



**HAL**  
open science

# Stabilité du réseau électrique de distribution. Analyse du point de vue automatique d'un système complexe

Marjorie Cosson

► **To cite this version:**

Marjorie Cosson. Stabilité du réseau électrique de distribution. Analyse du point de vue automatique d'un système complexe. Autre. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACL065 . tel-01374469

**HAL Id: tel-01374469**

**<https://theses.hal.science/tel-01374469>**

Submitted on 30 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*NNT : 2016SACL065*

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY,  
préparée à CentraleSupélec**

ECOLE DOCTORALE N°580  
Science et Technologies de l'Information et de la Communication  
Spécialité de doctorat : Automatique

Par :  
**Mme Marjorie Cosson**

**Stabilité du réseau électrique de distribution. Analyse du  
point de vue automatique d'un système complexe.**

**Thèse présentée et soutenue à Gif sur Yvette le 19 septembre 2016 :**

**Composition du Jury :**

M. R. CAIRE	Maitre de Conférence, ENSE3	Examineur
M. D. DUMUR	Professeur, CentraleSupélec	Directeur de thèse
M. B. FRANÇOIS	Professeur, Ecole Centrale Lille	Rapporteur
M. V. GABRION	Ingénieur, EDF R& D	Encadrant
M. A. GIRARD	Directeur de recherche CNRS, L2S	Président du jury
M. H. GUEGUEN	Professeur, CentraleSupélec	Encadrant
M. F. KRATZ	Professeur des universités, INSA Centre Val de Loire	Rapporteur
M. G. MALARANGE	Ingénieur, EDF R& D	Invité
M. B. MARINESCU	Professeur, Ecole Centrale Nantes	Examineur
Mme C. STOICA MANIU	Professeur associé, CentraleSupélec	Invitée



## Résumé

Avec l'arrivée massive de production sur les réseaux de distribution, ces derniers ont vu leur structure et leur fonctionnement profondément modifiés. Parmi les conséquences de ce phénomène, on peut citer l'élévation du plan de tension. Pour tenter de maintenir la qualité de fourniture, les gestionnaires de réseaux de distribution (GRD) ont imaginé plusieurs moyens comme par exemple les régulations de puissance réactive des producteurs en fonction de la tension à leurs bornes : les régulations  $Q(U)$ . Dans ces travaux, nous nous intéressons à l'impact de ce type de régulations sur la stabilité des départs moyenne tension du réseau électrique de distribution.

Pour tenter d'évaluer leur stabilité, un premier travail de modélisation est mené. Il permet de formuler le système comme un système hybride affine par morceaux et de mettre en évidence le risque d'instabilité dans le cas de départs accueillant des régulations  $Q(U)$ . Nous soulignons aussi le lien entre la stabilité du système et les paramètres des régulations. Afin d'aider les GRD à choisir ces paramètres, une méthode est mise au point permettant l'étude formelle de la stabilité d'un système hybride affine par morceaux. Celle-ci est construite à partir de la création d'une abstraction discrète du système puis du raffinement du système discret par le biais d'un calcul de bisimulation. Ainsi, nous développons un outil générique permettant, pour un jeu de paramètres donné, d'évaluer la stabilité d'un système hybride affine par morceaux comme par exemple un départ électrique moyenne tension accueillant des régulations  $Q(U)$ .

La méthode proposée offre des résultats très précis et demande peu d'hypothèses sur le système mais ceci au prix de la complexité des calculs. Afin de simplifier l'étude des départs accueillant de nombreuses régulations, un critère de stabilité est formulé dans le cas particulier de régulations  $Q(U)$  identiques dont le filtre de mesure est un filtre passe-bas du premier ordre. Celui-ci permet aux GRD d'adapter le temps de réponse des régulations au cas par cas en fonction des producteurs et du réseau auquel ils sont raccordés. Finalement, nous proposons un réglage de la rapidité des régulations à destination des codes de réseau, c'est-à-dire qui soit valable quels que soient le réseau et les producteurs qu'il raccorde. Par une analyse de la structure du modèle, une majoration du critère au cas par cas est proposée afin d'exprimer un critère valable dans tous les cas. Ces travaux de thèse se concluent par une ouverture vers l'étude de systèmes de plus en plus complexes, incluant notamment l'extension de la méthode aux producteurs raccordés en basse tension, l'étude d'éventuelles interactions entre différentes régulations, la prise en compte d'autres mécanismes de réglage coexistant sur les départs et d'autres structures de filtres de mesure.



## Executive Summary

In the last decade, the number of distributed generators (DGs) hosted by distribution grids has significantly increased. It impacted the structure and operation of distribution grids on many levels. One of the consequences is the increase of the voltage along distribution feeders hosting generation. In order to maintain the voltage within specified limits, several solutions have been investigated such as local control laws of DGs reactive power ( $Q$ ) as a function of their voltage ( $U$ ): denoted  $Q(U)$  control laws. This work studies the impact of  $Q(U)$  regulations on distribution feeders' voltage stability.

In order to investigate voltage stability, the system is modeled as a piecewise linear hybrid system. An empirical study of this system is used to confirm risks of voltage instability for certain distribution feeders hosting DGs. This study highlights the relationship between control law parameters and system stability. To be able to help distribution grid operators to choose these parameters, a formal methodology to analyze piecewise linear hybrid system stability is developed. This methodology is based on the construction of a discrete abstraction and its refinement using bisimulation calculation. Thus, a generic tool is built to analyze the stability of a piecewise linear hybrid system such as a distribution feeder hosting DGs.

The proposed approach yields precise results and requires only few hypotheses on the studied system but generally at a high computational cost. To be able to apply this approach to feeders hosting several DGs, a stability criterion is formulated specifying few hypotheses on the studied case, e.g. DGs equipped with identical control laws which measurement filter is a first order low pass filter. The criterion adapts the response time of the  $Q(U)$  control law with respect to grid and DGs parameters. Finally, a general criterion is formulated with the purpose of being included in the grid codes, that is to say valid wherever the DG is connected and regardless of its nominal power. Using the particular structure of the system, a maximal value of the initial criterion is established, based on a case-by-case analysis, leading to the definition of a new general criterion valid in any cases. To conclude this work, extension to more complex configurations is discussed, including various measurement filters, different structures of control laws and interactions with other voltage regulation mechanisms.



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Frédéric Kratz et Bruno François pour leur relecture de ces travaux de thèse. Leurs remarques et leurs questions m'ont permis d'améliorer le manuscrit et de préparer au mieux la soutenance.

J'adresse également mes vifs remerciements à Antoine Girard, à Raphaël Caire et à Bogdan Marinescu qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ces travaux lors de la soutenance.

Je remercie aussi vivement Didier Dumur qui a dirigé cette thèse. Le recul dont a fait preuve Didier sur mon sujet comme sur les nombreux qu'il traite m'a permis d'avancer, de me poser de nombreuses questions et a enrichi ces travaux.

J'adresse toute ma gratitude aux différentes équipes qui m'ont accueillie et accompagnée sur le chemin de la thèse. Tout d'abord au Département automatique du campus de Gif dont je remercie tous les membres et particulièrement Cristina Stoica Maniu pour son appui, Pascale Lepeltier pour son appui logistique et son sourire et enfin la joyeuse bande des doctorants Sophie, Miassa, Guillaume, Iris, Nicolo et les autres pour l'ambiance qu'ils ont tous participé à créer au bureau et qui m'est si chère.

Au cours de ces trois années, j'ai aussi eu la chance de travailler sur le campus de Rennes. Je souhaite sincèrement remercier Hervé Guéguen qui a accompagné chaque étape de ces travaux de son expertise et de son recul et qui s'est montré particulièrement disponible tout au long de ces trois années pour mes nombreuses interrogations. De plus, j'adresse mes profonds remerciements à Pierre Haessig. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec Pierre dont l'esprit critique, la pédagogie et l'amitié m'ont été précieux. Finalement, je remercie toute l'équipe pour l'accueil dont ils ont fait preuve et bien sûr Roman pour son hospitalité et son expertise en matière de crêperies et de « petits vélos ».

J'ai aussi eu la chance d'être accueillie au sein de l'équipe R12 du département EFESE de EDF R&D. Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai pu échanger au cours de ces trois années et qui ont contribué à faire avancer ces travaux. Je pense particulièrement à Vincent Gabrion pour nos nombreux échanges et à Gilles Malarange qui a initié le sujet et a su y apporter son expertise et son recul. Gilles, je te remercie chaleureusement pour tes conseils avisés comme pour ta grande bienveillance. Je garderai un agréable souvenir de Carmen, Josselin, Vincent, Laurent, Gauthier, Héloïse et de tous mes collègues R12iens pour leur expertise, leur bonne humeur et leur amitié.

Je souhaite témoigner toute ma reconnaissance à mes amis du bureau et d'ailleurs qui ont vécu avec moi cette aventure et qui ont su m'écouter tout au long de ces trois années, dans les bons jours comme dans les mauvais. Qu'ils se rassurent, je n'ai pas fini de râler !

Je remercie du fond du cœur Baptiste qui a su m'écouter, m'épauler et me supporter pendant ces trois ans, des doutes des premiers mois jusqu'à la folie de la rédaction, et qui m'a donné la force d'avancer jour après jour.

Finalement, mes derniers remerciements vont à ma famille, mes parents, ma sœur et mon frère, ma chère grand-mère sans oublier tous les autres dont l'amour et le soutien sans faille ont été inestimables pour la réussite de cette entreprise. Rien n'aurait été possible sans vous pour cette thèse comme pour tout le reste.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Problématique du réglage de tension sur les réseaux de distribution</b>	<b>7</b>
1.1	Réseaux électriques de distribution . . . . .	8
1.1.1	Organisation des réseaux électriques en France . . . . .	8
1.1.2	Structure des réseaux de distribution . . . . .	8
1.1.3	Utilisateurs . . . . .	10
1.1.4	Supervision . . . . .	11
1.2	Réglage de tension sur les réseaux de distribution . . . . .	12
1.2.1	Définition et objectifs du réglage . . . . .	12
1.2.2	Structure historique du réglage de tension . . . . .	13
1.2.3	Réglage de tension en présence de producteurs décentralisés . . . . .	15
1.2.4	Panorama des mécanismes à l'étude pour le réglage de la tension . . . . .	18
1.2.5	Conclusion . . . . .	19
1.3	Positionnement des travaux . . . . .	20
1.3.1	Pistes de recherche . . . . .	20
1.3.2	Principales contributions des travaux . . . . .	23
1.3.3	Conclusion . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Modélisation du système</b>	<b>27</b>
2.1	Objectifs de l'étude et choix du type de modèle . . . . .	28
2.1.1	Objectifs . . . . .	28
2.1.2	Structure du modèle . . . . .	28
2.1.3	Types de modèles . . . . .	29
2.1.4	Choix du type de modèle . . . . .	31
2.2	Modélisation des producteurs et de leur régulateur . . . . .	32
2.2.1	Caractéristiques et hypothèses de modélisation . . . . .	32
2.2.2	Modélisation des régulations locales de puissance des producteurs décentralisés . . . . .	33
2.2.3	Modélisation des régulateurs de puissance en fonction de la tension . . . . .	37
2.2.4	Application à un exemple . . . . .	38
2.2.5	Conclusion . . . . .	41
2.3	Modélisation du système électrique . . . . .	41
2.3.1	Caractéristiques et hypothèses de modélisation . . . . .	41

2.3.2	Modélisation du réseau électrique . . . . .	42
2.3.3	Modélisation des grandeurs non commandables . . . . .	45
2.3.4	Mise en équation du comportement du réseau électrique . . . . .	46
2.3.5	Application à un exemple . . . . .	53
2.3.6	Conclusion . . . . .	55
2.4	Mise en évidence des risques d'instabilité . . . . .	55
2.4.1	Considérations générales . . . . .	55
2.4.2	Application à un exemple . . . . .	57
2.5	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Analyse formelle de la stabilité</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	64
3.1.1	Objectifs . . . . .	64
3.1.2	État de l'art des méthodes existantes . . . . .	65
3.1.3	Besoin d'une nouvelle méthode pour l'étude de la stabilité . . . . .	67
3.2	Méthode proposée . . . . .	67
3.2.1	Étape 1 : Modélisation du système sous la forme d'un système hybride . . . . .	68
3.2.2	Étape 2 : Abstraction discrète . . . . .	74
3.2.3	Étape 3 : Raffinement de l'abstraction discrète par bisimulation . . . . .	77
3.2.4	Conclusion – Analyse des résultats disponibles . . . . .	83
3.3	Application au cas d'étude . . . . .	84
3.3.1	Étape 1 : Modélisation du système sous la forme d'un système hybride . . . . .	86
3.3.2	Étape 2 : Abstraction discrète . . . . .	87
3.3.3	Étape 3 : Raffinement de l'abstraction discrète par bisimulation . . . . .	88
3.3.4	Conclusion sur la stabilité – Analyse des résultats disponibles . . . . .	93
3.3.5	Stabilisation du système . . . . .	98
3.4	Discussions . . . . .	100
3.4.1	Sur le fait de pouvoir conclure . . . . .	100
3.4.2	Sur la complexité . . . . .	104
3.4.3	Sur la sensibilité aux paramètres . . . . .	106
3.5	Conclusion . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Établissement d'un critère explicite de stabilité</b>	<b>109</b>
4.1	Introduction – Objectifs de l'étude . . . . .	110
4.2	Méthode proposée . . . . .	110
4.2.1	Methodologie . . . . .	110
4.2.2	Hypothèses . . . . .	111
4.3	Critère de stabilité explicite pour un producteur . . . . .	113
4.3.1	Présentation du système étudié . . . . .	113
4.3.2	Étape 1 : Étude d'atteignabilité arrière . . . . .	114

4.3.3	Étape 2 : Étude d'atteignabilité avant . . . . .	120
4.3.4	Conclusion : Critère de stabilité proposé . . . . .	122
4.4	Application au cas d'étude réel à un producteur . . . . .	123
4.4.1	Description du système . . . . .	123
4.4.2	Critère de stabilité . . . . .	124
4.4.3	Simulations dynamiques . . . . .	125
4.4.4	Conclusion . . . . .	126
4.5	Critère de stabilité pour $N$ producteurs . . . . .	127
4.5.1	Méthodologie proposée . . . . .	127
4.5.2	Stabilité locale versus stabilité globale . . . . .	127
4.5.3	Application à un cas d'étude réel à deux producteurs . . . . .	129
4.5.4	Validation par une étude statistique . . . . .	132
4.5.5	Conclusion . . . . .	136
4.6	Discussions . . . . .	136
4.6.1	Sur la complexité de la méthode . . . . .	136
4.6.2	Sur l'existence de cycles complexes . . . . .	137
4.6.3	Sur l'extension à différents filtres de mesure . . . . .	137
4.6.4	Sur l'impact de la des-optimisation . . . . .	139
4.7	Conclusion . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Généralisation des critères de stabilité à différents réseaux</b>	<b>143</b>
5.1	Introduction . . . . .	144
5.1.1	Objectifs de l'étude . . . . .	144
5.1.2	Méthode proposée . . . . .	144
5.2	Généralisation du critère explicite pour un producteur . . . . .	145
5.2.1	Méthode proposée . . . . .	145
5.2.2	Étude des variations du critère en fonction des paramètres du système . . . . .	145
5.2.3	Critère général proposé pour un producteur . . . . .	147
5.2.4	Application numérique dans le cas français . . . . .	148
5.3	Généralisation du critère implicite pour $N$ producteurs . . . . .	149
5.3.1	Méthode proposée . . . . .	149
5.3.2	Majoration des modules des valeurs propres des matrices d'évolution du système . . . . .	150
5.3.3	Critère général proposé pour $N$ producteurs . . . . .	157
5.4	Discussions . . . . .	158
5.4.1	Sur l'impact du ralentissement des régulateurs . . . . .	158
5.4.2	Sur le contenu des codes de réseaux . . . . .	160
5.4.3	Sur l'extrapolation à différents filtres de mesure . . . . .	163
5.5	Conclusion . . . . .	167

<b>6 Conclusion générale et perspectives</b>	<b>169</b>
6.1 Conclusions . . . . .	169
6.2 Remarques générales . . . . .	171
6.3 Perspectives . . . . .	172
<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>
<b>A Illustration du calcul de la matrice d'admittance complexe d'un réseau</b>	<b>189</b>
A.1 Présentation de l'exemple . . . . .	189
A.2 Mise en équation du réseau . . . . .	189
A.3 Matrice d'admittance . . . . .	191
<b>B Établissement des équations de répartition des charges</b>	<b>193</b>
B.1 Définitions . . . . .	193
B.2 Expression des courants injectés . . . . .	194
B.2.1 A partir des équations des nœuds . . . . .	194
B.2.2 A partir du bilan des puissances . . . . .	194
B.3 Équations de répartition des charges . . . . .	194
<b>C Étude d'atteignabilité arrière pour exprimer des conditions suffisantes à la stabilité</b>	<b>197</b>
C.1 Système étudié . . . . .	197
C.2 Cycle entre les zones 3 et 5 . . . . .	198
C.3 Cycle entre les zones 2 et 3 et entre les zones 3 et 4 . . . . .	199
C.3.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_2$ en venant de $\mathcal{D}_3$ . . . . .	199
C.3.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_3$ en venant de $\mathcal{D}_2$ . . . . .	200
C.3.3 Condition nécessaire à $C_{23}$ . . . . .	201
C.3.4 Condition suffisante à la stabilité des cycles entre les zones 2 et 3 et les zones 3 et 4 . . . . .	201
C.4 Cycle entre les zones 1 et 2 et entre les zones 4 et 5 . . . . .	202
C.4.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_2$ en venant de $\mathcal{D}_1$ . . . . .	202
C.4.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_1$ en venant de $\mathcal{D}_2$ . . . . .	203
C.4.3 Condition nécessaire à $C_{12}$ . . . . .	203
C.4.4 Condition suffisante à la stabilité des cycles entre les zones 1 et 2 et les zones 4 et 5 . . . . .	204
C.5 Cycle entre les zones 1 et 4 et entre les zones 2 et 5 . . . . .	205
C.5.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_4$ en venant de $\mathcal{D}_1$ . . . . .	205
C.5.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_1$ en venant de $\mathcal{D}_4$ . . . . .	205
C.5.3 Condition nécessaire à $C_{14}$ . . . . .	206
C.5.4 Condition suffisante à la stabilité des cycles entre les zones 1 et 4 et les zones 2 et 5 . . . . .	207

C.6	Cycle entre les zones 1 et 5 . . . . .	207
C.6.1	Atteignabilité de $\mathcal{D}_5$ en venant de $\mathcal{D}_1$ . . . . .	207
C.6.2	Atteignabilité de $\mathcal{D}_1$ en venant de $\mathcal{D}_5$ . . . . .	208
C.6.3	Condition nécessaire à $C_{15}$ . . . . .	208
C.6.4	Condition suffisante à la stabilité du cycles entre les zones 1 et 5 . . . . .	208
C.7	Cycle entre les zones 2 et 4 . . . . .	208
C.7.1	Atteignabilité de $\mathcal{D}_4$ en venant de $\mathcal{D}_2$ . . . . .	209
C.7.2	Atteignabilité de $\mathcal{D}_2$ en venant de $\mathcal{D}_4$ . . . . .	210
C.7.3	Condition nécessaire à $C_{24}$ . . . . .	210
C.7.4	Condition suffisante à la stabilité du cycles entre les zones 1 et 5 . . . . .	211
C.8	Conclusion de l'étude d'atteignabilité arrière . . . . .	211
<b>D</b>	<b>Étude d'atteignabilité avant pour caractériser les ensembles de points im-</b>	
	<b>pliqués dans un cycle</b> . . . . .	<b>213</b>
D.1	Objectif de l'étude . . . . .	213
D.2	Caractérisation des points de $\mathcal{S}_{ij}$ . . . . .	213
D.3	Conclusion de l'étude . . . . .	215
<b>E</b>	<b>Calcul des valeurs propres d'un système composé de deux producteurs</b>	<b>217</b>
E.1	Objectifs de l'étude . . . . .	217
E.2	Calcul des valeurs propres de $\mathcal{A}^{(i)}$ . . . . .	218
E.2.1	Polynôme caractéristique . . . . .	218
E.2.2	Racines du polynôme caractéristique . . . . .	218
E.3	Analyse de la stabilité des zones de fonctionnement linéaire . . . . .	219



# Liste des tableaux

1	Synthèse du contenu des chapitres . . . . .	5
1.1	Tension de raccordement de référence pour les consommateurs d'après l'arrêté du 17 mars 2003 . . . . .	10
1.2	Tension de raccordement de référence pour les producteurs d'après l'arrêté du 23 avril 2008 . . . . .	11
1.3	Définition des notions de contraintes de tension haute et basse sur le réseau de distribution français . . . . .	12
1.4	Moyens existants sur les réseaux de distribution français pour régler la tension . .	17
1.5	Valeurs numériques de la loi de commande $Q(U)$ étudiée . . . . .	26
2.1	Dynamique des régulations locales de puissance des convertisseurs . . . . .	36
2.2	Valeurs numériques utilisées pour les paramètres du modèle . . . . .	40
2.3	Résultats de la comparaison entre la méthode de linéarisation physique (méthode 1) et numérique (méthode 2) . . . . .	54
3.1	Résumé des cas dans lesquels il est possible de conclure à l'issue de l'itération $n$ .	83
3.2	Paramètres du modèle représentant le cas d'étude . . . . .	85
3.3	Paramètres de la loi de commande $Q(U)$ en fonction du mode de fonctionnement	86
3.4	Comparaison de la stabilité, du temps de calcul et de la complexité pour différents réglages de rapidité du filtre . . . . .	99
4.1	Paramètres de la dynamique dans le cas de la loi de commande décrite figure 4.1	114
4.2	Liste complète des cycles simples possibles pour un régulateur $Q(U)$ . . . . .	114
4.3	Liste complète des cycles simples possibles pour un régulateur $Q(U)$ . . . . .	119
4.4	Paramètres du modèle représentant le cas d'étude . . . . .	124
4.5	Zones de fonctionnement de la loi de commande agrégée $Q(U)$ . . . . .	130
4.6	Comparaison des conclusions du critère proposé et de la référence . . . . .	135
5.1	Tableau des variations de la fonction $f$ . . . . .	147
5.2	Résumé de la comparaison de plusieurs codes de réseaux . . . . .	163
5.3	Évolution du maximum des rayons spectraux du système le plus contraignant pour la stabilité avec $n$ la largeur de l'horizon de la moyenne glissante . . . . .	166
C.1	Dynamique en boucle fermée du système dans chacune des zones de fonctionnement	198

# Table des figures

1.1	Schéma de l'organisation des réseaux électriques en fonction de leur tension en France . . . . .	8
1.2	Schéma résumant l'organisation et le vocabulaire des réseaux de distribution en France [1] . . . . .	9
1.3	Répartition des puissances installées sur le réseau de distribution exploité par Enedis	11
1.4	Illustration de l'impact de l'insertion de production décentralisée sur le plan de tension d'un départ moyenne tension . . . . .	16
1.5	Quelques exemples de lois de commande de la puissance réactive en fonction de la tension issus de la littérature . . . . .	21
1.6	Schéma du positionnement relatif de quelques études de stabilité des régulations locales issues de la littérature . . . . .	24
1.7	Allure de la loi de commande $Q(U)$ étudiée . . . . .	26
2.1	Structure du système à modéliser avec plusieurs producteurs décentralisés équipés de régulateurs locaux de puissance en fonction de la tension . . . . .	29
2.2	Représentation des différents phénomènes physiques par échelle de temps [2] . . .	31
2.3	Structure du modèle choisi pour représenter les convertisseurs de puissance d'un producteur . . . . .	32
2.4	Structure du modèle choisi pour représenter le régulateur de puissance active ou réactive en fonction de la tension d'un producteur . . . . .	33
2.5	Structure du modèle proposé pour un producteur équipé d'un régulateur . . . . .	33
2.6	Exemple de structure de raccordement au réseau électrique d'un dispositif de stockage d'énergie distribuée . . . . .	34
2.7	Principe de la régulation de la puissance active injectée au réseau $P$ [3] . . . . .	35
2.8	Principe de la régulation en boucle ouverte de puissance réactive $Q$ [3] . . . . .	36
2.9	Principe de la régulation en boucle fermée de puissance réactive $Q$ [3] . . . . .	36
2.10	Schéma de la hiérarchie des boucles de régulation des convertisseurs de puissance [4]	37
2.11	Modèle proposé pour les convertisseurs de puissance d'un producteur . . . . .	37
2.12	Modèle agrégé discret proposé pour représenter les régulateurs de puissance des producteurs en fonction de l'amplitude de sa tension . . . . .	39
2.13	Modèle du producteur éolien équipé d'un régulateur $Q(U)$ . . . . .	39
2.14	Comparaison de la réponse à un échelon de tension du modèle quasi stationnaire et du modèle dynamique proposé . . . . .	40

2.15	Brique élémentaire modélisant le comportement d'un producteur équipé d'un régulateur de puissance . . . . .	41
2.16	Structure du modèle proposé pour représenter le système électrique . . . . .	43
2.17	Modèle en $\Pi$ de la branche entre les nœuds A et B . . . . .	43
2.18	Modèle de Thévenin du réseau amont . . . . .	44
2.19	Modèle équivalent du réseau électrique proposé . . . . .	45
2.20	Modèle proposé pour représenter l'influence des régulateurs sur l'amplitude de la tension . . . . .	52
2.21	Modèle proposé pour représenter l'influence des perturbations sur l'amplitude de la tension . . . . .	52
2.22	Modèle linéarisé du système électrique . . . . .	53
2.23	Évaluation de la tension du producteur suite à une variation de puissance réactive (a) ou active (b) avec les trois méthodes proposées . . . . .	54
2.24	Modèle quasi stationnaire proposé pour représenter le système composé de producteurs équipés de régulateurs de puissance raccordés au réseau de distribution . . . . .	56
2.25	Réponse du filtre de mesure à un échelon unitaire de tension à $t = 0$ s pour différentes valeurs de la constante de temps discrète ( $a$ ) allant de 0 à 0.9 . . . . .	57
2.26	Modèle quasi stationnaire du système étudié . . . . .	58
2.27	Évolution temporelle de la tension du producteur en réponse à un échelon de sa puissance active $\Delta P_d = P_{d_f} - P_{d_0}$ pour $a = 0, 1$ et pour différentes valeurs finales $P_{d_f}$ . . . . .	58
2.28	Évolution de la tension du producteur en réponse à un échelon de perturbation pour différentes valeurs de $a$ . . . . .	59
2.29	Évolution de la tension du producteur en réponse à un échelon de perturbation pour différentes valeurs de $a$ . . . . .	60
3.1	Exemple d'automate représentant un système de transition hybride . . . . .	73
3.2	Illustration de quelques modes discrets de $\mathcal{M}^{(0)}$ et quelques trajectoires de $\mathcal{T}^{(0)}$ constituant le système discret $S_D^{(0)}$ . . . . .	75
3.3	Illustration du principe de découpage d'un mode discret . . . . .	80
3.4	Quelques exemples d'analyses de graphes avant la convergence du calcul . . . . .	82
3.5	Schéma bilan de la méthode d'étude de stabilité proposée . . . . .	83
3.6	Modèle retenu du système étudié . . . . .	85
3.7	$Pa^{(0)}(\mathcal{X})$ partition de l'espace d'état constituée des zones de fonctionnement affine . . . . .	88
3.8	Automate discret représentant l'abstraction discrète de $S_H$ . . . . .	88
3.9	Partition de l'espace d'état après la première itération $Pa^{(1)}(\mathcal{X})$ . . . . .	89
3.10	Identification des domaines inatteignables à l'issue de la première itération . . . . .	90
3.11	Extrait de l'automate discret représentant $S_D^{(1)}$ . . . . .	91
3.12	Partition de l'espace d'état après la deuxième itération $Pa^{(2)}(\mathcal{X})$ . . . . .	92
3.13	Partition de l'espace d'état après la troisième itération $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$ . . . . .	93

3.14	Illustration d'une trajectoire discrète instable représentée dans l'automate discret et dans l'espace d'état et d'une trajectoire hybride correspondante . . . . .	94
3.15	Illustration d'une trajectoire discrète stable représentée dans l'automate discret et dans l'espace d'état et d'une trajectoire hybride correspondante . . . . .	95
3.16	Polyèdres de $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$ appartenant à l'un des cycles détecté . . . . .	97
3.17	Illustration d'une trajectoire hybride discrète instable correspondant au cycle 2 . . . . .	97
3.18	Polyèdres de $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$ correspondant à une trajectoire discrète définitive et instable . . . . .	98
3.19	Illustration du lien entre le temps de réponse du système et le nombre d'itérations nécessaires permettant de conclure . . . . .	100
3.20	Découpage d'un domaine correspondant à une zone de fonctionnement instable . . . . .	101
3.21	Illustration du comportement du système pour deux conditions initiales différentes dans $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ . . . . .	103
3.22	Régions de l'espace d'état continu pour lesquels la trajectoire hybride associée est instable . . . . .	104
3.23	Évolution du nombre d'états discrets avec le nombre d'itérations du calcul de la bisimulation pour différentes valeurs de $a$ . . . . .	105
3.24	Structure de l'outil d'étude de la stabilité . . . . .	108
4.1	Loi de commande $Q(U)$ utilisée pour les calculs formels . . . . .	112
4.2	Zone de réglage de la rapidité du filtre pour laquelle le système est stable (zone verte) après l'étude des prédécesseurs . . . . .	119
4.3	Stabilité des cycles simples en fonction de la constante de temps du filtre ( $a$ ) . . . . .	122
4.4	Stabilité des cycles simples en fonction de la valeur de la rapidité du filtre . . . . .	124
4.5	Réponse en tension du système à une perturbation constante pour différentes valeurs de $a$ autour de la limite de stabilité . . . . .	125
4.6	Réponse en tension du système à une perturbation constante pour deux réglages de $a$ autour de la limite de stabilité . . . . .	125
4.7	Loi de commande $Q(U)$ du producteur $P_i$ . . . . .	130
4.8	Réponse en tension du système de deux producteurs à une perturbation constante pour différentes valeurs de $a$ autour de la limite de stabilité . . . . .	131
4.9	Schéma de principe de l'étude statistique proposée pour évaluer la validité du critère de stabilité . . . . .	132
4.10	Exemple d'un réseau utilisé pour l'étude statistique . . . . .	133
4.11	Distributions des principaux paramètres sur les 60 cas étudiés . . . . .	133
4.12	Illustration du comportement instable du système avec un filtre de mesure à moyenne glissante sur deux échantillons . . . . .	138
4.13	Illustration de l'impact du choix de la marge de stabilité sur la dynamique du système représenté figure 4.10 . . . . .	140
5.1	Modèle des régulateurs de puissance réactive en fonction de la tension étudiés . . . . .	145

5.2	Schéma illustrant l'inductance utilisée pour chaque terme de la matrice $\mathbf{K}_{PQ}$ . . .	152
5.3	Réponse indicielle du filtre de mesure critique adapté au cas d'étude ( $a_{lim}^{(ex)}$ ) et valable pour tous les départs moyenne tension français ( $\overline{a_{lim}}$ ) . . . . .	160
5.4	Lois de commande $Q(U)$ proposées dans la norme italienne [5] . . . . .	161
5.5	Évolution du maximum des rayons spectraux des matrices d'évolution avec les paramètres du système . . . . .	164
5.6	Réponse indicielle d'un filtre de type moyenne glissante sur $n$ échantillons pour différentes valeurs de $n$ . . . . .	165
5.7	Réponse indicielle du « pire » système tel que défini précédemment avec un filtre de type moyenne glissante sur $n$ échantillons pour $n = 6$ , $n = 8$ et $n = 10$ . . . .	166
6.1	Diagramme représentant pour chacune des trois méthodes développées dans ces travaux le compromis proposé entre la précision de la limite de stabilité, la rapidité, la généricité et la simplicité . . . . .	171
A.1	Schéma du réseau théorique considéré . . . . .	189
A.2	Modèle en II du réseau considéré . . . . .	190
C.1	Modèle proposé pour représenter un réseau électrique accueillant un seul producteur équipé d'un régulateur $Q(U)$ . . . . .	198



# Lexique

Autoréglage des charges	Adaptation naturelle des puissances active et réactive consommées par les charges en fonction des variations de la fréquence et de l'amplitude de la tension.
Bancs de condensateurs	Automatisme situé en sortie des postes sources visant à compenser la puissance réactive consommée par les départs du réseau de distribution en raccordant plus ou moins de condensateurs.
Branche	Liaison électrique reliant deux nœuds du réseau.
Commission de régulation de l'énergie (CRE)	Autorité administrative indépendante française chargée de veiller au bon fonctionnement du marché de l'énergie et d'arbitrer les différends entre les utilisateurs et les divers exploitants.
Départ électrique	Ensemble des liaisons électriques ayant en commun une liaison électrique amont connectée au secondaire d'un transformateur.
Départ dédié	Départ accueillant uniquement des producteurs.
Départ mixte	Départ accueillant à la fois des consommateurs et des producteurs.
Énergies renouvelables	Installations de production électrique à base d'énergies renouvelables : éoliens, photovoltaïques, etc.
Gestionnaire de réseau de distribution	Entreprise chargée de l'entretien, du fonctionnement et du développement de tout ou partie d'un réseau de distribution d'énergie.
Ilotage non-intentionnel	Situation où une partie du réseau se retrouve séparée du réseau interconnecté, par exemple suite à une manœuvre ou un défaut, mais reste sous tension.
Jeu de barres	Équipement électrique situé dans le poste source permettant de relier électriquement le secondaire d'un transformateur et des départs.

---

Multi-Parametric Toolbox (MPT)	Toolbox Matlab <sup>®</sup> pour faire de l'optimisation paramétrique, de la géométrie algorithmique et de la commande prédictive.
Planification des réseaux	Ensemble des moyens mis en oeuvre pour anticiper les évolutions du réseau nécessaires à l'acheminement de l'électricité au moindre coût pour la société et dans des conditions optimales de sécurité, de qualité et d'impact environnemental.
Poste de transformation	Interface entre deux réseaux de tension différente, étant notamment le siège de la transformation, de la répartition des flux d'énergie et de la protection du réseau.
Poste source	Poste de transformation situé entre le réseau de transport et le réseau de distribution moyenne tension.
Poste de distribution	Poste situé entre le réseau moyenne tension et le réseau basse tension.
Producteur conventionnel	Installation de production raccordée au réseau via un alternateur dont la fréquence est couplée à celle du réseau.
Production intermittente	Sources de production d'énergie renouvelable non disponibles en permanence et dont la disponibilité varie fortement sans possibilité de contrôle.
Régleurs en charge	Automatisme au niveau des transformateurs visant à maintenir la tension aval constante en agissant sur le rapport de transformation.
Réseau HTB	Ensemble des liaisons électriques exploitées en haute et très haute tension (>50 kV).
Réseau HTA	Ensemble des liaisons électriques exploitées en moyenne tension (entre 1 kV et 50 kV).
Réseau BT	Ensemble des liaisons électriques exploitées en basse tension (<1 kV).
Système à commutation	Système dont le modèle change de manière discontinue en fonction d'un mode.
Système hybride	Système dont la dynamique intègre des caractéristiques continues et des caractéristiques événementielles.
Système de transition	Système composé d'un ensemble d'états et d'une relation de transition entre ces états.

# Notations

$\mathbf{0}_n$	Vecteur de « zéros » de dimension $n$
$\mathbf{1}_n$	Vecteur de « uns » de dimension $n$
$\mathbb{I}_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$
$f^{-1}$	Réciproque de la fonction $f$
$spec(\mathbf{M})$	Spectre de la matrice $\mathbf{M}$
$tr(\mathbf{M})$	Trace de la matrice $\mathbf{M}$
$det(\mathbf{M})$	Déterminant de la matrice $\mathbf{M}$
$n_U$	Nombre de nœuds du réseau auxquels sont raccordés des producteurs équipés de régulateurs de puissance
$n_{NC}$	Nombre de nœuds du réseau auxquels sont raccordés des clients non commandables
$n_P$	Nombre de régulateurs de puissance
$n_P^P$	Nombre de régulateurs de puissance active
$n_P^Q$	Nombre de régulateurs de puissance réactive
$n_{PQ}$	Nombre de zones de fonctionnement linéaire de la loi de commande agrégée des $n_P$ régulateurs
$n_f$	Dimension du vecteur d'état agrégé des filtres de mesure des $n_P$ régulateurs
$n_d$	Dimension du terme agrégé des grandeurs non commandables
$n_x$	Dimension du vecteur d'état augmenté du système
$P_{\mathbf{M}}$	Polynôme caractéristique associé à la matrice $\mathbf{M}$
$s$	Variable de Laplace
$\langle x \rangle_T$	Moyenne de $x(t)$ sur l'horizon $T$
$\underline{z}^*$	Complexe conjugué associé au nombre complexe $\underline{z}$



# Introduction générale

Les gestionnaires de réseaux de distribution (GRD) s'engagent auprès de leurs utilisateurs à garantir la qualité de l'électricité qu'ils leur fournissent. Le maintien de la tension dans certaines bornes fixées légalement et éventuellement contractuellement est l'un des engagements des GRD. L'ensemble des moyens mis en œuvre pour contrôler l'amplitude de la tension est regroupé sous le terme « mécanismes de réglage de la tension ».

Ces mécanismes ont été initialement conçus pour des réseaux de distribution ayant un fonctionnement unidirectionnel, c'est-à-dire servant à acheminer l'électricité du réseau de transport vers les consommateurs finaux raccordés en moyenne et basse tension. Depuis les années 2000, les installations de production raccordées au réseau de distribution, principalement de type renouvelable et intermittent, se développent massivement et rapidement et cette croissance va continuer. Ce changement profond des réseaux de distribution impacte la planification de leur développement jusqu'à leur exploitation et impose en particulier l'adaptation des mécanismes de réglage de la tension.

De nombreux travaux se focalisent sur des moyens de garantir le maintien de la tension dans les bornes admissibles fixées sur les réseaux de distribution raccordant de la production. Certains travaux proposent de nouvelles idées de régulation dynamique à intégrer aux mécanismes de réglage de la tension. De nombreuses questions se posent quant aux grandeurs à réguler, aux acteurs à impliquer, aux structures des régulations, etc. On peut noter que certains mécanismes dynamiques de réglage de la tension sont déjà dans les normes publiées par certains pays, comme certaines régulations locales de la puissance des producteurs en fonction de leur tension.

L'un des verrous au développement de ces nouveaux mécanismes de réglage est l'évaluation de leurs impacts sur le fonctionnement dynamique des réseaux. En effet, plusieurs inquiétudes ont émergé d'études empiriques en simulation et en expérimentation concernant le bon fonctionnement des plans de protection ou encore la stabilité en tension de réseaux accueillant des régulations locales de puissance des producteurs.

Dans ces travaux, nous nous penchons plus particulièrement sur ce dernier aspect. Nous proposons d'étudier le lien entre les paramètres des régulations locales de puissance des producteurs et la stabilité des départs.

Le principal objectif de ces travaux est de développer des méthodes d'analyse permettant aux GRD de garantir la stabilité de la tension sur les réseaux de distribution en présence de producteurs équipés de régulations locales de puissance en fonction de leur tension.

Le premier chapitre présente la problématique du réglage de tension dans le contexte des réseaux de distribution raccordant de la production. Un panorama des solutions envisagées dans la littérature pour assurer le réglage de la tension est présenté. Une attention particulière est portée sur les régulations locales de la puissance réactive des producteurs.

Le chapitre 2 pose un cadre formel à la modélisation des réseaux raccordant des producteurs participant au réglage de la tension. Les mécanismes de réglage étudiés sont des régulations de la puissance active ou réactive des producteurs en fonction de leur tension. Les régulateurs considérés sont composés d'une loi de commande de la puissance affine par morceaux et d'un filtre de mesure de la tension à temps discret avec un temps d'échantillonnage de l'ordre de la seconde. Le modèle proposé représente donc les éléments du réseau et les producteurs en vue d'étudier des phénomènes physiques dont le régime transitoire dure quelques secondes. À partir de ce modèle, une étude empirique simulant le comportement d'un système réel est menée. Elle permet de confirmer les risques d'instabilité et le besoin de développer une étude formelle de la stabilité.

Dans le chapitre 3, on se donne pour objectif de développer une méthode pour étudier formellement la stabilité des départs raccordant de la production équipée de régulateurs de puissance. Nous souhaitons que la méthode proposée permette aux GRD d'étudier la stabilité lors des études de raccordement. De l'allure des régulations de puissance des producteurs dépend de la nature des phénomènes d'instabilité que nous étudions. Ici, le comportement instable se traduit par des cycles, c'est-à-dire les passages successifs d'une zone de fonctionnement de la loi de commande affine par morceaux à une autre. Afin d'étudier ces transitions, nous représentons le système sous la forme d'un système hybride de transition. Une abstraction discrète est ensuite construite pour en étudier la stabilité. Celle-ci est affinée grâce à un calcul de bisimulation pour se rapprocher d'une abstraction discrète dont la stabilité est équivalente à celle du système physique. La méthode proposée est construite sur le même principe que les algorithmes de calculs de bisimulation en ajoutant une étape intermédiaire d'analyse de la stabilité puisque l'objectif est ici de pouvoir conclure sur la stabilité et non de construire la bisimulation. La méthode proposée permet de conclure en peu d'itérations et même pour certains cas pour lesquels la construction de la bisimulation est impossible.

Finalement, le chapitre 3 présente une méthode d'analyse de la stabilité adaptée à tous les systèmes hybrides affines par morceaux. Pour l'étude des réseaux de distribution raccordant des régulations de puissance, un outil a été développé sous Matlab<sup>®</sup> à l'aide de la *Multi-Parametric Toolbox*. Cet outil permettrait aux GRD d'analyser la stabilité en tension de façon précise avec de nombreux résultats complémentaires tels que les points de fonctionnement instables, l'amplitude des oscillations de tension, etc. De plus, la méthode proposée est valable pour une grande diversité de systèmes, c'est-à-dire d'allure de loi de commande, de structure de filtre de mesure, de topologie de réseaux, etc. Cependant, la richesse, la précision et la généralité de la méthode s'ac-

compagnent d'une certaine complexité de calculs rendant difficile son application à des réseaux raccordant de nombreux producteurs.

L'objectif du chapitre 4 est de proposer aux GRD une méthode plus facile à mettre en place s'ils n'ont pas besoin d'une analyse aussi riche et précise que celle proposée par la méthode formelle. Dans ce chapitre, nous formulons une condition suffisante de stabilité des réseaux raccordant de nombreux producteurs. Pour y parvenir, nous particularisons les systèmes considérés afin de pouvoir étudier analytiquement leur stabilité. Une attention particulière est portée à proposer des hypothèses aussi réalistes et peu restrictives que possible. Par exemple, nous limitons l'étude aux producteurs dont le filtre de mesure est un filtre passe-bas du premier ordre, ce qui correspond au filtre préconisé, notamment par les normes allemandes.

Finalement, nous formulons une condition suffisante à la stabilité explicite pour un producteur grâce à l'écriture formelle des conditions d'atteignabilité arrière et avant des cycles instables (chapitre 4). À partir de ce critère explicite pour un producteur, on conjecture l'existence d'un critère implicite valable quel que soit le nombre de producteurs. La validité de la conjecture est évaluée grâce à une étude statistique. Finalement, cette méthode permet d'établir un critère de stabilité s'adaptant au cas par cas. Ceci permet une grande simplification des calculs par rapport à la méthode formelle (chapitre 3) tout en gardant un réglage adaptable à chaque système étudié. Le critère de stabilité présenté ici est uniquement une condition suffisante de stabilité. Il est donc plus restrictif que nécessaire. Cependant, il est montré sur quelques cas d'étude qu'il n'entraîne pas une erreur importante sur la limite de stabilité, notamment grâce à son adaptation au cas par cas. On peut cependant remarquer que le fait que le critère dépende des caractéristiques du système risque d'entraîner un besoin d'évolution des réglages des producteurs avec les modifications du réseau.

Pour éviter ceci, le chapitre 5 vise à établir une condition garantissant la stabilité, quel que soit le producteur qui se raccorde et quel que soit le réseau auquel il se raccorde. L'objectif est de proposer un critère de stabilité à intégrer aux codes de réseau.

Dans le cas de départs raccordant un seul régulateur de puissance, le critère de stabilité explicite établi au chapitre 4 nous permet, connaissant les caractéristiques des réseaux d'un pays et des producteurs qui s'y raccordent, d'exprimer le cas le plus contraignant en matière de stabilité. Ainsi, nous déterminons des réglages garantissant la stabilité du pire producteur au pire nœud de raccordement.

Nous montrons que ce réglage permet aussi de garantir la stabilité de  $N$  producteurs répartis sur le réseau en étudiant la structure des matrices d'évolution des systèmes de  $N$  producteurs. Finalement, le réglage proposé s'avère valable dans tous les cas et peut être intégré aux codes de réseau. Ceci permet de garantir la stabilité des départs sans étude de raccordement, mais au prix d'un critère restrictif qui oblige à ralentir les filtres de mesure des producteurs.

Enfin, le chapitre 6 présente les conclusions et perspectives de ces travaux. Après un résumé des

objectifs fixés, des verrous levés et des méthodes proposées, quelques pistes qu'il serait intéressant d'explorer sont présentées, comme l'impact du ralentissement de la dynamique des régulateurs sur le fonctionnement du système.

Il est important de noter que les principales contributions de ces travaux sont méthodologiques. Les applications aux cas d'étude tout au long de ce manuscrit sont réalisées pour illustrer les méthodes proposées et servent de support aux discussions. Le tableau 1 résume les travaux présentés dans ce mémoire.

Ces travaux ont été effectués en collaboration entre CentraleSupélec et EDF R& D dans le cadre de l'Institut RISEGrid grâce aux financements de la Fondation Supélec et d'EDF R& D. Ils ont donné lieu à des présentations et des publications lors de groupes de travail et de conférences dont voici la liste.

Chapitre	Système considéré	Méthode développée	Discussions sur :
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Filtres de mesure linéaires à temps discret avec <math>T_e \sim 1s</math></li> <li>— Réglage rapide devant les régulations existantes</li> </ul>	Modélisation générique	
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Chapitre 2 +</li> <li>— Loi de commande affine par morceaux</li> <li>— Terme de perturbation constant</li> </ul>	Méthode formelle d'analyse de la stabilité générique, précise, mais complexe et lente	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Décidabilité</li> <li>— Complexité pour plusieurs producteurs</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Chapitre 3 +</li> <li>— Régulateurs de même structure et synchronisés</li> <li>— Filtres passe-bas du 1er ordre</li> <li>— Cycles simples</li> </ul>	Réglage des paramètres valables dans tous les cas, soit méthode simple, rapide et précise mais soumise à de fortes hypothèses	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Champ d'application</li> <li>— Extension à d'autres filtres</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Chapitre 4 +</li> <li>— Réglages régulateurs identiques</li> <li>— Contraintes de configuration</li> </ul>	Condition suffisante de stabilité au cas par cas, soit moins générique et moins précise, mais plus simple et rapide que la méthode formelle	<ul style="list-style-type: none"> <li>— Conservatisme de la méthode</li> <li>— Comparaison à la littérature</li> <li>— Extension à d'autres filtres</li> </ul>
6			Comparaison des trois méthodes selon leur rapidité, simplicité, généricité et précision

Tableau 1 – Synthèse du contenu des chapitres

## Liste des publications

### Conférences internationales :

1. M. Cosson, H. Gueguen, D. Dumur, C. Maniu, V. Gabrion, G. Malarange. **Voltage stability of distributed generators by means of discrete abstraction.** In *IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pp. 195–200, 21-23 September 2015, Sydney, Australia.
2. M. Cosson, H. Gueguen, D. Dumur, C. Maniu, V. Gabrion, G. Malarange. **Stability Analysis by means of Discrete Abstraction. Application to Voltage Stability of Distributed Generators.** In *IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)*, pp. 364–370, 14-16 October 2015, Atlanta, USA.
3. M. Cosson, H. Gueguen, P. Haessig, D. Dumur, C. Maniu, V. Gabrion, G. Malarange. **Stability Criterion for Voltage Stability Study of Distributed Generators.** In *Workshop on Control of Transmission and Distribution Smart Grids (CTDSG)*, 11-13 October 2016, Prague, Czech Republic. (soumis)

### Conférences nationales :

1. M. Cosson. **Modélisation des variations d’amplitude de la tension d’un réseau de distribution.** Dans *Conférence Jeunes Chercheurs en Génie Électrique (JCGE)*, 10-11 juin 2015, Cherbourg, France.
2. M. Cosson, H. Gueguen, P. Haessig, D. Dumur, C. Maniu, V. Gabrion, G. Malarange. **Critère de stabilité analytique pour les régulations locales de tension des producteurs décentralisés.** Dans *Symposium de Génie Électrique (SGE)*, 7-9 juin 2016, Grenoble, France.

### Communications orales sans acte :

1. M. Cosson. **Sur l’étude de stabilité de régulations locales de la puissance réactive en fonction de la tension.** *1ère journée scientifique de l’Institut RISEGrid*, 26 septembre 2014, Gif-sur-Yvette, France.
2. M. Cosson. **Méthode d’analyse de la stabilité des régulations locales des producteurs décentralisés. – Application aux régulations  $Q(U)$ .** Dans *2ème journée scientifique de l’Institut RISEGrid*, 25 septembre 2015, Palaiseau, France.
3. M. Cosson. **Établissement d’un critère de réglage des paramètres des régulations  $Q(U)$  des producteurs décentralisés garantissant la stabilité du système.** Dans *Journée Scientifique iCODE – GT Réseaux et Systèmes Électriques Intelligents*, 18 décembre 2015, Gif-sur-Yvette, France.

## Chapitre 1

# Problématique du réglage de tension sur les réseaux de distribution

### Sommaire

---

1.1 Réseaux électriques de distribution . . . . .	8
1.2 Réglage de tension sur les réseaux de distribution . . . . .	12
1.3 Positionnement des travaux . . . . .	20

---

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous présentons la problématique du réglage de tension sur les réseaux de distribution. Après une brève introduction sur la structure et l'organisation des réseaux de distribution en France, les mécanismes de réglage de la tension sur les réseaux de distribution sont présentés. Une attention particulière est placée sur l'impact sur ces mécanismes du raccordement massif et rapide de production décentralisée.

La nécessité de proposer de nouveaux moyens de réglage est présentée. Un bref état de l'art des mécanismes développés dans la littérature est dressé. Dans ces travaux, nous nous intéressons aux régulations locales de la puissance des producteurs en fonction de leur tension. De nombreux travaux sont encore en cours pour étudier l'allure de ces régulations, leur organisation, leur intégration aux études de planification, leurs impacts sur le fonctionnement dynamique des réseaux, etc. Nous nous positionnons dans cette dernière catégorie et plus particulièrement, sur l'analyse de la stabilité en tension des départs ayant des régulations locales de la puissance des producteurs.

L'objectif principal de ces travaux est de développer des méthodes les plus génériques, rapides, simples et précises possibles pour aider les gestionnaires de réseaux à garantir la stabilité de leurs départs.

## 1.1 Réseaux électriques de distribution

### 1.1.1 Organisation des réseaux électriques en France

Les réseaux électriques sont les infrastructures qui permettent d'acheminer l'énergie électrique des installations de production jusqu'aux installations de consommation. En France, les réseaux utilisent le courant alternatif triphasé sinusoïdal à la fréquence de 50 Hz [6]. Le réseau électrique est exploité à différents niveaux de tension et organisé en fonction de ces derniers.

En France, on appelle **réseau de transport** tous les réseaux électriques exploités à une tension supérieure à 50 kV – dit niveau de tension HTB –. Ils assurent le transport de l'énergie électrique sur de grandes distances à tension élevée afin de minimiser les pertes. Le réseau de transport raccorde principalement de grands groupes de production, les connexions avec les réseaux de transports d'autres pays, quelques clients et les réseaux de distribution.

Les **réseaux de distribution** regroupent tous les réseaux exploités à une tension inférieure ou égale à 50 kV. Leur rôle est d'assurer la distribution de l'énergie électrique au niveau local. Ils raccordent la majorité des consommateurs français.

L'organisation des réseaux de transport et de distribution est subdivisée en fonction du niveau de tension comme l'indique la figure 1.1. Dans la suite de ces travaux, nous nous intéressons aux réseaux de distribution.

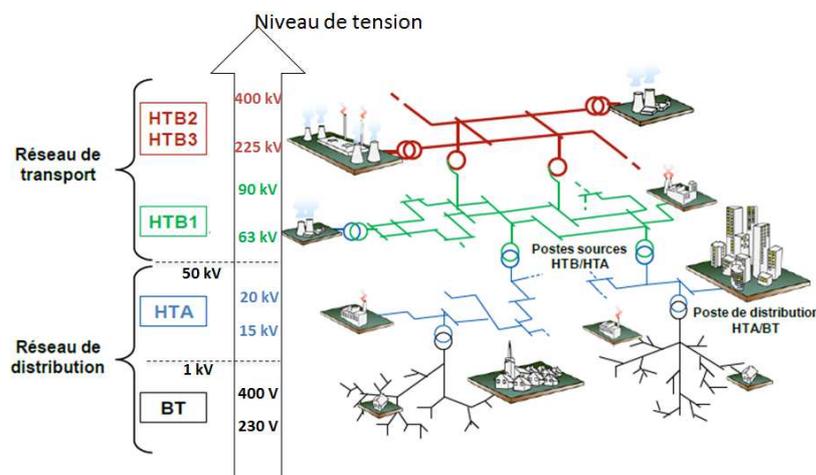


Figure 1.1 – Schéma de l'organisation des réseaux électriques en fonction de leur tension en France

### 1.1.2 Structure des réseaux de distribution

Les réseaux de distribution français sont organisés en deux parties selon le niveau de tension [7]. On distingue les réseaux **moyenne tension** – dits réseaux HTA – et les réseaux **basse tension** – dits réseaux BT (figure 1.1).

### Réseaux moyenne tension

Le réseau moyenne tension représente plus de 613 000 km de liaisons électriques qui peuvent être aériennes ou souterraines [8]. Ce réseau est exploité à 20 kV (15 kV ou moins dans quelques cas) et est généralement arborescent, bouclable, mais exploité de façon radiale sauf en cas de défaut du schéma d'alimentation principal [7]. Chaque branche est appelée un départ et mesure généralement jusqu'à une trentaine de kilomètres.

Les réseaux moyenne tension acheminent l'énergie électrique de réseau de transport aux clients HTA (plus de 100 000 clients en France) et aux réseaux basse tension. Ils sont raccordés au réseau de transport par l'intermédiaire de plus de 2 200 **postes sources**. Il s'agit de postes de transformation qui abaissent la tension généralement de 63 kV à 20 kV. Les postes sources assurent aussi des missions de réglage de la tension, de protection des réseaux, de comptage, etc.

### Réseaux basse tension

Le réseau basse tension représente près de 700 000 km de liaisons électriques qui peuvent être aériennes ou souterraines [8]. Ce réseau est exploité à 400 V en triphasé ou 230 V en monophasé et est généralement radial et non bouclé. Les départs du réseau basse tension sont plus courts que ceux du réseau moyenne tension.

Les réseaux basse tension acheminent l'énergie électrique du réseau moyenne tension jusqu'aux utilisateurs BT (plus de 35 millions en France). Ils sont raccordés aux réseaux moyenne tension par l'intermédiaire de plus de 750 000 **postes de distribution** qui abaissent la tension, généralement de 20 kV vers 400 V.

La figure 1.2 reprend les principaux concepts présentés dans cette brève introduction afin de résumer la structure et le vocabulaire des réseaux de distribution français.

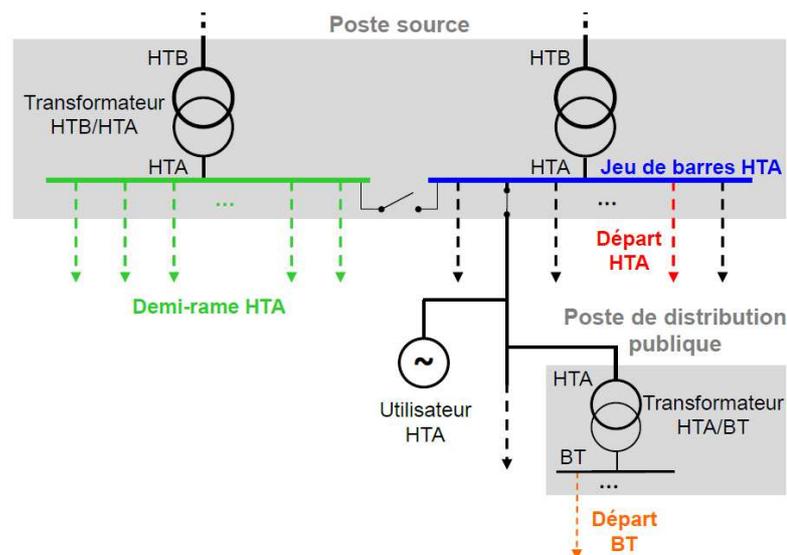


Figure 1.2 – Schéma résumant l'organisation et le vocabulaire des réseaux de distribution en France [1]

### 1.1.3 Utilisateurs

Les réseaux de distribution raccordent deux types d'utilisateurs : les installations de consommation et les installations de production voir les deux dans certains cas.

#### Consommateurs

Les réseaux de distribution alimentent la **majorité des consommateurs**. En France, les installations de consommation qui y sont raccordées sont principalement des clients résidentiels – raccordés au réseau basse tension pour la majorité – et des petites industries, PME, etc. – le plus souvent raccordées au réseau moyenne tension. Pour une installation de consommation, le niveau de tension auquel se raccorder est fixé par le législateur. Les prescriptions présentées par l'arrêté du 17 mars 2003 [9] sont résumées dans le tableau 1.1.

Consommateurs concernés	Réseau	Niveau de tension	Nombre de conso.
$P^1 > 40$ MW	Transport	Haute tension	~500
$S^2 > 250$ kVA	Distribution	Moyenne tension	~ 100 000
$S > 18$ kVA	Distribution	Basse tension triphasée	~ 35 millions
$S \leq 18$ kVA	Distribution	Basse tension monophasée	

Tableau 1.1 – Tension de raccordement de référence pour les consommateurs d'après l'arrêté du 17 mars 2003

#### Producteurs

Historiquement, les réseaux de distribution ont été conçus pour raccorder des consommateurs. Ils ne comptaient que très peu d'installations de production. Depuis les années 2000, en réponse à l'ouverture du marché de l'électricité et aux politiques environnementales, la **production décentralisée** s'est massivement et rapidement développée modifiant ainsi l'organisation – et donc le fonctionnement – des réseaux de distribution.

Définie par opposition à la production centralisée (centrales de productions de quelques centaines de MW à quelques GW), la production décentralisée désigne l'ensemble des installations de production raccordé aux réseaux de distribution que ce soit en moyenne ou en basse tension [10]. Ces producteurs, très variés en matière de puissance installée – de quelques kW à quelques MW –, sont principalement des **énergies renouvelables intermittentes**. En France, près de 350 000 installations de production sont raccordées au réseau de distribution. Les installations de type photovoltaïque représentent 99 % des installations raccordées et seulement 27 % de la puissance raccordée. Les installations de type éolien représentent près de 50 % de la puissance installée [11]. La figure 1.3 résume les parts en puissance installée des différentes installations de production raccordées aux réseaux de distribution exploités par Enedis<sup>3</sup>. Il convient de noter que

1. Puissance active de l'installation

2. Puissance apparente de l'installation

3. Depuis le 31/05/2016, ERDF a été renommé Enedis

les installations dites « dispatchables » sont les installations dont le gestionnaire peut moduler la puissance en fonction de son besoin.

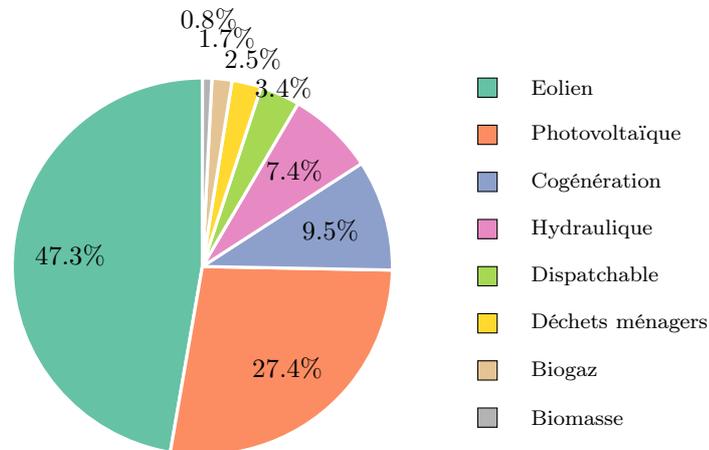


Figure 1.3 – Répartition des puissances installées sur le réseau de distribution exploité par Enedis

Pour une installation de production, le niveau de tension auquel se raccorder est imposé par le législateur. Les prescriptions présentées par l’arrêté du 23 avril 2008 [12] sont détaillées dans le tableau 1.2.

Producteurs concernés	Réseau	Niveau de tension	Puissance installée
$P > 12 \text{ MW}$	Transport	Haute tension	$\sim 104 \text{ GW}$
$S > 250 \text{ kVA}$	Distribution	Moyenne tension	$\sim 20 \text{ GW}$
$S > 18 \text{ kVA}$	Distribution	Basse tension triphasée	
$S \leq 18 \text{ kVA}$	Distribution	Basse tension monophasée	

Tableau 1.2 – Tension de raccordement de référence pour les producteurs d’après l’arrêté du 23 avril 2008

### 1.1.4 Supervision

Le transport et la distribution d’énergie électrique sont des activités encadrées par la Commission de Régulation d’Énergie (CRE). Leur supervision est considérée comme une mission de service public. Elle demande un **pilotage continu des réseaux** qui est assuré par les gestionnaires de réseaux de transport et de distribution.

En France, RTE est le seul **gestionnaire de réseau de transport**, mais il y a plusieurs **gestionnaires de réseaux de distribution** (GRD). Le principal GRD, Enedis, assure la supervision de 95 % du réseau de distribution français. Les 5 % restant sont gérés par 160 entreprises locales de distribution, par exemple Gérédis dans les Deux-Sèvres.

L’une des principales missions des GRD est d’assurer **la continuité, la sûreté et la qualité de fourniture** de ses clients. Pour y parvenir, le GRD exploite, entretient et développe le réseau de distribution. Le maintien de la qualité de la desserte en énergie électrique est au cœur de

chacune des activités du GRD de la planification à la maintenance en passant par la conduite des réseaux. Ceci passe notamment par le réglage de la tension sur les réseaux de distribution.

## 1.2 Réglage de tension sur les réseaux de distribution

### 1.2.1 Définition et objectifs du réglage

La qualité de fourniture implique, en particulier la garantie de la qualité de l'onde de tension au point de raccordement de chaque client. Théoriquement, l'onde de tension devrait être une sinusoïde de fréquence constante (50 Hz en France) et d'amplitude constante (fixée par le niveau de tension du point de raccordement). En pratique, le contenu spectral et l'amplitude de la tension varient dans le temps. Le gestionnaire s'engage à maintenir ces variations dans les bornes fixées par le législateur afin d'éviter de perturber le fonctionnement des appareils connectés au réseau [6].

Dans ces travaux, nous nous intéressons aux perturbations du type contraintes de tension haute – dites **surtensions** – et **contraintes de tension basse**. Un nœud est dit en surtension (respectivement en contrainte de tension basse) si sa tension est supérieure (respectivement inférieure) à la borne de tension haute (respectivement basse) de la plage de tension admissible.

Sur le réseau moyenne tension, la plage de tension admissible est définie légalement et contractuellement (norme C13-200 pour la HTA et C15-100 pour la BT [13]). Le gestionnaire de réseau de distribution (GRD) s'engage à maintenir la moyenne sur dix minutes de l'amplitude de la tension dans une plage de plus ou moins 5 % autour de l'amplitude de la tension de consigne ( $U_c$ ). La tension de consigne est fixée contractuellement au raccordement de l'utilisateur et doit se trouver dans une plage de plus ou moins 5 % de l'amplitude de la tension nominale du réseau ( $U_n$ ) – généralement 20 kV en France.

Sur les réseaux basse tension, le gestionnaire s'engage à maintenir la moyenne sur dix minutes de l'amplitude de la tension au point de raccordement d'un utilisateur dans une plage de plus ou moins 10 % autour de la tension nominale du réseau – par exemple 400 V pour un raccordement triphasé en France.

Le tableau 1.3 résume les définitions des contraintes de tensions basse et haute en fonction du niveau de tension du point de raccordement d'un utilisateur.

	Moyenne tension	Basse tension
Contrainte de tension basse	$\langle U \rangle_{10min} < U_c - 5\%$ <sup>4</sup>	$\langle U \rangle_{10min} < U_n - 10\%$
Surtension	$\langle U \rangle_{10min} > U_c + 5\%$	$\langle U \rangle_{10min} > U_n + 10\%$

Tableau 1.3 – Définition des notions de contraintes de tension haute et basse sur le réseau de distribution français

Les plages admissibles de tension ont été définies afin de garantir la qualité et la sûreté de fourniture. En effet, une tension trop élevée risque d'entraîner le vieillissement ou la destruction des

4. Avec  $U_c \in [U_n - 5\%, U_n + 5\%]$

matériels raccordés au réseau. Des tensions trop basses peuvent perturber le bon fonctionnement des matériels des utilisateurs, mais aussi du réseau – comme les plans de protection, etc. –, l’augmentation des pertes et la diminution de la puissance maximale transmissible dans les lignes ce qui risque d’entraîner une surcharge du réseau [14]. Il est donc important d’éviter les contraintes de tensions haute et basse. En pratique, si la tension sort des plages admissibles de fonctionnement, les plans de protection des réseaux prennent en charge l’élimination du risque en allant jusqu’à, si besoin, interrompre l’alimentation de certains utilisateurs. Le lecteur intéressé pourra trouver des détails sur les **plans de protection** des réseaux de distribution français dans [15] et [16].

Afin d’éviter les interruptions et donc d’assurer la continuité de l’alimentation des utilisateurs, le gestionnaire contrôle le niveau de tension de ses réseaux en agissant de la **planification** jusqu’à la **conduite** des réseaux. Ces différentes actions sont regroupées sous le nom de réglage de tension.

### 1.2.2 Structure historique du réglage de tension

Les structures des réseaux de transport et de distribution étant historiquement différentes, l’organisation du **réglage de tension** l’est aussi. On ne détaillera ici que le réglage de tension sur les réseaux de distribution. Le lecteur intéressé trouvera des détails sur le fonctionnement du réglage de tension sur les réseaux de transport dans [14].

Les différents moyens permettant le réglage de la tension ont été conçus avant l’insertion massive de production décentralisée. Dans un premier temps, nous allons détailler le fonctionnement du réglage de tension dans le contexte historique (sans production décentralisée). Nous discuterons ensuite de l’impact des producteurs sur ce réglage.

Comme dit précédemment, le but de ce réglage est de maintenir la tension dans les bornes admissibles (tableau 1.3). Aujourd’hui, les GRD disposent de moyens de réglage en conduite (réglages dynamiques) et en planification (réglage statique) pour régler la tension. Ils sont tous construits sur les mêmes principes physiques. La tension sur le réseau dépend entre autres :

- de la tension en quelques nœuds stratégiques du réseau ;
- des flux de puissance réactive ;
- des flux de puissance active.

Le lecteur intéressé trouvera plus de détails sur le lien entre les flux de puissance réactive ou active et le plan de tension dans [17].

#### Les réglages dynamiques

Il en existe principalement deux sur les réseaux de distribution français.

- Les régleurs en charges :

Situés dans les postes sources, les régleurs en charge ont pour but de **maintenir constante la tension en aval du poste source** – dite tension au jeu de barres et notée  $U_{jdb}$  (figure 1.2) en agissant sur le plan de tension [18]. Ceci permet de découpler les plans de tension des réseaux amont (réseau de transport) et aval (réseau de distribution).

Pour y parvenir, les régleurs en charge sont des automates qui adaptent de façon discrète le rapport de transformation du transformateur du poste source lorsque la tension en aval ( $U_{jdb}$ ) s'écarte de la consigne ( $U_{jdb}^{(ref)}$ ). En pratique, la tension en aval est mesurée et comparée à la valeur de consigne choisie en planification par le GRD. Si la mesure s'écarte de plus de 1 % de la consigne, et ce pendant une minute, l'automate « passe une prise » c'est-à-dire qu'il augmente (ou diminue) le nombre de spires au primaire du transformateur afin de diminuer (ou d'augmenter) le rapport de transformation et donc la tension au jeu de barres  $U_{jdb}$ .

Il convient de noter qu'après le passage de prise, si la tension ne revient pas à moins de 1 % de la consigne en dix secondes, une deuxième prise est passée. Ceci continue jusqu'à ce que la tension au jeu de barres revienne dans la plage admissible ou que le régleur en charge arrive en butée.

— Les bancs de condensateurs :

Situés en sortie des postes sources – soit en tête de départ, les bancs de condensateurs ont pour rôle de **compenser la puissance réactive absorbée par les départs** du réseau de distribution raccordés au poste source. Ainsi, ils agissent sur la tension des départs en modifiant le flux de puissance réactive même si ce n'est pas leur but premier. En effet, les condensateurs fournissent de la puissance réactive ce qui a pour effet de faire augmenter la tension.

Les bancs de condensateurs sont des automates qui mesurent le flux de puissance réactive et raccordent au réseau un ou plusieurs gradins de condensateurs si les départs consomment trop de puissance réactive [19].

### Les réglages statiques

Nous regroupons dans les réglages statiques les principaux paramètres que les GRD peuvent fixer lors des **études de raccordement** d'un nouveau consommateur et qui ont un impact direct sur le plan de tension. En effet, le GRD réalise une étude – dite étude de raccordement – lorsque l'arrivée d'un nouvel utilisateur modifie le fonctionnement du réseau. Un aperçu du principe de ces études est proposé ci-dessous. Pour une description plus détaillée des études de raccordement, le lecteur pourra se référer à [1].

Le but de cette étude de planification est de prévoir d'éventuelles contraintes de courant et de tension basse<sup>5</sup>. Pour y parvenir, les GRD simulent le fonctionnement statique du réseau dans le cas le plus contraignant – pour une consommation maximale – grâce à des calculs de répartition des charges.

Si l'étude ne met pas de contrainte en évidence, le nouvel utilisateur peut être raccordé en l'état. Sinon, le GRD a plusieurs moyens d'action pour éviter la contrainte.

— Dans un premier temps, il peut **ajuster la tension de consigne des régleurs en charge** ( $U_{jdb}^{(ref)}$ ) afin de lutter contre les contraintes de tension basse. Dans le cas d'un départ ne raccordant que de la consommation, la tension diminue le long du départ. En pratique, afin d'éviter les contraintes de tension basse, la consigne  $U_{jdb}^{(ref)}$  est réglée au

---

5. On rappelle que l'on décrit le principe des mécanismes de réglage de la tension dans le cas historique soit sans production. Dans ce cas, la tension décroît le long du départ. Il n'y a donc pas de risque de surtension.

maximum admissible sur le réseau<sup>6</sup>.

- Le GRD peut aussi choisir de modifier le **rapport de transformation fixe d'un poste de distribution** pour lutter contre les contraintes de tension basse sur un départ basse tension. Il convient de noter que les postes de distribution ont généralement trois prises fixes. Le changement de prise se fait uniquement hors tension.
- Finalement, si les leviers précédents ne suffisent pas à éviter les contraintes, le GRD peut choisir de **renforcer un ouvrage en contrainte ou de créer un nouvel ouvrage**. En pratique il s'agit par exemple de remplacer les lignes ou les câbles d'une liaison ou encore de créer une nouvelle liaison pour éviter des cas de contrainte de courant. Ce levier est généralement choisi en dernier recours à cause de son coût et de la durée des travaux potentiels.

L'organisation du réglage de tension a été établie avant l'arrivée massive de production décentralisée. Nous allons maintenant étudier l'impact de cette production sur le fonctionnement du réglage de tension et les adaptations de ce réglage qui ont été effectuées par les GRD.

### 1.2.3 Réglage de tension en présence de producteurs décentralisés

L'insertion massive de production sur les réseaux de distribution a profondément **modifié les flux de puissance** transités par ces derniers. Conçus pour des flux descendants – du poste source vers les consommateurs, les liaisons des réseaux de distribution transportent maintenant des flux bidirectionnels – des producteurs décentralisés vers les consommateurs – voire ascendants – lorsque la production d'un départ dépasse sa consommation.

Cette modification impacte le fonctionnement du réseau de distribution à plusieurs niveaux, des plans de protection aux plans de tension en passant par l'observabilité. Dans ces travaux, nous nous intéressons aux **impacts sur les plans de tension**. Le lecteur intéressé pourra trouver des informations détaillées sur les impacts de la production décentralisée dans [20]–[27].

Comme dit précédemment, sur un départ raccordant uniquement des consommateurs, la tension décroît lorsque l'on s'éloigne du poste source en fonction des puissances consommées et des caractéristiques des liaisons électriques (figure 1.4a).

Dans le cas d'un départ raccordant de la production, la tension risque d'augmenter localement. Des surtensions peuvent donc apparaître et être invisibles depuis la mesure de la tension au poste source (figure 1.4b). Ainsi, les régleurs en charge ne suffisent donc pas à éviter les contraintes de tension en présence de production décentralisée. De même, les bancs de condensateurs ne sont pas suffisants.

Jusqu'à présent, le risque de surtension causé par les producteurs décentralisés est maîtrisé à l'aide des réglages statiques de tension présentés partie 1.2.2. En plus des moyens déjà présentés, l'arrêté du 23 avril 2008 (article 10) prévoit que le GRD puisse imposer aux producteurs qui se raccordent au réseau moyenne tension de fournir ou d'absorber une puissance réactive égale

---

6. La valeur maximale admissible est  $U_n + 5\%$  (tableau 1.3) et la consigne choisie est généralement  $U_n + 4\%$  (20,8 kV dans le cas d'un réseau exploité à 20 kV) car les régleurs en charge maintiennent la tension à plus ou moins 1 % de la consigne.

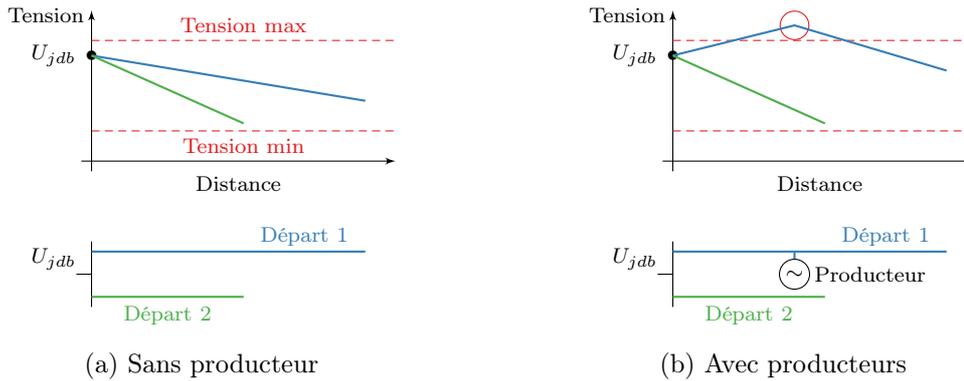


Figure 1.4 – Illustration de l'impact de l'insertion de production décentralisée sur le plan de tension d'un départ moyenne tension

à une fraction de la puissance active – appelée «  $\tan(\varphi)$  » – qu'ils injectent au réseau. Pour ce faire, le GRD fixe le  $\tan(\varphi)$  des producteurs entre -0,35 (en cas de risque de surtension) et 0,4 (en cas de risque de contrainte de tension basse).

Si le réglage du  $\tan(\varphi)$  du producteur qui se raccorde ne suffit pas à résoudre les contraintes de tension, le GRD a alors recours aux moyens statiques cités précédemment. Il peut diminuer la consigne de tension des régleurs en charge ( $U_{jdb}^{(ref)}$ ) à condition que ceci n'entraîne pas de risque de contrainte de tension basse sur un départ adjacent. Si ceci ne suffit pas, le GRD peut choisir d'intervenir sur le réseau afin de modifier une prise fixe d'un poste de distribution, de renforcer un ouvrage ou d'en créer un nouveau.

Ainsi, aujourd'hui, les GRD utilisent des réglages statiques de la tension pour limiter les contraintes de tension causées par les producteurs décentralisés. Cependant, ces réglages atteignent vite leurs limites et le renforcement des réseaux devient alors nécessaire [28]. De plus, il s'agit de réglages statiques qui ne tenaient déjà pas compte des variations de la consommation et qui ne tiennent pas non plus compte du caractère intermittent de nombreux producteurs décentralisés et donc des contraintes [29].

Finalement, il est nécessaire de repenser le réglage de tension pour permettre aux réseaux de distribution d'accueillir une importante production décentralisée au meilleur coût pour la société. Plusieurs idées de nouveaux mécanismes de réglage de la tension ont été envisagés dans la littérature. Avant d'en présenter quelques-uns (partie 1.2.4), nous proposons de résumer les leviers existants ainsi que leurs principales caractéristiques dans le tableau 1.4<sup>7</sup>.

7. Il convient de noter que, depuis le 1 février 2016, un nouveau mécanisme de réglage dynamique de la tension en agissant sur le flux de puissance réactive au niveau des producteurs est proposé en France par Enedis. Celui-ci sera présenté dans la partie 1.2.4

Levier	Réglage dynamique ?	Action sur	Départs indépendants	Emplacement	Réseaux concernés	Objectifs
Régulateurs en charge	✓	$U$		Poste source	HTA et BT	Découpler $U_{jdb}$ des variations de la tension sur le réseau de transport
Bancs de condensateurs	✓	$Q$		Tête de départs	HTA et BT	Compenser la puissance réactive consommée par les départs de distribution $Q_{conso}$
$\tan(\varphi)$	✓	$Q$	✓	Producteurs HTA	HTA et BT	Maintenir la tension des producteurs autour de la consigne
Consigne des régulateurs en charge $U_{jdb}^{(ref)}$		$U$		Poste source	HTA et BT	Adapter $U_{jdb}^{(ref)}$ à la connaissance a priori du réseau
Rapport de transformation des postes de distribution		$U$		Poste de distribution	BT	Adapter le rapport entre $U_{HTA}$ et $U_{BT}$ à la connaissance a priori du réseau
Renforcement		$R$ et $X$ <sup>8</sup>	✓	Au choix	HTA et BT	Modifier les caractéristiques du réseau pour lever les risques de contraintes

Tableau 1.4 – Moyens existants sur les réseaux de distribution français pour régler la tension

---

8. Agit sur les caractéristiques des réseaux.

### 1.2.4 Panorama des mécanismes à l'étude pour le réglage de la tension

De nombreux leviers sont à l'étude dans la littérature afin de permettre une augmentation des capacités d'accueil des départs moyenne et basse tension tout en évitant ou reportant les travaux de renforcement des réseaux. Un panorama très riche des différents leviers comparant leur principe, leur état d'avancement, les verrous à lever, etc. a été récemment proposé par [1]. Dans ce mémoire, nous ne présentons qu'un bref tour d'horizon des nouveaux mécanismes de réglage de la tension en les classant en fonction de leur principe physique.

— Les mécanismes agissant sur les flux de puissance réactive :

Ce type de leviers propose une **adaptation en temps réel de la puissance réactive** – contrairement au réglage statique qui reste le même, quel que soit l'état du réseau. En cas de surtension sur le réseau, une absorption de puissance réactive va être demandée aux acteurs participant à ce réglage. La commande peut être locale ou centralisée. Ce type de réglages peut être effectué par les producteurs raccordés en moyenne et basse tension, par des dispositifs de compensation de puissance réactive – comme les bancs de condensateurs situés en tête de départ –, par des charges, etc.

Agir sur les flux de puissance réactive permet de participer au réglage de tension sans restreindre la puissance active injectée sur le réseau, ce qui est particulièrement intéressant pour les installations de production<sup>9</sup>. Cependant, l'augmentation des flux de puissance réactive entraîne l'augmentation des courants dans les branches et donc des pertes. L'action de ce type de leviers est donc limitée.

Les mécanismes de contrôle dynamique de la puissance réactive absorbée/fournie par les producteurs ont donné lieu à de nombreuses études. Parmi les nouveaux mécanismes de réglage de la tension en agissant sur les flux de puissance réactive, les **régulations locales de puissance réactive des producteurs** sont les plus avancées. Différents types de régulations ont été expérimentées en réseau [30]–[34] et certains sont déjà intégrés aux codes de réseaux [35]–[38].

— Les mécanismes agissant sur les flux de puissance active :

Ce type de mécanismes n'existe pas parmi les mécanismes historiques de réglage de la tension présentés précédemment (partie 1.2.2). L'apparition de ces mécanismes est motivée par l'augmentation de la production décentralisée et par son caractère intermittent. En effet, aujourd'hui, la capacité d'accueil des départs du réseau de distribution est calculée de façon déterministe en prenant le scénario le plus contraignant sans tenir compte de la probabilité de réalisation d'un tel scénario.

Le principe des mécanismes de réglage de la tension agissant sur les flux de puissance active est de modifier en temps réel la production en fonction d'un **calcul instantané de la capacité d'accueil** du départ. Ce type de réglages peut être effectué directement au niveau des producteurs en effaçant de l'énergie disponible, à l'aide d'un système de stockage, en contrôlant dynamiquement la charge, etc. Les consignes peuvent être déterminées localement ou de façon centralisée.

---

9. La possibilité de fournir ou d'absorber de la puissance réactive quelle que soit la puissance active n'est possible que si la chaîne de conversion de puissance du producteur a été surdimensionnée.

Agir sur les flux de puissance active permet de résoudre efficacement les contraintes de tension, mais l'un des verrous au développement de ce type de mécanismes est économique. En effet, dans le cas de producteurs de type énergie renouvelable sans système de stockage, l'effacement revient à une perte de productible et donc à une perte financière. Le **réglage de la puissance active au niveau des producteurs** est très efficace pour résoudre des contraintes de tension et a donc été largement étudié dans la littérature [39]–[43]. À cause de son coût, il est souvent envisagé en dernier recours par exemple lorsque les régulations de puissance réactive des producteurs ne suffisent pas [44]–[48] ou en solution temporaire pour les producteurs dans l'attente de travaux de raccordement [33], [49]–[51].

— Quelques autres exemples de mécanismes :

Des leviers agissant sur le plan de tension sont aussi envisagés pour commander la tension en un point particulier du réseau. C'est par exemple le cas des régleurs en charge situés aux postes sources. Les mécanismes envisagés dans la littérature proposent notamment de commander dynamiquement la tension en différents points du réseau par exemple en équipant certains postes de distribution de régleurs en charge [52]–[55], ou encore de commander dynamiquement les consignes de tension de ces mécanismes par exemple en ajustant la consigne de tension au jeu de barres en fonction de l'état du réseau [17], [56]–[58].

D'autres travaux proposent d'agir dynamiquement sur les caractéristiques des départs électriques. Il s'agit de modifier temporairement le schéma de raccordement d'un ou plusieurs départs grâce aux organes de manœuvre télécommandés [59]. Ceci permet d'agir sur les flux de puissance par exemple en raccordant quelques heures un producteur d'un départ contraint à un départ qui l'est moins [60]–[64].

### 1.2.5 Conclusion

Nous avons cité quelques exemples de mécanismes dynamiques de réglage envisagés sur les réseaux de distribution afin d'y améliorer le réglage de la tension. On retiendra de ce bref état de l'art que les leviers les plus proches de la mise en œuvre sur les réseaux sont les **réglages locaux de puissance au niveau des producteurs**. Ceci s'explique notamment par les faibles investissements nécessaires à la mise en œuvre d'un tel réglage.

Par exemple, les régulations locales de puissance réactive des producteurs sont déjà en place dans certains réseaux. C'est le cas en France puisque ce type de mécanismes de réglage a été intégré à la documentation technique de référence d'Enedis depuis février 2016 [38] après une dizaine d'années d'études [65], [66], [67], [68], [38] et d'expérimentations [30], [34], [33].

Pour conclure, dans ces travaux, nous nous intéresserons plus particulièrement aux régulations locales de puissances active et réactive des producteurs et à leurs impacts sur le fonctionnement des réseaux. Afin de positionner les travaux présentés ici par rapport à la littérature, nous allons détailler l'état de l'art concernant ce type de régulations.

## 1.3 Positionnement des travaux

### 1.3.1 Pistes de recherche

Faire participer dynamiquement les producteurs décentralisés au réglage de tension permettrait d'augmenter la capacité d'accueil des réseaux de distribution tout en répartissant l'effort de réglage. Cette solution, déjà en place sur le réseau de transport, est à l'étude pour les réseaux de distribution depuis une dizaine d'années [69].

De nombreuses questions ouvertes se sont posées – et se posent encore – sur l'intérêt de faire participer les producteurs décentralisés au réglage de tension, les moyens possibles, les coûts pour les différents acteurs, les impacts sur la dynamique du système, etc. Nous allons présenter quelques éléments de réponse proposés dans la littérature. Pour cela, nous avons classé les interrogations en trois catégories :

- les réflexions sur les mécanismes de réglage ;
- les réflexions sur leur intégration au réseau ;
- les réflexions sur leurs impacts sur le fonctionnement dynamique du réseau.

#### Mécanismes de réglage

Le principal avantage des régulations dynamiques de puissance réactive, par rapport aux réglages statiques, est d'éviter la consommation ou l'injection de puissance réactive – et donc les pertes – quand le réseau n'en a pas besoin. Dans la littérature, ce type de régulations a été envisagé pour les producteurs raccordés en moyenne et basse tension [48], [70]–[72]. Plusieurs stratégies de commande de la puissance réactive ont été proposées.

Certains travaux proposent d'adapter la puissance réactive absorbée à la puissance active instantanée injectée en suivant une loi de commande affine afin de **compenser l'élévation de tension provoquée par le producteur** à ses bornes [73]–[74]. D'autres travaux ont développé un **réglage dynamique du facteur de puissance** ( $\cos(\varphi)$ ) en fonction de la puissance active injectée ou de la tension [5], [37], [75]. Ce type de régulations permet d'adapter la participation au réglage de tension des producteurs à leur production instantanée et donc a priori à leur contribution aux contraintes de tension.

D'autres régulations proposent de commander la consigne de puissance réactive en fonction de la mesure de la tension et de la puissance installée au lieu de la puissance instantanée. On appelle ce type de régulations les **régulations  $Q(U)$** . Il existe plusieurs variantes dont les différences principales sont l'allure de la loi de commande et le filtre choisi pour la mesure de la tension. La figure 1.5 présente quelques allures de lois de commandes issues de la littérature [43], [66], [67], [75], [76], [77]. On peut remarquer que le principe de ces lois repose sur une puissance réactive limitée, voire nulle en régime de fonctionnement normal, une absorption maximale de puissance réactive lorsque la tension devient trop importante et une injection maximale lorsque la tension devient trop faible.

De plus, la majorité des régulations présentées dans la littérature ne sont pas linéaires, mais

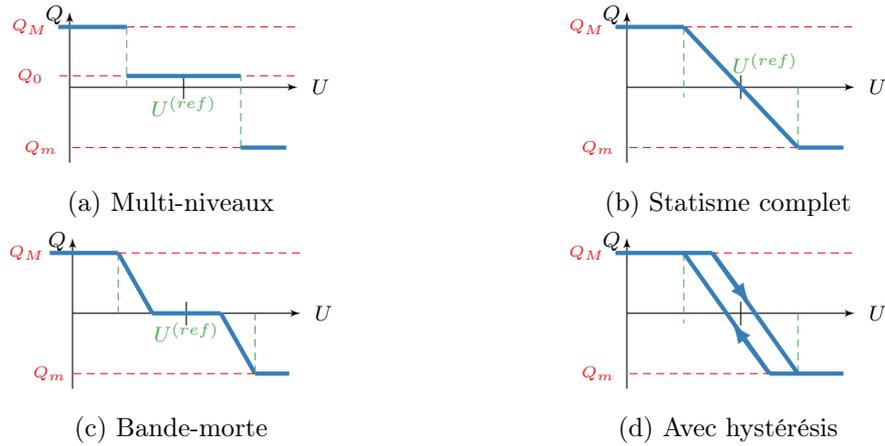


Figure 1.5 – Quelques exemples de lois de commande de la puissance réactive en fonction de la tension issus de la littérature

plutôt **affines par morceaux**. Ces lois de commande sont généralement précédées d’un **filtre de mesure** dont l’objectif est de lisser les variations rapides de l’amplitude de la tension – de dynamique inférieure à quelques centaines de millisecondes – et de suivre la tendance des variations de puissance active des producteurs – de l’ordre de la seconde. Pour les régulations  $Q(U)$ , les filtres les plus répandus dans la littérature sont les filtres passe-bas du premier ordre [32], [78]–[80]. On peut aussi citer [31] et [38] qui proposent l’utilisation de filtres du type moyenne glissante. Les filtres de mesures proposés ont généralement un temps de réponse de l’ordre de quelques secondes.

En France, différentes lois de commande de puissance réactive en fonction de la tension ont été étudiées et expérimentées en réseau [30], [34]. Ces études ont mené Enedis à choisir de proposer aux producteurs raccordés au réseau moyenne tension de s’équiper d’une régulation  $Q(U)$  avec bande morte (figure 1.5) et un filtre de mesure du type moyenne glissante [38].

Aujourd’hui, de nombreuses questions se posent encore comme l’intérêt et la mise en place d’un réglage centralisé de la puissance réactive. On peut aussi citer les études menées pour évaluer l’intérêt d’une structure centralisée pour ces régulations, la répartition du réglage entre les producteurs, la coordination avec d’autres régulations de tension, etc. [46], [48], [81]–[83].

**Intégration au réseau**

Un deuxième pan majeur des travaux sur les nouveaux mécanismes de réglage de la tension porte sur leur intégration au réseau. En effet, en présence d’une forte production décentralisée, les méthodes traditionnelles de planification des réseaux aboutissent généralement à des travaux d’adaptation du réseau potentiellement coûteux et longs à mettre en œuvre. Ce recours fréquent au renforcement de réseau provient en grande partie de l’**approche déterministe** utilisée pour dimensionner le réseau qui ne prend pas en compte le caractère intermittent d’une grande partie de la production décentralisée. L’approche déterministe consiste à systématiquement adapter le réseau pour résoudre 100 % des contraintes détectées sur des cas pessimistes de consommation

et de production, sans tenir compte de la probabilité d'apparition des contraintes.

L'intégration de nouveaux leviers dynamiques comme les régulations locales  $Q(U)$  implique de **réviser les méthodes de planification** pour pouvoir choisir les mécanismes et leurs réglages permettant de réduire les coûts d'intégration des producteurs décentralisés tout en maintenant un niveau de risque acceptable en exploitation. Plusieurs approches de planification ont été proposées récemment pour être capable d'étudier rapidement un grand nombre de scénarios afin d'évaluer le plus précisément possible les **impacts technico-économiques** de ces leviers à moyen/long terme [1], [68], [84], [85]. Les études économiques sont particulièrement complexes à mener puisqu'elles demandent de prendre en compte les coûts pour un grand nombre d'acteurs – des pertes sur les réseaux au coût des onduleurs des producteurs – sur un grand nombre de scénarios pour pouvoir généraliser les conclusions.

Parmi les problématiques liées à l'intégration des mécanismes centralisés de réglage de la tension aux réseaux de distribution, on peut aussi citer l'**estimation de l'état du réseau** à partir d'un nombre minimum de mesures. Elle reste aujourd'hui l'un des principaux verrous à lever pour permettre le développement de régulations centralisées au meilleur coût pour la société [86]–[91]. L'objectif est de permettre aux acteurs centraux de prendre en temps réel les meilleures décisions avec des structures de communication des mesures et des consignes les plus fiables et les moins chères possible.

### Impact sur le fonctionnement dynamique des réseaux

Malgré toutes les questions encore d'actualité, certaines régulations sont déjà en place sur les réseaux ou en passe de l'être. Ceci soulève une autre série d'interrogations portant sur l'impact de ces leviers sur l'exploitation des réseaux.

Le bon fonctionnement des plans de protection des réseaux de distribution en présence de mécanismes de réglage dynamique de la tension est aussi un sujet au cœur des interrogations sur l'impact des régulations des producteurs décentralisés. En particulier la **détection des situations d'ilotage non intentionnel** dans le cas de réseaux de distribution accueillant des régulations locales de puissance des producteurs est aujourd'hui à l'étude dans la littérature [92]–[96].

On peut aussi s'interroger sur l'impact sur le fonctionnement des matériels en place sur les réseaux en régime normal de fonctionnement. Le **vieillessement** des onduleurs des producteurs participant aux réglages  $Q(U)$  est étudié, mais aussi celui des régleurs en charge et des bancs de condensateurs [97]–[102]. Par exemple, les résultats de l'expérimentation sur un départ présentés par [30] ont relevé que la loi de commande  $Q(U)$  avec statisme complet testée (figure 1.5b) avait sollicité plus fréquemment les régleurs en charge et les bancs de condensateurs que la loi de commande avec bande morte testée (figure 1.5c).

Les risques d'interactions avec les réglages existants ne sont pas les seuls étudiés. En effet, des travaux récents s'intéressent aux risques d'interactions entre plusieurs régulations locales provoquant des oscillations entretenues de la tension. Les régulations locales fonctionnent en

boucle fermée – le producteur mesure sa tension pour adapter sa consigne de puissance, ce qui impacte sa tension – ainsi, ces dernières représentent un **risque pour la stabilité des départs**. Dans la littérature, à notre connaissance, peu de travaux traitent des problématiques de stabilité des régulations  $Q(U)$ . En effet, ce type d'études pose des défis lorsque les systèmes étudiés ne sont pas linéaires. Comme nous l'avons remarqué figure 1.5, les lois de commande  $Q(U)$  ne sont généralement pas linéaires, mais plutôt affines par morceaux. Afin de tester la stabilité de réseaux accueillant un ou plusieurs producteurs équipés de régulations  $Q(U)$ , des **études empiriques** en simulation et en expérimentation ont été menées sur des cas particuliers.

Les différents départs étudiés par [34] ou [32] restent stables malgré la présence de régulations locales  $Q(U)$ . Cependant, d'autres travaux tirent des conclusions contraires. Par exemple, [102] identifie des cas d'instabilité de la tension en simulant le fonctionnement d'un producteur équipé d'une régulation  $Q(U)$ . Il semble donc compliqué de généraliser les résultats obtenus en étudiant des réseaux particuliers. On peut aussi citer [80] qui étudie le lien entre la stabilité et la constante de temps du filtre de mesure dans le cas d'un départ accueillant trois producteurs équipés de régulations  $Q(U)$  avec bande-morte (figure 1.5c). Cette étude permet sur un cas donné d'identifier des paramètres des régulations visant à garantir la stabilité du système. Même s'il semble difficile d'extrapoler les valeurs numériques proposées à partir de l'étude d'un exemple à d'autres réseaux, ces travaux permettent d'illustrer le **lien entre les paramètres des régulations  $Q(U)$  et la stabilité**.

Sans formalisation de l'analyse de stabilité des régulations  $Q(U)$ , il semble compliqué de pouvoir généraliser ces résultats. Récemment, [79] propose une étude analytique de la stabilité d'une régulation  $Q(U)$  avec bande-morte (figure 1.5c) dans chacune des zones linéaires de cette loi de commande  $Q(U)$ . Le lien entre la stabilité des zones de fonctionnement linéaire et celle du système global n'est pas abordé.

Dans ces travaux, nous proposons de **formaliser l'étude de la stabilité** d'un réseau de distribution accueillant des producteurs décentralisés équipés de régulations locales de leur puissance en fonction de leur tension afin de pouvoir **tirer des conclusions les plus générales possible en matière de réseaux et de régulations étudiés** comme illustré figure 1.6.

### 1.3.2 Principales contributions des travaux

Dans nos travaux, le système étudié est un réseau de distribution accueillant un ou plusieurs producteurs équipés de régulations locales de puissance active ou réactive en fonction de leur tension. L'objectif est de développer une méthodologie d'étude de la stabilité de ce type de systèmes qui s'adapte aux besoins des gestionnaires de réseaux de distribution (GRD). Comme illustré figure 1.6, l'idéal est de développer **une méthode valable quels que soient le réseau et les régulations des producteurs, mais aussi dont la mise en œuvre répond aux contraintes des gestionnaires**.

Dans un premier temps (chapitre 2), la modélisation du système est proposée en vue de l'étude d'instabilités de tension provoquées par les régulations locales de producteurs. Ce type de phé-

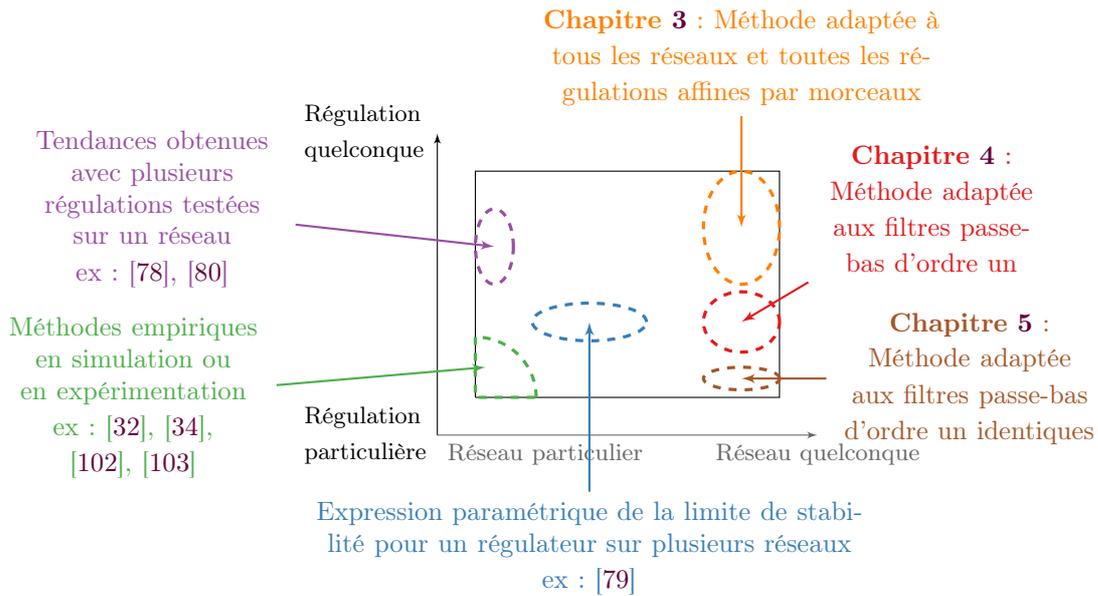


Figure 1.6 – Schéma du positionnement relatif de quelques études de stabilité des régulations locales issues de la littérature

nomènes a une **dynamique de l'ordre de quelques secondes**. Une **modélisation des producteurs décentralisés, de leurs régulations et des différents éléments du réseau adaptée** à cette échelle de temps y est décrite. Celle-ci a pour objectif de poser formellement le modèle du système en explicitant clairement les hypothèses faites et le domaine d'application de ce type de modèles.

Une fois le modèle clairement défini, nous pouvons caractériser le système sous la forme d'un système hybride affine par morceaux. **Trois méthodes d'étude de la stabilité** de ce type de systèmes sont alors proposées en fonction des objectifs de l'étude.

La première méthode présentée (chapitre 3) a pour objectif d'**étudier formellement la stabilité d'un départ quelconque raccordant des régulations les plus générales possible** en matière d'allure de la loi de commande et de structure du filtre de mesure. La méthode proposée est construite sur l'abstraction discrète du système physique qui est ensuite affinée pour s'approcher d'une abstraction discrète dont la stabilité est équivalente à celle du système physique. Ce calcul itératif est construit sur la base des calculs de bisimulation à laquelle on ajoute une phase d'analyse de la stabilité à chaque itération. Ceci permet de conclure rapidement sur la stabilité du système et même de conclure dans certains cas pour lesquels les calculs classiques de bisimulation ne convergent pas.

La méthode d'étude de stabilité développée au chapitre 3 est valable pour tout système hybride affine par morceaux et en particulier pour l'étude de la stabilité des départs accueillant des producteurs équipés d'une régulation locale de puissance. Elle offre des **résultats riches et génériques** (figure 1.6), mais demande un **effort de calcul important et qui augmente avec le nombre de producteurs étudiés**. Ce type de méthodes semble donc intéressant pour l'étude de cas sensibles c'est-à-dire des cas pour lesquels le GRD a besoin de choisir un réglage

précis des paramètres des régulations.

Ce compromis ne répond pas toujours aux besoins du GRD. C'est pourquoi le chapitre 4 a pour objectif de développer une **méthode adaptée à l'étude d'un grand nombre de producteurs en un temps raisonnable**. Afin de simplifier l'analyse de la stabilité, le **cas étudié est particularisé en termes d'allure de la régulation et de structure du filtre de mesure**. Si l'on se réfère à la figure 1.6, ceci revient à se déplacer sur l'axe des ordonnées. Il convient de noter que si l'application demande de particulariser les régulations étudiées, la méthode reste néanmoins générale.

Dans le chapitre 4, une **condition suffisante de stabilité** est formulée grâce à une **étude d'atteignabilité arrière puis avant** des différents cycles possibles. La méthode est ici appliquée à une loi de commande avec bande morte (figure 1.5c) et un filtre de mesure passe-bas du premier ordre. Une condition suffisante de stabilité explicite pour un producteur et implicite pour  $N$  producteurs est établie. Cette méthode est plus restrictive que la méthode formelle développée au chapitre 3, mais **facilite grandement les calculs** à faire par le gestionnaire de réseau. Finalement, l'application au cas d'étude permet de mettre en évidence le compromis à réaliser entre la rapidité du système et sa stabilité, mais aussi entre la généralité et la simplicité de la méthode d'analyse de la stabilité.

Ensuite, le chapitre 5 développe l'expression d'une **condition suffisante de stabilité valable quel que soit le réseau auquel se raccorde le producteur**. Le but de ce chapitre est de proposer une méthode permettant d'évaluer les paramètres des régulations à conseiller dans les codes de réseau. **La méthode proposée est fondée d'une part sur l'analyse de la condition suffisante explicite de stabilité pour un producteur et d'autre part sur l'analyse des la structure des matrices d'évolution du système**. Encore une fois, la méthode est appliquée à des régulateurs de puissance réactive particuliers dont les filtres de mesure sont des filtres passe-bas du premier ordre tous identiques. Les résultats sont donc spécifiques à l'exemple étudié (figure 1.6) mais la méthode se généralise à différentes régulations.

Finalement, le chapitre 5 permet de proposer un critère de stabilité valable quels que soient le nombre de producteurs, leur puissance, leur position sur le réseau, etc. Un tel critère permet l'intégration massive de régulations locales de puissance aux réseaux sans mettre en danger leur stabilité. Une application numérique de ce critère pour les codes de réseaux français est proposée.

Pour finir, les trois approches développées sont résumées au chapitre 6. On y compare leur généralité, mais aussi leur rapidité, leur simplicité et leur précision.

### 1.3.3 Conclusion

Pour conclure, l'approche proposée se veut méthodologique. Pour y parvenir, les méthodes ainsi que les hypothèses nécessaires sont mises en avant. Toutes ces méthodes sont appliquées à un cas particulier : les réseaux de distribution raccordant des producteurs équipés des régulations locales de puissance affine par morceaux. À chaque étape, les hypothèses proposées se veulent les moins restrictives possible et l'application des méthodes à des systèmes plus larges que les hypothèses est discutée.

De plus, chaque étape est illustrée dans le cas particulier de producteurs raccordés aux réseaux moyenne tension dont la loi de commande utilisée est représentée figure 1.7 et dont les valeurs numériques sont détaillées dans le tableau 1.5. La régulation étudiée a été construite à partir des lois de commande proposées par Enedis dans sa documentation technique de référence [38]. On notera que la loi de commande étudiée est symétrique par rapport à la tension de référence (20 kV) ce qui n'est pas le cas de la loi de commande retenue par Enedis.

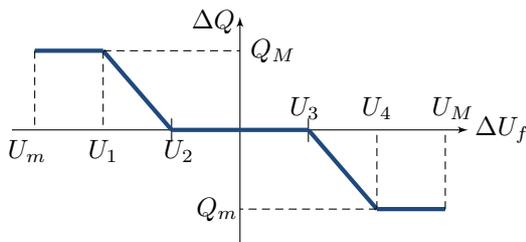


Figure 1.7 – Allure de la loi de commande  $Q(U)$  étudiée

Variable	Valeur
$U_m$	18 kV
$U_1$	19 kV
$U_2$	19,25 kV
$U_3$	20,75 kV
$U_4$	21 kV
$U_M$	21 kV
$Q_m$	$-0,4 P_{max}$
$Q_M$	$0,4 P_{max}$

Tableau 1.5 – Valeurs numériques de la loi de commande  $Q(U)$  étudiée

Ayant précisé le cadre de cette étude, nous allons maintenant décrire l'approche de modélisation proposée. Il convient de noter que dans la suite de ces travaux, nous appellerons régulateurs de puissance des producteurs en fonction de la tension l'ensemble composé d'un filtre de mesure de la tension suivi d'une loi de commande de la puissance en fonction de la tension.

## Chapitre 2

# Modélisation du système

### Sommaire

2.1	Objectifs de l'étude et choix du type de modèle . . . . .	28
2.2	Modélisation des producteurs et de leur régulateur . . . . .	32
2.3	Modélisation du système électrique . . . . .	41
2.4	Mise en évidence des risques d'instabilité . . . . .	55
2.5	Conclusion . . . . .	60

### Résumé :

Nous présenterons dans ce chapitre la modélisation des différents éléments utiles pour étudier la stabilité de la tension de réseaux de distribution accueillant des producteurs décentralisés équipés de régulateurs locaux de puissance en fonction de la tension (abrégé ci après *régulateurs de puissance*).

Les caractéristiques des régulateurs de puissance identifiées au chapitre 1 permettent de qualifier les oscillations de tension que pourraient causer les régulateurs. A partir de ces constatations, un type de modélisation peut être choisi pour représenter le système. Celui-ci sera modélisé à l'aide de deux briques élémentaires :

- La première représente le comportement des producteurs équipés d'un régulateur de puissance. Ce bloc sera à temps discret avec pour temps d'échantillonnage  $T_e$  celui du régulateur du producteur.
- La seconde représente le comportement du système électrique auquel sont raccordés les producteurs. Cette brique sera constituée d'un modèle linéarisé à temps continu du réseau électrique.

Nous terminerons ce chapitre par la mise en évidence des risques pour la stabilité en tension du système grâce à la modélisation d'un système réel et à la simulation de son comportement dynamique pour plusieurs réglages des paramètres du régulateur de puissance du producteur.

## 2.1 Objectifs de l'étude et choix du type de modèle

Afin d'étudier la stabilité en tension d'un réseau accueillant des producteurs équipés de régulateurs de puissance, un modèle mathématique de ce système doit être déterminé. La pertinence des résultats de l'étude dépend directement de la qualité du modèle proposé. Ainsi, si la modélisation du système n'est pas le cœur de ces travaux, elle constitue tout de même une étape nécessaire pour les mener à bien.

Un **choix adapté de modèle** repose sur un compromis entre la précision de la modélisation et sa complexité. En effet, un modèle trop simple risque de conduire à des résultats éloignés de la réalité et un modèle trop complexe sera difficile à manipuler et pourra demander un temps de calcul incompatible avec la finalité de l'étude. C'est pourquoi, avant de détailler les modèles établis, nous proposons de définir clairement les objectifs de l'étude et le système étudié.

### 2.1.1 Objectifs

Dans ces travaux, nous souhaitons étudier les éventuelles oscillations de tension causées par les régulateurs de puissance des producteurs décentralisés en fonctionnement normal (régime équilibré). En effet, comme indiqué partie 1.3.1, plusieurs inquiétudes quant à la stabilité de ce type de systèmes ont été soulevées dans la littérature. Si elles existent, les oscillations de tension sont dues à des oscillations de la consigne de puissance calculée par le régulateur du producteur. Or les consignes de puissance sont bornées par les capacités du producteur. **Les éventuelles oscillations de tension seront donc d'amplitude bornée.**

Par ailleurs, comme les régulateurs fonctionnent à temps discret avec un temps d'échantillonnage  $T_e$  de l'ordre d'une seconde (partie 1.3.1), les oscillations de tension auront **une période ou pseudo-période de l'ordre de quelques secondes**. L'objectif du modèle est donc d'étudier le comportement dynamique sur quelques secondes d'un réseau de distribution quelconque en présence d'un ou plusieurs producteurs équipés de régulateurs de puissance échantillonnés à la seconde.

### 2.1.2 Structure du modèle

Le modèle doit représenter le comportement du réseau électrique et des producteurs qui y sont raccordés. Il sera donc composé de briques élémentaires de deux types :

- **Les briques représentant un producteur décentralisé équipé d'un régulateur de puissance.** Le modèle des producteurs devra représenter l'évolution de la puissance injectée au réseau par chacun des producteurs en fonction de la mesure de l'amplitude de la tension à son point de raccordement (PDR) et de son régulateur.
- **La brique représentant le système électrique** auquel sont raccordés les producteurs étudiés, à savoir le réseau électrique de distribution, les consommateurs, etc. Le modèle du système électrique devra quant à lui permettre d'évaluer l'impact sur le plan de tension des variations de puissances injectées par les producteurs à leur nœud de raccordement.

La figure 2.1 représente la structure proposée du modèle.

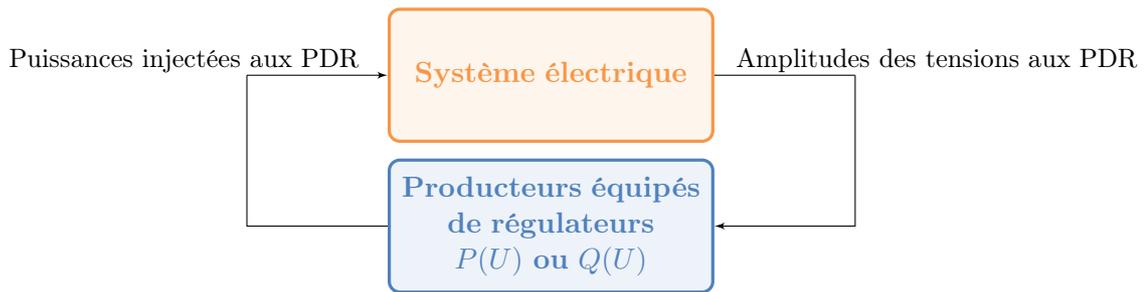


Figure 2.1 – Structure du système à modéliser avec plusieurs producteurs décentralisés équipés de régulateurs locaux de puissance en fonction de la tension

Cette structure de modèle est pour l’instant très générale. Elle s’adapte au système étudié et ce quels que soient :

- le nombre et le type des producteurs équipés de régulateurs,
- les types de régulateurs de puissance des producteurs,
- la topologie du réseau de distribution,
- le niveau de tension considéré,
- le nombre de consommateurs,
- ...

Afin de pouvoir étendre les résultats de ces travaux au plus grand nombre de systèmes possibles, nous ferons particulièrement attention à conserver au maximum la généralité des modèles étudiés. Par exemple, le modèle proposé pour les producteurs doit être valable qu’il s’agisse d’une ferme éolienne ou photovoltaïque, d’éoliennes à vitesse fixe ou variable, d’un producteur de quelques kilowatts ou d’un producteur de plusieurs mégawatts, etc. Ainsi, les modèles proposés pour les deux parties élémentaires viseront à rester les plus génériques possible.

Ayant défini les objectifs et la structure du modèle à développer, nous allons nous intéresser au type de modèle le plus adapté.

### 2.1.3 Types de modèles

Dans la littérature, il est commun de classer les modèles illustrant le fonctionnement des réseaux électriques en quatre catégories en fonction des constantes de temps des phénomènes qu’ils permettent d’étudier [2] :

#### 1. Les modèles transitoires électromagnétiques.

Ils sont principalement adaptés à la représentation de phénomènes transitoires dont les **constantes de temps sont inférieures à la dizaine de millisecondes**. Ainsi, ce type de phénomènes déforme l’onde de tension – dont la période est de l’ordre de 20 ms pour un réseau à 50 Hz – que l’on ne peut donc pas supposer sinusoïdale. Les modèles sont dans ce cas fondés sur les **équations de propagation des ondes électromagnétiques** faisant ainsi intervenir des dérivées temporelles et spatiales des grandeurs électriques. On

peut citer comme exemple d'application de tels modèles l'étude des courts-circuits.

## 2. Les modèles transitoires électromécaniques.

Il s'agit de modèles adaptés à l'étude de phénomènes transitoires plus lents que la période de l'onde de tension c.-à-d. de **constante de temps supérieure à quelques dizaines de millisecondes**. Pour ce type de modèles, on considère que l'onde de tension reste sinusoïdale pendant les phénomènes transitoires. Les grandeurs électriques sont donc considérées en **régime sinusoïdal établi** et sont représentées sous la forme de grandeurs complexes. Les phénomènes transitoires électromécaniques sont liés au comportement des générateurs synchrones, asynchrones, etc. Le mouvement de chaque machine est donc modélisé par une équation différentielle représentant son bilan des puissances électriques et mécaniques. La résolution de cette équation permet de calculer l'évolution de la vitesse de rotation de la machine. **La fréquence est calculée localement** grâce à la moyenne des vitesses de rotation des générateurs synchrones pondérée de leur inertie. Ce type de modèle est par exemple adapté à l'étude des oscillations locales de fréquence.

## 3. Les modèles dynamiques lents.

Ces modèles représentent des phénomènes dont la **constante de temps est de l'ordre de plusieurs secondes à plusieurs dizaines de minutes**. Lorsque l'on étudie ces phénomènes, on néglige les oscillations de vitesse entre les rotors des différentes machines. On considère donc que la **vitesse de rotation est la même pour tous les générateurs synchrones**. Elle est calculée à partir d'un modèle fictif de générateur synchrone équivalent. La vitesse de rotation de cette machine équivalente permet de calculer la fréquence du système. Les grandeurs électriques sont représentées en régime permanent et une équation différentielle agrégée est généralement considérée pour modéliser l'évolution de la fréquence avec le temps. Ces modèles permettent par exemple d'étudier le réglage secondaire de fréquence ou encore des phénomènes lents pour lesquels la fréquence évolue, comme l'équilibre dynamique production-consommation.

## 4. Les modèles quasi stationnaires.

Pour finir, les modèles quasi stationnaires sont utilisés pour représenter des phénomènes dont **la dynamique est au moins de l'ordre d'une seconde**. Par rapport aux modèles dynamiques lents, on considère cette fois la **fréquence du réseau comme constante**. Le système électrique est représenté par un modèle algébrique dont certaines grandeurs de commande dépendent du temps. Le système est décrit par **une succession d'états d'équilibre**. Cela sous-entend qu'entre deux états, les régimes transitoires se sont éteints et que le système n'a pas bifurqué de trajectoire (par exemple qu'il n'y a pas eu de déclenchement de protection). Ce type de modèle peut être utilisé pour étudier les écroulements du plan de tension. Il convient de noter que l'étude d'un phénomène instable avec un modèle quasi stationnaire risque de provoquer l'arrêt du calcul suite à des singularités du modèle mathématique puisqu'en réalité le système aura bifurqué de trajectoire. Alors, la

trajectoire décrite par le modèle ne représentera pas forcément celle du système réel.

La figure 2.2 représente quelques exemples de phénomènes physiques avec l'échelle de temps à laquelle ils ont lieu.

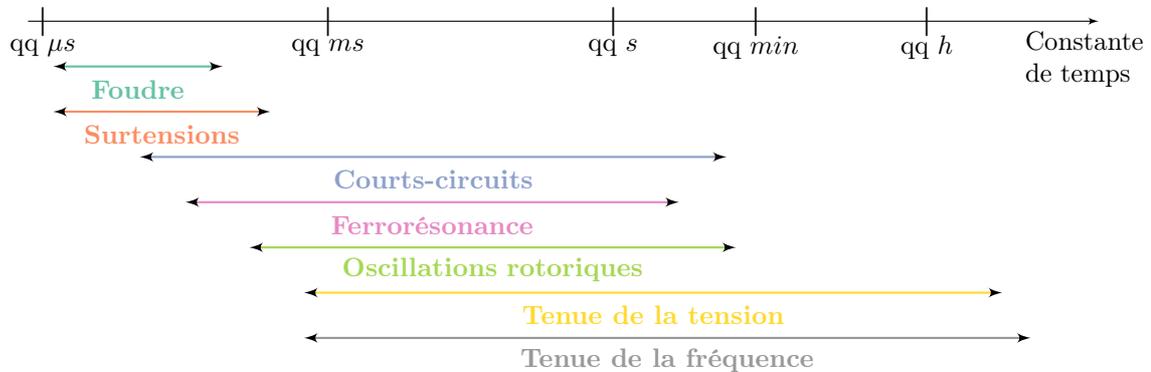


Figure 2.2 – Représentation des différents phénomènes physiques par échelle de temps [2]

### 2.1.4 Choix du type de modèle

Pour conclure, l'objectif de notre modèle est d'étudier l'impact des régulateurs de puissance des producteurs sur la stabilité en tension du réseau. Ces régulateurs sont censés fonctionner en régime dit « normal ». Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.** *On suppose que le système fonctionne en régime triphasé équilibré.*

De plus, la fréquence sur ce réseau est supposée maintenue constante par le gestionnaire de réseau de transport. Les phénomènes instables que l'on souhaite caractériser sont des oscillations de la tension du réseau de distribution dont la période est de l'ordre de quelques secondes. Par conséquent, un **modèle quasi stationnaire du réseau** est le plus adapté à cette étude. Un tel modèle permet de **représenter le système par un modèle algébrique** ce qui facilite grandement les calculs. Cependant, nous avons remarqué que ce type de modèle n'est généralement pas adapté à l'étude de systèmes instables. En effet, si les excursions de tension atteignent les seuils de déclenchement de certains ouvrages, le comportement du modèle ne représentera plus celui du système réel. Or, dans le cadre de ces travaux, les oscillations de tension considérées sont d'amplitude bornée, car les puissances des producteurs le sont aussi. Ainsi, en vérifiant que l'amplitude de ces oscillations n'atteint pas des seuils critiques, on peut étendre l'usage d'un modèle quasi stationnaire à l'étude des instabilités du plan de tension causées par les régulateurs locaux de puissance des producteurs décentralisés.

**Hypothèse 2.** *L'amplitude des oscillations de tension reste dans les bornes admissibles du fonctionnement des réseaux.*

Il convient de noter que, généralement, dans le cas d'un réseau de distribution électrique, aucune machine tournante n'est raccordée au réseau. On peut remarquer que, dans ce cas, les modèles

électromécaniques et dynamiques lents sont équivalents à un modèle quasi stationnaire. Après avoir choisi le type de modélisation adapté au cadre de l'étude, nous allons détailler le contenu des briques élémentaires du modèle (figure 2.1). Commençons tout d'abord avec la modélisation quasi stationnaire des producteurs équipés d'un régulateur de puissance.

## 2.2 Modélisation des producteurs et de leur régulateur

### 2.2.1 Caractéristiques et hypothèses de modélisation

Nous souhaitons établir un modèle, le plus générique possible, représentant les producteurs raccordés au réseau de distribution et équipés de régulateurs de puissance en fonction de l'amplitude de la tension à leurs bornes. Pour ce faire, nous allons commencer par **caractériser les producteurs étudiés**. Sur le réseau exploité par Enedis, les installations de type éolien et photovoltaïque (PV) représentent à elles seules plus de 74 % de la puissance distribuée et plus de 99 % des installations raccordées au réseau de distribution [11]. Ce type de producteurs est principalement raccordé au réseau par des convertisseurs de puissance [104]. On considérera dans ces travaux que l'ensemble des producteurs étudiés est dans ce cas. On dit alors qu'ils **ne sont pas synchrones au réseau**, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de machines tournantes (c'est le cas par exemple des panneaux PV [105]) ou que leur vitesse de rotation est découplée de la fréquence du réseau auquel ils sont raccordés (c'est le cas par exemple des éoliennes à vitesse variable [106]).

**Hypothèse 3.** *Les producteurs modélisés ne sont pas synchrones au réseau.*

Grâce à cette hypothèse, nous pouvons caractériser la dynamique des régulateurs de puissance des producteurs étudiés et ce même si leurs structures de raccordement au réseau sont très variées. Ainsi, afin de conserver la généralité des modèles proposés, une modélisation fine du fonctionnement des convertisseurs de puissance raccordant les producteurs au réseau n'est pas à envisager. De plus, la dynamique que l'on souhaite étudier ici est celle des régulateurs de puissance en fonction de la tension. Il faut donc modéliser la dynamique de la régulation locale du producteur entre la consigne de puissance calculée par son régulateur et la puissance injectée au réseau (figure 2.3).

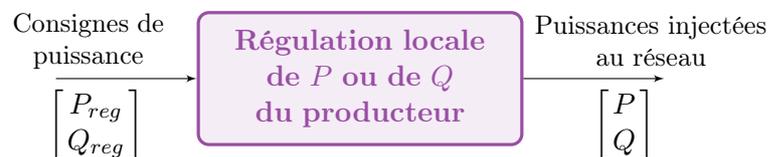


Figure 2.3 – Structure du modèle choisi pour représenter les convertisseurs de puissance d'un producteur

Dans ces travaux, il faut également modéliser le régulateur du producteur qui adapte la consigne de puissance en fonction du niveau de la tension au point de raccordement. Comme indiqué partie 1.3.1, **ce régulateur fonctionne à temps discret avec un temps d'échantillonnage  $T_e$  de l'ordre d'une seconde**.

**Hypothèse 4.** *Le temps d'échantillonnage  $T_e$  du régulateur de puissance des producteurs est de l'ordre d'une seconde.*

Comme illustré partie 1.3.1, ce régulateur est généralement composé de deux éléments (figure 2.4).

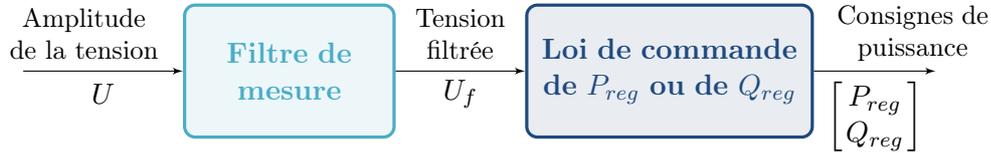


Figure 2.4 – Structure du modèle choisi pour représenter le régulateur de puissance active ou réactive en fonction de la tension d'un producteur

Tout d'abord, un filtre de mesure permet de lisser la mesure de l'amplitude de la tension au point de raccordement. Plusieurs hypothèses sont faites sur le comportement de ce filtre afin d'en proposer un modèle générique.

**Hypothèse 5.** *Le filtre de mesure est linéaire et fonctionne à temps discret et tous les filtres de mesure des producteurs sont synchronisés.*

Ensuite, la loi de commande permet d'adapter la consigne en puissance de la régulation locale du producteur à la valeur de la tension filtrée. Suite à l'étude bibliographique (partie 1.3.1), nous pouvons faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.** *La loi de commande de la consigne de puissance est affine par morceaux.*

Finalement, la figure 2.5 récapitule la structure complète du modèle des producteurs équipés d'un régulateur de puissance. Pour chaque élément de ce modèle, nous allons maintenant proposer un modèle quasi stationnaire.



Figure 2.5 – Structure du modèle proposé pour un producteur équipé d'un régulateur

## 2.2.2 Modélisation des régulations locales de puissance des producteurs décentralisés

Les régulations locales de puissance active ou réactive des producteurs décentralisés, telles que décrites dans [4] et [3], sont effectuées par les convertisseurs de puissance raccordant ces derniers au réseau. Ces convertisseurs fonctionnent sur le principe de la commutation très rapide d'interrupteurs. Généralement, la fréquence de commutation des convertisseurs ( $f_c$ ) est de l'ordre

de quelques kilohertz. Les régimes transitoires des courants et tensions de ces convertisseurs sont donc très rapides. Ils seront modélisés ici en régime permanent. **Seule la dynamique propre des régulations locales de puissance a besoin d'être représentée dans cette étude.**

Afin d'illustrer la modélisation proposée, nous prenons l'exemple d'une structure de raccordement d'une installation de stockage (figure 2.6). Les résultats établis restent valables quel que soit le type de producteur raccordé au réseau via de l'électronique de puissance.

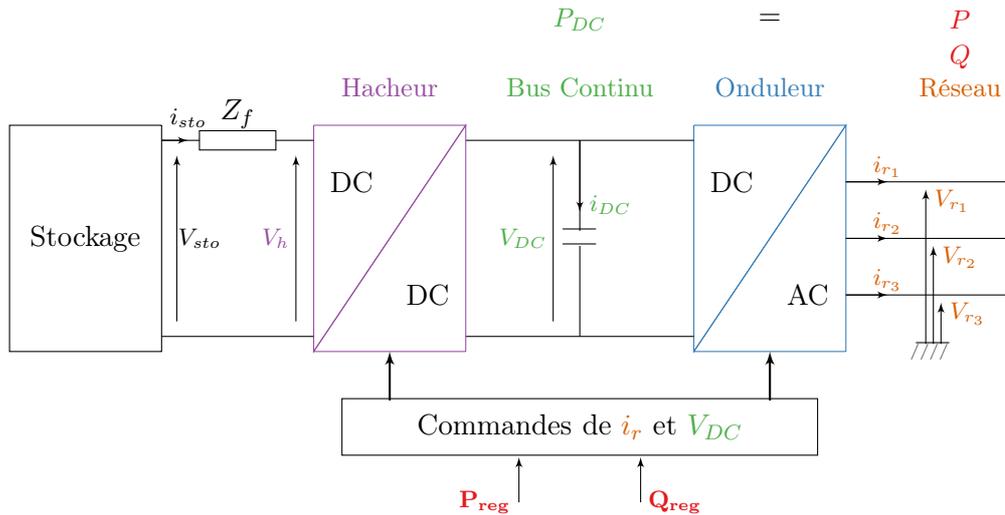


Figure 2.6 – Exemple de structure de raccordement au réseau électrique d'un dispositif de stockage d'énergie distribuée

### Régulation locale de puissance active

Dans ce type d'installation, la puissance active injectée sur le réseau ( $P$ ) n'est pas déterminée directement par la puissance extraite du dispositif de stockage mais par la puissance du bus continu ( $P_{DC}$ ). Le système fonctionne sur le principe des vases communicant. La puissance est d'abord extraite du stockage vers le bus continu. Ensuite, si la puissance de consigne envoyée au réseau est identique, la puissance est extraite du bus continu vers le réseau, sinon le bus se charge ou se décharge. On note que la capacité de stockage du bus continu est limitée, cette solution n'est que temporaire. Les boucles de régulation assurent l'équilibre des puissances.

La structure de commande est donc composée de **deux boucles imbriquées**. La consigne de puissance et la mesure de la tension aux bornes du stockage permettent de calculer la référence du courant soutiré au dispositif de stockage ( $i_{sto}$ ). La régulation de ce courant est réalisée en agissant sur la tension du hacheur par le biais des fonctions de commutation. Ensuite, au niveau de l'onduleur, la consigne de la composante directe du courant injecté ( $i_{r,d}$ ) au réseau est adaptée pour permettre d'extraire la totalité de la puissance stockée dans le bus DC vers le réseau. La figure 2.7 représente les différentes boucles impliquées dans la régulation de la puissance active injectée au réseau [3].

Afin d'évaluer le temps de réponse à 95 % de la boucle de régulation de la puissance active injectée

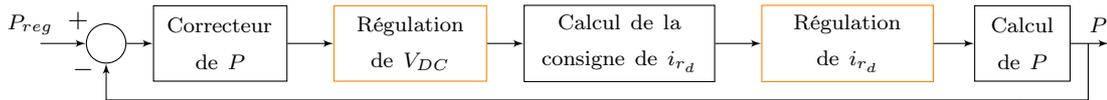


Figure 2.7 – Principe de la régulation de la puissance active injectée au réseau  $P$  [3]

au réseau (noté  $t_{r_P}$ ), nous proposons de discuter dans un premier temps du temps de réponse de la boucle de régulation du courant injecté au réseau ( $t_{r_i}$ ). Pour ceci, rappelons que le courant est une grandeur sinusoïdale de période 20 ms. Afin de d'assurer le bon fonctionnement de la régulation, le temps de réponse de la boucle de courant doit donc être très inférieur à la période de la grandeur à réguler. Généralement, on choisit un temps de réponse d'au plus 0,5 ms [107].

$$t_{r_i} \lesssim 0,5 \text{ ms} \quad (2.1)$$

Les boucles étant en cascade, la dynamique de la boucle de puissance active doit être au moins 10 fois plus lente que celle de la boucle de tension du bus continu qui est elle aussi environ 10 fois plus lente que la boucle de courant afin d'assurer la stabilité de l'ensemble. On peut donc écrire :

$$t_{r_P} \sim 100 \cdot t_{r_i} \lesssim 50 \text{ ms} \quad (2.2)$$

Ainsi, nous proposons de représenter la **dynamique de la régulation locale de puissance active par un système du premier ordre répondant en moins de 50 ms** soit très rapidement devant les phénomènes que l'on souhaite étudier.

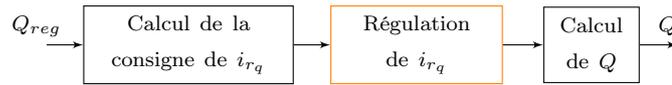
Pour conclure, nous pouvons dire que même si la structure de commande varie en fonction de la nature de l'installation (ferme photovoltaïque, ferme éolienne, etc.), l'approche proposée reste la même. On peut toujours dire que la boucle de régulation de la puissance active réagit très rapidement devant la constante de temps des phénomènes que l'on souhaite étudier.

### Régulation locale de puissance réactive

Le même raisonnement est appliqué aux régulations locales de puissance réactive. La puissance réactive injectée sur le réseau ( $Q$ ) est contrôlée directement à partir de la composante en quadrature du courant injecté au réseau ( $i_{r_q}$ ). Cette régulation est plus rapide que celle de puissance active puisqu'il n'y a pas besoin d'attendre que le bus continu soit en régime permanent. Ces régulations peuvent être effectuées en boucle ouverte (rapide, mais peu précise) ou en boucle fermée (plus lente, mais précise) et dans les deux cas, **leur dynamique peut se représenter sous la forme d'un système du premier ordre** avec un gain unitaire dont le temps de réponse à 95 % est noté  $t_{r_Q}$  [107].

Afin d'évaluer ce temps de réponse, nous nous intéressons à la boucle de régulation du courant en quadrature injecté sur le réseau. Il s'agit à nouveau d'une boucle rapide qui répond en  $t_{r_i}$  soit moins de 0,5 ms, voir (2.1).

Dans le cas d'un fonctionnement en boucle ouverte, la régulation de puissance réactive suit la

Figure 2.8 – Principe de la régulation en boucle ouverte de puissance réactive  $Q$  [3]Figure 2.9 – Principe de la régulation en boucle fermée de puissance réactive  $Q$  [3]

dynamique de la boucle de courant (figure 2.8). Dans le cas d'une boucle fermée, la dynamique est environ dix fois plus lente que celle de la boucle de courant (figure 2.9).

Finalement, on peut dire que dans tous les cas, que la boucle de régulation de puissance réactive répond en moins de 50 ms. Nous pouvons donc conclure que la régulation de la puissance réactive est très rapide devant les phénomènes que nous souhaitons étudier. À nouveau, ce résultat est valable pour différents types de producteurs interfacés par l'électronique de puissance.

## Conclusion

Le tableau 2.1 reprend les résultats proposés ci-dessus quant à la dynamique des principales régulations locales des convertisseurs de puissance.

Boucles rapides	Régulation de la tension du bus continu <i>Répond en moins de 5 ms</i>	Régulation du courant injecté au réseau <i>Répond en moins de 0,5 ms</i>
Boucles lentes	Régulation de la puissance active <i>Répond en moins de 50 ms</i>	Régulation de la puissance réactive <i>Répond en moins de 50 ms</i>

Tableau 2.1 – Dynamique des régulations locales de puissance des convertisseurs

La figure 2.10 – issue de [4] – schématise la hiérarchie des différentes boucles de régulation et les ordres de grandeurs de leurs constantes de temps respectives. Dans cette partie nous avons détaillé la structure de la boucle de commande externe qui régule les puissances active et réactive injectées au réseau. Les « commandes supplémentaires » sont, par exemple, un régulateur de puissance en fonction de la tension.

Finalement, **les régulations locales de puissance des producteurs peuvent être représentées sous la forme de systèmes du premier ordre répondant en moins de 50 ms** soit rapidement devant les phénomènes que l'on souhaite observer. Ainsi, dans le cadre d'un modèle quasi stationnaire des producteurs équipés d'un régulateur de puissance, **les régulations locales de puissance seront représentées en régime permanent**. Les boucles locales de puissance active ou réactive sont modélisées de la même façon : **par un gain unitaire** (figure 2.11). Ainsi, par la suite, on notera directement **P** et **Q** les puissances issues des régulateurs.

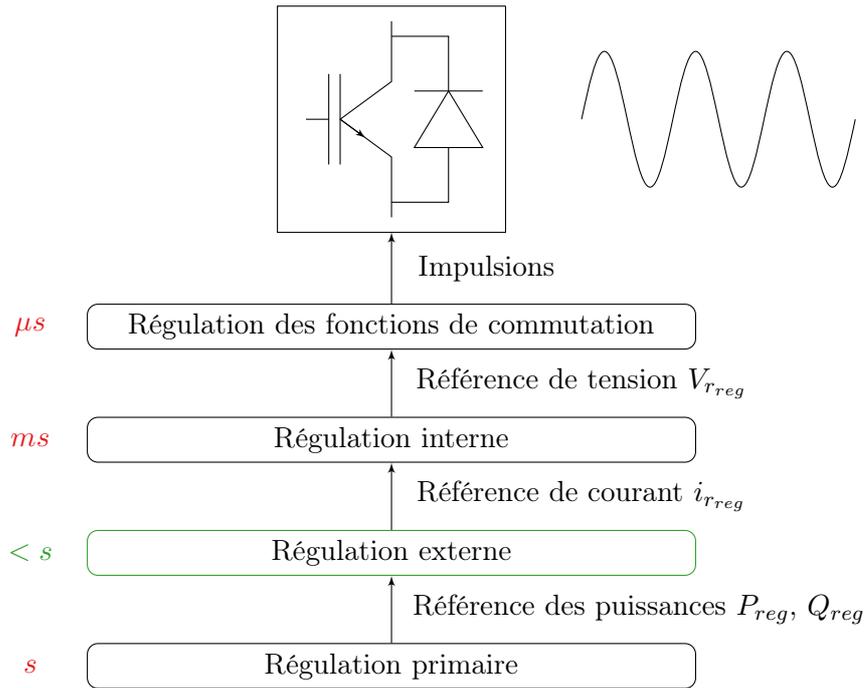


Figure 2.10 – Schéma de la hiérarchie des boucles de régulation des convertisseurs de puissance [4]

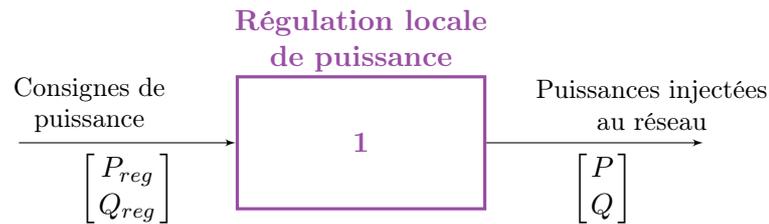


Figure 2.11 – Modèle proposé pour les convertisseurs de puissance d'un producteur

La rapidité des régulations des convertisseurs de puissance des producteurs décentralisés permet de se limiter à un modèle en régime permanent qui est simple et qui permet de conserver une certaine généralité. Nous nous intéressons maintenant à la modélisation des régulateurs de puissance des producteurs.

### 2.2.3 Modélisation des régulateurs de puissance en fonction de la tension

Comme le montre la figure 2.5, le régulateur de puissance d'un producteur est décomposé en deux parties. Tout d'abord le filtre de mesure de chaque producteur calcule à partir de la tension à ses bornes  $U$ , la tension filtrée  $U_f$ . Chaque filtre est supposé linéaire (hypothèse 5). On note  $n_P$  le nombre de régulateurs de puissance raccordés au réseau et  $n_U$  le nombre de nœuds du réseau auquel un ou plusieurs régulateurs de puissance est raccordé. On remarque que  $n_U \leq n_P$  puisque chacun des  $n_U$  nœuds accueille au moins un régulateur.

Un **modèle agrégé des filtres de mesure** des  $n_P$  régulateurs de puissance est proposé. On note

$\mathbf{U}(k) \in \mathbb{R}^{n_U}$  le vecteur des tensions de chacun des nœuds du réseau raccordant des producteurs équipés de régulateurs à l'instant  $t = kT_e$ . On définit aussi  $\mathbf{U}_f(k) \in \mathbb{R}^{n_U}$  le vecteur des tensions filtrées.

Comme discuté précédemment, nous souhaitons donc proposer un modèle générique. C'est pour cela que nous choisissons de représenter chacun des  $n_U$  filtres de mesure sous la forme d'un système d'état de dimension  $n_{f_i} \in \mathbb{N}$ . Par la suite, nous noterons  $\mathbf{x}_{f_i}(k) \in \mathbb{X}_{f_i} \subset \mathbb{R}^{n_{f_i}}$  le vecteur d'état du filtre du  $i$ -ème producteur tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{f_i}(k+1) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{f_i}(k) + \mathbf{B}_i U_i(k) \\ U_{f_i}(k) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_{f_i}(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $U_i(k) \in \mathbb{R}$  la tension aux bornes du  $i$ -ème producteur et  $U_{f_i}(k) \in \mathbb{R}$  la tension filtrée du  $i$ -ème producteur à l'instant  $kT_e$ . La matrice d'évolution du  $i$ -ème filtre  $\mathbf{A}_i$  est de dimension  $n_{f_i} \times n_{f_i}$ , la matrice de commande  $\mathbf{B}_i$  est de dimension  $n_{f_i} \times 1$  et la matrice d'observation  $\mathbf{C}_i$  est de dimension  $1 \times n_{f_i}$ .

Nous choisissons comme vecteur d'état du filtre agrégé  $\mathbf{x}_f = [\mathbf{x}_{f_1}^T \dots \mathbf{x}_{f_{n_P}}^T]^T \in \mathbb{X}_f$  de dimension  $n_f$ . Le **modèle d'état agrégé** associé est défini grâce aux matrices d'état  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ , de commande  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_U}$  et d'observation  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_U \times n_f}$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}_f(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B} \mathbf{U}(k) \\ \mathbf{U}_f(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}_f(k) \end{cases} \quad (2.4)$$

Ensuite, la tension filtrée de chacun des producteurs est convertie en consigne de puissance  $P_{reg}$  ou  $Q_{reg}$  selon une loi de commande. De la même manière, une écriture agrégée de la loi de commande du vecteur des  $n_P$  consignes de puissance active ou réactive en fonction des  $n_U$  tensions filtrées est proposée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{reg}(k) \\ \mathbf{Q}_{reg}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_f(k)) \quad (2.5)$$

On note que, pour l'instant, aucune hypothèse n'est faite sur la fonction  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_U} \rightarrow \mathbb{R}^{n_P}$ .

Pour conclure, on propose de modéliser la dynamique du régulateur de puissance en fonction de la tension aux bornes du producteur de façon générique par la représentation d'état du filtre de mesure et l'équation de fonctionnement – dépendant de la valeur de la tension filtrée – de la loi de commande. La figure 2.12 résume le modèle proposé pour les régulateurs de puissance en fonction de la tension.

#### 2.2.4 Application à un exemple

Afin d'illustrer ceci, nous proposons d'appliquer la modélisation développée dans ces travaux à un cas d'étude réel. Il s'agit d'un départ rural français d'Enedis composé de 124 nœuds. Les branches sont exploitées à 20 kV et mesurent jusqu'à une quinzaine de kilomètres. La consommation totale

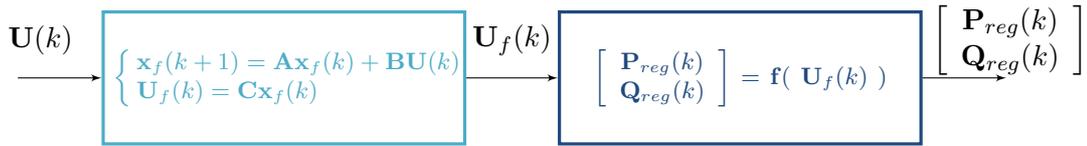


Figure 2.12 – Modèle agrégé discret proposé pour représenter les régulateurs de puissance des producteurs en fonction de l'amplitude de sa tension

du départ est de l'ordre de 8 MW. En sortie du poste source, la puissance de court-circuit est donnée égale à 150 MVA. La tension de référence  $U_0$  est fixée à 20,4 kV par le gestionnaire de réseau de distribution. Un producteur éolien de 6 MW est raccordé au réseau ( $n_U = n_P = 1$ ) ; il se situe à 10 km du poste source.

La production sur le départ étant importante et située relativement loin du poste source, des problématiques de tension haute risquent d'apparaître. Pour tenter de les éviter, il est envisagé d'équiper ce producteur d'un régulateur de puissance réactive en fonction de la tension. La mesure de tension est filtrée grâce à un filtre à temps discret du premier ordre ( $n_f = 1$ ) de gain unitaire représenté par son équation de récurrence :

$$\begin{cases} x_f(k+1) = ax_f(k) + (1-a)U(k) \\ U_f(k) = x_f(k) \end{cases} \Leftrightarrow U_f(k+1) = aU_f(k) + (1-a)U(k) \quad (2.6)$$

Le paramètre  $a \in [0, 1]$  est appelé constante de temps discrète du filtre de mesure. Il peut être vu comme le facteur de lissage du filtre. Ici il est choisi égal à 0,1 afin d'avoir un système rapide et donc d'étudier la validité du modèle proposé pour les convertisseurs de puissance.

La loi de commande de la puissance réactive choisie est inspirée de la norme d'Enedis [38] (figure 1.7). Finalement, le modèle proposé pour le producteur est présenté figure 2.13.

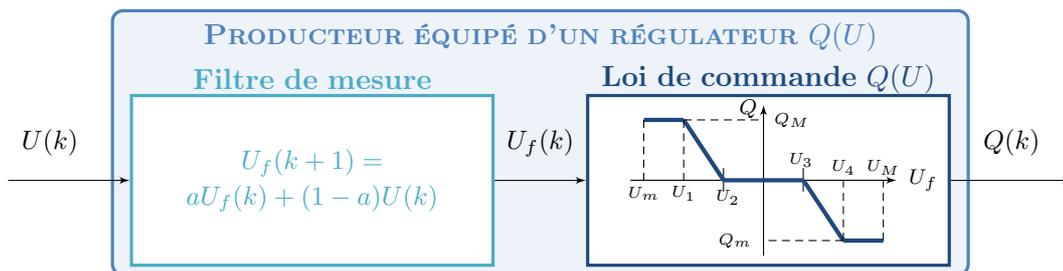


Figure 2.13 – Modèle du producteur éolien équipé d'un régulateur  $Q(U)$

Afin de tester la validité du modèle développé ici, nous allons comparer les réponses à un échelon de tension au point de raccordement du producteur du modèle proposé dans ces travaux et du modèle développé dans les travaux de thèse [3]. Le tableau 2.2 reprend les valeurs numériques des paramètres utilisés pour cette étude comparative.

Le filtre de mesure			
$a$	=	0,1	
La loi de commande $Q(U)$			
$U_1$	=	19 kV	$U_2$ = 19,25 kV
$U_3$	=	20,75 kV	$U_4$ = 21 kV
$U_m$	=	18 kV	$U_M$ = 22 kV
$Q_m$	=	$-0,4 P_{max}$	$Q_M$ = $0,4 P_{max}$
$P_{max}$	=	6 MW	
Le convertisseur de puissance			
$f_c$	=	20 kHz	$t_{r_i}$ = 0,5 ms

Tableau 2.2 – Valeurs numériques utilisées pour les paramètres du modèle

Des détails supplémentaires quant au modèle de la régulation de puissance réactive en boucle fermée implémenté ici sont disponibles dans [3]. Nous ne présentons ici que les résultats de simulation. La réponse du système à un échelon de la tension aux bornes du producteur allant de 20 kV à 21 kV à  $t = 1$  s est simulée (figure 2.14a).

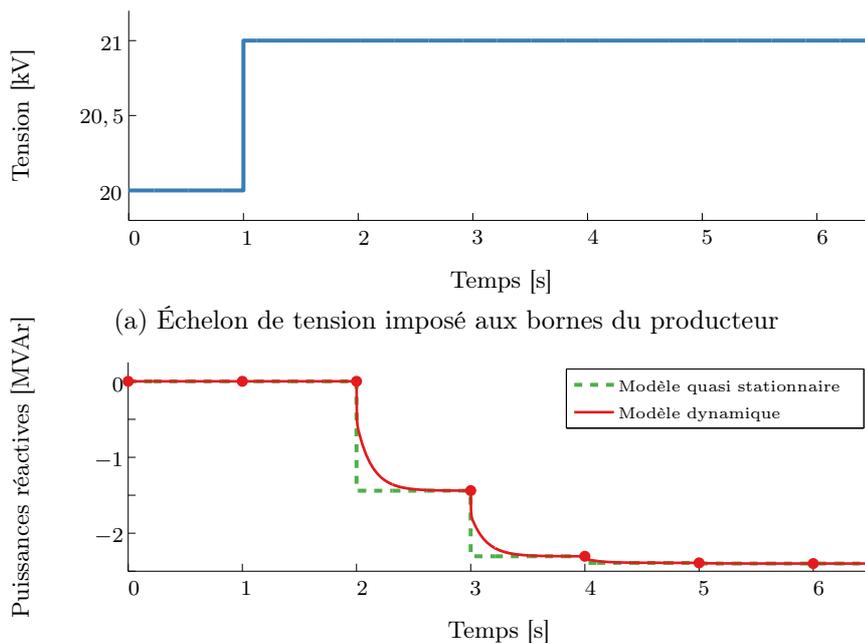


Figure 2.14 – Comparaison de la réponse à un échelon de tension du modèle quasi stationnaire et du modèle dynamique proposé

Comme on peut le voir figure 2.14b, la boucle de régulation de la puissance réactive a bien atteint son régime permanent au bout de  $T_e$ . Ainsi **on ne remet pas en cause la modélisation en régime permanent des régulations locales de puissance des convertisseurs raccordant les producteurs au réseau pour observer des phénomènes dont la constante de temps est de l'ordre de quelques secondes**. Ceci permet de simplifier les calculs. Sur cet exemple, le modèle quasi stationnaire est 20 % plus rapide à simuler.

### 2.2.5 Conclusion

Pour conclure, nous proposons de représenter la dynamique des producteurs par la dynamique du régulateur local de puissance. En effet, le modèle quasi statique des convertisseurs de puissance revient à un gain unitaire. Nous considérons donc que la puissance injectée au réseau peut être considérée comme égale à la puissance de consigne à cette échelle de temps. Le modèle des producteurs sera donc composé du filtre de mesure linéaire à temps discret du régulateur et de la loi de commande de puissance affine par morceaux. Ce modèle a été testé sur un exemple qui a permis de valider sa structure pour observer d'éventuelles instabilités de la tension ayant pour constante de temps quelques secondes.

La figure 2.15 résume le modèle générique développé pour l'étude quasi stationnaire d'un producteur équipé d'un régulateur de puissance en fonction de la tension à son PDR.

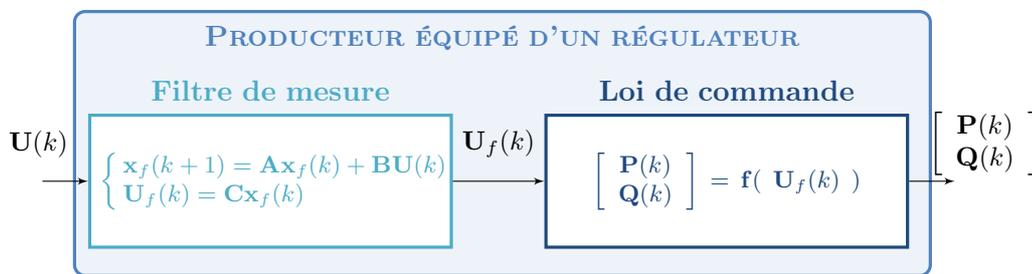


Figure 2.15 – Brique élémentaire modélisant le comportement d'un producteur équipé d'un régulateur de puissance

## 2.3 Modélisation du système électrique

Dans la partie précédente, nous avons proposé un modèle quasi stationnaire pour représenter un producteur équipé d'un régulateur de puissance. Nous allons maintenant nous intéresser à la modélisation du système électrique auquel les producteurs sont raccordés. Nous souhaitons établir un modèle quasi stationnaire le plus générique possible qui permette, à partir des variations des puissances des producteurs équipés de régulateurs, de calculer l'amplitude de la tension à leurs points de raccordement. Nous allons commencer par caractériser le système électrique auquel le producteur peut être raccordé.

### 2.3.1 Caractéristiques et hypothèses de modélisation

Ce que nous appelons système électrique est en fait composé du **réseau électrique et des autres acteurs raccordés à ce réseau**. Pour commencer, nous allons caractériser le réseau électrique auquel peuvent être raccordés les producteurs équipés de régulateurs de puissance.

Comme dit précédemment, nous nous intéressons dans ces travaux à des producteurs raccordés au réseau de distribution. Ces réseaux sont composés de départs moyenne tension et basse tension. Les départs moyenne tension mesurent généralement moins de 40 km. Les postes de distribution sont des transformateurs chargés de faire l'interface entre les réseaux moyenne et basse tension.

En amont du réseau de distribution, on trouve le réseau de transport qui achemine l'électricité des producteurs jusqu'au réseau de distribution. Il est chargé du maintien de la fréquence sur le réseau de distribution, mais aussi de la tension en tête des départs de distribution. Les postes sources servent d'interface entre les réseaux de transport et de distribution. De manière similaire aux postes de distribution, ils permettent de diminuer le niveau de tension (généralement de 63 kV à 20 kV) et assurent également des fonctions de protection contre les défauts.

Pour conclure, **le réseau électrique est composé du réseau de transport, de postes sources et des départs du réseau de distribution**. Avant de nous intéresser à la modélisation de ces éléments, nous allons discuter des acteurs qui peuvent être raccordés aux réseaux de distribution.

Les producteurs équipés de régulateurs de puissance active et/ou réactive en fonction de la tension peuvent cohabiter avec des producteurs dont la consigne de puissance ne dépend pas de la tension et des consommateurs. Leurs puissances varient dans le temps, mais ces variations ne sont pas commandées par un régulateur. Par la suite, nous appellerons « grandeurs non commandables » toutes les grandeurs électriques dont les variations ne sont pas commandées par le système comme les puissances des producteurs non équipés de régulateurs de puissance, des consommateurs, les variations de la tension du réseau de transport, etc.

Parmi les **grandeurs non commandables**, on inclut les régulations existantes des réseaux de distribution. Elles contrôlent généralement la puissance ou la tension en un point, mais ont généralement une dynamique bien différente de celle des phénomènes que l'on étudie. Par exemple, les régleurs en charge sont des automates situés dans les postes sources dont la mission est de maintenir une tension au secondaire du transformateur – la tension en tête de départ – constante malgré les éventuelles variations de la tension sur le réseau de transport. Pour ce faire, ils modifient le rapport de transformation des postes sources au bout d'une minute de surtension ou de sous-tension [14]. Ainsi, leur temps de réponse est supérieur à une minute, les régleurs en charge seront donc modélisés en régime permanent. C'est aussi le cas des bancs de capacité, régulations de puissance réactive au niveau des postes sources qui répondent en 60 secondes.

**Hypothèse 7.** *Les régulations existantes sur les réseaux de distribution répondent suffisamment lentement pour être considérées en régime permanent pendant l'étude de stabilité des régulateurs de puissance des producteurs décentralisés.*

La validité de cette hypothèse sera discutée dans la suite des travaux (partie 2.4).

Pour conclure, nous avons choisi de séparer la modélisation du système électrique en deux parties : le réseau électrique et l'influence des grandeurs non commandables. La structure du modèle associé est présentée figure 2.16. Nous allons maintenant proposer un modèle quasi stationnaire pour chacune de ces parties.

### 2.3.2 Modélisation du réseau électrique

Comme indiqué précédemment, le réseau électrique est composé des lignes du réseau de distribution et du réseau amont. Les variations des puissances des producteurs équipés de régulateur

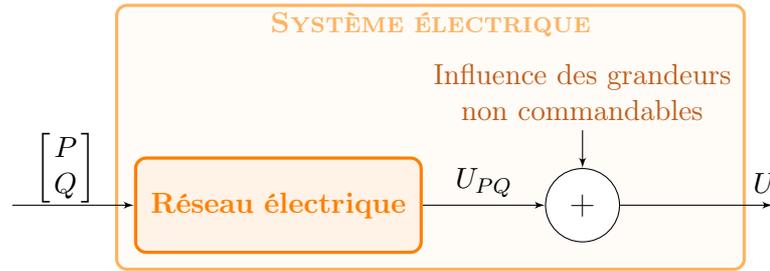


Figure 2.16 – Structure du modèle proposé pour représenter le système électrique

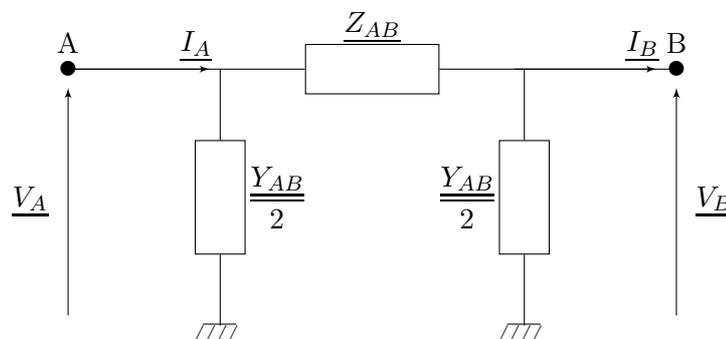
induisent des variations de l'amplitude de la tension. Ces dernières sont plus ou moins importantes en fonction des caractéristiques du réseau auquel sont raccordés les producteurs. Il est donc important de proposer un modèle du réseau électrique permettant d'évaluer les variations de tension aux bornes des producteurs en fonction des variations des puissances injectées au réseau et des caractéristiques de celui-ci. Commençons avec la modélisation des lignes du réseau de distribution [108].

### Lignes du réseau de distribution

Une ligne peut être caractérisée par quatre paramètres :

- sa résistance série linéique  $R_l$  (en  $\Omega/\text{km}$ ) ;
- sa réactance série linéique  $X_l$  (en  $\Omega/\text{km}$ ) ;
- sa conductance de fuites linéique  $G_l$  (en  $\text{S}/\text{km}$ ) ;
- sa susceptance de fuites linéique  $B_l$  (en  $\text{S}/\text{km}$ ).

Si la ligne est « suffisamment courte », alors les phénomènes de propagation de l'onde de tension dans la ligne peuvent être négligés. Ceci est valable pour des lignes jusqu'à une centaine de kilomètres. Ainsi, elle s'applique aux réseaux de distribution français. On peut alors représenter la ligne entre deux nœuds A et B par un modèle équivalent monophasé couramment utilisé pour représenter les éléments passifs : le « **modèle en  $\Pi$**  » [109] (figure 2.17).

Figure 2.17 – Modèle en  $\Pi$  de la branche entre les nœuds A et B

Dans ce modèle, l'impédance série complexe  $Z_{AB} \in \mathbb{C}$  (respectivement l'admittance de fuites complexe  $Y_{AB} \in \mathbb{C}$ ) de la ligne entre A et B est égale à  $Z_{AB} = (R_l + jX_l) \cdot d_{AB}$  (respectivement

$\underline{Y}_{AB} = (G_l + jB_l) \cdot d_{AB}$  avec  $d_{AB}$  la longueur de la ligne entre les nœuds A et B.

Pour conclure, **chaque ligne du réseau de distribution peut être représentée par une impédance et deux admittances complexes** comme décrit figure 2.17. Nous verrons par la suite comment calculer l'amplitude de la tension en chaque nœud à partir de ce modèle des lignes. Mais tout d'abord, discutons de la modélisation du réseau amont.

### Réseau amont

On souhaite représenter le réseau de transport du point de vue du réseau de distribution. On se place en sortie du poste source (interface entre le réseau de transport et de distribution) et on appelle « réseau amont » l'ensemble du réseau de transport ainsi que le transformateur du poste source. On cherche ici à modéliser la capacité du réseau de transport à maintenir la tension en tête de départ constante, quelle que soit la tension sur le réseau de distribution.

Lorsque l'on suppose que la tension en tête de départ – notée  $\underline{V}_{jdb}$  pour tension au jeu de barres du nom de l'élément physique en sortie des postes sources – est complètement indépendante de l'état du réseau de distribution aval, on modélise le réseau amont sous la forme d'un « nœud infini », c'est-à-dire une source de tension idéale capable d'imposer la tension  $V_0$  et la fréquence  $f_0$  quel que soit le système auquel elle est raccordée.

Il est possible d'affiner le modèle du réseau de transport en modélisant l'impact sur la tension en tête de départ des variations de puissance sur le réseau de distribution. Pour ce faire, on adopte un modèle agrégé de réseau amont sous la forme d'une impédance équivalente. Ceci revient à modéliser le réseau amont sous la forme d'un **modèle de Thévenin** équivalent composé d'une source de tension idéale et d'une impédance complexe équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  (figure 2.18).

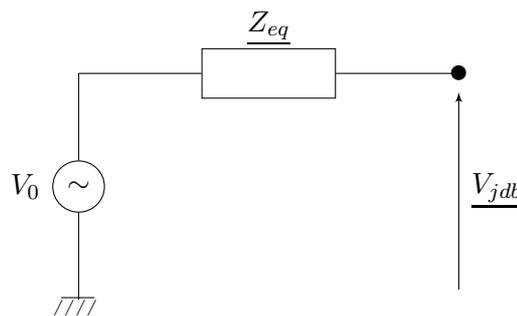


Figure 2.18 – Modèle de Thévenin du réseau amont

La tension du nœud infini  $V_0$  est alors égale au produit du rapport de transformation du poste source ( $k$ ) et de la tension d'exploitation du réseau haute tension ( $V_{HTB}$ ).

$$V_0 = k \cdot V_{HTB} \quad (2.7)$$

L'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  du réseau amont vue depuis le réseau de distribution est aussi appelée « **impédance de court-circuit** » notée  $\underline{Z}_{CC}$ . Son module est calculé en un point à

partir de l'amplitude du courant  $I_{CC}$  qui circulerait en ce point en cas de court-circuit à la terre à la tension nominale  $V_0$ . On parle plus souvent en termes de puissance triphasée de court-circuit ( $S_{CC}$ ) :

$$S_{CC} = 3V_0 I_{CC} = \sqrt{3}U_0 I_{CC} = \frac{U_0^2}{|Z_{CC}|} \quad (2.8)$$

La valeur de la puissance de court-circuit évolue dans le temps puisqu'elle dépend de la topologie du réseau, des groupes de production démarrés, etc. Plus la puissance de court-circuit est grande, plus le réseau amont s'oppose aux variations de la tension en tête de départ. En France, on estime la puissance de court-circuit vue depuis la sortie des postes sources de l'ordre d'une centaine de MVA [22]. Il convient de noter que sur le réseau de transport français, la réactance des lignes est de l'ordre de dix fois supérieure à leur résistance [109]. On peut donc considérer que l'impédance équivalente du réseau est purement inductive.

$$\underline{Z}_{CC} \sim jX_{CC} \quad (2.9)$$

Finalement, le modèle monophasé équivalent retenu pour représenter le réseau amont vu depuis la sortie du poste source et les lignes du réseau de distribution est constitué d'une source de tension idéale à  $V_0$ , d'une réactance de court-circuit  $X_{CC}$  et des impédances et admittances des lignes du réseau de distribution (figure 2.19).

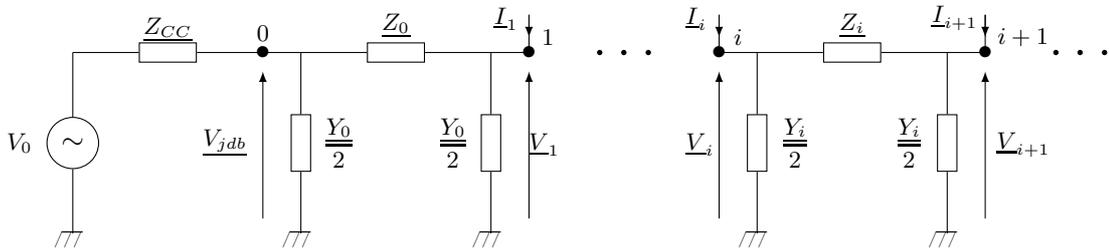


Figure 2.19 – Modèle équivalent du réseau électrique proposé

Nous allons maintenant discuter de la modélisation de l'impact des variations des grandeurs non commandables

### 2.3.3 Modélisation des grandeurs non commandables

Les variations de l'amplitude de la tension sont influencées par les variations des puissances injectées en chacun des nœuds. Le terme « grandeurs non commandables » a été défini pour regrouper toutes les grandeurs électriques dont l'évolution n'est pas régulée comme les puissances actives et réactives soutirées par les consommateurs. Nous proposons ici une étude non exhaustive des grandeurs non commandables qui peuvent influencer l'amplitude de la tension sur le réseau. Il convient de noter qu'il sera toujours possible par la suite de prendre en compte une nouvelle régulation de puissance d'un acteur, par exemple d'un consommateur. Il faudra alors le modéliser comme présenté partie 2.2.

### Consommateurs et producteurs

Dans cette partie, nous nous intéressons aux consommateurs et aux producteurs dont la puissance n'est pas fixée par un régulateur. Ils seront modélisés par les puissances qu'ils injectent au réseau. Ces puissances sont considérées comme variables dans le temps.

À ce stade, l'adaptation naturelle des puissances active et réactive soutirées par les charges – dit autorégulation des charges – en fonction des variations de la tension n'est pas représentée. En effet, c'est un phénomène rapide devant les constantes de temps qui nous intéressent et d'amplitude relativement faible dans le cas de réseaux interconnectés à un réseau de transport ayant une grande puissance de court-circuit et étant très réactif [108]. Un modèle statique de ce phénomène pourra être pris en compte par la suite.

Ces acteurs seront **modélisés comme des nœuds PQ**, c'est-à-dire comme des nœuds auxquels la tension et le courant s'adaptent afin que certaines puissances soient injectées au réseau. Ces puissances injectées ou soutirées vont induire des variations du plan de tension au même titre que les variations de puissances engendrées par les régulateurs des producteurs. Ces deux effets seront modélisés de façon identique, mais seront découplés puisque l'on s'intéresse à l'impact des grandeurs commandées sur le système. Les variations des grandeurs non commandables seront vues comme un terme de perturbation. Avant de détailler le modèle proposé, nous allons caractériser les régulations existantes sur les réseaux de distribution.

### Régulations existantes sur les réseaux de distribution

D'après l'hypothèse 7, les régulations existantes peuvent être **représentées en régime permanent** pour l'étude des oscillations de tension provoquées par les régulateurs de puissance des producteurs. On modélisera l'impact des régleurs en charge comme un terme de perturbation sur la tension en tête de départ. Son influence sur la tension en chacun des nœuds sera modélisée par la suite.

Nous allons maintenant nous intéresser à la mise en équation du comportement du système électrique et plus précisément aux variations de l'amplitude de la tension engendrées par des variations des puissances injectées sur le réseau et de la tension en tête de départ.

#### 2.3.4 Mise en équation du comportement du réseau électrique

Comme indiqué précédemment, nous souhaitons établir un **modèle quasi stationnaire du système électrique**. Pour ce type d'études, le réseau est modélisé sous forme algébrique c'est-à-dire par les équations de répartition des charges.

Avant de discuter des équations de fonctionnement, nous allons poser quelques définitions. Dans la suite,  $n \in \mathbb{N}$  désigne le nombre de nœuds du réseau étudié et  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble des nœuds de ce réseau. On définit aussi  $\mathcal{N}_U \subset \mathcal{N}$  comme l'ensemble des  $n_U$  nœuds du réseau auxquels un (ou plusieurs) producteur(s) équipé(s) d'un régulateur de puissance est raccordé. On rappelle que le réseau accueille  $n_P$  régulateurs dont  $n_P^P$  régulateurs de puissance active et  $n_P^Q$  régulateurs de puissance réactive ( $n_P = n_P^P + n_P^Q$ ).

Finalement,  $\mathcal{N}_{NC} \subset \mathcal{N}$  désigne l'ensemble des  $n_{NC}$  nœuds du réseau auxquels un consommateur ou un producteur sans régulateur est raccordé. On peut remarquer que certains nœuds  $i \in \mathcal{N}$  peuvent appartenir à la fois à  $\mathcal{N}_U$  et à  $\mathcal{N}_{NC}$  et d'autres peuvent n'appartenir ni à l'un ni à l'autre.

Avec un modèle quasi stationnaire, les grandeurs électriques sont généralement représentées en régime permanent et donc sous la forme de **grandeurs complexes**. On pose  $\underline{\mathbf{I}}_{\mathcal{N}}$  le vecteur de  $\mathbb{C}^n$  dont la  $i$ -ème composante est le courant  $\underline{I}_i$  injecté au nœud  $i \in \mathcal{N}$ . Le signe de ce courant dépend du bilan des puissances injectées et soutirées au nœud  $i$ .

De la même manière, on pose  $\underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{C}^n$  le vecteur des tensions complexes entre phases en chaque nœud du réseau. On définit aussi  $\underline{\mathbf{V}}_{\mathcal{N}} = \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{N}}/\sqrt{3}$  le vecteur des tensions complexes entre phase et neutre en chaque nœud du réseau. Dans la suite, on notera  $\underline{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{n_U}$  le vecteur des tensions complexes entre phases aux nœuds du réseau appartenant à  $\mathcal{N}_U$  et  $\underline{\mathbf{U}}_d \in \mathbb{C}^{n_{NC}}$  le vecteur des tensions complexes entre phases aux nœuds du réseau appartenant à  $\mathcal{N}_{NC}$ . On définit de la même manière  $\underline{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{n_U}$  et  $\underline{\mathbf{V}}_d \in \mathbb{C}^{n_{NC}}$ .

Pour finir, on pose  $\mathbf{P}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_U}$  et  $\mathbf{P}_d \in \mathbb{R}^{n_{NC}}$  les vecteurs des bilans de puissance active injectées aux nœuds du réseau, de  $\mathcal{N}_P$  et de  $\mathcal{N}_{NC}$ . On définit de même les vecteurs  $\mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_U}$  et  $\mathbf{Q}_d \in \mathbb{R}^{n_{NC}}$  pour les puissances réactives.

À partir de ces définitions, nous allons établir un modèle du système électrique permettant de calculer les variations d'amplitude de la tension aux nœuds de raccordement des producteurs équipés de régulateurs en fonction des puissances injectées par ces producteurs, mais aussi des grandeurs non commandables comme les puissances soutirées par les consommateurs et les producteurs sans régulateur de puissance ou les variations de la tension en tête de départ.

On commence par écrire la loi des nœuds en un nœud quelconque  $i \in \mathcal{N}$  :

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_{ii} \cdot \underline{V}_i + \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{V}_j \quad (2.10)$$

L'annexe A illustre le calcul de la matrice d'admittances complexe sur un exemple simple. Ici on retiendra que :

- $\underline{Y}_{ii}$  est l'admittance complexe propre au nœud  $i$  soit la somme des admittances – de fuite et de branche – se terminant au nœud  $i$  ;
- $\underline{Y}_{ij}$  est l'admittance complexe mutuelle entre les nœuds  $i$  et  $j$  soit l'opposé de la somme des admittances des branches reliant les nœuds  $i$  et  $j$ , si les nœuds sont reliés.

Pour écrire (2.10) sous la forme matricielle, on pose :

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \cdots & \underline{Y}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Y}_{n1} & \cdots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

On peut alors écrire  $\underline{\mathbf{I}}_{\mathcal{N}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_{\mathcal{N}}$ . Cependant, il n'est pas courant de parler en termes de courant injecté au réseau, mais plutôt en termes de puissances. Avec  $P_i$  et  $Q_i$  les puissances active et

réactive injectées au nœud  $i \in \mathcal{N}$ , on peut écrire le bilan de puissance au nœud  $i$  :

$$P_i + jQ_i = \underline{V}_i \cdot \underline{I}_i^* \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{V}_i^*} \quad (2.12)$$

En combinant (2.10) et (2.12), on peut exprimer la tension complexe au nœud  $i$  :

$$\underline{V}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{Y}_{ii} \cdot \underline{V}_i^*} - \frac{1}{\underline{Y}_{ii}} \sum_{j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}} \underline{Y}_{ij} \cdot \underline{V}_j \quad (2.13)$$

Les variations de tension en fonction des variations de puissances injectées sur le réseau peuvent donc s'exprimer sous la forme d'un système de  $2n$  équations ( $n$  équations complexes) à  $2n$  inconnues (les amplitudes et phases des tensions en chacun des  $n$  nœuds). Ce système d'équations est connu dans la littérature sous le nom « **d'équations de répartition des charges** » :

$$\begin{cases} P_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_i V_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \\ Q_i = -\sum_{j=1}^n Y_{ij} V_i V_j \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $V_i$  représente le module de  $\underline{V}_i$  et  $\delta_i$  sa phase. De même,  $\underline{Y}_{ij} = Y_{ij} e^{j\theta_{ij}}$ . L'annexe B détaille les calculs permettant d'obtenir ces équations à partir des équations des nœuds et du bilan des puissances injectées en chaque nœud du réseau.

Ces  $2n$  équations ne sont ni linéaires, ni explicites. Une **résolution numérique** est souvent privilégiée par rapport à leur résolution formelle. De nombreuses méthodes existent dans la littérature. La majorité de ces méthodes sont itératives. Le plan de tension est calculé à chaque itération et le calcul a convergé lorsque deux itérations successives donnent des résultats similaires. C'est le principe des méthodes de Gauss-Siedel [108], Newton-Raphson [108], découplant d'une part puissance active et amplitude de la tension et d'autre part puissance réactive et fréquence [110] ou encore de la méthode Backward-Forward dans le cas de réseaux radiaux [111]. Ces méthodes ont l'avantage d'offrir une bonne précision, mais ne permettent pas d'établir un modèle explicite, même approché, du comportement du réseau. Une résolution itérative semble donc peu adaptée ici. De plus, dans nos travaux, seule l'amplitude de la tension nous intéresse, les régulations de puissance réagissant uniquement en fonction de l'amplitude de la tension. Nous allons donc proposer ci-dessous un modèle explicite des variations d'amplitude de la tension aux différents nœuds en fonction des variations des puissances injectées. Pour ce faire, nous proposons de linéariser les équations de répartition des charges (2.14).

### Linéarisation des équations du réseau électrique

Le **point de fonctionnement autour duquel nous allons linéariser les équations de répartition des charges** est défini par les puissances de référence injectées en chaque nœud du réseau notées  $\mathbf{P}_{\mathcal{N}}^0 = [P_1^0 \dots P_n^0]^T$  et  $\mathbf{Q}_{\mathcal{N}}^0 = [Q_1^0 \dots Q_n^0]^T$  et par la tension en tête de départ  $V_0^0$ . Pour ce point, les équations de répartition des charges sont résolues numériquement et le plan de tension ainsi obtenu est noté  $\mathbf{V}_{\mathcal{N}}^0 = [V_1^0 \dots V_n^0]^T$  et  $\delta_{\mathcal{N}}^0 = [\delta_1^0 \dots \delta_n^0]^T$ . Dans la suite, nous

noterons  $\Delta X = X - X^0$  pour tout paramètre  $X$ .

Plusieurs méthodes existent dans la littérature pour linéariser les équations du système (2.14) autour d'un point de fonctionnement, nous n'en citerons ici que deux.

1. Méthode de la chute de tension [112]

Cette méthode permet d'exprimer l'amplitude de la tension en chaque nœud en fonction de la tension du nœud infini et du cumul des chutes de tension dans les branches en amont du nœud considéré. Ainsi, il est proposé par [112] d'écrire les équations des mailles du réseau sous la forme du théorème de Thévenin généralisé :

$$\underline{\mathbf{V}}_{\mathcal{N}} = \mathbf{1}_n V_0 + \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{\mathcal{N}} \quad (2.15)$$

Avec  $V_0 \in \mathbb{R}$  la tension de référence du nœud infini prise comme référence des phases et  $\mathbf{1}_n$  un vecteur de « 1 » de taille  $n$ . Ici  $\underline{\mathbf{Z}}$  représente la matrice d'impédances complexes du réseau calculée comme l'inverse de la matrice d'admittance  $\underline{\mathbf{Y}}$  définie précédemment. On pose  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  les matrices telles que  $\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{R} + j\mathbf{X}$ . On peut remarquer que pour tout  $(i, j) \in \mathcal{N}^2$ ,  $\mathcal{R}_{ij}$  est une composante de  $\mathbf{R}$  qui représente la somme des résistances des branches qui se trouvent en amont du nœud  $i$  et en amont du nœud  $j$  et  $\mathcal{X}_{ij}$  peut être défini de la même manière à partir des réactances des branches.

Pour déterminer l'amplitude des tensions à partir de l'équation complexe (2.15), on peut donc écrire que :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{N}} = \sqrt{\left(\mathbf{1}_n V_0 + \frac{\mathbf{R}}{V_0} \mathbf{P}_{\mathcal{N}}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{X}}{V_0} \mathbf{Q}_{\mathcal{N}}\right)^2} \quad (2.16)$$

Afin de pouvoir expliciter les variations d'amplitude de la tension de façon linéaire avec les variations des puissances injectées et de la tension en tête de départ, une hypothèse supplémentaire est nécessaire.

**Hypothèse 8.** *Les variations des puissances de fuites dans les branches du réseau sont négligeables devant celles des puissances injectées aux différents nœuds du réseau.*

À partir de cette écriture, on peut approcher l'expression du vecteur des modules des tensions en chacun des nœuds du réseau par :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{N}} \sim \mathbf{1}_n V_0 + \frac{\mathbf{R}}{V_0} \mathbf{P}_{\mathcal{N}} + \frac{\mathbf{X}}{V_0} \mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \quad (2.17)$$

Ainsi, on peut exprimer les variations d'amplitude de la tension autour du point de fonctionnement par :

$$\Delta \mathbf{V}_{\mathcal{N}} \sim \mathbf{1}_n \Delta V_0 + \frac{\mathbf{R}}{V_0} \Delta \mathbf{P}_{\mathcal{N}} + \frac{\mathbf{X}}{V_0} \Delta \mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \quad (2.18)$$

Ainsi, nous avons un **modèle linéaire et explicite des variations de tension construit à partir du comportement physique du réseau** moyennant une hypothèse sur les courants de fuites. La validité de cette hypothèse sera discutée sur le cas d'application (partie 2.3.5). La deuxième méthode propose une approche numérique plutôt que physique du problème.

## 2. Linéarisation des variations de la fonction implicite

En partant des équations de répartition des charges (2.14), on peut déduire qu'il existe une certaine **fonction implicite**, que l'on notera  $\mathbf{F}$ , qui permet d'écrire le plan de tension en fonction des puissances injectées :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{N}} = \mathbf{F} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathcal{N}} \\ \mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \\ V_0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.19)$$

Cette fonction ne peut pas être explicitée, mais on peut en **calculer la valeur en différents points de fonctionnement** grâce aux méthodes de résolution numérique de type itératif citées précédemment. Ici, on propose de linéariser le comportement de la fonction  $\mathbf{F}$  par rapport aux variations de puissances et de tension autour du point de fonctionnement défini par  $\mathbf{P}^0$ ,  $\mathbf{Q}^0$  et  $V_0^0$ . Pour ce faire, la fonction est assimilée à son gradient par rapport à chacune des variables autour du point de fonctionnement. Le gradient de la fonction  $\mathbf{F}$  ne peut pas s'explicitier, cependant, on peut l'approcher numériquement en calculant les termes de la matrice jacobienne de la fonction. Le vecteur des termes en fonction de  $P_i$  peut, pour  $\Delta P_i$  suffisamment petit, s'exprimer comme suit :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{P}_i} \right|_0 \sim \frac{\mathbf{F} \left( \left[ \mathbf{P}_{\mathcal{N}}^0 \mathbf{Q}_{\mathcal{N}}^0 V_0^0 \right]^T + [0 \dots \Delta P_i \dots 0]^T \right) - \mathbf{F} \left( \left[ \mathbf{P}_{\mathcal{N}}^0 \mathbf{Q}_{\mathcal{N}}^0 V_0^0 \right]^T - [0 \dots \Delta P_i \dots 0]^T \right)}{2 \times \Delta P_i} \quad (2.20)$$

On pose  $\nabla \mathbf{F}_{P_{\mathcal{N}}}^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice dont chaque colonne  $i \in \{1, \dots, n\}$  est le vecteur des gradients de  $\mathbf{F}$  par rapport aux variations de la puissance active injectée au nœud  $i$  (i.e.  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{P}_i$ ). De même, on définit  $\nabla \mathbf{F}_{Q_{\mathcal{N}}}^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\nabla \mathbf{F}_{V_0}^0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  grâce aux gradients de  $f$  par rapport aux variations de puissances réactives injectées et de la tension en tête de départ.

Finalement, on propose de linéariser le comportement de la fonction implicite autour du point de fonctionnement, on peut alors appliquer le théorème de superposition et écrire :

$$\Delta \mathbf{V}_{\mathcal{N}} \sim \nabla \mathbf{F}_{V_0}^0 \Delta V_0 + \nabla \mathbf{F}_{P_{\mathcal{N}}}^0 \Delta \mathbf{P}_{\mathcal{N}} + \nabla \mathbf{F}_{Q_{\mathcal{N}}}^0 \Delta \mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \quad (2.21)$$

Finalement, nous avons proposé une **méthode de linéarisation des équations de répartition des charges dont les coefficients ne peuvent s'exprimer que numériquement**. Afin de les calculer, il faut résoudre numériquement les équations de répartition des charges en plusieurs points autour du point de fonctionnement : six calculs sont nécessaires pour chaque nœud du réseau auquel des producteurs sont raccordés. Cette méthode demande donc une **phase de**

**construction en amont de l'étude** qui peut être longue si le nombre de producteurs étudiés est important. En contrepartie, on s'attend à une meilleure précision puisqu'aucune hypothèse n'est nécessaire sur les courants de fuites.

### Conclusion

Il est possible d'établir un **modèle approché linéaire et explicite du fonctionnement du réseau électrique**. Deux approches différentes ont été proposées. L'une fondée sur une compréhension des phénomènes physiques permettant un modèle de comportement analytique assurant une bonne compréhension, mais demandant de fortes hypothèses. Le deuxième modèle proposé est quant à lui numérique ce qui ne permet pas d'évaluer l'impact des différents paramètres sur le modèle, mais permet de minimiser les hypothèses nécessaires. Dans la suite (partie 2.3.5), nous proposerons une comparaison des deux méthodes présentées sur un exemple réel.

Pour l'instant, nous retiendrons qu'un modèle linéaire permet de représenter les variations d'amplitude de la tension entre phases en chacun des nœuds du réseau ( $\Delta \mathbf{U}_{\mathcal{N}}$ ) en fonction des variations des puissances injectées ( $\Delta \mathbf{P}_{\mathcal{N}}$  et  $\Delta \mathbf{Q}_{\mathcal{N}}$ ) et de la tension entre phases en tête de départ ( $\Delta U_0$ ). Dans la suite, nous noterons  $\mathbf{K}_{U_0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{K}_{P_{\mathcal{N}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{K}_{Q_{\mathcal{N}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  les matrices telles que :

$$\Delta \mathbf{U}_{\mathcal{N}} = \mathbf{K}_{U_0} \Delta U_0 + \mathbf{K}_{P_{\mathcal{N}}} \Delta \mathbf{P}_{\mathcal{N}} + \mathbf{K}_{Q_{\mathcal{N}}} \Delta \mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \quad (2.22)$$

Comme indiqué précédemment, nous souhaitons séparer l'effet des régulateurs de puissance de celui des variations des grandeurs non commandables. Pour ce faire, nous allons reprendre l'équation (2.22) en séparant les variations de puissance liées aux producteurs équipés de régulateurs de celles liées aux grandeurs non commandables. On définit  $\Delta \mathbf{U}_{PQ} \in \mathbb{R}^{n_U}$  le vecteur des variations de tension engendrées par les  $n_P$  régulateurs de puissance en chacun de  $n_U$  nœuds du réseau raccordant au moins un régulateur. On définit aussi  $\Delta \mathbf{U}_d \in \mathbb{R}^{n_U}$  comme le vecteur des variations de tension engendrées par les  $n_d$  grandeurs non commandables en chacun des  $n_U$  nœuds du réseau raccordant au moins un régulateur. Pour finir,  $\Delta \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_U}$  est défini comme le vecteur des variations de tension en chacun des  $n_U$  nœuds du réseau raccordant au moins un régulateur. Par le théorème de superposition, il s'exprime comme la somme des variations commandées  $\mathbf{U}_{PQ}$  et des variations non commandables  $\mathbf{U}_d$ .

Finalement, on pose  $\mathbf{K}_P \in \mathbb{R}^{n_U \times n_P^P}$  et  $\mathbf{K}_Q \in \mathbb{R}^{n_U \times n_P^Q}$  les matrices telles que :

$$\Delta \mathbf{U}_{PQ} = \mathbf{K}_P \Delta \mathbf{P} + \mathbf{K}_Q \Delta \mathbf{Q} \quad (2.23)$$

On peut donc modéliser l'impact des producteurs équipés de régulateurs sur l'amplitude de la tension aux nœuds accueillant des producteurs de façon linéaire grâce à une matrice de gains  $\mathbf{K}_{PQ} = [\mathbf{K}_P \ \mathbf{K}_Q]$ . La figure 2.20 résume le modèle proposé pour les variations de tension dues aux variations de puissances des producteurs équipés d'un régulateur.

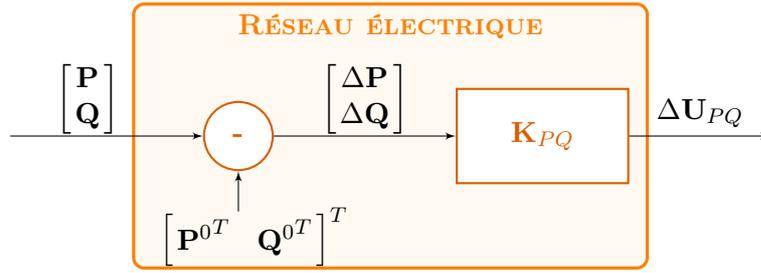


Figure 2.20 – Modèle proposé pour représenter l'influence des régulateurs sur l'amplitude de la tension

Pour ce qui est de l'impact des grandeurs non commandables, à partir de l'équation (2.22), on peut isoler l'influence des variations des grandeurs non commandables ( $\Delta P_d$ ,  $\Delta Q_d$  et  $\Delta U_{0d}$ ) sur les variations d'amplitude de la tension.

$$\Delta U_d = \mathbf{K}_d^{U_0} \Delta U_{0d} + \mathbf{K}_d^P \Delta P_d + \mathbf{K}_d^Q \Delta Q_d \quad (2.24)$$

Finalement, le modèle proposé pour représenter les variations des grandeurs non commandables peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta U_d = \mathbf{K}_d \cdot \Delta \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_d^{U_0} & \mathbf{K}_d^P & \mathbf{K}_d^Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_{0d} \\ \Delta P_d \\ \Delta Q_d \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

La figure 2.21 résume le modèle proposé pour représenter l'influence des grandeurs non commandables.

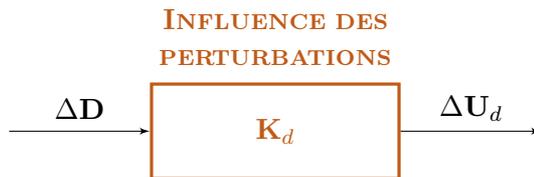


Figure 2.21 – Modèle proposé pour représenter l'influence des perturbations sur l'amplitude de la tension

Le modèle proposé pour représenter le système électrique est un **modèle algébrique** du fait du choix d'une représentation quasi stationnaire. Les **grandeurs de commandes dépendant du temps** sont les puissances injectées par les producteurs équipés de régulateurs et le **terme agrégé de perturbation**. On notera maintenant  $\Delta P(k)$ ,  $\Delta Q(k)$  et  $\Delta D(k)$ .

La figure 2.22 résume le modèle proposé pour représenter le fonctionnement du système électrique.

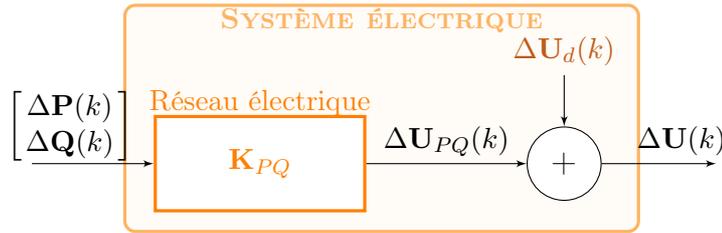


Figure 2.22 – Modèle linéarisé du système électrique

### 2.3.5 Application à un exemple

Afin d'illustrer le modèle développé ici, nous proposons d'appliquer la modélisation au réseau moyenne tension auquel est raccordé le producteur décrit dans la partie 2.2.4.

Le réseau ne raccorde qu'un seul producteur et celui-ci est équipé d'une régulation de sa puissance réactive qui adapte les variations de la consigne de puissance réactive ( $\Delta Q \in \mathbb{R}$ ) en fonction des variations de sa tension ( $\Delta U \in \mathbb{R}$ ). Le terme de perturbation va donc représenter les variations de consommation, de la puissance active du producteur et de la tension en tête de départ. Pour cette application, nous allons considérer que le seul terme de perturbation variable est la puissance active du producteur (qui n'est pas commandée par un régulateur contrairement à la puissance réactive). Les autres composantes du terme de perturbation seront considérées comme constantes sur la durée de l'étude (quelques dizaines de secondes).

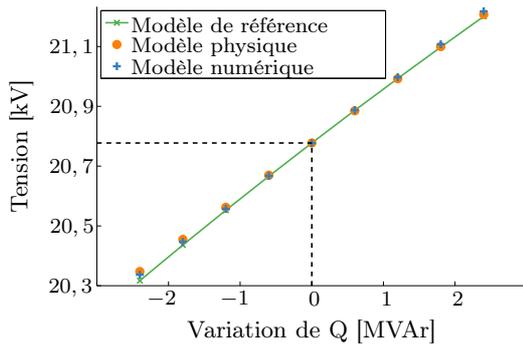
On peut alors écrire les variations de tension comme suit, à l'instant  $kT_e$  :

$$\Delta U(k) = K_{PQ} \Delta Q(k) + K_d \Delta P_d(k) \quad (2.26)$$

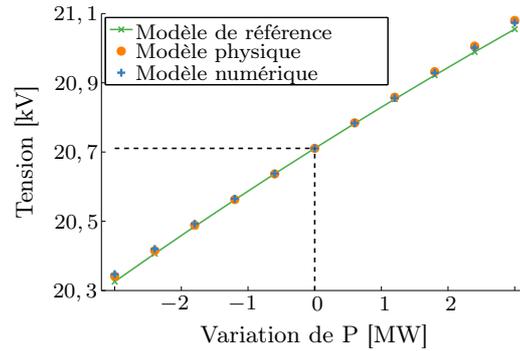
Afin de calculer la valeur des gains modélisant le système électrique, il reste à définir le point de fonctionnement autour duquel le système sera modélisé. Au vue de l'allure de la loi de commande de puissance réactive, le point de fonctionnement va être défini par  $Q = 0$  soit en zone de fonctionnement « nominal ». Au niveau des perturbations, nous avons choisi de faire les calculs dans le cas de la production moyenne (3 MW), de la consommation maximale ( $\sim 8$  MW) et de tension  $U_0$  nominale (20,4 kV). On rappelle que les seuls perturbations considérées comme variables pour ce cas d'étude sont les variations de la puissance active du producteur.

La figure 2.23 présente l'évolution de la tension avec les variations de la puissance réactive ou active du producteur calculée de trois façons différentes :

1. Avec une méthode de résolution numérique itérative (ici Backward-Forward) assurant une précision de l'ordre de  $10^{-8}$  V prise comme méthode de référence pour la comparaison ;
2. Avec la méthode physique – soit la méthode de la chute de tension – proposant un calcul du gain en fonction des caractéristiques des branches ;
3. Avec la méthode numérique – soit la linéarisation de la fonction implicite – proposant un calcul du gain à partir de deux calculs de répartition des charges (avec la méthode de référence) pour chaque terme à évaluer.



(a) Évaluation de la tension du producteur suite à une variation de puissance réactive



(b) Évaluation de la tension du producteur suite à une variation de puissance active

Figure 2.23 – Évaluation de la tension du producteur suite à une variation de puissance réactive (a) ou active (b) avec les trois méthodes proposées

La figure 2.23a montre que les variations de l'amplitude de la tension avec la puissance réactive injectée/soutirée par le producteur ont bien une allure linéaire. Les deux méthodes de linéarisation semblent adaptées et équivalentes. La méthode physique semble un peu moins précise puisqu'elle commet une erreur absolue maximale de l'ordre de 45,6 V et la méthode numérique commet une erreur allant jusqu'à 29,7 V. Ces erreurs sont négligeables devant la tension du producteur (de l'ordre de 20 kV) puisqu'elles en représentent moins de 0,25 %. La figure 2.23b permet de tirer les mêmes conclusions concernant les variations d'amplitude de la tension en réponse à des variations de puissance active. On note que, à nouveau, la méthode physique semble un peu moins précise que la méthode numérique pour estimer les variations de tension liées à des variations de puissance active. Le tableau 2.3 résume les résultats de la comparaison.

	Puissance réactive			Puissance active			Temps de Calcul <sup>1</sup> [ms]
	$K_{PQ}$ [V/MVAr]	Erreur Max [V]	Erreur Moy. [V]	$K_d$ [V/MW]	Erreur Max [V]	Erreur Moy. [V]	
Méthode 1	268,7	45,6	11,5	184,7	37,6	12,2	~ 150
Méthode 2	271,3	29,7	11,5	181,7	32,5	12,5	~ 80

Tableau 2.3 – Résultats de la comparaison entre la méthode de linéarisation physique (méthode 1) et numérique (méthode 2)

Comme on peut le voir, les deux méthodes de détermination des gains donnent des résultats similaires. On peut donc voir que l'hypothèse nécessaire pour appliquer la méthode 1 semble validée : les variations des courants de fuites sont négligeables devant les variations des courants dans les branches. La précision des deux méthodes, de l'ordre d'une dizaine de volts est suffisante pour les études menées dans ces travaux.

Finalement, les deux méthodes semblent adaptées et de précision équivalentes. Pour ce cas d'étude, la méthode numérique est un peu plus précise concernant les variations d'amplitude

1. Les calculs ont été réalisés avec un ordinateur ayant un processeur Intel Core i7 à 3,6 GHz et 16 Go de Mémoire RAM

de la tension liées aux variations de puissance réactive. Elle sera donc privilégiée pour calculer les matrices de gain modélisant le réseau. La première méthode offre quant à elle une interprétation physique du gain du réseau qui peut être utile en fonction de l'étude menée. On note aussi que les deux méthodes ont un temps de calcul relativement rapide, mais que, dans le cas de réseaux accueillant beaucoup de producteurs, la deuxième méthode risque d'être plus longue à mettre en œuvre. Afin de généraliser ces résultats, une étude comparative sur un grand nombre de réseaux devra être menée.

### 2.3.6 Conclusion

Le modèle proposé pour représenter le système électrique est fondé sur la linéarisation autour d'un point de fonctionnement des calculs de répartition des charges. Cette hypothèse nous permet d'obtenir un modèle explicite du système électrique ce qui en facilite grandement l'étude. Le modèle est composé d'une matrice de gains représentant la sensibilité de l'amplitude de la tension à des variations de la puissance active ou réactive d'un producteur. Ensuite, un terme de perturbations est rajouté pour modéliser l'influence des grandeurs non commandables. Finalement, les variations d'amplitude de la tension aux nœuds de raccordement des producteurs équipés de régulateurs peuvent s'écrire sous la forme :

$$\Delta \mathbf{U}(k) = \mathbf{K}_{PQ} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}(k) \\ \Delta \mathbf{Q}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_d \Delta \mathbf{D}(k) \quad (2.27)$$

Ce modèle a été testé sur l'exemple d'un réseau réel ce qui a permis de vérifier sa validité. Par la suite, le système électrique sera modélisé, autour d'un point de fonctionnement, comme indiqué figure 2.22.

## 2.4 Mise en évidence des risques d'instabilité

### 2.4.1 Considérations générales

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord établi un modèle des producteurs équipés de régulateurs de puissance (partie 2.2) puis un modèle linéarisé du système électrique (partie 2.3). Ce dernier est valable uniquement autour d'un point de fonctionnement. Pour proposer un modèle du système, nous exprimons le modèle des producteurs en terme de variation des grandeurs autour du point de fonctionnement.

Comme on peut le voir figure 2.15, le filtre de mesure choisi est un filtre linéaire et la loi de commande est affine par morceaux. Le modèle du producteur qui exprime  $\mathbf{Q}(k)$  à partir de la tension aux bornes des producteurs équipés de régulateurs  $\mathbf{U}(k)$  peut s'écrire de la même manière autour du point de fonctionnement. On peut donc écrire les équations du système comme suit :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}(k) \\ \Delta \mathbf{U}_f(k) = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_f(k) \\ \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}(k) \\ \Delta \mathbf{Q}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\Delta \mathbf{U}_f(k)) \\ \Delta \mathbf{U}(k) = \mathbf{K}_{PQ} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}(k) \\ \Delta \mathbf{Q}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_d \Delta \mathbf{D}(k) \end{cases} \quad (2.28)$$

Le modèle associé à ce système d'équations est présenté figure 2.24. Il synthétise toutes les étapes décrites précédemment.

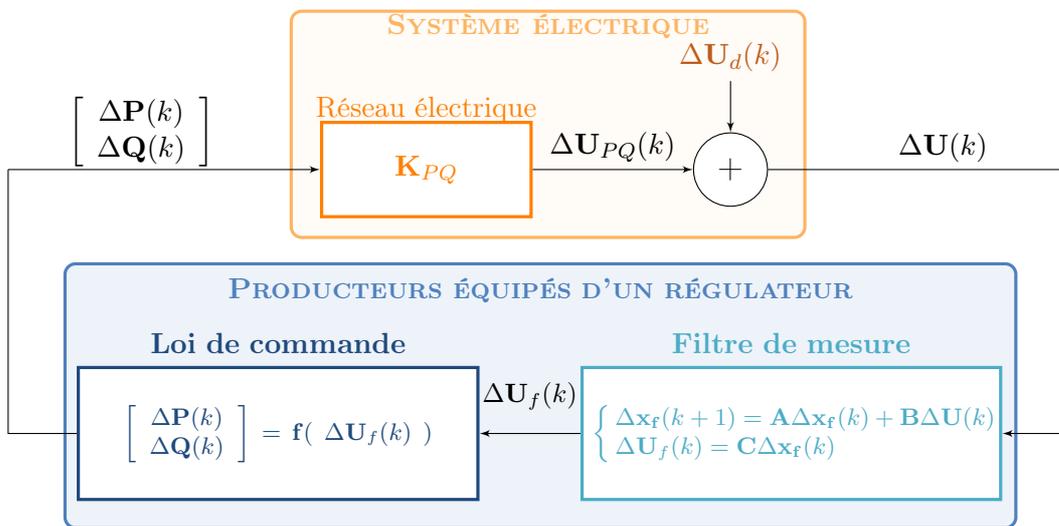


Figure 2.24 – Modèle quasi stationnaire proposé pour représenter le système composé de producteurs équipés de régulateurs de puissance raccordés au réseau de distribution

Comme on peut le voir sur la figure 2.24, lorsque les producteurs sont équipés de régulateurs de puissance, le système fonctionne alors en boucle fermée. Dans de tels cas, la réponse du système à une perturbation doit être maîtrisée afin d'en assurer la stabilité, la rapidité et la précision. **Un mauvais réglage du régulateur de puissance représente donc un danger pour la stabilité du système**, le risque majeur étant de voir apparaître des phénomènes de pompage entre plusieurs zones de fonctionnement des lois de commande et donc des oscillations de la tension. **L'existence de telles oscillations de tension et la difficulté à les étudier s'explique en partie par la non linéarité des lois de commande de puissance en fonction de la tension.**

Dans le cas des réseaux accueillant des producteurs équipés de régulateurs de puissance, afin de régler la stabilité du système il est possible d'agir sur les paramètres du filtre de mesure et sur les paramètres de la loi de commande. Cependant, les paramètres de la loi de commande sont directement liés à la participation du producteur au réglage de tension. Ainsi, nous privilégierons

le réglage des paramètres du filtre de mesure. Dans un second temps, lorsque celui-ci ne permettra pas d'assurer la stabilité du système, le réglage des paramètres de la loi de commande sera envisagé.

Avant de discuter des méthodes pour étudier la stabilité d'un tel système, nous allons illustrer les risques d'instabilité sur l'exemple réel modélisé dans les parties précédentes.

### 2.4.2 Application à un exemple

Nous reprenons ici le système réel modélisé précédemment (parties 2.2.4 et 2.3.5).

Ce régulateur a été modélisé partie 2.2.4. On retient qu'il se compose d'un filtre de mesure du premier ordre échantillonné à une seconde et de gain unitaire. Le paramètre  $a \in [0, 1]$  permet de régler la rapidité du filtre de mesure. Il s'agit en quelque sorte d'un facteur de lissage dont l'effet est illustré par la figure 2.25.

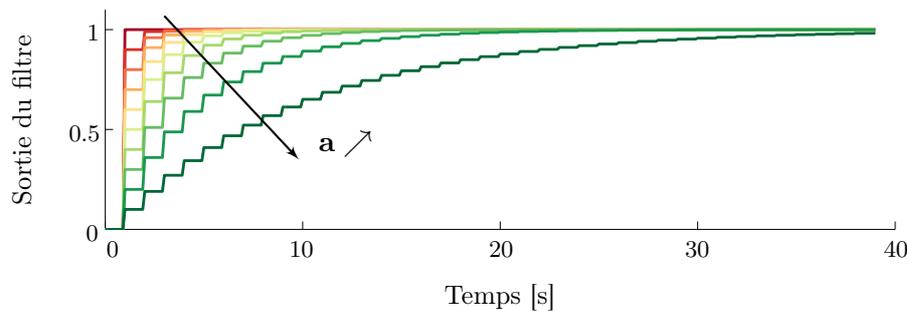


Figure 2.25 – Réponse du filtre de mesure à un échelon unitaire de tension à  $t = 0$  s pour différentes valeurs de la constante de temps discrète ( $a$ ) allant de 0 à 0.9

La loi de commande  $Q(U)$  est affine par morceaux avec cinq zones de fonctionnement comme décrit dans le tableau 2.2. Le réseau auquel est raccordé le producteur peut se modéliser sous la forme d'un gain  $K_{PQ} = 271$  V/MVAr (cf. tableau 2.3). Lors de la modélisation du réseau (partie 2.3.5), nous avons supposé que le seul terme de perturbation variable à l'échelle de quelques secondes était la puissance active du producteur et l'on avait calculé  $K_d = 182$  V/MW. Ainsi, le modèle proposé est représenté figure 2.26.

Afin d'illustrer les risques d'instabilité, le système présenté figure 2.26 est simulé grâce au logiciel Matlab<sup>®</sup>-Simulink et son comportement dynamique est étudié. La figure 2.27 représente la réponse du système à différents échelons de puissance active en partant d'une production de  $P_{d_0} = 1$  MW et pour  $a = 0, 1$ .

Afin de conclure sur la stabilité de ce système, une première définition de ce terme s'impose. Dans ces travaux, nous considérerons que **le système est stable, lorsque, au bout d'un certain temps, les éventuelles oscillations de tension sont amorties**. Il convient de noter que le système peut être considéré comme **stable même si le point de fonctionnement final**

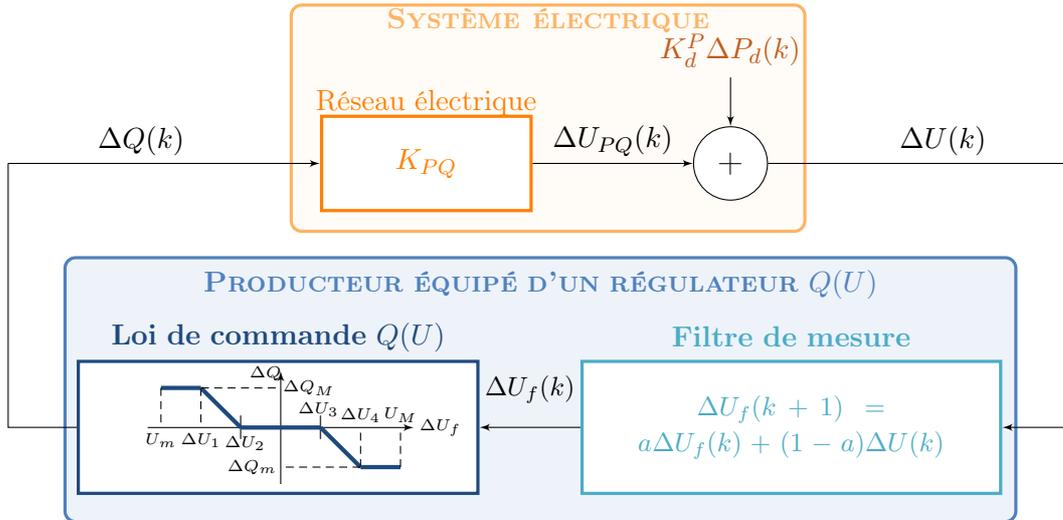
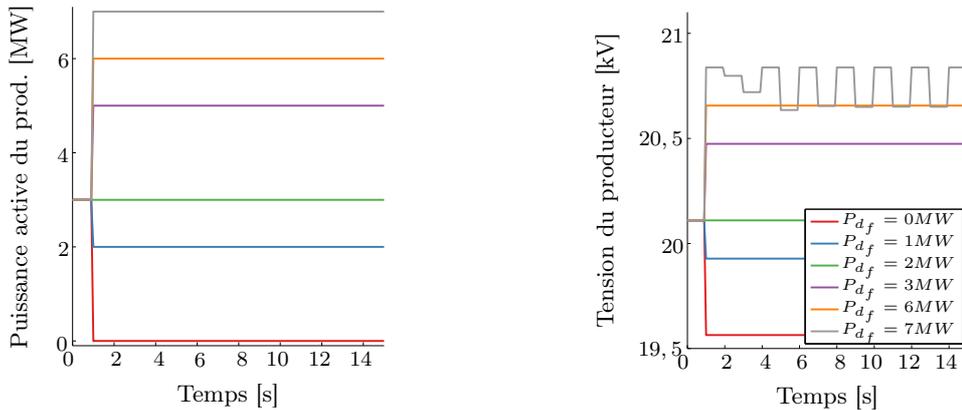


Figure 2.26 – Modèle quasi stationnaire du système étudié

(a) Échelon de puissance du producteur  $\Delta P_d$ 

(b) Tension du producteur après un échelon

Figure 2.27 – Évolution temporelle de la tension du producteur en réponse à un échelon de sa puissance active  $\Delta P_d = P_{d_f} - P_{d_0}$  pour  $a = 0,1$  et pour différentes valeurs finales  $P_{d_f}$ 

est différent du point de fonctionnement initial. Dans la suite, une formalisation de cette première définition sera proposée.

La figure 2.27b montre que le système est instable pour une perturbation de 7 MW<sup>2</sup>. En effet, pour une puissance active finale de 7 MW, la tension aux bornes du producteur oscille avec une période de deux secondes ( $2T_e$ ) et une amplitude jusqu'à 200 V. On note aussi que tous les points de fonctionnement ne sont pas instables (figure 2.27b). En effet, lorsque la puissance active finale vaut 0, 1, 2, 3 et 6 MW, il n'y a pas d'oscillation de la tension. On peut donc dire que le comportement du système est stable et ce même si le point d'équilibre après la perturbation n'est pas le même qu'avant cette dernière.

2. Il convient de noter que cette valeur est théorique car le producteur raccordé ici fait 6 MW et non 7 MW. Néanmoins, un tel échelon de perturbation peut être obtenu si les effets de plusieurs grandeurs non commandables se combinent.

Pour conclure, la stabilité du système dépend du point de fonctionnement étudié. Il semble ainsi difficile de conclure à la stabilité du système seulement après une étude empirique en simulation ou en expérimentation. **Un outil d'analyse formelle de la stabilité est nécessaire pour pouvoir généraliser les résultats observés pour quelques points de fonctionnement.**

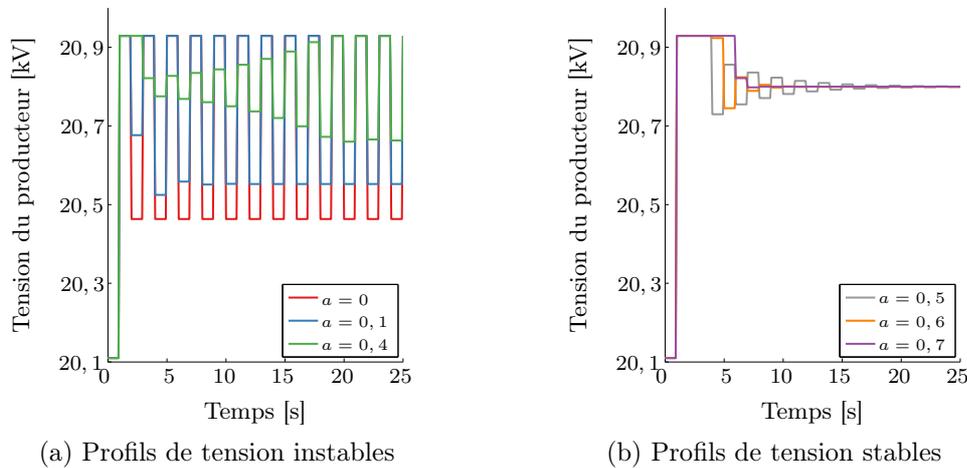


Figure 2.28 – Évolution de la tension du producteur en réponse à un échelon de perturbation pour différentes valeurs de  $a$

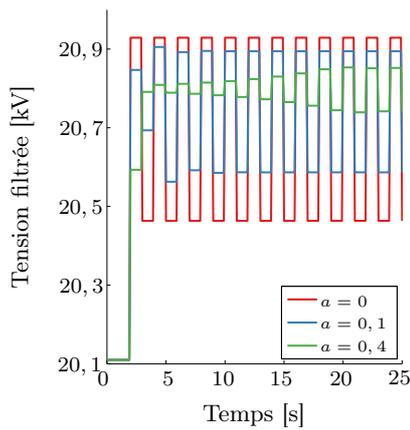
La figure 2.28 illustre l'action du filtre de mesure sur le système. En effet, cette figure représente le comportement du système pour un même échelon du terme de perturbation, mais avec différents réglages de la rapidité du filtre. On peut voir sur la figure 2.28 que la stabilité du système dépend de la valeur de  $a$ . Pour  $a$  égal à 0, 0,1 et 0,4 (figure 2.28a) le système est instable alors que pour  $a$  égal à 0,5, 0,6 et 0,7 (figure 2.28b) le système est stable. Il semble donc que plus le filtre répond lentement – plus  $a$  augmente – plus le système est stable. Ainsi, les risques d'instabilité mis en évidence peuvent – au moins en partie – être évités en réglant la rapidité du filtre.

De plus, on peut voir sur les figures 2.28 que le système, qu'il soit stable ou non, atteint son régime permanent en une vingtaine de secondes. Ceci confirme la validité de l'hypothèse 7.

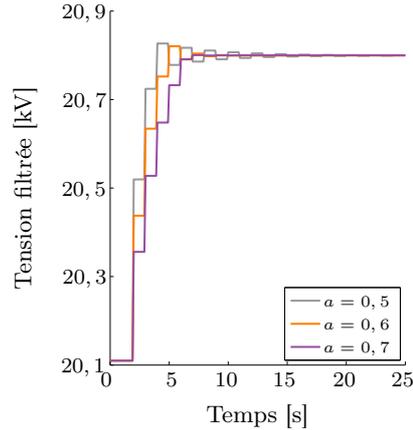
Nous proposons maintenant de nous intéresser à l'évolution de la puissance réactive des producteurs et de la tension filtrée.

Comme on peut le voir figure 2.29, nous retrouvons les mêmes résultats en matière de stabilité ainsi qu'en temps de réponse. En effet, les oscillations observées sur l'amplitude de la tension peuvent aussi l'être sur la tension filtrée et la puissance réactive. Dans la suite, nous nous contenterons d'étudier l'une des ces trois grandeurs : l'amplitude de la tension du producteur.

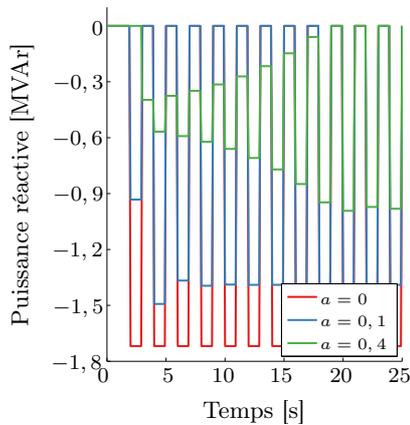
Pour conclure, nous avons montré dans cette partie que les risques pour la stabilité du système lorsque les producteurs sont équipés de régulateurs de puissance en fonction de la tension sont réels. Enfin, nous avons montré qu'un réglage de la rapidité du filtre pouvait permettre de stabiliser le comportement du système.



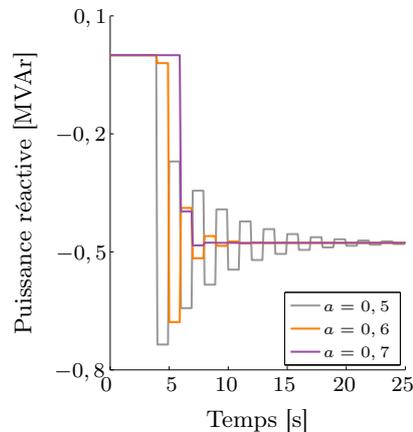
(a) Profils de tension filtrée instables



(b) Profils de tension filtrée stables



(c) Profils de puissance réactive instables



(d) Profils de puissance réactive stables

Figure 2.29 – Évolution de la tension du producteur en réponse à un échelon de perturbation pour différents valeurs de  $a$

## 2.5 Conclusion

Dans ces travaux, nous nous intéressons aux réseaux de distribution accueillant un ou plusieurs producteurs équipés de régulateurs de puissance active et/ou réactive en fonction de la tension. Dans la littérature, plusieurs travaux ont mis en évidence des risques d'instabilité pour de tels systèmes. Dans ce chapitre, nous avons proposé une modélisation adaptée à l'étude des oscillations de tension générées par les régulateurs de puissance.

Les instabilités issues des régulateurs de puissance des producteurs décentralisés ont une période ou pseudo-période supérieure au temps d'échantillonnage des régulateurs. Ce dernier étant de l'ordre d'une seconde, nous nous intéressons donc ici à des phénomènes dont la constante de temps est de l'ordre de quelques secondes. De plus, les consignes de puissance des régulateurs étant nécessairement bornées, les oscillations de tension, si elles existent, seront d'amplitude bornée.

Les caractéristiques des phénomènes que l'on souhaite observer nous ont amenés à choisir un modèle quasi stationnaire. Ceci permet de représenter en régime permanent les phénomènes

beaucoup plus rapides et beaucoup plus lents que les oscillations que l'on souhaite étudier. Ceci nous a amenés à ne modéliser la dynamique du producteur que par la dynamique de son régulateur de puissance. De plus, nous avons choisi de modéliser le réseau par les équations de répartition des charges que l'on a linéarisées autour d'un point de fonctionnement choisi comme le milieu des gammes de réglage de puissance. L'évolution des grandeurs qui ne sont pas contrôlées par un régulateur de puissance est modélisée sous la forme de terme de perturbations dont l'effet est lui aussi linéarisé.

Finalement, le modèle proposé pour étudier les éventuelles oscillations induites par l'introduction de régulateurs de puissance est décrit figure 2.24.

Ce modèle a été illustré sur un cas réel, un départ moyenne tension accueillant une ferme éolienne de 6 MW. Le comportement du système étudié a été simulé pour plusieurs perturbations et pour plusieurs paramètres du filtre de mesure. Cette étude empirique a permis de mettre en évidence le risque d'instabilité des départs accueillant des régulateurs de puissance, mais aussi l'impact de la rapidité du filtre sur la stabilité de la tension. Ainsi, il apparaît, dans le cas étudié, qu'en réglant la rapidité du filtre de mesure, la stabilité du système peut être assurée. Dans ces travaux, nous allons donc tenter de proposer des réglages de la rapidité du filtre, en fonction des paramètres du système, afin d'assurer la stabilité de la tension sur le réseau.

Nous avons montré, grâce au cas d'étude, l'insuffisance des méthodes empiriques pour conclure sur la stabilité. En effet, lorsque le système est instable, il peut exister des points de fonctionnement stables. Ainsi, les observations faites sur quelques points de fonctionnement semblent difficilement généralisables. C'est pour cela que nous proposons de développer un outil d'analyse formelle de la stabilité dont la construction est détaillée au chapitre 3.



---

## Chapitre 3

# Analyse formelle de la stabilité

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	64
3.2	Méthode proposée . . . . .	67
3.3	Application au cas d'étude . . . . .	84
3.4	Discussions . . . . .	100
3.5	Conclusion . . . . .	107

---

### Résumé

Nous présenterons dans ce chapitre une méthode d'étude formelle de la stabilité des systèmes hybrides affines par morceaux comme par exemple un réseau électrique de distribution accueillant des producteurs équipés de régulateurs de puissance.

La méthode proposée se compose de trois étapes :

1. construction d'un système de transition hybride à partir de la description du système physique faite au chapitre 2 ;
2. abstraction discrète de ce système de transition hybride en système discret afin d'associer à chaque zone de fonctionnement linéaire un mode discret ;
3. raffinement de la définition des modes discrets de manière à pouvoir conclure sur la stabilité du système hybride en étudiant uniquement les trajectoires du système discret.

Nous terminerons ce chapitre en discutant de la possibilité d'utiliser cet outil dans le cadre des études de raccordement menées par les gestionnaires de réseaux de distribution.

## 3.1 Introduction

Grâce au chapitre précédent, l'existence de risques pour la stabilité de réseaux accueillant des producteurs équipés d'un régulateur de puissance a été établie. Il a aussi été souligné qu'une étude empirique est insuffisante pour conclure à la stabilité du système. Ainsi, une étude formelle de la stabilité est nécessaire afin de pouvoir conclure lorsque le système est stable ou lorsqu'il ne l'est pas.

L'objectif de ce chapitre est donc de proposer aux gestionnaires de réseaux de distribution un outil leur permettant de choisir des réglages des régulations des producteurs assurant la stabilité du réseau auquel ils sont raccordés. La méthode d'analyse de stabilité sur laquelle sera élaboré cet outil est construite en fonction des caractéristiques du système physique étudié et de la finalité de l'étude. C'est pour cela que nous commençons par définir clairement les objectifs de cette méthode.

### 3.1.1 Objectifs

Nous pouvons remarquer que le modèle proposé pour ces travaux (figure 2.24) est linéaire si et seulement si la loi de commande de puissance en fonction de la tension l'est. Or, dans la littérature, ce type de loi n'est généralement pas linéaire du fait par exemple des saturations. C'est le cas de la régulation de puissance réactive choisie par Enedis (figure 1.7) qui est affine par morceaux avec cinq zones de fonctionnement. La méthode formelle d'étude de la stabilité que nous allons proposer devra donc être adaptée à l'étude des **systèmes non linéaires** de ce type.

Le but de l'étude est de prévoir, lors du raccordement d'un nouveau producteur équipé d'un régulateur de puissance, si le système sera stable ou non et de choisir en conséquence les paramètres du régulateur du producteur. Ainsi, nous souhaitons proposer une méthode permettant de conclure lorsque le système est stable et lorsqu'il est instable.

Le système linéaire par morceaux sera dit **stable** si, quelle que soit la condition initiale, au bout d'un certain temps, le point de fonctionnement du système reste dans la même zone de fonctionnement linéaire et que celle-ci est stable au sens de la stabilité d'un système linéaire. Au contraire, il sera dit **instable** si le point de fonctionnement ne reste jamais dans une des zones de fonctionnement ou qu'il reste dans une zone instable au sens de l'instabilité d'un système linéaire.

Pour pouvoir construire la méthode d'étude de stabilité, il convient aussi de remarquer que l'on peut voir le système comme un **système à commutation**, c'est à dire un système dont les paramètres changent avec son état ou avec le temps. Dans le cas de la loi de commande affine par morceaux retenue par Enedis (figure 1.7), les paramètres cette loi changent en fonction de la valeur de la tension filtrée. Le système présente **cinq zones de fonctionnement** distinctes à l'intérieur desquelles l'évolution du système est linéaire.

Ce type de systèmes appartient à la famille des **systèmes hybrides**. Il s'agit de systèmes mélangeant des parties continues et discrètes, que ce soit des dynamiques pouvant être à temps

continu et discret ou des signaux pouvant être définis sur un ensemble continu ou discret [113]. Dans ce cas particulier, le système évolue à temps discret avec des signaux définis sur des ensembles continus (comme la tension, la puissance réactive, etc.) et un signal discret, le mode de fonctionnement dans lequel se trouve la loi de commande.

Dans ce chapitre, nous allons donc proposer une méthode formelle pour l'étude de la stabilité d'un système hybride affine par morceaux.

### 3.1.2 État de l'art des méthodes existantes

Dans la littérature, beaucoup de méthodes existent pour étudier la stabilité des systèmes hybrides affines par morceaux et plus généralement des systèmes hybrides non linéaires. On citera par exemple la **méthode du premier harmonique** [114]. Cette méthode propose l'analyse formelle de l'existence d'auto-oscillations par le calcul du gain complexe équivalent à la partie non linéaire. Cette méthode ne s'applique qu'aux systèmes « simples » car elle implique deux hypothèses fortes :

- la **séparabilité** des dynamiques linéaire et non linéaire. Cette hypothèse est vérifiée dans notre cas, en effet la partie linéaire regroupe le comportement du filtre de mesure du producteur et du système électrique et le comportement non linéaire est causé uniquement par la loi de commande de puissance.
- le **comportement passe-bas du système linéaire**. Cette hypothèse permet de limiter l'étude des instabilités à l'étude du premier harmonique des signaux. Dans notre cas, aucune hypothèse n'est pour l'instant faite sur « l'efficacité » du filtre de mesure du producteur, cette hypothèse n'est donc pas vérifiée.

Depuis, notamment avec les progrès des puissances de calculs disponibles, de nouvelles méthodes ont été proposées dans la littérature permettant ainsi d'étendre le domaine de validité de l'étude.

Les méthodes les plus souvent utilisées pour étudier la stabilité de systèmes non linéaires quelconques sont fondées sur une **approche par fonctions de Lyapunov**. La théorie de Lyapunov propose d'établir une condition suffisante à la stabilité d'un système autour d'un point de fonctionnement sans en résoudre les équations [115]. Elle est donc particulièrement intéressante dans le cas de systèmes non linéaires. Sa principale difficulté repose sur la formulation d'une fonction de Lyapunov permettant de montrer la stabilité du système. De nombreux travaux sont axés sur le développement numérique de fonctions de Lyapunov adaptées à certains types de systèmes. Par exemple, les auteurs de [116] s'intéressent à la formulation d'une fonction de Lyapunov adaptée à l'étude de systèmes affines par morceaux particuliers. Par la suite [117] et [118] étendent la validité de cette étude en proposant des fonctions de Lyapunov elles-aussi affines par morceaux. On peut aussi penser aux travaux menés dans le cas de **systèmes de Lur'e**. Il s'agit de systèmes bouclés dont la chaîne directe est composée d'un système linéaire invariant et dont la chaîne de retour est composée d'un système non-linéaire dont les paramètres peuvent dépendre du temps.

La partie non linéaire noté  $\phi(y)$  vérifie une condition de cône [119] :

$$\exists(a, b) : a < b \quad \text{et} \quad \forall y, \quad a \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq b \quad (3.1)$$

Par exemple, les auteurs de [120] et [121] proposent la construction d'une fonction de Lyapunov pour l'étude de systèmes de Lur'e à temps discret.

Finalement, on retiendra que l'approche par fonctions de Lyapunov propose une analyse numérique de la stabilité d'un système. Cependant, elle ne s'applique qu'à l'étude de la **stabilité autour d'un point d'équilibre** or, les systèmes étudiés dans ces travaux ont a priori plusieurs points d'équilibre dont l'atteinte dépend des conditions initiales. De plus, ce type de méthodes formule une **condition suffisante à la stabilité** et ne permet donc pas de conclure à l'instabilité du système. Nous avons donc préféré aborder notre problème par une autre approche.

En effet, on souhaite que la méthode formelle choisie permette de conclure lorsque le système est stable, mais aussi lorsqu'il est instable. La non linéarité du système étant en réalité souvent affine par morceaux, on peut remarquer que le fonctionnement du système sera linéaire par morceaux. Dans la littérature, ce type de systèmes peut être représenté sous la forme d'un automate discret. Ceci mène à considérer les méthodes d'étude de stabilité fondées sur l'**abstraction discrète** d'un système hybride [122].

L'abstraction discrète d'un système est une transformation d'un système en une nouvelle représentation de ce système, choisie de manière à préserver les propriétés importantes, comme la stabilité, et à masquer les détails inutiles. L'auteur de [123] a introduit la notion de **bisimulation** pour les systèmes de transition continus. Il s'agit d'une partition finie de l'espace d'état (qui pouvait être infini pour le système d'origine) sur laquelle les propriétés de logique de temps arborescent (« Computational Tree Logic » [124]) – incluant les propriétés de stabilité des trajectoires – sont vérifiées de façon équivalente au système initial et plus facilement. La construction de la bisimulation d'un système hybride a été proposée par [125]. Elle est obtenue de façon itérative à partir de l'**étude des prédécesseurs** d'une partition de l'espace d'état. Lorsque le calcul converge, la bisimulation du système est obtenue. Son étude permet de conclure sur la stabilité, mais aussi l'instabilité du système puisque **la stabilité de bisimulation est équivalente à celle du système initial**.

Il convient de noter que **la convergence du calcul itératif de construction de la bisimulation n'est pas garantie**. En cas de non-convergence, le système discret obtenu n'est pas équivalent au système initial notamment en matière de stabilité. Il n'est alors pas possible de conclure sur le système initial.

Pour conclure, l'étude de la littérature nous a permis d'identifier le potentiel des méthodes d'abstraction discrète et plus précisément de construction de la bisimulation pour pouvoir conclure sur la stabilité du système. Cependant, il a été montré qu'il existe des cas pour lesquels la construction de la bisimulation ne converge pas. On dit que la construction de la bisimulation est un problème non décidable [126]. Ainsi, nous ne pouvons pas garantir qu'il sera possible de conclure dans tous les cas grâce à cette méthode.

### 3.1.3 Besoin d'une nouvelle méthode pour l'étude de la stabilité

Les systèmes étudiés dans ces travaux sont **hybrides affines par morceaux**. Les méthodes d'abstraction discrète et plus précisément de construction de la bisimulation du système semblent particulièrement adaptées à l'étude de leur stabilité. Cependant, nous souhaitons une méthode d'étude de la stabilité capable de conclure dans tous les cas, même en cas de non-convergence du calcul de bisimulation.

Pour ces travaux, nous proposons donc une méthode fondée sur la construction de la bisimulation du système hybride affine par morceaux qui étudie la stabilité des abstractions discrètes construites à chaque itération de l'algorithme de bisimulation. En effet, la stabilité de cette abstraction discrète n'est pas équivalente à celle du système hybride initial, mais peut nous permettre de tirer des informations sur la stabilité du système et ainsi de conclure avant la construction de la bisimulation du système.

De plus, dans la méthode proposée, nous utiliserons l'**analyse des graphes intermédiaires** pour orienter le calcul réalisé à l'itération suivante de la bisimulation vers les sous-domaines intéressants pour l'étude de stabilité. Ceci permet de réduire le nombre et la durée des itérations nécessaires avant de pouvoir conclure sur la stabilité du système.

Pour finir, nous proposons dans ce chapitre de développer une méthode d'étude de la stabilité d'un système hybride affine par morceaux qui permette de **conclure lorsque le système est stable mais aussi lorsqu'il est instable**. Cette méthode est construite à partir du calcul itératif de la bisimulation du système et propose de perfectionner l'analyse de l'abstraction discrète construite à chaque itération afin de pouvoir conclure même lorsque le calcul de la bisimulation ne converge pas.

## 3.2 Méthode proposée

La méthode d'étude de stabilité repose sur la formulation du système sous la forme d'un système de transition hybride. Ensuite, ce système sert de base à la construction d'un système discret grâce aux techniques d'abstraction discrète. Toutefois, le système discret ainsi construit n'est pas nécessairement équivalent au système hybride initial, particulièrement en ce qui concerne sa stabilité. Pour tenter d'obtenir une bisimulation du système hybride, un calcul itératif est proposé. À chaque étape de ce calcul, soit avant l'obtention de la bisimulation, la stabilité du graphe correspondant au système discret est analysée afin de tenter de tirer des conclusions sur la stabilité du système hybride sans avoir à attendre la convergence du calcul.

Nous allons tout d'abord décrire la construction d'un système de transition hybride à partir du système physique décrit au chapitre 2. Les notations sont définies dans le cas général partie 3.2 et sont ensuite appliquées (partie 3.3) au cas d'étude décrit précédemment.

### 3.2.1 Étape 1 : Modélisation du système sous la forme d'un système hybride

#### Objectif

Le système étudié ici correspond à un réseau électrique de distribution accueillant des producteurs décentralisés équipés d'un régulateur de puissance en fonction de leur tension. Ce système est modélisé comme décrit figure 2.24. Par la suite, on fera l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 9.** *La loi de commande de la puissance d'un producteur en fonction de sa tension est affine par morceaux.*

On note que rien n'impose que les producteurs aient la même loi de commande.

Une **loi agrégée pour l'ensemble des producteurs** peut être définie. Elle sera aussi affine par morceaux et sera définie sur l'ensemble  $\mathcal{U}_f \subset \mathbb{R}^{n_U}$  du vecteur agrégé des tensions filtrées avec  $n_U \in \mathbb{N}^*$  le nombre de nœuds accueillant des producteurs équipés d'un régulateur de puissance.  $n_P \in \mathbb{N}^*$  désigne le nombre de régulateurs de puissance – active ou réactive – raccordés au réseau. Pour chacun des  $n_P$  régulateurs, on note  $n_{PQ_j}$  le nombre de zones de fonctionnement affine de la loi de commande du  $j$ -ème régulateur. Dans la suite,  $n_{PQ} \in \mathbb{N}^*$  désigne le nombre de zones de fonctionnement affine de la loi de commande agrégée. Il vaut au plus le produit des  $n_{PQ_j}$  sur tous les régulateurs. Chaque zone de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ} = \{1, \dots, n_{PQ}\}$  correspond à un sous-ensemble des tensions filtrées  $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{U}_f$  dans lequel la loi de commande des variations de puissance  $[\Delta \mathbf{P}^T, \Delta \mathbf{Q}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_P}$  en fonction des variations du vecteur des tensions filtrées  $\Delta \mathbf{U}_f \in \mathcal{I}_i \subset \mathcal{U}_f$  est affine.

$$\forall \Delta \mathbf{U}_f \in \mathcal{I}_i, \quad \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(i) \Delta \mathbf{U}_f + \mathbf{F}(i) \quad (3.2)$$

On note  $\mathbf{G}(i) \in \mathbb{R}^{n_P \times n_U}$  la matrice contenant les  $n_P$  coefficients directeurs, dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement, de chacune des lois de commande de puissance active ou réactive en fonction de la tension. De même,  $\mathbf{F}(i) \in \mathbb{R}^{n_P}$  représente le vecteur des ordonnées à l'origine dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement.

La nature du système étudié confère aux matrices  $\mathbf{G}(i)$  une structure particulière. En effet, ces matrices lient la puissance de chaque producteur équipé d'un régulateur à sa tension filtrée. Ainsi, la ligne  $l$  de la matrice  $\mathbf{G}(i)$  qui permet de calculer la consigne de puissance du producteur  $l$  situé au  $p$ -ème nœud de raccordement contient un seul terme non nul qui se trouve sur la colonne  $p$  et qui est égal au coefficient directeur de la loi de commande du producteur  $l$  dans la zone de fonctionnement  $i$ .

Nous illustrons ces notations dans le cas d'un réseau accueillant deux producteurs, l'un, raccordé au nœud 1, équipé d'un régulateur de puissance active en fonction de la tension filtrée à ses bornes ( $\Delta U_{f_1}$ ) avec  $\Delta P_1(k) = \sigma_P(i_P) \cdot \Delta U_{f_1}(k) + \gamma_P(i_P)$  où  $i_P$  désigne la zone de fonctionnement parmi les  $n_{PQ}^{(P)}$  zones de la loi de commande de puissance active en fonction de la tension. Le deuxième producteur, raccordé au nœud 2, est équipé d'un régulateur de puissance réactive en fonction de la tension filtrée à ses bornes ( $\Delta U_{f_2}$ ) avec  $\Delta Q_2(k) = \sigma_Q(i_Q) \cdot \Delta U_{f_2}(k) + \gamma_Q(i_Q)$  avec

$i_Q$  la zone de fonctionnement parmi les  $n_{PQ}^{(Q)}$  zones de fonctionnement de cette loi de commande. Finalement, dans cet exemple, nous avons  $n_U = n_P = 2$ ,  $n_{PQ} = n_{PQ}^{(P)} \cdot n_{PQ}^{(Q)}$  et  $i$  l'indice de la zone de fonctionnement de la loi de commande agrégée tel que  $i \in \{1, \dots, n_{PQ}\}$ . Les variations des puissances peuvent être calculées en fonction des variations des tensions filtrées aux bornes des producteurs.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1(k) \\ \Delta Q_2(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_P(i) & 0 \\ 0 & \sigma_Q(i) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(i)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_{f_1}(k) \\ \Delta U_{f_2}(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_P(i) \\ \gamma_Q(i) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(i)} \quad (3.3)$$

Dans ce cas particulièrement simple, pour chaque  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ , la matrice  $\mathbf{G}(i)$  est une matrice diagonale.

En revenant au cas général, on peut remarquer que les domaines  $\mathcal{I}_i$  sont construits comme l'intersection de  $n_U$  intervalles. Le  $j$ -ème intervalle représente l'ensemble des tensions filtrées du régulateur de puissance  $j$  telles que  $\Delta U_{f_j}$  soit dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement de la loi de commande du régulateur de puissance. Ces intervalles sont donc fermés et définis par des contraintes linéaires du type  $\Delta U_{f_j}^{(-)} \leq \Delta U_{f_j} \leq \Delta U_{f_j}^{(+)}$ . Ainsi,  $\mathcal{I}_i$  est aussi un ensemble fermé défini par des contraintes linéaires. On peut donc dire que  $\mathcal{I}_i$  est un **polyèdre de dimension**  $n_U$ . On peut aussi noter que, comme la loi de commande est définie sur l'ensemble de l'espace des variations des tensions filtrées  $\mathcal{U}_f$ , l'ensemble des domaines  $(\mathcal{I}_i)_{i \in \mathcal{N}_{PQ}}$  représente une **partition** de  $\mathcal{U}_f$ . Les intervalles définissant chaque zone de fonctionnement de la loi de commande agrégée étant construits à partir d'inégalités larges, on peut dire que les domaines  $\mathcal{I}_i$  ne sont **pas disjoints**. La frontière entre deux polyèdres non disjoints  $\mathcal{I}_i$  et  $\mathcal{I}_j$  est un ensemble de dimension strictement inférieure à  $n_U$ .

Revenons à l'exemple à deux producteurs décrit ci-dessus. Soit  $(\alpha_i^{(-)}, \alpha_i^{(+)})$  les bornes de la  $i$ -ème zone de fonctionnement de la loi de commande de puissance active en fonction de la tension du producteur 1. On peut alors écrire :

$$\forall \Delta U_{f_1}(k), \quad \alpha_i^{(-)} \leq \Delta U_{f_1}(k) \leq \alpha_i^{(+)} \quad \Rightarrow \quad \Delta P_1(k) = \sigma_P(i) \times \Delta U_{f_1}(k) + \gamma_P(i) \quad (3.4)$$

On remarque que la loi de commande est définie sur un espace continu des tensions filtrées  $\Delta U_{f_1}$  donc pour toute zone de fonctionnement  $i$  telle que  $2 \leq i \leq n_{PQ}^P$ , nous avons  $\alpha_{i-1}^{(+)} = \alpha_i^{(-)}$ . On définit de même  $(\beta_i^{(-)}, \beta_i^{(+)})$  les bornes de la  $i$ -ème zone de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . Les domaines  $\mathcal{I}_i$  de fonctionnement de la loi de commande agrégée sont construits à partir de ceux des deux lois élémentaires.

$$\mathcal{I}_i = \{\alpha_i^{(-)} \leq \Delta U_{f_1}(k) \leq \alpha_i^{(+)}\} \cap \{\beta_i^{(-)} \leq \Delta U_{f_2}(k) \leq \beta_i^{(+)}\} \quad (3.5)$$

Finalement, dans le cas général, on peut dire que le comportement dynamique du système dépend du mode de fonctionnement dans lequel il se trouve. Celui-ci est déterminé par la valeur du vecteur des tensions filtrées qui elle-même dépend de la perturbation  $(\Delta \mathbf{U}_d)$  et du passé du

système  $(\Delta \mathbf{x}_f)$ . Ainsi, pour décrire le comportement du système à chaque instant  $kT_e$ , nous choisissons comme **variable d'état continue le vecteur des états des filtres de mesure des régulateurs**, noté  $\Delta \mathbf{x}_f(k) \in \mathcal{X}_f \subset \mathbb{R}^{n_f}$  **et le terme de perturbation**  $\Delta \mathbf{U}_d(k) \in \mathcal{U}_d \subset \mathbb{R}^{n_U}$ . Dans la suite, le vecteur d'état du système sera noté  $\Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X} = \mathcal{X}_f \times \mathcal{U}_d$ .

$$\Delta \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_f(k) \\ \Delta \mathbf{U}_d(k) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Il convient de noter que l'espace d'état  $\mathcal{X}$  du système sera considéré comme borné. En effet, les valeurs prises par le vecteur des tensions filtrées et le vecteur des perturbations ne peuvent pas dépasser certains seuils en cas de « fonctionnement normal » du système. C'est sous cette condition qu'il est demandé aux producteurs de participer au réglage de tension. Lorsque cette dernière dépasse les bornes admissibles de « bon fonctionnement » alors la sécurité du système ne peut plus être garantie et d'autres réglages et automates prennent le relais pour rétablir la tension dans les zones admissibles de fonctionnement. Dans la suite, on fera donc l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 10.** *L'espace d'état continu du système  $\mathcal{X}$  est borné.*

Afin de représenter la dynamique du système, il faut expliciter la dynamique du vecteur d'état du filtre et du terme de perturbation. On fera, pour l'instant, l'hypothèse que **le terme de perturbation peut être considéré comme constant** sur la durée de l'étude de la dynamique du système. Comme indiqué chapitre 2, l'échelle de temps qui nous intéresse est de l'ordre de quelques secondes. Ainsi, l'hypothèse proposée revient donc à considérer que les puissances des consommateurs, des producteurs sans régulateurs, et des autres termes de perturbation peuvent être considérées comme constantes sur quelques secondes.

**Hypothèse 11.** *Le terme de perturbation est considéré constant, il sera noté  $\Delta \mathbf{U}_d \in \mathbb{R}^{n_U}$ .*

Ainsi, la dynamique du système peut s'exprimer grâce aux équations (2.28) et (3.2) avec  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  tel que  $\Delta \mathbf{U}_f(k) \in \mathcal{I}_i$ .

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_f(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_{PQ}\mathbf{G}(i)\mathbf{C}) \Delta \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{U}_d(k) + \mathbf{BK}_{PQ}\mathbf{F}(i) \\ \Delta \mathbf{U}_d(k+1) = \Delta \mathbf{U}_d(k) \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec un tel choix de vecteur d'état, l'espace d'état du système n'est pas  $\mathcal{U}_f$ , mais  $\mathcal{X}$ . Nous allons donc définir l'ensemble des domaines  $(\mathcal{D}_i)_{i \in \mathcal{N}_{PQ}}$  représentant la partition de l'espace d'état  $\mathcal{X}$  construite à partir de l'ensemble  $(\mathcal{I}_i)_{i \in \mathcal{N}_{PQ}}$  partition non disjointe de  $\mathcal{U}_f$ .

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \Delta \mathbf{U}_f \in \mathcal{I}_i \Leftrightarrow \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_i \subset \mathcal{X} \quad (3.8)$$

Par la suite, on notera  $n_x = n_f + n_U$  la dimension du vecteur d'état. Chaque domaine  $\mathcal{D}_i$  est de dimension  $n_x$  et est construit comme l'intersection de  $\mathcal{I}_i$  et de  $\mathcal{U}_d$  qui sont tous deux des polyèdres. Ainsi les domaines  $\mathcal{D}_i$  sont des polyèdres non nécessairement disjoints de  $\mathcal{X}$ . On

défini les matrices  $\mathbf{K}_i$  et  $\mathbf{L}_i$  qui permettent de définir  $\mathcal{D}_i$  comme un jeu d'inégalités linéaires qui représentent l'image des tensions minimales et maximales associées à chaque zone linéaire  $i$ .

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \forall \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L}_i \quad (3.9)$$

La **dynamique du système** peut donc s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK}_{PQ}\mathbf{G}(i)\mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{n_U \times n_f} & \mathbb{I}_{n_U} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}(i)} \Delta \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{BK}_{PQ}\mathbf{F}(i) \\ \mathbf{0}_{n_U \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(i)} \quad (3.10)$$

On note que  $\mathbf{0}_{n_U \times n_f}$  représente la matrice de zéros de dimension  $n_U \times n_f$  et que  $\mathbb{I}_{n_U}$  représente la matrice identité de dimension  $n_U \times n_U$ . Finalement, les matrices  $\mathcal{A}(i)$  appartiennent à  $\mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  et les vecteurs  $\mathcal{B}(i)$  à  $\mathbb{R}^{n_x}$  quel que soit  $i$ .

Les paramètres du système changent en fonction de la valeur de l'état puisqu'ils dépendent de la zone linéaire dans laquelle se trouve la loi de commande. Le système est donc un système à commutation. Dans la suite, on notera  $q_i$  le **mode de fonctionnement** dans lequel se trouve le système. Le système considéré peut se trouver dans  $n_{PQ}$  modes de fonctionnement différents puisqu'il y a  $n_{PQ}$  zones de fonctionnement de la loi de commande.

$$\mathcal{Q} = (q_i)_{i \in \mathcal{N}_{PQ}} \quad (3.11)$$

Pour conclure, à l'instant  $kT_e$ , le système peut être représenté par son état  $\Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}$  défini sur un espace d'état continu et appelé par la suite état continu et par le mode de fonctionnement  $q(k)$  tel que  $\Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{D}_q$ . Ainsi, le système est décrit par un vecteur de grandeurs définies sur un espace continu – l'état continu du système – et une grandeur discrète – le mode de fonctionnement. On peut donc dire que le système est un système hybride. On souhaite proposer une modélisation adaptée aux caractéristiques de ce système afin de pouvoir en étudier la stabilité. Une modélisation sous la forme d'un système de transition hybride est proposée ci-dessous.

### Construction

Afin de pouvoir décrire le système physique comme un système de transition, nous allons définir les fonctions qui associent à un état hybride du système  $e(k)$  la dynamique et l'invariant correspondant.

$$e(k) = (\Delta \mathbf{x}(k), q(k)) \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{Q} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} Dyn : \quad \mathcal{Q} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)} \\ q &\mapsto Dyn(q) \end{aligned} \quad (3.13)$$

On définit la fonction *Dyn* qui **associe à la partie discrète de l'état du système  $q$  les matrices de l'équation dynamique** du système physique associés au mode de fonctionnement  $q$ .

$$Dyn(q) = [\mathcal{A}(q) \ \mathcal{B}(q)] \quad (3.14)$$

On note que, afin d'alléger les notations, on écrit abusivement  $\mathcal{A}(q)$  pour représenter  $\mathcal{A}(i)$  avec  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  tel que  $q = q_i$ . Ainsi, la fonction  $Dyn$  permet de calculer l'état continu du système à l'instant  $(k+1)T_e$  à partir du point de fonctionnement à l'instant  $kT_e$ .

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = Dyn(q) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Ensuite, nous définissons la fonction  $Inv$  qui **associe l'ensemble des valeurs possibles de la partie continue de l'état du système lorsque la partie discrète de l'état vaut  $q$** .

$$\begin{aligned} Inv : \mathcal{Q} &\rightarrow 2^{\mathbb{R}^{n_x}} \\ q &\mapsto Inv(q) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $2^{\mathbb{R}^{n_x}}$  représente l'ensemble de sous-espaces d'un ensemble  $\mathbb{R}^{n_x}$ .

L'invariant  $Inv(q)$  associé au mode de fonctionnement  $q$  correspond au domaine de l'espace d'état continu ( $\mathcal{X}$ ) pour lequel le système se trouve dans le mode  $q$ . Ceci correspond à la définition de l'ensemble  $(\mathcal{D}_i)_{i \in \mathcal{N}_{PQ}}$

$$Inv(q) = \mathcal{D}_q \quad (3.17)$$

Par abus de notation, on désigne par  $\mathcal{D}_q$  le domaine  $\mathcal{D}_i$  avec  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  tel que  $q = q_i$ .

Ces domaines forment une partition de  $\mathcal{X}$ , ainsi on peut dire que :

$$\forall \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \exists q \in \mathcal{N}_{PQ} : \quad \Delta \mathbf{x} \in Inv(q) \quad (3.18)$$

Finalement, le système physique peut être décrit par le **système de transition hybride  $S_H$**  défini comme suit :

$$S_H = \langle \mathcal{E}, Dyn, Inv \rangle \quad (3.19)$$

L'espace hybride d'état  $\mathcal{E}$  est défini par (3.12). L'évolution du système dans un mode de fonctionnement donné est déterminée par la fonction  $Dyn$  (3.13). Les changements de modes de fonctionnement sont une conséquence de l'évolution de l'état continu  $\Delta \mathbf{x}$  par l'intermédiaire de la fonction  $Inv$  (3.16). La figure 3.1 représente l'automate associé à un système de transition hybride avec deux modes de fonctionnement.

### Étude de la stabilité

Ayant construit le système de transition hybride représentant le système physique, nous allons désormais nous intéresser à l'étude de sa stabilité. Pour ce faire, nous définissons tout d'abord la notion de trajectoire.

Pour tout état initial  $e_0 \in \mathcal{E}$ , la **trajectoire hybride** issue de  $e_0$  notée  $Traj_H(e_0)$  représente l'ensemble infini des états hybrides  $e(k)$  du système de transition pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et avec

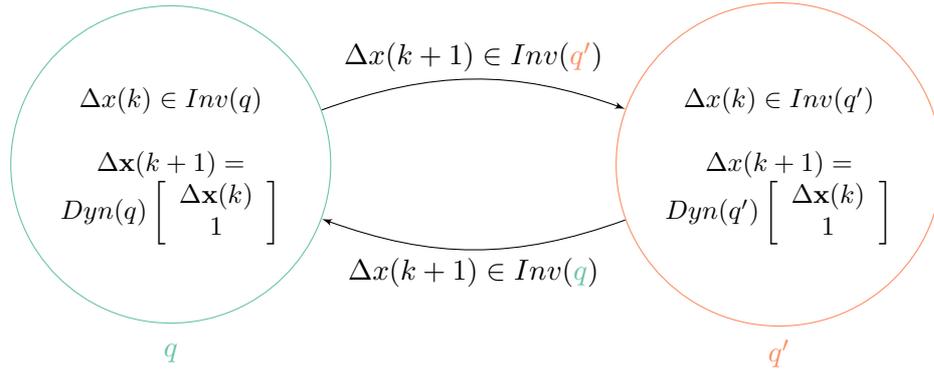


Figure 3.1 – Exemple d’automate représentant un système de transition hybride

$e(0) = e_0$ .

$$Traj_H(e_0) = \{e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots\} \quad (3.20)$$

Nous pouvons noter que le système de transition hybride considéré est un **système déterministe**. Ainsi, nous pouvons calculer l’ensemble des états pris par le système à partir d’un état initial  $e_0$  donné.

La stabilité du système est fortement liée à la construction des trajectoires. En effet, **une trajectoire hybride est dite stable si et seulement si, au bout d’un certain temps, l’état du système hybride reste dans le même mode de fonctionnement  $q \in \mathcal{Q}$  et que la dynamique associée à ce mode est stable.**

$$Traj_H(e_0) \text{ est stable} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : \begin{cases} \forall k > n, q(k) = q(n) \\ \text{La dynamique linéaire du mode } q(n) \text{ est stable} \end{cases}$$

(3.21)

Ainsi, il peut y avoir deux causes d’instabilité. Tout d’abord, si la trajectoire ne reste pas dans un seul mode de fonctionnement, le système n’est pas stable puisque (3.21) n’est pas vérifiée. Par la suite, on dira que ces trajectoires décrivent des **cycles** entre plusieurs modes de fonctionnement. Si au contraire, les états associés à une trajectoire restent, au bout d’un certain temps, dans le même mode de fonctionnement, la trajectoire n’est pas stable pour autant. En effet, si le mode de fonctionnement linéaire n’est pas stable, alors la trajectoire ne le sera pas non plus. Il convient de noter que, dans un mode de fonctionnement donné, la dynamique du système est linéaire. Ainsi, on peut évaluer la stabilité d’un mode de fonctionnement à partir de l’étude des valeurs propres de la matrice d’évolution du système dans ce mode. L’étude de la stabilité d’une trajectoire revient donc à **étudier les transitions entre plusieurs systèmes linéaires**, les cycles et la stabilité de ces systèmes.

Pour conclure, le système sera dit stable si l’ensemble de ses trajectoires est stable. Si par contre, il existe au moins une trajectoire instable, alors le système sera dit instable. Ainsi, pour démontrer la stabilité du système, il faut procéder à l’étude de l’ensemble des trajectoires. Or, l’espace d’état hybride  $\mathcal{E}$  est infini puisque l’espace d’état continu  $\mathcal{X}$  l’est. Il existe donc une infinité

de conditions initiales possibles et donc une **infinité de trajectoires à étudier**. Il n'est pas possible de réaliser l'étude de la totalité des trajectoires du système de transition hybride et donc il n'est, pour l'instant, pas possible de conclure sur la stabilité du système.

Pour contourner cette difficulté, nous proposons de regrouper les trajectoires passant par les mêmes modes de fonctionnement. Comme le nombre de modes de fonctionnement du système est fini, le nombre de groupe de trajectoires à étudier le sera aussi permettant ainsi l'étude exhaustive des trajectoires. La partie suivante présente la construction d'une abstraction discrète correspondant au système de transition hybride  $S_H$ .

### 3.2.2 Étape 2 : Abstraction discrète

#### Objectif

Le système physique est modélisé sous la forme d'un système de transition hybride  $S_H$ . La stabilité de ce système dépend de la stabilité de l'ensemble de ses trajectoires. Or le nombre infini de trajectoires du système de transition hybride rend l'étude exhaustive des trajectoires impossible. Il est alors proposé de construire l'abstraction discrète du système de transition hybride afin d'obtenir un **ensemble dénombrable de trajectoires** à étudier.

#### Construction

L'abstraction discrète d'un système consiste à proposer une nouvelle représentation qui permet de **masquer les détails inutiles** et ainsi de faciliter l'étude. Ici, comme nous l'avons vu précédemment, l'enjeu de l'étude de la stabilité réside dans l'étude des transitions entre les différents modes de fonctionnement linéaires du système. Nous proposons donc une **abstraction discrète du système de transition hybride regroupant en un seul mode discret tous les états continus  $\Delta x$  du système qui appartiennent au même mode de fonctionnement  $Inv(q)$** . On rappelle que l'ensemble  $(Inv(q))_{q \in \mathcal{Q}}$  représente une partition de l'espace d'état continu  $\mathcal{X}$ . On notera  $Pa^{(0)}(\mathcal{X})$  cet ensemble.

On définit la fonction  $\Phi^{(0)}$  qui à chaque domaine de  $Pa^{(0)}(\mathcal{X})$  associe un mode de fonctionnement  $m \in \mathcal{M}^{(0)}$ , avec  $\mathcal{M}^{(0)}$  l'ensemble discret des modes de fonctionnement.

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} : Pa^{(0)}(\mathcal{X}) &\rightarrow \mathcal{M}^{(0)} \\ \mathcal{D} &\mapsto \Phi^{(0)}(\mathcal{D}) = m \end{aligned} \tag{3.22}$$

À partir de ces modes discrets, il faut s'intéresser aux **conditions de passage d'un mode discret à un autre**. Pour ce faire, on construit l'ensemble  $\mathcal{T}^{(0)}$  des transitions possibles. Il contient le couple  $(m, m') \in \mathcal{M}^{(0)} \times \mathcal{M}^{(0)}$  de modes discrets s'il existe au moins un état hybride de  $S_H$  dont la partie continue appartient au domaine  $(\Phi^{(0)})^{-1}(m)$  et qui permet d'atteindre au

pas suivant le domaine  $(\Phi^{(0)})^{-1}(m')$ .

$$(m, m') \in \mathcal{T}^{(0)} \Leftrightarrow \exists e = (\Delta \mathbf{x}, q) \in \mathcal{E} : \begin{cases} m = \Phi^{(0)}(Inv(q)) \\ Dyn(q) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in (\Phi^{(0)})^{-1}(m') \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour l'instant, nous n'avons pas encore étudié les transitions d'un mode discret à l'autre afin de distinguer celles qui sont franchissables de celles qui ne le sont pas. Cette étude sera menée lors du raffinement de l'abstraction discrète par bisimulation. Ainsi, on propose de supposer à ce stade que toutes les transitions sont possibles et d'affiner ceci lors de la première itération du calcul de bisimulation.

$$\forall (m, m') \in \mathcal{M}^{(0)} \times \mathcal{M}^{(0)}, \quad (m, m') \in \mathcal{T}^{(0)} \quad (3.24)$$

Finalement, une abstraction discrète  $S_D^{(0)}$  est construite à partir du système de transition hybride  $S_H$  défini précédemment.

$$S_D^{(0)} = \langle \mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{T}^{(0)} \rangle \quad (3.25)$$

Les modes de fonctionnement du système sont représentés par l'ensemble discret  $\mathcal{M}^{(0)}$  et les transitions possibles entre ces modes sont contenues dans l'ensemble  $\mathcal{T}^{(0)}$ . La figure 3.2 illustre l'automate ainsi construit.

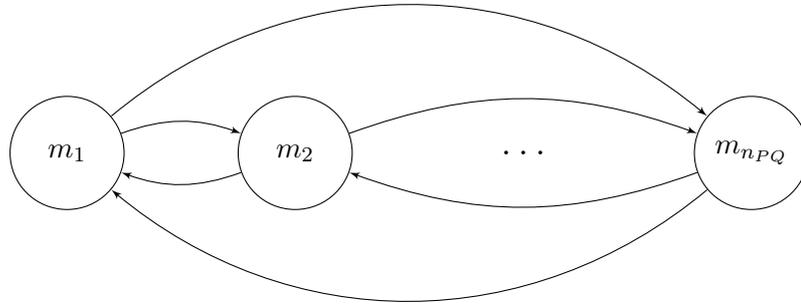


Figure 3.2 – Illustration de quelques modes discrets de  $\mathcal{M}^{(0)}$  et quelques trajectoires de  $\mathcal{T}^{(0)}$  constituant le système discret  $S_D^{(0)}$

### Étude de la stabilité

Avant de procéder à l'étude de la stabilité de l'automate discret construit à partir du système de transition hybride, nous allons définir les **notions de prédécesseur et de successeur**.

Soit  $\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  un état continu du système tel que  $(\Delta \mathbf{x}, q) \in \mathcal{E}$ , on notera  $Pre(\Delta \mathbf{x})$  l'ensemble de ses prédécesseurs et  $Post(\Delta \mathbf{x})$  son successeur.

$$\begin{aligned}
Pre(\Delta \mathbf{x}) &= \left\{ \Delta \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \mid Dyn(q') \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}' \\ 1 \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{x} \text{ avec } q' : (\Delta \mathbf{x}', q') \in \mathcal{E} \right\} \\
Post(\Delta \mathbf{x}) &= \left\{ \Delta \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \mid \Delta \mathbf{x}' = Dyn(q) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } q : (\Delta \mathbf{x}, q) \in \mathcal{E} \right\}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Par extension on définit le prédécesseur et le successeur d'un ensemble  $\delta \subset \mathcal{X}$ .

$$Pre(\delta) = \bigcup_{\Delta \mathbf{x} \in \delta} Pre(\Delta \mathbf{x}) \quad Post(\delta) = \bigcup_{\Delta \mathbf{x} \in \delta} Post(\Delta \mathbf{x}) \tag{3.27}$$

On remarque que, comme dit précédemment, l'étude de la stabilité du système passe par l'étude de ses trajectoires. Nous avons construit  $S_D^{(0)}$  à partir de  $S_H$  afin de permettre l'étude exhaustive des trajectoires, nous allons donc définir la notion de **trajectoire discrète**.

Pour tout mode discret  $m_0 \in \mathcal{M}^{(0)}$ , la trajectoire discrète issue de  $m_0$ , notée  $Traj_D(m_0)$  représente l'ensemble infini des modes discrets  $m(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  avec  $m(0) = m_0$  et  $m(k+1)$  tel que  $(m(k), m(k+1)) \in \mathcal{T}^{(0)}$ .

$$Traj_D(m_0) = \{m_0, m(1), \dots, m(n), m(n+1), \dots\} \tag{3.28}$$

Par extension de la notion de stabilité d'une trajectoire hybride, une trajectoire discrète est dite stable si, au bout d'un certain temps, le système discret reste dans le même mode discret et que la dynamique associée à ce mode est stable.

Dans la partie précédente, l'étude de la stabilité du système hybride via l'étude de ses trajectoires hybrides n'était pas possible puisqu'il existe une infinité de trajectoires hybrides. Le système discret  $S_D^{(0)}$  a quant à lui un ensemble fini de conditions initiales possibles puisque l'ensemble  $\mathcal{M}^{(0)}$  est un **ensemble dénombrable de trajectoires discrètes**. L'étude exhaustive de ces trajectoires discrètes est donc possible. Cependant, pour que les conclusions sur la stabilité du système discret permettent de conclure sur la stabilité du système hybride, il faut **vérifier que l'abstraction discrète proposée conserve bien l'équivalence des notions de stabilité**.

Premièrement, il convient de vérifier que toutes les trajectoires hybrides sont représentées par au moins une trajectoire discrète. Ici, nous avons construit l'ensemble des transitions  $\mathcal{T}^{(0)}$  de manière à ce que toutes les transitions possibles y soient (3.24). Ainsi, chaque trajectoire hybride est représentée par une trajectoire discrète et donc, s'il existe une trajectoire hybride instable, il existe nécessairement une trajectoire discrète instable. Par contraposée, si la totalité des trajectoires discrètes est stable alors toutes les trajectoires hybrides le sont aussi.

$$S_D^{(0)} \text{ stable} \quad \Rightarrow \quad S_H \text{ stable} \tag{3.29}$$

Afin d'obtenir l'équivalence des notions de stabilité, il faut encore vérifier que chaque trajectoire discrète représente au moins une trajectoire hybride. Or, comme on peut le voir figure 3.2, les modes discrets ont plusieurs destinations possibles. En effet, on a supposé que, depuis un mode

discret donné, l'ensemble des modes discrets de  $\mathcal{M}^{(0)}$  était atteignable. Dans la réalité, seul un mode discret peut être atteint depuis un état donné. Il risque donc d'exister des **trajectoires discrètes qui ne représentent aucune trajectoire hybride**. Ainsi, si le système discret est instable, il faut vérifier qu'il existe une trajectoire discrète instable correspondant à au moins une trajectoire hybride avant de pouvoir conclure à l'instabilité du système hybride.

$$S_D^{(0)} \text{ instable} \not\Rightarrow S_H \text{ instable} \quad (3.30)$$

Finalement, la stabilité du système discret est une condition suffisante à la stabilité du système hybride, mais n'est pas une condition nécessaire et suffisante. Ainsi, on ne peut conclure que lorsque  $S_D^{(0)}$  est stable. C'est par exemple ce que l'on peut constater pour le système discret représenté figure 3.2. En effet, d'après la structure de  $\mathcal{T}^{(0)}$  issue de (3.24), quel que soit  $(m, m') \in (\mathcal{M}^{(0)})^2$ , nous avons  $(m, m') \in \mathcal{T}^{(0)}$  et  $(m', m) \in \mathcal{T}^{(0)}$ . On peut donc dire que la trajectoire discrète  $Traj_D(m) = \{m, m', m, \dots\}$  existe. Or cette trajectoire discrète est instable car elle décrit un cycle entre les modes discrets  $m$  et  $m'$ . Finalement, on sait que le système discret construit  $S_D^{(0)}$  n'est pas stable, on ne peut donc pas conclure, pour l'instant, sur la stabilité du système hybride  $S_H$ .

Pour obtenir l'équivalence, il faut supprimer les trajectoires discrètes qui ne correspondent pas à au moins une trajectoire hybride. Pour ce faire, on propose d'affiner la définition de l'ensemble des modes discrets  $\mathcal{M}^{(0)}$  de manière à n'avoir que des modes discrets ayant une unique destination possible.

### 3.2.3 Étape 3 : Raffinement de l'abstraction discrète par bisimulation

#### Objectif

Un système discret  $S_D^{(0)}$  a été construit par abstraction discrète du système de transition hybride  $S_H$ . Le système discret possède un nombre fini de trajectoires, mais sa stabilité n'est pas équivalente à celle du système physique. Afin de construire un **système discret dont la stabilité est équivalente à celle du système de transition hybride**, on propose d'appliquer les principes du **calcul de la bisimulation**. Ce type de calculs permet de construire, par **récurrence**, un système discret conservant les propriétés des trajectoires et donc la stabilité du système physique initial.

À chaque itération  $n$  du calcul, on construit un nouveau système discret  $S_D^{(n)}$  à partir de  $S_D^{(n-1)}$  en **supprimant les trajectoires discrètes qui ne correspondent à aucune trajectoire hybride**. Le but est d'obtenir la bisimulation du système hybride, soit un système discret  $S_D^{(B)} = \langle \mathcal{M}^{(B)}, \mathcal{T}^{(B)} \rangle$  tel que toute trajectoire hybride soit représentée par une trajectoire discrète et que toute trajectoire discrète représente au moins une trajectoire hybride. Dans le cas d'un système déterministe, on peut remarquer que **la bisimulation du système hybride vérifie** :

$$\boxed{\forall m \in \mathcal{M}^{(B)}, \exists ! m' \in \mathcal{M} : (m, m') \in \mathcal{T}^{(B)}} \quad (3.31)$$

Ceci revient à dire que chaque mode discret  $m \in \mathcal{M}^{(B)}$  a un **unique successeur**  $m'$ , on est donc sûr que tous les états hybrides regroupés dans  $m$  mènent à la même destination  $m'$  en un pas de temps. **On va se servir de cette propriété comme indicateur de la convergence du calcul de bisimulation.**

### Construction

Le calcul permettant de construire la bisimulation du système hybride est itératif. Il sera initialisé avec le système discret construit à l'étape précédente  $S_D^{(0)} = \langle \mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{T}^{(0)} \rangle$ .

Soit  $S_D^{(n)} = \langle \mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{T}^{(n)} \rangle$  le système obtenu après la  $n$ -ème itération du calcul de bisimulation et  $\Phi^{(n)} : Pa^{(n)}(\mathcal{X}) \mapsto \mathcal{M}^{(n)}$  la fonction qui lie la  $n$ -ème partition de l'espace d'état au  $n$ -ème ensemble des modes discrets. À ce stade, si l'on fait l'hypothèse que  $S_D^{(n)}$  ne permet pas de conclure sur la stabilité du système hybride, alors il faut construire  $S_D^{(n+1)} = \langle \mathcal{M}^{(n+1)}, \mathcal{T}^{(n+1)} \rangle$  afin d'affiner la définition des trajectoires discrètes. Initialement, les ensembles  $\mathcal{M}^{(n+1)}$ ,  $Pa^{(n+1)}(\mathcal{X})$  et  $\mathcal{T}^{(n+1)}$  sont vides.

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{(n+1)} & = \emptyset \\ Pa^{(n+1)}(\mathcal{X}) & = \emptyset \\ \mathcal{T}^{(n+1)} & = \emptyset \end{cases} \quad (3.32)$$

Ils sont complétés au fur et à mesure en balayant l'ensemble des modes discrets  $m \in \mathcal{M}^{(n)}$ . Il y a alors deux cas possibles.

**1er cas :** si  $m$  vérifie (3.31) alors  $m$  a déjà une **unique destination**  $m' \in \mathcal{M}^{(n)}$ . Ainsi,  $m$  ne pose pas de problème pour l'étude de stabilité. Il est donc **recopié tel quel** dans le  $(n+1)$ -ème ensemble des modes discrets (première ligne de (3.33)) et dans la  $(n+1)$ -ème partition (deuxième ligne). On recopie aussi la transition de  $m$  dans  $\mathcal{T}^{(n+1)}$  (troisième ligne) et toutes les transitions vers  $m$  (quatrième ligne).

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{(n+1)} = \mathcal{M}^{(n+1)} \cup \{m\} \\ Pa^{(n+1)}(\mathcal{X}) = Pa^{(n+1)}(\mathcal{X}) \cup \{(\Phi^{(n)})^{-1}(m)\} \\ \mathcal{T}^{(n+1)} = \mathcal{T}^{(n+1)} \cup \{(m, m')\} \\ \forall m'' \in \mathcal{M}^{(n)} : (m'', m) \in \mathcal{T}^{(n)}, \mathcal{T}^{(n+1)} = \mathcal{T}^{(n+1)} \cup \{(m'', m)\} \end{cases} \quad (3.33)$$

**2ème cas :** si  $m$  a **plusieurs destinations possibles**, alors il faut diviser  $m$  en « **sous-modes** » discrets correspondant à une partition plus fine de l'espace d'état  $\mathcal{X}$ . Pour ce faire, on propose de diviser le domaine  $d = (\Phi^{(n)})^{-1}(m)$  en sous-domaines en fonction des successeurs possibles des états continus du système appartenant à  $d$ . On balaye alors l'ensemble des successeurs possibles  $m'$  de  $m$ . On pose  $d' = (\Phi^{(n)})^{-1}(m')$ , on sait que  $Pre(d')$  contient l'ensemble des états continus menant en un coup à  $m'$ . Pour obtenir  $\delta$  l'ensemble des états continus associés à  $m$  et menant à  $m'$  en un pas de temps, on définit :

$$\delta = d \cap Pre(d') \quad (3.34)$$

On pose  $(\mathbf{K}, \mathbf{L}) \in \mathbb{R}^{n_C \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_C}$  des matrices permettant de définir  $d$  avec  $n_C$  le nombre de contraintes linéaires nécessaires images des contraintes en tension.

$$\Delta \mathbf{x} \in d \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L} \quad (3.35)$$

On pose de la même manière  $(\mathbf{K}', \mathbf{L}') \in \mathbb{R}^{n'_C \times n_x} \times \mathbb{R}^{n'_C}$  des matrices définissant  $d'$ .

On note  $q$  l'état discret du système associé au mode discret  $m$ . On peut donc dire que  $d \subset \text{Inv}(q)$  avec la fonction invariant comme définie par (3.16). Par construction de l'ensemble  $\mathcal{M}^{(0)}$  puis de  $\mathcal{M}^n$ , un tel état  $q$  existe toujours. Il permet de calculer l'état pris par le système à l'instant suivant. En effet, pour tout état continu  $\Delta \mathbf{x}(k) \in d$ , nous pouvons écrire :

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \text{Dyn}(q) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(k) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{A}(q) \Delta \mathbf{x}(k) + \mathcal{B}(q) \quad (3.36)$$

Finalement, on peut dire que le domaine  $\delta$  représente le sous-ensemble des états continus de  $d$  dont les successeurs appartiennent à  $d'$ , ce qui peut s'écrire :

$$\Delta \mathbf{x} \in \delta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{x} \in d \\ \mathcal{A}(q) \Delta \mathbf{x} + \mathcal{B}(q) \in d' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L} \\ \mathbf{K}' \mathcal{A}(q) \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L}' - \mathbf{K}' \mathcal{B}(q) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Ainsi, on peut dire que  $\delta$  est aussi un polyèdre qui peut être construit à partir des polyèdres  $d$  et  $d'$  et de la dynamique associée à  $d$ .

$$\delta = \left\{ \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{X} \left| \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{K}' \mathcal{A}(q) \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{L}' - \mathbf{K}' \mathcal{B}(q) \end{bmatrix} \text{ avec } q : \Delta \mathbf{x} \in \text{Inv}(q) \right. \right\} \quad (3.38)$$

Il y a alors deux cas possibles :

- Si  $\delta$  est vide ou de dimension strictement inférieure à  $n_x$ , aucun état continu associé à  $m$  ne permet d'atteindre le mode  $m'$  au pas suivant ou alors ces états se trouvent sur la frontière des deux domaines. Dans ce cas, nous affinons la définition de l'automate discret et **supprimons cette transition de la liste des transitions franchissables**.
- Dans le cas contraire, il existe bien au moins des états continus associés à  $m$  qui permettent d'atteindre des états continus associés au mode  $m'$  au pas suivant. On peut donc dire que  $m'$  est l'une des destinations de  $m$ . Alors, on crée un nouveau mode discret  $\mu = \Phi^{(n+1)}(\delta)$  qui regroupe donc tous les états continus dont le successeur correspond à  $m'$ . Ce mode discret  $\mu$  est ajouté à l'ensemble des modes  $\mathcal{M}^{(n+1)}$  (première ligne de 3.39). Le domaine de l'espace d'état continu correspondant ( $\delta \in \mathcal{X}$ ) est ajouté à la partition  $Pa^{(n+1)}(\mathcal{X})$  (deuxième ligne). Par construction,  $\mu$  a une unique destination :  $m'$ . Cette transition est ajoutée à  $\mathcal{T}^{(n+1)}$  (troisième ligne). Pour finir, tous les modes discrets qui pointaient vers  $m$  pointent maintenant vers  $\mu$  (quatrième ligne).

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{(n+1)} = \mathcal{M}^{(n+1)} \cup \{\mu\} \\ Pa^{(n+1)}(\mathcal{X}) = Pa^{(n+1)}(\mathcal{X}) \cup \{\delta\} \\ \mathcal{T}^{(n+1)} = \mathcal{T}^{(n+1)} \cup \{(\mu, m')\} \\ \forall m'' \in \mathcal{M}^{(n)} : (m'', m) \in \mathcal{T}^{(n)}, \mathcal{T}^{(n+1)} = \mathcal{T}^{(n+1)} \cup \{(m'', \mu)\} \end{cases} \quad (3.39)$$

La figure 3.3 illustre le découpage d'un mode discret ayant plusieurs successeurs possibles.

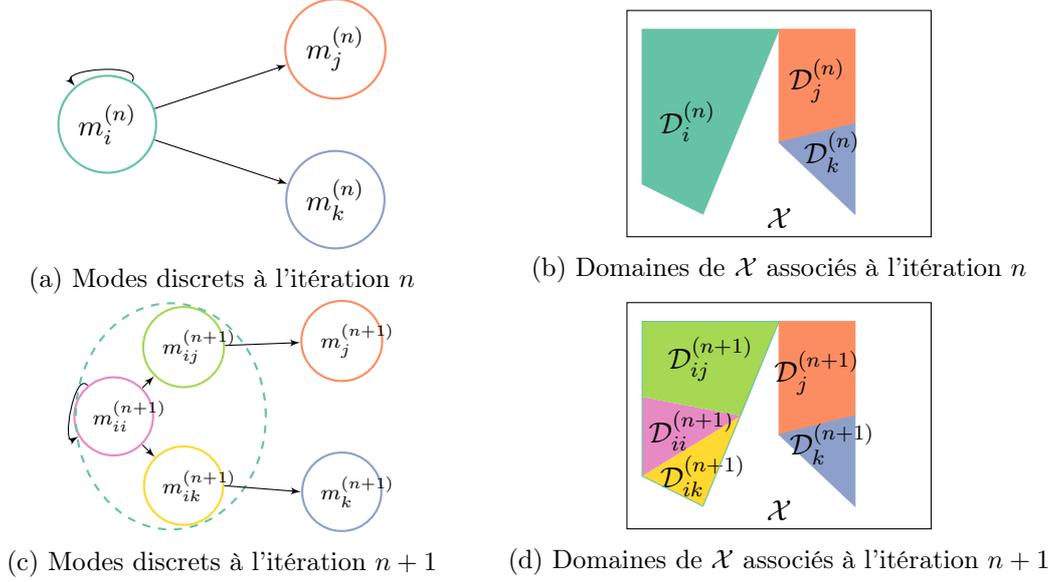


Figure 3.3 – Illustration du principe de découpage d'un mode discret

À l'itération  $n$ , le mode discret  $m_i^{(n)}$  a trois destinations possibles : lui-même,  $m_j^{(n)}$  et  $m_k^{(n)}$ . Lors de la  $(n + 1)$ -ème itération, le domaine de l'espace d'état associé à  $m_i^{(n)}$  est donc divisé en trois sous-domaines en fonction de leur destination. Ces trois sous-domaines permettent de construire trois nouveaux modes discrets :  $m_{ii}^{(n+1)}$  menant uniquement à  $m_i^{(n)}$ ,  $m_{ij}^{(n+1)}$  à  $m_j^{(n)}$  et  $m_{ik}^{(n+1)}$  à  $m_k^{(n)}$ . Comme on peut le voir, à l'issue de la  $(n + 1)$ -ème itération, les modes discrets  $m_{ij}^{(n+1)}$  et  $m_{ik}^{(n+1)}$  ont bien une unique destination mais le mode  $m_{ii}^{(n+1)}$  en a trois puisque  $m_i^{(n)}$  a été divisé en trois sous-modes. On peut déjà dire que le calcul n'a pas convergé à la  $(n + 1)$ -ème itération. Lorsque la totalité des modes discrets de  $\mathcal{M}^{(n)}$  a été balayée, nous avons construit le système discret  $S_D^{(n+1)} = \langle \mathcal{M}^{(n+1)}, \mathcal{T}^{(n+1)} \rangle$ . Avant de procéder à une itération supplémentaire du calcul de bisimulation, il faut d'abord tester si  $S_D^{(n+1)}$  est construit à partir d'une partition suffisamment fine de l'espace d'état pour pouvoir conclure.

### Étude de la stabilité

Le calcul de construction de la bisimulation décrit par [125] propose de tester si  $S_D^{(n+1)}$  vérifie (3.31) c'est-à-dire si tous les modes discrets ont bien une unique destination. Si oui, alors  $S_D^{(n+1)}$  est la bisimulation du système hybride initial et sa stabilité est équivalente à celle du système hybride. Cependant, comme l'indique les auteurs de [126], il n'existe aucune garantie de convergence de ce type de calculs. **Pour contourner cette difficulté, nous proposons**

ici une étude approfondie des trajectoires du système discret  $S_D^{(n+1)}$  afin de conclure sans attendre la convergence du calcul de bisimulation. En effet, dans ces travaux on ne cherche pas à construire la bisimulation complète du système mais on utilise le raffinement uniquement pour conclure sur la stabilité.

Il existe deux cas permettant de conclure avant la convergence :

- **1er cas** : il existe au moins une trajectoire discrète instable correspondant à au moins une trajectoire hybride. Alors le système hybride est instable.
- **2ème cas** : toutes les trajectoires discrètes qui correspondent à au moins une trajectoire hybride sont stables et, parmi le reste des trajectoires discrètes, aucune ne risque de causer d'instabilité. Alors le système hybride est stable.

Nous devons donc réaliser l'étude de stabilité de  $S_D^{(n+1)}$ . Celle-ci est réalisée à partir du graphe  $\mathcal{G}^{(n+1)}$  dont les nœuds sont les modes discrets de  $\mathcal{M}^{(n+1)}$  et les branches correspondent aux transitions appartenant à  $\mathcal{T}^{(n+1)}$ . L'étude de la stabilité se ramène donc à la **recherche de cycles dans le graphe orienté  $\mathcal{G}^{(n+1)}$** .

De nombreux travaux proposent des méthodes de recherche de cycles dans des graphes orientés [127], [128], [129]. Ici on propose une méthode fondée sur un **parcours inverse en largeur du graphe**. En effet, on peut reconnaître facilement les nœuds stables, puisqu'ils ont une unique destination, eux-mêmes. On balaye le graphe à la recherche de trajectoires discrètes stables c'est-à-dire ne menant qu'à des modes discrets stables. Pour ce faire, on étiquette chaque nœud de  $\mathcal{G}^{(n+1)}$  en fonction des informations dont on dispose à l'itération  $n + 1$ . Si le nœud n'a qu'une seule destination, lui même, il est étiqueté « Stable ». Sinon, nous ne pouvons rien en dire a priori, on lui attribue l'étiquette « ? ».

Ensuite, on remonte dans le graphe de proche en proche à partir des nœuds stables, en transmettant à chaque père l'étiquette de son fils à la recherche de trajectoires discrètes définitives. On dit que  $Traj_D(m_0)$  est une *trajectoire discrète définitive* lorsque la totalité des successeurs de  $m_0$  ont une unique destination possible. Alors, on sait que ces modes discrets ne seront pas découpés dans les itérations suivantes du calcul de bisimulation, ils appartiendront à la bisimulation. **Lorsqu'une trajectoire discrète définitive est instable, on peut conclure à l'instabilité du système.** Cependant, lorsqu'elle est stable, il faut encore étudier le reste du graphe pour pouvoir conclure.

Si un nœud a plusieurs fils, on peut dire que les trajectoires discrètes passant par ce nœud ne sont pas définitives. Cependant, il existe des cas pour lesquels on peut tirer des conclusions sur la stabilité de trajectoires discrètes non-définitives. Par exemple, si un nœud à plusieurs fils, il faut a priori le découper à l'itération suivante. Or, si tous les fils de ce nœud sont étiquetés comme stable, on peut d'ores et déjà conclure que ce nœud mènera uniquement à des trajectoires définitives stables (figure 3.4a). Il n'est donc pas nécessaire de découper ce mode discret pour pouvoir conclure sur la stabilité du système. On peut donc directement l'étiqueter comme « Stable » et le retirer de la liste des modes discrets à découper à l'itération suivante.

En revanche, si au moins un successeur de ce mode discret n'est pas encore étiqueté comme

stable, on ne peut pas encore conclure à la stabilité du système (figures 3.4b et 3.4c).

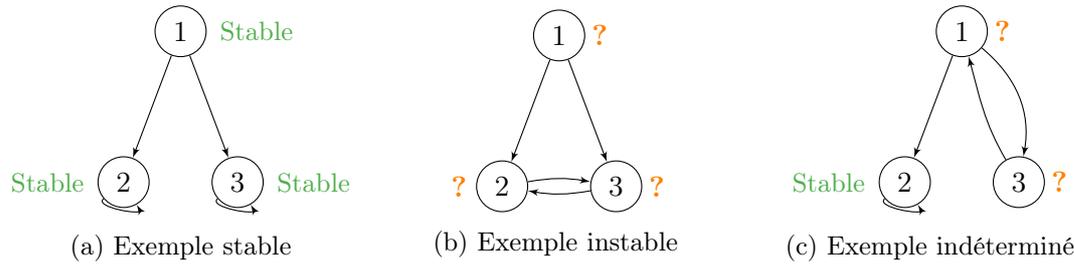


Figure 3.4 – Quelques exemples d’analyses de graphes avant la convergence du calcul

Une fois que tous les nœuds ont été balayés, on s’intéresse aux nœuds qui sont encore étiquetés « ? ». Il y a alors trois cas possibles :

1. Il n’y a aucun nœud étiqueté « ? ». Alors tous les nœuds ont été étiquetés « Stable », car ils mènent à un (ou plusieurs) nœud(s) stable(s) (figure 3.4a). Dans ce cas, nous pouvons conclure à la stabilité du système avant la convergence du calcul de bisimulation.
2. Il existe des nœuds étiquetés « ? » qui génèrent une trajectoire discrète définitive. Si celle-ci forme un cycle (figure 3.4b), nous pouvons conclure à l’instabilité du système avant la convergence du calcul de bisimulation. Dans ce cas, on est sûr que le calcul s’arrête ici quel que soit le reste du graphe.
3. Les nœuds ne sont pas étiquetés car nous ne disposons pas encore d’assez d’information pour pouvoir conclure sur ces trajectoires (figure 3.4c). Dans ce cas, une nouvelle itération du calcul de bisimulation est nécessaire.

Comme on l’a vu, de cette analyse de graphe, on identifie aussi **les modes discrets ayant plusieurs destinations mais ne gênant pas l’étude de la stabilité**. Il n’est donc pas nécessaire de découper ces modes dans la suite des itérations. Ceci permet d’accélérer les itérations en se concentrant sur les modes discrets critiques pour la stabilité. Il convient de noter que cette **accélération se fait au détriment de la construction de la bisimulation** du système hybride dès lors que l’on ne découpe pas l’ensemble des modes discrets ayant plusieurs destinations. Finalement, si le calcul de raffinement a convergé, on a construit  $S_D^{(B)}$  dont la stabilité est équivalente à celle de  $S_H$ . Avant la convergence, à chaque itération du calcul, on procède à une analyse du graphe  $\mathcal{G}^{(n)}$  représentant  $S_D^{(n)}$  afin de chercher des trajectoires permettant de conclure avant la convergence. Le tableau 3.1 résume les cas dans lesquels nous pouvons conclure sur la stabilité du système en fonction de la convergence du calcul et du résultat de l’analyse du graphe.

Conclure avant la convergence est particulièrement intéressant puisque le calcul de bisimulation est non décidable ce qui signifie qu’il existe des cas dans lesquels le calcul ne converge pas. Il convient cependant de noter que, pour l’instant, aucune garantie de pouvoir conclure sans attendre la convergence du calcul de bisimulation n’a été établie.

Convergence du calcul ? Analyse de $\mathcal{G}^n$	OUI	NON
Stable	$S_H$ est stable	Toutes les trajectoires discrètes (définitives et non définitives) sont stables $\Rightarrow S_H$ est stable
Indéterminé	IMPOSSIBLE	Refaire une itération du calcul
Instable	$S_H$ est instable	Il existe au moins une trajectoire discrète définitive qui est instable $\Rightarrow S_H$ est instable

Tableau 3.1 – Résumé des cas dans lesquels il est possible de conclure à l'issue de l'itération  $n$ 

### 3.2.4 Conclusion – Analyse des résultats disponibles

Le principe de la méthode proposée pour étudier la stabilité d'un système hybride affine par morceaux est résumé par la figure 3.5.

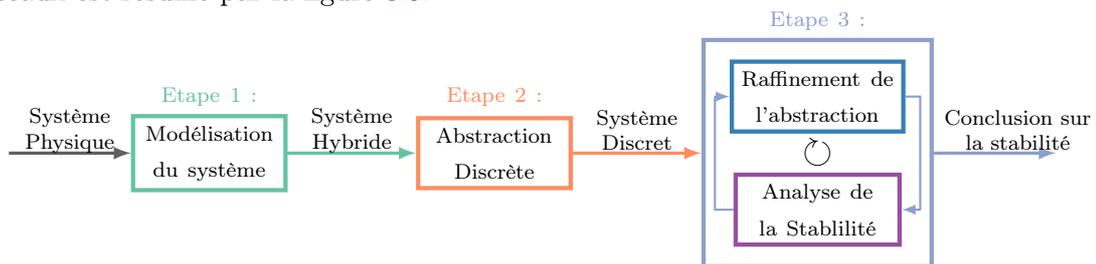


Figure 3.5 – Schéma bilan de la méthode d'étude de stabilité proposée

L'approche proposée est fondée sur la **construction d'une abstraction discrète du système hybride**. Celle-ci est réalisée en regroupant en un mode discret tous les états continus du système ayant la même dynamique. Le système discret ainsi construit ne permet pas encore de conclure sur la stabilité du système. Il est donc proposé d'affiner la partition de l'espace d'état sur laquelle est construit le système discret afin de pouvoir conclure à la stabilité. Cette étape est fondée sur le **calcul de la bisimulation** [125]. Il est ici proposé une **analyse du système discret, construit à chaque itération du calcul**, en prenant en compte les trajectoires même temporaires afin de conclure sur la stabilité du système hybride avant la convergence du calcul.

Cette méthode permet d'accélérer l'analyse de la stabilité d'un système et de conclure sur la stabilité dans certains cas lorsque le calcul de bisimulation ne converge pas. Nous rappelons que le calcul de bisimulation est non décidable et qu'aucune garantie de pouvoir conclure sur la stabilité à l'aide de la méthode développée dans ces travaux n'a été établie jusqu'à présent.

Lorsque que le calcul de bisimulation converge, la bisimulation du système hybride a été construite.

Celle-ci permet d'avoir accès à de nombreuses informations en plus de la stabilité. Parmi ces informations, citons les points suivants :

- La construction de  $S_D^{(B)}$  permet, pour l'ensemble des états possibles  $e_0$  du système, de connaître les modes de fonctionnement par lesquels passent la trajectoire issue de  $e_0$ . Ceci permet par exemple d'identifier la plus longue trajectoire et donc de pouvoir estimer le temps de réponse du système.
- On peut aussi, à partir d'un domaine  $d$  de la partition  $Pa^{(B)}(\mathcal{X})$ , avoir accès à l'ensemble  $\mathcal{D}$  des domaines menant à  $d$  en un ou plusieurs pas de temps. Ceci est particulièrement intéressant lorsque  $d$  représente un domaine de l'espace d'état dangereux pour la sûreté du système.
- En cas d'instabilité, l'étude de  $S_D^{(B)}$  peut aussi nous permettre d'identifier l'ensemble des domaines de l'espace d'état qui appartiennent à un cycle. Ceci peut par exemple permettre de borner les oscillations de tension qui seront induites par ce fonctionnement instable.
- En cas d'instabilité, il est possible de mettre en évidence l'ensemble des domaines menant à l'un des cycles. Ces domaines sont particulièrement intéressants puisque si l'on peut assurer que les conditions initiales ne seront pas dans l'un de ces domaines, alors la stabilité du système pourra être assurée.

Ces informations sont très riches mais risquent de coûter cher en temps de calcul et même, dans certains cas, d'être inatteignables. Or, nous rappelons que le but premier de l'étude présentée est de pouvoir conclure sur la stabilité d'un système hybride affine par morceaux. C'est pourquoi, dans la méthode proposée, il a été choisi de se focaliser sur la stabilité et de considérer les informations données par la bisimulation comme secondaires.

Cette méthode d'étude de la stabilité adaptée aux systèmes hybrides affines par morceaux est appliquée dans les paragraphes suivants à un cas d'étude réel de réseau électrique accueillant des producteurs équipés de régulation de puissance en fonction de la tension.

### 3.3 Application au cas d'étude

On reprend l'exemple détaillé partie 2.2.4. L'objectif de cette partie est d'étudier formellement la stabilité de ce système hybride affine par morceaux grâce à la méthode développée dans la partie précédente. On rappelle le modèle représentant le système réel retenu à l'issue du chapitre 2.

Le tableau 3.2 résume les valeurs numériques des différents paramètres du modèle. Ces valeurs sont issues des données du cas d'étude et de la modélisation réalisée au chapitre 2.

Nous avons mis en évidence (partie 2.4) les risques d'instabilité de ce système pour un filtre de mesure très rapide. Ici, nous avons choisi de fixer le paramètre  $a$  à zéro, le filtre de mesure est donc un retard pur ce qui est le cas le plus pénalisant pour la stabilité.

$$\Delta U_f(k+1) = \Delta U(k) \tag{3.40}$$

**D'après l'étude empirique menée précédemment, ce système devrait être instable.**

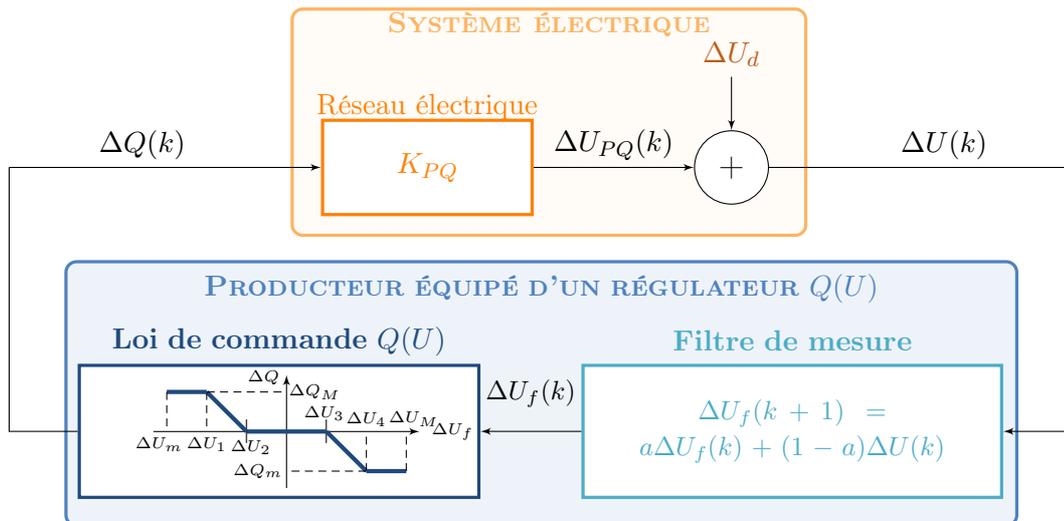


Figure 3.6 – Modèle retenu du système étudié

Le point de fonctionnement			
$U^0$	=	20,1 kV	$Q^0$ = 0 VAr
$\Delta X$	=	$X - X^0$	
Le réseau			
$K_{PQ}$	=	271 V/MVAr	
$\Delta U_d$	=	-2 kV	$\overline{\Delta U_d}$ = 2 kV
La loi de commande $Q(U)$			
$\Delta U_1$	=	-1,1 kV	$\Delta U_2$ = -850 V
$\Delta U_3$	=	650 V	$\Delta U_4$ = 900 V
$\Delta U_m$	=	-2,1 kV	$\Delta U_M$ = 1,9 kV
$\Delta Q_m$	=	-2,4 MVAr	$\Delta Q_M$ = 2,4 MVAr
Le filtre de mesure			
$a$	=	0	$T_e$ = 1 s

Tableau 3.2 – Paramètres du modèle représentant le cas d'étude

Nous allons le confirmer en procédant à l'analyse formelle de la stabilité grâce à la méthode proposée ci-dessus.

Cette méthode a été implémentée sous le logiciel Matlab® à l'aide de la « Multi-Parametric Toolbox » [130].

Nous allons en détailler les différentes étapes (figure 3.5).

### 3.3.1 Étape 1 : Modélisation du système sous la forme d'un système hybride

Le système réel étudié ne contient qu'un **seul producteur**. Ainsi, la loi de commande  $Q(U)$  n'a pas besoin d'être agrégée. Elle contient donc **cinq zones de fonctionnement** (figure 3.6).

$$\begin{cases} n_{PQ} = 5 & \text{d'où} & \mathcal{N}_{PQ} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ n_U = 1 & \text{d'où} & \Delta U_f \in \mathcal{U}_f \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.41)$$

La loi de commande **affine par morceaux** est décrite par (3.2). Le tableau résume les paramètres de la loi de commande dans les différentes zones de fonctionnement.

$i$	$\mathcal{I}_i = [\alpha_i, \beta_i]$	$G(i)$	$F(i)$
1	$[\Delta U_m, \Delta U_1]$	0	$\Delta Q_M$
2	$[\Delta U_1, \Delta U_2]$	$-\frac{\Delta Q_M}{\Delta U_2 - \Delta U_1}$	$-G(2) \cdot \Delta U_2$
3	$[\Delta U_2, \Delta U_3]$	0	0
4	$[\Delta U_3, \Delta U_4]$	$\frac{\Delta Q_m}{\Delta U_4 - \Delta U_3}$	$-G(4) \cdot \Delta U_3$
5	$[\Delta U_4, \Delta U_M]$	0	$\Delta Q_m$

Tableau 3.3 – Paramètres de la loi de commande  $Q(U)$  en fonction du mode de fonctionnement

Comme nous l'avons dit précédemment, l'état du système peut être représenté par l'état du filtre (ici  $\Delta x_f(k) = \Delta U_f(k) \in \mathbb{R}$ ) et la perturbation ( $\Delta U_d \in \mathcal{U}_d \subset \mathbb{R}$ ). Le vecteur  $\Delta \mathbf{x}(k) = [\Delta x_f(k) \ \Delta U_d]^T$  décrivant le système est donc choisi comme vecteur d'état comme indiqué par (3.6). On peut remarquer ici que  $\Delta \mathbf{x}(k)$  appartient à  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ . Ceci permettra la représentation en deux dimensions de l'espace d'état continu. On rappelle que cet espace est borné (hypothèse 10). On pose  $\underline{\Delta U}_d \in \mathbb{R}$  et  $\overline{\Delta U}_d \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\mathcal{U}_d = [\underline{\Delta U}_d, \overline{\Delta U}_d] \quad (3.42)$$

La **dynamique du système** dépend de la zone dans laquelle se trouve son vecteur d'état (3.8). Ainsi, on peut définir  $\mathcal{D}_i$  à partir de  $\mathcal{I}_i = [\alpha_i, \beta_i]$  – ici les bornes en tension de chaque zone de fonctionnement linéaire – et  $\mathcal{U}_d$  comme suit :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \mathcal{D}_i &= \left\{ \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \mid \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \leq \Delta U_f \leq \beta_i \\ \underline{\Delta U}_d \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U}_d \end{array} \right\} \right\} \\ \Leftrightarrow \mathcal{D}_i &= \left\{ \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_i} \Delta \mathbf{x} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_i \\ -\alpha_i \\ \underline{\Delta U}_d \\ -\overline{\Delta U}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_i} \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pour chaque  $i$ , on définit donc les matrices  $\mathbf{K}_i$  et  $\mathbf{L}_i$  comme indiqué ci-dessus. Ensuite, on construit chaque **polyèdre**  $\mathcal{D}_i$  comme indiqué (3.9) grâce à la fonction `Polyhedron` de MPT.

L'ensemble  $(\mathcal{D}_i)_{i \in \mathcal{N}_{PQ}}$  est un ensemble de polyèdres représentant une partition de l'espace d'état continu  $\mathcal{X}$ . Soit  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  tel que  $\Delta x \in \mathcal{D}_i$ , on peut écrire la dynamique du système grâce à (3.10) avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(i) &= \begin{bmatrix} a + (1-a)K_{PQ}G(i) & 1-a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}(i) &= \begin{bmatrix} (1-a)K_{PQ}F(i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.44)$$

On a donc, comme indiqué précédemment, **un système à commutation dont la dynamique est affine par morceaux**. On distingue cinq modes de fonctionnement puisque  $n_{PQ} = 5$ . On pose donc  $q_i \in \mathcal{Q}$  la variable qui décrit le mode de fonctionnement dans laquelle se trouve le système.

$$\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \quad (3.45)$$

Pour conclure, à tout instant  $kT_e$ , l'état du système  $e(k)$  peut être décrit par un état continu  $\Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}$  et un état discret  $q_i(k) \in \mathcal{Q}$ .

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e(k) = (\Delta \mathbf{x}(k), q_i(k)) \quad \text{avec} \quad i \in \mathcal{N}_{PQ} : \Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{D}_i \quad (3.46)$$

On rappelle, afin d'alléger les notations, on écrit abusivement  $\mathcal{A}(q)$  pour représenter  $\mathcal{A}(i)$  avec  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  tel que  $q = q_i$ .

Le système est donc un **système hybride dont le fonctionnement est affine par morceaux**.

Nous allons le modéliser comme proposé partie 3.2.1. Pour ce faire, on définit :

- $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{Q}$  l'espace d'état hybride,
- $Dyn$  la fonction qui à chaque  $q \in \mathcal{Q}$  associe la matrice  $[\mathcal{A}(q), \mathcal{B}(q)]$  qui décrit la dynamique du système dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement,
- $Inv$  la fonction qui à chaque  $q \in \mathcal{Q}$  associe le polyèdre  $\mathcal{D}_q$ .

Ainsi, on peut définir le système de transition hybride représentant le système physique par  $S_H = \langle \mathcal{E}, Dyn, Inv \rangle$ . Comme décrit partie 3.2.1, l'analyse de la stabilité de  $S_H$  passe par l'analyse de l'ensemble de ses trajectoires, or il en existe une infinité. L'étude exhaustive n'est donc pas possible. Pour contourner cette difficulté, nous proposons de construire une abstraction discrète du système de transition hybride.

### 3.3.2 Étape 2 : Abstraction discrète

Comme on l'a déjà mentionné ci-dessus, l'ensemble des polyèdres  $\mathcal{D}_i$  forme une partition de l'espace d'état continu  $\mathcal{X}$ . Nous noterons  $Pa^{(0)}(\mathcal{X})$  cette partition. Comme la partie continue de l'état appartient à  $\mathbb{R}^2$ , on peut représenter graphiquement cette partition (figure 3.7).

Pour construire une **abstraction discrète du système de transition hybride**, on associe à chaque domaine  $\mathcal{D}_i^{(0)}$  un mode discret  $m_i^{(0)} \in \mathcal{M}^{(0)}$  regroupant les états du système hybride ayant la même dynamique.

Comme décrit partie 3.2.2, on définit la fonction  $\Phi^{(0)}$  qui associe à chaque polyèdre  $\mathcal{D}_i^{(0)}$  le mode discret  $m_i^{(0)}$  correspondant. On définit ensuite **l'ensemble  $\mathcal{T}^{(0)}$  des transitions possibles**.

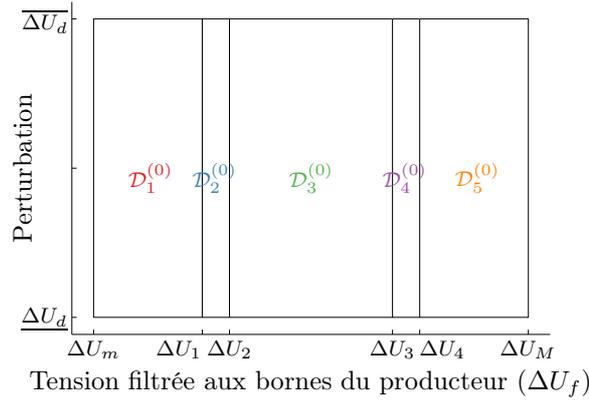


Figure 3.7 –  $Pa^{(0)}(\mathcal{X})$  partition de l'espace d'état constituée des zones de fonctionnement affine

Comme dit précédemment, dans un premier temps, on suppose que toutes les transitions sont possibles. Ici, depuis l'un des cinq modes discrets, on suppose que l'on peut atteindre tous les autres modes. Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{T}^{(0)}$  contient 25 couples de modes discrets. Finalement, on définit le système discret  $S_D^{(0)}$  représentant l'abstraction discrète du système de transition hybride par  $S_D^{(0)} = \langle \mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{T}^{(0)} \rangle$ . La figure 3.8 représente l'automate discret correspondant.

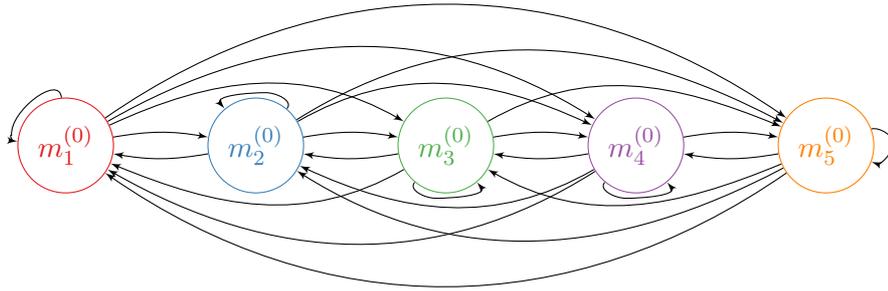


Figure 3.8 – Automate discret représentant l'abstraction discrète de  $S_H$

Comme la théorie l'a indiqué, ce premier système discret n'est pas équivalent au système hybride  $S_H$  en termes de stabilité. Ainsi, on ne peut pour l'instant conclure sur la stabilité de  $S_H$  que lorsque  $S_D^{(0)}$  est stable. Or, pour l'instant ce n'est pas le cas. En effet, il existe plusieurs trajectoires discrètes cycliques de  $S_D^{(0)}$  formant un cycle comme par exemple  $\{m_1^{(0)}, m_2^{(0)}, m_1^{(0)}, \dots\}$ . Afin de pouvoir conclure, la méthode propose de raffiner l'automate discret grâce au calcul de bisimulation.

### 3.3.3 Étape 3 : Raffinement de l'abstraction discrète par bisimulation

**1ère itération :** Nous construisons  $S_D^{(1)} = \langle \mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{T}^{(1)} \rangle$  en affinant la définition des modes discrets par rapport à  $S_D^{(0)}$ . Les cinq modes discrets de  $\mathcal{M}^{(0)}$  ont tous cinq destinations possibles. Ils sont donc divisés en au plus cinq sous-modes discrets lors de la première itération du calcul de la bisimulation.

Pour chaque mode  $m_i^{(0)}$  et pour chaque destination possible  $m_j^{(0)}$  de ce mode, le polyèdre  $\delta_{ij}$  est construit comme l'ensemble des états continus du système qui correspondent au mode discret  $m_i^{(0)}$  dont le successeur en un coup correspond au mode discret  $m_j^{(0)}$ . À partir du polyèdre  $\mathcal{D}_i^{(0)}$  correspondant au mode discret  $m_i^{(0)}$  et de  $\mathcal{D}_j^{(0)}$  correspondant à  $m_j^{(0)}$ , le polyèdre  $\delta_{ij}^{(0)}$  est calculé comme décrit précédemment (3.38). Dans l'environnement MPT, chaque polyèdre est une structure qui contient notamment un jeu de matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  définissant le polyèdre (3.9). Grâce à aux matrices  $(\mathbf{K}, \mathbf{L})$  associées aux polyèdres  $\mathcal{D}_i^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_j^{(0)}$  et à la dynamique associée à  $m_i^{(0)}$ , on construit  $\delta_{ij}$ . Afin d'éviter tout problème numérique, les inégalités redondantes dans la définition de  $\delta$  sont réduites avec la fonction `minHRep` de MPT puis normalisées à l'aide de la fonction `normalize`. Finalement, la dimension du domaine  $\delta_{ij} = \mathcal{D}_i^{(0)} \cap \text{Pre}(\mathcal{D}_j^{(0)})$  est testée à l'aide de la fonction `isFullDim` qui permet de savoir si le domaine est vide ou est une droite.

Dans ce cas, tous les sous-domaines  $\delta_{ij}$  (notés  $\mathcal{D}_{ij}^{(1)}$  sur la figure 3.9) sont de dimension 2. Ainsi, à l'issue de cette première itération, on a finalement construit un automate discret composé de 25 modes discrets ayant tous cinq destinations. Tous les modes discrets de  $\mathcal{M}^{(0)}$  ont été divisés en cinq sous-modes. Ceci signifie que, pour l'instant, aucune transition discrète de  $\mathcal{T}^{(0)}$  n'a été détectée comme impossible. La figure 3.9 représente la partition de l'espace d'état continu  $Pa^{(1)}(\mathcal{X})$  construite à l'issue de la première itération. On note que la couleur des noms de domaines est choisie en fonction de la destination du mode discret associé. Par exemple, le mode discret associé à  $\mathcal{D}_{13}^{(1)}$  est  $m_3^{(0)}$ .

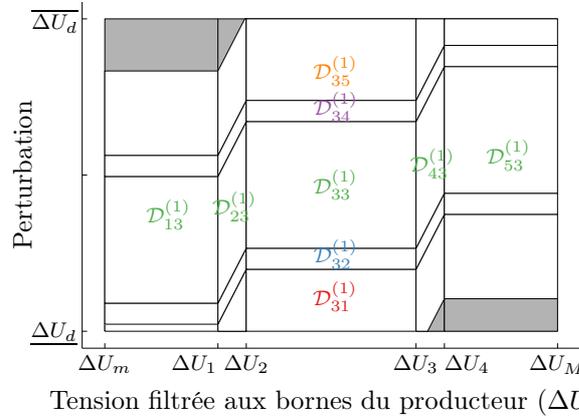


Figure 3.9 – Partition de l'espace d'état après la première itération  $Pa^{(1)}(\mathcal{X})$

La partition  $Pa^{(1)}(\mathcal{X})$  est composée de 25 polyèdres. Chacun de ces polyèdres est associé à un mode discret de  $\mathcal{M}^{(1)}$  par la fonction  $\Phi^{(1)}$ . Les polyèdres ont été construits de manière à n'avoir qu'une destination de  $\mathcal{M}^{(0)}$  mais l'abstraction est reconstruite à chaque itération. On note  $m_{ij}^{(1)} = \Phi^{(1)}(\mathcal{D}_{ij}^{(1)})$  le sous-mode discret de  $m_i^{(0)} = \Phi^{(0)}(\mathcal{D}_i^{(0)})$  menant au pas de temps suivant à  $m_j^{(0)} = \Phi^{(0)}(\mathcal{D}_j^{(0)})$ . Or, ici, chacun des modes discrets  $m_j^{(0)} \in \mathcal{M}^{(0)}$  a ensuite été divisé en cinq sous-modes. Ainsi, chacun des 25 modes discrets composant  $\mathcal{M}^{(1)}$  a cinq destinations possibles et non pas une. L'ensemble des transitions possibles  $\mathcal{T}^{(1)}$  contient donc  $25^5$  couples de modes discrets. On comprend aisément pourquoi nous n'essayerons pas de représenter l'automate discret correspondant.

On peut remarquer sur la figure 3.9 que l'union de tous les polyèdres constituant la partition  $Pa^{(1)}(\mathcal{X})$  n'est pas nécessairement égale à l'espace d'état  $\mathcal{X}$ . En effet, il existe des domaines de l'espace d'état (domaines grisés sur la figure) qui, en un coup, font sortir du domaine d'état admissible  $\mathcal{X}$ . La figure 3.10 présente un zoom de la figure 3.9

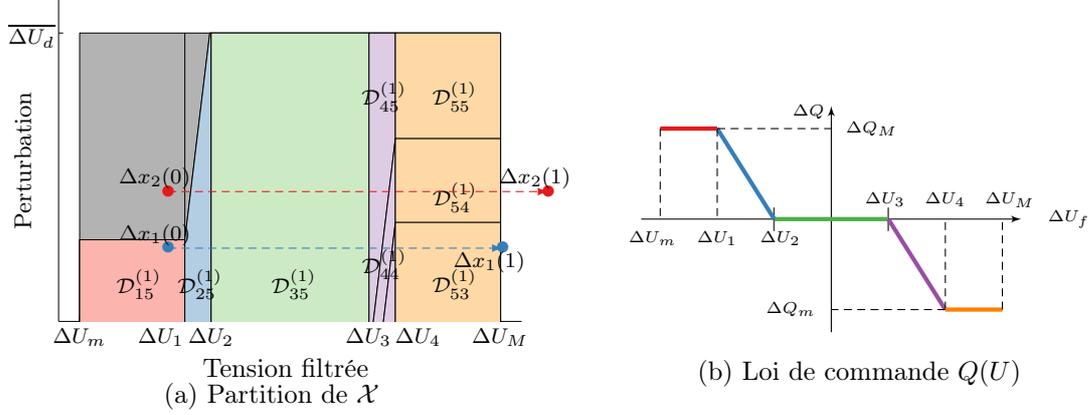


Figure 3.10 – Identification des domaines inatteignables à l'issue de la première itération

Comme on peut le voir sur la figure 3.10a, les points  $\Delta x_1(0) = [\Delta U_{f_1}(0) \ \Delta U_{d_1}(0)]^T$  et  $\Delta x_2(0) = [\Delta U_{f_2}(0) \ \Delta U_{d_2}(0)]^T$  appartiennent à la première zone de fonctionnement. En effet, d'après la figure nous avons :

$$\begin{cases} \Delta U_m < \Delta U_{f_1}(0) = \Delta U_{f_2}(0) < \Delta U_1 \\ \underline{\Delta U_d} \leq \Delta U_{d_1}(0) \leq \Delta U_{d_2}(0) \leq \overline{\Delta U_d} \end{cases} \quad (3.47)$$

Ainsi, d'après la caractéristique de la loi de commande (figure 3.10b) et de l'équation dynamique du système (3.10), on peut calculer l'état du système au pas de temps suivant en se souvenant qu'ici  $a = 0$  (tableau 3.2).

$$\begin{cases} \Delta U_f(1) = \Delta U_d(0) + K_{PQ}\Delta Q_M \\ \Delta U_d(1) = \Delta U_d(0) \end{cases} \quad (3.48)$$

Avec les valeurs numériques de cet exemple et de  $\Delta U_{d_1}(0)$ , on peut calculer  $\Delta U_{f_1}(1)$ . En étudiant les valeurs numériques, on remarque que  $\Delta U_{d_1}(0) = \Delta U_M - K_{PQ}\Delta Q_M$ . Ainsi, on peut dire que  $\Delta U_{f_1}(1) = \Delta U_M$ . Comme on peut le voir sur la figure 3.10a, le point de fonctionnement  $\Delta x_1(1)$  se trouve à la limite du domaine de définition de l'état du système.

$$\Delta x_1(1) = [\Delta U_M \ \Delta U_{d_1}(0)]^T \quad (3.49)$$

On s'intéresse maintenant au successeur en un coup du point de fonctionnement  $\Delta x_2(0)$ . On a  $\Delta U_{d_2}(0) > \Delta U_{d_1}(0)$ , on peut donc en déduire que  $\Delta U_{f_2}(1) > \Delta U_{f_1}(1) = \Delta U_M$ . Ainsi, le successeur en un pas de temps de  $\Delta x_2(0)$  n'est pas dans le domaine de fonctionnement considéré comme illustré figure 3.10a.

C'est le cas de l'ensemble des points de fonctionnement du domaine grisé de la figure 3.10a. Dans la suite des calculs, ces zones seront considérées comme inatteignables puisqu'elles ne permettent

pas de garantir le respect du bon fonctionnement du système (hypothèse 10). Si la tension filtrée est supérieure à la limite de fonctionnement  $\Delta U_M$  (ou inférieure à  $\Delta U_m$ ), on ne peut plus garantir le bon fonctionnement du système. Des automates de protection prendront le relais pour protéger le système et les usagers d'un éventuel dommage.

Finalement, on analyse la stabilité du système discret  $S_D^{(1)}$ . Nous avons déjà remarqué qu'il existe des modes discrets ayant plusieurs destinations – c'est ici le cas des 25 modes discrets de  $\mathcal{M}^{(1)}$  – on peut donc dire que le calcul de la bisimulation n'a pas encore convergé. Ainsi, on ne peut conclure sur la stabilité de  $S_H$  que si  $S_D^{(1)}$  est stable ou s'il existe au moins une trajectoire discrète instable et définitive. Afin d'illustrer l'étude de stabilité de  $S_D^{(1)}$ , nous représentons un extrait de l'automate associé à ce système discret. Il convient de noter que dans un souci de lisibilité, la figure 3.11 ne représente que les transitions discrètes issues de  $m_{12}^{(1)}$  et celles issues de  $m_{21}^{(1)}$ .

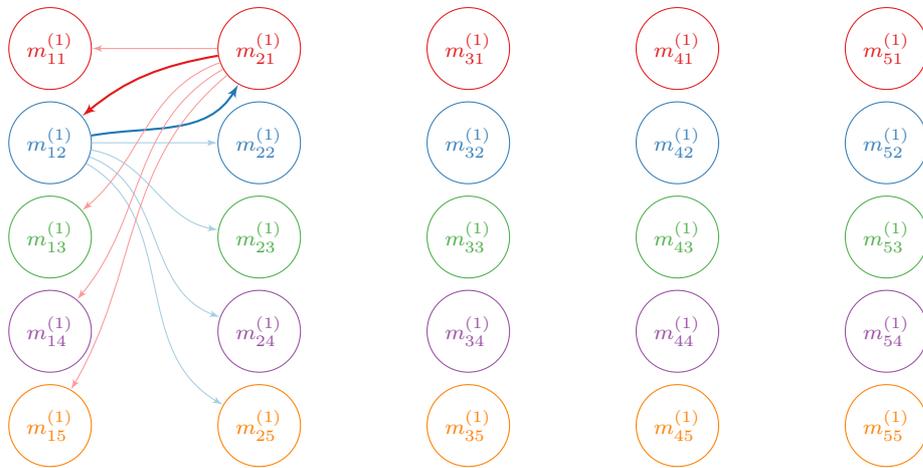


Figure 3.11 – Extrait de l'automate discret représentant  $S_D^{(1)}$

Il existe des cycles dans le graphe associé à  $S_D^{(1)}$ . Par exemple,  $m_{12}^{(1)}$  a cinq destinations dont  $m_{21}^{(1)}$  qui a lui aussi cinq destinations dont  $m_{12}^{(1)}$  (figure 3.11). Il existe donc au moins une trajectoire discrète instable  $\{m_{12}^{(1)}, m_{21}^{(1)}, m_{12}^{(1)}, \dots\}$ , mais **aucune de ces trajectoires instables ne peut être définitive**, car tous les modes discrets de  $\mathcal{M}^{(1)}$  ont plusieurs destinations. Finalement, pour pouvoir conclure sur la stabilité du système de transition hybride, **au moins une itération supplémentaire** du calcul de bisimulation est nécessaire.

**2ème itération :** Elle permet de construire  $S_D^{(2)} = \langle \mathcal{M}^{(2)}, \mathcal{T}^{(2)} \rangle$ ,  $Pa^{(2)}(\mathcal{X})$  et  $\Phi^{(2)}$  à partir du système discret construit suite à la première itération. On rappelle que  $S_D^{(1)}$  est composé de 25 modes discrets ayant tous cinq destinations. Ainsi,  $\mathcal{M}^{(2)}$  contient au plus  $25 \times 5 = 125$  modes discrets.

Après la deuxième itération du calcul, on a construit 53 modes discrets d'après l'outil d'étude formelle de la stabilité. La partition de l'espace d'état associée  $Pa^{(2)}(\mathcal{X})$  est représentée figure 3.12. On avait prévu au plus 125 modes discrets dans  $\mathcal{M}^{(2)}$  et finalement, seuls 53 sont nécessaires pour construire  $S_D^{(2)}$ . Ceci signifie donc que parmi les 125 transitions possibles de  $\mathcal{T}^{(1)}$ , 72 se sont révélées impossibles.

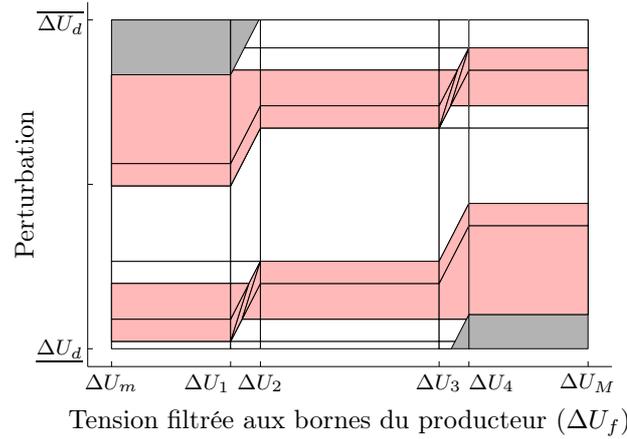


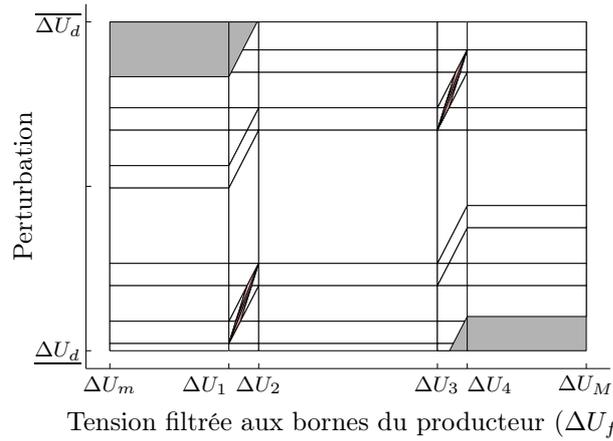
Figure 3.12 – Partition de l'espace d'état après la deuxième itération  $Pa^{(2)}(\mathcal{X})$

L'outil développé permet de dire que l'ensemble  $\mathcal{T}^{(2)}$  contient encore 105 transitions possibles, il existe donc des modes discrets de  $\mathcal{M}^{(2)}$  ayant plusieurs destinations. En effet, on compte 26 modes discrets ayant plusieurs destinations possibles. Les domaines correspondant à ces modes discrets sont ceux représentés en rouge sur la figure 3.12. L'outil d'étude permet d'ajouter que ces 26 modes ont chacun trois destinations possibles. Le calcul de bisimulation n'a donc pas encore convergé, mais cette fois-ci, il existe 27 modes n'ayant qu'une seule destination et donc potentiellement des trajectoires définitives. L'analyse du graphe construit à partir du système discret  $S_D^{(2)}$  (non représenté ici) permet de conclure à l'instabilité de  $S_D^{(2)}$ . Cependant, il n'existe pas de trajectoire discrète instable qui soit définitive. Ainsi, **nous ne pouvons conclure ni à la stabilité ni à l'instabilité de  $S_H$ . Une nouvelle itération du calcul de bisimulation est nécessaire.**

**3ème itération :** La troisième itération du calcul de bisimulation permet de construire  $S_D^{(3)} = \langle \mathcal{M}^{(3)}, \mathcal{T}^{(3)} \rangle$ ,  $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$  et  $\Phi^{(3)}$ . On rappelle que  $\mathcal{M}^{(2)}$  contient 53 modes discrets dont 26 ont trois destinations possibles. Ainsi, à la construction de  $\mathcal{M}^{(3)}$ , les 27 modes discrets de  $\mathcal{M}^{(2)}$  ayant une unique destination sont recopiés tels quels. Les 26 autres modes sont divisés en, au plus,  $26 \times 3 = 78$  sous-modes discrets. Finalement,  $\mathcal{M}^{(3)}$  contient au plus  $26 \times 3 + 27 = 105$  modes discrets.

Après la troisième itération du calcul, l'outil de calcul a construit 71 modes discrets dont six ont plusieurs destinations possibles. L'ensemble  $\mathcal{T}^{(3)}$  des transitions possibles contient 79 couples de modes discrets. La partition de l'espace d'état associée  $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$  est représentée figure 3.13. Nous y avons mis en évidence les polyèdres qui ont encore plusieurs destinations possibles après la troisième itération.

Le calcul n'a toujours pas convergé puisqu'il existe encore six modes discrets ayant plusieurs destinations possibles (figure 3.13). On pourra conclure sur la stabilité de  $S_H$  si le système discret est stable ou s'il contient au moins une trajectoire discrète instable et définitive, c'est-à-dire, ne passant par aucun des six modes discrets ayant plusieurs destinations. L'analyse du graphe construit à partir de  $S_D^{(3)}$  permet de conclure qu'il existe des trajectoires discrètes définitives et

Figure 3.13 – Partition de l'espace d'état après la troisième itération  $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$ 

instables. **Nous pouvons donc conclure à l'instabilité du système de transition hybride et ce dès la troisième itération du calcul de la bisimulation.** Ayant terminé le découpage du système discret, nous présentons maintenant l'analyse des résultats.

### 3.3.4 Conclusion sur la stabilité – Analyse des résultats disponibles

Comme nous l'avons décrit, nous pouvons conclure après la troisième itération du calcul de bisimulation et avant sa convergence. Nous concluons grâce à l'existence d'au moins une trajectoire discrète définitive et instable. Ce résultat est **conforme aux conclusions de l'étude empirique** en simulation décrite partie 2.4. Avant de présenter l'ensemble des domaines impliqués dans un cycle, nous allons illustrer l'instabilité du système pour une trajectoire discrète particulière. Pour ce faire, nous choisissons une trajectoire discrète instable comme exemple. La figure 3.14a représente un extrait de l'automate discret construit grâce à l'outil formel proposé à l'issue de trois itérations. Comme on peut le voir, le mode discret  $m_1^{(3)}$  a pour unique successeur  $m_2^{(3)}$  qui a pour unique successeur  $m_1^{(3)}$ . Il y a donc au moins une trajectoire discrète définitive qui est instable. On peut aussi voir, d'après l'automate discret (figure 3.14a) que ce cycle est atteignable en un pas de temps depuis le mode discret  $m_0^{(3)}$ .

Afin d'identifier les points de fonctionnement correspondant à ce cycle, nous représentons les domaines de l'espace d'état associés à ces trois modes discret (figure 3.14b). Le domaine rouge représente l'ensemble des états continus du système associés au mode discret  $m_0^{(3)}$  et sera noté  $\mathcal{D}_0^{(3)} = (\Phi^{(3)})^{-1}(m_0^{(3)})$ . On définit de même  $\mathcal{D}_1^{(3)}$  et  $\mathcal{D}_2^{(3)}$ . On peut remarquer que pour les états continus appartenant à  $\mathcal{D}_0^{(3)}$ , la tension filtrée aux bornes du producteur est comprise entre  $\Delta U_2$  de  $\Delta U_3$ , il s'agit donc de point de fonctionnement dans la troisième zone de fonctionnement de la caractéristique  $Q(U)$  soit la bande-morte (tableau 3.3). Le domaine  $\mathcal{D}_1^{(3)}$  regroupe des points de la cinquième zone de fonctionnement soit la saturation basse et  $\mathcal{D}_2^{(3)}$  regroupe des points de la quatrième zone.

Grâce à l'automate discret (figure 3.14a, nous pouvons retracer la séquence dynamique dans le domaine d'état. Soit un point de fonctionnement  $\Delta \mathbf{x}(k)$  dans le domaine  $\mathcal{D}_0^{(3)}$ . Le mode discret

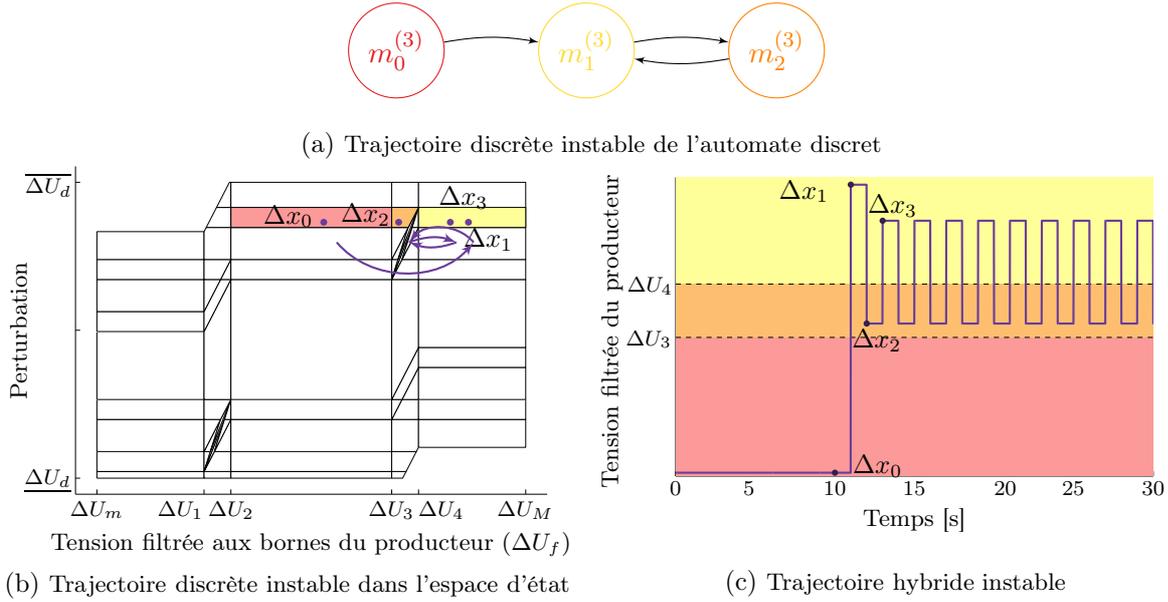


Figure 3.14 – Illustration d'une trajectoire discrète instable représentée dans l'automate discret et dans l'espace d'état et d'une trajectoire hybride correspondante

associé à ce point de fonctionnement est  $m_0^{(3)}$  qui a pour successeur  $m_1^{(3)}$ . Ainsi,  $\Delta\mathbf{x}(k+1)$ , qui est le successeur de  $\Delta\mathbf{x}(k)$ , appartient au domaine  $\Phi^{(3)}(m_1^{(3)}) = \mathcal{D}_1^{(3)}$ . De même, on peut dire que  $\Delta\mathbf{x}(k+2)$  appartient à  $\mathcal{D}_2^{(3)}$ ,  $\Delta\mathbf{x}(k+3)$  à  $\mathcal{D}_1^{(3)}$  et ainsi de suite. On retrouve donc un fonctionnement instable comme prévu.

Pour illustrer la dynamique associée à cette trajectoire discrète, on choisit un point de fonctionnement  $\Delta\mathbf{x}_0 = [\Delta U_f(0) \ \Delta U_d(0)]^T \in \mathcal{D}_0^{(3)}$  et on calcule la trajectoire hybride associée. Les coordonnées du point choisi pour cette étude sont  $\Delta\mathbf{x}_0 = [0 \ \text{V} \ 1350 \ \text{V}]^T$ . Le successeur de  $\Delta\mathbf{x}_0$ , noté  $\Delta\mathbf{x}_1$  est calculé grâce à l'équation (3.10) dans la troisième zone de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . On trouve alors que :

$$\Delta\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \Delta U_f(1) \\ \Delta U_d(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_d(0) \\ \Delta U_d(0) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

On a donc  $\Delta U_f(1) = 1350 \ \text{V}$  soit  $\Delta U_4 \leq \Delta U_f(1) \leq \Delta U_M$ . Comme prévu, on peut dire que  $\Delta\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}_1^{(3)}$  et ce qui correspond à la cinquième zone de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . On calcule de la même manière  $\Delta\mathbf{x}_2$  le successeur de  $\Delta\mathbf{x}_1$  avec la dynamique associée à la cinquième zone de fonctionnement.

$$\Delta\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \Delta U_f(2) \\ \Delta U_d(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_d(1) + K_{PQ}\Delta Q_m \\ \Delta U_d(1) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

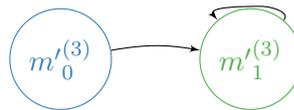
Grâce aux valeurs numériques données (tableau 3.2), on peut donc calculer  $\Delta U_f(2) = 700 \ \text{V}$ . On remarque que  $\Delta U_3 \leq \Delta U_f(2) \leq \Delta U_4$ . Comme prévu, on peut dire que  $\Delta\mathbf{x}_2 \in \mathcal{D}_2^{(3)}$ . Ainsi on

peut calculer  $\Delta \mathbf{x}_3$  le successeur de  $\Delta \mathbf{x}_2$ .

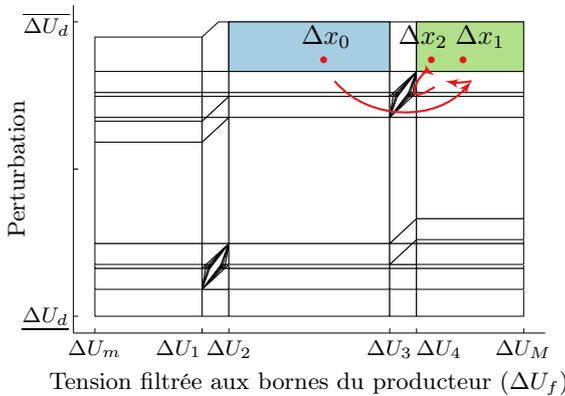
$$\Delta \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \Delta U_f(3) \\ \Delta U_d(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_d(2) + K_{PQ}\sigma(\Delta x_f(2) - \Delta U_3) \\ \Delta U_d(2) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Ainsi on trouve  $\Delta U_f(3) = 1220$  V ce qui nous ramène dans la cinquième zone de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . À nouveau, le successeur peut être calculé grâce à l'équation dynamique dans la zone cinq. Or, comme on peut le voir dans l'équation (3.51), cette équation ne dépend pas de l'état précédent. C'est pourquoi on peut dire que le successeur de  $\Delta \mathbf{x}_3$  est  $\Delta \mathbf{x}_2$ . La trajectoire a atteint le cycle limite en deux pas de temps. La tension filtrée aux bornes du producteur oscille entre  $\Delta \mathbf{x}_2$  et  $\Delta \mathbf{x}_3$ .

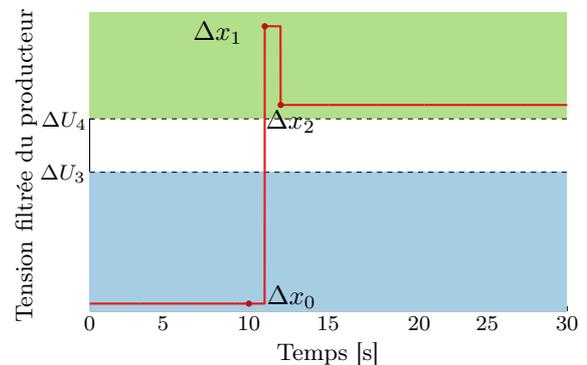
La figure 3.14c montre la trajectoire hybride décrite par le système en réponse à un échelon de perturbation de  $U_d(0)$  à  $T = 10$  s. Ainsi, à partir de cet instant, le système se trouve au point  $\Delta \mathbf{x}_0$ . On peut remarquer que cette trajectoire est conforme aux conclusions de l'analyse de la trajectoire discrète. La condition initiale étudiée mène comme prévu à un fonctionnement instable du système avec des oscillations de tension aux bornes du producteur de l'ordre de 500 V. Nous avons donc illustré le comportement instable du système à l'aide d'un exemple de trajectoire discrète instable et de trajectoire hybride correspondant. Nous rappelons que l'étude empirique de la stabilité (partie 2.4) a permis de mettre en évidence l'existence de points de fonctionnement stables. Prenons un exemple de trajectoire discrète définitive stable. La figure 3.15a en est un exemple. Le seul successeur du mode discret  $m'_1(3)$  est lui-même, il est donc stable et appartient à la bisimulation du système hybride. Tout mode discret dont l'unique successeur est  $m'_1(3)$  est à l'origine d'une trajectoire discrète stable. C'est par exemple le cas de  $m'_0(3)$ .



(a) Trajectoire discrète stable de l'automate discret



(b) Trajectoire discrète stable dans l'espace d'état



(c) Trajectoire hybride stable

Figure 3.15 – Illustration d'une trajectoire discrète stable représentée dans l'automate discret et dans l'espace d'état et d'une trajectoire hybride correspondante

D'après la figure 3.15a, la trajectoire discrète issue de  $m'_0{}^{(3)}$  est stable et peut s'écrire :

$$\text{Traj}_D(m'_0{}^{(3)}) = \{m'_0{}^{(3)}, m'_1{}^{(3)}, m'_1{}^{(3)}, \dots\} \quad (3.53)$$

Afin d'identifier les points de fonctionnement associés aux modes discrets  $m'_0{}^{(3)}$  et  $m'_1{}^{(3)}$ , on trace les polyèdres associés  $\mathcal{D}'_0{}^{(3)} = (\Phi^{(3)})^{-1}(m'_0{}^{(3)})$  et  $\mathcal{D}'_1{}^{(3)} = (\Phi^{(3)})^{-1}(m'_1{}^{(3)})$  (figure 3.15b). L'outil de calcul nous permet d'identifier les points de fonctionnement correspondant au mode discret  $m'_0{}^{(3)}$ . On note que ces points de fonctionnement correspondent à la troisième zone de la loi de commande  $Q(U)$ .

$$\Delta \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \Delta U_f(k) \\ \Delta U_d(k) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}'_0{}^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta U_2 \leq \Delta U_f(k) \leq \Delta U_3 \\ 1535 V \leq \Delta U_d(k) \leq \frac{\Delta U_3}{\Delta U_d} \end{cases} \quad (3.54)$$

De même, on caractérise les points de  $\mathcal{D}'_1{}^{(3)}$  grâce aux résultats de l'analyse.

$$\Delta \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \Delta U_f(k) \\ \Delta U_d(k) \end{bmatrix} \in \mathcal{D}'_1{}^{(3)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta U_4 \leq \Delta U_f(k) \leq \Delta U_M \\ 1535 V \leq \Delta U_d(k) \leq \frac{\Delta U_M}{\Delta U_d} \end{cases} \quad (3.55)$$

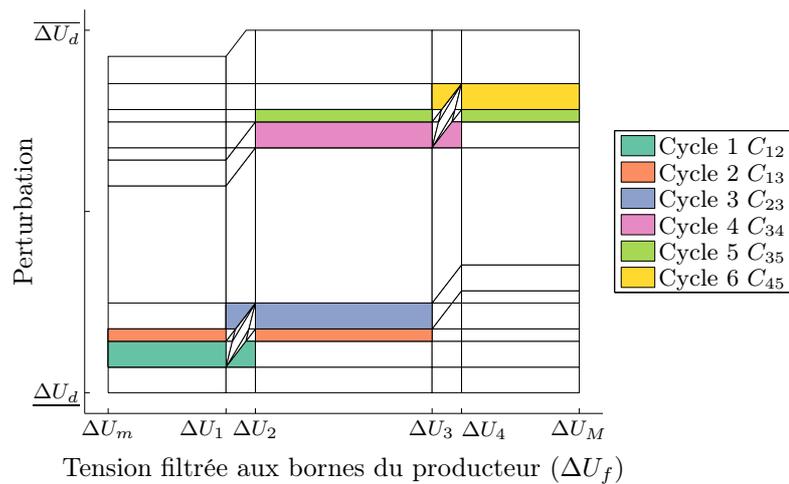
Afin d'illustrer une trajectoire hybride correspondant à la trajectoire discrète issue de  $m'_0{}^{(3)}$ , on choisit un point de fonctionnement initial appartenant à  $\mathcal{D}'_0{}^{(3)}$ . Prenons par exemple  $\Delta \mathbf{x}_0 = (0V, 1600V)$ . On remarque que l'on a bien  $\Delta \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}'_0{}^{(3)}$ . On calcule  $\Delta \mathbf{x}_1$  le successeur en un pas de temps de  $\Delta \mathbf{x}_0$  grâce à l'équation de fonctionnement dynamique dans la troisième zone.

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \Delta U_f(1) \\ \Delta U_d(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_d(0) \\ \Delta U_d(0) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

On a donc  $\Delta U_f(1) = 1650 V$  soit  $\Delta U_4 \leq \Delta U_f(1) \leq \Delta U_M$ . Comme prévu, on peut dire que  $\Delta \mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}'_1{}^{(3)}$  et correspond à la cinquième zone de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . On calcule de la même manière  $\Delta \mathbf{x}_2$  le successeur de  $\Delta \mathbf{x}_1$  avec la dynamique associée à la cinquième zone de fonctionnement. L'équation est la même que celle présentée par (3.51). On trouve alors  $\Delta U_f(2) = 1000 V$  et  $\Delta U_d(2) = 1650 V$ . On en déduit que  $\Delta \mathbf{x}(2) \in \mathcal{D}'_1{}^{(3)}$ . On calcule  $\Delta \mathbf{x}(3)$  le successeur de  $\Delta \mathbf{x}(2)$  et on montre que  $\Delta \mathbf{x}(3) = \Delta \mathbf{x}(2)$ . Finalement la trajectoire hybride atteint son régime permanent en deux pas de temps. On peut dire qu'elle est stable et que son état d'équilibre est  $\Delta \mathbf{x}(2)$ . Le profil temporel de la trajectoire (figure 3.15c) illustre ce comportement.

Nous avons mis en évidence l'existence d'une trajectoire discrète définitive instable. L'outil a permis de mettre en évidence six cycles définitifs. Chaque cycle est une trajectoire discrète oscillant entre deux modes discrets. La figure 3.16 représente les polyèdres associés à ces modes discrets.

Sur la figure 3.16, les domaines de même couleur correspondent à des modes discrets menant l'un à l'autre et donc à une trajectoire discrète définitive instable. Intéressons nous à la trajectoire discrète instable nommée cycle 2. Elle correspond à deux polyèdres, l'un dans la première zone

Figure 3.16 – Polyèdres de  $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$  appartenant à l'un des cycles détecté

de fonctionnement linéaire de la loi de commande et l'autre dans la troisième zone. On rappelle que ces zones correspondent respectivement à la saturation haute et à la bande morte de la loi de commande  $Q(U)$ . On notera ce cycle  $C_{13}$ . Les trajectoires hybrides représentées par cette trajectoire discrète vont présenter des oscillations de la tension du producteur et de sa puissance réactive. Les points de fonctionnement sont successivement dans la première et la troisième zone de la loi de commande. Ainsi la puissance réactive oscillera entre  $\Delta Q_M$  et 0. On s'attend donc à des oscillations de tension de l'ordre de  $|K_{PQ} \cdot \Delta Q_m| = 650$  V. D'après la figure 3.16, le point de fonctionnement  $\Delta \mathbf{x} = [0 \text{ V} \quad -1200 \text{ V}]^T$  appartient au cycle 2. On calcule la trajectoire hybride issue de ce point. On applique au système un échelon de perturbation de  $-1200$  V à  $T = 10$ s. Ainsi, à cet instant, l'état du système se trouve en  $\Delta \mathbf{x}$ . Comme on le voit figure 3.17, le système se comporte comme prévu. En régime établi, la puissance réactive oscille entre 0 et  $\Delta Q_M$  (figure 3.17a) et l'amplitude des oscillations de la tension filtrée du producteur est bien de 650 V (figure 3.17b).

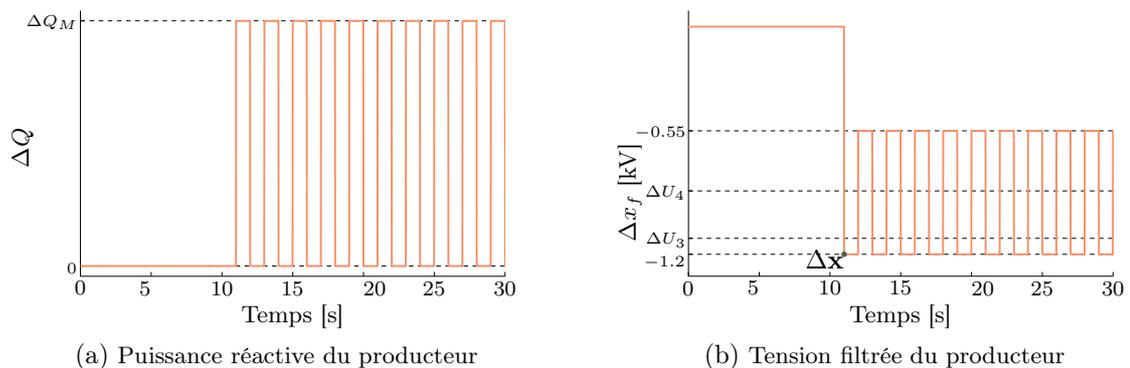


Figure 3.17 – Illustration d'une trajectoire hybride discrète instable correspondant au cycle 2

Il convient de noter que le cycle illustré précédemment (figure 3.14) correspond ici au cycle 6 entre les quatrième et cinquième zones de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . On s'attendait donc à des oscillations de puissance réactive entre  $\Delta Q_m$  et un certain  $\Delta Q \in [\Delta Q_m, 0]$ . On prévoit

donc des oscillations de tensions comprises entre 0 V et  $|K_{PQ}\Delta Q_m| = 650$  V. L'analyse d'une trajectoire hybride correspondant au cycle (figure 3.14c) avait mis en évidence des oscillations de tension de l'ordre de 500 V ce qui correspond bien à la prévision.

Finalement, l'analyse des domaines impliqués dans les cycles nous permet d'évaluer – ou au moins d'encadrer – les oscillations de tensions associées à chaque cycle. À partir de l'analyse du graphe associé à  $S_D^{(3)}$ , on peut aussi identifier des zones de l'espace d'état menant, de façon définitive, à l'un des cycles détectés. La figure 3.18 montre les domaines de  $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$  correspondant aux modes discrets dont la trajectoire est instable et définitive. Le cas des domaines ayant encore plusieurs destinations sera discuté dans la suite (partie 3.4).

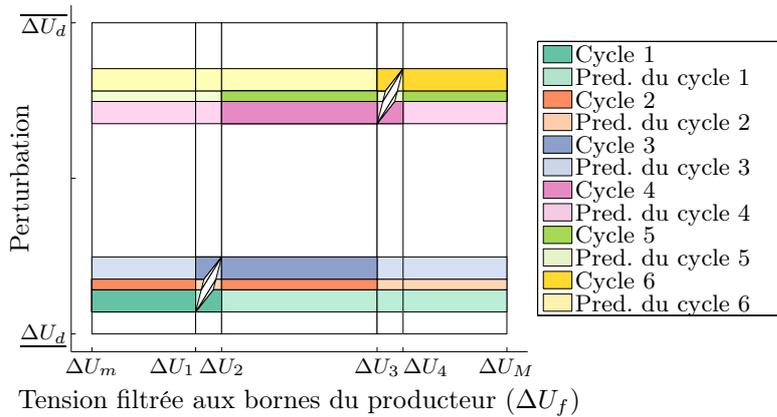


Figure 3.18 – Polyèdres de  $Pa^{(3)}(\mathcal{X})$  correspondant à une trajectoire discrète définitive et instable

Pour conclure, on peut dire que cette étude a permis de **mettre en évidence le comportement instable du système étudié**. Nous avons pu identifier les **zones de fonctionnement impliquées dans un cycle et celles y menant** sans avoir à attendre la convergence du calcul de bisimulation. De plus, l'étude de quelques points de fonctionnement a illustré l'existence de trajectoires stables malgré le caractère instable du système. Un point de fonctionnement « mal » choisi pourrait mener à conclure à tort à la stabilité du système. Ainsi, **une étude empirique risque de ne pas être suffisante pour conclure sur la stabilité du système**. Une étude formelle est donc nécessaire. Cette étude formelle ayant permis de conclure à l'instabilité du système, nous allons étudier ci-dessous comment le stabiliser.

### 3.3.5 Stabilisation du système

La méthode proposée a permis de conclure à l'instabilité du cas d'étude pour  $a = 0$ . Le but de ces travaux est de **proposer des réglages du régulateur du producteur assurant la stabilité du système**. On rappelle que l'étude empirique menée précédemment (partie 2.4) a permis de mettre en évidence l'influence de la rapidité du filtre de mesure  $a$  sur la stabilité du système. Nous proposons donc de ralentir le filtre de mesure et de réitérer l'étude formelle afin d'identifier un réglage assurant la stabilité du cas d'étude.

À ce stade, grâce aux résultats de l'étude formelle de stabilité menée sur le système, nous savons dire, pour une valeur de  $a$  donnée, si le système est stable ou non. Afin de choisir un réglage

garantissant la stabilité du système étudié, plusieurs valeurs de  $a \in [0, 1[$  sont testées. On peut par exemple proposer une recherche par **dichotomie**. Le tableau 3.4 résume les résultats de l'étude formelle de stabilité pour différentes valeurs de  $a$ .

$a$	Stable ?	Le calcul de bisimulation a convergé ?	Nombre d'itérations avant de pouvoir conclure	Nombre de domaines construits	Temps de calcul [s]
0	NON	NON	3	71	1,1
0,10	NON	NON	4	136	2,2
0,20	NON	NON	4	184	2,7
0,30	NON	NON	4	268	3,7
0,42	NON	NON	3	134	2,0
0,43	NON	NON	3	81	1,5
0,44	NON	NON	3	82	1,5
0,45	OUI	NON	3	83	1,5
0,50	OUI	NON	3	79	1,4
0,65	OUI	NON	4	119	2,0
0,80	OUI	NON	12	393	6,7
0,95	OUI	NON	38	3019	56,5

Tableau 3.4 – Comparaison de la stabilité, du temps de calcul et de la complexité pour différents réglages de rapidité du filtre

Dans un premier temps, on peut remarquer que le **cas étudié est stable pour  $a \geq 0,45$**  avec la finesse de la grille choisie. Ceci semble indiquer que le système est d'autant plus stable que le filtre de mesure est lent.

En se penchant sur les résultats présentés dans le tableau 3.4, on observe que le nombre d'itérations nécessaires avant de pouvoir conclure est important lorsque le paramètre  $a$  est largement supérieur à la limite de stabilité. Ainsi, **il est plus long de conclure lorsque le système est lent**. Ceci peut s'expliquer par le fait que le nombre d'itérations du calcul peut être vu comme la durée du régime transitoire des trajectoires avant d'atteindre la zone de fonctionnement finale ou le cycle limite. Plus  $a$  est grand, plus le système mettra de temps avant d'atteindre son état d'équilibre ou son cycle limite. La figure 3.19 illustre ce phénomène. Comme on peut le voir sur le cas représenté sur cette figure, quand  $a = 0,03$ , le cycle limite est atteint rapidement par le système. Peu d'itérations seront nécessaires pour construire cette trajectoire même si elle est instable. Dans le cas où  $a = 0,80$ , la trajectoire étudiée ici rejoint sa zone finale (la quatrième zone de fonctionnement) huit pas de temps après la perturbation. Il faudra donc décrire des trajectoires de longueur au moins huit ce qui demande au moins huit itérations. Ainsi, plus le système est lent – et donc plus il est stable – plus un grand nombre d'itérations est nécessaire avant de pouvoir conclure.

On peut aussi remarquer qu'**il est plus long de conclure à la stabilité du système qu'à son instabilité**. En effet, pour identifier un système instable, il suffit d'avoir construit une seule trajectoire discrète définitive et instable. En revanche, pour pouvoir conclure à la stabilité du système, il faut que toutes les trajectoires (définitives ou non) soient stables.

Pour conclure, dans le cas étudié et quelle que soit la rapidité du filtre de mesure, **il a toujours**

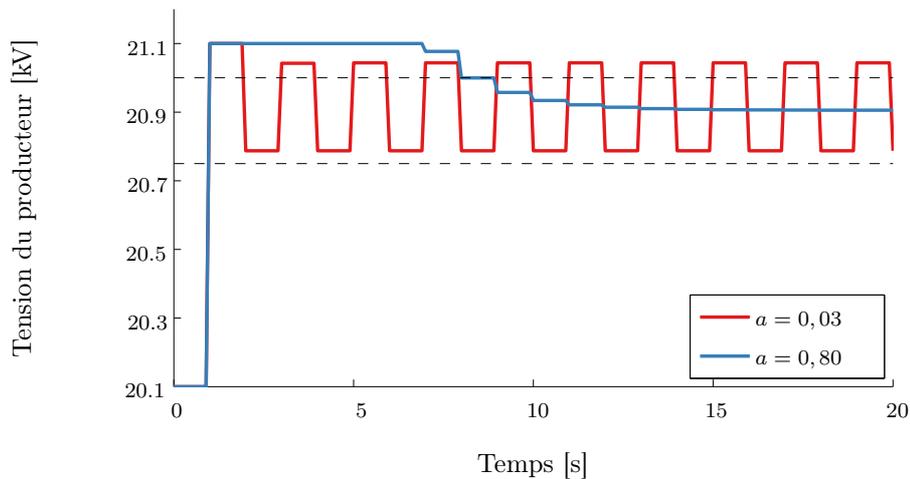


Figure 3.19 – Illustration du lien entre le temps de réponse du système et le nombre d’itérations nécessaires permettant de conclure

**été possible de conclure** sur la stabilité du système malgré l’absence de garantie de convergence de la méthode proposée. On note aussi que dans tous les cas étudiés, la méthode développée dans ces travaux permet de conclure avant la construction complète de la bisimulation du système. Pour finir, il est envisageable d’intégrer une telle méthode dans les études de raccordement menées par les gestionnaires de réseaux.

Avant de conclure sur la méthode d’analyse de stabilité proposée, nous présentons quelques remarques supplémentaires sur, entre autre, la convergence de la méthode.

## 3.4 Discussions

### 3.4.1 Sur le fait de pouvoir conclure

On rappelle que le calcul de la bisimulation proposée par [125] est un problème non décidable. Or, pouvoir conclure sur la stabilité du système dans un temps donné et un espace mémoire fixé est essentiel. Pour parvenir à la conclusion avant l’obtention de la bisimulation, nous proposons une méthode qui alterne une phase de raffinement de l’automate discret et une phase d’analyse de la stabilité. **Le fait de pouvoir conclure avec la méthode proposée dans ces travaux n’est pas garanti.** Il convient de noter que, par rapport à la méthode classique de calcul de la bisimulation, **nous avons élargi le nombre de cas pour lesquels il est possible de conclure et nous avons accéléré l’obtention de cette conclusion.** En effet, le tableau 3.4 permet de voir que dans tous les cas étudiés, nous avons pu conclure sur la stabilité du système étudié avant d’en avoir construit la bisimulation. Dans ce qui suit, nous montrons qu’il existe des cas pour lesquels il est impossible de construire la bisimulation du système mais pour lesquels la méthode développée dans ces travaux permet de conclure sur la stabilité.

Prenons par exemple le cas  $a = 0$  décrit précédemment. L’analyse de la stabilité détaillée partie 3.3 a permis de conclure à l’instabilité du système après seulement trois itérations du calcul

de raffinement. Ces trois itérations n'ont pas suffit a construire la bisimulation du système. Effectivement, nous avons pu remarquer qu'à l'issue de la troisième itération, il reste encore six modes discrets ayant plusieurs destinations. On remarque que la totalité de ces modes se trouve dans la deuxième ou la quatrième zone de fonctionnement linéaire.

La figure 3.20 illustre le découpage d'un domaine de la deuxième zone de fonctionnement linéaire correspondant à l'un des modes discrets ayant plusieurs destinations (domaine grisé).

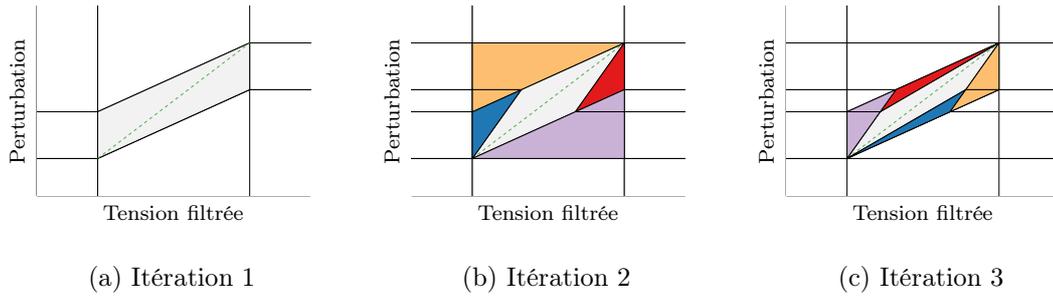


Figure 3.20 – Découpage d'un domaine correspondant à une zone de fonctionnement instable

La figure 3.20a représente le domaine lors de la première itération du calcul. On le notera  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ . Le mode discret  $m_{22}^{(1)}$  correspondant à  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  est issu de la division de  $m_2^{(0)}$  en cinq sous-modes puisque  $m_2^{(0)}$  a cinq destinations possibles ( $m_1^{(0)}$ ,  $m_2^{(0)}$ ,  $m_3^{(0)}$ ,  $m_4^{(0)}$  et  $m_5^{(0)}$ ). Le domaine  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  regroupe l'ensemble des états  $\Delta\mathbf{x}(k)$  du système correspondant aux prédécesseurs de  $\mathcal{D}_2^{(0)}$  dans  $\mathcal{D}_2^{(0)}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \Delta x_f(k) \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_2^{(0)} \\ \Delta\mathbf{x}(k+1) \in \mathcal{D}_2^{(0)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_2 \leq \Delta x_f(k) \leq \Delta U_3 \\ (1 + K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \leq \Delta U_d + K_{PQ}\sigma\Delta x_f(k) \leq \Delta U_3 + K_{PQ}\sigma\Delta U_2 \\ \underline{\Delta U_d} \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U_d} \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Ainsi, on a construit lors de la première itération  $m_{22}^{(1)}$  comme le sous-mode allant de  $m_2^{(0)}$  vers  $m_2^{(0)}$ . Or,  $m_2^{(0)}$  a été divisé en cinq lors de la première itération du calcul. Ainsi, même si  $m_{22}^{(1)}$  a été construit pour pointer vers un unique mode discret de l'abstraction initiale  $S_D^{(0)}$ , après la subdivision de  $m_2^{(0)}$  à la première itération, il pointe vers cinq modes discrets de  $S_D^{(1)}$  :  $m_{21}^{(1)}$ ,  $m_{22}^{(1)}$ ,  $m_{23}^{(1)}$ ,  $m_{24}^{(1)}$  et  $m_{25}^{(1)}$ .

À l'itération suivante  $m_{22}^{(1)}$ , qui a cinq destinations possibles, peut être découpé au plus en cinq sous-modes. L'outil nous permet de voir qu'il a été découpé en seulement trois sous-modes. En effet, le calcul a identifié qu'il n'existe aucun point de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  permettant d'atteindre en un pas de temps les domaines associés à  $m_{24}^{(1)}$  et  $m_{25}^{(1)}$ . Nous noterons  $m_{221}^{(2)}$ ,  $m_{222}^{(2)}$  et  $m_{223}^{(2)}$  les trois sous-modes construits à la deuxième itération. Intéressons nous à la construction de trois domaines associés.

Soit  $\Delta\mathbf{x}(k)$  un point appartenant à  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ , on peut écrire que :

$$\Delta x_f(k+1) = \Delta U_d + K_{PQ}\sigma(\Delta x_f(k) - \Delta U_2) \quad (3.58)$$

La droite  $D$  (en vert sur la figure 3.20a) représente la droite des points fixes de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ .

$$D = \left\{ \Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{D}_{22}^{(1)} \mid \Delta \mathbf{x}(k+1) = \Delta \mathbf{x}(k) = \frac{\Delta U_d}{1 - K_{PQ}\sigma} - \frac{K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} \Delta U_2 \right\} \quad (3.59)$$

On peut remarquer que la dynamique associée à la zone de fonctionnement 2 s'écrit comme une suite arithmético-géométrique, c'est-à-dire de la forme  $u_{k+1} = qu_k + r$ . Comme dans le cas d'une suite géométrique, la convergence de ce type de suite dépend du  $|q|$ . Ici, on peut dire que  $q = K_{PQ}\sigma = -2,6$  et donc que  $|q| > 1$ . Finalement, la suite étudiée diverge ce qui implique qu'aucun point de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)} \setminus D$  ne reste dans ce domaine quand  $k \rightarrow \infty$ .

Il convient de noter que  $q < 0$  donc le point de fonctionnement oscille autour de la droite des points fixes  $D$  en s'en éloignant un peu plus à chaque pas de temps. Ayant décrit la dynamique des points de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ , nous revenons à l'étude du mode discret  $m_{22}^{(1)}$  et à ses trois destinations possibles. Nous avons dit que le point de fonctionnement  $\Delta \mathbf{x}(k)$  oscille autour de  $D$  en s'en éloignant. Il y a alors trois possibilités pour  $\Delta \mathbf{x}(k+1)$ , le successeur de ce point :

- Soit  $\Delta \mathbf{x}(k)$  est suffisamment proche de  $D$  pour que  $\Delta \mathbf{x}(k+1)$  appartienne aussi à  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ ;
- Soit  $\Delta \mathbf{x}(k)$  est tel que  $\Delta \mathbf{x}(k+1) > \Delta U_3 + K_{PQ}\sigma \Delta U_2$  et donc l'état du système sort en un pas de temps de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  et  $\Delta \mathbf{x}(k+1) \in \mathcal{D}_{21}^{(1)}$ ;
- Soit  $\Delta \mathbf{x}(k)$  est tel que  $\Delta \mathbf{x}(k+1) < (1 + K_{PQ}\sigma) \Delta U_2$  et donc l'état du système sort aussi en un pas de temps de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  et  $\Delta \mathbf{x}(k+1) \in \mathcal{D}_{23}^{(1)}$ .

Finalement, les trois destinations possibles de  $m_{22}^{(1)}$  sont effectivement atteignables. Lors de la deuxième itération (figure 3.20b), le domaine  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  est donc découpé en trois sous-domaines :

- $\mathcal{D}_{221}^{(2)}$  (domaine bleu sur la figure 3.20b) regroupe des points sortant en un coup de  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  vers l'un des deux domaines violet.
- $\mathcal{D}_{223}^{(2)}$  (domaine rouge sur la figure 3.20b) regroupe le reste des points sortant en un coup du domaine  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  vers l'un des domaines orange.
- $\mathcal{D}_{222}^{(2)}$  (domaine gris sur la figure 3.20b) de la figure 3.20b regroupe les points restant dans le domaine  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  de la figure 3.20a en un coup.

Comme on peut le voir, après la deuxième itération, les modes discrets associés aux domaines  $\mathcal{D}_{221}^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_{223}^{(2)}$  ont tous les deux deux destinations possibles. Le mode discret associé au domaine  $\mathcal{D}_{222}^{(2)}$  a à nouveau trois destinations possibles dont lui-même.

Le même raisonnement s'applique pour construire  $S_D^{(3)}$  et on peut donc dire que  $\mathcal{D}_{222}^{(2)}$  sera divisé en trois sous-domaines dont l'un regroupe les points restant dans  $\mathcal{D}_{222}^{(2)}$  (en gris sur la figure 3.20c), un autre les points dont les successeurs appartiennent à  $\mathcal{D}_{221}^{(2)}$  (en bleu sur la figure 3.20c) et un dernier regroupant les points dont les successeurs appartiennent à  $\mathcal{D}_{223}^{(2)}$  (en bleu sur la figure 3.20c).

La construction de la bisimulation du système hybride va continuer à découper le domaine instable (grisé) en trois sous-domaines à chaque itération. Les sous-domaines construits ont une surface de plus en plus petite mais ne sont jamais vides. Le calcul itératif de construction de la bisimulation ne peut donc pas converger. Il convient de noter que ceci n'empêche pas de conclure sur la stabilité du système. Effectivement, on sait déjà que tout point de fonctionnement appartenant à l'un des domaines grisés des figures 3.20 ne peut pas y rester et rejoindra le cycle

2. Une partition plus précise de l'espace d'état permettrait de savoir en combien de pas de temps le point de fonctionnement rejoint le cycle 2. De plus, les domaines grisés ont comme unique prédécesseur eux-même, c'est-à-dire que la seule possibilité de les atteindre est de s'y trouver à l'instant initial. La figure 3.21 présente deux trajectoires hybrides issues de deux points de fonctionnement initiaux appartenant à  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$ .

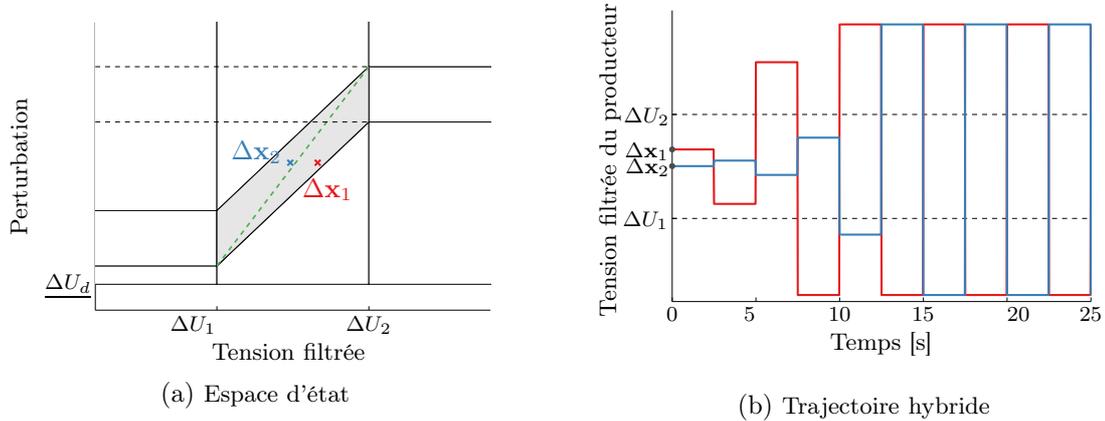


Figure 3.21 – Illustration du comportement du système pour deux conditions initiales différentes dans  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$

Comme on peut le voir, les points de fonctionnement  $\Delta\mathbf{x}_1$  et  $\Delta\mathbf{x}_2$  se trouvent dans la zone  $\mathcal{D}_{22}^{(1)}$  (figure 3.21a). On a simulé le comportement du système à partir de ces points. La figure 3.21b représente les deux trajectoires hybrides issues de ces points. Comme prévu, les trajectoires sont instables. Elles finissent par sortir de la zone de tension filtrée comprise entre  $\Delta U_1$  et  $\Delta U_2$  et donc par quitter la deuxième zone de la loi de commande  $Q(U)$ . La différence entre ces deux trajectoires est le nombre de pas de temps nécessaires avant d'atteindre le cycle limite. La trajectoire hybride issue de  $\Delta\mathbf{x}_1$  l'atteint en trois pas de temps et celle issue de  $\Delta\mathbf{x}_2$  en cinq pas de temps. Cette différence ne modifie pas les conclusions sur la stabilité.

Finalement, sur cet exemple, **il est impossible de construire la bisimulation du système de transition hybride. Malgré ceci, la méthode proposée dans ces travaux permet de conclure sur la stabilité du système** ce qu'une méthode fondée sur le calcul classique de la bisimulation n'aurait pas pu faire.

On peut remarquer que, dans ce cas d'étude, l'ensemble des modes discrets ayant plusieurs destinations mène, en plus ou moins de pas de temps, à l'un des cycles existants. On peut donc d'ores et déjà dire que, même en poursuivant les itérations du calcul de bisimulation, aucun nouveau cycle ne sera identifié. La figure 3.16 représente donc l'ensemble des cycles possibles de ce système. De plus, on peut ajouter les modes discrets ayant plusieurs destinations à la liste des modes menant à un fonctionnement instable. On ne peut cependant pas conclure sur le nombre de pas de temps requis avant d'atteindre le cycle limite. La figure 3.22 représente le nouvel ensemble des polyèdres associés à un mode discret menant à un fonctionnement instable. On peut aussi remarquer que, même si théoriquement le calcul de bisimulation ne converge pas, en pratique, on semble atteindre la convergence au bout d'un certain temps. Ceci peut s'expliquer,

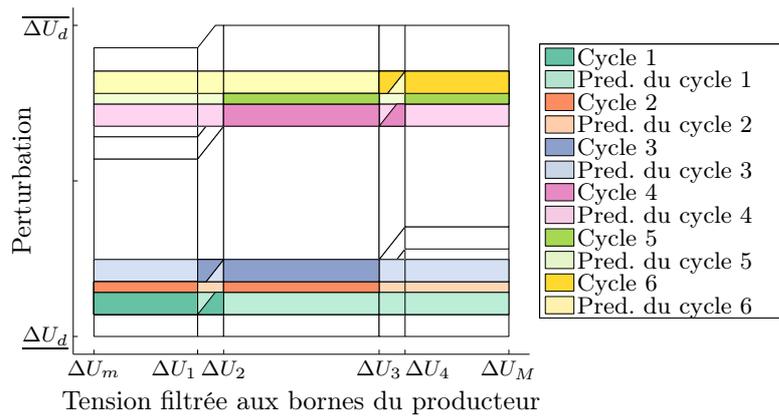


Figure 3.22 – Régions de l'espace d'état continu pour lesquels la trajectoire hybride associée est instable

car les sous-modes discrets construits à chaque itération correspondent à des polyèdres de surface de plus en plus petite. Au bout d'un certain temps, la précision numérique du calcul n'est plus suffisante et le nouveau domaine créé est considéré comme vide même s'il ne l'est théoriquement pas. On obtient donc une « fausse-convergence » du calcul de bisimulation. Le nombre d'itérations nécessaire avant celle-ci est d'autant plus grand que l'ordinateur permet un calcul précis.

Finalement, la méthode proposée dans ces travaux permet de conclure sur la stabilité même dans certains cas pour lesquels il est impossible de construire la bisimulation. Ceci a été illustré sur un cas mais n'a pas été généralisé. Par la suite, il serait intéressant d'étudier la décidabilité de la méthode proposée afin de pouvoir garantir qu'il est toujours possible de conclure sur la stabilité d'un système hybride affine par morceaux.

### 3.4.2 Sur la complexité

Nous nous intéressons maintenant à la problématique de la complexité du calcul. Celle-ci est cruciale puisque plus il y a de modes discrets construits plus les itérations du calcul sont coûteuses en temps et en mémoire.

Le système discret initialement construit (étape 2 de la méthode) contient autant de modes discrets que nécessaire pour pouvoir tenir compte de toutes les combinaisons de zones de fonctionnement linéaire des lois de commande. Si le système étudié compte  $n_P$  régulateurs avec chacun  $n_{PQ_i}$  zones de fonctionnement linéaire, alors il y aura  $\prod_{i=1}^{n_P} n_{PQ_i}$  zones de fonctionnement linéaire de la loi de commande agrégée et donc autant de modes discrets dans l'abstraction discrète initiale. Ainsi, **le nombre initial de modes discrets augmente exponentiellement avec le nombre de producteurs équipés d'un régulateur et avec le nombre de zones de fonctionnement linéaire des régulateurs.**

Ensuite, à chaque itération, le nombre de modes discrets créés est inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble des transitions discrètes. On a donc **une croissance au maximum exponentielle.** La figure 3.23 trace le nombre de modes discrets à chaque itération du calcul de bisimulation pour le cas d'étude précédent et les valeurs du paramètre  $a$  présentées dans le tableau 3.4. On

remarque que, sur cet exemple, **le nombre de modes discrets a tendance à augmenter exponentiellement avec le nombre d'itérations au début du découpage puis linéairement lorsque l'analyse permet de supprimer des transitions discrètes infaisables.** Malgré ceci, le nombre de modes discrets augmente rapidement avec la taille du système étudié et le nombre d'itérations du calcul rendant difficile l'étude de grands systèmes.

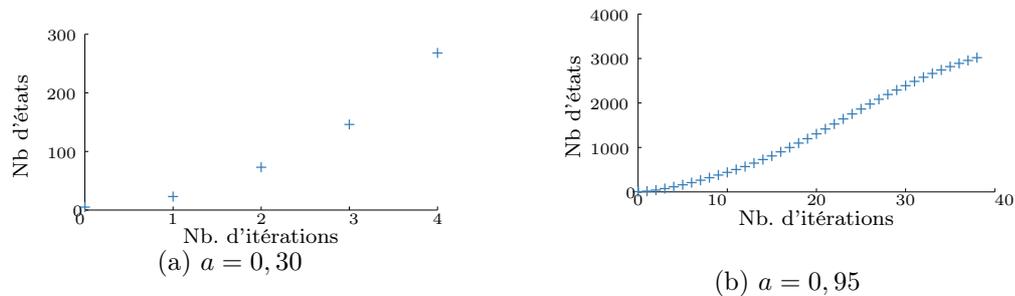


Figure 3.23 – Évolution du nombre d'états discrets avec le nombre d'itérations du calcul de la bisimulation pour différentes valeurs de  $a$

Plus le nombre de modes discrets est grand, moins nous pourrions réaliser d'itérations avant d'atteindre la limite de mémoire ou de temps du calcul. Il est donc important de réduire autant que possible le nombre de modes discrets de l'abstraction initiale. Afin d'y contribuer, une **étude préliminaire** du fonctionnement du système est réalisée afin de détecter d'éventuelles **zones de fonctionnement du système qui sont inatteignables**.

Dans certains cas, pour deux producteurs électriquement proches, l'étude préalable des équations de fonctionnement du réseau pourrait amener à conclure que si l'un des producteurs est en surtension (zone linéaire 5 de la loi de commande  $Q(U)$ ), l'autre ne peut pas être en sous-tension (1ère zone linéaire) et donc que le mode discret correspondant est inatteignable. Pour deux producteurs, l'étude préalable revient à déterminer pour chaque zone de fonctionnement  $i_1$  du producteur 1 les valeurs maximale et minimale de la consigne de puissance. Ensuite, la plage de variations de la tension du producteur 2 est calculée en supposant que toute la plage de variation de sa consigne de puissance est atteignable. Si malgré cette hypothèse (toutes les zones atteignables), la plage de variations de la tension du producteur 2 ne couvre pas la totalité des zones de fonctionnement de sa loi de commande, alors il existe des zones de la loi de commande du producteur 2 qui sont inatteignables sachant que le producteur 1 est dans la zone de fonctionnement  $i_1$ . On répète le calcul pour toutes les zones de fonctionnement de la loi de commande du producteur 1. Ainsi, un calcul simple permet dans certains cas de réduire le nombre de modes discrets de  $S_D^{(0)}$  en fonction des propriétés du réseau étudié.

Pour conclure, on peut dire que le nombre de producteurs a un impact fort sur le nombre d'itérations faisables dans les limites de temps et de mémoire fixées. Cette méthode risque donc d'être difficilement applicable à l'étude de la stabilité de « grands » systèmes.

### 3.4.3 Sur la sensibilité aux paramètres

Dans cette dernière partie de la discussion, nous nous intéressons à la sensibilité des résultats de l'étude formelle. Il s'agit de **quantifier l'impact que peuvent avoir les variations d'un des paramètres du modèle sur la validité des résultats**. En effet, la connaissance des paramètres du modèle est toujours soumise à une certaine incertitude. Par exemple, les hypothèses de modélisation faites entraînent une incertitude sur les paramètres comme la valeur des composantes de la matrice de gains du réseau. Finalement, on peut ajouter que le modèle constitue une photographie du système à un instant donné, mais celui-ci évolue dans le temps avec la température, le vieillissement des matériels, le raccordement de nouveaux clients, etc.

Il est souhaitable de pouvoir **garantir la validité des résultats de l'étude formelle de la stabilité malgré les incertitudes sur le modèle**. Voici quelques éléments de réponse s'appuyant sur le système réel étudié ci-dessus. L'analyse de la stabilité pour différents réglages de la rapidité du filtre de mesure (tableau 3.4) peut nous conduire à fixer  $a = 0,45$ , car il s'agit du filtre de mesure le plus rapide assurant la stabilité qui ait été identifié lors de l'étude précédente. Nous allons maintenant tester les variations maximales des différents paramètres admissibles sans remettre en cause les conclusions sur la stabilité du système.

- Supposons que les puissances réactives  $Q_M$  et  $Q_m$  fournies par le producteur soient soumises à une incertitude. Si l'amplitude du réglage en puissance réactive du producteur est plus étroite que prévu, le système reste toujours stable. Cependant, si le producteur fournit/consomme plus de puissance réactive que prévu, alors le système risque de devenir instable. Afin d'illustrer ceci, on étudie la stabilité du système décrit partie 3.3 avec l'outil formel développé pour différentes valeurs de  $Q_M$  et  $Q_m$ . Les simulations montrent que si  $Q_M$  varie de 10 kVar alors le système est instable avec  $a = 0,45$ . Cette variation représente une incertitude inférieure à 0,5 % sur les paramètres de la régulation. Ainsi, la conclusion sur la stabilité du système est très sensible aux incertitudes sur les paramètres de la loi de commande.
- On s'intéresse maintenant à l'incertitude maximale admissible portant sur le gain du réseau. On montre que si le gain du réseau augmente de plus de 0,2 % alors le système est instable.

Cette étude de sensibilité de la stabilité aux incertitudes sur quelques paramètres suffit pour mettre en évidence **l'importance d'évaluer la marge de stabilité** avant de proposer un réglage aux producteurs. Pour ce faire, il faut connaître la limite de stabilité, c'est-à-dire le filtre le plus rapide possible assurant la stabilité du système. Nous appelons  $a_{lim}$  la rapidité de ce filtre. La marge de stabilité associée à un réglage donné de la rapidité du filtre de mesure est l'image de l'écart entre  $a_{lim}$  et le réglage proposé. Avec la méthode formelle d'étude de la stabilité, nous n'avons pas de formule explicite afin de calculer la rapidité limite. Une étude dichotomique pourrait être proposée pour l'évaluer. Ce type de méthode est long par rapport à une expression explicite et ne permet pas d'évaluer l'impact de la modification d'un paramètre du système. Ces inconvénients ne sont pas critiques puisque les études de raccordement ne sont pas réalisées en

temps réel. Cependant, la tendance est plutôt à l'allègement de ces études afin de s'adapter au nombre croissant de demandes de raccordement. Pour la suite de l'étude, il serait intéressant de proposer une expression explicite de la limite de stabilité.

Finalement, nous avons mis en évidence la richesse des résultats de la méthode proposée dans ces travaux. Cependant, cette richesse s'accompagne d'une complexité et d'une sensibilité des résultats aux paramètres du modèle non négligeables.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit une méthode permettant l'**analyse formelle de la stabilité d'un système hybride affine par morceaux**. C'est par exemple le cas d'un réseau de distribution accueillant des producteurs équipés d'un régulateur de puissance en fonction de la tension dont la loi de commande est elle-même affine par morceaux. L'objectif était de proposer une méthode permettant de conclure quant à la stabilité du système étudié.

La méthode développée dans ces travaux est fondée sur la modélisation du système physique comme un **système de transition hybride**. Dans un deuxième temps, une **abstraction discrète** du système de transition hybride est construite à partir des zones de fonctionnement linéaire. Cette abstraction est ensuite affinée grâce à un calcul itératif fondé sur le principe du **calcul de la bisimulation** auquel on ajoute, à chaque itération, une **analyse de la stabilité avant la convergence** permettant de conclure plus rapidement que les méthodes classiques.

Cette méthode permet d'étudier formellement la stabilité et l'instabilité d'un système hybride affine par morceaux quelconque. La méthode proposée offre une **grande flexibilité** quant aux caractéristiques du système étudié – dans le cas d'un réseau : nombre de producteurs, allure des lois de commande, structure des filtres de mesure, etc. Un outil a été développé à l'aide de la *toolbox* de calcul polyédral MPT.

Même si la méthode proposée permet de conclure dans certains cas pour lesquels le calcul de la bisimulation ne converge pas, **aucune garantie de convergence** de la méthode proposée n'a été démontrée pour l'instant. D'autre part, nous avons illustré que **la richesse des résultats s'accompagne d'une complexité forte des calculs**. Cette complexité peut devenir problématique lorsque la taille du système (nombre de régulateurs de puissance) augmente.

Revenons au cas d'application : l'analyse de la stabilité d'un réseau électrique de distribution accueillant des producteurs équipés de régulateurs de puissance en fonction de la tension. Le but d'un tel outil est d'**appuyer les gestionnaires de réseaux de distribution (GRD) dans leurs choix des paramètres** du régulateur d'un producteur lors de l'étude de son raccordement. L'outil développé dans ces travaux pourrait être intégré aux études de raccordement sous la forme, par exemple, d'une étude dichotomique permettant aux GRD d'identifier le filtre de mesure le plus rapide possible assurant la stabilité. La flexibilité de la modélisation proposée permet d'utiliser cet outil pour le réglage d'une grande variété de structures de réseaux et de régulateurs de puissance tant qu'elles sont affines par morceaux. La figure 3.24 représente la structure générale d'un tel outil.

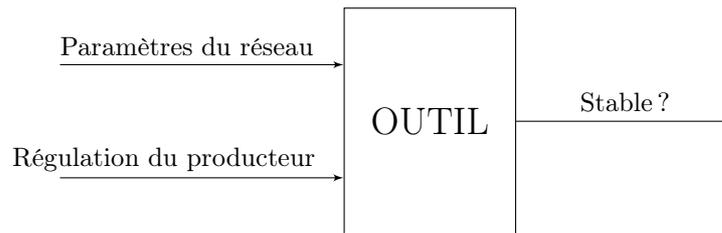


Figure 3.24 – Structure de l’outil d’étude de la stabilité

Afin de pouvoir conclure dans la majorité des cas, le GRD devra s’assurer d’un temps et d’une mémoire alloués au calcul « suffisant ». Il serait intéressant de quantifier cette notion d’autant plus qu’une étude dichotomique peut demander de nombreuses itérations. Le principal avantage d’une telle étude est de pouvoir évaluer la marge de stabilité associée à un réglage proposé par le GRD. Une marge trop faible peut mettre en danger la robustesse du réglage et une marge trop grande peut ralentir le système plus que nécessaire.

Finalement, il apparaît déjà plusieurs limites au développement d’un tel outil formel d’analyse de la stabilité. Dans la suite de ces travaux, nous proposons d’introduire des hypothèses simplificatrices de structure afin d’alléger l’étude de stabilité et de pouvoir, par exemple, exprimer explicitement la limite de stabilité. Un tel critère permettra, entre autres, d’appréhender l’étude de grands systèmes et d’être capable d’évaluer l’impact des paramètres du système sur la marge de stabilité associée à un réglage.

## Chapitre 4

# Établissement d'un critère explicite de stabilité

### Sommaire

---

4.1	Introduction – Objectifs de l'étude . . . . .	110
4.2	Méthode proposée . . . . .	110
4.3	Critère de stabilité explicite pour un producteur . . . . .	113
4.4	Application au cas d'étude réel à un producteur . . . . .	123
4.5	Critère de stabilité pour $N$ producteurs . . . . .	127
4.6	Discussions . . . . .	136
4.7	Conclusion . . . . .	141

---

### Résumé

Nous présentons dans ce chapitre un critère permettant d'évaluer la stabilité d'un réseau accueillant des producteurs équipés d'un régulateur de puissance. L'objectif d'un tel critère est de simplifier les études de raccordement réalisées par les gestionnaires de réseaux. Afin de pouvoir obtenir une expression de ce critère, plusieurs hypothèses de simplification ont été faites. Par exemple les filtres de mesure des producteurs sont supposés identiques et être uniquement des filtres passe-bas du premier ordre.

Le raisonnement proposé se décompose en deux parties :

1. Tout d'abord, une condition suffisante de stabilité est développée pour les cas les plus simples : les réseaux accueillant un unique producteur. Dans ce cas, une étude exhaustive des cycles possibles est menée, par atteignabilité arrière puis avant afin d'obtenir l'expression formelle d'un critère de stabilité.
2. Puis, l'approche est étendue à des réseaux de  $N$  producteurs et la validité du critère proposé est évaluée grâce à l'étude de la stabilité d'un grand nombre de réseaux.

Nous terminons ce chapitre en discutant de l'intérêt d'un tel critère pour les gestionnaires de réseaux et de la pertinence de son extension à des systèmes plus compliqués.

## 4.1 Introduction – Objectifs de l'étude

Dans le chapitre précédent, nous avons développé une méthode formelle pour l'étude de la stabilité d'un système hybride affine par morceaux. En particulier, nous avons proposé un outil permettant d'étudier formellement la stabilité d'un réseau accueillant plusieurs producteurs équipés d'un régulateur de puissance. Cet outil s'adapte quels que soient le nombre de producteurs, la structure du réseau auquel ils sont raccordés ou encore leur régulateur. La méthode proposée offre donc une grande flexibilité et une grande richesse de résultats disponibles, mais ceci s'accompagne de calculs pouvant être lourds aussi bien en temps qu'en mémoire nécessaire. Ceci peut freiner l'intégration de cet outil aux études de raccordement menées par les gestionnaires de réseaux de distribution (GRD).

Le but de ce chapitre est de **proposer un critère simplifiant les études de raccordement**. Ce critère devra permettre aux GRD de **choisir un jeu de paramètres du régulateur qui garantit une marge de stabilité choisie** par le GRD. Il devra donc s'adapter au cas par cas, c'est-à-dire au producteur qui se raccorde et au réseau auquel il se raccorde. Dans ce chapitre, nous allons donc proposer une méthode pour obtenir un critère de stabilité portant sur les paramètres du système qui soit a minima une **condition suffisante de stabilité**.

Quelques travaux récents se sont penchés sur la formulation d'un tel critère de stabilité. Les auteurs de [80] proposent par exemple, pour un départ donné, d'étudier la stabilité du système pour plusieurs réglages de la rapidité du filtre de mesure. Ces travaux semblent confirmer que plus le filtre est lent, plus le système est stable, mais l'approche empirique ainsi que la valeur numérique proposée pour la limite de stabilité semblent difficilement généralisables quel que soit le départ étudié.

Nous avons mis en évidence, au chapitre précédent, que les comportements instables décrivent des cycles entre plusieurs zones de fonctionnement. Les transitions d'une zone à l'autre semblent donc cruciales pour étudier la stabilité. Il est dès lors souhaitable de proposer une méthode prenant en compte ces transitions. La méthode proposée conduit à s'intéresser à la stabilité des zones de fonctionnement linéaires rejoignant les travaux de [79]. Le domaine de validité des résultats proposés par [79] est ainsi élargi et une expression explicite du critère de stabilité est proposée.

## 4.2 Méthode proposée

### 4.2.1 Méthodologie

Ces travaux proposent une méthode permettant d'exprimer un **critère explicite de stabilité**. Celle-ci est fondée sur **l'étude exhaustive des cycles possibles**. Plus précisément, nous proposons de raisonner par l'absurde. Nous allons supposer que le système est instable et donc qu'il existe au moins un cycle.

On rappelle qu'un cycle est un ensemble de trajectoires hybrides qui oscillent de façon périodique entre plusieurs des  $n_{PQ}$  zones de fonctionnement linéaire du système hybride affine par morceaux. Nous allons étudier l'ensemble des cycles possibles. Pour chacun, nous allons exprimer des **conditions nécessaires à l'existence du cycle** portant sur les paramètres du système.

Pour établir ces conditions nécessaires, nous partons de deux constatations. Si un cycle existe entre les zones de fonctionnement linéaire  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  et  $j \in \mathcal{N}_{PQ}$  avec  $i \neq j$ , alors :

- le domaine  $\mathcal{D}_i$  de l'espace d'état continu  $\mathcal{X}$  associé à la  $i$ -ème zone de fonctionnement est atteignable depuis  $\mathcal{D}_j$  et inversement ;
- il existe au moins un point de fonctionnement de  $\mathcal{D}_i$  appartenant au cycle entre  $i$  et  $j$  et inversement.

Ces deux propositions permettent d'expliciter une condition  $\mathcal{C}$  sur les paramètres du système, nécessaire à l'existence du cycle :

$$\underline{\text{Si}} \quad \text{cycle entre } i \text{ et } j \quad \underline{\text{alors}} \quad \mathcal{C}(\text{param. du système}) \quad (4.1)$$

Finalement, on en déduit une condition suffisante à l'inexistence de ce cycle :

$$\underline{\text{Si}} \quad \text{not}(\mathcal{C}(\text{param. du système})) \quad \underline{\text{alors}} \quad \text{Absence de cycle entre } i \text{ et } j \quad (4.2)$$

On applique alors cette méthode pour tous les cycles possibles afin de trouver des conditions suffisantes à l'inexistence de tous les cycles et donc à la stabilité du système. En choisissant un réglage des paramètres du régulateur qui satisfait les conditions suffisantes formulées, on assure donc la stabilité du système.

**L'étude exhaustive et formelle des cycles possibles**, sur un système quelconque, est rapidement **très complexe**. Nous proposons ici de faire quelques hypothèses sur le système étudié afin de simplifier l'expression du critère. Une attention particulière est portée à ce que les hypothèses proposées restent réalistes dans les cas d'étude classiques. L'obtention d'un critère simplifiant l'étude de stabilité se fait donc au prix de la généralité de la méthode. **Nous rappelons que si l'expression explicite dépend des hypothèses qui vont suivre, la méthode proposée reste valable dans le cas général.**

#### 4.2.2 Hypothèses

Le but de ces hypothèses est de simplifier les calculs afin de pouvoir conserver une écriture formelle.

##### Hypothèses sur les producteurs :

Tout d'abord, afin de limiter le nombre de paramètres desquels dépend la stabilité du système, nous allons faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 12.** *Tous les  $N$  producteurs d'un départ électrique ont un régulateur de puissance identique, soit le même filtre de mesure, et la même loi de commande et sont synchronisés.*

La dimension de l'état du système dépend directement de celle du vecteur d'état des filtres de mesure et impacte la complexité des calculs. Afin de contourner cette difficulté, nous choisissons d'étudier uniquement des **filtres du premier ordre**. Ainsi, la dimension du vecteur d'état du

filtre de chacun des  $N$  producteurs est limitée à un. L'état augmenté du système, composé de l'état du filtre et de la perturbation (3.6), sera donc de dimension  $n_x = N + 1$ .

**Hypothèse 13.** *Le filtre de mesure de chacun des producteurs est un filtre passe-bas du premier ordre à temps discret et de gain unitaire.*

Cette hypothèse semble réaliste puisque c'est le type de filtre de mesure recommandé dans les codes de réseaux de plusieurs pays, comme en Allemagne [37], ou encore en Italie [5]. Dans la suite des travaux, on discutera ce choix et l'extension du critère établi à différents filtres de mesure.

Comme dit précédemment, la loi de commande de chaque producteur équipé d'un régulateur est supposée affine par morceaux (hypothèse 9). La loi de commande agrégée des  $N$  producteurs est elle aussi affine par morceaux. On note  $n_{PQ}$  le nombre de zones de fonctionnement affine de la loi de commande agrégée. Les calculs présentés dans ce chapitre sont effectués dans le cas d'une loi de commande  $Q(U)$  symétrique avec cinq zones de fonctionnement comme illustré figure 4.1.

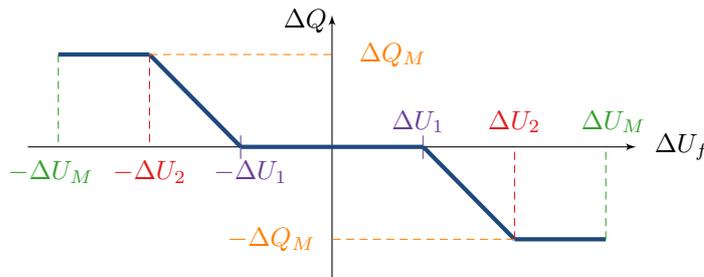


Figure 4.1 – Loi de commande  $Q(U)$  utilisée pour les calculs formels

Comme chaque producteur a cinq zones de fonctionnement, on a  $n_{PQ} = 5^N$ . Encore une fois, on rappelle que les calculs sont détaillés pour un exemple de loi de commande sans perdre la généralité de la méthode. Les calculs seront ensuite illustrés dans le cas de la loi  $Q(U)$  non symétrique choisie par Enedis (figure 1.7).

### Hypothèses sur les cycles :

Nous souhaitons réaliser une étude exhaustive des cycles risquant d'apparaître entre plusieurs zones de fonctionnement parmi les  $n_{PQ}$  zones du système et ainsi induisant l'instabilité du système. Même si le nombre de zones est fini, **le nombre de cycles possibles est infini** car le système peut rester plusieurs fois dans la même zone de fonctionnement avant d'en sortir. Il n'est donc pas possible de mener une étude exhaustive. Afin de contourner cette difficulté, nous proposons de limiter l'étude des conditions nécessaires d'existence à certains cycles particuliers.

Dans la suite, nous appellerons *cycles simples* les cycles n'impliquant que deux modes discrets de l'abstraction discrète qui mènent l'un à l'autre. Les cycles simples ont donc une période minimale de  $2T_e$ .

**Hypothèse 14.** *Les seuls cycles pouvant exister sont des cycles simples.*

Grâce à cette hypothèse, on limite le nombre de cycles à étudier à « 2 parmi  $n_{PQ}$  » le coefficient binomial donnant le nombre de parties de deux éléments dans un ensemble de  $n_{PQ}$  éléments. Cette hypothèse est motivée par le fait qu'en pratique, tous les cycles qui ont été identifiés sont des cycles simples. Par exemple, dans la partie 3.3, six cycles ont été détectés et tous sont des cycles simples. La validité de cette hypothèse sera discutée dans la suite (partie 4.6.2).

Finalement, on a donc un nombre fini de cycles à étudier. Dans le cas de la loi de commande représentée figure 4.1, on rappelle que  $n_{PQ} = 5^N$  avec  $N$  le nombre de producteurs. Ainsi, pour un réseau accueillant un producteur, il y a 2 parmi 5 soit 10 cycles simples à étudier. Pour un réseau accueillant deux producteurs, il y a 2 parmi  $5^2$  soit 300 cycles simples à étudier. Pour trois producteurs, il y a 7750 cycles à étudier. On comprend aisément que l'étude exhaustive, faite à la main, même en se limitant aux cycles simples, demande aussi de **limiter le nombre de producteurs**. Nous allons commencer par établir une condition suffisante de stabilité dans le cas d'un réseau n'accueillant qu'un seul producteur équipé d'un régulateur de puissance.

### 4.3 Critère de stabilité explicite pour un producteur

#### 4.3.1 Présentation du système étudié

Comme dit précédemment, nous nous limitons à l'étude d'un réseau accueillant un seul producteur équipé d'un régulateur de puissance. Avec les notations du chapitre précédent, on a  $N = n_U = n_P = 1$ . Le régulateur est un régulateur de puissance réactive en fonction de la tension composé :

- d'un filtre de mesure de la tension  $\Delta U(k) \in \mathbb{R}$  aux bornes du producteur. Le filtre discret est un passe-bas du premier ordre de gain unitaire et de constante de temps  $a \in [0, 1[$  tel que :

$$\Delta U_f(k+1) = a \cdot \Delta U_f(k) + (1-a) \cdot \Delta U(k) \quad (4.3)$$

- d'une loi de commande représentée figure 4.1 qui a cinq zones de fonctionnement ( $n_{PQ} = 5$ ). Quand la tension filtrée se trouve dans le  $i$ -ème zone, la puissance réactive du producteur  $\Delta Q(k) \in \mathbb{R}$  est calculée comme suit :

$$\Delta Q(k) = G^{(i)} \Delta U_f(k) + F^{(i)} \quad (4.4)$$

Le réseau est quant à lui modélisé par un gain  $K_{PQ} \in \mathbb{R}$  comme décrit partie 2.3. Le terme de perturbation agrégé  $\Delta U_d(k) \in \mathbb{R}$  est supposé constant (hypothèse 11). Finalement, l'état du système peut être décrit par  $\Delta \mathbf{x}(k) = [\Delta U_f(k) \quad \Delta U_d(k)]^T \in \mathbb{R}^2$ . Pour  $i \in \mathcal{N}_{PQ} = \{1, \dots, n_{PQ}\}$  tel que  $\Delta \mathbf{x}(k) \in \mathcal{D}_i$ , le comportement en boucle fermée du système peut s'écrire :

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} a + (1-a)K_{PQ}G^{(i)} & 1-a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}^{(i)}} \Delta \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} (1-a)K_{PQ}F^{(i)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{(i)}} \quad (4.5)$$

Grâce aux paramètres de la loi de commande  $Q(U)$  (figure 4.1), on peut exprimer les paramètres  $G^{(i)} \in \mathbb{R}$ ,  $F^{(i)} \in \mathbb{R}$  et les domaines  $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{X}$  pour chaque zone de fonctionnement  $i$ .

$i$	$G^{(i)}$	$F^{(i)}$	$\mathcal{D}_i$
1	0	$\Delta Q_M$	$\{-\Delta U_M \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_2\} \cap \{\underline{\Delta U}_d \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U}_d\}$
2	$\sigma = -\frac{\Delta Q_M}{\Delta U_2 - \Delta U_1}$	$\sigma \Delta U_1$	$\{-\Delta U_2 \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_1\} \cap \{\underline{\Delta U}_d \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U}_d\}$
3	0	0	$\{-\Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_1\} \cap \{\underline{\Delta U}_d \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U}_d\}$
4	$\sigma$	$-\sigma \Delta U_1$	$\{\Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_2\} \cap \{\underline{\Delta U}_d \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U}_d\}$
5	0	$-\Delta Q_M$	$\{\Delta U_2 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_M\} \cap \{\underline{\Delta U}_d \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U}_d\}$

Tableau 4.1 – Paramètres de la dynamique dans le cas de la loi de commande décrite figure 4.1

Le but de cette étude est d'exprimer des conditions nécessaires à l'existence de chacun des dix cycles simples possibles. Pour ce faire, pour tout  $(i, j) \in \mathcal{N}_{PQ}^2$  avec  $i \neq j$ , on suppose que le cycle entre les zones de fonctionnement  $i$  et  $j$  existe. On notera  $C_{ij}$  lorsque le cycle  $i \leftrightarrow j$  existe et  $\overline{C_{ij}}$  lorsqu'il n'existe pas. Le tableau 4.2 présente la liste des **10 cycles qui peuvent exister** pour un réseau accueillant un seul producteur équipé du régulateur de puissance réactive en fonction de la tension selon la loi de commande présentée figure 4.1.

$$\begin{array}{cccc}
 1 \leftrightarrow 2 & 1 \leftrightarrow 3 & 1 \leftrightarrow 4 & 1 \leftrightarrow 5 \\
 & 2 \leftrightarrow 3 & 2 \leftrightarrow 4 & 2 \leftrightarrow 5 \\
 & & 3 \leftrightarrow 4 & 3 \leftrightarrow 5 \\
 & & & 4 \leftrightarrow 5
 \end{array}$$

Tableau 4.2 – Liste complète des cycles simples possibles pour un régulateur  $Q(U)$

### 4.3.2 Étape 1 : Étude d'atteignabilité arrière

#### Principe

Comme dit précédemment, pour toutes zones de fonctionnement  $i$  et  $j$  différentes de  $\mathcal{N}_{PQ}$ , si le cycle  $i \leftrightarrow j$  existe, alors le domaine de l'espace d'état associé à  $i$  ( $\mathcal{D}_i$ ) est atteignable depuis celui associé à  $j$  ( $\mathcal{D}_j$ ) et inversement. **On s'intéresse donc aux prédécesseurs des domaines  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_j$ .**

Le prédécesseur d'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ , défini par (3.26), désigne l'ensemble des points de l'espace d'état continu  $\mathcal{X}$  qui permettent, au pas de temps suivant, d'atteindre  $\mathcal{D}$ . Ainsi, dire que **le cycle  $i \leftrightarrow j$  existe implique qu'il existe au moins un point de  $\mathcal{D}_i$  qui appartienne à  $Pre(\mathcal{D}_j)$  et inversement.**

$$C_{ij} \Rightarrow \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_j) \cap \mathcal{D}_i \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_i) \cap \mathcal{D}_j \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.6)$$

À l'inverse, si aucun point ne satisfait (4.6), on peut en conclure que le cycle  $i \leftrightarrow j$  ne peut pas exister.

$$\boxed{\begin{cases} Pre(\mathcal{D}_j) \cap \mathcal{D}_i = \emptyset \\ \text{OU} \\ Pre(\mathcal{D}_i) \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \end{cases}} \Rightarrow \overline{C_{ij}} \quad (4.7)$$

Nous allons caractériser l'ensemble des points vérifiant (4.6). Nous allons décrire les calculs dans le cas particulier de la loi de commande  $Q(U)$  représentée figure 4.1.

#### Description détaillée sur un cas particulier

On raisonne par l'absurde. On suppose donc l'existence de chacun des dix cycles possibles de la liste (tableau 4.2). Pour chacun, on réécrit (4.6) grâce aux paramètres de la loi de commande (tableau 4.1).

Commençons par étudier le cycle entre les zones 3 et 5.

$$C_{35} \Rightarrow \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_5) \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_3) \cap \mathcal{D}_5 \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.8)$$

**Atteignabilité de  $\mathcal{D}_5$  en venant de  $\mathcal{D}_3$  :** Soit  $\Delta \mathbf{x} = [\Delta U_f \quad \Delta U_d]^T \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_3$  et  $\Delta \mathbf{x} \in Pre(\mathcal{D}_5)$ . On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_3 \\ \mathcal{A}^{(3)} \Delta \mathbf{x} + \mathcal{B}^{(3)} \in \mathcal{D}_5 \end{cases} \quad (4.9)$$

Avec les paramètres du régulateur  $Q(U)$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} -\Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_1 \\ \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \leq \Delta U_d \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \\ \Delta U_2 \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_M \end{cases} \quad (4.10)$$

On sait que  $0 \leq a < 1$ , dans un premier temps, on suppose que  $a \neq 0$ . Le système 4.10 peut s'écrire alors :

$$\begin{cases} -a\Delta U_1 \leq a\Delta U_f \leq \frac{a\Delta U_1}{a} \\ \frac{\Delta U_d}{a} \leq \Delta U_d \leq \frac{\Delta U_d}{a} \\ \Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_f \leq \Delta U_M - (1-a)\Delta U_d \end{cases} \quad (4.11)$$

À l'aide de la première et de la dernière équation du système précédent, on exprime des conditions nécessaires sur  $\Delta U_d$  pour qu'un tel point  $\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  existe.

$$\begin{cases} -a\Delta U_1 \leq \Delta U_M - (1-a)\Delta U_d \\ \Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour tout  $0 < a < 1$ , le système précédent implique que :

$$\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_M + a\Delta U_1 \quad (4.13)$$

On reprend maintenant les calculs dans le cas où  $a = 0$ . Le système (4.10) implique alors :

$$\begin{cases} \Delta U_2 \leq \Delta U_d \\ \Delta U_d \leq \Delta U_M \end{cases} \quad (4.14)$$

Dans la suite, on ne garde que l'inégalité la plus contraignante des deux – la première ligne de (4.14) – afin d'exprimer une condition nécessaire au cycle.

Finalement, on a donc montré que pour tout  $a \in [0, 1[$  on peut dire que :

$$\boxed{Pre(\mathcal{D}_5) \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset \Rightarrow \Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d} \quad (4.15)$$

Après avoir exprimé une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_5$  soit atteignable depuis  $\mathcal{D}_3$ , nous allons nous intéresser à l'atteignabilité de  $\mathcal{D}_3$  depuis  $\mathcal{D}_5$ .

**Atteignabilité de  $\mathcal{D}_3$  en venant de  $\mathcal{D}_5$  :** Soit  $\Delta \mathbf{x} = [\Delta U_f \quad \Delta U_d]^T \in \mathcal{D}_5$  tel que  $\Delta \mathbf{x} \in Pre(\mathcal{D}_3)$ . On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_5 \\ \mathcal{A}^{(5)}\Delta \mathbf{x} + \mathcal{B}^{(5)} \in \mathcal{D}_3 \end{cases} \quad (4.16)$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} \Delta U_2 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_M \\ \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \\ -\Delta U_1 \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \leq \Delta U_1 \end{cases} \quad (4.17)$$

On suppose que  $a \neq 0$  de sorte que le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} a\Delta U_2 \leq a\Delta U_f \leq a\Delta U_M \\ \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \\ -\Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \leq a\Delta U_f \leq \Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour qu'un tel point  $\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{X}$  existe pour tout  $0 < a < 1$ , il faut que :

$$(1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_1 - a\Delta U_2 + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \quad (4.19)$$

À nouveau, on ne garde que la condition la plus contraignante.

On montre que cette expression est aussi valable pour  $a = 0$ . Finalement, on a donc montré que pour tout  $a \in [0, 1[$  on peut dire que :

$$\boxed{Pre(\mathcal{D}_3) \cap \mathcal{D}_5 \neq \emptyset \Rightarrow (1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_1 - a\Delta U_2 + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M} \quad (4.20)$$

**Condition nécessaire à  $C_{35}$  :** Pour conclure, grâce aux équations (4.8), (4.15) et (4.20), on peut dire que :

$$C_{35} \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d \\ (1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_1 - a\Delta U_2 + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \end{cases} \quad (4.21)$$

Ceci n'est possible que si :

$$\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq \Delta U_1 - a\Delta U_2 + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \quad (4.22)$$

On rappelle que  $\sigma = -\Delta Q_M/(\Delta U_2 - \Delta U_1)$  donc on peut écrire :

$$C_{35} \Rightarrow 1 + a + (1-a)K_{PQ}\sigma \leq 0 \quad (4.23)$$

Ceci est une condition nécessaire à l'existence du cycle  $3 \leftrightarrow 5$ . On en déduit une condition suffisante à l'inexistence du cycle  $3 \leftrightarrow 5$ .

$$0 < 1 + a + (1-a)K_{PQ}\sigma \Rightarrow \overline{C_{35}} \quad (4.24)$$

Cette condition est une fonction des paramètres du réseau ( $K_{PQ}$ ), de la loi de commande du producteur ( $\sigma$ ) et du filtre de mesure ( $a$ ). Afin de ne contraindre ni la position sur le réseau, ni le pouvoir de réglage du producteur, on choisit d'exprimer cette condition suffisante en fonction de la rapidité du filtre de mesure. Pour ce faire, on remarque que  $1 - K_{PQ}\sigma$  est strictement positif car  $-K_{PQ}\sigma$  est positif ou nul. Effectivement, d'après sa définition (2.18), le gain du réseau est toujours positif et d'après l'allure de la loi de commande étudiée (figure 4.1) la pente dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement ( $\sigma^{(i)}$ ) est toujours négative.

$$\boxed{\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \Rightarrow \overline{C_{35}}} \quad (4.25)$$

### Conclusion de l'étude d'atteignabilité arrière

On fait le même calcul pour chaque cycle de la liste (tableau 4.2). Les calculs sont détaillés dans l'annexe C, on ne présente ici que les résultats et la discussion de ces résultats. Il a été montré dans l'annexe C que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a & \Rightarrow \overline{C_{13}} \text{ et } \overline{C_{35}} \\ \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} \leq a & \Rightarrow \overline{C_{12}}, \overline{C_{23}}, \overline{C_{34}} \text{ et } \overline{C_{45}} \\ \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} \leq a \text{ ou } \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} \leq a & \Rightarrow \overline{C_{14}}, \overline{C_{25}} \\ \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}} \leq a \text{ ou } \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} \leq a & \Rightarrow \overline{C_{24}} \\ \frac{K_{PQ}Q_M - \Delta U_2}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} \leq a & \Rightarrow \overline{C_{15}} \end{array} \right. \quad (4.26)$$

**Discussions sur le risque d'existence de certains cycles :** Pour certains cycles, le raisonnement par contraposée nous a permis d'obtenir deux conditions suffisantes à l'inexistence du cycle. Si l'une d'elle est toujours vérifiée, ce cycle ne peut pas exister. C'est ce que nous souhaitons étudier ici. Si on se penche sur le système (4.26), nous pouvons remarquer que nous avons exprimé des valeurs minimales de  $a$  telles que si  $a$  est supérieure à cette valeur, le cycle concerné ne peut pas exister. Si nous pouvons garantir que cette valeur minimale est négative, comme nous savons que  $a \geq 0$ , nous pourrions dire que le cycle concerné n'existe jamais. Nous pouvons dire que  $-K_{PQ}\sigma$  est toujours positif mais ne pouvons rien dire a priori du signe de  $-1 - K_{PQ}\sigma$ . Or, nous pouvons remarquer, d'après (4.26) que :

$$\begin{cases} K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2} < 0 & \Rightarrow \overline{C_{14}}, \overline{C_{25}}, \overline{C_{24}} \\ K_{PQ}Q_M - \Delta U_2 < 0 & \Rightarrow \overline{C_{15}} \end{cases} \quad (4.27)$$

Ainsi, si les termes ci-dessus sont strictement négatifs, nous pourrions assurer l'inexistence des cycles  $1 \leftrightarrow 4$ ,  $2 \leftrightarrow 5$ ,  $2 \leftrightarrow 4$  et  $1 \leftrightarrow 5$ .

Discutons tout d'abord de l'ordre de grandeur du gain  $K_{PQ}$  représentant le réseau. Celui-ci dépend de la réactance linéique des branches entre le producteur et le poste source, de leur longueur, du niveau de tension et de la puissance de court-circuit en sortie du poste source (côté HTA). En France, sur les réseaux de distribution moyenne tension, cette dernière est généralement de l'ordre d'une centaine de MVA comme discuté partie 2.3.2. La réactance des lignes est de l'ordre de quelques dixièmes d'Ohm par kilomètre et les départs mesurent au plus une trentaine de kilomètres [109].

Les producteurs raccordés en moyenne tension font au plus 12 MW [12]. Leur consigne de puissance réactive peut aller jusqu'à 40 % de la puissance active raccordée [38]. Il convient de noter que les régulateurs de puissance réactive en fonction de la tension concernent les producteurs en départ mixte. Aujourd'hui, un producteur peut être raccordé en départ mixte s'il n'engendre pas une tension sur le départ trop « importante » lorsque la consommation du départ est minimale [131]. Si l'on considère l'exemple partie 2.4, le producteur de 6 MW se trouve à 15 km du poste source et la tension à ces bornes dépasse 21 kV lorsque la consommation est minimale (de l'ordre de 20 % de la consommation maximale). Lorsque le producteur absorbe 40 % de sa puissance active raccordée en puissance réactive, la tension à ces bornes est égale à 20,8 kV ce qui semble déjà élevé. Avec les règles de raccordement actuelles, ce producteur est déjà très contraignant pour être raccordé en départ mixte. On peut s'attendre à ce que les règles de raccordement évoluent pour autoriser le raccordement d'un tel producteur s'il est équipé d'un régulateur  $Q(U)$  mais le raccordement en départ mixte d'un producteur encore plus contraignant semble peu probable à la vue des contraintes de tension qu'il causerait.

L'exemple proposé est donc déjà très contraignant. On en rappelle les valeurs numériques :

$$K_{PQ} = 271 \text{ V/MVAr} \quad Q_M = 2,4 \text{ MVAr} \quad (4.28)$$

Les valeurs numériques de la loi de commande  $Q(U)$  symétrique (figure 4.1) sont adaptée du

tableau 1.5 :

$$\begin{cases} U_{cons} = 20 \text{ kV} \\ U_3 = 20,75 \text{ kV} \\ U_4 = 21 \text{ kV} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta U_1 = 750 \text{ V} \\ \Delta U_2 = 1000 \text{ V} \end{cases} \quad (4.29)$$

On a donc :

$$K_{PQ}Q_M = 650 \text{ V} < \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2} = 875 \text{ V} \quad (4.30)$$

Finalement, avec les conditions actuelles de raccordement aux réseaux moyenne tension en France, les cycles  $1 \leftrightarrow 4$ ,  $2 \leftrightarrow 5$ ,  $2 \leftrightarrow 4$  et  $1 \leftrightarrow 5$  ne peuvent pas exister sur les départs moyenne tension.

À l'avenir, même si les règles de raccordement sont modifiées pour permettre à un producteur comme celui du cas d'étude de se raccorder en départ mixte, la conclusion ne sera pas modifiée. Si la réglementation évolue et que cet ordre de grandeur n'est plus valable, il sera toujours possible de reprendre les calculs proposés en intégrant de nouveaux cycles.

**Conclusion :** Finalement, sur les dix cycles possibles, on a montré que quatre ne peuvent jamais exister avec les ordres de grandeur des départs moyenne tension français et des régulateurs  $Q(U)$  (annexe C). Le tableau 4.3 résume la liste des six cycles encore possibles.

$1 \leftrightarrow 2$	$1 \leftrightarrow 3$
	$2 \leftrightarrow 3$
	$3 \leftrightarrow 4$
	$3 \leftrightarrow 5$
	$4 \leftrightarrow 5$

Tableau 4.3 – Liste complète des cycles simples possibles pour un régulateur  $Q(U)$

Grâce à (4.26), nous pouvons exprimer des conditions suffisantes à la stabilité :

$$\begin{cases} \frac{-1-K_{PQ}\sigma}{1-K_{PQ}\sigma} < a \Rightarrow \overline{C_{13}} \text{ et } \overline{C_{35}} \\ \frac{-K_{PQ}\sigma}{1-K_{PQ}\sigma} < a \Rightarrow \overline{C_{12}}, \overline{C_{23}}, \overline{C_{34}} \text{ et } \overline{C_{45}} \end{cases} \quad (4.31)$$

La figure 4.2 représente graphiquement la zone de stabilité mise en évidence grâce à l'étude d'atteignabilité arrière des domaines dans le cas particulier d'un système tel que  $-1 - K_{PQ}\sigma$  est positif.

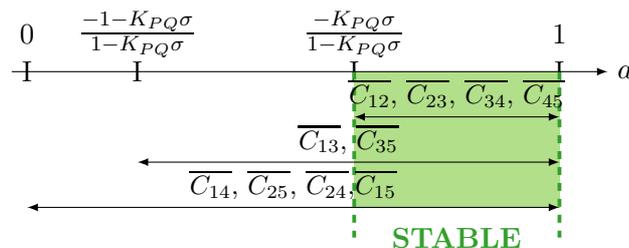


Figure 4.2 – Zone de réglage de la rapidité du filtre pour laquelle le système est stable (zone verte) après l'étude des prédécesseurs

On observe en pratique que le système semble stable pour des filtres plus rapides que la limite (ceci sera illustré partie 4.4). Ce critère de stabilité semble trop restrictif. Pour étendre la zone de stabilité, on propose d'affiner les conditions nécessaires d'existence des cycles afin d'élargir les conditions suffisantes de stabilité grâce à l'étude d'atteignabilité avant qui permet de caractériser les points qui appartiennent réellement au cycle.

### 4.3.3 Étape 2 : Étude d'atteignabilité avant

#### Principe

Pour tenter de formuler des **conditions nécessaires à l'existence des cycles qui soient plus strictes** que précédemment, on propose de **caractériser les points appartenant à chaque cycle** et ainsi montrer que, sous certaines conditions, les points de fonctionnement impliqués dans le cycle **ne correspondent pas à un comportement instable**. En effet, nous allons mettre en évidence que dans certains cas, il existe un unique point impliqué dans un cycle et que celui-ci appartient bien à deux domaines puisqu'il se trouve **sur leur frontière commune** mais que les trajectoires hybrides associées ne sont pas instables.

Pour caractériser ces points, nous allons construire l'ensemble des points de  $\mathcal{D}_i$  impliqués dans le cycle  $i \leftrightarrow j$ , c'est-à-dire les points appartenant à  $\mathcal{D}_i$  dont le successeur au pas de temps suivant est dans  $\mathcal{D}_j$  et le successeur en deux pas de temps est à nouveau dans  $\mathcal{D}_i$ . Cet ensemble sera noté  $\mathcal{S}_{ij}$ .

$$\mathcal{S}_{ij} = \{\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_i \mid \text{Post}(\Delta \mathbf{x}) \in \mathcal{D}_j \text{ et } \text{Post}(\text{Post}(\Delta \mathbf{x})) \in \mathcal{D}_i\} \quad (4.32)$$

On définit de même  $\mathcal{S}_{ji}$ . On peut alors réécrire ces ensembles l'un en fonction de l'autre :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ij} &= \{\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_i \mid \text{Post}(\Delta \mathbf{x}) \in \mathcal{S}_{ji}\} \\ \mathcal{S}_{ji} &= \{\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_j \mid \text{Post}(\Delta \mathbf{x}) \in \mathcal{S}_{ij}\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Finalement, on peut exprimer une condition nécessaire à l'existence du cycle  $i \leftrightarrow j$  en fonction de ces ensembles. Dans un souci de lisibilité, nous noterons  $\Delta \mathbf{x}_{ij}$  (respectivement  $\Delta \mathbf{x}_{ji}$ ) les éléments de  $\mathcal{S}_{ij}$  (resp.  $\mathcal{S}_{ji}$ ).

$$C_{ij} \Rightarrow \exists (\Delta \mathbf{x}_{ij}, \Delta \mathbf{x}_{ji}) \in \mathcal{S}_{ij} \times \mathcal{S}_{ji} : \Delta \mathbf{x}_{ij} \neq \Delta \mathbf{x}_{ji} \quad (4.34)$$

Pour assurer l'inexistence du cycle entre les zones de fonctionnement  $i$  et  $j$ , on propose de garantir qu'aucun point ne vérifie (4.34).

$$\boxed{\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}_{ji} \Rightarrow \overline{C_{ij}}} \quad (4.35)$$

Pour réussir à exprimer des conditions suffisantes de stabilité, nous proposons de caractériser l'ensemble des points satisfaisant (4.35). Nous allons décrire les calculs dans le cas d'une loi de commande  $Q(U)$  représentée figure 4.1.

## Description détaillée sur un cas particulier

Nous démontrons dans l'annexe D que, pour tout  $(i, j) \in \mathcal{N}_{PQ} \times \mathcal{N}_{PQ}$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_{ij}$  est l'intersection d'une droite  $\Delta_{ij}$  et de  $\mathcal{D}_i$ .

$$\Delta_{ij} = \left\{ \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \mid \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{1 - \alpha_i \alpha_j} \Delta U_d = \Delta U_f - \frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{1 - \alpha_i \alpha_j} \right\} \quad (4.36)$$

Pour en revenir aux conditions nécessaires d'existence du cycle  $i \leftrightarrow j$ , le cycle  $C_{ij}$  implique qu'il y ait au moins un point de fonctionnement de  $\mathcal{D}_i$  qui mène à  $\mathcal{D}_j$  et qui soit sur la droite  $\Delta_{ij}$ . Nous allons détailler les calculs des conditions nécessaires d'existence d'un tel point dans le cas du cycle  $3 \leftrightarrow 4$ .

$$\Delta_{34} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \mid \Delta U_d = \frac{1 - a(a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)}{(a + 1 + (1 - a)K_{PQ}\sigma)(1 - a)} \Delta U_f + \frac{K_{PQ}\sigma}{a + 1 + (1 - a)K_{PQ}\sigma} \Delta U_1 \right\} \quad (4.37)$$

Soit  $\Delta \mathbf{x} = [\Delta U_f \ \Delta U_d]^T$  un point de  $\mathcal{D}_3$  impliqué dans le cycle  $3 \leftrightarrow 4$ . On sait que :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}_3 \\ Post(\Delta \mathbf{x}) \in \mathcal{D}_4 \\ \Delta \mathbf{x} \in \Delta_{34} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_1 \\ \Delta U_1 \leq a\Delta U_f + (1 - a)\Delta U_d \leq \Delta U_2 \\ \Delta \mathbf{x} \in \Delta_{34} \end{cases} \quad (4.38)$$

Grâce à la définition de  $\Delta_{34}$ , on peut exprimer le terme de perturbation en fonction de la valeur de la tension filtrée :

$$\Delta U_d = \frac{1 + a - aK_{PQ}\sigma}{1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma} \Delta U_f + \frac{K_{PQ}\sigma}{1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma} \Delta U_1 \quad (4.39)$$

Finalement, on a donc deux encadrements de la tension filtrée :

$$\begin{cases} -\Delta U_1 & \leq & \Delta U_f & \leq & \Delta U_1 \\ \frac{1+a}{1+a+(1-a)K_{PQ}\sigma} \Delta U_1 & \leq & \frac{1+a}{1+a+(1-a)K_{PQ}\sigma} \Delta U_f & \leq & \Delta U_2 - \frac{(1-a)K_{PQ}\sigma}{1+a+(1-a)K_{PQ}\sigma} \Delta U_1 \end{cases} \quad (4.40)$$

On rappelle que  $a \in [0, 1[$  et que  $\sigma$  est négatif, on ne peut rien dire a priori du signe de  $1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma$ . Supposons dans un premier temps que  $1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma > 0$  alors on peut dire que (4.40) implique que :

$$\begin{cases} \Delta U_f & \leq & \Delta U_1 \\ \Delta U_1 & \leq & \Delta U_f \end{cases} \quad (4.41)$$

Ceci revient à dire que le seul point de  $\mathcal{D}_3$  impliqué dans le cycle  $3 \leftrightarrow 4$  est  $\Delta U_f = \Delta U_1$ . Ce point a la particularité d'être la frontière entre les domaines  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ . Le même calcul concernant les points de  $\mathcal{D}_4$  impliqués dans le cycle mène à la même conclusion. Finalement, nous avons montré que

$$\mathcal{S}_{34} = \mathcal{S}_{43} \quad (4.42)$$

Ceci permet de conclure que  $C_{34}$  ne peut pas exister lorsque  $1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma > 0$ . En effet, nous avons montré que le seul point appartenant au cycle  $3 \leftrightarrow 4$  se situe sur la frontière entre

$\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ . La trajectoire correspondante est :

$$\Delta U_f(k) = \Delta U_f(k+1) = \Delta U_1 \quad (4.43)$$

Cette trajectoire ne peut pas être considérée comme instable. On peut donc conclure que :

$$\boxed{1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma > 0 \Rightarrow \overline{C_{34}}} \quad (4.44)$$

Dans le cas où  $1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma$  est négatif, on ne peut rien dire a priori sur l'existence ou non du cycle.

On remarque qu'on retrouve la même condition suffisante d'inexistence que celle des cycles  $1 \leftrightarrow 3$  et  $3 \leftrightarrow 5$ .

### Conclusion de l'étude d'atteignabilité avant

On répète le même raisonnement pour exprimer des conditions nécessaires à  $C_{12}$ ,  $C_{23}$  et  $C_{45}$ . On montre que si  $1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma > 0$  alors les cycles possibles sont des points de fonctionnement unique et donc ne correspondent pas à un fonctionnement instable. Finalement, si  $a$  vérifie  $1 + a + (1 - a)K_{PQ}\sigma > 0$ , aucun de ces cycles n'est possible. Avec les conclusions de l'étude d'atteignabilité arrière (4.31), on conclut que :

$$\boxed{\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} = a_{lim} < a \Rightarrow \overline{C_{13}}, \overline{C_{35}}, \overline{C_{12}}, \overline{C_{23}}, \overline{C_{34}}, \overline{C_{45}}} \quad (4.45)$$

Pour conclure, nous avons affiné la limite de stabilité proposée précédemment. Ainsi, nous pouvons étendre la zone de stabilité grâce à l'étude d'atteignabilité avant.

#### 4.3.4 Conclusion : Critère de stabilité proposé

Nous avons mené les calculs formels dans le cas de la loi de commande  $Q(U)$  décrite figure 4.1. Pour cette loi, nous avons montré que pour un filtre de mesure passe-bas du premier ordre dont le paramètre  $a$  est supérieur à  $\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma}$ , aucun cycle simple ne peut exister. La figure 4.3 représente le réglage du filtre de mesure assurant la stabilité du système dans le cas particulier d'un système tel que  $-1 - K_{PQ}\sigma$  est positif.



Figure 4.3 – Stabilité des cycles simples en fonction de la constante de temps du filtre ( $a$ )

On rappelle que les calculs présentés ici permettent d'établir **une condition suffisante à la stabilité et non une condition nécessaire et suffisante**. Ainsi, si  $a > a_{lim}$  le système est stable. En revanche, dans le cas contraire, on ne peut pas prévoir le comportement du système.

Il se peut que le critère soit encore trop restrictif. Cet aspect sera illustré sur des cas d'étude (partie 4.5.4).

Pour conclure nous proposons de discuter de la forme du critère. On rappelle qu'il a été choisi d'exprimer le critère de stabilité en termes de paramètre  $a$  minimum et donc de rapidité maximale du filtre de mesure. La rapidité du filtre critique ( $a_{lim}$ ) dépend des caractéristiques du réseau accueillant le producteur ( $K_{PQ}$ ) et de sa loi de commande ( $\sigma$ ).

Nous avons montré que si l'on choisit un réglage de  $a \in [0, 1[$  tel que  $a > a_{lim}$  alors, le système est stable. Il est intéressant de remarquer que, quels que soient  $K_{PQ}$  et  $\sigma$ , on a toujours  $a_{lim} < 1$ . Ceci permet de conclure **qu'il existe toujours un filtre passe-bas du premier ordre suffisamment lent pour garantir la stabilité du système**. Ainsi, le choix de limiter cette étude aux filtres passe-bas du premier ordre afin d'alléger les calculs (hypothèse 13) ne restreint pas le nombre de cas que l'on peut stabiliser en jouant sur les réglages du filtre de mesure.

On peut aussi remarquer qu'on ne peut rien dire, a priori, du signe de  $-1 - K_{PQ}\sigma$ . Il peut donc exister des systèmes pour lesquels  $a_{lim} \leq 0$  c'est-à-dire des **systèmes stables même avec un filtre de mesure du type retard pur** ( $a = 0$ ). Cela pourrait par exemple être le cas pour des petits producteurs proches du poste source.

Comme dit précédemment, les calculs ont été menés ici dans le cas d'une loi de commande  $Q(U)$  symétrique. Cependant, la méthode proposée s'étend à d'autres types de régulateurs. Par exemple, si la loi de commande n'est pas symétrique, on note  $\sigma^{(i)}$  la pente dans chacune des zones de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ . Dans ce cas, la zone de fonctionnement ayant la plus grande pente (en valeur absolue) définit le filtre critique.

$$a_{lim} = \max_{i \in \mathcal{N}_{PQ}} \left( \frac{-1 - K_{PQ}\sigma^{(i)}}{1 - K_{PQ}\sigma^{(i)}} \right) < a \quad \Rightarrow \quad \text{Le système est stable} \quad (4.46)$$

C'est le cas, par exemple, du producteur du cas d'étude réel décrit partie 2.4 et 3.3. Nous proposons d'appliquer le critère de stabilité établi dans ces travaux à ce cas d'étude réel.

## 4.4 Application au cas d'étude réel à un producteur

### 4.4.1 Description du système

On reprend le système du cas d'étude décrit dans la partie 2.4 dont on rappelle les valeurs numériques.

Les limites des zones de fonctionnement ne sont pas symétriques donc nous ne sommes pas dans le cas de la loi de commande  $Q(U)$  décrite figure 4.1. Cependant, les pentes de la loi de commande sont bien symétriques comme dans le cas de la figure 4.1.

$$\begin{cases} \sigma^{(1)} = \sigma^{(3)} = \sigma^{(5)} = 0 \\ \sigma^{(2)} = \frac{-\Delta Q_M}{\Delta U_2 - \Delta U_1} = -9600 \text{ VAr/V} \\ \sigma^{(4)} = \frac{-\Delta Q_M}{\Delta U_4 - \Delta U_3} = -9600 \text{ VAr/V} \end{cases} \quad (4.47)$$

Le point de fonctionnement			
$U^0$	=	20,1 kV	$\Delta U_i = U_i - U^0$
$\Delta U_d$	=	-2 kV	$\overline{\Delta U_d} = 2$ kV
Les gains du réseau			
$K_{PQ}$	=	271 V/MVAr	
La loi de commande $Q(U)$			
$\Delta U_1$	=	-1100 V	$\Delta U_2 = -850$ V
$\Delta U_3$	=	650 V	$\Delta U_4 = 900$ V
$\Delta U_m$	=	-2100 V	$\Delta U_M = 1900$ V
$\Delta Q_m$	=	-2,4 MVAr	$\Delta Q_M = 2,4$ MVAr
Le filtre de mesure			
$a$	$\in$	$[0, 1[$	$T_e = 1$ s

Tableau 4.4 – Paramètres du modèle représentant le cas d'étude

On remarque que les pentes des zones linéaires (zones 2 et 4) sont identiques. Par la suite, on notera  $\sigma$  cette pente.

#### 4.4.2 Critère de stabilité

On propose d'appliquer la méthode développée dans ce chapitre. Grâce à l'expression de la pente  $\sigma$  et aux données du tableau 4.4 on exprime le critère de stabilité proposé dans ces travaux :

$$a_{lim} = \frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} \sim 0,45 \quad (4.48)$$

On rappelle que les cycles  $1 \leftrightarrow 4$ ,  $2 \leftrightarrow 4$ ,  $2 \leftrightarrow 5$  et  $1 \leftrightarrow 5$  sont impossibles dans le cas de ce producteur (cf. partie 4.3.2). Ainsi, d'après les travaux présentés dans ce chapitre, on peut dire que le système est stable pour  $a > a_{lim}$ .

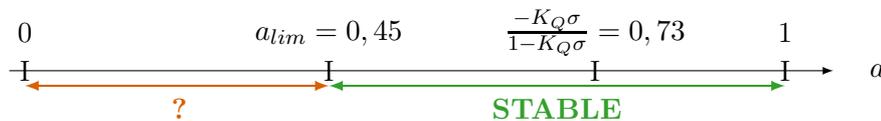


Figure 4.4 – Stabilité des cycles simples en fonction de la valeur de la rapidité du filtre

La figure 4.4 illustre l'intérêt de l'étape d'atteignabilité avant du calcul. En effet, avant cette étape, un critère de stabilité avait été proposé (4.26). L'étude d'atteignabilité avant a permis d'étendre la zone de stabilité par rapport à ce critère. Avec les valeurs numériques de ce cas d'étude, l'étape d'atteignabilité avant a permis d'étendre la zone de stabilité de  $a > 0,73$  à  $a > 0,45$ . Afin de tester le critère de stabilité proposé, nous simulons le comportement du système pour des valeurs de rapidité autour de la limite proposée.

### 4.4.3 Simulations dynamiques

On simule le comportement du système pour des valeurs de  $a$  comprises dans la zone de stabilité ou non (figure 4.4).

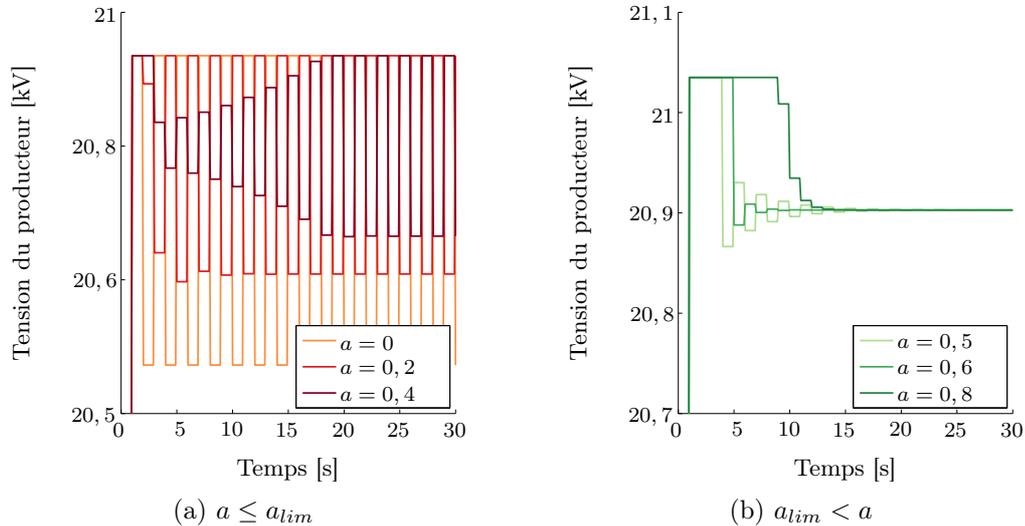


Figure 4.5 – Réponse en tension du système à une perturbation constante pour différentes valeurs de  $a$  autour de la limite de stabilité

Nous pouvons voir, sur la figure 4.5b, que le système est stable pour tout  $a > a_{lim}$  comme prévu dans l'étude théorique. Dans les cas où  $a \leq a_{lim}$ , on rappelle que cette étude ne nous permet pas de conclure. Cependant, ici, comme on peut le voir figure 4.5a, il semble que pour tout  $a$  ne respectant pas le critère de stabilité proposé, le système soit instable.

Afin de tester le comportement du système autour de la limite de stabilité, nous étudions la figure 4.6. Elle représente le comportement du système pour un filtre de rapidité 1 % plus lente que la limite et 1 % plus rapide.

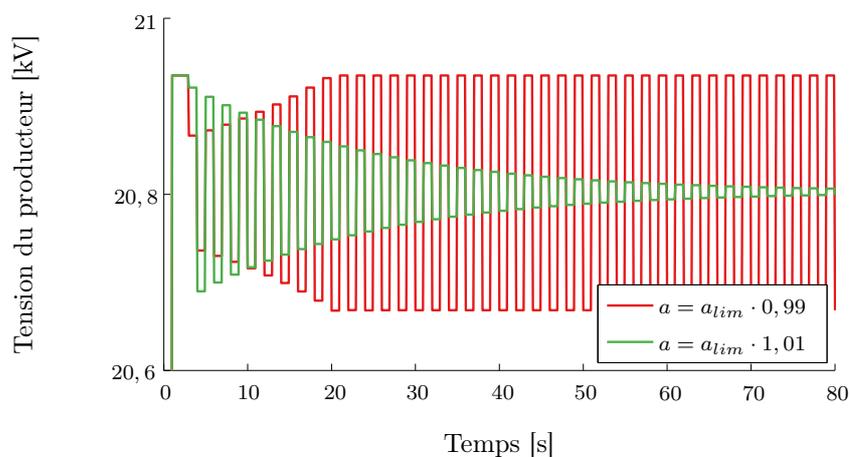


Figure 4.6 – Réponse en tension du système à une perturbation constante pour deux réglages de  $a$  autour de la limite de stabilité

Finalement, on peut voir sur la figure 4.6 que **le système se comporte comme prévu par**

le critère même autour de la valeur limite : il est stable dès que  $a > a_{lim}$ . La figure 4.6 permet aussi de mettre en évidence que dès que  $a < a_{lim}$ , le cas d'étude est instable. Bien que le critère ne soit qu'une condition suffisante de stabilité, il semble, sur ce cas particulier, être une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Nous discuterons du lien entre le critère et l'instabilité du système en étudiant d'autres systèmes dans la suite (parties 4.5.3 et 4.5.4).

À partir de cet exemple, nous pouvons conclure que le système est stable dès que le filtre de mesure respecte le critère proposé. De plus, nous avons montré que le critère proposé est aussi restrictif que possible puisqu'il existe au moins un cas instable dès que  $a < a_{lim}$ .

#### 4.4.4 Conclusion

Au final, nous avons **illustré la validité du critère de stabilité** proposé sur un exemple réel. Ce critère permet aux gestionnaires de réseaux de distribution de **calculer simplement une valeur limite de la rapidité du filtre** de mesure pour les départs n'accueillant qu'**un seul producteur**. En proposant un filtre de mesure plus lent au producteur, les gestionnaires peuvent garantir la stabilité du réseau de distribution.

Nous avons déjà insisté sur l'intérêt pour les gestionnaires d'évaluer la marge de stabilité associée au réglage proposé. L'écart entre le paramètre  $a$  du producteur et la valeur de  $a_{lim}$  représente une image de cette marge. Comme illustré sur cet exemple, il existe des cas pour lesquels, si le critère n'est pas respecté, alors le système est instable. Ceci permet de justifier que le critère de stabilité exprimé dans ces travaux est **au plus près possible de la limite physique de stabilité**. Sur cet exemple, le critère semble même être une condition nécessaire et suffisante à la stabilité du système. Ceci sera discuté dans la suite sur des cas d'étude à plusieurs producteurs (parties 4.5.3 et 4.5.4). Le gestionnaire choisira la marge de stabilité en fonction du compromis entre la rapidité du système ( $a$  le petit possible) et la stabilité ( $a$  le plus grand possible) qu'il souhaite garantir. Ce compromis est illustré par la figure 4.5b. Il convient de noter que si le système est trop lent, la validité de certaines hypothèses devra être revue par exemple le fait de considérer les grandeurs non-commandables comme constantes (hypothèse 11) ou encore le fait de pouvoir découpler l'action des régleurs en charge de celle des régulateurs  $Q(U)$ .

Finalement, nous avons obtenu une condition suffisante à la stabilité du système dont l'expression dépend explicitement des grandeurs du système. Cette expression n'est valable que dans le cas d'un seul producteur.

Or, il serait intéressant d'étendre le critère proposé à plusieurs producteurs puisque nous avons montré les limites numériques de l'étude formelle proposée au chapitre 3 quand le nombre de producteurs sur le réseau augmente. Nous allons donc tenter de proposer un critère de stabilité valable aussi pour les réseaux accueillant plusieurs régulateurs.

## 4.5 Critère de stabilité pour $N$ producteurs

### 4.5.1 Méthodologie proposée

La méthode utilisée pour étudier la stabilité d'un départ accueillant un seul producteur équipé d'un régulateur repose sur l'étude **exhaustive des cycles simples**. Dans le cas d'un réseau accueillant  $N$  producteurs, équipés de régulateurs de puissance affines par morceaux avec chacun  $m$  zones de fonctionnement, il peut exister jusqu'à  $m^N$  zones de fonctionnement de la loi de commande agrégée. Il peut donc y avoir jusqu'à « 2 parmi  $m^N$  » cycles simples. On comprend vite que l'étude exhaustive, même réduite aux cycles simples, n'est **pas adaptée à l'étude d'un réseau accueillant  $N$  régulateurs** de puissance principalement pour des raisons de temps de calcul et de mémoire disponible.

Pour contourner cette difficulté, nous proposons d'étudier la structure du critère proposé pour un producteur. On peut remarquer que l'expression établie pour calculer  $a_{lim}$  (4.46) dépend de la pente de la loi de commande agrégée dans les zones de fonctionnement linéaire. Ainsi, on peut dire que la stabilité du système hybride affine par morceaux peut être reliée au comportement du système dans chacune des zones de fonctionnement linéaire.

Dans cette partie, nous allons donc mettre en évidence un lien, pour un producteur, entre la dynamique des zones de fonctionnement linéaire et la stabilité du système global. Ensuite, nous étudierons l'extension de ce lien pour des réseaux accueillant  $N$  producteurs.

### 4.5.2 Stabilité locale versus stabilité globale

#### Cas à un producteur

Dans la suite, nous désignerons par *stabilité locale* la stabilité de l'ensemble des zones de fonctionnement linéaire du système. Le terme *stabilité globale* sera utilisé pour signifier la stabilité du système hybride affine par morceaux. On rappelle que dans le cas général, ces deux notions ne sont pas équivalentes.

La principale différence repose sur les outils à disposition pour étudier la stabilité. En effet, dans une zone de fonctionnement donnée, la dynamique du système est linéaire. On peut donc en évaluer la stabilité par l'étude des **valeurs propres de la matrice d'évolution** du système. La stabilité globale quant à elle demande d'étudier le système non linéaire dans son ensemble à l'aide par exemple de l'outil d'étude formelle de la stabilité développé dans ces travaux (chapitre 3).

Dans le cas d'un réseau accueillant un seul producteur comme décrit partie 4.3.1, la stabilité globale peut être évaluée grâce au critère proposé :

$$a_{lim} = \frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilité globale} \quad (4.49)$$

On propose d'étudier la stabilité locale de chacune des zones de fonctionnement linéaire du système afin d'identifier un lien avec la stabilité globale. On rappelle l'expression des matrices

d'évolution dans le cas général établie par (3.10) :

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}\mathbf{C} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{n_U \times n_f} & \mathbb{I}_{n_U} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Dans le cas particulier étudié ici – **un seul producteur dont le filtre de mesure est un filtre passe-bas du premier ordre** – les matrices d'évolution de chacune des cinq zones de fonctionnement sont exprimées à partir de (4.5) et du tableau 4.1 :

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} a + (1 - a)K_{PQ}\sigma^{(i)} & 1 - a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

On rappelle que le terme de perturbation est constant (hypothèse 11). Ainsi, il n'est pas nécessaire de le considérer dans l'état du système pour étudier la stabilité. Il suffit donc s'intéresser à l'équation en boucle fermée de l'évolution de l'état du filtre pour pouvoir déterminer si la zone linéaire est stable (3.10). On notera  $\mathcal{A}'^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_U}$  cette matrice d'évolution avec  $n_U$  le nombre de nœuds du réseau raccordant un régulateur de puissance. En voici l'expression dans le cas général :

$$\mathcal{A}'^{(i)} = \mathbf{A} + \mathbf{BK}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}\mathbf{C} \quad (4.52)$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, il n'y a qu'un seul régulateur raccordé au réseau dont le filtre de mesure est un passe-bas du premier ordre et dont la loi de commande a cinq zones de fonctionnement linéaire. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'^{(1)} &= \mathcal{A}'^{(3)} = \mathcal{A}'^{(5)} = a \\ \mathcal{A}'^{(2)} &= \mathcal{A}'^{(4)} = a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \end{aligned} \quad (4.53)$$

Comme les matrices dynamiques sont des scalaires, on peut écrire facilement leur spectre que l'on notera  $spec(\cdot)$  :

$$\begin{aligned} spec(\mathcal{A}'^{(1)}) &= spec(\mathcal{A}'^{(3)}) = spec(\mathcal{A}'^{(5)}) = a \\ spec(\mathcal{A}'^{(2)}) &= spec(\mathcal{A}'^{(4)}) = a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \end{aligned} \quad (4.54)$$

Dire que la zone de fonctionnement  $i \in \{1, \dots, 5\}$  est stable est équivalent à dire que :

$$\forall \lambda \in spec(\mathcal{A}'^{(i)}), \quad |\lambda| < 1 \quad (4.55)$$

On remarque que le filtre de mesure étant un filtre passe-bas, on sait que  $a \in [0, 1[$ . Ainsi, les zones de fonctionnement 1, 3 et 5 sont toujours stables. Les zones de fonctionnement 2 et 4 ne sont stables que si :

$$-1 < a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 1 \quad (4.56)$$

Finalement, on peut dire que :

$$\text{Stabilité locale} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma}}_{a_{lim}} < a \quad (4.57)$$

On reconnaît l'expression de  $a_{lim}$ . On peut donc conclure que, dans le cas d'un réseau raccordant un seul régulateur, la stabilité locale est une condition suffisante à la stabilité globale du système hybride affine par morceaux.

$$\boxed{\text{Stabilité locale à 1 producteur} \Rightarrow \text{Stabilité globale à 1 producteur}} \quad (4.58)$$

### Cas à N producteurs

Afin de proposer un critère de stabilité pour  $N$  producteurs sans réaliser d'étude exhaustive de tous les cycles simples possibles, nous faisons **la conjecture que le lien entre stabilité locale et globale est aussi vrai pour  $N$  producteurs**. Ainsi, pour vérifier la stabilité d'un système de  $N$  producteurs, il faut étudier la stabilité des  $n_{PQ}$  zones de fonctionnement linéaire de la loi de commande agrégée. **En conséquence, l'étude de la stabilité d'un réseau accueillant  $N$  producteurs revient à l'étude des valeurs propres des  $n_{PQ}$  matrices d'évolution du système.**

$$\boxed{\text{Conjecture 1. Stabilité locale à } N \text{ producteurs} \Rightarrow \text{Stabilité globale à } N \text{ producteurs}}$$

À notre connaissance, il n'est pas possible de démontrer la validité de cette conjecture. Cependant, nous souhaitons quand même l'évaluer. Pour ce faire, nous proposons de tester cette conjecture tout d'abord sur un exemple réel de réseau accueillant deux producteurs. Ensuite, nous proposerons une **étude statistique de la stabilité d'un grand nombre de réseaux** afin de vérifier que celle-ci peut être déduite du critère proposé.

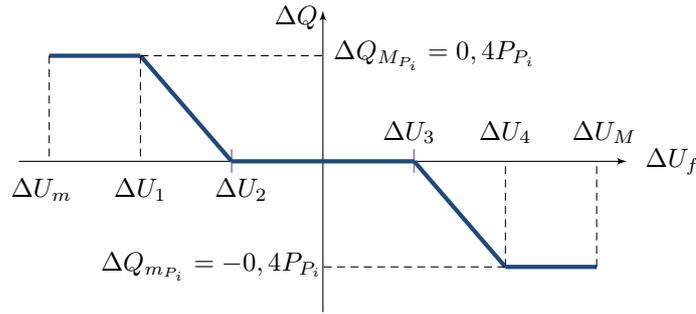
#### 4.5.3 Application à un cas d'étude réel à deux producteurs

On s'intéresse à un départ mixte moyenne tension exploité par Enedis sur lequel le régulateur  $Q(U)$  a été expérimenté [34]. Deux fermes photovoltaïques sont raccordées à ce départ. L'une (notée  $P_1$ ) se situe à 9 km du poste source et raccorde  $P_{P_1} = 6$  MW de panneaux solaires. L'autre (notée  $P_2$ ) se situe à 16,2 km du poste source et raccorde  $P_{P_2} = 2,5$  MW de panneaux solaires. Le départ accueille environ 1 MW de consommation.

Enedis envisage de demander à ces producteurs de participer au réglage de tension par l'intermédiaire d'un régulateur  $Q(U)$ . On supposera ici que les deux producteurs sont équipés du même régulateur et sont synchronisés (hypothèse 12). Leur filtre de mesure est supposé être un filtre passe-bas du premier ordre dont le paramètre de rapidité est noté  $a$ . La loi de commande est décrite figure 4.7.

La pente de chaque loi de commande en fonction de la zone de fonctionnement dans laquelle il se trouve est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \sigma_{P_1,1} = \sigma_{P_1,3} = \sigma_{P_1,5} = 0 ; & \sigma_{P_1,2} = \sigma_{P_1,4} = -\frac{\Delta Q_{M_{P_1}}}{\Delta U_2 - \Delta U_1} = \sigma_{P_1} = -9600 \text{ VAr/V} \\ \sigma_{P_2,1} = \sigma_{P_2,3} = \sigma_{P_2,5} = 0 ; & \sigma_{P_2,2} = \sigma_{P_2,4} = -\frac{\Delta Q_{M_{P_2}}}{\Delta U_2 - \Delta U_1} = \sigma_{P_2} = -4000 \text{ VAr/V} \end{cases} \quad (4.59)$$

Figure 4.7 – Loi de commande  $Q(U)$  du producteur  $P_i$ 

À partir des lois de commande des deux producteurs ayant toutes deux cinq zones de fonctionnement, on construit les  $n_{PQ} = 25$  zones de la loi de commande agrégée.

Zone $i$	Zone $_{P_1}(i)$	Zone $_{P_2}(i)$	Pente $_{P_1}(i)$ notée $\sigma_{P_1}^{(i)}$	Pente $_{P_2}(i)$ notée $\sigma_{P_2}^{(i)}$	Pente $^{(i)}$ notée $\sigma^{(i)}$
1	1	1	0	0	0
2	1	2	0	$\sigma_{P_2}$	0
3	1	3	0	0	0
4	1	4	0	$\sigma_{P_2}$	0
5	1	5	0	0	0
6	2	1	$\sigma_{P_1}$	0	0
7	2	2	$\sigma_{P_1}$	$\sigma_{P_2}$	$\sigma_{P_1} \cdot \sigma_{P_2}$
8	2	3	$\sigma_{P_1}$	0	0
9	2	4	$\sigma_{P_1}$	$\sigma_{P_2}$	$\sigma_{P_1} \cdot \sigma_{P_2}$
10	2	5	$\sigma_{P_1}$	0	0
11	3	1	0	0	0
			...		
25	5	5	0	0	0

Tableau 4.5 – Zones de fonctionnement de la loi de commande agrégée  $Q(U)$ 

Pour ce cas d'étude, le nombre de régulateurs  $n_P$  est égal au nombre de nœuds du réseau accueillant un régulateur  $n_U$  et est égal à 2. La matrice  $\mathbf{K}_{PQ} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  modélise la réaction du réseau.

$$\mathbf{K}_{PQ} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Les termes de cette matrice sont évalués à l'aide de la méthode numérique (méthode 2) présentée partie 2.3.

$$\begin{aligned} K_{11} &= 1,0 \times 10^{-4} \text{ V/VAr} ; & K_{12} &= 8,7 \times 10^{-5} \text{ V/VAr} \\ K_{21} &= 9,9 \times 10^{-5} \text{ V/VAr} ; & K_{22} &= 1,7 \times 10^{-4} \text{ V/VAr} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Les deux filtres de mesure des deux producteurs sont ici des filtres passe-bas du premier ordre dont la constante de temps discrète ( $a$ ) est identique. On détaille les expressions des matrices

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  composant le modèle d'état du filtre agrégé (2.4) dans ce cas particulier.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Finalement, on peut exprimer les matrices d'évolution du système dans chacune des 25 zones de fonctionnement comme suit :

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \mathcal{A}'^{(i)} = \begin{bmatrix} a + (1-a)K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} & (1-a)K_{12}\sigma_{P_2}^{(i)} \\ (1-a)K_{21}\sigma_{P_1}^{(i)} & a + (1-a)K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Pour exprimer les valeurs propres de  $\mathcal{A}'^{(i)}$  quel que soit  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ , on note  $\mathbf{G}^{(i)}$  la matrice diagonale dont les termes sont les pentes de chacun des producteurs dans la zone de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ . On définit aussi  $tr(\cdot)$  la fonction qui à une matrice carrée associe sa trace et  $det(\cdot)$  la fonction qui à une matrice carrée associe son déterminant. À partir de l'étude du polynôme caractéristique associé à  $\mathcal{A}'^{(i)}$ , on exprime les éléments contenus dans le spectre de  $\mathcal{A}'^{(i)}$ . Les calculs sont détaillés dans l'annexe E. On retient ici que le spectre de  $\mathcal{A}'^{(i)}$  peut s'écrire comme suit :

$$spec\left(\mathcal{A}'^{(i)}\right) = \left\{ a + (1-a)\frac{tr(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)})}{2} \pm (1-a)\sqrt{\left(\frac{tr(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)})}{2}\right)^2 - det(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)})} \right\} \quad (4.64)$$

De plus, l'annexe E présente l'étude du module des valeurs propres avec les valeurs numériques du cas d'étude. On obtient que :

$$a_{lim} = 0,18 < a \quad \Leftrightarrow \quad \text{Stabilité locale} \quad (4.65)$$

Afin d'évaluer la validité de la conjecture proposée, nous étudions la stabilité du cas d'étude grâce à l'outil formel construit précédemment (chapitre 3) et ce pour différentes valeurs de  $a$ . On souhaite vérifier que le système est bien stable pour tout  $a > a_{lim}$ . Pour illustrer les résultats de l'analyse formelle, nous présentons plusieurs simulations dynamiques caractéristiques de la stabilité du système.

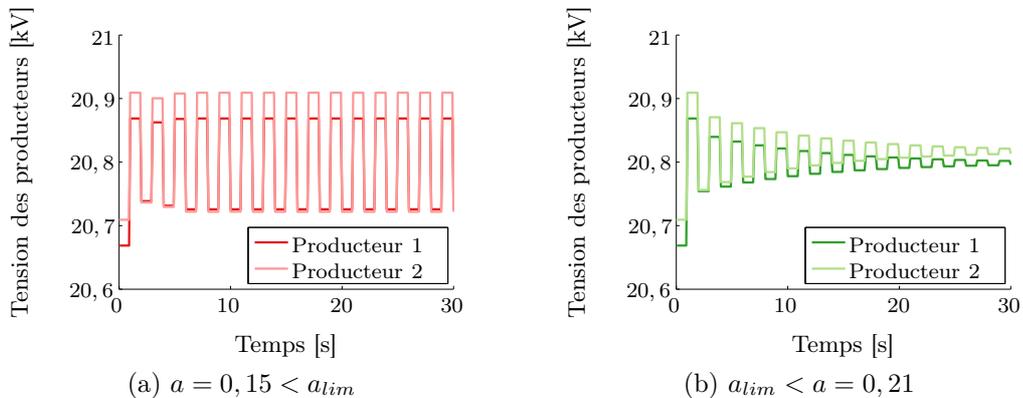


Figure 4.8 – Réponse en tension du système de deux producteurs à une perturbation constante pour différentes valeurs de  $a$  autour de la limite de stabilité

Comme on peut le voir figure 4.8b lorsque l'on choisit un paramètre de filtre supérieur à la limite de stabilité, le comportement dynamique du système est stable comme prévu par le critère proposé. On rappelle que la condition suffisante de stabilité ne permet pas de conclure si  $a < a_{lim}$ . Dans le cas présenté figure 4.8a, on peut voir que pour l'exemple choisi ( $a = 0,15$ ), le système est instable. Sur cet exemple, on peut donc dire que le critère proposé n'est pas très restrictif. Finalement, l'outil formel d'étude de la stabilité confirme que le système est stable dès que le filtre est plus lent que le filtre critique. Sur cet exemple, la condition suffisante à la stabilité du système semble aussi être une condition nécessaire. En effet, dès que  $a < a_{lim}$ , le système est instable.

Finalement, **le cas d'étude réel proposé ici semble confirmer la conjecture** faite :

$$\text{Stabilité locale des 2 producteurs} \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilité globale des 2 producteurs} \quad (4.66)$$

Afin d'évaluer la validité de cette conjecture, un plus grand nombre de cas doit être étudié. Pour ce faire, nous réalisons une étude statistique.

#### 4.5.4 Validation par une étude statistique

##### Principe

Nous avons démontré, pour un producteur, que la stabilité locale est une condition suffisante à la stabilité globale du système hybride affine par morceaux. Afin d'étudier la stabilité d'un réseau accueillant  $N$  régulateurs, nous partons du postulat que la stabilité locale est une condition suffisante à la stabilité globale et ce quel que soit le nombre de régulateurs raccordés au réseau. La validité de cette conjecture a été illustrée pour le cas d'un réseau réel accueillant deux producteurs. Nous souhaitons ici poursuivre la validation de la conjecture 1. Comme nous ne savons pas démontrer formellement la validité de la conjecture, nous proposons de tester celle-ci sur un grand nombre d'exemples.

Pour ce faire, nous allons construire un **générateur aléatoire de réseaux** accueillant plusieurs producteurs. Pour chaque réseau tiré au sort, nous allons analyser sa stabilité à l'aide de l'outil formel décrit chapitre 3 et à l'aide du critère (conjecture 1). **La comparaison de ces deux analyses de stabilité nous permettra d'évaluer la validité du critère proposé pour  $N$  producteurs.** La figure 4.9 schématise le principe de l'étude statistique proposée.

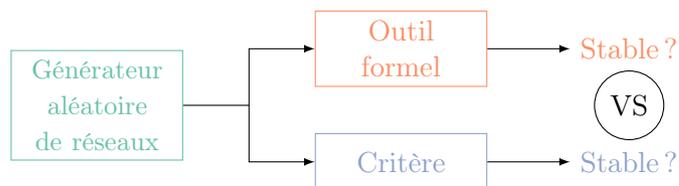


Figure 4.9 – Schéma de principe de l'étude statistique proposée pour évaluer la validité du critère de stabilité

Avant de procéder à la comparaison des résultats, décrivons brièvement les caractéristiques des

réseaux étudiés.

### Description des scénarios étudiés

Le générateur aléatoire de réseaux permet de tirer au sort :

- le nombre de producteurs équipés de régulateur  $Q(U)$  du réseau,
- le nœud de raccordement de chacun des producteurs,
- la puissance installée de chacun des producteurs.

Dans cette étude, nous tirons au sort 60 scénarios. Pour chacun, le réseau de distribution moyenne tension accueillant les  $N$  producteurs est le même. Il est composé de 20 nœuds et 20 branches comme indiqué figure 4.10.

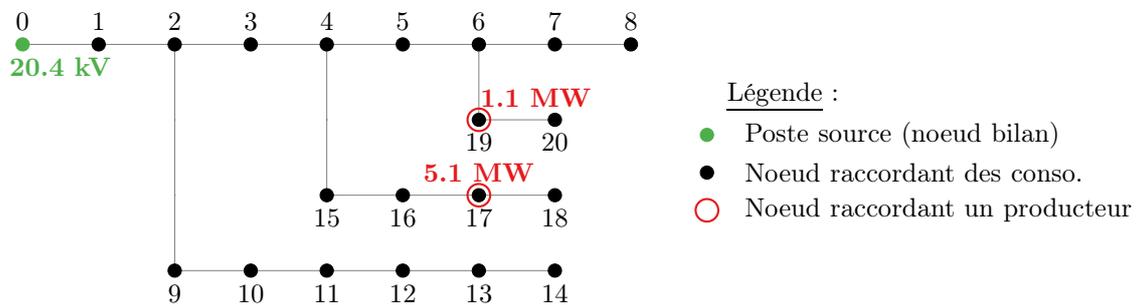


Figure 4.10 – Exemple d'un réseau utilisé pour l'étude statistique

Chaque branche mesure deux kilomètres et a les caractéristiques linéiques suivantes :

$$R_l = 0,5 \Omega/\text{km} \quad X_l = 0,25 \Omega/\text{km} \quad G_l = 0 \text{ S/km} \quad B_l = 3,5 \times 10^{-5} \text{ S/km} \quad (4.67)$$

Les branches mesurent donc jusqu'à 16 km. **Le nombre maximal de producteurs raccordés à ce réseau a été limité à quatre** afin d'assurer un temps de calcul et une mémoire demandée raisonnables pour la méthode formelle d'étude de la stabilité. La figure 4.11a représente la répartition en pourcentage du nombre de producteurs pour les **60 scénarios étudiés**.

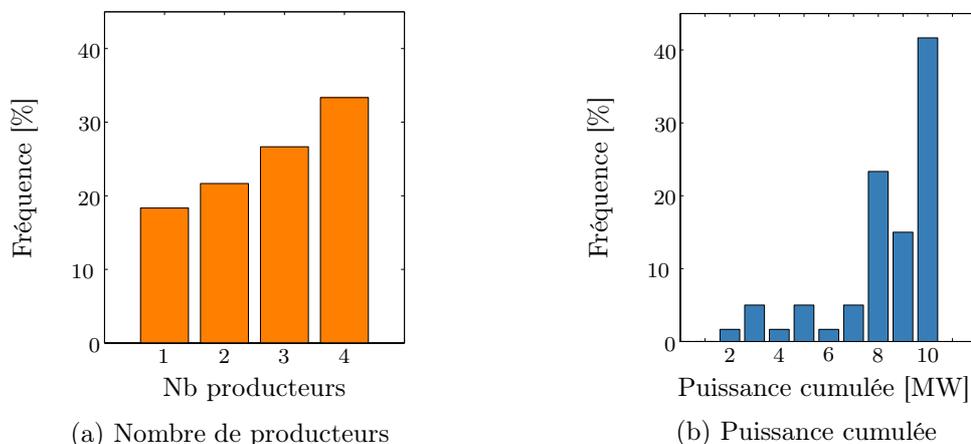


Figure 4.11 – Distributions des principaux paramètres sur les 60 cas étudiés

Comme dit précédemment, la puissance installée de chacun des producteurs est tirée au sort. Dans un souci de réalisme, nous avons **limité la puissance totale raccordée au réseau à 10 MW**. La puissance de chaque producteur est donc tirée au sort entre 0 et la puissance encore disponible sur le réseau soit 10 MW moins la somme des puissances déjà raccordées. La figure 4.11b représente la répartition de la puissance totale installée sur les 60 départs étudiés. On remarque que dans 80 % des cas, la puissance totale du départ dépasse 8 MW. Le réseau illustré figure 4.10 accueille 6,2 MW répartis en deux producteurs. La répartition des puissances cumulées n'est pas uniforme mais comme plus le départ raccorde de puissance plus la stabilité est contrainte, il paraît intéressant d'étudier des cas qui raccordent beaucoup de production et donc qui auront tendance à ne pas être stables naturellement.

Nous souhaitons étudier des cas pour lesquels le plan de tension est autour de la tension de référence afin de pouvoir atteindre toutes les zones de fonctionnement possibles. En effet, lorsque toutes les transitions sont possibles, il s'agit des cas ayant le plus fort risque d'instabilité. Pour ce faire, la consommation totale du départ est adaptée en fonction des producteurs de ce dernier. On choisit la consommation totale du départ supérieure de 10 % à la production totale raccordée au départ. **La consommation est répartie sur les 20 nœuds du réseau de façon homogène.** Pour chacun des 60 scénarios, tous les producteurs raccordés au réseau sont équipés d'un régulateur  $Q(U)$  identique à celui illustré figure 4.7. Chaque scénario est étudié pour **six valeurs de rapidité du filtre**  $a \in \{0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5\}$ . Ainsi, nous étudions 360 cas à partir de 60 départs différents.

En s'appuyant sur l'analyse des résultats de l'outil formel, on peut voir que les 360 scénarios permettent de couvrir une large gamme de systèmes. On a identifié 34,7 % des cas (125 cas) comme instables. Par exemple, le scénario représenté figure 4.10 est instable pour  $a = 0$  et  $a = 0,1$  et stable pour toutes les autres valeurs de  $a$  d'après l'outil formel d'étude de la stabilité. On peut aussi remarquer que, parmi ces 60 réseaux, on peut dire que 13 (soit 21,7 %) sont stables naturellement, c'est-à-dire déjà stable pour  $a = 0$ . On ajoute que l'ensemble des 60 réseaux est stable pour  $a = 0,5$ .

Après avoir détaillé les 360 cas étudiés, nous allons comparer les résultats de l'étude formelle de stabilité et du critère proposé.

### Analyse de la cohérence des deux méthodes

Afin de mener cette comparaison, nous rappelons que l'on souhaite valider le fait que la stabilité locale pour  $N$  producteurs est une condition suffisante à la stabilité globale (conjecture 1). Pour ce faire, nous définissons les cas dits « **faux positifs** » comme les cas pour lesquels le critère proposé conclut à la stabilité alors que l'étude formelle conclut à l'instabilité. Nous définissons aussi les cas « **faux négatifs** » comme ceux pour lesquels le critère est instable alors que l'étude formelle est stable. Le tableau 4.6 compare les résultats obtenus avec le critère proposé (conjecture 1) et ceux obtenus grâce à l'outil formel développé au chapitre 3 désigné comme méthode de référence. Comme on peut le voir, quand le critère est stable, le système est stable dans 100 % des cas.

Référence \ Critère	# cas stables (en %)	# cas instables (en %)	Total (en %)
# cas stables (en %)	206 (57 %)	29 (8 %)	235 (65 %)
# cas instables (en %)	0 (0 %)	125 (35 %)	125 (35 %)
Total (en %)	206 (57 %)	154 (43 %)	360 (100 %)

Tableau 4.6 – Comparaison des conclusions du critère proposé et de la référence

Il n'y a aucun cas « faux positifs ». Ainsi, **le critère proposé est validé**, au moins jusqu'à quatre producteurs sur le même départ pour les ordres de grandeur des réseaux français. La stabilité locale est bien une condition suffisante à la stabilité globale du système hybride affine par morceaux.

Par ailleurs, on remarque qu'il existe 29 cas « faux négatifs » c'est-à-dire 8,1 % des cas pour lesquels le critère proposé juge le filtre de mesure trop rapide pour assurer la stabilité du système, mais la méthode de référence conclut à la stabilité du système. Ceci s'explique par le fait que **le critère de stabilité évalue la stabilité de chaque zone de fonctionnement linéaire sans préjuger du fait qu'il existe ou non un point de fonctionnement dans cette zone linéaire**. Dans le cas où une zone de fonctionnement serait instable, mais non-atteignable, le critère conclut à l'instabilité du système alors que ce dernier est stable. La méthode de référence permet de détecter ce type de cas de figure. C'est par exemple le cas du système représenté figure 4.10. Lorsque les deux producteurs sont dans la deuxième (ou dans la quatrième) zone de fonctionnement, le réglage  $a = 0,3$  ne suffit pas à assurer la stabilité de cette dynamique locale. Cependant, la distance électrique entre les producteurs est telle qu'ils ne peuvent pas être tous les deux en même temps dans la zone de fonctionnement 2 (ou 4). En effet, la tension aux bornes du producteur du nœud 17 est de l'ordre de 20,96 kV dans l'état de référence alors que celle du producteur du nœud 19 est de l'ordre de 20,26 kV. On voit que l'écart entre les deux producteurs est largement supérieur à la largeur de la zone linéaire (250 V). Ils ne peuvent donc pas être tous les deux dans leur zone linéaire en même temps. C'est pourquoi, le calcul formel conclut à la stabilité pour  $a = 0,2$ .

Finalement, **la stabilité locale n'est pas une condition nécessaire à la stabilité globale** puisqu'il existe des cas « faux négatifs ». Il convient cependant de noter que dans les cas où  $a$  est réglé de manière à ce qu'il existe une zone de fonctionnement instable, mais que celle-ci n'est pas atteignable, **la marge de stabilité sera très étroite**. En effet, si un nouveau consommateur se raccorde et modifie l'écart de tension entre les différents producteurs, la zone instable risque de devenir atteignable rendant ainsi le système instable.

Pour conclure, l'étude statistique a permis de valider le critère de stabilité proposé (conjecture 1) pour des réseaux accueillant jusqu'à quatre producteurs. Il serait intéressant de mener une étude statique avec une plus grande puissance de calcul afin de pouvoir élargir les conditions testées, notamment le nombre maximal de producteurs par départ.



demandé que 7 minutes. Sur cet exemple, le critère de stabilité est donc 140 fois plus rapide que la méthode formelle. Selon le type d'études réalisées, le **gain de temps** peut être un paramètre important. Par exemple, pour évaluer la limite de stabilité par une méthode dichotomique comme proposée précédemment, il faut répéter plusieurs fois les calculs pour un même cas d'étude en faisant varier les réglages du filtre de mesure. Ainsi, avoir un calcul élémentaire rapide est un facteur d'autant plus important que le calcul élémentaire est répété de nombreuses fois.

#### 4.6.2 Sur l'existence de cycles complexes

On désigne par cycle complexe tous les comportements instables du système de période supérieure strictement à deux fois le temps d'échantillonnage des régulateurs. Par exemple, la trajectoire discrète suivante décrit un cycle de période  $3T_e$  et donc est considérée comme un cycle complexe :

$$m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3 \rightarrow m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3 \rightarrow m_1 \rightarrow \dots \quad (4.69)$$

En pratique, aucune étude formelle réalisée n'a mis en évidence l'existence d'un cycle complexe, que ce soit sur les deux cas d'étude réels étudiés ou sur les 360 cas théoriques testés au cours de l'étude statistique. Ceci nous a donc conduit à émettre l'hypothèse que tous les cycles sont des cycles simples (hypothèse 14). Cette hypothèse a permis d'établir une expression formelle de la limite de stabilité pour un producteur.

Même si l'étude statistique n'a pas contredit cette hypothèse, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que toutes les études ont été menées avec des filtres de mesure passe-bas du premier ordre. Pour un tel filtre, l'état à l'instant  $(k+1)T_e$  ne dépend que de l'état du filtre et du système à l'instant  $kT_e$ . L'**ordre des filtres étudiés** pourrait donc être à l'origine de l'inexistence de cycles complexes. La discussion concernant leur existence sera poursuivie dans la partie suivante.

#### 4.6.3 Sur l'extension à différents filtres de mesure

Comme nous venons de le souligner, nous nous sommes pour l'instant limités à l'étude de filtres passe-bas du premier ordre afin de limiter la complexité des calculs analytiques. Cette hypothèse se justifie par le fait que nous avons montré qu'il existe toujours un filtre passe-bas du premier ordre suffisamment lent pour assurer la stabilité d'un départ accueillant des régulateurs. De plus, de nombreux pays ont fait le choix d'un filtre de mesure de ce type. Malgré tout, il convient de noter que certains pays ont fait un choix différent. Par exemple, en France, le filtre de mesure privilégié par Enedis est un **filtre à moyenne glissante** [38]. Le critère proposé ne s'applique, a priori, pas aux filtres d'ordre supérieur strictement à un, mais l'outil formel permet d'étudier la stabilité du système, quel que soit l'ordre du filtre de mesure. Il serait donc intéressant d'évaluer la validité du critère proposé dans le cas de filtres de mesure d'ordre supérieur strictement à un. Nous proposons, comme premier élément de réponse, de comparer la stabilité locale et globale d'un exemple pour lequel le filtre de mesure est d'ordre deux. Nous choisissons comme cas d'étude le **cas réel présenté partie 2.4** dont le filtre de mesure est maintenant un filtre à **moyenne glissante sur deux échantillons**. Nous choisissons comme état du filtre à l'instant  $kT_e$  le vec-

teur  $\Delta \mathbf{x}_f(k) = [\Delta U(k-1) \ \Delta U(k-2)]^T \in \mathbb{R}^2$ . L'équation dynamique du filtre de mesure peut s'écrire :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_f(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x}_f(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \Delta U(k) \\ \Delta U_f(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{x}_f(k) \end{cases} \quad (4.70)$$

La matrice d'évolution du système en boucle fermée  $\mathcal{A}'^{(i)}$  dans le mode  $i \in \{1, \dots, 5\}$  peut s'écrire comme indiqué par (3.10) à partir de  $K_{PQ} \in \mathbb{R}$  le gain équivalent au réseau et de  $\sigma^{(i)} \in \mathbb{R}$  la pente de la loi de commande dans le mode  $i$ .

$$\mathcal{A}'^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{K_{PQ}\sigma^{(i)}}{2} & \frac{K_{PQ}\sigma^{(i)}}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

La stabilité de ce système est étudiée avec l'outil formel décrit au chapitre 3. Cette étude permet de mettre en évidence l'instabilité du système. La figure 4.12 illustre ce comportement sur un point de fonctionnement.

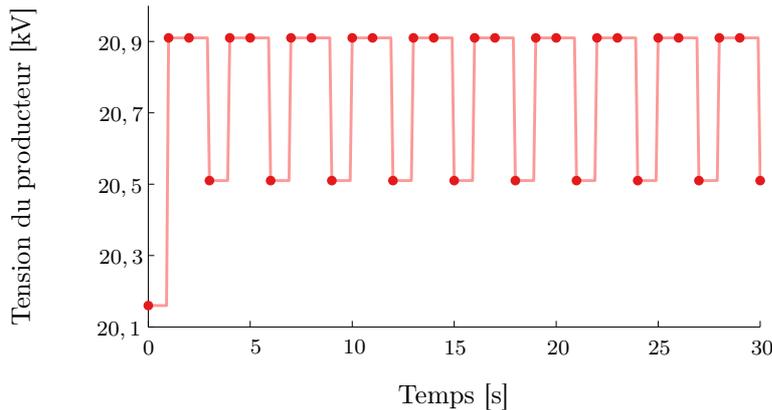


Figure 4.12 – Illustration du comportement instable du système avec un filtre de mesure à moyenne glissante sur deux échantillons

Afin d'évaluer la possibilité d'étendre le critère proposé à d'autres filtres de mesure, nous étudions la stabilité locale de ce système. Avec les valeurs numériques du cas d'étude (tableau 3.2), nous calculons les valeurs propres des matrices  $\mathcal{A}'^{(i)}$  dans les cinq zones de fonctionnement de la loi de commande  $Q(U)$ . À nouveau, il apparaît que les zones contraignantes pour la stabilité sont les zones 2 et 4. Dans ces zones, il existe des valeurs propres dont le module est supérieur strictement à un.

$$\forall i \in \{2, 4\}, \quad \max_{\lambda \in \text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)})} (|\lambda|) = 1,17 \quad (4.72)$$

Ainsi dans ce cas d'étude, d'après le critère proposé, on ne peut pas garantir la stabilité globale du système. Cette conclusion est bien en accord avec les résultats de l'étude formelle.

Prenons maintenant l'exemple d'un producteur de 3 MW au lieu de 6 MW raccordé au même réseau que précédemment. La pente  $\sigma$  de la loi de commande est donc divisée par deux. Cette

fois, l'étude formelle conclut de stabilité globale du système et l'étude des valeurs propres montre que :

$$\forall i \in \{2, 4\}, \quad \max_{\lambda \in \text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)})} (|\lambda|) = 0,79 \quad (4.73)$$

Le critère, s'il s'appliquait ici, permettrait de conclure à la stabilité du système ce qui est, à nouveau, en accord avec les résultats de l'étude formelle.

Pour conclure, sur un exemple, nous avons montré que le critère proposé semble rester valable même si le filtre de mesure est d'ordre supérieur à un. Une étude statistique plus approfondie serait souhaitable pour confronter cette conjecture à une plus grande variété de cas d'étude.

De plus, on peut remarquer sur la figure 4.12 que le cycle décrit a une période de trois secondes soit  $3T_e$ . Ainsi, nous venons de mettre en évidence qu'il peut bien exister des cycles complexes lorsque l'ordre du filtre est supérieur strictement à un. Cependant, l'existence de ce cycle ne semble pas limiter le champ de validité de la condition suffisante à la stabilité proposée dans ces travaux. Encore une fois, il serait intéressant de mener une étude sur un grand nombre de réseaux et de filtres de mesures d'ordre supérieur à un afin de pouvoir étendre le critère proposé précédemment aux filtres de mesure quelconques et aux cycles complexes.

Il serait aussi intéressant de proposer un critère adapté aux cas pour lesquels les  $N$  producteurs ont des filtres de mesure différents les uns des autres. Le critère proposé prend déjà en compte les cas pour lesquels les lois de commande sont différentes d'un producteur à l'autre, tant que les lois agrégées  $P(U)$  et/ou  $Q(U)$  restent affines par morceaux.

#### 4.6.4 Sur l'impact de la des-optimisation

Nous avons aussi mis en évidence grâce à l'étude statistique que le critère proposé n'est pas une condition nécessaire et suffisante à la stabilité du système, mais uniquement une condition suffisante. Ainsi, il existe des cas pour lesquels la limite de stabilité calculée grâce au critère est supérieure à la réalité. Le risque de cette surestimation est de **ralentir le système plus que nécessaire**.

Parmi les 360 systèmes étudiés, il y a eu 29 « faux négatifs » (tableau 4.6). C'est par exemple le cas du système illustré figure 4.10. Pour cet exemple, le critère permet d'assurer la stabilité du système dès que  $a \geq 0,3$  alors que la méthode formelle conclut à la stabilité du système dès  $a = 0,2$ . Une étude dichotomique est réalisée pour encadrer les valeurs critiques de la rapidité avec les deux méthodes proposées à  $10^{-2}$  près. On trouve pour le critère de stabilité  $0,21 < a_{lim}^{(C)} < 0,22$  et avec la méthode formelle  $0,17 < a_{lim}^{(F)} < 0,18$ .

Ainsi, pour  $0,18 < a < 0,21$  le critère ne permet pas de détecter la stabilité du système. Ceci amènera le GRD à régler les filtres de mesure des producteurs avec une dynamique plus lente que nécessaire. La figure 4.13 illustre la dynamique du système pour différentes marges de stabilités calculées à partir de l'outil formel ( $a_{lim}^{(F)}$ ) et du critère proposé ( $a_{lim}^{(C)}$ ).

On peut voir que si la marge de stabilité n'est pas assez grande (figure 4.13a), d'importantes oscillations ont lieu en régime transitoire. Le temps de réponse du système est alors lent, on peut lire sur la figure 4.13a que le temps de réponse vaut 11 s pour  $a = 1,5a_{lim}^{(F)}$  et 6 s pour  $a = 1,5a_{lim}^{(C)}$ .

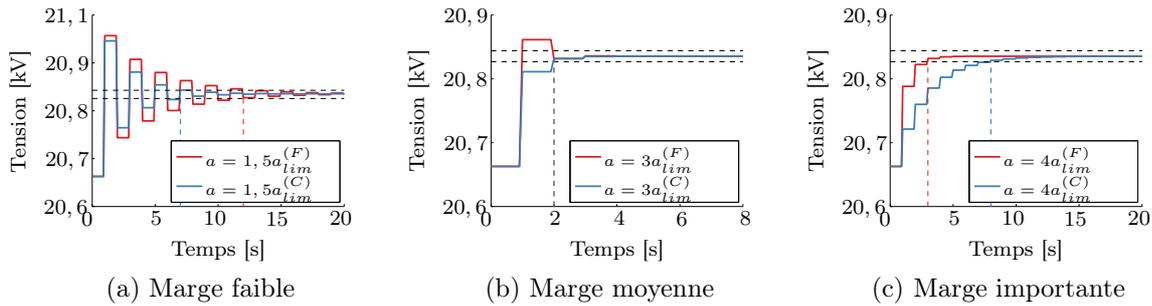


Figure 4.13 – Illustration de l’impact du choix de la marge de stabilité sur la dynamique du système représenté figure 4.10

Dans ce cas, la surestimation de la valeur limite de temps de réponse du filtre réalisée par le critère permet d’avoir une marge de stabilité plus grande et donc des oscillations plus amorties en régime permanent.

Dans le cas où la marge de stabilité est grande (figure 4.13c), le régime permanent est apériodique. Lorsque que  $a = 4a_{lim}^{(F)}$  le temps de réponse vaut deux secondes alors que lorsque  $a = 4a_{lim}^{(C)}$ , le temps de réponse du système vaut 7 s. Cette fois, la surestimation de la valeur limite de temps de réponse du filtre réalisée par le critère ralentit le système puisqu’elle entraîne une marge de stabilité plus grande que prévue.

La figure 4.13b illustre un cas intermédiaire pour lequel les deux réglages ( $a = 3a_{lim}^{(F)}$  et  $a = 3a_{lim}^{(C)}$ ) résultent en un temps de réponse d’une seconde avec un dépassement dans le premier cas et sans oscillation dans le deuxième. Finalement, la figure 4.13 permet d’illustrer l’importance de bien évaluer et bien choisir la marge de stabilité afin de faire le meilleur compromis possible entre la stabilité et la rapidité du système. On peut dire que la surestimation de la limite de stabilité risque d’entraîner un important ralentissement du système (figure 4.13c) mais que ceci n’est pas systématique. Des travaux devront être faits pour aider les gestionnaires à choisir la « bonne marge de stabilité » en fonction de leur cahier des charges. Pour ce faire, il faudrait aussi pouvoir évaluer les gains, par exemple en matière de vieillissement des ouvrages, apportés par une optimisation de la rapidité du système.

De plus, nous avons déjà remarqué que l’écart entre les deux méthodes provient du fait que pour  $0,18 < a < 0,21$ , il existe au moins une zone de fonctionnement instable qui n’est pas atteignable. Dans notre exemple, la distance électrique entre les deux producteurs est telle qu’ils ne peuvent pas se trouver dans leur zone 2 ou 4 en même temps. Or, l’écart de tension entre les deux producteurs peut évoluer par exemple avec le raccordement d’un nouveau consommateur. Ainsi, régler  $a \in [0,18, 0,21]$  permet d’optimiser la rapidité du système, mais demande de revoir le choix à chaque modification du système. Si au contraire, le GRD règle  $a > a_{lim}^{(C)}$ , alors tant qu’aucun autre producteur ne se raccorde, la stabilité du système sera garantie. À chaque nouveau raccordement de régulateur, la dynamique du système est modifiée, les valeurs propres aussi. Il faut donc recalculer la valeur limite de la constante de temps du filtre discret.

Finalement, le critère de stabilité proposé est plus restrictif que celui calculé à l’aide de la

méthode formelle. En revanche, il permet d'assurer la stabilité du système jusqu'au raccordement d'un nouveau producteur. Il serait intéressant d'étudier l'impact du raccordement d'un nouveau producteur en quantifiant, par exemple, la marge de stabilité nécessaire pour que le réglage proposé n'ait pas besoin d'être revu au raccordement d'un nouveau producteur. Cette piste est envisagée au chapitre suivant.

## 4.7 Conclusion

Dans le chapitre précédent, nous avons développé une méthode formelle d'analyse de la stabilité des systèmes hybrides affines par morceaux. Celle-ci nous a permis de construire un outil étudiant la stabilité d'un départ raccordant des producteurs équipés de régulateurs de puissance. L'outil proposé pour appuyer les gestionnaires de réseaux de distribution (GRD) au cours des études de raccordement présente une grande flexibilité quant aux caractéristiques du système étudié. En effet, la méthode est adaptée, quels que soient le nombre de producteurs, leur filtre de mesure ou encore leur loi de commande. L'outil proposé offre aussi aux GRD des résultats riches puisqu'il permet non seulement de conclure sur la stabilité du système, mais aussi, par exemple, d'identifier les points de fonctionnement impliqués dans les éventuels cycles et ceux y menant que l'on pourrait qualifier de « conditions initiales dangereuses », d'estimer les amplitudes des oscillations de tension associées à un cycle, etc. Il pourrait être intéressant de se pencher plus précisément sur les résultats donnés par l'outil de calcul formel. Ceci pourrait permettre d'évaluer le lien entre la marge de stabilité et la comportement dynamique. Finalement, on peut noter la grande précision des résultats fournis par l'outil formel notamment, la capacité de détecter la stabilité du système lorsqu'il existe des zones de fonctionnement instable mais inatteignables. Par ailleurs, ces avantages s'accompagnent d'une complexité des calculs qui augmente rapidement avec le nombre de producteurs du réseau et le nombre de zones de fonctionnement linéaire de leur loi de commande. Ainsi, les calculs risquent d'être longs et de demander une importante mémoire disponible. De plus, aucune expression explicite d'un critère de stabilité n'a pu être établie avec cet outil.

Afin de dépasser ces difficultés nous avons souhaité proposer aux gestionnaires de réseaux de distribution (GRD) un **critère permettant d'évaluer plus rapidement la stabilité d'un cas d'étude**. Ce critère a été établi en restreignant les cas étudiés. Ceci revient à **diminuer la flexibilité** de la méthode par rapport à la méthode formelle dans le but d'en **diminuer la complexité**. Pour ce faire, nous avons proposé de nous limiter aux producteurs dont le filtre de mesure est du type **passe-bas du premier ordre à temps discret**. Nous avons aussi supposé que tous les producteurs d'un même départ avaient des régulateurs de même structure et synchronisés.

Grâce à ces hypothèses, nous avons pu établir un **critère explicite de stabilité pour un départ accueillant un seul producteur**.

L'obtention d'une expression explicite facilite notamment l'étude de sensibilité aux différents paramètres du système de la limite de stabilité. Ce point sera détaillé dans la suite de ces travaux

$$\max_{i \in \mathcal{N}_{PQ}} \left( \frac{-1 - K_{PQ}\sigma^{(i)}}{1 - K_{PQ}\sigma^{(i)}} \right) < a \quad \Rightarrow \quad \text{Le système est stable} \quad (4.74)$$

(partie 5.2.2), on peut d'ores et déjà remarquer que la limite de stabilité dépend du produit  $K_{PQ}\sigma$ . Ainsi, il est aussi contraignant pour la stabilité que le producteur ait une puissance raccordée importante (proportionnelle à  $\sigma$ ) ou une grande distance électrique au poste source (proportionnelle à  $K_{PQ}$ ).

Ensuite, nous avons conjecturé l'extension de ce critère aux départs raccordant **plusieurs producteurs**.

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \max_{\lambda \in sp(\mathcal{A}^{(i)})} (|\lambda|) < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Le système est stable} \quad (4.75)$$

La conjecture a été validée sur 360 réseaux théoriques accueillant jusqu'à quatre producteurs. Il convient de noter que le critère proposé pour  $N$  producteurs n'est pas explicite. Cependant, il permet de réduire fortement le temps de calcul nécessaire pour pouvoir conclure sur la stabilité du système.

Finalement, le critère établi dans ce chapitre permet aux GRD de calculer, à chaque étude de raccordement, la **rapidité du filtre critique** – c'est-à-dire le filtre le plus rapide qui assure la stabilité – et de proposer aux producteurs du départ un réglage de la rapidité de son filtre en fonction de la marge de stabilité que le GRD souhaite garantir. Ce critère a été étudié dans le cas de filtre passe-bas du premier ordre. Une étude plus approfondie permettrait de discuter de la validité du critère, quel que soit le filtre de mesure des producteurs.

Nous avons aussi mis en évidence grâce à l'étude statistique que le critère proposé n'est pas une condition nécessaire et suffisante à la stabilité du système, mais **uniquement une condition suffisante**. Ainsi, il existe des cas pour lesquels la limite de stabilité calculée grâce au critère est supérieure à la réalité. Il a été illustré sur un exemple que cette surestimation n'entraîne pas forcément un ralentissement important du système et permet de garantir la stabilité au moins jusqu'au raccordement d'un nouveau producteur équipé d'un régulateur de puissance.

À ce stade, à chaque nouveau raccordement, il conviendrait de revoir les réglages proposés à l'ensemble des producteurs du départ. Ceci risque de poser rapidement problème vu le nombre important de nouveaux raccordements. De plus, pour certains producteurs, par exemple les producteurs raccordés en basse tension, le raccordement ne donne pas systématiquement lieu à une étude préalable. On s'interroge alors sur la possibilité de demander à ces producteurs d'être équipé d'un régulateur de puissance en fonction de la tension et sur leur impact sur la stabilité des départs. Une solution serait de formuler un critère de stabilité valable pour tous les producteurs, quel que soit le réseau auquel ils se raccordent. Le chapitre 5 se propose d'étudier cette question.

## Chapitre 5

# Généralisation des critères de stabilité à différents réseaux

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	144
5.2	Généralisation du critère explicite pour un producteur . . . . .	145
5.3	Généralisation du critère implicite pour $N$ producteurs . . . . .	149
5.4	Discussions . . . . .	158
5.5	Conclusion . . . . .	167

---

### Résumé

Nous présentons dans ce chapitre une méthodologie permettant d'obtenir un critère général de stabilité. Ce critère s'applique pour l'étude d'un départ quelconque raccordant des producteurs quelconques dont les régulateurs sont identiques et les filtres de mesure sont de type passe-bas du premier ordre à temps discret. L'objectif est de proposer un paramétrage unique des filtres de mesure assurant la stabilité de tous les producteurs, qui pourrait être intégré aux documentations techniques de référence (ou codes de réseau) des gestionnaires.

Le raisonnement permettant d'obtenir un tel critère se décompose en deux parties :

- Tout d'abord, une condition suffisante de stabilité d'un départ quelconque raccordant un unique producteur est formulée. Nous proposons de majorer le critère de stabilité explicite afin de proposer un réglage valable pour tous les systèmes.
- Ensuite, la condition suffisante est étendue aux départs raccordant  $N$  producteurs. Grâce à la structure des matrices d'évolution du système, nous montrons que  $N$  producteurs contraignent moins la stabilité s'ils sont dispersés sur le départ que s'il sont regroupés en un producteur situé au pire nœud en matière de stabilité.

Nous terminons ce chapitre en comparant le critère général proposé au contenu des documentations techniques de référence publiées par les gestionnaires.

## 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la stabilité des réseaux a été étudiée dans le cas particulier de producteurs équipés de filtres de mesure passe-bas du premier ordre identiques. Une condition implicite suffisante de stabilité a été formulée. Elle porte sur les valeurs propres des différents modes de fonctionnement du système. Dans le cas d'un départ n'accueillant qu'un seul producteur, une formulation explicite du critère a été établie. Elle permet de calculer les paramètres du filtre le plus rapide assurant la stabilité du système étudié.

Le choix de ces paramètres est effectué au cas par cas lors de l'étude de raccordement. Ceci impose de limiter la participation au réglage de tension aux producteurs pour lesquels une étude de raccordement est faite, excluant ainsi une grande partie de la production basse-tension pour lesquels aucune étude de raccordement n'est aujourd'hui faite. De plus, à chaque nouveau raccordement de production, les paramètres de l'ensemble des régulateurs doivent être revus. L'objectif de ce chapitre est de proposer un critère de stabilité plus général qui permette de s'affranchir de ces limitations.

### 5.1.1 Objectifs de l'étude

Nous souhaitons établir un **critère de stabilité valable pour tous les producteurs, et pour tous les réseaux auxquels ils peuvent se raccorder**. Pour ce faire, nous allons identifier une valeur du paramètre du filtre passe-bas qui garantisse la stabilité du système, quel qu'il soit. S'affranchir d'un réglage au cas par cas est particulièrement intéressant dans le cas de producteurs pour lesquels aucune étude de raccordement n'est faite. C'est aujourd'hui le cas de la majorité de la production raccordée en basse-tension.

Un tel réglage des filtres de mesure permet aussi de ne pas avoir d'inquiétude quant à la stabilité à chaque modification du réseau. Ainsi, le raccordement d'un nouveau producteur ne demandera ni étude supplémentaire ni ajustement des paramètres des régulateurs des producteurs déjà raccordés.

Un tel critère pourra alors être ajouté aux documentations techniques de référence (ou codes de réseau) des gestionnaires de réseaux distribution.

### 5.1.2 Méthode proposée

Nous avons montré dans le chapitre précédent que l'on peut choisir la constante de temps des filtres de mesure des producteurs afin d'assurer la stabilité du système. Le critère de stabilité au cas par cas permet, pour chaque système étudié, de calculer numériquement la valeur limite du paramètre du filtre de mesure, qui est la plus petite valeur qui garantit la stabilité. Celle-ci dépend des paramètres du système de façon explicite pour un départ accueillant un unique producteur et de façon implicite dans un cas à plusieurs producteurs.

Dans ce chapitre, nous allons montrer, dans les deux cas, qu'il est possible de majorer les **constantes de temps du filtre passe-bas**, quel que soit le système étudié. De cette manière,

il sera possible d'assurer la stabilité de tous les systèmes en choisissant un filtre de mesure dont la constante de temps est plus grande que le majorant. Pour obtenir l'expression de ce majorant, nous allons distinguer deux approches selon l'expression – explicite ou non – de la condition suffisante de stabilité établie précédemment.

Penchons nous tout d'abord sur le cas des départs accueillant un seul producteur.

## 5.2 Généralisation du critère explicite pour un producteur

### 5.2.1 Méthode proposée

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la stabilité d'un départ quelconque accueillant un seul producteur équipé d'un régulateur de puissance dont le filtre de mesure est un filtre passe-bas du premier ordre de constante de temps discrète  $a$  et dont la loi de commande  $Q(U)$  est affine par morceaux avec cinq zones de fonctionnement comme représenté figure 5.1.

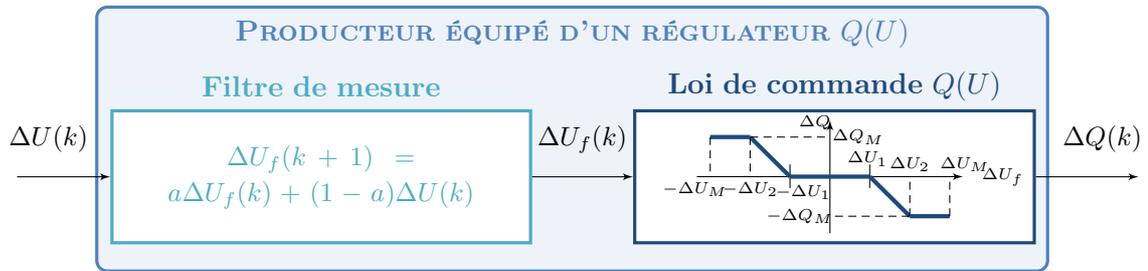


Figure 5.1 – Modèle des régulateurs de puissance réactive en fonction de la tension étudiés

Nous avons examiné l'existence de cycles simples pour ce type de systèmes, ce qui nous a permis de formuler explicitement une condition suffisante de stabilité.

$$\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} = a_{lim} < a \Rightarrow \text{Système stable} \quad (5.1)$$

La valeur minimale du paramètre  $a$  permettant d'assurer la stabilité ( $a_{lim}$ ) est calculée en fonction des paramètres de chaque cas d'étude. Le but est maintenant de proposer une **majoration de la valeur de  $a_{lim}$  afin de garantir la stabilité de toutes les configurations possibles du système**. Pour y parvenir, nous proposons de **borner les paramètres du système**. Ensuite, grâce à l'expression explicite du critère de stabilité nous pourrions remonter à une majoration de  $a_{lim}$  valable quel que soit le système.

### 5.2.2 Étude des variations du critère en fonction des paramètres du système

Les paramètres du système qui interviennent dans l'expression du critère de la stabilité sont le **gain du réseau  $K_{PQ}$**  et la **penne de la loi de commande  $Q(U)$**  notée  $\sigma$ . Ils apparaissent sous la forme du produit de ces deux paramètres. On pose donc  $X = -K_{PQ}\sigma$  ce qui nous permet

d'écrire :

$$a_{lim} = \frac{-1 + X}{1 + X} \quad (5.2)$$

Afin de majorer  $a_{lim}$ , nous étudions les variations de  $a_{lim}$  en fonction des paramètres  $K_{PQ}$  et  $\sigma$  du système. Pour ce faire, on rappelle que le calcul du gain du réseau a été détaillé au chapitre 2. Nous avons montré que la valeur du gain peut être approchée par :

$$K_{PQ} \sim \frac{X_l \cdot L}{U_0} + \frac{U_0}{S_{CC}} \quad (5.3)$$

où  $X_l$  représente l'inductance linéique de la branche reliant le poste source au le producteur,  $L$  la longueur de ces branches,  $S_{CC}$  la puissance apparente de court-circuit en sortie du poste source et  $U_0$  la tension de base sur le réseau. Nous souhaitons borner le gain du réseau  $K_{PQ}$ . Pour cela, on peut tout d'abord remarquer que ce gain est positif. De plus, on note que  $K_{PQ}$  augmente avec la distance entre le producteur et le poste source et diminue avec la puissance de court-circuit du réseau amont. Or, en France, les branches des réseaux de distribution mesurent au plus quelques dizaines de kilomètres. La puissance de court-circuit est au moins de l'ordre d'une centaine de MVA en aval du poste source, c'est-à-dire côté réseau moyenne tension. Ainsi, on peut borner la valeur du gain du réseau en fonction de la longueur maximale des lignes ( $\bar{L}$ ) et de la puissance de court-circuit minimale ( $\underline{S_{CC}}$ ). Pour borner  $K_{PQ}$ , nous prendrons des valeurs moyennes d'inductance linéique des branches moyenne tension ( $X_l^{(moy)}$ ) et du niveau de tension ( $U_0^{(moy)}$ ).

$$K_{PQ} \in [0, \bar{K}] \quad \text{avec} \quad \bar{K} = \frac{X_l^{(moy)} \cdot \bar{L}}{U_0^{(moy)}} + \frac{U_0^{(moy)}}{\underline{S_{CC}}} \quad (5.4)$$

Ayant borné  $K_{PQ}$ , on s'intéresse maintenant à  $\sigma$ . On rappelle que  $\sigma$  représente la pente de la loi de commande la plus contraignante en matière de stabilité, c'est-à-dire la zone linéaire ayant la plus grande pente en valeur absolue.

$$\sigma = \frac{-\Delta Q_M}{\Delta U_2 - \Delta U_1} \quad (5.5)$$

On souhaite borner  $\sigma$ . Pour y parvenir, on propose de remarquer que  $\sigma$  est négatif et que, plus  $\Delta Q_M$  est important, plus le module  $\sigma$  augmente. Or, la puissance réactive maximale fournie ou absorbée par un producteur est généralement limitée à une fraction de sa puissance active installée par le législateur. En France, ce ratio est limité légalement à 0,4 (article 10 de l'arrêté du 23 avril 2008 [12]) et peut éventuellement atteindre 0,5 dans certains cas [38]. De plus, la puissance maximale d'un producteur raccordé au réseau de distribution est elle aussi réglementée. Par exemple, en France, elle est limitée à 12 MW par l'article 4 de l'arrêté du 23 avril 2008 [12]. On peut donc borner la valeur de la pente de la loi de commande du producteur en fonction de la puissance réactive maximale ( $\overline{\Delta Q_M}$ ) admissible sur les réseaux étudiés. Pour minorer  $\sigma$ , nous

prendrons la largeur de la zone linéaire ( $\Delta U_2 - \Delta U_1$ ) présentée dans le tableau 1.5.

$$\sigma \in [\underline{\sigma}, 0] \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = \frac{-\overline{\Delta Q_M}}{\Delta U_2 - \Delta U_1} \quad (5.6)$$

À partir des encadrements de  $K_{PQ}$  et de  $\sigma$ , on en déduit que  $X = -K_{PQ} \cdot \sigma$  est borné.

$$X \in [0, \overline{X}] \quad \text{avec} \quad \overline{X} = -\overline{K} \cdot \underline{\sigma} \quad (5.7)$$

La plage des variations de  $X$  étant définie, nous nous intéressons maintenant à la majoration de  $\overline{a_{lim}}$ . Pour ce faire, nous étudions les variations de la fonction  $f$  telle que  $a_{lim} = f(X)$ .

$$\begin{aligned} f &: [0, \overline{X}] \rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \frac{-1+X}{1+X} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le tableau 5.1 représente les variations de signe de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et les variations de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition.

$X$	0	$\overline{X}$
$f'(X) = \frac{2}{(1+X)^2}$	+	
$f$	-1	$\frac{-1+\overline{X}}{1+\overline{X}}$

Tableau 5.1 – Tableau des variations de la fonction  $f$

Comme on peut le voir sur le tableau 5.1, la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0, \overline{X}]$ . Les valeurs prises par la fonction  $f$  sur son ensemble de définition peuvent donc être encadrées.

$$\forall X \in [0, \overline{X}], \quad -1 = f(0) \leq f(X) \leq f(\overline{X}) = \frac{-1 + \overline{X}}{1 + \overline{X}} \quad (5.9)$$

Finalement, nous avons réussi à majorer les valeurs prises par la fonction  $f$  et donc par la limite de stabilité. On peut alors dire que, quel que soit le système accueillant le producteur équipé d'un régulateur de puissance, on a :

$$a_{lim} < \overline{a_{lim}} = \frac{-1 - \overline{K}\underline{\sigma}}{1 - \overline{K}\underline{\sigma}} \quad (5.10)$$

### 5.2.3 Critère général proposé pour un producteur

Nous venons de montrer qu'il est possible d'exprimer un majorant de la limite de stabilité  $a_{lim}$  d'un départ donné accueillant **un seul producteur** équipé d'un régulateur de puissance. Le majorant est valable quel que soit le système qui respecte les règles de connexion. Pour conclure, en choisissant  $a > \overline{a_{lim}}$ , on peut garantir que  $a > a_{lim}$  et donc que le système est stable quelle que soit la puissance du producteur et quel que soit le réseau auquel il se raccorde.

Grâce à l'expression explicite de  $a_{lim}$  dans le cas de départs raccordant un seul producteur, nous avons pu exprimer explicitement un majorant de  $a_{lim}$  en fonction des caractéristiques du réseau – longueur maximale des lignes, réactance linéique, tension de base, puissance de court-circuit, etc. – et de celles des producteurs les plus puissants – et donc de la plus forte pente en valeur absolue – que l'on peut raccorder au réseau.

$$\overline{a_{lim}} = \frac{-1 - \overline{K}\underline{\sigma}}{1 - \overline{K}\underline{\sigma}} \quad (5.11)$$

Finalement, nous avons montré que, dans le cas de départ accueillant un unique producteur équipé d'un régulateur dont le filtre de mesure est de type passe-bas du premier ordre :

$\overline{a_{lim}} < a \quad \Rightarrow$	Le système est stable pour tout producteur et pour tout point de raccordement	(5.12)
--	--	--------

La valeur numérique de ce critère peut être évaluée en fonction des caractéristiques des réseaux. Celles-ci peuvent varier d'un gestionnaire de réseau à l'autre. Nous proposons d'évaluer numériquement ce nouveau critère de stabilité dans le cas des réseaux exploités par Enedis.

#### 5.2.4 Application numérique dans le cas français

Nous avons exprimé un majorant des limites de stabilité, quel que soit le réseau étudié en fonction des caractéristiques des réseaux (5.11). Afin d'obtenir la valeur numérique de cette limite dans le cas des réseaux gérés par Enedis, le gestionnaire de réseau de distribution devra déterminer les valeurs de  $\overline{K}$  et de  $\underline{\sigma}$ . Les valeurs numériques proposées ont pour objectif d'illustrer la démarche plus que de servir de référence pour les gestionnaires français. Avant d'être intégrée aux documentations techniques de référence, la valeur numérique devra être calculée par le gestionnaire avec des données adaptées aux réseaux.

Nous commençons par la valeur maximale du gain du réseau qui est définie par (5.4). Pour pouvoir l'évaluer, on propose de se pencher sur les caractéristiques des réseaux moyenne tension. La tension de référence sur ces départs est de l'ordre de 20 kV. Les lignes mesurent jusqu'à une trentaine de kilomètres et ont une réactance linéique de quelques dixièmes d'Ohm par kilomètre<sup>1</sup> [109]. Par ailleurs, la puissance de court-circuit en aval du poste source est généralement supérieure à une centaine de MVA. Grâce à ces ordres de grandeur, on peut évaluer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{L} = 30 \text{ km} \\ \frac{S_{CC}}{X_l^{(moy)}} = 150 \text{ MVA} \\ X_l^{(moy)} = 0,2 \Omega/\text{km} \\ U_0^{(moy)} = 20 \text{ kV} \end{array} \right. \Rightarrow K_{PQ} \leq \overline{K} \lesssim 4 \times 10^{-4} \text{ V/VAr} \quad (5.13)$$

De même, on cherche à évaluer  $\underline{\sigma}$ . Pour ceci, il convient de noter qu'en France la puissance

1. La réactance linéique dépend de chaque branche. Pour les liaisons aériennes, elle est plutôt de l'ordre de 0,35 et pour les liaisons souterraines de l'ordre de 0,1. Ici, une valeur moyenne a été choisie.

des producteurs raccordés en moyenne tension est limitée à 12 MW [12]. En pratique, de tels producteurs seront raccordés en départ dédié. Les départs mixtes accueillent des producteurs jusqu'à quelques mégawatts. De plus, il peut être demandé à un producteur raccordé au réseau moyenne tension français de fournir ou d'absorber une puissance réactive jusqu'à 40 % de la puissance active qu'il injecte au réseau [12]. Pour finir, dans la loi de commande choisie par Enedis [38], la largeur de la zone de fonctionnement linéaire 2 ou 4 est de 250 V. Finalement, on peut dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta Q_M} = 0,4 \cdot \overline{P} \\ \overline{P} = 10 \text{ MW} \\ \Delta U_2 - \Delta U_1 = 250 \text{ V} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\sigma} \lesssim -16000 \text{ VAR/V} \leq \sigma \quad (5.14)$$

À partir de ces valeurs numériques, nous pouvons déduire une valeur du paramètre  $\overline{a_{lim}}$  dans le cas des réseaux moyenne tension français.

$$\boxed{a_{lim} \leq \overline{a_{lim}} \lesssim 0,75} \quad (5.15)$$

Ainsi, nous avons montré que pour des **réseaux vérifiant la configuration proposée, si tous les producteurs équipés de régulateurs  $Q(U)$  ont un paramètre du filtre de mesure passe-bas du premier ordre supérieur à 0,75, la stabilité du système est garantie quel que soit le point de raccordement du producteur** sur le réseau moyenne tension. Attention, le critère n'est valable que dans le cas de départ raccordant **un seul producteur**. Si le départ auquel se raccorde le producteur accueille déjà un producteur équipé d'un régulateur  $Q(U)$ , le réglage proposé risque de ne pas être suffisant pour assurer la stabilité du système. Afin de pouvoir envisager d'inscrire ce type de réglages dans les documentations techniques de référence des gestionnaires de réseaux, il est important d'étudier la validité de ce critère dans le cas de départs accueillant plusieurs producteurs.

### 5.3 Généralisation du critère implicite pour $N$ producteurs

#### 5.3.1 Méthode proposée

Dans le chapitre précédent, nous avons établi une condition suffisante implicite de stabilité d'un départ accueillant  $N$  producteurs. Celle-ci est fondée sur l'étude des  $N$  valeurs propres des matrices dynamiques pour chaque mode de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ .

$$\begin{array}{l} \text{Toutes les valeurs propres des matrices} \\ \text{dynamiques de tous les modes de} \\ \text{fonctionnement ont un module strictement} \\ \text{inférieur à 1} \end{array} \Rightarrow \text{Stabilité globale à } N \text{ producteurs} \quad (5.16)$$

Nous rappelons que ce critère de stabilité est valable uniquement si les  $N$  producteurs sont équipés de régulateurs de puissance identiques et synchronisés et dont le filtre de mesure est un

filtre passe-bas du premier ordre.

Dans ce chapitre, nous souhaitons exprimer une condition suffisante de stabilité qui soit valable quel que soit le système étudié. Dans la partie précédente, nous avons exprimé une telle condition de stabilité dans le cas des départs raccordant un seul producteur (5.12). Pour exprimer  $\overline{a_{lim}}$ , nous nous étions appuyé sur l'expression explicite du critère de stabilité en fonction des paramètres du réseau.

Cependant, dans le cas d'un départ raccordant  $N$  producteurs, le critère proposé n'est pas explicite. En effet, l'expression formelle des valeurs propres d'une matrice carrée de dimension  $N \times N$  quelconque n'est pas explicite. Nous devons donc proposer une autre méthode pour majorer le module des valeurs propres des matrices. La méthode proposée ici est construite à partir de l'étude de la structure des matrices d'évolution du système.

### 5.3.2 Majoration des modules des valeurs propres des matrices d'évolution du système

#### Expression des matrices d'évolution $\mathcal{A}^{(i)}$

On rappelle que pour une matrice  $M$ , le rayon spectral de  $M$ , noté  $\rho(M)$ , correspond au rayon de la plus petite boule fermée contenant toutes les valeurs propres de  $M$ .

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{spec}(M)} |\lambda| \quad (5.17)$$

Afin de garantir la stabilité de tous les départs, quels que soient le nombre de producteurs raccordés et leur nœud de raccordement, nous allons exprimer un majorant des rayons spectraux des matrices d'évolution du système. Pour ce faire, nous proposons d'exploiter la structure particulière des matrices d'évolution.

On rappelle l'expression de la matrice d'évolution dans le mode  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  (4.52).

$$\mathcal{A}^{(i)} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}\mathbf{C} \quad (5.18)$$

Dans le cas d'un départ accueillant  $N$  producteurs tous équipés du même régulateur dont le filtre de mesure est un filtre passe-bas du premier ordre et dont la loi de commande  $Q(U)$  (représentée figure 4.1) est affine par morceaux avec cinq zones de fonctionnement, nous remarquons que :

- la matrice  $\mathbf{K}_{PQ}$  représentant le départ est une matrice carrée de dimension  $N \times N$  ;
- la représentation d'état du filtre de mesure agrégé combine les représentations d'état des  $N$  filtres de mesure passe-bas du premier ordre de chaque producteur.

$$\mathbf{A} = a \cdot \mathbb{I}_N \quad \mathbf{B} = (1 - a) \cdot \mathbb{I}_N \quad \mathbf{C} = \mathbb{I}_N \quad (5.19)$$

où  $\mathbb{I}_N$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$  ;

- la loi de commande agrégée des  $N$  producteurs est elle aussi affine par morceaux avec  $5^N$  zones de fonctionnement. Dans chaque zone  $i$ , les variations de la puissance réactive

du  $j$ -ème producteur ( $\Delta Q_j$ ) sont calculées en fonction des variations de sa tension filtrée ( $\Delta U_{f_j}$ ) grâce à une relation affine de pente  $\sigma_j^{(i)}$  et d'ordonnée à l'origine  $\gamma_j^{(i)}$  qui sont définis en fonction du vecteur des tensions filtrées comme indiqué (3.2). Le vecteur des variations de puissance réactive des  $N$  producteurs ( $\Delta \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^N$ ) peut s'exprimer à partir du vecteur des tensions filtrées des  $N$  producteurs ( $\Delta \mathbf{U}_f \in \mathbb{R}^N$ ).

$$\Delta \mathbf{Q}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_N^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^{(i)}} \Delta \mathbf{U}_f(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1^{(i)} \\ \vdots \\ \gamma_N^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^{(i)}} \quad \text{avec } i : \Delta \mathbf{U}_f(k) \in \mathcal{I}_i \quad (5.20)$$

On retrouve la matrice  $\mathbf{G}^{(i)}$  qui dans ce cas particulier est diagonale de dimension  $N \times N$  et que l'on notera  $\mathbf{G}^{(i)} = \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_N^{(i)})$ .

Finalement, la matrice d'évolution dans la zone de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  peut s'écrire à partir des équations (5.18), (5.19) et (5.20).

$$\mathcal{A}'^{(i)} = a \cdot \mathbb{I}_N + (1 - a) \cdot \mathbf{K}_{PQ} \times \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_N^{(i)}) \quad (5.21)$$

### Expression des valeurs propres de $\mathcal{A}'^{(i)}$

Nous souhaitons caractériser les valeurs propres de cette matrice carrée de dimension  $N \times N$ . Pour un mode de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  donné, nous rappelons que  $\text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)})$  représente le spectre de  $\mathcal{A}'^{(i)}$  soit l'ensemble des ses valeurs propres. Considérons  $\lambda \in \text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)})$ , il convient de noter que nous ne savons pas si la matrice  $\mathcal{A}'^{(i)}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Pour l'instant, nous considérons le cas général, soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Nous pouvons écrire que :

$$\exists \mathbf{X} \in \mathbb{C}^n : \quad \mathcal{A}'^{(i)} \times \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad (5.22)$$

Or nous pouvons exprimer la matrice  $\mathcal{A}'^{(i)}$  en fonction des caractéristiques du système d'après (5.21).

$$\begin{aligned} (5.22) &\Leftrightarrow \left( a \times \mathbb{I}_N + (1 - a) \times \mathbf{K}_{PQ} \times \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_N^{(i)}) \right) \times \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \\ &\Leftrightarrow a \mathbf{X} + (1 - a) \times \mathbf{K}_{PQ} \times \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_N^{(i)}) \times \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nous rappelons que  $a \in [0, 1[$ . On peut donc écrire que :

$$(5.22) \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{K}_{PQ} \times \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_N^{(i)})}_{\mathbf{M}^{(i)}} \times \mathbf{X} = \underbrace{\frac{\lambda - a}{1 - a}}_{\mu} \mathbf{X} \quad (5.24)$$

On pose  $\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{K}_{PQ} \cdot \text{diag}(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_N^{(i)})$ . On peut remarquer que l'équation (5.24) revient à dire que  $\frac{\lambda-a}{1-a}$  est une valeur propre de  $\mathbf{M}^{(i)}$ . On pose  $\mu$  tel que :

$$\mu = \frac{\lambda - a}{1 - a} \in \text{spec}(\mathbf{M}^{(i)}) \quad (5.25)$$

Ainsi, nous avons montré que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathcal{A}'^{(i)}$  alors  $\mu$  est une valeur propre de  $\mathbf{M}^{(i)}$ . Nous proposons alors de caractériser le spectre de  $\mathcal{A}'^{(i)}$  en nous intéressant à celui de  $\mathbf{M}^{(i)}$ .

### Propriétés liées à la structure de $\mathbf{M}^{(i)}$

Avant toute chose, nous rappelons une définition utile par la suite.

**Définition 1.** Une matrice  $\mathbf{M}$  de dimension  $n \times p$  est dite **matrice à coefficients positifs ou nuls** lorsque tous ses éléments sont des réels positifs ou nuls. On écrira alors  $\mathbf{M} \geq 0$ .

On s'intéresse à la matrice de gains du réseau  $\mathbf{K}_{PQ} = (k_{gh})_{1 \leq g, h \leq N}$ . Elle représente l'impact sur l'amplitude de la tension des variations de la puissance injectée par les différents régulateurs. Dans le cas étudié, les  $N$  producteurs sont équipés d'un régulateur de puissance réactive. D'après (2.18), on peut dans ce cas exprimer la matrice des gains du réseau comme suit :

$$\mathbf{K}_{PQ} \sim \frac{\mathcal{X}}{U_0} \quad (5.26)$$

On rappelle que  $U_0$  représente l'amplitude moyenne de la tension sur le réseau et que  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est la matrice telle que le terme  $x_{gh}$  pour tout  $1 \leq g, h \leq N$  est la somme des inductances des branches qui se trouvent en amont des nœuds de raccordement des producteurs  $g$  et  $h$  comme établi partie 2.3.2.

La figure 5.2 représente un exemple de départ accueillant deux producteurs notés  $g$  et  $h$  et indique les branches utilisées pour calculer les inductances  $x_{gg}$ ,  $x_{hh}$ ,  $x_{gh}$  et  $x_{hg}$  et donc les termes de  $k_{gg}$ ,  $k_{hh}$ ,  $k_{gh}$  et  $k_{hg}$  de la matrice  $\mathbf{K}_{PQ}$ .

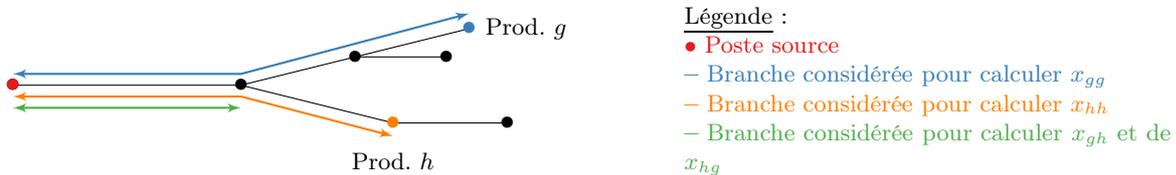


Figure 5.2 – Schéma illustrant l'inductance utilisée pour chaque terme de la matrice  $\mathbf{K}_{PQ}$

Le modèle physique du réseau, exprimé en fonction d'une somme d'inductance et de l'amplitude de la tension ( $U_0$ ), nous permet de remarquer que tous les termes de la matrice  $\mathbf{K}_{PQ}$  sont positifs ou nuls.

$$\forall 1 \leq g, h \leq N \quad k_{gh} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}_{PQ} \geq 0 \quad (5.27)$$

Il convient de noter que s'il existe  $(g, h)$  tel que  $k_{gh} = 0$ , alors les producteurs  $g$  et  $h$  n'ont aucune branche en commun. Ceci n'est pas possible ici car les producteurs sont raccordés à un même départ.

Revenons maintenant à la matrice  $\mathbf{M}^{(i)} = (m_{gh}^{(i)})_{1 \leq g, h \leq N}$ .

$$\mathbf{M}^{(i)} = \begin{bmatrix} k_{11}\sigma_1^{(i)} & \dots & k_{1N}\sigma_N^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}\sigma_1^{(i)} & \dots & k_{NN}\sigma_N^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Nous avons déjà discuté du signe des coefficients  $k_{gh}$ . Nous allons maintenant nous intéresser au signe des coefficients  $\sigma_h^{(i)}$  correspondant à la pente de la loi de commande du  $h$ -ème producteur dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement. Par exemple, pour la loi de commande  $Q(U)$  que nous avons étudiée précédemment (figure 1.7), nous pouvons remarquer que la pente varie en fonction de la zone de fonctionnement, mais qu'elle est toujours négative ou nulle. Cette constatation peut se généraliser. En effet, toute injection de puissance (active ou réactive) a pour conséquence une élévation de la tension. Or, l'objectif est de demander aux producteurs de s'opposer aux variations de la tension afin de participer à son maintien autour de la valeur de consigne. Ainsi, il est possible de jouer sur la valeur de la pente pour régler la « sensibilité » de la consigne de puissance du producteur aux variations de tension, mais cette dernière sera toujours négative dans le cadre de producteurs participant au réglage de tension.

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \forall 1 \leq h \leq N, \quad \sigma_h^{(i)} \leq 0 \quad (5.29)$$

Finalement, ceci nous permet de conclure que tous les coefficients de la matrice  $\mathbf{M}^{(i)}$  sont négatifs.

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \forall 1 \leq g, h \leq N, \quad m_{gh}^{(i)} = k_{gh} \cdot \sigma_h^{(i)} \leq 0 \quad (5.30)$$

On pose  $\mathbf{P}^{(i)} = (p_{gh}^{(i)})_{1 \leq g, h \leq N}$  la matrice carrée telle que :

$$\forall 1 \leq g, h \leq N, \quad p_{gh}^{(i)} = -m_{gh}^{(i)} \geq 0 \quad (5.31)$$

Ainsi, on peut dire que  $\mathbf{P}^{(i)}$  est une matrice à coefficients positifs ou nuls. Nous proposons d'en étudier le spectre.

### Spectre d'une matrice à coefficients positifs

Le théorème de Perron-Frobenius s'applique pour des matrices à coefficients strictement positifs [132]. Il permet, notamment, de borner le spectre de ce type de matrices. Nous proposons de montrer ici que cette propriété reste vraie pour des matrices à coefficients positifs ou nuls.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice réelle carrée telle que  $\mathbf{M} \geq 0$ . On définit

**Propriété 1.** Soit  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice réelle carrée à coefficients positifs. Le rayon spectral  $\rho(\mathbf{M})$  de  $\mathbf{M}$  est majoré par le maximum des sommes des éléments de chaque ligne.

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \right) \quad (5.32)$$

l'ensemble  $\mathcal{S}$  comme suit :

$$\mathcal{S} = \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^+ \mid \exists \mathbf{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} 0 \leq v_i \leq 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i=1}^n v_i = 1 \\ 0 \leq \mathbf{M}\mathbf{V} - \gamma\mathbf{V} \end{cases} \right\} \quad (5.33)$$

1. Montrons que  $\mathcal{S}$  n'est pas un ensemble vide

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $\mathbf{M}$ . Alors, il existe un vecteur  $\mathbf{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$  différent du vecteur nul tel que :

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (5.34)$$

Ceci revient à dire que :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (5.35)$$

On s'intéresse au module de cette égalité scalaire. On a :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \left| \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right| = |\lambda x_i| \quad (5.36)$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, on sait que  $\left| \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \cdot |x_j|$ , d'où :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad |\lambda| \cdot |x_i| \leq \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \cdot |x_j| \quad (5.37)$$

On rappelle que la matrice  $\mathbf{M}$  est à coefficients positifs ou nuls. Donc, pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , on a  $|m_{ij}| = m_{ij}$ . De plus, pour tout  $1 \leq i \leq n$  on pose  $y_i = |x_i|$  et  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur dont la  $i$ -ème composante est  $y_i$ . On peut alors écrire que :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq \sum_{j=1}^n (m_{ij} \cdot y_j) - |\lambda| \cdot y_i \Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{M}\mathbf{Y} - |\lambda|\mathbf{Y} \quad (5.38)$$

On souhaite montrer que  $|\lambda|$  appartient  $\mathcal{S}$ . Pour ce faire, on remarque que, comme  $\mathbf{Y}$  n'est pas

le vecteur nul, on peut dire que :

$$\exists 1 \leq k \leq n : y_k \neq 0 \quad (5.39)$$

De plus, par construction, on sait que  $y_i \geq 0$  quel que soit  $i$ . On en déduit donc que  $\sum_{j=1}^n y_j > 0$ . On peut alors définir le vecteur  $\mathbf{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{Y}}{\sum_{j=1}^n y_j} \quad (5.40)$$

Ce vecteur vérifie :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq n \quad v_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} &\Rightarrow 0 \leq v_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n v_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} &\Rightarrow \sum_{i=1}^n v_i = 1 \\ 0 \leq \mathbf{M}\mathbf{Y} - |\lambda|\mathbf{Y} &\Rightarrow 0 \leq \mathbf{M}\mathbf{V} - |\lambda|\mathbf{V} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Finalement, on remarque que  $|\lambda|$  appartient à  $\mathcal{S}$ . On a donc montré que :

$$\lambda \in \text{spec}(\mathbf{M}) \Rightarrow \gamma = |\lambda| \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \neq \emptyset \quad (5.42)$$

On en conclut que l'ensemble  $\mathcal{S}$  n'est pas vide.

2. Montrons que  $\mathcal{S}$  est majoré

Ayant montré que  $\mathcal{S}$  contient au moins un élément, nous pouvons considérer  $\gamma \in \mathcal{S}$ . Alors, on sait qu'il existe  $\mathbf{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  qui vérifie :

$$\begin{cases} 0 \leq v_i \leq 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i=1}^n v_i = 1 \\ 0 \leq \mathbf{M}\mathbf{V} - \gamma\mathbf{V} \end{cases} \quad (5.43)$$

La dernière ligne nous permet d'écrire :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \gamma \cdot v_i \leq \sum_{j=1}^n (m_{ij}v_j) \leq \left( \max_{1 \leq j \leq n} (v_j) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \right) \quad (5.44)$$

On sait alors qu'il existe  $1 \leq i_0 \leq n$  tel que  $v_{i_0} = \max_{1 \leq j \leq n} (v_j)$  et  $v_{i_0} > 0$  car tous les  $v_j$  sont positifs ou nuls et leur somme vaut un. On peut donc écrire :

$$\gamma \leq \sum_{j=1}^n m_{i_0 j} \quad (5.45)$$

On a donc montré que tout élément de  $\mathcal{S}$  est majoré par la somme des éléments de la ligne  $i_0$  de la matrice  $\mathbf{M}$  et donc a fortiori par le maximum des sommes des éléments de chaque ligne.

Finalement, on en conclut que l'ensemble  $\mathcal{S}$  est borné.

$$\gamma \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \right) \quad (5.46)$$

### 3. Conclusion de la démonstration

Finalement, nous avons montré que  $\mathcal{S}$  est un ensemble non vide et majoré par le maximum des sommes des éléments de chaque ligne de la matrice  $\mathbf{M}$ . De plus, dans la première partie de la preuve, nous avons montré que pour tout  $\lambda$  valeur propre de  $\mathbf{M}$ , alors  $|\lambda|$  appartient à  $\mathcal{S}$  (5.42). Donc :

$$\mathbf{M} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \text{spec}(\mathbf{M}), \quad \gamma = |\lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \right) \quad (5.47)$$

Si l'on note  $\rho(\mathbf{M})$  le rayon spectral de  $\mathbf{M}$ , on peut alors dire que :

$$\mathbf{M} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{M}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \right) \quad (5.48)$$

□

On rappelle que nous avons montré que  $\mathbf{P}^{(i)}$  est une matrice à coefficients positifs ou nuls. Ainsi, grâce à la propriété 1, on peut donc en déduire que :

$$\forall \nu \in \text{spec}(\mathbf{P}^{(i)}), \quad |\nu| \leq \max_{1 \leq g \leq N} \left( \sum_{h=1}^N -k_{gh} \sigma_h^{(i)} \right) \quad (5.49)$$

Finalement, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \quad \rho(\mathbf{P}^{(i)}) \leq \max_{1 \leq g \leq N} \left( \sum_{h=1}^N -k_{gh} \sigma_h^{(i)} \right)} \quad (5.50)$$

### Conclusion

Ayant réussi à majorer le rayon spectral de  $\mathbf{P}^{(i)}$ , nous allons maintenant revenir à celui de  $\mathbf{M}^{(i)}$ . Pour ce faire, il convient de remarquer que :

$$\forall \nu \in \text{spec}(\mathbf{P}^{(i)}), \quad \mu = -\nu \in \text{spec}(\mathbf{M}^{(i)}) \quad (5.51)$$

Les équations (5.50) et (5.51) nous permettent de dire que :

$$\forall \mu \in \text{spec}(\mathbf{M}^{(i)}), \quad |\mu| \leq \max_{1 \leq g \leq N} \left( \sum_{h=1}^N -k_{gh} \sigma_h^{(i)} \right) \quad (5.52)$$

On rappelle que l'on a montré précédemment (5.24) que :

$$\mu \in \text{spec}(\mathbf{M}^{(i)}) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a + (1 - a)\mu \in \text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)}) \quad (5.53)$$

Or, grâce à l'inégalité triangulaire et en se souvenant que  $0 \leq a < 1$ , on peut montrer que :

$$|\lambda| = |a + (1 - a)\mu| \leq a + (1 - a)|\mu| \quad (5.54)$$

Finalement, en étudiant les propriétés des matrices d'évolution  $\mathcal{A}'^{(i)}$  du système dans chaque zone de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ , nous avons montré que le module des valeurs propres de ces matrices d'évolution peut être majoré par :

$$\lambda \in \text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)}) \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq a + (1 - a) \max_{1 \leq g \leq N} \left( \sum_{h=1}^N -k_{gh} \sigma_h^{(i)} \right) \quad (5.55)$$

### 5.3.3 Critère général proposé pour $N$ producteurs

Nous rappelons que l'objectif de cette étude est de proposer un **critère de stabilité valable pour un départ quelconque accueillant  $N$  producteurs** quelconques équipés de régulateurs identiques. Dans la partie 5.3.2, nous avons exprimé un majorant du module des valeurs propres de la  $i$ -ème zone de fonctionnement. Ce majorant dépend des paramètres du système tels que la longueur des lignes, leur inductance, la puissance installée des producteurs, etc.

Afin de proposer un critère valable quels que soient le départ et le producteur, nous allons exprimer un majorant du module des valeurs propres plus large que celui obtenu par (5.55) et valable dans tous les cas. Pour y parvenir, nous rappelons que, d'après l'expression physique approchée de la matrice des gains du départ (partie 2.3.2), nous pouvons dire que pour  $1 \leq g, h \leq N$ ,  $k_{gh} \leq k_{gg}$ . En effet, le gain  $k_{gh}$  est proportionnel à la longueur des branches en amont des nœuds de raccordement des producteurs  $g$  et  $h$  qui est nécessairement inférieure ou égale à la longueur des branches en amont du nœud de raccordement de l'un des deux producteurs (figure 5.2).

À partir de ce constat, nous proposons d'écrire : Nous cherchons à interpréter physiquement

$$\underbrace{\max_{1 \leq g \leq N} \left( \sum_{h=1}^N -k_{gh} \sigma_h^{(i)} \right)}_{N \text{ prod. répartis sur le départ}} \leq \underbrace{\max_{1 \leq g \leq N} \left( k_{gg} \sum_{h=1}^N -\sigma_h^{(i)} \right)}_{\text{Les } N \text{ prod. en un noeud}} = \underbrace{\left( \max_{1 \leq g \leq N} k_{gg} \right)}_{\text{Les } N \text{ prod. au pire noeud}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{h=1}^N -\sigma_h^{(i)} \right)}_{(5.56)}$$

ce dernier encadrement. Il revient à dire que  $N$  producteurs répartis sur le départ sont moins contraignants en termes de stabilité qu'un producteur de pouvoir réglant  $\sum_{h=1}^N -\sigma_h^{(i)}$  situé au pire nœud de raccordement, c'est-à-dire au nœud  $n_g$  tel que  $k_{n_g n_g} = \max_{1 \leq g \leq N} k_{gg}$ .

Nous avons discuté, dans le cas de départs raccordant un seul producteur, de la plus grande

Enfin, nous avons montré que la stabilité du système à un producteur dont la puissance réactive réglante est égale à la somme des puissances réactives réglantes et qui se situe au nœud de raccordement ayant le plus grand gain du départ implique celle du système à  $N$  producteurs.

valeur possible du gain du réseau ( $\overline{K}$ ). Cette majoration est toujours valable.

$$k_{n_g n_g} \leq \overline{K} \quad (5.57)$$

La puissance maximale raccordée à un départ moyenne tension ne dépasse pas quelques mégawatts qu'ils soient répartis en  $N$  producteurs ou en un seul. La minoration de  $\sigma$  est donc toujours valable.

$$\underline{\sigma} \leq \sum_{h=1}^N \left( \sigma_h^{(i)} \right) \quad (5.58)$$

Enfin, nous avons montré qu'un départ raccordant  $N$  producteurs équipés de régulateurs identiques est moins contraignant pour la stabilité qu'un départ accueillant un seul producteur de taille  $\underline{\sigma}$  raccordé à un nœud tel que le gain du réseau soit  $\overline{K}$ .

Ainsi, si on **garantit la stabilité du « pire » système à un producteur, on garantit celle de tous les départs accueillant  $N$  producteurs**. Le critère général (5.12) proposé dans la partie précédente est donc suffisant pour assurer la stabilité de tous les départs moyenne tension quel que soit le nombre de régulateurs qui y sont raccordés.

$$a > \overline{a_{lim}} = \frac{-1 - \overline{K}\underline{\sigma}}{1 - \overline{K}\underline{\sigma}} \Rightarrow \text{Le système est stable quels que soient le nombre de producteurs et le départ auquel ils se raccordent} \quad (5.59)$$

La valeur numérique proposée dans le cas des départs moyenne tension français (5.15) est donc toujours valable.

$$\overline{a_{lim}} \lesssim 0,75 \quad (5.60)$$

Nous proposons de comparer cet ordre de grandeur avec les critères exprimés précédemment en étudiant des réseaux réels.

## 5.4 Discussions

### 5.4.1 Sur l'impact du ralentissement des régulateurs

Dans ce chapitre, nous avons établi une condition suffisante de stabilité de tous les départs accueillant un ou plusieurs régulateurs de puissance identiques et composés d'un filtre passe-bas du premier ordre. Nous en avons proposé une évaluation numérique dans le cadre des départs moyenne tension français. Celle-ci nous a permis de proposer une condition portant sur le para-

mètre  $a$  des filtres de mesure des producteurs qui garantit la stabilité.

$$0,75 \leq a \quad \Rightarrow \quad \text{Le système est stable} \quad (5.61)$$

Nous proposons de **comparer cet ordre de grandeur avec la limite de stabilité du cas d'étude réel** à un producteur proposé dans les chapitres précédents (parties 2.4, 3.3 et 4.4). Nous avons établi précédemment que ce système était stable pour tout  $a \geq a_{lim}^{(ex)} = 0,45$ .

Dans ce chapitre, nous avons majoré les valeurs des rapidités limites  $a_{lim}$  pour toutes les valeurs de production possibles et tous les nœuds de raccordement. Nous avons proposé  $\overline{a_{lim}} = 0,75$ . On peut donc remarquer que le cas d'étude réel est bien moins contraignant que le « pire » cas proposé pour le calcul de  $\overline{a_{lim}}$ .

$$a_{lim}^{(ex)} \ll \overline{a_{lim}} \quad (5.62)$$

Dans le chapitre 4, nous avons déjà remarqué que le producteur du cas d'étude réel est très contraignant d'après les règles de raccordement en vigueur en France. En effet, même équipé d'un régulateur  $Q(U)$ , ce producteur provoque une augmentation importante de la tension sur le départ. Avec les normes actuelles, ce producteur est à la limite des producteurs pouvant se raccorder en départ mixte et devrait l'être avec une consigne de ratio entre la puissance réactive et la puissance active – dit consigne de  $\tan(\varphi)$  – le plus bas possible d'après l'arrêté du 23 avril 2008 [12].

Cependant, le « pire » cas pour la stabilité a été évalué sans tenir compte des pratiques de raccordement actuelles mais uniquement des dispositions légales – puissance des producteurs raccordés en moyenne tension, etc. On obtient donc un résultat beaucoup plus restrictif que les cas réalistes ; cependant l'usage actuel est voué à évoluer en accueillant de plus en plus de production de plus en plus loin sur les départs. Imposer dans les codes de réseau ou documentations techniques de référence un filtre de mesure passe-bas du premier ordre avec un paramètre de filtre supérieur à  $\overline{a_{lim}}$  garantit la stabilité même en cas de modification éventuelle des règles de raccordement. Ceci se fait au prix de la rapidité du système.

Pour illustrer ceci, nous traçons la réponse indicielle du filtre de mesure dans le cas d'étude réel pour les deux réglages proposés du paramètre du filtre passe-bas du premier ordre. Nous rappelons que la valeur numérique proposée de  $\overline{a_{lim}}$  l'est à titre indicatif.

Comme on peut voir sur la figure 5.3, pour le cas étudié, la surestimation de la limite de stabilité entraîne un allongement du temps de réponse à 5 % du filtre de mesure. En effet, celui-ci est passé de 4 s pour  $a = a_{lim}^{(ex)} = 0,45$  à 11 s pour  $a = \overline{a_{lim}} = 0,75$ .

Il convient de noter que, même en choisissant le filtre de mesure valable dans tous les cas ( $\overline{a_{lim}}$ ), le temps de réponse du filtre reste autour d'une dizaine de secondes. Ceci semble suffisamment rapide pour assurer l'inexistence d'interaction avec les régleurs en charge et les bancs de capacités installés aux postes sources qui eux répondent au bout d'une minute (hypothèse 7).

En conclusion, le choix de  $a = \overline{a_{lim}}$  permet de garantir la stabilité de tous les systèmes accueillant des producteurs équipés de régulateurs de puissance réactive identiques. Il a été calculé à partir

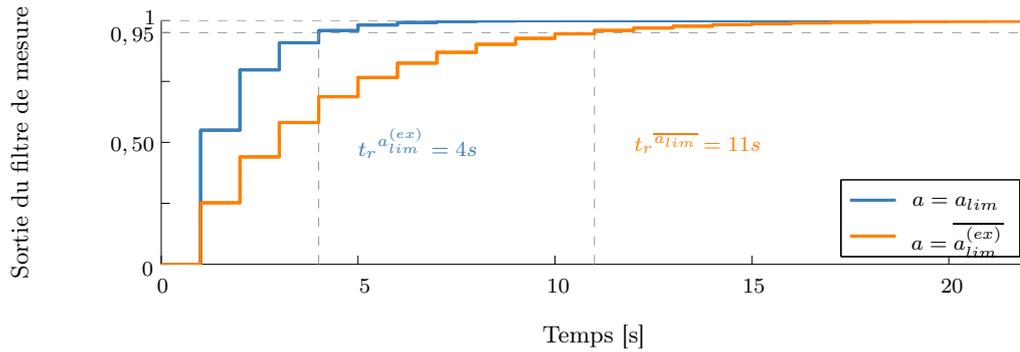


Figure 5.3 – Réponse indicielle du filtre de mesure critique adapté au cas d'étude ( $a_{lim}^{(ex)}$ ) et valable pour tous les départs moyenne tension français ( $\overline{a_{lim}}$ )

d'un **cas très pessimiste** ce qui améliore la stabilité des systèmes au détriment de leur rapidité. Cependant, le temps de réponse du filtre lent ( $\overline{a_{lim}}$ ) est de l'ordre d'une dizaine de secondes ce qui **ne remet pas en cause les hypothèses de découplage temporel** des régulateurs de puissance par rapport aux régulations existantes sur les réseaux.

Il convient de noter enfin que, dans les codes de réseau en vigueur en France, la qualité de tension est mesurée grâce à l'amplitude moyenne de la tension sur dix minutes. Ainsi, le choix d'imposer un temps de réponse minimal de l'ordre de dix secondes ne devrait pas impacter la qualité de la tension sur les réseaux. Afin d'évaluer plus précisément l'impact du ralentissement des régulateurs proposé dans ces travaux, une étude dynamique des profils de tension serait souhaitable avec des profils plus réalistes.

Ayant discuté des départs moyenne tension français, nous proposons maintenant de comparer ces résultats aux normes en vigueur – ou à l'étude – dans d'autres pays européens.

### 5.4.2 Sur le contenu des codes de réseaux

Comme nous l'avons déjà évoqué, il existe des pays dans lesquels il est possible, pour certains producteurs, de participer au réglage de tension par l'intermédiaire d'un régulateur de puissance réactive. Les paramètres de ce régulateur sont spécifiés par les gestionnaires de réseaux de distribution (GRD). Les recommandations générales sont données dans les codes de réseau ou les documentations techniques de référence. Nous allons **comparer les réglementations proposées dans quelques pays européens**.

#### Autriche

Commençons par nous intéresser au cas de l'Autriche. Le régulateur autrichien « E-control » est l'auteur de documentations techniques de référence dont une se focalise sur le fonctionnement des installations de production raccordées aux réseaux de distribution [36]. Dans ce document, il est indiqué que le GRD peut demander aux producteurs raccordés aux réseaux moyenne et basse tension de participer au réglage de tension. Ce réglage peut prendre plusieurs formes :

- un réglage fixe spécifiant une consigne de puissance réactive ou une consigne du facteur de puissance dit «  $\cos(\varphi)$  » ;
- un réglage dynamique de la puissance réactive en fonction de la tension (dit  $Q(U)$ ) ou du  $\cos(\varphi)$  en fonction de la puissance active.

Il est donc possible pour un GRD de demander aux producteurs de s'équiper d'un régulateur de puissance réactive. Il est ajouté dans la documentation technique de référence que la loi de commande de la puissance réactive en fonction de la tension doit être continue et que la pente devra être limitée.

Dans les travaux présentés dans ce mémoire, nous avons illustré l'impact de la pente de la loi de commande (notée  $\sigma$ ) sur la stabilité. Le critère établi (5.12) montre que le système peut être stabilisé en limitant la pente, comme proposé par le code de réseau autrichien. Cependant, un tel choix modifie la participation des producteurs au réglage de tension en régime permanent en réduisant la puissance réactive maximale et minimale ou en réduisant la largeur de la bande morte. Nos travaux ont permis de mettre en évidence qu'il est possible de contraindre la dynamique du réglage de tension sans modifier la caractéristique statique de la loi de commande. Par rapport aux propositions du code de réseau autrichien, ceci permettrait de garantir la stabilité sans limiter la participation des producteurs au réglage de tension.

### Italie

En Italie, le comité de normalisation « CEI » a publié des règles techniques de raccordement des producteurs au réseau de distribution [5] dans lesquelles figure un paragraphe sur la participation au réglage de tension des producteurs décentralisés. Il est prévu que les GRD puissent demander à toute installation dont la puissance est supérieure à 6 kW de respecter une caractéristique  $Q(U)$ . Deux allures de loi de commande  $Q(U)$  type sont proposées dans ce document (figure 5.4).

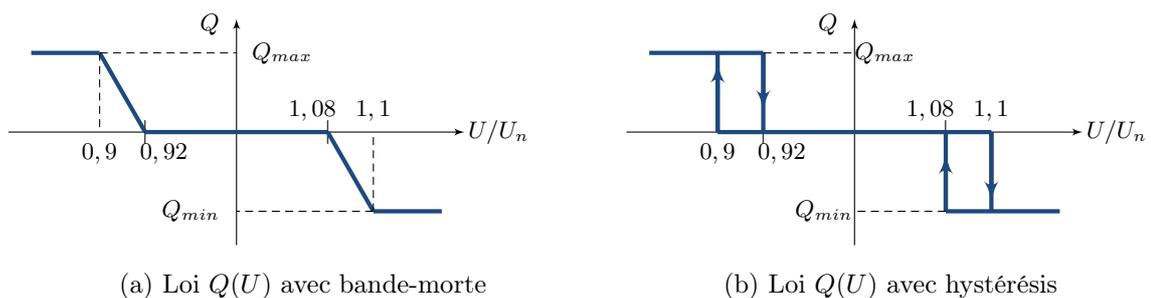


Figure 5.4 – Lois de commande  $Q(U)$  proposées dans la norme italienne [5]

On remarque que l'on retrouve l'allure de la loi de commande étudiée dans ces travaux (figure 5.4a). Le choix des paramètres est donné à titre indicatif et peut être ajusté au cas par cas par le GRD. Cette fois-ci, la norme contient des recommandations concernant la dynamique de ce type de régulateurs. En effet, il est demandé aux producteurs de garantir un temps de réponse à 5 % inférieur à dix secondes. Fixer une limite haute au temps de réponse des régulateurs permet d'assurer le découplage entre les régulateurs de tension des producteurs et les réglages existants

plus lents comme les régulateurs en charge. Ceci apparait aussi comme l'un des points essentiels de nos travaux (hypothèse 7). Par contre, nous ne pouvons pour l'instant pas discuter de la valeur numérique de cette limite haute du temps de réponse. En effet, pour ceci, une étude approfondie de la structure et du fonctionnement des réseaux de distribution italiens devrait être menée car ces derniers sont différents du cas français.

Nos travaux ont permis d'illustrer le besoin d'une limite haute sur le temps de réponse des régulateurs mais aussi d'une limite basse. Cette dernière permet d'éviter les oscillations entre plusieurs zones de fonctionnement des régulateurs des producteurs. Ainsi, imposer uniquement une limite haute du temps de réponse des régulateurs, comme proposé dans la norme italienne [5], semble représenter un risque pour la stabilité des systèmes.

### Allemagne

On s'intéresse maintenant au cas de l'Allemagne en étudiant les directives pour le raccordement des producteurs aux réseaux moyenne tension publiées par l'association allemande pour l'énergie « BDEW » [37]. Ce document prévoit que le GRD puisse demander aux producteurs raccordés au réseau moyenne tension de participer au réglage de tension de façon statique (consigne de puissance réactive ou de facteur de puissance fixe) ou de façon dynamique (loi de commande  $Q(U)$  ou du facteur de puissance en fonction de la puissance active). Le document recommande le choix de lois de commande continues et de pentes limitées. Le temps de réponse à 5 % des régulateurs  $Q(U)$  doit être compris entre dix secondes et une minute.

Comme dit précédemment, le choix d'un temps de réponse maximum, s'il est bien réglé, permet de garantir l'absence d'interaction avec des régulations plus lentes comme les régulateurs en charge. De plus, le choix d'un temps de réponse minimal, s'il est bien réglé, permet de garantir l'absence d'interactions instables entre plusieurs zones de fonctionnement des régulateurs des producteurs. Nos travaux ont permis de conclure qu'il est important d'encadrer le temps de réponse des régulateurs comme le propose la norme allemande.

Nous pouvons remarquer que les valeurs numériques des bornes haute et basse du temps de réponse proposées dans ces travaux sont similaires aux valeurs numériques proposées par [37]. En effet, les réglages existant en France – régulateurs en charge et bancs de condensateurs – répondent au bout d'une minute. Il faut donc s'assurer que les régulateurs répondent en moins d'une minute. De plus, nous avons étudié la réponse indicielle d'un filtre de mesure avec  $\overline{a_{lim}}^{(Fr)}$  (figure 5.3). Le temps de réponse minimal proposé dans ces travaux est donc aussi de l'ordre de dix secondes. Ainsi, le critère que nous proposons pour la France est du même ordre de grandeur que celui proposé pour les réseaux moyenne tension allemands. Cependant, il convient de noter qu'afin de justifier que celui-ci permet d'assurer la stabilité des réseaux aussi en Allemagne, il faudrait étudier la structure et le fonctionnement des réseaux moyenne tension allemands ainsi que le temps d'échantillonnage des filtres de mesure des régulateurs des producteurs.

Pour conclure, le tableau 5.2 résume les différentes recommandations des codes de réseaux étudiés

ici ainsi que les recommandations issues de ces travaux.

	Temps de réponse minimal	Temps de réponse maximal	Remarque
Notre approche	Nécessaire	Nécessaire	
Autriche [36]			Stabilité assurée en jouant sur la pente
Italie [5]		✓	Risque d'instabilité
Allemagne [37]	✓	✓	Vérifier les valeurs choisies

Tableau 5.2 – Résumé de la comparaison de plusieurs codes de réseaux

#### 5.4.3 Sur l'extrapolation à différents filtres de mesure

En France, la documentation technique de référence rédigée par Enedis propose aux producteurs raccordés à un départ moyenne tension mixte de participer au réglage de tension. Cette participation peut se faire sous la forme d'un régulateur local de puissance réactive en fonction de la tension [38]. Comme nous l'avons déjà noté (partie 4.6.3), ce document propose aux producteurs une loi de commande  $Q(U)$  telle que celle étudiée dans ces travaux (figure 1.7). Cependant, le filtre de mesure choisit par Enedis n'est pas un filtre passe-bas du premier ordre, mais un **filtre à moyenne glissante sur dix échantillons avec un temps d'échantillonnage d'une seconde**.

Dans le chapitre précédent, nous avons discuté de la validité du critère proposé pour un filtre du type moyenne glissante. L'étude d'un exemple, à un producteur, avait illustré que la stabilité locale du système avec ce type de filtres impliquerait la stabilité globale. Nous avons donc envisagé d'**étendre le critère proposé** pour les filtres passe-bas du premier ordre aux filtres du type moyenne glissante.

Ici, nous allons supposer que ceci est vrai et donc que l'étude des valeurs propres des matrices d'évolution du système dans chacun des modes de fonctionnement permet d'évaluer la stabilité de ce dernier même en présence de filtres de type moyenne glissante. À partir de ce postulat, nous proposons d'évaluer empiriquement, sur un exemple de système, les « pires » valeurs propres d'un **système accueillant un producteur** équipé d'un régulateur  $Q(U)$  avec un filtre à **moyenne glissante** sur  $n \in \mathbb{N}^*$  échantillons.

Pour ce faire, pour un filtre donné, nous commençons par rappeler le modèle d'état choisi pour représenter la moyenne glissante sur  $n$  échantillons. On note  $\Delta \mathbf{x}_f(k) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état à

l'instant  $kT_e$  du filtre.

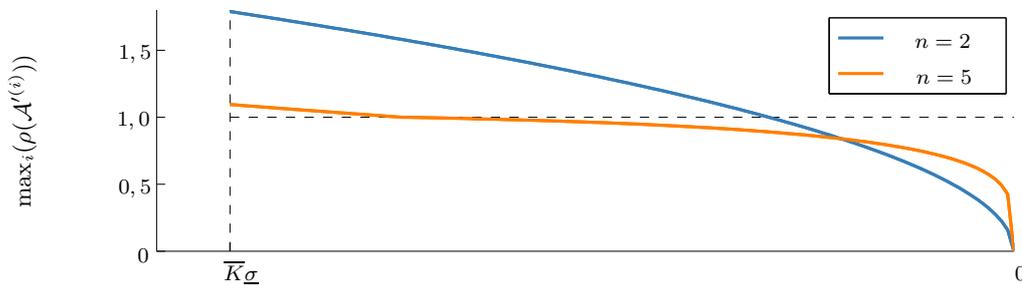
$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_f(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_f(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Delta U(k) \\ \Delta U_f(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_f(k) \end{cases} \quad (5.63)$$

Nous exprimons ensuite  $\mathcal{A}'^{(i)}$  la matrice d'évolution dans le mode  $i$  dans le cas d'un réseau raccordant un seul régulateur de puissance dont le filtre est un filtre à moyenne glissante sur  $n$  échantillons.

$$\mathcal{A}'^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{K_{PQ} \times \sigma(i)}{n} & \dots & \dots & \frac{K_{PQ} \times \sigma(i)}{n} \\ & & & 0 \\ & & \mathbb{I}_{n-1} & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

On rappelle que  $\mathbb{I}_{n-1}$  est la matrice identité de dimension  $(n-1)$ .

Le but est d'étudier le « pire » rayon spectral de ces matrices pour tout  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ . Encore une fois, on ne sait pas exprimer formellement les valeurs propres d'une matrice de dimension  $n \times n$ . Nous proposons donc une approche empirique. Afin d'étudier le plus grand rayon spectral possible, nous allons, pour une valeur de  $n$  donnée, évaluer l'évolution maximale sur les différents modes de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$  des rayons spectraux  $\rho(\mathcal{A}'^{(i)})$  en fonction des paramètres du système. On peut déjà remarquer que, comme décrit partie 5.2.2, les paramètres du système apparaissent sous la forme du produit du gain du réseau et du pouvoir réglant du producteur. On trace donc l'évolution de  $\max_{i \in \mathcal{N}_{PQ}} (\rho(\mathcal{A}'^{(i)}))$  en fonction de ce produit.



Évolution du produit  $(K_{PQ}\sigma)$

Figure 5.5 – Évolution du maximum des rayons spectraux des matrices d'évolution avec les paramètres du système

On peut remarquer sur la figure 5.5 que le cas le plus contraignant en matière de stabilité est le réseau ayant le plus grand gain ( $\bar{K}$ ) et le producteur ayant la plus grande pente en valeur

absolue ( $\underline{\sigma}$ ). On retrouve le même résultat que dans le cas d'un filtre passe-bas d'ordre un comme on s'y attendait. On peut aussi noter sur la figure 5.5 que le maximum des rayons spectraux des différents  $\mathcal{A}^{(i)}$  semble diminuer quand  $n$  augmente. **Ceci amène à penser que plus  $n$  augmente, plus le système est stable.** Une étude rapide des réponses indicielles d'un filtre moyenne glissante pour différentes valeurs de  $n$  (figure 5.6) amène à penser que plus  $n$  est grand plus le filtre moyenne glissante est lent. On peut donc dire qu'on retrouve le résultat précédent : plus le système est lent plus il est stable.

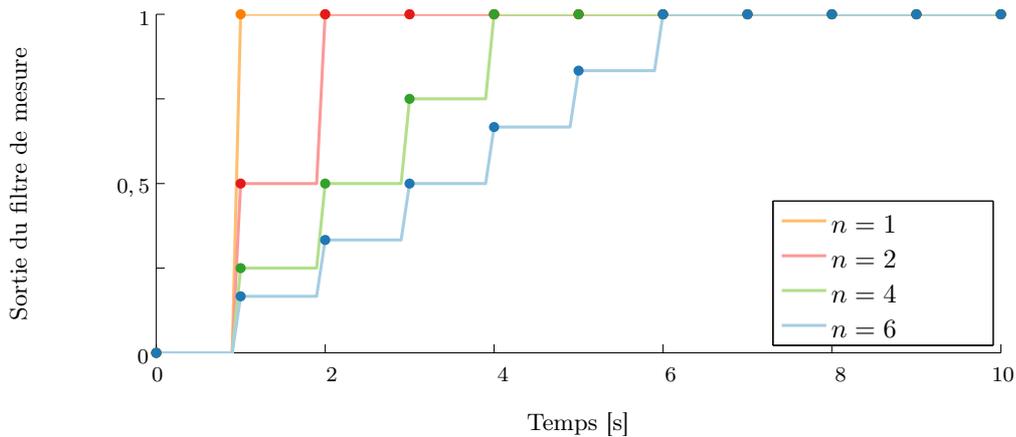


Figure 5.6 – Réponse indicielle d'un filtre de type moyenne glissante sur  $n$  échantillons pour différentes valeurs de  $n$

**On peut donc conjecturer que plus le producteur sera loin et puissant plus le système risquera d'être instable.** De plus, on peut penser qu'en augmentant  $n$  – soit l'horizon temporel de la moyenne glissante –, on pourra stabiliser le système.

Nous avons exprimé le paramètre  $a$  d'un filtre passe-bas du premier ordre assurant la stabilité de tous les systèmes. Nous allons faire de même en estimant  $n_{lim}$  le plus petit  $n$  tel que le système soit stable pour  $K_{PQ} = \overline{K}$  et  $\sigma = \underline{\sigma}$ . On rappelle que les valeurs des majorants sont données à titre illustratif. Alors on pourra dire que pour tout  $n \geq n_{lim}$  et tout système respectant la configuration présentée partie 5.2.4, le système sera stable quel que soit le producteur qui s'y raccorde et quel qu'en soit le nœud de raccordement.

Pour **évaluer empiriquement**  $n_{lim}$ , on calcule le rayon spectral de  $\mathcal{A}^{(i)}$  pour le système le plus contraignant ( $\overline{K}$  et  $\underline{\sigma}$ ) et pour différentes valeurs de  $n$ . Le tableau 5.3 présente l'évolution du maximum des rayons spectraux pour différents horizons de la moyenne glissante.

On peut voir que pour tout  $n \geq 8$ , le rayon spectral des matrices d'évolution est strictement inférieur à un dans le cas du réseau le plus contraignant défini ici. On peut donc supposer qu'il le sera toujours, quelles que soient la puissance et la position du producteur raccordé.

$$n \geq n_{lim} = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilité locale de chaque mode de fonctionnement } i \quad (5.65)$$

n	$\max_{i \in \mathcal{N}_{PQ}} \rho(\mathcal{A}^{(i)})$	Stabilité locale ?
1	6,40	NON
2	1,78	NON
3	1,63	NON
4	1,21	NON
5	1,09	NON
6	1,02	NON
7	1,00	?
8	0,99	OUI
9	0,99	OUI
10	0,99	OUI

Tableau 5.3 – Évolution du maximum des rayons spectraux du système le plus contraignant pour la stabilité avec  $n$  la largeur de l’horizon de la moyenne glissante

Nous avons montré au chapitre 4, pour un producteur équipé d’un filtre passe-bas du premier ordre, que la stabilité locale est une condition suffisante de stabilité globale du système. Si l’on montre que le raisonnement s’étend aux moyennes glissantes, comme conjecturé sur un exemple, alors on pourra dire que la conjecture suivante est vérifiée pour les réseaux respectant les valeurs numériques proposées partie 5.2.4.

$$n \geq n_{lim} = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{Le système est stable} \quad (5.66)$$

Il convient cependant de noter que le rayon spectral est très proche de un, la marge de stabilité même pour  $n = 10$  reste très faible. La figure 5.7 illustre la réponse du système à un échelon de perturbation pour  $n = 6$ ,  $n = 8$  et  $n = 10$ . On peut voir que le système est bien instable pour  $n = 6$  (figure 5.7a) et stable pour  $n = 8$  (figure 5.7b). Par contre, on peut aussi remarquer que le temps de réponse du système est très lent. Même pour  $n = 10$ , on trouve un système stable mais lent (figure 5.7c).

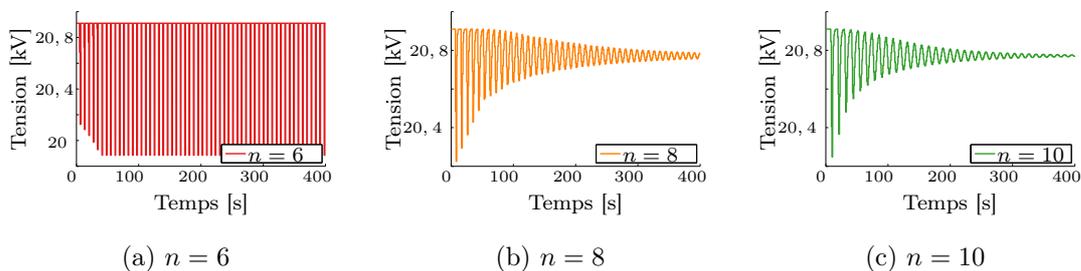


Figure 5.7 – Réponse indicielle du « pire » système tel que défini précédemment avec un filtre de type moyenne glissante sur  $n$  échantillons pour  $n = 6$ ,  $n = 8$  et  $n = 10$

Cette étude empirique rapide nous amène à penser que le raisonnement proposé pour des filtres passe-bas du premier ordre s’entend aux filtre à moyenne glissante. Une étude plus approfondie, notamment pour  $N$  producteurs, semble nécessaire pour vérifier ceci. De plus, une étude appro-

fondie des ordres de grandeurs des différents paramètres dans le cas des réseaux français semble intéressante afin de pouvoir discuter de la validité du réglage proposé par Enedis ( $n = 10$ ) et du comportement dynamique du système avec  $n = 10$ .

## 5.5 Conclusion

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les systèmes de  $N$  producteurs équipés de **régulateurs de puissance identiques et dont le filtre de mesure est un filtre passe-bas du premier ordre à temps discret**. Dans ce cas particulier, nous avons pu établir un critère explicite de stabilité pour un départ accueillant un seul producteur et un critère implicite pour un départ accueillant plusieurs producteurs. Il s'agit de conditions suffisantes de stabilité des systèmes. Même si cette méthode est plus restrictive que l'outil formel décrit au chapitre 3, elle permet de faciliter grandement les études de stabilité des réseaux accueillant de nombreux régulateurs. Pour autant, La limite de stabilité doit être calculée à l'aide du critère établi au cas par cas. Ainsi, à chaque nouveau raccordement, les réglages des producteurs déjà en place doivent être revus. Ceci complique le processus de raccordement et limite la participation au réglage de tension aux producteurs pour lesquels une étude de raccordement est réalisée.

Afin de contourner ces difficultés, nous avons souhaité proposer aux gestionnaires de réseaux de distribution (GRD) une **condition suffisante de stabilité qui soit valable, quels que soient le producteur et le réseau auquel il se raccorde**. Dans le cas de départs n'accueillant qu'un seul producteur, le critère de stabilité au cas par cas est formulé de façon explicite. À partir de l'expression de  $a_{lim}$  dans un cas donné et des caractéristiques techniques des réseaux, nous avons exprimé un majorant de  $a_{lim}$  que l'on note  $\overline{a_{lim}}$ . Son expression générique est donnée en fonction de  $\overline{K}$  le gain maximal d'un départ quelconque et de  $\underline{\sigma}$  le pouvoir réglant maximal (en valeur absolue) d'un producteur quelconque.

$$\overline{a_{lim}} = \frac{-1 - \overline{K}\underline{\sigma}}{1 - \overline{K}\underline{\sigma}} < a \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilité globale à un producteur} \quad (5.67)$$

Une application numérique dans le cas d'un exemple de réseaux moyenne tension français a été proposée. Cette étude a permis de montrer, dans ce cas particulier, que :

$$\overline{a_{lim}} \lesssim 0,75 \quad (5.68)$$

Il convient de noter que même si la valeur numérique de  $\overline{a_{lim}}$  n'est pas généralisable en l'état, l'approche l'est par exemple pour des réseaux autres que la moyenne tension ou pour des lois de commande affines par morceaux autres que la loi  $Q(U)$  retenue par Enedis.

Ensuite, nous avons étendu le domaine de validité du critère généralisé d'un producteur vers  $N$  producteurs. Dans le cas d'un départ accueillant  $N$  producteurs, le critère établi est implicite. La généralisation proposée pour un producteur ne peut donc pas s'appliquer. Pour lever ce verrou, nous nous sommes penchés sur l'étude des valeurs propres des matrices d'évolution des

départs accueillant  $N$  producteurs. En effet, le critère de stabilité établi lie le rayon spectral de ces matrices à la stabilité globale du système hybride affine par morceaux. L'étude de la structure particulière des matrices modélisant le système a permis d'exprimer un majorant de leur rayon spectral. Ainsi, il a été montré que le cas de  $N$  producteurs répartis sur un départ est moins contraignant pour la stabilité que l'ensemble de ces producteurs au « pire » nœud de raccordement.

Enfin, **assurer la stabilité d'un départ accueillant  $N$  producteurs revient à assurer celle d'un départ n'en raccordant qu'un seul.** Nous avons donc étendu le domaine de validité du critère proposé précédemment.

$$\overline{a_{lim}} = \frac{-1 - \overline{K\sigma}}{1 - \overline{K\sigma}} < a \quad \Rightarrow \quad \text{Stabilité globale à } N \text{ producteurs} \quad (5.69)$$

Pour conclure, nous avons proposé une méthodologie permettant de traiter la stabilité des régulateurs de puissance de manière générale. Le critère proposé avec cette méthode est valable quel que soit le réseau étudié et quel que soit le producteur qui s'y raccorde. Encore une fois, cette simplification de l'étude de stabilité se fait au prix de la rapidité du système. Avant de conclure sur les travaux proposés et leurs perspectives (chapitre 6), nous pouvons d'ores et déjà noter qu'il serait souhaitable de quantifier plus précisément l'impact de ce ralentissement sur le système grâce à des études dynamiques.

## Chapitre 6

# Conclusion générale et perspectives

Le développement de la production décentralisée s'accompagne de l'apparition de nombreux régulateurs sur les réseaux. Ces régulateurs sont le plus souvent locaux, en particulier au niveau des producteurs. De nombreuses interrogations quant à l'impact de ces régulateurs décentralisés sur la stabilité des réseaux ont été soulevées à la fois dans la littérature et dans l'industrie. Cependant la non-linéarité du système, le nombre d'acteurs à représenter ainsi que la grande variété de structures existantes compliquent la mise au point d'une méthode d'étude de la stabilité du système. Malgré tout, l'analyse formelle de la stabilité semble nécessaire afin d'accompagner le développement des régulateurs locaux sans mettre en danger la stabilité des réseaux de distribution.

Dans ces travaux, trois méthodes originales d'étude de la stabilité d'un réseau de distribution accueillant des régulateurs locaux de puissance sont proposées. Celles-ci ont pour objectif d'aider les gestionnaires de réseaux de distribution à choisir des jeux de paramètres des régulateurs qui garantissent la stabilité du réseau. Différentes méthodes sont développées en fonction des besoins des gestionnaires en matière de généricité, de précision, de rapidité et de simplicité de la démarche.

### 6.1 Conclusions

Dans un premier temps, nous proposons une méthode permettant de modéliser les réseaux électriques et les producteurs équipés de régulateurs qui y sont raccordés. Les modèles développés ici sont adaptés à l'étude de phénomènes dont le temps caractéristique est de l'ordre de quelques secondes. Une attention particulière est portée à leur généricité. En effet, les modèles proposés s'adaptent à tous les réseaux radiaux et à tous les producteurs non synchrones équipés de régulateurs locaux de puissance en fonction de la tension. La modélisation proposée a permis de mettre en évidence l'existence de risques d'instabilité et le besoin d'une étude formelle de la stabilité.

Dans un deuxième temps, nous développons une méthode formelle d'analyse de la stabilité fondée sur la construction d'une abstraction discrète représentant le système physique. La méthode proposée permet d'évaluer avec précision la limite de stabilité puisqu'elle analyse la stabilité de

chaque trajectoire, et se veut très générique puisqu'elle est adaptée à tout réseau de distribution raccordant des producteurs équipés de régulateurs affines par morceaux. Cependant, elle demande un effort de calcul important. En effet, la méthode formelle devient rapidement complexe à mettre en place et nécessite un temps de calcul important lorsque le nombre de producteurs augmente. En conclusion, la méthode formelle proposée ici est particulièrement adaptée à l'étude de cas particuliers comme l'étude d'interactions entre différents régulateurs ou encore l'étude de systèmes pour lesquels il est important de ne pas ralentir inutilement la dynamique des régulateurs.

De ce fait, nous cherchons à proposer une méthode qui allège les calculs. Pour y parvenir, nous particularisons les systèmes étudiés. Nous proposons une méthode permettant d'établir une condition suffisante de stabilité pour des réseaux quelconques raccordant des régulateurs dont les filtres de mesure ont la même structure. Cette deuxième méthode proposée simplifie grandement les calculs et la mise en œuvre tout en introduisant un conservatisme faible puisque la limite de stabilité est évaluée pour chaque configuration considérée. Cependant, cette deuxième méthode est moins générique que la méthode formelle proposée précédemment. La démarche envisagée est plus spécifiquement adaptée aux problématiques de réglage des paramètres des régulateurs au cours des études de raccordement. Dans ces travaux, la méthode est appliquée à l'étude du raccordement de régulateurs de puissance réactive avec bande-morte dont les filtres de mesure sont des filtres passe-bas du premier ordre. Elle permet de formuler une condition suffisante de stabilité explicite pour des réseaux accueillant un seul producteur équipé de régulateur de puissance et implicite dans le cas général.

Pour finir, une dernière méthode simplifiant encore l'analyse est présentée. Elle permet d'identifier des valeurs de paramètres des régulations permettant d'assurer la stabilité de tous les systèmes possibles. Elle est fondée sur l'étude des contraintes légales et contractuelles de configuration des réseaux et sur l'étude de la structure des matrices d'évolution du système dans chaque zone de fonctionnement. Proposer un réglage universel permet une étude simple et rapide de la stabilité puisqu'elle est réalisée une seule fois pour tous les producteurs, mais ceci s'accompagne d'une perte de précision sur la détermination de la limite de stabilité. Le principal intérêt de cette méthode est de proposer des jeux de paramètres des régulateurs à intégrer aux codes de réseaux et par exemple d'assurer la stabilité de producteurs pour lesquels aucune étude de raccordement n'est faite ou encore d'éviter de modifier les réglages des régulateurs à chaque nouveau raccordement sur le départ. Ici, cette troisième méthode est appliquée à l'étude du raccordement de régulateurs de puissance réactive avec bande-morte dont les filtres de mesure sont des filtres passe-bas du premier ordre à temps discret dont les paramètres sont identiques. Elle fournit une constante de temps discrète minimale en fonction de la configuration des réseaux étudiés qui permet de garantir la stabilité, quel que soit le réseau étudié et quels que soient les producteurs qui y sont raccordés.

Finalement, toute méthode de modélisation, de simulation ou d'analyse des systèmes répond à un compromis entre le conservatisme des résultats – correspondant ici à la précision avec laquelle la limite de stabilité est évaluée –, la rapidité des calculs, la généricité et la simplicité de la méthode. Dans ces travaux, nous avons développé trois approches permettant d'évaluer la stabilité d'un départ accueillant plusieurs régulateurs locaux de puissance et correspondant à trois compromis différents entre les quatre critères. L'analyse qualitative des inconvénients et des avantages de chaque méthode est résumée figure 6.1.

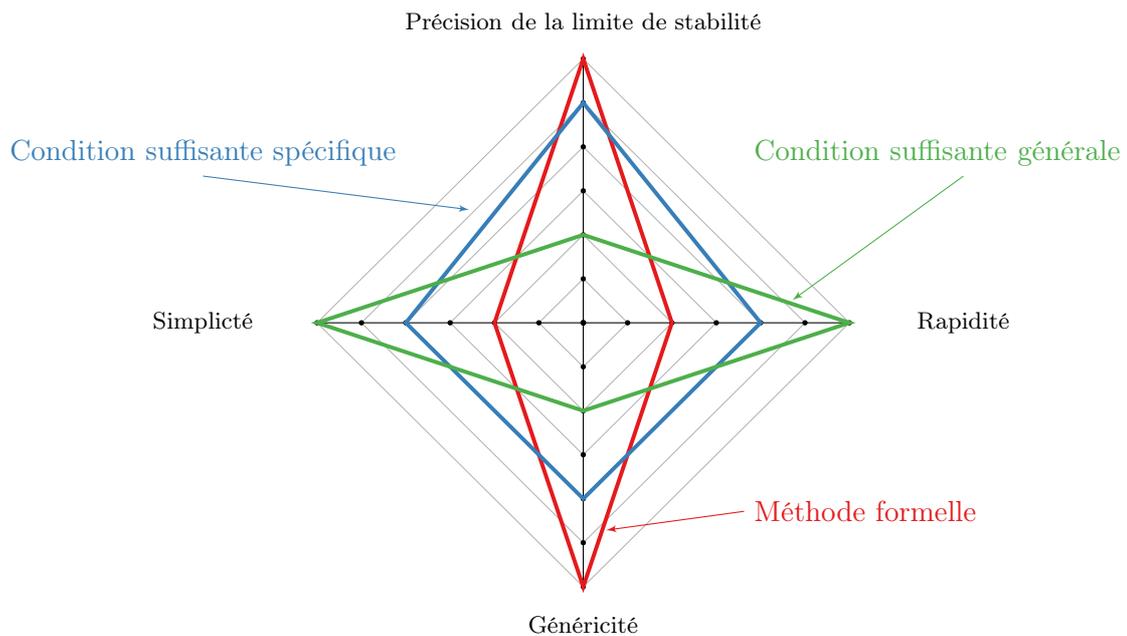


Figure 6.1 – Diagramme représentant pour chacune des trois méthodes développées dans ces travaux le compromis proposé entre la précision de la limite de stabilité, la rapidité, la généricité et la simplicité

## 6.2 Remarques générales

Les principales contributions, du point de vue méthodologique, de ces travaux ont été résumées précédemment. Nous nous intéressons ici aux remarques générales qui découlent de l'application des méthodes à quelques cas d'étude.

- **La stabilité d'un producteur dépend de sa position sur le réseau, de sa puissance installée et de son filtre de mesure.** Dans le cas des filtres de mesure passe-bas du premier ordre, nous avons montré que le système est d'autant plus stable que le producteur est proche du poste source, que la pente de sa loi de commande est douce et que son filtre de mesure est lent. Ces résultats rejoignent les habitudes des gestionnaires de réseaux qui veillent à ne pas raccorder loin du poste source des producteurs puissants. Le choix de la pente de la loi de commande devra être un compromis entre la stabilité (pente douce) et une injection/absorption de puissance réactive la plus sélective possible

(pente raide). Le choix de la constante de temps du filtre devra être un compromis entre la stabilité (constante de temps grande) et la rapidité (constante de temps petite) du système.

- **Les études empiriques ne suffisent pas pour conclure sur la stabilité.** Si la stabilité dépend de la position sur le réseau, de la pente de la loi de commande et de la constante de temps du filtre, dans ces travaux nous avons aussi montré qu'elle dépend du point de fonctionnement. En effet, l'analyse d'un cas d'étude réel a permis de mettre en évidence que certaines conditions initiales peuvent mener à un fonctionnement stable alors que d'autres non. Ainsi, l'étude de quelques points de fonctionnement peut ne pas être suffisante pour conclure sur la stabilité du système. C'est ce qui a motivé la mise au point d'une méthode formelle d'étude de la stabilité.
- **Les filtres passe-bas du premier ordre semblent suffisants pour assurer la stabilité.** Pour ce type de filtres, nous avons montré que le cas le plus contraignant pour la stabilité était un départ raccordant toute la production regroupée en un producteur et au pire nœud du réseau. Pour étudier la stabilité d'un producteur, nous avons formulé un critère explicite. Comme nous l'avons déjà remarqué, l'étude de ce dernier permet de montrer qu'il existe toujours un filtre passe-bas suffisamment lent pour garantir la stabilité du système. Ainsi, nous pouvons conclure que, quels que soient le réseau étudié et les producteurs qui s'y raccordent, il existe toujours une constante de temps discrète des filtres passe-bas du premier ordre suffisamment grande pour assurer la stabilité.

Enfin, nos travaux ont permis de fournir aux gestionnaires de réseaux de distribution des méthodologies de réglage des paramètres des régulateurs locaux au niveau des producteurs. Les différentes démarches proposées présentent des possibilités variées afin de s'adapter au mieux aux besoins et aux capacités des gestionnaires de réseaux de distribution.

## 6.3 Perspectives

Différentes méthodes ont été proposées dans ces travaux pour étudier la stabilité des réseaux de distribution raccordant des producteurs équipés de régulateurs locaux de puissance. Différentes hypothèses ont été faites tout au long de l'étude et quelques éléments de réflexion ont déjà été proposés pour étendre le champ d'application des méthodes proposées. Nous allons maintenant présenter quelques pistes de recherche qu'il serait intéressant d'explorer pour poursuivre ces travaux et étendre leur domaine d'application.

1. Dans un premier temps, certaines pistes découlent naturellement des limites observées des méthodes développées dans ces travaux :
  - **Réduire le temps de calcul de la méthode formelle.** La complexité et le temps de calcul de la méthode formelle développée dans le chapitre 3 la rendent incompatible avec l'étude de réseaux raccordant de nombreux producteurs. Dans ces travaux, une première étape d'amélioration de la convergence par rapport aux méthodes classiques

de construction de la bisimulation a été proposée. Aujourd'hui, la méthode conclut en quelques itérations lorsque le système est instable, mais la détection de la stabilité du système est nécessite plus d'efforts. Plusieurs pistes peuvent être envisagées pour améliorer ceci, par exemple améliorer la détection des trajectoires non définitives, mais stables dans l'analyse de graphe ou encore arrêter le découpage d'un mode discret dès qu'il est identifié comme non définitif, mais stable. De plus, l'implémentation de l'outil pourrait être améliorée en considérant par exemple un langage de programmation orienté objet.

- **Renforcer l'étude statistique.** L'étude statistique menée au chapitre 4 a permis de comparer les stabilités locale et globale de nombreux cas d'étude. Le nombre maximal de producteurs considérés pour cette étude a été limité par la complexité et le temps de calcul de la méthode formelle, ce dont nous avons déjà discuté. La variété des cas étudiés a été évaluée a posteriori grâce aux résultats de l'analyse de stabilité. Une étude préalable concernant la construction des scénarios pourrait permettre de réduire le nombre de cas à tester tout en garantissant une grande variété dans les scénarios par exemple en ayant recours aux techniques de *plan d'expériences* ou de *clustering*. Ceci pourrait permettre d'approfondir l'étude statistique sans l'allonger.
  - **Dimensionner les marges de stabilité.** Nous avons mis en évidence l'importance d'évaluer la marge de stabilité associée à un jeu de paramètres afin de prévoir le comportement du système et de garantir la robustesse des réglages proposés. Une analyse – par exemple paramétrique – du lien entre le choix de la constante de temps discrète du filtre de mesure et l'allure de la réponse indicielle du système en boucle fermée par exemple en termes de temps de réponse ou encore d'amplitude du premier dépassement pourrait aider à identifier les marges de stabilité correspondant au compromis rapidité/stabilité choisi par le gestionnaire de réseau de distribution.
  - **Raffiner et décliner le critère de stabilité général.** Le critère de stabilité général, établi au chapitre 5, a été exprimé formellement. Une application numérique, inspirée des ordres de grandeurs français, a été réalisée. Une étude plus fine des réseaux de distribution français et des règles de connexion des producteurs permettrait de proposer un critère plus fin adapté aux codes de réseaux français. Une étude similaire concernant d'autres gestionnaires de réseaux pourrait aussi être menée.
2. Dans ces travaux, certaines hypothèses ont été faites pour simplifier l'analyse de la stabilité. En fonction de la finalité de l'étude et du système étudié, certaines hypothèses risquent d'être mises en défaut.
- **Amélioration des modèles du réseau et des producteurs.** Afin de proposer un modèle le plus générique et le plus simple possible, plusieurs hypothèses ont été faites, comme la rapidité des boucles de régulation de puissance de l'électronique de puissance des producteurs devant les phénomènes étudiés. Nous avons aussi proposé de linéariser les équations du réseau autour d'un point de fonctionnement. Il pourrait

être intéressant d'évaluer l'impact de ces hypothèses de modélisation sur la précision de la limite de stabilité. Si l'étude menée demande d'améliorer cette précision, il faudra alors revoir les méthodes pour les adapter à des modèles plus précis du système.

- **Modélisation de la dynamique des perturbations.** Parmi les hypothèses de modélisation proposées, nous avons regroupé l'ensemble des grandeurs non commandables en un terme de perturbation. Dans un premier temps, les études de stabilité ont été menées en considérant ce terme de perturbation comme constant. Il serait intéressant de modéliser la dynamique de certaines grandeurs non commandables comme les variations de la production intermittente ou encore de la consommation sur le départ afin de pouvoir prendre en compte leurs effets sur la tension dans les études de stabilité. Ainsi, on pourrait évaluer l'impact des grandeurs non commandables sur la stabilité du système.
- **Structure des filtres de mesure.** Afin d'établir des conditions suffisantes de stabilité (chapitres 4 et 5), seuls des filtres de mesure passe-bas du premier ordre ont été considérés. Même s'il a été montré qu'il est toujours possible de trouver un filtre passe-bas du premier ordre suffisamment lent pour assurer la stabilité, certaines études demandent de s'intéresser à différents filtres de mesure. Ici, nous avons présenté les premières réflexions quant à l'extension des méthodes proposées aux filtres de type moyenne glissante. Les premiers résultats semblent prometteurs. Il serait intéressant d'appliquer les méthodes proposées dans ces travaux afin de valider l'extension aux filtres de type moyenne glissante du lien entre stabilité locale et globale puis entre la stabilité d'un producteur au pire nœud du réseau et de  $N$  producteurs répartis sur le réseau. Ceci permettrait de discuter du réglage du filtre de mesure proposé aux producteurs par Enedis. De plus, l'ouverture à différents filtres de mesure permettrait de discuter de l'impact de la structure de filtre choisie par exemple sur le comportement du système ou encore sur le dimensionnement des marges de stabilité.
- **Allure des lois de commande.** Les conditions suffisantes de stabilité ont été établies dans le cas d'une loi de commande de la puissance réactive avec bande-morte. Il serait intéressant d'adapter les méthodes proposées à différentes allures de lois de commande de puissance réactive et active par exemple qui ne soient pas symétriques ou encore qui soient à hystérésis. Ceci permettrait de mener une comparaison de différentes lois et par exemple d'appuyer les gestionnaires de réseaux dans le choix d'une allure de loi de commande. De plus, les conditions suffisantes de stabilité présentées ici ont été formulées en ne considérant que des régulateurs de même structure sur un même départ. L'étude de la cohabitation de différentes allures de lois de commande semble importante pour pouvoir généraliser les résultats.

3. Les méthodes développées ici ont été appliquées à l'étude de régulateurs locaux de la puissance des producteurs en fonction de leur tension, mais les approches proposées sont plus générales.

- **Appliquer l’outil formel à d’autres systèmes.** Dans nos travaux, nous avons établi une méthode formelle permettant l’étude de la stabilité d’un système hybride affine par morceaux. Un outil a été développé pour l’étude de la stabilité des réseaux de distribution accueillant des régulateurs locaux. D’un point de vue méthodologique, il serait intéressant de perfectionner l’outil afin de pouvoir étudier la stabilité de différentes applications comprenant des systèmes hybrides affines par morceaux.
- **Étudier la participation des producteurs basse tension.** L’évaluation du critère général de stabilité a été faite dans le cas de producteurs raccordés au réseau moyenne tension. Afin de pouvoir intégrer ce critère aux codes de réseaux, il serait intéressant d’en proposer une déclinaison pour les producteurs raccordés au réseau basse tension et participant au réglage de tension. Dans le cas de producteurs raccordés au réseau triphasé, celle-ci semble découler directement de l’application des méthodes aux producteurs moyenne tension. L’extension aux producteurs raccordés au réseau triphasé et à plus long terme monophasé risque d’induire de nouvelles problématiques en termes de modélisation, de dimensionnement, de nombre de producteurs sur un départ, etc.
- **Interactions avec d’autres régulateurs.** Le panorama des différents leviers pour éviter le renforcement des réseaux a permis de mettre en évidence la grande diversité des mécanismes envisagés. Il serait intéressant d’étudier l’éventualité d’interactions entre différentes régulations coexistant sur un même départ comme des régulateurs locaux et centralisés de la tension. En effet, jusqu’à présent les régulateurs autres que locaux n’ont pas été pris en compte mais leur évolution dans le futur pourrait induire des interactions avec les régulateurs locaux. Bien maîtrisées, ces interactions peuvent participer à la stabilité des réseaux ce qui pourrait permettre d’accompagner le développement de mécanismes de réglage de la tension complémentaires comme des régulateurs locaux de puissance réactive couplés à des régulateurs centralisés de puissance active en fonction de la tension. D’autres régulations sont envisagées à plus long terme sur les réseaux de distribution. On peut par exemple penser aux régulations de la fréquence en jouant sur la consommation des charges. L’intégration de ces nouvelles régulations aux études de stabilité pourrait permettre d’apporter des réponses quant au développement possible de ces nouveaux mécanismes.
- **Intérêt pour le système de régulateurs rapides.** Pour l’instant, il a été proposé de ralentir les régulateurs des producteurs afin d’assurer la stabilité. Ce choix technique se justifie, car aujourd’hui, la rapidité de la réponse des régulateurs de tension des producteurs n’est pas valorisée. Il serait intéressant d’étudier le fonctionnement dynamique du système afin d’identifier l’éventuel intérêt que peuvent représenter des régulateurs rapides. En effet, la dynamique du filtre de mesure est transparente si l’on mesure la moyenne sur dix minutes de l’amplitude de la tension, mais ne l’est peut-être pas si l’on définit la qualité de la tension sur un horizon plus court. Il serait intéressant d’évaluer le service que des régulateurs rapides peuvent rendre au réseau, notamment afin de déterminer l’intérêt que les gestionnaires de réseaux peuvent avoir

à choisir entre un critère spécifique et le critère général de stabilité voire à limiter la participation de certains producteurs au réglage de tension.

- **Fonctionnement hors du régime normal.** Dans ces travaux, nous avons considéré comme hypothèse de départ le fait que le bon fonctionnement du réseau est garanti par les gestionnaires. Afin d'accompagner le développement massif des régulateurs locaux de puissance des producteurs, l'étude de leur comportement en régime perturbé devra être menée. En effet, il faut s'assurer de l'absence d'interactions avec les protections de découplage, les détections d'ilotages et tout autre mécanisme assurant la protection des réseaux. Il serait aussi intéressant d'étudier le comportement des régulateurs en cas de défaillance de l'un d'entre eux ; on peut par exemple penser à un défaut de synchronisation entre les régulateurs d'un même départ.
- **Nouvelles structures de réseau.** Nous avons considéré la problématique de l'intégration de régulateurs locaux à des réseaux de structure traditionnelle. Il serait intéressant d'étudier l'insertion de ce type de régulateurs à des nouvelles architectures de réseau, par exemple aux *microgrids*. En effet, pour ce type d'applications, nous risquons d'être confrontés en particulier, à des problématiques de modélisation et à des besoins du système différents.

Pour conclure, il serait intéressant de compléter ce type d'approches avec des méthodes d'analyse de « grands » systèmes afin de se préparer à la multiplication de producteurs équipés de régulateurs variés sur les réseaux électriques.

# Bibliographie

- [1] H. Dutrieux. *Méthodes pour la planification pluriannuelle des réseaux de distribution. Application à l'analyse technico-économique des solutions d'intégration des énergies renouvelables intermittentes*. Thèse, Ecole Centrale de Lille, Novembre 2015.
- [2] M. Stubbe, B. Meyer, and M. Jerosolimski. Outils de simulation dynamique des réseaux électriques. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques de transport et de répartition*, Cahier D(4120), Novembre 1998.
- [3] G. Delille. *Contribution du Stockage à la Gestion Avancée des Systèmes Électriques. Approches Organisationnelles et Technico-économiques dans les Réseaux de Distribution*. Thèse, Ecole Centrale de Lille, Novembre 2010.
- [4] S. Cole. *Steady-state and dynamic modelling VSC HVDC systems for power systems simulation*. Thèse, Katholieke Universiteit Leuven, Septembre 2010.
- [5] Comitato Elettrotecnico Italiano. Regola tecnica di riferimento per la connessione di utenti attivi e passivi alle reti BT delle imprese distributrici di energia elettrica, Septembre 2014. Dernière consultation : 17/12/2015.
- [6] Commission de Régulation de l'Énergie. Description générale des réseaux électriques. Dernière consultation : 01/06/2016.
- [7] A. Doulet. Réseaux de distribution d'électricité - présentation. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques et applications*, Cahier D(4200), Mai 2010.
- [8] Enedis. Le réseau électrique : vue d'ensemble. Dernière consultation : 01/06/2016.
- [9] Legifrance. Arrêté du 17 mars 2003 relatif aux prescriptions techniques de conception et de fonctionnement pour le raccordement au réseau public de distribution d'une installation de consommation d'énergie électrique, Mars 2003. Dernière consultation : 01/06/2016.
- [10] J.-L. Fraisse and L. Karsenti. Raccordement de la production décentralisée aux réseaux de distribution - aspects règlementaires et organisationnels. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques et applications*, Cahier D(4239), Mai 2014.
- [11] Enedis. Installations de production raccordées au réseau géré par Enedis à fin mars 2016, Mars 2016. Dernière consultation : 01/06/2016.
- [12] Legifrance. Arrêté du 23 avril 2008 relatif aux prescriptions techniques de conception et de fonctionnement pour le raccordement à un réseau public de distribution d'électricité en

- basse tension ou en moyenne tension d'une installation de production d'énergie électrique, Avril 2008. Dernière consultation : 26/02/2016.
- [13] Enedis. Description physique du réseau public, Avril 2008. Dernière consultation : 13/06/2016.
- [14] D. Souque, L. Chatonnet, and E. Monnot. Réglage de tension : Rôles, obligations et organisation du producteur pour les besoins du système électrique en France. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques de transport et de répartition*, Cahier D(4096), Novembre 2013.
- [15] A. Croguennoc. Plan de protection des réseaux de distribution publique à moyenne tension - principes. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques et applications*, Cahier D(4811), Mai 2011.
- [16] M. Oddi. Protection des réseaux à basse tension de distribution publique. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques et applications*, Cahier D(4815), Septembre 1991.
- [17] B. Bernseneff. *Réglage de la tension dans les réseaux de distribution du futur*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure d'Electrochimie et d'Electrometallurgie de Grenoble, Décembre 2010.
- [18] J.P. Signal. Réglage de tension HTA et BT. *Préscription du Réseau de Distribution d'Electricité*, 2011. Document Enedis B.5.1-01.
- [19] P. Sarrand and J. Verselle. Compensation de l'énergie réactive et tenue de la tension dans les réseaux publics. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques et applications*, Cahier D(4305), Juin 1986.
- [20] N. Hadjsaid, J. F. Canard, and F. Dumas. Dispersed generation impact on distribution networks. *IEEE Computer Applications in Power*, 12(2) :22–28, Avril 1999.
- [21] P. P. Barker and R. W. De Mello. Determining the impact of distributed generation on power systems. I. radial distribution systems. In *Power Engineering Society Summer Meeting, 2000. IEEE*, volume 3, pages 1645–1656 vol. 3, Juillet 2000.
- [22] J.-F. Canard. *Impact de la génération d'énergie dispersée dans les réseaux de distribution*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, Décembre 2000.
- [23] P. Dondi, D. Bayoumi, C. Haederli, D. Julian, and M. Suter. Network integration of distributed power generation. *Journal of Power Sources*, 106(1–2) :1 – 9, Avril 2002. Proceedings of the Seventh Grove Fuel Cell Symposium.
- [24] C. L. Masters. Voltage rise : the big issue when connecting embedded generation to long 11 kV overhead lines. *Power Engineering Journal*, 16(1) :5–12, Février 2002.
- [25] L. Kojovic. Impact DG on voltage regulation. In *Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE*, volume 1, pages 97–102, Juillet 2002.
- [26] L. F. Ochoa, A. Padilha-Feltrin, and G. P. Harrison. Evaluating distributed generation impacts with a multiobjective index. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 21(3) :1452–1458, Juillet 2006.

- [27] J.A. Peças Lopes, N. Hatziargyriou, J. Mutale, P. Djapic, and N. Jenkins. Integrating distributed generation into electric power systems : A review of drivers, challenges and opportunities. *Electric Power Systems Research*, 77(9) :1189 – 1203, Juillet 2007. Distributed Generation.
- [28] A. Minaud, C. Gaudin, and L. Karsenti. Analysis of the options to reduce the integration costs of renewable generation in the distribution networks. Part 1 : Impact of PV development in france and global analysis of considered alternatives to reinforcement. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [29] G. Strbac, M. Aunedi, P. Djapic, I. Konstantelos, and D. Papadaskalopoulos. Grid impact studies of electric vehicles - future distribution network planning tools : Functional specifications, Mars 2014. Dernière consultation : 13/06/2016.
- [30] J. Witkowski, E. Lejay-Brun, G. Malarange, and L. Karsenti. Field demonstration of local voltage regulation on ERDF MV network. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [31] B. Bletterie, A. Stojanovic, S. Kadam, G. Lauss, M. Heidl, C. Winter, D. Hanek, A. Pamer, and A. Abart. Local voltage control by PV inverters : first operating experience from simulation, laboratory tests and field tests. In *27th European Photovoltaic Solar Energy Conference and Exhibition*, pages 4574 – 4581, Septembre 2013.
- [32] P. Esslinger and R. Witzmann. Experimental study on voltage dependent reactive power control  $Q(V)$  by solar inverters in low-voltage networks. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [33] Enedis. Délibération de la commission de régulation de l'énergie du 12 juin 2014 portant sur le développement des réseaux électriques intelligents actions ERDF couvrant le champ des recommandations de la CRE, Juin 2014. Dernière consultation : 06/01/2016.
- [34] F. Beauné, A. Minaud., A. Pagnetti, G. Pelton, and L. Karsenti. Voltage regulation on DG connected to MV network study and experimentations. In *Challenges of Implementing Active Distribution System Management, CIRED 2014 Workshop*, pages 1–4, Mai 2014.
- [35] Synergrid. Prescriptions techniques spécifiques pour les installations de production décentralisées fonctionnant en parallèle sur le réseau de distribution.s, Juin 2012. Dernière consultation : 17/12/2015.
- [36] E-Control. Technische und organisatorische regeln für betreiber und benutzer von netzen. Teil D : Besondere technische regeln. hauptabschnitt d4 : Parallelbetrieb von erzeugungsanlagen mit verteilernetzen, Septembre 2013. Dernière consultation : 17/12/2015.
- [37] BDEW. Generating plants connected to the medium-voltage network. Guideline for generating plants' connection to and parallel operation with the medium-voltage network, Décembre 2008. Dernière consultation : 17/12/2015.

- [38] Enedis. Principe et conditions de mise en œuvre d'une régulation locale de puissance réactive pour les installations de production raccordées au réseau public de distribution HTA, Février 2016. Dernière consultation : 19/04/2016.
- [39] Q. Zhou and J. W. Bialek. Generation curtailment to manage voltage constraints in distribution networks. *IET Generation, Transmission Distribution*, 1(3) :492–498, Mai 2007.
- [40] R. Tonkoski, L. A. C. Lopes, and T. H. M. El-Fouly. Coordinated active power curtailment of grid connected PV inverters for overvoltage prevention. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 2(2) :139–147, Avril 2011.
- [41] T. Zhou and B. Francois. Energy management and power control of a hybrid active wind generator for distributed power generation and grid integration. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(1) :95–104, Janvier 2011.
- [42] Z. Hu and F. Li. Cost-benefit analyses of active distribution network management, Part I : Annual benefit analysis. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 3(3) :1067–1074, Septembre 2012.
- [43] S. Weckx, C. Gonzalez, and J. Driesen. Combined central and local active and reactive power control of PV inverters. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 5(3) :776–784, Juillet 2014.
- [44] E. F. Mogos and X. Guillaud. A voltage regulation system for distributed generation. In *Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES*, pages 787–794 vol.2, Octobre 2004.
- [45] T. Sansawatt, L. F. Ochoa, and G. P. Harrison. Operational windows for decentralized control of renewable DG : Techno-economic trade-offs. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2011 2nd IEEE PES International Conference and Exhibition on*, pages 1–6, Décembre 2011.
- [46] G. Valverde and T. Van Cutsem. Model predictive control of voltages in active distribution networks. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 4(4) :2152–2161, Décembre 2013.
- [47] S. Georgiopoulos, E. Cerqueira, R. Johnston, R. Currie, and C. Marantes. Flexible plug and play low carbon networks : An open and scalable active network management solution for a faster and cheaper distributed generation connection. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [48] F. Olivier, P. Aristidou, D. Ernst, and T. Van Cutsem. Active management of low-voltage networks for mitigating overvoltages due to photovoltaic units. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 7(2) :926–936, Mars 2016.
- [49] K. L. Anaya and M. G. Pollitt. Experience of the use of smarter connection arrangements for distributed wind generation facilities, Décembre 2012. Dernière consultation : 16/06/2016.
- [50] A. L. Estopier, S. Georgiopoulos, E. C. Eyre, and C. Marantes. Flexible plug and play low carbon networks : Commercial solutions for active network management. In *Electricity*

- Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, June 2013.
- [51] H. Sun, Y. Wang, D. Nikovski, and J. Zhang. Flex-grid : A dynamic and adaptive configurable power distribution system. In *PowerTech, 2015 IEEE Eindhoven*, pages 1–6, Juin 2015.
- [52] C. Oates, A. Barlow, and V. Levi. Tap changer for distributed power. In *Power Electronics and Applications, 2007 European Conference on*, pages 1–9, Septembre 2007.
- [53] P. Esslinger and R. Witzmann. Regulated distribution transformers in low-voltage networks with a high degree of distributed generation. In *2012 3rd IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT Europe)*, pages 1–7, Oct 2012.
- [54] C. Körner, M. Hennig, K. Handt, and R. Schmid. Gaining experience with a regulated distribution transformer in a smart grid environment. In *Integration of Renewables into the Distribution Grid, CIRED 2012 Workshop*, pages 1–4, Mai 2012.
- [55] C. Reese, C. Buchhagen, and L. Hofmann. Enhanced method for voltage range controlled OLTC-equipped distribution transformers. In *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–8, Juillet 2012.
- [56] M. Kolenc, I. Papic, and B. Blazic. Minimization of losses in smart grids using coordinated voltage control. *Energies*, 5(10) :3768, 2012.
- [57] X. Liu, A. Aichhorn, L. Liu, and H. Li. Coordinated control of distributed energy storage system with tap changer transformers for voltage rise mitigation under high photovoltaic penetration. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 3(2) :897–906, Juin 2012.
- [58] G. De Carne, M. Liserre, K. Christakou, and M. Paolone. Integrated voltage control and line congestion management in active distribution networks by means of smart transformers. In *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, pages 2613–2619, Juin 2014.
- [59] A. Doulet. Réseaux de distribution - exploitation. *Techniques de l'ingénieur : Réseaux électriques de transport et de répartition*, Cahier D(4230), Février 1997.
- [60] K. Nara, Y. Mishima, and T. Satoh. Network reconfiguration for loss minimization and load balancing. In *Power Engineering Society General Meeting, 2003, IEEE*, volume 4, page 2418 Vol. 4, Juillet 2003.
- [61] B. Enacheanu, B. Raison, R. Caire, O. Devaux, W. Bienia, and N. HadjSaid. Radial network reconfiguration using genetic algorithm based on the matroid theory. *IEEE Transactions on Power Systems*, 23(1) :186–195, Février 2008.
- [62] A. Swarnkar, N. Gupta, and K. R. Niazi. Efficient reconfiguration of distribution systems using ant colony optimization adapted by graph theory. In *2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–8, Juillet 2011.

- [63] P. C. Ramaswamyand, P. Vingerhoets, and G. Deconinck. Reconfiguring distribution grids for more integration of distributed generation. *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, (0405), 2013.
- [64] S. Touré. *Optimisation des réseaux : réseau actif et flexible*. Thèse, Université de Grenoble, Mars 2015.
- [65] Pierre Bousseau, Etienne Monnot, Gilles Malarange, and Olivier Gonbeau. Distributed generation contribution to voltage control. In *19th International Conference on Electricity Distribution (CIRED)*, 2007.
- [66] J. Duval, G. Delille, J. L. Fraisse, and X. Guillaud. Contribution of local voltage regulation to a better insertion of DG in distribution grids. In *Electricity Distribution - Part 2, 2009. CIRED 2009. The 20th International Conference and Exhibition on*, pages 1–1, Juin 2009.
- [67] E. Chabod, L. Karsenti, J. Witkowski, and G. Malarange. Local voltage regulation influence on DG and distribution network. In *Integration of Renewables into the Distribution Grid, CIRED 2012 Workshop*, pages 1–4, Mai 2012.
- [68] G. Delille, G. Malarange, and C. Gaudin. Analysis of the options to reduce the integration costs of renewable generation in the distribution networks. Part 2 : A step towards advanced connection studies taking into account the alternatives to grid reinforcement. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [69] M. H. J. Bollen and A. Sannino. Voltage control with inverter-based distributed generation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(1) :519–520, Janvier 2005.
- [70] K. Tanaka, M. Oshiro, S. Toma, A. Yona, T. Senjyu, T. Funabashi, and C. H. Kim. Decentralised control of voltage in distribution systems by distributed generators. *IET Generation, Transmission Distribution*, 4(11) :1251–1260, Novembre 2010.
- [71] E. Demirok, P. C. González, K. H. B. Frederiksen, D. Sera, P. Rodriguez, and R. Teodorescu. Local reactive power control methods for overvoltage prevention of distributed solar inverters in low-voltage grids. *IEEE Journal of Photovoltaics*, 1(2) :174–182, Octobre 2011.
- [72] M. Farivar, L. Chen, and S. Low. Equilibrium and dynamics of local voltage control in distribution systems. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4329–4334, Décembre 2013.
- [73] P. M. S. Carvalho, P. F. Correia, and L. A. F. M. Ferreira. Distributed reactive power generation control for voltage rise mitigation in distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 23(2) :766–772, Mai 2008.
- [74] R. Aghatehrani and A. Golnas. Reactive power control of photovoltaic systems based on the voltage sensitivity analysis. In *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–5, Juillet 2012.

- [75] D. Unger, N. G. A. Hemdan, and M. Kurrat. Reactive power concepts in the future distribution networks. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [76] K. Turitsyn, P. Sulc, S. Backhaus, and M. Chertkov. Options for control of reactive power by distributed photovoltaic generators. *Proceedings of the IEEE*, 99(6) :1063–1073, 2011.
- [77] R. Dugan, W. Sunderman, and B. Seal. Advanced inverter controls for distributed resources. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.
- [78] C. Elbs, R. Pardatscher, R. Nenning, and R. Witzmann. Einsatz der Q(U)-regelung bei der vorarlberger energienetze GmbH, Juin 2014.
- [79] F. Andren, B. Bletterie, S. Kadam, P. Kotsampopoulos, and C. Bucher. On the stability of local voltage control in distribution networks with a high penetration of inverter-based generation. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 62(4) :2519–2529, April 2015.
- [80] K. Dallmer-Zerbe, D. Berardo, A. Salman, and B. Wille-Hausmann. Small-disturbance voltage stability of OLTC & decentralized reactive power droop control. In *Energy Conference (ENERGYCON), 2016 IEEE International*, Avril 2016.
- [81] O. Richardot. *Réglage coordonné de tension dans les réseaux de distribution à l'aide de la production décentralisée*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble, Octobre 2006.
- [82] M. Biserica, B. Berseneff, Y. Bésanger, and C. Kiény. Upgraded coordinated voltage control for distribution systems. In *PowerTech, 2011 IEEE Trondheim*, pages 1–6, Juin 2011.
- [83] M. Farivar, R. Neal, C. Clarke, and S. Low. Optimal inverter VAR control in distribution systems with high PV penetration. In *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–7, Juillet 2012.
- [84] M.-C. Alvarez, R. Caire, B. Raison, B. Enacheanu, O. Devaux, R. Jeannot, and N. Hadjsaid. Distribution network long term planning methods comparison with respect to DG penetration. In *Innovation for Sustainable Production*, pages 1–7, Avril 2008.
- [85] Z. Hu and F. Li. Cost-benefit analyses of active distribution network management, Part II : Investment reduction analysis. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 3(3) :1075–1081, Septembre 2012.
- [86] F. C. Schweppe and J. Wildes. Power system static-state estimation, part i : Exact model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(1) :120–125, Janvier 1970.
- [87] F. F. Wu. Power system state estimation : a survey. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 12(2) :80 – 87, Avril 1990.
- [88] A. Monticelli. Electric power system state estimation. *Proceedings of the IEEE*, 88(2) :262–282, Février 2000.

- [89] V. Terzija, G. Valverde, D. Cai, P. Regulski, V. Madani, J. Fitch, S. Skok, M. M. Begovic, and A. Phadke. Wide-area monitoring, protection, and control of future electric power networks. *Proceedings of the IEEE*, 99(1) :80–93, Janvier 2011.
- [90] A. Gomez-Exposito, A. Abur, A. de la Villa Jaen, and C. Gomez-Quiles. A multilevel state estimation paradigm for smart grids. *Proceedings of the IEEE*, 99(6) :952–976, Juin 2011.
- [91] K. Maheshwari, M. Lim, L. Wang, K. Birman, and R. van Renesse. Toward a reliable, secure and fault tolerant smart grid state estimation in the cloud. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2013 IEEE PES*, pages 1–6, Février 2013.
- [92] R. A. Walling and N. W. Miller. Distributed generation islanding-implications on power system dynamic performance. In *Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE*, volume 1, pages 92–96 vol.1, Juillet 2002.
- [93] F. De Mango, M. Liserre, A. Dell’Aquila, and A. Pigazo. Overview of anti-islanding algorithms for pv systems. Part I : Passive methods. In *Power Electronics and Motion Control Conference, 2006. EPE-PEMC 2006. 12th International*, pages 1878–1883, Août 2006.
- [94] P. Mahat, Zhe Chen, and B. Bak-Jensen. Review of islanding detection methods for distributed generation. In *Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies, 2008. DRPT 2008. Third International Conference on*, pages 2743–2748, Avril 2008.
- [95] A. Timbus, A. Oudalov, and C. N. M. Ho. Islanding detection in smart grids. In *2010 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, pages 3631–3637, Septembre 2010.
- [96] V. Gabrion, D. Klaja, S. Emelin, S. Grenard, and A. Minaud. Requirement to enlarge interface protections frequency ranges for generators connected to distribution networks : Study of alternatives and solution proposal. In *PowerTech, 2015 IEEE Eindhoven*, pages 1–6, Juin 2015.
- [97] H. Jimenez, H. Calleja, R. González, J. Huacuz, and J. Lagunas. The impact of photovoltaic systems on distribution transformer : A case study. *Energy Conversion and Management*, 47(4) :311 – 321, Mars 2006.
- [98] E. Demirok, D. Sera, R. Teodorescu, P. Rodriguez, and U. Borup. Clustered pv inverters in lv networks : An overview of impacts and comparison of voltage control strategies. In *Electrical Power Energy Conference (EPEC), 2009 IEEE*, pages 1–6, Octobre 2009.
- [99] A. Toliyat, A. Kwasinski, and F. M. Uriarte. Effects of high penetration levels of residential photovoltaic generation : Observations from field data. In *Renewable Energy Research and Applications (ICRERA), 2012 International Conference on*, pages 1–6, Novembre 2012.
- [100] B. Meyer, M. Fiedeldey, H. Mueller, C. Hoffman, R. Koeberle, and J. Bamberger. Impact of large share of renewable generation on investment costs at the example of AUW distribution network. In *Electricity Distribution (CIRED 2013), 22nd International Conference and Exhibition on*, pages 1–4, Juin 2013.

- [101] F. M. Uriarte, A. Toliyat, A. Kwasinski, and R. E. Hebner. Consumer-data approach to assess the effect of residential grid-tied photovoltaic systems and electric vehicles on distribution transformers. In *2014 IEEE 5th International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG)*, pages 1–8, Juin 2014.
- [102] T. Stetz. *Autonomous Voltage Control Strategies in Distribution Grids with Photovoltaic Systems : Technical and Economic Assessment*. Thèse, Kassel university, Décembre 2013.
- [103] J. H. Braslavsky, J. K. Ward, and L. Collins. A stability vulnerability in the interaction between volt-var and volt-watt response functions for smart inverters. In *2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 733–738, Septembre 2015.
- [104] J. Machowski, J. Bialek, and J. Bumby. *Power system dynamics : stability and control*. John Wiley & Sons, Chichester, U.K., 2011.
- [105] E. F. Mogos. *Production décentralisée dans les réseaux de distribution, étude pluridisciplinaire de la modélisation pour le contrôle des sources*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Juillet 2005.
- [106] Y. Wang. *Evaluation de la performance des réglages de fréquence des éoliennes à l'échelle du système électrique : application à un cas insulaire*. Thèse, Ecole Centrale de Lille, Novembre 2012.
- [107] D. Lu. *Conception et contrôle d'un générateur PV actif à stockage intégré Application à l'agrégation de producteurs-consommateurs dans le cadre d'un micro réseau intelligent urbain*. Thèse, Ecole Centrale de Lille, Décembre 2010.
- [108] P. Kundur, N. J. Balu, and M. G. Lauby. *Power system stability and control*. McGraw-hill, New-York, NY, USA, 1994.
- [109] J.-C. Sabonnadière and N. Hadjsaïd. *Lignes et réseaux électriques 1 : lignes d'énergie électrique*, volume 1. Hermès-Lavoisier, 2007.
- [110] B. Stott and O. Alsac. Fast decoupled load flow. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 93(3) :859–869, Mai 1974.
- [111] D. Shirmohammadi, H. W. Hong, A. Semlyen, and G. X. Luo. A compensation-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(2) :753–762, Mai 1988.
- [112] S. Bolognani and S. Zampieri. On the existence and linear approximation of the power flow solution in power distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 31(1) :163–172, Janvier 2016.
- [113] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.-H. Ho, X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis, and S. Yovine. The algorithmic analysis of hybrid systems. *Theoretical Computer Science*, 138(1) :3–34, Février 1995.
- [114] D. Viault and P. Boucher. Systèmes non linéaires : Méthode du premier harmonique. *Techniques de l'ingénieur : Modélisation et analyse de systèmes asservis*, Cahier R(7190), Janvier 1983.

- [115] D. G. Luenberger. *Introduction to dynamic systems : theory, models, and applications*. Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1979.
- [116] M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :555–559, Avril 1998.
- [117] M. S. Branicky. Stability of hybrid systems : state of the art. In *Decision and Control, Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 1, pages 120–12, Décembre 1997.
- [118] G. Ferrari-Trecate, F. A. Cuzzola, D. Mignone, and M. Morari. Analysis of discrete-time piecewise affine and hybrid systems. *Automatica*, 38(12) :2139 – 2146, Décembre 2002.
- [119] A. I. Lur’e and V. N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Applied mathematics and mechanics*, 8(3) :246–248, 1944.
- [120] C. A. Cavichioli Gonzaga, M. Jungers, J. Daafouz, and E. B. Castelan. A new class of Lyapunov functions for nonstandard switching systems : The stability analysis problem. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 411–416, Décembre 2011.
- [121] J. Louis, M. Jungers, and J. Daafouz. Switching control consistency of switched Lur’e systems with application to digital control design with non uniform sampling. In *Control Conference (ECC), 2015 European*, pages 1754–1759, Juillet 2015.
- [122] T. A. Henzinger. The theory of hybrid automata. In *Proceedings of the 11th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pages 278–292, 1996.
- [123] R. Milner. *Communication and concurrency*. Prentice Hall, New-York, NY, USA, 1989.
- [124] E. M. Clarke and E. A. Emerson. Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic. In *Workshop on Logic of Programs*, volume 131 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–71, 1981.
- [125] R. Alur, T. A. Henzinger, G. Lafferriere, and G. J. Pappas. Discrete abstractions of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7) :971–984, Juillet 2000.
- [126] Thomas A. Henzinger, Peter W. Kopke, Anuj Puri, and Pravin Varaiya. What’s decidable about hybrid automata? In *Proceedings of the Twenty-seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’95, pages 373–382, New York, NY, USA, 1995. ACM.
- [127] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. Macmillan, London, U.K., 1976.
- [128] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, FR, 1959.
- [129] D. B. West. *Introduction to graph theory*, volume 2. Prentice Hall, 2001.
- [130] M. Herceg, M. Kvasnica, C.N. Jones, and M. Morari. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In *Proc. of the European Control Conference*, pages 502–510, Zürich, Switzerland, Juillet 2013. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt>.
- [131] Enedis. Etude de l’impact sur la tenue thermique et sur le plan de tension des ouvrages en réseau pour le raccordement d’une production décentralisée en HTA, Février 2016. Dernière consultation : 13/05/2016.

- 
- [132] C. D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*, volume 2, chapter Perron-Frobenius Theory Of Nonnegative Matrices. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.



## Annexe A

# Illustration du calcul de la matrice d'admittance complexe d'un réseau

### A.1 Présentation de l'exemple

Nous considérons ici un exemple simple d'un réseau théorique composé de cinq nœuds afin d'illustrer le calcul de la matrice d'admittance complexe d'un réseau (figure A.1).

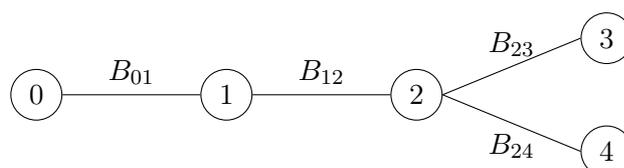


Figure A.1 – Schéma du réseau théorique considéré

On notera  $\underline{V}_i$  la tension entre phase et neutre au nœud  $i$  et  $\underline{I}_i$  le courant injecté au réseau au nœud  $i$ . La tension au nœud 0 est supposée fixe et est prise comme référence des phases.

### A.2 Mise en équation du réseau

Afin de mettre en équation le comportement de ce réseau, nous allons le décrire grâce à un modèle en  $\Pi$ . Dans ce modèle,  $\underline{Y}_{ij}^b$  représentera l'admittance complexe de la branche entre les nœuds  $i$  et  $j$  (égale à l'inverse de l'impédance) et  $\underline{Y}_{ij}^f$  représenteront les admittances de fuite de cette branche réparties entre l'amont et l'aval de la branche.

Le courant injecté au nœud  $i$  par tous les clients qui y sont raccordés sera noté  $\underline{I}_i$ . Le courant circulant dans l'admittance de la branche sera noté  $\underline{I}_{ij}^b$ , celui circulant dans l'admittance de fuite amont sera noté  $\underline{I}_{ij}^{am}$  et dans l'admittance aval sera noté  $\underline{I}_{ij}^{av}$ .



En injectant (A.2) et (A.3) dans (A.1), on peut écrire :

$$\begin{cases} \underline{I}_0 &= (\underline{Y}_{01}^b + \frac{Y_{01}^f}{2})V_0 - \underline{Y}_{01}^b V_1 \\ \underline{I}_1 &= -\underline{Y}_{01}^b V_0 + (\underline{Y}_{12}^b + \underline{Y}_{01}^b + \frac{Y_{01}^f}{2} + \frac{Y_{12}^f}{2})V_1 - \underline{Y}_{12}^b V_2 \\ \underline{I}_2 &= -\underline{Y}_{12}^b V_1 + (\underline{Y}_{23}^b + \underline{Y}_{23}^b + \underline{Y}_{24}^b + \frac{Y_{12}^f}{2} + \frac{Y_{23}^f}{2} + \frac{Y_{24}^f}{2})V_2 - \underline{Y}_{23}^b V_3 - \underline{Y}_{24}^b V_4 \\ \underline{I}_3 &= -\underline{Y}_{23}^b V_2 + (\underline{Y}_{23}^b + \frac{Y_{23}^f}{2})V_3 \\ \underline{I}_4 &= -\underline{Y}_{24}^b V_2 + (\underline{Y}_{24}^b + \frac{Y_{24}^f}{2})V_4 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

### A.3 Matrice d'admittance

La matrice d'admittance du réseau, notée  $\underline{\mathbf{Y}}$ , permet de calculer les courants injectés à chaque noeud en fonction des tensions des différents noeuds du réseau.

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{V}} \quad (\text{A.5})$$

avec  $\underline{\mathbf{I}} = [\underline{I}_0 \dots \underline{I}_4]^T$  le vecteur des courants injectés aux différents noeuds et  $\underline{\mathbf{V}} = [V_0 \dots V_4]^T$  le vecteur des tensions.

Pour déterminer l'expression formelle de la matrice d'admittance, il faut mettre sous forme matricielle (A.4).

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{01}^b + \frac{Y_{01}^f}{2} & -\underline{Y}_{01}^b & 0 & 0 & 0 \\ -\underline{Y}_{01}^b & \underline{Y}_{12}^b + \underline{Y}_{01}^b + \frac{Y_{01}^f}{2} + \frac{Y_{12}^f}{2} & -\underline{Y}_{12}^b & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{Y}_{12}^b & \underline{Y}_{12}^b + \underline{Y}_{23}^b + \underline{Y}_{24}^b + \frac{Y_{12}^f}{2} + \frac{Y_{23}^f}{2} + \frac{Y_{24}^f}{2} & -\underline{Y}_{23}^b & -\underline{Y}_{24}^b \\ 0 & 0 & -\underline{Y}_{23}^b & \underline{Y}_{23}^b + \frac{Y_{23}^f}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{Y}_{24}^b & 0 & \underline{Y}_{24}^b + \frac{Y_{24}^f}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Pour conclure, on retrouve l'expression générale de la matrice d'admittance  $\underline{\mathbf{Y}}$  proposée (2.10) avec :

- $\underline{Y}_{ii}$  la somme des admittances – de fuite et de branche – se terminant au noeud  $i$  ;
- $\underline{Y}_{ij}$  l'opposé de la somme des admittances des branches reliant les noeuds  $i$  et  $j$ , si les noeuds sont reliés.



## Annexe B

# Établissement des équations de répartition des charges

Dans cette annexe, nous allons démontrer, à partir des équations des nœuds, le système d'équations connu sous le nom d'équation de répartition des charges.

### B.1 Définitions

Soit un réseau électrique de distribution composé de  $n$  nœuds. On notera dans la suite  $\mathcal{N}$  l'ensemble de ces  $n$  nœuds.

Pour un nœud  $i \in \mathcal{N}$  quelconque, on définit :

- le courant complexe injecté au réseau au nœud  $i$  que l'on notera  $\underline{I}_i \in \mathbb{C}$  ;
- la tension complexe entre phase et neutre au nœud  $i$  que l'on notera  $\underline{V}_i \in \mathbb{C}$ .

On définit aussi  $\underline{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice d'admittance complexe comme illustré par l'annexe A où  $\underline{y}_{ij} \in \mathbb{C}$  désigne le terme de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne de la matrice.

Dans la suite,  $\underline{S}_i \in \mathbb{C}$  désigne la somme des puissances apparentes complexes injectées au nœud  $i$ . La partie réelle de  $\underline{S}_i$  représente la puissance active ( $P_i \in \mathbb{R}$ ) injectée au nœud  $i$  et la partie imaginaire de  $\underline{S}_i$  représente la puissance réactive ( $Q_i \in \mathbb{R}$ ) injectée au nœud  $i$ .

$$\underline{S}_i = P_i + jQ_i \tag{B.1}$$

Si le bilan des clients raccordés au nœud  $i$  est :

- consommateur, alors  $P_i < 0$  et  $Q_i < 0$  ;
- producteur, alors  $P_i > 0$  mais on ne peut rien dire du signe de  $Q_i$  ;
- neutre alors  $P_i = Q_i = 0$ .

## B.2 Expression des courants injectés

### B.2.1 A partir des équations des nœuds

On rappelle que l'on peut écrire la loi des nœuds au nœud  $i$  sous la forme (2.10) :

$$\underline{I}_i = \sum_{k \in \mathcal{N}} \underline{\mathcal{Y}}_{ik} \cdot \underline{V}_k \quad (\text{B.2})$$

### B.2.2 A partir du bilan des puissances

Par définition, la puissance injectée au réseau au nœud  $i \in \mathcal{N}$  peut s'écrire à partir de la tensions et du courant injecté en ce nœud :

$$\underline{S}_i = \underline{V}_i \cdot \underline{I}_i^* \quad (\text{B.3})$$

Où  $\underline{I}_i^*$  désigne le complexe conjugué associé à  $\underline{I}_i$ .

On souhaite exprimer le courant injecté au nœud  $i$  à partir de cette équation. On remplace la notion de puissance apparente par son expression en fonction des puissances active et réactive (B.1) :

$$\underline{I}_i^* = \frac{P_i + jQ_i}{\underline{V}_i} \quad (\text{B.4})$$

Finalement, on peut écrire que :

$$\underline{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\underline{V}_i^*} \quad (\text{B.5})$$

## B.3 Équations de répartition des charges

Nous avons obtenu deux expressions du courant injecté au nœud  $i$ , l'une en fonction des paramètres du réseau (B.1) et l'autre en fonction du bilan des puissances injectées au nœud  $i$  (B.5).

Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{P_i - jQ_i}{\underline{V}_i^*} = \sum_{k=1}^n \underline{\mathcal{Y}}_{ik} \cdot \underline{V}_k \quad (\text{B.6})$$

Ceci peut se réécrire sous la forme :

$$P_i - jQ_i = \underline{V}_i^* \cdot \left( \sum_{k=1}^n \underline{\mathcal{Y}}_{ik} \cdot \underline{V}_k \right) \quad (\text{B.7})$$

Afin de séparer les équations de la partie réelle et de la partie imaginaire, nous définissons, pour tout  $(k, l) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  :

$$\begin{cases} \underline{V}_k &= V_k \cdot e^{j\delta_k} \\ \underline{\mathcal{Y}}_{kl} &= \mathcal{Y}_{kl} \cdot e^{j\theta_{kl}} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Nous introduisons les modules et phases des tensions et des admittances complexes dans (B.7).

$$P_i - jQ_i = \sum_{k=1}^n \left( \mathcal{Y}_{ik} \cdot V_i \cdot V_k \cdot e^{j(\theta_{ik} - \delta_i + \delta_k)} \right) \quad (\text{B.9})$$

Finalement, on séparant la partie réelle et imaginaire de l'équation ci-dessus, on obtient l'expression du système des équations de répartition des charges comme on le trouve classiquement dans la littérature [108] :

$$\begin{cases} P_i &= \sum_{k=1}^n (\mathcal{Y}_{ik} \cdot V_i \cdot V_k \cdot \cos(\theta_{ik} - \delta_i + \delta_k)) \\ Q_i &= -\sum_{k=1}^n (\mathcal{Y}_{ik} \cdot V_i \cdot V_k \cdot \sin(\theta_{ik} - \delta_i + \delta_k)) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Ces équations sont valables quel que soit  $i \in \mathcal{N}$ . Ainsi, les équations de répartition des charges sont un système de  $2n$  équations à  $2n$  inconnues. Le but est de calculer les modules et phases des tensions en chacun des  $n$  nœuds du réseau à partir des puissances active et réactive injectées en chacun des nœuds. Il apparaît clairement que ce système n'est ni linéaire ni explicite. Les méthodes de résolution classiques – comme le pivot de Gauss – ne peuvent donc pas s'appliquer. Une résolution numérique itérative est souvent privilégiée.



## Annexe C

# Étude d'atteignabilité arrière pour exprimer des conditions suffisantes à la stabilité

On détaille dans cette annexe l'étude d'atteignabilité arrière permettant d'obtenir des conditions suffisantes à l'inexistence de chacun des cycles simples de la liste 4.2. Celles-ci sont obtenues grâce à un raisonnement par l'absurde. Dans un premier temps, l'existence du cycle entre les zones de fonctionnement  $i$  et  $j$  est supposée. Ceci implique, notamment, que la zone  $i$  est atteignable depuis  $j$  et inversement. Ainsi nous exprimons des conditions portant sur les paramètres du système qui sont nécessaires à l'existence du cycle. Pour finir, de ces conditions nécessaires on déduit des conditions suffisantes à l'inexistence du cycle entre les zones  $i$  et  $j$ .

Avant de détailler les calculs, on rappelle les caractéristiques du système étudié.

### C.1 Système étudié

La figure C.1 représente le schéma du système étudié. Le tableau C.1 rappelle les équations de la dynamique en boucle fermée du système dans chacune des cinq zones de fonctionnement ainsi que le domaine des tensions filtrées associé.

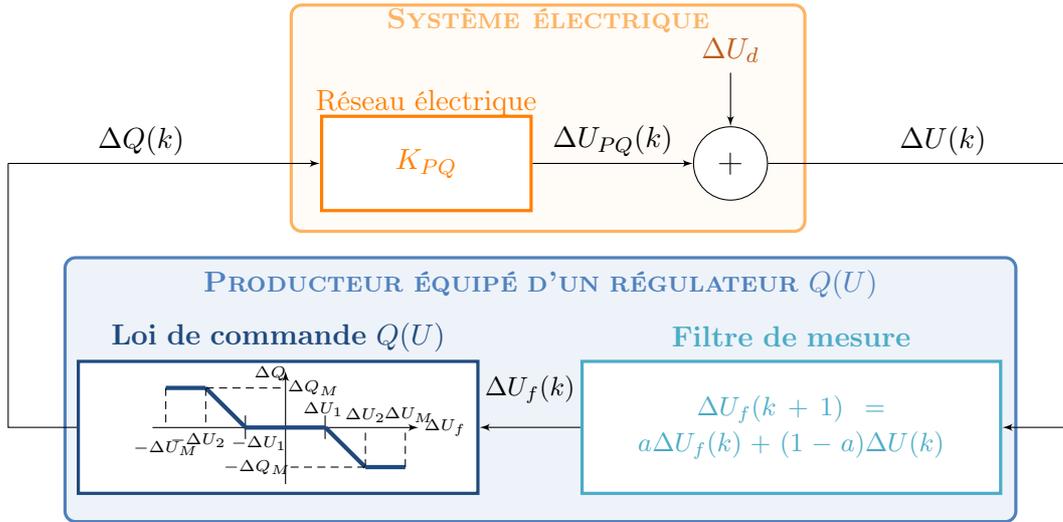


Figure C.1 – Modèle proposé pour représenter un réseau électrique accueillant un seul producteur équipé d'un régulateur  $Q(U)$

Zone 1 :	$\begin{cases} -\Delta U_M \leq \Delta U_f(k) \leq -\Delta U_2 \\ \Delta U_f(k+1) = a\Delta U_f(k) + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \end{cases}$
Zone 2 :	$\begin{cases} -\Delta U_2 \leq \Delta U_f(k) \leq -\Delta U_1 \\ \Delta U_f(k+1) = (a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f(k) + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \end{cases}$
Zone 3 :	$\begin{cases} -\Delta U_1 \leq \Delta U_f(k) \leq \Delta U_1 \\ \Delta U_f(k+1) = a\Delta U_f(k) + (1-a)\Delta U_d \end{cases}$
Zone 4 :	$\begin{cases} \Delta U_1 \leq \Delta U_f(k) \leq \Delta U_2 \\ \Delta U_f(k+1) = (a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f(k) + (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \end{cases}$
Zone 5 :	$\begin{cases} \Delta U_2 \leq \Delta U_f(k) \leq \Delta U_M \\ \Delta U_f(k+1) = a\Delta U_f(k) + (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\Delta Q_M \end{cases}$

Tableau C.1 – Dynamique en boucle fermée du système dans chacune des zones de fonctionnement

## C.2 Cycle entre les zones 3 et 5

Dans la partie 4.3.2, les calculs ont été détaillés pour le cycle  $3 \leftrightarrow 5$ . On retient qu'il a été montré que :

$$\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \quad \Rightarrow \quad \overline{C}_{35} \quad (\text{C.1})$$

Les mêmes calculs sont réalisés pour exprimer une condition nécessaire à l'existence du cycle entre les zones de fonctionnement 1 et 3. D'après le tableau C.1, la dynamique et l'invariant de la zone 1 sont similaires à ceux de la zone 5. Ainsi, les calculs pour l'existence du cycle  $1 \leftrightarrow 3$  sont similaires à ceux pour l'existence du cycle  $3 \leftrightarrow 5$ . Finalement on montre que :

$$\frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \quad \Rightarrow \quad \overline{C_{13}} \text{ et } \overline{C_{35}} \quad (\text{C.2})$$

Nous nous intéressons maintenant aux autres cycles de la liste 4.2 et plus particulièrement à  $C_{23}$  et  $C_{34}$  qui sont similaires.

### C.3 Cycle entre les zones 2 et 3 et entre les zones 3 et 4

Dans cette partie, les calculs sont illustrés sur l'étude du cycle  $2 \leftrightarrow 3$ . On commence par supposer l'existence de ce cycle. On peut alors dire que :

$$C_{23} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_3) \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

À partir de ce système, nous allons exprimer des conditions nécessaires à l'existence du cycle.

#### C.3.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_2$ en venant de $\mathcal{D}_3$

On peut dire que :

$$Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} : \begin{cases} \Delta x \in \mathcal{D}_3 \\ Dyn(3) \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_2 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Grâce à l'expression de la dynamique dans la zone de fonctionnement 3, on peut dire que  $\Delta \mathbf{x}$  vérifie aussi :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_1 \\ \frac{\Delta U_d}{a} \leq \Delta U_d \leq \frac{\Delta U_d}{1-a} \\ -\Delta U_2 \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d \leq -\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

On sait que  $0 \leq a < 1$ , donc on peut dire que le système précédent implique :

$$\begin{cases} -a\Delta U_1 \leq a\Delta U_f \leq a\Delta U_1 \\ -\Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_f \leq -\Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

On obtient ainsi deux encadrements de  $a\Delta U_f$ , pour qu'il existe un tel point de fonctionnement, il faut que :

$$\begin{cases} -a\Delta U_1 \leq -\Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d \\ -\Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_2$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_3$ .

$$Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset \Rightarrow -\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d \leq -(1-a)\Delta U_1 \quad (\text{C.8})$$

### C.3.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_3$ en venant de $\mathcal{D}_2$

On peut dire que :

$$Pre(\mathcal{D}_3) \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} : \begin{cases} \Delta x \in \mathcal{D}_2 \\ Dyn(2) \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_3 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_2 \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_1 \\ \frac{\Delta U_d}{\Delta U_1} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_1} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_1} \\ -\Delta U_1 \leq (a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq \Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

On ne peut rien dire a priori du signe de  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma$ . Il convient alors de distinguer deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

On peut dire que (C.10) implique que :

$$\begin{cases} -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \leq \Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

On note que  $Q_M = -\sigma(\Delta U_2 - \Delta U_1)$ . Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_3$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

$$-(1-a)\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_1 + a\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (\text{C.12})$$

**Cas 2 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$

On procède de même dans ce cas. On peut dire que (C.10) implique que :

$$\begin{cases} -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \leq \Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_3$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$ .

$$a\Delta U_2 - \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq (1+a)\Delta U_1 \quad (\text{C.14})$$

### C.3.3 Condition nécessaire à $C_{23}$

On combine les conditions nécessaires au passage de  $\mathcal{D}_3$  vers  $\mathcal{D}_2$  et inversement afin d'obtenir des conditions nécessaires à l'existence du cycle. Pour ce faire, on distingue à nouveau deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

À partir de (C.8) et (C.12), on peut écrire que :

$$\begin{cases} -\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1 - a)\Delta U_d \leq -(1 - a)\Delta U_1 \\ -(1 - a)\Delta U_1 \leq (1 - a)\Delta U_d \leq \Delta U_1 + a\Delta U_2 - (1 - a)K_{PQ}Q_M \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

On en déduit donc que  $\Delta U_d = -\Delta U_1$ . Si on reprend (C.6) et (C.10), on peut aussi montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta U_f(k) = -\Delta U_1$ . On remarque que ce point est à la frontière entre les domaines  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ . Donc le point seul point de fonctionnement qui appartienne à  $C_{23}$  lorsque  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$  est à la frontière entre les deux domaines. Ce point de fonctionnement n'est pas instable puisque la tension filtrée reste constante. Finalement, le cycle entre les zones 2 et 3 ne peut pas avoir lieu si  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

**Cas 2 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$

À partir de (C.8) et (C.14), on peut écrire que :

$$\begin{cases} -\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1 - a)\Delta U_d \leq -(1 - a)\Delta U_1 \\ \Delta U_2 - \Delta U_1 + -(1 - a)K_{PQ}Q_M \leq (1 - a)\Delta U_d \leq (1 + a)\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

L'existence d'un tel point de fonctionnement n'est possible que si :

$$\begin{cases} -\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1 + a)\Delta U_1 \\ \Delta U_2 - \Delta U_1 + -(1 - a)K_{PQ}Q_M \leq -(1 - a)\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

La première équation du système est toujours vérifiée et la deuxième revient à imposer  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$ . On n'a donc pas exprimé de condition nécessaire plus large que celle issue du premier cas. On retient que :

$$C_{23} \Rightarrow a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0 \quad (\text{C.18})$$

### C.3.4 Condition suffisante à la stabilité des cycles entre les zones 2 et 3 et les zones 3 et 4

Les calculs menés dans le cas du cycle  $3 \leftrightarrow 4$ , qui ne sont pas détaillés ici, permettent de conclure que :

$$C_{34} \Rightarrow a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0 \quad (\text{C.19})$$

Finalement, à partir de (C.18) et (C.19) et en remarquant que  $1 - K_{PQ}\sigma > 0$ , on peut exprimer une condition suffisante à  $\overline{C_{23}}$  et  $\overline{C_{34}}$ .

$$\frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \quad \Rightarrow \quad \overline{C_{23}}, \overline{C_{34}} \quad (\text{C.20})$$

## C.4 Cycle entre les zones 1 et 2 et entre les zones 4 et 5

Dans cette partie, les calculs sont illustrés sur l'étude du cycle  $1 \leftrightarrow 2$ . On commence par supposer l'existence de ce cycle. On peut alors dire que :

$$C_{12} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

À partir de ce système, nous allons exprimer des conditions nécessaires à l'existence du cycle.

### C.4.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_2$ en venant de $\mathcal{D}_1$

On peut dire que :

$$Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} : \begin{cases} \Delta x \in \mathcal{D}_1 \\ Dyn(1) \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_2 \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

Grâce à l'expression de la dynamique dans la zone de fonctionnement 1, on peut dire que  $\Delta \mathbf{x}$  vérifie aussi :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_M \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_2 \\ \underline{\Delta U_d} \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U_d} \\ -\Delta U_2 \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}Q_M \leq -\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Ceci implique que :

$$\begin{cases} -a\Delta U_M \leq -\Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}Q_M \\ -\Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq a\Delta U_2 \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_2$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_1$  ( $Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset$ ).

$$-(1-a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_M - \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (\text{C.25})$$

#### C.4.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_1$ en venant de $\mathcal{D}_2$

On peut dire que :

$$Pre(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} : \begin{cases} \Delta x \in \mathcal{D}_2 \\ Dyn(2) \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_1 \end{cases} \quad (C.26)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_2 \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_1 \\ \underline{\Delta U_d} \leq \Delta U_d \leq \overline{\Delta U_d} \\ -\Delta U_M \leq (a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -\Delta U_2 \end{cases} \quad (C.27)$$

On ne peut rien dire a priori du signe de  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma$ . Il convient alors de distinguer deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

On peut dire que (C.27) implique que :

$$\begin{cases} -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \leq -\Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_M - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \end{cases} \quad (C.28)$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_1$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

$$-\Delta U_M + a\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d \leq -(1-a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (C.29)$$

**Cas 2 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$

On procède de même dans ce cas. On peut dire que (C.27) implique que :

$$\begin{cases} -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \leq -\Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_M - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \end{cases} \quad (C.30)$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_1$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$ .

$$a\Delta U_2 - \Delta U_M - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_1 - \Delta U_2 \quad (C.31)$$

#### C.4.3 Condition nécessaire à $C_{12}$

On combine les conditions nécessaires au passage de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_2$  et inversement afin d'obtenir des conditions nécessaires à l'existence du cycle. Pour ce faire, on distingue à nouveau deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

À partir de (C.25) et (C.29), on peut écrire que :

$$\begin{cases} -(1-a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_M - \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \\ -\Delta U_M + a\Delta U_1 & \leq (1-a)\Delta U_d \leq -(1-a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

On en déduit donc que  $\Delta U_d = -\Delta U_2 - K_{PQ}Q_M$ . Si on reprend (C.23) et (C.27), on peut aussi montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta U_f(k) = -\Delta U_2$ . On remarque que ce point est à la frontière entre les domaines  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_1$ . Donc le point seul point de fonctionnement qui appartienne à  $C_{12}$  lorsque  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$  est à la frontière entre les deux domaines. Comme précédemment, on peut en conclure que le cycle entre les zones 1 et 2 ne peut pas avoir lieu si  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

**Cas 2 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$

À partir de (C.25) et (C.31), on peut écrire que :

$$\begin{cases} -(1-a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_M - \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \\ a\Delta U_2 - \Delta U_M - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_1 - \Delta U_2 \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

L'existence d'un tel point de fonctionnement n'est possible que si :

$$\begin{cases} -(1-a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq a\Delta U_1 - \Delta U_2 \\ a\Delta U_2 - \Delta U_M - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq a\Delta U_M - \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

La deuxième équation du système est toujours vérifiée et la première revient à imposer  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$ . Finalement, on a montré que :

$$C_{12} \Rightarrow a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0 \quad (\text{C.35})$$

#### C.4.4 Condition suffisante à la stabilité des cycles entre les zones 1 et 2 et les zones 4 et 5

Les calculs menés dans le cas du cycle  $4 \leftrightarrow 5$  permettent de conclure que :

$$C_{45} \Rightarrow a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0 \quad (\text{C.36})$$

Finalement, à partir de (C.35) et (C.36), on peut exprimer une condition suffisante à  $\overline{C}_{12}$  et  $\overline{C}_{45}$ .

$$\frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \Rightarrow \overline{C}_{12}, \overline{C}_{45} \quad (\text{C.37})$$

## C.5 Cycle entre les zones 1 et 4 et entre les zones 2 et 5

Dans cette partie, les calculs sont illustrés sur l'étude du cycle  $1 \leftrightarrow 4$ . On commence par supposer l'existence de ce cycle. On peut alors dire que :

$$C_{14} \Rightarrow \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_4) \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{D}_4 \neq \emptyset \end{cases} \quad (C.38)$$

À partir de ce système, nous allons exprimer des conditions nécessaires à l'existence du cycle.

### C.5.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_4$ en venant de $\mathcal{D}_1$

Dire que  $\mathcal{D}_4$  est atteignable depuis  $\mathcal{D}_1$  implique qu'il existe au moins un point de fonctionnement  $\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$  qui appartient à  $\mathcal{D}_1$  et dont le successeur est dans  $\mathcal{D}_4$ . Pour que ceci soit possible, il est nécessaire que  $\Delta \mathbf{x}$  vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta U_M \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_2 \\ \Delta U_1 \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}Q_M \leq \Delta U_2 \end{cases} \quad (C.39)$$

À partir de ce système, on peut exprimer une condition nécessaire au passage de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_4$  portant sur le terme de perturbation.

$$a\Delta U_2 + \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq a\Delta U_M + \Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (C.40)$$

### C.5.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_1$ en venant de $\mathcal{D}_4$

Dire que  $\mathcal{D}_1$  est atteignable depuis  $\mathcal{D}_4$  implique qu'il existe au moins un point de fonctionnement  $\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_2 \\ \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \leq \Delta U_d \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_d} \\ -\Delta U_M \leq (a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -\Delta U_2 \end{cases} \quad (C.41)$$

On ne peut rien dire a priori du signe de  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma$ . Il convient alors de distinguer deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

On peut dire que (C.41) implique que :

$$\begin{cases} (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 & \leq -\Delta U_2 - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_M - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 & \leq (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \end{cases} \quad (\text{C.42})$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_1$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_4$  quand  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

$$-\Delta U_M - a\Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M \leq (1 - a)\Delta U_d \leq -\Delta U_2 - a\Delta U_1 \quad (\text{C.43})$$

**Cas 2 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$

Dans ce cas, on peut dire que (C.41) implique que :

$$\begin{cases} (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 & \leq -\Delta U_2 - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_M - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 & \leq (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

Finalement, on obtient une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_1$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_4$  quand  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$ .

$$-a\Delta U_1 - \Delta U_M \leq (1 - a)\Delta U_d \leq -(1 - a)\Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M \quad (\text{C.45})$$

### C.5.3 Condition nécessaire à $C_{14}$

On combine les conditions nécessaires au passage de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_4$  et inversement afin d'obtenir des conditions nécessaires à l'existence du cycle. Pour ce faire, on distingue à nouveau deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

Pour que le système vérifie (C.40) et (C.43), il est nécessaire que :

$$\begin{cases} a\Delta U_2 + \Delta U_1 - (1 - a)K_{PQ}Q_M & \leq -\Delta U_2 - a\Delta U_1 \\ -\Delta U_M - a\Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M & \leq a\Delta U_M + \Delta U_2 - (1 - a)K_{PQ}Q_M \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

À partir de la première équation du système, on peut écrire que :

$$(1 + a)\frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{\Delta U_2 - \Delta U_1} \leq (1 - a)K_{PQ}(-\sigma) \quad (\text{C.47})$$

$$\Leftrightarrow (1 + a)\left(1 + \frac{2\Delta U_1}{\Delta U_2 - \Delta U_1}\right) + (1 - a)K_{PQ}\sigma \leq 0 \quad (\text{C.48})$$

$$\Leftrightarrow (1 + a)\left(1 + \frac{2\Delta U_1}{\Delta U_2 - \Delta U_1}\right) + (1 - a)K_{PQ}\sigma \leq 0 \quad (\text{C.49})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1+a)\frac{2\Delta U_1}{\Delta U_2 - \Delta U_1} + 1}_{0 \leq} + \underbrace{a + (1-a)K_{PQ}\sigma}_{0 \leq} \leq 0 \quad (\text{C.50})$$

Finalement, on en conclut que le cycle entre les zones 1 et 4 ne peut pas avoir lieu si  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

**Cas 2 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$

Pour que le système vérifie (C.40) et (C.43), il est nécessaire que :

$$\begin{cases} a\Delta U_2 + \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq -(1-a)\Delta U_2 + (1-a)K_{PQ}Q_M \\ -\Delta U_M - a\Delta U_1 & \leq a\Delta U_M + \Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \end{cases} \quad (\text{C.51})$$

À partir de ce système, on déduit une condition nécessaire à  $C_{14}$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$ .

$$C_{14} \Rightarrow a \leq \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} \quad (\text{C.52})$$

#### C.5.4 Condition suffisante à la stabilité des cycles entre les zones 1 et 4 et les zones 2 et 5

Les calculs menés dans le cas du cycle  $2 \leftrightarrow 5$  permettent de conclure que :

$$C_{25} \Rightarrow a \leq \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} \quad \text{et} \quad a \leq \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} \quad (\text{C.53})$$

Finalement, à partir de (C.52) et (C.53), on peut exprimer une condition suffisante à  $\overline{C_{14}}$  et  $\overline{C_{25}}$ .

$$\frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} < a \quad \text{ou} \quad \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \Rightarrow \overline{C_{14}}, \overline{C_{25}} \quad (\text{C.54})$$

### C.6 Cycle entre les zones 1 et 5

On commence par supposer l'existence de ce cycle. On peut alors dire que :

$$C_{14} \Rightarrow \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_5) \cap \mathcal{D}_1 \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{D}_5 \neq \emptyset \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

À partir de ce système, nous allons exprimer des conditions nécessaires à l'existence du cycle.

#### C.6.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_5$ en venant de $\mathcal{D}_1$

Dire que  $\mathcal{D}_5$  est atteignable depuis  $\mathcal{D}_1$  implique qu'il existe au moins un point de fonctionnement

$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$  qui appartient à  $\mathcal{D}_1$  et dont le successeur est dans  $\mathcal{D}_5$ . Pour que ceci soit

possible, il est nécessaire que  $\Delta \mathbf{x}$  vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta U_M \leq \Delta U_f & \leq -\Delta U_2 \\ \Delta U_2 \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq \Delta U_M \end{cases} \quad (\text{C.56})$$

À partir de ce système, on peut exprimer une condition nécessaire au passage de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_5$  portant sur le terme de perturbation.

$$(1+a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq (1+a)\Delta U_M - (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (\text{C.57})$$

### C.6.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_1$ en venant de $\mathcal{D}_5$

Dire que  $\mathcal{D}_1$  est atteignable depuis  $\mathcal{D}_5$  implique qu'il existe au moins un point de fonctionnement  $\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$  qui appartient à  $\mathcal{D}_5$  et dont le successeur est dans  $\mathcal{D}_1$ . Pour que ceci soit possible, il est nécessaire que  $\Delta \mathbf{x}$  vérifie :

$$\begin{cases} \Delta U_2 \leq \Delta U_f & \leq \Delta U_M \\ -\Delta U_M \leq a\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}Q_M & \leq -\Delta U_2 \end{cases} \quad (\text{C.58})$$

À partir de ce système, on peut exprimer une condition nécessaire au passage de  $\mathcal{D}_5$  vers  $\mathcal{D}_1$  portant sur le terme de perturbation.

$$-(1+a)\Delta U_M + (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq -(1+a)\Delta U_2 + (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (\text{C.59})$$

### C.6.3 Condition nécessaire à $C_{15}$

On combine les conditions nécessaires au passage de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_5$  (C.57) et inversement (C.59) afin d'obtenir des conditions nécessaires à l'existence du cycle. On montre que :

$$C_{15} \Rightarrow a \leq \frac{K_{PQ}Q_M - \Delta U_2}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} \quad (\text{C.60})$$

### C.6.4 Condition suffisante à la stabilité du cycles entre les zones 1 et 5

Finalement, à partir de (C.60), on peut exprimer une condition suffisante à  $\overline{C_{15}}$ .

$$\frac{K_{PQ}Q_M - \Delta U_2}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} < a \Rightarrow \overline{C_{15}} \quad (\text{C.61})$$

## C.7 Cycle entre les zones 2 et 4

On commence par supposer l'existence de ce cycle. On peut alors dire que :

$$C_{24} \Rightarrow \begin{cases} Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_4 \neq \emptyset \\ Pre(\mathcal{D}_4) \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (\text{C.62})$$

À partir de ce système, nous allons exprimer des conditions nécessaires à l'existence du cycle.

### C.7.1 Atteignabilité de $\mathcal{D}_4$ en venant de $\mathcal{D}_2$

On peut dire que :

$$Pre(\mathcal{D}_4) \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} : \begin{cases} \Delta x \in \mathcal{D}_2 \\ Dyn(2) \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_4 \end{cases} \quad (C.63)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_2 \leq \Delta U_f \leq -\Delta U_1 \\ \frac{\Delta U_d}{\Delta U_1} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_1} \leq \frac{\Delta U_d}{\Delta U_1} \\ \Delta U_1 \leq (a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f + (1-a)\Delta U_d + (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq \Delta U_2 \end{cases} \quad (C.64)$$

On ne peut rien dire a priori du signe de  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma$ . Il convient alors de distinguer deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

On peut dire que (C.64) implique que :

$$\begin{cases} -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \leq \Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ \Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \end{cases} \quad (C.65)$$

On en déduit une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_4$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

$$(1+a)\Delta U_1 \leq (1-a)\Delta U_d \leq (1+a)\Delta U_2 - (1-a)K_{PQ}Q_M \quad (C.66)$$

**Cas 2 :**  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$

On peut dire que (C.64) implique que :

$$\begin{cases} -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \leq \Delta U_2 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ \Delta U_1 - (1-a)\Delta U_d - (1-a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq -(a + (1-a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \end{cases} \quad (C.67)$$

On en déduit une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_4$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1-a)K_{PQ}\sigma < 0$ .

$$a\Delta U_2 + \Delta U_1 - (1-a)K_{PQ}Q_M \leq (1-a)\Delta U_d \leq \Delta U_2 + a\Delta U_1 \quad (C.68)$$

### C.7.2 Atteignabilité de $\mathcal{D}_2$ en venant de $\mathcal{D}_4$

On peut dire que :

$$Pre(\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{D}_4 \neq \emptyset \Rightarrow \exists \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} : \begin{cases} \Delta x \in \mathcal{D}_4 \\ Dyn(4) \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_2 \end{cases} \quad (\text{C.69})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta U_1 \leq \Delta U_f \leq \Delta U_2 \\ \frac{\Delta U_d}{- \Delta U_2} \leq \Delta U_d \leq \frac{\Delta U_2}{\Delta U_d} \\ - \Delta U_2 \leq (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_f + (1 - a)\Delta U_d - (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq - \Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.70})$$

On ne peut rien dire a priori du signe de  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma$ . Il convient alors de distinguer deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

On peut dire que (C.70) implique que :

$$\begin{cases} (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \leq -\Delta U_1 - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_2 - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \end{cases} \quad (\text{C.71})$$

On en déduit une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_2$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_4$  quand  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

$$-(1 + a)\Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M \leq (1 - a)\Delta U_d \leq -(1 + a)\Delta U_1 \quad (\text{C.72})$$

**Cas 2 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$

On peut dire que (C.70) implique que :

$$\begin{cases} (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_2 \leq -\Delta U_1 - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \\ -\Delta U_2 - (1 - a)\Delta U_d + (1 - a)K_{PQ}\sigma\Delta U_1 \leq (a + (1 - a)K_{PQ}\sigma)\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.73})$$

On en déduit une condition nécessaire pour que  $\mathcal{D}_4$  soit atteignable en venant de  $\mathcal{D}_2$  quand  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$ .

$$-\Delta U_2 - a\Delta U_1 \leq (1 - a)\Delta U_d \leq -\Delta U_1 - \Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M \quad (\text{C.74})$$

### C.7.3 Condition nécessaire à $C_{24}$

On combine les conditions nécessaires au passage de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_5$  et inversement afin d'obtenir des conditions nécessaires à l'existence du cycle. Pour ce faire, on distingue à nouveau deux cas.

**Cas 1 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$

Les équations (C.66) et (C.72) impliquent que :

$$\begin{cases} (1 + a)\Delta U_1 & \leq & -(1 + a)\Delta U_1 \\ -(1 + a)\Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M & \leq & (1 + a)\Delta U_2 - (1 - a)K_{PQ}Q_M \end{cases} \quad (\text{C.75})$$

On peut voir que la première équation est impossible. On peut donc dire que le cycle entre les zones 1 et 5 ne peut pas avoir lieu si  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \geq 0$ .

**Cas 2 :**  $a + (1 - a)K_{PQ}\sigma < 0$

Les équations (C.68) et (C.74) impliquent que :

$$\begin{cases} a\Delta U_2 + \Delta U_1 - (1 - a)K_{PQ}Q_M & \leq & -\Delta U_1 - \Delta U_2 + (1 - a)K_{PQ}Q_M \\ -\Delta U_2 - a\Delta U_1 & \leq & \Delta U_2 + a\Delta U_1 \end{cases} \quad (\text{C.76})$$

On peut remarquer que la deuxième équation est toujours vraie. Finalement, nous avons montré que :

$$C_{24} \Rightarrow a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \leq 0 \text{ et } a \leq \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}} \quad (\text{C.77})$$

#### C.7.4 Condition suffisante à la stabilité du cycles entre les zones 1 et 5

Finalement, à partir de (C.77), on peut exprimer une condition suffisante à  $\overline{C}_{24}$ .

$$\frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}} < a \quad \text{ou} \quad \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a \Rightarrow \overline{C}_{24} \quad (\text{C.78})$$

### C.8 Conclusion de l'étude d'atteignabilité arrière

Finalement, nous avons montré que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{-1 - K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a & \Rightarrow \overline{C}_{13} \text{ et } \overline{C}_{35} \\ \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a & \Rightarrow \overline{C}_{12}, \overline{C}_{23}, \overline{C}_{34} \text{ et } \overline{C}_{45} \\ \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} < a \quad \text{ou} \quad \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a & \Rightarrow \overline{C}_{14}, \overline{C}_{25} \\ \frac{K_{PQ}Q_M - \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}}{K_{PQ}Q_M + \frac{\Delta U_2 + \Delta U_1}{2}} < a \quad \text{ou} \quad \frac{-K_{PQ}\sigma}{1 - K_{PQ}\sigma} < a & \Rightarrow \overline{C}_{24} \\ \frac{K_{PQ}Q_M - \Delta U_2}{K_{PQ}Q_M + \Delta U_2} < a & \Rightarrow \overline{C}_{15} \end{array} \right. \quad (\text{C.79})$$

La discussion de ces résultats est ramenée dans le corps du mémoire (partie 4.3.2).



## Annexe D

# Étude d'atteignabilité avant pour caractériser les ensembles de points impliqués dans un cycle

### D.1 Objectif de l'étude

On détaille dans cette annexe l'expression des ensembles  $\mathcal{S}_{ij}$  et  $\mathcal{S}_{ji}$  en supposant l'existence du cycle  $i \leftrightarrow j$ . Nous allons montrer que ces ensembles sont nécessairement des droites pour un système dont la dynamique peut s'écrire à partir de  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} \gamma_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

On peut remarquer d'après le tableau 4.1, qu'avec ce type de loi de commande, dans toutes les zones de fonctionnement  $i \in \mathcal{N}_{PQ}$ , la dynamique associée peut s'écrire sous la forme de l'équation (D.1) avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = a \\ \alpha_2 = \alpha_4 = a + (1 - a)K_{PQ}\sigma \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 = -\gamma_5 = (1 - a)K_{PQ}Q_M \\ \gamma_2 = -\gamma_4 = (1 - a)K_{PQ}\Delta U_1\sigma \\ \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1 - a$$

### D.2 Caractérisation des points de $\mathcal{S}_{ij}$

Pour ce faire, considérons  $i$  et  $j$  deux zones de fonctionnement telles que le cycle  $i \leftrightarrow j$  existe. Les domaines de l'espace d'état continu  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$  associés à ces zones de fonctionnement (respectivement  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_j$ ) sont des polyèdres. Les dynamiques associées aux modes de fonctionnement permettant de construire  $\mathcal{S}_{ij}$  et  $\mathcal{S}_{ji}$  sont affines. On peut donc dire que les sous-ensembles  $\mathcal{S}_{ij}$  et

$\mathcal{S}_{ji}$  sont aussi des polyèdres inclus dans  $\mathcal{X}$ . On peut donc écrire

$$\begin{cases} \exists(\mathbf{K}_{ij}, \mathbf{L}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n_{ij} \times 2} \times \mathbb{R}^{n_{ij}} : \forall \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{ij}, \mathbf{K}_{ij} \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L}_{ij} \\ \exists(\mathbf{K}_{ji}, \mathbf{L}_{ji}) \in \mathbb{R}^{n_{ji} \times 2} \times \mathbb{R}^{n_{ji}} : \forall \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{ji}, \mathbf{K}_{ji} \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L}_{ji} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Dans cette expression,  $n_{ij}$  représente le nombre de contraintes linéaires décrivant le domaine  $\mathcal{S}_{ij}$ . On sait que ce domaine est de dimension deux et borné puisqu'il appartient à  $\mathcal{D}_i$  qui est lui-même de dimension deux et borné. Ainsi on peut dire qu'il faut au moins quatre contraintes pour définir  $\mathcal{S}_{ij}$ .

Grâce aux deux définitions de l'ensemble (4.33) et à (D.3), on peut écrire :

$$\forall \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{ij}, \quad \mathbf{K}_{ji} \mathcal{A}^{(i)} \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{L}_{ji} - \mathbf{K}_{ji} \mathcal{B}^{(i)} \quad (\text{D.4})$$

Cette relation est satisfaite pour tout  $\Delta \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{ij}$ , elle est donc équivalente à la définition de  $\mathcal{S}_{ij}$  (D.3). On peut ainsi en déduire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} \mathbf{K}_{ij} = \lambda \mathbf{K}_{ji} \mathcal{A}^{(i)} \\ \mathbf{L}_{ij} = \lambda (\mathbf{L}_{ji} - \mathbf{K}_{ji} \mathcal{B}^{(i)}) \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

On montre de la même manière que :

$$\exists \mu \in \mathbb{R} : \begin{cases} \mathbf{K}_{ji} = \mu \mathbf{K}_{ij} \mathcal{A}^{(j)} \\ \mathbf{L}_{ji} = \mu (\mathbf{L}_{ij} - \mathbf{K}_{ij} \mathcal{B}^{(j)}) \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

En combinant (D.5) et (D.6), on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{ij} = \lambda \mu \mathbf{K}_{ij} \mathcal{A}^{(j)} \mathcal{A}^{(i)} \\ (1 - \lambda \mu) \mathbf{L}_{ij} = -\lambda \mu \mathbf{K}_{ij} (\mathcal{B}^{(j)} + \mathcal{A}^{(j)} \mathcal{B}^{(i)}) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

On fait l'hypothèse que  $\lambda \mu \neq 1$ . On pose  $(\mathbf{K}_{ij_1}, \mathbf{K}_{ij_2}) \in \mathbb{R}^{n_{ij}} \times \mathbb{R}^{n_{ij}}$  les vecteurs colonnes formant  $\mathbf{K}_{ij} = [\mathbf{K}_{ij_1} \ \mathbf{K}_{ij_2}]$ . Grâce à (D.1), on peut écrire que :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{ij_1} = \lambda \mu \alpha_i \alpha_j \mathbf{K}_{ij_1} \\ \mathbf{K}_{ij_2} = \frac{\lambda \mu}{1 - \lambda \mu} (\alpha_j \beta_i + \beta_j) \mathbf{K}_{ij_1} \\ \mathbf{L}_{ij} = -\frac{\lambda \mu}{1 - \lambda \mu} (\gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \mathbf{K}_{ij_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \mu = \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \\ \mathbf{K}_{ij_2} = \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{\alpha_i \alpha_j - 1} \mathbf{K}_{ij_1} \\ \mathbf{L}_{ij} = -\frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{\alpha_i \alpha_j - 1} \mathbf{K}_{ij_1} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

On note que cette hypothèse n'est valable que si  $\alpha_i \alpha_j \neq \{0, 1\}$ . Ainsi pour tout  $0 < a < 1$ , on peut donc caractériser le sous-ensemble  $\mathcal{S}_{ij}$ .

$$\forall \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_{ij}, \quad \mathbf{K}_{ij_1} \left( \Delta U_f + \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{\alpha_i \alpha_j - 1} \Delta U_d \right) \leq -\frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{\alpha_i \alpha_j - 1} \mathbf{K}_{ij_1} \quad (\text{D.9})$$

$\mathbf{K}_{ij_1}$  est un vecteur colonne dont on note les éléments  $(k_h)_{1 \leq h \leq n_{ij}}$ . Ceci nous permet de décom-

poser l'équation matricielle ci-dessus en  $n_{ij}$  équations scalaires.

$$\forall h \in \{1, \dots, n_{ij}\} : k_h \left( \Delta U_f + \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{\alpha_i \alpha_j - 1} \Delta U_d \right) \leq -\frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{\alpha_i \alpha_j - 1} k_h \quad (\text{D.10})$$

On s'intéresse maintenant au signe des scalaires  $k_h$ . Comme dit précédemment, le domaine  $S_{ij}$  est borné. Ainsi, les contraintes linéaires définissant le domaine (D.3) contiennent à la fois les bornes supérieures et inférieures du domaine en termes de  $\Delta U_f$  et  $\Delta U_d$ . Pour définir la borne supérieure de  $\Delta U_f$ , il existe  $h_1 \in \{1, \dots, n_{ij}\}$  tel que  $k_{h_1} > 0$ . Pour définir la borne inférieure, il existe  $h_2 \in \{1, \dots, n_{ij}\}$  tel que  $k_{h_2} < 0$ . Or (D.10) est valable pour tout  $h \in \{1, \dots, n_{ij}\}$ , ce qui impose :

$$\Delta U_f + \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{\alpha_i \alpha_j - 1} \Delta U_d = -\frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{\alpha_i \alpha_j - 1} \quad (\text{D.11})$$

### D.3 Conclusion de l'étude

Finalement,

$$\forall \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in S_{ij}, \quad \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{1 - \alpha_i \alpha_j} \Delta U_d = \Delta U_f - \frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{1 - \alpha_i \alpha_j} \quad (\text{D.12})$$

On reconnaît l'expression d'une droite. Ainsi, quels que soient les modes de fonctionnement  $i$  et  $j$  pourvu que les dynamiques associées s'écrivent de la forme D.1, nous avons montré que  $S_{ij}$  est l'intersection entre une droite que l'on nomme  $\Delta_{ij}$  et  $\mathcal{D}_i$ .

$$\Delta_{ij} = \left\{ \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta U_f \\ \Delta U_d \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \mid \frac{\alpha_j \beta_i + \beta_j}{1 - \alpha_i \alpha_j} \Delta U_d = \Delta U_f - \frac{\gamma_j + \alpha_j \gamma_i}{1 - \alpha_i \alpha_j} \right\} \quad (\text{D.13})$$



## Annexe E

# Calcul des valeurs propres d'un système composé de deux producteurs

### E.1 Objectifs de l'étude

On souhaite analyser la stabilité des zones linéaires de fonctionnement d'un système de deux producteurs équipés de régulateurs de puissance réactive tel que décrit partie 4.5.3. Dans la  $i$ -ème zone de fonctionnement, la dynamique du système est linéaire. Elle est régie par la matrice d'évolution  $\mathcal{A}^{(i)}$  dont on rappelle l'expression :

$$\forall i \in \mathcal{N}_{PQ}, \mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} a + (1-a)K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} & (1-a)K_{12}\sigma_{P_2}^{(i)} \\ (1-a)K_{21}\sigma_{P_1}^{(i)} & a + (1-a)K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Afin d'analyser la stabilité du système, nous allons étudier le module des valeurs propres de la matrice d'évolution puisque le fonctionnement du système dans une zone est linéaire. Dans cette annexe, nous présentons le calcul formel des valeurs propres dans le cas général de deux producteurs. Ensuite, dans le cas d'étude réel décrit partie 4.5.3, nous étudions numériquement le module de ces valeurs propres.

Avant toutes choses, nous rappelons quelques notations utiles.

$$\mathbf{G}^{(i)} = \begin{bmatrix} \sigma_{P_1}^{(i)} & 0 \\ 0 & \sigma_{P_2}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{PQ} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Dans la suite, nous noterons  $tr(\cdot)$  la trace d'une matrice carrée,  $det(\cdot)$  son déterminant et  $spec(\cdot)$  son spectre soit l'ensemble de ses valeurs propres.

## E.2 Calcul des valeurs propres de $\mathcal{A}'^{(i)}$

Afin de calculer les valeurs propres de  $\mathcal{A}'^{(i)}$ , nous allons exprimer son polynôme caractéristique que l'on notera  $P_{\mathcal{A}'^{(i)}}$ . Ce dernier est défini comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad P_{\mathcal{A}'^{(i)}}(x) = \det \left( \mathcal{A}'^{(i)} - x \cdot \mathbb{I}_n \right) \quad (\text{E.3})$$

où  $n$  est la taille de la matrice carrée  $\mathcal{A}'^{(i)}$  et  $\mathbb{I}_n$  est la matrice identité de taille  $n \times n$ .

On rappelle que les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}'^{(i)}$  sont aussi les racines du polynôme caractéristique  $P_{\mathcal{A}'^{(i)}}$ . Commençons donc par exprimer ce polynôme.

### E.2.1 Polynôme caractéristique

Pour tout  $x \in \mathbb{C}$ , on peut écrire que :

$$P_{\mathcal{A}'^{(i)}}(x) = \det \left( \begin{bmatrix} a + (1-a)K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} - x & (1-a)K_{12}\sigma_{P_2}^{(i)} \\ (1-a)K_{21}\sigma_{P_1}^{(i)} & a + (1-a)K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - x \end{bmatrix} \right) \quad (\text{E.4})$$

Grâce à l'expression du déterminant d'une matrice  $2 \times 2$ , on peut dire que :

$$P_{\mathcal{A}'^{(i)}}(x) = \left( a + (1-a)K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} - x \right) \left( a + (1-a)K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - x \right) - (1-a)^2 K_{21}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{12}\sigma_{P_2}^{(i)} \quad (\text{E.5})$$

Finalement, ceci peut se réécrire sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$P_{\mathcal{A}'^{(i)}}(x) = x^2 - x \left( 2a + (1-a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) \right) + a^2 + a(1-a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) + (1-a)^2 \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - K_{12}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{21}\sigma_{P_2}^{(i)} \right) \quad (\text{E.6})$$

Ayant exprimé le polynôme caractéristique associé à  $\mathcal{A}'^{(i)}$ , on cherche à en exprimer les racines.

### E.2.2 Racines du polynôme caractéristique

Comme dit précédemment, il s'agit d'un polynôme caractéristique. Nous proposons donc d'en calculer le discriminant que l'on notera  $\Delta$ .

$$\Delta = \left( 2a + (1-a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) \right)^2 - 4 \left( a^2 + a(1-a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) + (1-a)^2 \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - K_{12}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{21}\sigma_{P_2}^{(i)} \right) \right) \quad (\text{E.7})$$

On développe l'expression du discriminant :

$$\Delta = 4a^2 + (1-a)^2 (K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)})^2 + 4a(1-a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) - 4a^2 - 4(1-a)^2 \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - K_{12}\sigma_{P_1}^{(i)} K_{21}\sigma_{P_2}^{(i)} \right) - 4a(1-a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) \quad (\text{E.8})$$

Finalement, on obtient :

$$\Delta = (1 - a)^2 \left( \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} \right)^2 - 4 \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)}K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - K_{12}\sigma_{P_1}^{(i)}K_{21}\sigma_{P_2}^{(i)} \right) \right) \quad (\text{E.9})$$

Afin de calculer les racines de  $P_{\mathcal{A}'^{(i)}}$ , on s'intéresse au signe du discriminant. Pour ce faire, on propose de l'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta = (1 - a)^2 \left( \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} - K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} \right)^2 + 4 \left( K_{12}K_{21}\sigma_{P_1}^{(i)}\sigma_{P_2}^{(i)} \right) \right) \quad (\text{E.10})$$

On peut remarquer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a)^2 \geq 0 \\ \left( K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} \right)^2 \geq 0 \\ K_{12}K_{21} \geq 0 \\ \sigma_{P_1}^{(i)}\sigma_{P_2}^{(i)} \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.11})$$

Finalement, on en déduit que :

$$\Delta \geq 0 \quad (\text{E.12})$$

On peut donc dire que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux racines du polynôme caractéristique sont réelles. Afin de les exprimer, nous pouvons remarquer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tr}(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}) = K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} \\ \det(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}) = K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)}K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)} - K_{12}\sigma_{P_1}^{(i)}K_{21}\sigma_{P_2}^{(i)} \end{array} \right. \quad (\text{E.13})$$

Ce qui nous permet de réécrire (E.9) sous la forme :

$$\Delta = (1 - a)^2 \left( \left( \text{tr}(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}) \right)^2 - 4 \left( \det(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}) \right) \right) \quad (\text{E.14})$$

On peut donc écrire :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a + (1 - a)(K_{11}\sigma_{P_1}^{(i)} + K_{22}\sigma_{P_2}^{(i)}) \pm (1 - a)\sqrt{\left( \text{tr}(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}) \right)^2 - 4 \left( \det(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}) \right)}}{2} \quad (\text{E.15})$$

Pour conclure, nous avons donc exprimé formellement les deux réels appartenant au spectre de  $\mathcal{A}'^{(i)}$  dans le cas d'un système de deux régulateurs.

$$\boxed{\text{spec}(\mathcal{A}'^{(i)}) = \left\{ a + (1 - a)\frac{\text{tr}(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)})}{2} \pm (1 - a)\sqrt{\left( \frac{\text{tr}(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)})}{2} \right)^2 - \det(\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)})} \right\}}$$

### E.3 Analyse de la stabilité des zones de fonctionnement linéaire

Afin de garantir la stabilité de la  $i$ -ème zone de fonctionnement linéaire, nous pouvons choisir  $a$  tel que  $|\lambda_{1,2}| < 1$ .

Par soucis de lisibilité, dans la suite, nous noterons  $T$  la trace de la matrice  $\mathbf{K}_{PQ}\mathbf{G}^{(i)}$  et  $D$  sont déterminant. Avec ces notations, nous pouvons exprimer les valeurs propres comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \left( 1 - \frac{T}{2} - \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \right) + \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \\ \lambda_2 = a \left( 1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \right) + \frac{T}{2} - \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

Ainsi les deux valeurs propres évoluent de façon affine avec la constante de temps du filtre de mesure ( $a \in [0, 1]$ ). Nous pouvons remarquer que les pentes des deux lois affines sont telles que :

$$1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \leq 1 - \frac{T}{2} - \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \quad (\text{E.17})$$

De plus, dans ce cas particulier, grâce aux valeurs numériques décrite partie 4.5.3, nous pouvons remarquer que les deux pentes sont strictement positives.

Pour finir, on peut remarquer que lorsque  $a$  est égale à un, les deux valeurs propres sont égales à un. Finalement, on en déduit que :

$$\forall 0 \leq a < 1 \quad \lambda_2 < \lambda_1 < 1 \quad (\text{E.18})$$

Finalement, assurer la stabilité de ce système particulier revient à choisir  $a \in [0, 1[$  tel que  $-1 < \lambda_2$ . Ceci revient à dire que :

$$-1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} < a \left( 1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \right) \quad (\text{E.19})$$

Dans ce cas particulier, on remarque que numériquement  $\left( 1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D} \right) > 0$ .

On peut donc écrire que la stabilité des zones linéaires revient à dire que :

$$\underbrace{\frac{-1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D}}{1 - \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - D}}}_{a_{lim}} < a \quad (\text{E.20})$$

Nous avons donc exprimé la limite de stabilité locale dans ce cas particulier. Numériquement, nous trouvons  $a_{lim} < 0,18$ . Finalement, nous avons montré que :

$$\boxed{a_{lim} < 0,18 < a \Rightarrow \text{Stabilité locale}}$$



**Titre :** Stabilité du réseau électrique de distribution. Analyse du point de vue automatique d'un système complexe

**Mots clés :** Analyse de stabilité, Systèmes hybrides, Insertion de la production décentralisée, Stabilité en tension

**Résumé :** Pour maintenir la tension dans des bornes admissibles, des régulations locales de puissance réactive ( $Q$ ) en fonction de la tension ( $U$ ) sont envisagées sur les réseaux de distribution. Ces travaux étudient l'impact de ces régulations sur la stabilité des réseaux de distribution accueillant de la production. Une étude empirique confirme le risque d'instabilité de la tension et souligne le lien avec les paramètres de la régulation. Pour aider les gestionnaires à les choisir, trois méthodes d'étude de la stabilité sont proposées. Tout d'abord, une méthode formelle fondée sur les notions d'abstraction discrète et de bisimulation est développée. Elle offre une grande précision au prix d'un effort de calcul important. Pour contourner cette difficulté, un critère analytique portant sur le temps de réponse des régulations  $Q(U)$  est formulé. Ensuite, un critère valable dans tous les cas est proposé pour les codes de réseaux. Enfin, l'extension des méthodes à des cas plus complexes est discutée.

**Title :** Stability of a distribution electrical network. Analysis from a complex system point of view

**Keywords :** Stability analysis, Hybrid systems, Distributed generation, Voltage stability

**Abstract :** To maintain the voltage within specified limits, local control laws of distributed generators (DGs) reactive power ( $Q$ ) with respect to their voltage ( $U$ ) have been considered. This work studies the impact of  $Q(U)$  control laws on distribution feeders' voltage stability. An empirical study confirms the risk of voltage instability and highlights its dependence on control law parameters. To help distribution grid operators to choose these parameters, three methods assessing stability are formulated. First, a formal method based on discrete abstraction and bisimulation calculation is developed. The proposed approach yields precise results but with a high computational load. Then, to overcome this issue, an analytical criterion adapting  $Q(U)$  control laws response time with respect to grid parameters is formulated. Finally, a general criterion, valid in any cases, is established in order to be included in the grid codes. To conclude this work, extension to more complex cases is discussed.



