



**HAL**  
open science

# Schémas numériques d'ordre élevé et préservant l'asymptotique pour l'hydrodynamique radiative

Florian Blachère

► **To cite this version:**

Florian Blachère. Schémas numériques d'ordre élevé et préservant l'asymptotique pour l'hydrodynamique radiative. Analyse numérique [math.NA]. Université Nantes; Université Bretagne Loire, 2016. Français. NNT: . tel-01373877

**HAL Id: tel-01373877**

**<https://theses.hal.science/tel-01373877v1>**

Submitted on 29 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Florian BLACHÈRE

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques (STIM)

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 26

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 27 septembre 2016

## Schémas numériques d'ordre élevé et préservant l'asymptotique pour l'hydrodynamique radiative

### JURY

Président : **M. Bruno DESPRÈS**, Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6  
Rapporteurs : **M<sup>me</sup> Pauline LAFITTE**, Professeur, École Centrale Paris  
**M. Roberto NATALINI**, Directeur de recherche, IAC-CNR Rome  
Examineurs : **M. Christophe BERTHON**, Professeur, Université de Nantes  
**M. Christophe LE POTIER**, Ingénieur-chercheur, CEA-Saclay  
**M<sup>me</sup> Hélène MATHIS**, Maître de conférences, Université de Nantes  
**M. Guillaume PUIGT**, Checheur senior H.D.R., CERFACS, Toulouse  
Directeur de thèse : **M. Rodolphe TURPAULT**, Professeur, Institut de Mathématiques de Bordeaux — Bordeaux INP



*On ne prévoit jamais tout, l'important est  
de s'adapter le mieux et le plus vite possible.*



# Remerciements

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il me semble nécessaire de remercier plusieurs personnes sans qui ces trois années de thèse n'auraient pu être possible dans de si bonnes conditions. Commençons donc par un peu de légèreté avant de s'attaquer à la science.

Tout d'abord, la première personne à remercier est mon directeur de thèse Rodolphe TURPAULT. En premier lieu, je te remercie d'avoir accepté un ingénieur bordelais en thèse de mathématiques à Nantes. Tu as ensuite su me conduire de l'équation de la chaleur avec ses conditions aux limites vers l'astrophysique aux unités farfelues en passant par la physique du transfert radiatif et l'*asymptotic-preserving* sans  $\varepsilon$  avec un détour par l'optimisation sous contraintes. Tout cela en allant chasser du bogue vicieux au sein d'un code qui a grossi au fur et à mesure des mois. Je te remercie aussi pour ta disponibilité sans faille qui se confirme par le nombre de messages dans nos boîtes mails respectives. Je retiendrai bien sûr le fameux "ça va marcher" du vendredi en fin d'après-midi qui, finalement, est prouvé par l'existence de ce manuscrit.

Ensuite, je tiens à remercier chaleureusement Pauline LAFITTE et Roberto NATILINI pour avoir accepté de rapporter pendant l'été ce manuscrit aux nombreux coefficients non linéaires mêlant hyperbolique et parabolique.

Je remercie Bruno DESPRÈS d'avoir accepté de venir à une soutenance supplémentaire d'un MATMECA en ce début d'année scolaire. Je dois beaucoup à Christophe LE POTIER sans qui la base du schéma aurait été complètement différente. Je souhaite aussi remercier Guillaume PUIGT d'avoir pu participer à cette soutenance via les nouvelles technologies.

J'exprime toute ma gratitude à Christophe BERTHON et Hélène MATHIS pour toute l'aide qu'ils m'ont fournie pendant ces trois années tant pour la recherche que l'enseignement et je les remercie d'avoir bien voulu faire partie de ce jury (et de m'écouter une fois de plus exposer).

Ces trois années de thèse (enfin ces 35,9 mois) se sont agréablement bien passées au sein du laboratoire de mathématiques Jean Leray. Ceci est en grande partie dû au travail extraordinaire des secrétaires et gestionnaires : Anaïs, Ana Paula, Annick, Brigitte,

Colette, Dominique, Katrin et Stéphanie mais aussi Karine à Bordeaux que je remercie toutes pour l'aide face aux diverses démarches administratives et pour leur disponibilité.

Un grand merci à Éric et Saïd ainsi qu'aux stagiaires pour le travail qu'ils accomplissent chaque jour pour que toute l'informatique fonctionne correctement, du réseau aux serveurs de calculs. Ces derniers vont pouvoir prendre quelques mois de repos car ils ont bien chauffé pendant les derniers mois de thèse.

Une mention spéciale pour Claude qui déniche des articles plus vite que son ombre et égaye le CRDM par sa bonne humeur.

Je tiens à remercier tout particulièrement Guy pour son aide en algorithmique et pour m'avoir fait découvrir plusieurs techniques sans lesquelles les résultats numériques seraient toujours à l'état de calcul en cours, surtout au vu du nombre de *runs* nécessaires pour trouver des bogues ou créer des tableaux et courbes de convergence. Le prêt des nœuds de calculs de l'ANR MAPIE ainsi que le support pour l'utilisation du CCIPL et le cours sur le parallélisme auront été d'un grand secours pour mener à bien tous les calculs.

Les autres membres du laboratoire et plus particulièrement ceux de l'équipe de mathématiques appliquées ne sont pas en reste pour fournir une bonne ambiance dans les couloirs et aider des doctorants en perdition. On notera Pornic, les journées de rentrée et de sortie, les repas de Noël ainsi que l'organisation d'une SEME.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui m'ont encadré en stage ou m'ont enseigné et qui ont su me communiquer le goût de la recherche au fil de ces longues années d'études.

Ces dernières années n'auraient pas été les mêmes sans la présence des autres doctorants. Tout particulièrement Moudhaffar et Victor M.-D. avec qui j'ai occupé le bureau 019 sans discontinuer (sauf travaux, vacances, conférences, ...). Sans donner de détails compromettants, on pourra citer le "on n'est que lundi" ou le fameux "touriste!" et espérer que les murs ne puissent pas répéter tout ce qui a pu se passer dans le bureau. On aura aussi vu passer quelques co-bureaux temporaires que l'on peut aussi remercier pour nous avoir supportés. Nous confions le soin du bureau aux suivant(e)s : prenez-en bien soin.

Moudhaffar tu as dû avoir peur quand tu as vu débarquer deux numériciens dans ton bureau mais finalement on ne mord pas et on débogue même ton  $\text{\LaTeX}$ . Ta bonne humeur a suffi à nous convaincre que tu ne nous mangerais pas toi non plus. Par contre, tes horaires et ton sujet resteront à jamais un mystère pour moi. Je te souhaite une bonne continuation dans le Ch'nord où il faut espérer qu'il fasse un peu moins chaud qu'à Nantes. De toute façon on viendra déguster du maroilles. Encore شكرا pour tout, du démarrage de voiture un dimanche matin au transport en *moodymobile*.

Victor M.-D., mon comparse numéricien pour ces trois années nantaises, je te dois aussi beaucoup pour l'ambiance dans le bureau, les questions plus théoriques en analyse

numérique et le dictionnaire franco-anglais. Tu n’auras rien cassé dans le bureau et celui-ci ne t’aura rien cassé donc on peut dire que vous avez tous deux fini entiers cette thèse. Tu nous auras fait découvrir la différence entre un *spritz* et un *spezi* et certains escaliers portugais se souviendront de toi, tout comme mes boules quies. En tout cas bon courage avec le cassoulet et n’oublie pas de changer l’adresse de livraison pour les guerrières de la mythologie grecque.

Il n’y a pas que les co-bureaux qu’il faut remercier, il y a aussi tous les co-couloirs. Les midis ne seraient pas les mêmes sans le traditionnel pèlerinage au RU (en évitant d’oublier des personnes dans leur bureau. . .) et le café de Bertrand. Les pauses déjeuners des trois années auraient été plus calmes sans la fameuse “taroinche”. Sans expliquer les règles de ce jeu nantais, on retiendra une chance non négligeable au jeu pour certains ou un soupçon de mauvais perdant pour d’autres ou encore une pincée de folie mais tout cela en gardant à l’esprit le nombre de points gagnés perdus la veille.

Plus dans les détails, je souhaite d’abord remercier trois autres compères (maintenant docteurs) avec qui j’ai partagé l’intégralité de ces années de thèse. Merci à Damien pour les promenades dans le couloir, les appels à la débauche et mes excuses pour la chantilly, tu te vengeras avec une poutine. Pierre, merci pour tes histoires de tram-train, ton air coquin du matin et bonne moquette pas piquée des hannetons. Pour terminer avec le bureau 009 *marahaba* chaleureusement à Valentin pour ses couronnes et ses inégalités.

Vient ensuite le trio du bureau 025 : Thomas B. qui oublie parfois de transférer des mails mais n’oublie jamais ses palets, légumes et tracts, Thomas W. l’homme fort (j’attends toujours mon tour de magie) et Victor V.D.R. l’ami de d’Artagnan, Athos, et Aramis, amateur de quiz (je t’aurai un jour) que je remercie pour héberger la taroinche mais aussi pour toute la bonne humeur qu’ils ont su communiquer au couloir. Dans la même journée arrive Guillaume qui fait également partie de l’histoire du transfert de mail mais se rattrape par des exposés qui donneraient presque envie de s’attaquer à la topologie et par de belles chansonnettes. Puis il y a Noémie la chanteuse qui sait communiquer son fou rire et sa fatigue et enfin merci à Olivier, le Picard pas tout à fait normalien pas le dernier à débaucher, pour l’aide dans des calculs tordus.

Toujours du plus ancien vers les nouveaux, je remercie Caroline V. avec son “c’est toi le” et ses geomags™, شكرًا à Hala pour ses pâtisseries libanaises, puis Johan qui anime le bureau le jeudi avec ses dessins en tikz et son PC capricieux.

*Dėkuji* et *ačiu* à Radek et Vytaute pour les spécialités qu’ils nous ramènent à chaque retour au laboratoire et nous rappellent comment l’administration française peut être complexe (ce qui n’est pas faux).

Parmi tous les doctorants cités précédemment (et après) je dois en remercier une très grande majorité pour avoir répondu aux questions d’un “numérologue” tant pour de la géométrie, de l’algorithmique ou encore de l’analyse.



La clarté des courbes de convergence est due à Ricardo, *muito obrigado* pour le morceau de code  $\text{\LaTeX}$  permettant de les tracer.

En commençant par les co-bureaux, puis en allant des conscrits aux derniers arrivés, je ne dois pas oublier de remercier ceux qui ont déjà soutenu et sans qui tout cela n'aurait pas été possible par tout ce qu'ils ont laissé avant eux. Je commence par remercier ma grande sœur de thèse Céline pour le carton intitulé "Florian" rempli de trésors que tu m'as laissé (certains reserviront sûrement pour la génération suivante). Vivien je te remercie pour les discussions que l'on a eues sur ce que tu as fait en thèse et pour les jeux de plateau que tu m'as fait découvrir sur tes derniers mois à Nantes. Vincent tu es le dernier numéricien nantais à remercier pour les parties de taroinche. Arrivent ensuite les Italiens Ilaria et Gilberto qui par leurs cuisines, accents et discussions ont toujours ramené un peu de soleil sous la grisaille nantaise (bretonne ?) : *molte grazie* à vous deux. On ne parlera pas d'ananas sur les pizzas ou de la différence entre l'Italie du nord et celle du sud pour éviter de s'attirer les foudres de Jupiter. Thomas G. je pense que tu vas pouvoir demander ton statut de doctorant émérite pour récompenser toutes ces années au laboratoire à voyager au sein des nœuds de ta thèse et d'Internet, tu es toujours là quand on a besoin d'une bonne adresse. Virgile, ton avis fin sur l'analyse a été très utile, 谢谢 et j'espère que l'on pourra se retrouver autour d'une mousse. En continuant avec les analystes, merci à Antoine pour les conseils, la visite de *Brussel* et gare aux canards, enfants et coins qui pourraient se présenter à toi sans prévenir. Christophe, *mange tak* pour l'accueil et la mise en confiance dès les premières questions, on pourra remarquer que la quiétude du couloir est inversement proportionnelle à la répulsion des processus *hardcore* depuis ton départ. Alexandre Q. je te décerne la palme de la soutenance de thèse avec le plus de mots inconnus.

Merci aussi aux (CR)ATER et post-doctorants du labo : Victoria, Zoé, Simon, Niccolò, Claire, Guillem, Alberto, Nicolas, ... qui sont toujours heureux de nous renseigner sur l'après-thèse et pas les derniers pour sortir un peu. Bon courage pour la suite, que ce soit pour un poste de maître de conférences, un post-doc supplémentaire ou pour l'agrégation.

Je remercie aussi tous les "plusunes" et "plusuns" de chacun et chacune que j'ai pu croiser au détour d'un barbecue ou d'une soirée ici ou là.

Après les plus anciens, je souhaite bon courage aux nouveaux qui prennent la suite : Caroline R., Hélène, Solène et Zeinab. Il est amusant de se rendre compte qu'il y a trois ans l'une d'entre elles m'avait comme chargé de TP.

Je remercie aussi toutes les personnes croisées lors des conférences qui nous ont fait découvrir la ville d'accueil sous toutes ses coutures et nous ont facilité la traduction à la commande du plat. Je pense que la *bacalhau*, les *pizze e pasta* ou encore les *wurst* se souviennent encore de nous.

Juste après les doctorants, je n'oublie surtout pas le ficus à qui l'on pense encore moins souvent. Un coucou aussi aux canards, poules d'eau et écureuils du matin car ils font partie intégrante du campus.

Je remercie (même s'ils ne liront sûrement jamais ce manuscrit) un très grand nombre d'artistes dont le nom est compris entre AaRON et ZZ Top pour toute l'aide fournie durant les longues périodes de rédaction ou de chasse au bogue.

Des grands coucous aux copains normands et bordelais qui se sont éparpillés au fur et mesure mais que l'on retrouve toujours ici ou là en fonction des emplois du temps de chacun et de la taille de l'appartement d'accueil. Bon courage à ceux qui finissent leur thèse et félicitations à ceux qui ont soutenu avant moi.

Je remercie toute ma famille (au sens large) qui a su m'encourager à continuer bien qu'il fut compliqué d'expliquer à tout le monde ce que je faisais dans mes recherches, ne le sachant pas trop moi-même au début. Maintenant, je sais ce que je fais mais ce n'est pas plus simple à expliquer. Mon taux de disponibilité devrait s'accroître avec la fin de cette belle aventure donc gare à toi mon neveu.

Un grand merci à toi aussi Julie qui a réussi à me supporter sur ces dernières années de la recherche du sujet à la soutenance avec un crochet par la rédaction. Merci aussi pour les nombreuses relectures de documents incompréhensibles. Même si on ne s'est pas beaucoup vus, on peut se dire que l'on a largement fait fonctionner l'économie ferroviaire sur ces trois années.

Pour finir, tout au long de ces quelques pages j'ai cherché à n'oublier personne mais si tel était le cas je m'en excuse et qu'elle ne se sente pas lésée.

Maintenant, à table pour la *Color Fluid Dynamics* et retenons que la combinaison convexe c'est quand même bien utile. Bonne lecture!



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>21</b>
1.1 Notations	21
1.1.1 Abréviations	21
1.1.2 Notations mathématiques	22
1.1.3 Constantes physiques	22
1.2 Systèmes de lois de conservation avec terme source	23
1.2.1 Dégénérescence vers une limite de diffusion	23
1.2.2 Exemples de système hyperbolique de lois de conservation	25
1.2.3 Exemples de lois de conservation avec terme source	27
1.3 Généralités sur les volumes finis	33
1.3.1 Notations pour les maillages	33
1.3.2 Schémas volumes finis pour les systèmes hyperboliques	35
1.3.3 Schémas volumes finis pour les équations paraboliques	39
1.3.4 Schémas volumes finis d'ordre élevé	42
1.4 Schémas <i>asymptotic preserving</i>	47
1.4.1 État de l'art 1D	48
1.4.2 État de l'art 2D	48
<b>2 Schéma AP 1D d'ordre élevé</b>	<b>51</b>
2.1 Schéma AP d'ordre un	52
2.1.1 Présentation du schéma HLL-AP	52
2.1.2 Exemples de calcul de correction asymptotique	54
2.2 Montée en ordre du schéma HLL-AP	58
2.2.1 Première méthode pour la montée en ordre	59
2.2.2 Seconde méthode pour la montée en ordre	60
2.3 Construction de solutions de référence	62
2.3.1 Problèmes de Riemann avec les équations du Télégraphe	63
2.3.2 Solutions continues des équations du Télégraphe	68
2.4 Résultats 1D	69

2.4.1	Comparaison avec les solutions de référence des problèmes de Riemann pour les équations du Télégraphe . . . . .	69
2.4.2	Comparaison avec les solutions de référence continues pour les équations du Télégraphe . . . . .	74
2.4.3	Convergence vers la diffusion . . . . .	78
2.4.4	Vitesses de convergence . . . . .	80
2.4.5	Chocs radiatifs . . . . .	81
2.4.6	Conclusion . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Schéma 2D hyperbolique adapté pour l'AP</b>	<b>85</b>
3.1	Cadre général . . . . .	87
3.2	Construction du flux HLL-DLP . . . . .	91
3.2.1	Présentation du schéma de Droniou et Le Potier . . . . .	91
3.2.2	Construction du schéma HLL-DLP . . . . .	97
3.2.3	Discussions sur le choix du flux . . . . .	101
3.3	Montée en ordre du schéma HLL-DLP . . . . .	104
3.4	Résultats 2D pour des systèmes hyperboliques . . . . .	105
3.4.1	Maillage et visualisation . . . . .	105
3.4.2	Advection 2D . . . . .	106
3.4.3	Problèmes de Riemann 2D avec les équations d'Euler . . . . .	108
3.4.4	Problème de Riemann 2D avec le modèle $M_1$ pour le transfert radiatif . . . . .	112
3.4.5	Marche à Mach 3 . . . . .	113
3.4.6	Conclusion . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Schéma AP 2D d'ordre élevé</b>	<b>117</b>
4.1	Cadre général . . . . .	118
4.2	Construction du schéma HLL-DLP-AP . . . . .	121
4.2.1	Correction asymptotique pour le schéma HLL-DLP-AP . . . . .	123
4.3	Montée en ordre du schéma HLL-DLP-AP . . . . .	126
4.4	Construction de solutions de référence . . . . .	127
4.5	Résultats 2D avec terme source . . . . .	129
4.5.1	Comparaison avec les solutions de référence du modèle $P_1$ . . . . .	129
4.5.2	Convergence vers la diffusion . . . . .	132
4.5.3	Marche avec friction . . . . .	133
4.5.4	Vitesses de convergence . . . . .	136
4.5.5	Hydrodynamique radiative en 2D . . . . .	138
4.5.6	Conclusion . . . . .	140
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>143</b>

---

<b>A Implémentation</b>	<b>147</b>
A.1 Code hyperbolique 2D . . . . .	147
A.1.1 Présentation générale . . . . .	147
A.1.2 Optimisation et parallélisation . . . . .	149
A.1.3 Post-traitement . . . . .	150
A.2 Code parabolique 2D . . . . .	150
A.3 Codes 1D . . . . .	151
A.4 Scripts . . . . .	151



---

# Introduction

Ce manuscrit s'intéresse à l'étude de certains systèmes hyperboliques de lois de conservations avec terme source. Sous certaines conditions de compatibilités établies dans [BLT13] et que l'on détaillera dans la partie 1.2.1, ils peuvent dégénérer vers des équations de diffusion en temps long et/ou quand le terme source devient raide.

Un exemple qui rentre dans ce cadre est l'hydrodynamique radiative. Ce système modélise les effets dynamiques d'un fluide en prenant en compte l'influence du rayonnement sur celui-ci. Dans certaines configurations, l'impact du transfert radiatif modifie de façon non négligeable l'écoulement de part les échanges d'énergie qui se mettent en place entre la matière et les photons. La formalisation de l'hydrodynamique radiative peut se trouver dans les références suivantes [ZR66; Pom73; MW84]. Les applications liées à ce système sont variées, on pourra par exemple citer la rentrée atmosphérique superorbitale d'une sonde spatiale [Tur03; Dub09] ou encore de nombreux phénomènes en astrophysique [Gon06; Fé114]. Pour ce second cas les applications sont, par exemple, l'étude des corps stellaires gazeux et des chocs radiatifs qui se créent lors de la formation des proto-étoiles ou au cours de l'explosion des supernovae. Au travers de ces exemples, on peut voir la nécessité du couplage entre les deux physiques. Ainsi, le profil des écoulements peut être modifié selon que l'on considère ou non les effets du rayonnement. Cette différence peut s'expliquer par le fait que le bilan d'énergie est modifié par l'échauffement qui entraîne des échanges entre les photons et le milieu ambiant. De plus, le couplage s'effectue par le terme source qui peut se trouver être raide ou non selon les zones de calcul et ces zones varient de manière non-linéaire avec la solution.

Afin de simuler numériquement ces différents phénomènes complexes sur des géométries variées, par exemple à cause de la présence d'obstacles, il est nécessaire de pouvoir utiliser des maillages non structurés. L'utilisation de tels maillages soulève de nouvelles difficultés d'un point de vue de la discrétisation des équations et plus particulièrement quand on s'approche du régime de diffusion. En effet, il existe peu de schémas numériques qui permettent de préserver l'ensemble des états admissibles pour des équations de diffusion sur maillage quelconque. Or, la préservation de cet ensemble est une propriété primordiale pour un schéma numérique afin de conserver des solutions physiquement et mathématiquement valides. Ainsi, on ne souhaite pas obtenir des densités ou des températures (en Kelvin) négatives, qui pourraient conduire à des problèmes de définition des



équations aux dérivées partielles qui régissent l'hydrodynamique radiative. En outre, les configurations que l'on souhaite tester sont très raides : pour des chocs radiatifs, l'amplitude de l'onde qui se crée est de l'ordre de plusieurs milliers de Kelvin.

Une autre propriété qu'il est nécessaire de conserver est la dégénérescence du système avec terme source vers une équation de diffusion. Des schémas permettant de suivre une telle dégénérescence sont dits *asymptotic preserving* (préservant l'asymptotique) au sens de JIN [Jin99]. Ils ont tout d'abord été utilisés pour obtenir des discrétisations des équations cinétiques dérivant vers des modèles macroscopiques. Dans notre cas, c'est un système hyperbolique qui dégénère vers une équation parabolique. L'une des principales difficultés est que la raideur du terme source est dépendante de la solution, le comportement n'est alors pas uniforme en temps et en espace. En 1D de nombreux schémas existent pour préserver l'asymptotique « hyperbolique-parabolique » depuis les travaux de GOSSE et TOSCANI [GT02]. On pourra se référer à la partie 1.4.1 pour un état de l'art plus détaillé en 1D. En revanche, dans le cadre de maillage 2D non structuré, seule deux catégories de travaux permettent de préserver cette limite. La première est celle développée dans [BMT14; BMST16] basée sur la technique 1D de BERTHON et TURPAULT [BT11] et le schéma diamant [CVV99]. La seconde se trouve dans les travaux de la thèse de FRANCK [Fra12; BDF12a; BDF12b; BDFL16; BDF15] qui utilise un schéma aux nœuds de type MPFA (*Multi-Point Flux Approximation*). Aucun de ces deux schémas n'est satisfaisant dans le sens où la préservation de l'ensemble des états admissibles n'est assurée que sous une condition géométrique ou alors en utilisant une discrétisation temporelle implicite.

Le but de ce manuscrit est alors de présenter un nouveau schéma de type volumes finis explicite permettant de préserver l'ensemble des états admissibles et l'asymptotique dans toutes les configurations sur maillage 2D non structuré. De plus, il sera étendu à l'ordre élevé afin d'accroître sa précision.

## Plan de la thèse

### Chapitre 1 : Généralités

Le premier chapitre explicite les concepts généraux concernant la préservation de l'asymptotique via un état de l'art des méthodes s'appliquant dans notre contexte et la présentation de plusieurs exemples dont l'hydrodynamique radiative. On profite de ce chapitre pour mettre en place la majorité des notations que l'on utilisera par la suite pour écrire les schémas numériques, tant pour des systèmes hyperboliques (1.2) que pour des équations de diffusion (1.4). On rappellera aussi certaines propriétés sur les schémas volumes finis d'ordre un et d'ordre élevé que l'on mettra en pratique dans les chapitres suivants. Pour la montée en ordre, on s'intéressera plus particulièrement au

paradigme MOOD (*Multi-dimensional Optimal Order Detection*) [CDL11] pour l'espace et aux schémas de type SSP (*Strong Stability Preserving*) [GST01] pour le temps. Au sein de ce chapitre, on redémontrera des résultats de stabilité en 2D par combinaison convexe de schémas 1D car cette technique de preuve sera utilisée sur les nouveaux schémas 2D dans les Chapitres 3 et 4.

## Chapitre 2 : Schéma AP 1D d'ordre élevé

Ce chapitre rappelle tout d'abord le schéma HLL-AP en 1D de BERTHON et TURPAULT [BT11]. Il préserve l'asymptotique et l'ensemble des états admissibles dans toutes les configurations pour les systèmes de lois de conservation avec terme source du formalisme (1.1). Le travail réalisé est l'extension à l'ordre élevé tout en conservant les propriétés du schéma. Le cadre 1D va permettre de conserver des notations simples et d'exhiber les différentes difficultés liées à la préservation de l'asymptotique à tout ordre. On réutilisera ensuite les techniques développées en 1D pour les maillages 2D non structurés dans le Chapitre 4. La montée en ordre s'effectue avec la méthode MOOD et une combinaison convexe entre les reconstructions polynomiales et les valeurs moyennes est introduite afin de conserver le comportement à la limite. On profite aussi de ce chapitre pour construire des solutions de référence continues et discontinues aux équations du Télégraphe (1.14) afin de pouvoir les comparer avec les solutions approchées. Des résultats sont finalement présentés afin d'observer le comportement du schéma à l'ordre élevé dans différents régimes.

## Chapitre 3 : Schéma 2D hyperbolique adapté pour l'AP

On s'intéresse ensuite à la discrétisation du système de lois de conservation avec terme source (1.1) en 2D. Dans ce chapitre, on commence par construire un schéma pour le système hyperbolique (1.2) sur maillage 2D non structuré. Le terme source sera ensuite introduit dans le chapitre suivant. Dans le but de pouvoir l'insérer facilement, le nouveau schéma est construit de telle sorte qu'il soit une extension de schémas 1D à deux points et que sa diffusion numérique soit orientée selon la normale aux interfaces. De plus, on va souhaiter qu'il préserve l'ensemble des états admissibles. Cette construction se fait en reprenant la technique de DRONIOU et LE POTIER [DLP11] utilisée pour des équations de diffusion. Le schéma HLL-DLP ainsi créé est consistant et conservatif. La préservation de l'ensemble des états admissibles, nécessaire dans des configurations raides, est assurée par une correction *a posteriori* dans l'esprit de la méthode MOOD avec le flux HLL classique (voir Figure 3.5). On réutilise ensuite cette méthode pour augmenter l'ordre du nouveau schéma HLL-DLP. Pour finir, on présente les résultats obtenus sur des cas tests classiques de la littérature hyperbolique pour valider les choix effectués. Plus particulièrement, on observe l'amélioration de la qualité de la solution

sur des maillages anisotropes grâce à la bonne orientation de la diffusion numérique. En outre, on verra que la correction introduite pour conserver des solutions physiquement admissibles s'active peu.

## Chapitre 4 : Schéma AP 2D d'ordre élevé

Pour ce dernier chapitre, on reprend le schéma HLL-DLP construit dans le chapitre précédent et on l'étend pour prendre en compte le terme source de (1.1) en utilisant la méthode de BERTHON et TURPAULT utilisée en 1D. Elle peut s'appliquer facilement car le schéma HLL-DLP pour le système hyperbolique a été développé avec les bonnes propriétés. En effet, c'est notamment grâce au fait qu'il soit composé de flux 1D dans plusieurs directions que la méthode va pouvoir s'appliquer. De plus, la bonne orientation de la diffusion numérique permettra de prouver que le schéma avec terme source est consistant dans tous les régimes en exhibant sa limite et la correction asymptotique associées. La montée en ordre s'effectue de la même manière que dans le cadre 1D du Chapitre 2 avec la méthode MOOD et une combinaison convexe entre les valeurs reconstruites et les valeurs moyennes de l'ordre un pour pouvoir conserver le comportement à la limite. Tout comme en 1D, on construit des solutions de références continues pour un modèle linéaire afin de pouvoir les comparer aux solutions approchées. On expose ensuite les solutions obtenues sur différents cas tests pour voir comment se comporte le schéma en régime de transport et proche de la diffusion.

## Publications

Deux articles sont extraits de ce mémoire, l'un paru et un second en cours de rédaction :

- F. Blachère and R. Turpault, [An admissibility and asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes](#), *J. Comput. Phys.*, vol. 315, pp. 98–123, 2016,
- F. Blachère and R. Turpault, [A high-order, admissibility and asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes](#), travail en cours.

## Communications

Les travaux de cette thèse ont été présentés au sein des conférences suivantes :

- août 2016 : [Hyp](#) (*International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*), Aachen, Allemagne,

- 
- mai 2016 : SHARK-FV (*Sharing Higher-order Advanced Know-how on Finite Volume*), São Félix, Portugal,
  - juin 2015 : NumHyp (*Numerical approximations of hyperbolic systems with source terms and applications*), Cortona, Italie,
  - juin 2015 : École d'été du GDR EGRIN (Ecoulements Gravitaires et Risques Naturels), Piriac, France,
  - avril 2014 : SHARK-FV (*Sharing Higher-order Advanced Know-how on Finite Volume*), Ofir, Portugal.

D'autres présentations scientifiques ont aussi été réalisées :

- janvier 2016 : Séminaire des doctorants du LMJL (Laboratoire de Mathématiques Jean Leray), Nantes, France,
- mai 2015 : Semaine d'Étude Math-Entreprise (SEME), organisé par AMIES, avec HydrOcéan, Nantes, France,
- avril 2015 : JDOC (Journée des doctorants) de l'école doctorale STIM, Angers, France,
- mars 2015 : Séminaire des doctorants du LMJL, Nantes, France,
- mai 2014 : Séminaire des doctorants du LMJL, Nantes, France.

## Codes

Au cours de cette thèse quatre codes principaux ont été développés en Fortran et parallélisés avec OpenMP afin de fournir des solutions approchées à deux types de problèmes : les systèmes de lois de conservations hyperboliques avec terme source de la forme (1.1) et les équations de diffusion limites associées (1.4) à la fois en 1D et en 2D sur maillage non structuré. Ils sont disponibles dans un dépôt [git](#) et leurs fonctionnalités sont détaillées dans l'Annexe A.

## Financement

Ce travail de thèse a été en partie financé par les projets ANR ACHYLLES (*Asymptotic Capturing for HYperbolic conservation Laws with LargE Source terms*) et GeoNum (*New numerical schemes for extreme geophysical phenomena*) dont les références sont ANR-14-CE25-0001 et ANR-12-IS01-0004.





---

# Généralités

## Introduction

Ce premier chapitre permet d'introduire le cadre général dans lequel se place ce mémoire de thèse mais aussi les différents concepts, notations et techniques qui vont être utilisés par la suite tout au long de ce manuscrit.

Ainsi, on commence par donner certaines abréviations et définitions que l'on utilisera. Ensuite, la partie 1.2 concerne la présentation du contexte physique via l'exposé des systèmes sur lesquels les calculs numériques seront conduits dans les chapitres qui suivent. La partie 1.3 rappelle les principales propriétés de la méthode des volumes finis utilisée pour discrétiser les systèmes présentés. On profite de cette partie pour poser les notations que l'on utilisera et décrire la méthode des volumes finis pour différents types d'équations. De plus, on redémontre certains résultats de stabilité en 2D car ils seront réutilisés par la suite. On présente également certaines techniques afin d'améliorer la précision des schémas numériques. On détaille en particulier la méthode MOOD [CDL11] pour l'ordre en espace et les schémas SSPRK [GST01] pour la discrétisation temporelle. Finalement, la partie 1.4 se concentre sur la présentation de la notion de préservation de l'asymptotique qui est au cœur de ce mémoire.

## 1.1 Notations

### 1.1.1 Abréviations

Tout au long de ce manuscrit, les abréviations suivantes seront utilisées :

- AP : préservation de l'asymptotique (*Asymptotic Preserving*),
- DLP : schéma volumes finis de DRONIOU et LE POTIER [DLP11] pour les problèmes elliptiques,
- DMP : principe du maximum discret (*Discrete maximum Principle*),
- HLL : flux numérique d'HARTEN, LAX et van LEER [HLL83],
- HLLC : flux numérique d'HARTEN, LAX et van LEER avec préservation des discontinuités de contact [TSS94; Tor09; BCD07],
- LMP : principe du maximum local (*Local Maximum Principle*) [DLP11; CCLP13],
- MOOD : *Multi-dimensional Optimal Order Detection* [Dio12; CDL11],
- PAD : critère d'admissibilité physique (*Physical Admissible Detector*),
- RK : schéma de Runge-Kutta pour la discrétisation temporelle,
- SSP : préservation de la stabilité forte (*Strong Stability Preserving*) pour les schémas en temps [GST01],
- TVD : variation totale décroissante (*Total Variation Diminishing*) [Har83].

### 1.1.2 Notations mathématiques

On utilisera aussi les notations suivantes pour certains opérateurs :

- le produit tensoriel entre deux vecteurs est noté  $\otimes$ , ainsi le terme générique de la matrice  $\mathbf{x} = \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$  est  $x_{ij} = y_i z_j$ ,
- $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité de taille  $n$ ,
- $\mathbf{U}^T$  est la transposée du vecteur (ou matrice)  $\mathbf{U}$ ,
- lorsque l'indice pour la discrétisation temporelle  $n$  ne sera pas nécessaire il sera omis, ceci dans le but de simplifier certaines notations puisqu'il sera principalement fait mention de schéma explicite en temps dans cette thèse.

### 1.1.3 Constantes physiques

Finalement, les valeurs des constantes physiques qui seront utilisées pour les calculs sont :

- constante de radiation :  $a \simeq 7,5657 \times 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$ ,
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- constante universelle des gaz parfaits :  $R \simeq 8,314\,462\,1 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,

## 1.2 Systèmes de lois de conservation avec terme source

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse à des systèmes de lois de conservation avec terme source que l'on écrira sous le formalisme général suivant :

$$\partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) = \gamma(\mathbf{U})(\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}), \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{U} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$  est le vecteur des variables conservatives. Ces variables appartiennent à l'ensemble convexe des états admissibles  $\mathcal{A}$ . Cet ensemble permet de définir correctement le système tant physiquement que mathématiquement. L'application continue  $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$  est le flux physique associé au système avec  $n$  la dimension de l'espace dans lequel on travaille, on s'intéressera principalement à  $n = 1$  ou  $2$ . On supposera que les systèmes sont hyperboliques, c'est-à-dire que les valeurs propres de la jacobienne de  $\mathbf{F}$  sont réelles. Le terme de droite décrit le terme source qui est composé d'une fonction  $\gamma$  positive et d'une fonction continue  $\mathbf{R} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

On remarque que si  $\gamma = 0$ , le système avec terme source (1.1) est équivalent au système hyperbolique de lois de conservation suivant :

$$\partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) = 0. \quad (1.2)$$

Ce formalisme de lois de conservation est bien adapté à la modélisation de nombreux phénomènes physiques car il permet de décrire aisément la conservation de certaines variables telles que la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie.

### 1.2.1 Dégénérescence vers une limite de diffusion

Parmi les systèmes de la forme (1.1), on s'intéresse à ceux qui vérifient les conditions de compatibilités établies dans [BLT13] à partir de celles de [CLL94]. La conséquence de ce choix est qu'ils dégèrent vers une limite de diffusion quand  $\gamma t \rightarrow \infty$  :

$$\partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})\nabla \mathbf{f}(\mathbf{u})) = 0, \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}_D \subset \mathbb{R}^{\bar{N}}$  est un vecteur de variables liées aux variables conservatives présentes dans  $\mathbf{U}$ . Elles appartiennent à  $\mathcal{A}_D$  l'ensemble des états admissibles pour la diffusion, avec  $\bar{N} < N$ . Ensuite,  $\mathbf{D}$  est une fonction positive ou une matrice définie positive décrivant la diffusion et  $\mathbf{f}$  une fonction continue.

Dans notre cas, on ne considérera qu'une limite de diffusion scalaire, ainsi pour la suite on supposera que  $\bar{N} = 1$ . L'équation de diffusion peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\partial_t u - \operatorname{div}(D(u)\nabla f(u)) = 0. \quad (1.4)$$



Si  $f$  et  $u$  sont assez régulières et que  $f$  est une fonction croissante de  $u$ , l'équation de diffusion limite peut alors se réécrire comme :

$$\partial_t u - \operatorname{div}(D_f(u)\nabla u) = 0, \quad (1.5)$$

où on a noté  $D_f(u) = D(u)f'(u)$ .

Afin d'être exhaustif, on se propose de rappeler ici les principales conditions de compatibilités pour obtenir ce type de limite « hyperbolique vers parabolique ». Ainsi, il doit exister une matrice constante réelle  $\mathbf{Q}$  de taille  $\bar{N} \times N$  telle que pour tout  $\mathbf{U}$  dans  $\mathcal{A}$ , on ait :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}) = 0. \quad (1.6)$$

Cette matrice  $\mathbf{Q}$  permet aussi de définir l'ensemble des états admissibles pour la diffusion :  $\mathcal{A}_D = \mathbf{Q}\mathcal{A}$ . De plus, on suppose l'existence d'une application  $\mathcal{E} : \mathcal{A}_D \rightarrow \mathcal{A}$  telle que, quelque soit  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{A}_D$ , on ait :

$$\mathbf{Q}\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{R}(\mathcal{E}(\mathbf{u})) - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = 0.$$

On peut alors définir la variété d'équilibre par :

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{U} = \mathcal{E}(\mathbf{u})\}. \quad (1.7)$$

Enfin, pour obtenir la dégénérescence vers une limite de diffusion, et non une limite hyperbolique, il faut aussi avoir la propriété suivante :

$$\mathbf{Q}\mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{U} \in \mathcal{M}. \quad (1.8)$$

Il est possible de connaître les vitesses de convergence à l'équilibre grâce aux estimées prouvées dans [BHN07] et mises en pratique dans [ABN08a ; ABN08b ; ABN16]. Ainsi, pour une limite de diffusion scalaire avec des variables régulières, les estimées suivantes sont vérifiées pour la variable de diffusion  $\mathbf{Q}\mathbf{U}$  avec toutes normes  $L^p$  avec  $p > 1$  :

$$\begin{cases} \|\partial_x^\beta \partial_t \mathbf{Q}\mathbf{U}\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \gamma t)^{-\frac{n}{2}(1-1/p) - \beta/2 - 1/2} \\ \|\partial_x^\beta \mathbf{Q}\mathbf{U}\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \gamma t)^{-\frac{n}{2}(1-1/p) - \beta/2} \end{cases}. \quad (1.9)$$

Quant aux autres variables  $w$ , qui n'interviennent pas dans la limite de diffusion, elles vérifient :

$$\begin{cases} \|\partial_x^\beta \partial_t w\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \gamma t)^{-\frac{n}{2}(1-1/p) - \beta/2 - 1} \\ \|\partial_x^\beta w\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \gamma t)^{-\frac{n}{2}(1-1/p) - \beta/2 - 1/2} \end{cases}. \quad (1.10)$$

Il a aussi été prouvé que la différence entre la solution du système de lois de conservation avec terme source (1.1) à la limite et la solution de l'équation limite (1.4) décroît de la

manière suivante :

$$\|\partial_x^\beta(\mathbf{QU} - u)\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \gamma t)^{-\frac{n}{2}(1-1/p) - \beta/2 - 1/2}, \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{QU}$  est la solution à la limite et  $u$  la solution de l'équation limite.

Afin de fixer les idées, on explicite par la suite plusieurs systèmes de lois de conservation qui peuvent s'écrire comme (1.1) et qui vérifient les conditions de compatibilités. Ils dégènèrent alors vers une équation de diffusion du type (1.4).

### 1.2.2 Exemples de système hyperbolique de lois de conservation

On présente tout d'abord quelques exemples de lois de conservation homogènes du type (1.2) qui seront réutilisés pour les tests numériques.

#### Équation de transport

Le premier exemple est l'équation de transport :

$$\partial_t U + \operatorname{div}(\mathbf{a}U) = 0. \quad (1.12)$$

Cette équation linéaire décrit le transport d'une quantité  $U$  à la vitesse  $\mathbf{a}$ . L'intérêt de ce premier exemple simple est que si l'on connaît la condition initiale associée  $U_0(\mathbf{x}) := U(t=0, \mathbf{x})$ , il est alors possible de connaître la solution exacte de cette équation :  $U(t, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$ . Cette propriété sera utilisée lorsque l'on aura besoin de calculer les erreurs et les ordres des différents schémas.

On retrouve bien ici la notion de conservation : la quantité  $U$  est uniquement transportée à la vitesse  $\mathbf{a}$ , elle ne subit aucune autre modification.

#### Équations d'Euler compressible

Un autre exemple classique, mais plus complexe car non linéaire, est le système formé par les équations d'Euler pour les fluides compressibles. Ce système d'équations permet de décrire la dynamique d'un fluide compressible en ayant négligé les effets de la diffusion thermique, des forces extérieures et de la viscosité. Pour prendre en compte ces effets, il faudrait se tourner vers des modèles plus complets comme les équations de Navier-Stokes.

On fait ici une présentation rapide du modèle d'Euler compressible afin d'avoir les principales notations, plus de détails pourront être trouvés dans [GR96; Tor09]. Le

modèle dans sa forme classique s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= 0 \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{u}) &= 0 \end{cases} . \quad (1.13)$$

La première équation du système représente la conservation de la masse, les suivantes décrivent la conservation de la quantité de mouvement et la dernière est celle de la conservation d'énergie.

En utilisant le formalisme général des lois de conservation (1.2), le système peut s'écrire avec :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} (\rho \mathbf{u})^T \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}_n \\ (E + p)\mathbf{u}^T \end{pmatrix},$$

où les variables conservatives sont la densité  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{u}$  et  $E$  l'énergie totale par unité de volume. On utilisera aussi régulièrement les variables primitives du système : la densité, la vitesse du fluide  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ .

Afin de fermer le système il est nécessaire de faire intervenir la thermodynamique via une loi d'état. L'une des plus utilisée est la loi des gaz parfaits :

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{\rho \|\mathbf{u}\|^2}{2}\right),$$

où le coefficient adiabatique  $\gamma$  est défini par  $\gamma := \frac{C_P}{C_v}$  avec  $C_P$  et  $C_v$  les capacités calorifiques à pression et volume constant. Dans toute la suite de la thèse et pour toutes les simulations numériques on travaillera avec des gaz parfaits et la valeur classique  $\gamma = 1,4$ .

Contrairement à l'équation de transport, les variables doivent ici respecter un critère d'admissibilité physique afin que le système ait un sens. On définit ainsi l'ensemble des états admissibles pour les équations d'Euler :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T \in \mathbb{R}^{n+2} / \rho > 0, p > 0\}.$$

En 1D les valeurs propres de ce système sont  $u - c_s$ ,  $u$  et  $u + c_s$  avec  $c_s$  la vitesse du son dans le fluide. Avec une loi d'état de type gaz parfaits elle est calculée par :

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

On observe bien la nécessité de la positivité de la densité et de la pression pour avoir l'hyperbolicité du système.

### 1.2.3 Exemples de lois de conservation avec terme source

On présente maintenant quelques exemples de systèmes de lois de conservation qui rentrent dans le formalisme du système avec terme source (1.1). On utilisera ces exemples dans les différents tests numériques, à la fois pour des tests avec et sans terme source ( $\gamma > 0$  et  $\gamma = 0$ ).

#### Équations du Télégraphe en 1D

Un des systèmes les plus « simple » qui rentre dans le formalisme du système (1.1) est le système du Télégraphe ou équations de Goldstein-Taylor [Tay22; Gol51] (ou encore système de Carleman [Car57; GS07]). En 1D, il s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u &= \sigma(u, v)(v - u) \\ \partial_t v - a \partial_x v &= \sigma(u, v)(u - v) \end{cases}, \quad (1.14)$$

Ce système linéaire décrit de manière simplifiée le mouvement d'un gaz composé de deux types de particules de densités  $u$  et  $v$  avançant à vitesses  $a > 0$  et  $-a$ . Le terme source décrit la collision entre les particules de gaz avec le libre parcours moyen entre deux collisions  $\sigma(u, v) > 0$ . On remarque que si  $\sigma = 0$  on obtient deux équations de transport (1.12) découplées.

Ce premier système avec terme source s'écrit dans le cadre de (1.1) en posant :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} au \\ -av \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \quad \gamma(\mathbf{U}) = \sigma(u, v).$$

Sur cet exemple, il est facile d'exhiber la matrice  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$  permettant de vérifier les conditions de compatibilités (1.6) et (1.8). Lorsque  $\gamma t \rightarrow \infty$ , quand le libre parcours augmente et/ou en temps long, ce système dégénère donc vers une équation de diffusion portant sur  $u + v$ , sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u - v = 0\}$  :

$$\partial_t(u + v) - \partial_x \left( \frac{a^2}{2\sigma(u, v)|_{u=v=0}} \partial_x(u + v) \right) = 0. \quad (1.15)$$

Cette équation de diffusion représente le fait que l'on observe la densité globale du gaz  $u + v$ .

Une des manières d'obtenir cette limite de diffusion est d'utiliser un développement de Chapman-Enskog. Il s'agit d'un calcul formel qui permet uniquement d'obtenir l'équation limite. Par exemple, il ne permet pas d'obtenir les vitesses de convergence à l'équilibre. Il consiste en une mise à l'échelle de  $\gamma$  et  $t$  par un paramètre  $\varepsilon > 0$ , puis à effectuer un développement de Hilbert en  $\varepsilon$  des variables. Le fait d'imposer la même remise à l'échelle pour  $\gamma$  et  $t$  est une hypothèse forte de cette méthode (on rappelle que la limite

de diffusion est normalement obtenue quand le produit  $\gamma t$  croît). Une autre hypothèse restrictive qui est faite est de considérer que  $\gamma$  est indépendant de  $\mathbf{U}$ .

Néanmoins, lorsque le but recherché n'est que d'obtenir l'équation limite, cette méthode a l'avantage d'être simple. Ainsi, elle pourra être utilisée pour calculer la limite des schémas numériques que l'on construira.

On se propose de mettre en application le développement de Chapman-Enskog pour les équations du Télégraphe. On suppose alors que  $\sigma$  est constant et on introduit la mise à l'échelle suivante avec  $\varepsilon > 0$  :

$$t \leftarrow \frac{t}{\varepsilon} \text{ et } \sigma \leftarrow \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Ensuite, on effectue un développement de Hilbert au premier ordre des variables :

$$\begin{cases} u &= u_0 + \varepsilon u_1 \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 \end{cases}.$$

En introduisant ce développement dans le système du Télégraphe mis à l'échelle, on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t(u_0 + \varepsilon u_1) + a \partial_x(u_0 + \varepsilon u_1) &= \frac{\sigma}{\varepsilon}(v_0 + \varepsilon v_1 - u_0 - \varepsilon u_1) \\ \varepsilon \partial_t(v_0 + \varepsilon v_1) - a \partial_x(v_0 + \varepsilon v_1) &= \frac{\sigma}{\varepsilon}(u_0 + \varepsilon u_1 - v_0 - \varepsilon v_1) \end{cases}$$

En identifiant les différentes puissances de  $\varepsilon$  dans le système mis à l'échelle, il vient pour les différentes puissances de  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} : 0 &= (v_0 - u_0) \\ \varepsilon^0 : \begin{cases} a \partial_x u_0 &= \sigma(v_1 - u_1) \\ -a \partial_x v_0 &= \sigma(u_1 - v_1) \end{cases} \\ \varepsilon^1 : \begin{cases} \partial_t u_0 + a \partial_x u_1 &= 0 \\ \partial_t v_0 - a \partial_x v_1 &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le terme en  $1/\varepsilon$  permet de retrouver la variété d'équilibre  $\mathcal{M} = \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 / u - v = 0\}$  et les deux systèmes pour  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$  donnent l'équation de diffusion sur  $u + v$  :

$$\partial_t(u + v) - \partial_x \left( \frac{a^2}{2\sigma} \partial_x(u + v) \right) = 0. \quad (1.15)$$

Comme on le voit dans le déroulement du calcul, cela permet uniquement d'obtenir la limite du modèle dans un cadre très restreint. Si l'on connaît la limite, il est possible de prouver plus rigoureusement cette convergence à l'aide d'une transformée de Fourier. Des preuves plus rigoureuses de cette limite existent [HN03a; BHN07; ABN16] et per-

mettent d'obtenir plus d'informations telles que les vitesses de convergence à l'équilibre. Toutefois, les techniques utilisées sont très difficile à transposer dans un cadre discret.

### Modèle $P_1$ pour le transfert radiatif

Un second modèle linéaire est le modèle  $P_1$  pour le transfert radiatif [Jea17; Edd60; Sar13] qui utilise les deux premiers termes de la décomposition en harmoniques sphériques. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{F}_R + \frac{c^2}{3} \nabla E_R &= -c\sigma^d \mathbf{F}_R \end{cases}, \quad (1.16)$$

où  $E_R$  est l'énergie radiative et  $\mathbf{F}_R$  le flux radiatif. La constante  $c$  est la vitesse de la lumière et  $\sigma^d$  est le coefficient de *scattering*. En normalisant les constantes, ce modèle est parfois aussi appelé « équation de la chaleur hyperbolique » [Fra12].

Il rentre dans le formalisme du système (1.1) avec :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_R \\ \mathbf{F}_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_R^T \\ E_R \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} E_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(\mathbf{U}) = c\sigma^d.$$

La limite de diffusion de ce modèle, sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M} = \{(E_R, \mathbf{F}_R)^T \in \mathbb{R}^{n+1} / \mathbf{F}_R = 0\}$ , est la suivante :

$$\partial_t E_R - \operatorname{div} \left( \frac{c}{3\sigma^d} \nabla E_R \right) = 0.$$

### Modèle $M_1$ gris pour le transfert radiatif

Un autre modèle plus complet pour le transfert radiatif est le modèle aux moments  $M_1$  développé par DUBROCA et FEUGEAS dans [DF99] :

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) &= c(\sigma^e a T^4 - \sigma^a E_R) \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R) &= -c\sigma^f \mathbf{F}_R \\ \partial_t \rho C_v T &= c(\sigma^a E_R - \sigma^e a T^4) \end{cases}. \quad (1.17)$$

Comme pour le modèle  $P_1$ ,  $E_R$  et  $\mathbf{F}_R$  sont respectivement l'énergie et le flux radiatif. Ces deux variables sont le premier et le second moment de l'intensité radiative. À ces variables s'ajoutent la température matière  $T$ . Ce modèle est fermé par un principe de minimisation d'entropie à la LEVERMORE [Lev96] qui donne la forme suivante à la pression radiative  $\mathbf{P}_R$  (le troisième moment de l'intensité radiative) :

$$\mathbf{P}_R = \begin{cases} E_R \left( \frac{1-\chi}{2} \mathbf{I}_n + \frac{3\chi-1}{2} \frac{\mathbf{F}_R \otimes \mathbf{F}_R}{\|\mathbf{F}_R\|} \right) & \text{si } \|\mathbf{F}_R\| \neq 0, \\ \frac{E_R}{3} \mathbf{I}_n & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\chi(f) = \frac{3+4f^2}{5+2\sqrt{4-3f^2}}$  est le facteur d'Eddington avec le facteur d'anisotropie  $f = \frac{\|\mathbf{F}_R\|}{cE_R}$ . La vitesse de la lumière est de nouveau notée  $c$  et  $a$  est la constante de radiation. Finalement, les différentes fonctions  $\sigma = \sigma(E_R, \mathbf{F}_R, T)$  apparaissant dans le modèle sont les opacités moyennes d'absorption ( $\sigma^a$ ), d'émission ( $\sigma^e$ ) et d'absorption du flux ( $\sigma^f$ ). Pour plus de détails sur ces opacités, on pourra se référer à [Pom73; MW84; Tur05].

Les deux premières équations décrivent la conservation de l'énergie et du flux radiatifs. La dernière équation de ce modèle représente la conservation de l'énergie totale (énergie radiative et matière) car l'énergie radiative seule n'est pas conservée. Elle est obtenue en fixant une densité  $\rho$  constante et une vitesse nulle dans le modèle d'Euler, ce qui fait intervenir la capacité calorifique à volume constant  $C_v$  de la matière. Cette représentation permet de décrire principalement les effets du transfert radiatif en négligeant la partie hydrodynamique.

Le modèle homogène associé (sans terme source, de la forme (1.2)), est hyperbolique [DF99] et il est possible, en 1D, de connaître parfaitement la structure des problèmes de Riemann [Sar13].

Contrairement au modèle  $P_1$ , ce modèle assure la positivité de l'énergie et la limitation de flux. L'ensemble des états admissibles est alors décrit par :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{U} = (E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathbb{R}^{n+2} / E_R \geq 0, T > 0, f \leq 1\}$$

Afin de rentrer dans le formalisme du système (1.1), le modèle  $M_1$  a été reformulé dans [BT11] en introduisant les quantités positives suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma^m &= \max(\sigma^a, \sigma^e, \frac{\sigma^e a T^3}{\rho C_v}) \\ \sigma^1 &= \sigma^m - \sigma^a \\ \sigma^2 &= \sigma^m - \sigma^f \\ \sigma^3 &= \sigma^m - \frac{\sigma^e a T^3}{\rho C_v} \end{aligned}$$

Cette reformulation du terme source permet d'obtenir les notations liées au formalisme (1.1) :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} E_R \\ \mathbf{F}_R \\ T \end{pmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_R^T \\ c^2 \mathbf{P} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}(\mathbf{U}) = \frac{1}{\sigma^m} \begin{pmatrix} \sigma^e a T^4 + \sigma_1 E_R \\ \sigma_2 \mathbf{F}_R \\ \frac{\sigma^a E_R}{\rho C_v} + \sigma_3 T \end{pmatrix}, \gamma(\mathbf{U}) = c\sigma^m(\mathbf{U}). \quad (1.18)$$

À la limite de diffusion, le modèle  $M_1$  dérive vers l'équation de diffusion à l'équilibre [Pom73 ; MW84], sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M} = \{(E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathcal{A} / E_R = aT^4, \mathbf{F}_R = 0\}$  :

$$\partial_t (\rho C_v T + aT^4) - \operatorname{div} \left( \frac{c}{3\sigma^f(\mathbf{U})|_{\mathbf{U} \in \mathcal{M}}} \nabla(aT^4) \right) = 0. \quad (1.19)$$

### Hydrodynamique radiative

Afin de tenir compte à la fois des effets radiatifs et de la dynamique du fluide, on utilise le modèle suivant qui présente un couplage entre les équations d'Euler (1.13) et le modèle  $M_1$  gris (1.17) présenté dans [Pom73 ; Tur03].

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}_R) + \nabla p = \frac{1}{c} \sigma^f \mathbf{F}_R \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{u}) = c(\sigma^a E_R - \sigma^e aT^4) \\ \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) = c(\sigma^e aT^4 - \sigma^a E_R) \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R) = -c\sigma^f \mathbf{F}_R \end{array} \right. . \quad (1.20)$$

On retrouve les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie du modèle d'Euler pour les fluides compressibles (1.13) auxquelles s'ajoutent les équations provenant du modèle  $M_1$  présenté précédemment (1.17). Tout comme pour le modèle d'Euler, on utilisera la loi d'état des gaz parfaits afin de fermer le système :

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{\rho \|\mathbf{u}\|^2}{2} \right).$$

Cette même loi d'état permet aussi de retrouver la température  $T$  à l'aide de la relation suivante :

$$T = \frac{pM}{\rho R},$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $M$  la masse molaire du fluide considéré.

L'ensemble des états admissibles est issu de celui des deux modèles :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E, E_R, \mathbf{F}_R)^T \in \mathbb{R}^{2n+3} / \rho > 0, p > 0, E_R \geq 0, f \leq 1\}.$$

En fonctions des configurations, certains termes peuvent être négligés devant d'autres. Ainsi, dans le cas des chocs radiatifs, la pression radiative  $\mathbf{P}_R$  est négligeable devant la pression du fluide  $p$ . Le couplage se retrouve alors effectué uniquement par les termes sources ce qui permet de justifier directement l'hyperbolicité du système homogène.



Ce modèle rentre lui aussi dans le formalisme (1.1) en utilisant la reformulation du modèle  $M_1$  pour aboutir aux notations suivantes :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \\ E_R \\ \mathbf{F}_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u}^T \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}_R + p \mathbf{I}_n \\ (E + p) \mathbf{u}^T \\ \mathbf{F}_R^T \\ c^2 \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{U}) = \frac{1}{\sigma^m} \begin{pmatrix} \sigma^m \rho \\ \frac{\sigma^f \mathbf{F}_R}{c^2} + \sigma^m \rho \mathbf{u} \\ \sigma^a E_R - \sigma^e a T^4 + \sigma^m E \\ \sigma^e a T^4 + \sigma^1 E_R \\ \sigma^2 \mathbf{F}_R \end{pmatrix},$$

avec  $\gamma(\mathbf{U}) = c\sigma^m(\mathbf{U})$  et le même type de réécriture des opacités :

$$\begin{aligned} \sigma^m &= \max(\sigma^a, \sigma^f), \\ \sigma^1 &= \sigma^m - \sigma^a, \\ \sigma^2 &= \sigma^m - \sigma^f. \end{aligned}$$

Quand  $\gamma t \rightarrow \infty$  sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M} = \{(\rho, \rho \mathbf{u}, E, E_R, \mathbf{F}_R)^T \in \mathcal{A} / \mathbf{F}_R = 0, E_R = aT^4\}$ , on obtient la même limite que pour le modèle  $M_1$  (1.19) et la partie hydrodynamique reste inchangée.

### Équations d'Euler isentropique avec friction

Le modèle d'Euler isentropique reprend le modèle d'Euler classique défini dans (1.13) en supposant que l'entropie physique est constante. Cela permet de simplifier le modèle de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= -\kappa(\rho) \mathbf{u} \end{cases} \quad (1.21)$$

La loi de pression associée est aussi modifiée et elle devient alors :

$$p(\rho) = C\rho^\gamma,$$

avec  $C$  une constante positive que l'on choisit égale à 1. Pour la suite, le coefficient adiabatique  $\gamma$  sera pris égal à 1,4 comme pour le modèle d'Euler classique. Le modèle homogène est hyperbolique si  $p'(\rho)$  reste positif, ce qui est le cas ici tant que la densité est positive. Le terme source de friction intervient sur l'équation de quantité de mouvement et est contrôlé par une fonction  $\kappa$  positive.

Ainsi, les équations d'Euler isentropique rentrent dans le formalisme du système (1.1) en utilisant les notations suivantes :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} (\rho \mathbf{u})^T \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p(\rho) \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(\mathbf{U}) = \kappa(\rho).$$

L'ensemble des états admissibles de ce système découle aussi de celui d'Euler classique :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^{n+1} / \rho > 0\}.$$

Lorsque la friction augmente ou en temps long ( $\gamma t \rightarrow \infty$ ), ce système dégénère vers la limite de diffusion suivante, sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M} = \{(\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathcal{A} / \rho \mathbf{u} = 0\}$  :

$$\partial_t \rho - \operatorname{div} \left( \frac{1}{\kappa(\rho)} \nabla p(\rho) \right) = 0. \quad (1.22)$$

On pourra se référer à [MM90; HN03a; HMP05; BLT13] pour des preuves de cette limite.

**Remarque 1.1.** *Il est possible de retrouver le modèle de St-Venant avec friction linéaire en remplaçant la densité  $\rho$  par la hauteur de fluide  $h$  et la loi de pression par  $p(h) = g \frac{h^2}{2}$  avec  $g$  la constante de gravitation. Si l'on utilise des termes de frictions plus complexes mais aussi plus représentatifs de la physique, alors la limite de diffusion ne rentre plus dans le cadre de l'équation limite (1.4). Par exemple, avec une friction de type Manning on obtient une équation de Laplace non linéaire [BLT13; DMTB15].*

## 1.3 Généralités sur les volumes finis

Après cette présentation du contexte physique, on présente des généralités et les notations utiles pour établir des schémas numériques de types volumes finis pour des problèmes hyperboliques (1.2) et paraboliques (1.4).

### 1.3.1 Notations pour les maillages

Afin de pouvoir mettre en place les schémas numériques, on a besoin d'une discrétisation de l'espace. On va exposer les notations utilisées pour décrire des maillages 1D et 2D.

#### Maillages 1D

On présente d'abord le cas d'une discrétisation d'une partie de  $\mathbb{R}$ . Dans ce cadre, un maillage 1D est décrit par des cellules  $i$  de centre  $x_i$  représentant le segment  $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$

(voir Figure 1.1). On se concentrera uniquement sur des maillages 1D uniforme : chaque cellule est de même taille  $\Delta x := x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ .

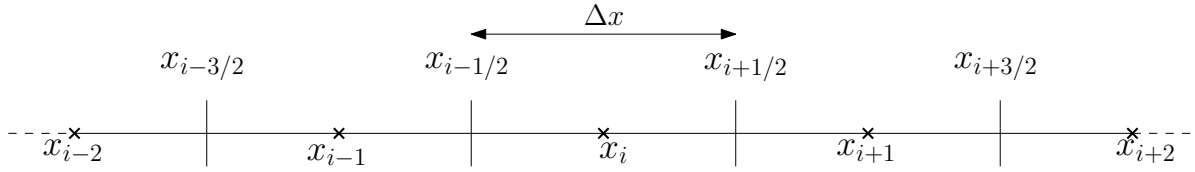


FIGURE 1.1 – Notations pour un maillage 1D uniforme

## Maillages 2D

En 2D, le cas d'un maillage  $\mathcal{M}$  représentant une partition de  $\mathbb{R}^2$  par des polygones  $K$  (voir un exemple en Figure 1.2) demande plus de notations, on utilisera les suivantes :

- $\mathbf{x}_K$  : coordonnées du centre de gravité de la cellule  $K$ ,
- $|K|$  : aire de la cellule  $K$ ,
- $L$  : indice par l'arête  $i$  d'un voisin de  $K$ ,
- $\mathcal{E}_K$  : ensemble des arêtes (ou des voisins par ces arêtes) de  $K$ ,
- $|e_i|$  : longueur de l' $i$ -ème arête de  $K$ ,
- $\mathbf{n}_{K,i}$  : normale à l'arête  $i$  dans la direction sortante à  $K$ ,
- $p_K := \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i|$  : périmètre de la cellule  $K$ ,
- $\Delta x_K := |K|/p_K$  : pas d'espace de la cellule  $K$ ,
- $\Delta x := \min_{K \in \mathcal{M}} \Delta x_K$  : pas d'espace du maillage.

Parmi toutes les possibilités de partitions, certains maillages possèdent plus de propriétés que d'autres. On pourra, par exemple, citer les maillages cartésiens ou encore les maillages dits admissibles. Ces derniers maillages jouent un rôle particulier amenant souvent à des simplifications notables. On les définit de la manière suivante :

**Définition 1.1.** *Un maillage est dit admissible si pour toutes ses interfaces la propriété suivante est vraie :*

$$\mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K}{\|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K\|},$$

*ce qui peut être reformulé en vérifiant que la droite reliant deux centres de cellules est orthogonale à l'interface associée. Pour plus de précisions, on pourra se référer à la définition 3.1 dans [EGH00] et aux exemples qui suivent.*

Cette notion de maillage admissible sera utile dans le cadre des schémas discrétisant les équations de diffusion (1.4) car il existe peu de schémas donnant de bons résultats sur des maillages non admissibles. Des exemples de maillages admissibles sont les maillages cartésiens ou encore les maillages composés de triangles avec le centre des mailles situé au

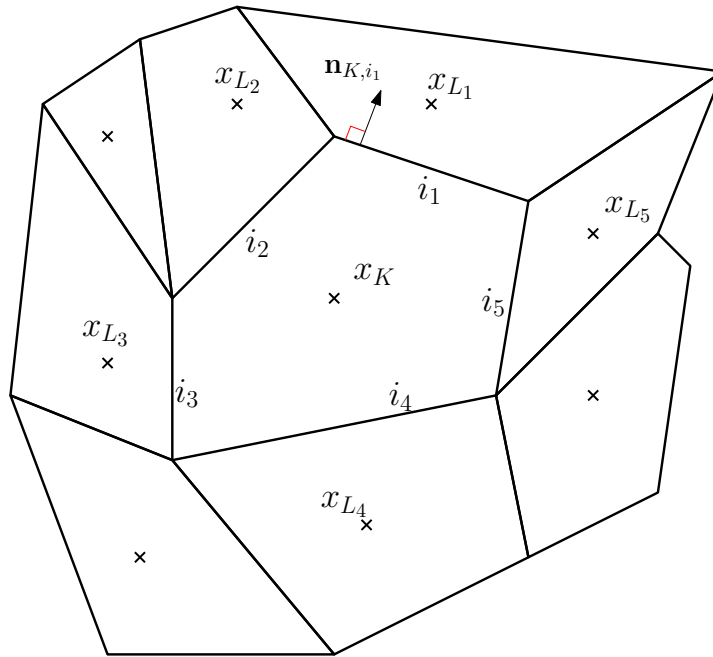


FIGURE 1.2 – Notations pour un maillage 2D non structuré

centre du cercle circonscrit à chaque triangle (comme ceux obtenus avec la triangulation de Delaunay).

Afin d'obtenir des maillages très non structurés et ne contenant pas uniquement des triangles ou des quadrilatères, la technique suivante a été utilisée (voir Figure 1.3 pour la représentation des maillages) :

1. un maillage de quadrilatères est généré, ce maillage sera associé au maillage dit « diamant » (utilisé par exemple par le schéma du même nom [CVV99]),
2. puis, chaque sommet du maillage diamant est marqué pour être ensuite utilisé comme centre du maillage primaire ou secondaire en fonction de ses voisins,
3. finalement, les cellules du maillage primaire et du maillage secondaire sont créées afin que les sommets du maillage primaire soient les centres des mailles du maillage secondaire (et inversement).

Cette technique permet de créer des maillages avec des polygones quelconques et aussi d'équilibrer le nombre de cellules dans le maillage primaire et dans le maillage secondaire. Par la suite, tous les calculs seront conduits sur le maillage primaire.

### 1.3.2 Schémas volumes finis pour les systèmes hyperboliques

Une fois les maillages construits, plusieurs techniques peuvent être utilisées pour discrétiser les équations de (1.1). Le choix s'est porté sur la méthode des volumes finis [EGH00], plutôt que des éléments finis ou des différences finies, car elle est bien adaptée à la fois pour les lois de conservation (1.2) et pour les équations de diffusion (1.4).

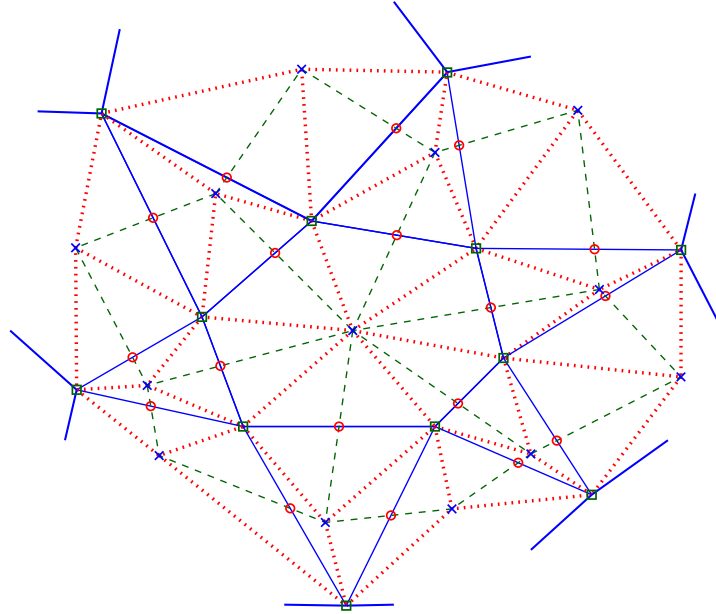


FIGURE 1.3 – Représentation des différents maillages : primaire en trait plein bleu (centres avec des croix), secondaire en tiret vert (carré) et diamant en point rouge (cercle)

La méthode des volumes finis pour les systèmes de lois de conservation hyperbolique (1.2) est bien connue [GR96 ; LeV02], on en rappelle ici les notions principales afin de mettre en place les notations.

### Schémas volumes finis pour les systèmes hyperboliques 1D

En 1D, après intégration du système sur chaque cellule puis en définissant  $\mathbf{U}_i^n$  comme étant la valeur moyenne sur la cellule  $i$  et au temps  $t^n$ , un schéma conservatif pour (1.2) peut s'écrire :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}), \quad (1.23)$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps entre l'itéré  $t^{n+1}$  et  $t^n$ . Dans ce schéma,  $\mathcal{F}_{i+1/2}$  est le flux numérique à travers l'interface  $i + 1/2$ . Il existe de nombreuses manières de calculer ce flux, on cite ici quelques exemples classiques de solveurs de Riemann approchés à deux points que l'on utilisera par la suite.

Tout d'abord, le flux de RUSANOV [Rus61] qui est défini par :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)}{2} - \frac{b_{i+1/2}}{2} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i), \quad (1.24)$$

où  $b_{i+1/2}$  est une vitesse plus grande que toutes les vitesses d'ondes à travers l'interface  $i + 1/2$ . Ce flux possède bien les propriétés classiques de consistance et de conservativité :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{U} \text{ et } \mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = -\mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_i).$$

Ce flux est assez diffusif car il suppose que l'on a les mêmes vitesses d'ondes de chaque côté du problème de Riemann sur l'interface  $i + 1/2$ .

Une version plus élaborée a été proposée par HARTEN, LAX et van LEER : le flux HLL [HLL83]. En choisissant les vitesses bornant les vitesses d'ondes de telle sorte que  $b_{i+1/2}^- < 0 < b_{i+1/2}^+$ , il s'écrit :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = \frac{-b_{i+1/2}^- \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) + b_{i+1/2}^+ \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-} + \frac{b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i). \quad (1.25)$$

On remarque que si l'on fixe  $b_{i+1/2} := b_{i+1/2}^+ = -b_{i+1/2}^- > 0$  alors on retrouve l'expression du flux de RUSANOV (1.24).

Il est encore possible d'améliorer le flux HLL afin de préserver les discontinuités de contact dans le problème de Riemann. Ainsi, en introduisant deux états intermédiaires au lieu d'un dans le problème de Riemann, on peut construire le flux HLLC. Il a été dans un premier temps introduit pour le modèle d'Euler dans [TSS94; Tor09], mais il est aussi possible de le construire pour d'autres physiques, par exemple dans le cadre du modèle  $M_1$  pour le transfert radiatif [BCD07].

On rappelle que le schéma (1.23) utilisant un flux de type HLL est stable et préserve l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  sous la condition CFL suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_i (|b_{i+1/2}^-|, |b_{i+1/2}^+|) \leq \frac{1}{2}. \quad (1.26)$$

### Schémas volumes finis pour les systèmes hyperboliques 2D

Concernant le cas 2D, un schéma conservatif pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation (1.2) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}, \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{F}_i$  est le flux à travers l'interface  $i$ . Ce flux peut être calculé à partir des flux 1D décrits précédemment projetés dans la direction de la normale sortante. Par exemple, pour le flux de RUSANOV en 2D :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \mathcal{F}(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_L; \mathbf{n}_{K,i}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \\ &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_K)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_K), \end{aligned} \quad (1.28)$$

où  $b_{KL}$  majore les vitesses d'ondes entre les états  $\mathbf{U}_K$  et  $\mathbf{U}_L$ . On retrouve aussi les propriétés de consistance et de conservativité :

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}; \mathbf{n}_{K,i}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} \text{ et } \mathcal{F}(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_L; \mathbf{n}_{K,i}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = -\mathcal{F}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_K; \mathbf{n}_{L,i}) \cdot \mathbf{n}_{L,i}.$$

Il est bien sûr possible d'utiliser la même technique pour obtenir des flux HLL et HLLC en 2D. On obtient alors le schéma suivant pour tout solveur de Riemann approché à deux points  $\mathcal{F}_{KL}$  :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}. \quad (1.29)$$

En vue de montrer la stabilité du schéma (1.29), on prouve le théorème qui suit. La technique utilisée dans la preuve sera réutilisée par la suite dans le cadre de la construction des nouveaux schémas.

**Théorème 1.1.** *Le schéma décrit dans (1.29) pour un système hyperbolique (1.2) est stable et préserve l'ensemble des états admissibles sous la condition CFL suivante :*

$$\max_{K \in \mathcal{M}} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x_K} \max_{L \in \mathcal{E}_K} (|b_{KL}^-|, |b_{KL}^+|) \right) \leq 1, \quad (1.30)$$

où  $b_{KL}^-$  et  $b_{KL}^+$  encadrent les vitesses d'ondes du flux  $\mathcal{F}_{KL}$  entre les états  $\mathbf{U}_K$  et  $\mathbf{U}_L$  sur l'interface  $i$  séparant les cellules  $K$  et  $L$ .

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de réécrire le schéma 2D comme une combinaison convexe de schémas 1D, le schéma 2D possédant alors les propriétés de ces schémas 1D [PS96 ; BMST16].

Pour pouvoir réécrire (1.29) comme une combinaison convexe de schéma 1D de la forme (1.23), il faut faire intervenir le terme qui jouera le rôle de  $\mathcal{F}_{i-1/2}$ . Pour cela, on utilise la formule de la divergence qui nous donne pour toutes cellules polygonales  $K$  :

$$\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathbf{n}_{K,i} = 0.$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$\frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathbf{F}(\mathbf{U}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = 0.$$

Comme le flux numérique est consistant, on a :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathcal{F}(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_K; \mathbf{n}_{K,i}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathcal{F}_{KK} \cdot \mathbf{n}_{K,i}.$$

Puis, en ajoutant l'égalité précédente au schéma (1.29), on obtient :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| [\mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \mathcal{F}_{KK} \cdot \mathbf{n}_{K,i}].$$

Ensuite, on introduit le paramètre  $\omega_{K,i} = \frac{|e_i|}{p_K}$  de façon à créer la combinaison convexe. On a bien  $\omega_{K,i} > 0$  et  $\sum_{i \in \mathcal{E}_K} \omega_{K,i} = 1$ , le schéma peut alors s'écrire comme :

$$\sum_{i \in \mathcal{E}_K} \omega_{K,i} \mathbf{U}_K^{n+1} = \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \omega_{K,i} \left[ \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_K} (\mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \mathcal{F}_{KK} \cdot \mathbf{n}_{K,i}) \right]. \quad (1.31)$$

Cette dernière formulation est une combinaison convexe de schémas 1D dans la direction de la normale entre avec les états  $\mathbf{U}_K$  sur les cellules à gauche et au centre et  $\mathbf{U}_L$  sur la cellule de droite comme on peut le voir sur la Figure 1.4. Le second état  $\mathbf{U}_K$  est rajouté artificiellement pour la preuve mais il n'est pas utilisé en pratique.



FIGURE 1.4 – Représentation des états 1D et 2D

Ce schéma est alors stable et préserve l'ensemble des états admissibles sous la condition CFL liée à celle des schémas 1D :

$$\max_{K \in \mathcal{M}} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x_K} \max_{L \in \mathcal{E}_K} (|b_{KL}^-|, |b_{KL}^+|) \right) \leq 1. \quad (1.30)$$

Cette condition est majorée par 1 car l'état  $\mathbf{U}_K$  intervient deux fois à gauche.

De plus, toutes les propriétés relevant de la convexité sont également directement héritées du solveur 1D  $\mathcal{F}$ . Par exemple, le schéma est entropique si le flux  $\mathcal{F}$  est le flux d'un schéma 1D entropique.  $\square$

### 1.3.3 Schémas volumes finis pour les équations paraboliques

Après avoir présenté des schémas volumes finis classiques pour les problèmes hyperboliques et leurs propriétés, on introduit maintenant des schémas volumes finis pour les équations de diffusion du type (1.4). Ces schémas seront utiles par la suite car ils permettront de construire des solutions de référence afin de comparer les résultats obtenus par le schéma pour le système avec terme source (1.1) dans le régime de diffusion ( $\gamma t \rightarrow \infty$ ). De plus, on verra que l'on souhaite que le schéma pour le système avec terme source dégénère vers l'un de ces schémas.

#### Schémas volumes finis pour les équations paraboliques 1D

Tout d'abord, un schéma classique en 1D pour l'équation de diffusion (1.4) peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}), \quad (1.32)$$



où  $\mathcal{F}_{i+1/2}$  approche le gradient de la solution sur l'interface  $i+1/2$ . On peut par exemple utiliser le flux numérique à deux points :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = D(u)_{i+1/2} \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{\Delta x}. \quad (1.33)$$

Le schéma (1.32) avec le flux à deux points (1.33) est stable et possède le principe du maximum discret (Définition 1.2) sous la condition CFL suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \max_i (D_f(u)_{i+1/2}) \leq \frac{1}{2}.$$

### Schémas volumes finis pour les équations paraboliques 2D

Ensuite, une extension possible de ce schéma en 2D est la suivante :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}, \quad (1.34)$$

et dans ce cas  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  approche le gradient normal à travers l'interface  $i$  dans la direction sortante à  $K$ . Si l'on choisit aussi le flux à deux points comme en 1D :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = D(u)_i \frac{f(u_L) - f(u_K)}{\|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K\|}, \quad (1.35)$$

il est connu que le schéma créé (nommé FV4) n'est consistant avec l'équation de diffusion (1.4) que sur des maillages admissibles (Définition 1.1) [EGH00; EGGHM14]. Ceci est dû au fait que le flux numérique à deux points (1.35) approche le gradient de la solution selon la direction  $KL$  et non selon la normale comme souhaité. Dans le cas d'un maillage admissible cela n'a pas d'importance car les deux directions sont identiques mais pour des maillages très non structurés ces deux directions sont différentes.

En plus de vouloir des schémas qui soient consistants sur tout maillage, on souhaite qu'ils préservent le principe du maximum discret pour pouvoir préserver l'ensemble des états admissibles pour la diffusion  $\mathcal{A}_D$ .

**Définition 1.2.** *Un schéma numérique conserve le principe du maximum discret s'il vérifie la propriété suivante :*

$$\min_{L \in \mathcal{E}_K} (u_L^n) \leq u_K^{n+1} \leq \max_{L \in \mathcal{E}_K} (u_L^n).$$

Afin de prouver facilement que les schémas pour la diffusion possèdent ce principe du maximum discret, on va choisir des schémas possédant la structure LMP.

**Définition 1.3.** *Un schéma pour discrétiser les équations de diffusion (1.4) possède la structure LMP (Local Maximum Principle [DLP11; CCLP13]) s'il peut s'écrire sous la*

forme suivante, avec  $\tau_K^J \geq 0$  et  $\tau_K^J > 0$  dans un voisinage de  $K$  :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{J \in \mathcal{M}} \tau_K^J(u) (f(u_J) - f(u_K)).$$

Cela permettra d'utiliser le théorème qui suit. Les schémas pour les équations de diffusion sont le plus souvent utilisés avec un schéma implicite en temps mais on travaille ici uniquement avec des schémas explicites, il est donc aussi intéressant de connaître leur condition CFL.

**Théorème 1.2.** *Un schéma pour l'équation de diffusion limite possédant la structure LMP est stable et possède le principe du maximum discret sous la condition CFL suivante :*

$$\max_{K \in \mathcal{M}} \left( \frac{\Delta t}{\delta_K^2} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (1.36)$$

avec  $\delta_K$  (1.37) tenant compte à la fois du paramètre de la diffusion et d'une longueur caractéristique.

*Démonstration.* Tout comme pour le Théorème 1.1 en hyperbolique, l'idée est de réécrire le schéma (1.34) comme une combinaison convexe de schéma 1D du type (1.32).

En reprenant les notations de la Définition 1.3, un schéma pour l'équation de diffusion (1.5) avec la structure LMP peut s'écrire comme :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{J \in \mathcal{M}} \tau_K^J(u) (u_J - u_K),$$

avec  $\tau_K^J \geq 0$ . On introduit  $\omega_{KJ} := \frac{\tau_K^J}{\sum_{J \in \mathcal{M}} \tau_K^J}$  comme paramètre de la combinaison convexe et le coefficient  $\delta_K > 0$  :

$$\delta_K := \sqrt{\frac{|K|}{\sum_{J \in \mathcal{M}} \tau_K^J}}, \quad (1.37)$$

ce qui permet de réécrire le schéma de la manière suivante :

$$\sum_{J \in \mathcal{M}} \omega_{KJ} u_K^{n+1} = \sum_{J \in \mathcal{M}} \omega_{KJ} \left[ u_K^n + \frac{\Delta t}{\delta_K} \left( \frac{u_J - u_K}{\delta_K} \right) \right].$$

Il reste à faire apparaître le terme permettant de représenter le flux  $\mathcal{F}_{i-1/2}$  :

$$\sum_{J \in \mathcal{M}} \omega_{KJ} u_K^{n+1} = \sum_{J \in \mathcal{M}} \omega_{KJ} \left[ u_K^n + \frac{\Delta t}{\delta_K} \left( \frac{u_J - u_K}{\delta_K} - \frac{u_K - u_K}{\delta_K} \right) \right].$$

Cette dernière formulation est bien une combinaison convexe de schéma 1D pour l'équation de la chaleur. Le schéma est alors stable et respecte le principe du maximum discret

sous la condition CFL issue des schémas 1D :

$$\max_{K \in \mathcal{M}} \left( \frac{\Delta t}{\delta_K^2} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (1.36)$$

□

Afin d'avoir des schémas consistants sur tout maillage, il existe dans la littérature plusieurs flux numériques permettant d'approcher le gradient dans la direction normale. On peut par exemple citer le schéma diamant [CVV99], mais celui-ci ne préserve le principe du maximum discret (et donc l'ensemble des états admissibles) que sous une condition géométrique sur le maillage [BMST16] permettant d'obtenir la positivité des coefficients  $\tau_K^J$  de la structure LMP.

Avec les différentes corrections développées par LE POTIER et ses coauteurs dans [LP09; LP10; LP14; CCLP13] il est possible de récupérer cette propriété pour un schéma qui est déjà consistant.

Le schéma de DRONIOU et LE POTIER [DLP11] (que l'on abrégera par la suite en DLP) est un schéma non linéaire qui est consistant sur tout maillage et qui possède le principe du maximum discret car il possède la structure LMP. Il a été choisi d'utiliser ce schéma par la suite car il reste au plus proche du formalisme volumes finis dans sa construction. On en fera une présentation détaillée dans la partie 3.2.1 car la construction du schéma pour le système de lois de conservation avec terme source (1.1) en 2D est basée sur le même formalisme.

Il aurait aussi été possible d'utiliser d'autres techniques, telles que les schémas DDFV 2D présentés dans [Her00; DO05], ou SUSHI [EGH10] ou encore des schémas de type MPFA (*Multi-Point Flux Approximation*) [BM07] pour l'équation limite mais l'on verra que le schéma de DRONIOU et LE POTIER est bien adapté à notre problématique.

### 1.3.4 Schémas volumes finis d'ordre élevé

Les schémas volumes finis hyperboliques présentés précédemment sont tous d'ordre un et sont donc peu précis sur des maillages grossiers mais de nombreux travaux ont permis de grandement améliorer ce point. On présente quelques méthodes permettant de construire des schémas volumes finis hyperboliques d'ordre élevé, que l'on mettra en place par la suite.

#### Ordre en espace

L'idée naturelle pour obtenir des schémas d'ordre élevé en espace est de remplacer la valeur moyenne  $\mathbf{U}_K$  que l'on considère au centre de la maille, par une reconstruction polynomiale de la solution  $\widetilde{\mathbf{U}}_K(\mathbf{x})$  dans le but de pouvoir l'évaluer en différents points

de la cellule. On cherche bien sûr à garder une notion de consistance de telle sorte que  $\widetilde{\mathbf{U}}_K(\mathbf{x}_K) = \mathbf{U}_K$ , afin de retrouver les schémas classiques d'ordre un.

La première reconstruction linéaire, en utilisant une approximation du gradient, a permis de construire le schéma MUSCL (*Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws*) [vLe79]. C'est un schéma d'ordre deux qui nécessite de choisir un limiteur parmi le panel existant afin de pouvoir conserver des solutions convenables. Son extension à des maillages 2D non structuré est possible [PQ94; GR96; Ber06], mais comme en 1D il est toujours nécessaire de choisir des limiteurs à intégrer à la reconstruction.

Afin d'obtenir des schémas d'ordre plus élevé, il est possible d'utiliser les méthodes ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) [HEOC87; Abg94] ou WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) [LOC94; JS96; Shu98] qui construisent des reconstructions polynomiales de la solution en utilisant des polynômes de degrés arbitraires. Pour la méthode ENO, on choisit le polynôme le moins oscillant pour conserver les propriétés que l'on souhaite, et pour WENO on effectue une combinaison de ces polynômes. Tout comme la méthode MUSCL ces deux méthodes nécessitent l'utilisation de techniques de limitation *a priori*, qu'il est parfois difficile de choisir.

Une autre approche est possible avec la méthode MOOD (*Multi-dimensional Optimal Order Detection*) initialement développée dans [Dio12; CDL11]. Cette méthode utilise aussi une reconstruction polynomiale de la solution avec des polynômes de degré aussi élevé que l'on souhaite. Le nouveau point clef est la limitation *a posteriori* du degré des polynômes. Ainsi le degré des polynômes est localement diminué si la solution candidate calculée ne vérifie pas certains critères. Cette notion d'*a posteriori* permet de conserver un degré élevé et une expression simple de la reconstruction car aucun limiteur n'y intervient.

Depuis son introduction, elle a été étendue par ses auteurs dans [DCL12; DLC13]. De nouveaux critères pour le choix de la solution ont été développés : un critère entropique dans [Des13; BD14] et un second critère de détection des oscillations dans [CF14]. Il existe une version pour les équations de diffusion [CMNP13] et elle est aussi utilisée dans le cadre de la méthode ADER (*Arbitrary accuracy DERivates Riemann problem*) [TT02] dans [LDD14; BLD15]. Ces différentes extensions montrent bien la flexibilité de la limitation *a posteriori*. On notera qu'il est possible de rapprocher la méthode MOOD de la méthode APITALI (*A Posteriori Iterative Limiter*) développée dans [HL14].

On présente maintenant les éléments clefs de la méthode MOOD que l'on réutilisera par la suite. La reconstruction polynomiale de degré  $d$  de la solution sur la cellule  $K$  est obtenue de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathbf{U}}_K(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_K + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq d} \mathcal{R}_K^\alpha \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K)^\alpha - \frac{1}{|K|} \int_K (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K)^\alpha d\mathbf{x} \right), \quad (1.38)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est un multi-indice avec  $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ . On rappelle que  $n$  est la dimension de l'espace et que l'on considérera uniquement  $n = 1$  ou  $2$  dans cette thèse. Les coefficients  $\mathcal{R}_i^\alpha$  de cette reconstruction sont obtenus par une interpolation au sens des moindres carrés afin que la reconstruction polynomiale approche au mieux la valeur moyenne de la solution dans un voisinage de la cellule  $K$ . On pourra se référer à [Dio12] pour plus de détails sur ces calculs. L'expression (1.38) est écrite dans un formalisme multidimensionnel et l'expression 1D s'en déduit facilement :

$$\widetilde{\mathbf{U}}_i(x) = \mathbf{U}_i + \sum_{\alpha=1}^d \mathcal{R}_i^\alpha \left( (x - x_i)^\alpha - \frac{1}{\Delta x} \int_i (x - x_i)^\alpha dx \right). \quad (1.39)$$

Il est possible de simplifier encore cette expression en calculant explicitement l'intégrale, mais on la conserve sous cette formulation afin de ne pas perdre de généralité.

Avec cette reconstruction polynomiale, il est possible de construire la version d'ordre élevé en espace du schéma utilisant le flux à deux points (1.29) pour les systèmes homogènes (1.2) :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{r=1}^{R_i} \xi_{ir} \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{U}}_{K,ir}^n, \widetilde{\mathbf{U}}_{L,ir}^n; \mathbf{n}_{K,i}), \quad (1.40)$$

où  $R_i$  est le nombre de points de quadrature utilisé sur l'interface  $i$  et  $\xi_{ir}$  est le poids associé à chaque point de quadrature  $r$  sur l'interface  $i$ . Dans ce schéma, on a noté  $\widetilde{\mathbf{U}}_{K,ir}^n := \widetilde{\mathbf{U}}_K^n(\mathbf{x}_{ir})$  qui est l'évaluation de la reconstruction polynomiale (1.38) au point de quadrature  $\mathbf{x}_{ir}$ .

Cette expression se simplifie quand on utilise le schéma classique en 1D (1.23) car il n'y a qu'un seul point de quadrature sur les interfaces. Avec la reconstruction polynomiale (1.39), le schéma classique d'ordre élevé en 1D est alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left[ \mathcal{F}_{i+1/2} \left( \widetilde{\mathbf{U}}_i^n(x_{i+1/2}), \widetilde{\mathbf{U}}_{i+1}^n(x_{i+1/2}) \right) \right. \\ & \left. - \mathcal{F}_{i-1/2} \left( \widetilde{\mathbf{U}}_{i-1}^n(x_{i-1/2}), \widetilde{\mathbf{U}}_i^n(x_{i-1/2}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

L'autre élément important de la méthode MOOD est son caractère *a posteriori*. Comme expliqué précédemment et détaillé dans la Figure 1.5, on va calculer une solution candidate  $\mathbf{U}^*$  à l'aide de la reconstruction polynomiale (1.38) sans limitation (avec les polynômes de degré le plus élevé que l'on choisit). Puis, on teste si cette solution candidate est valide au sens des critères que l'on se fixe. Les critères les plus classiques sont les suivants [DCL12] :

— respect de l'ensemble des états admissibles : PAD (*Physical Admissible Detector*),

- non-oscillation de la solution via des critères tel que le DMP (*Discrete Maximum Principle*) ou le critère ED (*Extrema Detector*) [CF14], tous deux couplés avec le critère  $u_2$  afin de détecter des extrema admissibles,
- ou encore un critère entropique introduit dans [Des13; BD14].

Ensuite, si la solution ne vérifie pas les critères, on diminue localement le degré de la reconstruction polynomiale. Bien sûr, il faut que le dernier schéma, le schéma “parachute”, utilisé dans la boucle des re-calculs, vérifie les critères que l’on se choisit afin de ne pas avoir de boucle infinie. Dans la plupart des cas, ce schéma “parachute” est le schéma d’ordre un classique.

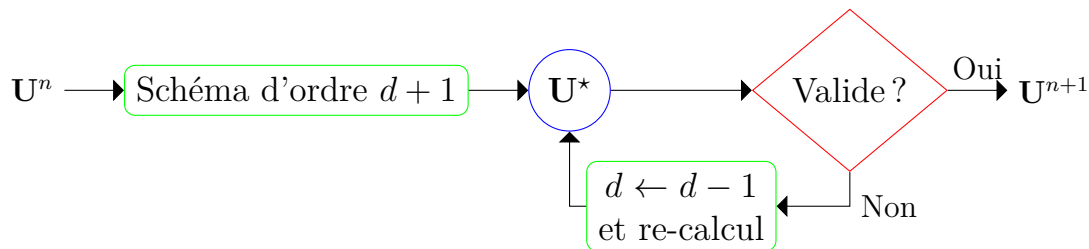


FIGURE 1.5 – Principe de la limitation *a posteriori*

Pour la suite, la méthode MOOD sera utilisée quand on souhaitera construire des schémas d’ordre élevé et l’on notera, par exemple, S- $\mathbb{P}_1$ -PAD un schéma S utilisant une reconstruction polynomiale de degré 1 avec le critère d’admissibilité physique. Ce schéma sera d’ordre 2 en espace si la solution est assez régulière.

### Ordre en temps

La méthode MOOD décrite dans la partie précédente permet d’obtenir un schéma d’ordre élevé en espace. Afin d’avoir un schéma globalement d’ordre élevé, il faut avoir le même ordre en temps et en espace. On décrit maintenant les différents schémas d’ordre élevé en temps que l’on utilisera.

Avant tout, on souligne le fait que tous les schémas en temps que l’on utilisera seront explicites, car il n’est pas possible d’obtenir un schéma implicite d’ordre deux inconditionnellement stable d’après la barrière de DAHLQUIST [Dah56]. Or, le point clef des schémas implicites est l’aspect inconditionnellement stable car même s’ils ont un coût plus élevé par itérations, du fait de la nécessité de résoudre une équation non linéaire, ils utilisent en général moins d’itérations car on peut choisir des pas de temps plus grands.

Afin de pouvoir facilement étendre les schémas écrits avec un schéma d’Euler explicite, par exemple les schémas (1.40) et (1.41), à des schémas d’ordre élevé il faut que les schémas en temps possèdent la propriété SSP (*Strong Stability Preserving*) introduite dans [GST01]. Ceci afin de pouvoir réutiliser la condition CFL du schéma d’Euler explicite [KR05].

On trouve dans la littérature différentes références pour obtenir des schémas de Runge-Kutta TVD (*Total Variation Diminishing*) [Shu88; SO88; GS98] puis des schémas SSP [SR02; SR03; RS04; Got05; Ruu06]. Pour les tests numériques, on utilisera les schémas suivants : Euler explicite (identique au SSPRK(1, 1)), SSPRK(2, 2), SSPRK(3, 3) et SSPRK(5, 4), où SSPRK( $s, p$ ) désigne un schéma de Runge-Kutta d'ordre  $p$  avec  $s$  étages et possédant la propriété SSP.

Un autre intérêt des schémas possédant la propriété SSP qui a été étudiée dans les publications citées précédemment est qu'il est possible en utilisant plus d'étages que l'ordre théorique ( $s > p$ ) d'obtenir des schémas pouvant fonctionner avec un pas de temps plus grand que celui d'Euler explicite. Ainsi, si l'on note  $\Delta t_{FE}$  le pas de temps lié à Euler explicite et  $\Delta t_{SSP}$  le pas de temps d'un schéma SSP, il est alors possible d'écrire :

$$\Delta t_{SSP} \leq C \Delta t_{FE}.$$

Cette constante  $C$  est égale à 1 pour les schémas SSPRK(1, 1), SSPRK(2, 2) et SSPRK(3, 3), mais elle vaut environ 1,51 pour le schéma SSPRK(5, 4) et 3 pour le schéma SSPRK(4, 2). Un schéma SSPRK( $s, p$ ) est alors d'autant « meilleur » que la constante  $r$  définie par :

$$r = \frac{\Delta t_{SSP}}{s \Delta t_{FE}} \leq \frac{C}{s},$$

est grande, pour un ordre  $p$  fixé. Par exemple, elle vaut 1/2 pour SSPRK(2, 2) mais 3/4 pour SSPRK(4, 2). On remarque que  $r \rightarrow \infty$  pour un schéma d'Euler implicite car il est inconditionnellement stable. Il a été montré dans [Len91; HRS03; Got05] que  $r \leq 1$  pour des schémas explicites et que  $r \leq 2$  pour des schémas implicites d'ordre supérieur à 2. On retrouve ici le fait qu'un schéma d'ordre deux implicite ne peut pas être inconditionnellement stable et qu'il n'y a pas d'intérêt à les utiliser pour faire de l'ordre élevé.

Dans la suite du manuscrit tous les schémas seront écrit avec un schéma d'Euler explicite et l'extension à l'ordre élevé avec les schémas SSPRK sera immédiate en écrivant le schéma en espace à chaque étage du schéma en temps. Par exemple, si le schéma d'ordre un en temps s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \Phi(\mathbf{U}^n, t^n),$$

alors, le schéma d'ordre deux en temps associé s'écrira de la manière suivante avec le schéma SSPRK(2, 2) :

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \Phi(\mathbf{U}^n, t^n) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{(1)} + \Delta t \Phi(\mathbf{U}^{(1)}, t^n + \Delta t) \right) \end{cases}$$

et il sera stable sous la même condition CFL car la constante  $C$  est égale à un pour le schéma SSPRK(2, 2).

On souligne le fait que tous les tests numériques seront effectués avec le schéma en temps qui permettra d'avoir le même ordre en espace et en temps. Ainsi, pour toute la suite, on ne précisera pas le schéma utilisé en temps car il se déduira de l'ordre du schéma en espace : si on utilise le schéma S- $\mathbb{P}_1$  en espace alors on utilisera le schéma SSPRK(2, 2) pour la discrétisation temporelle.

## 1.4 Schémas *asymptotic preserving*

À la suite de cette présentation générale des schémas volumes finis pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation et des équations de diffusion et après avoir décrit la notion d'ordre élevé en espace et temps, on s'intéresse maintenant à la notion principale de cette thèse : la préservation de l'asymptotique (*asymptotic preserving* en anglais que l'on abrégera par la suite en AP).

Afin de fournir des solutions précises dans tous les régimes, les schémas numériques que l'on construit doivent posséder deux propriétés principales (en plus des propriétés classiques de stabilité, de consistance et de conservativité) :

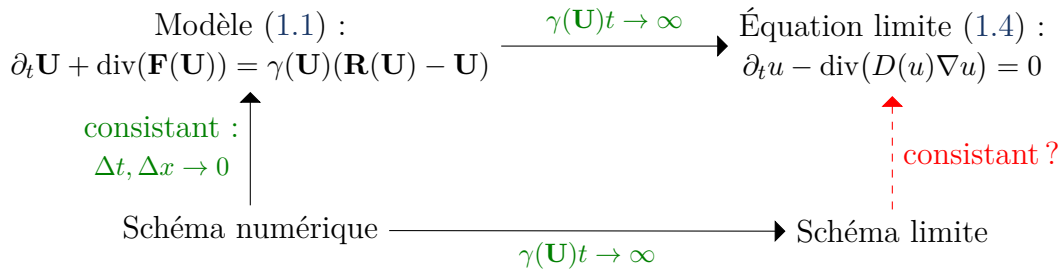
- (P1) conserver l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  : par exemple, au cours des calculs on ne veut pas qu'il apparaisse des densités ou des températures négatives,
- (P2) avoir un schéma uniformément précis : on souhaite que le schéma soit capable de rendre compte du comportement de la solution pour toutes les échelles de  $\gamma t$ , du régime de transport quand  $\gamma t$  est proche de zéro à la limite de diffusion quand  $\gamma t \rightarrow \infty$ . De plus, on demandera que les contraintes liées au schéma (la condition CFL par exemple) soient uniformément bornées indépendamment du produit  $\gamma t$ .

La première propriété (P1) est parfois appelée « robustesse » du schéma et, elle est indispensable pour pouvoir fournir des solutions qui sont physiquement et mathématiquement valides pour toutes les itérations du calcul.

La seconde (P2), rend compte de la notion de préservation de l'asymptotique (AP) du schéma au sens de JIN [Jin99]. Ainsi, comme le présente la Figure 1.6, le schéma que l'on construit pour discrétiser le système de lois de conservation avec terme source (1.1) possède une limite quand  $\gamma t \rightarrow \infty$  et il faut que ce schéma limite soit consistant avec l'équation limite (1.4) afin de correctement approcher le problème dans tous les régimes.

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible d'invertir les limites  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$  et  $\gamma t \rightarrow \infty$  intervenant dans la Figure 1.6, ce qui implique qu'il est peu probable qu'un schéma construit naïvement soit AP.



FIGURE 1.6 – But d’un schéma *asymptotic preserving*

### 1.4.1 État de l’art 1D

La notion d’AP au sens de JIN est beaucoup utilisée dans un cadre cinétique, on pourra par exemple se référer aux publications suivantes [JL96 ; Kla99 ; LM08 ; FJ10 ; DP12 ; BPR13 ; LS12 ; LLS16] et aux références incluses dans celles-ci.

Faisant le lien entre le cadre cinétique et la dégénérescence hyperbolique vers parabolique dans lequel on se place, les premiers travaux pour obtenir des schémas AP en 1D sont dûs à GOSSE et TOSCANI [GT02] sur les équations du Télégraphe (1.14), où un contrôle de la diffusion numérique est mis en place afin d’obtenir la limite parabolique. Plus de détails sur ces travaux pourront aussi être trouvés dans le livre de GOSSE [Gos13].

Ensuite, différentes techniques ont été utilisées pour obtenir la préservation de l’asymptotique pour le modèle  $M_1$  (1.17) dans [BD06 ; BC07 ; BCD07]. Des applications ont aussi été effectuées pour le modèle d’Euler gaz parfaits avec gravité [CCGRS10 ; CG11 ; BCT13 ; CGK13]. En reprenant les idées de la reconstruction hydrostatique de [ABBKP04], il a été possible de construire un schéma AP dans [BOP07].

À l’aide d’un schéma aux différences finies utilisant la connaissance des vitesses de convergence en continu vers l’équilibre (1.9)-(1.10), les auteurs de [ABN08a ; ABN08b ; ABN16] construisent un schéma possédant les bonnes vitesses de convergence.

Finalement, BERTHON et TURPAULT dans [BT11] ont généralisé la technique de GOSSE et TOSCANI afin de construire un schéma basé sur le flux HLL et qui soit AP pour tous les systèmes de lois de conservation 1D de la forme (1.1) et qui respectent les conditions de compatibilités de [BLT13] énoncées précédemment (1.6)-(1.8). Ce schéma, que l’on notera HLL-AP, sera présenté dans le chapitre suivant.

### 1.4.2 État de l’art 2D

Dans un cadre 2D, les exemples sont moins nombreux. D’un côté, si l’on utilise des maillages cartésiens ou admissibles (Définition 1.1), il est possible de réutiliser les schémas 1D que l’on a présenté juste avant. Cependant, dans le cas d’un maillage 2D non structuré quelconque, la construction est plus complexe car la limite fait en général in-

tervenir le flux à deux points (1.35) qui n'est plus consistant sur maillage général comme on l'a vu dans les parties précédentes, on pourra aussi se référer à [Sar13; BMST16].

Afin de construire un schéma qui va dégénérer vers un schéma consistant pour l'équation limite (1.4), on procède de manière inverse : on choisit un schéma qui discrétise bien l'équation limite et on construit un schéma pour le système de lois de conservation avec terme source (1.1) qui dégénère vers le schéma choisi.

Ainsi, un schéma MPFA a été développé dans [Fra12; BDF12a; BDF12b; BDF15; BDFL16] afin de tendre vers le schéma de BREIL et MAIRE [BM07]. Dans sa première version, ce schéma est implicite et ne s'applique que pour des systèmes linéaires tel que le modèle  $P_1$  (1.16). Il a ensuite été adapté pour d'autres systèmes, mais la préservation de l'ensemble des états admissibles et la stabilité ne sont assurées qu'avec un schéma implicite en temps.

En reprenant la technique de BERTHON et TURPAULT, un schéma AP a été construit pour les équations de St-Venant avec friction de Manning [DMTB15], mais la preuve de la préservation de l'ensemble des états admissibles n'est que numérique. Toujours avec la technique de [BT11], un schéma dégénérant vers le schéma diamant [CVV99] a été construit dans [BMT14; BMST16]. Ce schéma possède bien la propriété AP (P2) mais ne conserve pas l'ensemble des états admissibles (P1) sur tous les maillages et dans tous les régimes car le schéma diamant ne le permet pas.

Le but de cette thèse est alors de construire un schéma volumes finis explicite d'ordre élevé possédant la propriété de conservation de l'ensemble des états admissibles (P1) et d'AP (P2) pour tout maillage 2D non structuré.



A decorative graphic consisting of three horizontal bars of a light green color. A large, bold, red number '2' is positioned to the right of the bars, partially overlapping them.

---

## Schéma AP 1D d'ordre élevé

### Introduction

Dans ce chapitre on se concentre sur la discrétisation du système de lois de conservation avec terme source (1.1) dans un cadre 1D. Celle-ci doit permettre de conserver à la fois l'ensemble des états admissibles (P1) et l'asymptotique (P2). Une grande partie des techniques que l'on présente ici en 1D sera réutilisée dans les Chapitres 3 et 4 avec des maillages 2D non structurés.

Ainsi, on rappelle premièrement le schéma volumes finis HLL-AP d'ordre un et ses propriétés développés par BERTHON et TURPAULT dans [BT11]. On présente aussi une nouvelle méthode pour obtenir la correction asymptotique nécessaire à ce schéma. Dans un second temps, dans la partie 2.2, on l'étend à l'ordre élevé avec la méthode MOOD [CDL11] afin d'avoir une meilleure représentation des discontinuités et d'accroître sa précision à maillage fixé. Cette première étude 1D va servir à voir les différentes difficultés qui apparaissent lorsque l'on souhaite conserver l'asymptotique à tout ordre. Le cadre 1D permettant de s'affranchir des contraintes liées aux maillages non structurés du 2D telles que la non-consistance du schéma à deux points pour la diffusion à la limite. Ensuite, des solutions de référence continues et discontinues sont construites pour les équations du Télégraphe (1.14) afin d'avoir des points de comparaison avec les schémas utilisés. Dans le cas discontinu, on prend comme initialisation un problème de Riemann et on verra comment la structure de celui-ci est modifiée par la présence du terme source. En outre, on présentera deux méthodes pour obtenir ces solutions de référence discontinues. Finalement, la partie 2.4 s'attache à présenter les résultats obtenus par le schéma HLL-AP d'ordre un et par son extension à l'ordre élevé face aux solutions

de référence construites précédemment. On pourra observer l'impact de la reconstruction polynomiale lorsque l'on est proche du régime de transport et le fait que le schéma préserve toujours l'asymptotique.

## 2.1 Schéma AP d'ordre un

### 2.1.1 Présentation du schéma HLL-AP

Comme annoncé, on débute par la présentation du schéma HLL-AP. Ce schéma volumes finis explicite d'ordre un est consistant avec (1.1), préserve l'ensemble des états admissibles (P1) et est AP (P2). Il s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha_{i+1/2} \mathcal{F}_{i+1/2} - \alpha_{i-1/2} \mathcal{F}_{i-1/2} \right) + \Delta t \mathbf{S}_i^n, \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{F}_{i-1/2}$  est un solveur de Riemann approché à deux points, par exemple le flux numérique HLL (1.25). Ce schéma est construit en faisant intervenir le terme source au sein de l'état intermédiaire du problème de Riemann via les coefficients  $\alpha_{i+1/2}$ .

Afin que le schéma dérive vers la bonne limite asymptotique, il est appliqué à un autre système construit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) &= \gamma(\mathbf{U})(\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}), \\ &= \gamma(\mathbf{U})(\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}) + (\bar{\gamma} - \gamma)\mathbf{U}, \\ \partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) &= (\gamma(\mathbf{U}) + \bar{\gamma})(\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ce système (1.3) est équivalent à (1.1) si  $\gamma + \bar{\gamma} > 0$  et avec la définition suivante :

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) := \frac{\gamma(\mathbf{U})\mathbf{R}(\mathbf{U}) + \bar{\gamma}\mathbf{U}}{\gamma(\mathbf{U}) + \bar{\gamma}}.$$

Ce paramètre  $\bar{\gamma}$  peut alors être considéré comme un degré de liberté à choisir pour atteindre la bonne limite de diffusion. On verra que plusieurs méthodes peuvent être mises en place pour calculer la bonne valeur de la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$ . On propose un exemple de calcul de correction asymptotique sur les équations du Télégraphe (1.14) et le modèle d'Euler isentropique avec friction (1.21) après la présentation du schéma dans la partie 2.1.2.

Les coefficients  $\alpha_{i+1/2}$  permettent de créer une combinaison convexe entre la discrétisation de la partie hyperbolique de (1.1) et celle du terme source  $\gamma(\mathbf{U})(\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U})$ .

Cette seconde partie de la discrétisation est effectuée avec les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_i^n &= \frac{1 - \alpha_{i-1/2}}{\Delta x} \mathbf{S}_{i-1/2}^+ + \frac{1 - \alpha_{i+1/2}}{\Delta x} \mathbf{S}_{i+1/2}^-, \\
\mathbf{S}_{i+1/2}^- &= \min(0, b_{i+1/2}^-) \left( \mathbf{U}_i^n - \bar{\mathbf{R}}(x_{i+1/2}^-, \mathbf{U}_i^n) \right) \\
&\quad + \min(0, b_{i+1/2}^+) \left( \bar{\mathbf{R}}(x_{i+1/2}^-, \mathbf{U}_i^n) - \mathbf{U}_{i+1}^n \right) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n), \\
\mathbf{S}_{i-1/2}^+ &= \max(0, b_{i-1/2}^-) \left( \mathbf{U}_{i-1}^n - \bar{\mathbf{R}}(x_{i-1/2}^+, \mathbf{U}_i^n) \right) \\
&\quad + \max(0, b_{i-1/2}^+) \left( \bar{\mathbf{R}}(x_{i-1/2}^+, \mathbf{U}_i^n) - \mathbf{U}_i^n \right) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

On rappelle que  $b_{i+1/2}^-$  et  $b_{i+1/2}^+$  encadrent les vitesses d'ondes sur l'interface  $i + 1/2$ . Ces coefficients  $\alpha_{i+1/2}$  doivent vérifier les propriétés suivantes afin que le schéma soit consistant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i+1/2} \in [0; 1] \\ \alpha_{i+1/2} = 1 + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{1 - \alpha_{i-1/2}}{\Delta x} \mathbf{S}_{i-1/2}^+ + \frac{1 - \alpha_{i+1/2}}{\Delta x} \mathbf{S}_{i+1/2}^- = \gamma(\mathbf{U}_i^n) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{U}_i^n) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{array} \right. . \tag{2.3}$$

La première propriété permet de définir correctement la combinaison convexe et les deux suivantes décrivent des conditions de consistance pour la discrétisation de la partie hyperbolique et du terme source. Un choix possible associé au flux HLL (1.25) vérifiant les propriétés (2.3) est le suivant :

$$\alpha_{i+1/2} = \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^- + (\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}) \Delta x} \in [0; 1], \tag{2.4}$$

où  $\gamma_{i+1/2} = \gamma(\mathbf{U})_{i+1/2}$  et  $\bar{\gamma}$  est la correction asymptotique précédemment introduite dans le nouveau système (1.3).

Il est prouvé que le schéma HLL-AP (2.1) est stable sous la condition CFL hyperbolique classique suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_i \left( |b_{i+1/2}^-|, |b_{i+1/2}^+| \right) \leq \frac{1}{2}, \tag{1.26}$$

qui est identique à celle du schéma classique (1.23) avec le flux HLL pour le système homogène (1.2). Ceci est dû au fait que le terme source est introduit au centre du problème de Riemann et cela ne modifie donc pas la condition de non-interaction des solveurs de Riemann approchés.

On souligne aussi le fait que si  $\gamma = 0$  (et  $\bar{\gamma} = 0$ ), alors  $\alpha_{i+1/2} = 1$  et le schéma HLL-AP est identique au schéma (1.23) pour la discrétisation du système hyperbolique homogène (1.2).

### 2.1.2 Exemples de calcul de correction asymptotique

Afin d'expliciter la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$ , on propose deux méthodes pour la calculer. La première utilise un développement classique de Chapman-Enskog et la seconde les vitesses de convergence (1.9)-(1.10).

En ayant à l'esprit l'extension en 2D, il est important de noter que cette correction asymptotique permet uniquement de modifier le coefficient de diffusion et la variable associée mais n'est pas en mesure de modifier la direction de cette diffusion.

#### Calcul de la correction asymptotique avec un développement de Chapman-Enskog

On présente tout d'abord la méthode avec le développement de Chapman-Enskog. On rappelle que ce développement permet uniquement de trouver la limite du schéma sous certaines hypothèses restrictives :  $\gamma$  constant et même mise à l'échelle pour le terme contrôlant la raideur du terme source  $\gamma$  et le temps  $t$ . Ainsi, tout comme dans le cas des équations du Télégraphe dans la partie 1.2.3, on introduit les mises à l'échelle suivantes, avec  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{cases} \gamma & \leftarrow \frac{\gamma}{\varepsilon} \\ \Delta t & \leftarrow \frac{\Delta t}{\varepsilon} \end{cases} \quad (2.5)$$

Cela conduit aux développements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \alpha_{i+1/2} = \Delta t \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{(b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-)\varepsilon + (\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2})\Delta x} \\ \quad = \Delta t \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{(\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2})\Delta x} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \Delta t (1 - \alpha_{i+1/2}) = \Delta t \frac{(\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2})\Delta x}{(b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-)\varepsilon^2 + (\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2})\Delta x\varepsilon} \\ \quad = \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \Delta t \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{(\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2})\Delta x} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

En introduisant ces développements dans l'expression du schéma HLL-AP (2.1), on obtient en isolant les termes en  $1/\varepsilon$  :

$$0 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{S}_{i-1/2}^+(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{i+1/2}^-(\mathbf{U}) \right), \quad (2.7)$$

ce qui permet de dire que  $\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) - \mathbf{U} = 0$  et donc que  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U} = 0$ . Concernant les termes du même ordre que  $\varepsilon^0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n &- \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} \mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1}^n, \mathbf{U}_i^n) - \frac{b_{i-1/2}^+ - b_{i-1/2}^-}{\gamma_{i-1/2} + \bar{\gamma}_{i-1/2}} \mathcal{F}_{i-1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i-1}^n) \right) \Big|_{\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{U})=\mathbf{U}} \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} \mathbf{S}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1}^n, \mathbf{U}_i^n) + \frac{b_{i-1/2}^+ - b_{i-1/2}^-}{\gamma_{i-1/2} + \bar{\gamma}_{i-1/2}} \mathbf{S}_{i-1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i-1}^n) \right) \Big|_{\overline{\mathbf{R}}(\mathbf{U})=\mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ensuite, on se place sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M}$  puis on multiplie la dernière expression (2.8) par la matrice constante  $\mathbf{Q}$  en utilisant les propriétés (1.6) et (1.8). On rappelle que l'on se place uniquement dans le cas d'une limite de diffusion scalaire et on obtient le schéma limite suivant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{b_{i-1/2}^+ b_{i-1/2}^-}{\gamma_{i-1/2} + \bar{\gamma}_{i-1/2}} (u_i^n - u_{i-1}^n) \right). \quad (2.9)$$

Finalement la correction asymptotique  $\bar{\gamma}_{i+1/2}$  est choisie de telle sorte que le schéma (2.9) soit consistant avec l'équation de diffusion (1.4). Pour cela on fixe la correction pour obtenir le schéma à deux points (1.33) :

$$\frac{b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} (u_{i+1} - u_i) = D(u)_{i+1/2} (f(u_{i+1}) - f(u_i)) \quad (2.10)$$

Par exemple, si l'on se place dans le cadre du modèle d'Euler isentropique avec friction (1.21), l'expression (2.8) ou (2.9) se simplifie alors en :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{-b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) - \frac{-b_{i-1/2}^+ b_{i-1/2}^-}{\gamma_{i-1/2} + \bar{\gamma}_{i-1/2}} (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n) \right)$$

car  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U} = 0$  implique  $\rho u = 0$ . On retrouve le fait que l'on se place sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M}$ . En outre, on observe bien que ce schéma n'est pas consistant avec l'équation à limite que l'on souhaite (1.22) car le coefficient de diffusion n'est pas celui attendu. De plus, c'est la pression qui doit intervenir dans la deuxième partie du schéma. Par ailleurs, on remarque que si la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  est nulle, il est impossible d'atteindre la limite de diffusion décrite par (1.22).

Afin de tendre vers la limite adéquate, il faut donc choisir la bonne correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  vérifiant (2.10) telle que :

$$\frac{-b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) = \frac{p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n)}{\kappa_{i+1/2}^n}.$$



Par conséquent, un choix possible est :

$$\bar{\gamma}_{i+1/2} = \begin{cases} -b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^- \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n)} \kappa_{i+1/2}^n - \gamma_{i+1/2} \text{ si } p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n) \neq 0, \\ -b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^- \frac{1}{p'(\rho_i^n)} \kappa_{i+1/2}^n - \gamma_{i+1/2} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

On a bien la positivité de  $\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}$  car  $p'(\rho)$ ,  $\kappa$  et  $-b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-$  sont tous positifs. En utilisant cette correction asymptotique, le schéma limite est alors :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n)}{\kappa_{i+1/2}^n} - \frac{p(\rho_i^n) - p(\rho_{i-1}^n)}{\kappa_{i-1/2}^n} \right), \quad (2.12)$$

qui est bien consistant avec (1.22).

Pour les autres systèmes de lois de conservation avec terme source présentés dans la partie 1.2.3, le même type de calcul peut être fait pour exhiber la correction asymptotique associée en utilisant (2.10).

### Calcul de la correction asymptotique avec les vitesses de convergence

La seconde méthode que l'on présente nécessite la connaissance des vitesses de convergence (1.9)-(1.10) mais, contrairement à la méthode précédente, elle n'impose pas de mise à l'échelle comme fait dans (2.5).

Afin de simplifier les calculs, la présentation se fait avec les équations du Télégraphe (1.14) et, pour faciliter encore les calculs, on suppose que les vitesses des ondes du flux sont égales à la vitesse de transport des équations :  $b_{i+1/2}^+ = -b_{i+1/2}^- = a$ . De même qu'avec le développement de Chapman-Enskog, on suppose aussi que libre parcours moyen  $\sigma$  est constant. Le coefficient de  $\alpha_{i+1/2}$  de (2.4) est alors constant et s'exprime comme :

$$\alpha = \frac{2a}{2a + (\sigma + \bar{\sigma})\Delta x}, \quad (2.13)$$

avec  $\bar{\sigma}$  la correction asymptotique associée aux équations du Télégraphe. Avec ces simplifications, le schéma HLL-AP (2.1) appliqué aux équations du Télégraphe s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} - \frac{a}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right] + \Delta t \alpha \sigma (v_i^n - u_i^n) \\ v_i^{n+1} = v_i^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ -a \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2} - \frac{a}{2} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \right] + \Delta t \alpha \sigma (u_i^n - v_i^n) \end{cases}.$$

Dans le but d'utiliser les vitesses de convergence (1.9)-(1.10), on doit exprimer ce schéma avec les variables  $z = u + v$  et  $w = u - v$  présentes à la limite de diffusion :

$$\begin{cases} z_i^{n+1} = z_i^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ a \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2} - \frac{a}{2} (z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n) \right] \\ w_i^{n+1} = w_i^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ a \frac{z_{i+1}^n - z_{i-1}^n}{2} - \frac{a}{2} (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) \right] - 2\Delta t \alpha \sigma w_i^n \end{cases}.$$

Puis, on reformule cette expression afin de faire apparaître les approximations des dérivées temporelles et spatiales de  $z$  et  $w$  :

$$\begin{cases} \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta t} = -\alpha \left[ a \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a\Delta x}{2} \frac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] \\ \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} = -\alpha \left[ a \frac{z_{i+1}^n - z_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a\Delta x}{2} \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right] - 2\alpha\sigma w_i^n \end{cases}.$$

Par des développements de Taylor, on a :

$$\begin{cases} \partial_t z + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 z + \mathcal{O}(\Delta t^2) = -\alpha \left[ a \partial_x w + a \frac{\Delta x^2}{6} \partial_x^3 w - a \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 z - a \frac{\Delta x^3}{24} \partial_x^4 z + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right] \\ \partial_t w + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^2 w + \mathcal{O}(\Delta t^2) = -\alpha \left[ a \partial_x z + a \frac{\Delta x^2}{6} \partial_x^3 z - a \frac{\Delta x}{2} \partial_x^2 w - a \frac{\Delta x^3}{24} \partial_x^4 w + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right] \\ - 2\alpha\sigma w \end{cases}. \quad (2.14)$$

Ensuite, en reprenant les vitesses de convergence de [BHN07] (1.9) et (1.10) appliquées à  $z$  et  $w$ , on a pour  $p > 1$  :

$$\begin{cases} \|\partial_x^\beta z\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \sigma t)^{-\frac{1}{2}(1-1/p) - \beta/2} \\ \|\partial_x^\beta w\|_{L^p} = \mathcal{O}(1 + \sigma t)^{-\frac{1}{2}(1-1/p) - \beta/2 - 1/2} \end{cases}.$$

On choisit de travailler en norme infinie (les calculs dans les autres normes sont identiques), pour obtenir les estimées suivantes :

$$\|\partial_x^\beta z\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1 + \sigma t)^{-k} \quad \|\partial_x^\beta w\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1 + \sigma t)^{-k}$$

	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$k$	1/2	1	3/2	2	5/2

	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$k$	1	3/2	2	5/2	3

D'après la reformulation des équations du Télégraphe (1.14) en utilisant les variables  $z = u + v$  et  $w = u - v$ , on a :

$$\begin{cases} \partial_t z + a \partial_x w = 0 \\ \partial_t w + a \partial_x z = -2\sigma w \end{cases}.$$

Ce qui permet d'obtenir les taux de décroissance de  $\partial_t z$  et  $\partial_t^2 z$  à partir de ceux de  $\partial_x w$  et  $\partial_{tx} w$  :

$$\|\partial_t^\alpha z\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1 + \sigma t)^{-k} \quad \|\partial_t^\alpha w\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1 + \sigma t)^{-k}$$

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$k$	1/2	3/2	2

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$k$	1	3/2	—

Finalement, en identifiant les termes de même ordre dans (2.14), on a pour  $k = 1$  :

$$0 = a\partial_x z + 2\sigma w,$$

ensuite, pour les termes avec  $k = 3/2$  :

$$\partial_t z = -\alpha \left[ a\partial_x w - a\frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 z \right].$$

En combinant ces expressions, puis en réutilisant la définition de  $\alpha$  (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t z &= \alpha \left[ \frac{a^2}{2\sigma}\partial_x^2 z + a\frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 z \right] \\ &= \frac{2a}{2a + (\sigma + \bar{\sigma})\Delta x} \frac{a^2 + a\sigma\Delta x}{2\sigma} \partial_x^2 z \\ &= \frac{a^2}{2\sigma} \frac{2(a + \sigma\Delta x)}{2a + (\sigma + \bar{\sigma})\Delta x} \partial_x^2 z \end{aligned}$$

Il reste à fixer la correction asymptotique  $\bar{\sigma} := \sigma$  afin d'obtenir l'équation de diffusion (1.15).

Comme on peut le voir dans le déroulement des calculs, cette méthode est un peu plus complexe que le développement de Chapman-Enskog et nécessite la connaissance des vitesses de convergence pour toutes les variables mais il n'y a pas besoin de la mise à l'échelle avec le paramètre  $\varepsilon$  (2.5).

## 2.2 Montée en ordre du schéma HLL-AP

Le schéma HLL-AP (2.1), rappelé dans la partie 2.1.1, est un schéma volumes finis explicite d'ordre un stable préservant l'ensemble des états admissibles ((P1)) sous une condition CFL hyperbolique et qui est AP (P2). On va maintenant l'étendre à l'ordre élevé à l'aide de la méthode MOOD pour l'espace et des schémas en temps présentés dans la partie 1.3.4.

Cette extension à l'ordre élevé va permettre d'avoir une meilleure description des discontinuités et d'augmenter la précision à maillage fixé. De plus, pour atteindre une

précision donnée, il est plus intéressant du point de vue du coût de calcul d'utiliser un schéma d'ordre élevé qui va demander un maillage moins grossier.

On rappelle que l'on souhaite toujours avoir les deux propriétés détaillées dans la partie 1.4 : la préservation de l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  (P1) et l'AP (P2) quelque soit l'ordre du schéma.

### 2.2.1 Première méthode pour la montée en ordre

Afin de mener à bien cette construction, on procède tout d'abord de la même manière que pour construire le schéma d'ordre élevé (1.41) pour le système homogène (1.2). Pour cela, on reprend le schéma HLL-AP (2.1) et on remplace les valeurs moyennes  $\mathbf{U}_i$  par les reconstructions polynomiales  $\widetilde{\mathbf{U}}_i$  de (1.39) évaluées sur les interfaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = & \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \alpha_{i+1/2} \left( \widetilde{\mathbf{U}}^n(x_{i+1/2}) \right) \mathcal{F}_{i+1/2} \left( \widetilde{\mathbf{U}}_i^n(x_{i+1/2}), \widetilde{\mathbf{U}}_{i+1}^n(x_{i+1/2}) \right) \right. \\ & \left. - \alpha_{i-1/2} \left( \widetilde{\mathbf{U}}^n(x_{i-1/2}) \right) \mathcal{F}_{i-1/2} \left( \widetilde{\mathbf{U}}_{i-1}^n(x_{i-1/2}), \widetilde{\mathbf{U}}_i^n(x_{i-1/2}) \right) \right] \\ & + \Delta t \mathbf{S}_i^n(\widetilde{\mathbf{U}}^n), \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $\widetilde{\mathbf{U}}^n$  contient toutes les reconstructions polynomiales en les points de quadrature adéquats.

Pour vérifier que ce schéma est toujours consistant à la limite, on se propose comme dans la partie 2.1.2 de calculer sa limite avec un développement de Chapman-Enskog. Tous les calculs se reprennent en remplaçant les valeurs moyennes par les valeurs reconstruites, afin d'aboutir au schéma limite suivant pour le modèle d'Euler isentropique avec friction :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{p(\widetilde{\rho}_{i+1}^n(x_{i+1/2})) - p(\widetilde{\rho}_i^n(x_{i+1/2}))}{\kappa_{i+1/2}^n} - \frac{p(\widetilde{\rho}_i^n(x_{i-1/2})) - p(\widetilde{\rho}_{i-1}^n(x_{i-1/2}))}{\kappa_{i-1/2}^n} \right).$$

Ce schéma est en théorie consistant avec l'équation limite (1.22) mais, en pratique, il est connu [OA02; CMNP13] que pour des problèmes de diffusion, la reconstruction polynomiale doit être effectuée par interfaces et non par cellules comme c'est le cas ici pour de la convection.

Afin d'avoir un schéma consistant à la limite on pourrait aussi utiliser une reconstruction polynomiale par interfaces des variables intervenant dans l'équation de diffusion. Cette méthode nécessiterait d'avoir deux reconstructions polynomiales : l'une par cellules et l'autre par interfaces, ce qui est assez coûteux. De plus, la majorité des phénomènes intervenant dans la limite de diffusion sont continus et très lents par rapport à ceux intervenant dans le régime de transport.

Au vu de ces remarques, on modifie la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  afin de retrouver les valeurs moyennes  $\mathbf{U}_i$  et donc un schéma d'ordre un à la limite de diffusion :

$$\bar{\gamma}_{i+1/2} = \begin{cases} -b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^- \frac{\tilde{\rho}_{i+1}^n(x_{i+1/2}) - \tilde{\rho}_i^n(x_{i+1/2})}{p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n)} \kappa_{i+1/2}^n - \gamma_{i+1/2} & \text{si } p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n) \neq 0, \\ -b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^- \frac{1}{p'(\rho_i^n)} \kappa_{i+1/2}^n - \gamma_{i+1/2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Avec cette nouvelle correction asymptotique (2.16), on retrouve un schéma limite consistant (2.12). Cependant, le problème avec cette nouvelle correction asymptotique est qu'elle n'assure pas en permanence la positivité de  $\gamma + \bar{\gamma}$  car le terme  $\frac{\tilde{\rho}_{i+1}^n(x_{i+1/2}) - \tilde{\rho}_i^n(x_{i+1/2})}{p(\rho_{i+1}^n) - p(\rho_i^n)}$  n'est pas toujours positif. Cette non-positivité empêche que les coefficients  $\alpha_{i+1/2}$  appartiennent à l'intervalle  $[0; 1]$  comme demandé dans les propriétés (2.3). Ce dernier point ne permet plus de définir correctement la combinaison convexe entre la discrétisation de la partie hyperbolique et celle du terme source.

En outre, les coefficients  $\alpha_{i+1/2}$  définis avec (2.4) ne permettent pas d'obtenir un schéma uniformément d'ordre élevé. Ainsi, pour obtenir un schéma uniformément d'ordre deux, il faudrait qu'ils respectent les propriétés suivantes, issues de celles décrites dans (2.3) :

$$\begin{cases} \alpha_{i+1/2} = 1 + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \frac{1-\alpha_{i-1/2}}{\Delta x} \mathbf{S}_{i-1/2}^+ + \frac{1-\alpha_{i+1/2}}{\Delta x} \mathbf{S}_{i+1/2}^- = \gamma(\mathbf{U}_i^n)(\mathbf{R}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{U}_i^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{cases} \quad (2.17)$$

Ceci n'est pas possible avec la définition actuelle car on a :

$$\alpha_{i+1/2} = 1 - \frac{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

## 2.2.2 Seconde méthode pour la montée en ordre

Afin d'outrepasser les différentes limitations exposées dans la partie 2.2.1 et pour obtenir un schéma qui reste relativement simple dans sa formulation tout en étant d'ordre élevé proche du régime de transport et AP, on introduit une nouvelle combinaison convexe.

Cette combinaison convexe va permettre de conserver un ordre élevé dans le régime de transport en utilisant les reconstructions polynomiales  $\tilde{\mathbf{U}}_i$  (1.39) et d'obtenir les valeurs moyennes  $\mathbf{U}_i$  proche du régime de diffusion. De plus, cela va permettre de conserver la positivité de  $\gamma + \bar{\gamma}$  dans tous les régimes puisqu'il sera calculé uniquement avec les valeurs moyennes, contrairement à (2.16). Pour se faire, on introduit  $\bar{\mathbf{U}}_i$  comme :

$$\bar{\mathbf{U}}_i^n(x) := \beta_i^n \tilde{\mathbf{U}}_i^n(x) + (1 - \beta_i^n) \mathbf{U}_i^n, \quad (2.18)$$

où le coefficient  $\beta_i^n$  de cette combinaison convexe doit vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \beta_i^n \in [0; 1] \\ \beta_i^n \xrightarrow{\gamma t \rightarrow \infty} 0 \\ \beta_i^n \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 1 \end{cases} . \quad (2.19)$$

La première propriété permet de définir correctement la combinaison convexe. La deuxième assure que l'on retrouve les valeurs moyennes dans la limite de diffusion et de ne pas avoir les problèmes soulevés dans la partie 2.2.1. De plus, comme remarqué précédemment, on ne peut pas avoir un schéma globalement d'ordre élevé avec les coefficients  $\alpha_{i+1/2}$  (2.4) que l'on utilise actuellement et les phénomènes intervenant proche de la limite de diffusion sont lents et continus. De part ces deux remarques, on justifie l'utilisation des valeurs moyennes, donc d'un schéma d'ordre un, proche de la limite. Enfin, la troisième propriété sert à retrouver les reconstructions polynomiales et donc le schéma d'ordre élevé (2.15) dans le régime de transport à partir de la combinaison convexe définissant  $\bar{\mathbf{U}}$  (2.18).

Un choix possible pour ce nouveau coefficient est :

$$\beta_i^n := \frac{\Delta_l}{\Delta_l + \gamma_i^n t^n \Delta x}, \quad (2.20)$$

dans lequel  $\gamma_i^n := \gamma(\mathbf{U}_i^n)$  et  $\Delta_l$  est une longueur caractéristique. Cette longueur doit être réglée afin de choisir la zone de transition entre l'utilisation des reconstructions polynomiales et des valeurs moyennes. On va souhaiter que les polynômes soient utilisés quand  $\gamma t \Delta x \lesssim 1$ , c'est-à-dire quand le schéma arrive à échantillonner le terme source. Au contraire quand  $\gamma t \Delta x \gg 1$ , les valeurs moyennes vont être utilisées afin de pouvoir décrire correctement le comportement de la solution avec un terme source prépondérant et obtenir la propriété de préservation de l'asymptotique (P2). On verra par la suite que  $\Delta_l = 5 \times 10^{-2}$  est un choix permettant de conserver un ordre élevé sur une plage raisonnable tout en conservant le caractère AP du schéma.

De ce fait, le schéma HLL-AP d'ordre élevé est alors construit en utilisant  $\bar{\mathbf{U}}$  défini par la combinaison convexe (2.18) :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = & \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha_{i+1/2} \left( \bar{\mathbf{U}}(x_{i+1/2}) \right) \mathcal{F}_{i+1/2} \left( \bar{\mathbf{U}}_i(x_{i+1/2}), \bar{\mathbf{U}}_{i+1}(x_{i+1/2}) \right) \right. \\ & \left. - \alpha_{i-1/2} \left( \bar{\mathbf{U}}(x_{i-1/2}) \right) \mathcal{F}_{i-1/2} \left( \bar{\mathbf{U}}_{i-1}(x_{i-1/2}), \bar{\mathbf{U}}_i(x_{i-1/2}) \right) \right) \\ & + \Delta t \mathbf{S}_i^n(\bar{\mathbf{U}}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le schéma possède alors une expression « simple » proche de celle utilisée dans (2.15) dans lequel les reconstructions polynomiales  $\tilde{\mathbf{U}}$  sont remplacées par les valeurs de la combinaison convexe  $\bar{\mathbf{U}}$ .

De part sa construction, il doit être AP et tendre vers un schéma consistant pour l'équation limite (1.4) car  $\bar{\mathbf{U}}$  tend vers les valeurs moyennes quand  $\gamma t \rightarrow \infty$  d'après les propriétés sur  $\beta$  (2.19). Comme pour les schémas précédents, on le vérifie en effectuant un développement de Chapman-Enskog avec la mise à l'échelle décrite dans (2.5). En réutilisant les développements effectués dans (2.6) et celui de  $\bar{\mathbf{U}}_i$  :

$$\bar{\mathbf{U}}_i(x) = \varepsilon^2 \frac{\Delta_l}{\gamma_i t^n \Delta x} \tilde{\mathbf{U}}_i(x) + \mathbf{U}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

on obtient le développement suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n &- \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} \mathcal{F}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) - \frac{b_{i-1/2}^+ - b_{i-1/2}^-}{\gamma_{i-1/2} + \bar{\gamma}_{i-1/2}} \mathcal{F}_{i-1/2}(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon} \left( \mathbf{S}_{i-1/2}^+(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{i+1/2}^-(\mathbf{U}) \right) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \frac{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}{\gamma_{i+1/2} + \bar{\gamma}_{i+1/2}} \mathbf{S}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1}^n, \mathbf{U}_i^n) + \frac{b_{i-1/2}^+ - b_{i-1/2}^-}{\gamma_{i-1/2} + \bar{\gamma}_{i-1/2}} \mathbf{S}_{i-1/2}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i-1}^n) \right) \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Les termes en  $\bar{\mathbf{U}}$  et  $\tilde{\mathbf{U}}$  n'apparaissent plus dans ce dernier développement car pour toutes fonctions  $\mathbf{f}$  assez régulières on a :

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_i(x)) = \mathbf{f}\left(\varepsilon^2 \frac{\Delta_l}{\gamma_i t^n \Delta x} \tilde{\mathbf{U}}_i(x) + \mathbf{U}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) = \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

grâce à la définition du coefficient  $\beta$  (2.20). Le développement (2.22) est alors identique à celui obtenu pour le schéma d'ordre un dans (2.7)-(2.8), car aucun terme de la reconstruction polynomiale n'intervient. Les calculs menés à l'ordre un dans la partie 2.1.2 s'appliquent alors pour prouver que le schéma est consistant avec la bonne limite et exhiber la même correction asymptotique  $\bar{\gamma}$ .

## 2.3 Construction de solutions de référence

Le schéma HLL-AP d'ordre élevé (2.21), construit dans les parties précédentes, utilise des reconstructions polynomiales ainsi qu'une combinaison convexe entre ces reconstructions et les valeurs moyennes grâce au coefficient  $\beta$  (2.20). Il est donc complexe d'estimer théoriquement son ordre dans tous les régimes. Pour le moment, on conjecture uniquement l'ordre élevé dans le régime de transport et l'ordre un à la limite de diffusion. Afin d'en savoir plus sur le comportement du schéma, en particulier dans des régimes intermédiaires, on va construire des solutions de référence afin de pouvoir les comparer à celles obtenues par le schéma. Ces solutions vont être construites à partir de méthodes

différentes de celles utilisées par le schéma afin de ne pas être influencé par celui-ci. Ces solutions pour comparer ne seront donc en aucun cas les solutions obtenues par le schéma HLL-AP sur un maillage extrêmement fin.

Les deux exemples de solutions de référence que l'on propose ici sont construits pour les équations du Télégraphe (1.14). Bien que ce modèle soit linéaire et en apparence simple, on va voir que les solutions calculées possèdent des comportements complexes et très différents des équations de transport classiques. Le premier exemple développé va permettre d'obtenir des solutions de référence pour des problèmes de Riemann et le second traitera de solutions continues. Ces deux types de solutions de référence seront utilisés dans les Parties 2.4.1 et 2.4.2 concernant les résultats numériques.

### 2.3.1 Problèmes de Riemann avec les équations du Télégraphe

On commence par présenter deux méthodes permettant d'obtenir des solutions de référence pour les équations du Télégraphe (1.14) quand la condition initiale est un problème de Riemann :

$$\mathbf{U}(t = 0, x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L^0 = (u_L^0, v_L^0)^T & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_R^0 = (u_R^0, v_R^0)^T & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$

La structure d'un problème de Riemann pour un système de lois de conservations avec terme source (1.1) est plus complexe que pour un système hyperbolique (1.2). Dans ce cadre le problème de Riemann est alors dit généralisé [GMP84 ; BAF03] et le terme source peut influencer sur la forme des ondes séparant les différents états [CHH09 ; CHZ09]. Avec les équations du Télégraphe, les ondes séparant les états intermédiaires restent des droites car le système est linéaire et la structure du problème est détaillée dans la Figure 2.1. Dans cette figure on observe que la solution  $\mathbf{U}(t, x)$  du problème est la succession des trois états  $\mathbf{U}_L(t)$ ,  $\mathbf{U}_{LR}(t, x)$  et  $\mathbf{U}_R(t)$  séparées par les deux ondes  $\frac{x}{t} = -a$  et  $\frac{x}{t} = a$ . On remarque que contrairement à un problème de Riemann classique les états gauches et droits ne sont pas constants en temps.

D'après la structure du problème, la quantité  $u$  est continue à travers l'onde  $\frac{x}{t} = -a$  correspondant à une possible discontinuité de  $v$  et de l'autre côté  $v$  est continue au travers de  $\frac{x}{t} = a$  liée à  $u$ .

Dans la construction de la solution  $\mathbf{U}(t, x)$ , on pourra considérer que le libre parcours moyen  $\sigma$  sera discontinu au niveau de l'interface initiale, de la même manière que la condition initiale (2.23) :

$$\sigma := \sigma(x) = \begin{cases} \sigma_L > 0 & \text{si } x < 0, \\ \sigma_R > 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$



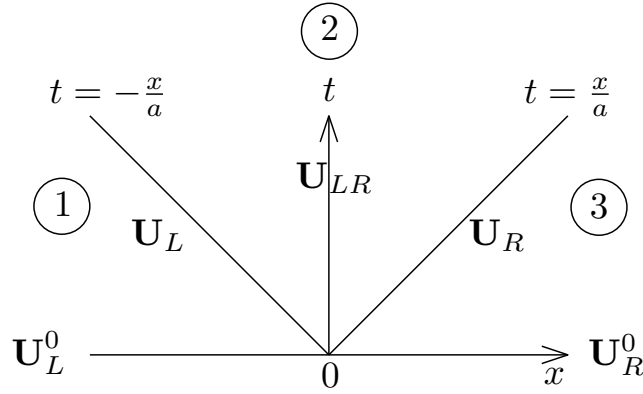


FIGURE 2.1 – Structure et définition des zones pour un problème de Riemann avec les équations du Télégraphe (1.14)

Dans les zones extérieures (1 et 3 sur la Figure 2.1), le système du Télégraphe est réduit à :

$$\begin{cases} \partial_t u = \sigma(v - u) \\ \partial_t v = \sigma(u - v) \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_t(u + v) = 0 \\ \partial_t(u - v) = -2\sigma(u - v) \end{cases},$$

on retrouve bien ici le fait que le terme source rend les états gauches et droits dépendants du temps. Par intégration, on obtient la solution suivante dans la zone 1 :

$$\begin{cases} u_L(t) = \frac{1}{2}((u_L^0 + v_L^0) + (u_L^0 - v_L^0)e^{-2\sigma_L t}) \\ v_L(t) = \frac{1}{2}((u_L^0 + v_L^0) + (v_L^0 - u_L^0)e^{-2\sigma_L t}) \end{cases}, \quad (2.25)$$

et dans la zone 3 :

$$\begin{cases} u_R(t) = \frac{1}{2}((u_R^0 + v_R^0) + (u_R^0 - v_R^0)e^{-2\sigma_R t}) \\ v_R(t) = \frac{1}{2}((u_R^0 + v_R^0) + (v_R^0 - u_R^0)e^{-2\sigma_R t}) \end{cases}. \quad (2.26)$$

Concernant la zone centrale (2 sur la Figure 2.1), il est plus complexe d'obtenir une solution exacte. On propose donc deux méthodes numériques utilisant des techniques éloignées de celles mises en place pour construire le schéma HLL-AP afin de calculer une solution de référence dans cette zone.

### Méthode 1 (M1) : reformulation du système et différence finies

La première méthode que l'on présente utilise une reformulation du système original (1.14) via des changements de variables bien choisis. Un schéma aux différences finies est ensuite utilisé pour obtenir la solution. Cette première méthode ne peut s'appliquer que si le libre parcours moyen  $\sigma$  est constant sur tout le domaine :  $\sigma := \sigma_L = \sigma_R$ .

Tout d'abord on applique les deux changements de variables suivants afin de réduire le système et de faire tourner la zone centrale :

$$\begin{cases} u \leftarrow e^{-\sigma t} \bar{u} \\ v \leftarrow e^{-\sigma t} \bar{v} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} s \leftarrow at - x \\ y \leftarrow at + x \end{cases} . \quad (2.27)$$

Une fois ces deux changements de variables appliqués, le système (1.14) est alors réduit à :

$$\begin{cases} 2a\partial_y \bar{u}(s, y) = \sigma \bar{v}(s, y) \\ 2a\partial_s \bar{v}(s, y) = \sigma \bar{u}(s, y) \end{cases} .$$

Pour trouver une solution de ce système, on va mettre en place une méthode de différences finies. Avant de détailler ce schéma, on s'intéresse d'abord aux conditions aux limites que l'on doit fixer à ce système. D'après une remarque précédente,  $u$  est continue sur l'onde de gauche qui correspond à  $y = 0$  avec les nouvelles variables et  $v$  sur celle de droite en  $s = 0$ . Ainsi, les conditions aux limites sont extraites des solutions trouvées dans les zones 1 et 2, avec application des changements de variables :

$$\begin{cases} \bar{u}(s, y = 0) = e^{\sigma t} u_L(t) \\ \bar{v}(s = 0, y) = e^{\sigma t} v_R(t) \end{cases} ,$$

où la variable de temps  $t$  est donnée par  $t = \frac{1}{2a}(y + s)$  avec les changements de variables (2.27). Quant aux deux autres côtés du domaine, ils demeurent ouverts et donc sans conditions aux limites.

Le schéma aux différences finies est mis en place dans la zone 2 tournée avec les discrétisations suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}, s_i = i\Delta \\ \forall j \in \mathbb{N}, y_j = j\Delta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \bar{u}_{i,j} := \bar{u}(s_i, y_j) \\ \bar{v}_{i,j} := \bar{v}(s_i, y_j) \end{cases} ,$$

où  $\Delta$  représente un pas d'espace. La grille de discrétisation est représentée sur la Figure 2.2. Le schéma à proprement parler s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \quad \bar{u}_{i+1,j} = \bar{u}_{i,j} + \frac{\sigma\Delta}{2a} \bar{v}_{i,j} \\ \forall j \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \bar{v}_{i,j+1} = \bar{v}_{i,j} + \frac{\sigma\Delta}{2a} \bar{u}_{i,j} \end{cases} , \quad (2.28)$$

afin de pouvoir récupérer les conditions aux limites sur les bords  $s = 0$  et  $y = 0$  puis itérer sur le domaine ouvert. La taille de ce domaine ouvert est choisie de telle sorte qu'il soit assez grand pour que l'on puisse récupérer la solution au temps  $t$  que l'on souhaite.

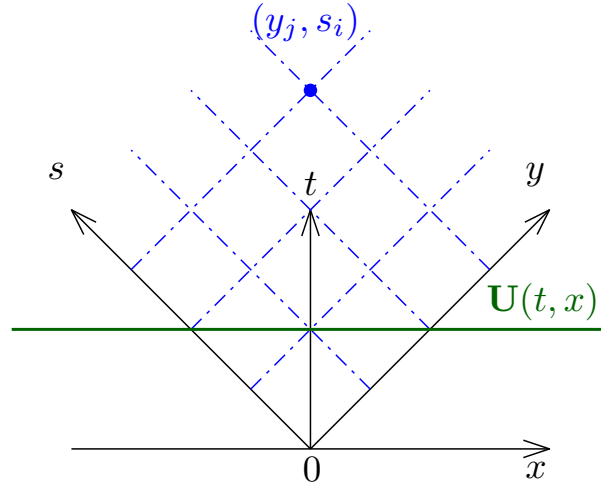


FIGURE 2.2 – Grille de discrétisation pour la méthode des différences finies (2.28)

### Méthode 2 (M2) : développement en série entière

La méthode présentée dans la partie 2.3.1 ne permet pas de travailler avec un libre parcours moyen  $\sigma$  discontinu comme présenté dans (2.24). Dans le but de dépasser cette limitation, on expose une seconde méthode utilisant une décomposition en série entière pour calculer la solution dans la zone 2 du problème.

On introduit alors les développements en  $t$  suivants, en ayant noté  $y = \frac{x}{t}$  la variable autosimilaire :

$$\begin{cases} u_{LR}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(y) t^i \\ v_{LR}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(y) t^i \end{cases} .$$

La convergence de ces deux développements est vérifiée numériquement avec le critère de d'Alembert.

En injectant ces développements dans le système du Télégraphe (1.14) et en regroupant les termes de même ordre en  $t$ , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} (a - y)\phi'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} ((a - y)\phi'_i + i\phi_i - \sigma(\psi_{i-1} - \phi_{i-1})) t^i = 0 \\ -(a + y)\psi'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-(a + y)\psi'_i + i\psi_i - \sigma(\phi_{i-1} - \psi_{i-1})) t^i = 0 \end{cases} . \quad (2.29)$$

Tout comme dans la méthode précédente, on récupère les conditions aux limites sur les bords de la zone 2 où la donnée est continue. On a donc besoin des développements de  $u_L(t)$  (2.25) et  $v_R(t)$  (2.26) :

$$\begin{cases} u_L(t) = \frac{1}{2}((u_L^0 + v_L^0) + (u_L^0 - v_L^0)e^{-2\sigma_L t}) = u_L^0 + \frac{u_L^0 - v_L^0}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2\sigma_L t)^i}{i!} \\ v_R(t) = \frac{1}{2}((u_R^0 + v_R^0) + (v_R^0 - u_R^0)e^{-2\sigma_R t}) = v_R^0 + \frac{v_R^0 - u_R^0}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2\sigma_R t)^i}{i!} \end{cases} . \quad (2.30)$$

Le premier terme du développement (2.29) permet de dire que  $\phi_0$  et  $\psi_0$  sont constants. Puis, à l'aide des conditions sur le bord (2.30), on obtient :

$$\begin{cases} \phi_0 = u_L^0 \\ \psi_0 = v_R^0 \end{cases} .$$

Ensuite les autres termes de (2.29), pour  $i \geq 1$ , sont solutions du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \phi_i' = \frac{1}{a-y} (\sigma (\psi_{i-1} - \phi_{i-1}) - i\phi_i) \\ \psi_i' = \frac{-1}{a+y} (\sigma (\phi_{i-1} - \psi_{i-1}) - i\psi_i) \end{cases} . \quad (2.31)$$

Les conditions initiales associées à ces équations différentielles sont aussi extraites des conditions sur le bord (2.30) :

$$\begin{cases} \phi_i(-a) = \frac{u_L^0 - v_L^0}{2} \frac{(-2\sigma_L)^i}{i!} \\ \psi_i(a) = \frac{v_R^0 - u_R^0}{2} \frac{(-2\sigma_R)^i}{i!} \end{cases} . \quad (2.32)$$

Pour trouver simplement des solutions aux équations différentielles (2.31) avec les conditions initiales (2.32), on les résout numériquement à l'aide d'un schéma explicite :

$$\begin{cases} \phi_{i,j+1} = \phi_{i,j} + \frac{\Delta y}{a-y} (\sigma (\psi_{i-1,j} - \phi_{i-1,j}) - i\phi_{i,j}) \\ \psi_{i,j+1} = \psi_{i,j} + \frac{-\Delta y}{a+y} (\sigma (\phi_{i-1,j} - \psi_{i-1,j}) - i\psi_{i,j}) \end{cases} ,$$

où la discrétisation utilisée est la suivante :

$$\begin{cases} \phi_{i,j} = \phi_i(j\Delta y) \\ \psi_{i,j} = \psi_i(j\Delta y) \end{cases} ,$$

avec  $\Delta y := \frac{\Delta x}{t}$  dans lequel  $\Delta x$  est le pas utilisé pour la construction de la solution.

Ce développement en série entière est uniquement valide dans la zone centrale (zone 2), l'indice  $j$  est donc compris entre  $N_1$  et  $N_3$  qui représente respectivement le début et la fin de la zone 2 (ou la fin de la zone 1 et le début de la zone 3). Ils sont définis sur le domaine  $[x_{\min}; x_{\max}]$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} x_{\min} + N_1\Delta x = -at \\ x_{\min} + N_3\Delta x = at \end{cases} .$$

Ce qui permet de définir les termes suivants pour les conditions initiales à partir de (2.32) :

$$\begin{cases} \phi_{i,N_1} &= \frac{u_L^0 - v_L^0}{2} \frac{(-2\sigma_L)^i}{i!} \\ \psi_{i,N_3} &= \frac{v_R^0 - u_R^0}{2} \frac{(-2\sigma_R)^i}{i!} \end{cases} .$$

### 2.3.2 Solutions continues des équations du Télégraphe

Les solutions discontinues construites dans la partie précédente vont permettre d'observer le comportement du schéma face à ces discontinuités mais, pour calculer pratiquement l'ordre du schéma, il est nécessaire d'avoir des solutions continues. Pour cela, en s'inspirant des calculs effectués dans [Fra12; BDF12b; BDFL16] pour « l'équation de la chaleur hyperbolique » (ou modèle  $P_1$  (1.16)), on va construire des solutions continues des équations du Télégraphe (1.14) avec un libre parcours moyen  $\sigma$  constant.

Les solutions construites sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} u(t, x) &= f(t, x) + \frac{1}{2\sigma} \partial_t f(t, x) - \frac{a}{2\sigma} \partial_x f(t, x) \\ v(t, x) &= f(t, x) + \frac{1}{2\sigma} \partial_t f(t, x) + \frac{a}{2\sigma} \partial_x f(t, x) \end{cases} , \quad (2.33)$$

où la fonction  $f$  est solution de l'équation suivante :

$$2\sigma \partial_t f(t, x) + \partial_t^2 f(t, x) - a^2 \partial_x^2 f(t, x) = 0. \quad (2.34)$$

Cette équation peut être retrouvée en manipulant le système des équations du Télégraphe et est parfois aussi appelée équation du Télégraphe.

Il est possible de chercher des solutions  $f$  de l'équation (2.34) par une séparation de variables. Par exemple, en supposant que  $f$  est de la forme  $f(t, x) = \alpha(t) \cos(\frac{2\pi x}{L})$ , avec  $L$  la longueur du domaine. Avec cette supposition, on en déduit que  $\alpha(t)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{4\pi^2}{L^2} a^2 \alpha(t) + 2\sigma \alpha'(t) + \alpha''(t) = 0. \quad (2.35)$$

En fonction du signe de  $\sigma - \frac{2\pi}{L}a$ , il y a trois types de solutions possibles. Dans un premier cas, si  $0 < \sigma < \frac{2\pi}{L}a$ , alors une solution à (2.35) est :

$$\alpha(t) = e^{-\sigma t} \left( \sin \left( \sqrt{\frac{4\pi^2}{L^2} a^2 - \sigma^2 t} \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{4\pi^2}{L^2} a^2 - \sigma^2 t} \right) \right)$$

Puis, dans le cas où  $\sigma = \frac{2\pi}{L}a$ , un second type de solution est :

$$\alpha(t) = \exp \left( -\frac{2\pi}{L} a t \right) (1 + t)$$

Finalement, avec le troisième et dernier cas, pour  $\sigma > \frac{2\pi}{L}a$ , une solution est donnée par :

$$\alpha(t) = \exp\left(-\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\pi^2}{L^2}a^2}\right)t\right) + \exp\left(-\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\pi^2}{L^2}a^2}\right)t\right) \quad (2.36)$$

À partir de ces trois types de solutions de (2.35), il est possible de construire des fonctions continues  $u$  et  $v$  solutions des équations du Télégraphe pour différentes valeurs du parcours moyen  $\sigma$  à partir de (2.33).

On souligne dès maintenant le fait que ces solutions sont valides pour toutes valeurs de  $\sigma$  mais que numériquement elles ne peuvent pas être calculées pour des valeurs trop grandes. En effet, même en utilisant un code fonctionnant en quadruple précision, les calculs des fonctions exponentielles du troisième cas (2.36) deviennent rapidement problématique.

## 2.4 Résultats 1D

On possède désormais une expression d'ordre élevé du schéma HLL-AP (2.21), originalement décrit dans [BT11], et une gamme de solutions de référence continues et discontinues. On va donc comparer les résultats du schéma HLL-AP avec et sans reconstruction polynomiale aux solutions de référence que l'on a construit dans la partie 2.3. De plus, les tests numériques vont permettre de justifier le choix du coefficient  $\beta$  (2.20) utilisé pour la nouvelle combinaison convexe  $\bar{U}$  (2.18) avec le schéma d'ordre élevé. En outre, l'utilisation de cette combinaison convexe ne permet pas de définir facilement l'ordre du schéma (2.21) même pour des solutions régulières.

Toutes les courbes de ce mémoire sont tracées avec le paquet `pgfplots` de  $\text{\LaTeX}$ .

### 2.4.1 Comparaison avec les solutions de référence des problèmes de Riemann pour les équations du Télégraphe

On effectue tout d'abord une comparaison entre les résultats donnés par le schéma HLL-AP et les solutions de référence associées aux problèmes de Riemann sur les équations du Télégraphe développées dans la partie 2.3.1.

#### Comparaison entre les méthodes M1 et M2

Avant de comparer les solutions de référence, on présente dans un premier temps les résultats obtenus en utilisant les méthodes M1 et M2 pour calculer la solution dans la zone centrale du problème de Riemann. On rappelle que les autres états du problème de Riemann sont calculés à l'aide de (2.25)-(2.26). L'exemple que l'on présente est initialisé

avec les données initiales suivantes :

$$\mathbf{U}_L^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{U}_R^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

On fixe la vitesse  $a = 0,5$  et le temps final  $t_f = 1$ . On suppose que le libre parcours moyen  $\sigma$  est égal à 1 afin que les deux méthodes soient bien définies. Le domaine utilisé est le segment  $[-1; 1]$ , discrétisé avec 1000 points pour un pas  $\Delta x = 2 \times 10^{-3}$ . La première méthode (M1) utilise 1000 points pour le schéma aux différences finies (2.28) dans la grille de la Figure 2.2 et 10 équations différentielles du type (2.31) sont résolues numériquement pour la deuxième méthode (M2).

Les résultats obtenus par les deux méthodes sur  $u$  et  $v$  sont présentés sur la Figure 2.3. Sur cette figure, on observe bien que les états gauches et droits ne sont pas constants en temps comme vu dans les équations (2.25)-(2.26) et ce contrairement à un problème de Riemann avec un système hyperbolique homogène (1.2). On observe aussi le fait que  $u$  est continue sur l'onde de gauche ( $-a = \frac{x}{t}$ ) et  $v$  sur celle de droite ( $a = \frac{x}{t}$ ). On constate que la structure développée au centre n'est pas simple et ce même avec un système linéaire. Finalement, on remarque que les deux méthodes donnent le même résultat.

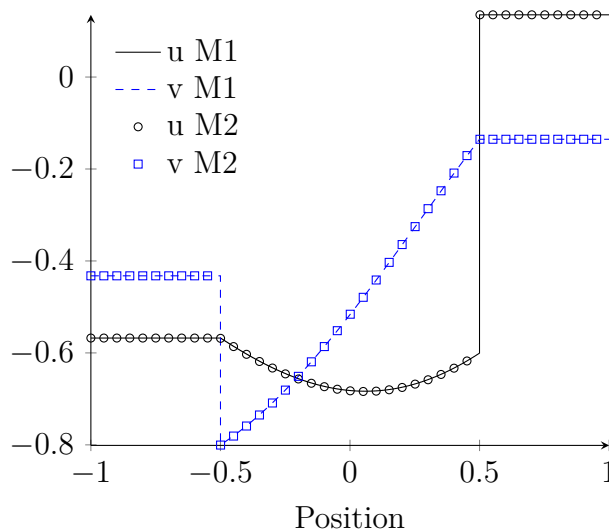


FIGURE 2.3 – Comparaison entre les résultats des méthodes M1 et M2

### Comparaison avec le schéma HLL-AP pour $\sigma$ continu

Ensuite, on compare la solution donnée par la première méthode (M1), le schéma HLL-AP d'ordre un et ce même schéma à l'ordre deux (HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ ). Pour cette seconde comparaison, on réutilise la même initialisation (2.37) et les mêmes paramètres que précédemment. Les deux versions du schéma HLL-AP utilisent un maillage grossier de 80 cellules (soit un pas de  $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ ). Les résultats pour  $u$  et  $v$  sont présentés

sur la Figure 2.4. Dans tous les tests avec les problèmes de Riemann, des conditions aux bords de type Neumann sont appliquées.

On remarque que pour les zones continues, les deux schémas donnent le même résultat proche de la solution de référence. Puis, proche des discontinuités de  $u$  et  $v$ , le schéma d'ordre deux est plus proche de la solution de référence même s'il y a présence de légères oscillations. Ces oscillations sont présentes car aucun critère de limitation n'est utilisé dans la méthode MOOD (voir Figure 1.5 pour le principe de limitation). On verra par la suite qu'elles peuvent être facilement retirées en utilisant le critère DMP (voir Figure 2.6).

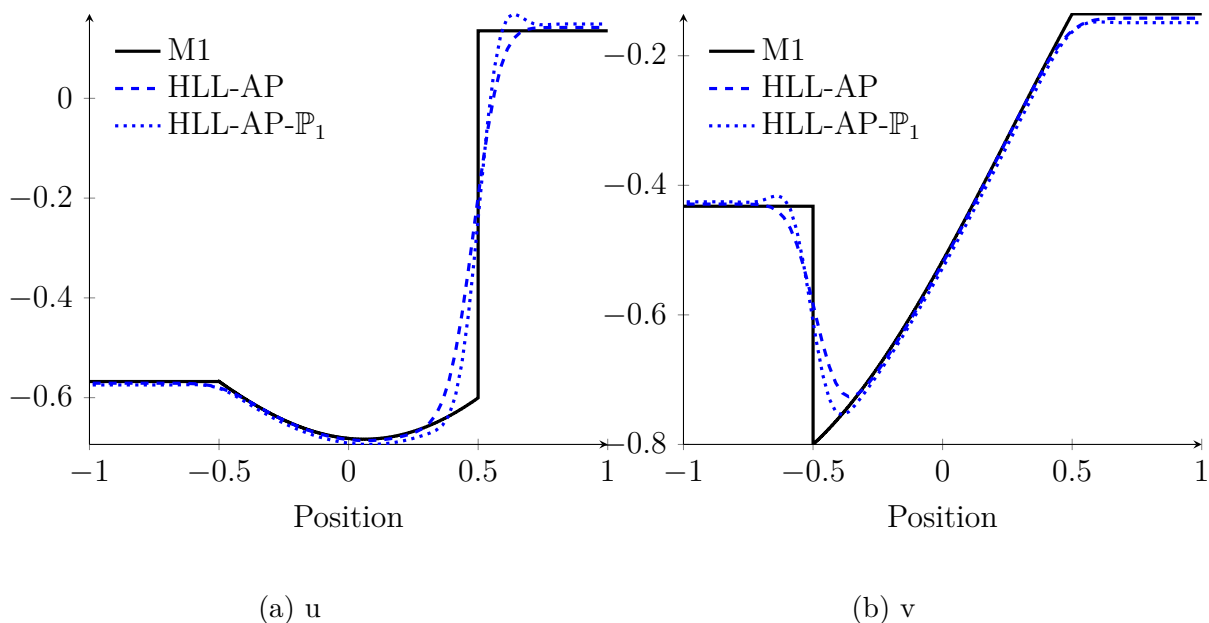


FIGURE 2.4 – Comparaison entre les résultats donnés par M1, HLL-AP et HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  pour  $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ , avec  $\sigma$  continu

### Comparaison avec le schéma HLL-AP pour $\sigma$ discontinu

Il est possible de générer des solutions de référence avec un libre parcours moyen discontinu comme dans (2.24) avec la méthode M2. On va donc comparer la seconde méthode avec les schémas HLL-AP et HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  avec une discontinuité de  $\sigma$  :

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_L = 0.1 & \text{si } x < 0 \\ \sigma_R = 1.0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise encore la même initialisation (2.37) et les mêmes valeurs pour la vitesse et le temps final. Les résultats sur 80 cellules sont exposés sur la Figure 2.5.

Tout comme pour le cas test précédent, les deux versions du schéma HLL-AP donnent de bons résultats sur les zones continues et sont même capables de capturer la discon-



tinuité du libre parcours moyen. De plus, le schéma d'ordre deux est plus proche de la solution de référence au voisinage des discontinuités tout en créant des oscillations.

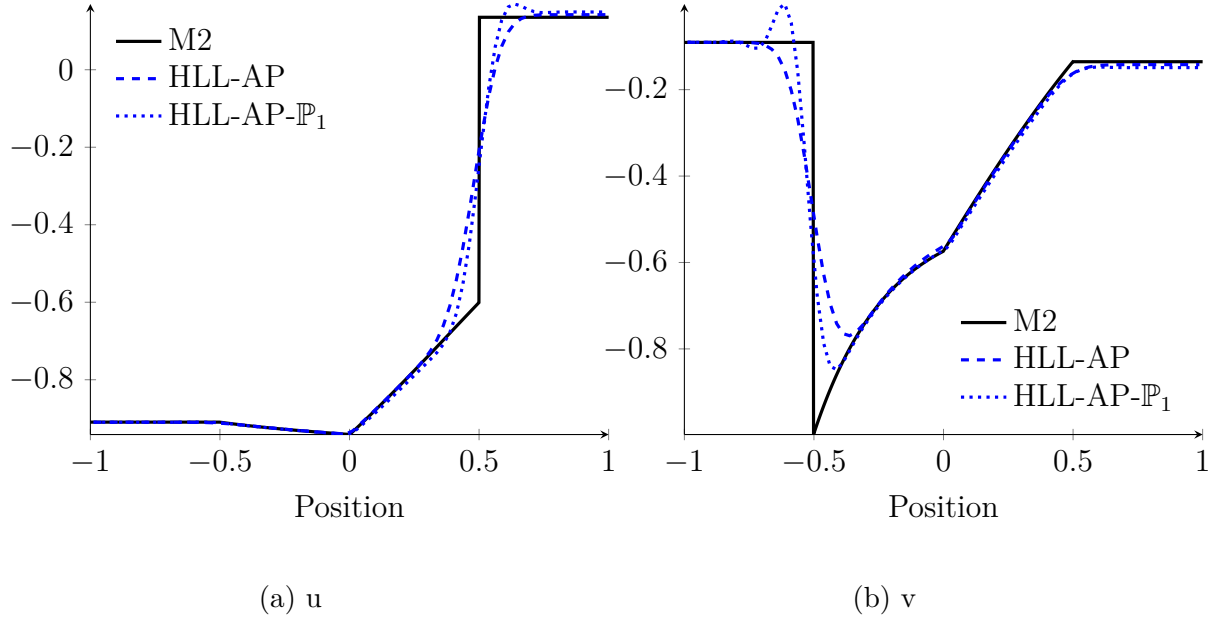


FIGURE 2.5 – Comparaison entre les résultats donnés par M2, HLL-AP et HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  pour  $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ , avec  $\sigma$  discontinu

### Comparaison avec le schéma HLL-AP-DMP pour $\sigma$ discontinu

On a vu que le schéma d'ordre deux sans limitation *a posteriori* développe des oscillations au voisinage des discontinuités. Afin de montrer qu'il est possible de les supprimer à l'aide du critère DMP de la méthode MOOD, on réutilise la même initialisation sur un maillage de 1000 cellules.

Les résultats sur  $v$  comparant la seconde méthode M2 et les deux schémas d'ordre deux : l'un non limité (HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ ) et le second en activant le critère DMP dans la méthode MOOD (HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ -DMP) sont présentés sur la Figure 2.6. On voit bien sur le zoom que le critère DMP permet de supprimer l'oscillation parasite au niveau de la discontinuité tout en conservant une précision raisonnable.

### Comparaison avec le schéma HLL-AP pour différentes valeurs de $\sigma$

Le dernier test utilise toujours la même initialisation et les mêmes paramètres que les autres cas tests mais, cette fois-ci, on compare la solution de référence de M1 à celles obtenues par le schéma HLL-AP et le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  sans limitation pour différentes valeurs de  $\sigma$ . Ce test permet de bien voir l'évolution de la structure du problème de Riemann quand on s'approche de la diffusion. On ne peut pas s'approcher au plus près de la limite de diffusion avec les solutions de référence à cause des instabilités numériques dues aux fonctions exponentielles présentes dans (2.25)-(2.26) et (2.27).

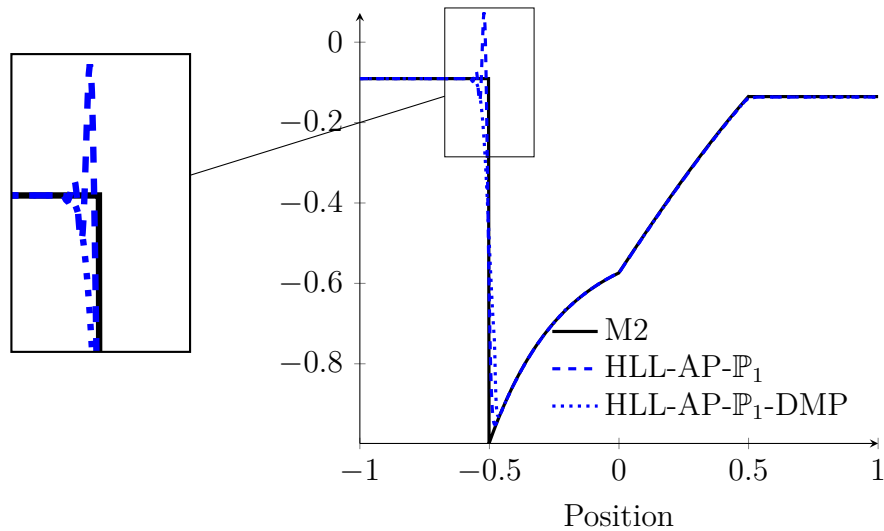


FIGURE 2.6 – Comparaison sur  $v$  entre les résultats donnés par M2, HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  and HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ -DMP pour  $\Delta x = 2 \times 10^{-3}$

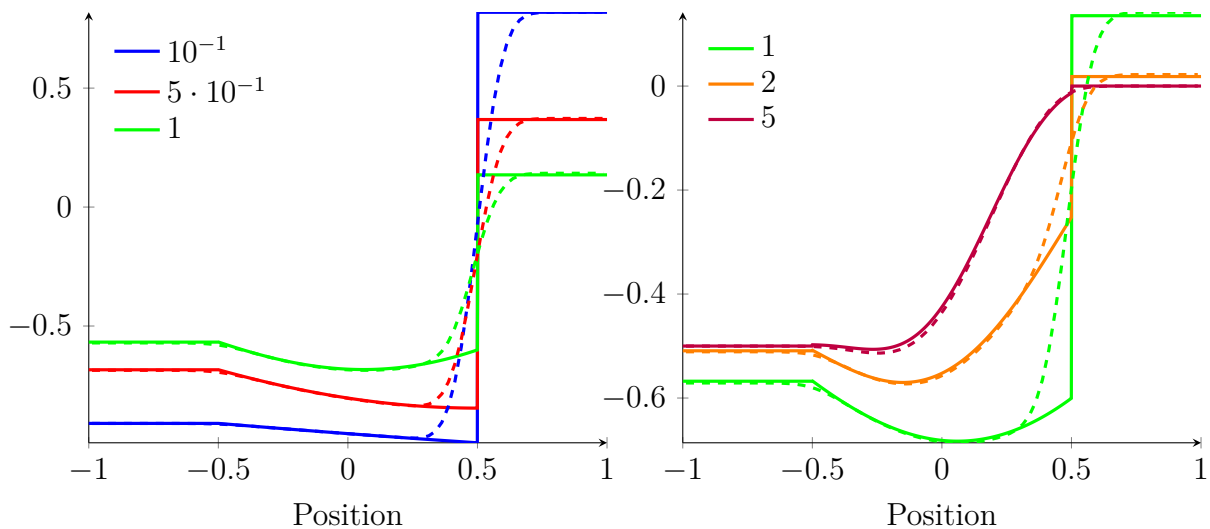


FIGURE 2.7 – Évolution de la  $u$  en fonction de  $\sigma$  : comparaison entre la solution de référence (trait plein) et le schéma HLL-AP (tiret),  $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$

Sur les Figures 2.7 et 2.8, on observe que pour des faibles valeurs de  $\sigma$ , la solution obtenue est proche du transport alors qu'à l'opposé, pour des plus grandes valeurs de  $\sigma$ , on s'approche d'une solution de type diffusion. Tout comme dans les autres tests, la solution donnée par le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  est plus précise même si des oscillations sont présentes. Sur la Figure 2.8, avec le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ , on voit que l'on retrouve la limite lorsque  $\sigma$  croît même s'il semble légèrement moins précis que le schéma d'ordre un à cause de la combinaison convexe mise en place avec le coefficient  $\beta$  (2.20). Pour une étude plus quantitative sur cette perte de précision on pourra se référer à la partie 2.4.2 et plus particulièrement au Tableau 2.3.

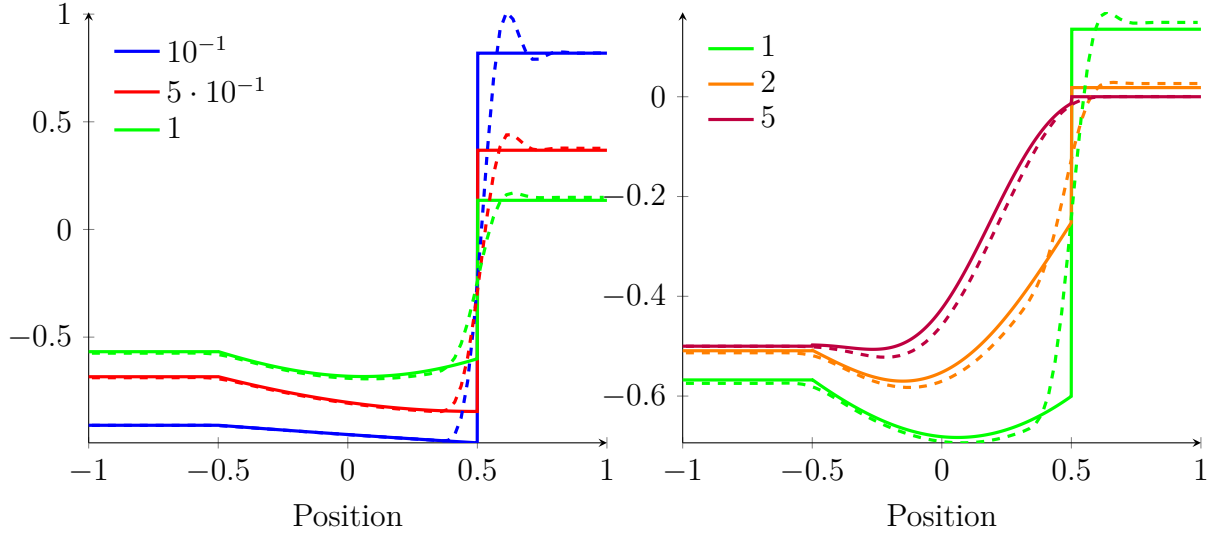


FIGURE 2.8 – Évolution de la  $u$  en fonction de  $\sigma$  : comparaison entre la solution de référence (trait plein) et le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  (tiret),  $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$

## 2.4.2 Comparaison avec les solutions de référence continues pour les équations du Télégraphe

Au travers des cas tests précédents, on voit que la précision du schéma est accrue au voisinage des discontinuités en utilisant les reconstructions polynomiales. On s'intéresse maintenant à avoir une estimation de l'ordre du schéma HLL-AP utilisant les reconstructions polynomiales (2.21) via la combinaison convexe introduite par le coefficient  $\beta$  (2.20). Pour cela, on compare la solution obtenue par le schéma aux solutions exactes des équations du Télégraphe décrites dans la partie 2.3.2.

On se place sur le domaine  $[0; 1]$  avec des conditions de Dirichlet imposées par la solution exacte sur chaque bord. Pour tous les tests, la vitesse  $a$  est choisie égale à 1 et le temps final  $t_f$  fixé à 1. Dans les trois tableaux qui suivent (2.1, 2.2 et 2.3), la norme  $L^2$  de l'erreur relative pour  $u$  entre la solution obtenue par le schéma et la solution exacte est calculée pour différents maillages et différentes valeurs du libre parcours moyen  $\sigma$ . Les résultats pour  $v$  sont identiques à ceux présentés pour  $u$ .

Pour le calcul des erreurs, la formule suivante est utilisée :

$$e_{L^2}^2(t^n, \Delta x) := \frac{\sum_i \left( \Delta x w_i^n - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(t^n, x) dx \right)^2}{\sum_i \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(t^n, x) dx \right)^2}, \quad (2.38)$$

où  $w_i^n$  est la valeur moyenne de la quantité obtenue par le schéma et  $w(t, x)$  la solution exacte. On remarque que cette formule utilise uniquement les valeurs moyennes rendues par le schéma à la fin d'une itération et non les reconstructions polynomiales. Les in-

tégrales sont calculées avec des formules de quadrature du même ordre que le schéma numérique. Ce calcul d'erreur est ensuite utilisé pour calculer un ordre approché défini comme la pente de l'erreur en fonction du pas d'espace  $\Delta x$  :

$$p_{L^2}(t^n) := \frac{\log(e_{L^2}(t^n, \Delta x_2)) - \log(e_{L^2}(t^n, \Delta x_1))}{\log(\Delta x_2) - \log(\Delta x_1)}. \quad (2.39)$$

Dans le premier Tableau 2.1, pour  $\sigma = 10^{-2}$ , on observe que le coefficient  $\beta$  (2.20) de la combinaison convexe (2.18) est toujours de l'ordre de un. Le schéma utilise donc presque uniquement la reconstruction polynomiale  $\widetilde{\mathbf{U}}$ . L'utilisation de cette reconstruction polynomiale permet d'augmenter la précision et d'atteindre l'ordre deux avec HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  car le terme source n'est pas prépondérant. En utilisant une reconstruction polynomiale de degré deux (HLL-AP- $\mathbb{P}_2$ ), on observe que l'on augmente encore légèrement la précision mais que l'ordre trois n'est pas atteint. En revanche, avec une reconstruction  $\mathbb{P}_3$  dans la combinaison convexe  $\overline{\mathbf{U}}$ , on observe que la précision est augmentée seulement pour des maillages grossiers.

Maillage		$\beta$ (2.20)	$\mathbb{P}_0$		$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$		$\mathbb{P}_3$	
ddl	$\Delta x$		$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
160	6.25E-03	1.00	3.60E-02	—	8.14E-04	—	6.99E-05	—	5.29E-05	—
320	3.13E-03	1.00	1.82E-02	0.98	2.07E-04	1.98	1.53E-05	2.19	1.32E-05	2.01
640	1.56E-03	1.00	9.18E-03	0.99	5.21E-05	1.99	3.54E-06	2.12	3.26E-06	2.01
1 280	7.81E-04	1.00	4.60E-03	1.00	1.31E-05	1.99	8.35E-07	2.08	8.01E-07	2.03
2 560	3.91E-04	1.00	2.30E-03	1.00	3.27E-06	2.00	1.97E-07	2.09	1.92E-07	2.06
5 120	1.95E-04	1.00	1.15E-03	1.00	8.17E-07	2.00	4.49E-08	2.13	4.43E-08	2.12
10 240	9.77E-05	1.00	5.76E-04	1.00	2.03E-07	2.01	9.36E-09	2.26	9.28E-09	2.26

TABLEAU 2.1 – Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-AP avec  $\sigma = 10^{-2}$

Le second Tableau 2.2 se place dans une situation intermédiaire avec  $\sigma = 1$ . Dans ce cas, le coefficient  $\beta$  varie et tend vers un pour des maillages fins. On observe encore que le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  est plus précis que le schéma sans reconstruction polynomiale, même si l'ordre deux n'est pas atteint. Comme annoncé précédemment, avec les coefficients  $\alpha_{i+1/2}$  définis comme (2.4), il n'est pas possible d'obtenir un schéma globalement d'ordre élevé car ils ne vérifient pas les propriétés (2.17). On voit ici que les schémas utilisant une reconstruction polynomiale de degré deux ( $\mathbb{P}_2$ ) ou trois ( $\mathbb{P}_3$ ) ne permettent pas d'augmenter la précision par rapport à celui avec la reconstruction linéaire.

Le troisième configuration utilise  $\sigma = 10$  et les résultats sont présentés dans le Tableau 2.3. Ici le terme source est plus significatif que dans les deux autres tests et on observe une plus grande plage de variation de  $\beta$ . Cela implique que les valeurs moyennes et les reconstructions polynomiales sont utilisées dans la combinaison convexe permettant de définir  $\overline{\mathbf{U}}$  (2.18). Cette utilisation des deux valeurs permet d'expliquer la légère perte de précision du schéma comme observé avec les solutions des problèmes de Riemann

Maillage		$\beta$ (2.20)	$\mathbb{P}_0$		$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$		$\mathbb{P}_3$	
ddl	$\Delta x$		$e_{L^1}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
160	6.25E-03	0.89	3.89E-02	—	3.18E-03	—	3.19E-03	—	3.17E-03	—
320	3.13E-03	0.94	1.97E-02	0.98	5.31E-04	2.58	6.51E-04	2.29	6.50E-04	2.29
640	1.56E-03	0.97	9.88E-03	0.99	3.37E-04	0.66	3.75E-04	0.80	3.75E-04	0.79
1 280	7.81E-04	0.98	4.95E-03	1.00	2.39E-04	0.49	2.47E-04	0.60	2.47E-04	0.60
2 560	3.91E-04	0.99	2.48E-03	1.00	1.40E-04	0.78	1.42E-04	0.81	1.42E-04	0.81
5 120	1.95E-04	1.00	1.24E-03	1.00	7.50E-05	0.90	7.55E-05	0.91	7.55E-05	0.91
10 240	9.77E-05	1.00	6.20E-04	1.00	3.88E-05	0.95	3.89E-05	0.95	3.89E-05	0.95

TABLEAU 2.2 – Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-AP avec  $\sigma = 1$ 

dans la Figure 2.8. Cependant, on observe bien que les schémas HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ , HLL-AP- $\mathbb{P}_2$  et HLL-AP- $\mathbb{P}_3$  avec les reconstructions polynomiales tendent vers un ordre un comme schéma HLL-AP (2.1).

Maillage		$\beta$ (2.20)	$\mathbb{P}_0$		$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$		$\mathbb{P}_3$	
ddl	$\Delta x$		$e_{L^1}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
160	6.25E-03	0.44	1.01E-02	—	1.11E-01	—	1.11E-01	—	1.11E-01	—
320	3.13E-03	0.62	4.93E-03	1.03	6.49E-02	0.75	6.49E-02	0.78	6.49E-02	0.78
640	1.56E-03	0.76	2.44E-03	1.01	3.57E-02	0.84	3.57E-02	0.86	3.57E-02	0.86
1 280	7.81E-04	0.86	1.21E-03	1.01	1.88E-02	0.91	1.88E-02	0.92	1.88E-02	0.92
2 560	3.91E-04	0.93	6.06E-04	1.00	9.69E-03	0.95	9.69E-03	0.96	9.69E-03	0.96
5 120	1.95E-04	0.96	3.02E-04	1.00	4.92E-03	0.98	4.92E-03	0.98	4.92E-03	0.98
10 240	9.77E-05	0.98	1.51E-04	1.00	2.48E-03	0.99	2.48E-03	0.99	2.48E-03	0.99

TABLEAU 2.3 – Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-AP avec  $\sigma = 10$ 

Les résultats des trois tableaux sont synthétisés sur la Figure 2.9. On observe bien le comportement de l'erreur précédemment décrit quand on augmente la valeur du libre de parcours moyen  $\sigma$ . Plus particulièrement, on observe facilement le gain de précision obtenu avec les reconstructions polynomiales dans le cas  $\sigma = 10^{-2}$

Afin de compléter cette discussion sur le gain de précision, on trace sur la Figure 2.10 l'erreur en fonction du temps CPU pour le cas  $\sigma = 10^{-2}$  et  $\sigma = 1$ . On ne trace pas le cas  $\sigma = 10$  car on a déjà observé que le schéma avec reconstruction polynomiale était moins précis dans ce cas. On peut remarquer sur la Figure 2.10a qu'il est plus intéressant pour obtenir une erreur donnée d'utiliser le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$  afin d'avoir un temps de calcul moins important par rapport au schéma HLL-AP sans reconstruction.

Comme énoncé dans la partie 2.3.2, les calculs ne sont pas menés avec  $\sigma \gg 10$  car les solutions exactes ne sont pas correctement définies numériquement pour ces échelles, en particulier les fonctions exponentielles intervenant dans (2.36).

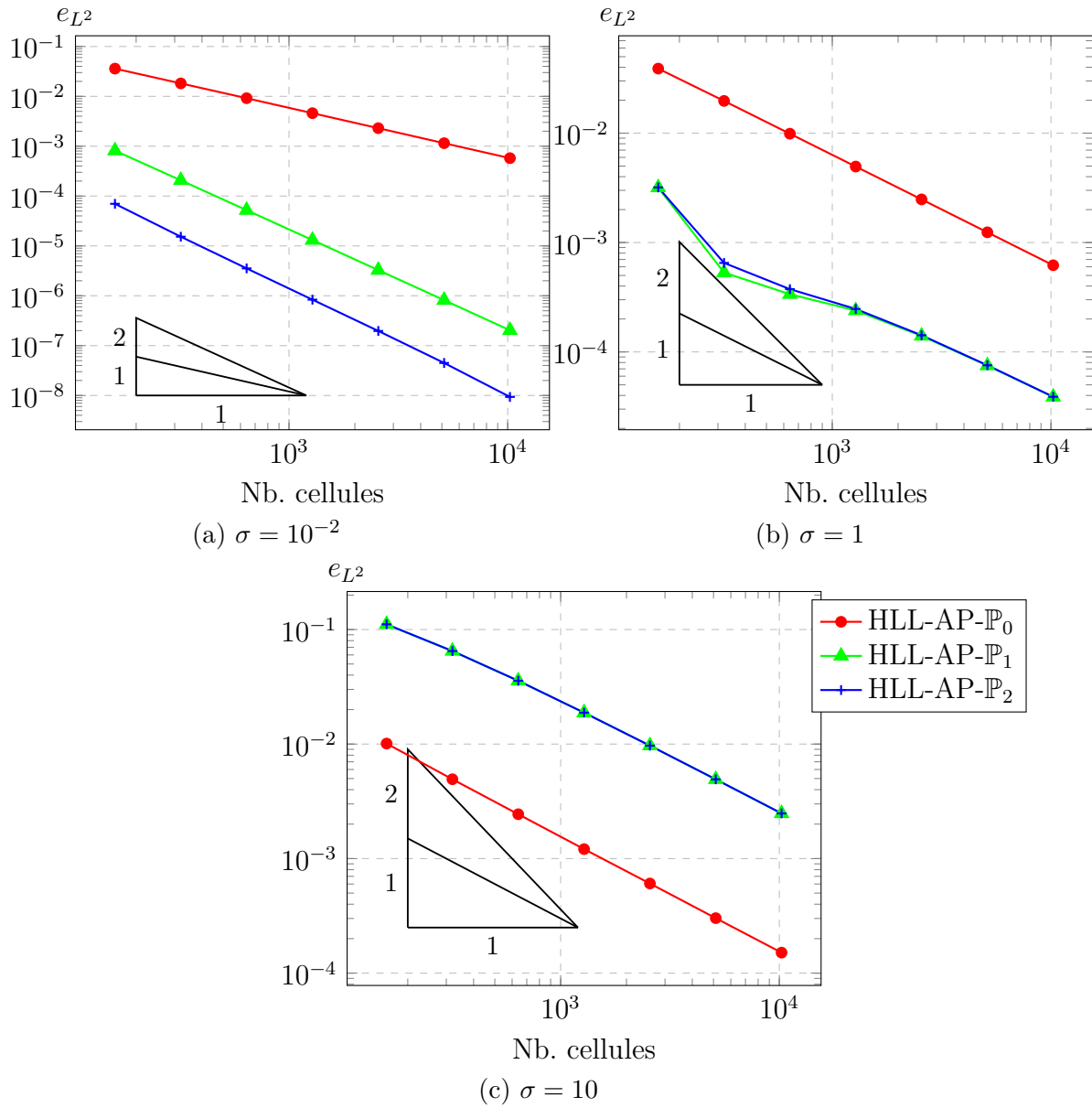


FIGURE 2.9 – Graphes d’erreurs pour le schéma HLL-AP

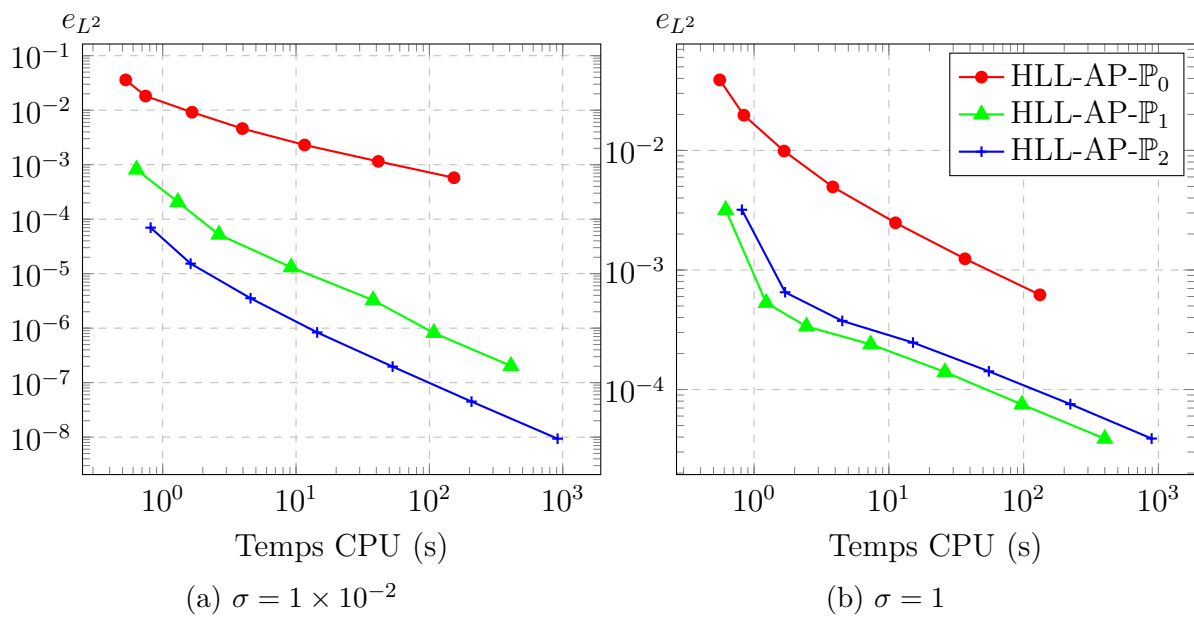


FIGURE 2.10 – Graphe d’erreurs en fonctions du temps CPU pour le schéma HLL-AP

### 2.4.3 Convergence vers la diffusion

À la suite des résultats dans des régimes intermédiaires avec des solutions discontinues et continues, on s'intéresse maintenant à la convergence vers la limite de diffusion (1.4). Pour cela, on compare les résultats obtenus par le schéma HLL-AP sur le système de lois de conservation avec terme source (1.1) à ceux obtenus par le schéma à deux points (1.33) sur l'équation limite (1.4).

Plusieurs remarques peuvent être faites sur l'utilisation d'une telle technique. Tout d'abord, il n'est pas possible de l'utiliser pour effectuer un tableau de convergence en maillage comme dans la partie 2.4.2 car la limite de diffusion n'est jamais atteinte. De plus, le schéma HLL-AP tout comme le système avec terme source reste globalement « hyperbolique ». Ensuite, cette méthode n'est pas utilisable avec une solution exacte de l'équation de diffusion car, comme précédemment, des solutions exactes de l'équation de diffusion font généralement intervenir des fonctions exponentielles qui ne sont pas calculables pour des grandes échelles de  $\gamma t$ .

Le cas test utilisé pour cette convergence vers la limite de diffusion est construit avec le modèle  $M_1$  pour le transfert radiatif (1.17). On se place sur le domaine  $[0; 1]$  maillé grossièrement avec 100 mailles. Une condition de type Neumann est appliquée sur les bords. La condition initiale est une fonction gaussienne en température dont les paramètres ont été choisis de telle sorte que la partie centrale ne touche pas les bords pour tout temps :

$$T_0(x) = 300 \left( \exp \left( -\frac{(x - 1/2)^2}{2 \times 0.05^2} \right) + 1 \right).$$

On se place sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M}$  avec une énergie radiative :  $E_{R,0}(x) = aT_0^4(x)$  et un flux radiatif  $\mathbf{F}_{R,0}$  nul. Les constantes  $\rho$  et  $C_v$  intervenant dans le modèle  $M_1$  sont choisies pour que  $\rho C_v = 10^{-4}$ .

Dans le Tableau 2.4, les erreurs relatives en norme  $L^2$  entre la solution obtenue par différents schémas et celle du schéma à deux points pour l'équation limite (2.12) sont calculées pour différents  $\gamma t$  :

$$e_{L^2}^2(\gamma t) := \frac{\sum_i (\mathbf{Q}U_i - u_i)^2}{\sum_i u_i^2}. \quad (2.40)$$

On observe dans ce tableau que les quatre schémas HLL-AP convergent vers la limite de diffusion. Ceci est dû au fait que ces schémas ont la même limite quand  $\gamma t \rightarrow \infty$  grâce à la définition du coefficient  $\beta$  (2.20) créant la combinaison convexe. On a aussi ajouté dans ce tableau le schéma HLL-NoAP qui est identique au schéma HLL-AP (2.1) mais où la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  (2.11) est fixée à zéro. Le schéma limite obtenu n'est alors pas consistant avec la limite de diffusion. Le dernier schéma noté HLL-SRC présenté dans

$\sigma^a, \sigma^e, \sigma^f$	0.1	0.5	2.5	12.5	62.5	312.5
$ct$	1	2	4	8	16	32
$\gamma t = c\sigma^m t$	$10^{-1}$	1	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$
$\beta$ (2.20)	9.80E-01	8.33E-01	3.33E-01	4.76E-02	4.98E-03	5.00E-04
Schémas	Erreurs- $L^2$ relatives par rapport à la diffusion (2.40)					
HLL-AP (2.1)	1.57E-01	1.20E-01	7.87E-02	3.32E-02	5.31E-03	5.32E-04
HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ (2.21)	1.57E-01	1.20E-01	7.86E-02	3.30E-02	5.16E-03	4.99E-04
HLL-AP- $\mathbb{P}_2$ (2.21)	1.56E-01	1.19E-01	7.83E-02	3.28E-02	5.00E-03	4.64E-04
HLL-AP- $\mathbb{P}_3$ (2.21)	1.57E-01	1.20E-01	7.85E-02	3.29E-02	5.01E-03	4.64E-04
HLL-NoAP ( $\bar{\gamma} = 0$ )	1.57E-01	1.20E-01	7.86E-02	3.15E-02	4.92E-03	1.12E-02
HLL-SRC (2.41)	1.57E-01	1.20E-01	8.26E-02	4.96E-02	2.31E-02	3.24E-02

TABLEAU 2.4 – Convergence vers la limite de diffusion en 1D pour  $\gamma t$  croissant avec  $\Delta x = 1 \times 10^{-2}$

ce tableau utilise une discrétisation centrée du terme source de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}) + \Delta t \gamma (\mathbf{U}_i^n) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{U}_i^n). \quad (2.41)$$

On observe bien numériquement ce qui peut aussi être prouvé théoriquement : ce schéma n'est pas AP car il ne tend pas vers un schéma consistant pour l'équation limite.

On peut aussi observer la convergence vers la limite de diffusion sur la Figure 2.11. On retrouve ainsi une approximation de la vitesse de convergence à l'équilibre (1.11). La légère différence avec la pente théorique de  $3/4$  peut s'expliquer par le fait que la solution  $u$  de l'équation limite est approchée et non exacte.

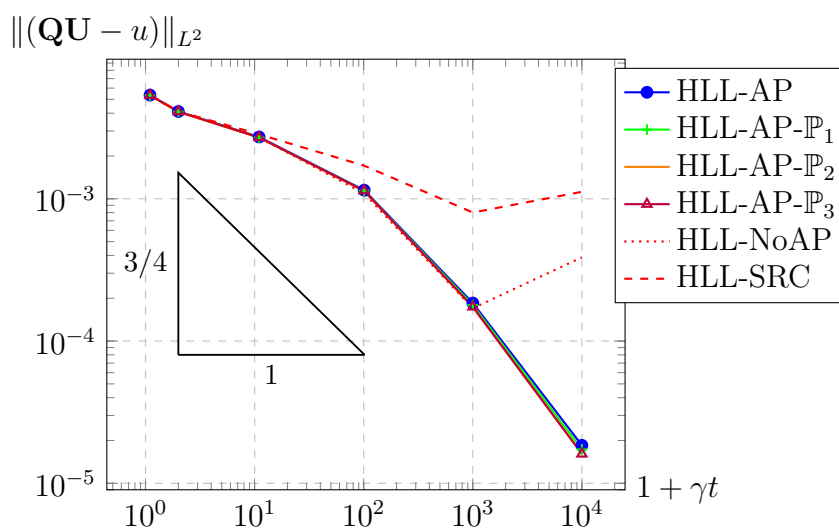


FIGURE 2.11 – Vitesse de convergence vers la limite de diffusion en 1D pour  $\gamma t$  croissant avec  $\Delta x = 1 \times 10^{-2}$



### 2.4.4 Vitesses de convergence

Afin de vérifier que le schéma respecte les vitesses de convergence vers l'équilibre (1.9) et (1.10), on réalise le test suivant sur le modèle d'Euler isentropique avec friction (1.21). L'initialisation est une gaussienne en densité :

$$\rho_0(x) = \exp(-(x - 50)^2) + 1,$$

avec une vitesse nulle afin de se placer sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M}$ . Le domaine de calcul est le segment  $[0; 100]$  maillé avec 2000 mailles et on utilise des conditions aux bords de type Neumann. Le temps final de la simulation est  $t_f = 100$  et on prend deux coefficients de friction  $\kappa = 1$  et  $5$ . Tous ces paramètres sont choisis afin que la solution ne touche pas les bords à la fin du calcul.

Sur les Figures 2.12 et 2.13, on a tracé les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  de la densité (moins sa valeur à l'équilibre  $\rho_E = 1$ ) et de la quantité de mouvement au cours du temps. On observe ainsi que ces deux quantités décroissent bien avec les bons taux dans les deux normes pour les deux choix de coefficients de friction. Ces résultats sont obtenus avec le schéma HLL-AP d'ordre un ( $\mathbb{P}_0$ ) et le schéma utilisant les reconstructions polynomiales de degré un ( $\mathbb{P}_1$ ). On notera que les deux schémas permettent d'obtenir les bons taux de convergence. Au vu de la taille du domaine, on a adapté la valeur de la longueur caractéristique  $\Delta_l$  intervenant dans le calcul de  $\beta$  (2.20) en la multipliant par la longueur du segment, soit  $\Delta_l = 5$ .

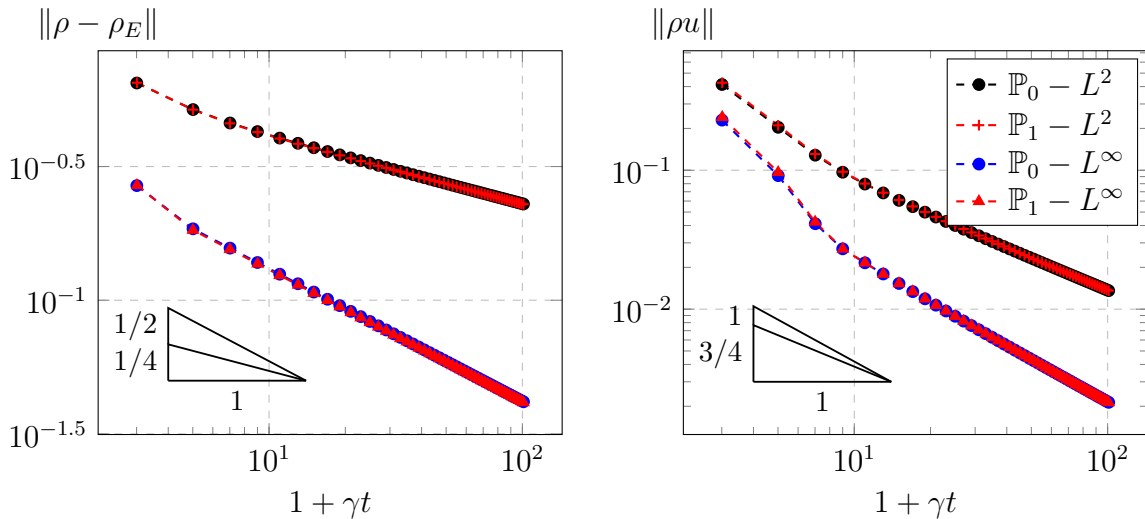


FIGURE 2.12 – Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec  $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$  et  $\kappa = 1$  en 1D

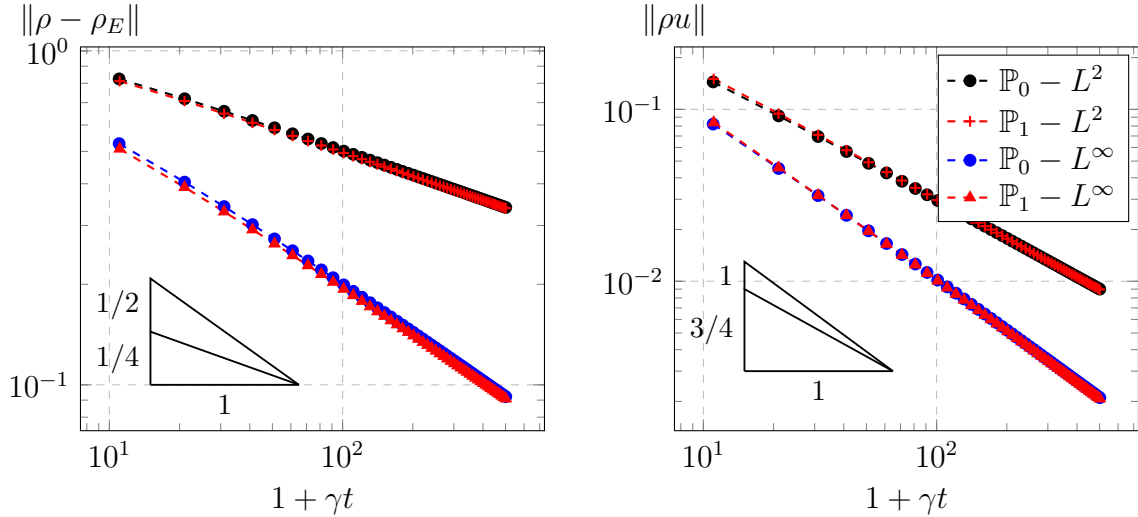


FIGURE 2.13 – Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec  $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$  et  $\kappa = 5$  en 1D

### 2.4.5 Chocs radiatifs

Un cas test classique pour la validation de code d'hydrodynamique radiative (1.20) est la simulation des chocs radiatifs [ZR66 ; Pom73 ; MW84]. Ils peuvent se créer lors de l'effondrement de supernovae et il est possible de les reproduire à une échelle plus petite en laboratoire à l'aide de lasers [BTLB+86 ; Vin06 ; GSA+06]. Une manière de les modéliser est de considérer un milieu homogène avec un fluide se déplaçant de droite à gauche. Le fluide rencontre une paroi à gauche ce qui crée une onde de choc qui se déplace alors de gauche à droite. Cette modélisation a été utilisée dans [Ens94 ; HN03b ; Gon06 ; GAH07], on prendra les solutions obtenues dans ces travaux comme référence. Il est possible d'obtenir des solutions pseudo analytique en suivant la méthode de [LE08] mais celle-ci n'utilise pas tout à fait le même formalisme pour l'hydrodynamique radiative.

En fonction de la vitesse d'arrivée du fluide, deux catégories de chocs peuvent se créer : les subcritiques et les supercritiques.

Pour les deux simulations qui vont suivre on se place avec une opacité constante :  $\sigma = 3,1 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1}$ . On considère que le fluide est un gaz parfait avec un coefficient adiabatique  $\gamma = 1,4$  et une masse molaire  $M = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ . À l'état initial, sa densité est  $\rho_0 = 7,78 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  avec une température  $T_0 = 10 \text{ K}$ . Finalement, le domaine de calcul est de longueur  $7 \times 10^8 \text{ m}$  avec une condition de bord réflexive à gauche et une sortie à droite. Cette modélisation des chocs radiatifs est volontairement simplifiée afin de pouvoir se comparer aux références. Une simulation plus complète demanderait une opacité non constante et une prise en compte de la chimie.

Afin de faciliter la comparaison des résultats avec les références, les figures qui suivent sont tracées avec  $z := x - u_0 t$  en abscisse où  $x$  est la position,  $u_0$  la vitesse initiale et  $t$  le temps de simulation. En plus de la température matière  $T$ , on trace aussi la température

radiative  $T_R := \left(\frac{E_R}{a}\right)^{1/4}$ , on pourra noter que ces deux quantités sont égales quand on se situe à l'équilibre radiatif. Comme dans les références, on utilise un maillage de 300 mailles pour un pas d'espace de l'ordre de  $2,33 \times 10^6$  m mais aussi un avec 1200 mailles ( $\Delta x \simeq 5,83 \times 10^5$  m).

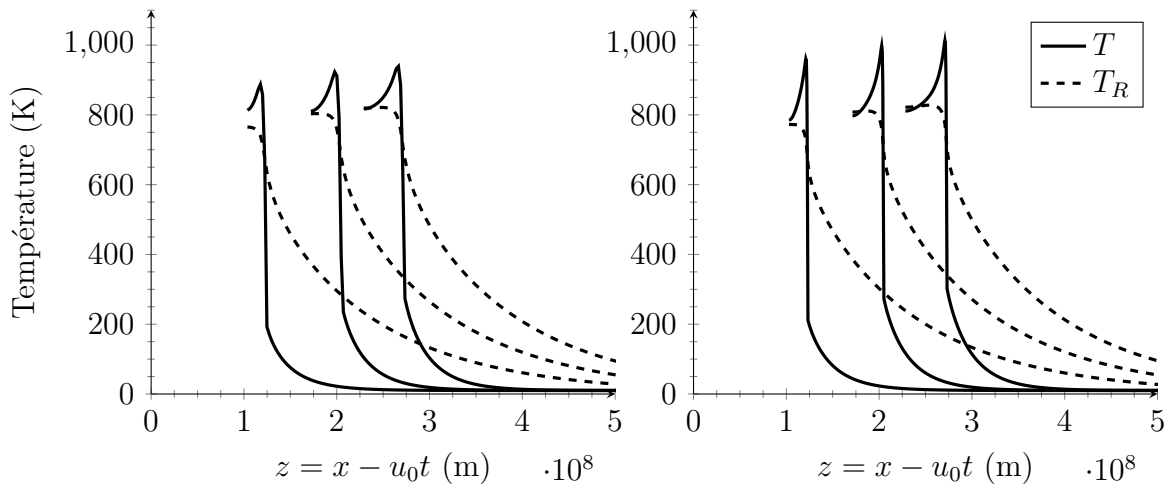
Un dernier point qu'il est important de préciser avant de présenter les résultats est le fait que toute la discrétisation est explicite. Or, les vitesses d'ondes de la partie hydrodynamique sont de l'ordre de la vitesse du fluide qui est bien inférieure aux vitesses du transfert radiatif qui s'approchent de la vitesse de la lumière. Ainsi, afin de pas avoir une diffusion numérique trop importante sur la partie hydrodynamique, on décompose la partie hyperbolique du flux HLL-AP en une partie hydrodynamique et une partie radiative avec chacune leurs vitesses d'ondes. Ceci est possible car on peut négliger la pression radiative face à la pression matière dans de telles configurations, ce qui implique que le couplage s'effectue uniquement par le terme source. La discrétisation de celui-ci se faisant toujours de la même manière à l'aide de (2.2).

### Chocs subcritiques

Le premier cas se place avec une vitesse initiale  $u_0 = -6 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  afin de créer un choc subcritique. Les résultats obtenus pour la température et la température radiative sont présentés dans la Figure 2.14. On observe qu'ils sont en accords avec ceux obtenus dans les références précédemment citées. Ainsi, on peut voir un précurseur sur la température qui est dû au rayonnement provenant de la partie chaude à gauche. De plus, on note les températures matière  $T$  et radiative  $T_R$  sont du même ordre mais différent sur une grande partie du domaine.

Dans les deux cas, la présence du pic de température matière au niveau du choc est parfaitement physique et peut se justifier mathématiquement [CG09; CGLL12]. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques capables de capturer ses pics sans les détériorer.

On notera que les deux cas de chocs radiatifs que l'on présente sont proches de la limite de diffusion. Par exemple pour celui-ci on a  $\gamma = c\sigma \simeq 9,3 \text{ s}^{-1}$  et le temps final de la simulation est  $t_f = 3,8 \times 10^4 \text{ s}$ , ce qui conduit à  $\gamma t \Delta x \simeq 8,2 \times 10^{11} \text{ m}$  dans le cas du calcul avec 300 mailles. Il est alors impossible d'utiliser l'ordre élevé grâce à la combinaison convexe avec le  $\beta$  car il tend vers zéro dans cette configuration. Ceci est problématique car on voit bien dans les Figures 2.14 et 2.15 qu'il aurait été intéressant d'avoir le schéma d'ordre élevé dans le but de mieux décrire les phénomènes proches des discontinuités.

(a) 300 cellules,  $\Delta x \simeq 2,33 \times 10^6$  m(b) 1200 cellules,  $\Delta x \simeq 5,83 \times 10^5$  mFIGURE 2.14 – Températures matière ( $T$ ) et radiative ( $T_R$ ) pour un choc radiatif subcritique à  $1,7 \times 10^4$ ,  $2,8 \times 10^4$  et  $3,8 \times 10^4$  s

### Chocs supercritiques

Afin de simuler un choc supercritique, on se place maintenant avec une vitesse initiale  $u_0 = -2 \times 10^4$  m · s<sup>-1</sup>. Comme dans le cas subcritique, on présente les résultats sur 300 et 1200 mailles dans la Figure 2.15. Ici, un choc plus important se forme avec un pic significatif à l'avant et cet échauffement préchauffe largement le côté droit du domaine. Contrairement au choc subcritique, l'équilibre  $T \simeq T_R$  est présent sur une plus grande partie du domaine.

De même que pour le choc précédent, ce cas se place aussi en régime de diffusion et le coefficient  $\beta$  ne permet pas de récupérer l'ordre élevé. On présente donc uniquement les résultats obtenus par le schéma à l'ordre un.

### 2.4.6 Conclusion

Au travers des différents cas tests avec le schéma HLL-AP d'ordre élevé on a pu voir que la précision est augmentée dans des régimes proches de la convection et qu'il est toujours précis proche de la diffusion grâce à son caractère AP. De plus, il est capable d'obtenir des solutions raisonnables dans toutes les configurations testées, que ce soit avec des solutions continues ou discontinues. On notera que le choix empirique du coefficient  $\beta$  (2.20) est indépendant du cas test et fonctionne dans toutes les configurations testées, sauf pour les chocs radiatifs qui montrent les limites de cette combinaison convexe.

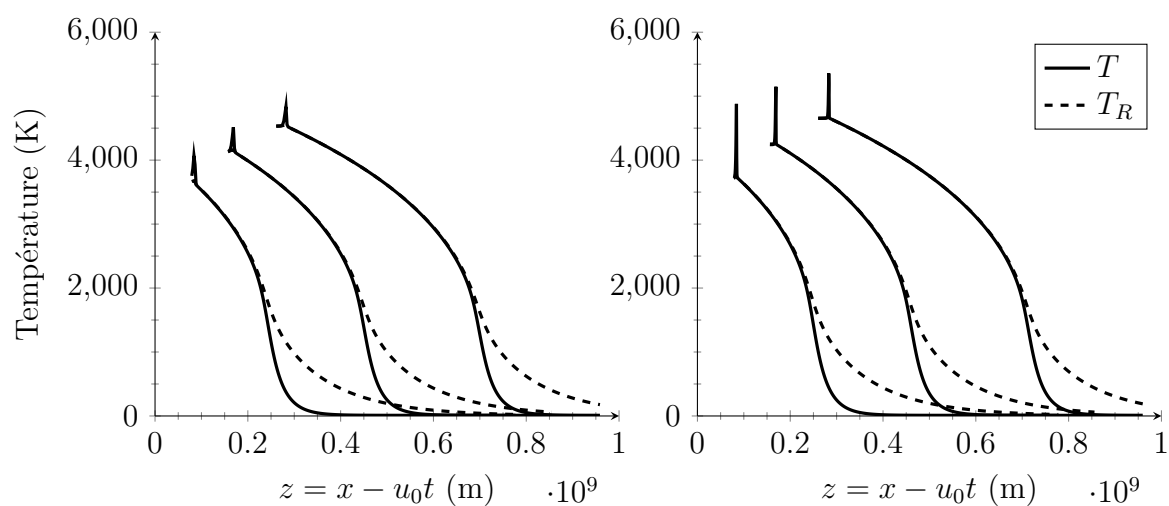
(a) 300 cellules,  $\Delta x \simeq 2,33 \times 10^6$  m(b) 1200 cellules,  $\Delta x \simeq 5,83 \times 10^5$  m

FIGURE 2.15 – Températures matière ( $T$ ) et radiative ( $T_R$ ) pour un choc radiatif supercritique à  $4 \times 10^3$ ,  $7,5 \times 10^3$  et  $1,3 \times 10^4$  s



# 3

## Schéma 2D hyperbolique adapté pour l'AP

### Introduction

Dans le chapitre précédent, on a rappelé et étendu à l'ordre élevé le schéma HLL-AP dans un cadre 1D. La suite de cette thèse s'intéresse maintenant à des calculs sur des maillages 2D non structurés. Afin d'obtenir des solutions approchées au système avec terme source (1.1), on commence tout d'abord par introduire un nouveau schéma volumes finis pour la discrétisation du système homogène (1.2). Cette première discrétisation va se faire en ayant à l'esprit que l'on va ensuite ajouter le terme source avec la méthode de BERTHON et TURPAULT utilisée pour le schéma HLL-AP (2.1) en 1D. Pour que cet ajout puisse se faire aisément, le schéma que l'on souhaite obtenir pour le système homogène doit :

- (PI) conserver l'ensemble des états admissibles,
- (PII) avoir une diffusion numérique orientée selon la normale aux interfaces,
- (PIII) être une extension d'un solveur de Riemann approché à deux points, par exemple RUSANOV [Rus61], HLL [HLL83], HLLC [Tor09 ; TSS94 ; BCD07] ou encore GODUNOV [God59].

La propriété (PI), tout comme la propriété (P1), permet de conserver un système et des solutions physiquement et mathématiquement valables au cours des calculs. On a vu que l'extension naïve du schéma HLL-AP en 2D dégénère à la limite quand  $\gamma t \rightarrow \infty$ , vers le schéma FV4 (1.35) qui n'est pas consistant sur des maillages généraux [Sar13 ;

BMST16]. Afin de construire un schéma qui dégénère correctement en limite de diffusion, on va lui imposer la propriété (PII) pour que la discrétisation du gradient de la solution soit consistante à la limite. Il est nécessaire que la diffusion numérique s'effectue dans la bonne direction car la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  permet uniquement de modifier le coefficient de la diffusion mais pas sa direction. Cette difficulté n'apparaissait pas en 1D mais prend tout son sens en 2D dès que les maillages ne sont plus admissibles (voir Définition 1.1). De plus, le fait d'avoir une diffusion numérique correctement orientée permet d'obtenir des solutions plus précises sur maillage très déformé. Enfin, la troisième propriété (PIII) va permettre d'obtenir une formulation dont il sera facile de prouver les propriétés à partir des schémas sous-jacents.

Par exemple, le schéma développé dans [BMT14 ; BMST16] possède les deux dernières propriétés mais ne conserve l'ensemble des états admissibles sur maillage non structuré que sous une condition géométrique. La seconde propriété a été obtenue en utilisant un flux numérique qui inclut une discrétisation du gradient de la solution via l'utilisation du schéma diamant [CVV99].

Ce troisième chapitre se compose alors de la manière suivante : la partie 3.1 décrit un cadre général afin d'obtenir un schéma numérique possédant les trois propriétés demandées. De plus, on prouvera sa stabilité sous une condition CFL hyperbolique classique en le réécrivant comme une combinaison convexe de schémas 1D. Ensuite, on exhibe un schéma qui rentre dans le cadre présenté dans la partie 3.1, via une reconstruction basée sur la technique utilisée par DRONIOU et LE POTIER [DLP11] pour des équations de diffusion. Pour cela, on rappelle d'abord leur schéma et on l'adapte au cadre hyperbolique. On verra que ce nouveau schéma HLL-DLP vérifie uniquement les deux dernières propriétés demandées (PII)-(PIII) et qu'on utilisera une correction *a posteriori* de type MOOD pour conserver l'ensemble des états admissibles (PI). La version d'ordre élevé du schéma précédent est construite dans la partie 3.3 en utilisant toujours la méthode MOOD pour les reconstructions polynomiales et le principe de la limitation *a posteriori*. Finalement, la partie 3.4 permet de montrer les résultats obtenus par ce nouveau schéma sur des cas tests classiques de la littérature pour des systèmes hyperboliques homogènes. On observera en particulier la bonne orientation de la diffusion numérique et le faible nombre d'activations de la correction nécessaire pour préserver l'ensemble des états admissibles.

### 3.1 Cadre général

On rappelle que le formalisme que l'on utilise pour un schéma volumes finis explicite conservatif discrétisant le système hyperbolique (1.2) est :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}. \quad (1.27)$$

On se propose de généraliser le Théorème 1.1 qui exhibe une condition CFL pour le schéma à deux points en 2D (1.29) ( $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{KL}$ ). Cette généralisation va permettre d'obtenir un schéma possédant les trois propriétés énoncées précédemment (PI)-(PII)-(PIII). Pour cela, on démontre le théorème qui suit :

**Théorème 3.1.** *On suppose que le flux numérique conservatif  $\mathcal{F}_i$  de (1.27) vérifie les hypothèses suivantes :*

(H1) *il est consistant :*

$$\text{si } \forall K \in \mathcal{M}, \mathbf{U}_K^n = \mathbf{U} \text{ alors } \forall K \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{E}_K, \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{K,i},$$

(H2) *il peut s'écrire comme une combinaison à poids positifs de solveurs de Riemann approchés à deux points :*

$$\forall K \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{E}_K, \forall J \in \mathcal{S}_{K,i}, \exists \nu_{K,i}^J \geq 0 \text{ tels que :}$$

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ},$$

avec  $\mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \mathcal{F}(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_J; \boldsymbol{\eta}_{KJ}) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$  un solveur de Riemann approché à deux points 1D utilisé dans la direction  $KJ$ , par exemple un flux de RUSANOV (1.28),

(H3) *les poids utilisés dans la combinaison précédente vérifient :*

$$\forall K \in \mathcal{M} :$$

$$\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \boldsymbol{\eta}_{KJ} = 0,$$

avec  $\mathcal{S}_{K,i}$  l'ensemble des cellules utilisées pour calculer les flux sur l'interface  $i$  et  $\boldsymbol{\eta}_{KJ}$  un vecteur unitaire normal sortant à  $K$ .

Alors, le schéma (1.27) avec un flux vérifiant les trois hypothèses est stable et préserve l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  sous la condition CFL qui suit :

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ J \in \mathcal{E}_K}} \left( b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_K} \right) \leq 1, \quad (3.1)$$

où  $b_{KJ}$  est une vitesse plus grande que toutes les vitesses d'ondes entre les états  $\mathbf{U}_K$  et  $\mathbf{U}_J$ ,  $\delta_K$  est une longueur caractéristique qui intervient dans la preuve :

$$\delta_K = \frac{|K|}{\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J}, \quad (3.2)$$



et  $\bar{\mathcal{E}}_K$  est le stencil de la cellule  $K$ .

De plus, si  $\mathcal{F}_{KJ}$  est le flux d'un schéma 1D entropique alors, le schéma (1.27) avec un flux vérifiant les hypothèses est entropique.

*Démonstration.* Ce théorème est une généralisation du Théorème 1.1 avec un flux plus générique et, tout comme pour la démonstration de celui-ci on va utiliser une combinaison convexe de schémas 1D possédant les bonnes propriétés.

Avec l'hypothèse (H2), le schéma (1.27) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_K^{n+1} &= \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i^n \cdot \mathbf{n}_{K,i} \\ &= \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En inversant les deux sommes de l'expression précédente, on obtient :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \left( \sum_{i \in \bar{\mathcal{S}}_{KJ}} |e_i| \nu_{K,i}^J \right) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}. \quad (3.3)$$

Dans cette dernière expression, on a introduit :

- $\bar{\mathcal{E}}_K = \cup_{i \in \mathcal{E}_K} \mathcal{S}_{K,i}$  le stencil de la cellule  $K$ ,
- $\bar{\mathcal{S}}_{KJ} = \{i/J \in \mathcal{S}_{K,i}\}$  l'ensemble des indices d'interface de la cellule  $K$  qui utilisent la cellule  $J$  pour reconstruire le flux.

On pourra se référer à la partie 3.2.1, en particulier, à la Figure 3.3 et aux exemples proposés pour illustrer ces ensembles de points. On définit ensuite la quantité :

$$d_{KJ} := \sum_{i \in \mathcal{S}_{KJ}} |e_i| \nu_{K,i}^J \geq 0, \quad (3.4)$$

homogène à une longueur pour obtenir l'expression suivante à partir de (3.3) :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} d_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}.$$

Maintenant, afin de réécrire le schéma comme une combinaison convexe de schéma 1D, on choisit le paramètre de la combinaison convexe  $\omega_{KJ}$  comme :

$$\omega_{KJ} := \frac{d_{KJ}}{\sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} d_{KJ}}. \quad (3.5)$$

On a bien  $\omega_{KJ} \geq 0$  et  $\sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} = 1$ . On peut alors écrire le schéma de la manière suivante :

$$\sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \mathbf{U}_K^{n+1} = \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \left( \omega_{KJ} \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} d_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \right).$$

Cette dernière expression peut se simplifier en introduisant le paramètre  $\delta_K$  (3.2) que l'on reformule, en inversant les sommes et en utilisant la définition de  $d_{KJ}$  (3.4), pour obtenir :

$$\delta_K = \frac{|K|}{\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J} = \frac{|K|}{\sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} d_{KJ}} \quad (3.2)$$

Ce paramètre est homogène à une longueur et jouera le rôle d'un pas d'espace. Il peut être mis en lien avec celui introduit dans la démonstration du Théorème 1.2 à l'équation (1.37). Avec la définition (3.2) de  $\delta_K$ , le schéma s'écrit finalement :

$$\sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \mathbf{U}_K^{n+1} = \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \left( \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{\delta_K} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \right). \quad (3.6)$$

Cette dernière écriture est une combinaison convexe mais il manque un terme permettant de jouer le rôle de  $\mathcal{F}_{i-1/2}$  afin d'avoir une combinaison de schémas 1D. Pour cela, on reprend l'hypothèse (H3), qui se reformule de la manière suivante avec les différents coefficients que l'on a introduit jusque-là :

$$\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \boldsymbol{\eta}_{KJ} = 0 \iff \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} d_{KJ} \boldsymbol{\eta}_{KJ} = 0.$$

Cette hypothèse peut alors être vue comme une condition de fermeture des cellules « virtuelles ». Ces cellules « virtuelles » sont des polygones de côté  $d_{KJ}$  avec des normales sortantes  $\boldsymbol{\eta}_{KJ}$ . Cette expression est à mettre en parallèle avec la formule de la divergence utilisée dans le Théorème 1.1. Tout comme dans ce théorème, on utilise alors cette égalité afin d'ajouter un flux « à gauche » via l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta t}{|K|} \mathbf{F}(\mathbf{U}_K^n) \cdot \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} d_{KJ} \boldsymbol{\eta}_{KJ} = 0.$$

Puis, en utilisant la définition du paramètre de la combinaison convexe  $\omega_{KJ}$  et de  $\delta_K$  (3.2), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \frac{\Delta t}{|K|} d_{KJ} \mathbf{F}(\mathbf{U}_K^n) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} \mathbf{F}(\mathbf{U}_K^n) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ &= \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} \mathcal{F}_{KK} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où  $\mathcal{F}_{KK} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_K^n)$  car le solveur de Riemann approché à deux points  $\mathcal{F}$  est consistant.

Finalement, en ajoutant l'égalité (3.7) dans la dernière formulation du schéma (3.6), l'expression finale du schéma est :

$$\sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \mathbf{U}_K^{n+1} = \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \left( \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} [\mathcal{F}_{KJ} - \mathcal{F}_{KK}] \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \right).$$

Cette dernière version du schéma est bien une combinaison convexe de schémas 1D, de la même manière que la combinaison (1.31) dans le Théorème 1.1. Ainsi, on retrouve  $\mathbf{U}_K$  sur la cellule de gauche et au centre et  $\mathbf{U}_J$  sur la droite, comme on peut le voir sur la Figure 3.1 (à mettre en lien avec la Figure 1.4).

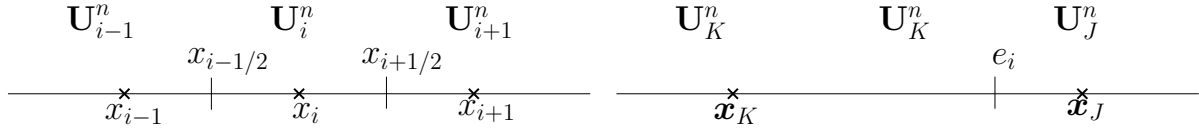


FIGURE 3.1 – Représentation des états 1D et 2D

De ce fait, le schéma est stable et préserve l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  sous la condition CFL liée aux solveurs de Riemann approchés à deux points  $\mathcal{F}_{KJ}$  :

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ J \in \mathcal{E}_K}} \left( b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_K} \right) \leq 1, \quad (3.1)$$

où  $b_{KJ}$  est une vitesse plus grande que toutes les vitesses d'ondes du flux  $\mathcal{F}_{KJ}$  et  $\delta_K$ , défini par (3.2), joue le rôle d'un pas d'espace. Tout comme pour le Théorème 1.1, cette condition CFL est majorée par un car l'état  $\mathbf{U}_K$  intervient deux fois à gauche.

De plus, toutes les propriétés relevant de la convexité sont également directement héritées du solveur 1D  $\mathcal{F}$ . Par exemple, le schéma est entropique si le flux  $\mathcal{F}_{KJ}$  est le flux d'un schéma 1D entropique.  $\square$

Le Théorème 3.1 que l'on vient de démontrer fournit un cadre général permettant de construire des schémas préservant l'ensemble des états admissibles sous une CFL classique avec des solveurs de Riemann approchés à deux points. Les schémas vérifiant ce théorème possèdent donc automatiquement les propriétés (PI) et (PIII). Il reste maintenant à choisir un flux vérifiant les trois hypothèses du théorème et avec une diffusion numérique orientée selon la normale (PII).

Le flux à deux points classique (1.29) vérifie parfaitement les trois hypothèses du théorème mais il ne vérifie pas la propriété (PII) car, par exemple, avec le flux de Rusanov (1.28) la diffusion numérique fait intervenir :  $\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_K$ . Cette dernière est orientée selon la direction  $KL$  et non selon la normale  $\mathbf{n}_{K,i}$  (sauf si le maillage est admissible cf. Définition 1.1). Comme énoncé précédemment, cela ne conduira donc pas à un schéma AP sur des maillages généraux. En outre, la qualité de la solution sera dégradée sur des maillages très anisotropes.

Avant de présenter un flux possédant une diffusion numérique mieux orientée, on précise les ensembles de points utilisés dans le Théorème 3.1 pour le flux à deux points. Ainsi, pour ce flux il est uniquement utilisé un point dans l'ensemble  $\mathcal{S}_{K,i}$  qui se réduit à la cellule  $L$  avec  $\nu_{K,i}^L = 1$ . Le vecteur unitaire  $\boldsymbol{\eta}_{KL}$  n'est rien d'autre que la normale sortante  $\mathbf{n}_{K,i}$  et la longueur  $\delta_K$  est égale au pas d'espace 2D :  $\Delta x_K = \frac{|K|}{p_K}$ . Le stencil

de la cellule  $K$ , noté  $\bar{\mathcal{E}}_K$ , est réduit à l'ensemble de ses voisins par les interfaces  $\mathcal{E}_K$ . Finalement, chaque ensemble  $\bar{\mathcal{S}}_{KL}$  comporte un indice d'interface, celui séparant les cellules  $K$  et  $L$ .

## 3.2 Construction du flux HLL-DLP

On va maintenant construire dans cette partie un schéma possédant une diffusion numérique dans la direction normale aux interfaces pour obtenir la propriété (PII). Pour cela, on s'inspire de la technique utilisée par DRONIOU et LE POTIER pour les équations elliptiques, que l'on adaptera à la discrétisation du système hyperbolique homogène (1.2). Avant de décrire cette extension, on rappelle d'abord la manière utilisée dans [DLP11] pour obtenir un schéma qui approche des équations de diffusion comme (1.4).

### 3.2.1 Présentation du schéma de Droniou et Le Potier

Le schéma de DRONIOU et LE POTIER (DLP) est un schéma non linéaire possédant la structure LMP (voir Définition 1.3). Il préserve donc le principe du maximum discret (Définition 1.2) et l'ensemble des états admissibles pour la diffusion  $\mathcal{A}_D$  sur tout maillage, ce qui en fait un schéma très adapté pour notre problématique. On rappelle que l'on se restreint à des équations de diffusion limites isotropes mais le schéma DLP permet de prendre en compte des anisotropies et des hétérogénéités fortes du coefficient de diffusion. Pour simplifier la présentation qui va suivre, on se restreint au cas isotrope homogène avec l'équation de Poisson. L'extension à une équation de diffusion s'en déduit en utilisant un schéma adapté pour la discrétisation temporelle.

Pour toute la présentation qui va suivre, on se place (sauf mention contraire) sur une interface  $i$  interne au maillage et on pourra se référer au travail original des auteurs pour plus de détails sur les calculs impliquant une interface de bord.

#### Interpolation

La première étape de la construction du schéma DLP dans un cadre isotrope, est l'introduction de deux points  $M$  par interface. Ainsi, le point  $M_{K,i}$  de coordonnées  $\mathbf{x}_{M_{K,i}}$  appartient à la demi-droite issue de  $\mathbf{x}_K$  (centre de la cellule  $K$ ) et de même direction que la normale  $\mathbf{n}_{K,i}$ . Il en va de même pour le point  $M_{L,i}$  de coordonnées  $\mathbf{x}_{M_{L,i}}$  appartenant à la demi-droite de direction  $\mathbf{n}_{L,i} = -\mathbf{n}_{K,i}$  et issue du centre de la cellule  $L$  ( $\mathbf{x}_L$ ). On peut voir un exemple de ces points sur la Figure 3.2. On remarque qu'il peut arriver que ces demi-droites ne croisent pas forcément les interfaces dans le cas où le maillage est très déformé.

Les coordonnées de ces deux points  $M_{K,i}$  et  $M_{L,i}$  peuvent être définies comme une combinaison convexe des coordonnées des centres de cellule appartenant à un voisinage

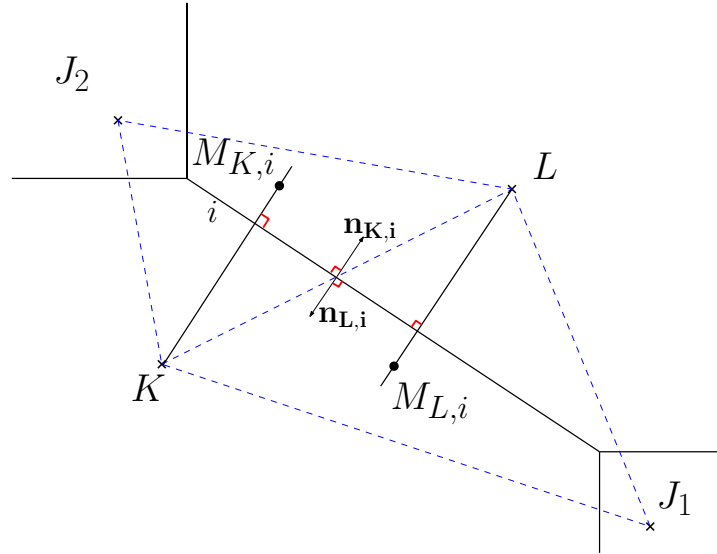


FIGURE 3.2 – Définition des points  $M$  par interface  $i$ . On observe que  $[KM_{K,i}]$  est orthogonale à l'interface  $i$  et que  $M_{K,i}$  appartient au triangle  $KLJ_2$  (et de même pour  $M_{L,i}$ ).

de  $K$  et  $L$ . Cette technique peut être utilisée pour définir les valeurs aux sommets dans la cadre du schéma diamant [CVV99]. On a ici :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{M_{K,i}} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} w_{K,i}^J \mathbf{x}_J \\ \mathbf{x}_{M_{L,i}} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} w_{L,i}^J \mathbf{x}_J \end{cases}, \quad (3.8)$$

où les coefficients des combinaisons convexes  $w_{K,i}^J$  et  $w_{L,i}^J$  sont positifs avec leur somme sur  $J$  égale à un :  $\sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} w_{K,i}^J = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} w_{L,i}^J = 1$ .

Un choix naturel et pratique consiste à utiliser les coordonnées barycentriques pour calculer les poids  $w_{K,i}^J$  et  $w_{L,i}^J$ . Si l'on se place avec trois points dans l'ensemble  $\mathcal{S}_{K,i}$  et que le point  $M_{K,i}$  est dans le triangle formé par ces trois points, il est alors évident que les trois coefficients  $w_{K,i}^J$  sont positifs et que leur somme fait un. Dans un cadre avec plus de points, il est possible d'utiliser les *mean value coordinates* de [Flo03; HF06; Flo14] afin d'obtenir des coordonnées barycentriques positives dès que les points  $M$  sont dans le noyau d'un polygone étoilé. Par exemple, sur la Figure 3.2, les points  $M$  sont dans des triangles mais il est aussi possible d'utiliser les quadrilatères formés par la réunion de deux triangles.

Il est toujours possible de placer les points  $M$  dans des triangles ou dans le noyau d'un polygone étoilé quitte à rapprocher les points de l'origine des demi-droites et à utiliser les points du bord pour créer les polygones. Afin que le schéma soit le plus précis possible, les points de  $\mathcal{S}_{K,i}$  doivent être choisis au plus près de  $K$  et  $L$ . Par ailleurs, on notera que  $L$  doit obligatoirement appartenir à  $\mathcal{S}_{K,i}$  mais pas forcément  $K$ . Pour les

tests numériques de ce mémoire, on utilisera uniquement des ensembles de points  $\mathcal{S}_{K,i}$  à trois points dont  $L$ .

Une fois que  $\mathcal{S}_{K,i}$  et les poids  $w_{K,i}^J$  sont choisis, la valeur de la solution aux points  $M$  est interpolée en utilisant la même combinaison convexe que dans (3.8) :

$$\begin{cases} u_{M_{K,i}} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} w_{K,i}^J u_J \\ u_{M_{L,i}} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} w_{L,i}^J u_J \end{cases}. \quad (3.9)$$

Ces nouvelles quantités complètent le catalogue des ensembles de points que l'on utilisera (certains ont déjà été introduits dans la preuve du Théorème 3.1). Les trois ensembles spécifiques à cette étude sont les suivants :

- $\mathcal{S}_{K,i}$  est l'ensemble des points utilisés pour reconstruire la valeur de la solution au point  $M_{K,i}$ . On notera que ces points ne sont pas forcément des voisins par interfaces de la cellule  $K$ .
- $\bar{\mathcal{E}}_K = \cup_{i \in \mathcal{E}_K} \mathcal{S}_{K,i}$  est l'ensemble des points utilisés pour reconstruire tous les points  $M_{K,i}$  pour une cellule  $K$  : le stencil de la cellule  $K$ .
- $\bar{\mathcal{S}}_{KJ} = \{i/J \in \mathcal{S}_{K,i}\}$  regroupe les indices des interfaces de  $K$  qui utilisent  $J$  pour reconstruire le point  $M_{K,i}$ .

Par exemple, on présente ci-après des ensembles de points construits avec le maillage de la Figure 3.3 :

- $\mathcal{S}_{K,i_3} = \{L_3, K, J_1\}$ ,
- $\bar{\mathcal{E}}_K = \{L_1, L_2, K, J_1, L_3, L_4, J_3, L_5\}$ ,
- $\bar{\mathcal{S}}_{KJ_1} = \{i_2, i_3\}$ .

D'un point de vue pratique, le calcul des quantités géométriques  $w_{K,i}^J$  est négligeable devant le coût global du schéma mis en place par la suite. Il est possible de comparer ce coût à celui de la génération de la table de connectivité d'un maillage non structuré 2D.

### Construction des flux numériques

Une fois les deux points  $M$  définis, on peut construire un flux numérique normal  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  approchant la valeur moyenne du gradient normal à travers l'interface  $i$  :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} \simeq \frac{1}{|e_i|} \int_i \nabla_i u \cdot \mathbf{n}_{K,i}.$$

Il permettra d'avoir un schéma pour la diffusion (1.34) consistant sur tout maillage et possédant le principe du maximum discret via la structure LMP. Ce flux conservatif  $\mathcal{F}_i$

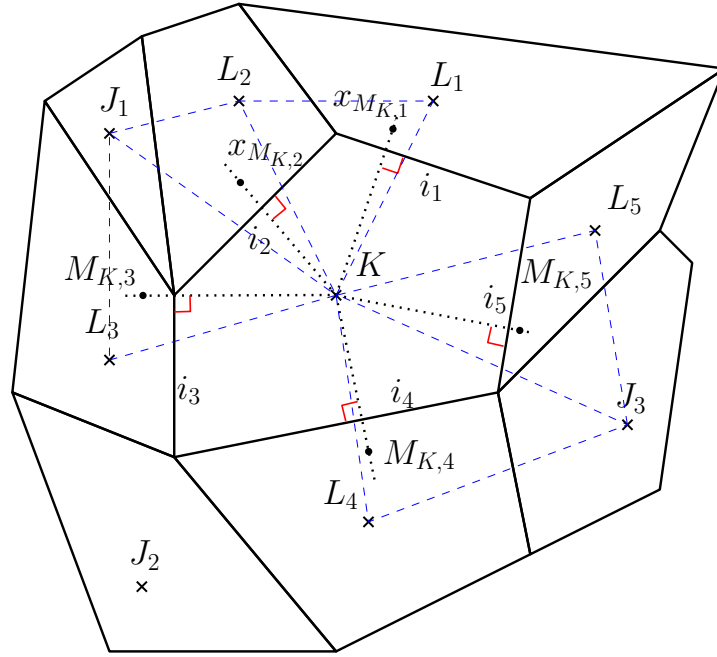


FIGURE 3.3 – Exemple d'ensembles de points  $\mathcal{S}_{K,i}$ . On observe que chaque demi-droite  $[KM_{K,i}]$  est orthogonale à l'interface  $i$  correspondante et que tous les points  $M_{K,i}$  se placent dans des triangles dont les sommets sont les centres de cellules dans un voisinage de  $K$ .

s'obtient par combinaison convexe de deux flux intermédiaires  $\mathcal{F}_{K,i}$  et  $\mathcal{F}_{L,i}$  respectivement sortant de  $K$  et de  $L$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \gamma_{K,i}(u) \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \gamma_{L,i}(u) \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} \\ &= \gamma_{K,i}(u) \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \gamma_{L,i}(u) \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $\gamma_{K,i}(u)$  et  $\gamma_{L,i}(u)$  sont deux coefficients positifs dépendant *a priori* de la solution  $u$  avec  $\gamma_{K,i}(u) + \gamma_{L,i}(u) = 1$ . Pour avoir la structure LMP on va souhaiter que le flux  $\mathcal{F}_i$  s'écrive de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{v}_{K,i}^J(u) (u_J - u_K), \quad (3.11)$$

avec  $\bar{v}_{K,i}^J(u) \geq 0$ . Ainsi, les coefficients  $\tau_K^J$  de la structure LMP (Définition 1.3) seront aussi positifs.

Le but est alors de calculer les bonnes valeurs de  $\gamma_{K,i}$  et  $\gamma_{L,i}$  pour obtenir la structure LMP. On voit déjà que le schéma DLP est un schéma non linéaire car les coefficients  $\bar{v}$  dépendent de la solution  $u$ .

**Remarque 3.1.** Ces deux coefficients sont notés  $\gamma$  afin de respecter les notations de l'article original, mais n'ont aucun lien avec la fonction  $\gamma(\mathbf{U})$  du système de lois de conservation avec terme source (1.1).

Puisque  $M_{K,i}$  (respectivement  $M_{L,i}$ ) a été choisi pour que  $KM_{K,i}$  ( $LM_{L,i}$ ) soit colinéaire à  $\mathbf{n}_{K,i}$  ( $\mathbf{n}_{L,i}$ ), on peut choisir de définir  $\mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  ( $\mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i}$ ) qui approche la moyenne de  $\nabla_i u \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  ( $\nabla_i u \cdot \mathbf{n}_{L,i}$ ) en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{u_{M_{K,i}} - u_K}{\|\mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K\|} \\ \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{u_{M_{L,i}} - u_L}{\|\mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L\|} \end{cases}.$$

Ces deux approximations du gradient sont consistantes car  $KM_{K,i}$  ( $LM_{L,i}$ ) est colinéaire à la normale sortante  $\mathbf{n}_{K,i}$  ( $\mathbf{n}_{L,i}$ ). On réutilise ensuite l'interpolation de la solution aux points  $M$ ,  $u_{M_{K,i}}$  et  $u_{M_{L,i}}$  (3.9), pour obtenir l'expression suivante des flux :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K\|} \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} w_{K,i}^J (u_J - u_K) = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \tilde{w}_{K,i}^J (u_J - u_K) \\ \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L\|} \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} w_{L,i}^J (u_J - u_L) = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} \tilde{w}_{L,i}^J (u_J - u_L) \end{cases}.$$

Afin de pouvoir déterminer les coefficients  $\gamma$  de la formule (3.10) qui assurent la positivité des poids  $\bar{v}$  de (3.11), on introduit deux coefficients  $\beta_{K,i}$  et  $\beta_{L,i}$  strictement positifs. Puis, on réécrit les flux avec une partie à deux points entre  $K$  et  $L$  à laquelle s'ajoutent deux restes :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \beta_{K,i}(u_L - u_K) + G_{K,i}(u) \\ \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \beta_{L,i}(u_K - u_L) + G_{L,i}(u) \end{cases}.$$

Les restes  $G_{K,i}$  et  $G_{L,i}$  sont alors définis comme :

$$\begin{cases} G_{K,i}(u) := (\tilde{w}_{K,i}^L - \beta_{K,i})(u_L - u_K) + \sum_{J \in \{\mathcal{S}_{K,i} \setminus L\}} \tilde{w}_{K,i}^J (u_J - u_K) \\ G_{L,i}(u) := (\tilde{w}_{L,i}^L - \beta_{L,i})(u_L - u_L) + \sum_{J \in \{\mathcal{S}_{L,i} \setminus K\}} \tilde{w}_{L,i}^J (u_J - u_L) \end{cases}.$$

On retrouve ici le fait que  $L$  doit obligatoirement appartenir à  $\mathcal{S}_{K,i}$  pour que ces restes soient bien définis (de même pour  $K$  avec  $\mathcal{S}_{L,i}$ ). Certains coefficients de  $G_{K,i}$  et  $G_{L,i}$  peuvent être négatifs, il faut donc faire un choix de  $\gamma_{K,i}$  et  $\gamma_{L,i}$  qui permet de les compenser. DRONIOU et LE POTIER proposent :

$$\begin{cases} \gamma_{K,i}(u) = \frac{|G_{L,i}(u)|}{|G_{K,i}(u)| + |G_{L,i}(u)|} \\ \gamma_{L,i}(u) = \frac{|G_{K,i}(u)|}{|G_{K,i}(u)| + |G_{L,i}(u)|} \end{cases},$$



avec  $\gamma_{K,i}(u) = \gamma_{K,i}(u) := \frac{1}{2}$  si le dénominateur est nul. En utilisant ces coefficients on vérifie ensuite que le flux  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  possède bien la structure LMP. Pour cela, on utilise la reformulation des flux et la définition des restes  $G$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \gamma_{K,i}(u) \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \gamma_{L,i}(u) \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} \\ &= \gamma_{K,i}(u) [\beta_{K,i}(u_L - u_K) + G_{K,i}(u)] - \gamma_{L,i}(u) (\beta_{L,i}(u_K - u_L) + G_{L,i}(u)) \\ &= [\gamma_{K,i}(u) \beta_{K,i} + \gamma_{L,i}(u) \beta_{L,i}] (u_L - u_K) + \gamma_{K,i}(u) G_{K,i}(u) - \gamma_{L,i}(u) G_{L,i}(u) \\ &= [\gamma_{K,i}(u) \beta_{K,i} + \gamma_{L,i}(u) \beta_{L,i}] (u_L - u_K) + \frac{|G_{L,i}(u)| G_{K,i}(u) - |G_{K,i}(u)| G_{L,i}(u)}{|G_{K,i}(u)| + |G_{L,i}(u)|} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il reste à étudier le dernier terme  $\frac{|G_{L,i}(u)| G_{K,i}(u) - |G_{K,i}(u)| G_{L,i}(u)}{|G_{K,i}(u)| + |G_{L,i}(u)|}$ . Si  $G_{L,i}(u) G_{K,i}(u) \geq 0$ , alors ce terme est nul et le flux se réduit à :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = (\gamma_{K,i}(u) \beta_{K,i} + \gamma_{L,i}(u) \beta_{L,i}) (u_L - u_K). \quad (3.12)$$

Dans ce cas, il possède bien la structure LMP car le coefficient  $\gamma_{K,i}(u) \beta_{K,i} + \gamma_{L,i}(u) \beta_{L,i}$  est strictement positif.

Dans l'autre cas, quand  $G_{L,i}(u) G_{K,i}(u) < 0$ , le dernier terme est égal à  $2\gamma_{K,i}(u) G_{K,i}(u)$ . Puis, en reprenant la définition de  $G_{K,i}$ , on a alors :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = [\gamma_{K,i}(u) (2\tilde{w}_{K,i}^L - \beta_{K,i}) + \gamma_{L,i}(u) \beta_{L,i}] (u_L - u_K) + 2\gamma_{K,i}(u) \sum_{J \in \{\mathcal{S}_{K,i} \setminus L\}} \tilde{w}_{K,i}^J (u_J - u_K). \quad (3.13)$$

On observe que pour avoir tous les coefficients positifs, il faut que  $\beta_{K,i} < 2\tilde{w}_{K,i}^L$ . En effectuant les calculs pour  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{L,i}$ , on obtient la condition suivante :  $\beta_{L,i} < 2\tilde{w}_{L,i}^K$ . Tout comme dans l'article original, on choisit de fixer un unique  $\beta_i$  de telle sorte que :

$$\beta_i := \beta_{K,i} = \beta_{L,i} = \min(\tilde{w}_{K,i}^L, \tilde{w}_{L,i}^K),$$

afin que tous les coefficients soient positifs. En reprenant les expressions (3.12) et (3.13), l'écriture finale du flux  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  est obtenue avec la formulation (3.11) et la définition suivante des coefficients  $\bar{\nu}_{K,i}^J(u)$  :

$$\bar{\nu}_{K,i} = \begin{pmatrix} \beta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } G_{L,i}(u) G_{K,i}(u) \geq 0 \text{ et } \bar{\nu}_{K,i} = \begin{pmatrix} \gamma_{K,i}(u) (2\tilde{w}_{K,i}^L - \beta_i) + \gamma_{L,i}(u) \beta_i \\ 2\gamma_{K,i}(u) \tilde{w}_{K,i}^J \\ \vdots \\ 2\gamma_{K,i}(u) \tilde{w}_{K,i}^J \end{pmatrix} \text{ sinon.} \quad (3.14)$$

Il est aussi possible d'exprimer le flux d'une autre manière en considérant  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{L,i}$  et ainsi obtenir les coefficients  $\bar{\nu}_{L,i}^J(u)$  :

$$\bar{\nu}_{L,i} = \begin{pmatrix} \beta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } G_{L,i}(u)G_{K,i}(u) \geq 0 \text{ et } \bar{\nu}_{L,i} = \begin{pmatrix} \gamma_{L,i}(u)(2\tilde{w}_{L,i}^K - \beta_i) + \gamma_{K,i}(u)\beta_i \\ 2\gamma_{L,i}(u)\tilde{w}_{L,i}^J \\ \vdots \\ 2\gamma_{L,i}(u)\tilde{w}_{L,i}^J \end{pmatrix} \text{ sinon.}$$

L'utilisation de la formulation du flux avec les coefficients  $\bar{\nu}$  de (3.11) permet une implémentation facile mais, pour retrouver la conservativité du flux il est plus aisé de revenir à l'expression avec la combinaison convexe (3.10).

On remarque que dans le cas d'un maillage admissible, on peut choisir  $M_{K,i} = L$  et  $M_{L,i} = K$ . Les calculs se simplifient grandement et on peut montrer que le flux du schéma DLP (3.11) est alors équivalent au flux à deux points (1.35).

Par ailleurs, si on considère une solution constante sur toutes les cellules de  $\mathcal{S}_{K,i}$  et  $\mathcal{S}_{L,i}$ , le schéma se simplifie aussi. Ceci est dû au fait que les restes  $G$  sont alors nuls, ce qui implique que les coefficients  $\gamma_{K,i}$  et  $\gamma_{L,i}$  sont égaux à  $\frac{1}{2}$  et le flux se réduit alors à :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \beta_i(u_L - u_K).$$

On peut noter que la non-linéarité des coefficients fait augmenter le coût de calcul du schéma mais, c'est un prix à payer pour obtenir le principe du maximum discret sur tout maillage lorsque l'on discrétise des équations de diffusion du type (1.4).

On note finalement que si le schéma DLP était originalement associé à un schéma d'Euler implicite en temps, on peut facilement l'étendre au cas explicite. En effet, grâce à sa structure LMP, il rentre dans le cadre du Théorème 1.2. La condition CFL est alors obtenue à partir de la formule (1.36) :

$$\max_{K \in \mathcal{M}} \left( \frac{\Delta t \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J}{|K|} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

### 3.2.2 Construction du schéma HLL-DLP

Le schéma de DRONIOU et LE POTIER précédemment présenté est un schéma non linéaire pour les équations de diffusion (1.4) permettant de préserver l'ensemble des états admissibles via la structure LMP. On va maintenant construire un schéma utilisant le même type de reconstruction pour discrétiser un système hyperbolique homogène (1.2). Ce schéma, que l'on notera HLL-DLP, va être construit en utilisant des solveurs de Riemann approchés à deux points dans la reconstruction de DRONIOU et LE POTIER (PIII). Cette reconstruction va permettre d'obtenir une diffusion numérique

sur la normale (PII). S'il vérifie le Théorème 3.1, on aura la préservation de l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  (PI).

On rappelle que l'on construit ce schéma car le flux numérique à deux points (1.29) ne possède pas la bonne diffusion numérique et ne vérifie donc pas la propriété (PII) demandée pour obtenir un schéma AP en 2D par la suite.

La construction des flux se fait de la même manière que pour le schéma DLP. Le flux conservatif  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  du nouveau schéma HLL-DLP est construit avec une combinaison convexe entre deux flux  $\mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i}$  et  $\mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \gamma_{K,i}(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \gamma_{L,i}(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} \\ &= \gamma_{K,i}(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \gamma_{L,i}(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i}. \end{aligned}$$

En reprenant les mêmes points  $M$  définis sur la Figure 3.2 et la combinaison convexe de (3.8), les égalités qui suivent sont vérifiées :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} w_{K,i}^J (\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K) \\ \mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} w_{L,i}^J (\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_L) \end{cases}.$$

Elles permettent d'en déduire les reconstructions suivantes des normales aux interfaces car les points  $M$  sont placés sur des demi-droites colinéaires aux normales sortantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K}{\|\mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K\|} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \frac{w_{K,i}^J}{\|\mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K\|} (\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K) = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \frac{w_{K,i}^J \|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K\|}{\|\mathbf{x}_{M_{K,i}} - \mathbf{x}_K\|} \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ \mathbf{n}_{L,i} = \frac{\mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L}{\|\mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L\|} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} \frac{w_{L,i}^J}{\|\mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L\|} (\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_L) = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} \frac{w_{L,i}^J \|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_L\|}{\|\mathbf{x}_{M_{L,i}} - \mathbf{x}_L\|} \boldsymbol{\eta}_{LJ} \end{array} \right., \quad (3.15)$$

où  $\boldsymbol{\eta}_{KJ} = \frac{\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K}{\|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K\|}$  est un vecteur unitaire dans la direction  $KJ$ .

Ensuite, les deux flux intervenant dans la combinaison convexe sont construits à partir de solveurs de Riemann approchés à deux points  $\mathcal{F}$  dans chacune des directions  $KJ$  et  $LJ$  :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{w}_{K,i}^J \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ \mathcal{F}_{L,i} \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{L,i}} \bar{w}_{L,i}^J \mathcal{F}_{LJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{LJ} \end{cases}. \quad (3.16)$$

On rappelle que pour simplifier les notations, on a posé  $\mathcal{F}_{KJ} := \mathcal{F}(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_J; \boldsymbol{\eta}_{KJ})$ . Les deux flux définis dans (3.16) héritent leur consistance de celle de  $\mathcal{F}$  d'une part et de la

reconstruction des normales (3.15) d'autre part. Ainsi, si on suppose un état constant  $\mathbf{U}$  sur toutes les cellules de  $\mathcal{S}_{K,i}$ , on a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{K,i}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{w}_{K,i}^J \mathcal{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}; \boldsymbol{\eta}_{KJ}) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{w}_{K,i}^J \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}\tag{3.17}$$

La combinaison convexe entre ces deux flux doit se faire composante par composante afin que toutes les propriétés soient vérifiées et pour avoir une bonne définition des coefficients qui vont suivre. Ainsi, pour chaque composante  $j$  de 1 à  $N$  du système hyperbolique (1.2), on a :

$$\mathcal{F}_i^j \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{K,i}^j \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{L,i}^j \cdot \mathbf{n}_{L,i},\tag{3.18}$$

avec  $\gamma_{L,i}^j$  et  $\gamma_{K,i}^j$  qui doivent être choisis tout deux positifs avec  $\gamma_{L,i}^j + \gamma_{K,i}^j = 1$ . De plus, le choix doit permettre d'écrire le flux de la manière souhaitée pour appliquer le Théorème 3.1 :

$$\mathcal{F}_i^j \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,j}(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{KJ}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ},\tag{3.19}$$

avec les coefficients  $\nu_{K,i}^{J,j}$  positifs. Dès maintenant, on peut voir que le flux  $\mathcal{F}_i$  de (3.18) est consistant (3.17), conservatif et non linéaire par construction.

Tout comme pour le flux du schéma DLP, le point clef se situe dans le choix des coefficients  $\gamma_{K,i}^j$  et  $\gamma_{L,i}^j$  qui sont maintenant définis par composante du système hyperbolique (1.2). En reprenant la même technique que pour le schéma DLP, on décompose alors les flux de (3.16) en une partie à deux points et un reste  $G$  en introduisant un coefficient  $\beta_i$  strictement positif :

$$\beta_i := \min(\bar{w}_{K,i}^L, \bar{w}_{L,i}^K) > 0.\tag{3.20}$$

Ce coefficient  $\beta_i$  est non nul car les points  $M_{K,i}$  et  $M_{L,i}$  sont respectivement différents de  $K$  et  $L$ . Cette reformulation conduit à l'expression suivante des flux :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{K,i}^j \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \beta_i \mathcal{F}_{KL}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KL} + G_{K,i}^j \\ \mathcal{F}_{L,i}^j \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \beta_i \mathcal{F}_{LK}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{LK} + G_{L,i}^j \end{cases}.$$

Ce qui définit les restes  $G$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} G_{K,i}^j := (\bar{w}_{K,i}^L - \beta_i) \mathcal{F}_{KL}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KL} + \sum_{J \in \{\mathcal{S}_{K,i} \setminus L\}} \bar{w}_{K,i}^J \mathcal{F}_{KJ}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ G_{L,i}^j := (\bar{w}_{L,i}^j - \beta_i) \mathcal{F}_{LK}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{LK} + \sum_{J \in \{\mathcal{S}_{L,i} \setminus K\}} \bar{w}_{L,i}^J \mathcal{F}_{LJ}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{LJ} \end{cases} \quad (3.21)$$

Finalement, le même type de définition est utilisé pour les coefficients  $\gamma$  de la combinaison convexe de (3.18) afin de compenser les termes négatifs dans les restes  $G$  et obtenir une expression avec des coefficients  $\nu$  de la forme (3.19) :

$$\begin{cases} \gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) = \frac{|G_{L,i}^j(\mathbf{U})|}{|G_{K,i}^j(\mathbf{U})| + |G_{L,i}^j(\mathbf{U})|} \\ \gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) = \frac{|G_{K,i}^j(\mathbf{U})|}{|G_{K,i}^j(\mathbf{U})| + |G_{L,i}^j(\mathbf{U})|} \end{cases} \quad (3.22)$$

On utilise aussi la convention  $\gamma_{K,i}^j = \gamma_{L,i}^j := \frac{1}{2}$  si le dénominateur  $|G_{K,i}^j| + |G_{L,i}^j|$  est nul. Ensuite, le même type de calculs que pour le schéma DLP permet de montrer qu'en fonction du signe de  $G_{K,i}^j G_{L,i}^j$  le flux se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^j \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \begin{cases} \beta_i \mathcal{F}_{KL}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KL} & \text{si } G_{K,i}^j G_{L,i}^j \geq 0 \\ (\beta_i + 2\gamma_{K,i}^j (\bar{w}_{K,i}^L - \beta_i)) \mathcal{F}_{KL}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KL} \\ \quad + 2\gamma_{K,i}^j \sum_{J \in \{\mathcal{S}_{K,i} \setminus L\}} \bar{w}_{K,i}^J \mathcal{F}_{KJ}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.23) \\ &= \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,j}(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{KJ}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \quad (3.19) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir la définition suivante pour les coefficients  $\nu_{K,i}^{K,j}$  pour chaque composante  $j$  du système (1.1) :

$$\boldsymbol{\nu}_{K,i}^j = \begin{pmatrix} \beta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } G_{L,i}^j(\mathbf{U}) G_{K,i}^j(\mathbf{U}) \geq 0 \text{ et } \boldsymbol{\nu}_{K,i}^j = \begin{pmatrix} \gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) (2\bar{w}_{K,i}^L - \beta_i) + \gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) \beta_i \\ 2\gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) \bar{w}_{K,i}^J \\ \vdots \\ 2\gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) \bar{w}_{K,i}^J \end{pmatrix} \text{ sinon.} \quad (3.24)$$

En utilisant l'expression du flux sortant à la cellule  $L$ ,  $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{L,i}$ , on obtient les coefficients  $\boldsymbol{\nu}_{L,i}^j$  :

$$\boldsymbol{\nu}_{L,i}^j = \begin{pmatrix} \beta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } G_{K,i}^j(\mathbf{U}) G_{L,i}^j(\mathbf{U}) \geq 0 \text{ et } \boldsymbol{\nu}_{L,i}^j = \begin{pmatrix} \gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) (2\bar{w}_{L,i}^K - \beta_i) + \gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) \beta_i \\ 2\gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) \bar{w}_{L,i}^J \\ \vdots \\ 2\gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) \bar{w}_{L,i}^J \end{pmatrix} \text{ sinon.}$$

Tous ces coefficients  $\nu$  sont positifs car tous les termes intervenants dans leurs expressions sont positifs : les coefficients  $\gamma$  (3.22) et  $\beta_i$  (3.20), ainsi que les coordonnées barycentriques à l'origine des poids  $\bar{w}_{K,i}^J$  (3.15). De plus, les coefficients  $\beta_i$  sont choisis de telle sorte que  $2\bar{w}_{L,i}^K - \beta_i$  soit positif (3.20).

En utilisant le formalisme (1.27), le schéma associé à ce flux est alors :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}. \quad (3.25)$$

On notera que cette formulation utilise une notation vectorielle et que le produit entre  $\nu_{K,i}^J = (\nu_{K,i}^{J,j})_j$  et  $\mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = (\mathcal{F}_{KJ}^j \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ,j})_j$  doit être effectuée terme à terme car les coefficients  $\nu$  sont définis par composante  $j$  du système.

Finalement, on rappelle que le flux HLL-DLP ainsi obtenu est consistant et conservatif par construction. De plus, la construction est indépendante du choix du solveur de Riemann approchés à deux points  $\mathcal{F}_{KJ}$ .

Le même type de remarque que pour le schéma DLP s'applique pour le flux HLL-DLP et on peut en déduire qu'il se simplifie grandement sur maillage admissible. Ainsi, on retrouve le schéma à deux points classique car les restes  $G$  (3.21) sont nuls et le coefficient  $\beta_i$  (3.20) est égal à un.

On peut aussi noter que pour les flux aux bords, il n'est pas nécessaire d'utiliser cette technique de reconstruction et que comme pour le schéma DLP on peut utiliser directement le flux à deux points. Ainsi, pour une interface de bord  $i$ , on utilise le flux suivant :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathcal{F}(\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_i; \mathbf{n}_{K,i}) \cdot \mathbf{n}_{K,i},$$

où  $\mathbf{U}_i$  est la valeur de la solution sur l'interface  $i$ . Par exemple, pour une condition de type Dirichlet on a  $\mathbf{U}_i := \mathbf{U}_D$  avec  $\mathbf{U}_D$  la valeur imposée au bord.

### 3.2.3 Discussions sur le choix du flux

On cherche maintenant à appliquer le Théorème 3.1 au schéma (1.27) avec le nouveau flux HLL-DLP (3.23). Avec le formalisme, il s'écrit comme (3.25). Pour cela, il doit vérifier les trois hypothèses (H1), (H2) et (H3).

On a vu dans la construction que le flux HLL-DLP est consistant, il vérifie donc l'hypothèse (H1). De plus, il a été construit comme une combinaison à poids positifs de solveur de Riemann approchés à deux points et il vérifie donc automatiquement (H2). Il reste maintenant à vérifier la troisième hypothèse, qui s'apparente à une formule de la divergence discrète avec les coefficients  $\nu$ .

En utilisant la définition des coefficients  $\nu$  (3.24), on a pour chaque composante  $j$  du système hyperbolique (1.2) :

$$\sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,j}(\mathbf{U}) \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \begin{cases} \beta_i \boldsymbol{\eta}_{KL} & \text{si } G_{K,i}^j(\mathbf{U}) G_{L,i}^j(\mathbf{U}) \geq 0, \\ 2\gamma_{K,i}^j(\mathbf{U}) \mathbf{n}_{K,i} + \beta_i (\gamma_{L,i}^j(\mathbf{U}) - \gamma_{K,i}^j(\mathbf{U})) \boldsymbol{\eta}_{KL} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est donc impossible dans un cadre général d'avoir la propriété (H3) car avec les coefficients  $\nu$  de (3.24) et le calcul précédent, on a généralement :

$$\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^{J,j}(\mathbf{U}) \boldsymbol{\eta}_{KJ} \neq 0.$$

Comme énoncé dans la démonstration du Théorème 3.1, cette hypothèse peut être vue géométriquement comme la fermeture d'une cellule virtuelle de côté  $d_{KJ}$  et de normale  $\boldsymbol{\eta}_{KJ}$ . On peut voir sur la Figure 3.4 que ces cellules ne sont pas forcément fermées, ce qui implique que l'hypothèse n'est alors pas vérifiée.

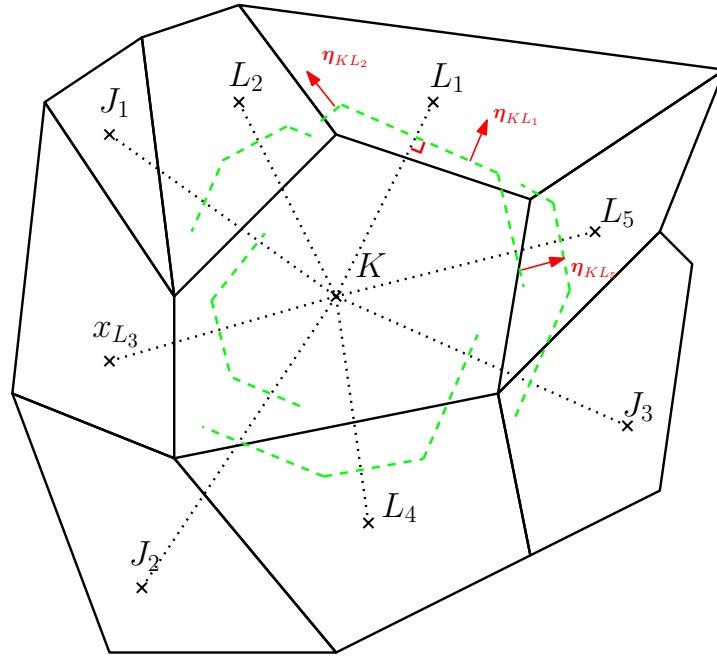


FIGURE 3.4 – Représentation de cellules « virtuelles » (tiret vert) : polygones non fermés de côté  $d_{KJ}$  avec des normales sortantes  $\boldsymbol{\eta}_{KJ}$  (rouge)

Un cas particulier qui est intéressant à remarquer, est si l'on fixe les coefficients  $\nu_{K,i}^J$  et  $\nu_{L,i}^J$  aux valeurs de  $\bar{w}_{K,i}^J$  et  $\bar{w}_{L,i}^J$ . Dans ce cas, l'hypothèse (H3) est automatiquement vérifiée mais le flux  $\mathcal{F}_i$  n'est plus conservatif car il n'est plus possible de l'écrire comme combinaison convexe de deux flux comme dans (3.18).

De plus, il n'est pas possible d'utiliser directement le Théorème 3.1 avec ces coefficients  $\nu$  (3.24) car ils sont vectoriels et non scalaires. Ils sont définis de façon vectorielle

par composante du système hyperbolique (1.2) afin d'avoir une définition claire des coefficients  $\gamma_{K,i}$  et  $\gamma_{L,i}$  dans (3.22).

On ne peut donc pas prouver que le schéma (3.25) construit sur le flux HLL-DLP (3.23) conserve l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  sous la condition CFL (3.1) du théorème. Pourtant, ce flux vérifie les autres propriétés que l'on souhaite (PII)-(PIII).

Afin de faire vérifier la troisième hypothèse au flux HLL-DLP, on peut penser à légèrement modifier les coefficients  $\nu$  en utilisant une technique inspirée des corrections de LE POTIER et ses coauteurs [LP09 ; LP10 ; LP14 ; CCLP13]. Ces corrections permettent de récupérer le principe du maximum discret pour des schémas elliptiques. On a tenté d'utiliser le même principe en introduisant un nouveau paramètre dans les coefficients  $\nu$  et une technique d'optimisation pour régler ce paramètre dans le but d'obtenir la troisième hypothèse. Les optimisations ont été conduites avec les bibliothèques GLPK [Mak], Ipopt [WB06], et NLOpt [Joh] mais aucune technique testée n'a permis d'aboutir à un résultat efficace. La difficulté principale est de savoir s'il existe une solution au problème d'optimisation et quelle est la meilleure manière de le formuler afin que les méthodes utilisées par les différentes bibliothèques convergent rapidement. Une telle technique d'optimisation implique de toute façon un calcul sur chaque cellule ou interface à chaque itéré ce qui est très coûteux.

Afin de conserver un temps de calcul raisonnable, on a pris le parti de faire appel à une méthode utilisant une limitation *a posteriori* dans le même esprit que la méthode MOOD. Cette dernière est utilisée pour obtenir de l'ordre élevé en espace (voir partie 1.3.4). Au lieu d'avoir un schéma d'ordre élevé limité par un schéma d'ordre un, on va ici utiliser le schéma HLL-DLP (3.25) limité par le schéma HLL classique à deux points (1.29) avec un critère d'admissibilité physique (PAD). Le principe de cette correction est présenté sur la Figure 3.5 qui est presque identique à la Figure 1.5 de la méthode MOOD.

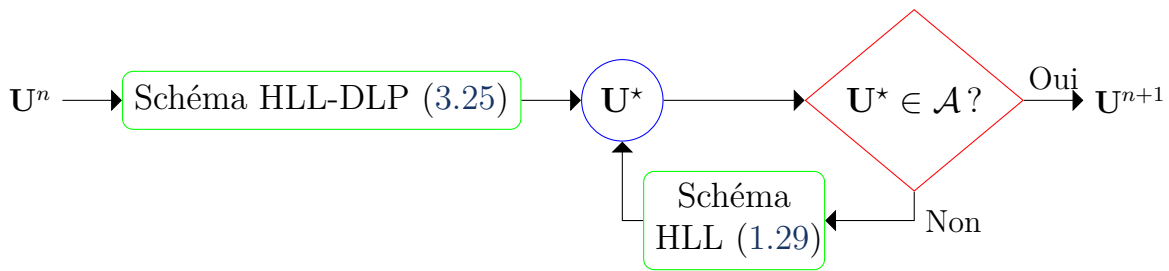


FIGURE 3.5 – Principe de la correction *a posteriori* avec le flux à deux points

De ce fait, cette correction va permettre d'avoir le schéma HLL-DLP qui possède une diffusion numérique dans la bonne direction (PII) et lorsqu'il ne respecte plus l'ensemble des états admissibles, on utilisera le flux à deux points qui le préserve (PI). De plus, ils sont tout deux des extensions de solveurs de Riemann approché à deux points (PIII).

Tout comme dans la méthode MOOD, l'intérêt de cette limitation *a posteriori* est de conserver dans la plupart des cas le schéma le plus précis, ici le HLL-DLP, tout



en conservant une expression assez simple du schéma, ce qui ne serait pas le cas si on imposait l'hypothèse (H3) via une autre technique *a priori*. On espère et cela se vérifie dans les cas tests numériques (voir partie 3.4), que cette correction avec le flux à deux points ne s'active que très peu. On rappelle que le schéma HLL-DLP et le schéma à deux points coïncident lorsque le maillage est admissible ou quand la solution est constante. Par conséquent, on s'attend à ce que la correction ne s'active qu'en cas de fort gradient ou dans une maille distordue. En outre, on verra dans le Chapitre 4 que la correction ne s'active pas proche de la limite de diffusion et ne détruit pas le caractère AP du schéma une fois le terme source introduit.

De plus, on utilise la limitation *a posteriori* de la méthode MOOD pour obtenir la préservation de l'ensemble des états admissibles car cette même méthode a été choisie pour construire le schéma d'ordre élevé que l'on va développer dans la partie suivante.

### 3.3 Montée en ordre du schéma HLL-DLP

On possède désormais un schéma numérique pour les systèmes hyperboliques homogènes (1.2) qui vérifie les trois propriétés que l'on souhaite via la technique de DLP et une correction avec le schéma à deux points. C'est pour le moment un schéma d'ordre un et tout comme dans les chapitres précédents on désire maintenant construire un schéma d'ordre élevé en temps et en espace afin d'avoir une plus grande précision. On utilise toujours la technique MOOD pour la montée en ordre en espace mais la particularité ici, c'est que le dernier schéma dans la boucle de re-calcul n'est pas le HLL-DLP d'ordre un (3.25) mais le schéma à deux points d'ordre un (1.29). Cette spécificité est due à la correction avec le flux à deux points décrite dans la partie précédente et sur la Figure 3.5. On rappelle que le schéma HLL-DLP ne vérifie pas entièrement les hypothèses du Théorème 3.1 et, il ne permet donc pas toujours de préserver l'ensemble des états admissibles. Pour cela, la correction avec le flux à deux points a été introduite et il est normal qu'elle reste présente lors de la montée en ordre. On pourra se référer à la Figure 3.6 pour un résumé graphique de la cascade de schémas utilisée dans la boucle MOOD.

On rappelle tout d'abord le schéma HLL-DLP d'ordre un obtenu à l'aide du formalisme volumes finis en 2D schéma (1.29) et de la définition des flux (3.19) :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J(\mathbf{U}) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}. \quad (3.25)$$

Tout comme pour la montée en ordre du schéma à deux points classique dans (1.40), on utilise les reconstructions polynomiales  $\widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$  de la méthode MOOD (1.38) pour

obtenir le schéma suivant :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{r=1}^{R_i} \xi_{ir} \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J(\tilde{\mathbf{U}}_{ir}^n) \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{U}}_{K,ir}^n, \tilde{\mathbf{U}}_{J,ir}^n; \boldsymbol{\eta}_{KJ}) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}. \quad (3.26)$$

On rappelle que  $r$  indexe les points de quadrature sur l'interface  $i$  et que  $\tilde{\mathbf{U}}_{K,ir}^n := \tilde{\mathbf{U}}_K^n(\mathbf{x}_{ir})$ . Cette nouvelle expression du schéma n'est rien d'autre que celle de l'ordre un où les valeurs moyennes ont été remplacées par les reconstructions polynomiales évaluées aux points de quadrature. Cette extension à l'ordre élevé est « simple » car le schéma HLL-DLP est construit comme une extension du schéma à deux points sur lequel la théorie est bien connue. La spécificité par rapport au schéma à deux points d'ordre élevé (1.40) est due aux coefficients  $\nu$  du flux HLL-DLP. Ces coefficients doivent aussi être évalués avec les valeurs des flux aux points de quadrature afin de rester conservatif : les coefficients  $\nu_{K,i}^J(\tilde{\mathbf{U}}_{ir}^n)$  sont calculés en utilisant  $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{U}}_{K,ir}^n, \tilde{\mathbf{U}}_{J,ir}^n; \boldsymbol{\eta}_{KJ})$ , alors que les  $\nu_{K,i}^J(\mathbf{U}^n)$  sont calculés avec les flux utilisant les valeurs moyennes  $\mathcal{F}(\mathbf{U}_K^n, \mathbf{U}_J^n; \boldsymbol{\eta}_{KJ})$ .

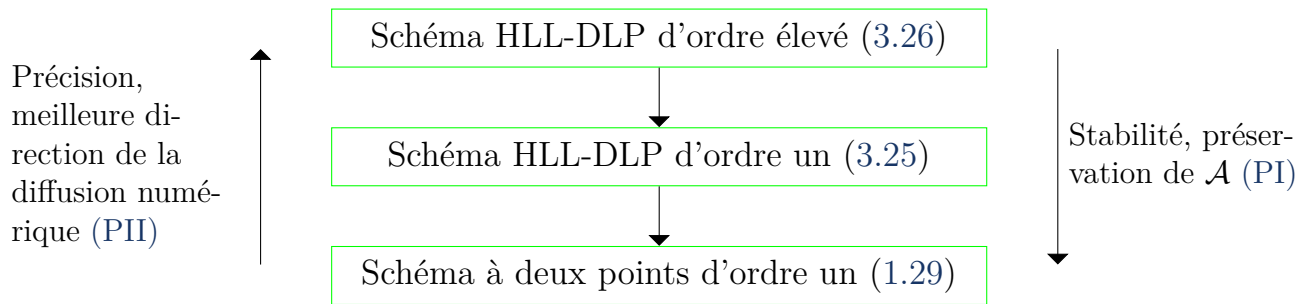


FIGURE 3.6 – Cascade de schémas pour la montée en ordre avec la méthode MOOD appliquée au schéma HLL-DLP avec correction par le flux à deux points

## 3.4 Résultats 2D pour des systèmes hyperboliques

Avant de construire le schéma pour le système avec terme source dans le chapitre suivant, on étudie le comportement du schéma HLL-DLP face à des cas tests classiques de la littérature pour des systèmes hyperboliques homogènes (1.2) présentés dans les Parties 1.2.2 et 1.2.3. Les différents cas tests vont permettre d'observer la qualité de la discrétisation de la diffusion numérique nécessaire pour la propriété (PII) et le taux d'activation de la correction avec le flux à deux points qui est indispensable pour conserver l'ensemble des états admissibles (PI).

### 3.4.1 Maillage et visualisation

Afin de générer les maillages nécessaires aux calculs, le mailleur Gmsh [GR09] a été utilisé pour tous les cas tests numériques qui vont suivre. Les maillages utilisés seront soit

composés uniquement de triangles ou de quadrilatères, soit de polygones quelconques. Dans les deux premiers cas, ce sont directement les maillages obtenus par Gmsh qui sont utilisés. Pour le troisième cas et pour obtenir des maillages plus généraux, on construit le maillage en utilisant la méthode décrite dans la partie 1.3.1 qui utilise le maillage diamant pour créer le maillage primaire.

Les figures représentant la solution obtenue par les codes 2D sont tracées grâce aux logiciels Visit [CBW+12] et ParaView [Hen07].

On rappelle que pour plus de détails sur le code utilisé, on pourra se référer à l'Annexe A.

### 3.4.2 Advection 2D

Le premier cas test est effectué avec l'équation de transport (1.12) afin de pouvoir calculer des erreurs par rapport à une solution exacte. Le test est le transport d'un double sinus en condition initiale :  $U_0(\mathbf{x}) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$  à la vitesse  $\mathbf{a} = (1 \ 1)^T$ . Le domaine de calcul est le carré unité  $[0; 1]^2$  où l'on impose une condition de Dirichlet avec la solution exacte  $U(t, \mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$  sur chaque bord.

Dans les tableaux qui suivent, l'erreur relative en norme  $L_2$  entre la solution approchée et la solution exacte est calculée de la manière suivante :

$$e_{L^2}^2(t^n, \Delta x) := \frac{\sum_{K \in \mathcal{M}} \left( |K| U_K^n - \int_K U(t^n, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2}{\sum_{K \in \mathcal{M}} \left( \int_K U(t^n, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2}, \quad (3.27)$$

où  $U_K^n$  est la valeur moyenne obtenue par le schéma et  $U(t, \mathbf{x})$  la solution exacte. Comme dans le cas 1D avec (2.38), les intégrales sont calculées avec des formules de quadrature du même ordre que le schéma numérique. Ensuite, de la même manière qu'en 1D, l'ordre approché est calculé comme la pente de l'erreur en fonction du pas d'espace du maillage  $\Delta x$  :

$$p_{L^2}(t^n) := \frac{\log(e_{L^2}(t^n, \Delta x_2)) - \log(e_{L^2}(t^n, \Delta x_1))}{\log(\Delta x_2) - \log(\Delta x_1)}. \quad (2.39)$$

Les erreurs et ordres pour les schémas HLL (1.40) et HLL-DLP (3.26) avec les reconstructions polynomiales de MOOD (1.38) sont présentés dans les Tableaux 3.1 et 3.2 au temps  $t_f = 1$  s. Les résultats de ces deux tableaux sont synthétisés sur la Figure 3.7. Pour ces premiers tests, on utilise un maillage de triangles que l'on raffine au fur et à mesure.

Comme on peut le voir dans les tableaux et sur la figure, on observe que les ordres théoriques sont bien atteints pour les différents schémas. De plus, on observe que les schémas HLL-DLP et HLL sont de précision équivalente sur ces maillages sans grande déformation. Concernant les reconstructions polynomiales, on observe sur la Figure 3.7

Maillage		HLL- $\mathbb{P}_0$		HLL- $\mathbb{P}_1$		HLL- $\mathbb{P}_2$		HLL- $\mathbb{P}_3$	
ddl	$\Delta x$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
676	6.45E-03	4.41E-01	—	4.42E-02	—	4.36E-02	—	3.04E-03	—
2 704	3.22E-03	2.80E-01	0.66	9.18E-03	2.27	6.24E-03	2.81	1.72E-04	4.14
10 816	1.61E-03	1.62E-01	0.79	2.37E-03	1.95	8.52E-04	2.87	1.56E-05	3.47
43 264	8.06E-04	8.79E-02	0.88	5.86E-04	2.02	1.18E-04	2.85	9.68E-07	4.01
173 056	4.03E-04	4.61E-02	0.93	1.35E-04	2.11	1.59E-05	2.89	5.22E-08	4.21
692 224	2.01E-04	2.37E-02	0.96	3.20E-05	2.08	2.08E-06	2.93	3.02E-09	4.11

TABLEAU 3.1 – Erreurs et taux de convergence pour le double sinus avec le schéma HLL

Maillage		HLL-DLP- $\mathbb{P}_0$		HLL-DLP- $\mathbb{P}_1$		HLL-DLP- $\mathbb{P}_2$		HLL-DLP- $\mathbb{P}_3$	
ddl	$\Delta x$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
676	6.45E-03	4.49E-01	—	4.19E-02	—	4.49E-02	—	3.15E-03	—
2 704	3.22E-03	2.86E-01	0.65	8.37E-03	2.32	6.46E-03	2.80	1.86E-04	4.08
10 816	1.61E-03	1.65E-01	0.79	2.24E-03	1.90	8.84E-04	2.87	1.72E-05	3.44
43 264	8.06E-04	8.93E-02	0.89	6.27E-04	1.83	1.22E-04	2.85	1.02E-06	4.07
173 056	4.03E-04	4.66E-02	0.94	1.74E-04	1.85	1.64E-05	2.90	5.91E-08	4.11
692 224	2.01E-04	2.38E-02	0.97	4.97E-05	1.81	2.15E-06	2.93	3.79E-09	3.96

TABLEAU 3.2 – Erreurs et taux de convergence pour le double sinus avec le schéma HLL-DLP

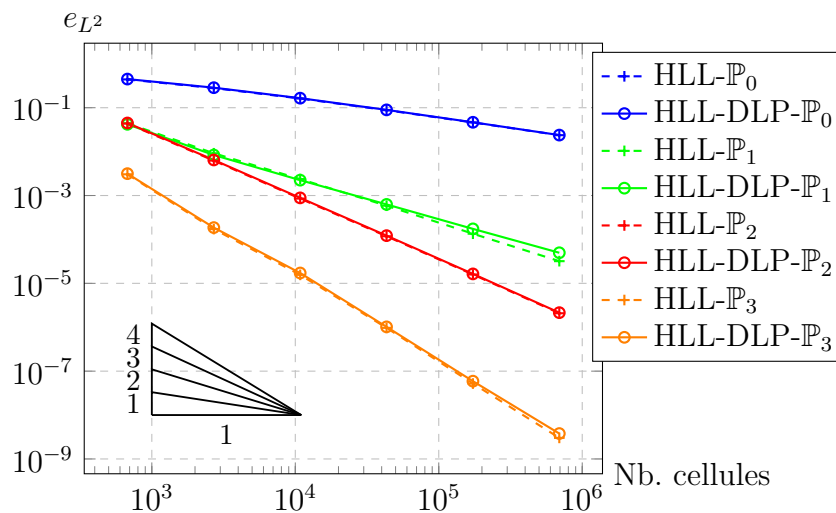


FIGURE 3.7 – Graphes d'erreurs pour le double sinus

que l'utilisation du degré trois ( $\mathbb{P}_3$ ) est bien plus profitable que le degré deux ( $\mathbb{P}_2$ ) car ce dernier n'apporte pas une amélioration significative par rapport à  $\mathbb{P}_1$ .

Ensuite, on trace sur la Figure 3.8 l'erreur en fonction du temps de calcul. On peut ainsi voir l'intérêt de l'ordre élevé qui permet d'obtenir une meilleure précision pour un temps de calcul donné. En outre, on peut aussi comparer le temps de calcul des flux HLL et HLL-DLP et observer que le coût du schéma HLL-DLP sur un maillage donné est du

même ordre que celui du schéma HLL sur un maillage avec un cran de raffinement en plus.

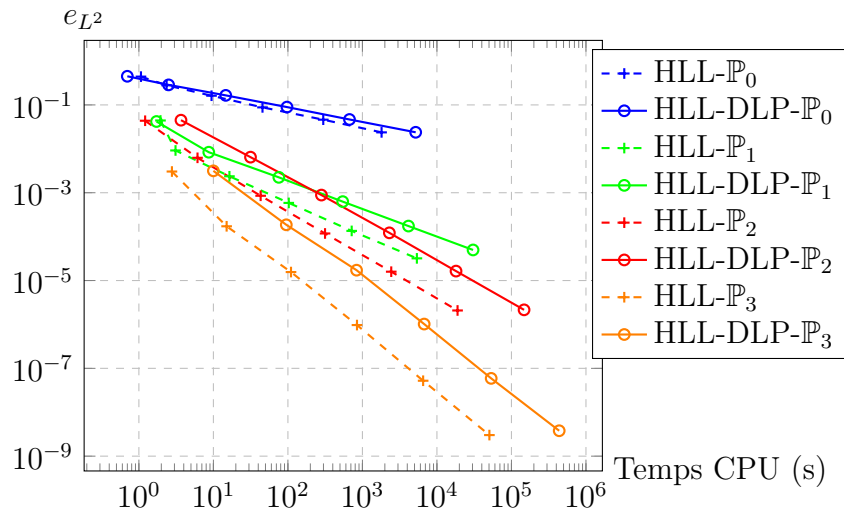


FIGURE 3.8 – Graphes d'erreurs pour le double sinus en fonction du temps CPU

Finalement, afin d'observer le comportement du schéma HLL-DLP sur des maillages déformés, on reprend le même cas test sur des raffinements du maillage de Kershaw (voir Figure 3.9). Les résultats obtenus avec les deux schémas d'ordre un sont présentés dans le Tableau 3.3. Dans ce tableau, on voit bien l'amélioration de la précision lorsque l'on utilise le flux HLL-DLP sur des maillages déformés.

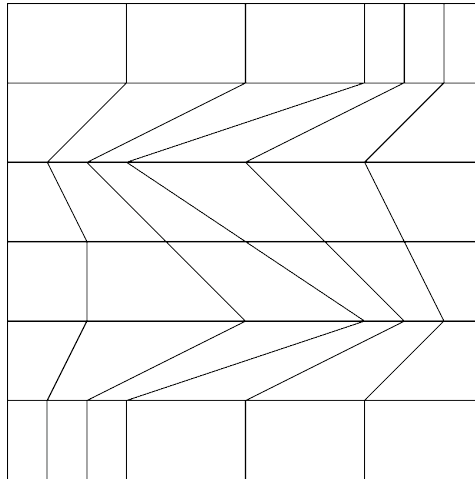


FIGURE 3.9 – Maillage de Kershaw

### 3.4.3 Problèmes de Riemann 2D avec les équations d'Euler

Les cas tests suivants utilisent le modèle d'Euler gaz parfaits (1.13) que l'on initialise avec des problèmes de Riemann 2D. Des solutions de référence existent dans la littérature pour ce type de problème en fonctions des quatre états initiaux. On pourra par

Mesh		HLL- $\mathbb{P}_0$		HLL-DLP- $\mathbb{P}_0$	
ddl	$\Delta x$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
9 216	7.55E-04	3.35E-01	—	2.32E-01	—
36 864	3.67E-04	2.05E-01	0.68	1.31E-01	0.79
147 456	1.81E-04	1.15E-01	0.81	7.05E-02	0.88
589 824	8.96E-05	6.14E-02	0.90	3.67E-02	0.93

TABLEAU 3.3 – Erreurs et taux de convergence pour le double sinus sur des maillages de Kershaw

exemple se référer aux travaux suivants : [ZZ90 ; Sch93 ; SCG93 ; CCY95 ; LL98 ; CCY00]. On utilisera la numérotation introduite par KURGANOV et TADMOR dans [KT02] afin d’identifier les cas tests. Le Tableau 3.4 décrit l’état initial de chaque cadran pour trois configurations différentes. Pour les tests numériques, on utilise le carré unité  $[0; 1]^2$  avec des conditions aux bords de type Neumann et un temps final  $t_f = 0,3$ s.

	$\rho_{NW}$	$u_{NW}$	$v_{NW}$	$p_{NW}$	$\rho_{NE}$	$u_{NE}$	$v_{NE}$	$p_{NE}$
	$\rho_{SW}$	$u_{SW}$	$v_{SW}$	$p_{SW}$	$\rho_{SE}$	$u_{SE}$	$v_{SE}$	$p_{SE}$
C3	0.5323	1.206	0.0	0.3	1.5	0.0	0.0	1.5
	0.138	1.206	1.206	0.029	0.5323	0.0	1.206	0.3
C5	2.0	-0.75	0.5	1.0	1.0	-0.75	-0.5	1.0
	1.0	0.75	0.5	1.0	3.0	0.75	-0.5	1.0
C6	2.0	0.75	0.5	1.0	1.0	0.75	-0.5	1.0
	1.0	-0.75	0.5	1.0	3.0	-0.75	-0.5	1.3

TABLEAU 3.4 – États initiaux pour les configurations 3, 5 et 6 pour les problèmes de Riemann 2D avec le modèle d’Euler gaz parfaits

Sur la Figure 3.10, on présente la solution obtenue avec le schéma HLL-DLP sur un maillage fin composé de  $1,2 \times 10^6$  polygones obtenus par la méthode décrite dans 1.3.1. Comme on peut le voir, les structures centrales sont bien représentées dans les trois configurations testées bien que le maillage soit non structuré et que la condition initiale ne soit pas parfaitement alignée sur le maillage. La correction avec le flux à deux points ne s’active pas avec les configurations 5 et 6 à quatre discontinuités de contact. Elle s’active uniquement sur moins de 1% des cellules dans le cas des quatre chocs de la configuration 3 pour un coût de calcul de l’ordre de 2% du temps total. Les résultats pour les configurations à quatre discontinuités de contact sont assez diffusés car c’est uniquement un schéma HLL et non un schéma HLLC qui est utilisé comme base. En revanche, on observe sur la Figure 3.10d qu’on améliore sensiblement la qualité de l’approximation en utilisant le flux HLLC-DLP dans ce cas.

Afin de montrer que le schéma HLL-DLP permet d’obtenir une meilleure solution grâce une bonne orientation de la diffusion numérique, on reprend la troisième configu-

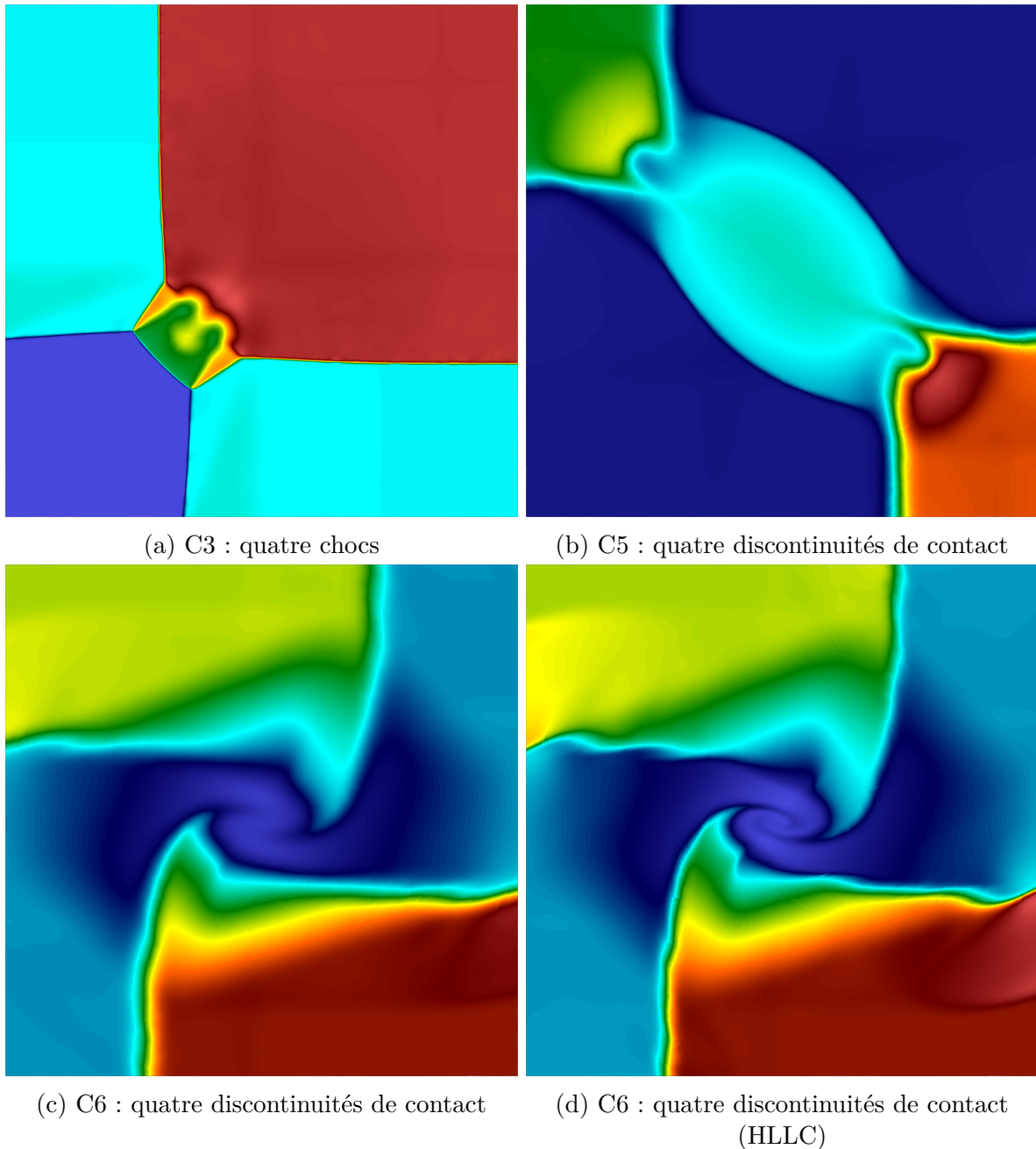


FIGURE 3.10 – Densités obtenues avec le schéma HLL-DLP pour trois configurations de problèmes de Riemann 2D avec le modèle d'Euler gaz parfaits sur un maillage avec  $1,2 \times 10^6$  cellules

ration à quatre chocs mais on utilise cette fois-ci un maillage très anisotrope. Le maillage de base utilisé est celui de Kershaw (voir Figure 3.9) que l'on a raffiné en divisant chaque quadrangle. Les calculs sont menés sur le sixième et septième raffinement de ce maillage pour produire des maillages de  $1,5 \times 10^5$  et  $6 \times 10^5$  cellules. Sur ces deux maillages, on compare les solutions obtenues par les schéma HLL et HLL-DLP. Sur la Figure 3.11, on peut facilement observer en comparant les Figures 3.11b et 3.11c que la solution donnée par le schéma HLL-DLP est bien meilleure que celle obtenue par le schéma HLL

même sur un maillage plus fin. On voit ainsi qu'il est difficile d'obtenir la structure centrale avec le schéma HLL car l'anisotropie du maillage est forte dans cette zone. À titre de comparaison on notera que le temps de calcul sur le maillage à  $1,5 \times 10^5$  cellules (Figure 3.11c) avec le schéma HLL-DLP est équivalent à celui du schéma HLL sur le maillage avec  $6 \times 10^5$  cellules (Figure 3.11b). Pour un temps de calcul du même ordre de grandeur, on obtient une meilleure solution sur ce maillage avec le schéma HLL-DLP. On peut noter aussi que la correction avec le flux à deux points s'active sur moins de 1% des cellules pour un coût total de l'ordre de 3% du temps CPU global.

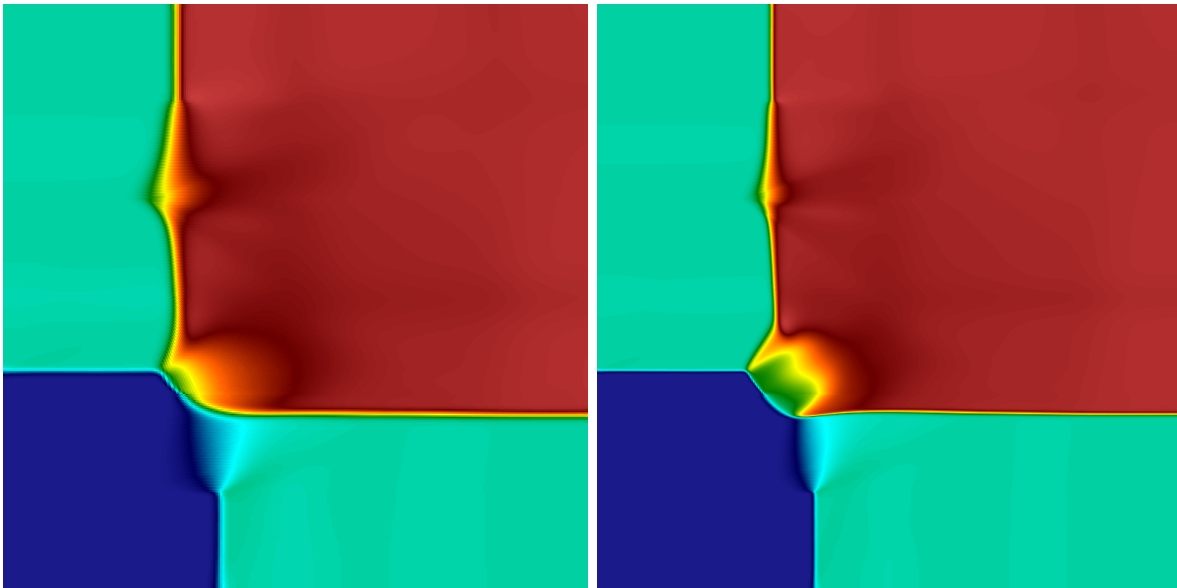
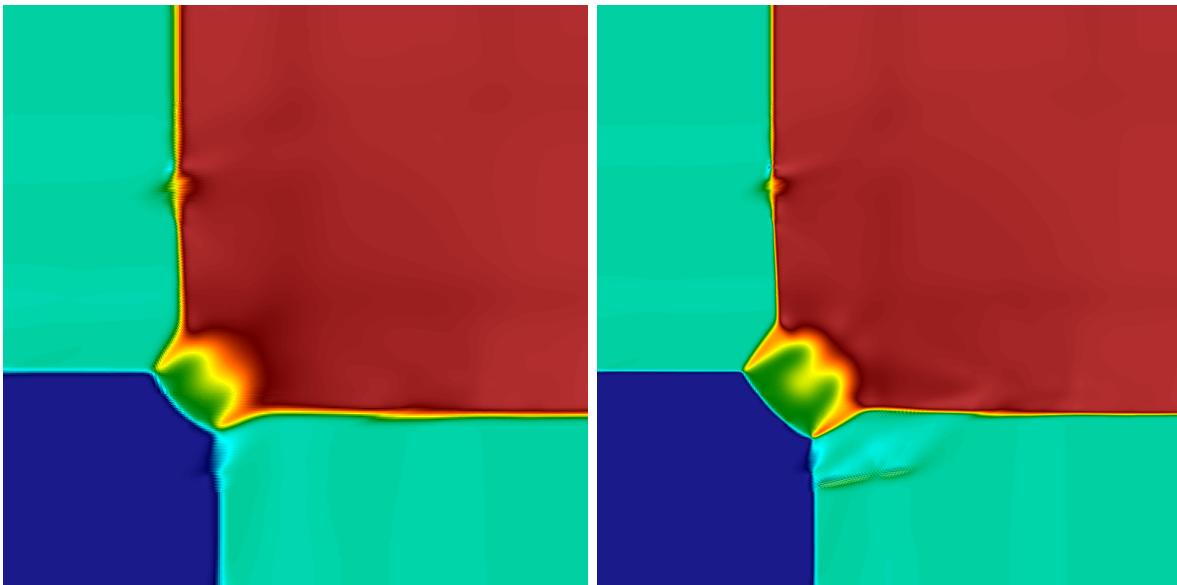
(a) HLL sur un maillage de  $1,5 \times 10^5$  cellules(b) HLL sur un maillage de  $6 \times 10^5$  cellules(c) HLL-DLP sur un maillage de  $1,5 \times 10^5$  cellules(d) HLL-DLP sur un maillage de  $6 \times 10^5$  cellules

FIGURE 3.11 – Densités obtenues sur des maillages de Kershaw avec les schémas HLL et HLL-DLP pour la troisième configuration (C3)



### 3.4.4 Problème de Riemann 2D avec le modèle $M_1$ pour le transfert radiatif

Afin de tester le nombre d'activations de la correction avec le flux à deux points, on se propose de tester le schéma HLL-DLP (3.25) sur un cas test très raide. Ce cas test est un problème de Riemann 2D avec le modèle  $M_1$  pour le transfert radiatif (1.17). On rappelle que l'on ne considère pas encore le terme source pour le moment.

L'initialisation consiste en une température  $T_0 = 1000$  et une énergie radiative  $E_{R,0} = aT_0^4$  constantes sur le domaine. Le flux radiatif est initialisé avec  $\mathbf{F}_{R,0} = (1 - 10^8)cE_R^0\mathbf{v}$  où le vecteur  $\mathbf{v}$  est défini comme :

$$\begin{array}{c} \mathbf{v}_{NW} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow \quad \left| \quad \mathbf{v}_{NE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \\ \hline \mathbf{v}_{SW} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \left| \quad \mathbf{v}_{SE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \downarrow \end{array}$$

Ce cas test est raide car dès la condition initiale on est très proche du bord de l'ensemble des états admissibles puisque le facteur d'anisotropie  $f = \frac{\|\mathbf{F}_R\|}{cE_R}$  est proche de un. De plus, étant donnée la définition du flux radiatif, ce facteur va rester très proche de un.

Les résultats pour l'énergie radiative  $E_R$  et le facteur d'anisotropie  $f$  à un temps final  $t_f = 2 \times 10^{-9}$  sont présentés sur la Figure 3.12 avec un maillage de  $1,2 \times 10^6$  polygones. Comme on peut le voir sur la Figure 3.12b, le facteur d'anisotropie  $f$  reste proche de un

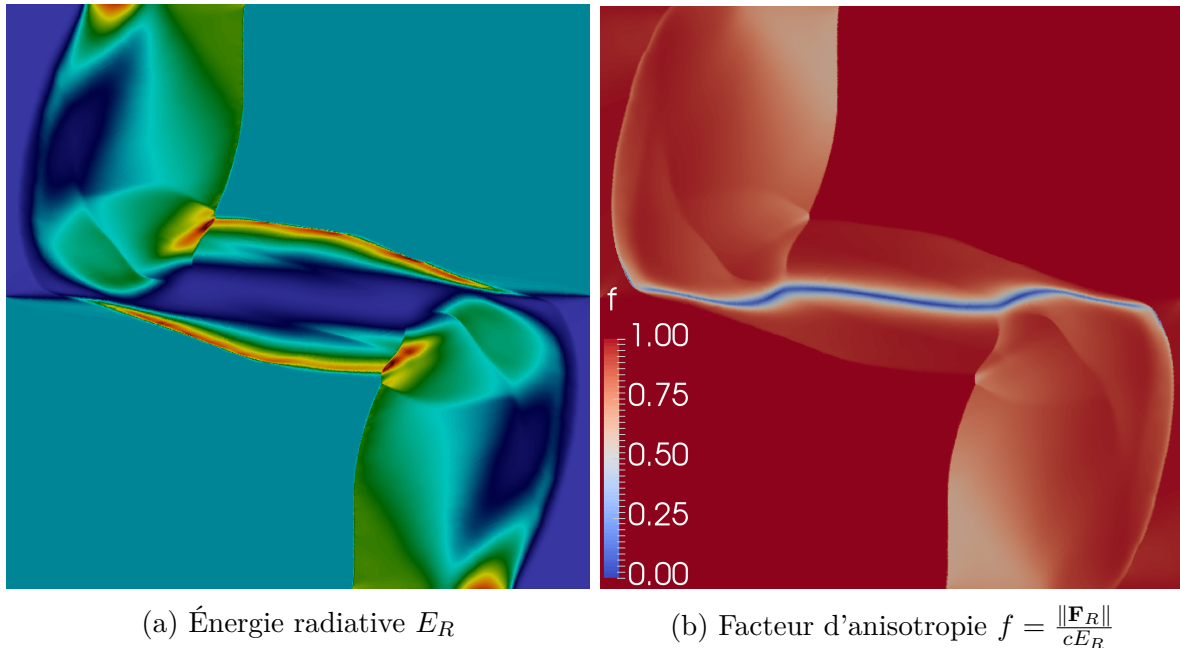


FIGURE 3.12 – Résultats pour un problème de Riemann 2D avec le modèle  $M_1$  sur un maillage avec  $1,2 \times 10^6$  cellules

au cours de la simulation ce qui rend le cas test très raide. La correction avec le flux à

deux points s'active à toutes les itérations en temps mais sur moins de 1% des cellules. De plus, les tests d'admissibilité physique et les re-calculs ne coûtent que 5% du temps de calcul global.

### 3.4.5 Marche à Mach 3

Un autre cas test classique de la littérature avec le modèle d'Euler gaz parfaits (1.13) est la marche à Mach 3 de WOODWARD et COLELLA décrite dans [WC84]. Le domaine de calcul est présenté avec un maillage grossier sur la Figure 3.13. On pourra se référer à l'article original pour les dimensions de ce domaine.

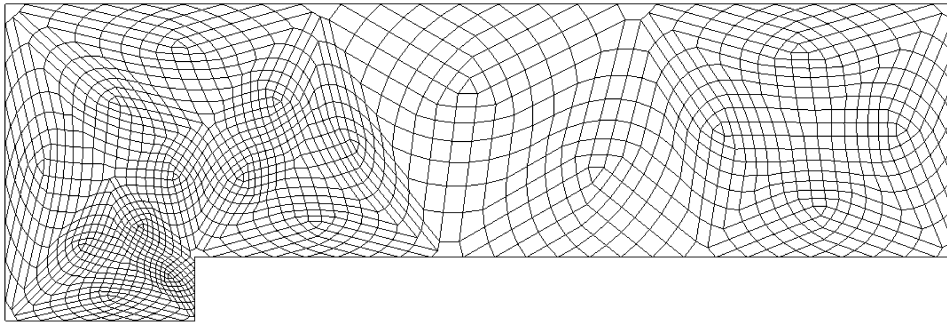


FIGURE 3.13 – Domaine de calcul avec un maillage grossier de  $1,7 \times 10^3$  polygones pour la marche

La condition initiale utilise un fluide de densité  $\rho_0 = 1,4$  avec une pression  $p_0 = 1$ . On se place à Mach 3 avec une vitesse  $\mathbf{u}_0 = (3 \ 0)^T$ . Au cours du temps, le même fluide rentre sur le côté gauche du domaine à la même vitesse. Le côté droit du domaine est une sortie représentée par une condition de Neumann homogène. Les autres bords du domaine sont des murs sur lesquels on applique la condition aux limites suivante :

$$\mathbf{U}_{K,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{n}_{K,i_x}^2 + \mathbf{n}_{K,i_y}^2 & -2\mathbf{n}_{K,i_x} \mathbf{n}_{K,i_y} & 0 \\ 0 & -2\mathbf{n}_{K,i_x} \mathbf{n}_{K,i_y} & \mathbf{n}_{K,i_x}^2 - \mathbf{n}_{K,i_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}_K,$$

avec  $\mathbf{U}_{K,i}$  la valeur imposée pour la condition à la limite et  $\mathbf{U}_K$  la valeur moyenne sur la cellule.

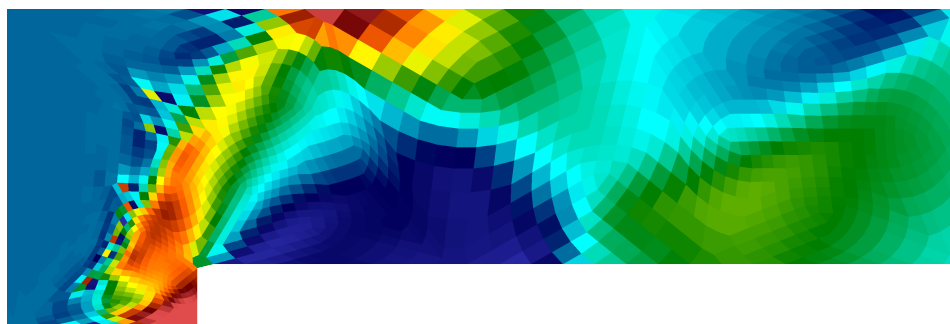
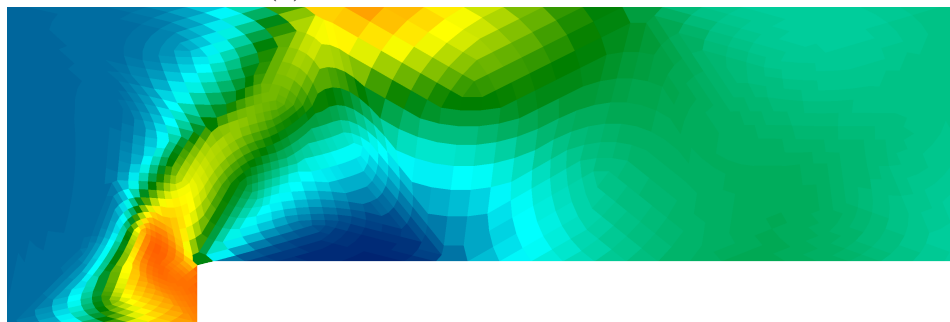
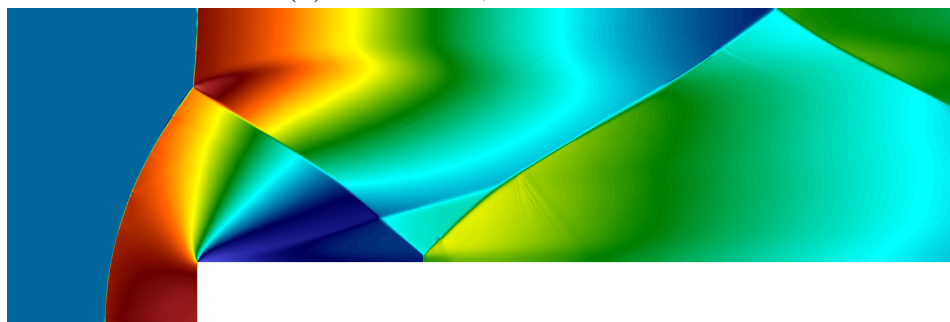
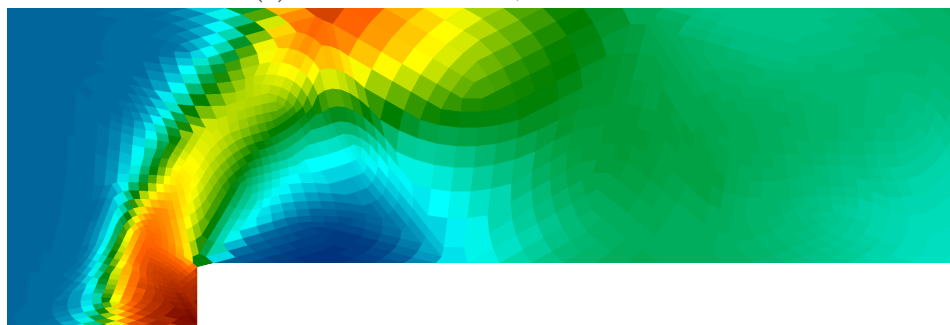
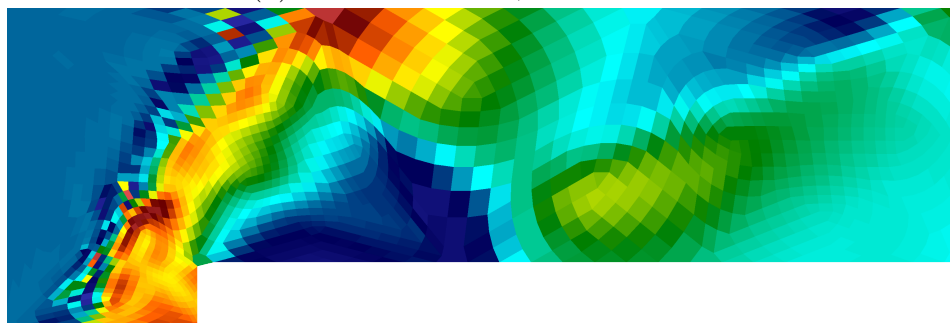
(a) HLL- $\mathbb{P}_1$  avec  $1,7 \times 10^3$  cellules(b) HLL avec  $1,7 \times 10^3$  cellules(c) HLL-DLP avec  $1,7 \times 10^6$  cellules(d) HLL-DLP avec  $1,7 \times 10^3$  cellules(e) HLL-DLP- $\mathbb{P}_1$  avec  $1,7 \times 10^3$  cellules

FIGURE 3.14 – Densités obtenues avec les schémas HLL et HLL-DLP sur des maillages grossiers et fins pour la marche à Mach 3

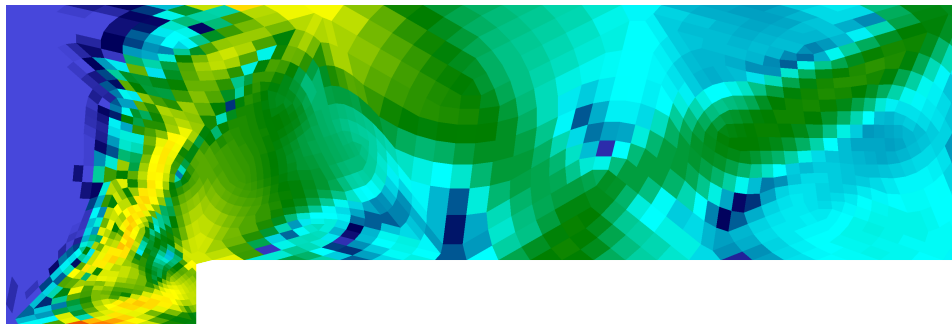
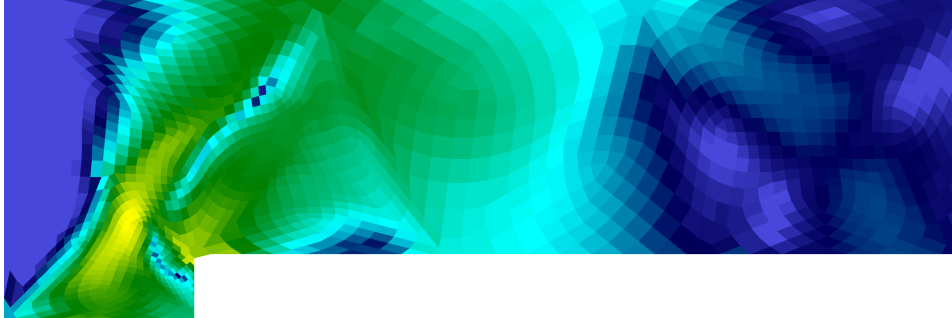
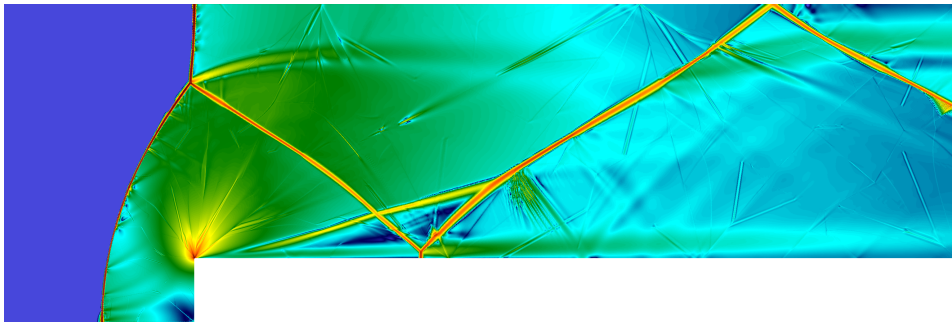
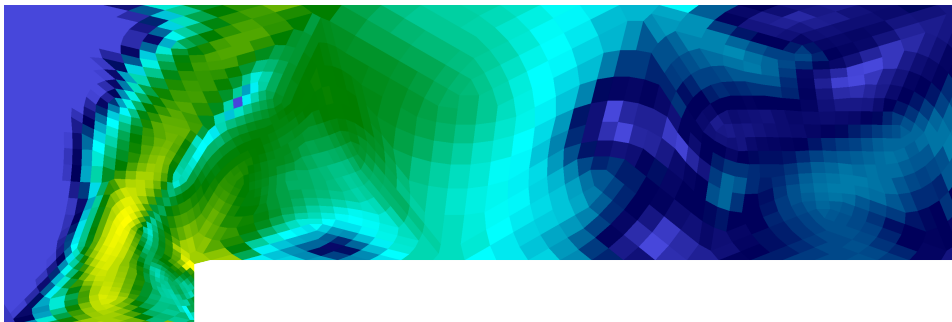
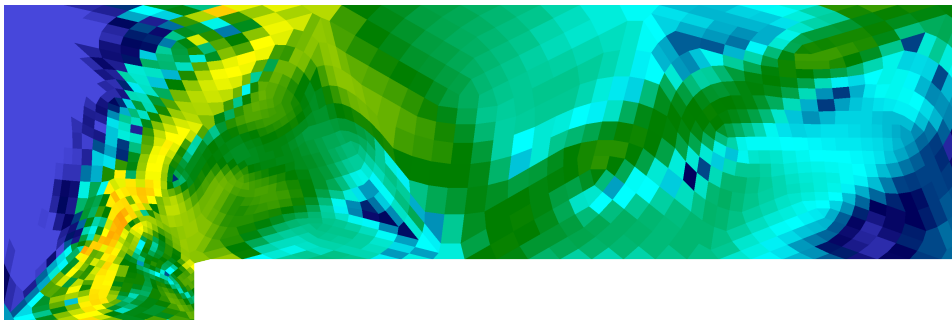
(a) HLL- $\mathbb{P}_1$  avec  $1,7 \times 10^3$  cellules(b) HLL avec  $1,7 \times 10^3$  cellules(c) HLL-DLP avec  $1,7 \times 10^6$  cellules(d) HLL-DLP avec  $1,7 \times 10^3$  cellules(e) HLL-DLP- $\mathbb{P}_1$  avec  $1,7 \times 10^3$  cellules

FIGURE 3.15 – Gradients de la densité obtenus avec les schémas HLL et HLL-DLP sur des maillages grossiers et fins pour la marche à Mach 3

Au centre de la Figure 3.14, on présente la solution obtenue sur un maillage fin de  $1,7 \times 10^6$  polygones avec le schéma HLL-DLP sur Figure 3.14c. Sur cette même figure, on représente aussi la solution sur un maillage grossier pour comparer le flux à deux points (1.29) et le HLL-DLP (3.25) avec un schéma d'ordre un et deux. Cette comparaison permet d'observer la meilleure orientation de la diffusion numérique du schéma HLL-DLP. Dans les Figures 3.14b et 3.14d, on observe sur la première discontinuité que le schéma à deux points suit le maillage alors que le schéma HLL-DLP donne une solution plus cohérente avec la solution de référence de la Figure 3.14c. Pour les résultats utilisant le schéma HLL-DLP, la correction avec le flux à deux points est utilisée uniquement sur moins de 1% des cellules du maillage. Les tests et re-calculs de la correction à deux points coûtent moins de 2% du temps CPU total. Concernant les résultats avec le schéma d'ordre deux dans les Figures 3.14a et 3.14e, on observe que la reconstruction polynomiale permet de mieux décrire la solution à maillage fixé et ce plus particulièrement sur le côté droit du domaine. La reconstruction polynomiale est uniquement limitée *a posteriori* par le critère d'admissibilité physique (PAD), c'est pour cela que l'on observe certaines oscillations parasites à l'avant.

Afin de voir l'effet de l'utilisation du schéma HLL-DLP sur la discrétisation du gradient, on a calculé la norme euclidienne de la valeur moyenne par cellule du gradient de la solution à l'aide d'une reconstruction  $\mathbb{P}_1$  :  $\|\int_K \nabla \widetilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\|$ . Les résultats de ces calculs de post-traitement sur les solutions de la Figure 3.14 sont présentés sur la Figure 3.15. On observe de nouveau dans cette figure que le schéma HLL-DLP permet d'avoir une meilleure représentation des gradients par rapport à ceux obtenus par le schéma HLL classique.

### 3.4.6 Conclusion

Avec ces différents cas tests hyperboliques classiques, on a pu voir que l'on peut obtenir l'ordre souhaité avec le schéma HLL-DLP. De plus, on a observé au travers des différents résultats que la correction avec le flux à deux points s'active peu et permet donc de conserver le schéma HLL-DLP avec une bonne discrétisation de la diffusion numérique dans la majorité des cas. En outre, le temps CPU nécessaire pour effectuer le test d'admissibilité physique et les re-calculs avec le flux à deux points est assez faible.

4

## Schéma AP 2D d'ordre élevé

### Introduction

On a vu dans le Chapitre 1 que l'extension naturelle du schéma HLL-AP en 2D n'est pas consistant dans la limite de diffusion (voir aussi [Sar13 ; BMST16]) car sa limite est le schéma FV4 [EGH00] et ce dernier n'est pas consistant sur des maillages généraux. Dans le Chapitre 3, on a construit un schéma volumes finis pour la discrétisation du système hyperbolique homogène (1.2) possédant les trois propriétés demandées. Ce dernier possède une diffusion numérique orientée selon la normale (PII) et, est une extension de flux à deux points (PIII). En outre, on a obtenu la préservation de l'ensemble des états admissibles (P1)/(PI) grâce à une correction avec le flux à deux points. Au travers des résultats numériques de ce même chapitre, on a pu observer que le nombre d'activations de cette correction restait faible. Ces trois propriétés vont permettre de pouvoir introduire aisément le terme source avec la technique de BERTHON et TURPAULT [BT11] au sein du flux numérique comme fait en 1D avec le schéma HLL-AP dans le Chapitre 2. On rappelle que celle-ci a déjà été utilisée sur des maillages 2D non structurés dans [BMT14 ; BMST16] et dans [DMTB15] mais aucun de ces deux travaux ne permet de préserver l'ensemble des états admissibles dans toutes les configurations. Ainsi, on va maintenant étendre le nouveau schéma HLL-DLP (3.25) afin de discrétiser les systèmes de lois de conservation avec terme source (1.1) pour créer le schéma HLL-DLP-AP et obtenir la préservation de l'asymptotique (P2). La construction va se dérouler de la même manière qu'en 1D car le flux HLL-DLP est créé comme une extension de solveurs de Riemann approchés à deux points 1D. Le terme source va donc être discrétisé naturellement dans chaque direction. Le schéma HLL-DLP-AP possédera les bonnes propriétés à la limite

car il va dégénérer vers le schéma de DRONIOU et LE POTIER [DLP11] pour les équations de diffusion présenté dans la partie 3.2.1.

Pour ce chapitre, on présente tout d'abord un cadre général dans la partie 4.1 pour obtenir un schéma AP et préservant l'ensemble des états admissibles sur tout maillage 2D non structuré. Pour cela, on prouve un théorème qui donne la stabilité sous une condition CFL identique à celle de la discrétisation sans terme source. La preuve est de nouveau faite en reformulant le schéma comme une combinaison convexe de schémas 1D, ici le HLL-AP du Chapitre 2. Un tel schéma est alors construit dans la partie 4.2, en reprenant le flux HLL-DLP construit dans le chapitre précédent. En outre, on calcule les corrections asymptotiques associées à ce nouveau schéma AP en 2D. De plus, on prouve que la correction à deux points requise pour préserver l'ensemble des états admissibles ne s'active pas à proximité de la limite de diffusion, ce qui permet de rester consistant à la limite. Puis, on l'étend à l'ordre élevé dans la partie 4.3. Pour se faire, on réutilise la combinaison convexe élaborée en 1D dans le Chapitre 2 qui mêle les reconstructions polynomiales de la méthode MOOD et les valeurs de moyennes de l'ordre un. Elle permet de préserver l'asymptotique à tout ordre. Ensuite, tout comme dans la partie 2.3.2, on exhibe des solutions de référence pour un modèle linéaire afin de pouvoir les comparer aux solutions approchées. Pour finir, on présente des résultats numériques dans la partie 4.5. Avec ces tests, on souhaite montrer que le nouveau schéma est AP et que l'ordre élevé permet d'améliorer la qualité des solutions calculées.

## 4.1 Cadre général

De la même manière que pour discrétiser le système homogène (1.2), on présente tout d'abord un cadre général afin d'obtenir un schéma AP puis on présentera en particulier le schéma HLL-DLP-AP obtenu par extension du schéma HLL-DLP (3.25) pour le système homogène (1.2).

On utilise le cadre suivant pour discrétiser le système avec terme source (1.1) :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i}, \quad (4.1)$$

où le flux  $\overline{\mathcal{F}}_{K,i}$  inclut la discrétisation du terme source. Dans le but d'obtenir une condition de stabilité pour ce schéma, on prouve le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** *On suppose que le flux numérique  $\overline{\mathcal{F}}_{K,i}$  de (4.1) vérifie les hypothèses suivantes en plus des trois hypothèses du Théorème 3.1 :*

( $\bar{H}1$ ) *il peut s'écrire comme une combinaison à poids positifs de flux  $\overline{\mathcal{F}}_{KJ}$  :*

$$\exists \nu_{K,i}^J \geq 0, \quad \overline{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \overline{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}.$$

Ces flux dans chaque direction contiennent la discrétisation du terme source et s'écrivent comme :

$$\overline{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - (1 - \alpha_{KJ}) \mathbf{S}_{KJ}^- - (1 - \alpha_{KK}) \mathbf{S}_{KK}^+.$$

Les deux quantités  $\mathbf{S}$  discrétisant le terme source s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{KJ}^- (\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_J; \boldsymbol{\eta}_{KJ}) &= \min(0, b_{KJ}^-) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_K) - \mathbf{U}_K) \\ &\quad + \min(0, b_{KJ}^+) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_K) - \mathbf{U}_J) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_K) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ \mathbf{S}_{KK}^+ (\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_K; \boldsymbol{\eta}_{KJ}) &= \max(0, b_{KK}^-) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_K) - \mathbf{U}_K) \\ &\quad + \max(0, b_{KK}^+) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_K) - \mathbf{U}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_K) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \end{aligned} \quad (4.2)$$

( $\bar{H}2$ ) les coefficients  $\alpha$  peuvent se définir comme :

$$\alpha_{KJ} = \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-) + \gamma_K \delta_K} \in [0; 1],$$

avec  $\delta_K$  une longueur de telle sorte que  $\alpha_{KJ} = 1 + \mathcal{O}(\Delta x_K)$ .

avec  $\mathcal{S}_{K,i}$  l'ensemble des cellules utilisées pour calculer les flux sur l'interface  $i$  et  $\boldsymbol{\eta}_{KJ}$  un vecteur unitaire normal sortant à  $K$ . On rappelle que  $b_{KJ}^+$  et  $b_{KJ}^-$  encadrent les vitesses d'ondes du flux  $\mathcal{F}$  entre les états  $\mathbf{U}_K$  et  $\mathbf{U}_J$ .

Alors le schéma (4.1) est consistant avec (1.1), stable et préserve l'ensemble des états admissibles  $\mathcal{A}$  sous la condition CFL qui suit :

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ J \in \bar{\mathcal{E}}_K}} \left( b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_K} \right) \leq 1, \quad (3.1)$$

où  $b_{KJ}$  est une vitesse plus grande que toutes les vitesses d'ondes entre les états  $\mathbf{U}_K$  et  $\mathbf{U}_J$ . On rappelle que  $\delta_K$  (3.2) est une longueur caractéristique qui intervient dans la preuve et  $\bar{\mathcal{E}}_K$  est le stencil de la cellule  $K$ . On notera que cette condition CFL est identique à celle du Théorème 3.1 pour le schéma hyperbolique.

*Démonstration.* Tout comme les Théorèmes 1.1, 1.2 et 3.1 la preuve va se faire en réécrivant le schéma (4.1) comme une combinaison convexe de schémas 1D. Les schémas 1D impliqués ne seront rien d'autre que le HLL-AP de BERTHON et TURPAULT présentés dans le Chapitre 2.

On utilise tout d'abord deux lemmes pour prouver la consistance du schéma avec le système (1.1).

**Lemme 4.1.** *Le terme  $\mathbf{H}(\mathbf{U}^n) := \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$  de ( $\bar{H}1$ ) est consistant avec  $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$ .*



*Démonstration.* Afin de prouver la consistance, on suppose que pour toutes cellules  $K$  du maillage  $\mathcal{M}$  on a :  $\mathbf{U} := \mathbf{U}_K^n$ . Cela implique que pour tout  $J$  on ait :  $\alpha_{KJ} = \alpha_K$ . Ensuite, d'après l'hypothèse de consistance (H1), on a :

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \alpha_K \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{K,i}.$$

Finalement comme on a  $\alpha_K = 1 + \mathcal{O}(\Delta x_K)$ , on obtient la consistance voulue.  $\square$

**Lemme 4.2.** *Le terme discrétisant le terme source du système (1.1) dans le flux de l'hypothèse ( $\bar{H}1$ ) :*

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}^n) := \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{|e_i|}{|K|} \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \left[ (1 - \alpha_{KJ}) \mathbf{S}_{KJ}^- + (1 - \alpha_{KK}) \mathbf{S}_{KK}^+ \right],$$

est consistant avec  $\gamma(\mathbf{U})(\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U})$ .

*Démonstration.* Tout comme dans le lemme précédent, on suppose que l'on a  $\mathbf{U} := \mathbf{U}_K^n$  pour toutes cellules  $K$  du maillage  $\mathcal{M}$ . Ceci permet de dire que pour tout  $J$  on a :  $b^\pm = b_{KJ}^\pm$  et  $\alpha_K = \alpha_{KJ} = \alpha_{KK}$ . Cela implique que :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{U}) &= \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{|e_i|}{|K|} \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \left( (1 - \alpha_K) \mathbf{S}^- + (1 - \alpha_K) \mathbf{S}^+ \right) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{|e_i|}{|K|} \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \left( (1 - \alpha_K) (b^+ - b^-) (\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}) \right) \end{aligned}$$

Puis en inversant les deux sommes de l'expression précédente et en reprenant les définitions de  $\omega_{KJ}$  (3.5) et  $\delta_K$  (3.2) utilisées dans la preuve du Théorème 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{U}) &= \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \frac{\omega_{KJ}}{\delta_K} \left( (1 - \alpha) (b^+ - b^-) (\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}) \right) \\ &= \frac{1}{\delta_K} (1 - \alpha_K) (b^+ - b^-) (\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}) \sum_{J \in \bar{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \\ &= \frac{1}{\delta_K} \frac{\gamma_K \delta_K}{(b^+ - b^-) + \gamma_K \delta_K} (b^+ - b^-) (\mathbf{R}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}) \end{aligned}$$

On obtient alors aisément la consistance quand  $\delta_K \rightarrow 0$ .  $\square$

À la suite de ces deux lemmes prouvant la consistance du schéma, on va montrer sa stabilité à l'aide d'une combinaison convexe. Pour cela comme pour le cas sans terme

source, on part de la définition du schéma et on inverse les sommations :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_K^{n+1} &= \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \overline{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \\
&= \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \left( (1 - \alpha_{KJ}) \mathbf{S}_{KJ}^- + (1 - \alpha_{KK}) \mathbf{S}_{KK}^+ \right) \\
&= \mathbf{U}_K^n - \Delta t \sum_{J \in \overline{\mathcal{E}}_K} \frac{\omega_{KJ}}{\delta_K} \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\
&\quad + \Delta t \sum_{J \in \overline{\mathcal{E}}_K} \frac{\omega_{KJ}}{\delta_K} \left( (1 - \alpha_{KJ}) \mathbf{S}_{KJ}^- + (1 - \alpha_{KK}) \mathbf{S}_{KK}^+ \right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\tag{4.3}$$

Ensuite, avec l'hypothèse (H3) du Théorème 3.1, on peut écrire l'égalité suivante :

$$0 = \sum_{J \in \overline{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_K} \alpha_{KK} \mathcal{F}_{KK} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \tag{4.4}$$

Finalement, en ajoutant les termes de (4.4) à l'expression (4.3), on obtient le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_K^{n+1} &= \mathbf{U}_K^n - \Delta t \sum_{J \in \overline{\mathcal{E}}_K} \frac{\omega_{KJ}}{\delta_K} (\alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - \alpha_{KK} \mathcal{F}_{KK} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}) \\
&\quad + \Delta t \sum_{J \in \overline{\mathcal{E}}_K} \omega_{KJ} \left( \frac{1 - \alpha_{KJ}}{\delta_K} \mathbf{S}_{KJ}^- + \frac{1 - \alpha_{KK}}{\delta_K} \mathbf{S}_{KK}^+ \right)
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est exactement une combinaison convexe de schémas 1D HLL-AP (2.1) de [BT11] entre les états  $\mathbf{U}_K$  à gauche ainsi qu'au centre et  $\mathbf{U}_J$  à droite (voir Figure 3.1).

Le schéma (4.1) hérite donc de toutes les propriétés des schémas HLL-AP, en particulier il est stable et préserve l'ensemble des états admissibles sous la condition CFL :

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ J \in \overline{\mathcal{E}}_K}} \left( b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_K} \right) \leq 1. \tag{3.1}$$

□

## 4.2 Construction du schéma HLL-DLP-AP

À partir du cadre général défini dans le Théorème 4.1, on construit le schéma HLL-DLP-AP. Comme annoncé précédemment, le flux  $\overline{\mathcal{F}}_{K,i}$  inclut la discrétisation du terme source et de même que pour le schéma HLL-DLP, il s'exprime à partir de flux dans

plusieurs directions :

$$\bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}.$$

Les coefficients  $\nu_{K,i}^J$  (3.24) sont ceux du schéma HLL-DLP, ils sont calculés en utilisant les valeurs des flux pour le système homogène  $\mathcal{F}_{KJ}$ . On pourrait envisager de les calculer en faisant intervenir  $\alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ}$ , mais comme on le verra par la suite le calcul des coefficients  $\alpha_{KJ}$  nécessite les coefficients  $\nu$  au travers de la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  (4.6). On obtiendrait alors une formulation implicite qui alourdirait les calculs inutilement. Les flux  $\bar{\mathcal{F}}_{KJ}$  dans chaque direction sont construits en reprenant les idées utilisées pour le schéma HLL-AP en 1D (2.1). Ainsi, si l'on suppose que le flux de base  $\mathcal{F}_{KJ}$  est un solveur de Riemann approché à deux points avec des vitesses d'ondes encadrées par  $b_{KJ}^-$  et  $b_{KJ}^+$ , les flux dans chaque direction avec terme source se calculent comme :

$$\bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - (1 - \alpha_{KJ}) \mathbf{S}_{KJ}^- - (1 - \alpha_{KK}) \mathbf{S}_{KK}^+,$$

où les quantités  $\mathbf{S}$  discrétisant le terme source sont celles définies dans (4.2). Il reste alors à définir les coefficients  $\alpha_{KJ}$  et  $\alpha_{KK}$  pour avoir le schéma complet. Ces coefficients se définissent de la manière suivante avec  $j \in [1; N]$  indexant les composantes du système (1.1) :

$$\begin{cases} \alpha_{KJ}^j = \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-) + \gamma_K \delta_K^j}, \\ \alpha_{KK} = \frac{b_{KK}^+ - b_{KK}^-}{(b_{KK}^+ - b_{KK}^-) + \gamma_K \delta_{KK}}, \end{cases} \quad (4.5)$$

On rappelle que la longueur  $\delta_K^j$  est donnée par la formule (3.2) appliquée sur chaque composante du coefficient  $\nu_{K,i}^J$ . La longueur  $\delta_{KK}$  est définie de telle sorte qu'elle coïncide avec  $\delta_K^j(\mathbf{U})$  quand la solution est constante sur le stencil, ceci afin de préserver la consistance du schéma. Ainsi, d'après la définition de  $\delta_K$  (3.2) et des coefficients  $\nu$  (3.24), on obtient l'expression suivante quand la solution est constante sur le stencil :

$$\delta_{KK} = \frac{|K|}{\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{w}_{K,i}^J} \leq \Delta x_K.$$

On remarque que tout comme pour le schéma HLL-DLP (3.25) pour le système homogène (1.2) avec le Théorème 3.1, le schéma HLL-DLP-AP (4.1) construit ci-dessus pour discrétiser le système avec terme source (1.1) ne vérifie pas toutes les hypothèses du Théorème 4.1. Plus particulièrement, les coefficients  $\nu$  et  $\alpha$  sont définis par composante du système et les coefficients  $\nu$  du schéma ne vérifient pas l'hypothèse (H3).

Ainsi, dans le but d'avoir la préservation de l'ensemble des états admissibles (PI), on réutilise la correction avec le flux à deux points décrite sur la Figure 3.5. Cette correction va permettre d'obtenir la préservation de  $\mathcal{A}$ . En outre, elle ne va pas s'activer

proche de la limite de diffusion et ne va donc pas modifier l'orientation de la diffusion numérique (PII), nécessaire pour obtenir la préservation de l'asymptotique (P2). La non-activation de la correction est prouvée par le lemme et le corollaire qui suivent :

**Lemme 4.3.** *Dans la limite de diffusion le Théorème 4.1 est valide sous les hypothèses (H1), (H2), ( $\bar{H}1$ ) et ( $\bar{H}2$ ). L'hypothèse (H3) n'est pas nécessaire dans ce cas et le schéma (4.1) préserve l'ensemble des états admissibles sous la condition CFL (3.1).*

*Démonstration.* Dans la preuve du Théorème 4.1, l'hypothèse (H3) est utilisée uniquement pour pouvoir ajouter les termes de (4.4). Proche de la limite de diffusion,  $\mathbf{U}$  appartient à la variété d'équilibre  $\mathcal{M}$  (1.7) décrite dans la partie 1.2.1. De plus, d'après la condition de compatibilité (1.8) énoncée originalement dans [BLT13], l'égalité (4.4) est toujours vraie. Ce qui permet de dire que cette égalité est vraie dans la limite de diffusion sans avoir besoin de l'hypothèse (H3). Le reste de la preuve du Théorème 4.1 est inchangée.  $\square$

**Corollaire 4.1.** *La correction avec le flux à deux points (1.29) détaillée dans la Figure 3.5 n'est jamais activée dans la limite de diffusion.*

*Démonstration.* Dans la limite de diffusion, un seul coefficient  $\nu_{K,i}^J$  est utilisé dans le schéma numérique car on ne considère que des équations de diffusion à la limite. Puis en utilisant le Lemme 4.3, le schéma HLL-DLP-AP (4.1) rentre dans le cadre du Théorème 4.1 proche de la limite de diffusion. De ce fait, il préserve l'ensemble des états admissibles.  $\square$

### 4.2.1 Correction asymptotique pour le schéma HLL-DLP-AP

Comme dans le cas 1D, l'utilisation de la technique de BERTHON et TURPAULT nécessite l'utilisation d'une correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  afin de régler le coefficient de diffusion du schéma limite. On rappelle que cette correction ne permet pas de modifier la direction de la diffusion numérique sans perdre certaines propriétés sur les coefficients  $\alpha$ , en particulier le fait que  $\alpha \in [0; 1]$ . C'est pour cela que l'on a cherché à avoir une diffusion numérique orientée selon la normale (PII) avec le schéma HLL-DLP (3.25) construit dans le Chapitre 3.

On rappelle que la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  est introduite en réécrivant le système (1.1) en une formulation équivalente :

$$\partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{U})) = (\gamma(\mathbf{U}) + \bar{\gamma})(\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}). \quad (1.3)$$

Ensuite, le schéma HLL-DLP-AP (4.1) avec correction asymptotique s'exprime en appliquant le schéma à ce système équivalent ce qui modifie  $\gamma$  en  $\gamma + \bar{\gamma}$  dans toutes les expressions précédentes du schéma.

Comme dans la partie 2.1.2, on exhibe le schéma limite à l'aide d'un développement de Chapman-Enskog via une mise à l'échelle restrictive des paramètres. En introduisant  $\varepsilon > 0$ , on réutilise la mise à l'échelle utilisée dans le Chapitre 2 :

$$\begin{cases} \gamma \leftarrow \frac{\gamma}{\varepsilon} \\ \Delta t \leftarrow \frac{\Delta t}{\varepsilon} \end{cases} \quad (2.5)$$

On obtient alors les développements suivants, proches de ceux utilisés en 1D dans (2.6) :

$$\begin{cases} \Delta t \boldsymbol{\alpha}_{KJ} = \Delta t \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-)\varepsilon + (\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K} \\ \quad = \Delta t \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \Delta t (1 - \boldsymbol{\alpha}_{KJ}) = \Delta t \frac{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K}{(b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-)\varepsilon^2 + (\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K\varepsilon} \\ \quad = \frac{\Delta t}{\varepsilon} - \Delta t \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} .$$

En introduisant ces développements dans le schéma HLL-DLP-AP (4.1), on obtient pour les termes du même ordre que  $\varepsilon^{-1}$  :

$$0 = \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J (\mathbf{S}_{KJ}^- + \mathbf{S}_{KK}^+),$$

qui permet de retrouver  $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ , puis  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ . Puis les termes en  $\varepsilon^0$  donnent :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_K^{n+1} &= \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \left[ \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \right]_{\mathbf{R}(\mathbf{U})=\mathbf{U}} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \left[ \boldsymbol{\nu}_{K,i}^J \left( \frac{b_{KJ}^+ - b_{KJ}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K} \mathbf{S}_{KJ}^- + \frac{b_{KK}^+ - b_{KK}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_{KK}} \mathbf{S}_{KK}^+ \right) \right]_{\mathbf{R}(\mathbf{U})=\mathbf{U}} \end{aligned}$$

En multipliant l'expression précédente par la matrice constante  $\mathbf{Q}$  et utilisant les propriétés (1.6) et (1.8), on obtient la limite suivante si  $\boldsymbol{\mathcal{F}}$  est le flux HLL :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \boldsymbol{\nu}_{K,i}^{J,j} \frac{-b_{KJ}^+ b_{KJ}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma})\boldsymbol{\delta}_K^j} (u_J^n - u_K^n),$$

avec  $j$  la composante du système sur laquelle intervient la diffusion. Afin de rendre cette expression consistante avec l'équation limite (1.4), il ne reste plus qu'à choisir la bonne valeur de la correction asymptotique. Elle va permettre de retomber exactement sur le schéma de DRONIOU et LE POTIER (3.11) car le schéma limite possède la bonne forme et surtout sa diffusion numérique est correctement orientée (PII).

Dans un cadre général, le coefficient  $\bar{\gamma}$  doit être choisi de telle sorte que :

$$\nu_{K,i}^{J,j} \frac{-b_{KJ}^+ b_{KJ}^-}{(\gamma_K + \bar{\gamma}) \delta_K^j} (u_J^n - u_K^n) = \bar{\nu}_{K,i}^J D(u)_i (f(u)_J^n - f(u)_K^n) \text{ sur } \mathcal{M}, \quad (4.6)$$

où  $\bar{\nu}_{K,i}^J$  sont les coefficients du schéma DLP (3.14). On observe que  $\gamma + \bar{\gamma}$  reste positif car  $f$  est une fonction croissante de  $u$  et tous les termes sont positifs dans l'expression précédente. Un tel choix de correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  permet d'obtenir le schéma limite suivant :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{\nu}_{K,i}^J D(u)_i (f(u)_J^n - f(u)_K^n),$$

consistant sur tout maillage avec l'équation limite (1.4).

Dans le but d'être exhaustif, on se propose de calculer les corrections asymptotiques du modèle  $M_1$  pour le transfert radiatif (1.17) et celle du modèle d'Euler isentropique avec friction (1.21) dans le cas du schéma HLL-DLP-AP. On pourra voir qu'elles se rapprochent de celles exhibées dans [BMT14; BMST16].

### Correction asymptotique du modèle $M_1$ pour le transfert radiatif

Tout d'abord pour le modèle  $M_1$  (1.17), le coefficient contrôlant le terme source obtenu dans la reformulation (1.18) est  $c\sigma^m$  avec  $c$  la vitesse de la lumière. On obtient donc la correction asymptotique suivante :

$$(\bar{\sigma}^m)_{K,i}^J = 3(\sigma^f)_K \nu_{K,i}^{J,E_R} \frac{-b_{KJ}^+ b_{KJ}^-}{\bar{\nu}_{K,i}^J c^2 \delta_K^{E_R}} - (\sigma^m)_K.$$

Cette correction asymptotique peut se simplifier si on fait le choix classique  $b_{KJ}^+ = -b_{KJ}^- = c$ . Le schéma limite est alors le suivant :

$$\begin{aligned} (\rho C_v T + aT^4)_K^{n+1} &= (\rho C_v T + aT^4)_K^n \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{\Delta t}{|K|} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \bar{\nu}_{K,i}^J \frac{c}{3(\sigma^f)_K} \left( (aT^4)_J - (aT^4)_K \right), \end{aligned}$$

qui est le schéma DLP pour la limite asymptotique du modèle  $M_1$  :

$$\partial_t (\rho C_v T + aT^4) - \operatorname{div} \left( \frac{c}{3\sigma^f} \nabla (aT^4) \right) = 0. \quad (1.19)$$

**Remarque 4.1.** Cette correction asymptotique est liée au fait que l'on a choisi de ne pas calculer de flux numérique  $\mathcal{F}$  pour l'équation d'énergie matière (la dernière). Ce choix a été fait car le flux physique est égal à zéro pour cette équation et le couplage entre la température et les autres variables ne se fait que par le terme source.

### Correction asymptotique des équations d'Euler isentropique avec friction

Ensuite pour le modèle d'Euler (1.21), le terme contrôlant la raideur du terme source est le coefficient de friction  $\kappa$  et cela conduit au calcul suivant :

$$\bar{\kappa}_{K,i}^J = \begin{cases} \kappa_K \left( \frac{\nu_{K,i}^{J,\rho} (-b_{KJ}^+ b_{KJ}^-) \rho_J - \rho_K}{\bar{\nu}_{K,i}^J \delta_{KJ}^\rho} \frac{\rho_J - \rho_K}{p_J - p_K} - 1 \right), & \text{si } p_J \neq p_K \\ \kappa_K \left( \frac{\nu_{K,i}^{J,\rho} (-b_{KJ}^+ b_{KJ}^-)}{\bar{\nu}_{K,i}^J \delta_{KJ}^\rho} \frac{1}{p'(\rho_K)} - 1 \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le schéma limite est alors le suivant :

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{\Delta t}{|K|} |e_i| \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \frac{\bar{\nu}_{K,i}^J}{\kappa_K} (p_J - p_K),$$

qui n'est rien d'autre que le schéma DLP pour l'équation limite du modèle d'Euler isentropique :

$$\partial_t(\rho) - \operatorname{div} \left( \frac{1}{\kappa} \nabla p \right) = 0. \quad (1.22)$$

## 4.3 Montée en ordre du schéma HLL-DLP-AP

On possède désormais un schéma qui préserve l'asymptotique (P2) et l'ensemble des états admissibles dans toutes les configurations (P1) grâce à la correction avec le flux à deux points. Maintenant, tout comme dans le cas 1D avec le schéma HLL-AP, on étend ce schéma à l'ordre élevé afin d'avoir une meilleure description des discontinuités et une augmentation de la précision à maillage fixé.

Pour cela, on réutilise la même technique qu'en 1D avec la nouvelle combinaison convexe (2.18) introduite via un coefficient  $\beta$  (2.20). On rappelle que cette combinaison convexe a été introduite afin de contourner certaines limitations liées en partie à l'utilisation des reconstructions polynômiales qui s'effectuent par cellules et non par interfaces pour la limite de diffusion. De plus, étant donné que les coefficients  $\alpha$  restreignent le schéma à être d'ordre un à proche de la diffusion et que les phénomènes à la limite sont plus lents et continus que ceux rencontrés dans le régime de transport, il n'est pas forcément nécessaire d'avoir un schéma d'ordre élevé à la limite.

Pour ces raisons, on introduit, comme en 1D, un coefficient  $\beta$  pour chaque cellule  $K$  :

$$\beta_K^n := \frac{\Delta_l}{\Delta_l + \gamma(\mathbf{U}_K^n)^{t^n} \Delta x_K} \in [0; 1], \quad (4.7)$$

où  $\Delta_l$  est la même longueur caractéristique qu'en 1D. On verra qu'un choix de  $\Delta_l = 5 \times 10^{-2}$  permet d'obtenir une bonne zone de transition. La nouvelle valeur de la solution utilisée est alors la combinaison convexe entre la reconstruction polynômiale  $\widetilde{\mathbf{U}}$  (1.38) et

les valeurs moyennes  $\mathbf{U}$  :

$$\bar{\mathbf{U}}_K^n(\mathbf{x}) := \beta_K^n \widetilde{\mathbf{U}}_K^n(\mathbf{x}) + (1 - \beta_K^n) \mathbf{U}_K^n. \quad (4.8)$$

On notera que, comme en 1D, on souhaite obtenir les reconstructions polynomiales  $\widetilde{\mathbf{U}}$  dans le régime de transport ( $\gamma t \Delta x_K \lesssim 1$ ) afin d'améliorer la précision du schéma et parce que le schéma est alors capable d'échantillonner le terme source. D'un autre côté, on veut avoir les valeurs moyennes  $\mathbf{U}$  proche de la limite de diffusion ( $\gamma t \Delta x_K \gg 1$ ), afin de retrouver le schéma d'ordre un et la propriété de préservation de l'asymptotique via les mêmes calculs que pour l'ordre un. Ainsi, avec cette nouvelle combinaison convexe, la version d'ordre élevé du schéma HLL-DLP-AP s'exprime comme :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{r=1}^{R_i} \xi_{ir} \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J(\bar{\mathbf{U}}_{ir}^n) \mathcal{F}(\bar{\mathbf{U}}_{K,ir}^n, \bar{\mathbf{U}}_{J,ir}^n; \boldsymbol{\eta}_{KJ}) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}, \quad (4.9)$$

où  $\xi_{ir}$  sont les poids de la formule de quadrature utilisée pour intégrer le flux sur l'interface  $i$  et  $R_i$  est le nombre de points de quadrature. De plus,  $\bar{\mathbf{U}}_{K,ir}^n$  est la valeur de la combinaison convexe évaluée au point de quadrature de coordonnées  $\mathbf{x}_{ir}$  :  $\bar{\mathbf{U}}_{K,ir}^n := \widetilde{\mathbf{U}}_K^n(\mathbf{x}_{ir})$ . Comme explicité dans le Chapitre 1, ce schéma est présenté avec une discrétisation temporelle d'ordre un utilisant le schéma d'Euler explicite. La version d'ordre élevé en temps s'obtient directement en appliquant ce schéma à chaque étage des schémas SSPRK décrits dans la partie 1.3.4.

## 4.4 Construction de solutions de référence avec le modèle $P_1$ pour le transfert radiatif

La version d'ordre élevé du schéma HLL-DLP-AP (4.9) construite dans la partie précédente fait intervenir à la fois des reconstructions polynomiales et les valeurs moyennes dans la combinaison convexe  $\bar{\mathbf{U}}$  (4.7). De plus, elle utilise une limitation *a posteriori*. Il est donc difficile d'estimer théoriquement l'ordre de ce schéma. Comme en 1D, on ne peut que conjecturer un ordre élevé proche du régime de transport et l'ordre un à proximité de la limite de diffusion. Afin d'estimer plus en détails l'ordre du schéma, on va réaliser une étude de convergence du même type que celle conduite en 1D avec les équations du Télégraphe partie 2.3.2. Il faut pour cela avoir des solutions exactes du modèle  $P_1$  pour le transfert radiatif (1.16). On s'inspire alors des travaux de [Fra12; BDF12b; BDFL16] pour créer un jeu de solutions exactes et continues.



On suppose que le coefficient de *scattering*  $\sigma^d$  est constant et les solutions continues sont calculées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} E_R(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c\sigma^d} \partial_t f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{F}_R(t, \mathbf{x}) = -\frac{c}{3\sigma^d} \nabla f(t, \mathbf{x}) \end{cases}, \quad (4.10)$$

où la fonction  $f$  est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$c\sigma^d \partial_t f(t, \mathbf{x}) + \partial_t^2 f(t, \mathbf{x}) - \frac{c^2}{3} \Delta f(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.11)$$

On cherche alors des solutions  $f$  de l'équation (4.11) via une séparation de variables. Afin de simplifier les calculs, on se place sur le carré unité  $[0; 1]^2$ . Ensuite, si l'on suppose que  $f$  est de la forme  $f(t, \mathbf{x}) = \alpha(t) \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)$ , alors  $\alpha(t)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{8\pi^2 c^2}{3} \alpha(t) + c\sigma^d \alpha'(t) + \alpha''(t) = 0. \quad (4.12)$$

Il reste à trouver des solutions à cette équation différentielle en fonction du signe  $3\sigma^d - 32\pi^2$ . Dans un premier temps, si  $0 < \sigma^d < \sqrt{\frac{32}{3}}\pi$ , une des solutions de (4.12) est :

$$\alpha(t) = \exp\left(\frac{-c\sigma^d t}{2}\right) \left( \sin\left(\frac{ct}{6} \sqrt{96\pi^2 - 9(\sigma^d)^2}\right) + \cos\left(\frac{ct}{6} \sqrt{96\pi^2 - 9(\sigma^d)^2}\right) \right)$$

Puis, dans le cas où  $\sigma^d = \sqrt{\frac{32}{3}}\pi$ , un second type de solution est :

$$\alpha(t) = \exp\left(-\frac{2\sqrt{6}\pi}{3} ct\right) (1 + t)$$

Finalement, dans le troisième et dernier cas, pour  $\sigma^d > \sqrt{\frac{32}{3}}\pi$ , une solution est donnée par :

$$\alpha(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sigma^d - \frac{1}{3} \sqrt{9(\sigma^d)^2 - 96\pi^2}\right) ct\right) + \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sigma^d + \frac{1}{3} \sqrt{9(\sigma^d)^2 - 96\pi^2}\right) ct\right)$$

À partir de ces trois types de solutions de (4.12), il est possible de construire des solutions continues du modèle  $P_1$  pour plusieurs valeurs du coefficient de *scattering* à partir de (4.10).

Comme dans les autres calculs en 1D, on notera dès maintenant que, au vu des exponentielles présentes dans les solutions, il ne sera pas possible de calculer des solutions exactes pour des grandes échelles de  $\sigma^d$ .

## 4.5 Résultats 2D avec terme source

On présente maintenant différents cas tests numériques afin d'étudier le comportement du schéma HLL-DLP-AP dans différentes configurations. On s'intéresse aux résultats obtenus par le schéma tant dans des régimes intermédiaires que proche de la limite de diffusion, en utilisant à la fois le schéma d'ordre un (4.1) et son extension à l'ordre élevé (4.9).

### 4.5.1 Comparaison avec les solutions de référence du modèle

$P_1$

Pour commencer, on utilise les solutions continues construites dans la partie 4.4 afin d'observer l'ordre du schéma dans des régimes intermédiaires. Les résultats présentés dans cette partie peuvent être mis en relation avec ceux obtenus dans la partie 2.4.2 avec les équations du Télégraphe en 1D.

Pour cela, on se place sur le carré unité  $[0; 1]^2$  avec des conditions de Dirichlet imposées sur chaque côté du domaine avec la solution exacte. Les calculs sont menés avec l'équation de la chaleur hyperbolique, ainsi les constantes  $c$  et  $\sigma^d$  sont normalisées pour obtenir :

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) = 0 \\ \partial_t \mathbf{F}_R + \nabla E_R = -\sigma \mathbf{F}_R \end{cases},$$

pour cela on a fixé  $c = \sqrt{3}$  et  $\sigma = \sqrt{3}\sigma^d$ . Dans les Tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, on présente les erreurs relatives en norme  $L^2$  calculées à l'aide de la formule (3.27) sur l'énergie radiative  $E_R$ . On utilise le schéma HLL-DLP-AP d'ordre un (4.1) et le schéma d'ordre élevé (4.9) utilisant la combinaison convexe (4.8) avec des reconstructions polynomiales de degré un ( $\mathbb{P}_1$ ) et deux ( $\mathbb{P}_2$ ) limité par le critère DMP. On se place à un temps final  $t_f = 1$  s pour différentes valeurs de  $\sigma$  :  $10^{-2}$ , 1 et  $10$  s $^{-1}$ .

Maillage		$\beta$ (4.7)	HLL-DLP-AP		HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$		HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_2$	
ddl	$\Delta x$		$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
676	6.45E-03	1.00	3.20E-01	—	9.13E-02	—	9.17E-02	—
2 704	3.22E-03	1.00	1.93E-01	0.73	3.07E-02	1.57	2.95E-02	1.63
10 816	1.61E-03	1.00	1.05E-01	0.88	1.32E-02	1.22	1.42E-02	1.05
43 264	8.06E-04	1.00	5.52E-02	0.93	6.43E-03	1.03	7.21E-03	0.98
173 056	4.03E-04	1.00	2.84E-02	0.96	3.30E-03	0.96	4.05E-03	0.83
692 224	2.01E-04	1.00	1.44E-02	0.98	1.73E-03	0.93	2.70E-03	0.58

TABLEAU 4.1 – Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-DLP-AP avec  $\sigma = 10^{-2}$

Pour  $\sigma = 10^{-2}$  dans le Tableau 4.1, on observe que les reconstructions polynomiales permettent de légèrement améliorer la précision sans toutefois atteindre l'ordre désiré.

Cette limitation est due aux coefficients  $\alpha$  (4.5) qui ne respectent pas les propriétés (2.17) afin d'avoir un schéma globalement d'ordre élevé. De plus, la limitation avec le critère DMP de la méthode MOOD diminue l'ordre du schéma mais permet de conserver des solutions valables. On voit tout de même que la reconstruction  $\mathbb{P}_1$  permet de gagner un facteur dix sur l'erreur, cependant la reconstruction  $\mathbb{P}_2$  n'apporte pas plus.

Maillage		$\beta$ (4.7)	HLL-DLP-AP		HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$		HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_2$	
ddl	$\Delta x$		$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
676	6.45E-03	0.89	3.18E-01	—	1.09E-01	—	1.08E-01	—
2 704	3.22E-03	0.94	1.91E-01	0.73	3.35E-02	1.71	3.17E-02	1.77
10 816	1.61E-03	0.97	1.03E-01	0.89	1.30E-02	1.37	1.36E-02	1.22
43 264	8.06E-04	0.98	5.40E-02	0.93	6.10E-03	1.09	6.75E-03	1.01
173 056	4.03E-04	0.99	2.76E-02	0.97	3.13E-03	0.96	3.86E-03	0.80
692 224	2.01E-04	1.00	1.40E-02	0.98	1.64E-03	0.93	2.53E-03	0.61

TABLEAU 4.2 – Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-DLP-AP avec  $\sigma = 1$

Avec  $\sigma = 1$  dans le Tableau 4.2, le schéma avec les reconstructions polynomiales  $\mathbb{P}_1$  est encore plus précis que le schéma d'ordre un, d'un ordre de grandeur, même si de nouveau l'ordre désiré n'est pas atteint, comme prévu. De plus, on peut voir que la reconstruction de degré deux n'améliore pas la précision.

Maillage		$\beta$ (4.7)	HLL-DLP-AP		HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$		HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_2$	
ddl	$\Delta x$		$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$	$e_{L^2}$	$p_{L^2}$
676	6.45E-03	0.44	1.08E+00	—	1.49E+00	—	1.48E+00	—
2 704	3.22E-03	0.61	7.38E-01	0.55	8.48E-01	0.82	8.56E-01	0.79
10 816	1.61E-03	0.76	4.23E-01	0.80	4.15E-01	1.03	4.22E-01	1.02
43 264	8.06E-04	0.86	2.25E-01	0.91	2.00E-01	1.06	2.02E-01	1.06
173 056	4.03E-04	0.93	1.15E-01	0.97	9.74E-02	1.04	9.90E-02	1.03
692 224	2.01E-04	0.96	5.81E-02	0.98	4.81E-02	1.02	4.89E-02	1.02

TABLEAU 4.3 – Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-DLP-AP avec  $\sigma = 10$

Finalement, pour le cas  $\sigma = 10$ , les trois schémas possèdent la même précision car le terme source est plus prépondérant ce qui implique que ce sont les valeurs moyennes qui sont utilisées dans la combinaison convexe  $\bar{\mathbf{U}}$  (4.8).

Dans ces trois tableaux, on peut observer que le schéma HLL-DLP-AP est bien convergent à l'ordre un pour les trois échelles de  $\sigma$ . On rappelle que l'on ne teste pas le schéma face à ces solutions continues pour des plus grandes échelles de  $\sigma$  car les solutions exactes ne sont pas correctement définies numériquement.

Les résultats des Tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 sont regroupés dans la Figure 4.1. On retrouve le même comportement de l'erreur en fonction de  $\sigma$  et l'on observe bien quel est le schéma le plus précis en fonction des régimes.

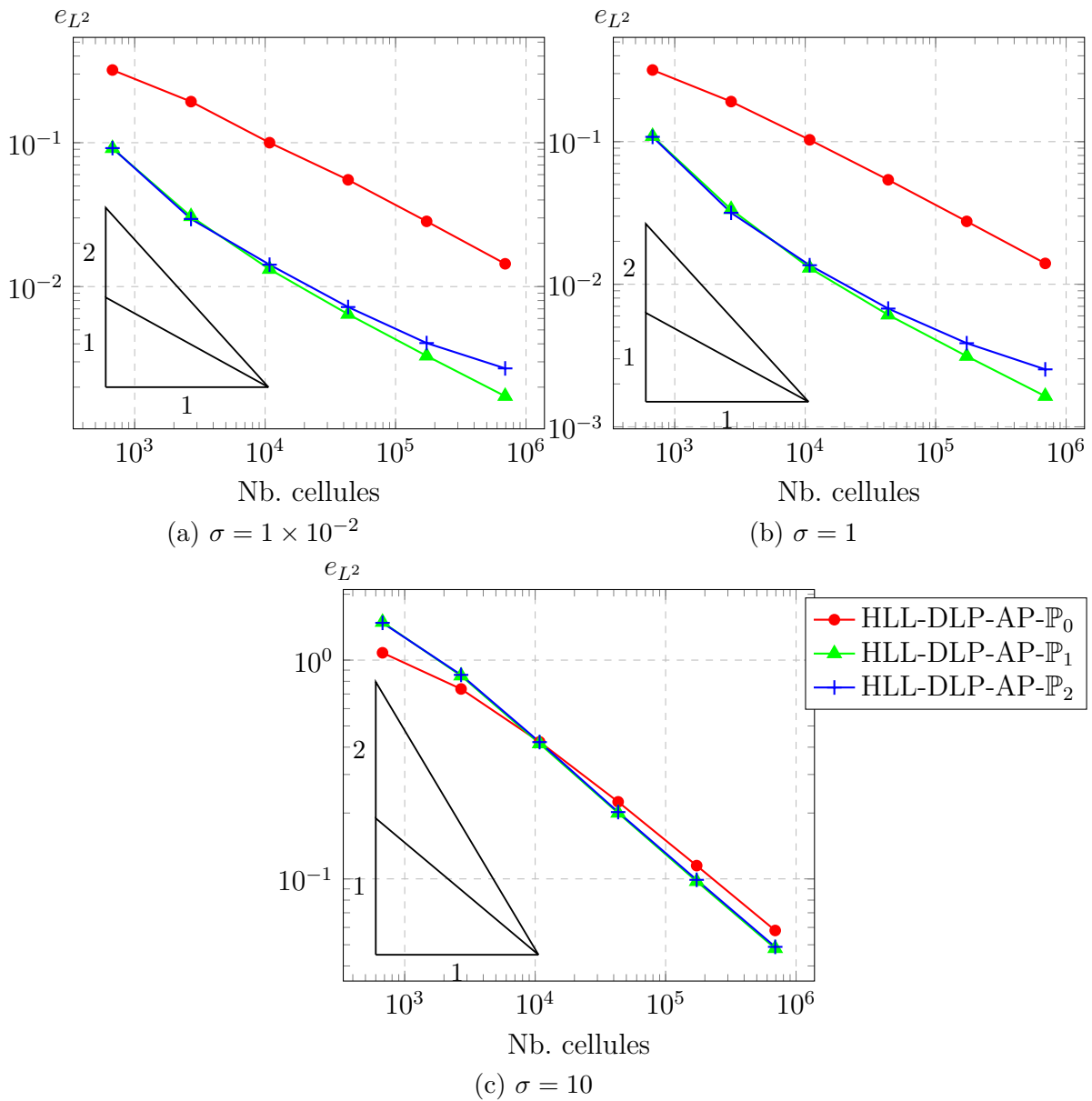


FIGURE 4.1 – Graphes d’erreurs pour le schéma HLL-DLP-AP

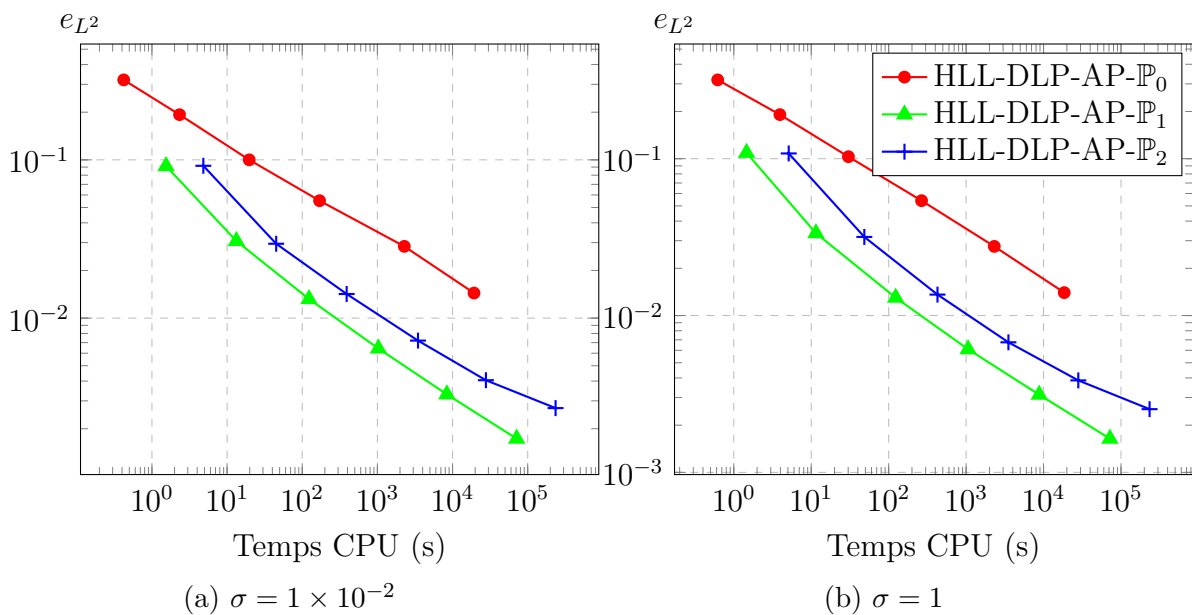


FIGURE 4.2 – Graphes d’erreurs pour le schéma HLL-DLP-AP en fonctions du temps CPU

Comme dans le cas 1D, on trace aussi l'erreur en fonction du temps de calcul dans la Figure 4.2 pour  $\sigma = 10^{-2}$  et 1. On trace les courbes uniquement dans ces deux cas car on a vu que pour  $\sigma = 10$  les reconstructions polynomiales ne sont pas plus précises que le schéma d'ordre un. On observe bien l'intérêt de la reconstruction  $\mathbb{P}_1$  qui permet d'améliorer la précision pour un temps de calcul raisonnable.

### 4.5.2 Convergence vers la diffusion

De la même manière qu'en 1D dans la partie 2.4.3, on effectue une étude de convergence vers la diffusion quand  $\gamma t$  croît. On se place aussi avec le modèle  $M_1$  pour le transfert radiatif (1.17).

On rappelle que cette étude de convergence s'effectue en comparant la solution obtenue avec des schémas pour le système avec terme source (1.1) à celle obtenue par un schéma pour l'équation de diffusion limite (1.4) sur le même maillage. Ici, le schéma limite est celui de DRONIOU et LE POTIER (3.11). L'erreur relative en norme  $L^2$  se calcule alors de la manière suivante :

$$e_{L^2}^2(\gamma t) := \frac{\sum_{K \in \mathcal{M}} (|K| (\mathbf{Q}\mathbf{U}_K - u_K))^2}{\sum_{K \in \mathcal{M}} (|K| u_K)^2}, \quad (4.13)$$

où  $u_K$  est la valeur moyenne de la solution obtenue par le schéma de DRONIOU et LE POTIER et  $\mathbf{Q}\mathbf{U}_K$  est celle obtenue par un schéma pour le système avec terme source (1.1).

L'initialisation pour ce cas test utilise une gaussienne 2D en température et on se place sur la variété d'équilibre avec les variables suivantes :

$$\begin{aligned} T_0(x, y) &= 300 \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{2 \times 0.05^2}\right) + 300 \\ E_{R,0}(x, y) &= aT_0(x, y)^4 \\ \mathbf{F}_{R,0}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Le domaine de calcul est le carré unité  $[0; 1]^2$  maillé grossièrement avec  $10^4$  triangles, pour un pas d'espace  $\Delta x \simeq 1,6 \times 10^{-3}$ . Les paramètres de la gaussienne sont choisis afin que celle-ci ne touche pas les bords lors de son évolution et des conditions aux limites de type Neumann sont appliquées.

Dans le Tableau 4.4, on présente les résultats obtenus avec les schémas HLL-DLP-AP avec et sans reconstructions polynomiales. Comme on peut le voir, ces trois schémas convergent bien vers la limite de diffusion quand on augmente  $\gamma t$ . On a aussi ajouté dans ce tableau le schéma HLL-DLP-NoAP qui n'est rien d'autre que le schéma HLL-DLP-AP dans lequel on a désactivé la correction asymptotique  $\bar{\gamma}$  en la fixant à zéro. Le schéma que l'on a noté HLL-NoAP est le schéma HLL à deux points dans le lequel le

terme source a été ajouté avec les coefficients  $\alpha$  à l'aide de la méthode de BERTHON et TURPAULT. Finalement, le dernier schéma, noté HLL-SRC, est le schéma HLL avec une discrétisation centrée du terme source :

$$\mathbf{U}_K^{n+1} = \mathbf{U}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \Delta t \gamma(\mathbf{U}_K^n) (\mathbf{R}(\mathbf{U}_K^n) - \mathbf{U}_K^n). \quad (4.14)$$

On peut voir qu'aucun de ces trois derniers schémas n'est consistant avec la limite de diffusion, le moins bon restant le schéma avec la discrétisation centrée du terme source.

Plus en détail, on observe dans ce tableau que pour  $\gamma t \Delta x \ll 1$  tous les schémas donnent le même ordre de grandeur pour l'erreur. À l'inverse, dès que  $\gamma t \Delta x \gg 1$  l'erreur des trois schémas qui ne sont pas AP ne décroît pas.

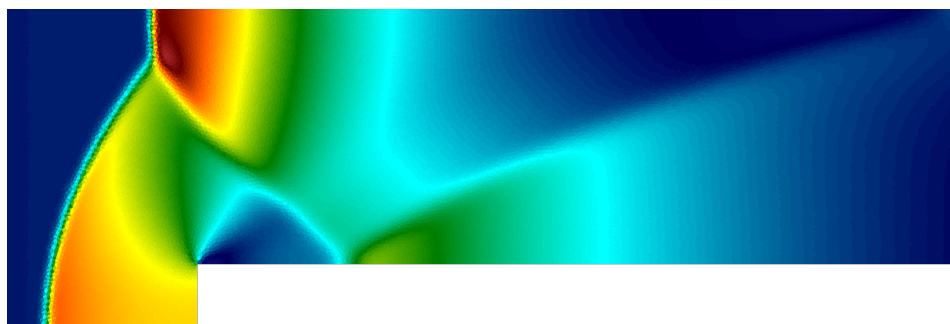
$\sigma^a, \sigma^e, \sigma^f$	1	5	25	125	625	3125
$ct$	1	2	4	8	16	32
$\gamma t = c\sigma^m t$	1	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$
Schémas	Erreurs- $L^2$ relatives par rapport à la diffusion (4.13)					
HLL-DLP-AP (4.1)	2.70E-02	1.47E-02	4.63E-03	8.50E-04	2.71E-04	1.12E-04
HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$ (4.9)	2.70E-02	1.47E-02	4.80E-03	9.93E-04	2.91E-04	1.14E-04
HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_2$ (4.9)	2.68E-02	1.45E-02	4.64E-03	8.47E-04	2.18E-04	1.73E-04
HLL-DLP-NoAP ( $\bar{\gamma} = 0$ )	2.70E-02	1.46E-02	3.75E-03	2.86E-03	4.44E-03	3.27E-03
HLL-NoAP	2.70E-02	1.46E-02	3.81E-03	2.63E-03	4.05E-03	2.94E-03
HLL-SRC (4.14)	2.71E-02	1.57E-02	7.58E-03	3.52E-03	1.42E-02	1.92E-02

TABLEAU 4.4 – Convergence vers la limite de diffusion en 2D pour  $\gamma t$  croissant avec  $\Delta x \simeq 1,6 \times 10^{-3}$

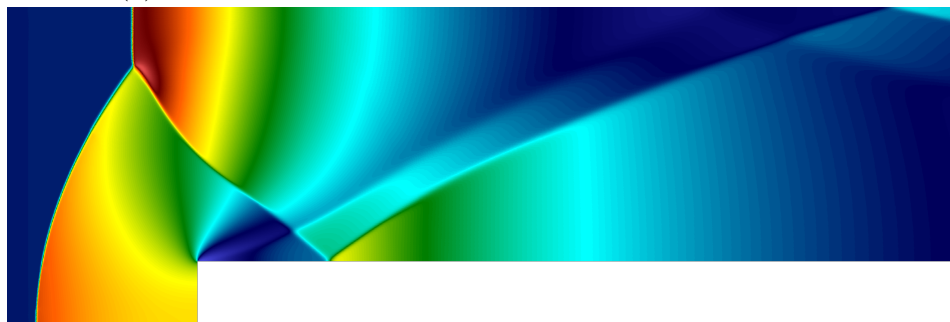
On notera que pour tous les calculs avec les schémas HLL-DLP-AP, la correction avec le schéma à deux points n'est jamais activée et que le coût des tests d'admissibilités physiques est inférieur à 1%

### 4.5.3 Marche avec friction

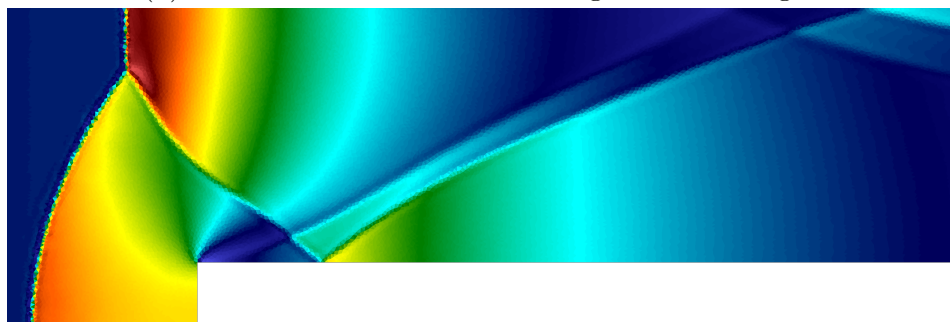
Le cas test suivant s'inspire de la marche à Mach 3 de WOODWARD et COLELLA [WC84] présentée dans la partie 3.4.5. On utilise la même géométrie et le même type de condition aux limites : une entrée à gauche, une sortie de fluide à droite et les autres bords sont des murs. De même, l'entrée de fluide se fait avec une densité  $\rho_0 = 1$  et une vitesse  $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}^T$ .



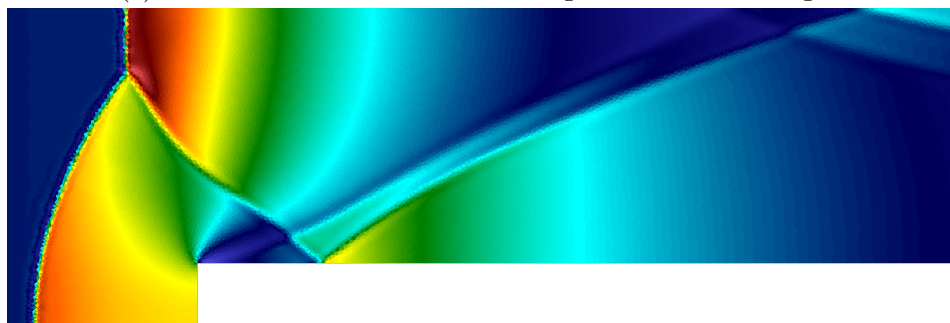
(a) HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$  sur un maillage de  $4 \times 10^4$  triangles



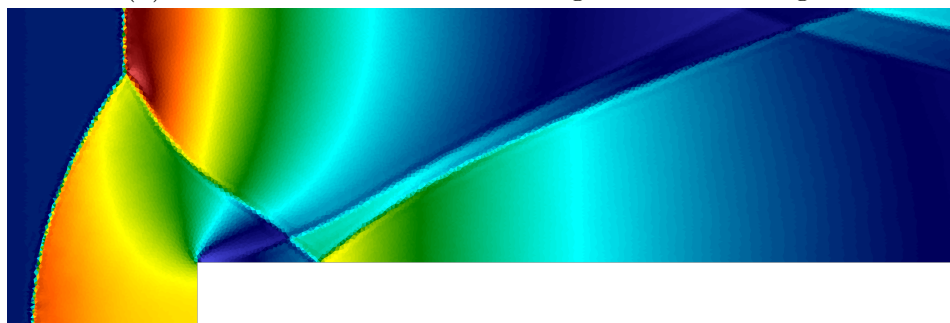
(b) HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$  sur un maillage de  $10^6$  triangles



(c) HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$  sur un maillage de  $4 \times 10^4$  triangles



(d) HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_2$  sur un maillage de  $4 \cdot 10^4$  triangles



(e) HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_3$ -DMP sur un maillage de  $4 \cdot 10^4$  triangles

FIGURE 4.3 – Densités pour la marche avec friction obtenues avec le schéma HLL-DLP-AP

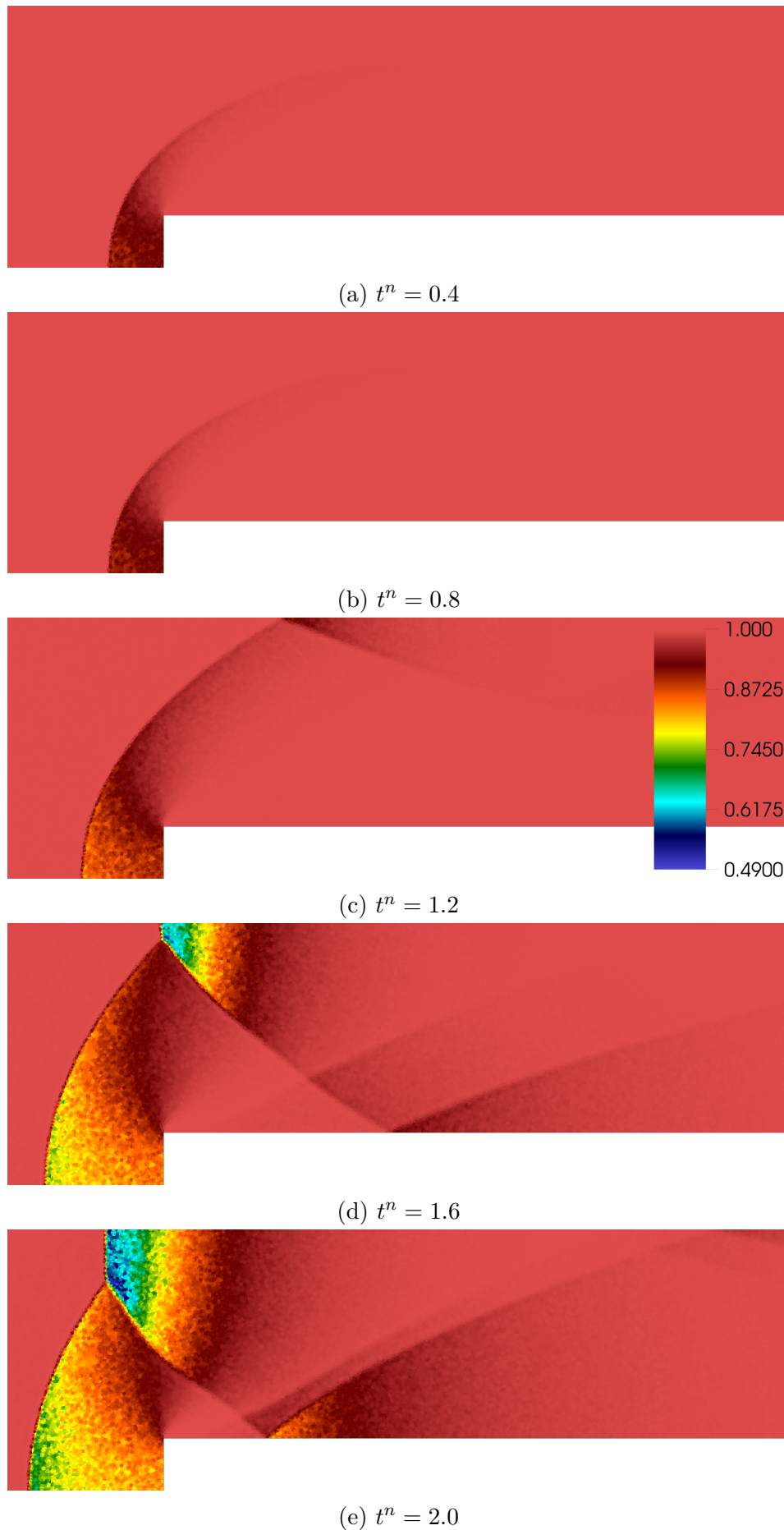


FIGURE 4.4 – Valeurs du coefficient  $\beta$  (4.7) utilisées par le schéma HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$  à différents temps pour la marche avec friction sur un maillage de  $4 \times 10^4$  triangles



Contrairement au cas test original qui utilise le modèle d'Euler pour les gaz parfaits (1.13), on utilise ici le modèle d'Euler isentropique avec friction (1.21). On rappelle que la loi de pression que l'on utilise est  $p = \rho^\gamma$ , avec  $\gamma = 1.4$ . Le coefficient de friction que l'on choisit est le suivant :

$$\kappa(\rho) = 10 \left( \frac{\rho}{7} \right)^3, \quad (4.15)$$

de telle sorte que les différents régimes soient présents au cours de la simulation. Le temps final de la simulation est fixé à  $t_f = 2$  afin d'obtenir une solution présentant plusieurs réflexions. Les résultats pour ce nouveau cas test sont présentés avec le schéma d'ordre un et d'ordre élevé sur des maillages fins et grossiers sur la Figure 4.3. Le schéma d'ordre élevé est limité par le critère d'admissibilité physique (PAD) et, un critère de non-oscillation de la solution de type DMP est utilisé pour la solution avec la reconstruction  $\mathbb{P}_3$ .

La Figure 4.3b est obtenue avec le schéma HLL-DLP-AP d'ordre un sur un maillage fin de  $10^6$  triangles, elle peut donc être considérée comme une « solution de référence » pour ce cas test. Les autres figures présentent la solution obtenue par le schéma HLL-DLP-AP sans reconstructions polynomiales ( $\mathbb{P}_0$ ) et avec reconstructions sur un maillage plus grossier de  $4 \times 10^4$  triangles. Au travers des différentes sous figures de la Figure 4.3, il est possible de comparer la solution obtenue sur le maillage grossier à la référence. On observe que les solutions données par les schémas utilisant les reconstructions polynomiales sont bien meilleures que celle du schéma d'ordre un, en particulier sur le côté droit du domaine.

Le résultat de la Figure 4.3b, avec le schéma d'ordre un et le maillage fin, nécessite 270h de calculs alors qu'il ne faut que 6h pour obtenir la Figure 4.3c avec le schéma utilisant la reconstruction  $\mathbb{P}_1$  sur un maillage grossier. On voit ici tout l'intérêt de l'ordre élevé dans de telles configurations. À titre de comparaison, les reconstructions  $\mathbb{P}_0$ ,  $\mathbb{P}_2$  et  $\mathbb{P}_3$  demandent respectivement 1, 12 et 24h de calculs sur le maillage de  $4 \times 10^4$  triangles.

Afin de voir plus en détail l'influence du paramètre  $\beta$  (4.7), on a tracé sur la Figure 4.4 la valeur de ce coefficient à différents temps de la simulation avec le schéma HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$ . On rappelle que  $\beta$  crée la combinaison convexe (4.8) entre les valeurs reconstruites et les valeurs moyennes et qu'il est dépendant du temps. On peut voir sur cette figure qu'il reste assez proche de un sur une grande portion du domaine, c'est donc l'ordre élevé qui est privilégié sur ces zones. En effet, le temps de simulation est assez court et le coefficient de friction  $\kappa$  (4.15) n'atteint pas des valeurs permettant de s'approcher du régime de diffusion.

#### 4.5.4 Vitesses de convergence

Comme en 1D dans la partie 2.4.4, on vérifie que le schéma permet de retrouver les bonnes vitesses de convergence vers l'équilibre (1.9) et (1.10). On reprend le même

type de test sur le modèle d'Euler isentropique avec friction (1.21). La vitesse du fluide à l'instant initial est nulle pour se placer sur la variété d'équilibre  $\mathcal{M}$  et la densité est initialisée par une gaussienne de la forme :

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \exp(-(x - 50)^2 - (y - 50)^2) + 1.$$

On choisit un grand domaine de calcul  $[0; 100]^2$  avec des conditions aux bords de type Neumann et le temps final de la simulation est fixé à  $t_f = 100$ . Il est maillé avec environ 26000 triangles pour pas d'espace  $\Delta x \simeq 9,05 \times 10^{-2}$ .

De la même manière qu'en 1D, on trace sur les Figures 4.5 et 4.6 les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  de la densité (moins sa valeur à l'équilibre,  $\rho_E = 1$ ) et de la quantité de mouvement au cours du temps. Elles sont obtenues par le schéma HLL-DLP-AP avec et sans reconstructions polynomiales ( $\mathbb{P}_0$  et  $\mathbb{P}_1$ ). Pour la version d'ordre élevé, on modifie la valeur de la longueur caractéristique  $\Delta_l$  intervenant dans le calcul de  $\beta$  (4.7) en la multipliant par la longueur du domaine, soit  $\Delta_l = 5$ .

Pour  $\kappa = 1$ , on observe sur la Figure 4.5 que les deux schémas respectent les bons taux de convergence dans les normes  $L^2$  et  $L^\infty$ .

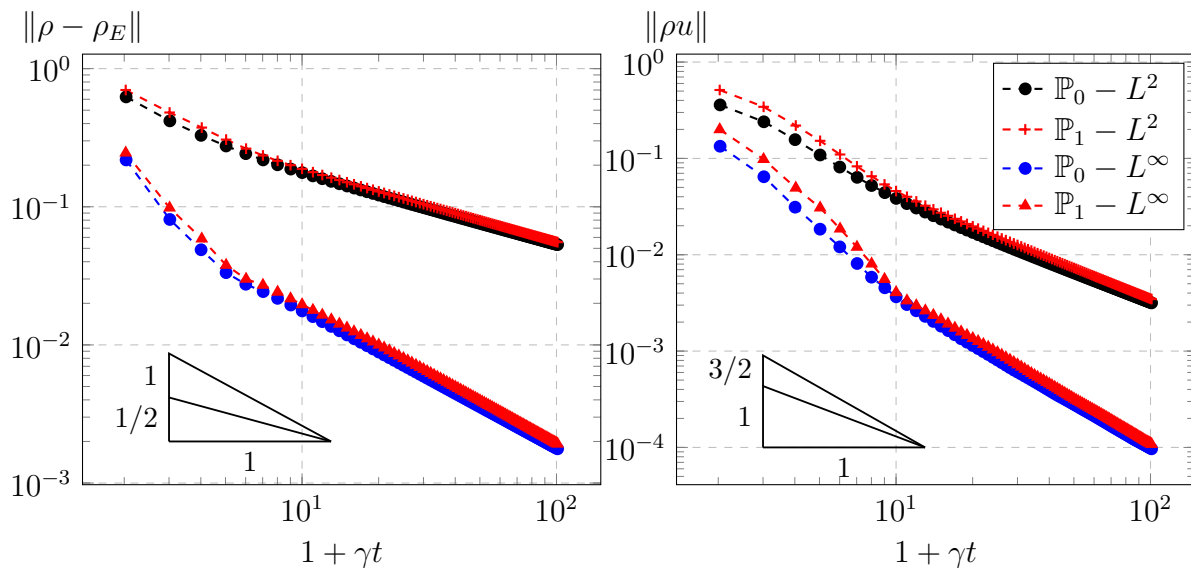


FIGURE 4.5 – Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec  $\Delta x \simeq 9,05 \times 10^{-2}$  et  $\kappa = 1$  en 2D

Puis avec  $\kappa = 5$ , les résultats sont présentés sur la Figure 4.6. Dans ce cas on observe que le schéma d'ordre un suit correctement les taux de décroissance. Quant au schéma avec la combinaison convexe (4.8), il est nécessaire que la transition entre les reconstructions polynomiales et les valeurs moyennes s'effectue afin de retrouver les bonnes vitesses.

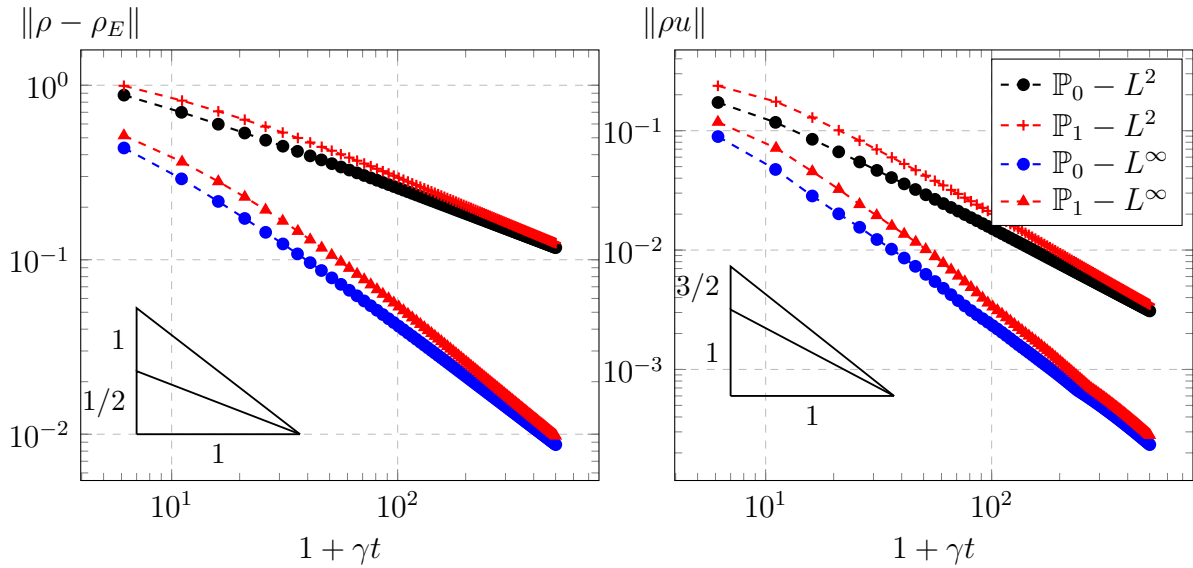


FIGURE 4.6 – Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec  $\Delta x \simeq 9,05 \times 10^{-2}$  et  $\kappa = 5$  en 2D

#### 4.5.5 Hydrodynamique radiative en 2D

Le dernier test que l'on effectue utilise le modèle de l'hydrodynamique radiative (1.20) et il s'inspire des simulations présentes dans [STS01; Tur03]. Ces calculs s'inspirent eux-mêmes des expériences décrites dans [CP64; PA64] où une balle est tirée à contre courant dans un tube pour obtenir des grandes vitesses relatives, de l'ordre d'une dizaine de kilomètres par seconde. Cette modélisation permet une première approche pour la simulation de la rentrée atmosphérique de véhicules spatiaux. On néglige ici les réactions chimiques qui ont lieu lorsque le milieu s'échauffe afin de conserver une simplicité dans le modèle mais elles devraient être prises en compte pour des calculs plus réalistes. Ce cas test est quantitatif car le modèle est simplifié mais on s'astreint à prendre les bons ordres de grandeur pour les différents paramètres.

Dans cette optique, on utilise la pression et la densité de l'atmosphère à 57 km d'altitude données par le modèle d'atmosphère standard de 1976 [COE76] obtenues à l'aide du calculateur disponible en ligne : <http://aero.stanford.edu/stdatm.html>. On a ainsi  $\rho_0 = 4,2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $p_0 = 30,6305 \text{ Pa}$ . On considère que l'air est un gaz parfait de masse molaire  $M = 30 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  avec un coefficient adiabatique  $\gamma = 1,4$ . Il est supposé à l'équilibre radiatif, on a donc  $E_{R,0} = aT_0^4$  et  $\mathbf{F}_{R,0} = 0$  sur tout le domaine à l'instant initial. De plus, la vitesse initiale est  $\mathbf{u}_0 = (16 \ 0)^T \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On a choisi une approximation des opacités s'approchant du modèle de [NSCBK75] :

$$\sigma = \min \left( 10^3, \frac{p}{10^5} \left( \frac{10^4}{T} \right)^3 \right).$$

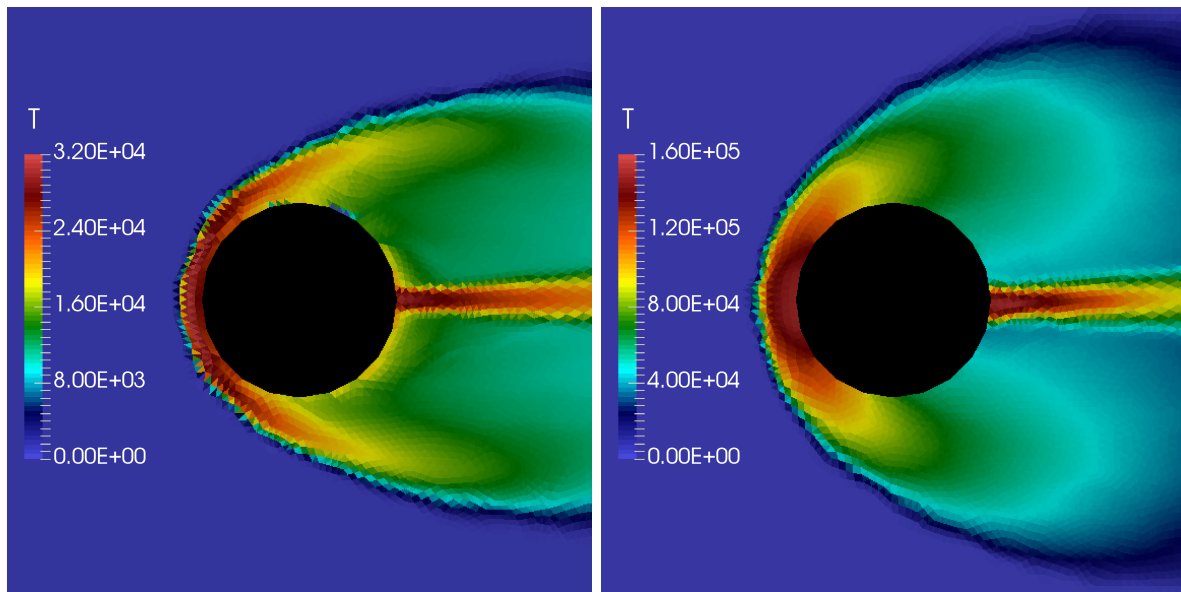
On utilise ici un modèle gris (intégré sur les fréquences) mais il pourrait être possible de faire plus précis en utilisant un modèle de type multi-groupe (dépendant de la fréquence) [Tur03; Sar13].

Pour modéliser l'expérience, on place une balle de rayon  $r = 3$  mm au centre d'un carré de côté  $6r$ . Sur le bord gauche du domaine, on utilise une condition de Dirichlet pour faire rentrer le fluide avec les mêmes conditions qu'à l'état initial. Les autres côtés du carré sont des sorties avec une condition de type Neumann et il est appliqué une condition réfléchive sur la balle. Les résultats qui suivent sont obtenus sur maillage de  $1,2 \times 10^4$  triangles pour un pas d'espace de l'ordre de  $2,5 \times 10^{-5}$  m.

Le temps final de la simulation est fixé à  $10^{-6}$  s. Ce n'est pas encore la solution stationnaire qui s'obtient pour un temps final de l'ordre de  $10^{-5}$  s mais cela permet d'observer une grande majorité des phénomènes en limitant le temps de calcul. On rappelle que toute la discrétisation est explicite, le pas de temps est donc limité par les vitesses d'ondes du transfert radiatif qui sont de l'ordre de la vitesse de la lumière. Cependant, comme pour les chocs radiatifs dans la partie 2.4.5, la composante hyperbolique du flux numérique est découplée entre l'hydrodynamique et le transfert radiatif pour utiliser leurs vitesses d'ondes respectives, ceci dans le but de limiter la diffusion numérique. Cette décomposition est possible puisque l'on peut négliger la pression radiative  $\mathbf{P}_R$  devant la pression matière  $p$ , le couplage se retrouve alors effectué uniquement par le terme source.

Sur la Figure 4.7, on a tracé la température obtenue avec et sans prise en compte du rayonnement : en utilisant le modèle de l'hydrodynamique radiative (1.20) ou le modèle d'Euler gaz parfaits (1.13). On notera que les deux figures ne sont pas sur la même échelle au vu des différences de température. Ceci peut s'expliquer par le fait que la zone chaude à l'avant de la balle rayonne et chauffe l'atmosphère plus froide en amont. De plus, le choix d'opacités que l'on a fait influence grandement la physique du problème car normalement les différences avec et sans rayonnement sont moins importantes. En outre, on remarque que le choc est plus près de la balle lorsque l'on prend en compte le rayonnement.

Puis, sur la Figure 4.8, on présente les autres variables caractéristiques de l'écoulement. On observe ainsi que le facteur d'anisotropie  $f$  est proche de 1 sur une grande partie du domaine ce qui rend le cas très raide. Pourtant, la correction avec le flux à deux points permettant de préserver l'ensemble des états admissible  $\mathcal{A}$  s'active pour 90% des itérations en temps mais uniquement sur un maximum de 1% des cellules. Comme dans les autres cas tests, cette correction ne coûte que 1% du temps CPU global. En outre, on peut voir la plage de variation des opacités qui montre bien que le schéma doit être capable de s'adapter aux différents régimes.



(a) Hydrodynamique radiative

(b) Euler gaz parfaits

FIGURE 4.7 – Températures calculées autour de la balle avec et sans prise en compte du rayonnement

#### 4.5.6 Conclusion

Au vu des différents tests effectués avec le schéma HLL-DLP-AP, on peut voir que celui-ci est bien AP et fournit des solutions valides dans tous les régimes. De plus, son extension à l'ordre élevé permet d'améliorer la précision des résultats dans des régimes proches de la convection.

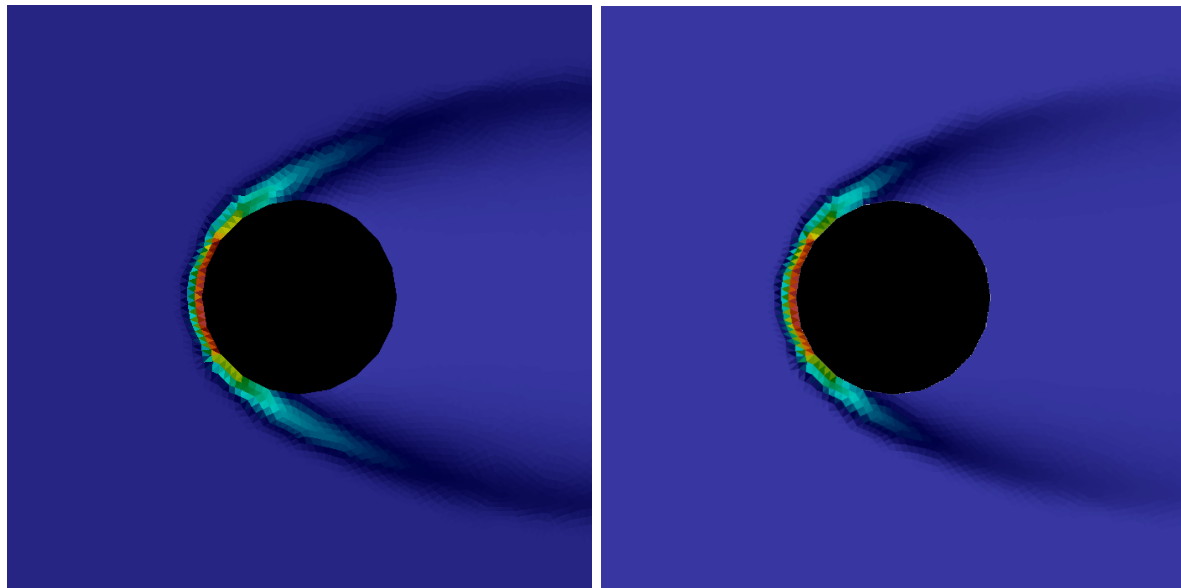
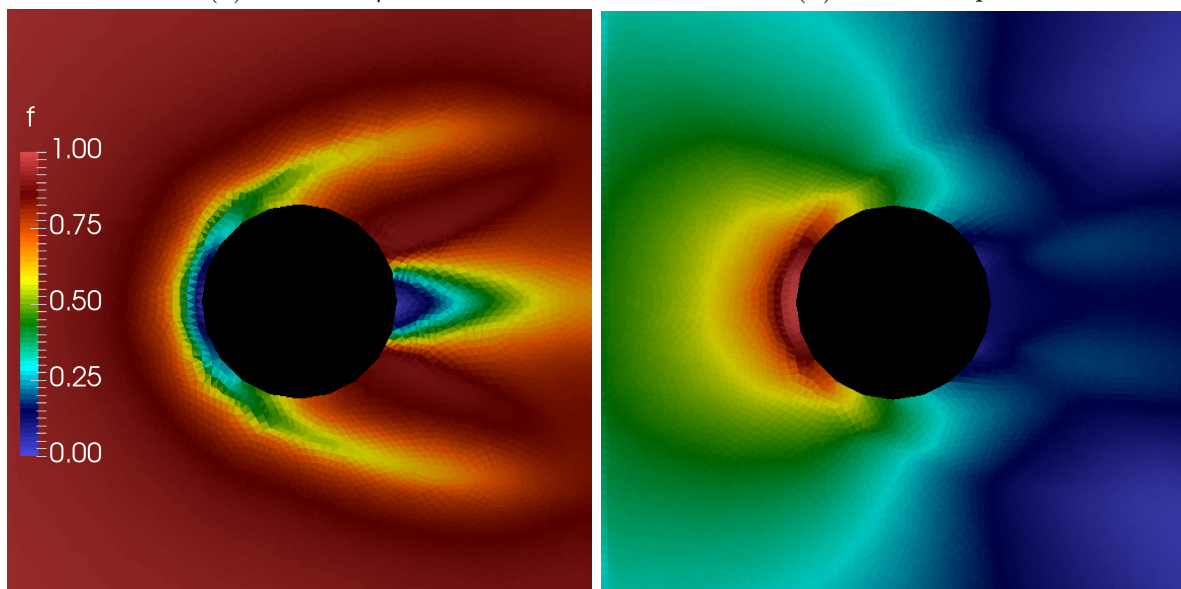
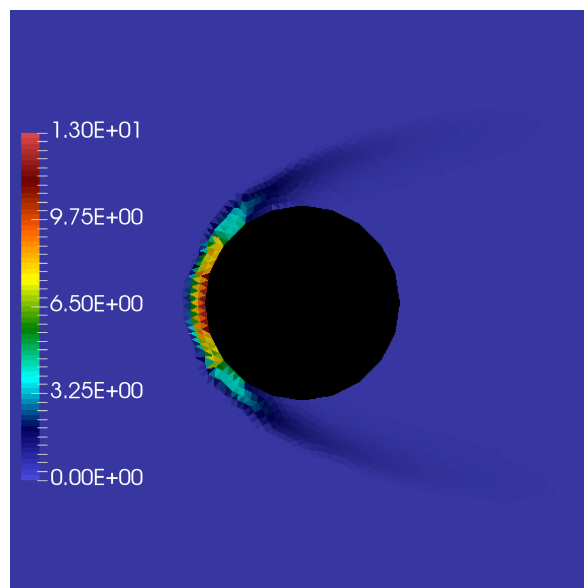
(a) Densité :  $\rho$ (b) Pression :  $p$ (c) Facteur d'anisotropie :  $f = \frac{\|\mathbf{E}_R\|}{cE_R}$ (d) Température radiative :  $T_R = \left(\frac{E_R}{a}\right)^{1/4}$ (e) Opacité :  $\sigma$ 

FIGURE 4.8 – Résultats (densité, pression, facteur d'anisotropie, température radiative et opacité) pour la balle



---

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Au cours de ce mémoire plusieurs techniques et schémas ont été développés et utilisés afin d'obtenir des solutions approchées à des systèmes de lois de conservation avec terme source dégénéralant vers une équation de diffusion à la fois en 1D et en 2D sur maillage non structuré.

Parmi celles-ci, on pourra noter l'adaptation de la reconstruction de DRONIOU et LE POTIER à des systèmes hyperboliques pour créer le schéma HLL-DLP qui possède ainsi une meilleure orientation de la diffusion numérique. De plus, des preuves de stabilité par combinaison convexe de schémas 1D sont fournies pour les différents schémas avec et sans discrétisation du terme source.

L'extension à l'ordre élevé en espace se fait en utilisant les reconstructions polynomiales et le principe de limitation *a posteriori* de la méthode MOOD. Ici, la spécificité se situe dans le fait que le dernier schéma de la boucle MOOD n'est pas le schéma HLL-DLP d'ordre un mais le schéma HLL classique, ceci dans le but de préserver l'ensemble des états admissibles. Quant à la montée en ordre en temps, elle s'effectue en utilisant des schémas de type SSPRK.

La préservation de l'asymptotique à tout ordre est obtenue grâce à une nouvelle combinaison convexe qui lie les reconstructions polynomiales et les valeurs moyennes de l'ordre un. Elle permet d'effectuer les calculs avec les valeurs moyennes quand on est proche de la diffusion pour retrouver le caractère AP. La préservation de l'asymptotique avec le schéma d'ordre un, est due à l'introduction du terme source au sein du flux numérique comme dans la technique de BERTHON et TURPAULT.

En vue de comparer les solutions approchées, on a aussi construit des solutions de références continues et discontinues aux équations du Télégraphe. L'augmentation de la précision avec la version d'ordre élevé s'observe au travers des résultats numériques que l'on propose. On voit ainsi que cette amélioration est particulièrement visible proche du régime de transport et permet de fournir des meilleures solutions à maillage fixé.



## Perspectives

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour la poursuite de ce travail. Tout d'abord, le choix du paramètre  $\beta$  (2.20)-(4.7) créant la combinaison convexe entre les reconstructions polynomiales et les valeurs moyennes de l'ordre un, a été fait de manière qualitative au travers de tests numériques. Plus particulièrement, la zone de transition entre l'utilisation de ces deux valeurs est uniquement déterminée par la longueur caractéristique  $\Delta_l$ . Une étude quantitative plus poussée sur l'impact du choix de ce coefficient pourrait être menée afin d'aboutir à un choix peut-être plus pertinent. Notamment, il a été choisi d'utiliser la même valeur pour la longueur caractéristique en 1D et en 2D, cette nouvelle étude pourrait permettre de justifier ou d'infirmier ce choix.

Pour le moment, l'ordre du schéma proche de la diffusion et dans les régimes intermédiaires est limité par les coefficients  $\alpha$  qui ne vérifient pas la propriété (2.17) pour obtenir un schéma d'ordre élevé uniformément. On obtient alors un schéma dont la précision est améliorée dans le régime de transport sans toutefois atteindre les ordres désirés et redonne un schéma d'ordre un à la limite. Ce choix est justifié par le fait que lorsque  $\gamma t \rightarrow \infty$ , les phénomènes sont assez lents et plus continus que les chocs que l'on peut observer en hyperbolique. En revanche, ceci n'est pas toujours vrai comme on l'a vu avec les chocs radiatifs dans la partie 2.4.5. Une modification de ces coefficients serait intéressante afin d'augmenter l'ordre global du schéma et permettrait de récupérer l'ordre deux du schéma limite, voire utiliser des schémas d'ordre élevé pour les équations paraboliques [CMNP13], dans le but d'obtenir le même ordre dans tous les régimes.

Un autre point qu'il est possible d'améliorer est la prise en compte de système d'équations de diffusion à la limite. Le formalisme de BERTHON, LEFLOCH et TURPAULT [BLT13] les prend en considération mais ce mémoire s'est uniquement attaché à discrétiser une équation à limite. Cette extension nécessiterait un travail sur le schéma limite qu'il faut revoir afin de discrétiser de tels systèmes.

D'un point de vue des applications, le schéma HLL-DLP a uniquement été testé avec des problèmes hyperboliques. Il serait intéressant de pouvoir le mettre en pratique sur des modèles tels que Navier-Stokes où sont présents des termes diffusifs car on a vu qu'il permettait d'obtenir de bons gradients de la solution.

Concernant le cas de l'hydrodynamique radiative, on a vu que le pas de temps était limité par la partie radiative car ses vitesses d'ondes sont beaucoup plus grandes que celles de la partie fluide. Il pourrait être possible d'utiliser des techniques implicites ou de *splitting* afin d'obtenir un pas de temps plus proche des caractéristiques du fluide tout en conservant l'ordre élevé et l'asymptotique, ceci dans le but de diminuer le nombre d'itérations nécessaires et le temps de calcul.

Finalement, sur des aspects plus pratiques au niveau de l'implémentation, il serait possible de penser à utiliser le même stencil dans la reconstruction de DRONIOU et LE

POTIER et dans la méthode MOOD afin de limiter le stockage mémoire des différents ensembles de points. D'autre part, les codes écrits au cours de cette thèse sont uniquement parallélisés en utilisant OpenMP (*Open Multi-Processing*) pour des architectures à mémoire partagée. Le passage à une parallélisation avec MPI (*Message Passing Interface*) ou à des architectures hétérogènes (GPU, cartes accélératrices) pourrait permettre d'utiliser des machines à mémoire distribuée et ainsi utiliser une plus grande quantité de processeurs et de mémoire pour pouvoir faire passer des maillages encore plus fins que ceux présentés dans ce mémoire. De plus, cela ferait diminuer le temps de calcul en utilisant plus de processeurs.





## Implémentation

Comme indiqué en introduction, quatre codes écrits en Fortran ont été développés au cours de cette thèse. On décrit leurs fonctionnalités dans cette annexe.

### A.1 Code hyperbolique 2D

#### A.1.1 Présentation générale

Le code principal permet d'obtenir des solutions approchées aux systèmes de lois de conservation avec terme source de la forme (1.1). Naturellement, il est aussi possible de calculer des solutions pour les modèles hyperboliques sans terme source du type (1.2).

Il utilise le schéma volumes finis explicite d'ordre élevé HLL-DLP-AP (4.9) qui est AP et préserve l'ensemble des états admissibles grâce à la correction avec le flux à deux points sur tout maillage 2D non structuré. La reconstruction DLP utilise trois points et les coordonnées barycentriques dans le triangle formé par ces trois points. Il est aussi possible d'utiliser plus de points pour calculer les coordonnées barycentriques avec les *mean values coordinates* de [Flo03; Flo14; HF06] dans un polygone étoilé.

On rappelle que la version d'ordre élevé est obtenue avec les reconstructions polynomiales (1.38) et la limitation *a posteriori* (voir Figure 1.5) de la méthode MOOD [Dio12; CDL11]. On utilise les schémas SSPRK [GST01] pour la discrétisation temporelle. Ainsi l'ordre un est obtenu avec une reconstruction constante par maille ( $\mathbb{P}_0$ ) et le schéma d'Euler explicite. Les ordres deux, trois et quatre sont respectivement obtenus avec les couples suivants de reconstructions et schémas temporels :  $\mathbb{P}_1$ -SSPRK(2, 2),  $\mathbb{P}_2$ -SSPRK(3, 3),  $\mathbb{P}_3$ -SSPRK(5, 4). Tout autre schéma explicite en temps peut être utilisé si on fournit le

tableau de Butcher associé. Dans un cadre sans terme source, avec le flux HLL-DLP, on pourra se référer au Tableau 3.2 qui montre que l'on atteint bien les ordres désirés. Puis, une fois le terme source introduit la précision est augmentée (voir Tableaux 4.1, 4.2 et 4.3) sans toutefois atteindre les ordres théoriques à cause des coefficients  $\alpha$  qui ne respectent pas les propriétés (2.17). Lorsque les cellules sont des triangles, les formules de quadrature utilisées sont celles de l'Annexe A de [Dio12] et pour des cellules quelconques elles sont triangularisées par leur centre afin d'utiliser de nouveau ces formules de quadratures. Afin d'effectuer les calculs d'algèbre linéaire nécessaire à la version d'ordre élevé plusieurs bibliothèques peuvent être utilisées comme LAPACK [ABB+99], OpenBlas [XQY12; QXYQ13], ATLAS [WPD01; WP05] ou encore la MKL (*Math Kernel Library*) d'Intel®.

Le code est écrit en Fortran pour un total d'environ 14 000 lignes de codes (calculées avec les utilitaires `cloc` et `SLOCCount`). Il peut se compiler à l'aide des compilateurs GNU (`gfortran`) et Intel® (`ifort`). La liste des dépendances entre les modules est générée automatiquement avec `makedepf90` afin de simplifier le Makefile. Tous les calculs ont été effectués en double précision mais le code est capable de gérer la simple et la quadruple précision, bien que cette dernière ne soit pas envisageable dans un cadre 2D au vu du nombre de calculs.

À l'aide d'options de compilation il est possible d'utiliser les différents flux numériques présents au sein du code : RUSANOV [Rus61], HLL [HLL83] et HLLC (uniquement pour les modèles d'Euler [TSS94; Tor09] et  $M_1$  [BCD07]). Ces mêmes options permettent de choisir la physique à utiliser parmi celles présentées dans les parties 1.2.2 et 1.2.3 : le modèle d'Euler gaz parfaits (1.13) ou isentropique (1.21), les modèles  $P_1$  (1.16) et  $M_1$  (1.17) pour le transfert radiatif, le modèle de l'hydrodynamique radiative (1.20), ou encore l'équation d'advection (1.12).

Concernant les entrées du code, il peut lire des maillages de triangles ou de quadrilatères au format `.msh` générés par Gmsh [GR09]. Il est aussi possible de donner un maillage de quadrilatère en tant que diamant au code afin qu'il crée les maillages primaires et secondaires associés à l'aide de la méthode décrite dans la partie 1.3.1. Dans le premier, cas un algorithme de type *Reverse Cuthill McKee* [CM69] peut être utilisé pour rapprocher les mailles en mémoire et ainsi limiter les erreurs de cache.

Au cours des calculs les variables primitives sont écrites avec quatre chiffres significatifs, dans des fichiers VTK ASCII directement lisible par Visit [CBW+12] ou ParaView [Hen07]. On écrit uniquement quatre chiffres dans ces fichiers car ils sont utilisés seulement pour la visualisation et cela permet de diminuer leur taille. En plus de ces sorties, le code écrit aussi à intervalles réguliers les variables conservatives avec tous les chiffres significatifs dans des fichiers textes, ou HDF5 [HDF97] ou encore NetCDF [RD90; Net] pour un possible post-traitement ou une reprise du code à partir des données écrites dans ces fichiers.

Finalement, une documentation des diverses routines du code peut être générée à l'aide de `Doxygen` et le code a été versionné au sein d'un dépôt `svn` puis `git`.

## A.1.2 Optimisation et parallélisation

Dans le but de diminuer le coût lié aux appels des routines les plus utilisées, telles que le calcul des vitesses d'ondes ou du flux physique, l'inlining a été forcé avec la directive `!DIR$ FORCEINLINE` du compilateur Fortran d'Intel® (`ifort`). Le choix des routines à inliner a été fait en considérant les fonctions les plus appelées à l'aide du profileur `gprof` [GKM82].

La parallélisation du code a été effectuée à l'aide `OpenMP` pour des machines à mémoire partagée. Les implémentations `GNU` et `Intel`® ont été testées. Le passage du code de la version séquentielle à parallèle s'est fait en parallélisant principalement les boucles sur les cellules et sur les interfaces qui interviennent au cours des calculs de flux, des coefficients  $\nu$  et de la condition CFL. Pour repérer les zones les moins parallélisées et optimiser encore le code les outils `Scalasca` [GWW+10] et `ompP` [FG08] ont été utilisés.

Les calculs parallèles effectués pour ce mémoire ont été réalisés principalement au `CCIPL` (Centre de Calcul Intensif des Pays de la Loire) et sur des nœuds de calculs financés par l'ANR MAPIE (*Parallel efficient ModulAr tools for multiPhysics and multiScale complex simulations. Shock waves propagation in complex media*) de référence ANR-13-MONU-0002.

Afin de valider les effets de la parallélisation sur le temps de calcul, un test de scalabilité a été effectué avec le cas de la marche avec friction à l'ordre deux ( $\mathbb{P}_1$ ) sur un maillage de 4600 triangles. Pour plus de détails sur l'initialisation, il faut se rapporter à la partie 4.5.3. Le *speed-up* et l'efficacité du codes sont calculés de la manière suivante :

$$S = \frac{T_1}{T_N} \text{ et } E = \frac{S}{N},$$

avec  $N$  le nombre de *threads* `OpenMP` utilisé,  $T_1$  le temps de calcul en séquentiel et  $T_N$  le temps de calcul avec  $N$  *threads*. Les calculs ont été effectués sur une machine avec deux `Intel`® `Xeon`® 5600 avec six cœurs, soit un total de douze *threads* utilisables. Les résultats sont présentés sur la Figure A.1, on y observe un bon comportement lorsque le nombre de *threads* augmente car on ne s'éloigne pas trop du *speed-up* et de l'efficacité théorique. On peut noter une « sur-efficacité » pour quatre *threads* qui peut s'expliquer par une bonne répartition de la charge.

Comme indiqué dans les perspectives une parallélisation plus efficace pourrait être mise en place à l'aide de `MPI` (*Message Passing Interface*) ou d'`OpenACC` afin d'utiliser des machines à mémoire distribuée ou hétérogènes (avec des cartes accélératrices).

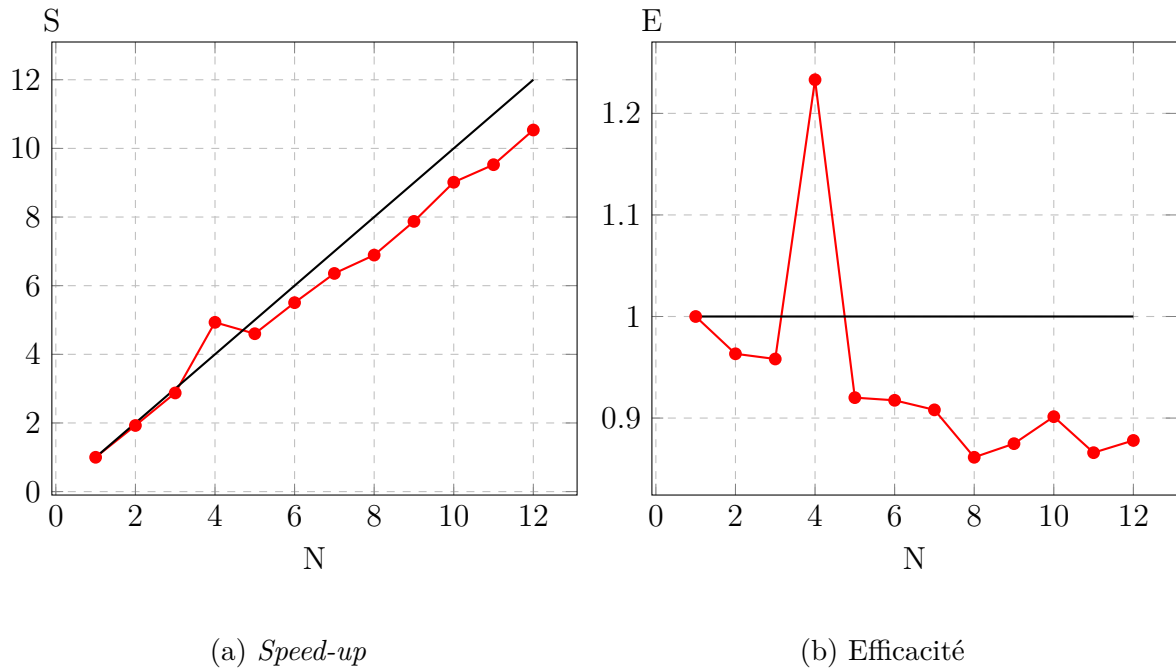


FIGURE A.1 – Graphes de scalabilité du code

### A.1.3 Post-traitement

Pour obtenir le gradient de la solution présenté sur la Figure 3.15, un module permet de lire les variables conservatives écrites avec toute la précision disponible puis calcule le gradient de la reconstruction polynomiale (1.38). Il est ensuite écrit dans des fichiers VTK pour être facilement lisible.

## A.2 Code parabolique 2D

Le second code le plus utilisé permet de calculer des solutions approchées aux équations de diffusion limite (1.4) sur tout maillage 2D non structuré à l'aide du schéma de DRONIOU et LE POTIER [DLP11] que l'on a rappelé dans la partie 3.2.1. On l'utilise dans sa version explicite et la stabilité est assurée par la condition CFL (1.36) du Théorème 1.2. Avec un post-traitement, il permet d'effectuer des comparaisons avec le code précédent dans le régime de diffusion et permet de donner des résultats comme dans le Tableau 4.4. Ce même code existe aussi avec le schéma diamant [CVV99] et les corrections de LE POTIER [LP09; LP10; LP14; CCLP13].

Dans sa version DLP, ce code possède les mêmes caractéristiques que le code précédent de l'utilisation des maillages au parallélisme.

## A.3 Codes 1D

Deux codes 1D ont aussi été écrits afin de valider les codes utilisant des maillages 2D non structurés présentés dans les parties précédentes.

Le premier utilise le schéma HLL-AP de BERTHON et TURPAULT [BT11] que l'on a étendu à l'ordre élevé dans le Chapitre 2. Il permet de calculer des solutions approchées aux systèmes de lois de conservation avec terme source (1.1). Tout comme le code hyperbolique 2D, il est multiphysique, peut être utilisé avec plusieurs flux et est aussi parallèle. En plus de ce code hyperbolique 1D, il a été écrit un code afin de donner les solutions de référence discontinues au système du Télégraphe présentées dans partie 2.3.1 et utilisées dans la partie 2.4.1.

Le second est un code parabolique 1D pour les équations limites (1.4) qui utilise le flux à deux points (1.33). De même que les autres codes il est multiphysique et parallèle.

Comme en 2D, un code de post-traitement permet de comparer les solutions hyperboliques et paraboliques afin de sortir des résultats comme le Tableau 2.4.

## A.4 Scripts

Afin d'utiliser plus facilement les codes décrits précédemment, plusieurs scripts ont principalement été écrits en `Bash`. Ils peuvent, par exemple, être utilisés afin de compiler et lancer plusieurs fois le code automatiquement afin de construire les différents tableaux de convergence en maillage ou vers la diffusion présents dans ce mémoire. D'autres scripts permettent de parcourir les fichiers de sorties afin de récupérer les temps de calculs et les erreurs pour les graphes de scalabilité ou les tableaux de convergence. Dans le but de vérifier que l'ajout de nouvelles fonctionnalités aux codes ne modifie pas leurs comportements, un script permet de régulièrement les compiler avec les différents choix d'options.





## Liste des tableaux

2.1	Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-AP avec $\sigma = 10^{-2}$ . . .	75
2.2	Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-AP avec $\sigma = 1$ . . .	76
2.3	Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-AP avec $\sigma = 10$ . . .	76
2.4	Convergence vers la limite de diffusion en 1D pour $\gamma t$ croissant avec $\Delta x = 1 \times 10^{-2}$ . . . . .	79
3.1	Erreurs et taux de convergence pour le double sinus avec le schéma HLL	107
3.2	Erreurs et taux de convergence pour le double sinus avec le schéma HLL-DLP . . . . .	107
3.3	Erreurs et taux de convergence pour le double sinus sur des maillages de Kershaw . . . . .	109
3.4	États initiaux pour les configurations 3, 5 et 6 pour les problèmes de Riemann 2D avec le modèle d'Euler gaz parfaits . . . . .	109
4.1	Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-DLP-AP avec $\sigma = 10^{-2}$	129
4.2	Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-DLP-AP avec $\sigma = 1$	130
4.3	Erreurs et taux de convergence pour le schéma HLL-DLP-AP avec $\sigma = 10$	130
4.4	Convergence vers la limite de diffusion en 2D pour $\gamma t$ croissant avec $\Delta x \simeq 1,6 \times 10^{-3}$ . . . . .	133



# Table des figures

1.1	Notations pour un maillage 1D uniforme . . . . .	34
1.2	Notations pour un maillage 2D non structuré . . . . .	35
1.3	Représentation des différents maillages . . . . .	36
1.4	Représentation des états 1D et 2D . . . . .	39
1.5	Principe de la limitation <i>a posteriori</i> . . . . .	45
1.6	But d'un schéma <i>asymptotic preserving</i> . . . . .	48
2.1	Structure et définition des zones pour un problème de Riemann avec les équations du Télégraphe (1.14) . . . . .	64
2.2	Grille de discrétisation pour la méthode des différences finies (2.28) . . . . .	66
2.3	Comparaison entre les résultats des méthodes M1 et M2 . . . . .	70
2.4	Comparaison entre les résultats donnés par M1, HLL-AP et HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ pour $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ , avec $\sigma$ continu . . . . .	71
2.5	Comparaison entre les résultats donnés par M2, HLL-AP et HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ pour $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ , avec $\sigma$ discontinu . . . . .	72
2.6	Comparaison sur $v$ entre les résultats donnés par M2, HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ and HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ -DMP pour $\Delta x = 2 \times 10^{-3}$ . . . . .	73
2.7	Évolution de la $u$ en fonction de $\sigma$ : comparaison entre la solution de référence (trait plein) et le schéma HLL-AP (tiret), $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ . . . . .	73
2.8	Évolution de la $u$ en fonction de $\sigma$ : comparaison entre la solution de référence (trait plein) et le schéma HLL-AP- $\mathbb{P}_1$ (tiret), $\Delta x = 2,5 \times 10^{-2}$ . . . . .	74
2.9	Graphes d'erreurs pour le schéma HLL-AP . . . . .	77
2.10	Graphe d'erreurs en fonctions du temps CPU pour le schéma HLL-AP . . . . .	77
2.11	Vitesse de convergence vers la limite de diffusion en 1D pour $\gamma t$ croissant avec $\Delta x = 1 \times 10^{-2}$ . . . . .	79
2.12	Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 1$ en 1D . . . . .	80
2.13	Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 5$ en 1D . . . . .	81
2.14	Températures matière ( $T$ ) et radiative ( $T_R$ ) pour un choc radiatif subcritique à $1,7 \times 10^4$ , $2,8 \times 10^4$ et $3,8 \times 10^4$ s . . . . .	83
2.15	Températures matière ( $T$ ) et radiative ( $T_R$ ) pour un choc radiatif supercritique à $4 \times 10^3$ , $7,5 \times 10^3$ et $1,3 \times 10^4$ s . . . . .	84
3.1	Représentation des états 1D et 2D . . . . .	90
3.2	Définition des points $M$ par interface $i$ . . . . .	92
3.3	Exemple d'ensembles de points $\mathcal{S}_{K,i}$ . . . . .	94
3.4	Représentation de cellules « virtuelles » . . . . .	102
3.5	Principe de la correction <i>a posteriori</i> avec le flux à deux points . . . . .	103

3.6	Cascade de schémas pour la montée en ordre avec la méthode MOOD appliquée au schéma HLL-DLP avec correction par le flux à deux points .	105
3.7	Graphes d'erreurs pour le double sinus . . . . .	107
3.8	Graphes d'erreurs pour le double sinus en fonction du temps CPU . . . .	108
3.9	Maillage de Kershaw . . . . .	108
3.10	Densités obtenues avec le schéma HLL-DLP pour trois configurations de problèmes de Riemann 2D avec le modèle d'Euler gaz parfaits sur un maillage avec $1,2 \times 10^6$ cellules . . . . .	110
3.11	Densités obtenues sur des maillages de Kershaw avec les schémas HLL et HLL-DLP pour la troisième configuration (C3) . . . . .	111
3.12	Résultats pour un problème de Riemann 2D avec le modèle $M_1$ sur un maillage avec $1,2 \times 10^6$ cellules . . . . .	112
3.13	Domaine de calcul avec un maillage grossier de $1,7 \times 10^3$ polygones pour la marche . . . . .	113
3.14	Densités obtenues avec les schémas HLL et HLL-DLP sur des maillages grossiers et fins pour la marche à Mach 3 . . . . .	114
3.15	Gradients de la densité obtenus avec les schémas HLL et HLL-DLP sur des maillages grossiers et fins pour la marche à Mach 3 . . . . .	115
4.1	Graphes d'erreurs pour le schéma HLL-DLP-AP . . . . .	131
4.2	Graphes d'erreurs pour le schéma HLL-DLP-AP en fonctions du temps CPU . . . . .	131
4.3	Densités pour la marche avec friction obtenues avec le schéma HLL-DLP-AP	134
4.4	Valeurs du coefficient $\beta$ (4.7) utilisées par le schéma HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$ à différents temps pour la marche avec friction sur un maillage de $4 \times 10^4$ triangles . . . . .	135
4.5	Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec $\Delta x \simeq 9,05 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 1$ en 2D . . . . .	137
4.6	Vitesses de convergence vers l'équilibre pour la densité et la quantité de mouvement avec $\Delta x \simeq 9,05 \times 10^{-2}$ et $\kappa = 5$ en 2D . . . . .	138
4.7	Températures calculées autour de la balle avec et sans prise en compte du rayonnement . . . . .	140
4.8	Résultats (densité, pression, facteur d'anisotropie, température radiative et opacité) pour la balle . . . . .	141
A.1	Graphes de scalabilité du code . . . . .	150

## Bibliographie

- [Abg94] R. Abgrall, On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation, *J. Comput. Phys.*, vol. 114, no. 1, pp. 45–58, 1994 (p. 43).
- [ABB+99] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen, *LAPACK users' guide*, Third. Philadelphia, PA, 1999 (p. 148).
- [ABN08a] D. Aregba-Driollet, M. Briani, and R. Natalini, AHO schemes for dissipative hyperbolic systems, in *CANUM 2006—Congrès National d'Analyse Numérique*, ser. ESAIM Proc. Vol. 22, 2008, pp. 52–66 (pp. 24, 48).
- [ABN08b] D. Aregba-Driollet, M. Briani, and R. Natalini, Asymptotic high-order schemes for  $2 \times 2$  dissipative hyperbolic systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 46, no. 2, pp. 869–894, 2008 (pp. 24, 48).
- [ABN16] D. Aregba-Driollet, M. Briani, and R. Natalini, Time asymptotic high order schemes for dissipative BGK hyperbolic systems, *Numer. Math.*, vol. 132, no. 2, pp. 399–431, 2016 (pp. 24, 28, 48).
- [ABBKP04] E. Audusse, F. Bouchut, M. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame, A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 25, no. 6, pp. 2050–2065, 2004 (p. 48).
- [BAF03] M. Ben-Artzi and J. Falcovitz, *Generalized Riemann problems in computational fluid dynamics*, ser. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. 2003, vol. 11, pp. xvi+349 (p. 63).
- [Ber06] C. Berthon, Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 218, no. 2, pp. 495–509, 2006 (p. 43).
- [BCT13] C. Berthon, C. Chalons, and R. Turpault, Asymptotic-preserving Godunov-type numerical schemes for hyperbolic systems with stiff and nonstiff relaxation terms, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 29, no. 4, pp. 1149–1172, 2013 (p. 48).
- [BCD07] C. Berthon, P. Charrier, and B. Dubroca, An HLLC scheme to solve the  $M_1$  model of radiative transfer in two space dimensions, *J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 3, pp. 347–389, 2007 (pp. 22, 37, 48, 85, 148).
- [BD14] C. Berthon and V. Desveaux, An entropy preserving MOOD scheme for the Euler equations, *Int. J. Finite Vol.*, vol. 11, p. 39, 2014 (pp. 43, 45).
- [BLT13] C. Berthon, P. G. LeFloch, and R. Turpault, Late-time/stiff-relaxation asymptotic-preserving approximations of hyperbolic equations, *Math. Comp.*, vol. 82, no. 282, pp. 831–860, 2013 (pp. 15, 23, 33, 48, 123, 144).

- [BMST16] C. Berthon, G. Moebs, C. Sarazin-Desbois, and R. Turpault, An asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source terms on 2D unstructured meshes, *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 1, pp. 55–77, 2016 (pp. 16, 38, 42, 49, 86, 117, 125).
- [BMT14] C. Berthon, G. Moebs, and R. Turpault, An asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source terms on 2D unstructured meshes, in *Finite volumes for complex applications. VII. Methods and theoretical aspects*, ser. Springer Proc. Math. Stat. Vol. 77, 2014, pp. 107–115 (pp. 16, 49, 86, 117, 125).
- [BT11] C. Berthon and R. Turpault, Asymptotic preserving HLL schemes, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 27, no. 6, pp. 1396–1422, 2011 (pp. 16–18, 30, 48, 49, 51, 69, 85, 117, 119, 121, 123, 133, 143, 151).
- [BHN07] S. Bianchini, B. Hanouzet, and R. Natalini, Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 60, no. 11, pp. 1559–1622, 2007 (pp. 24, 28, 57).
- [BPR13] S. Boscarino, L. Pareschi, and G. Russo, Implicit-explicit Runge-Kutta schemes for hyperbolic systems and kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 35, no. 1, A22–A51, 2013 (p. 48).
- [BLD15] W. Boscheri, R. Loubère, and M. Dumbser, Direct arbitrary-Lagrangian-Eulerian ADER-MOOD finite volume schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, vol. 292, pp. 56–87, 2015 (p. 43).
- [BOP07] F. Bouchut, H. Ounaissa, and B. Perthame, Upwinding of the source term at interfaces for euler equations with high friction, *Comput. Math. Appl.*, vol. 53, no. 3-4, pp. 361–375, 2007 (p. 48).
- [BTLB+86] J. C. Bozier, G. Thiell, J. P. Le Breton, S. Azra, M. Decroisette, and D. Schirmann, Experimental observation of a radiative wave generated in xenon by a laser-driven supercritical shock, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 1304–1307, 11 1986 (p. 81).
- [BM07] J. Breil and P.-H. Maire, A cell-centered diffusion scheme on two-dimensional unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 224, no. 2, pp. 785–823, 2007 (pp. 42, 49).
- [BC07] C. Buet and S. Cordier, An asymptotic preserving scheme for hydrodynamics radiative transfer models: numerics for radiative transfer, *Numer. Math.*, vol. 108, no. 2, pp. 199–221, 2007 (p. 48).
- [BD06] C. Buet and B. Després, Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, vol. 215, no. 2, pp. 717–740, 2006 (p. 48).
- [BDF12a] C. Buet, B. Després, and E. Franck, An asymptotic preserving scheme with the maximum principle for the  $M_1$  model on distorted meshes, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 350, no. 11-12, pp. 633–638, 2012 (pp. 16, 49).

- [BDF12b] C. Buet, B. Després, and E. Franck, Design of asymptotic preserving finite volume schemes for the hyperbolic heat equation on unstructured meshes, *Numer. Math.*, vol. 122, no. 2, pp. 227–278, 2012 (pp. 16, 49, 68, 127).
- [BDF15] C. Buet, B. Després, and E. Franck, Asymptotic preserving schemes on distorted meshes for Friedrichs systems with stiff relaxation: application to angular models in linear transport, *J. Sci. Comput.*, vol. 62, no. 2, pp. 371–398, 2015 (pp. 16, 49).
- [BDFL16] C. Buet, B. Després, E. Franck, and T. Leroy, Proof of uniform convergence for a cell-centered AP discretization of the hyperbolic heat equation on general meshes, *Mathematics of Computation*, 2016 (pp. 16, 49, 68, 127).
- [CCLP13] C. Cancès, M. Cathala, and C. Le Potier, Monotone corrections for generic cell-centered finite volume approximations of anisotropic diffusion equations, *Numer. Math.*, vol. 125, no. 3, pp. 387–417, 2013 (pp. 22, 40, 42, 103, 150).
- [CP64] T. N. Canning and W. A. Page, Chapter 29 - Measurements of radiation from the flow fields of bodies flying at speeds up to 13.4 kilometers per second, in *The High Temperature Aspects of Hypersonic Flow*, ser. AGARDograph, W. C. Nelson, Ed., vol. 68, 1964, pp. 569–582 (p. 138).
- [Car57] T. Carleman, *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*, ser. Publ. Sci. Inst. Mittag-Leffler. 2. 1957, p. 112 (p. 27).
- [CCGRS10] C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P.-A. Raviart, and N. Seguin, Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter-dependent source. The case of Euler system with friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 20, no. 11, pp. 2109–2166, 2010 (p. 48).
- [CGK13] C. Chalons, M. Girardin, and S. Kokh, Large time step and asymptotic preserving numerical schemes for the gas dynamics equations with source terms, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 35, no. 6, A2874–A2902, 2013 (p. 48).
- [CCY95] T. Chang, G. Q. Chen, and S. L. Yang, On the 2-D Riemann problem for the compressible Euler equations. I. Interaction of shocks and rarefaction waves, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, vol. 1, no. 4, pp. 555–584, 1995 (p. 109).
- [CCY00] T. Chang, G. Q. Chen, and S. L. Yang, On the 2-D Riemann problem for the compressible Euler equations. II. Interaction of contact discontinuities, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 419–430, 2000 (p. 109).
- [CLL94] G. Q. Chen, C. D. Levermore, and T.-P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 47, no. 6, pp. 787–830, 1994 (p. 23).
- [CHZ09] S. Chen, X. Han, and H. Zhang, The generalized Riemann problem for first order quasilinear hyperbolic systems of conservation laws. II, *Acta Appl. Math.*, vol. 108, no. 2, pp. 235–277, 2009 (p. 63).



- [CHH09] S. Chen, D. Huang, and X. Han, The generalized Riemann problem for first order quasilinear hyperbolic systems of conservation laws. I, *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 46, no. 3, pp. 409–434, 2009 (p. 63).
- [CBW+12] H. Childs, E. Brugger, B. Whitlock, J. Meredith, S. Ahern, D. Pugmire, K. Biagas, M. Miller, C. Harrison, G. H. Weber, H. Krishnan, T. Fogal, A. Sanderson, C. Garth, E. W. Bethel, D. Camp, O. Rübel, M. Durant, J. M. Favre, and P. Navrátil, VisIt: An End-User Tool For Visualizing and Analyzing Very Large Data, in *HIGH PERFORMANCE VISUALIZATION—ENABLING EXTREME-SCALE SCIENTIFIC INSIGHT*, Oct. 2012, pp. 357–372 (pp. 106, 148).
- [CDL11] S. Clain, S. Diot, and R. Loubère, A high-order finite volume method for systems of conservation laws—Multi-dimensional Optimal Order Detection (MOOD), *J. Comput. Phys.*, vol. 230, no. 10, pp. 4028–4050, 2011 (pp. 17, 21, 22, 43, 51, 147).
- [CF14] S. Clain and J. Figueiredo, The MOOD method for the non-conservative shallow-water system, Oct. 2014 (pp. 43, 45).
- [CMNP13] S. Clain, G. J. Machado, J. M. Nóbrega, and R. M. S. Pereira, A sixth-order finite volume method for multidomain convection-diffusion problem with discontinuous coefficients, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 267, pp. 43–64, 2013 (pp. 43, 59, 144).
- [COE76] COESA, *U.S. Standard Atmosphere*. 1976 (p. 138).
- [CG11] F. Coquel and E. Godlewski, Asymptotic preserving scheme for Euler system with large friction, *J. Sci. Comput.*, vol. 48, no. 1-3, pp. 164–172, 2011 (p. 48).
- [CVV99] Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu, Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 33, no. 3, pp. 493–516, 1999 (pp. 16, 35, 42, 49, 86, 92, 150).
- [CG09] J.-F. Coulombel and T. Goudon, Shock profiles in radiative hydrodynamics, in *Mathematical models and numerical methods for radiative transfer*, ser. Panor. Synthèses, vol. 28, 2009, pp. 87–108 (p. 82).
- [CGLL12] J.-F. Coulombel, T. Goudon, P. Lafitte, and C. Lin, Analysis of large amplitude shock profiles for non-equilibrium radiative hydrodynamics: formation of zeldovich spikes, *Shock Waves*, vol. 22, no. 3, pp. 181–197, 2012 (p. 82).
- [CM69] E. Cuthill and J. McKee, Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices, in *Proceedings of the 1969 24th National Conference*, ser. ACM '69, New York, NY, USA, 1969, pp. 157–172 (p. 148).
- [Dah56] G. Dahlquist, Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, *Math. Scand.*, vol. 4, pp. 33–53, 1956 (p. 45).
- [Des13] V. Desveaux, Contribution to the numerical approximation of hyperbolic systems, PhD thesis, Université de Nantes, Nov. 2013 (pp. 43, 45).

- [DP12] G. Dimarco and L. Pareschi, High order asymptotic-preserving schemes for the Boltzmann equation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 350, no. 9-10, pp. 481–486, 2012 (p. 48).
- [Dio12] S. Diot, La méthode MOOD Multi-dimensional Optimal Order Detection: la première approche a posteriori aux méthodes volumes finis d'ordre très élevé, PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, Aug. 2012 (pp. 22, 43, 44, 147, 148).
- [DCL12] S. Diot, S. Clain, and R. Loubère, Improved detection criteria for the multi-dimensional optimal order detection (MOOD) on unstructured meshes with very high-order polynomials, *Comput. & Fluids*, vol. 64, pp. 43–63, 2012 (pp. 43, 44).
- [DLC13] S. Diot, R. Loubère, and S. Clain, The multidimensional optimal order detection method in the three-dimensional case: very high-order finite volume method for hyperbolic systems, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 73, no. 4, pp. 362–392, 2013 (p. 43).
- [DO05] K. Domelevo and P. Omnès, A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 39, no. 6, pp. 1203–1249, 2005 (p. 42).
- [DLP11] J. Droniou and C. Le Potier, Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 49, no. 2, pp. 459–490, 2011 (pp. 17, 22, 40, 42, 86, 91, 95, 97, 118, 124, 132, 143, 144, 150).
- [Dub09] J. Dubois, Modélisation, approximation numérique et couplage du transfert radiatif avec l'hydrodynamique, PhD thesis, Université de Bordeaux 1, Dec. 2009 (p. 15).
- [DF99] B. Dubroca and J. Feugeas, Theoretical and numerical study of a moment closure hierarchy for the radiative transfer equation, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 329, no. 10, pp. 915–920, 1999 (pp. 29, 30).
- [DMTB15] A. Duran, F. Marche, R. Turpault, and C. Berthon, Asymptotic preserving scheme for the shallow water equations with source terms on unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 287, pp. 184–206, 2015 (pp. 33, 49, 117).
- [Edd60] A. S. Eddington, *The internal constitution of the stars*. 1960, pp. xvi+407 (p. 29).
- [Ens94] L. Ensmann, Test problems for radiation and radiation-hydrodynamics codes, *APJ*, vol. 424, p. 275, 1994 (p. 81).
- [EGGHM14] R. Eymard, T. Gallouët, C. Guichard, R. Herbin, and R. Masson, TP or not TP, that is the question, *Comput. Geosci.*, vol. 18, no. 3-4, pp. 285–296, 2014 (p. 40).
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, Finite volume methods, in *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, ser. Handb. Numer. Anal., VII, 2000, pp. 713–1020 (pp. 34, 35, 40, 117).

- [EGH10] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI: a scheme using stabilization and hybrid interfaces, *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 30, no. 4, pp. 1009–1043, 2010 (p. 42).
- [Fél14] S. Félix, Radiative hydrodynamics & Application to the study of pulsations-convection interaction, PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, Dec. 2014 (p. 15).
- [FJ10] F. Filbet and S. Jin, A class of asymptotic-preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources, *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 20, pp. 7625–7648, 2010 (p. 48).
- [Flo03] M. S. Floater, Mean value coordinates, *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 20, no. 1, pp. 19–27, 2003 (pp. 92, 147).
- [Flo14] M. S. Floater, Wachspress and mean value coordinates, in *Approximation theory XIV: San Antonio 2013*, ser. Springer Proc. Math. Stat. Vol. 83, 2014, pp. 81–102 (pp. 92, 147).
- [Fra12] E. Franck, Design and numerical analysis of asymptotic preserving schemes on unstructured meshes. Application to the linear transport and Friedrichs systems, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Oct. 2012 (pp. 16, 29, 49, 68, 127).
- [FG08] K. Furlinger and M. Gerndt, Ompp: a profiling tool for openmp, in *Proceedings of the 2005 and 2006 International Conference on OpenMP Shared Memory Parallel Programming*, ser. IWOMP’05/IWOMP’06, Eugene, OR, USA, 2008, pp. 15–23 (p. 149).
- [GWW+10] M. Geimer, F. Wolf, B. J. N. Wylie, E. Abraham, D. Becker, and B. Mohr, The scalasca performance toolset architecture, *Concurr. Comput. : Pract. Exper.*, vol. 22, no. 6, pp. 702–719, Apr. 2010 (p. 149).
- [GR09] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 79, no. 11, pp. 1309–1331, 2009 (pp. 105, 148).
- [GMP84] J. Glimm, G. Marshall, and B. Plohr, A generalized Riemann problem for quasi-one-dimensional gas flows, *Adv. in Appl. Math.*, vol. 5, no. 1, pp. 1–30, 1984 (p. 63).
- [GR96] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, ser. Applied Mathematical Sciences. 1996, vol. 118, pp. viii+509 (pp. 25, 36, 43).
- [God59] S. Godunov, A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations, Russian, *MAT. SB., NOV. SER.*, vol. 47, pp. 271–306, 1959 (p. 85).
- [Gol51] S. Goldstein, On diffusion by discontinuous movements, and on the telegraph equation, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 4, pp. 129–156, 1951 (p. 27).
- [GS07] F. Golse and F. Salvarani, The nonlinear diffusion limit for generalized Carleman models: the initial-boundary value problem, *Nonlinearity*, vol. 20, no. 4, pp. 927–942, 2007 (p. 27).

- [GAH07] M. González, E. Audit, and P. Huynh, HERACLES: a three-dimensional radiation hydrodynamics code, *A&A*, vol. 464, no. 2, pp. 429–435, 2007 (p. 81).
- [GSA+06] M. Gonzalez, C. Stehlé, E. Audit, M. Busquet, B. Rus, F. Thais, O. Acef, P. Barroso, A. Bar-Shalom, D. Bauduin, M. Kozlova, T. Lery, A. Madouri, T. Mocek, and J. Polan, Astrophysical radiative shocks: from modeling to laboratory experiments, *Laser and Particle Beams*, vol. 24, pp. 535–540, 2006 (p. 81).
- [Gon06] M. Gonzalez, Contribution to the numerical study of radiation hydrodynamics: from radiative shocks experiments to astrophysical jets, PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, Oct. 2006 (pp. 15, 81).
- [Gos13] L. Gosse, *Computing qualitatively correct approximations of balance laws*, ser. SIMAI Springer Series. 2013, vol. 2, pp. xx+340, Exponential-fit, well-balanced and asymptotic-preserving (p. 48).
- [GT02] L. Gosse and G. Toscani, An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 334, no. 4, pp. 337–342, 2002 (pp. 16, 48).
- [Got05] S. Gottlieb, On high order strong stability preserving Runge-Kutta and multi step time discretizations, *J. Sci. Comput.*, vol. 25, no. 1-2, pp. 105–128, 2005 (p. 46).
- [GS98] S. Gottlieb and C.-W. Shu, Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, *Math. Comp.*, vol. 67, no. 221, pp. 73–85, 1998 (p. 46).
- [GST01] S. Gottlieb, C.-W. Shu, and E. Tadmor, Strong stability-preserving high-order time discretization methods, *SIAM Rev.*, vol. 43, no. 1, pp. 89–112, 2001 (pp. 17, 21, 22, 45, 147).
- [GKM82] S. L. Graham, P. B. Kessler, and M. K. Mckusick, Gprof: a call graph execution profiler, in *Proceedings of the 1982 SIGPLAN Symposium on Compiler Construction*, ser. SIGPLAN '82, Boston, Massachusetts, USA, 1982, pp. 120–126 (p. 149).
- [HN03a] B. Hanouzet and R. Natalini, Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 169, no. 2, pp. 89–117, 2003 (pp. 28, 33).
- [Har83] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, vol. 49, no. 3, pp. 357–393, 1983 (p. 22).
- [HEOC87] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy, Uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. III, *J. Comput. Phys.*, vol. 71, no. 2, pp. 231–303, 1987 (p. 43).
- [HLL83] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.*, vol. 25, no. 1, pp. 35–61, 1983 (pp. 22, 37, 85, 148).
- [HN03b] J. C. Hayes and M. L. Norman, Beyond flux-limited diffusion: parallel algorithms for multidimensional radiation hydrodynamics, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 147, no. 1, pp. 197–220, 2003 (p. 81).
- [HDF97] HDF Group, *Hierarchical Data Format, version 5*, 1997-1995 (p. 148).

- [Hen07] A. Henderson, *ParaView Guide, A Parallel Visualization Application*, Fourth (2012). Clifton Park, New York: Reading, Massachusetts, 2007 (pp. 106, 148).
- [Her00] F. Hermeline, A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 160, no. 2, pp. 481–499, 2000 (p. 42).
- [HL14] P. Hoch and E. Labourasse, A frame invariant and maximum principle enforcing second-order extension for cell-centered ALE schemes based on local convex hull preservation, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 76, no. 12, pp. 1043–1063, 2014 (p. 43).
- [HF06] K. Hormann and M. S. Floater, Mean value coordinates for arbitrary planar polygons, *ACM Trans. Graph.*, vol. 25, no. 4, pp. 1424–1441, 2006 (pp. 92, 147).
- [HMP05] F. Huang, P. Marcati, and R. Pan, Convergence to the Barenblatt solution for the compressible Euler equations with damping and vacuum, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 176, no. 1, pp. 1–24, 2005 (p. 33).
- [HRS03] W. Hundsdorfer, S. J. Ruuth, and R. J. Spiteri, Monotonicity-preserving linear multistep methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 41, no. 2, pp. 605–623, 2003 (p. 46).
- [Jea17] J. H. Jeans, The equations of radiative transfer of energy, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 78, no. 1, pp. 28–36, 1917 (p. 29).
- [JS96] G.-S. Jiang and C.-W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.*, vol. 126, no. 1, pp. 202–228, 1996 (p. 43).
- [Jin99] S. Jin, Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, no. 2, 441–454 (electronic), 1999 (pp. 16, 47, 48).
- [JL96] S. Jin and C. D. Levermore, Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms, *J. Comput. Phys.*, vol. 126, no. 2, pp. 449–467, 1996 (p. 48).
- [Joh] S. G. Johnson, *The NLOpt nonlinear-optimization package* (p. 103).
- [KR05] D. I. Ketcheson and A. C. Robinson, On the practical importance of the SSP property for Runge-Kutta time integrators for some common Godunov-type schemes, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 48, no. 3, pp. 271–303, 2005 (p. 45).
- [Kla99] A. Klar, An asymptotic preserving numerical scheme for kinetic equations in the low Mach number limit, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 5, 1507–1527 (electronic), 1999 (p. 48).
- [KT02] A. Kurganov and E. Tadmor, Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 18, no. 5, pp. 584–608, 2002 (p. 109).
- [LLS16] P. Lafitte, A. Lejon, and G. Samaey, A High-Order Asymptotic-Preserving Scheme for Kinetic Equations Using Projective Integration, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 54, no. 1, pp. 1–33, 2016 (p. 48).

- [LS12] P. Lafitte and G. Samaey, Asymptotic-preserving projective integration schemes for kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 34, no. 2, A579–A602, 2012 (p. 48).
- [LL98] P. D. Lax and X.-D. Liu, Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 19, no. 2, 319–340 (electronic), 1998 (p. 109).
- [LP09] C. Le Potier, A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators, *Int. J. Finite Vol.*, vol. 6, no. 2, p. 20, 2009 (pp. 42, 103, 150).
- [LP10] C. Le Potier, Correction non linéaire et principe du maximum pour la discrétisation d’opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 348, no. 11-12, pp. 691–695, 2010 (pp. 42, 103, 150).
- [LP14] C. Le Potier, Correction non linéaire d’ordre 2 et principe du maximum pour la discrétisation d’opérateurs de diffusion, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 352, no. 11, pp. 947–952, 2014 (pp. 42, 103, 150).
- [LM08] M. Lemou and L. Mieussens, A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 1, pp. 334–368, 2008 (p. 48).
- [Len91] H. W. J. Lenferink, Contractivity-preserving implicit linear multistep methods, *Math. Comp.*, vol. 56, no. 193, pp. 177–199, 1991 (p. 46).
- [LeV02] R. J. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, ser. Cambridge Texts in Applied Mathematics. 2002, pp. xx+558 (p. 36).
- [Lev96] C. D. Levermore, Moment closure hierarchies for kinetic theories, *J. Statist. Phys.*, vol. 83, no. 5-6, pp. 1021–1065, 1996 (p. 29).
- [LOC94] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, Weighted essentially non-oscillatory schemes, *J. Comput. Phys.*, vol. 115, no. 1, pp. 200–212, 1994 (p. 43).
- [LDD14] R. Loubère, M. Dumbser, and S. Diot, A new family of high order unstructured MOOD and ADER finite volume schemes for multidimensional systems of hyperbolic conservation laws, *Commun. Comput. Phys.*, vol. 16, no. 3, pp. 718–763, 2014 (p. 43).
- [LE08] R. B. Lowrie and J. D. Edwards, Radiative shock solutions with grey nonequilibrium diffusion, *Shock Waves*, vol. 18, no. 2, pp. 129–143, 2008 (p. 81).
- [Mak] A. Makhorin, *GNU Linear Programming Kit (GLPK), Version 4.55* (p. 103).
- [MM90] P. Marcati and A. Milani, The one-dimensional Darcy’s law as the limit of a compressible Euler flow, *J. Differential Equations*, vol. 84, no. 1, pp. 129–147, 1990 (p. 33).
- [MW84] D. Mihalas and B. Weibel-Mihalas, *Foundations of radiation hydrodynamics*. 1984 (pp. 15, 30, 31, 81).
- [NSCBK75] W. Nicolet, C. Shepard, K. Clark, A. Balakrishnan, and J. Kesselring, *Analytical and design study for a high-pressure, high-enthalpy constricted arc heater*. 1975 (p. 138).

- [OA02] C. Ollivier-Gooch and M. V. Alena, A high-order-accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection-diffusion equation., *J. Comput. Phys.*, vol. 181, no. 2, pp. 729–752, 2002 (p. 59).
- [PA64] W. Page and J. Arnold, *Shock-layer radiation of blunt bodies at reentry velocities*, ser. NASA technical report. 1964 (p. 138).
- [PQ94] B. Perthame and Y. Qiu, A variant of Van Leer’s method for multidimensional systems of conservation laws., English, *J. COMPUT. PHYS.*, vol. 112, no. 2, pp. 370–381, 1994 (p. 43).
- [PS96] B. Perthame and C.-W. Shu, On positivity preserving finite volume schemes for Euler equations, *Numer. Math.*, vol. 73, no. 1, pp. 119–130, 1996 (p. 38).
- [Pom73] G. Pomraning, *The equations of radiation hydrodynamics*, ser. International series of monographs in natural philosophy. 1973 (pp. 15, 30, 31, 81).
- [QXYQ13] W. Qian, Z. Xianyi, Z. Yunquan, and Y. Qing, AUGEM: automatically generate high performance dense linear algebra kernels on x86 CPUs, in *Proceedings of the International Conference on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, ser. SC ’13, Denver, Colorado, 2013, 25:1–25:12 (p. 148).
- [RD90] R. Rew and G. Davis, NetCDF: an interface for scientific data access, *Computer Graphics and Applications, IEEE*, vol. 10, no. 4, pp. 76–82, 1990 (p. 148).
- [Rus61] V. V. Rusanov, The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, vol. 1, pp. 267–279, 1961 (pp. 36, 37, 85, 87, 148).
- [Ruu06] S. J. Ruuth, Global optimization of explicit strong-stability-preserving Runge-Kutta methods, *Math. Comp.*, vol. 75, no. 253, 183–207 (electronic), 2006 (p. 46).
- [RS04] S. J. Ruuth and R. J. Spiteri, High-order strong-stability-preserving Runge-Kutta methods with downwind-biased spatial discretizations, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 42, no. 3, pp. 974–996, 2004 (p. 46).
- [STS01] T. Sakai, T. Tsuru, and K. Sawada, Computation of hypersonic radiating flowfield over a blunt body, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 15, no. 1, pp. 91–98, 2001 (p. 138).
- [Sar13] C. Sarazin-Desbois, Numerical methods for hyperbolic systems with source term issuing from complex physic for radiation, PhD thesis, Université de Nantes, Mar. 2013 (pp. 29, 30, 49, 85, 117, 139).
- [Sch93] C. W. Schulz-Rinne, Classification of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 24, no. 1, pp. 76–88, 1993 (p. 109).
- [SCG93] C. W. Schulz-Rinne, J. P. Collins, and H. M. Glaz, Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 14, no. 6, pp. 1394–1414, 1993 (p. 109).

- [Shu88] C.-W. Shu, Total-variation-diminishing time discretizations, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, vol. 9, no. 6, pp. 1073–1084, 1988 (p. 46).
- [Shu98] C.-W. Shu, Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations (Cetraro, 1997)*, ser. Lecture Notes in Math. Vol. 1697, 1998, pp. 325–432 (p. 43).
- [SO88] C.-W. Shu and S. Osher, Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes, *J. Comput. Phys.*, vol. 77, no. 2, pp. 439–471, 1988 (p. 46).
- [SR02] R. J. Spiteri and S. J. Ruuth, A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 40, no. 2, 469–491 (electronic), 2002 (p. 46).
- [SR03] R. J. Spiteri and S. J. Ruuth, Non-linear evolution using optimal fourth-order strong-stability-preserving Runge-Kutta methods, *Math. Comput. Simulation*, vol. 62, no. 1-2, pp. 125–135, 2003 (p. 46).
- [Tay22] G. I. Taylor, Diffusion by continuous movements, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-20, no. 1, pp. 196–212, 1922 (p. 27).
- [TT02] V. A. Titarev and E. F. Toro, ADER: arbitrary high order Godunov approach, in *Proceedings of the Fifth International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM-01) (Uppsala)*, vol. 17, 2002, pp. 609–618 (p. 43).
- [Tor09] E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Third. 2009, pp. xxiv+724, A practical introduction (pp. 22, 25, 37, 85, 148).
- [TSS94] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares, Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver, *Shock Waves*, vol. 4, no. 1, pp. 25–34, 1994 (pp. 22, 37, 85, 148).
- [Tur05] R. Turpault, A consistent multigroup model for radiative transfer and its underlying mean opacities, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 94, no. 3-4, pp. 357–371, 2005 (p. 30).
- [Tur03] R. Turpault, Modélisation, approximation numérique et applications du transfert radiatif en déséquilibre spectral couple avec l’hydrodynamique, PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, Dec. 2003 (pp. 15, 31, 138, 139).
- [Net] *Unidata’s Network Common Data Form (NetCDF)*, 2014 (p. 148).
- [vLe79] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method., *J. Comput. Phys.*, vol. 32, pp. 101–136, 1979 (p. 43).
- [Vin06] T. Vinci, Les chocs radiatifs générés par les lasers à haute énergie: une opportunité pour l’astrophysique de laboratoire., PhD thesis, Ecole Polytechnique X, May 2006 (p. 81).
- [WB06] A. Wächter and L. T. Biegler, On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, *Math. Program.*, vol. 106, no. 1, Ser. A, pp. 25–57, 2006 (p. 103).



- [WP05] R. C. Whaley and A. Petitet, Minimizing development and maintenance costs in supporting persistently optimized BLAS, *Software: Practice and Experience*, vol. 35, no. 2, pp. 101–121, 2005 (p. 148).
- [WPD01] R. C. Whaley, A. Petitet, and J. J. Dongarra, Automated empirical optimization of software and the ATLAS project, *Parallel Computing*, vol. 27, no. 1–2, pp. 3–35, 2001 (p. 148).
- [WC84] P. Woodward and P. Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.*, vol. 54, no. 1, pp. 115–173, 1984 (pp. 113, 133).
- [XQY12] Z. Xianyi, W. Qian, and Z. Yunquan, Model-driven level 3 BLAS performance optimization on Loongson 3A processor, in *Parallel and Distributed Systems (ICPADS), 2012 IEEE 18th International Conference on*, 2012, pp. 684–691 (p. 148).
- [ZR66] I. Zel’dovich and Y. Raizer, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. 1966 (pp. 15, 81).
- [ZZ90] T. Zhang and Y. X. Zheng, Conjecture on the structure of solutions of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics systems, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 21, no. 3, pp. 593–630, 1990 (p. 109).



# Thèse de Doctorat

Florian BLACHÈRE

Schémas numériques d'ordre élevé et préservant l'asymptotique pour l'hydrodynamique radiative

High-order asymptotic-preserving numerical scheme for radiation hydrodynamics

## Résumé

Le but de ce travail est de construire un schéma volumes finis explicite d'ordre élevé pour des systèmes de lois de conservation avec terme source qui peuvent dégénérer vers des équations de diffusion sous des conditions de compatibilités. Cette dégénérescence est observée en temps long et/ou lorsque le terme source devient prépondérant. Par exemple, ce comportement peut être observé sur le modèle d'Euler isentropique avec friction, ou sur le modèle  $M_1$  pour le transfert radiatif ou encore avec l'hydrodynamique radiative. On propose une théorie générale afin de développer un schéma d'ordre un préservant l'asymptotique (au sens de JIN) pour suivre la dégénérescence. On montre qu'il est stable et consistant sous une condition CFL hyperbolique classique dans le régime de transport comme proche de la diffusion pour tout maillage 2D non structuré. De plus, on justifie qu'il préserve aussi l'ensemble des états admissibles, ce qui est nécessaire pour conserver des solutions physiquement et mathématiquement valides. Cette construction se fait en utilisant le schéma non-linéaire de DRONIOU et LE POTIER pour discrétiser l'équation de diffusion limite. Ensuite, l'extension à l'ordre élevé s'effectue avec des reconstructions polynomiales et la méthode MOOD comme principe de limitation. Les difficultés principales sont la préservation de l'ensemble des états admissibles dans tous les régimes sur maillage 2D non structuré et la préservation de l'asymptotique à tout ordre lors de l'utilisation de reconstructions polynomiales. Des résultats numériques sont présentés pour valider le schéma d'ordre un et d'ordre élevé dans tous les régimes.

## Mots clés

schémas volumes finis, maillage 2D non structuré, schémas préservant l'asymptotique, schémas préservant l'ensemble des états admissibles, lois de conservation avec terme source.

## Abstract

The aim of this work is to design a high-order and explicit finite volume scheme for specific systems of conservation laws with source terms. Those systems may degenerate into diffusion equations under some compatibility conditions. The degeneracy is observed with large source term and/or with late-time. For instance, this behaviour can be seen with the isentropic Euler model with friction or with the  $M_1$  model for radiative transfer, or with the radiation hydrodynamics model. We propose a general theory to design a first-order asymptotic preserving scheme (in the sense of Jin) to follow this degeneracy. The scheme is proved to be stable and consistent under a classical hyperbolic CFL condition in both hyperbolic and diffusive regimes, for any 2D unstructured mesh. Moreover, we justify that the developed scheme also preserves the set of admissible states in all regimes, which is mandatory to conserve physical solutions. This construction is achieved by using the non-linear scheme of Droniou and Le Potier as a target scheme for the diffusive equation, which gives the form of the global scheme for the complete system of conservation laws. Then, the high-order scheme is constructed with polynomial reconstructions and the MOOD paradigm as a limiter. The main difficulties are the preservation of the set of admissible states in both regimes on unstructured meshes and to deal with the high-order polynomial reconstruction in the diffusive limit without losing the asymptotic preserving property. Numerical results are provided to validate the scheme in all regimes, with the first and high-order versions.

## Key Words

finite volume schemes, 2D unstructured mesh, asymptotic-preserving schemes, admissibility-preserving schemes, conservation laws with source terms.