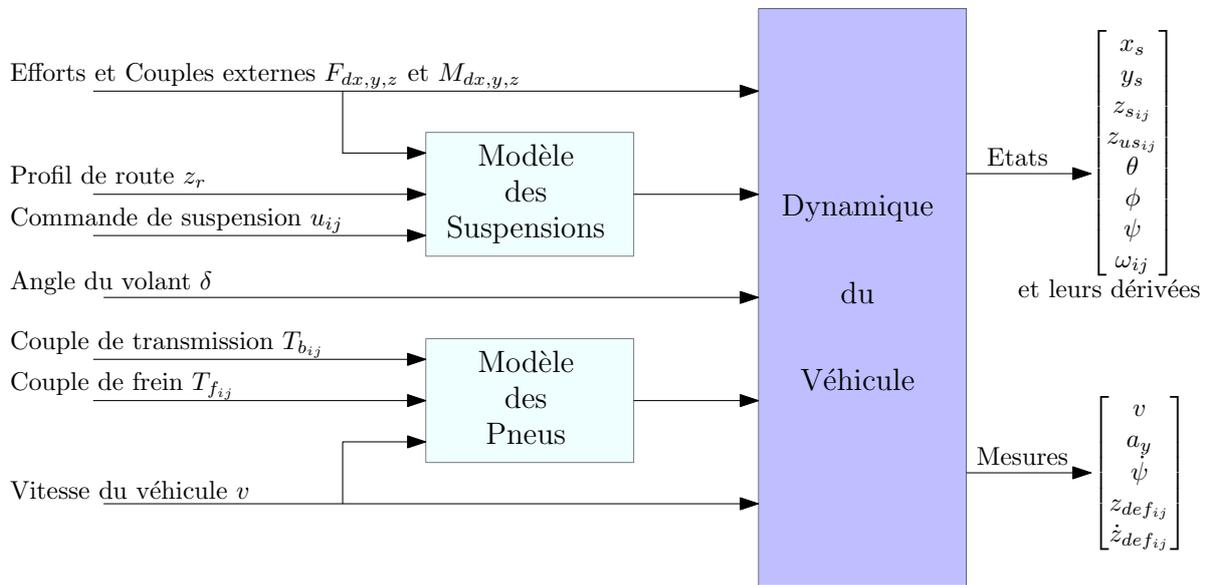


FIGURE III.11 – Synopsis du modèle complet du véhicule

III.6 Validation du modèle dynamique

En collaboration avec les collègues de l'équipe MIAM du laboratoire MIPS de Mulhouse, experts dans l'identification, l'estimation et la dynamique de véhicule, plusieurs campagnes

de test fûent effectuées sur une Renault Mégane Coupé instrumentée, appelée "Nadine". La dernière des campagnes fût réalisée en 2014. Les données expérimentales issues de ces tests ont permis d'identifier les paramètres du véhicule et de valider le modèle dynamique développé.

Avant de passer aux détails de la dernière campagne de test, on présentera quelques tests permettant de valider le modèle préalablement établi.

III.6.1 Validation expérimentale

Deux types de tests on été effectués pour l'étape de validation. Le premier est le test du sinus wobulé, et le second est le test de l'Élan.

Le test du sinus wobulé est utile pour l'estimation de certains paramètres du véhicule, puisqu'il consiste en une excitation de l'angle du volant (entrée du système) à différentes fréquences et de différentes amplitudes. Dans cet essai, la vitesse du véhicule est relativement constante.

Le test de l'Élan permet de décrire la manoeuvre d'évitement brusque d'un obstacle. La perte de stabilité des voitures de la série A de Mercedes lors de ce test en 1997 a entraîné le développement du programme de stabilité électronique (ESP). Ce programme est aujourd'hui indispensable pour la plupart des constructeurs automobiles.

Les entrées sont les vitesses et les angles au volant, les mesures sont les accélérations latérales a_y et vitesses de lacet $\dot{\psi}$. Les vitesses de roulis sont aussi présentées pour le test de sinus wobulé.

III.6.1.1 Sinus wobulé

Deux séries de tests sont présentées ici pour la comparaison entre les mesures et les simulations du modèle proposé :

- $v=40$ km/h
- $v=80$ km/h

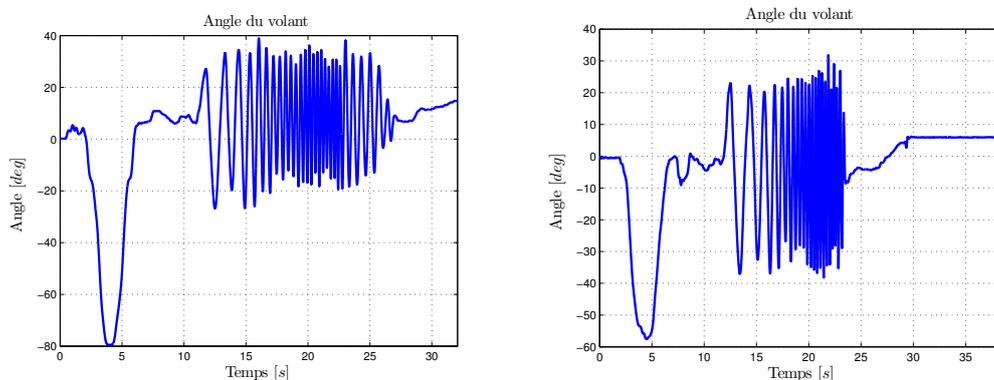
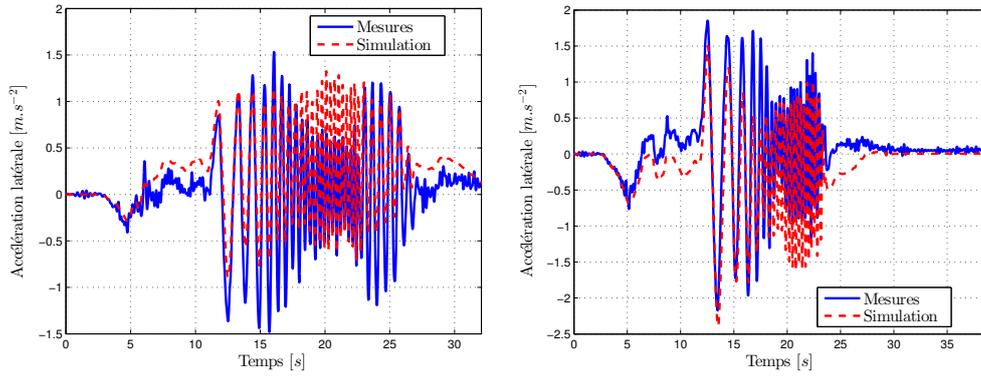
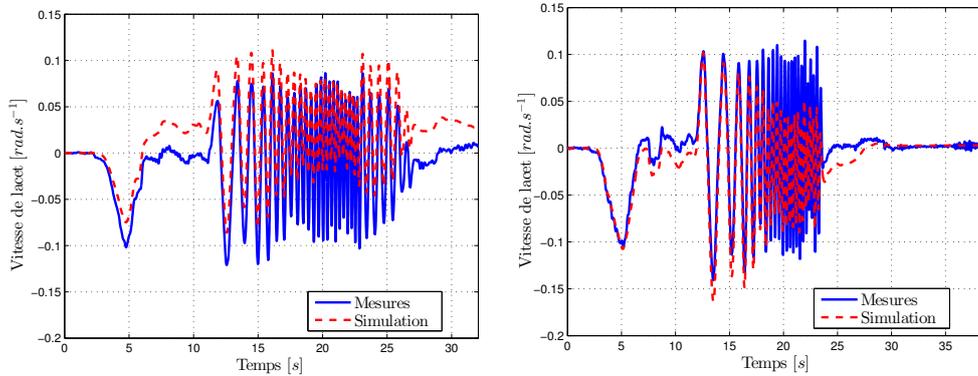


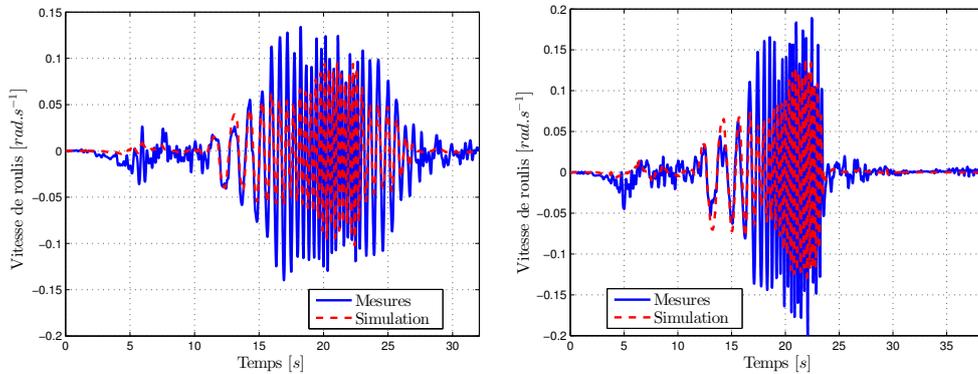
FIGURE III.12 – Test de sinus wobulé : angle du volant
(gauche à $v = 40km.h^{-1}$, droite à $v = 80km.h^{-1}$)



(a) Comparaison des accélérations latérales



(b) Comparaison des vitesses de lacet



(c) Comparaison des vitesses de roulis

FIGURE III.13 – Test de sinus wobulé : comparaison mesures et simulations (gauche à $v = 40\text{km.h}^{-1}$, droite à $v = 80\text{km.h}^{-1}$)

III.6.1.2 Test de l'élan

La modèle Renault Mégane n'étant pas équipé d'ESP, ce test devient très intéressant pour l'étude de la stabilité et la tenue de route. Il est montré ici pour deux vitesses :

- $v=30$ km/h
- $v=80$ km/h

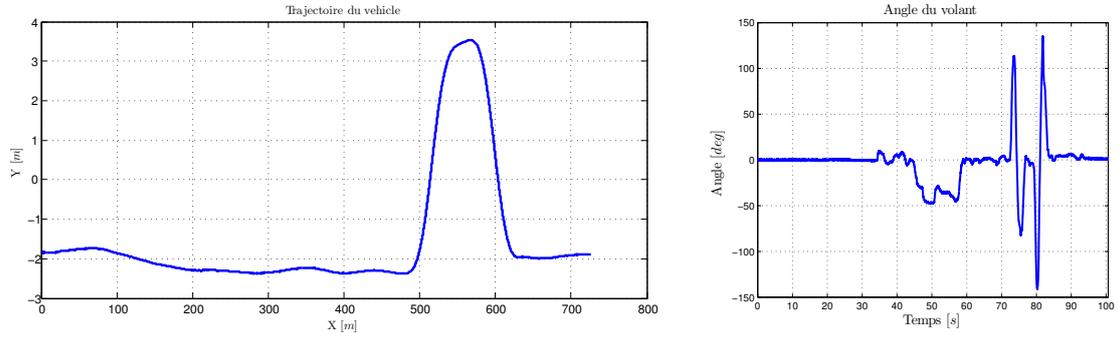
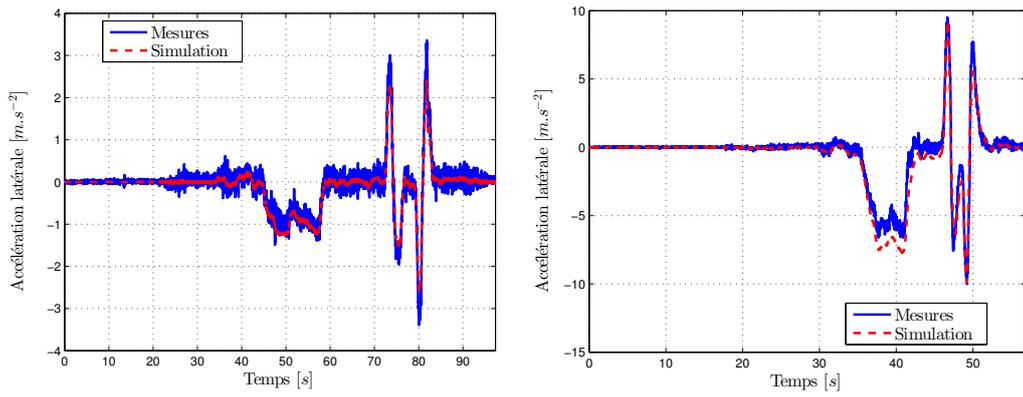
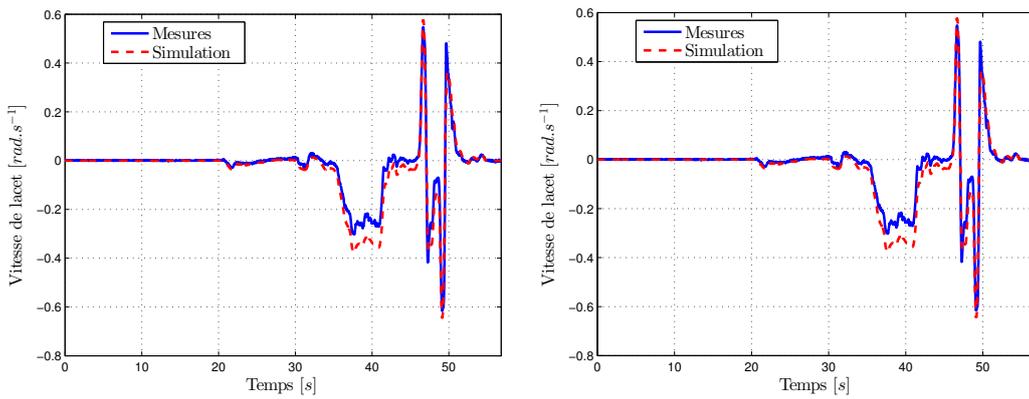


FIGURE III.14 – Test de l'élan : trajectoire et angle du volant



(a) Comparaison des accélérations latérales



(b) Comparaison des vitesses de lacet

FIGURE III.15 – Test de l'élan : comparaison mesures et simulations (gauche à $v = 30km.h^{-1}$, droite à $v = 80km.h^{-1}$)

III.6.2 Conclusion de validation

D'une manière générale, les résultats obtenus avec le simulateur du modèle et les mesures expérimentales sont relativement proches.

Bien que les mesures issues aux tests de l'élan sont assez correctes, la comparaison des résultats dans les tests de sinus wobulé montre certaines différences. Ceci est surtout dû aux erreurs de modélisation des pneumatiques.

En effet, les paramètres des fonctions non linéaires développées sont difficiles à retrouver et à vérifier. De plus, certains dépendent des facteurs de l'environnement tels que l'humidité au sol, la température, le type de la route, etc. Les approximations de linéarisation de ces fonctions sont aussi non-valables lors des excitations aux fréquences élevées.

En conclusion, on retrouve bien la tendance de la dynamique de véhicule. Les données des accéléromètres correspondent bien aux valeurs simulées à un filtrage prêt, ce qui rend ces capteurs intéressants dans l'étude des chapitres suivants.

III.6.3 Campagne de tests INOVE 2014

III.6.3.1 Présentation de la campagne

Fin juin 2014, a eu lieu une campagne financée par le projet INOVE. Son but était de tester des stratégies de contrôle développées dans les travaux de [Fergani 2014], mais aussi de servir de base de données pour validation des méthodes de détection et d'estimation de défaut présentées dans ce travail.

Les tâches durant cette campagne étaient partagées comme l'indique la figure (III.16). Le Gipsa-Lab avait pour rôle le développement des stratégies de contrôle et de diagnostic haut niveau (livrées sous forme de modèles Simulink). L'équipe MIAM du MIPS était responsable de l'implémentation bas niveau, de l'instrumentation du véhicule et de la récupération des données à partir de capteurs et/ou des estimateurs en ligne.

Ainsi, les données disponibles sont :

- δ : angle de braquage des roues
- \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} : les vitesses du centre de gravité (CoG) du véhicule selon les axes x , y et z .

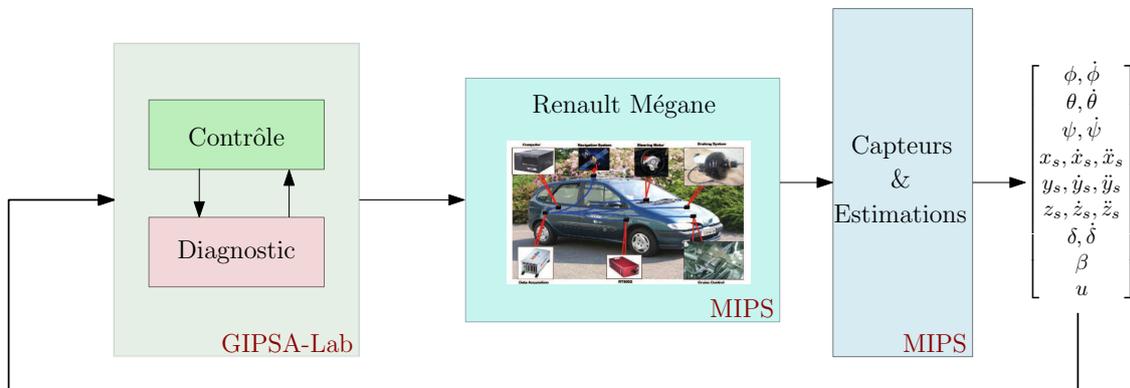


FIGURE III.16 – Schématique du véhicule pour les tests

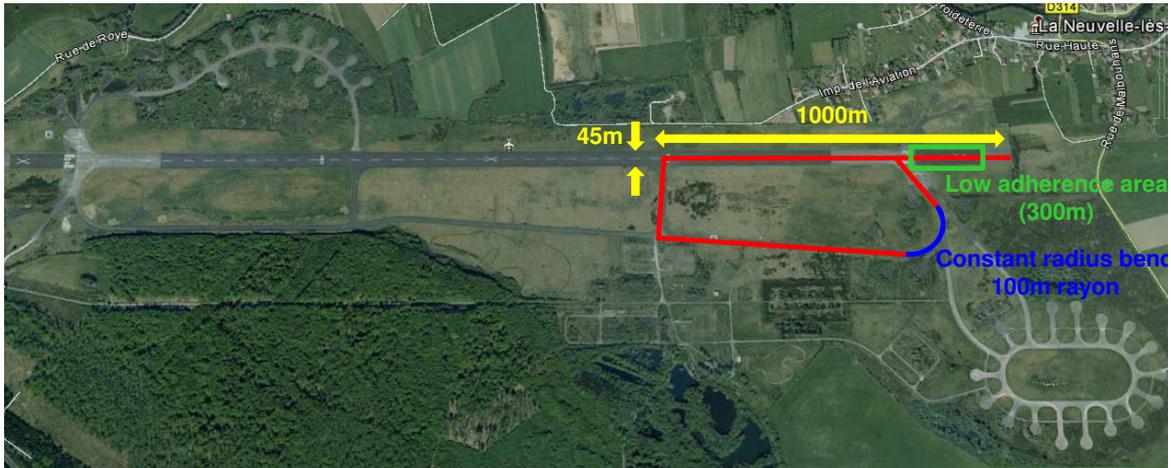


FIGURE III.17 – Piste Car2Road pour la campagne de tests 2014

- \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} : les accélérations du centre de gravité (CoG) du véhicule selon les axes x , y et z .
- $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$: les vitesses angulaires de roulis, de lacet et de tangage
- β : angle de glissement
- ω_w vitesse angulaire des roues
- T_{GPS} de temps du GPS (UTC)
- x_{GPS} , y_{GPS} et z_{GPS} : les coordonnées (X, Y, Z) dans le référentiel local du GPS

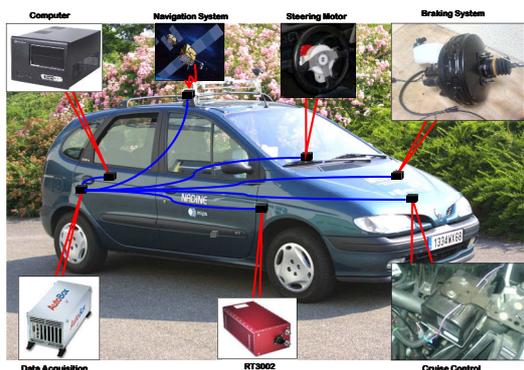
Ces données sont prélevées à une période d'échantillonnage de 20 ms.

III.6.3.2 Préparation de la campagne

La campagne était précédée par des tests de ciblage sur le véhicule, des tests en statique et en dynamique. Cette partie a été effectuée par les collègues du laboratoire MIPS.

Le circuit de test choisi est Car2Road, situé à Lure en Haute Saône. Cette piste qui servait pour l'atterrissage d'avions militaires, offre un grand espace pour une variété de tests : surtout grâce à son terrain à forte adhérence. Cependant, pour les tests de glissement, une préparation de la piste était nécessaire pour créer une zone de faible adhérence (peinture sol et ajout d'eau durant les tests).

Il est à noter qu'en plus de *Nadine*, une nouvelle voiture de modèle **Renault Scenic** est en cours d'instrumentation au MIPS. Elle a participé à la campagne d'essais pour des démos de conduite intelligente, mais surtout pour réaliser la cartographie de la piste.



(a) Renault Mégane instrumentée pour les tests de conduite



(b) Renault Scenic instrumentée pour la cartographie

FIGURE III.18 – Les voitures de test pour la campagne d’essais INOVE 2014

III.6.3.3 Semaine d’essais

La semaine d’essais a eu lieu du 30/06/2014 au 04/07/2014. Une série d’essais a été effectuée par un pilote professionnel pour tester les différentes manœuvres du véhicule dans des situations diverses. Le pilote était accompagné à bord du véhicule par un opérateur pour l’enregistrement et la validation de données en temps réel.

La liste de ces tests est récapitulée dans le tableau (III.4), elle comprend :

- Tests de freinages en zone forte adhérence, pour simuler des freinages en situations d’urgence. Ce test fût effectué pour différentes vitesses de 30 km/h jusqu’à 100 km/h avec un pas de 10 km/h ;
- Tests d’évitement d’obstacle connus sous tests de l’élan, à différentes vitesses de 30 km/h jusqu’à 110 km/h avec un pas de 10 km/h. Ce test fût aussi effectué pour un double changement de file, ou grand test d’élan ;
- Tests de virage sur une zone de faible adhérence. Ces tests fûent effectués en sur-virage et sous-virage pour des vitesses allant de 25 à 60 km/h, avec un pas de 5 km/h. Le sur-virage a été testé en situation contrôlée (conduite professionnelle) et non contrôlée (conducteur non-expérimenté), permettant de futures études pour des systèmes d’aide à la conduite ;
- Tests de virage à angle constant, pour tester les limites de stabilité du véhicule en augmentant la vitesse, pour les angles au volant de 180°, 270° et 360° ;
- Une cartographie de la piste faible adhérence, avec un module GPS conçu spécialement pour cette tâche.

Journée	Acronyme	Type de test
J1	b0	Test d'élan pour calibrage
J1	b_50	virage rayon constant (80m) à 50 km/h
J2	ffa	Freinage forte adhérence
J2	ffap	Freinage forte adhérence avec pilote
J3	vfap	virage forte adhérence avec pilote
J3	vfa	virage forte adhérence
J3	cfaap	cercle faible adhérence avec pilote
J3	efap	élan forte adhérence avec pilote
J3	vfaap	virage faible adhérence avec pilote
J3	cvfap	cartographie et virage forte adhérence pilote
J4	scfaap	contrôlé faible adhérence pilote
J4	sncfaap	non contrôlé faible adhérence pilote
J4	cfar	cercle faible adhérence rayon fixe (angles 180° - 270° - 360°)
J5	gefap	grand élan forte adhérence pilote
J5	pfaa	cartographie de piste faible adhérence

TABLE III.4 – Liste des essais lors de la campagne d'essais INOVE 2014

III.6.3.4 Post-essais

À la suite de la campagne d'essais, une base de données fut mise en commun entre le MIPS et Gipsa-Lab. Des fichiers de dépouillement des données et de post traitement (transformation des données GPS en coordonnées euclidiennes, post filtrage de certains capteurs, etc.) sont également fournis.

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, différents modèles pour décrire les dynamiques verticale, latérale et longitudinale du véhicule sont développés, et regroupés en un modèle global. Ce dernier, qui est fortement non linéaire, est implémenté numériquement sous Matlab/Simulink pour des simulations.

Ensuite, une comparaison entre mesures réelles récupérées d'anciennes campagnes de tests et les résultats de simulation a permis la validation du modèle, avec un certain degré de confiance.

À l'issu de cette campagne, une base de données des scénarios et des mesures est utilisée pour la validation des approches d'observation et de contrôle.

Pour clôturer ce chapitre, on retiendra

- un modèle non linéaire, qui sera transformé en un système incertain à commutation,
- une utilisation de certains capteurs et actionneurs est recommandée : comme les accéléromètres et commande d'angle au volant.

Les modèles et les données seront utilisés pour valider les approches proposées de détection et localisation de défauts pour une classe de systèmes incertains à commutations. Ces méthodes

seront décrites dans les chapitres IV et V, et appliquées aux dynamiques verticale et latérale du véhicule.

Détection et localisation de défauts par observateurs H_-/H_∞ commutés

Sommaire

IV.1 Introduction	79
IV.2 Observateur identité H_-/H_∞ à commutation	81
IV.2.1 Formulation du problème	81
IV.2.2 Synthèse multi-objectifs	83
IV.2.3 Synthèse pour les systèmes propres	84
IV.2.4 Exemple	95
IV.2.5 Conclusion	97
IV.3 Observateur H_-/H_∞ robuste à commutation	98
IV.3.1 Observateurs pour les systèmes LTI incertains à commutation	98
IV.3.2 Synthèse robuste	99
IV.3.3 Synthèse de générateur de résidu robuste multi-objectifs	104
IV.3.4 Conclusion	105
IV.4 Détection de défaut par observateur généralisé	105
IV.4.1 Introduction	105
IV.4.2 Formulation du problème	106
IV.4.3 Paramétrisation de l'observateur d'ordre réduit	107
IV.4.4 Générateur de résidu à base d'observateur d'ordre réduit à commutation	112
IV.4.5 Exemple	115
IV.4.6 Conclusion	116
IV.5 Détection de défaut à base d'observateur pour les systèmes LPV	117
IV.5.1 Introduction	117
IV.5.2 Générateur de résidu par approche polytopique	118
IV.5.3 Synthèse de générateur de résidu multi-objectifs pour les systèmes LPV	119
IV.5.4 Exemple : application à la détection de défauts dans la dynamique latérale du véhicule	121
IV.5.5 Conclusion	124
IV.6 Conclusion	124

IV.1 Introduction

La détection précoce des défauts et le diagnostic de processus peuvent aider à éviter la progression de l'événement anormal, à réduire les pertes de productivité et à améliorer la

fiabilité et la sécurité. Il est devenu de plus en plus important pour de nombreux procédés techniques tels que l'ingénierie aérospatiale, la génie chimique et pétrochimique, l'ingénierie nucléaire et les systèmes automobiles [Isermann 2005].

Comme il a été introduit dans le chapitre I, l'idée est de calculer un signal de résidu en comparant le modèle mathématique du processus et utiliser les relations entre plusieurs variables mesurées pour extraire des informations sur les changements possibles causés par des défauts.

Dans les applications pratiques, les résidus sont corrompus par des entrées inconnues telles que des bruits, des perturbations et des incertitudes sur le modèle du système. Par conséquent, l'objectif principal de méthodes FDI est de générer des résidus robustes insensibles à ces bruits et ces incertitudes, tout en restant sensibles aux défauts. Ainsi, la conception d'un observateur pour la détection de défaut devient un problème multi-objectifs.

Dans la communauté FDI, la synthèse d'observateurs multi-objectifs est souvent formulée par un double critère H_-/H_∞ . Il consiste à minimiser la sensibilité du résidu aux entrées inconnues et à la maximiser vis à vis des défauts. Cette synthèse a été traitée principalement pour les systèmes LTI [Hou 1996, Liu 2005, Wang 2007]. Quelques extensions pour les systèmes LTI incertains, et pour les systèmes LTI à commutations ont été étudiées [Abdo 2011], mais présentant quelques problèmes de faisabilité et d'optimisation, surtout en négligeant le modelage fréquentiel de la sensibilité au défaut.

Alors que la formulation standard en termes de sensibilité est principalement basée sur la spécification dans le domaine fréquentiel (gain maximal pour les problèmes H_∞ , gain minimal pour les problèmes H_-), elle en dit peu sur les performances transitoires et temporelles. Par conséquent, il est très utile de combiner ces deux spécifications dans une même formulation.

Ainsi, la principale contribution dans cette partie est de combiner :

1. La sensibilité aux défauts dans une certaine zone fréquentielle, en utilisant la formulation H_- avec un modelage fréquentiel spécifique,
2. La robustesse aux incertitudes et aux perturbations, en utilisant la formulation H_∞ ,
3. La spécification temporelle d'une détection rapide d'un défaut dès qu'il surgit sur le système, en utilisant un placement de valeurs propres,
4. La stabilité de ces observateurs commutés, en utilisant une analyse par des fonctions de Lyapunov multiples (MLF pour *Multiple Lyapunov Functions*),

Ces différentes spécifications sont exprimées par une formulation LMI, dont la solution est donnée par une optimisation convexe par rapport à certaines variables.

Dans ce chapitre, on présente l'extension de la méthode H_-/H_∞ présentée dans le chapitre II pour les systèmes à commutation qui sont illustrés par la figure (IV.1).

D'abord la synthèse d'observateur identité pour une classe de systèmes à commutation noté SFDO (pour *switched fault detection observer*), puis pour les systèmes incertains à commutation pour garantir la robustesse aux incertitudes noté SRFDO (pour *switched robust FDO*). Ensuite, cette synthèse est étendue par la synthèse d'observateur de Luenberger généralisé à commutation SGFDO (pour *switched generalized FDO*). En dernière partie, une approche pour les systèmes LPV est présentée toujours dans le cadre de formulation H_-/H_∞ (LPV-FDO).

Ce chapitre a fait l'objet de différentes publications :

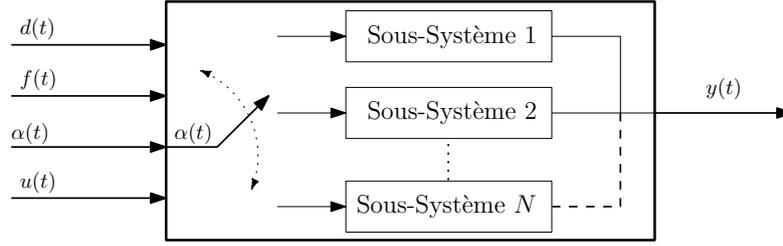


FIGURE IV.1 – Système à commutations sujet à des défauts et perturbations

- C1** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Generalized Luenberger observers for fault detection in switched systems using H_- index*. 15th European Control Conference (ECC), Jul 2016, Aalborg, Danemark.
- C2** Ahmad Farhat, Damien Koenig, Olivier Sename. *Fault detection for LPV systems : Loop shaping H_- approach*. 1st IFAC Workshop on LPV systems, Oct 2015, Grenoble, France.
- C3** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *PI robust fault detection observer for a class of uncertain switched systems using LMIs*. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS), Sep 2015, Paris, France.
- C4** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *H_-/H_∞ robust fault detection observer for uncertain switched systems*. 14th European Control Conference (ECC), Jul 2015, LINZ, Austria.
- C5** Ahmad Farhat, Damien Koenig. *H_-/H_∞ fault detection observer for switched systems*. 53rd IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC), Dec 2014, Los Angeles, United States.
- C6** Ahmad Farhat, Diana Hernandez, Carlos Vivas-Lopez, Damien Koenig, and Ruben Morales-Menendez. *Fault detection in lateral vehicule dynamics, a comparaison between two approaches*. à soumettre à 20th IFAC World Congress.

IV.2 Observateur identité H_-/H_∞ à commutation pour systèmes LTI commutés

IV.2.1 Formulation du problème

On considère la représentation d'état d'un système LTI à commutation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{\alpha(t)}x(t) + B_{\alpha(t)}u(t) + E_{d,\alpha(t)}d(t) + E_{f,\alpha(t)}f(t) \\ y(t) &= C_{\alpha(t)}x(t) + D_{\alpha(t)}u(t) + F_{d,\alpha(t)}d(t) + F_{f,\alpha(t)}f(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^l$ représentant respectivement l'état, l'entrée de commande et la sortie du système. Les vecteurs $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ et $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ désignent respectivement les perturbations et les défauts.

Le signal $\alpha(t)$ décrit la loi de commutation, laquelle est définie dans (II.20). C'est une fonction constante par morceaux, qui prend des valeurs dans un ensemble fini d'indices noté $\mathcal{I} := \{1, 2, \dots, N\}$. Les matrices A_α , B_α , $E_{d,\alpha}$, $E_{f,\alpha}$, C_α , D_α , $F_{d,\alpha}$ et $F_{f,\alpha}$ sont connues et aux

dimensions appropriées, et elle indique le sous-système actif à l'instant t :

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A_{\alpha(t)} & B_{\alpha(t)} & E_{d,\alpha(t)} & E_{f,\alpha(t)} \\ \hline C_{\alpha(t)} & D_{\alpha(t)} & F_{d,\alpha(t)} & F_{f,\alpha(t)} \end{array} \right] \in \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} A_1 & B_1 & E_{d,1} & E_{f,1} \\ \hline C_1 & D_1 & F_{d,1} & F_{f,1} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c|ccc} A_N & B_N & E_{d,N} & E_{f,N} \\ \hline C_N & D_N & F_{d,N} & F_{f,N} \end{array} \right] \right\} \quad (\text{IV.2})$$

Dans la suite, l'indice du temps est omis sans confusion pour simplifier l'écriture. Le générateur de résidu à base d'observateur identité est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_\alpha (y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_\alpha \hat{x} + D_\alpha u \\ r_\alpha &= y - \hat{y} \end{cases} \quad (\text{IV.3a})$$

Soit l'erreur d'estimation d'état $\tilde{x} = x - \hat{x}$, donc :

$$\dot{\tilde{x}} = (A_\alpha - L_\alpha C_\alpha) \tilde{x} + (E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}) d + (E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha}) f \quad (\text{IV.4a})$$

$$r_\alpha = C_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d + F_{f,\alpha} f \quad (\text{IV.4b})$$

La représentation d'état du générateur de résidu peut être écrite comme suit :

$$\dot{\tilde{x}} = A_\alpha^* \tilde{x} + E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f \quad (\text{IV.5})$$

$$r_\alpha = C_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d + F_{f,\alpha} f \quad (\text{IV.6})$$

où $A_\alpha^* = A_\alpha - L_\alpha C_\alpha$, $E_{d,\alpha}^* = E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}$ et $E_{f,\alpha}^* = E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha}$.

Les fonctions de sensibilité du résidu aux perturbations et aux défauts sont :

$$T_{rd_\alpha}(s) = C_\alpha (sI - A_\alpha^*)^{-1} E_{d,\alpha}^* + F_{d,\alpha} \quad (\text{IV.7a})$$

$$T_{rf_\alpha}(s) = C_\alpha (sI - A_\alpha^*)^{-1} E_{f,\alpha}^* + F_{f,\alpha} \quad (\text{IV.7b})$$

L'objectif $\mathcal{H}_-/ \mathcal{H}_\infty$ de l'observateur identité à commutation pour la détection du défaut est résumé par les conditions suivantes :

$$\|T_{rd}\|_\infty < \gamma \quad (\text{IV.8a})$$

$$\|T_{rf}\|_- > \beta \quad (\text{IV.8b})$$

Le problème est formulé comme suit : trouver les matrices L_α qui d'une part minimisent γ_α , et d'autre part maximisent β_α et telles que l'observateur à commutation pour la détection de défaut est stable, et assure une réponse temporelle rapide, c'est-à-dire une détection rapide du défaut.

Bien entendu, l'observateur commuté aura une performance \mathcal{H}_∞ globale de $\gamma = \max(\gamma_\alpha)$, et une performance \mathcal{H}_- globale de $\beta = \min(\beta_\alpha)$.

Remarque IV.1 (*Sélection des défauts*)

Pour certaines applications, il est demandé que le résidu soit sensible à une partie des défauts $f_1(t)$ et insensible au reste des défauts $f_2(t)$.

C'est le cas de la synthèse d'un générateur de résidu dédié (chaque résidu est sensible à un signal de défaut uniquement).

Dans cette configuration, la matrice E_f dans (IV.1) est décomposée en deux sous matrices $B_f = \begin{bmatrix} E_{f_1} & E_{f_2} \end{bmatrix}$, le vecteur des défauts est alors sous la forme $f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, on obtient :

$$E_f f(t) = \begin{bmatrix} E_{f_1} & E_{f_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = E_{f_1} f_1(t) + E_{f_2} f_2(t) \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi, en souhaitant que le résidu soit insensible aux défauts $f_2(t)$, ces signaux seront rajoutés aux perturbations à atténuer, on obtient alors les nouvelles matrices :

$$\check{E}_d = \begin{bmatrix} E_d & E_{f_2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10a})$$

$$\check{E}_f = E_{f_1} \quad (\text{IV.10b})$$

où les nouvelles entrées inconnues $\check{d}(t)$ et défauts $\check{f}(t)$ sont représentées par les relations :

$$\check{d}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ f_2(k) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11a})$$

$$\check{f}(t) = f_1(t) \quad (\text{IV.11b})$$

Dans le présent travail, une structure de générateur de résidu dédié est considérée, cette étape est importante pour l'écriture de la représentation d'état du système.

IV.2.2 Synthèse multi-objectifs

Dans ce chapitre, on considère les hypothèses suivantes :

Hypothèse IV.1 (Observabilité) : Les paires (A_α, C_α) sont supposées observables, où sans perte de généralité, détectables. Cette hypothèse est standard pour tous les problèmes à base d'observateur.

Hypothèse IV.2 (Détectabilité des défauts) : Les défauts sont détectables. La définition de la détectabilité établie dans (II.19) étendue pour les systèmes à commutation par le critère de Popov est :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - A_\alpha & E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{bmatrix} \right) = n + n_f, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{IV.12})$$

Hypothèse IV.3 (Défauts en basse fréquence) : Les défauts sont supposés avoir une dynamique en basse fréquence. En effet, la majorité des défauts sont localisés dans cette zone comme les offsets et les défaillances à faibles variations dans le temps (fuite d'un fluide, usure d'un composant, variation de résistance électrique, etc).

Hypothèse IV.4 (Commutation arbitraire) : Au moment de la commutation, le signal $\alpha(t)$ peut commuter entre n'importe quel sous-système : c'est une loi de commutation arbitraire.

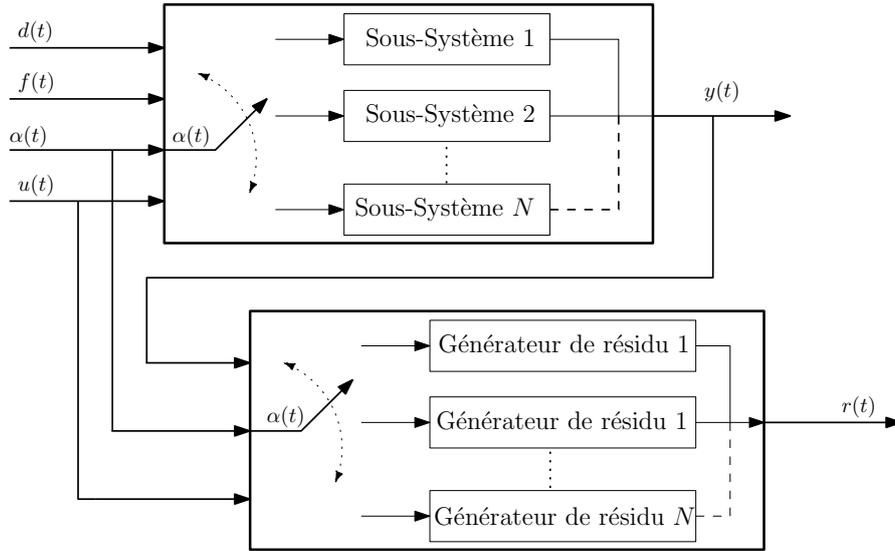


FIGURE IV.2 – Schéma du générateur de résidu à commutations à base d'observateur

La valeur du signal de commutation est supposée inconnue a priori, mais disponible en temps réel.

Hypothèse IV.5 (Stabilité avec un temps moyen de séjour) : Le système commuté est supposé stable, ou au moins stabilisable dans le cas de synthèse mixte contrôle/observation. En plus de la stabilité de chaque sous-système, la stabilité globale peut être assurée par l'hypothèse de respect d'un temps moyen de séjour τ_α sous la définition (II.6).

IV.2.3 Synthèse pour les systèmes propres

Hypothèse IV.6 (Système propre) : La fonction de sensibilité du résidu aux défauts est supposée propre. C'est-à-dire que la matrice F_{f_α} est de plein rang ligne.

Sous les hypothèses (H-IV.1) - (H-IV.6), la synthèse de l'observateur avec les objectifs définis dans la formulation est obtenue grâce aux trois théorèmes suivants :

1. le premier pour assurer la réjection de perturbation,
2. le deuxième pour sensibiliser le résidu au défaut,
3. et le troisième pour imposer un temps de réponse au générateur du résidu.

Théorème IV.1 (Observateur H_∞ à commutation)

Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme donnée en (IV.3), dans le cas sans défaut.

S'il existe des matrices définies positives P_α , des matrices U_α et des réels positifs γ_α ,

$\forall \alpha \in \mathcal{I}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + C_\alpha^T C_\alpha & P_\alpha E_{d,\alpha} + U F_{d,\alpha} \\ \hline + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha & + C_\alpha^T F_{d,\alpha} \\ \hline * & F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.13})$$

alors la condition (IV.8a) est garantie.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = -P_\alpha^{-1} U_\alpha \quad (\text{IV.14})$$

Démonstration : D'après la définition (II.11), la condition (IV.8a) est équivalente à :

$$\frac{\|r_{d_\alpha}\|_2}{\|d\|_2} < \gamma_\alpha \quad (\text{IV.15a})$$

La condition suffisante de stabilité sous l'hypothèse IV.5, est assurée en considérant la fonction de Lyapunov multiple $V_\alpha|_{f=0} = \tilde{x}^T P_\alpha \tilde{x}$ telle que :

$$V_\alpha > 0 \quad (\text{IV.15b})$$

$$\dot{V}_\alpha < 0 \quad (\text{IV.15c})$$

La condition (IV.15b) est satisfaite pour $P_\alpha > 0$. En combinant les inégalités (IV.18a) et (IV.15c), les inéquations suivantes sont obtenues :

$$\dot{V}_\alpha + r_{d_\alpha}^T r_{d_\alpha} - \gamma_\alpha^2 d^T d < 0 \quad (\text{IV.15d})$$

Ceci est équivalent à :

$$\dot{\tilde{x}}^T P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha \dot{\tilde{x}} + r_{d_\alpha}^T r_{d_\alpha} - \gamma_\alpha^2 d^T d < 0 \quad (\text{IV.15e})$$

Développant :

$$\begin{aligned} (A_\alpha^* \tilde{x} + E_{d,\alpha}^* d)^T P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha (A_\alpha^* \tilde{x} + E_{d,\alpha}^* d) \\ + (C_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d)^T (C_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d) - \gamma_\alpha^2 d^T d < 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.15f})$$

On obtient la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^{*T} P_\alpha + C_\alpha^T C_\alpha & P_\alpha B_{d_\alpha}^* + C_\alpha^T F_{d_\alpha} \\ \hline * & F_{d_\alpha}^T F_{d_\alpha} - \gamma_\alpha^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.15g})$$

Cette relation étant vraie $\forall \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \end{bmatrix} \neq 0$, alors :

$$\begin{bmatrix} P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^{*T} P_\alpha + C_\alpha^T C_\alpha & P_\alpha B_{d_\alpha}^* + C_\alpha^T F_{d_\alpha} \\ \hline * & F_{d_\alpha}^T F_{d_\alpha} - \gamma_\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.15h})$$

En développant les matrices A^* et E_d^* :

$$\begin{bmatrix} P_\alpha (A_\alpha - L_\alpha C_\alpha) + (A_\alpha - L_\alpha C_\alpha)^T P_\alpha & P_\alpha (E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}) \\ \hline + C_\alpha^T C_\alpha & + C_\alpha^T F_{d,\alpha} \\ \hline * & F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.15i})$$

Or ces inégalités sont des BMIs dues aux produits $P_\alpha L_\alpha$. Un changement de variable s'impose en introduisant $U_\alpha = P_\alpha L_\alpha$ et permet de les linéariser. On obtient alors les LMIs (IV.13) du théorème. ■

Théorème IV.2 (Observateur H_- à commutation)

Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme donnée en (IV.3), dans le cas sans perturbations.

S'il existe des matrices définies positives P_α , des matrices U_α et des réels positifs β_α , $\forall \alpha \in \mathcal{I}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha - C_\alpha^T C_\alpha & P_\alpha E_{d,\alpha} + U F_{d,\alpha} \\ + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha & -C_\alpha^T F_{d,\alpha} \\ \hline \star & -F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} + \beta_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.16})$$

alors la condition (IV.8b) est garantie.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = -P_\alpha^{-1} U_\alpha \quad (\text{IV.17})$$

Démonstration : La point de départ pour démontrer ce théorème est d'établir l'équivalence entre la spécification de sensibilité du résidu au défaut et l'équation suivante :

$$\frac{\|r_{f_\alpha}\|_2}{\|f\|_2} > \beta_\alpha \quad (\text{IV.18a})$$

Ensuite, couplée à la contrainte sur la dérivée de la fonction de Lyapunov :

$$\dot{V}_\alpha|_{d=0} - r_{f_\alpha}^T r_{f_\alpha} + \beta_\alpha^2 f^T f < 0 \quad (\text{IV.18b})$$

Et en suivant les mêmes étapes de calcul que la preuve du théorème précédent, la suite de la démonstration peut être facilement déduite. ■

Propriété IV.1 (Temps de montée)

Le temps de montée t_m d'un système est l'intervalle de temps pour atteindre 90% de la valeur finale. Pour les systèmes du premier ordre, t_m est approximé par :

$$t_m = \frac{2.2}{\lambda_{max}} \quad (\text{IV.19})$$

où λ_{max} est la valeur propre à partie réelle la plus grande.

Cette propriété montre la relation étroite entre le pôle dominant et la spécification temporelle. Elle est utilisée dans le théorème suivant :

Théorème IV.3 (Région de stabilité)

Soit les matrices $A_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$. S'il existe des matrices symétriques $P_\alpha > 0$ et des scalaires

positifs $\xi_{max,\alpha}$ tels que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + 2\xi_{max,\alpha} P_\alpha < 0 \quad (\text{IV.20})$$

Alors toutes les valeurs propres des A_α sont dans le demi plan à gauche des $\xi_{max,\alpha}$

Démonstration : Ce théorème découle des régions de stabilité définies dans (II.5), étendu pour les systèmes à commutation.

Ainsi, les systèmes commutés autonomes $\dot{x} = (A_\alpha + \xi_{max,\alpha} I)x$ sont stables au sens de Lyapunov, s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_\alpha > 0$ et une fonction quadratique $V_\alpha = X^T P_\alpha x$ telle que $\dot{V}_\alpha < 0$. Alors :

$$(A_\alpha + \xi_{max,\alpha} I)^T P_\alpha + P_\alpha (A_\alpha + \xi_{max,\alpha} I) < 0 \quad (\text{IV.21})$$

qui est équivalent à (IV.20). ■

Remarque IV.2

Dans la littérature, on trouve souvent la notion de stabilité asymptotique exponentielle comme mesure de la vitesse de convergence d'un système [Boyd 1994].

Ainsi pour le système autonome $\dot{e}(t) = Ae(t)$, le taux de convergence exponentielle $\beta > 0$ est défini par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-\beta t) \|e(t)\| = 0 \quad (\text{IV.22})$$

où $e(t)$ est le vecteur d'état.

$$\dot{V}(e(t)) < -2\beta V(e(t)) \quad (\text{IV.23a})$$

En utilisant la fonction de Lyapunov $V = e^T P e$, alors (IV.23a) est équivalent à :

$$e^T (A^T P + P A) e < -2\beta e^T P e \quad (\text{IV.23b})$$

$$\Leftrightarrow A^T P + P A + 2\beta P < 0 \quad (\text{IV.23c})$$

Comme on peut le voir, l'inégalité (IV.23c) est équivalente à (IV.20) par extension aux systèmes à commutation. Ceci montre que la convergence exponentielle peut être assurée par un placement de pôles dans une région LMI, avec $\beta \equiv \xi$.

Corollaire IV.3.1 (Observateur avec contrainte temporelle)

Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme donnée en (IV.3), dans le cas sans perturbations et sans défauts.

S'il existe des matrices définies positives P_α , des matrices U_α et des réels positifs $\xi_{max,\alpha}$, $\forall \alpha \in \mathcal{I}$ tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha + 2\xi_{max,\alpha} P_\alpha < 0 \quad (\text{IV.24a})$$

alors la condition de contrainte temporelle pour l'observateur est garantie, avec des temps de montée t_{m_α} inversement proportionnels aux $\xi_{max,\alpha}$.

En plus, les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = -P_\alpha^{-1}U_\alpha \quad (\text{IV.24b})$$

Démonstration : En appliquant le théorème IV.3 avec $A_\alpha = A_\alpha - L_\alpha C_\alpha$, et en passant par le même changement de variable que celui décrit dans les deux théorèmes précédents : $U_\alpha = P_\alpha L_\alpha$, le résultat du corollaire est directement déduit. ■

IV.2.3.1 Sensibilité aux défauts par modelage fréquentiel

Sous l'hypothèse (H-IV.3), les défauts sont en basse fréquence. Or d'après la définition de l'index H_- , la valeur singulière minimale est souvent située dans les hautes fréquences, de part la nature physique de la plupart des systèmes.

Le gain en haute fréquence est obtenu comme suit :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} T_{rf}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (C_\alpha(j\omega I - A_\alpha + L_\alpha C_\alpha)^{-1}(E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha}) + F_{f,\alpha}) = F_{f,\alpha} \quad (\text{IV.25})$$

Dans le cas de systèmes strictement propres où $F_{f,\alpha} = 0$, l'hypothèse (H-IV.1) n'est pas satisfaite, et donc la condition de plein rang ligne n'est pas vérifiée, l'index H_- est donc toujours égale à zéro. Par ailleurs, pour les systèmes propres, l'index H_- sera plus petit que $F_{f,\alpha}^T F_{f,\alpha}$.

Comme L_α n'agit que sur la dynamique en basse fréquence, ceci pose un problème dans la synthèse H_- . Cet effet est visible aussi sur les LMIs énoncées dans le théorème IV.2 : la valeur maximale de β est imposée par la relation

$$F_{f,\alpha}^T F_{f,\alpha} \geq \beta^2 I \quad (\text{IV.26})$$

vue la structure des LMIs et ce quelque soit le choix des gains L_α .

Pour "transférer" le minimum aux basses fréquences, un modelage fréquentiel est nécessaire. Ce modelage est un peu différent de celui de la synthèse H_∞ du problème standard : en plus du filtre de pondération, un terme additif direct est ajouté.

Cette méthode fût proposée dans [Liu 2005] et [Wang 2007], mais uniquement pour les systèmes LTI. Ici l'extension pour les systèmes à commutation est présentée.

Le but des termes additifs, est d'éviter la situation où $\|T_{rf}\|_- = 0$. Ensuite, le filtre de modelage qui est un filtre passe-haut avec un gain statique unitaire, permet de translater $\underline{\sigma}(T_{rf}(j\omega))$ vers la zone de fréquence souhaitée, qui est ici dans les basses fréquences.

Pour $F_{f,\alpha} = \begin{bmatrix} F_{f1,\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$, les termes additifs auxiliaires à rajouter sont de la forme :

$$D_{add,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_\alpha I \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Et les filtres de pondération $\mathcal{W}_{F,\alpha}$ sont définis comme suit :

$$\mathcal{W}_{F,\alpha}(s) = \left(\frac{s/\omega_{1,\alpha} + 1}{s/\omega_{2,\alpha} + 1} \right)^{m_\alpha} \quad (\text{IV.28})$$

où $\omega_{1,\alpha} < \omega_{2,\alpha}$ sont les fréquences de coupure du filtre passe-haut et m_α est l'ordre du filtre.

Remarque IV.3

Les paramètres $\omega_{1,\alpha}$, $\omega_{2,\alpha}$ et m_α sont choisis selon les spécifications de sensibilité sur $T_{rf_\alpha}(s)$. C'est équivalent au choix des filtres dans le cadre de l'approche H_∞ standard.

En pratique, il faut :

$$\omega_{1,\alpha} > \omega_0 \quad (\text{IV.29a})$$

$$\left(\frac{\omega_{2,\alpha}}{\omega_{1,\alpha}}\right)^m < D_{add,\alpha}^T D_{add,\alpha} \quad (\text{IV.29b})$$

avec ω_0 la pulsation propre délimitant la zone basse fréquence.

En notant la réalisation suivante du filtre $\mathcal{W}_{F,\alpha}$:

$$\mathcal{W}_{F,\alpha}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_{h,\alpha} & B_{h,\alpha} \\ \hline C_{h,\alpha} & D_{h,\alpha} \end{array} \right] \quad (\text{IV.30})$$

Le générateur de résidu à commutation augmenté des filtres de pondération et du terme additif devient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_\alpha (y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_\alpha \hat{x} + D_\alpha u \\ \tilde{r}_\alpha &= (y - \hat{y}) + D_{add,\alpha} f \\ \dot{x}_h &= A_{h,\alpha} x_h + B_{h,\alpha} \tilde{r}_\alpha \\ \bar{r} &= C_{h,\alpha} x_h + D_{h,\alpha} \tilde{r}_\alpha \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

En introduisant l'erreur d'estimation de l'état \tilde{x} aux équations (IV.31), le système augmenté devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\alpha - L_\alpha C_\alpha & 0 \\ B_{h,\alpha} C_\alpha & A_{h,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha} \\ B_{h,\alpha} F_{d,\alpha} \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha} \\ B_{h,\alpha} (F_{f,\alpha} + D_{add,\alpha}) \end{bmatrix} f \quad (\text{IV.32a})$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_\alpha &= \begin{bmatrix} D_{h_\alpha} C_\alpha & C_{h_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_{h,\alpha} F_{d,\alpha} \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} D_{h,\alpha} (F_{f,\alpha} + D_{add,\alpha}) \end{bmatrix} f \end{aligned} \quad (\text{IV.32b})$$

Soit l'état augmenté $x^a = [\tilde{x}^T \quad x_F^T]^T$, le système (IV.32) peut alors être réécrit avec la notation simplifiée suivante :

$$\dot{x}^a = A_\alpha^a x^a + E_{d,\alpha}^a d + E_{f,\alpha}^a f \quad (\text{IV.33a})$$

$$\bar{r} = C_\alpha^a x^a + F_{d,\alpha}^a d + F_{f,\alpha}^a f \quad (\text{IV.33b})$$

où

$$\begin{aligned} A_\alpha^a &= \begin{bmatrix} A_\alpha - L_\alpha C_\alpha & 0 \\ B_F C_\alpha & A_F \end{bmatrix}, & E_{f,\alpha}^a &= \begin{bmatrix} E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha} \\ B_F (F_{f,\alpha} + D_{add,\alpha}) \end{bmatrix}, & E_{d,\alpha}^a &= \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha} \\ B_F F_{d,\alpha} \end{bmatrix} \\ C_\alpha^a &= \begin{bmatrix} D_F C_\alpha & C_F \end{bmatrix}, & D_{f,\alpha}^a &= D_F (F_{f,\alpha} + D_{add,\alpha}) \text{ et } & D_{d,\alpha}^a &= D_F F_{d,\alpha} \end{aligned} \quad (\text{IV.33c})$$

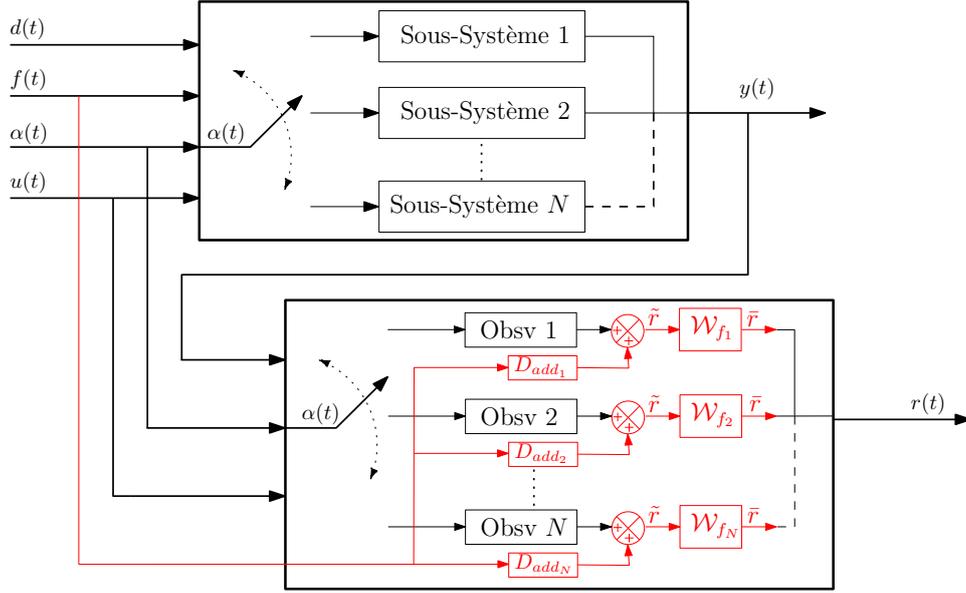


FIGURE IV.3 – Synopsis de synthèse H_- pour générateur de résidu à commutations

Remarque IV.4

Les éléments de modélage $D_{add,\alpha}$ et $\mathcal{W}_{F,\alpha}$ ne sont pas implémentés réellement, ils sont seulement rajoutés pour la synthèse des observateurs. Pour cela, ils sont illustrés en rouge sur la figure (IV.3).

Remarque IV.5

Il est à noter, que la valeur maximale que peut prendre β_α dans cette représentation, est toujours fixée par la condition de négativité du bloc diagonal de la LMI. En conséquence :

$$\beta_{max_\alpha} = \sqrt{D_{f,\alpha}^{aT} D_{f,\alpha}^a} \left(\frac{\omega_{1_\alpha}}{\omega_{2_\alpha}} \right)^{m_\alpha}$$

Cette valeur n'est pas obligatoirement atteinte, mais ça donne une idée sur le choix des paramètres D_{add} , ω_1 , ω_2 et m en fonction de la sensibilité souhaitée de l'observateur.

Remarque IV.6

Lors de la synthèse H_- , si la structure du système le permet, les éléments $D_{add,\alpha}$ et $\mathcal{W}_{F,\alpha}$ peuvent être communs pour tous les sous-systèmes, i.e. $D_{add_1} = D_{add_2} = \dots = D_{add_N}$ et $\mathcal{W}_{F,1} = \mathcal{W}_{F_2} = \dots = \mathcal{W}_{F_N}$. Cela permet de faciliter la synthèse. Toutefois quand les dynamiques des différents sous-systèmes sont très hétérogènes, cette simplification pourrait pénaliser les résultats.

IV.2.3.2 Synthèse de l'observateur dynamique $\mathcal{H}_-/ \mathcal{H}_\infty$ à commutation

Les objectifs de l'observateur à commutation sont décrits maintenant selon les relations suivantes :

$$\|T_{rd_\alpha}\|_\infty < \gamma_\alpha \quad (\text{IV.34a})$$

$$\|T_{rf_\alpha}\|_-^{[0,\bar{\omega}]} > \beta_\alpha \quad (\text{IV.34b})$$

où $\bar{\omega}$ est la fréquence limite des défauts à détecter.

En rajoutant les contraintes temporelles, ces objectifs sont atteints par une synthèse de générateur de résidus à commutation décrite par le théorème suivant :

Théorème IV.4 (Générateur de résidu multi-objectifs)

Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme donnée en (IV.3).

S'il existe des matrices définies positives P_α^a , des matrices U_α^a et des réels positifs γ_α , β_α et $\xi_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha^a A_\alpha^0 + A_\alpha^{0T} P_\alpha^a & P_\alpha^a E_\alpha^0 + U_\alpha^a F_{d,\alpha} \\ + U_\alpha^a C_\alpha^0 + C_\alpha^{0T} U_\alpha^{aT} + C_\alpha^{aT} C_\alpha^a & + C_\alpha^{aT} D_{d_\alpha}^a \\ \hline \star & D_{d_\alpha}^{aT} D_{d_\alpha}^a - \gamma_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.35a})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha^a A_\alpha^0 + A_\alpha^{0T} P_\alpha^a & P_\alpha^a E_\alpha^0 + U_\alpha^a F_{f,\alpha} \\ + U_\alpha^a C_\alpha^0 + C_\alpha^{0T} U_\alpha^{aT} - C_\alpha^{aT} C_\alpha^a & - C_\alpha^{aT} D_{f_\alpha}^a \\ \hline \star & -D_{f_\alpha}^{aT} D_{f_\alpha}^a + \beta_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.35b})$$

$$I^0 P_\alpha^a I^{0T} A_\alpha^0 + I^0 U_\alpha^a C_\alpha^0 + A_\alpha^{0T} I^0 P_\alpha^a I^{0T} + C_\alpha^{0T} U_\alpha^{aT} I^{0T} + 2\xi_{\max,\alpha} I^0 P_\alpha^a I^{0T} < 0 \quad (\text{IV.35c})$$

où les matrices A_α^0 , $E_{f_\alpha}^0$, $E_{d_\alpha}^0$, C_α^0 , C_α^a , $D_{d_\alpha}^a$, $D_{f_\alpha}^a$ I_0 sont :

$$\begin{aligned} A_\alpha^0 &= \begin{bmatrix} A_\alpha & 0 \\ B_{h,\alpha} C_\alpha & A_{h,\alpha} \end{bmatrix}, & E_{f_\alpha}^0 &= \begin{bmatrix} E_{f,\alpha} \\ B_{h,\alpha} (F_{f,\alpha} + D_{add,\alpha}) \end{bmatrix}, & E_{d_\alpha}^0 &= \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} \\ B_{h,\alpha} F_{d,\alpha} \end{bmatrix} \\ C_\alpha^0 &= \begin{bmatrix} -C_\alpha & 0 \end{bmatrix}, & C_\alpha^a &= \begin{bmatrix} D_{h,\alpha} C_\alpha & C_{h,\alpha} \end{bmatrix}, & I^0 &= \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix}, \\ D_{d_\alpha}^a &= D_{h,\alpha} F_{d,\alpha} \quad \text{et} & D_{f_\alpha}^a &= D_{h,\alpha} (F_{f,\alpha} + D_{add,\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

alors les conditions (IV.34a) sont garanties.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = I^0 (P_\alpha^a)^{-1} U_\alpha^a \quad (\text{IV.37})$$

Démonstration : Seuls les calculs pour obtenir les LMIs décrites par (IV.35a) sont donnés, pour

les deux autres ensembles de LMIs (IV.134b)-(IV.134), les mêmes étapes de calculs peuvent être suivies.

Les théorèmes (IV.1), (IV.2) et (IV.3.1) sont appliqués au système augmenté donné en (IV.33).

Ainsi, en utilisant la notation (IV.133b), les fonctions de sensibilité du système augmenté deviennent :

$$T_{\tilde{r}f_\alpha}^a := \left[\begin{array}{c|c} A_\alpha^a & E_{f_\alpha}^a \\ \hline C_\alpha^a & D_{f_\alpha}^a \end{array} \right], \quad T_{\tilde{r}d_\alpha}^a := \left[\begin{array}{c|c} A_\alpha^a & E_{d_\alpha}^a \\ \hline C_\alpha^a & D_{d_\alpha}^a \end{array} \right] \quad (\text{IV.38})$$

Appliquant le théorème (IV.1) au système augmenté $T_{\tilde{r}d_\alpha}^a$, l'ensemble des LMIs suivantes est déduit :

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha^a A_\alpha^a + C_\alpha^{aT} C_\alpha^a & P_\alpha^a E_{d_\alpha}^a \\ \hline + A_\alpha^{aT} P_\alpha^a & + C_\alpha^{aT} D_{d_\alpha}^a \\ \hline \star & D_{d_\alpha}^{aT} D_{d_\alpha}^a - \gamma_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{IV.39a})$$

En décomposant A_α^a et $E_{d_\alpha}^a$:

$$P_\alpha^a A_\alpha^a = P_\alpha^a \begin{bmatrix} A_\alpha - L_\alpha C_\alpha & 0 \\ B_F C_\alpha & A_F \end{bmatrix} = P_\alpha^a \begin{bmatrix} A_\alpha & 0 \\ B_{h,\alpha} C_\alpha & A_{h,\alpha} \end{bmatrix} + P_\alpha^a \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix} L_\alpha \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39b})$$

$$P_\alpha^a E_{d_\alpha}^a = P_\alpha^a \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha} \\ B_F F_{d,\alpha} \end{bmatrix} = P_\alpha^a \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} \\ B_{h,\alpha} F_{d,\alpha} \end{bmatrix} + P_\alpha^a \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix} L_\alpha F_{d,\alpha} \quad (\text{IV.39c})$$

Alors (IV.39a) peut être écrit avec la notation :

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha^a (A_\alpha^0 + I_0 L_\alpha C_\alpha^0) + C_\alpha^{aT} C_\alpha^a & P_\alpha^a (E_{d_\alpha}^0 + I_0 L_\alpha F_{d_\alpha}) \\ \hline + (A_\alpha^0 + I_0 L_\alpha C_\alpha^0)^T P_\alpha^a & + C_\alpha^{aT} D_{d_\alpha}^a \\ \hline \star & D_{d_\alpha}^{aT} D_{d_\alpha}^a - \gamma_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{IV.39d})$$

Enfin, pour éviter les non linéarités dans ces inégalités, les BMIs sont transformées en LMIs en effectuant le changement de variable $U_\alpha^a = P_\alpha^a I_0 L_\alpha$. Les LMIs (IV.35a) sont alors obtenues. ■

Remarque IV.7

Il est à noter que les matrices P^a dans la MLF, sont de dimension $(n + n_H) \times (n + n_H)$, avec n_H l'ordre du filtre \mathcal{F}_H , il est donc conseillé de garder le même ordre du filtre pour une homogénéité des matrices P^a (en supposant que tous les sous-systèmes sont de même ordre).

IV.2.3.3 Réjection de perturbations par structure propre

Au delà du problème d'optimisation H_-/H_∞ , une amélioration de la réjection des perturbations peut être obtenue en rajoutant un filtre algébrique en sortie du signal du résidu :

$$\tilde{r} = Q_{r,\alpha} r \quad (\text{IV.40})$$

La fonction de sensibilité devient alors :

$$T_{\tilde{r}d_\alpha}(s) = Q_{r,\alpha} (C_\alpha (sI - A_\alpha^*)^{-1} E_{d,\alpha}^* + F_{d,\alpha}) \quad (\text{IV.41})$$

Cette méthode est décrite par le théorème suivant :

Théorème IV.5 (Réjection de perturbation par structure propre)

Considérant le générateur de résidu, et supposant que la fonction de sensibilité de résidu aux perturbations donnée dans (IV.41) est strictement propre, c'est-à-dire la matrice $F_{d,\alpha} = 0$, alors les conditions suffisantes pour satisfaire un découplage des perturbations sont :

- (1) $Q_{r,\alpha}C_\alpha E_{d,\alpha} = 0$
- (2) Toutes les lignes de $H_\alpha = Q_{r,\alpha}C_\alpha$ sont des vecteurs propres à gauche de $A_\alpha^* = A_\alpha - L_\alpha C_\alpha$ correspondant à toutes les valeurs propres.

Démonstration : Notons par V_α et R_α les vecteurs propres à gauche et à droite des matrices A_α^* :

$$V_\alpha = [V_{\alpha_1} \ \dots \ V_{\alpha_n}], \quad R_\alpha = [R_{\alpha_1} \ \dots \ R_{\alpha_n}] \quad (\text{IV.42a})$$

Par définition des vecteurs propres à droite et à gauche, les propriétés suivantes sont vraies :

$$V_\alpha^T R_\alpha = \begin{bmatrix} V_{\alpha_1}^T R_{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & V_{\alpha_n}^T R_{\alpha_n} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.42b})$$

$$V_\alpha^T R_\alpha = I \quad \text{et} \quad V_\alpha^T = R_\alpha^{-1} \quad (\text{IV.42c})$$

Soit Λ_α les matrices diagonales des valeurs propres des matrices A_α^* , alors :

$$A_\alpha^* = R_\alpha \Lambda_\alpha R_\alpha^{-1} \quad (\text{IV.42d})$$

$$e^{A_\alpha^* t} = R_\alpha e^{\Lambda_\alpha t} R_\alpha^{-1} = R_\alpha e^{\Lambda_\alpha t} V_\alpha^T = \sum_{i=1}^{i=n} e^{\lambda_{\alpha_i} t} R_{\alpha_i} V_{\alpha_i}^T \quad (\text{IV.42e})$$

D'après la définition de la transformée de Laplace :

$$(sI - A_\alpha^*)^{-1} = \mathcal{L}(e^{A_\alpha^* t}) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{i=n} e^{\lambda_{\alpha_i} t} R_{\alpha_i} V_{\alpha_i}^T\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_{\alpha_i} V_{\alpha_i}^T}{s - \lambda_{\alpha_i}} \quad (\text{IV.42f})$$

Donc la fonction de sensibilité (IV.41) peut être écrite sous la forme suivante :

$$T_{\tilde{r}d_\alpha}(s) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_\alpha R_{\alpha_i} V_{\alpha_i}^T E_{d_\alpha}}{s - \lambda_{\alpha_i}} \quad (\text{IV.42g})$$

Pour satisfaire la condition de réjection de perturbation $T_{\tilde{r}d_\alpha}(s) = 0$, le dénominateur peut être omis, alors :

$$H_\alpha \sum_{i=1}^{i=n} R_{\alpha_i} V_{\alpha_i}^T E_{d_\alpha} = H_\alpha R_\alpha V_\alpha^T E_{d_\alpha} = H_\alpha E_{d_\alpha} = Q_{r,\alpha} C_\alpha E_{d_\alpha} = 0 \quad (\text{IV.42h}) \quad \blacksquare$$

Bien que ce théorème impose deux conditions sur les matrices Q_α , il est possible d'améliorer les performances de l'observateur en ne tenant compte que de la première condition :

$$Q_{r,\alpha} C_\alpha E_{d,\alpha} = 0 \quad (\text{IV.43a})$$

Une solution de (IV.43a) facile à calculer consiste à utiliser les pseudo-inverses de Moore-Penrose des matrices plein rang colonne $C_\alpha E_{d,\alpha}$:

$$(C_\alpha E_{d,\alpha})^+ = [(C_\alpha E_{d,\alpha})^T (C_\alpha E_{d,\alpha})]^{-1} (C_\alpha E_{d,\alpha})^T \quad (\text{IV.43b})$$

$$Q_{r,\alpha} = Q_{x,\alpha} [I - C_\alpha E_{d,\alpha} (C_\alpha E_{d,\alpha})^+] \quad (\text{IV.43c})$$

où $Q_{x,\alpha}$ offrent un degré de liberté.

Remarque IV.8

Il est à noter que seule la condition 1 du théorème IV.5 est satisfaite. Cependant avec la solution proposée avec le degré de liberté $Q_{x,\alpha}$, ces matrices peuvent être choisies pour satisfaire une partie la deuxième condition, c'est-à-dire que les lignes de $Q_{r,\alpha}$ sont des vecteurs propres à gauche de A_α^ . Cette méthode est souvent applicable quand les matrices C_α sont de la forme :*

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

IV.2.3.4 Algorithme pour la synthèse de SFDO

En utilisant le théorème (IV.4) et les différentes remarques et propriétés présentées pour la synthèse de l'observateur H_-/H_∞ à commutation, l'algorithme suivant montre les étapes à suivre pour la conception :

- (1) Définir les bandes passantes ξ_α de l'observateur, à partir des temps de montée désirés pour chaque sous-système.
- (2) Choisir les matrices $D_{add,\alpha}$, et les paramètres des filtres passe haut \mathcal{W}_{F_α} , en tenant comptes des remarques (IV.5) et (IV.3).
- (3) choisir des valeurs de départ des β_α
- (4) Résoudre le problème d'optimisation des LMIs (IV.134), avec comme objectif : minimiser $\gamma_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$
- (5) Reprendre les étapes (2) - (3) et (4) jusqu'à avoir un compromis entre de petites valeurs γ_α et de grandes valeurs β_α .
- (6) Quand les conditions des différentes fonctions de sensibilité sont satisfaites, le générateur de résidu à commutation peut être implémenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A_\alpha - L_\alpha C_\alpha)\hat{x} + \begin{bmatrix} (B_\alpha - L_\alpha D_\alpha) & L_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ r &= -C_\alpha \hat{x} + \begin{bmatrix} -D_\alpha & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.45})$$

- (7) Si les propriétés de réjection de perturbations par le problème d'optimisation ne sont pas satisfaisantes, un post filtre algébrique peut être rajouté en multipliant le signal de résidu par les matrices de découplages $Q_{r,\alpha}$, comme présenté dans (IV.43b). Le résidu sera alors de la forme donnée en (IV.40).

Remarque IV.9

Comme le décrit l'algorithme de synthèse, les LMIs (IV.134) sont résolues par un algorithme itératif.

En effet, seules les LMIs (IV.35a) sont sujettes aux critères d'optimisation $\min(\gamma_\alpha)$, alors que les deux autres LMIs sont uniquement testées pour leurs faisabilités, c'est-à-dire pour des valeurs données de ξ_{max_α} et β_α . Ce dernier est ajusté manuellement à chaque

itération telle que $\beta(k+1) > \beta(k)$, avec k le pas d'itération.

L'intérêt de cette méthode dite de dichotomie est d'obtenir un critère min-max, au lieu que d'autres critères trouvés dans la littérature comme $\max(\gamma^2 - \beta^2)$ ou $\max(\frac{\beta}{\gamma})$, qui ne sont pas toujours efficaces.

Enfin il faut noter que les couples résultats $(\gamma_\alpha, \beta_\alpha)$ sont des optimums locaux du problème H_-/H_∞ , puisqu'ils dépendent des valeurs initiales de β_α , et du nombre de pas de maximisation.

IV.2.4 Exemple

L'exemple académique suivant permet d'illustrer la méthode développée dans cette section. Soit le système LTI MIMO à commutation sous la forme (IV.1) avec les matrices d'états suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -20 & -100 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, E_{f_1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -40 & -300 \\ -15 & -92 \end{bmatrix}, F_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, F_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -23 & -110 \\ 1.4 & 3 \end{bmatrix}, E_{d_2} = \begin{bmatrix} 0.225 \\ 0.54 \end{bmatrix}, E_{f_2} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.051 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} -40 & -290 \\ -14 & -97 \end{bmatrix}, F_{d_2} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}, F_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le système est observable et propre. Les hypothèses sont satisfaites, un observateur à commutation stable avec des objectifs $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$ peut être synthétisé.

D'abord, les éléments de modelage fréquentiel sont définis pour chaque sous-système, ainsi :

– les termes additifs choisis sont :

$$D_{add,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix}, \quad D_{add,2} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46a})$$

– et les filtres de pondération sont :

$$\mathcal{W}_{f,1}(s) = \mathcal{W}_{f,2}(s) = \left(\frac{s/0.095 + 1}{s/8 + 1} \right)^2 \quad (\text{IV.46b})$$

Pour une réponse temporelle d'ordre 1s, on choisit :

$$\xi_{max,1} = \xi_{max,2} = 3 \quad (\text{IV.46c})$$

En utilisant les outils d'optimisation sous environnement Matlab tels que YALMIP ou SeDuMi, le problème d'optimisation présenté dans le théorème (IV.4) est résolu. Les étapes de l'algorithme de synthèse de l'observateur permettent de maximiser γ_α et maximiser β_α

Enfin, les matrices de gain post-synthèse Q_{r_α} peuvent être rajoutées en utilisant la formule (IV.43c)

Les valeurs obtenues pour les matrices de gain L_α et Q_{r_α} sont :

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.3269 & 1.9446 \\ 0.0643 & -0.2372 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0.3269 & 1.9446 \\ 0.0643 & -0.2372 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46d})$$

$$Q_{r_1} = \begin{bmatrix} 0.0882 & -0.2835 \\ -0.2835 & 0.9118 \end{bmatrix}, \quad Q_{r_2} = \begin{bmatrix} 0.0924 & -0.2896 \\ -0.2896 & 0.9076 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46e})$$

Les pôles des observateurs des sous-systèmes sont :

$$\lambda_{1,1} = -3.6394, \quad \lambda_{2,1} = -22.7884 \quad (\text{IV.46f})$$

$$\lambda_{2,1} = -3.0913, \quad \lambda_{2,1} = -123.796 \quad (\text{IV.46g})$$

La figure (IV.4) montre les différentes fonctions de sensibilité des résidus au défaut (à gauche) et perturbation (à droite), en comparant trois cas :

1. En bleu sont les courbes avec un générateur de résidu en boucle ouverte, c'est-à-dire $L_\alpha = 0, Q_{r_\alpha} = I$.
2. En vert pointillé sont les courbes avec un générateur de résidu par synthèse H_-/H_∞ , où les gains L_α sont obtenus par optimisation des LMIs du théorème (IV.4). Les post-gains ne sont pas rajoutés i.e. $Q_{r_\alpha} = I$.
3. En rouge ponctué sont les courbes avec un générateur de résidu par synthèse complète : H_-/H_∞ et découplage de perturbation décrit dans l'étape (7) de l'algorithme soit $Q_{r_\alpha} \neq I$.

D'après ces courbes, l'intérêt de la méthode est clair : la synthèse H_-/H_∞ avec modelage fréquentiel permet d'améliorer la sensibilité du défaut en basses fréquences (un gain de 12 dB), et en même temps d'atténuer l'effet des perturbations (comparaison courbes bleues vs. vertes).

En plus, comme le niveau de réjection de perturbation obtenu par l'optimisation est jugé non suffisant, les matrices Q_α sont rajoutées pour améliorer cette performance. Toutefois, cette procédure pénalise la sensibilité du résidu au défaut, qui baisse ici de 6 dB.

Pour la réponse temporelle, la figure (IV.5) à droite montre les deux réponses des signaux de résidus : en bleu sans la contrainte de placement de pôles et en vert avec placement de valeurs propres. Il est évident qu'avec cette contrainte, la réponse de l'observateur est bien plus rapide, mais au prix d'une moindre réjection de la perturbation : la courbe bleue est plus lisse.

Enfin, les courbes de la figure (IV.5) à gauche montre la réponse temporelle correspondante aux 3 étapes de synthèse, avec les mêmes couleurs utilisées pour les fonctions de sensibilité. En boucle ouverte, le résidu est très sensible aux perturbations et insensible aux défauts : il ne peut donner aucune information significative. En vert et en rouge, l'effet du défaut est mis en évidence, mais en utilisant la synthèse complète, la réjection de perturbation est bien meilleure. Il est à noter qu'en rajoutant le placement de pôle, une réponse en 1s est obtenue.

La synthèse globale permet d'atteindre les objectifs du SFDO :

1. la réjection de perturbation est assurée (courbe rouge lisse),
2. une meilleure sensibilité au défaut en basse fréquence est garantie (comparée à la courbe bleue),
3. la réponse temporelle est assez rapide ($t_m = 1s$, comme prévue dans les spécifications).

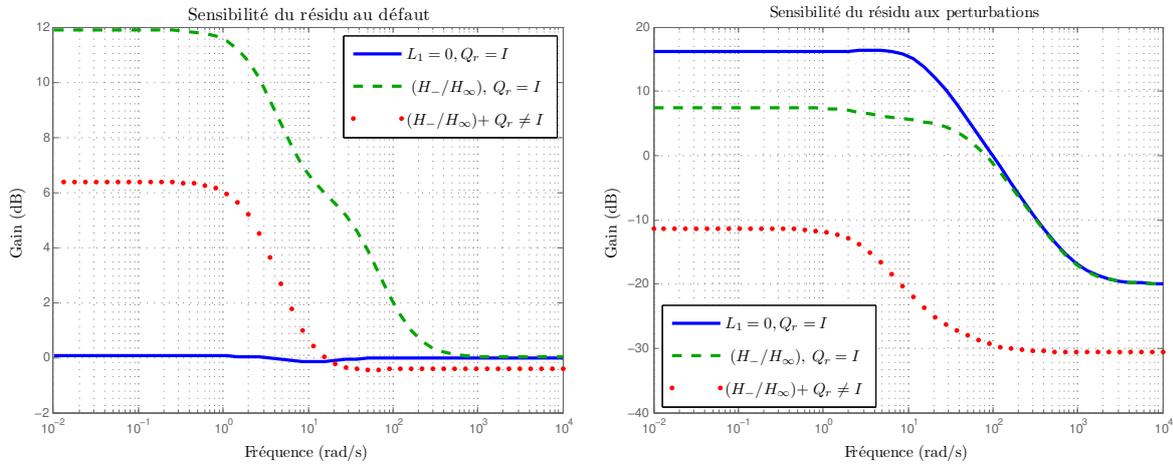


FIGURE IV.4 – Fonctions de sensibilité des résidus aux perturbations et défauts ($T_{rf_1}(j\omega)$ à gauche, $T_{rd_1}(j\omega)$ à droite)

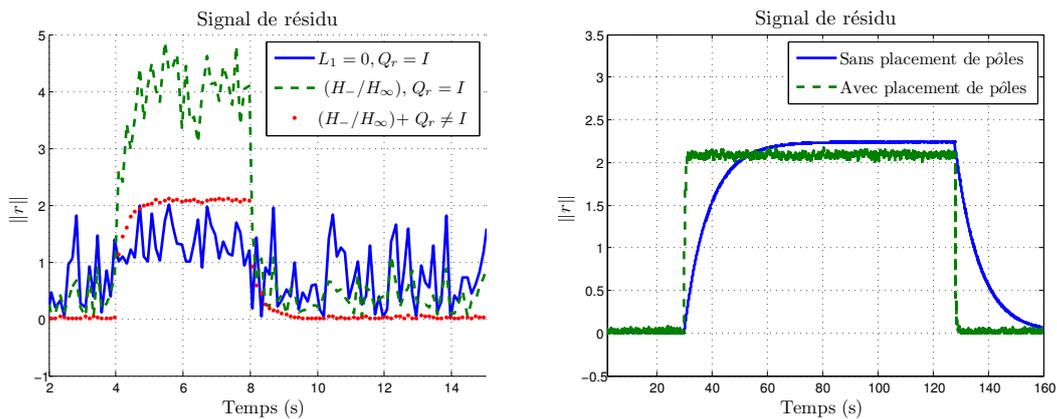


FIGURE IV.5 – Signaux de résidu $r(t)$ avec les différents étapes de synthèse

IV.2.5 Conclusion

Dans cette section, le problème de synthèse d'un observateur à commutation multi-objectifs pour la détection de défaut dans un système LTI à commutation a été traité.

Les objectifs demandés sont :

- Une sensibilité au défaut par approche de l'index H_-
- Une réjection de perturbation par approche H_∞ et découplage par structure propre
- Une contrainte de réponse temporelle par placement de valeurs propres

Sous certaines hypothèses, des théorèmes sont présentés pour garantir chacune de ces performances. Ils sont formulés par des LMIs décrivant un problème d'optimisation multi-critères : maximiser la sensibilité aux défauts et minimiser la sensibilité aux perturbations. Ce problème est résolu en utilisant les outils d'optimisation numériques.

En plus, l'approche de sensibilité \mathcal{H}_- est étudiée en détaillant ses limites, et en proposant

une solution efficace pour tenir compte à la fois des défauts capteurs ou actionneurs.

Un algorithme de synthèse est enfin élaboré en proposant une méthodologie avec les différents éléments à prendre en compte pour la conception de SFDO.

Cette méthode est illustrée par un exemple académique, en montrant l'intérêt des différentes étapes de la synthèse.

Dans la section suivante, une extension du SFDO est proposée pour garantir la robustesse aux incertitudes.

IV.3 Observateur H_-/H_∞ robuste à commutation

IV.3.1 Observateurs pour les systèmes LTI incertains à commutation

On considère la représentation d'état d'une classe de systèmes LTI incertains à commutation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \bar{A}_{\alpha(t)}x(t) + B_{\alpha(t)}u(t)E_{d,\alpha(t)}d(t) + E_{f,\alpha(t)}f(t) \\ y(t) &= C_{\alpha(t)}x(t) + D_{\alpha(t)}u(t) + F_{d,\alpha(t)}d(t) + F_{f,\alpha(t)}f(t) \end{cases} \quad (\text{IV.47})$$

où les vecteurs $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ et $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ et le signal $\alpha(t)$ ont la même définition que pour le système (IV.1).

Les incertitudes du modèle peuvent être représentées sous plusieurs formes. Ici, la forme additive est considérée :

$$\bar{A}_{\alpha(t)} = A_{\alpha(t)} + \Delta_{x,\alpha(t)}N_{x,\alpha(t)} \quad (\text{IV.48})$$

où $\Delta_{x,\alpha}$ sont les matrices d'incertitudes de l'état, et les matrices $N_{x,\alpha(t)}$ définissent les directions de ces incertitudes.

Les matrices A_α , B_α , $E_{d,\alpha}$, $E_{f,\alpha}$, C_α , D_α , $F_{d,\alpha}$ et $F_{f,\alpha}$ sont les matrices nominales du système LTI à commutation.

En plus des hypothèses pour le SFDO, la proposition suivante est supposée vraie :

Hypothèse IV.7 (Incertaines bornées) : Les matrices des incertitudes $\Delta_{x,\alpha}$ sont inconnues, mais elles sont supposées bornées :

$$\|\Delta_{x,\alpha}\|_2 \leq \varepsilon_{x,\alpha} \quad (\text{IV.49})$$

La représentation d'état peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A_\alpha + \Delta_{x,\alpha}N_{x,\alpha})x + B_\alpha u + E_{d,\alpha}d + E_{f,\alpha}f \\ y &= C_\alpha x + D_\alpha u + F_{d,\alpha}d + F_{f,\alpha}f \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$

Introduisant une variable locale χ_α , le système peut alors être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_\alpha x + B_\alpha u + E_{d,\alpha}d + E_{f,\alpha}f + \chi_\alpha \\ \chi_\alpha &= \Delta_{x,\alpha}N_{x,\alpha}x \\ y &= C_\alpha x + D_\alpha u + F_{d,\alpha}d + F_{f,\alpha}f \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

Le générateur de résidu robuste (SRFDO pour *switched robust FDO*) est construit à partir d'un observateur identité à commutation :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_\alpha (y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_\alpha \hat{x} + D_\alpha u \\ r_\alpha &= y - \hat{y} \end{cases} \quad (\text{IV.52})$$

Définissant l'erreur d'estimation de l'état $\tilde{x} = x - \hat{x}$, on obtient :

$$\dot{\tilde{x}} = A_\alpha \tilde{x} + B_\alpha u + L_\alpha C_\alpha \tilde{x} + L_\alpha F_{d,\alpha} d + L_\alpha F_{f,\alpha} f \quad (\text{IV.53a})$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_\alpha x + \chi_\alpha + B_\alpha u + E_{d,\alpha} d + E_{f,\alpha} f \\ &\quad - A_\alpha \hat{x} - B_\alpha u - L_\alpha C_\alpha \tilde{x} - L_\alpha F_{d,\alpha} d - L_\alpha F_{f,\alpha} f \\ &= (A_\alpha - L_\alpha C_\alpha) \tilde{x} + (E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}) d + (E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha}) f + \chi_\alpha \end{aligned} \quad (\text{IV.53b})$$

$$r_\alpha = C_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d + F_{f,\alpha} f \quad (\text{IV.53c})$$

En utilisant la formulation dans (IV.51), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A_\alpha^* \tilde{x} + E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f + \chi \\ \chi &= \Delta_{x,\alpha} N_{x,\alpha} x \\ r_\alpha &= C_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d + F_{f,\alpha} f \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

avec $A_\alpha^* = A_\alpha - L_\alpha C_\alpha$, $E_{f,\alpha}^* = E_{f,\alpha} - L_\alpha F_{f,\alpha}$ et $E_{d,\alpha}^* = E_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}$.

Les fonctions de sensibilité du résidu aux défauts et perturbations sont rappelées par :

$$T_{rf_\alpha}(s) = C_\alpha (sI - A_\alpha^*)^{-1} E_{f,\alpha}^* + F_{f,\alpha} \quad (\text{IV.55a})$$

$$T_{rd_\alpha}(s) = C_\alpha (sI - A_\alpha^*)^{-1} E_{d,\alpha}^* + F_{d,\alpha} \quad (\text{IV.55b})$$

Les objectifs du SRFDO sont résumés ci-après :

1. Garantir la performance H_- pour une sensibilité au défaut :

$$\|T_{rf_\alpha}\|_- > \beta_\alpha \quad (\text{IV.56a})$$

2. Garantir la performance H_∞ pour une atténuation des perturbations

$$\|T_{rd_\alpha}\|_\infty < \gamma_\alpha \quad (\text{IV.56b})$$

3. Garantir une réponse temporelle correcte de l'observateur commuté
4. Garantir une robustesse aux incertitudes de modèle

Le problème est une extension de la synthèse de SFDO, avec une quatrième performance qui est la robustesse aux incertitudes. Le but est donc de trouver les matrices L_α qui assurent les quatre objectifs de SRFDO.

IV.3.2 Synthèse robuste

Théorème IV.6 (Observateur robuste H_∞ à commutation)

¹ Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme donnée en (IV.52), et ¹

pour la classe de système LTI incertain (IV.50) sans défaut.

S'il existe des matrices définies positives P_α , des matrices U_α et des réels positifs γ_α , $\forall \alpha \in \mathcal{I}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{d,\alpha} & \Upsilon_{d,\alpha} & P_\alpha B_\alpha & -C_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \\ \star & J_{d,\alpha} & 0 & -F_{d,\alpha}^T U_\alpha^T & 0 \\ \star & \star & 0 & B_\alpha^T P_\alpha & 0 \\ \star & \star & \star & \Pi_\alpha & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.57a})$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_{d,\alpha} = & P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + A_\alpha^T P_\alpha + \\ & C_\alpha^T U_\alpha^T + C_\alpha^T C_\alpha + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{IV.57b})$$

$$\Upsilon_{d,\alpha} = P_\alpha E_{d,\alpha} + U_\alpha F_{d,\alpha} + C_\alpha^T F_{d,\alpha}, \quad (\text{IV.57c})$$

$$J_{d,\alpha} = F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I, \quad (\text{IV.57d})$$

$$\Pi_\alpha = A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} + C_\alpha^T C_\alpha \quad (\text{IV.57e})$$

alors ce générateur de résidu à commutation est robuste aux incertitudes et la condition (IV.8a) est garantie.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = -P_\alpha^{-1} U_\alpha \quad (\text{IV.57f})$$

Démonstration : Les contraintes générales pour la synthèse d'un observateur robuste à commutation pour la détection de défaut sont exprimées ci-après :

- Il existe des matrices définies positives $P_\alpha > 0$, la condition suffisante de stabilité par fonction de Lyapunov multiple (MLF) est :

$$V_\alpha = \tilde{x}^T P_\alpha \tilde{x} + \hat{x}^T P_\alpha \hat{x} \quad (\text{IV.58a})$$

$$\dot{V}_\alpha < 0 \quad (\text{IV.58b})$$

- Il existe des réels positifs γ_α , tels que la condition \mathcal{H}_∞ de réjection de perturbation (IV.55b) est formulée par :

$$\|r_\alpha|_{f=0}\|_2 < \gamma_\alpha \|d\|_2 \quad (\text{IV.58c})$$

- Les variables locales satisfont la propriété déduite de l'hypothèse (H-IV.7) :

$$\begin{aligned} \chi^T \chi &= x^T N_{x,\alpha}^T \Delta_{x,\alpha}^T \Delta_{x,\alpha} N_{x,\alpha} x \\ &< \varepsilon^2 x^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} x \end{aligned} \quad (\text{IV.58d})$$

D'après la définition de l'erreur d'estimation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} x &= (\tilde{x} + \hat{x})^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} (\tilde{x} + \hat{x}) \\ &= \tilde{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \tilde{x} + \hat{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \hat{x} + \tilde{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \hat{x} + \hat{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \tilde{x} \\ &< 2\tilde{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \tilde{x} + 2\hat{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \hat{x} \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

Combinant les inéquations (IV.58a) - (IV.58c), les objectifs de stabilité et d'atténuation de perturbations sont satisfaits si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\dot{V}_\alpha + r_\alpha^T r_\alpha - \gamma_\alpha^2 d^T d < 0 \quad (\text{IV.60})$$

où $V_\alpha = V_{1,\alpha} + V_{2,\alpha}$ avec $V_{1,\alpha} = \tilde{x}^T P_\alpha \tilde{x}$ et $V_{2,\alpha} = \hat{x}^T P_\alpha \hat{x}$.

En utilisant les propriétés (IV.58d) et (IV.59), la forme générale de la dérivée de chacune des parties de la MLF sont :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,\alpha} &= (A_\alpha^* \tilde{x} + E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f + \chi_\alpha)^T P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha (A_\alpha^* \tilde{x} + E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f + \chi_\alpha) \\ &= \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^{*T} P_\alpha) \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f) \\ &\quad + (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f)^T P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha \chi + \chi_\alpha^T P_\alpha \tilde{x} \\ &< \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha) \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f) \\ &\quad + (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f)^T P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha P_\alpha^T \tilde{x} + \chi_\alpha^T \chi_\alpha \\ &< \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha) \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f) \\ &\quad + (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f)^T P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha^2 \tilde{x} + \varepsilon_x^2 x^T N_x^T N_x x \\ &< \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha) \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f) + \tilde{x}^T P_\alpha^2 \tilde{x} \\ &\quad + (E_{d,\alpha}^* d + E_{f,\alpha}^* f)^T P_\alpha \tilde{x} + \varepsilon_x^2 (2\tilde{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \tilde{x} + 2\hat{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \hat{x}) \\ &< \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha + 2P_\alpha^2 + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha}) \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha E_{d,\alpha}^* d \\ &\quad + d^T E_{d,\alpha}^{*T} P_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha E_{f,\alpha}^* f + f^T E_{f,\alpha}^{*T} P_\alpha \tilde{x} + 2\varepsilon_x^2 \hat{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \hat{x} \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,\alpha} &= \hat{x}^T P_\alpha \dot{\hat{x}} + \hat{x}^T P_\alpha \dot{\hat{x}} \\ &= (A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_\alpha C_\alpha \tilde{x} + L_\alpha F_{d,\alpha} d + L_\alpha F_{f,\alpha} f)^T P_\alpha \hat{x} \\ &\quad + \hat{x}^T P_\alpha (A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_\alpha C_\alpha \tilde{x} + L_\alpha F_{d,\alpha} d + L_\alpha F_{f,\alpha} f) \\ &= \hat{x}^T (A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha) \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha B_\alpha u + u^T B_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha C_\alpha \tilde{x} \\ &\quad + \tilde{x}^T C_\alpha^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha F_{d,\alpha} d + d^T F_{d,\alpha}^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} \\ &\quad + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha F_{f,\alpha} f + f^T F_{f,\alpha}^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

Dans le cas sans défaut, les inégalités (IV.60)-(IV.62) donnent :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\alpha|_{f=0} &+ r_\alpha^T r_\alpha - \gamma_\alpha^2 d^T d \\ &< \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha + 2P_\alpha^2 + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha}) \tilde{x} + \tilde{x}^T P_\alpha E_{d,\alpha}^* d \\ &\quad + d^T E_{d,\alpha}^{*T} P_\alpha \tilde{x} + 2\varepsilon_x^2 \hat{x}^T N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} \hat{x} + \hat{x}^T (A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha) \hat{x} \\ &\quad + \hat{x}^T P_\alpha B_\alpha u + u^T B_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha C_\alpha \tilde{x} + \tilde{x}^T C_\alpha^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} \\ &\quad + \tilde{x}^T C_\alpha^T F_{d,\alpha} d + d^T F_{d,\alpha}^T C_\alpha \tilde{x} + d^T F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} d + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha F_{d,\alpha} d \\ &\quad + d^T F_{d,\alpha}^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + \tilde{x}^T C_\alpha^T C_\alpha \tilde{x} - \gamma_\alpha^2 d^T d \\ &< \tilde{x}^T (P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha + 2P_\alpha^2 + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} + C_\alpha^T C_\alpha) \tilde{x} + \tilde{x}^T (P_\alpha E_{d,\alpha}^* \\ &\quad + C_\alpha^T F_{d,\alpha}) d + d^T (E_{d,\alpha}^{*T} P_\alpha + F_{d,\alpha}^T C_\alpha) \tilde{x} + \hat{x}^T (A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha \\ &\quad + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha}) \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha B_\alpha u + u^T B_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha C_\alpha \tilde{x} \\ &\quad + \tilde{x}^T C_\alpha^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + \hat{x}^T P_\alpha L_\alpha F_{d,\alpha} d + d^T F_{d,\alpha}^T L_\alpha^T P_\alpha \hat{x} + d^T (F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I) d \\ &= \Gamma_\alpha|_{f=0} < 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

Ainsi, s'il existe une solution des inégalités $\Gamma_\alpha|_{f=0} < 0$ alors cette solution majorée satisfait (IV.60).

Ces inégalités peuvent être mises sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \\ u \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_{d,\alpha}^* & \Upsilon_{d,\alpha}^* & P_\alpha B_\alpha & C_\alpha^T L_\alpha^T P_\alpha \\ \star & J_{d,\alpha} & 0 & F_{d,\alpha}^T L_\alpha^T P_\alpha \\ \star & \star & 0 & B_\alpha^T P_\alpha \\ \star & \star & \star & \Pi_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ d \\ u \\ \hat{x} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.64a})$$

où

$$\Omega_{d,\alpha}^* = P_\alpha A_\alpha^* + A_\alpha^* P_\alpha + 2P_\alpha^2 + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} + C_\alpha^T C_\alpha, \quad (\text{IV.64b})$$

$$\Upsilon_{d,\alpha}^* = P_\alpha E_{d,\alpha}^* + C_\alpha^T F_{d,\alpha}, \quad (\text{IV.64c})$$

$$J_{d,\alpha} = F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I, \quad (\text{IV.64d})$$

$$\Pi_\alpha = A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} + C_\alpha^T C_\alpha \quad (\text{IV.64e})$$

Les inégalités décrites par (IV.64a) sont vraies $\forall [\tilde{x}^T \ d^T \ u^T \ \hat{x}^T]^T \neq 0$, alors :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{d,\alpha}^* & \Upsilon_{d,\alpha}^* & P_\alpha B_\alpha & C_\alpha^T L_\alpha^T P_\alpha \\ \star & J_{d,\alpha}^* & 0 & F_{d,\alpha}^T L_\alpha^T P_\alpha \\ \star & \star & 0 & B_\alpha^T P_\alpha \\ \star & \star & \star & \Pi_\alpha \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.65})$$

Enfin, ces BMIs en P_α et L_α sont transformées en LMIs par le simple changement de variable $U_\alpha = -P_\alpha L_\alpha$. En utilisant le complément de Schur pour $P_\alpha^T P_\alpha$, les LMIs du théorème (IV.6) sont retrouvées. \blacksquare

Remarque IV.10

Le terme $\hat{x}^T P_\alpha \hat{x}$ a été rajouté à la MLF dans (IV.58a) afin d'assurer la faisabilité des LMI (IV.57a). En effet, sans ce terme, l'élément diagonal Π_α se réduit à $2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha}$ qui est positif, menant à un problème infaisable.

Corollaire IV.6.1

Pour les systèmes LTI certains à commutation, l'observateur \mathcal{H}_∞ (IV.52) assure une réjection de défaut si les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\left[\begin{array}{c|c} P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + C_\alpha^T C_\alpha & P_\alpha E_{d,\alpha} + U_\alpha F_{d,\alpha} \\ \hline + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha & + C_\alpha^T F_{d,\alpha} \\ \hline \star & F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.66})$$

où les gains de l'observateur sont $L_\alpha = -P_\alpha^{-1} U_\alpha$.

Démonstration : Pour les systèmes certains, les matrices $N_{x,\alpha}$ qui définissent les directions des incertitudes sont nulles.

Les LMIs (IV.57a) sont de la formes :

$$\left[\begin{array}{c|c} \Omega_{d,\alpha} & \Upsilon_{d,\alpha} \\ \hline \star & J_{d,\alpha} \\ \hline \star & \Lambda_\alpha \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.67})$$

S'il existe une solution pour (IV.67), alors les LMIs suivantes sont faisables :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{d,\alpha} & \Upsilon_{d,\alpha} \\ \star & J_{d,\alpha} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.68})$$

Elles sont bien les LMIs obtenues dans le théorème (IV.1). ■

Théorème IV.7 (Observateur robuste sensible H_- à commutation)

Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme donnée en (IV.52), pour la classe de système LTI incertain (IV.50) sans perturbations.

S'il existe des matrices définies positives P_α , des matrices U_α et des réels positifs β_α , $\forall \alpha \in \mathcal{I}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{f,\alpha} & \Upsilon_{f,\alpha} & P_\alpha B_\alpha & -C_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \\ \star & J_{f,\alpha} & 0 & F_{f,\alpha}^T U_\alpha^T & 0 \\ \star & \star & 0 & B_\alpha^T P_\alpha & 0 \\ \star & \star & \star & \Pi_\alpha & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.69a})$$

où

$$\Omega_{f,\alpha} = P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha^T - C_\alpha^T C_\alpha + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha}, \quad (\text{IV.69b})$$

$$\Upsilon_{f,\alpha} = P_\alpha E_{f,\alpha} + U_\alpha F_{f,\alpha} + C_\alpha^T F_{f,\alpha}, \quad (\text{IV.69c})$$

$$J_{d,\alpha} = -F_{f,\alpha}^T F_{f,\alpha} + \beta_\alpha^2 I, \quad (\text{IV.69d})$$

$$\Pi_\alpha = A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} + C_\alpha^T C_\alpha \quad (\text{IV.69e})$$

alors ce générateur de résidu à commutation est robuste aux incertitudes et la condition (IV.8b) est garantie.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = -P_\alpha^{-1} U_\alpha \quad (\text{IV.69f})$$

Démonstration : La preuve de ce théorème est très similaire à celle du théorème (IV.6), avec quelques termes différents et au signe près.

Les propriétés suivantes sont les contraintes pour un observateur robuste sensible aux défauts :

- Il existe des réels positifs $\beta_\alpha > 0$, où la condition de sensibilité aux défauts (IV.55a) par indice H_- est :

$$\|r_\alpha|_{d=0}\|_2 > \beta_\alpha \|f\|_2 \quad (\text{IV.70})$$

- La stabilité et la borne sur les incertitudes sont les mêmes que dans le théorème précédent, L'inégalité à résoudre est alors la suivante :

$$\dot{V}_\alpha|_{d=0} - r_\alpha^T r_\alpha + \beta_\alpha^2 f^T f < 0 \quad (\text{IV.71})$$

Ensuite, en suivant les mêmes étapes de calcul que dans la démonstration du théorème précédent, les LMIs de ce théorème sont retrouvées. ■

IV.3.3 Synthèse de générateur de résidu robuste multi-objectifs

Les objectifs du générateur de résidu énoncé à l'introduction de cette section sont alors retrouvés par le théorème suivant :

Théorème IV.8 (Générateur de résidu robuste à commutation multi-objectifs)

Considérant le générateur de résidu à commutation sous la forme (IV.52), pour la classe de système LTI incertain (IV.50).

S'il existe des matrices définies positives P_α , des matrices U_α et des réels positifs γ_α , β_α et $\xi_{max_\alpha} \forall \alpha \in \mathcal{I}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{d,\alpha} & \Upsilon_{d,\alpha} & P_\alpha B_\alpha & -C_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \\ * & J_{d,\alpha} & 0 & -F_{d,\alpha}^T U_\alpha^T & 0 \\ * & * & 0 & B_\alpha^T P_\alpha & 0 \\ * & * & * & \Pi_\alpha & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.72a})$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{f,\alpha} & \Upsilon_{f,\alpha} & P_\alpha B_\alpha & -C_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \\ * & J_{f,\alpha} & 0 & F_{f,\alpha}^T U_\alpha^T & 0 \\ * & * & 0 & B_\alpha^T P_\alpha & 0 \\ * & * & * & \Pi_\alpha & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.72b})$$

$$P_\alpha A_\alpha + A_\alpha^T P_\alpha + U_\alpha C_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha^T - 2\xi_\alpha P_\alpha < 0 \quad (\text{IV.72c})$$

$$P_\alpha > 0 \quad (\text{IV.72d})$$

avec

$$\Omega_{d,\alpha} = P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha^T + C_\alpha^T C_\alpha \quad (\text{IV.72e})$$

$$\Omega_{f,\alpha} = P_\alpha A_\alpha + U_\alpha C_\alpha + A_\alpha^T P_\alpha + C_\alpha^T U_\alpha^T - C_\alpha^T C_\alpha \quad (\text{IV.72f})$$

$$\Upsilon_{d,\alpha} = P_\alpha E_{d,\alpha} + U_\alpha F_{d,\alpha} + C_\alpha^T F_{d,\alpha} \quad (\text{IV.72g})$$

$$\Upsilon_{f,\alpha} = P_\alpha E_{f,\alpha} + U_\alpha F_{f,\alpha} - C_\alpha^T F_{f,\alpha} \quad (\text{IV.72h})$$

$$J_{d,\alpha} = F_{d,\alpha}^T F_{d,\alpha} - \gamma_\alpha^2 I \quad (\text{IV.72i})$$

$$J_{f,\alpha} = -F_{f,\alpha}^T F_{f,\alpha} + \beta_\alpha^2 I \quad (\text{IV.72j})$$

$$\Pi_\alpha = A_\alpha^T P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + 2\varepsilon_x^2 N_{x,\alpha}^T N_{x,\alpha} + C_\alpha^T C_\alpha \quad (\text{IV.72k})$$

alors ce générateur de résidu à commutation est robuste aux incertitudes et les conditions H_- , H_∞ , de stabilité et de temps de réponse transitoire sont garanties.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L_\alpha = -P_\alpha^{-1} U_\alpha \quad (\text{IV.72l})$$

Démonstration : Ce théorème est obtenu en concaténant les théorèmes H_∞ (IV.6) et H_- (IV.7).

Par ailleurs, pour satisfaire la contrainte temporelle, le résultat du corollaire (IV.3.1) est ajouté. ■

Remarque IV.11

Dans cette section, l'étude du modelage fréquentiel dans la synthèse de l'objectif H_- est omise. Bien que ce modelage soit primordial dans la synthèse de l'observateur, il n'a pas été rajouté pour éviter la répétition.

IV.3.4 Conclusion

Dans cette section, l'extension de la synthèse H_-/H_∞ a été présentée pour une classe de système LTI incertains à commutation.

Les conditions suffisantes pour la synthèse d'un générateur de résidu robuste à commutation sont données et formulées par des LMIs, en utilisant les propriétés matricielles telles que le lemme de projection et le complément de Schur.

IV.4 Détection de défaut par observateur généralisé

IV.4.1 Introduction

Dans les sections précédentes, le problème de synthèse de générateur de résidu était abordé à base d'observateur identité à commutation, où seuls les matrices de gains L_α devaient être déterminées.

Par ailleurs, l'observateur identité implique la reconstruction de tout le vecteur d'état. Or, parmi les n états, p état sont directement obtenu à partir de la mesure, et seuls $n - p$ sont non disponibles. Dans le cadre d'un observateur généralisé, ou observateur d'ordre réduit, il suffit de reconstruire au moins les états inconnus.

Dans cette section, on présentera alors la synthèse de générateur de résidu à commutation H_- à base d'observateur généralisé de Luenberger d'ordre plein, réduit et minimal.

Remarque IV.12

Pour simplifier l'écriture et éviter les répétitions, seul le problème H_- est traité. On considère que le système LTI à commutation n'est pas affecté par des perturbations. Cette approche peut être facilement généralisée pour une synthèse H_-/H_∞ par dualité, comme le montre les sections précédentes.

Remarque IV.13

Dans cette partie, le système étudié sera en temps discret, pour donner une généralisation de l'approche dans les deux cas : continu et discret.

IV.4.2 Formulation du problème

Considérant la représentation d'état d'une classe de système LTI à commutation suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_{\alpha(k)}x_k + B_{\alpha(k)}u_k + E_{f,\alpha(k)}f_k \\ y_k &= C_{\alpha(k)}x_k + F_{f,\alpha(k)}f_k \end{cases} \quad (\text{IV.73})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ sont respectivement l'état, l'entrée de commande, la sortie mesurée et le défaut à détecter.

Le signal de commutation $\alpha(k) \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N_\alpha\}$ a les mêmes propriétés données au début du chapitre.

Notation 2

Quand $\alpha(k) = i$, ça veut dire que le sous système i est activé. En plus, au moment de commutation k , on notera $i = \alpha(k) \neq \alpha(k+1) = j$.

Sous cette notation, (IV.73) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_i x_k + B_i u_k + E_{f,i} f_k \\ y_k &= C_i x_k + F_{f,i} f_k \end{cases} \quad (\text{IV.74})$$

L'observateur généralisé à commutation est sous la forme suivante :

$$\begin{cases} z_{k+1} &= F_i z_k + G_i y_k + J_i u_k \\ \hat{x}_k &= M_i z_k + N_i y_k \end{cases} \quad (\text{IV.75})$$

où $z \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état de l'observateur, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimé de x , les matrices F_i , G_i , J_i , M_i et N_i sont de dimensions appropriées, et sont à déterminer.

Pour retrouver ces matrices inconnues, la variable d'erreur $\varepsilon_k = z_k - T_i x_k$ est introduite, où $T_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ est une matrice arbitraire à déterminer.

Remarque IV.14

En supposant que $\text{rang}(C_i) = p$, si $q = n - p$, un observateur d'ordre minimal est obtenu ; si $q = n$, un observateur d'ordre plein est obtenu. Un observateur d'ordre réduit est obtenu si $n - p < q < n$. Ici on considère le problème d'observateur d'ordre réduit.

On considère dans la suite que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

Hypothèse IV.8 : Les paires (A_i, C_i) sont observables, ou sans perte de généralité détectables. La condition d'observabilité est satisfaite si :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} qI_n - A_i \\ C_i \end{pmatrix} = n \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad (\text{IV.76})$$

Hypothèse IV.9 : Les matrices T_i satisfont la condition de rang suivante :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} T_i \\ C_i \end{pmatrix} = n \quad (\text{IV.77})$$

IV.4.3 Paramétrisation de l'observateur d'ordre réduit

Lemme IV.1

Pour $f_k = 0$, (IV.75) est un observateur généralisé pour le système s'il existe des matrices T_i et T_j telles que les contraintes suivantes sont satisfaites :

$$F_i T_i + G_i C_i - T_j A_i = 0 \quad (\text{IV.78a})$$

$$J_i - T_j B_i = 0 \quad (\text{IV.78b})$$

$$M_i T_i + N_i C_i = I_n \quad (\text{IV.78c})$$

et les matrices F_i sont de Hurwitz.

Démonstration : Par définition, l'estimation de l'état est :

$$\hat{x}_k = M_i z_k + N_i y_k = M_i \varepsilon_k + (M_i T_i + N_i C_i) x_k \quad (\text{IV.79})$$

Quand $\varepsilon_k \rightarrow 0$ alors $\hat{x}_k \rightarrow x_k$; donc

$$\hat{x}_k = M_i \varepsilon_k + x_k \quad (\text{IV.80})$$

ce qui est vrai si (IV.78c) l'est.

Ensuite, d'après la définition de l'erreur ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= z_{k+1} - T_j x_{k+1} \\ &= F_i z_k + G_i y_k + J_i u_k - T_j A_i x_k - T_j B_i u_k \\ &= F_i \varepsilon_k + (F_i T_i + G_i C_i - T_j A_i) x_k + (J_i - T_j B_i) u_k \end{aligned} \quad (\text{IV.81})$$

La dynamique de l'erreur est indépendante de x et u si les contraintes (IV.78a)-(IV.78b) sont satisfaites.

Par ailleurs, si les relations (IV.78a)-(IV.78c) sont vraies, alors l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$ se réduit au système autonome suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} = F_i \varepsilon_k \\ e_k = M_i \varepsilon_k \end{cases} \quad (\text{IV.82})$$

Il est alors évident que l'erreur d'estimation $e_k \rightarrow 0$ si et seulement si (ssi) F_i est une matrice de Hurwitz. ■

Ainsi, la synthèse d'observateur sans défaut et sans perturbation se réduit au problème de stabilisation du système autonome (IV.82), et à résoudre les égalités matricielles (IV.78).

L'équation (IV.78c) peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_i & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ C_i \end{bmatrix} = I_n \quad (\text{IV.83})$$

laquelle a une solution d'après [Rao 1971] ssi :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} T_i \\ C_i \\ I_n \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} T_i \\ C_i \end{pmatrix} = n. \quad (\text{IV.84})$$

Soient $E_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ des matrices arbitraires telles que :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} E_i \\ C_i \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} T_i \\ C_i \end{pmatrix} = n \quad (\text{IV.85})$$

Comme T_i sont inconnues, il existe toujours des matrices T_i et K_i telles que :

$$\begin{bmatrix} T_i \\ C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & -K_i \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix} \quad (\text{IV.86a})$$

$$\iff T_i = E_i - K_i C_i \quad (\text{IV.86b})$$

$$\iff \begin{bmatrix} T_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ C_i \end{bmatrix} = E_i \quad (\text{IV.86c})$$

De même, (IV.86) a une solution ssi [Rao 1971] :

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_n \\ C_i \\ E_i \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} I_n \\ C_i \end{pmatrix} = n \quad (\text{IV.87})$$

Sous (H-IV.9), (IV.84) et (IV.87) sont satisfaites, alors une solution pour T_i et K_i est :

$$T_i = E_i \begin{bmatrix} I_n \\ C_i \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_i = E_i \begin{bmatrix} I_n \\ C_i \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.88})$$

Et (IV.83) devient :

$$\begin{bmatrix} M_i & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & -K_i \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix} = I_n \quad (\text{IV.89})$$

Notant :

$$\begin{cases} \Gamma_i = \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix}, & \Gamma_i^\perp = [I_{p+q} - \Gamma_i \Gamma_i^+], \\ \Pi_{1,i} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, & \Pi_{2,i} = \begin{bmatrix} K_i \\ I_p \end{bmatrix}, & \Pi_{3,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.90})$$

Alors (IV.89) a une solution généralisée en utilisant la pseudo-inverse [Rao 1971] :

$$\begin{bmatrix} M_i & N_i \end{bmatrix} = \left(\Gamma_i^+ - L_{1,i} \Gamma_i^\perp \right) \begin{bmatrix} I_q & K_i \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.91})$$

où sous la forme développée :

$$M_i = \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} - L_{1,i} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i}, \quad (\text{IV.92a})$$

$$N_i = \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} - L_{1,i} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} \quad (\text{IV.92b})$$

où $L_{1,i}$ sont des matrices arbitraires.

Pour calculer les matrices F_i et G_i , l'équation (IV.78a) peut être mise sous la forme suivante en utilisant (IV.86b) :

$$F_i(E_i - K_i C_i) + G_i C_i = T_j A_i \quad (\text{IV.93a})$$

$$\iff \begin{bmatrix} F_i & G_i - F_i K_i \end{bmatrix} \Gamma_i = T_j A_i \quad (\text{IV.93b})$$

Cette équation a une solution si la condition de rang suivante est satisfaite [Rao 1971] :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \Gamma_i \\ T_j A_i \end{pmatrix} = \text{rang}(\Gamma_i) = \text{rang} \begin{pmatrix} E_i \\ C_i \end{pmatrix} = n \quad (\text{IV.94})$$

ce qui est vrai sous (H-IV.9).

Une solution généralisée de l'équation précédente est :

$$\begin{bmatrix} F_i & G_i - F_i K_i \end{bmatrix} = T_j A_i \Gamma_i^+ - L_{2,i} \Gamma_i^\perp \quad (\text{IV.95})$$

qui est équivalente à :

$$F_i = T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} - L_{2,i} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i}, \quad (\text{IV.96a})$$

$$\begin{aligned} G_i &= T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{3,i} - L_{2,i} \Gamma_i^\perp \Pi_{3,i} + F_i K_i \\ &= T_j A_i \Gamma_i^+ (\Pi_{3,i} + \Pi_{1,i} K_i) - L_{2,i} \Gamma_i^\perp (\Pi_{3,i} + \Pi_{1,i} K_i) \\ &= T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} - L_{2,i} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} \end{aligned} \quad (\text{IV.96b})$$

notant :

$$\mathbb{A}_{1,i} = T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i}, \quad \mathbb{A}_{2,i} = \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} \quad (\text{IV.97a})$$

$$\mathbb{G}_{1,i} = T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i}, \quad \mathbb{G}_{2,i} = \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} \quad (\text{IV.97b})$$

alors le système autonome (IV.82) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} &= (\mathbb{A}_{1,i} - L_{2,i} \mathbb{A}_{2,i}) \varepsilon_k \\ e_k &= M_i \varepsilon_k \end{cases} \quad (\text{IV.98})$$

Lemme IV.2

La proposition "la paire (A_i, C_i) est observable" est équivalente à l'observabilité de la paire $(\mathbb{A}_{1,i}, \mathbb{A}_{2,i})$.

Démonstration : Pour cette démonstration, on utilise la propriété suivante :

Propriété IV.2 (Inégalité de Sylvester)

Étant donné deux matrices $A : n \times m$ et $B : m \times p$, l'inégalité de Sylvester est :

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) + \text{rang}(B) - m &\leq \text{rang}(AB) \\ &\leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B)) \end{aligned} \quad (\text{IV.99})$$

Introduisant les matrices V_1, V_2, V_3, V_4 et X_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \begin{bmatrix} I_q & -T_i A_i \Gamma_i^+ \\ 0_q & \Gamma_i^\perp \\ 0 & \Gamma_i \Gamma_i^+ \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -\Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & I_n \end{bmatrix} \\ V_3 = \begin{bmatrix} I_q & -sI_q & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} -T_i & -sK_i \\ -C_i & sI_p - X_i \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \\ X_i = \begin{array}{l} I_p + C_i A_i C_i^+ \\ \text{(or } C_i A_i C_i^+) \end{array}, \quad \check{E}_i = T_i - K_i C_i \end{array} \right. \quad (\text{IV.100})$$

V_1 est de rang $n+q$, V_4 est de rang $n+p$ d'après (H-IV.9), V_2 et V_3 sont des matrices régulières de rang $n+q$ et $p+2q$ respectivement.

Alors sous les hypothèses (H-IV.8) et (H-IV.9), les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} n = \text{rang} \begin{pmatrix} zI_n - A_i \\ C_i \end{pmatrix} &= \text{rang} \left(V_4 \begin{pmatrix} zI_n - A_i \\ C_i \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - zT_i - zK_i C_i \\ C_i A_i - X_i C_i \\ C_i \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - zE_i \\ C_i \text{ (ou } 0) \\ C_i \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - zE_i \\ C_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.101a})$$

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} zI_q & T_i A_i \\ I_q & E_i \\ 0 & C_i \end{pmatrix} &= \text{rang} \left(V_3 \begin{bmatrix} zI_q & T_i A_i \\ I_q & E_i \\ 0 & C_i \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & T_i A_i - zE_i \\ I_q & E \\ 0 & C_i \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - zE_i \\ C_i \end{pmatrix} + q \end{aligned} \quad (\text{IV.101b})$$

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} zI_q & T_i A_i \\ I_q & E_i \\ 0 & C_i \end{pmatrix} &= \text{rang} \left(V_1 \begin{bmatrix} zI_q & T_i A_i \\ I_q & E_i \\ 0 & C_i \end{bmatrix} V_2 \right) \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} zI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & 0 \\ \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} & 0 \\ 0 & \Gamma_i \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} zI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} \\ \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} \end{pmatrix} + n = \text{rang} \begin{pmatrix} zI_q - \mathbb{A}_{1,i} \\ \mathbb{A}_{2,i} \end{pmatrix} + n \end{aligned} \quad (\text{IV.101c})$$

Finalement, en utilisant (V.47a) dans (V.47b), puis dans (IV.101c), l'équivalence suivante est satisfaite :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} zI_n - A_i \\ C_i \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} zI_q - \mathbb{A}_{1,i} \\ \mathbb{A}_{2,i} \end{pmatrix} = q \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \blacksquare \quad (\text{IV.101d})$$

Théorème IV.9 (Observateur d'ordre réduit stable)

Considérant les systèmes (IV.98), une condition suffisante de stabilité est qu'il existe des matrices U_i et des matrices symétriques définies positives P_i et P_j , $\forall i, j \in \mathcal{I}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} -P_i & \mathbb{A}_{1,i}^T P_j + \mathbb{A}_{2,i}^T U_j^T \\ P_j \mathbb{A}_{1,i} + U_i \mathbb{A}_{2,i} & -P_j \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.102})$$

où $L_{2,i} = -P_j^{-1} U_j$ sont les gains de stabilisation.

Démonstration : Considérant la fonction de Lyapunov multiple $V_{\alpha(k)} = \varepsilon_k^T P_{\alpha(k)} \varepsilon_k$, avec $P_{\alpha(k)} > 0$. Si cette fonction existe telle que $\Delta V = V_{\alpha(k+1)} - V_{\alpha(k)} < 0$ le long des trajectoires du système (IV.98), alors l'origine de ce système est globalement asymptotiquement stable. ΔV est donnée par :

$$\Delta V = \varepsilon_{k+1}^T P_{\alpha(k+1)} \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k^T P_{\alpha(k)} \varepsilon_k < 0 \quad (\text{IV.103a})$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_k^T (\mathbb{A}_{1,\alpha(k)} - L_{2,\alpha(k)} \mathbb{A}_{2,\alpha(k)})^T P_{\alpha(k+1)} (\mathbb{A}_{1,\alpha(k)} - L_{2,\alpha(k)} \mathbb{A}_{2,\alpha(k)}) \varepsilon_k - \varepsilon_k^T P_{\alpha(k)} \varepsilon_k < 0 \quad (\text{IV.103b})$$

Cette inéquation est vraie $\forall \varepsilon_k \neq 0$, alors par complément de Schur et avec le changement de variable $U_{\alpha(k)} = L_{2,\alpha(k)} P_{\alpha(k)}$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} -P_{\alpha(k)} & \mathbb{A}_{1,\alpha(k)}^T P_{\alpha(k+1)} - \mathbb{A}_{2,\alpha(k)}^T U_{\alpha(k+1)}^T \\ \star & -P_{\alpha(k+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.103c})$$

Comme cette inégalité doit être satisfaite sous une loi de commutation arbitraire, elle doit être vraie pour les configurations $\alpha(k+1) = j$ et $\alpha(k) = i$, $\forall i, j \in \mathbb{S}$. ■

Remarque IV.15

Il est à noter que les fonctions de Lyapunov multiple (MLF), dans le cas discret, quand elles existent, offrent une condition suffisante de stabilité, même sans l'hypothèse du temps moyen de séjour ou de temps minimal de séjour. Ce qui n'est pas vrai pour les systèmes en temps continu. Ainsi l'étude de stabilité des systèmes à commutation en temps discret offre une meilleure synthèse.

Une autre solution serait d'utiliser une fonction de Lyapunov commune, mais qui est très conservative (comme décrit dans le chapitre I).

Pour résumer, l'algorithme pour l'observateur d'état généralisé en l'absence de défauts et de perturbation peut être décrit par les étapes suivantes :

- (1) Choisir les matrices arbitraires E_i d'après (IV.85) ;
- (2) Calculer les matrices T_i et K_i en utilisant (IV.88) ;
- (3) Calculer les matrices Γ_i^+ , Γ_i^- , $\Pi_{1,i}$, $\Pi_{2,i}$, $\Pi_{3,i}$, à partir des équations (IV.90), ensuite N_i , M_i et J_i par (V.37a) et (IV.78b) ;
- (4) Calculer les gains $L_{2,i}$ solutions des LMIs dans (IV.102) ;
- (5) Dédire les matrices F_i et G_i par construction avec (IV.96a) et (IV.96b).

Dans la suite, l'étape (4) de l'algorithme est détaillée en développant une méthode pour calculer les matrices de gains $L_{2,i}$ telles que l'observateur généralisé devient un générateur de résidu satisfaisant à la fois la condition de stabilité et la performance H_- .

Remarque IV.16

Comme $L_{1,i}$ dans (V.37a) n'a pas d'effet sur la dynamique du système, elles peuvent être mises à 0. Cette procédure simplifie les calculs sans affecter le problème d'optimisation dans la partie suivante.

IV.4.4 Générateur de résidu à base d'observateur d'ordre réduit à commutation

IV.4.4.1 Forme générale de générateur de résidu d'ordre réduit

La synthèse d'observateur d'ordre réduit est alors étendue pour la synthèse d'un générateur de résidu d'ordre réduit à commutation.

Ce générateur calcule un signal de résidu r sensible au défaut avec un rapport β exprimé par :

$$\|r_i\|_2 > \beta_i \|f\|_2 \tag{IV.104a}$$

et qui correspond à la propriété $\|T_{rf_i}\|_- > \beta_i$.

Pour $f_k \neq 0$, en utilisant les contraintes dans (IV.78a),(IV.78c), et en remplaçant (IV.78b) par :

$$J_i - T_i B_i = 0 \tag{IV.105}$$

l'estimé de l'état devient :

$$\hat{x}_k = M_i \varepsilon_k + x_k + N_i F_{f,i} f_k \tag{IV.106}$$

Le signal de résidu défini par $r = y - \hat{y}$ devient :

$$\begin{aligned} r_k &= C_i x_k + F_{f,i} f_k - (C_i \hat{x}_k) \\ &= C_i (x_k - \hat{x}_k) + F_{f,i} f_k \\ &= C_i M_i \varepsilon_k + (C_i N_i + I) F_{f,i} f_k \end{aligned} \tag{IV.107}$$

où la dynamique de la variable d'erreur ε est :

$$\varepsilon_{k+1} = F_i \varepsilon_k + (G_i F_{f,i} - T_i E_{f,i}) f_k \tag{IV.108}$$

Le générateur de résidu a alors la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} = F_i \varepsilon_k + (G_i F_{f,i} - T_i E_{f,i}) f_k \\ r_k = C_i M_i \varepsilon_k + (C_i N_i + I) F_{f,i} f_k \end{cases} \tag{IV.109}$$

qui peut être mise sous la forme générale :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} = \mathbb{A}_i \varepsilon_k + \mathbb{B}_{f,i} f_k \\ r_k = \mathbb{C}_i \varepsilon_k + \mathbb{D}_{f,i} f_k \end{cases} \tag{IV.110}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{1,i} - \mathbb{L}_i \mathbb{A}_{2,i}, & \mathbb{B}_{f,i} = \mathbb{B}_{1f,i} - \mathbb{L}_i \mathbb{B}_{2f,i} \\ \mathbb{B}_{1f,i} = \mathbb{G}_{1,i} F_{f,i} - T_i E_{f,i}, & \mathbb{B}_{2f,i} = \mathbb{G}_{2,i} F_{f,i} \\ \mathbb{C}_i = C_i M_i, & \mathbb{D}_{f,i} = (C_i N_i + I) F_{f,i}, \quad \mathbb{L}_i = L_{2,i} \end{cases} \quad (\text{IV.111})$$

IV.4.4.2 SGFDO et sensibilité \mathcal{H}_-

Le problème de synthèse de générateur de résidu est résumé par le théorème suivant :

Théorème IV.10 (Observateur d'ordre réduit stable avec propriété \mathcal{H}_-)

Étant donné un système LTI à commutation sujet à des défauts, sous la forme (IV.110), et considérant le générateur de résidu d'ordre réduit (IV.75), s'il existe des matrices symétriques positives \mathbb{P}_i et \mathbb{P}_j , des matrices \mathbb{U}_i des réels positifs $\beta_i, \forall (i, j) \in \mathcal{I}$, tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{P}_j - \mathbb{C}_i^T \mathbb{C}_i & -\mathbb{C}_i^T \mathbb{D}_{f,i} & \mathbb{A}_{1,i}^T \mathbb{P}_i + \mathbb{A}_{2,i}^T \mathbb{U}_i \\ \star & -\mathbb{D}_{f,i}^T \mathbb{D}_{f,i} + \beta_i^2 I & \mathbb{B}_{1,i}^T \mathbb{P}_i + \mathbb{B}_{2,i}^T \mathbb{U}_i \\ \star & \star & -\mathbb{P}_i \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.112})$$

alors il existe des matrices de gain \mathbb{L}_i telles que la propriété de sensibilité du résidu généré au défaut \mathcal{H}_- est garantie.

Les matrices de gain sont calculées comme suit :

$$\mathbb{L}_i = -\mathbb{P}_i^{-1} \mathbb{U}_i \quad (\text{IV.113})$$

Démonstration : Soit la MLF $V_k = \varepsilon_k^T P_{\alpha(k)} \varepsilon_k$ avec $P_{\alpha(k)} > 0$. Si une telle fonction existe, et l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\varepsilon_{k+1}^T P_{\alpha(k+1)} \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k^T P_{\alpha(k)} \varepsilon_k - r_k^T r_k + \beta_i^2 f_k^T f_k < 0 \quad (\text{IV.114})$$

alors la sensibilité \mathcal{H}_- au défaut est assurée.

La suite des calculs est similaire à celle des théorèmes précédents. ■

IV.4.4.3 Modelage fréquentiel \mathcal{H}_- pour SGFDO

Comme proposé dans les sections précédentes, la méthodologie de modelage fréquentiel \mathcal{H}_- est appliquée aussi pour la synthèse d'observateur généralisé.

Ainsi, pour $\mathbb{D}_{f,i} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{1f,i} \\ 0 \end{bmatrix}$, les termes additifs à rajouter sont de la forme $\mathbb{D}_{add,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_i I \end{bmatrix}$, et les filtres de pondération passe haut sont de la même forme (IV.28).

Le générateur de résidu avec les éléments de modelage devient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{k+1} &= \mathbb{A}_i \varepsilon_k + \mathbb{B}_{f,i} f_k \\ r_k &= y_k - \hat{y}_k = \mathbb{C}_i \varepsilon_k + \mathbb{D}_{f,i} f_k \\ \tilde{r}_k &= (y - \hat{y}) + \mathbb{D}_{add,i} f \\ x_{k+1}^h &= A_{h,i} x_k^h + B_{h,i} \tilde{r}_k \\ r'_k &= C_{h,i} x_k^h + D_{h,i} \tilde{r}_k \end{cases} \quad (\text{IV.115})$$

A partir des équations (IV.115), une représentation augmentée est déduite :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \varepsilon_{k+1} \\ x_{k+1}^h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1,i} - L_i \mathbb{A}_{2,i} & 0 \\ B_{h,i} \mathbb{C}_i & A_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ x_k^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{1f,i} - L_i \mathbb{B}_{2f,i} \\ B_{h,i} (\mathbb{D}_{f,i} + \mathbb{D}_{add,i}) \end{bmatrix} f_k \\ r'_k &= \begin{bmatrix} D_{h,i} \mathbb{A}_{2,i} & C_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ x_k^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{h,i} (\mathbb{D}_{f,i} + \mathbb{D}_{add,i}) \end{bmatrix} f_k \end{cases} \quad (\text{IV.116})$$

Le théorème IV.10 est alors appliqué au système augmenté, formulé par le théorème suivant :

Théorème IV.11 (Observateur d'ordre réduit stable avec modelage H_-)

Étant donné un système LTI à commutation sujet à des défauts, sous la forme (IV.110), et considérant le générateur de résidu d'ordre réduit avec modelage fréquentiel (IV.116) s'il existe des matrices symétriques positives \mathbb{P}_i et \mathbb{P}_j , des matrices \mathbb{U}_i des réels positifs β_i , $\forall (i, j) \in \mathcal{I}$, tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{P}_j^a - \mathbb{C}_i^{aT} \mathbb{C}_i^a & -\mathbb{C}_i^{aT} \mathbb{D}_{f_i}^a & \mathbb{A}_i^{0T} \mathbb{P}_i^a + \mathbb{C}_i^{0T} \mathbb{U}_i^a \\ \star & -\mathbb{D}_{f_i}^{aT} \mathbb{D}_{f_i}^a + \beta_i^2 I & \mathbb{B}_i^{0T} \mathbb{P}_i^a + \mathbb{D}_{f_i}^{0T} \mathbb{U}_i^a \\ \star & \star & -\mathbb{P}_i^a \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.117})$$

où les matrices \mathbb{A}_i^0 , $\mathbb{B}_{f_i}^0$, \mathbb{C}_i^0 , $\mathbb{D}_{f_i}^0$ et I_0 sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^0 &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1,i} & 0 \\ B_{h,i} \mathbb{C}_i & A_{h,i} \end{bmatrix}, \quad I_0 = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_i^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{2,i} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{B}_{f_i}^0 &= \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{1f,i} \\ B_{h,i} (\mathbb{D}_{f,i} + \mathbb{D}_{add,i}) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{D}_{f_i}^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{2f,i} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{C}_i^a &= \begin{bmatrix} D_{h,i} \mathbb{A}_{2,i} & C_{h,i} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{D}_{f_i}^a = \begin{bmatrix} D_{h,i} (\mathbb{D}_{f,i} + \mathbb{D}_{add,i}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.118})$$

alors il existe des matrices de gain \mathbb{L}_i telles que la propriété de sensibilité du résidu généré au défaut \mathcal{H}_- est garantie.

Ces matrices de gain sont calculées comme suit :

$$\mathbb{L}_i = -I_0^T (\mathbb{P}_i^a)^{-1} \mathbb{U}_i^a \quad (\text{IV.119})$$

Démonstration : Soit l'état augmenté $x_k^a = [\varepsilon_k^T \quad x_k^{hT}]^T$. La condition suffisante de stabilité au sens de Lyapunov en considérant la MLF $V_k^a = x_k^{aT} P_{\alpha(k)}^a x_k^a$, et la condition H_- sont formulées par l'inégalité :

$$x_{k+1}^{aT} P_{\alpha(k+1)}^a x_{k+1}^a - x_k^{aT} P_{\alpha(k)}^a x_k^a - r_k^T r_k + \beta_i^2 f_k^T f_k < 0 \quad (\text{IV.120})$$

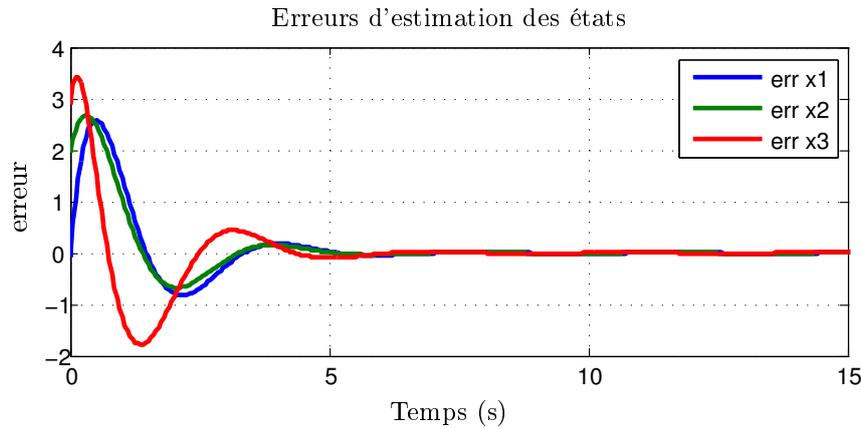


FIGURE IV.6 – Erreur d'estimation d'état dans le cas sans défaut

En déroulant les étapes de calculs bien détaillées dans les démonstrations précédentes, les LMIs (IV.117) sont retrouvées. ■

Remarque IV.17

L'approche H_∞ pour la réjection de perturbation n'est pas incluse dans cette section, pour éviter la répétition. Bien entendu, la formulation multi-objective H_-/H_∞ et les contraintes temporelles peuvent être incluses pour la synthèse de SGFDO.

IV.4.5 Exemple

On considère l'exemple académique suivant pour montrer l'approche de synthèse de SGFDO.

Soit le système LTI MIMO à commutation sous la forme (IV.73), dont les matrices d'état sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.04 & 0.02 \\ 0.012 & 0.60 & 0.64 \\ -0.06 & 0.08 & 0.94 \end{bmatrix}, E_{f_1} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 1.2 \\ 0.18 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.04 & 0.02 \\ 0.012 & 0.60 & 0.14 \\ -0.02 & 0.08 & 0.94 \end{bmatrix}, E_{f_2} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 1.4 \\ 0.49 \end{bmatrix},$$

$$C_{1,2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & .12 & 0 \end{bmatrix}; F_{f_{1,2}} = [0.01].$$

Avec la condition initiale : $x(0) = [1 \ 2 \ 3]^T$.

Ce système est observable. La synthèse d'un générateur de résidu H_- à commutation à base d'observateur d'ordre réduit est possible.

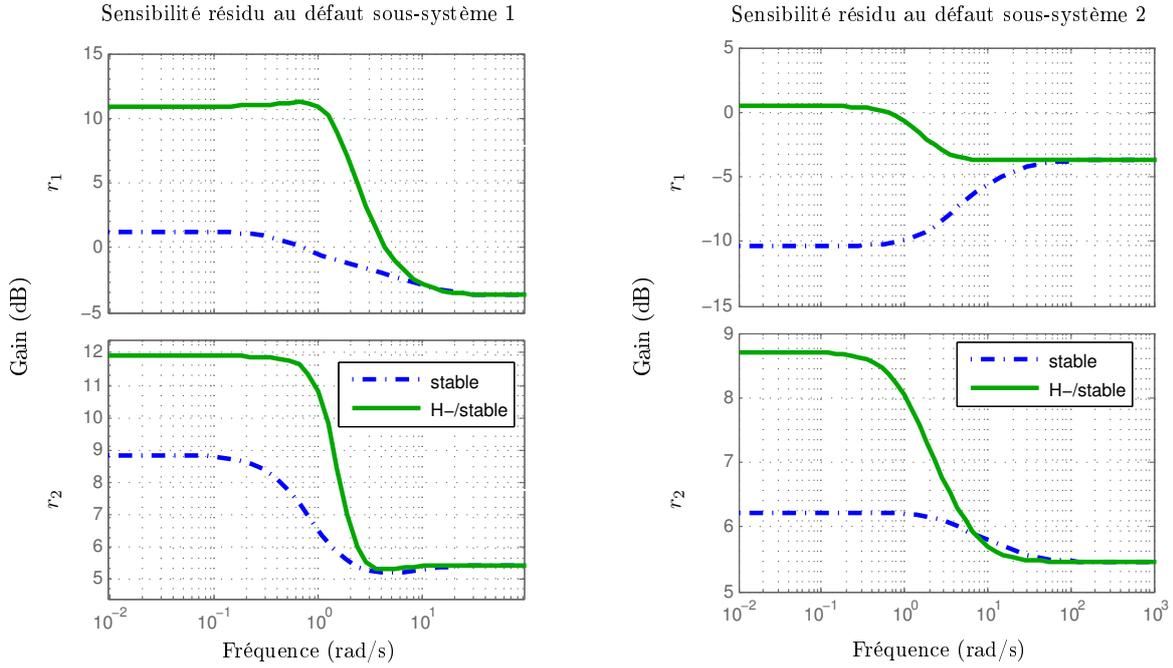


FIGURE IV.7 – Sensibilité du résidu aux défauts $T_{rf_1}(j\omega)$ (droite) et $T_{rf_2}(j\omega)$ (gauche)

D'abord, définissons les matrices E_i , et calculons T_i et K_i d'après (IV.88), on obtient :

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 4 \\ -200 & 1 & -10 \end{bmatrix}; \text{rang} \begin{pmatrix} E_{1\&2} \\ C_{1\&2} \end{pmatrix} = 3$$

Ensuite, on définit les éléments de modelage fréquentiel H_- , soit :

$$D_{add,1} = D_{add,2} = \begin{bmatrix} 0.046 & 0.04 \end{bmatrix}^T,$$

$$\text{et } F_{H,1}(s) = F_{H,2}(s) = \left(\frac{s/.095 + 1}{s/8 + 1} \right)^2$$

En utilisant YALMIP sous Matlab, une solution des LMIs (IV.117) peut être calculée.

Les courbes de la figure IV.6 montrent que les erreurs d'estimation des trois états tendent asymptotiquement vers 0, dans le cas sans défaut.

Les fonctions de sensibilité du résidu au défaut de chaque système sont présentées dans la figure IV.7. On remarque bien que pour les deux sous-systèmes, la sensibilité du résidu au défaut est améliorée en basse fréquence en la comparant à une synthèse par simple contrainte de stabilité.

IV.4.6 Conclusion

Dans cette section, une méthode de synthèse d'observateur et de générateur de résidu généralisé à commutation, pour la détection du défaut et l'estimation de l'état de système LTI commuté est présentée.

D'abord la synthèse de l'observateur d'état généralisé à commutation est présenté, et ensuite une extension de cette synthèse pour la génération de résidu et la détection de défaut sous un objectif H_- est développée.

Le problème est formulé par des LMIs à résoudre sous une contrainte de maximisation de paramètre β . Ces LMIs sont obtenues par une analyse de stabilité et de performance H_- en utilisant une fonction de Lyapunov multiple.

Cette approche, peut facilement être entendue pour inclure des entrées inconnues en rajoutant une performance H_∞ . La synthèse est illustrée par un exemple académique.

IV.5 Détection de défaut à base d'observateur pour les systèmes LPV

IV.5.1 Introduction

Dans les sections précédentes, le problème de synthèse de générateur de résidu était abordé à base d'observateur à commutation, où un ensemble de matrices de gains L_α est à calculer est obtenu par optimisation convexe d'un ensemble de LMIs, basé sur une fonction de Lyapunov multiple.

Dans cette section, on présente l'adaptation de la méthode de synthèse H_-/H_∞ pour les systèmes LPV. Mais avant de détailler cette approche, rappelons quelques notions de base sur cette classe de systèmes.

Les systèmes LPV peuvent être décrits par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E_d(\rho(t))d(t) + E_f(\rho(t))f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + F_d d(t) + F_f f(t) \end{cases} \quad (\text{IV.121})$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ et $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ représentant respectivement l'état, l'entrée de commande, la sortie du système, les perturbations et les défauts à détecter.

$\rho(\cdot)$ est le vecteur des paramètres variants qui prennent leur valeurs dans un sous-espace de paramètres \mathcal{P}_ρ tel que :

$$\mathcal{P}_\rho := \{\rho(t) \triangleq [\rho_1(t) \quad \rho_2(t) \quad \dots \quad \rho_l(t)]^T \in \mathbb{R}^r \quad (\text{IV.122a})$$

et

$$\rho_i(\cdot) \in [\underline{\rho}_i \quad \bar{\rho}_i] \quad \forall i = \{1, \dots, r\} \quad (\text{IV.122b})$$

Les matrices $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$, $E_d(\rho(t))$, $E_f(\rho(t))$ sont aux dimensions appropriées, et sont des fonctions affines en $\rho(t)$. Elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$X(\rho(t)) = \rho_1(t)X_1 + \rho_2(t)X_2 + \dots + \rho_r(t)X_r \quad (\text{IV.123a})$$

$$X(\rho(t)) = \sum_{i=1}^N \rho_i(t)X_i \quad (\text{IV.123b})$$

Comme chacun des paramètres variants est borné, le système LPV peut toujours se réécrire sous la forme de la combinaison convexe de systèmes LTI défini aux sommets du polytope englobant la variation des paramètres. Ceci est décrit par la définition suivante :

Définition IV.1 (Système LPV polytopique)

Supposant que \mathcal{P}_ρ est un convexe, le système peut être écrit par la description polytopique :

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A(\rho) & B(\rho) & E_d(\rho) & E_f(\rho) \\ \hline C & D & F_d & F_f \end{array} \right] = \sum_{i=1}^N \alpha^i(\rho) \left[\begin{array}{c|ccc} A(\omega_i) & B(\omega_i) & E_d(\omega_i) & E_f(\omega_i) \\ \hline C & D & F_d & F_f \end{array} \right] \quad (\text{IV.124})$$

où α^i est appelé coordonnées polytopiques et appartient à l'ensemble convexe :

$$\Psi = \{ \alpha^i(\rho) \in \mathbb{R}^N, \alpha^i(\rho) = [\alpha^1(\rho), \dots, \alpha^N(\rho)]^T, \alpha^i(\rho) \geq 0, \forall j, \sum_{i=1}^N \alpha^i(t) = 1 \} \quad (\text{IV.125})$$

avec $N = 2^r$ le nombre de vertex du polytope.

Par ailleurs, on a :

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^N \alpha^i(t) \omega_i \quad (\text{IV.126})$$

Définissons $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$, et notons $X_i \triangleq X(\omega_i)$. Les matrices $A_i, B_i, E_{d,i}, E_{f,i}$, sont alors les matrices connues nominales de chaque système au i^{me} vertex.

IV.5.2 Générateur de résidu par approche polytopique

On considère maintenant la synthèse du générateur de résidu pour système LPV par approche polytopique. Le générateur de résidu est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^N \alpha^i(\rho) [A_i \hat{x} + B_i u + L(y - \hat{y})] \\ \hat{y} &= \sum_{i=1}^N \alpha^i(\rho) [C \hat{x} + D u] \\ r &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(\rho) [y - \hat{y}] \end{cases} \quad (\text{IV.127})$$

Dans la suite, l'indice de temps t est omis sans confusion pour simplifier l'écriture, et on utilise la notation $X_\rho \triangleq X(\rho)$.

Définissons l'erreur d'estimation de l'état $\tilde{x} = x - \hat{x}$, alors :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A(\rho) - LC)\tilde{x} + (E_d(\rho) - LF_d)d + (E_f(\rho) - LF_f)f \\ r &= C\tilde{x} + F_d d + F_f f \end{aligned} \quad (\text{IV.128})$$

qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A^*(\rho)\tilde{x} + E_d(\rho)^*d + E_f(\rho)^*f \\ r &= C\tilde{x} + F_d d + F_f f \end{cases} \quad (\text{IV.129})$$

où $A(\rho)^* = A(\rho) - LC$, $E_{d(\rho)}^* = E_d(\rho) - LF_d$, et $E_f(\rho)^* = E_f(\rho) - LF_f$.

Les objectifs du générateur de résidu pour les systèmes LPV sont résumés par les conditions H_-/H_∞ décrites ci-après :

$$\sup_{d \in \mathbb{R}^{n_d}} \frac{\|r\|_2}{\|d\|_2} < \gamma \quad (\mathcal{H}_\infty) \quad (\text{IV.130a})$$

$$\inf_{f \in \mathbb{R}^{n_f}} \frac{\|r\|_2}{\|f\|_2} > \beta \quad (\mathcal{H}_-) \quad (\text{IV.130b})$$

Le problème de synthèse de générateur de résidu est décrit comme suit : trouver la matrices L qui maximise β et minimise γ telles que les conditions (IV.130a)-(IV.130b) sont satisfaites et que ce générateur est stable.

Hypothèse IV.10 : Dans cette section, le quadruple $(A(\rho), E_f(\rho), C, F_f)$ est supposée observable $\forall \rho \in P_\rho$, ou sans perte de généralité, détectable.

Remarque IV.18

Dans la formulation du problème, la matrice C est supposée indépendante du paramètre $\rho(t)$, ce qui est vrai pour une grande partie des systèmes.

Toutefois, cette approche peut être généralisée pour les matrices $C(\rho)$, en rajoutant le filtre strictement propre \mathcal{F}_y à la sortie du système [Apkarian 1995] :

$$\mathcal{F}_y : \begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{IV.131})$$

En interconnectant les deux systèmes, on obtient la représentation du système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_f \\ y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & 0 & B(\rho) & E_d(\rho) & E_f(\rho) \\ B_f C(\rho) & A_f & B_f D & B_f F_d & B_f F_f \\ 0 & C_f & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \\ u \\ d \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{IV.132})$$

où les matrices de sortie sont bien indépendantes de $\rho(t)$.

IV.5.3 Synthèse de générateur de résidu multi-objectifs pour les systèmes LPV

En développant les calculs du générateur de résidu (IV.129), avec le rajout des termes additifs et filtre passe-haut pour le modelage fréquentiel de la synthèse H_- , la représentation d'état du générateur de résidu LPV augmenté devient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x}_h \\ r \end{bmatrix} = A^a(\rho) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ tx_h \end{bmatrix} + E_d^a(\rho)d + E_f^a(\rho)f \\ r = C^a \tilde{x} + D_d^a d + D_f^a f \end{cases} \quad (\text{IV.133a})$$

où

$$\begin{aligned}
 A^a(\rho) &= \begin{bmatrix} A(\rho) - LC & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix}, & E_f^a(\rho) &= \begin{bmatrix} E_f(\rho) - LF_f \\ B_F(F_f + D_{add}) \end{bmatrix}, & C^a &= \begin{bmatrix} D_F C & C_F \end{bmatrix}, \\
 E_d^a(\rho) &= \begin{bmatrix} E_d(\rho) - LF_d \\ B_F F_d \end{bmatrix}, & D_f^a &= D_F(F_f + D_{add}) \text{ et} & D_d^a &= D_F F_d \quad (\text{IV.133b})
 \end{aligned}$$

Le théorème suivant est alors appliqué à ce système augmenté (IV.133a), pour satisfaire les objectifs de la synthèse de générateur de résidu pour système LPV :

Théorème IV.12 (Générateur de résidu multi-objectifs pour les systèmes LPV)

Considérant le générateur de résidus à commutation sous la forme (IV.3).

S'il existe une matrice définie positive $P^a > 0$, des matrices U_i^a et des réels positifs γ_i , β_i et $\xi_i \forall i \in \mathcal{I}$ telles que les 2^{r+1} LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{P^a A_i^0 + A_i^{0T} P^a}{+U_i^a C_i^0 + C_i^{0T} U_i^{aT} + C_i^{aT} C_i^a} & \begin{array}{c} P^a E_i^0 + U_i^a F_{d,i} \\ +C_i^{aT} D_{d_i}^a \end{array} \\ \hline \star & D_{d_i}^{aT} D_{d_i}^a - \gamma_i^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.134a})$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{P^a A_i^0 + A_i^{0T} P^a}{+U_i^a C_i^0 + C_i^{0T} U_i^{aT} - C_i^{aT} C_i^a} & \begin{array}{c} P^a E_i^0 + U_i^a F_{f,i} \\ -C_i^{aT} D_{f_i}^a \end{array} \\ \hline \star & -D_{f_i}^{aT} D_{f_i}^a + \beta_i^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.134b})$$

$$I^0 P^a I^{0T} A_i^0 + I^0 U_i^a C_i^0 + A_i^{0T} I^0 P I^{0T} + C_i^{0T} U_i^{aT} I^{0T} + 2\xi_{\max,i} I^0 P^a I^{0T} < 0 \quad (\text{IV.134c})$$

où les matrices A_i^0 , $E_{f_i}^0$, $E_{d_i}^0$, C_i^0 et I_0 sont :

$$\begin{aligned}
 A_i^0 &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{h,i} C_i & A_{h,i} \end{bmatrix}, & E_{f_i}^0 &= \begin{bmatrix} E_{f,i} \\ B_{h,i}(F_{f,i} + D_{add,i}) \end{bmatrix}, & E_{d_i}^0 &= \begin{bmatrix} E_{d,i} \\ B_{h,i} F_{d,i} \end{bmatrix} \\
 C_i^0 &= \begin{bmatrix} -C_i & 0 \end{bmatrix}, & C_i^a &= \begin{bmatrix} D_{h_i} C_i & C_{h_i} \end{bmatrix}, & I^0 &= \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{d_i}^a &= D_{h,i} F_{d,i} \text{ et} & D_{f_i}^a &= D_{h,i}(F_{f,i} + D_{add,i}) \quad (\text{IV.135})
 \end{aligned}$$

et les matrices $A_{h,i}$, $B_{h,i}$, $C_{h,i}$ et $D_{h,i}$ décrivent les réalisations des filtres passe-haut \mathcal{W}_{F_i} :

$$\mathcal{W}_{F_i}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_{h_i} & B_{h_i} \\ \hline C_{h_i} & D_{h_i} \end{array} \right] \quad (\text{IV.136})$$

alors les conditions (IV.34a) sont garanties.

Les gains de l'observateur à commutation sont calculés par :

$$L = I^0 (P^a)^{-1} U^a \quad (\text{IV.137})$$

Démonstration : Ce théorème est une extension directe du problème de synthèse de SFDO dans le cas de systèmes LTI à commutation, mais avec les précisions suivantes :

1. Chaque sous-modèle dans le système à commutation correspond à un vertex du polytope du système LPV,
2. Les éléments de synthèse peuvent être appliqués sans soucis mathématiques puisque l'approche polytopique garantit la convexité des opérations d'addition et de multiplication sous la contrainte indiquée dans la proposition suivante,
3. La seule différence majeure est que la fonction de Lyapunov multiple $V = \tilde{x}^T P_\alpha \tilde{x}$ pour les systèmes à commutation est remplacée une fonction de Lyapunov commune à tous les vertex : $V = \tilde{x}^T P \tilde{x}$. En remplaçant P_α^a par P^a , le théorème (IV.12) est déduit. ■

Remarque IV.19

Comme le système (IV.133a) est affine en A_h, B_h, C_h , et D_h , le filtre F_H peut être dépendant des paramètres, c'est-à-dire : différentes matrices $A_{h,i}, B_{h,i}, C_{h,i}$, et $D_{h,i} \forall i \in \mathcal{S}$ pour chaque vertex i .

Enfin, le générateur de résidu LPV à implémenter est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i &= (A_i - LC)\hat{x}_i + [(B_i - LD) \quad L] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ r_i &= -C\hat{x}_i + [-D \quad I] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ r &= \sum_{i=1}^N \alpha^i(t) r_i \end{cases} \quad (\text{IV.138})$$

IV.5.4 Exemple : application à la détection de défauts dans la dynamique latérale du véhicule

Pour illustrer l'approche développée dans cette section, on s'intéresse au problème de détection de défaut dans le contrôle de la dynamique latérale du véhicule. Par ailleurs, les données de la campagne d'essais avec le laboratoire MIPS permettent de tester l'efficacité de la méthode par un exemple réel.

On considère alors le modèle bicyclette développé dans le chapitre III. La représentation d'état de ce modèle (III.19) est rappelée ici, avec l'accéléromètre comme capteur (III.20) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{c_r + c_f}{mv(t)} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{mv^2(t)} - 1 \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{I_z} & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{I_z v(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv(t)} \\ \frac{c_r l_f}{I_z} \end{bmatrix} u_L(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ \frac{l_w}{I_z} \end{bmatrix} F_w(t) \\ y &= \begin{bmatrix} -\frac{c_r + c_f}{m} & \frac{c_f l_f - c_r l_r}{mv^2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_f \\ m \end{bmatrix} u_L(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.139})$$

où F_w désigne la force latérale de vent, qui agit comme entrée inconnue (perturbation).

Comme on peut le remarquer, ce modèle est non linéaire dû à la présence des termes $\frac{1}{v}$ et $\frac{1}{v^2}$.

Le défaut considéré dans cette application est un défaut actionneur, qui agit sur la commande du système : l'angle au volant $u_L(t)$.

On introduit un vecteur de paramètres variant $\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$ avec :

$$\rho_1 = \frac{1}{v}, \quad \rho_2 = \frac{1}{v^2} \tag{IV.140}$$

En utilisant cette notation, une représentation du système LPV peut être déduite :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(\rho)x + B(\rho)(u + f) + E_d(\rho)d \\ y &= C(\rho)x + D(u + f) \end{cases} \tag{IV.141}$$

Ici, deux paramètres seulement affectent les matrices A , B , E_d et C , soit :

$$\begin{aligned} A(\rho) &= A_0 + \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 \\ B(\rho) &= B_0 + \rho_1 B_1 \\ E_d(\rho) &= E_{d,0} + \rho_1 E_{d,1} \\ C(\rho) &= C_0 + \rho_2 C_1 \end{aligned} \tag{IV.142}$$

Comme la matrice de sortie dépend de ρ , la transformation donnée dans la remarque IV.18 est appliquée.

Dans cet exemple, la vitesse $v(t)$ varie entre 20 et 40 km/h. Un polytope de $2^r = 4$ vertex peut être construit :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 & \underline{\rho}_2 \end{bmatrix}, & \omega_2 &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 & \underline{\rho}_2 \end{bmatrix}, \\ \omega_3 &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 & \bar{\rho}_2 \end{bmatrix}, & \omega_4 &= \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 & \bar{\rho}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{IV.143}$$

En remarquant la dépendance entre les paramètres variants $\rho_2 = \rho_1^2$, le vertex $\omega_4 = \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 & \bar{\rho}_2 \end{bmatrix}$ n'est pas important puisque les 3 autres vertex sont suffisants pour décrire l'espace des paramètres P_ρ .

Ainsi le polytope peut être réduit aux 3 vertex ω_1 , ω_2 and ω_3 . Cette méthode de réduction de polytope a été considérée dans [Robert 2010].

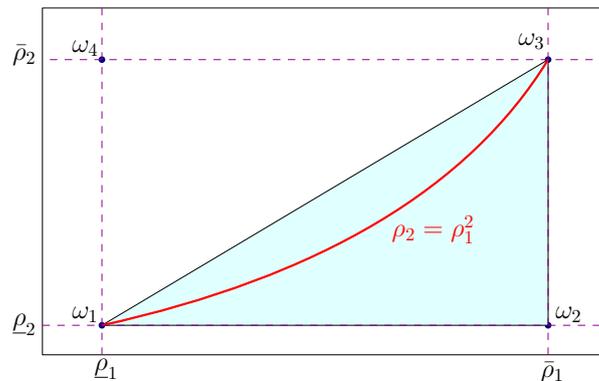


FIGURE IV.8 – Illustration de la réduction du polytope

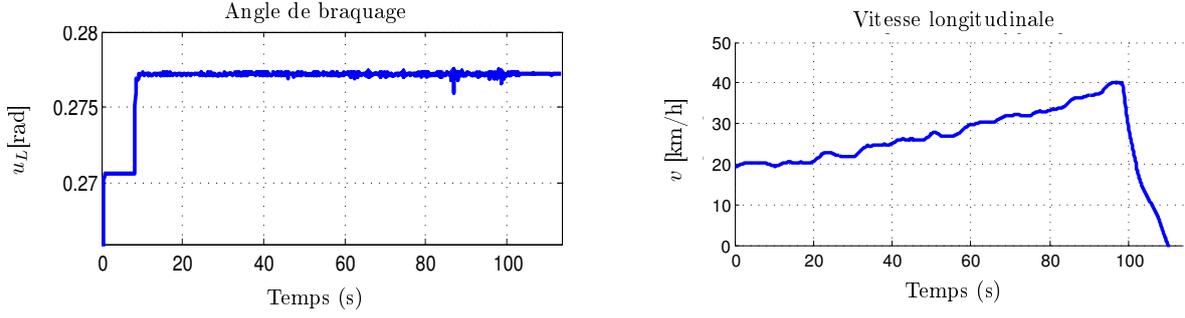


FIGURE IV.9 – Entrées du modèle latérale
(angle au volant u_L à gauche, et vitesse = ρ_1 à droite)

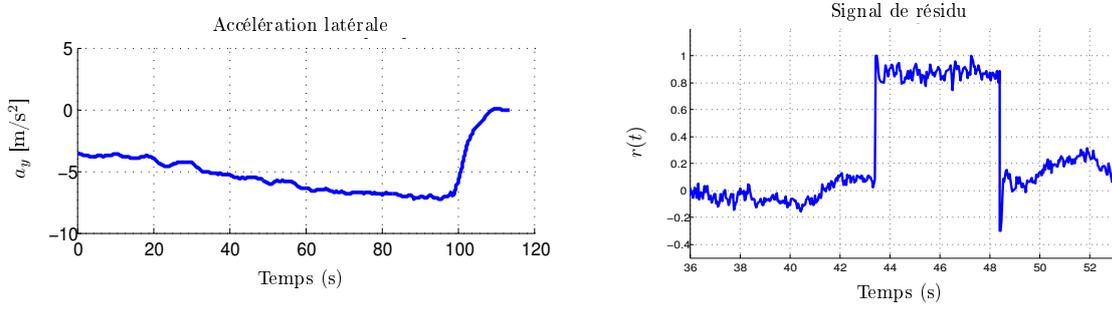


FIGURE IV.10 – Sortie mesurée et résidu
(accélération latérale mesurée $[m/s^2]$ à gauche, et signal de résidu à droite)

Les coordonnées polytopiques α^i peuvent être obtenues à partir de l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & \bar{\rho}_1 & \bar{\rho}_1 \\ \rho_2 & \rho_2 & \bar{\rho}_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.144})$$

Dans ce cas, le résidu peut être construit par la relation :

$$r = \alpha^1 r_1 + \alpha^2 r_2 + \alpha^3 r_3 \quad (\text{IV.145})$$

où r_i est le signal de résidu obtenu de l'observateur au vertex ω_i

On applique la méthode précédente de synthèse du générateur de résidu :

1. Définir les éléments de modelage fréquentiel H_- , soit

$$F_{f,add1} = [.06], \quad F_{f,add2} = [.03], \quad (\text{IV.146})$$

$$F_{H,1}(s) = F_{H,2}(s) = \left(\frac{s/0.05 + 1}{s/5 + 1} \right)^2 \quad (\text{IV.147})$$

2. Choisir une valeur pour la région LMI : pour une réponse en moins de 0,5s, $\xi_{max} = 2$
3. Résoudre les LMIs en suivant la méthode par dichotomie pour retrouver les meilleurs compromis α/β

Les résultats sont montrés dans la figure IV.10 : quand un défaut constant surgit entre $t = 43$ and $t = 48$, le signal de résidu répond rapidement et permet de générer une alarme indiquant la présence d'un défaut.

IV.5.5 Conclusion

Dans cette section, un cadre général pour la synthèse de générateur de résidu à base d'observateur multi-objectifs, pour les systèmes LPV est présenté.

Ces objectifs à spécifications temporelles et fréquentielles sont traduites en une formulation LMIs, dont la solution par optimisation permet de synthétiser un observateur par approche polytopique.

Cette approche est une extension des méthodes H_-/H_∞ pour les systèmes LTI commutés, et est une autre alternative pour la synthèse de générateur de résidu pour une classe de systèmes non linéaires : les systèmes LPV.

IV.6 Conclusion

Différentes méthodes de détection de défaut ont été présentées dans ce chapitre, à base d'une approche H_-/H_∞ avec des contraintes temporelles, avec chacune leurs degrés de complexité.

Type	Hypothèses	Solution	Implémentation
SFDO	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C},$ <i>f</i> en basses fréquences pas d'incertitudes	minimiser γ_α maximiser β_α sous les contraintes LMI (IV.134)	implémenter l'observateur (IV.45)
SRFDO	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C},$ <i>f</i> en basses fréquences incertitudes $\neq 0$	minimiser γ_α maximiser β_α sous les contraintes LMI (V.16)	implémenter l'observateur (IV.45)
SGFDO	$\text{rang} \begin{pmatrix} zI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall z \in \mathbb{C},$ <i>f</i> en basses fréquences pas d'incertitudes	maximiser β_α sous les contraintes LMI (IV.117) avec (IV.78) et (IV.96)	implémenter l'observateur (IV.75)
LPV-FDO	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A(\rho) & -E_f(\rho) \\ C & F_f \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C},$ <i>f</i> en basses fréquences pas d'incertitudes	minimiser γ maximiser β sous les contraintes LMI (IV.134)	implémenter l'observateur (IV.138)

TABLE IV.1 – Récapitulatif sur la synthèse des générateurs de résidus H_-/H_∞

D'abord une synthèse de générateur de résidu à base d'observateur identité pour les systèmes LTI à commutation certain, puis avec incertitude a été développée.

Cette synthèse est généralisée pour la synthèse d'observateur de Luenberger d'ordre réduit (qui peut être d'ordre minimal aussi bien que plein), toujours pour les systèmes à commutation.

Enfin par analogie, une extension pour les systèmes LPV est développée et validée par un exemple pratique sur la détection de défaut actionneur dans la dynamique latérale de véhicule.

Ces différents générateurs de résidu à base d'observateurs sont construits avec une technique de modelage fréquentiel H_- , où cette étape est primordiale pour atteindre l'objectif de sensibilité aux défauts de ces générateurs. Un algorithme est enfin donné, explicitant les différentes étapes de la synthèse multi-objectifs.

Estimation de défauts

Sommaire

V.1 Introduction	127
V.2 Estimation de défaut par Observateur PI à commutation	128
V.2.1 Formulation du problème	129
V.2.2 Observateur PI à commutation	130
V.2.3 Observateur robuste PI à commutation	131
V.2.4 Observateur PI généralisé	135
V.2.5 Récapitulatif sur l'estimation du défaut par PIO	142
V.2.6 Exemple : estimation de défaut actionneur	143
V.2.7 Conclusion	146
V.3 Estimation de défaut par Filtre H_∞ à commutation	146
V.3.1 Formulation du problème	147
V.3.2 Synthèse H_∞ pour systèmes LTI certains à commutation	148
V.3.3 Estimation robuste des défauts	153
V.3.4 Estimation par synthèse H_∞ avec filtres de pondération	155
V.3.5 Récapitulatif sur l'estimation du défaut par filtre H_∞ à commutation	157
V.3.6 Discussion	158
V.3.7 Exemples	160
V.3.8 Conclusion	163
V.4 Estimation de défaut par Observateur Adaptatif	163
V.4.1 Introduction	163
V.4.2 Formulation du problème	163
V.4.3 Préliminaires	164
V.4.4 Algorithme RLS amélioré	169
V.4.5 Exemple : estimation de défaut dans la dynamique verticale	171
V.4.6 Conclusion	176
V.5 Conclusion	176

V.1 Introduction

Dans la suite de la problématique de détection de défaut présentée dans le chapitre précédent, ce chapitre est consacré à l'estimation des défauts. Ainsi sous certaines hypothèses, trois approches sont proposées.

La première se base sur la synthèse d'observateur proportionnel intégral, permettant d'estimer un défaut où le terme intégral assure une erreur nulle d'estimation. Ensuite, une méthode

par synthèse de filtre dynamique H_∞ est présentée. Ces deux méthodes sont adaptées pour les systèmes LTI à commutation.

La troisième méthode se base sur une autre approche de la représentation du défaut, où il est considéré comme un paramètre à estimer. Une approche par observateur adaptatif en couplant la robustesse aux perturbations à une estimation par moindres carrés récursifs (RLS pour *Recursive Least Square*) est développée pour les systèmes à paramètres variants (LTV).

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont associées à plusieurs publications :

J1 Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Robust fault detection for switched uncertain systems*. soumis à IEEE Transactions on Automatic Control.

J2 Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Adaptive fault detection : joint state and parameter estimation approach*. soumis à Automatica.

J3 Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Design of generalized switched PI observers for joint state and fault estimation*. soumis à IET Control Theory & Applications.

C3 Ahmad Farhat, Damien Koenig. *PI robust fault detection observer for a class of uncertain switched systems using LMIs*. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS), Sep 2015, Paris, France.

C6 Ahmad Farhat, Diana Hernandez, Carlos Vivas-Lopez, Damien Koenig, and Ruben Morales-Menendez. *Fault detection in lateral vehicle dynamics, a comparaison between two approaches*. à soumettre à 20th IFAC World Congress.

N1 Ahmad Farhat, Damien Koenig. *Détection de défauts sur systèmes incertains à commutation*. Actes des Journées "Sûreté Surveillance Supervision", GT- GdrMACS S3 , Février 2016, Paris, France.

V.2 Estimation de défaut par Observateur PI à commutation

L'utilisation des observateurs de type proportionnel intégral (PIO), introduite par [Kaczorek 1979] pour les systèmes monovariables et étendue par [Wojciechowski 1978] pour les systèmes multivariables, est apparue par analogie entre contrôle et observation. La synthèse avec performance de robustesse de l'observateur PI contre les incertitudes paramétriques et les perturbations pour les systèmes MIMO a été proposée par [Shafai 1985]. Les observateurs PI sont adaptés pour l'estimation simultanée de l'état et des défauts dans [Shafai 2002], et par [Marx 2003] pour les systèmes singuliers.

Dans cette section, la synthèse des observateurs PIO pour l'estimation des défauts est étendue aux systèmes à commutation sujets à des perturbations et des incertitudes paramétriques. Ces observateurs sont construits avec des objectifs H_∞ et placement de pôles.

D'abord, on commence par la synthèse d'observateur PI identité à commutation (SPIO pour *switched PIO*) pour l'estimation de défaut dans un système LTI commuté. Ensuite, on étend le premier observateur en rajoutant une performance de robustesse aux incertitudes, dans le cas de système LTI incertains à commutation, cet observateur est noté SRPIO (pour *switched robust PIO*). Enfin, la synthèse d'observateur PI est généralisée (SGPIO pour *switched generalized PIO*) par une formulation plus complète, pouvant représenter les observateurs d'ordre plein ou réduit.

La synthèse de ces différents observateurs est formulée par des LMIs, dont la solution est obtenue par une optimisation convexe. Un schéma d'observateur dédié est utilisé pour estimer

chacun des défauts.

V.2.1 Formulation du problème

On considère la représentation d'état du système LTI à commutation, de la même forme que (IV.47) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_\alpha x + B_\alpha u + E_{d,\alpha} d + E_{f,\alpha} f \\ y &= C_\alpha x + D_\alpha u + F_{d,\alpha} d + F_{f,\alpha} f \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

où les différents signaux et matrices ont la même définition que dans la section IV.3 du chapitre précédent.

On suppose que les hypothèses (H-IV.1) à (H-IV.5) et (H-IV.7) sont satisfaites.

L'observateur PI à commutation pour la localisation et l'estimation du défaut est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_{P,\alpha}(y - \hat{y}) + E_{f,\alpha} \hat{f} \\ \dot{\hat{f}} &= L_{I,\alpha}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_\alpha \hat{x} + D_\alpha u + F_{f,\alpha} \hat{f} \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

où $L_{P,\alpha}$ et $L_{I,\alpha}$ sont respectivement les gains proportionnels et intégrateurs du SRPIO.

Sous l'hypothèse de défaut statique (H-IV.3) c'est-à-dire $\dot{f} = 0$, on définit les erreurs $e_x = x - \hat{x}$ et $e_f = f - \hat{f}$.

La dynamique de ces erreurs est régit par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= A_\alpha x + B_\alpha u + E_{d,\alpha} d + E_{f,\alpha} f - (A_\alpha \hat{x} + B_\alpha u + L_{P,\alpha}(y - \hat{y}) + E_{f,\alpha} \hat{f}) \\ &= (A_\alpha - L_{P,\alpha} C_\alpha) e_x + (E_{f,\alpha} - L_{P,\alpha} F_{f,\alpha}) e_f + (E_{d,\alpha} - L_{P,\alpha} F_{d,\alpha}) d \end{aligned} \quad (\text{V.3a})$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_f &= -L_{I,\alpha}(y - \hat{y}) \\ &= -L_{I,\alpha} C_\alpha e_x - L_{I,\alpha} F_{f,\alpha} e_f - L_{I,\alpha} F_{d,\alpha} d \end{aligned} \quad (\text{V.3b})$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_f \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} A_\alpha & E_{f,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{P,\alpha} \\ L_{I,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_x \\ e_f \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} - L_{P,\alpha} F_{d,\alpha} \\ -L_{I,\alpha} F_{d,\alpha} \end{bmatrix} d \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

ou plus simplement :

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A}_\alpha - L_\alpha \tilde{C}_\alpha) \tilde{x} + (\tilde{E}_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}) d \quad (\text{V.5a})$$

avec $\tilde{x} = \begin{bmatrix} e_x^T & e_f^T \end{bmatrix}^T$ et :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= \begin{bmatrix} A_\alpha & E_{f,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_\alpha = \begin{bmatrix} B_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{E}_{d,\alpha} = \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_\alpha &= \begin{bmatrix} C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{bmatrix} \text{ et } L_\alpha = \begin{bmatrix} L_{P,\alpha} \\ L_{I,\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.5b})$$

Afin d'étudier la robustesse de l'observateur (V.2) aux perturbations, on introduit le signal de résidu à minimiser $r = y - \hat{y}$. On obtient un générateur de résidu à commutation sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= (\tilde{A}_\alpha - L_\alpha \tilde{C}_\alpha) \tilde{x} + (\tilde{E}_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}) d \\ r &= \tilde{C}_\alpha \tilde{x} + F_{d,\alpha} d \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

La fonction sensibilité du résidu aux perturbations est définie par :

$$T_{rd_\alpha}(s) = \tilde{C}_\alpha (sI - A_\alpha^*)^{-1} E_{d,\alpha}^* + F_{d,\alpha} \quad (\text{V.7})$$

où $A_\alpha^* = \tilde{A}_\alpha - L_\alpha \tilde{C}_\alpha$ et $E_{d,\alpha}^* = \tilde{E}_{d,\alpha} - L_\alpha F_{d,\alpha}$.

L'objectif de robustesse aux perturbations avec une garantie \mathcal{H}_∞ du SPIO est exprimé par la condition suivante :

$$\|T_{rd_\alpha}\|_\infty < \gamma_\alpha \quad (\text{V.8})$$

Le problème de synthèse est alors résumé comme suit : trouver les matrices $L_\alpha = [L_{P,\alpha}^T \quad L_{I,\alpha}^T]^T$ qui minimisent γ_α telles que l'observateur PI commuté est stable.

V.2.2 Observateur PI à commutation

Avant de présenter la méthode de synthèse d'un observateur PI à commutation pour l'estimation du défaut, discutons d'abord des conditions de son existence :

Théorème V.1 (Existence d'un observateur PI à commutation)

L'observateur PI sous la forme (V.2) pour l'estimation du défaut existe si les paires $(\tilde{A}_\alpha, \tilde{C}_\alpha)$ sont observables (ou au moins détectables), soit :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_\alpha \\ \tilde{C}_\alpha \end{bmatrix} \right) = n + n_f, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{V.9})$$

$$\Leftrightarrow \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ 0 & sI_{n_f} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{bmatrix} \right) = n + n_f, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{V.10})$$

Sous le résultat théorème V.4, les pôles de l'observateur peuvent être arbitrairement choisis en utilisant une méthode de synthèse H_∞ /placement de pôles. Ceci est assuré par extension du lemme bornée réel et du placement par région LMI adapté pour l'observateur PI. On obtient le théorème suivant :

Théorème V.2 (Observateur PI à commutation)

Considérant l'observateur PI à commutation (V.1), s'il existe des matrices $P_\alpha > 0$ et U_α et des réels positifs γ_α et $\xi_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha^T P_\alpha + U_\alpha \tilde{C}_\alpha + \tilde{C}_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \tilde{E}_{d,\alpha} + U_\alpha F_{d,\alpha} & C_\alpha^T \\ * & -I & F_{d,\alpha}^T \\ * & * & -\gamma_\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.11a})$$

$$P_\alpha \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha^T P_\alpha + U_\alpha \tilde{C}_\alpha + \tilde{C}_\alpha^T U_\alpha^T + 2\xi_\alpha P_\alpha < 0 \quad (\text{V.11b})$$

$$P_\alpha > 0 \quad (\text{V.11c})$$

alors il existe un observateur PI à commutation sous la forme (V.2) tel que les objectifs H_∞ /placement de pôles sont atteints.

Les gains de cet observateur sont calculés par :

$$L_\alpha = P_\alpha^{-1}U_\alpha \quad (\text{V.12a})$$

$$L_{P_\alpha} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times n_f} \end{bmatrix} L_\alpha \quad (\text{V.12b})$$

$$L_{I_\alpha} = \begin{bmatrix} 0_{n_f \times p} & I_{n_f} \end{bmatrix} L_\alpha \quad (\text{V.12c})$$

Démonstration : Ce théorème est une extension directe des théorèmes (IV.1) et (IV.3.1) pour la synthèse d'observateur H_∞ à commutation avec un placement de pôles, en remplaçant A_α , E_{f_α} et C_α par \tilde{A}_α , \tilde{E}_{f_α} et \tilde{C}_α . ■

L'observateur PI à commutation pour l'estimation du défaut est implémenté sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\alpha - L_{P,\alpha}C_\alpha & E_{f,\alpha} - L_{P,\alpha}F_{f,\alpha} \\ -L_{I,\alpha}C_\alpha & -L_{I,\alpha}F_{f,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\alpha - L_{P,\alpha}D_\alpha & L_{P,\alpha} \\ -L_{I,\alpha}D_\alpha & L_{I,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{V.13})$$

V.2.3 Observateur robuste PI à commutation

On considère maintenant la classe de systèmes LTI incertain à commutation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \bar{A}_\alpha x + B_\alpha u + \bar{E}_{d,\alpha} d + \bar{E}_{f,\alpha} f \\ y &= \bar{C}_\alpha x + D_\alpha u + \bar{F}_{d,\alpha} d + \bar{F}_{f,\alpha} f \end{cases} \quad (\text{V.14a})$$

avec

$$\bar{M}_\alpha = M_\alpha + H_{M,\alpha} \Delta_{M,\alpha} N_{M,\alpha} \quad (\text{V.14b})$$

où M remplace chacune des matrices de la représentation d'état de (V.14a) et $\Delta_{M,\alpha}$ sont les matrices d'incertitude de l'état des sous-systèmes, et au lieu d'une seule matrice pour décrire les directions de ces incertitudes, des paires de matrices sont utilisées dans cette formulation : $H_{M,\alpha}$ et $N_{M,\alpha}$. Cette structure permet une meilleure représentation des incertitudes paramétriques.

On reprend l'hypothèse (H-IV.7) sous la forme suivante :

Hypothèse V.1 : Les matrices des incertitudes sont bornées au sens \mathcal{L}_2 , ceci est exprimé par les inégalités suivantes :

$$\Delta_{M,\alpha}^T \Delta_{M,\alpha} \leq \varepsilon_{M,\alpha}^2 I \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{V.15a})$$

qui sont équivalentes à :

$$\Delta_{M,\alpha}^T \Delta_{M,\alpha} \leq I \quad (\text{V.15b})$$

en divisant $H_{M,\alpha}$ par $\varepsilon_{M,\alpha}$.

En tenant compte de ces incertitudes, les multi-objectifs de l'observateur PI robuste à commutation dans (V.2) sont :

1. Robustesse aux perturbations
2. Robustesse aux incertitudes
3. Temps de réponse rapide
4. Estimation du défaut

Ces objectifs sont atteints par une synthèse exprimée par le théorème suivant :

Théorème V.3 (Observateur PI robuste à commutation)

Considérant l'observateur PI à commutation sous la forme (V.1), s'il existe des matrices $P_\alpha > 0$ et U_α et des réels positifs $\gamma_\alpha, \delta_{i,\alpha}, \{i = A, E_d, C, F_d\}$ et $\xi_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \Omega_\alpha & \Pi_\alpha \\ \star & \Delta_\alpha \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.16a})$$

$$P_\alpha \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha^T P_\alpha + U_\alpha \tilde{C}_\alpha + \tilde{C}_\alpha^T U_\alpha^T + 2\xi_\alpha P_\alpha < 0 \quad (\text{V.16b})$$

$$P_\alpha > 0 \quad (\text{V.16c})$$

où

$$\Omega_\alpha = \begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha^T P_\alpha + U_\alpha \tilde{C}_\alpha + \tilde{C}_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \tilde{E}_{d,\alpha} + U_\alpha F_{d,\alpha} & C_\alpha^T \\ \star & -I & F_{d,\alpha}^T \\ \star & \star & -\gamma_\alpha^2 I \end{bmatrix} \quad (\text{V.17a})$$

$$\Pi_\alpha = \begin{bmatrix} \Pi_{1,\alpha} & \Pi_{2,\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{V.17b})$$

$$\Pi_{1,\alpha} = \begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{H}_{A,\alpha} & \tilde{N}_{A,\alpha}^T & U_\alpha \tilde{H}_{C,\alpha} & \tilde{N}_{C_{F_f},\alpha}^T & P_\alpha \tilde{H}_{E_d,\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{E_d,\alpha}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.17c})$$

$$\Pi_{2,\alpha} = \begin{bmatrix} U_\alpha \tilde{H}_{F_d,\alpha} & 0 & 0 & \tilde{N}_{C_\alpha}^T & 0 & 0 \\ 0 & N_{F_d,\alpha}^T & 0 & 0 & 0 & N_{F_d,\alpha}^T \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{C_\alpha} & 0 & H_{F_d,\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.17d})$$

$$(\text{V.17e})$$

$$\Delta_\alpha = \text{diag}(\Delta_{1,\alpha}, \Delta_{2,\alpha}) \quad (\text{V.17f})$$

$$\Delta_{1,\alpha} = \text{diag}(\delta_{A,\alpha} I, \delta_{A,\alpha}^{-1} I, \delta_{C_{F_d},\alpha} I, \delta_{C_{F_d},\alpha}^{-1} I, \delta_{E_d,\alpha} I, \delta_{E_d,\alpha}^{-1} I) \quad (\text{V.17g})$$

$$\Delta_{2,\alpha} = \text{diag}(\delta_{F_d,\alpha} I, \delta_{F_d,\alpha}^{-1} I, \delta_{C,\alpha} I, \delta_{C,\alpha}^{-1} I, \delta_{F_d,\alpha} I, \delta_{F_d,\alpha}^{-1} I) \quad (\text{V.17h})$$

alors il existe un observateur PI robuste à commutation sous la forme (V.2) tel que les objectifs H_∞ de robustesse et les contraintes temporelles sont atteints.

Les gains de cet observateur sont calculés par :

$$L_\alpha = P_\alpha^{-1} U_\alpha \quad (\text{V.18})$$

Démonstration : La démonstration de ce théorème se base sur l'utilisation du lemme (II.4) pour éliminer les termes incertains.

En considérant les incertitudes du système, les matrices définies dans (V.5b) deviennent :

$$\begin{aligned}\check{A}_\alpha &= \begin{bmatrix} \bar{A}_\alpha & \bar{E}_{f,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\alpha & E_{f,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{A_\alpha} & H_{E_{f,\alpha}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{A_\alpha} & 0 \\ 0 & \Delta_{E_{f,\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{A_\alpha} & 0 \\ 0 & N_{E_{f,\alpha}} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A}_\alpha + \tilde{H}_{A,\alpha} \Delta_{AE_{f,\alpha}} \tilde{N}_{A,\alpha} \end{aligned} \quad (\text{V.19a})$$

$$\begin{aligned}\check{B}_\alpha &= \begin{bmatrix} \bar{B}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{B_\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{B_\alpha} N_{B_\alpha} \\ &= \tilde{B}_\alpha + \tilde{H}_{B,\alpha} \Delta_{B,\alpha} \tilde{N}_{B,\alpha} \end{aligned} \quad (\text{V.19b})$$

$$\begin{aligned}\check{E}_{d,\alpha} &= \begin{bmatrix} \bar{E}_{d,\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{d,\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{E_{d,\alpha}} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{E_{d,\alpha}} N_{E_{d,\alpha}} \\ &= \tilde{E}_{d,\alpha} + \tilde{H}_{E_{d,\alpha}} \Delta_{E_{d,\alpha}} \tilde{N}_{E_{d,\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{V.19c})$$

$$\begin{aligned}\check{C}_\alpha &= \begin{bmatrix} \bar{C}_\alpha & \bar{F}_{f,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\alpha & F_{f,\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{C_\alpha} & H_{F_{f,\alpha}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{C_\alpha} & 0 \\ 0 & \Delta_{F_{f,\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{C_\alpha} & 0 \\ 0 & N_{F_{f,\alpha}} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{C}_\alpha + \tilde{H}_{C,\alpha} \Delta_{CF_{f,\alpha}} \tilde{N}_{C,\alpha} \end{aligned} \quad (\text{V.19d})$$

Ensuite, on applique le lemme borné réel pour la synthèse de l'observateur PI, en remplaçant \tilde{A}_α , $\tilde{E}_{d,\alpha}$ et \tilde{C}_α dans les LMIs (V.11a) par \check{A}_α , $\check{E}_{d,\alpha}$ et \check{C}_α . On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} P_\alpha \check{A}_\alpha + \check{A}_\alpha^T P_\alpha + U_\alpha \check{C}_\alpha + \check{C}_\alpha^T U_\alpha^T & P_\alpha \check{E}_{d,\alpha} + U_\alpha \bar{F}_{d,\alpha} & \check{C}_\alpha^T \\ * & -I & \bar{F}_{d,\alpha}^T \\ * & * & -\gamma_\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.20})$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha &:= \Omega_\alpha + \mathbb{S} \left(\begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{H}_{A,\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{AE_{f,\alpha}} [\tilde{N}_{A,\alpha} \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} U_\alpha \tilde{H}_{C,\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{CF_{f,\alpha}} [\tilde{N}_{CF_{f,\alpha}} \ 0 \ 0] \right) \\ &+ \mathbb{S} \left(\begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{H}_{E_{d,\alpha}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{E_{d,\alpha}} [0 \ \tilde{N}_{E_{d,\alpha}} \ 0] + \begin{bmatrix} U_\alpha H_{F_{d,\alpha}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{F_{d,\alpha}} [0 \ N_{F_{d,\alpha}} \ 0] \right) \\ &+ \mathbb{S} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{C,\alpha} \end{bmatrix} \Delta_{C,\alpha} [N_{C,\alpha} \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{F_{d,\alpha}} \end{bmatrix} \Delta_{F_{d,\alpha}} [0 \ N_{F_{d,\alpha}} \ 0] \right) < 0 \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Pour simplifier les équations dans la suite, on introduit Υ_α définie par :

$$\begin{aligned}\Upsilon_\alpha &= \mathbb{S} \left(\begin{bmatrix} U_\alpha \tilde{H}_{C,\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{CF_{f,\alpha}} \begin{bmatrix} \tilde{N}_{CF_{f,\alpha}}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{H}_{E_{d,\alpha}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{E_{d,\alpha}} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{N}_{E_{d,\alpha}}^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \\ &+ \left(\begin{bmatrix} U_\alpha H_{F_{d,\alpha}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{F_{d,\alpha}} \begin{bmatrix} 0 \\ N_{F_{d,\alpha}}^T \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{C,\alpha} \end{bmatrix} \Delta_{C,\alpha} \begin{bmatrix} N_{C,\alpha}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{F_{d,\alpha}} \end{bmatrix} \Delta_{F_{d,\alpha}} \begin{bmatrix} 0 \\ N_{F_{d,\alpha}}^T \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

D'après les propriétés de l'hypothèse (H-V.1), les termes inconnus $\Delta_{M,\alpha}$ peuvent être éliminés en utilisant le lemme d'élimination. Pour le premier terme d'incertitude, on a :

$$\Psi_\alpha < \Omega_\alpha + \delta_{A_\alpha}^{-1} I \begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{H}_{A,\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\alpha \tilde{H}_{A,\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \delta_{A_\alpha} I \begin{bmatrix} \tilde{N}_{A,\alpha}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}_{A,\alpha}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \Upsilon_\alpha < 0 \quad (\text{V.23})$$

Ceci est mis sous forme matricielle par complément de Schur :

$$\left[\begin{array}{c|cc} \Omega_\alpha + \Upsilon_\alpha & P_\alpha \tilde{H}_{A,\alpha} & \tilde{N}_{A,\alpha}^T \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \hline \star & -\delta_{A_\alpha} I & 0 \\ & 0 & -\delta_{A_\alpha}^{-1} I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{V.24})$$

En suivant ces étapes de calculs pour les autres termes de Υ_α , on retrouve les LMIs (V.16a).

Pour les LMIs (V.11b), elles sont directement déduites de la technique de placement de pôles, déjà discutée dans (IV.3.1). ■

Remarque V.1

Dans la formulation du problème, les matrices B_α et D_α sont considérées certaines. Toutefois, cette approche peut être généralisée pour inclure les incertitudes sur ces différentes matrices de la représentation d'état.

Comme pour l'approche LPV, la technique présentée dans la remarque (IV.18) du chapitre précédent peut être utilisée pour réécrire la représentation d'état de tout système sous une forme avec uniquement des incertitudes sur la matrice A .

Ainsi pour rajouter une incertitude sur les matrices de sortie \bar{D} , le filtre de sortie à utiliser est :

$$\mathcal{F}_y : \begin{bmatrix} \dot{x}_y \\ y_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y & B_y \\ C_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_y \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{V.25a})$$

En interconnectant les deux systèmes, on obtient la représentation du système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_y \\ y_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & B & E_d & E_f \\ B_y \bar{C} & A_y & B_y \bar{D} & B_y \bar{F}_d & B_y \bar{F}_f \\ 0 & C_f & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_y \\ u \\ d \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{V.25b})$$

Puis pour des incertitudes sur la matrice \bar{B} , le filtre d'entrée est :

$$\mathcal{F}_u : \begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_u & B_u \\ C_u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ u_u \end{bmatrix} \quad (\text{V.26a})$$

et le système après interconnexion devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_u \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} \bar{A} & \bar{B}C_u & 0 & E_d & E_f \\ 0 & A_u & B_u & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & DC_u & F_d & F_f \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_u \\ u_u \\ d \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{V.26b})$$

V.2.4 Observateur PI généralisé

On considère maintenant le problème d'estimation du défaut par observateur PI généralisé à commutation, pour les systèmes LTI commutés certains. On reprend cette classe de système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + E_{f,i} f \\ y = C_i x + D_i u + F_{f,i} f \end{cases} \quad (\text{V.27})$$

On souhaite construire l'observateur PI généralisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = F_i z + G_i y + J_i u + V_i \hat{f} \\ \dot{\hat{f}} = L_{I_i} (y - \hat{y}) \\ \hat{x} = M_i z + N_i y + H_i u + Q_i \hat{f} \\ \hat{y} = C_i \hat{x} + D_i u + F_{f,i} \hat{f} \end{cases} \quad (\text{V.28})$$

où $z \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état de l'observateur, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimé de x , $\hat{f} \in \mathbb{R}^{n_f}$ est l'estimé du défaut, les matrices F_i , G_i , J_i , V_i , M_i et N_i sont de dimensions appropriées, mais elles sont inconnues et sont à déterminer.

Pour retrouver ces matrices inconnues, la variable d'erreur $\varepsilon = z - T_i x$ est introduite, où $T_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont des matrices arbitraires à déterminer.

Par définition, l'estimation de l'état est :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= M_i z + N_i y + H_i u + Q_i \hat{f} \\ &= M_i \varepsilon + (M_i T_i + N_i C_i) x + (N_i D_i + H_i) u + N_i F_{f,i} f + Q_i \hat{f} \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

Définissons les erreurs d'estimation de l'état $e_x = \hat{x} - x$ et de défaut $e_f = \hat{f} - f$, alors :

$$\begin{aligned} e_x = \hat{x} - x &= M_i \varepsilon + (M_i T_i + N_i C_i) x + N_i F_{f,i} f + Q_i \hat{f} - x \\ &= M_i \varepsilon + (M_i T_i + N_i C_i - I) x + (N_i D_i + H_i) u + N_i F_{f,i} f + Q_i \hat{f} \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_f = \dot{\hat{f}} - \dot{f} &= L_{I_i} (y - \hat{y}) \\ &= L_{I_i} (C_i x + F_{f,i} f - C_i \hat{x} - F_{f,i} \hat{f}) \\ &= -L_{I_i} C_i e_x - L_{I_i} F_{f,i} e_f \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

Ensuite, d'après la définition de l'erreur ε , on a :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{z} - T_j \dot{x} \\ &= F_i z + G_i y + J_i u + V_i \hat{f} - T_j A_i x - T_j B_i u - T_j E_{f,i} f \\ &= F_i \varepsilon + (F_i T_i + G_i C_i - T_j A_i) x + (J_i - T_j B_i + G_i D_i) u + (G_i F_{f_i} - T_j E_{f,i}) f + V_i \hat{f} \quad (\text{V.32})\end{aligned}$$

Si les égalités suivantes sont satisfaites :

$$F_i T_i + G_i C_i - T_j A_i = 0 \quad (\text{V.33a})$$

$$J_i - T_j B_i + G_i D_i = 0 \quad (\text{V.33b})$$

$$N_i D_i + H_i = 0 \quad (\text{V.33c})$$

$$G_i F_{f_i} - T_j E_{f,i} + V_i = 0 \quad (\text{V.33d})$$

$$M_i T_i + N_i C_i = I_n \quad (\text{V.33e})$$

$$N_i F_{f,i} + Q_i = 0 \quad (\text{V.33f})$$

Alors les équations (V.30)-(V.32) deviennent :

$$e_x = M_i \varepsilon + Q_i e_f \quad (\text{V.34a})$$

$$\dot{e}_f = -L_{I_i} C_i e_x - L_{I_i} F_{f,i} e_f \quad (\text{V.34b})$$

$$\dot{\varepsilon} = F_i \varepsilon + V_i e_f \quad (\text{V.34c})$$

Ce qui est équivalent à :

$$\dot{\varepsilon} = F_i \varepsilon + V_i e_f \quad (\text{V.35a})$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_f &= -L_{I_i} C_i (M_i \varepsilon + Q_i e_f) - L_{I_i} F_{f,i} e_f \\ &= -L_{I_i} C_i M_i \varepsilon - L_{I_i} (C_i Q_i + F_{f,i}) e_f \quad (\text{V.35b})\end{aligned}$$

$$= -L_{I_i} C_i M_i \varepsilon - L_{I_i} (-C_i N_i F_{f,i} + F_{f,i}) e_f \quad (\text{V.35c})$$

Ceci donne la représentation d'état du système autonome suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{e}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & T_j E_{f,i} - G_i F_{f_i} \\ -L_{I_i} C_i M_i & -L_{I_i} (I - C_i N_i) F_{f,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e_f \end{bmatrix} \quad (\text{V.36})$$

Or d'après la construction de l'observateur généralisé démontrée dans le chapitre précédent, une solution possible est :

$$M_i = \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} \quad (\text{V.37a})$$

$$N_i = \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} \quad (\text{V.37b})$$

$$F_i = T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} - L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} \quad (\text{V.37c})$$

$$G_i = T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} - L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} \quad (\text{V.37d})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_i = \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix}, \quad \Gamma_i^\perp = [I_{p+q} - \Gamma_i \Gamma_i^+], \\ \Pi_{1,i} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_{2,i} = \begin{bmatrix} K_i \\ I_p \end{bmatrix}, \\ T_i = E_i \begin{bmatrix} I_n \\ C_i \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } K_i = E_i \begin{bmatrix} I_n \\ C_i \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{V.37e})$$

La dynamique des erreurs en remplaçant les matrices par leurs solutions est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{e}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} - L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} & T_j E_{f,i} - (T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} - L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i}) F_{f,i} \\ -L_{I_i} C_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -L_{I_i} (I - C_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i}) F_{f,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e_f \end{bmatrix} \quad (\text{V.38a})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & T_j E_{f,i} - T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} & +L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} F_{f,i} \\ -L_{I_i} C_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -L_{I_i} (I - C_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i}) F_{f,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.38b})$$

D'après les définitions de Γ_i^\perp , $\Pi_{1,i}$ et $\Pi_{2,i}$, on remarque que :

$$\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \Gamma_i^\perp = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix}^+ \quad (\text{V.39a})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} - C_i \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix}^+ \quad (\text{V.39b})$$

donc

$$\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \Pi_{1,i} - C_i \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix}^+ \Pi_{1,i} \quad (\text{V.39c})$$

$$= -C_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} \quad (\text{V.39d})$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \Pi_{2,i} - C_i \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix}^+ \Pi_{2,i} \quad (\text{V.39e})$$

$$= I_p - C_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} \quad (\text{V.39f})$$

alors le système (V.38b) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{e}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & T_j E_{f,i} - T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} & +L_{P_i} \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} F_{f_i} \\ -L_{I_i} C_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -L_{I_i} (I - C_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i}) F_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & T_j E_{f,i} - T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} L_{P_i} \\ L_{I_i} \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i} & -\Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} F_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

Ce système autonome se réduit à la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{e}} = (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_i) \bar{e} \end{array} \right. \quad (\text{V.42})$$

où

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e_f \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_i = \begin{bmatrix} L_{P_i} \\ L_{I_i} \begin{bmatrix} 0 & -I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.43a})$$

$$\check{A}_i = T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i}, \quad \check{E}_{f_i} = T_j E_{f,i} - T_j A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f_i}, \quad (\text{V.43b})$$

$$\check{C}_i = \Gamma_i^\perp \Pi_{1,i}, \quad \check{F}_{f_i} = -\Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} F_{f_i}, \quad (\text{V.43c})$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \check{A}_i & \check{E}_{f_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} \check{C}_i & \check{F}_{f_i} \end{bmatrix} \quad (\text{V.43d})$$

Théorème V.4 (Existence d'un observateur PI à commutation généralisé)

Si les quadruplets $(A_\alpha, E_{f_\alpha}, C_\alpha, F_{f_\alpha})$ sont observables, alors les quadruplets $(\check{A}_\alpha, \check{E}_{f_\alpha}, \check{C}_\alpha, \check{F}_{f_\alpha})$ le sont aussi.

Cette équivalence est exprimée par la condition de rang suivante :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI_n - A_i & -E_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \end{pmatrix} = n + n_f \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} sI_q - \check{A}_i & \check{E}_{f_i} \\ \check{C}_i & \check{F}_{f_i} \end{pmatrix} = q + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad (\text{V.44})$$

Sous cette condition, l'observateur PI généralisé d'ordre $q + n_f$ sous la forme (V.28) pour l'estimation du défaut existe si le système (V.1) est observable et sujet à un défaut détectable.

Démonstration : Introduisant d'abord les matrices V_1, V_2, V_3, V_4 et X_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \begin{bmatrix} I_q & -T_i A_i \Gamma_i^+ \\ 0_q & \Gamma_i^\perp \\ 0 & \Gamma_i \Gamma_i^+ \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -\Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -\Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} \\ 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \\ V_3 = \begin{bmatrix} I_q & -sI_q & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} -T_i & -sK_i & 0 \\ -C_i & sI_p - X_i & Y_i \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \\ X_i = -I_p + C_i A_i C_i^+, \quad Y_i = F_f - sC_i A_i C_i^+ F_{f,i} + sC_i E_{f,i} \end{array} \right. \quad (\text{V.45})$$

V_1 est de rang $n + q$, V_4 est de rang $n + p + n_f$ d'après (H-IV.9), V_2 et V_3 sont des matrices régulières de rang $q + n_f$ et $p + 2q$ respectivement.

Sous les hypothèses (H-IV.1) et (H-IV.2) de l'observabilité et de la détectabilité du défaut, les paires $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$ sont observables $\forall i \in \mathcal{I}$, alors :

$$\begin{aligned} \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_i \\ \tilde{C}_i \end{bmatrix} \right) &= \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - A_i & -E_{f,i} \\ 0 & sI \\ C_i & F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{cases} \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - A_i & -E_{f,i} \\ C_i & F_{f,i} \end{bmatrix} \right) = n + n_f, & \text{pour } s = 0 \\ \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - A_i \\ C_i \end{bmatrix} \right) + n_f = n + n_f, & \forall s \in \mathbb{C} - \{0\} \end{cases} \\ &= n + n_f, \quad \forall s \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (\text{V.46})$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Sylvestre, on a :

$$\begin{aligned} n + n_f &= \text{rang} \begin{pmatrix} sI_n - A_i & -E_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} sI_n - A_i & -E_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \\ 0 & sI \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \left(V_4 \begin{pmatrix} sI_n - A_i & -E_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \\ 0 & sI \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - sT_i - sK_i C_i & T_i E_{f_i} - sK_i F_{f_i} \\ C_i A_i - X_i C_i & -C_i E_{f_i} + sF_{f_i} - X_i F_{f_i} - sY_i \\ C_i & F_{f_i} \\ 0 & sI_{n_f} \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - sT_i - sK_i C_i & T_i E_{f_i} - sK_i F_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \\ 0 & sI_{n_f} \end{pmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} T_i A_i - sE_i & T_i E_{f_i} - sK_i F_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \end{pmatrix} \quad \forall s \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (\text{V.47a})$$

Puis en notant $M_i = \begin{pmatrix} sI_q & T_i A_i & T_i E_{f_i} \\ I_q & E_i & K_i F_{f_i} \\ 0 & C_i & F_{f_i} \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
rang(M_i) &= rang \left(V_3 \begin{pmatrix} sI_q & T_i A_i & T_i E_{f_i} \\ I_q & E_i & K_i F_{f_i} \\ 0 & C_i & F_{f_i} \end{pmatrix} \right) \\
&= rang \begin{bmatrix} 0 & T_i A_i - sE_i & T_i E_{f_i} - sK_i F_{f_i} \\ I_q & E_i & K_i F_{f_i} \\ 0 & C_i & F_{f_i} \end{bmatrix} \\
&= rang \begin{pmatrix} T_i A_i - sE_i & T_i E_{f_i} - sK_i F_{f_i} \\ C_i & F_{f_i} \end{pmatrix} + q \\
&= n + n_f + q
\end{aligned} \tag{V.47b}$$

En appliquant l'inégalité de sylvestre encore une fois au produit $M_i V_2$, on a :

$$\begin{aligned}
rang(M_i) + rang(V_2) - (q + n + n_f) &\leq rang(M_i V_2) \leq \min(rang(M_i), rang(V_2)) \\
\Rightarrow q + n + n_f + q + n_f - (q + n + n_f) &\leq rang(M_i V_2) \leq \min(q + n + n_f, q + n_f)
\end{aligned} \tag{V.47c}$$

donc $rang(M_i V_2) = q + n_f$, soit :

$$\begin{aligned}
q + n_f = rang(M_i V_2) &= \begin{bmatrix} sI_q & T_i A_i & T_i E_{f_i} \\ I_q & E_i & K_i F_{f_i} \\ 0 & C_i & F_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -\Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -\Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\
&= rang \left(\begin{bmatrix} sI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + T_i E_{f_i} \\ I_q - E_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -E_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + K_i F_{f,i} \\ -C_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -C_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\
&= rang \left(\begin{bmatrix} sI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + T_i E_{f_i} \\ I_q - E_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -E_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + K_i F_{f,i} \\ -C_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -C_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\
&= rang \left(\begin{bmatrix} sI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + T_i E_{f_i} \\ \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix} \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & - \begin{bmatrix} E_i \\ C_i \end{bmatrix} \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + \begin{bmatrix} K_i \\ I_p \end{bmatrix} F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\
&= rang \left(\begin{bmatrix} sI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + T_i E_{f_i} \\ \Pi_{1,i} - \Gamma_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -\Gamma_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + \Pi_{2,i} F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\
&= rang \left(\begin{bmatrix} sI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & -T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} + T_i E_{f_i} \\ (I - \Gamma_i \Gamma_i^+) \Pi_{1,i} & (I - \Gamma_i \Gamma_i^+) \Pi_{2,i} F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\
&= rang \left(\begin{bmatrix} sI_q - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & T_i E_{f_i} - T_i A_i \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} \\ \Gamma_i^+ \Pi_{1,i} & \Gamma_i^+ \Pi_{2,i} F_{f,i} \end{bmatrix} \right) \\
&= rang \begin{pmatrix} sI_q - \check{A}_i & \check{E}_{f_i} \\ \check{C}_i & \check{F}_{f_i} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{V.47d}$$

Donc l'équivalence (V.44) est bien satisfaite. ■

Comme on vient de démontrer que le système augmenté est bien observable, l'observateur PI généralisé existe.

On considère maintenant le système (V.27), en rajoutant les perturbations :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_i x + B_i u + E_{d,i} d + E_{f,i} f \\ y &= C_i x + D_i u + F_{f,i} f + F_{d,i} d \end{cases} \quad (\text{V.48})$$

En suivant les mêmes étapes de calcul pour les erreurs d'estimation, on obtient le système suivant sujet à des perturbations :

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}} &= (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_i) \bar{e} + (\bar{E}_{d,i} - \bar{L}_i \bar{F}_{d,i}) d \\ \bar{r} &= \bar{C}_i \bar{e} + \bar{F}_{d,i} d \end{cases} \quad (\text{V.49})$$

où

$$\bar{E}_{d,i} = \begin{bmatrix} T_j E_{d,i} - T_j A_i \Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} F_{d,i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{F}_{d,i} = -\Gamma_i^\perp \Pi_{2,i} F_{d,i} \quad (\text{V.50})$$

Ainsi, on peut par application du lemme borné réel sur (V.49), retrouver les gains de l'observateur PI généralisé garantissant la stabilité et la réjection de perturbations :

Lemme V.1 (Lemme borné réel pour observateur PI réduit)

Il existe $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$, des matrices \bar{U}_i et des matrices $\bar{P}_i > 0$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i \bar{A}_i + \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{U}_i \bar{C}_i + \bar{C}_i^T \bar{U}_i & \bar{P}_i \bar{E}_{d,i} + \bar{U}_i \bar{F}_{d,i} & \bar{C}_i^T \\ \star & -\gamma_i^2 I & \bar{F}_{d,i}^T \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.51})$$

où les matrices de gain de l'observateur sont obtenues par :

$$\bar{L}_i = -\bar{P}_i^{-1} \bar{U}_i \quad (\text{V.52a})$$

$$L_{P_i} = \begin{bmatrix} I_{q+p} & 0 \end{bmatrix} \bar{L}_i \quad (\text{V.52b})$$

$$L_{I_i} = \begin{bmatrix} 0_{q+p} & 0_{q+p,p} \\ 0_{p,q} & I_p \end{bmatrix} \bar{L}_i \quad (\text{V.52c})$$

Démonstration : Il suffit de remplacer les matrices \tilde{A}_i , \tilde{L}_i et \tilde{C}_i par \bar{A}_i , \bar{L}_i et \bar{C}_i ■

Au final, l'observateur PI généralisé (V.28) à implémenter est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}} \\ \dot{\hat{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & V_i \\ -L_i C_i M_i & L_i (C_i Q_i - F_{f,i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \hat{f} \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} J_i & G_i \\ -L_{I_i} (D_i + C_i H_i) & L_{I_i} (I - C_i N_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_i & Q_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \hat{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i & N_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{V.53})$$

Remarque V.2 (Observateur PI à commutation d'ordre plein)

L'observateur PI (V.2) qui est d'ordre plein ($q = n$) peut être facilement déduit en posant les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} T_i &= I, & E_i &= I & M_i &= I, \\ N_i &= 0 & H_i &= 0, & Q_i &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.54a})$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} G_i &= L_{P_i} & F_i &= A_i - L_{P_i}C_i \\ V_i &= E_{f,i} - L_{P_i}F_{f_i} & J_i &= B_i - L_{P_i}D_i, \end{aligned} \quad (\text{V.54b})$$

Remarque V.3 (Observateur PI à commutation d'ordre minimal)

L'observateur PI d'ordre minimal ($q = p$) peut être facilement déduit en posant les matrices E_i de départ :

$$E_i = C^\perp \quad (\text{V.55})$$

V.2.5 Récapitulatif sur l'estimation du défaut par PIO

Pour résumer cette partie sur l'estimation de défaut par différents types d'observateurs PI à commutation, les étapes de synthèse sont présentées dans le tableau suivant :

Type	Hypothèse	Solution	Implémentation
SPIO	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C},$ $\dot{f}(t) = 0$ pas d'incertitudes	minimiser γ_α sous les contraintes LMI (V.11)	implémenter l'observateur (V.13)
SRPIO	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C},$ $\dot{f}(t) = 0$ incertitudes $\neq 0$	minimiser γ_α sous les contraintes LMI (V.16)	implémenter l'observateur (V.13)
SGPIO	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C},$ $\dot{f}(t) = 0$ pas d'incertitudes	minimiser γ_α sous les contraintes LMI (V.51) avec (V.33) et (V.37)	implémenter l'observateur (V.53)

TABLE V.1 – Récapitulatif sur la synthèse des observateurs PI à commutation

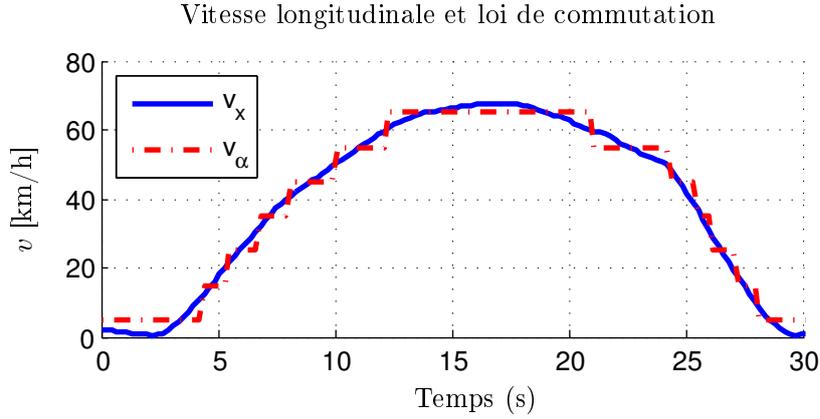


FIGURE V.1 – Vitesse longitudinale du véhicule et signal de commutation

V.2.6 Exemple : estimation de défaut actionneur

V.2.6.1 Modèle bicyclette : système LTI incertain à commutation

On reprend l'exemple d'un défaut actionneur sur la commande du volant, impliquée dans la dynamique latérale du véhicule. Le modèle bicyclette exprimé en système LPV dans (IV.5.4), sera formulé par un système LTI incertain à commutation.

On rappelle le modèle bicyclette non linéaire en $\frac{1}{v}$ et $\frac{1}{v^2}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{mv(t)} & \frac{c_rl_r-c_fl_f}{mv^2(t)} - 1 \\ \frac{c_rl_r-c_fl_f}{I_z} & -\frac{c_rl_r^2+c_fl_f^2}{I_zv(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv(t)} \\ \frac{c_rl_f}{I_z} \end{bmatrix} u_L(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ \frac{l_w}{I_z} \end{bmatrix} F_w(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

avec l'angle de lacet comme sortie mesurée.

Dans cette approche, le système est linéarisé autour de plusieurs points de fonctionnement, déterminés par les vitesses $v_\alpha \in \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ linéairement espacées d'un pas δ .

Ainsi, la vitesse du véhicule détermine la loi de commutation du système : le signal $\alpha(t)$ est défini par la valeur entière de la division $\frac{v(t)}{\delta}$.

Le développement en série de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de v_α donne (voir annexe A) :

$$\frac{1}{v} \Big|_{v=v_\alpha} = \frac{1}{v_\alpha} - \frac{1}{v_\alpha^2}(v - v_\alpha) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{v^2}\right) \quad (\text{V.57a})$$

$$\frac{1}{v^2} \Big|_{v=v_\alpha} = \frac{1}{v_\alpha^2} - \frac{2}{v_\alpha^3}(v - v_\alpha) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{v^3}\right) \quad (\text{V.57b})$$

Or, pour les vitesses $v > 10$ km/h, $\mathcal{O}(\frac{1}{v^3}) \ll \mathcal{O}(\frac{1}{v^2}) \ll 1$, donc :

$$A = A_0 + \underbrace{\frac{1}{v_\alpha} A_1 + \frac{1}{v_\alpha^2} A_2}_{A_\alpha} + \underbrace{\left(-\frac{1}{v_\alpha^2} A_1 - \frac{2}{v_\alpha^3} A_2\right)}_{N_{A,\alpha}} \underbrace{(v - v_\alpha)}_{\Delta_{x,\alpha}} \quad (\text{V.58a})$$

$$B = B_0 + \underbrace{\frac{1}{v_\alpha} B_1}_{B_\alpha} + \underbrace{-\frac{1}{v_\alpha^2} B_1}_{N_{B,\alpha}} \underbrace{(v - v_\alpha)}_{\Delta_{u,\alpha}} \quad (\text{V.58b})$$

$$E_d = E_0 + \underbrace{\frac{1}{v_\alpha} E_1}_{E_\alpha} + \underbrace{-\frac{1}{v_\alpha^2} E_1}_{N_{D,\alpha}} \underbrace{(v - v_\alpha)}_{\Delta_{d,\alpha}} \quad (\text{V.58c})$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A_\alpha + \Delta_{x,\alpha} N_{A,\alpha})x + (B_\alpha + \Delta_{u,\alpha} N_{u,\alpha})u + (E_\alpha + \Delta_{d,\alpha} N_{d,\alpha})d \\ y &= C_\alpha x \end{cases} \quad (\text{V.59})$$

Ensuite, on applique la transformation expliquée dans la remarque V.1 avec les filtres \mathcal{F}_u et \mathcal{F}_d appropriés. On obtient alors le système LTI incertain à commutation sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A_\alpha + \Delta_{x,\alpha} N_{x,\alpha})x + B_\alpha u + E_\alpha d \\ y &= C_\alpha x \end{cases} \quad (\text{V.60})$$

avec $\Delta_{x,\alpha}$ qui satisfait l'hypothèse des incertitudes bornées **H-IV.7**, en effet :

$$\Delta_{x,\alpha}^T \Delta_{x,\alpha} < \frac{\delta^2}{4} I \quad (\text{V.61})$$

V.2.6.2 Scénario de simulation

On considère le scénario d'évitement d'obstacle, ou test de l'élan. En utilisant les données expérimentales de la campagne de test de 2014 sur la **Renault Megane** dans le cadre du projet INOVE, le modèle LTI commuté est d'abord validé.

L'entrée du système est l'angle au volant. Elle est tracée dans la figure V.2. La manoeuvre de l'évitement d'obstacle a lieu entre $t=18$ et $t=24$ s.

La vitesse du véhicule au CoG et le signal v_α sont tracés dans la figure V.1, en bleu plein et rouge pointillé respectivement. Comme ce test est effectué jusqu'à une vitesse de 80 km/h, et le pas de discrétisation de la vitesse δ est de 10 km/h le nombre de sous-systèmes est égale à 8 : $v_\alpha \in \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75\}$.

Enfin, comme le montrent les courbes de la figure V.3, le modèle LTI incertain à commutation est validé par une comparaison entre la sortie mesurée par l'accéléromètre et la sortie simulée à partir du modèle.

V.2.6.3 Estimation d'un défaut actionneur

On considère un défaut sur la commande du volant, qui peut être une usure de la colonne de direction, ou une dent cassée d'un engrenage de transmission par exemple.

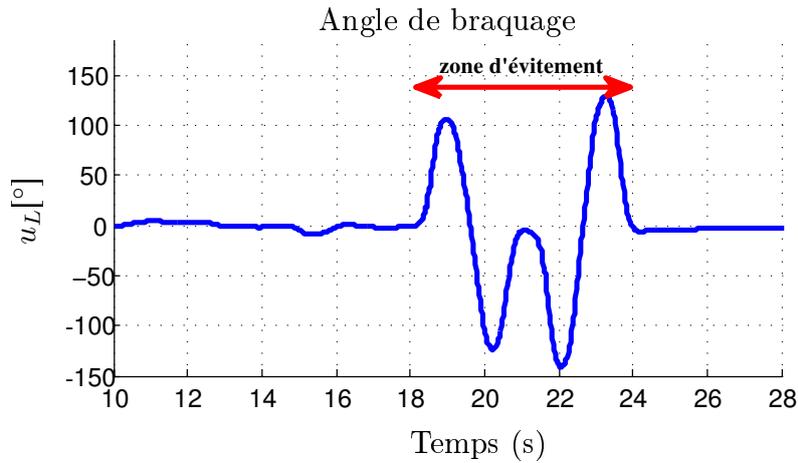


FIGURE V.2 – Angle au volant

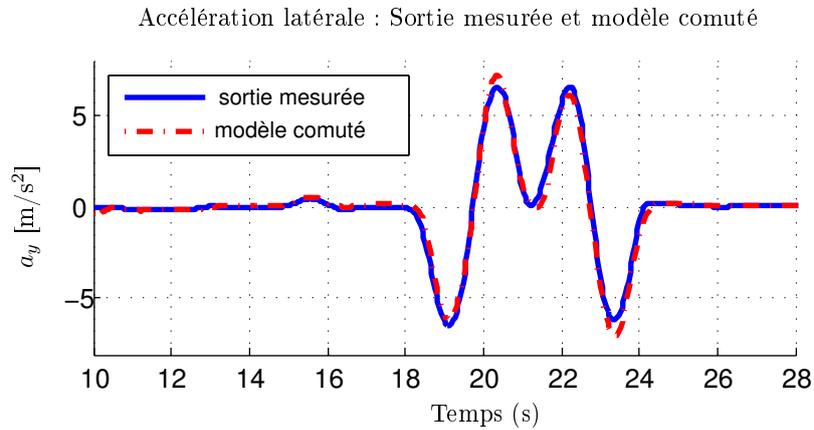


FIGURE V.3 – Accélération latérale : mesurée et simulée par modèle comuté

Ainsi, la représentation d'état en incluant le défaut peut être exprimée par la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A_\alpha + \Delta_{x,\alpha} N_{x,\alpha})x + B_\alpha(u + f) + E_{d,\alpha}d \\ y &= Cx \end{cases} \quad (\text{V.62})$$

En utilisant cette forme, un observateur robuste proportionnel intégral pour l'estimation du défaut peut être implémenté, en calculant les gains par la solution du problème d'optimisation convexe formulé par le théorème V.3.

Le résultat d'implémentation est montré dans la figure V.4. Pour un défaut (bleu) qui surgit après 9s, on peut remarquer qu'une bonne estimation de ce défaut (rouge pointillée) est directement obtenue, avec un temps de réponse de moins de 1s. En plus, même pour une variation de ce défaut (à partir de $t = 12s$), l'observateur PI donne un estimé assez proche.

En effet, malgré l'hypothèse $\dot{f} = 0$ pour l'observateur PI, la contrainte de placement de pôle lors de la synthèse donne à l'observateur une bande passante plus large, lui permettant

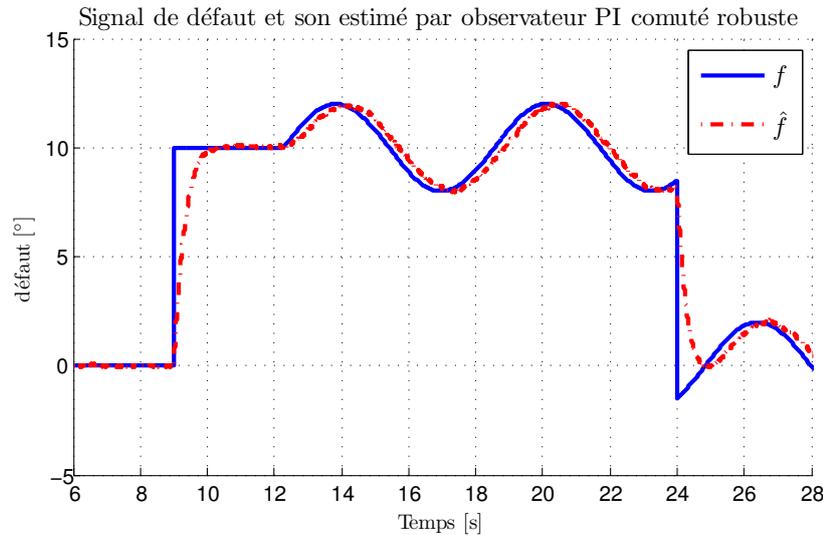


FIGURE V.4 – Signal de défaut et son estimé

de suivre les variations en basses fréquences du défaut. Dans cet exemple, on imposait $\xi_\alpha = 10$ dans les LMIs (V.16b).

D'autre part, dans la zone sans défaut, on voit que l'estimé donne une valeur très proche de 0.

V.2.7 Conclusion

Dans la continuité du chapitre précédent, on a présenté dans cette section une première méthode d'estimation du défaut par observateur proportionnel intégral à commutation.

La construction de cet observateur est proposée sous les hypothèses du chapitre précédent, avec une contrainte de défaut statique, soit en très basse fréquence. La synthèse multi-objectifs en couplant la réjection de perturbation et la réponse temporelle est formulée par des LMIs à résoudre par un algorithme d'optimisation convexe approprié.

Ensuite, la synthèse d'observateur PI est étendue en deux directions : la première est en considérant des incertitudes paramétriques bornée, un observateur PI robuste fût proposé. La deuxième consiste à une généralisation de l'observateur PI identité d'ordre plein par un observateur de Luenberger, permettant de représenter différents ordres d'observateur PI (plein à réduit).

Enfin, cette méthode est illustrée par un exemple pratique pour l'estimation d'un défaut actionneur. Cet exemple reprend le modèle bicyclette non linéaire pour décrire la dynamique latérale du véhicule. Ce modèle non linéaire est transformé en un système LTI incertain à commutation, et validé à partir des mesures expérimentales.

V.3 Estimation de défaut par Filtre H_∞ à commutation

Dans cette section, une approche par synthèse H_∞ est proposée, où la contrainte $\dot{f} = 0$ nécessaire pour la synthèse d'observateur PI comuté de la section précédente, n'est plus

imposée.

Comme on a présenté dans le chapitre II, il est possible de transformer le problème d'estimation de défaut en un problème H_∞ standard. Ici, on propose une extension de cette méthode aux systèmes à commutation avec une garantie de stabilité, et en rajoutant des performances de robustesse aux incertitudes du système.

V.3.1 Formulation du problème

On reprend la représentation d'état d'une classe de système LTI incertain à commutation suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \bar{A}_{\alpha(k)}x_k + E_{d,\alpha(k)}d_k + E_{f,\alpha(k)}f_k \\ y_k &= C_{\alpha(k)}x_k + F_{d,\alpha(k)}d_k + F_{f,\alpha(k)}f_k \end{cases} \quad (\text{V.63})$$

Dans cette représentation, on rappelle la forme des matrices incertaines donnée dans (V.64) :

$$\bar{A}_{\alpha(k)} = A_{\alpha(k)} + H_{A,\alpha(k)}\Delta_{A,\alpha(k)}N_{A,\alpha(k)} \quad (\text{V.64})$$

On rappelle aussi que le signal de commutation $\alpha(k) \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N_\alpha\}$ a les mêmes propriétés données au chapitre précédent. La notation (2) est aussi utilisée : $\alpha(k) = i$, indique que le sous-système i est activé, et au moment de commutation k , on notera $i = \alpha(k) \neq \alpha(k+1) = j$.

Les hypothèses (H-IV.1) à (H-IV.5) sont supposées vraies. En plus, les incertitudes respectent l'hypothèse (H-V.1)

On note $w_k = \begin{bmatrix} d_k^T & f_k^T \end{bmatrix}^T$, $E_w = \begin{bmatrix} E_d & E_f \end{bmatrix}$ et $F_w = \begin{bmatrix} F_d & F_f \end{bmatrix}$. Alors le système (V.63) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_i x_k + E_{w,i} w_k \\ y_k &= C_i x_k + F_{w,i} w_k \end{cases} \quad (\text{V.65})$$

Pour estimer le défaut, on propose de construire le filtre à commutation $K_f(q^{-1})$ dont la réalisation est la suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1}^K &= A_i^K x_k^K + B_i^K y_k \\ \hat{f}_k &= C_i^K x_k^K + D_i^K y_k \end{cases} \quad (\text{V.66})$$

où $x^K \in \mathbb{R}_k^n$ est le vecteur d'état du filtre et $\hat{f} \in \mathbb{R}^{n_f}$ est le vecteur des défauts estimés.

On définit l'erreur d'estimation $z_k = f_k - \hat{f}_k$, et notant $x_k^a = \begin{bmatrix} x_k^T & x_k^{KT} \end{bmatrix}^T$ alors :

$$\begin{cases} x_{k+1}^a &= A_i^a x_{k+1}^a + E_i^a w_k \\ z_k &= C_i^a x_k^a + F_i^a w_k \end{cases} \quad (\text{V.67a})$$

avec

$$\begin{aligned} A_i^a &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_i^K C_i & A_i^K \end{bmatrix}, & E_i^a &= \begin{bmatrix} E_{w,i} \\ B_i^K F_{w,i} \end{bmatrix}, & C_i^a &= \begin{bmatrix} D_i^K C_i + \tilde{C}_i & C_i^K \end{bmatrix}, \\ F_i^a &= D_i^K F_{w,i} + \tilde{F}_i, & \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & \text{et } \tilde{F}_i &= \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{V.67b})$$

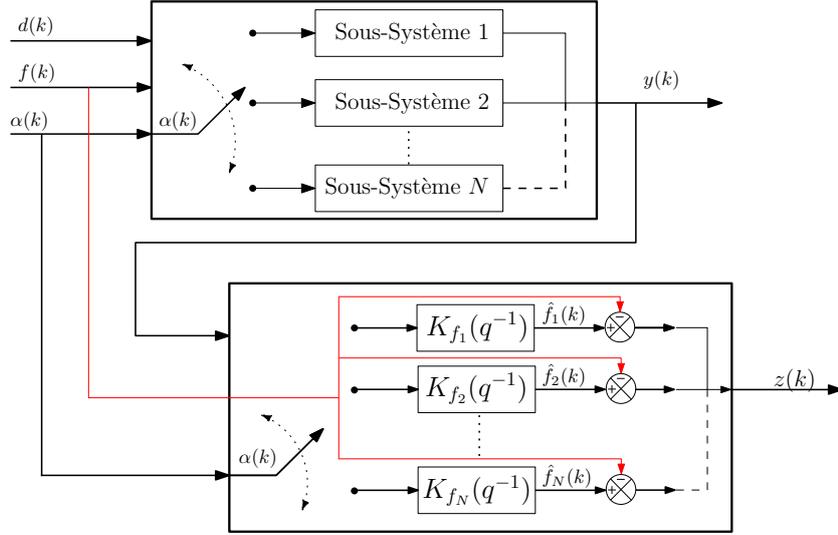


FIGURE V.5 – Filtre commuté pour l'estimation du défaut

L'objectif de la synthèse est de construire le filtre discret commuté $K(q^{-1})$ tel que l'erreur d'estimation du défaut est quadratiquement bornée par un réel positif γ_i , c'est-à-dire $z_k^T z_k < \gamma_i^2 w_k^T w_k$.

Ceci est équivalent par la formulation H_∞ :

$$\|T_{i,zw}\|_\infty < \gamma_i \quad (\text{V.68})$$

avec $T_{i,zw}(q^{-1})$ la fonction de sensibilité de la sortie d'intérêt z_k aux entrées exogènes w_k .

V.3.2 Synthèse H_∞ pour systèmes LTI certains à commutation

V.3.2.1 Préliminaires

D'abord, on considère le système LTI à commutation certain, dans le temps discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\alpha(k)} x_k + E_{d,\alpha(k)} d_k + E_{f,\alpha(k)} f_k \\ y_k = C_{\alpha(k)} x_k + F_{d,\alpha(k)} d_k + F_{f,\alpha(k)} f_k \end{cases} \quad (\text{V.69})$$

Théorème V.5 (Lemme borné réel pour les systèmes LTI à commutation)

Soit le système LTI sujet à une loi de commutation arbitraire, de la forme (V.69).

S'il existe des matrices positives définies P_i et P_j , et des réels positifs $\gamma_i \forall i, j \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ telles que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} -P_j^{-1} & A_i^a & E_i^a & 0 \\ A_i^{aT} & -P_i & 0 & C_i^{aT} \\ E_i^{aT} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{aT} \\ 0 & C_i^a & F_i^a & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.70})$$

alors un filtre discret commuté d'estimation de défaut (SFEF) peut être construit tel que

le système augmenté (V.67a) est stable. En plus la condition (V.68) est garantie.

Démonstration : On considère la MLF suivante :

$$V_k = x_k^{aT} P_{\alpha(k)} x_k^a > 0 \quad (\text{V.71})$$

Notons par $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$, le problème de faisabilité \mathcal{H}_∞ introduit dans (V.68) couplé à la condition suffisante de stabilité au sens de Lyapunov peut être exprimée par l'inégalité suivante :

$$\mathbb{V}_k = \Delta V_k + z_k^T z_k - \gamma_\alpha^2 w_k^T w_k < 0 \quad (\text{V.72})$$

En plus, ΔV_k doit être décroissante pour k croissant, et ceci est particulièrement vrai au moment de commutation, alors $\forall i, j \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_k &= x_{k+1}^a P_{\alpha(k+1)} x_{k+1}^a - x_k^{aT} P_{\alpha(k)} x_k^a + z_k^T z_k - \gamma_{\alpha(k)}^2 w_k^T w_k \\ &= \begin{bmatrix} x_k^a \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^a & E_i^a \end{bmatrix}^T P_j \begin{bmatrix} A_i^a & E_i^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^a \\ w_k \end{bmatrix} - \gamma_i^2 w_k^T w_k \\ &\quad - x_k^{aT} P_i x_k^a + \begin{bmatrix} x_k^a \\ w_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_i^a & F_i^a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_i^a & F_i^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^a \\ w_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_k^a \\ w_k \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} A_i^{aT} \\ E_i^{aT} \end{bmatrix} P_j \begin{bmatrix} A_i^a & E_i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_i & 0 \\ 0 & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_i^{aT} \\ F_i^{aT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i^a & F_i^a \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k^a \\ w_k \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.73}) \end{aligned}$$

Ces inégalités sont vraies $\forall \begin{bmatrix} x_k^{aT} & w_k^{aT} \end{bmatrix}^T \neq 0$, alors en utilisant le complément de Schur, l'inégalité (V.70) est directement obtenue. \blacksquare

On remarque que les inégalités (V.70) du théorème V.5 sont non linéaires en P_i et P_j . Le lemme d'élimination est alors utilisé pour les transformer en LMIs.

V.3.2.2 Linéarisation

Théorème V.6 (Filtre à commutation H_∞ d'estimation de défaut sous-optimal)

Le problème d'estimation du défaut H_∞ a une solution s'il existe des matrices définies positives R_i, R_j, S_i et S_j et des réels positifs $\gamma_i \forall i, j \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} -R_j + A_i R_i A_i^T & E_i \\ E_i^T & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.74a})$$

$$\mathcal{W}_{CF_i}^T \begin{bmatrix} A_i^T S_j A_i - S_i & A_i^T S_j E_i & \tilde{C}_i^T \\ E_i^T S_j A_i & E_i^T S_j E_i - \gamma_i^2 I & \tilde{F}_i^T \\ \tilde{C}_i^T & \tilde{F}_i & -I \end{bmatrix} \mathcal{W}_{CF_i} < 0 \quad (\text{V.74b})$$

$$\begin{bmatrix} R_i & I_n \\ I_n & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.74c})$$

où $\mathcal{W}_{CF_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{CF_i} & 0 \\ 0 & I_{n_f} \end{bmatrix}$, et \mathcal{W}_{CF_i} sont des bases des noyaux de $\begin{bmatrix} C_i & F_i \end{bmatrix}$. En plus, pour

un filtre d'ordre réduit ($n_k < n$), la condition suivante est rajoutée :

$$\text{rang}(I - R_i S_i) \leq n_k \quad (\text{V.74d})$$

Démonstration : La première étape de démonstration de ce théorème utilise le lemme de projection (II.3)

D'après la définition dans (V.67a), le système augmenté peut être développé comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_i^a & E_i^a \\ C_i^a & F_i^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^0 & E_i^0 \\ C_i^0 & F_i^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i^b & E_i^b \\ C_i^b & F_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^0 & E_i^0 \\ C_i^0 & F_i^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_i \\ \mathcal{D}_i \end{bmatrix} \mathcal{K}_i [\mathcal{C}_i \quad \mathcal{F}_i] \quad (\text{V.75})$$

avec :

$$\begin{aligned} A_i^0 &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_i^0 &= \begin{bmatrix} E_i \\ 0 \end{bmatrix}, & C_i^0 &= [\tilde{C}_i \quad 0], & F_i^0 &= \tilde{F}_i, \\ \mathcal{B}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, & \mathcal{D}_i &= [I \quad 0], & \mathcal{C}_i &= \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, & \mathcal{F}_i &= \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{et} & & \mathcal{K}_i &= \begin{bmatrix} D_i^K & C_i^K \\ B_i^K & A_i^K \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{V.76})$$

On peut ensuite séparer les éléments dépendants du filtre \mathcal{K}_i , les inégalités (V.70) sont équivalentes à :

$$\Phi_i + \mathcal{M}_i^T \mathcal{K}_i \mathcal{N}_i + \mathcal{N}_i^T \mathcal{K}_i^T \mathcal{M}_i < 0 \quad (\text{V.77})$$

avec

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} -P_j^{-1} & A_i^0 & E_i^0 & 0 \\ A_i^{0T} & -P_i & 0 & C_i^{0T} \\ E_i^{0T} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{0T} \\ 0 & C_i^0 & F_i^0 & -I \end{bmatrix}, \quad (\text{V.78a})$$

$$\mathcal{M}_i = [\mathcal{B}_i^T \quad 0 \quad 0 \quad \mathcal{D}_i^T] \quad (\text{V.78b})$$

$$\mathcal{N}_i = [0 \quad \mathcal{C}_i^T \quad \mathcal{F}_i^T \quad 0] \quad (\text{V.78c})$$

Les matrices $W_{\mathcal{M}_i}$ et $W_{\mathcal{N}_i}$ dont les colonnes constituent des bases pour les noyaux de \mathcal{M}_i et \mathcal{N}_i sont de la forme :

$$W_{\mathcal{M}_i} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0_{n_k \times n} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n+n_k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{nf+nd} \\ 0_{n_f \times n} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.79a})$$

$$W_{\mathcal{N}_i} = \begin{bmatrix} I_{n+n_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{C_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{F_i} & 0 \\ 0_{n_f \times (n+n_k)} & 0 & 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \quad (\text{V.79b})$$

En appliquant le lemme de projection pour éliminer les termes inconnus \mathcal{K}_i de l'inégalité, les BMIs sont transformées en deux inégalités :

$$W_{\mathcal{M}_i}^T \Phi_i W_{\mathcal{M}_i} < 0 \quad (\text{V.80a})$$

$$W_{\mathcal{N}_i}^T \Phi_i W_{\mathcal{N}_i} < 0 \quad (\text{V.80b})$$

On définit P_i comme suit :

$$P_i = \begin{bmatrix} S_i & N_i \\ N_i^T & U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & M_i \\ M_i^T & V_i \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{V.81})$$

(1) L'équation (V.80a) et les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$W_{\mathcal{M}_i}^T \begin{bmatrix} -P_j^{-1} & A_i^0 & E_i^0 & 0 \\ A_i^{0T} & -P_i & 0 & C_i^{0T} \\ E_i^{0T} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{0T} \\ 0 & C_i^0 & F_i^0 & -I \end{bmatrix} W_{\mathcal{M}_i} < 0 \quad (\text{V.82a})$$

$$W_{\mathcal{M}_i}^T \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} -R_j & -M_j & A_i & 0 & E_i & 0 \\ -M_j^T & -V_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline A_i^T & 0 & -P_i & 0 & 0 & \tilde{C}_i^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline E_i^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma_i^2 I & \tilde{F}_i^T \\ 0 & 0 & \tilde{C}_i & 0 & \tilde{F}_i & -I \end{array} \right] W_{\mathcal{M}_i} < 0 \quad (\text{V.82b})$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} -R_j & A_i & 0 \\ \hline A_i^T & -P_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline E_i^T & 0 & 0 \\ \hline & & -\gamma_i^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{V.82c})$$

En appliquant le lemme de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} -R_j & E_i \\ E_i^T & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_i^{-1} \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.82d})$$

Et d'après la définition de P_i^{-1} :

$$\begin{bmatrix} -R_j & E_i \\ E_i^T & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i & M_i \\ M_i^T & V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.82e})$$

Ce qui est équivalent aux premières LMIs du théorème V.6.

(2) L'inéquation (V.80b) et les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$W_{\mathcal{N}_i}^T \begin{bmatrix} -P_j^{-1} & A_i^0 & E_i^0 & 0 \\ A_i^{0T} & -P_i & 0 & C_i^{0T} \\ E_i^{0T} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{0T} \\ 0 & C_i^0 & F_i^0 & -I \end{bmatrix} W_{\mathcal{N}_i} < 0 \quad (\text{V.83a})$$

$$W_{\mathcal{N}_i}^T \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -P_j^{-1} & & A_i & 0 & E_i^0 & 0 \\ & & 0 & 0 & & \\ \hline A_i^T & 0 & -S_i & -N_i & 0 & \tilde{C}_i^T \\ 0 & 0 & -N_i^T & -U_i & 0 & 0 \\ \hline E_i^{0T} & & 0 & 0 & -\gamma_i^2 I & \tilde{F}_i^T \\ 0 & & \tilde{C}_i & 0 & \tilde{F}_i & -I \end{array} \right] W_{\mathcal{N}_i} < 0 \quad (\text{V.83b})$$

En remarquant que la troisième ligne de $W_{\mathcal{N}_i}$ est nulle, alors :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{CF}_i}^T \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -P_j^{-1} & & A_i & & E_i & 0 \\ & & 0 & & 0 & 0 \\ \hline A_i^T & 0 & -S_i & & 0 & \tilde{C}_i^T \\ E_i^T & 0 & 0 & & -\gamma_i^2 I & \tilde{F}_i^T \\ \hline 0 & 0 & \tilde{C}_i & & \tilde{F}_i & -I \end{array} \right] \mathcal{W}_{\mathcal{CF}_i} < 0 \quad (\text{V.83c})$$

En utilisant le lemme de Schur, on obtient :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{CF}_i}^T \left(\begin{bmatrix} -S_i & 0 & \tilde{C}_i^T \\ 0 & -\gamma_i^2 I & \tilde{F}_i^T \\ \tilde{C}_i & \tilde{F}_i & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ E_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_j \begin{bmatrix} A_i & E_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathcal{W}_{\mathcal{CF}_i} < 0 \quad (\text{V.83d})$$

Et d'après la définition de P_j , ces inégalités sont équivalentes au second ensemble de LMIs du théorème V.6.

Enfin, la définition de P_i et son inverse représentée par une égalité matricielle, est transformée en une LMI sous contrainte de rang par le lemme de complétion (II.5). On obtient directement les conditions (V.74c) et (V.74d). ■

V.3.2.3 Reconstruction du filtre

D'après la relation $P_i P_i^{-1} = I$ et la définition de P_i dans (V.81), on peut écrire :

$$P_i \begin{bmatrix} R_i \\ M_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_i & N_i \\ N_i^T & U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ M_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.84})$$

Une fois les matrices R_i, S_i, R_j, S_j calculées, la solution du problème d'optimisation convexe formulé dans le théorème V.6 permet de déterminer les matrices $M_i, N_i, U_i, M_j, N_j, U_j$, lesquelles peuvent être calculées d'après (V.84), selon les égalités suivantes :

$$S_i R_i + N_i M_i^T = I \quad (\text{V.85a})$$

$$N_i^T R_i + U_i M_i^T = 0 \quad (\text{V.85b})$$

D'après (V.85a) : on note $X_i = I - S_i R_i$, et on introduit les matrices unitaires orthogonales Σ_i , les matrices diagonales Λ_i , et les transposées de matrices orthogonales unitaires Γ_i , telles que

$$X_i = \Sigma_i \Lambda_i \Gamma_i^T \quad (\text{V.86})$$

Soit les décompositions en valeurs singulières des X_i dans (V.86), on introduit les matrices inversibles G_i de dimensions appropriées. Alors une solution de M_i et N_i (V.85a) est :

$$N_i = \Sigma_i \sqrt{\Lambda_i} G_i \quad (\text{V.87a})$$

$$M_i^T = G_i^{-1} \sqrt{\Lambda_i} \Gamma_i^T \quad (\text{V.87b})$$

et enfin, on calcule U_i par :

$$U_i = M_i^{-1} R_i N_i \quad (\text{V.87c})$$

Remarque V.4

Alors que les matrices R_i et S_i sont uniques, les matrices M_i , N_i et U_i ont une infinité de solutions. La méthode SVD donne un ensemble de ces solutions. En plus, l'introduction des matrices G_i offre un degré de liberté en plus dans la synthèse du filtre.

Après avoir construit les matrices P_i et P_j , les inégalités (V.70) deviennent des LMIs où les seuls inconnus sont les matrices d'état du filtre à commutations :

$$\begin{bmatrix} -P_j^{-1} & \mathbf{A}_i^a & \mathbf{E}_i^a & 0 \\ \mathbf{A}_i^{aT} & -P_i & 0 & \mathbf{C}_i^{aT} \\ \mathbf{E}_i^{aT} & 0 & -\gamma_i^2 I & \mathbf{F}_i^{aT} \\ 0 & \mathbf{C}_i^a & \mathbf{F}_i^a & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.88})$$

avec la notation en gras pour distinguer les paramètres inconnus à retrouver.

Remarque V.5

Certains problèmes de calcul pourraient survenir lorsque on essaye de résoudre l'équation (V.85a), à cause du produit $S_i R_i$. Afin d'éviter de telles matrices mal-conditionnées, le troisième ensemble de LMI est remplacé par

$$\begin{bmatrix} -R_i & tI \\ tI & -S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.89})$$

où t est un réel positif à minimiser.

V.3.3 Estimation robuste des défauts

Maintenant, on considère des incertitudes sur les matrices A_i . Le système est sous la forme présenté dans (V.63) :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \bar{A}_{\alpha(k)} x_k + E_{d,\alpha(k)} d_k + E_{f,\alpha(k)} f_k \\ y_k &= C_{\alpha(k)} x_k + F_{d,\alpha(k)} d_k + F_{f,\alpha(k)} f_k \end{cases} \quad (\text{V.90})$$

Théorème V.7 (Filtre sous-optimal robuste d'estimation de défaut)

Le problème de synthèse de filtre H_∞ sous optimal pour l'estimation de défaut a une solution s'il existe des matrices définies positives R_i , R_j , S_i et S_j et des réels positifs γ_i et

$t_i \forall i, j \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ tels que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} A_i R_i A_i^T - R_j & E_i & H_{A,i} & A_i R_i N_{A,i}^T \\ E_i^T & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ H_{A,i}^T & 0 & -\alpha_i^{-1} I & 0 \\ N_{A,i} R_i A_i^T & 0 & 0 & N_{A,i} R_i N_{A,i}^T - \alpha_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.91a})$$

$$\mathcal{W}_{CF_i}^T \Omega_i \mathcal{W}_{CF_i} < 0 \quad (\text{V.91b})$$

$$\begin{bmatrix} -R_i & tI \\ tI & -S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.91c})$$

où :

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} A_i^T S_j A_i & A_i^T S_j E_i & \tilde{C}_i^T & A_i^T S_j H_{A,i} & N_{A,i}^T \\ -S_i & & & & \\ E_i^T S_j A_i & E_i^T S_j E_i & \tilde{F}_i^T & E_i^T S_j H_{A,i} & 0 \\ & -\gamma_i^2 I & & & \\ \tilde{C}_i & \tilde{F}_i & -I & 0 & 0 \\ H_{A,i}^T S_j A_i & H_{A,i}^T S_j E_i & 0 & H_{A,i}^T S_j H_{A,i} & 0 \\ & & & -\alpha_i^{-1} I & \\ N_{A,i} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_i I \end{bmatrix} \quad (\text{V.91d})$$

$$\text{et } \mathcal{W}_{CF_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{CF_i} & 0 \\ 0 & I_{n_f+n_h+n_a} \end{bmatrix} \quad (\text{V.91e})$$

α_i sont des réels arbitraires et \mathcal{W}_{CF_i} sont des bases des noyaux de $\begin{bmatrix} C_i & F_i \end{bmatrix}$

Démonstration : La démonstration de ce théorème utilise le lemme d'élimination II.4.

D'abord, on définit les matrices :

$$\begin{aligned} \bar{A}_i^a &= \begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 \\ B_i^K C_i & A_i^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + H_{A,i} \Delta_{A,i} N_{A,i} & 0 \\ B_i^K C_i & A_i^K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_i^K C_i & A_i^K \end{bmatrix} + H_{A,i}^a \Delta_{A,i} N_{A,i}^a \end{aligned} \quad (\text{V.92})$$

avec $H_{A,i}^a = \begin{bmatrix} H_{A,i} \\ 0 \end{bmatrix}$ et $N_{A,i}^a = \begin{bmatrix} N_{A,i} & 0 \end{bmatrix}$.

En suivant les mêmes étapes de calcul dans les préliminaires de cette section, les BMIs à résoudre selon le théorème V.5 sont

$$\mathbb{G}_i = \begin{bmatrix} -P_j^{-1} & \bar{A}_i^a & E_i^a & 0 \\ \bar{A}_i^{aT} & -P_i & 0 & C_i^{aT} \\ E_i^{aT} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{aT} \\ 0 & C_i^a & F_i^a & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.93})$$

Ce qui est équivalent à :

$$\Phi_{2,i} + \mathbb{S} \left(\begin{bmatrix} H_{A_i}^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_{A,i} [0 \ N_{A_i}^a \ 0 \ 0] \right) < 0 \quad (\text{V.94})$$

$$\text{où } \Phi_{2,i} = \begin{bmatrix} -P_j^{-1} & A_i^a & E_i^a & 0 \\ A_i^{aT} & -P_i & 0 & C_i^{aT} \\ E_i^{aT} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{aT} \\ 0 & C_i^a & F_i^a & -I \end{bmatrix}.$$

En appliquant le lemme d'élimination avec $\mathcal{X} = [H_{A_i}^{aT} \ 0 \ 0 \ 0]$, $\mathcal{Y} = [0 \ N_{A_i}^a \ 0 \ 0]$ d'après l'hypothèse des incertitudes bornées, on obtient :

$$\mathbb{G}_i < \Phi_{2,i} + \alpha \mathcal{X}^T \mathcal{X} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{Y}^T \mathcal{Y} < 0 \quad (\text{V.95})$$

En appliquant le lemme de Schur :

$$\begin{bmatrix} -P_j^{-1} & A_i^a & E_i^a & 0 & H_{A_i}^a & 0 \\ A_i^{aT} & -P_i & 0 & C_i^{aT} & 0 & N_{A_i}^{aT} \\ E_i^{aT} & 0 & -\gamma_i^2 I & F_i^{aT} & 0 & 0 \\ 0 & C_i^a & F_i^a & -I & 0 & 0 \\ H_{A_i}^{aT} & 0 & 0 & 0 & -\alpha_i^{-1} I & 0 \\ 0 & N_{A_i}^a & 0 & 0 & 0 & -\alpha_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.96})$$

Ces inégalités sont des BMI. Elles peuvent être transformées en LMIs en suivant les mêmes étapes de linéarisation présentées précédemment. ■

Remarque V.6

Les incertitudes jusque là ont été considérées uniquement sur les matrices A_i pour alléger les calculs. Il est très simple d'inclure les incertitudes sur les autres matrices de la représentation d'état comme déjà développé pour la synthèse d'observateur PI robuste dans la section précédente.

Afin d'éviter toute redondance, on peut se référer au théorème (V.3) et sa démonstration pour plus de détails sur cette synthèse.

Remarque V.7

Une alternative pour inclure les incertitudes sur les matrices de sorties $C_{\alpha(k)}$, est d'utiliser la procédure présentée par la remarque (V.1) pour translater les incertitudes de sortie sur celles de l'état.

V.3.4 Estimation par synthèse H_∞ avec filtres de pondération

Afin d'améliorer les performances du filtre, et limiter le conservatisme introduit par la norme H_∞ , des filtres de pondération dynamique sont introduits lors de la procédure de synthèse.

Ainsi les filtres $\mathcal{W}_d(q^{-1})$ imposent une robustesse aux perturbations dans une zone fréquentielle donnée, et les filtres $\mathcal{W}_f(q^{-1})$ sont introduits pour modeler la réponse de l'estimé \hat{f}_k au défaut f .

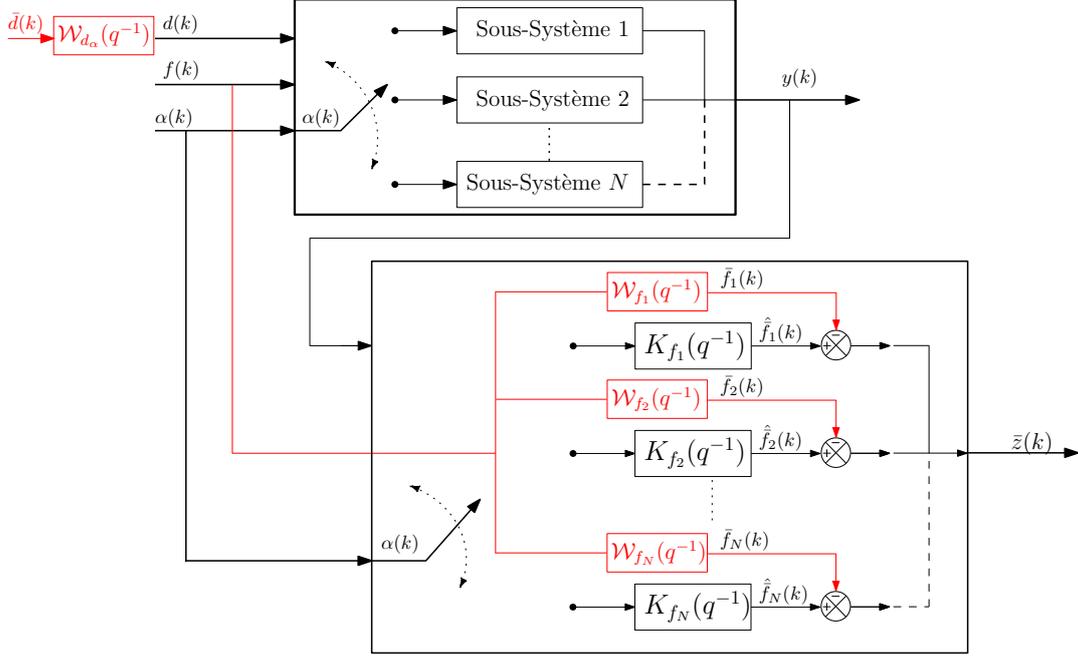


FIGURE V.6 – Filtre commuté pour l’estimation du défaut, avec pondérations fréquentielles

Les filtres dynamiques \mathcal{W}_d et \mathcal{W}_f sont définis par des systèmes à commutation, avec la même loi de commutation que le système. Ils ont les réalisations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1}^F &= A_i^F x_k^F + B_i^F f_k \\ \bar{f}_k &= C_i^F x_k^F + D_i^F f_k \end{cases} \quad (\text{V.97})$$

$$\begin{cases} x_{k+1}^D &= A_i^D x_k^D + B_i^D \bar{d}_k \\ d_k &= C_i^D x_k^D + D_i^D \bar{d}_k \end{cases} \quad (\text{V.98})$$

où $x_k^F \in \mathbb{R}^{n_F}$ et $x_k^D \in \mathbb{R}^{n_D}$, et on suppose que $\dim(f_k) = \dim(\bar{f}_k)$ et $\dim(d_k) = \dim(\bar{d}_k)$.

Le problème est maintenant de construire le filtre commuté $K(q^{-1})$ qui minimise le gain- \mathcal{L}_2 du système augmenté entre $w_k^T = \begin{bmatrix} \bar{d}_k^T & f_k^T \end{bmatrix}$ et l’erreur d’estimation de sortie $z_k = \bar{f}_k - \hat{f}_k$.

Le nouveau état augmenté est défini par $x_k^a = \begin{bmatrix} x_k^T & x_k^{FT} & x_k^{DT} & x_k^{KT} \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} x_{k+1}^a &= A_i^a x_{k+1}^a + E_i^a w_k \\ z_k &= C_i^a x_k^a + F_i^a w_k \end{cases} \quad (\text{V.99})$$

avec

$$A_i^a = \begin{bmatrix} \check{A}_i & 0 \\ B_i^K \check{C}_i & A_i^K \end{bmatrix}, \quad E_i^a = \begin{bmatrix} \check{E}_{w,i} \\ B_i^K \check{F}_{w,i} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.100a})$$

$$C_i^a = \begin{bmatrix} D_i^K \check{C}_i + \check{C}_i & C_i^K \end{bmatrix}, \quad F_i^a = D_i^K \check{F}_{w,i} + \check{F}_i, \quad (\text{V.100b})$$

$$\check{A}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 & E_{d,i} C_i^D \\ 0 & A_i^F & 0 \\ 0 & 0 & A_i^D \end{bmatrix}, \quad \check{E}_{w,i} = \begin{bmatrix} E_{d,i} D_i^D & E_{f,i} \\ 0 & B_i^F \\ B_i^D & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.100c})$$

$$\check{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 & F_{d,i} C_i^D \end{bmatrix}, \quad \check{F}_{w,i} = \begin{bmatrix} F_{d,i} D_i^D & F_{f,i} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.100d})$$

$$\check{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & -C_i^F & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \check{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{D}_i^F \end{bmatrix}. \quad (\text{V.100e})$$

L'objectif de la synthèse est de construire le filtre discret commuté $K(q^{-1})$ telle que l'erreur d'estimation du défaut est quadratiquement bornée par un réel positif γ_i , c'est-à-dire $z_k^T z_k < \gamma_i^2 w_k^T w_k$.

Pour atteindre cet objectif, le théorème V.7 peut alors être appliqué au système étendu en remplaçant $A_i, E_{w,i}, C_i, F_{w,i}, \check{C}_i$ et \check{F}_i par $\check{A}_i, \check{E}_{w,i}, \check{C}_i, \check{F}_{w,i}, \check{C}_i$ et \check{F}_i .

Remarque V.8

Afin d'avoir un estimé exact du défaut dans les basses fréquences, des facteurs ξ_i a posteriori peuvent être rajoutés aux sorties des filtres K_i correspondants.

V.3.5 Récapitulatif sur l'estimation du défaut par filtre H_∞ à commutation

Pour résumer cette partie sur l'estimation de défaut par différents types de filtres H_∞ à commutation, les étapes de synthèse sont présentées dans le tableau suivant :

Type	Hypothèse	Solution
Filtre H_∞	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C}$ $\dot{f}(t) = 0$ pas d'incertitudes	minimiser γ_α sous les contraintes LMI (V.74) puis (V.70)
Filtre H_∞ robuste	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C}$ $\dot{f}(t) = 0$ incertitudes $\neq 0$	minimiser γ_α sous les contraintes LMI (V.74) puis (V.96)
Filtre H_∞ robuste avec filtre de pondération	$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A_\alpha & -E_{f,\alpha} \\ C_\alpha & F_{f,\alpha} \end{pmatrix} = n + n_f \quad \forall s \in \mathbb{C}$ $\dot{f}(t) = 0$ incertitudes $\neq 0$	minimiser γ_α sous les contraintes LMI (V.74) avec (V.100) puis (V.96)

TABLE V.2 – Récapitulatif sur la synthèse des filtres H_∞ à commutation

Ces étapes sont regroupées par l'algorithme de conception suivant :

- (1) Définir les fonctions de sensibilité des défauts \mathcal{W}_{f_i} et des perturbations \mathcal{W}_{d_i} ,
- (2) Réécrire les LMIs du théorème V.7 avec la nouvelle représentation d'état pour inclure les matrices augmentées de l'état (V.100),
- (3) Résoudre le problème d'optimisation présenté par les LMIs du théorème V.7 avec les nouvelles matrices, en minimisant γ_i et t_i ,
- (4) A partir des R_i et S_i , reconstruire les matrices P_i par la procédure décrite dans (V.3.2.3),
- (5) Retrouver les paramètres des filtres $K_i(q^{-1})$, solution des LMIs V.96, après adaptation en rajoutant les matrices augmentées.

V.3.6 Discussion

– Dans la littérature sur la procédure de synthèse de filtre dynamique pour les systèmes à commutation, on trouve plusieurs approches pour la structure des matrices P_i :

1. Considérer une fonction de Lyapunov commune, au lieu de MLF [Wang 2014], c'est-à-dire :

$$P_i = P_j = \dots = P \quad \forall i, j \in \{1..N\}. \quad (\text{V.101})$$

Cette méthode est triviale mais induit un grand conservatisme.

2. Imposer des propriétés structurelles, comme par exemple une forme diagonale [Jia 2015] :

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1,i} & 0 \\ 0 & P_{2,i} \end{bmatrix} \quad (\text{V.102})$$

3. Ou bien une combinaison de parties communes et parties multiples de P_i [Geronmel 2008] :

$$P_i = \begin{bmatrix} P_1 & N \\ N^T & P_{2,i} \end{bmatrix} \quad (\text{V.103})$$

avec $\det(N) \neq 0$

Dans notre approche, aucune hypothèse est imposée sur P_i . On note tout simplement :

$$P_i = \begin{bmatrix} S_i & N_i \\ N_i^T & U_i \end{bmatrix} \quad (\text{V.104})$$

- Dans la littérature, une idée naturelle pour inclure les incertitudes est d'utiliser une approche polytopique, où le système est modélisé par une combinaison convexe des vertex du polytope. Chaque vertex dépend d'une valeur maximale ou minimale du paramètre incertain du modèle.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir utiliser les différentes méthodes (et les outils numériques), abondantes pour l'analyse, le contrôle et l'observation des systèmes polytopiques.

Mais d'un autre côté, ces méthodes demandent beaucoup de calculs. En effet, pour n paramètres incertains, le polytope construit contient 2^n vertex. Ce même nombre de LMIs doit être résolu avec une matrice P commune pour garantir la convexité du problème, ce qui induit beaucoup de conservatisme. En plus, en combinant une approche LPV à un système commuté comme développé dans cette section, le nombre de LMIs à résoudre devient très grand (voir théorème 2 dans [Koenig 2009]). Sous une loi de commutation arbitraire, la synthèse d'un filtre polytopique robuste commuté est formulée par $2^n \times n^2$ LMIs. L'approche présentée dans cette section ne demande que n^2 LMIs à résoudre.

Remarque V.9

Pour plusieurs systèmes, certaines séquences de commutation ne peuvent avoir lieu. Par exemple, la structure interne du système ne permet pas une commutation du sous-système 1 au sous-système 3 dans un seul pas de temps. En tenant compte des propriétés du système, le nombre de LMIs à résoudre peut être considérablement réduit, allégeant le conservatisme de la formulation.

Dans l'exemple de l'écriture du modèle bicyclette sous forme d'un système à commutation, le nombre de LMIs à résoudre est réduit à $3n - 2$, puisque le signal de commutation dépend de la vitesse.

V.3.7 Exemples

Pour illustrer l'approche d'estimation de défaut par filtre H_∞ à commutation, on montre deux exemples. Le premier est purement académique, et le deuxième est une application réelle sur l'estimation d'un défaut actionneur dans la dynamique latérale du véhicule. Ce second exemple reprend la formulation du modèle bicyclette sous un système à commutation, déjà développé dans l'exemple de la section précédente (V.2.6).

V.3.7.1 Exemple numérique

On considère le système LTI incertain à commutation sous la forme (V.90), avec les matrices d'état suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.89 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.07 \\ 0.1 & 0.91 \end{bmatrix}, & E_{d_1} &= E_{d_2} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} \\ E_{f_1} &= \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}, & E_{f_2} &= \begin{bmatrix} 0.022 \\ 0.011 \end{bmatrix}, & C_1 &= C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ F_{d,1} &= F_{d,2} = \begin{bmatrix} 0.01 \end{bmatrix}, & F_{f,1} &= F_{f,2} = \begin{bmatrix} 1.6 \end{bmatrix} \\ H_{A,1} &= H_{A,2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.002 \end{bmatrix}^T & N_{A,1} &= \begin{bmatrix} 0.22 & 0.128 \end{bmatrix} \text{ et } & N_{A,2} &= \begin{bmatrix} 0.22 & 0.13 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.105})$$

On considère une perturbation bornée sous la forme d'un bruit blanc. La loi de commutation et les perturbations sont présentées dans la figure (V.7) .

Le système est observable, un filtre robuste à commutation pour l'estimation des défauts peut être construit, en utilisant la méthode décrite dans cette partie.

On compare deux méthodes, la première sans les filtres de pondération W_{f_i} et W_{d_i} , et la deuxième avec. Les paramètres des filtres $K_i(q^{-1})$ sont calculés comme solution du problème d'optimisation convexe des théorèmes décrit précédemment avec comme objectif minimiser γ_i , en utilisant YALMIP sous Matlab.

Comme décrit dans la remarque V.8, les scalaires ξ_i sont rajoutés à la sortie des filtres

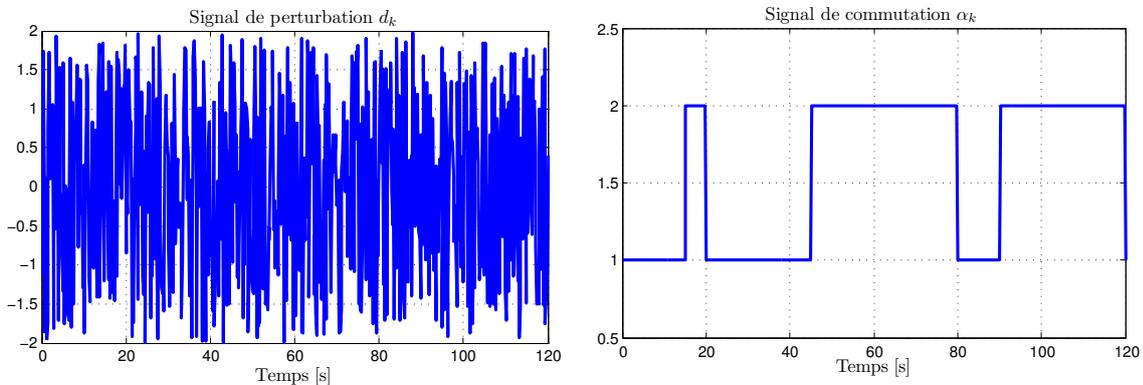


FIGURE V.7 – Signal de perturbation et loi de commutation

$K_i(q^{-1})$:

$$\bar{K}_i(q^{-1}) = \xi_i K_i(q^{-1}) \quad (\text{V.106})$$

Le filtre proposé dans (V.3.3) est implémenté pour estimer le défaut f_k . L'estimé du défaut est tracé en pointillé sur la figure V.8.a, où \hat{f}_k suit l'allure de f_k .

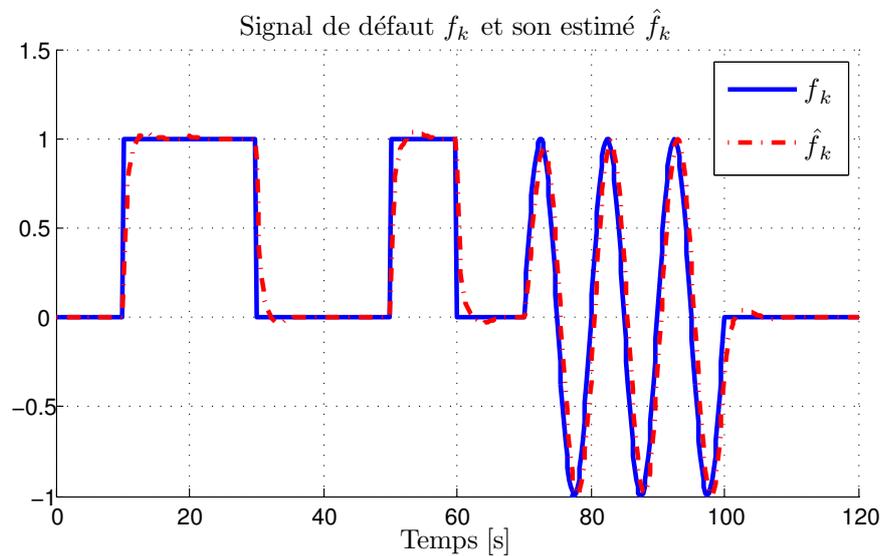
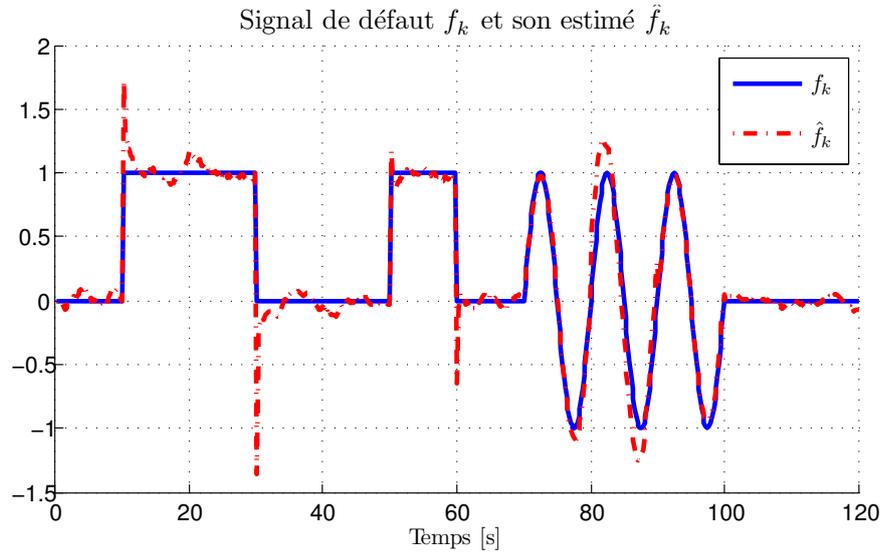


FIGURE V.8 – Estimation du défaut avec par filtre H_∞ à commutation

En utilisant l'amélioration de la synthèse présentée dans (V.3.4), les filtres passe-bas \mathcal{W}_f et \mathcal{W}_d^{-1} sont rajoutés dans la procédure. Les résultats sont données dans la figure (V.8).b : une

très bonne estimation du défaut est obtenu, malgré les incertitudes et les perturbations. Pour des défauts variant en basse fréquence, l'estimé \hat{f}_k suit bien f_k , avec un certain retard dû au déphasage induit par le filtre $K(q^{-1})$.

V.3.7.2 Application à l'estimation de défaut dans la dynamique latérale

On reprend l'exemple (V.2.6), avec le modèle bicyclette avec l'accélération latérale comme sortie mesurée :

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{m} & \frac{c_f l_f - c_r l_r}{m v^2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{m} \end{bmatrix} u_L(t) \quad (\text{V.107})$$

En reprenant le développement limité d'ordre 1 des termes non-linéaires (voir exemple (V.2.6) pour les calcul), la matrice de sortie s'écrit :

$$C = \underbrace{C_0}_{C_\alpha} + \underbrace{\frac{1}{v_\alpha^2} C_1}_{N_{C,\alpha}} + \underbrace{-\frac{1}{v_\alpha^3} C_1 (v - v_\alpha)}_{\Delta_{c,\alpha}} \quad (\text{V.108})$$

Et enfin, on retrouve la forme de système LTI commuté incertain sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_\alpha + \Delta_{x,\alpha} N_{A,\alpha})x + (B_\alpha + \Delta_{u,\alpha} N_{u,\alpha})u + (E_\alpha + \Delta_{d,\alpha} N_{d,\alpha})d \\ y = (C_\alpha + \Delta_{C,\alpha} N_{C,\alpha})x + D_\alpha u \end{cases} \quad (\text{V.109})$$

En utilisant la remarque V.1, où seul un filtre de sortie \mathcal{F}_y est à rajouter, on obtient la représentation d'état équivalente :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_\alpha + \Delta_{A,\alpha} N_{A,\alpha})x + (B_\alpha + \Delta_{u,\alpha} N_{u,\alpha})u + (E_\alpha + \Delta_{d,\alpha} N_{d,\alpha})d \\ \bar{y} = C_\alpha x + D_\alpha u \end{cases} \quad (\text{V.110})$$

Le système est alors sous la forme proposée par l'étude, avec l'inclusion des incertitudes sur les matrices B_i et E_{d_i} , qui est facilement traité avec le résultat de la remarque V.6. Le filtre à commutation est construit en suivant les étapes de l'algorithme (V.3.5).

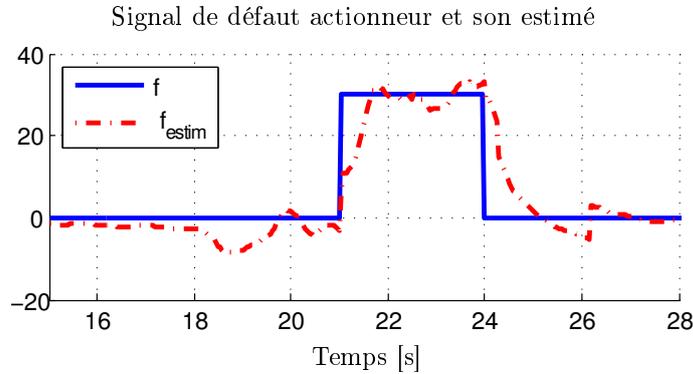


FIGURE V.9 – Estimation d'un défaut actionneur par filtre H_∞ commuté

Le résultat d'estimation du défaut actionneur est tracé sur la figure V.9. On peut remarquer sur la figure de petite fluctuation autour des vraies valeurs du défaut, ceci est dû à plusieurs causes : des incertitudes sur les paramètres non modélisées, des non linéarités simplifiées (modèle pneumatique par exemple), calibration des capteurs. Mais au final, une relative bonne estimation est obtenue.

V.3.8 Conclusion

Dans cette section, deux méthodes de conception pour les filtres commutés robustes pour l'estimation de défauts sont proposées. Ces méthodes sont construites autour de fonction de Lyapunov multiples.

La première méthode consiste à minimiser le gain de l'entrée inconnue de l'erreur d'estimation de défaut. La seconde méthode est une extension de la première en rajoutant des filtres de pondération afin d'alléger le conservatisme de la formulation H_∞ . Des conditions suffisantes pour l'existence des filtres commutés sont données en termes d'inégalités matricielles bilinéaires BMI, transformées en inégalités matricielles linéaires (LMI) en utilisant les lemme de projection et d'élimination.

La conception de ces filtres est réduite à la résolution des contraintes LMI en utilisant le logiciel YALMIP sous l'environnement Matlab.

Enfin, un exemple numérique et une application sur la dynamique latérale du véhicule ont permis de montrer l'efficacité de cette méthode.

V.4 Estimation de défaut par Observateur Adaptatif

V.4.1 Introduction

Dans les parties précédentes, que ce soit pour les approches à base d'observateur ou de filtre, le défaut est présenté comme un signal externe à détecter/estimer.

Dans cette section, une autre formulation est donnée : le défaut est un paramètre du système à estimer. On développe alors un observateur adaptatif avec deux parties :

1. Un gain d'observateur L , à déterminer pour avoir un observateur stable et robuste aux entrées inconnues
2. Un algorithme d'estimation des paramètres liés aux défauts. Dans la présente méthode, une estimation en ligne est obtenue par une méthode de moindre carré récursif modifiée.

V.4.2 Formulation du problème

On considère la représentation d'état d'une classe de système LTV MIMO discret sujet à des perturbations :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Ed_k + \psi_k \theta_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \quad (\text{V.111})$$

$u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée de commande et la sortie mesurée. ψ_k est une matrice de signaux connus, $\theta_k \in \mathbb{R}^{n_p}$ est le vecteur de paramètres inconnus, qui peuvent modéliser les défauts à détecter.

Hypothèse V.2 : La paire (A, C) est observable, ou au moins détectable.

Hypothèse V.3 : On suppose que le taux de variation des paramètres est borné :

$$\theta_{k+1} - \theta_k < \beta \quad (\text{V.112})$$

Hypothèse V.4 : La matrice ψ_k est supposée :

- Bornée : Elle est obtenue par filtrage des signaux connus (u_k et y_k), donc pour les systèmes stable est bornée,
- Suffisamment excitante : Pour pouvoir estimer les paramètres inconnus, le système doit être excité par ψ_k . Toutefois, cette excitation peut ne pas être persistante.

Hypothèse V.5 : Le signal de perturbation d_k inconnu est borné :

$$\|d\|_2 < \eta \quad (\text{V.113})$$

On propose de construire l'observateur adaptatif à temps discret suivant :

$$\begin{cases} \phi_{k+1} &= (A - LC)\phi_k + \psi_k \\ \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + \psi_k\hat{\theta}_k + L(y_k - \hat{y}_k) + \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k \end{cases} \quad (\text{V.114})$$

Le problème est alors formulé comme suit :

- Trouver la matrice L telle que l'estimé de l'état \hat{x}_k converge rapidement à l'état actuel x , tout en étant robuste aux perturbations d ,
- Trouver un estimé $\hat{\theta}$ du vecteur des paramètres inconnus θ

V.4.3 Préliminaires

V.4.3.1 Estimation robuste de l'état

Rappelons d'abord la synthèse d'observateur par le lemme bornée réel, énoncé en (II.9). La version discrète de la synthèse d'observateur est donnée par le lemme suivant :

Lemme V.2 (*Lemme bornée réel pour système discret*)

Considérant la classe suivante de système LTI discret avec des perturbations :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Ed_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \quad (\text{V.115})$$

où d_k est une perturbation qui satisfait l'hypothèse (H-V.5), et définissant le vecteur d'estimation d'état suivant :

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \quad (\text{V.116})$$

L'erreur d'estimation $\tilde{x} = x - \hat{x}$ tend exponentiellement rapidement à une boule bornée de rayon $r = \gamma \times \eta$, s'il existe une matrice définie positive P , une matrice U et un réel positif

γ tels que l'égalité suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} -P & E^T P A + E^T U C & A^T P + C^T U^T \\ \star & E^T P E - \gamma^2 I & 0 \\ \star & \star & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{V.117})$$

où le gain de l'observateur est calculé par $L = -P^{-1}U$.

Démonstration : On reprend la même démonstration du lemme (II.9), adapté pour les systèmes à temps discret.

Soit $r = C\tilde{x}$, on considère la fonction de Lyapunov $V_k = \tilde{x}^T P \tilde{x}$. En combinant les conditions suffisantes de stabilité $V_k > 0$ et $V_{k+1} - V_k < 0$ avec le critère H_∞ équivalent à $r^T r - \gamma^2 d^T d < 0$, la stabilité quadratique exponentielle est garantie si

$$V_{k+1} - V_k + r^T r - \gamma^2 d^T d < 0 \quad (\text{V.118})$$

et avec le lemme de Schur et un changement de variable, (V.117) est directement déduite. ■

V.4.3.2 Estimation en ligne des paramètres

Le but de l'algorithme d'identification est de trouver un vecteur d'estimation $\hat{\theta}$ du vrai vecteur de paramètres θ . Dans cette section, une méthode par moindres carrés récursive est développée pour calculer $\hat{\theta}$ en ligne. On considère le cas sans perturbations.

Définissons le vecteur d'erreur e_k comme la différence entre la valeur mesurée y_k à l'instant k et son estimation (prédiction) basée sur les observations jusqu'à l'instant $k - 1$:

$$\begin{aligned} e_k &= y_k - \hat{y}_k \\ &= y_k - C_k \hat{x}_k \end{aligned} \quad (\text{V.119})$$

Notation 3

On introduit la notation en majuscule Z_k et \bar{Q}_k définies par la concaténation de tous les vecteurs z_k^N et matrices Q_k^N sur un horizon de temps N , c'est-à-dire de $t = k - N$ jusqu'à l'observation courante $t = k$. Cette notation peut être récursivement écrite comme suit :

$$Z_k^N = \begin{pmatrix} Z_{k-1}^{N-1} \\ z_k \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_k^N = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{k-1}^{N-1} & 0 \\ 0 & Q_k \end{pmatrix} \quad (\text{V.120})$$

L'approche par moindres carrés consiste à minimiser la norme \mathcal{L}_2 du vecteur d'erreur, sur l'horizon N :

$$V = E_{(\hat{x}_k, \hat{\theta}_k)}^{NT} E_{(\hat{x}_k, \hat{\theta}_k)}^N = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \left\| \bar{C}^N \hat{X}_k^N - Y_k^N \right\|_2^2 \quad (\text{V.121})$$

où $E_{(\hat{x}_k, \hat{\theta}_k)}^{NT} = \left[(C\hat{x}_1 - y_1)^T \quad (C\hat{x}_2 - y_2)^T \quad \dots \quad (C\hat{x}_N - y_N)^T \right]$.

Pour construire le vecteur d'estimation des paramètres $\hat{\theta}$, en plus de l'hypothèse (H-V.3), on suppose que θ_k est constant sur l'horizon d'observation N . Ceci induit que $\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k = \hat{\theta}$.

Cette procédure est standard pour les algorithmes d'estimation à base des moindres carrés récurrents.

En utilisant la définition de l'observateur (V.114) et la notation de l'équation (V.120), on peut écrire :

$$E_{(\hat{x}_k, \hat{\theta})}^N = \bar{C}^N \left(\bar{A}^N \hat{X}_{k-1}^N + \bar{B}^N U_{k-1}^N + \Psi_{k-1}^N \hat{\theta} + \bar{L}^N (Y_{k-1}^N - \bar{C}^N \hat{X}_{k-1}^N) \right) - Y_k^N \quad (\text{V.122})$$

La dérivée de V par rapport à $\hat{\theta}$ est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}} &= 2 \frac{\partial E_{(\hat{x}_k, \hat{\theta})}^{NT}}{\partial \hat{\theta}} E_{(\hat{x}_k, \hat{\theta})}^N \\ &= 2 \Psi_{k-1}^{NT} \bar{C}^{NT} \left[\bar{C}^N \left(\bar{A}^N \hat{X}_{k-1}^N + \bar{B}^N U_{k-1}^N + \Psi_{k-1}^N \hat{\theta} + \bar{L}^N (Y_{k-1}^N - \bar{C}^N \hat{X}_{k-1}^N) \right) - Y_k^N \right] \end{aligned} \quad (\text{V.123})$$

Le minimum au sens \mathcal{L}_2 de la fonctionnelle V est assuré pour :

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad (\text{V.124a})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \hat{\theta}^2} > 0 \quad (\text{V.124b})$$

Ce qui est équivalent à :

$$2 \Psi_k^{NT} \bar{C}^{NT} \bar{C}^N \Psi_k^N \hat{\theta}^N = 2 \Psi_k^{NT} \bar{C}^{NT} \left[Y_k^N - \bar{C}^N (\bar{A}^N - \bar{L}^N \bar{C}^N) \hat{X}_{k-1}^N - \bar{C}^N \bar{L}^N Y_{k-1}^N - \bar{C}^N \bar{B}^N \bar{U}_{k-1}^N \right] \quad (\text{V.125a})$$

$$2 \Psi_k^{NT} \bar{C}^{NT} \bar{C}^N \Psi_k^N > 0 \quad (\text{V.125b})$$

Comme (V.125b) est toujours satisfaite, et définissant la matrice de covariance P_k et la matrice M_k :

$$P_k^N = \left(\Psi_k^T \bar{C}^{NT} \bar{C}^N \Psi_k \right)^{-1} \quad (\text{V.126a})$$

$$M_k^N = Y_k - \bar{C}^N (\bar{A}^N - \bar{L}^N \bar{C}^N) \hat{X}_{k-1}^N - \bar{C}^N \bar{L}^N Y_{k-1}^N - \bar{C}^N \bar{B}^N \bar{U}_{k-1}^N \quad (\text{V.126b})$$

alors la solution du problème (V.124) est :

$$\hat{\theta}^N = P_k^N \Psi_k^{NT} \bar{C}^N M_k^N \quad (\text{V.127})$$

V.4.3.3 Algorithme des moindres carrés récurrents (RLS)

On essaie de trouver une forme récursive pour $\hat{\theta}$. A l'échantillon $N+1$, on a :

$$\hat{\theta}^{N+1} = P_{k+1}^{N+1} \Psi_{k+1}^{N+1T} \bar{C}^{N+1} M_{k+1}^{N+1} \quad (\text{V.128})$$

D'après la notation (V.120), les signaux Ψ_{k+1}^{N+1} et M_{k+1}^{N+1} sont :

$$\Psi_{k+1}^{N+1} = \begin{pmatrix} \Psi_k^N \\ \psi_{k+1} \end{pmatrix}, \quad M_{k+1}^{N+1} = \begin{pmatrix} M_k^N \\ m_{k+1} \end{pmatrix} \quad (\text{V.129})$$

Pour trouver une forme récursive de la matrice de covariance, on l'écrit à $k+1$:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{N+1} &= \left(\Psi_{k+1}^{N+1 T} \bar{C}^{N T} \bar{C}^N \Psi_{k+1}^{N+1} \right)^{-1} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \Psi_k^N \\ \psi_{k+1} \end{pmatrix}^T \bar{C}^{N+1 T} \bar{C}^{N+1} \begin{pmatrix} \Psi_k^N \\ \psi_{k+1} \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \left[\Psi_k^{N T} \bar{C}^{N T} \bar{C}^N \Psi_k^N + \psi_{k+1}^T C^T C \psi_{k+1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{V.130})$$

puisque \bar{C}^N est une matrice diagonale d'après (V.120).

En utilisant le lemme d'inversion matricielle (II.1) avec $B = \psi_{k+1}^T C^T$, $C = I$, $D = C \psi_{k+1}$ et en remarquant que $A = \Psi_k^{N T} \bar{C}^{N T} \bar{C}^N \Psi_k^N = P_k^{N-1}$, on peut développer :

$$P_{k+1}^{N+1} = \left[\Psi_k^{N T} \bar{C}^{N T} \bar{C}^N \Psi_k^N + \psi_{k+1} C^T C \psi_{k+1}^T \right]^{-1} \quad (\text{V.131a})$$

$$= P_k^N - P_k^N \psi_{k+1}^T C^T [C \psi_{k+1} P_k^N \psi_{k+1}^T C^T + I]^{-1} C \psi_{k+1} P_k^N \quad (\text{V.131b})$$

On définit K_{k+1} par :

$$K_{k+1} = P_k^N \psi_{k+1}^T C^T [C \psi_{k+1} P_k^N \psi_{k+1}^T C^T + I]^{-1} \quad (\text{V.131c})$$

alors :

$$P_{k+1}^{N+1} = P_k^N - K_{k+1} C \psi_{k+1} P_k^N \quad (\text{V.131d})$$

$$= (I - K_{k+1} C \psi_{k+1}) P_k^N \quad (\text{V.131e})$$

D'après la définition de K_{k+1} en (V.131c), on peut écrire :

$$K_{k+1} + K_{k+1} C \psi_{k+1} P_k^N \psi_{k+1}^T C^T = P_k^N \psi_{k+1}^T C^T \quad (\text{V.132a})$$

$$\Leftrightarrow K_{k+1} = P_k^N \psi_{k+1}^T C^T - K_{k+1} C \psi_{k+1} P_k^N \psi_{k+1}^T C^T \quad (\text{V.132b})$$

En post-multipliant (V.131d) par $\psi_{k+1}^T C^T$, on a :

$$P_{k+1}^{N+1} \psi_{k+1}^T C^T = P_k^N \psi_{k+1}^T C^T - K_{k+1} C \psi_{k+1} P_k^N \psi_{k+1}^T C^T \quad (\text{V.132c})$$

$$= K_{k+1} \quad (\text{V.132d})$$

D'après les équations (V.128)-(V.132c), on déduit :

$$\hat{\theta}^{N+1} = P_{k+1}^{N+1} \Psi_{k+1}^{N+1 T} \bar{C}^{N+1} M_{k+1}^{N+1} \quad (\text{V.133a})$$

$$= P_{k+1}^{N+1} (\Psi_k^{N T} \bar{C}^N M_k^N + \psi_{k+1}^T C^T m_{k+1}) \quad (\text{V.133b})$$

$$= (I - K_{k+1} C \psi_{k+1}) P_k^N \Psi_k^{N T} \bar{C}^N M_k^N + P_{k+1}^{N+1} \psi_{k+1}^T C^T m_{k+1} \quad (\text{V.133c})$$

$$= (I - K_{k+1} C \psi_{k+1}) \hat{\theta}^N + K_{k+1} m_{k+1} \quad (\text{V.133d})$$

En introduisant la matrice :

$$\Gamma_k = I - K_k C \psi_k \quad (\text{V.134})$$

Alors le vecteur d'estimation des paramètres peut être écrit récursivement à l'échantillon $(N + 1)$ par :

$$\hat{\theta}^{N+1} = \Gamma_{k+1} \hat{\theta}^N + K_{k+1} m_{k+1} \quad (\text{V.135})$$

Enfin, on obtient l'algorithme généralisé suivant pour l'estimation de l'état et des paramètres inconnus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{k+1} = (A - LC)\phi_k + \psi_k \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k \\ m_{k+1} = y_{k+1} - C(A - LC)\hat{x}_k - CBu_k - CLy_k \\ K_{k+1} = P_k \psi_{k+1}^T C^T [C\psi_{k+1} P_k \psi_{k+1}^T C^T + I]^{-1} \\ \Gamma_{k+1} = I - K_{k+1} C \psi_{k+1} \\ P_{k+1} = \Gamma_{k+1} P_k \\ \hat{\theta}_{k+1} = \Gamma_{k+1} \hat{\theta}_k + K_{k+1} m_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + \psi_k \hat{\theta}_k + L(y_k - \hat{y}_k) + \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \end{array} \right. \quad (\text{V.136})$$

Théorème V.8

Sous les hypothèses **(H-V.5)**-**(H-V.2)**, l'algorithme **(V.136)** définit un observateur global exponentiellement stable, c'est-à-dire que les erreurs d'estimation $x_k - \hat{x}_k$ et $\theta_k - \hat{\theta}_k$ convergent exponentiellement rapidement vers une boule bornée notée Ω quand $k \rightarrow \infty$.

Lemme V.3 (Système exponentiellement stable [Guyader 2003])

Si le système LTI autonome $\mu_{k+1} = G\mu_k$ est exponentiellement stable, alors :

1. Pour tout signal borné w_k , la séquence r_k définie par $r_{k+1} = Gr_k + w_k$ est bornée,
2. Pour tout signal borné w_k qui converge vers 0 exponentiellement rapidement, la séquence r_k définie précédemment converge vers 0 exponentiellement rapidement.
3. Pour tout signal borné w_k qui converge vers une boule bornée notée Ω exponentiellement rapidement, la séquence r_k définie précédemment converge vers 0 exponentiellement rapidement vers la même boule bornée Ω .

Démonstration : Définissons les erreurs d'estimation $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ et $\tilde{\theta}_k = \theta_k - \hat{\theta}_k$, et introduisons

le signal $r_k = \tilde{x}_k - \phi_k \tilde{\theta}_k$, alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ed_k + \psi_k \theta_k \\
&\quad - \left[A\hat{x}_k + Bu_k + \psi_k \hat{\theta}_k + L(y_k - \hat{y}_k) + \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \right] \\
&= (A - LC)\tilde{x}_k + Ed_dk + \psi_k(\theta_k - \hat{\theta}_k) - \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \\
&= (A - LC)\tilde{x}_k + Ed_dk + \psi_k \tilde{\theta}_k - \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \\
&= (A - LC)\tilde{x}_k + Ed_dk + [\phi_{k+1} - (A - LC)\phi_k] \tilde{\theta}_k - \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \\
&= (A - LC) \left[\tilde{x}_k - \phi_k \tilde{\theta}_k \right] + Ed_dk + \phi_{k+1} \tilde{\theta}_k - \phi_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \\
&= (A - LC) \left[\tilde{x}_k - \phi_k \tilde{\theta}_k \right] + Ed_dk + \phi_{k+1} \left[\tilde{\theta}_k - \hat{\theta}_{k+1} + \hat{\theta}_k \right] \\
&= (A - LC)r_k + Ed_dk + \phi_{k+1} \left[\theta_k - \hat{\theta}_{k+1} \right]
\end{aligned} \tag{V.137a}$$

et on en déduit la dynamique de r_{k+1} :

$$\begin{aligned}
r_{k+1} &= \tilde{x}_{k+1} - \phi_{k+1} \tilde{\theta}_{k+1} \\
&= (A - LC)r_k + Ed_dk + \phi_{k+1} \left[\theta_k - \hat{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_{k+1} \right] \\
&= (A - LC)r_k + Ed_dk + \phi_{k+1}(\theta_k - \theta_{k+1})
\end{aligned} \tag{V.137b}$$

En utilisant le gain L solution du problème d'optimisation du lemme V.2, le système $\mu_{k+1} = (A - LC)\mu_k$ est exponentiellement stable. Ceci donne, sous l'hypothèse (H-V.3) que le signal $\phi_{k+1} = (A - LC)\phi_k + \psi_k$ est borné est converge vers une boule définie par les bornes de ψ_k .

Ensuite, comme chacun des termes $\theta_{k+1} - \theta_k$, d_k et ϕ_{k+1} est borné, alors la séquence $w_k = Ed_k + \phi_{k+1}(\theta_k - \theta_{k+1})$ converge vers une boule bornée Ω , et d'après le lemme V.3, r_k aussi.

D'un autre coté, l'algorithme RLS garantit la minimisation de $\|C\tilde{X}_k - Y_k\|_2^2 = \|C\tilde{X}_k\|_2^2$, alors l'erreur d'estimation de l'état converge vers une boule bornée. Enfin, d'après la convergence de r_k , \tilde{x}_k et la borne de ϕ_k , l'erreur d'estimation des paramètres $\tilde{\theta}_k$ régie par l'équation $\phi_k \tilde{\theta}_k = \tilde{x}_k - r_k$ converge vers une boule bornée, et ceci complète la preuve. ■

Corollaire V.8.1

Dans le cas sans perturbations, et pour des paramètres inconnus bornés, l'observateur défini dans (V.136) est exponentiellement convergent, c'est-à-dire les erreurs d'estimation $x_k - \hat{x}_k$ et $\theta_k - \hat{\theta}_k$ convergent exponentiellement rapidement vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

Démonstration : Pour $d_k = 0$, et $\theta_{k+1} - \theta_k = 0$, le rayon de la boule Ω est réduit à 0. ■

V.4.4 Algorithme RLS amélioré

V.4.4.1 RLS avec facteur d'oubli constant

Pour un grand horizon d'estimation, les anciennes valeurs sont moins significantes pour l'identification. La notion de facteur d'oubli est alors introduite, pour donner une pondération plus importante aux observations récentes. Ce facteur d'oubli noté λ est un réel positif proche de 1 : $0 < \lambda < 1$. Ses valeurs typiques sont entre 0.97 et 0.995 [Isermann 1992].

La fonction objective à minimiser devient alors :

$$\begin{aligned} V &= e^T W e = \sum_{i=1}^N \lambda^{N-i} e_i^2 \\ W &= \text{diag} [\lambda^{N-i} \dots \lambda \ 1] \end{aligned} \quad (\text{V.138})$$

Cette approche "oublie" exponentiellement les anciennes mesures telles que les observations âgées d'un temps τ sont pondérées de λ^τ fois l'observation la plus récente.

Ainsi $\tau = \frac{1}{1-\lambda}$ représente l'horizon de mémoire de l'algorithme. Ceci affecte les matrices P_k et K_k de l'algorithme :

$$\begin{cases} K_k &= P_{k-1} \psi_k^T C^T [C \phi_{k+1} P_k \psi_k^T C^T + \lambda I]^{-1} \\ P_k &= \frac{1}{\lambda} (P_{k-1} - K_k C \phi_{k+1} P_{k-1}) \end{cases} \quad (\text{V.139})$$

Dans la méthode RLS classique, la matrice de covariance P_k décroît jusqu'à zéro avec le temps, perdant la capacité de suivre les variations des paramètres. En introduisant le facteur d'oubli, P_k est divisée par λ à chaque pas de temps, ralentissant la dissipation de l'information qu'elle porte.

V.4.4.2 RLS avec facteur d'oubli variant

Durant les faibles excitations du système, les anciennes informations sont oubliées alors que les nouvelles informations dynamiques sont très rares. Ceci peut mener à une explosion de la matrice de covariance, rendant l'estimateur très sensible aux bruits et perturbations, et induit à des valeurs erronées.

Dans ce cas, un algorithme avec un facteur d'oubli constant conduit à un problème de "wind-up". En effet, dans un état statique :

$$K \longrightarrow 0 \Rightarrow P_{k+1} = \frac{1}{\lambda} P_k \quad (\text{V.140})$$

et comme $\lambda < 1$, la matrice P_k explosera.

Plusieurs approches dans la littérature ont proposées des solutions, en calculant en ligne un facteur d'oubli λ variable, telles que : l'algorithme de la trace constante [Sripada 1987], les facteurs d'oublis directionnels [Cao 2000, Yazdi 2009], les méthodes basées sur les filtres de Kalman [Cao 2004b], etc.

Une méthode de facteur d'oubli variable à base du gradient est introduite par [So 2005], où la fonction quadratique à minimiser est la variance de l'erreur. En plus, la présence de bruit blanc est considérée dans cette méthode.

$$\sigma_{e,k+1}^2 = E \{ e_{k+1}^2 \} \quad (\text{V.141a})$$

$$\sigma_{e,k+1}^2 = A_c \sigma_{e,k+1}^2 + g \sigma_{\eta,k}^2 \quad (\text{V.141b})$$

où les coefficients A_c et g sont définis par :

$$\begin{aligned} A_c &= 1 - \frac{2}{\rho_k} + \frac{n+2\sigma_u^4}{a+bn} \\ g &= 1 - A_c + \frac{n\sigma_u^2}{a+bn} \end{aligned} \quad (\text{V.142a})$$

avec

$$a = (\rho_k^2 + \tilde{\rho}_k) \sigma_u^4, \quad b = \tilde{\rho}_k \sigma_u^4 \quad (\text{V.143a})$$

et

$$\rho_k = \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \cong \frac{1}{1 - \lambda} \quad (\text{V.143b})$$

$$\tilde{\rho}_k = \frac{1 - \lambda^{2k}}{1 - \lambda^2} \cong \frac{1}{1 - \lambda^2} \quad (\text{V.143c})$$

Afin de minimiser le terme quadratique σ_e^2 , le calcul de la dérivée donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{e(k+1)}^2}{\partial \lambda} &= A_c \frac{\partial \sigma_{e(k)}^2}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_c}{\partial \lambda} \sigma_{e(k)}^2 + g \frac{\partial \sigma_{\eta(k)}^2}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \sigma_{\eta(k)}^2 \\ \sigma_{e(k+1)}^2 &= \alpha \sigma_{e(k)}^2 + (1 - \alpha) \sigma_{\eta(k)}^2, \quad \beta > \alpha \\ \sigma_{\eta(k+1)}^2 &= \beta \sigma_{e(k)}^2 + (1 - \beta) \sigma_{\eta(k)}^2 \end{aligned} \quad (\text{V.144})$$

Enfin, le facteur d'oubli variable est calculé par :

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \left[\lambda_k - \mu \frac{\partial \sigma_{e(k+1)}^2}{\partial \lambda} \right]_{\lambda_-}^{\lambda_+} \\ K_{k+1} = P_k \psi_{k+1}^T C^T [C \psi_{k+1} P_k \psi_{k+1}^T C^T + \lambda_{k+1} I]^{-1} \\ \Gamma_{k+1} = I - K_{k+1} C \psi_{k+1} \\ P_{k+1} = \Gamma_{k+1} P_k \end{cases} \quad (\text{V.145})$$

où μ est la largeur du pas.

Les coefficients μ , α and β sont définis par l'utilisateur. Les valeurs typiques sont respectivement 0.01, 0.8 et 0.9. La notation entre crochets pour λ_{k+1} dans (V.145) est une fonction de clip avec comme borne supérieure λ_+ , et λ_- sa borne inférieure.

V.4.5 Exemple : estimation de défaut dans la dynamique verticale

V.4.5.1 Modèle Quart de Véhicule avec amortisseur Magnéto-Rhéologique

On rappelle, comme définit dans le chapitre III, que la dynamique verticale peut être décrite par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s &= -k_s(z_s - z_{us}) - F_{MR} \\ m_{us} \ddot{z}_{us} &= k_s(z_s - z_{us}) + F_{MR} - k_t(z_{us} - z_r) \end{cases} \quad (\text{V.146})$$

où F_{MR} remplace la force F_d dans la formule (III.24), en considérant un amortisseur Magnéto-Rhéologique comme type d'amortisseur semi-actif.

$$F_{MR} = c(u) \dot{z}_{def} \quad (\text{V.147})$$

avec $c(u)$ le coefficient d'amortissement, qui est fonction de la commande $u(t)$.

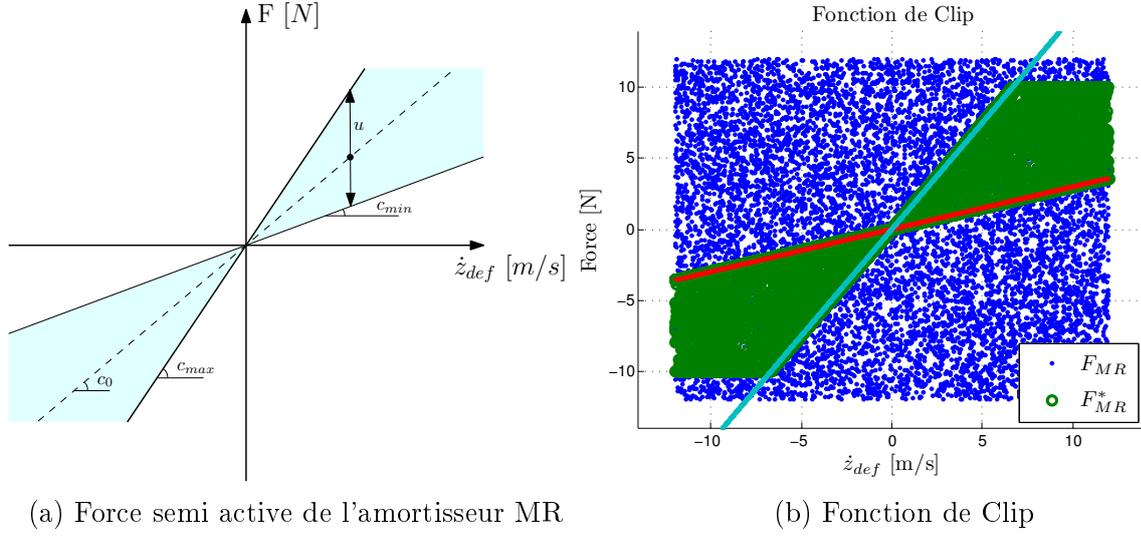


FIGURE V.10 – Force semi active de l'amortisseur MR et fonction de clip

Afin d'assurer la propriété de dissipativité de l'amortisseur semi-actif, la contrainte suivante doit être satisfaite :

$$c_{min} \leq c \leq c_{max} \quad (\text{V.148})$$

Soit $c_0 = \frac{c_{min} + c_{max}}{2}$, et récrivons (V.147) comme suit :

$$F_{MR} = c(u)\dot{z}_{def} = c_0\dot{z}_{def} + u \quad (\text{V.149})$$

Avec cette notation, le contrôle de la suspension semi-actif doit tenir compte de la dissipativité de l'amortisseur et de la saturation dans l'étape de synthèse. Si cette contrainte de dissipativité n'est pas considérée, il est nécessaire de "saturer" l'entrée de commande sans performance et de stabilité garanties : que l'on appelle la stratégie de clip.

Cette stratégie consiste à définir la région admissible \mathcal{D} qui inclue l'ensemble des forces réalisables par l'amortisseur [Poussot-Vassal 2008a], et à projeter les forces non réalisables dans l'espace \mathcal{D} . Ceci est formulée comme suit :

$$\mathcal{D}(F_{MR}, \dot{z}_{def}) \mapsto F_{MR}^* = \begin{cases} F_{MR} & \text{si } F_{MR} \in \mathcal{D} \\ F_{MR}^\perp & \text{si } F_{MR} \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{V.150})$$

où F_{MR}^\perp est la projection de la force vers la région admissible.

Cette projection est calculée selon la vitesse de débattement mesurée en temps réel.

La stratégie de contrôle étant au delà des objectifs du présent travail, on se focalise sur le problème de l'estimation du défaut actionneur de l'amortisseur. Ici, le défaut est présenté comme un paramètre à estimer.

V.4.5.2 Représentation d'un défaut actionneur

On considère que l'amortisseur MR est sujet à un défaut (fuite d'huile par exemple) qui peut varier dans le temps. Ainsi l'amortisseur ne fonctionne pas dans son état normal, et sa

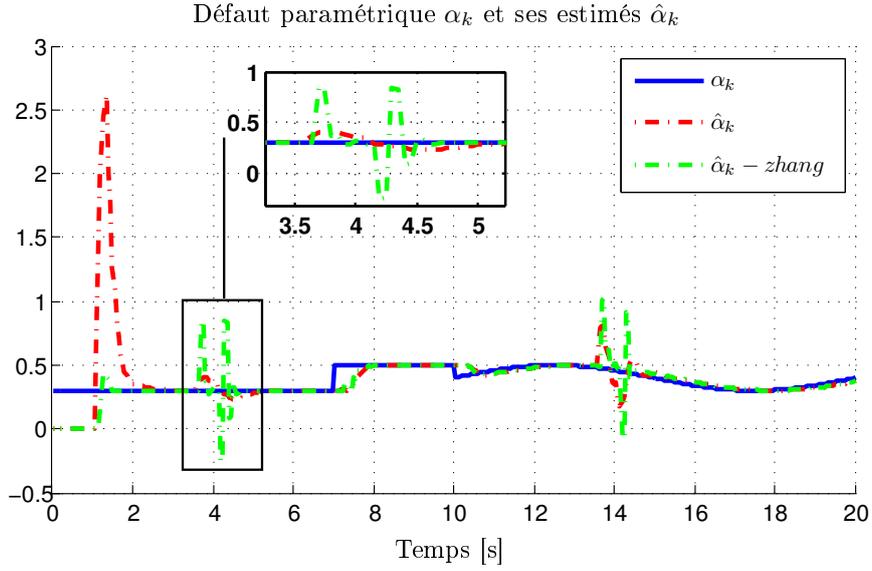


FIGURE V.11 – Estimation d'un défaut paramétrique

de [Guyader 2003] rappelé ici :

$$\begin{cases} \Upsilon_{k+1} = (A - LC)\Upsilon_k + \psi_k \\ \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \mu_k \Upsilon_k^T C^T (y - C\hat{x}_k) \\ \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + \psi_k \hat{\theta}_k \\ \quad + L(y_k - C\hat{x}_k) + \Upsilon_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \end{cases} \quad (\text{V.155})$$

cet algorithme sera noté (*zhang*).

D'abord, le gain de l'observateur L est calculé en utilisant le lemme V.2, et les paramètres de l'algorithme RLS modifié sont définis comme indiqué dans la partie V.4.4.2.

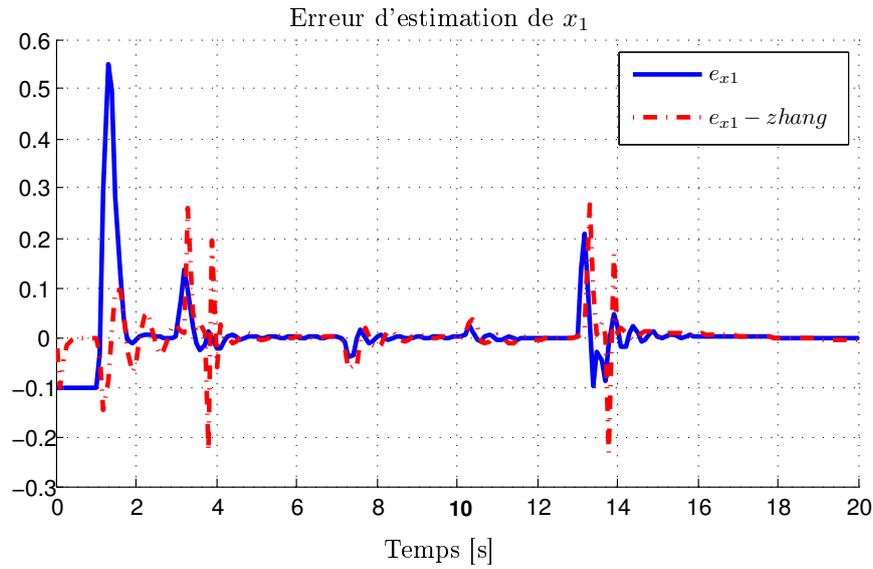
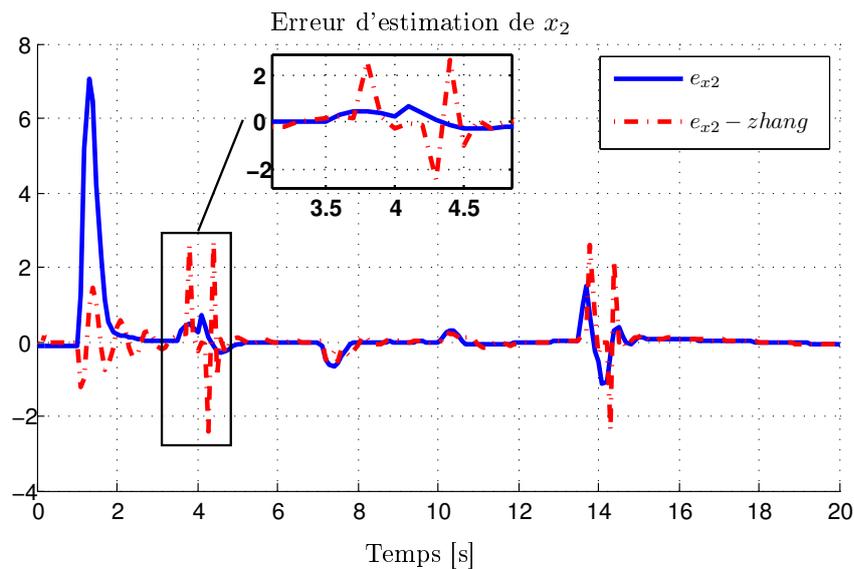
Comme le montre la figure V.11, le signal de défaut à estimer est tracé en bleu continu, et est défini en trois zones :

1. défaut constant de $t=0$ à $t=7$ s,
2. apparition brusque d'un défaut statique (type offset) entre $t=7$ et $t=10$ s,
3. enfin, un défaut variant à une fréquence non nulle $f \neq 0$

En plus, on introduit deux signaux de perturbation de type "bump" pour décrire une variation du profil vertical de la route, pour $t=3$ s à $t=4$ s et pour $t=13$ s à $t=14$ s, d'une hauteur de 3 cm.

En comparant les résultats de la simulation, on voit que les deux méthodes donnent une estimation correcte du défaut α , ainsi qu'un suivi de sa variation, malgré un grand dépassement vers $t=1$ s de l'algorithme que nous proposons (en rouge pointillé).

Toutefois, cet algorithme est plus performant pour la réjection de perturbation, bien que le gain L de l'observateur est le même pour les deux. D'après le zoom aux alentours de 4s, on voit bien que l'observateur de *zhang* (vert tiret-point) est plus sensible à ces perturbations.

(a) Erreur d'estimation de l'état 1 (z_s)(b) Erreur d'estimation de l'état 2 (\dot{z}_s)FIGURE V.12 – Erreurs d'estimation des états z_s et \dot{z}_s

Le grand dépassement à $t=1s$ de l'algorithme proposé est dû à une initialisation de la matrice de covariance avec un spectre très grand. Mais en remarquant le suivi assez lisse de la variation du défaut à $t=7s$, il n'y a pas eu de dépassement parce que notre observateur s'est adapté pour effectuer un bon suivi. Cette initialisation non parfaite est délibérément gardée pour montrer son effet, et aussi l'efficacité de l'algorithme pour s'adapter au système.

D'un autre côté, les courbes de la figure (V.12) correspondent aux erreurs d'estimation des états z_s (a) et \dot{z}_s (b). Comme pour l'estimation de défaut, on peut remarquer que les erreurs

d'estimation convergent pour les deux cas vers 0, avec bien sûr une meilleure réjection de perturbation de notre algorithme (bleu plein) contre celui de *zhang* (rouge pointillé). Le zoom de la figure V.12.b montre bien cette différence autour de $t=4s$.

V.4.6 Conclusion

Dans cette section, une méthode pour l'estimation simultanée des paramètres et de l'état d'un système LTV discret est proposée.

Sous certaines hypothèses dont l'observabilité, la bornitude des signaux externes et l'excitation suffisante du système, deux approches ont été combinées pour la synthèse :

1. Une formulation LMI pour minimiser le gain H_∞ entre les entrées inconnues et l'erreur d'estimation de l'état,
2. Un algorithme par moindres carrés récursifs pour calculer en ligne le vecteur de paramètres inconnus θ .

Cette méthode est ensuite modifiée pour tenir compte des variations des paramètres et améliorer les propriétés de réjection de bruit.

Enfin, l'algorithme est validé par un exemple sur la détection d'un défaut actionneur d'une suspension semi-active de la dynamique vertical du véhicule.

V.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié différentes méthodes pour l'estimation du défaut :

- (1) Observateur PI commuté à objectif H_∞ pour l'estimation d'un défaut en très basse fréquence pour les systèmes à commutation. Trois type d'observateurs sont alors présentés : observateur identité, observateur robuste, et observateur généralisé (utile pour un ordre minimal).
- (2) Filtre dynamique de sortie à commutation, pour l'estimation de défaut pour les systèmes LTI à commutation. Trois filtres d'ordre plein sont proposés : un filtre commuté par extension de l'approche H_∞ standard, un filtre robuste aux incertitudes paramétriques, et en dernier un filtre robuste avec des pondérations fréquentielles pour réduire le conservatisme de synthèse.
- (3) Observateur adaptatif pour l'estimation jointe de l'état et de paramètres variants, utilisés pour représenter les défauts dans les systèmes LTV. Cette méthode est un couplage d'observateur H_∞ et de méthode de moindre carré récursif.

Ces méthodes sont illustrées par des exemples numériques et applicatifs sur les dynamiques latérales et verticales du véhicule.

Application à la détection situations critiques dans la dynamique latérale d'un véhicule automobile

Sommaire

VI.1 Introduction et problématique	177
VI.2 Détection de situation critique	178
VI.2.1 Modélisation d'un glissement non linéaire	178
VI.2.2 Estimation d'un effort non-linéaire	179
VI.3 Détection robuste de situation critique	182
VI.3.1 Modèle du coefficient de rigidité variant	182
VI.3.2 Estimation robuste de la situation critique	184
VI.4 Conclusion	186

VI.1 Introduction et problématique

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé à la problématique de la détection, localisation et estimation de défaut, décrits comme défaillance de certains organe du système.

Ainsi, les défauts tels une fuite d'huile (ou de liquide) magnéto-rhéologique dans la suspension semi-active, et un défaut actionneur agissant sur l'angle de braquage des roues (problème d'engrenage dans la transmission du couple de la colonne de direction), ont été présentés comme applications pratiques sur la dynamique verticale et latérale du véhicule.

Dans ce chapitre on s'intéresse à un autre aspect de la dynamique du véhicule, toujours dans l'optique des systèmes de sécurité et de confort des passagers que sont la détection de situations critiques menant à la perte de stabilité du véhicule.

En effet, plusieurs modules sont implémentés dans les véhicules modernes dont les systèmes ESP et ABS. Ces programmes supervisent en continu certains paramètres du véhicule afin d'apporter une aide à la conduite.

Un de ces paramètres est la tenue de route, décrite par le taux de glissement, qui ne devrait dépasser un certain seuil au delà duquel le véhicule peut perdre sa stabilité et mener à des situations dramatiques.

Le but de ce chapitre est de proposer une méthode qui permettra de générer une alarme dès qu'on s'approche d'une zone d'instabilité, et donc de solliciter l'action de l'ESP en amont d'une situation critique. Elle repose sur l'utilisation des approches théoriques développées dans

les chapitres précédents, en supervisant les efforts latéraux des pneus étroitement liés au glissement.

On commence par la présentation de la stratégie de supervision, suivi d'un développement de sa robustesse en tenant compte des facteurs liés aux forces pneumatiques.

L'approche proposée est testée et validée sous le logiciel CarSim, car il permet de modéliser et de superviser un large panel de grandeurs incluses dans la dynamique du véhicule, et qui ne peuvent être mesurées par des capteurs comme les différents efforts et moments, etc.

VI.2 Détection de situation critique

VI.2.1 Modélisation d'un glissement non linéaire

On rappelle la deuxième loi de Newton appliquée au modèle bicyclette présenté dans (III.15) :

$$mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = F_{ty_f} + F_{ty_r} + F_{dy} \quad (\text{VI.1a})$$

$$I_z \ddot{\psi} = l_f F_{ty_f} - l_r F_{ty_r} + M_{dz} \quad (\text{VI.1b})$$

Jusqu'à présent, on considérait plusieurs simplifications, dont la linéarité des efforts des pneumatiques F_{ty_f} et F_{ty_r} dans les zones de faibles angles de glissement β . Ces efforts sont exprimés dans (III.16) par :

$$\bar{F}_{ty_f} = c_{yf} \beta_{yf} \quad (\text{VI.2a})$$

$$\bar{F}_{ty_r} = c_{yr} \beta_{yr} \quad (\text{VI.2b})$$

Cette hypothèse n'étant pas vraie pour de grands angles de glissement, on propose de représenter l'effort de la pneumatique par deux forces :

$$F_{ty_{ij}} = \bar{F}_{ty_{ij}} + \Gamma_{ij} \quad (\text{VI.3})$$

où Γ_{ij} est la partie non linéaire de $F_{ty_{ij}}$.

A partir de cette représentation, on peut classer les forces latérales en trois zones de fonctionnement montrées sur la figure VI.1 :

- Une zone normale, où $F_{ty_f} = \bar{F}_{ty_f}$, $\Gamma_{ij} \cong 0$
- Une zone critique, où $\Gamma_{ij} \neq 0$, et ne peut être négligée
- Et une zone de glissement, où F_{ty_f} devient constante, et le véhicule est en perte de stabilité.

Développant les équations dynamique en incluant les termes non-linéaires, on obtient :

$$mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = c_{yf} \left(\delta - \beta + \frac{l_f \dot{\psi}}{v} \right) + \Gamma_{yf} + c_{yr} \left(-\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v} \right) + \Gamma_{yr} + F_{dy} \quad (\text{VI.4a})$$

$$I_z \ddot{\psi} = l_f c_{yf} \left(\delta - \beta + \frac{l_f \dot{\psi}}{v} \right) l_f \Gamma_{yf} - l_r c_{yr} \left(-\beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v} \right) - l_r \Gamma_{yr} + M_{dz} \quad (\text{VI.4b})$$

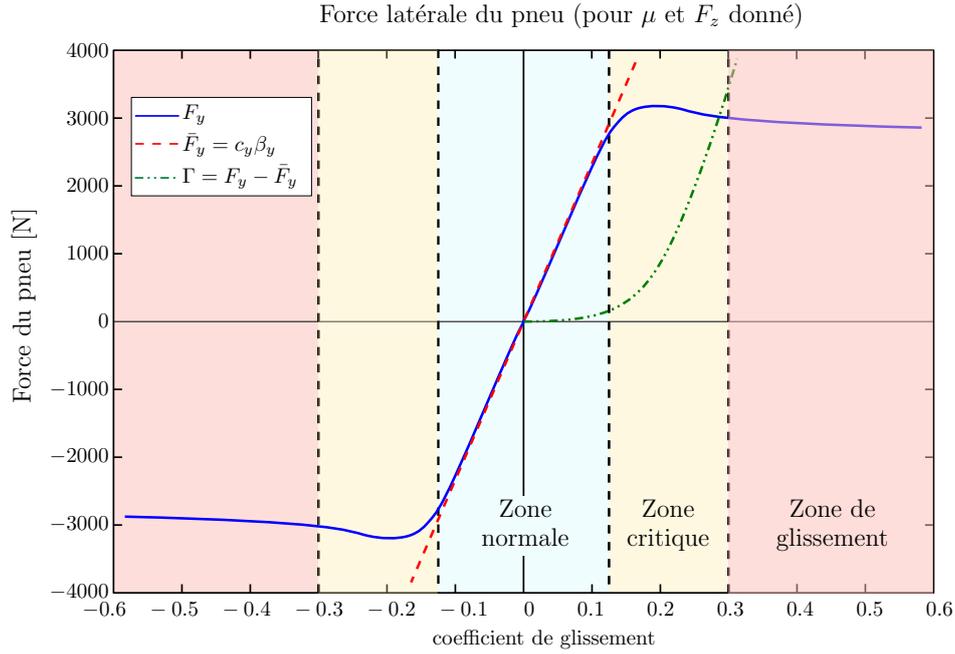


FIGURE VI.1 – Effort pneumatique latéral et zones de fonctionnement

qui peut s'écrire comme la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{mv(t)} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{mv^2(t)} - 1 \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{I_z} & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{I_z v(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv(t)} \\ \frac{c_r l_f}{I_z} \end{bmatrix} u_L(t) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} & \frac{1}{mv} \\ \frac{l_r}{I_z} & -\frac{l_f}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{yf} \\ \Gamma_{yr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ \frac{l_w}{I_z} \end{bmatrix} F_w \\
 y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{VI.5}$$

avec la vitesse de lacet comme sortie mesurée.

Avec cette représentation du modèle bicyclette, le problème de détection de situation critique peut se traduire par un problème de détection et d'estimation de défaut où Γ_f et Γ_r sont les défauts à détecter.

VI.2.2 Estimation d'un effort non-linéaire

Afin de détecter et d'estimer chacune des deux composantes non linéaires des efforts latéraux, on adopte une stratégie de générateur de résidu dédié. Donc d'après la remarque (IV.1) deux générateurs de résidus sont synthétisés selon que l'on veut estimer Γ_f ou Γ_r .

Ainsi le générateur de résidu pour l'estimation de Γ_f se base sur la représentation d'état

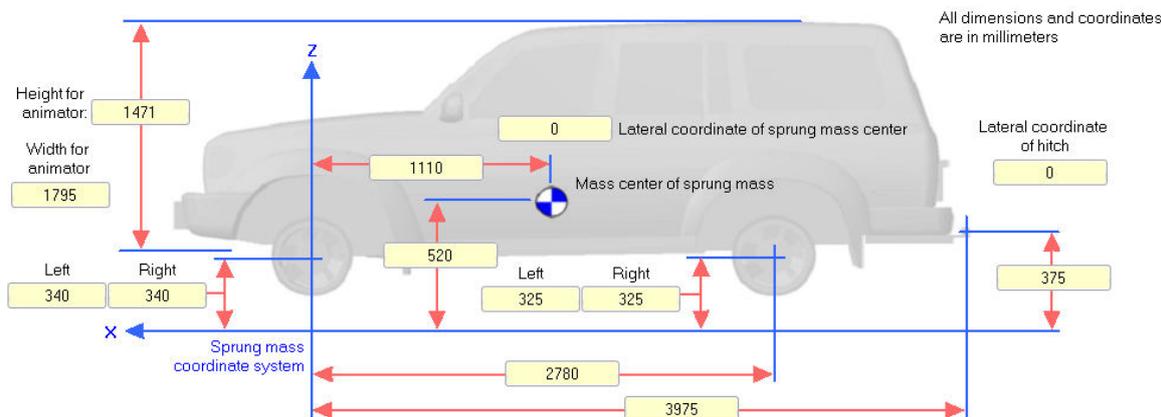


FIGURE VI.2 – Dimensions du véhicule sous CarSim (en mm)

suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{mv(t)} & \frac{c_rl_r-c_fl_f}{mv^2(t)} - 1 \\ \frac{c_rl_r-c_fl_f}{I_z} & -\frac{c_rl_r^2+c_fl_f^2}{I_zv(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv(t)} \\ \frac{c_rl_f}{I_z} \end{bmatrix} u_L(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} & \frac{1}{mv} \\ \frac{l_w}{I_z} & \frac{l_r}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_w \\ \Gamma_{yr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ -\frac{l_f}{I_z} \end{bmatrix} \Gamma_{yf} \quad (VI.6a)$$

où $\begin{bmatrix} F_w \\ \Gamma_{yr} \end{bmatrix}$ est considéré comme un signal de perturbation,

Quand au générateur pour estimer Γ_r :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{mv(t)} & \frac{c_rl_r-c_fl_f}{mv^2(t)} - 1 \\ \frac{c_rl_r-c_fl_f}{I_z} & -\frac{c_rl_r^2+c_fl_f^2}{I_zv(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv(t)} \\ \frac{c_rl_f}{I_z} \end{bmatrix} u_L(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} & \frac{1}{mv} \\ \frac{l_w}{I_z} & \frac{l_r}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_w \\ \Gamma_{yf} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ -\frac{l_f}{I_z} \end{bmatrix} \Gamma_{yf} \quad (VI.6b)$$

où le signal de perturbation est $\begin{bmatrix} F_w \\ \Gamma_{yf} \end{bmatrix}$.

Comme expliqué dans les exemples de génération de résidu et d'estimation de défaut pour la dynamique latérale dans les chapitres précédents, le modèle bicyclette peut être transformé en un système LTI incertain à commutations :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}_\alpha x + \bar{B}_\alpha u + \bar{E}_{d,\alpha} d + \bar{E}_{f,\alpha} f \\ y = C_\alpha x \end{cases} \quad (VI.7)$$

Dans cette section, on propose d'estimer les défauts par une approche d'observateur PI à commutation, avec placement de pôles pour garantir un suivi de défaut variant.

Il est à noter que pour les grandes vitesses, soit $v > 50km/h$, le terme d'incertitude lié à la déviation de la vitesse par rapport au point de linéarisation devient très petit. Ceci permet de négliger ce terme dans cette étude.

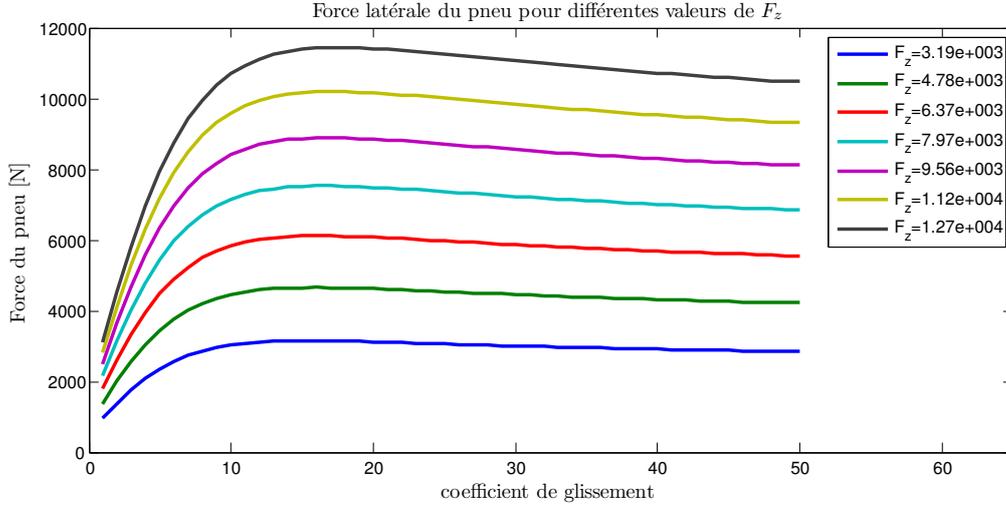


FIGURE VI.3 – Effort pneumatique latéral pour différentes valeurs de la charge normale

La synthèse de l'observateur PI d'ordre plein à commutation avec placement de pôles est obtenue par le problème d'optimisation décrit par les LMIs (V.11) du théorème (V.3).

Avec le logiciel CarSim, on calcule en ligne la partie non-linéaire de l'effort comme suit :

$$\Gamma_i = \sum_{j=r}^{j=l} F_{ty_{ij}} - \sum_{j=r}^{j=l} c_{y_{ij}} \beta_{y_i} \quad (\text{VI.8})$$

où $c_{y_{ij}}$, les coefficients de rigidité des pneus aux coins (i, j) sont calculés à partir des abaques expérimentales fournies par CarSim.

En effet, comme le montre la figure VI.3, c_{y_i} dénote le coefficient directeur de la courbe $F_y(\beta)$ dans la zone linéaire. Il faut d'abord calculer l'effort verticale sur la pneumatique (i, j) , qui est la masse du véhicule divisée par 4 et pondéré par la distance entre (i, j) et le centre de gravité.

Sous l'hypothèse bicyclette, cet effort est le même aux cotés droite et gauche, on obtient alors :

$$F_{z_r} = (m_s + m_{us})g \frac{l_r}{l_r + l_f} \quad (\text{VI.9a})$$

$$F_{z_f} = (m_s + m_{us})g \frac{l_f}{l_r + l_f} \quad (\text{VI.9b})$$

à partir des F_{z_i} , on peut interpoler les courbes $F_y(\beta)$ correspondantes, et on en déduit enfin les valeurs des c_{y_i} .

Les différentes valeurs des paramètres du véhicule considéré pour la simulation sont donnés dans le tableau (B.2).

Le scénario de conduite dans cet exemple est la manoeuvre standard du test de l'élan, à grande vitesse (entre 80 et 100 km/h).

Les gains de l'observateur sont calculés comme solution des LMIs (V.11). Les résultats des simulations sont montrés dans les figures (VI.4).

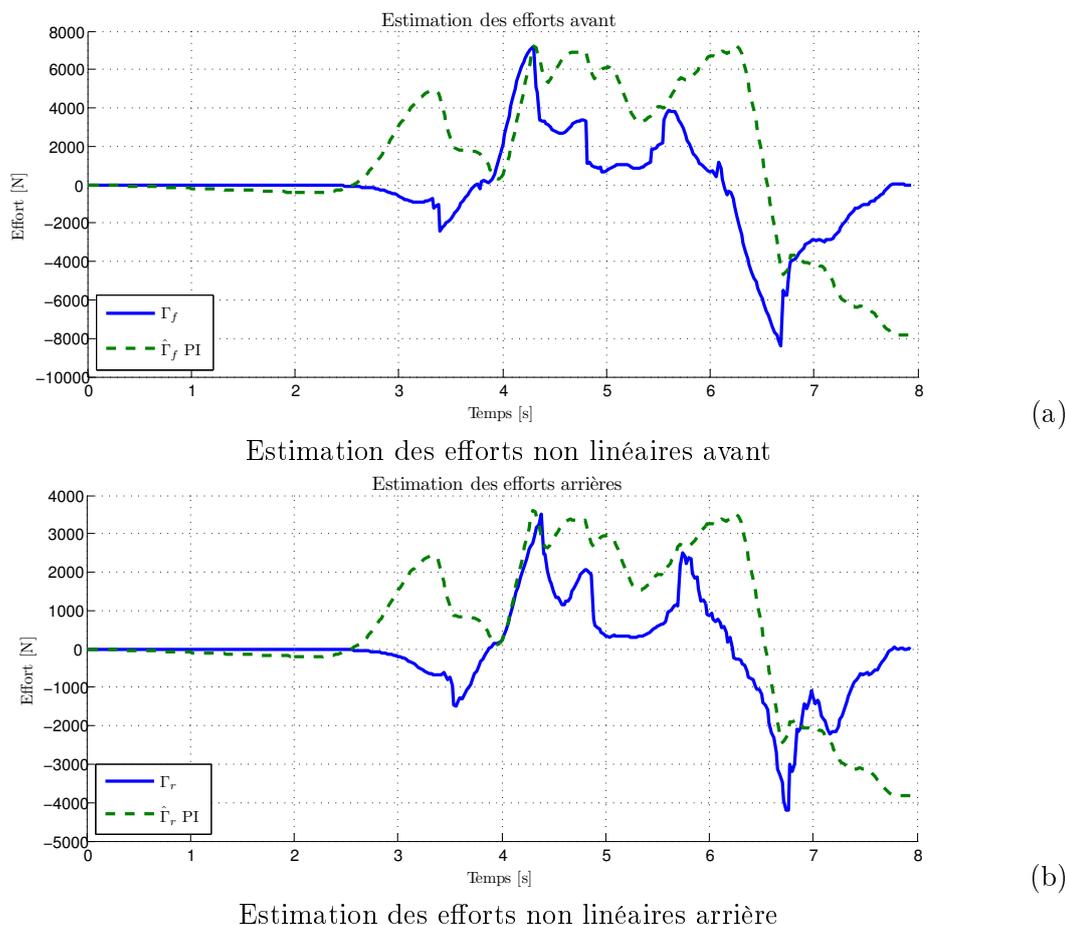


FIGURE VI.4 – Estimation des efforts non linéaires par observateur PI

Il est à noter que bien que la construction d'observateur PI se base sur l'hypothèse d'un défaut constant, le rajout d'une contrainte de placement de pôles avec une constante de temps assez petite permet d'obtenir un observateur PI capable de poursuivre les variations de ce dernier.

VI.3 Détection robuste de situation critique

VI.3.1 Modèle du coefficient de rigidité variant

Bien que l'allure des courbes d'estimation des efforts non linéaires $\hat{\Gamma}_i$ issues de l'observateur PI sont semblables aux valeurs calculées des efforts non linéaires, ces estimés ne sont pas trop fiables, où trop de fausses alarmes peuvent surgir.

En effet, cette différence vient d'une certaine partie de l'erreur d'estimation des coefficients c_{y_i} .

Dans l'approche précédente, l'effort F_{z_i} est supposé fixe et il correspond au poids du véhicule uniquement (VI.9). A partir de cette valeur, c_{y_i} est calculé par la pente dans la zone linéaire de la courbe $F_y(\beta)$ correspondante au F_z considéré.

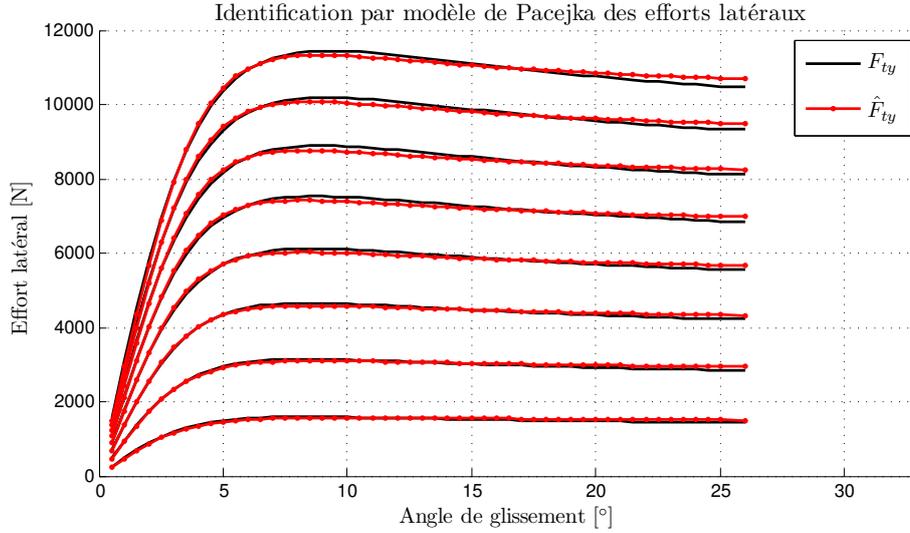


FIGURE VI.5 – Validation du modèle Pacejka des efforts pneumatiques latéraux

Cependant, lors de l'excitation de la dynamique latérale par un mouvement non rectiligne, il s'ajoute au propre poids du véhicule des efforts de transfert de charge de cambrage et surtout de roulis. Dans ce cas on a :

$$F_{z_i} = (m_s + m_u s)g \frac{l_i}{l_r + l_f} + F_{z_{load_i}} \quad (\text{VI.10})$$

L'effort de transfert de charge $F_{z_{load_i}}$ dépend à la fois des paramètres du véhicule (inertie, dimension), mais aussi de la nature du mouvement.

Comme pour les efforts longitudinaux, un modèle fortement non linéaire pour décrire les efforts pneumatiques latéraux est donné dans [Pacejka 2012] :

$$F_{ty_{ij}} = D_y \sin [C_y \arctan (B_y \beta_{y_{ij}} - E_y (B_y \beta_{y_{ij}} - \arctan (B_y \beta_{y_{ij}})))] \quad (\text{VI.11})$$

avec C_y une constante dans le cas des efforts latéraux, et B_y , D_y et E_y sont des fonctions de F_{z_i} . Leurs formules sont données par :

$$D_y(F_{z_i}) = a_1 F_{z_i}^2 + a_2 F_{z_i} \quad (\text{VI.12a})$$

$$B_y(F_{z_i}) = a_3 \frac{\sin(a_4 \arctan(a_5 F_{z_i}))}{C_y D_y(F_{z_i})} \quad (\text{VI.12b})$$

$$E_y(F_{z_i}) = a_6 F_{z_i}^2 + a_7 F_{z_i} + a_8 \quad (\text{VI.12c})$$

Pour valider le modèle des efforts pneumatiques de Pacejka, on utilise un algorithme d'estimation par moindres carrés non-linéaires afin de retrouver les coefficients a_1, a_2, \dots, a_8 dans (VI.12) pour un ensemble de vecteurs $(F_{ty_{ij}}, F_{z_i}, \beta_{y_{ij}})$ donnés.

Une fois les coefficients estimés, l'identification du modèle des efforts des pneumatiques est validée en comparant les résultats du modèle et des données. Comme présenté dans la figure (VI.5), ce modèle est fidèle aux données.

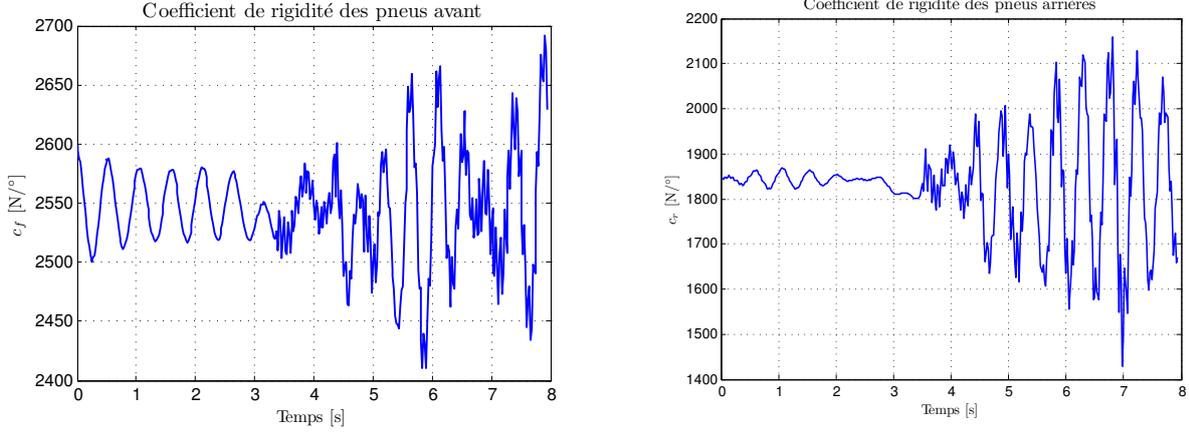


FIGURE VI.6 – Variation des coefficients de rigidité des pneus avant et arrière

Ainsi, à partir des paramètres identifiés, on peut calculer en ligne les coefficients de rigidité c_{y_i} pour un effort F_{z_i} donné par la formule suivante :

$$c_{y_i}(F_{z_i}) = B_y(F_{z_i})C_y D_y(F_{z_i}) \quad (\text{VI.13})$$

VI.3.2 Estimation robuste de la situation critique

Le but de l'estimation robuste est de construire un observateur le plus insensible possible aux incertitudes sur c_{y_i} .

En utilisant la relation (VI.13), on peut superviser sous plusieurs scénarios de simulations sur CarSim les variations des c_{y_i} . En effectuant plusieurs tests à différentes vitesses, un modèle statistique des incertitudes est développé.

La figure (VI.6) montre un exemple de ces variations, dans un scénario de test de l'élan à une vitesse de 90 km/h.

Le modèle des incertitudes est alors inclut dans le modèle bicyclette, qui devient :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \bar{A}_\alpha x + \bar{B}_\alpha u + E_{d,\alpha} d + E_{f,\alpha} f \\ y &= C_\alpha x \end{cases} \quad (\text{VI.14})$$

avec, dans le cas de l'estimation de Γ_f :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{mv} + \Delta\left(\frac{c_r+c_f}{mv}\right) & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{mv^2} - 1 + \Delta\left(\frac{c_r l_r - c_f l_f}{mv^2}\right) \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{I_z} + \Delta\left(\frac{c_r l_r - c_f l_f}{I_z}\right) & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{I_z v} + \Delta\left(\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{I_z v}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.15a})$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv} + \Delta\left(\frac{c_f}{mv}\right) \\ \frac{c_r l_f}{I_z} + \Delta\left(\frac{c_r l_f}{I_z}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.15b})$$

$$E_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} & \frac{1}{mv} \\ \frac{l_w}{I_z} & \frac{l_f}{I_z} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.15c})$$

$$E_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{mv} \\ l_f \\ -\frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.15d})$$

En utilisant la notation (V.64) pour représenter les incertitudes paramétriques, et d'après l'étude statistique sur les variations des paramètres, on définit les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \begin{bmatrix} -\frac{c_r+c_f}{mv_\alpha} & \frac{c_rl_r-c_fl_f}{mv_\alpha^2} - 1 \\ \frac{c_rl_r-c_fl_f}{I_z} & -\frac{c_rl_r^2+c_fl_f^2}{I_zv_\alpha} \end{bmatrix}, & H_{A,\alpha} &= \begin{bmatrix} \frac{c_r+c_f}{5mv_\alpha} & \frac{4(c_rl_r-c_fl_f)}{mv_\alpha^2} \\ \frac{4(c_rl_r-c_fl_f)}{I_z} & \frac{c_rl_r^2+c_fl_f^2}{5I_zv_\alpha} \end{bmatrix} \\
B_\alpha &= \begin{bmatrix} \frac{c_f}{mv_\alpha} \\ \frac{c_rl_f}{I_z} \end{bmatrix}, & H_{B,\alpha} &= \begin{bmatrix} \frac{0.06c_f}{mv_\alpha} \\ \frac{0.23c_rl_f}{I_z} \end{bmatrix} \\
E_{d,\alpha} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{mv_\alpha} & \frac{1}{mv_\alpha} \\ \frac{l_w}{I_z} & \frac{l_r}{I_z} \end{bmatrix} & E_{f,\alpha} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{mv_\alpha} \\ \frac{l_f}{I_z} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{VI.16}$$

Il est à noter que dans cette approche on utilise la vitesse de lacet comme sortie de mesure. Cela simplifie énormément la représentation d'état :

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_\alpha = 0, \quad F_{d,\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad F_{f,\alpha} = 0 \tag{VI.17}$$

A partir de cette représentation mise sous la forme (V.14a), un observateur PI robuste à commutation est alors construit via la synthèse développée dans le chapitre V.

Un filtre sur l'entrée de commande \mathcal{F}_u (V.26) est d'abord rajouté pour translater les incertitudes sur la matrice B_α à la matrice A_α comme décrit dans la remarque (V.1). Le filtre utilisé est :

$$\mathcal{F}_{u,\alpha}(s) = \frac{1000}{s + 1000} \tag{VI.18}$$

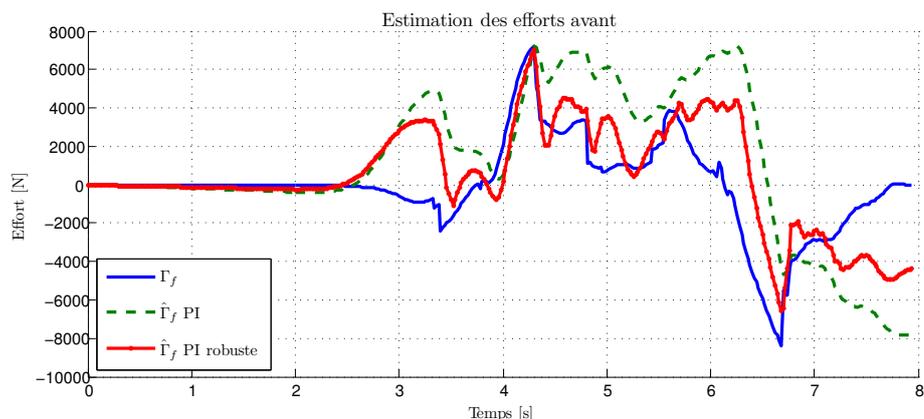
ayant une bande passante assez grande.

En plus, pour alléger le conservatisme induit par la norme H_∞ , un filtre de pondération sur les entrées de perturbations $\mathcal{W}_{d,\alpha}$ est aussi rajouté sur le signal de perturbation, on choisit :

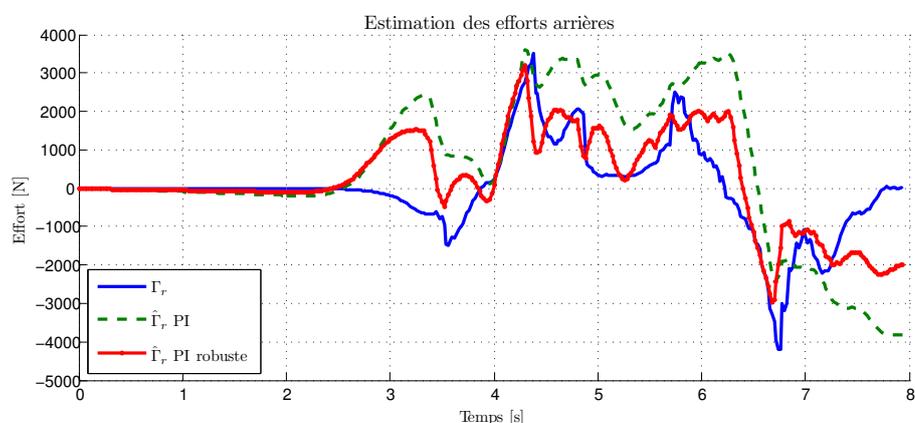
$$\mathcal{W}_{d,\alpha}(s) = \frac{1}{100} \tag{VI.19}$$

Enfin, en utilisant le système augmenté des différents filtres, les gains sont calculés comme solution du problème d'optimisation formulé par les LMIs (V.16).

Les même étapes de synthèse sont suivies pour estimer les efforts arrière Γ_r .



(a) Estimation des efforts non linéaires avant



(b) Estimation des efforts non linéaires arrière

FIGURE VI.7 – Comparaison entre observateur PI et PI robuste pour l'estimation des efforts non linéaires

Les résultats de l'estimation de la partie non linéaire des efforts sont tracés sur la figure (VI.7) : la courbe bleu (plein) correspond à Γ qui est à estimer. Les courbes des estimés $\hat{\Gamma}$ avec deux synthèses PI (en tirets verts) et PI robuste (rouge (plein+points)) permettent de comparer les deux approches.

On remarque que le résultat d'estimation a été nettement améliorée en tenant compte des incertitudes dans la synthèse. Toutefois, il reste encore des erreurs, qui sont dûs entre autre, à la non inclusion des coefficients d'adhérence des pneus au sol.

VI.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, on a présenté une adaptation du problème d'estimation de défaut développé dans les chapitres précédents, au problème de détection de situation critique de conduite.

Au lieu d'estimer un défaut capteur ou actionneur, le signal à estimer est défini comme la partie non linéaire de l'effort latéral des pneus. En définissant trois zones de fonctionnement :

zone normale, zone critique et zone de glissement, ce signal est utilisé comme indicateur de la perte de stabilité latérale du véhicule.

Après une étude statistique sur les variations des paramètres du modèle bicyclette en fonction des scénarios de conduite sur CarSim, un modèle avec des incertitudes sur les coefficients de rigidité des pneus fut obtenu. Ce modèle est ensuite utilisé pour la synthèse d'observateur PI robuste pour estimer cet effort non linéaire.

Une comparaison des estimés des efforts non linéaires par observateurs PI, avec une approche sans tenir compte des incertitudes d'une part, et en considérant les termes d'incertitudes d'autre part, a permis de valider la dernière et de montrer l'importance de la synthèse robuste.

Conclusions générales et perspectives

Sommaire

VII.1 Conclusions	189
VII.2 Perspectives	190

VII.1 Conclusions

Les travaux présentés dans le présent manuscrit s'inscrivent dans le cadre du diagnostic robuste des systèmes LTI incertains à commutation.

Ils ont donné lieu à différentes collaborations nationale et internationale : d'une part au travers du projet ANR INOVE (INtegrated approach for Observation and control of VEHicle dynamics), initié par O. Sename, et réunissant le GIPSA-lab de Grenoble, le laboratoire MIPS de Mulhouse (université de Haute Alsace) le centre CAOR (Ecole des mines de Paris) et l'équipementier SOBEN. Et d'autre part avec nos collègues au TEC de Monterrey dans le cadre du programme d'échange PCP.

La thématique abordée dans ce mémoire correspond au diagnostic à bord de véhicule automobile, où le rôle du GIPSA-lab, et plus particulièrement de nos travaux, était de développer de nouvelles approches pour la détection de défaillances (capteur ou actionneur) et de situations critiques de conduite. C'est dans cette optique que nous avons proposé différentes méthodes pour la détection, la localisation et l'estimation de défaut.

Après avoir présenté quelques notions et terminologies, nous avons rappelé les bases mathématiques et théoriques indispensables pour la compréhension du manuscrit dans le chapitre II. Les bases sur la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques sont ainsi introduites, suivies d'une présentation de la synthèse d'observateur et de commande H_∞ pour les systèmes LTI. Ce chapitre est clôturé par un état de l'art sur l'analyse de stabilité des systèmes à commutation.

Le troisième chapitre recense les modèles présent dans la littérature pour modéliser la dynamique du véhicule. Un modèle longitudinal simplifié, un modèle bicyclette pour la dynamique latérale et un modèle quart de véhicule pour la dynamique verticale furent retenus. Ces trois modèles sont enfin regroupés en un modèle global du véhicule, qui est validé expérimentalement sur un **Renault Megane**. A la fin de ce chapitre, la dernière campagne de test sur véhicule est présentée. Les données issues de cette campagne servent pour la validation expérimentale des approches développées dans ce manuscrit.

Les principales contributions théoriques de la thèse sont regroupées dans les chapitres IV sur la détection de défaut et V pour l'estimation de défaut.

La détection de défaut est formulée par une synthèse multi-objectifs H_-/H_∞ avec certaines contraintes temporelles pour les systèmes à commutation. Cette approche repose sur la génération de résidu à base d'observateur. Cette nouvelle stratégie pour les systèmes à commutation repose sur un modelage fréquentiel spécifique à l'objectif H_- . Un générateur de résidu d'ordre plein est d'abord développé, puis étendu par une synthèse robuste pour tenir compte des incertitudes. Ce générateur est adapté pour une implémentation d'ordre réduit. La méthode H_-/H_∞ est étendue pour une classe de système LPV en utilisant une approche polytopique. Les résultats obtenus avec des exemples académiques ainsi qu'applicatifs sur la dynamique latérale de véhicule ont permis la validation de cette approche.

Le second chapitre de contributions théoriques est consacré aux méthodes d'estimation de défaut. D'abord une approche par observateur PI, d'ordre plein et réduit est présentée. La robustesse de ce type d'observateur est aussi étudiée. La seconde s'appuie sur l'adaptation du problème H_∞ standard à l'estimation de défaut pour les systèmes à commutation. Dans la dernière méthode, développée uniquement pour les systèmes LTV, le défaut est représenté comme un paramètre à estimer. Un algorithme de moindres carrés récursif modifié est développé pour estimer et poursuivre un défaut variant. Ces nouvelles stratégies sont validées pour les dynamiques latérale (défaut sur la colonne de direction) et verticale (défaut amortisseur d'une suspension semi-active).

Pour conclure, un chapitre applicatif est proposé et permet de superviser la stabilité latérale du véhicule, en estimant les efforts non-linéaire des pneumatiques, étroitement liée au glissement non désiré du véhicule. Cette stratégie repose sur une modélisation plus précise des pneus que celle présentée dans le chapitre III, combinée à l'utilisation des stratégies d'estimation et d'estimation robuste développées au chapitre V.

VII.2 Perspectives

A l'issue du travail présenté dans ce manuscrit, les perspectives suivantes peuvent être développées.

- La synthèse H_-/H_∞ présentées ici pour les systèmes LTI commutés, pourrait être étendue pour une classe de système singuliers à commutation. Des travaux sur la synthèse mixte H_-/H_∞ est présentée dans [Lopez Estrada 2014] pour les systèmes LPV singulier, mais ils ne tiennent pas compte du modelage fréquentiel présenté dans le chapitre IV, très important pour la faisabilité du problème d'optimisation.
- La suite naturelle de la détection et l'estimation du défaut, est d'utiliser l'estimé pour une commande tolérante au défaut.

Ainsi, on propose une loi de commande H_2/H_∞ de la forme $u = u_1 + u_2$, où :

- (a) u_1 assure la compensation du défaut, qui peut être calculé par une technique H_2 :

$$\varepsilon_{u,f}^2 = \min_{u_1 \in \mathbb{R}^m} \left\| B_\alpha u_1 + E_{f,\alpha} \hat{f} \right\|_2^2 \quad (\text{VII.1})$$

- (b) u_2 assure la robustesse aux incertitudes et la réjection des perturbations, en utilisant une synthèse robuste H_∞ standard.

Le système sera écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \bar{A}_\alpha x + \bar{B}_\alpha(u_1 + u_2) + \bar{E}_{d,\alpha}d + \bar{E}_{f,\alpha}f \\ y &= C_\alpha x + F_{d,\alpha}d + F_{f,\alpha}f \end{cases} \quad (\text{VII.2})$$

- Améliorer la robustesse du détecteur de situation critique, présenté dans le chapitre (VI). Ainsi au lieu de synthétiser un observateur robuste avec de grande marge de robustesse, il sera plus intéressant de trouver de nouvelles méthodes basées sur une estimation en ligne de ces paramètres variant. La piste d'un observateur adaptatif semble une bonne voie, et permettrait de prendre en considération les coefficients d'adhérence au sol, qui sont des variables d'environnement difficile à modéliser (pluie, neige, etc). Cette étude peut être aussi étendue pour la dynamique longitudinale.

Développement limité des paramètres variants

A.1 Développement limité de ρ_1

Le développement limité par série de Taylor de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x = 0$ est donné par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad (\text{A.1})$$

Ainsi, en notant $v(t) = v_i - \delta_v \delta(t)$, $-1 \leq \delta(t) \leq 1$, le développement limité à l'ordre 1 de $\rho_1(t) = \frac{1}{v(t)}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \frac{1}{v_i - \delta_v \delta(t)} = \frac{1}{v_i} \left(\frac{1}{1 - \frac{\delta_v \delta(t)}{v_i}} \right) \\ &\cong \frac{1}{v_i} \left(1 - \frac{\delta_v \delta(t)}{v_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donc

$$\rho_1(t) = \frac{1}{v_i} - \frac{\delta_v}{v_i^2} \delta(t) \quad (\text{A.3})$$

A.2 Développement limité de ρ_2

Le développement limité par série de Taylor de la fonction $f(x) = (1+x)^n$ en $x = 0$ est donné par :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + o(x^2) \quad (\text{A.4})$$

Ainsi à l'ordre 1, $\rho_2(t) = \frac{1}{v^2(t)}$ est approximé par :

$$\begin{aligned} \rho_2(t) &= \frac{1}{(v_i - \delta_v \delta(t))^2} = \frac{1}{v_i} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta_v \delta(t)}{v_i}\right)^2} \right) \\ &\cong \frac{1}{v_i} \left(1 - 2 \frac{\delta_v \delta(t)}{v_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donc

$$\rho_2(t) = \frac{1}{v_i} - \frac{2\delta_v}{v_i^2} \delta(t) \quad (\text{A.6})$$

Tables des paramètres des véhicules

Les tableaux suivants décrivent les valeurs numériques des paramètres des différents véhicules utilisés dans les exemples pratiques. On y retrouve ceux de la **Renault Megane**, la maquette à l'échelle 1 :5 au GIPSA-Lab, et aussi les paramètres du véhicule de simulation sur CARSIM (Sedan Class D).

Symbole	Variable	Valeur	Unité
m	masse du véhicule (+2 passagers)	1417	[kg]
I_z	moment d'inertie de lacet	1808	[kg.m ²]
c_f	coefficient de rigidité avant	41654	[N/rad]
c_r	coefficient de rigidité arrière	56862	[N/rad]
l_f	distance entre CoG et l'essieu avant	1.12	[m]
l_r	distance entre CoG et l'essieu arrière	1.46	[m]

TABLE B.1 – Paramètres du Renault Mégane pour le modèle bicyclette

Symbole	Variable	Valeur	Unité
m	masse totale du véhicule	1530	[kg]
I_z	moment d'inertie de lacet	2315.3	[kg.m ²]
c_f	coefficient de rigidité avant	66257	[N/rad]
c_r	coefficient de rigidité arrière	46545	[N/rad]
l_f	distance entre CoG et l'essieu avant	1.11	[m]
l_r	distance entre CoG et l'essieu arrière	1.67	[m]

TABLE B.2 – Paramètres du véhicule de simulation sous CarSim (Sedan Classe D)

Symbole	Variable	Valeur	Unité
m_s	Masse suspendue	315	[Kg]
m_{us}	Masse non suspendue	37.5	[Kg]
k_t	constante de raideur de la roue	29500	[N/m]
k_s	constante de raideur du ressort(suspension)	210000	[N/m]
c	coefficient d'amortissement	700, 5000	[Nm/s]

TABLE B.3 – Paramètres du Quart de Véhicule

Paramètre	Description	Valeur
f_c	force nominale	600,9 N/A
c_1	coefficient d'amortissement semi-actif	37,8 $s.m^{-1}$
k_1	coefficient de raideur semi-actif	22,1 m^{-1}
c_0	coefficient d'amortissement passif	2 830 $N.s.m^{-1}$
k_0	coefficient de raideur passif	-7 897 $N.m^{-1}$

TABLE B.4 – Coefficients du modèle magnéto-rhéologique

Bibliographie

- [Abdo 2011] Ali Abdo, Steven X. Ding, Waseem Damlakhi et Jedsada Saijai. *Robust Fault Detection Filter Design for Uncertain Switched Systems with Adaptive Threshold Setting*. Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control, pages 5467–5452, 2011. (Cité en page 80.)
- [Ackermann 1997] J. Ackermann et T. Bunte. *Yaw disturbance attenuation by robust decoupling of car steering*. Control Engineering Practice, vol. 5, pages 1131–1136, 1997. (Cité en page 6.)
- [Apkarian 1995] Pierre Apkarian, Pascal Gahinet et Greg Becker. *Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-varying Systems : a Design Example*. Automatica, vol. 31, no. 9, pages 1251–1261, 1995. (Cité en pages 6 et 119.)
- [Basseville 1993] Mich le Basseville et Igor V. Nikiforov. *Detection of abrupt changes - theory and application*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1993. (Cité en page 4.)
- [Beard 1971] R. V. Beard. *Fault accommodation in linear systems through self-reorganization*. Report MVT-71-1, ManVehicle Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1971. (Cité en page 4.)
- [Bokor 2005] J zsef Bokor et Gary Balas. *linear parameter varying systems : a geometric theory and applications*. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, vol. 16, pages 276–294, 2005. (Cité en page 4.)
- [Boyd 1994] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, PA, 1994. (Cité en page 87.)
- [Cao 2000] Liyu Cao et Howard M. Schwartz. *A directional forgetting algorithm based on the decomposition of the information matrix*. Automatica,36, pages 1725–1731, 2000. (Cité en page 170.)
- [Cao 2004a] J. Cao et J. Gertler. *Fault diagnosis in a class of nonlinear systems using identification and GLR testing*. Proceedings of the American Control Conference, vol. 6, pages 5052–5057, 2004. (Non cit .)
- [Cao 2004b] Liyu Cao et Howard M. Schwartz. *Analysis of the Kalman filter based estimation algorithm : an orthogonal decomposition approach*. Automatica,40, pages 5–19, 2004. (Cité en page 170.)
- [Chen 1999] C.J. Chen et R.J. Patton. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer International Series on Asian Studies in Computer and Information Science, 3, 1999. (Cité en page 4.)
- [Cocquempot 2004] V. Cocquempot, T. El Mezyani et M. Staroswiecki. *Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals*. In Control Conference, 2004. 5th Asian, volume 2, pages 1204–1212 Vol.2, July 2004. (Cité en page 5.)
- [Daafouz 2002] J. Daafouz, P. Riedinger et C. Iung. *Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 11, pages 1883–1887, Nov 2002. (Cité en page 46.)

- [Ding 2013] Steven X. Ding. *Model-based fault diagnosis techniques*. Springer, 2013. (Cité en page 4.)
- [Do 2011] Anh Lam Do. *LPV approach for the vehicles dynamics robust control : joint comfort and safety improvement*. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2011. (Cité en pages 6, 52 et 66.)
- [Doyle 1989] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar et B Francis. *State space solution to standard H_2 and H_∞ control problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, no. 8, pages 831–847, 1989. (Cité en page 16.)
- [Fergani 2014] Soheib Fergani. *Commande Robuste LPV/ H_∞ Multivariable pour la dynamique véhicule*. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2014. (Cité en pages 52 et 74.)
- [Frank 1997] Paul M. Frank et Birgit Koppen-Seliger. *Fuzzy logic and neural network applications to fault diagnosis*. International Journal of Approximate Reasoning, vol. 16, no. 1, pages 67 – 88, 1997. (Cité en page 4.)
- [Frank 2000] P.M. Frank, E. Alcorta Garica et B Kappen-Seliger. *Modelling for fault detection and isolation versus modelling for control*. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 53, no. 46, pages 259–271, 2000. (Cité en page 4.)
- [Frisk 2001] E. Frisk. *Residual Generation for Fault Diagnosis*. PhD thesis, University of Linkoping, 2001. (Cité en page 5.)
- [Gahinet 1994] Pascal Gahinet et Pierre Apkarian. *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 4, no. 4, pages 421–448, 1994. (Cité en page 39.)
- [Geromel 2008] J. C. Geromel, P. Colaneri et P. Bolzern. *Dynamic Output Feedback Control of Switched Linear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 3, pages 720–733, 2008. (Cité en pages 49 et 159.)
- [Ghaoui 1997] L. El Ghaoui, F. Oustry et Mustapha Ait-Rami. *A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 8, pages 1171–1176, 1997. (Cité en page 43.)
- [Guo 2006] Shuqi Guo, Shaopu Yang et Cunzhi Pan. *Dynamic modeling of magneto rheological damper behaviors*. Journal of Intelligent material systems and structures, vol. 17, no. 1, pages 3–14, 2006. (Cité en page 66.)
- [Guyader 2003] Arnaud Guyader et Qinghua Zhang. *Adaptive observer for discrete time linear time varying systems*. 13th IFAC IFORS Symp. on Sys. Identification (SYSID). Rotterdam., 2003. (Cité en pages 4, 168 et 174.)
- [Hespanha 1999] J. P. Hespanha et A. S. Morse. *Stability of switched systems with average dwell-time*. In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, volume 3, pages 2655–2660 vol.3, 1999. (Cité en page 49.)
- [Hou 1996] M. Hou et Ron J. Patton. *An LMI approach to Approach to \mathcal{H}_∞ Fault Detection Observers*. UKACC International Conference on Control, vol. 1, pages 305–310, 1996. (Cité en pages 5, 15 et 80.)
- [Isermann 1992] Rolf Isermann. *Identification of dynamic systems*. Springer, 1992. (Cité en page 169.)

- [Isermann 1997] Rolf Isermann et P. Ball. *Model-based fault-detection and diagnosis : status and applications*. Control Engineering Practice, vol. 5, no. 5, pages 709 –719, 1997. (Cité en page 3.)
- [Isermann 2005] Rolf Isermann. *Model-based fault-detection and diagnosis : status and applications*. Annual Reviews in Control, vol. 29, pages 71 – 85, 2005. (Cité en page 80.)
- [Jia 2015] Z. Jia, C. Dong, H. Cheng et Q. Wang. *A robust fault detection for control system of morphing aerial vehicle based on switched system approach*. In The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC), pages 3147–3152, May 2015. (Cité en page 159.)
- [Jiang 2004] Bin Jiang, Marcel Staroswiecki et Vincent Cocquempot. *Fault diagnosis based on adaptive observer for a class of non-linear systems with unknown parameters*. International Journal of Control, vol. 77, no. 4, pages 367–383, 2004. (Cité en page 4.)
- [Jones 1973] H.L. Jones. *Failure Detection in Linear Systems*. PhD thesis, Massashut Institutue of Technology, 1973. (Cité en page 4.)
- [Kaczorek 1979] T. Kaczorek. *Proportional-integral observers for linear multivariable time-varying systems*. Regelungstechnik, vol. 27, pages 359–362, 1979. (Cité en page 128.)
- [Khosrowjerdi 2004] M.J. Khosrowjerdi, R. Nikoukhah et N. Safari-Shad. *A mixed H_2/H_∞ approach to simultaneous fault detection and control*. Automatica, vol. 40, no. 2, pages 261 – 267, 2004. (Cité en page 5.)
- [Kim 2007] S. J. Kim, Y. H. Moon et S. Kwon. *Solving Rank-Constrained LMI Problems With Application to Reduced-Order Output Feedback Stabilization*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, no. 9, pages 1737–1741, Sept 2007. (Cité en page 43.)
- [Koenig 2002] D. Koenig. *Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems*. IEEE Transactions On Automatic Control, vol. 47, no. 12, pages 2057–2062, 2002. (Cité en page 4.)
- [Koenig 2005] D. Koenig. *Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems : application to state and fault estimation*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 2, pages 212–217, Feb 2005. (Cité en page 4.)
- [Koenig 2009] D. Koenig et Benoit Marx. *H_∞ filtering and state feedback control for discrete time switched descriptor systems*. IET Control Theory and Applications, vol. 6, no. 3, pages 661– 670, 2009. (Cité en page 159.)
- [Liu 1998] G. P. Liu et Ron J. Patton. *Eigenstructure assignment for control system design*. John Wiley & Sons, Inc., 1998. (Cité en page 4.)
- [Liu 2005] Jian Liu, Jian Liang Wang et Guang-Hong Yang. *An LMI approach to minimum sensitivity analysis with application to fault detection*. Automatica, vol. 41, pages 1995–2004, 2005. (Cité en pages 5, 30, 80 et 88.)
- [Lopez Estrada 2014] Francisco Ronay Lopez Estrada. *Model-based fault diagnosis observer design for descriptor LPV system with unmeasurable gain scheduling*. PhD thesis, 2014. Thèse de doctorat dirigée par Theilliol, DidierAstorga Zaragoza, Carlos Manuel et Ponsart, Jean-Christophe Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique Université de Lorraine 2014. (Cité en page 190.)

- [Lozoya-Santos 2009] J. J. Lozoya-Santos, R. Morales-Menendez, R. A. Ramirez-Mendoza et E. Nino-Juarez. *Frequency and current effects in an MR damper*. Int. J. Vehicle Autonomous Systems, vol. 7, no. 3, pages 121–140, 2009. (Cité en page 66.)
- [Luenberger 1971] David G. Luenberger. *An introduction to observers*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 16, pages 596–602, 1971. (Cité en page 22.)
- [Mammar 2002] S. Mammar et D. Koenig. *Vehicle handling improvement by active steering*. Vehicle system dynamics, vol. 38, pages 211–242, 2002. (Cité en page 6.)
- [Marx 2003] Benoit Marx, D. Koenig et Didier Georges. *Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers*. Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control, pages 661–670, 2003. (Cité en page 128.)
- [O’Reilly 1983] John O’Reilly. *Observers for linear systems*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1983. (Cité en page 23.)
- [Orsi 2006] Robert Orsi, Uwe Helmke et John B. Moore. *A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities*. Automatica, vol. 42, no. 11, pages 1875 – 1882, 2006. (Cité en page 43.)
- [P. Shi 1999] E. K. Boukas P. Shi et C. Agarwal. *Control of Markovian jump discrete-time systems with norm bounded uncertainty and unknown delay*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 11, pages 2139–2144, 1999. (Cité en page 16.)
- [Pacejka 2012] H. Pacejka. *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier, 2012. (Cité en pages 54 et 183.)
- [Packard 1991] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey et G. Becker. *A Collection of Robust Control Problems Leading to LMI’s*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, pages 1245–1250, 1991. (Cité en page 17.)
- [Patton 1991] R.J. Patton, J Chen et J. H. P. Miller. *A robust disturbance decoupling approach to fault detection in process systems*. Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 2, pages 1543–1548, 1991. (Cité en page 4.)
- [Poussot-Vassal 2008a] C. Poussot-Vassal, O. Sename, L. Dugard, P. Gaspar, Z. Szabo et J. Bokor. *A New Semi-Active Suspension Control Strategy through LPV Technique*. Control Eng. Practice, vol. 16, pages 1519–1534, 2008. (Cité en page 172.)
- [Poussot-Vassal 2008b] Charles Poussot-Vassal. *Robust Linear Parameter Varying Multivariable Automotive Global Chassis Control*. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2008. (Cité en pages 6 et 52.)
- [Rajmani 2006] Rajesh Rajmani. *Vehicle dynamics and control*. Springer, Berlin New York, 2006. (Cité en page 52.)
- [Rao 1971] C. Radhakrishna Rao et Sujit Kumar Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*. New York : Wiley, pages 601–620, 1971. (Cité en pages 107, 108 et 109.)
- [Robert 2010] David Robert, Olivier Sename et Daniel Simon. *An H_∞ LPV Design for Sampling Varying Controllers : Experimentation With a T-Inverted Pendulum*. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, vol. 18, no. 3, pages 741–749, 2010. (Cité en page 122.)

- [Samanta 2004] B. Samanta. *Gear fault detection using artificial neural networks and support vector machines with genetic algorithms*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 18, no. 3, pages 625 – 644, 2004. (Cité en page 4.)
- [Scherer 1997] C. Scherer, P. Gahinet et M. Chilali. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 7, pages 896–911, Jul 1997. (Cité en page 38.)
- [Sename 2013] Olivier Sename, Peter Gaspar et Jozsef Bokor. *Robust control and linear parameter varying approaches application to vehicle dynamics*. Springer, Berlin New York, 2013. (Cité en page 6.)
- [Shafai 1985] B. Shafai et R. Carroll. *Design of proportional-integral observer for linear time-varying multivariable systems*. IEEE Conference on Decision and Control, vol. 24, pages 597–599, 1985. (Cité en page 128.)
- [Shafai 2002] B. Shafai, C. Pi et S. Nork. *Simultaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral observers*. In Proceedings of American Control Conference, vol. 2, pages 1647–1649, 2002. (Cité en page 128.)
- [So 2005] C.F. So et S.H. Leung. *Gradient-Based Variable Forgetting Factor RLS Algorithm in Time-Varying Environments*. IEEE Transaction on signal processing,, pages 3141–3150, 2005. (Cité en page 170.)
- [Sripada 1987] N. Rao Sripada et D.Grant Fisher. *Improved Least Squares Identification for Adaptive Controllers*. American Control Conference, pages 2027–2037, 1987. (Cité en page 170.)
- [Varrier 2013] Sebastien Varrier. *Detection de situations critiques et commande robuste tol rante aux fautes pour l’automobile*. PhD thesis, Universite de Grenoble, 2013. (Cité en pages 6 et 52.)
- [Varrier 2014] S. Varrier, D. Koenig et John J. Martinez. *Robust fault detection for uncertain unknown inputs LPV system*. Control Engineering Practice, vol. 22, pages 125–134, 2014. (Cité en page 5.)
- [Wang 2007] Jian Liang Wang, Guang-Hong Yang et Jian Liu. *An LMI approach to \mathcal{H}_- index and mixed $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$ fault detection observer design*. Automatica, vol. 43, pages 1656–1665, 2007. (Cité en pages 5, 15, 29, 30, 80 et 88.)
- [Wang 2014] J. Wang, S. Yi et Q. Wang. *Robust fault detection for linear switched interval systems*. In 2014 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC) Proceedings, pages 766–771, May 2014. (Cité en page 158.)
- [Wojciechowski 1978] B. Wojciechowski. *Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input-single-output time-invariant continuous systems*. PhD thesis, Gliwice, Poland, 1978. (Cité en page 128.)
- [Wunnenberg 1990] J. Wunnenberg. *Observer-based Fault Detection in Dynamic Systems*. PhD thesis, University of Duisburg, 1990. (Cité en page 4.)
- [Yazdi 2009] Hadi Sadoghi Yazdi, Mehri Sadoghi Yazdi et Mohammad Reza Mohammadi. *A Novel Forgetting Factor Recursive Least Square Algorithm Applied to the Human Motion Analysis*. International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, pages 128–135, 2009. (Cité en page 170.)

- [Yedavalli 2001] R. K. Yedavalli et A. Sparks. *Ultimate boundedness control of linear switched systems using controlled dwell time approach*. In Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on, volume 3, pages 2490–2495 vol.3, 2001. (Cité en page 49.)
- [Zhang 1993] Ji-Feng Zhang. *General lemmas for stability analysis of linear continuous-time systems with slowly time-varying parameters*. International Journal of Control, vol. 58, no. 6, pages 1437–1444, 1993. (Cité en page 49.)
- [Zhang 2002] Qinghua Zhang. *Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, pages 525–529, 2002. (Cité en page 4.)
- [Zhang 2008] Ke Zhang, Bin Jiang, Vincent Cocquempot *et al.* *Adaptive observer-based fast fault estimation*. International Journal of Control Automation and Systems, vol. 6, no. 3, page 320, 2008. (Cité en page 4.)
- [Zolghadri 2008] A. Zolghadri, D. Henry et S. Grenaille. *Fault diagnosis for LPV systems*. In Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on, pages 261–266, June 2008. (Cité en page 6.)

Détection, localisation et estimation de défauts : application véhicule

Résumé — Dans la nécessité de développer des véhicules sûrs, confortables, économiques et à faible impact environnemental, les voitures sont de plus en plus équipées d'organes qui emploient des capteurs, actionneurs et systèmes de commande automatiques. Or ces systèmes, critiques pour la sécurité et le confort des passagers, peuvent mal-fonctionner en présence d'une défaillance (défaut). Dans le cadre du diagnostic à bord, plusieurs approches à base de modèle sont développées dans ce travail afin de détecter, localiser et estimer un défaut capteur ou actionneur, et pour détecter la perte de stabilité du véhicule. Ces méthodes reposent sur une synthèse robuste pour les systèmes incertains à commutation. Elles sont validées en simulation avec le logiciel CarSim, et sur les données réelles de véhicule dans le cadre du projet INOVE.

Mots clés : Détection, localisation et estimation de défaut, Système à commutation, Systèmes incertains, Robustesse, Placement de valeurs et vecteurs propres, LMI, H_- , H_∞ .

Fault detection, isolation and estimation : Application to vehicle dynamics

Abstract — Modern vehicles are increasingly equipped with new mechanisms to improve safety, comfort and ecological impact. These active systems employ sensors, actuators and automatic control systems. However, in case of failure of one these components, the consequences for the vehicle and the passengers safety could be dramatic. In order to ensure a higher level of reliability within on board diagnosis, new methodologies for sensor or actuator fault detection, location and estimation are proposed. These model based approaches are extended for robust synthesis for switched uncertain systems. In addition, a method for detecting critical stability situation is presented. The validation of the different methods is illustrated with simulations using CarSim, and application on real vehicle data within the INOVE project.

Keywords : Fault Detection and isolation, fault estimation, Switched Systems, Uncertain Systems, Robustness, Eigen Region assignment, LMI, H_- , H_∞ .
