



**HAL**  
open science

# Étude des états fondamentaux du Laplacien magnétique avec annulation locale du champ

Jean-Philippe Miqueu

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Miqueu. Étude des états fondamentaux du Laplacien magnétique avec annulation locale du champ. Mathématiques [math]. Université de Rennes 1, 2016. Français. NNT : . tel-01374935

**HAL Id: tel-01374935**

**<https://theses.hal.science/tel-01374935v1>**

Submitted on 2 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*Mention : Mathématiques et applications*

**École doctorale Matisse**  
**Jean-Philippe Miqueu**

Préparée à l'unité de recherche UMR 6625 - IRMAR  
Institut de Recherche Mathématiques de Rennes  
UFR Mathématiques

---

**Étude des états  
fondamentaux du  
Laplacien  
magnétique avec  
annulation locale du  
champ**

**Thèse rapportée par :**

**Jean-Marc BOUCLET**

Professeur, Université de Toulouse / rapporteur

**Hynek KOVAŘÍK**

Professeur, Université de Brescia (Italie) / rapporteur

**et soutenue à Rennes le 26/09/2016**

devant le jury composé de :

**Jean-Marc BOUCLET**

Professeur, Université de Toulouse / rapporteur

**Stéphane NONNENMACHER**

Professeur, Université Paris-Sud / examinateur

**Stephan DE BIÈVRE**

Professeur, Université de Lille 1 / examinateur

**Françoise TRUC**

Maître de conférence, Université de Grenoble /  
examinatrice

**Christophe CHEVERRY**

Professeur, Université de Rennes 1 / examinateur

**Florian MÉHATS**

Professeur, Université de Rennes 1 / examinateur

**Monique DAUGE**

Directeur de recherche CNRS / directrice de thèse

**Nicolas RAYMOND**

Maître de conférence / co-directeur de thèse



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mes directeurs de thèse, Monique Dauge et Nicolas Raymond ; le doctorat est une belle aventure que sans eux je n'aurais pas pu vivre. Je les remercie pour toute l'énergie qu'ils ont mis dans cet encadrement, depuis la naissance du projet de thèse jusqu'à aujourd'hui. Leur présence rassurante, leur disponibilité et leur implication dans les phases de rédaction, de préparation d'exposés ou de soutenance m'ont été très précieuses. Le dynamisme de Monique et son regard avisé sur le numérique ainsi que la bonne humeur quotidienne de Nicolas et sa philosophie des mathématiques ont animé nos discussions ; les connaissances qu'ils m'ont transmises et ce que j'ai pu partager avec eux ont fait que ces trois années ont été pour moi très agréables et enrichissantes. Je leur suis également très reconnaissant d'être resté à mon écoute et d'avoir toujours agi dans mon intérêt. Grâce à eux, j'ai pu durant ma thèse aller travailler à l'Université d'Aarhus. Je savoure aujourd'hui pleinement la chance que j'ai de pouvoir y retourner. Tak !

Je remercie vivement Jean-Marc Bouclet et Hynek Kovařík d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je leur suis extrêmement reconnaissant du temps et du soin qu'ils ont consacré à cette tâche. Je remercie également Stéphane Nonnenmacher, Stephan De Bièvre, Françoise Truc, Christophe Cheverry et Florian Méhats qui me font le plaisir et l'honneur de venir compléter mon jury.

Je souhaite également remercier tous les mathématiciens que j'ai rencontré en conférences et avec qui j'ai pu interagir. Je pense bien sûr à Bernard Helffer, pour toutes ses remarques et ses conseils avisés, mais aussi à Virginie Bonnaillie-Noël ainsi qu'à Éric Soccorsi, Philippe Briet et Julien Royer. J'ai eu le privilège - au cours de ma deuxième année de thèse - de travailler avec Søren Fournais. Je le remercie pour son accueil chaleureux, sa gentillesse et son entière disponibilité. Je suis vraiment très heureux de pouvoir commencer une collaboration avec lui.

Le hasard des rencontres fait souvent bien les choses ; aurais-je eu l'idée d'aller discuter avec Monique si son thésard - qui allait soutenir - ne m'en avait pas parlé ? Je tiens à saluer Nicolas Popoff et aussi Thomas Ourmières. Je les remercie tous les deux pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux, leurs conseils, et leur soutien.

J'adresse un grand merci à Yvon Lafranche pour le temps qu'il a consacré aux simulations numériques de ma thèse. Sans sa patience et son investissement je n'aurais pas été capable de mener à bien cette partie de mon travail. Merci aussi à Oliver Garo pour l'aide qu'il a pu m'apporter à chaque petit problème informatique.

J'ai pu trouver à l'IRMAR un excellent cadre de travail. Je remercie toutes les équipes (en particulier les équipes d'équations aux dérivées partielles et d'analyse numérique) de rendre cet espace aussi convivial. Un grand merci aussi à toute la bande des doctorants et post-doctorants que j'ai côtoyé. Ils ont grandement contribué à rendre ces trois années de thèse très agréables. Par ailleurs, j'adresse mes vifs remerciements à l'ensemble des équipes administratives de l'IRMAR, de l'UFR de mathématiques et de l'école doctorale MATISSE (sans oublier l'équipe informatique et le personnel de la bibliothèque) pour leur gentillesse, leurs sourires et la disponibilité dont ils ont toujours fait preuve.

J'ai adoré pouvoir donner cours à la fac. Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai pu travailler et partager cette expérience d'enseignement.

J'adresse également un grand merci à tous ceux qui m'ont aidé dans la préparation de la soutenance et du pot, et à tous ceux qui me font l'immense plaisir d'être là aujourd'hui.

Ces dernières lignes sont destinées à celles et ceux qui me sont le plus chers, à tout ce qu'ils ont déjà fait pour moi et à ce qu'ils m'apportent au quotidien. Merci d'être présents à mes côtés.

;-) ;-) ;-)

## Table des matières

<b>Préliminaires</b>	1
Chapitre 1. Introduction	3
1.1. Motivations	3
1.2. Le Laplacien magnétique	3
1.3. Résultats précédemment connus	5
1.4. Résultats obtenus pour un champ magnétique s'annulant linéairement	8
1.5. Résultats obtenus pour un champ magnétique s'annulant quadratiquement	21
Chapitre 2. Présentation des opérateurs modèles	27
2.1. Champ constant à l'intérieur	27
2.2. Champ constant au bord	28
2.3. Champ s'annulant linéairement sur une droite	29
2.4. Champ s'annulant linéairement au bord	30
2.5. Champ magnétique s'annulant quadratiquement	32
2.6. Champs magnétiques s'annulant de manière dégénérée	38
<b>I. Annulation le long d'une courbe régulière simple</b>	41
Chapitre 3. Équivalent de la plus petite valeur propre	43
3.1. Minoration	43
3.2. Majoration	53
Chapitre 4. Localisation des fonctions propres et estimées d'Agmon	65
4.1. Énoncé des théorèmes de localisation	65
4.2. Preuve des résultats de localisation	67
Chapitre 5. Développement asymptotique complet des premières valeurs propres	71
5.1. Problème localisé au bord sur la courbe d'annulation	71
5.2. Approximation du bas du spectre	78
Chapitre 6. Simulations numériques	83
6.1. Calculs numériques des premières valeurs propres	84
6.2. Module et phase des dix premiers vecteurs propres pour $h = \frac{1}{100}$ et $h = \frac{1}{150}$	84
<b>II. Annulation quadratique à l'intérieur du domaine</b>	89
Chapitre 7. Équivalent de la plus petite valeur propre	91
7.1. Minoration	92
7.2. Majoration	96

Chapitre 8. Localisation des fonctions propres et estimées d'Agmon	101
8.1. Énoncé du théorème de localisation	101
8.2. Preuve du résultat de localisation	102
Chapitre 9. Développement asymptotique complet des premières valeurs propres	105
9.1. Problème localisé en un point double à l'intérieur	105
9.2. Approximation du bas du spectre	112
Chapitre 10. Opérateur modèle croix dans la limite petit angle	117
10.1. Symbole opérateur	117
10.2. Étude spectrale dans la limite petit angle	132
10.3. Simulations numériques pour l'opérateur modèle croix	141
Annexe A. Théorie spectrale	145
A.1. Définitions	145
A.2. Théorème spectral	146
A.3. Le principe du Min-Max	147
A.4. Spectre essentiel et estimées d'Agmon	147
Annexe B. Localisation, coordonnées locales, et décroissance exponentielle	149
B.1. Changement de jauge	149
B.2. Formule de localisation	149
B.3. Réécriture locale de la forme quadratique et de l'opérateur	150
B.4. Décroissance exponentielle des fonctions propres de l'opérateur de Pan et Kwek	154
Annexe C. Notation	159
Annexe. Bibliographie	161

# **Préliminaires**





## CHAPITRE 1

### Introduction

#### 1.1. Motivations

La motivation première de l'analyse spectrale du Laplacien magnétique est née avec l'étude mathématique de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau modélisant le comportement macroscopique des matériaux supraconducteurs. Son expression est donnée par :

$$(1.1) \quad \mathcal{E}_{\kappa, H}(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} |(-i\nabla + \kappa H \mathbf{A})\psi|^2 - \kappa^2 |\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} |\psi|^4 \, dx + \kappa^2 \int_{\Omega} |H\nabla \times \mathbf{A} - H\nabla \times \mathbf{A}_0|^2 \, dx,$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  représente la place occupée par le supraconducteur,  $\mathbf{A}$  est un potentiel vecteur magnétique,  $\nabla \times \mathbf{A}$  est le champ magnétique induit et  $H\nabla \times \mathbf{A}_0$  est le champ magnétique extérieur appliqué. Le paramètre  $\kappa$  est caractéristique du matériau et  $H$  correspond à l'intensité du champ magnétique appliqué. L'étude de la positivité de l'opérateur :

$$(-i\nabla + \kappa H \mathbf{A})^2 - \kappa^2,$$

intervient dans l'étude du phénomène de supraconductivité de surface pour un certain type de matériaux correspondant au cas où  $\kappa$  est grand. Cette étude se reformule en une étude semi-classique après le changement de variable  $h = \frac{1}{\kappa H}$  et se ramène ainsi à l'étude spectrale de l'opérateur :

$$(-ih\nabla + \mathbf{A})^2,$$

lorsque le paramètre  $h$  tend vers 0.

#### 1.2. Le Laplacien magnétique

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^d$ . On s'intéresse à des extensions autoadjointes de l'opérateur suivant sur  $\Omega$  :

$$(-ih\nabla + \mathbf{A})^2 = \sum_{j=1}^d (-ih\partial_{x_j} + A_j)^2 = \sum_{j=1}^d (hD_{x_j} + A_j)^2,$$

où l'on désigne par  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  les coordonnées d'un point de  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et où  $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$ . Le paramètre  $h$ , destiné à tendre vers 0, est appelé paramètre semi-classique et  $\mathbf{A}$  désigne un potentiel vecteur. Le cadre d'étude est le suivant : on suppose que l'ouvert  $\Omega$  est borné régulier (ici à prendre au sens où on le considère au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ ) et simplement connexe, et que  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_d) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ . Plus intrinsèquement,  $\mathbf{A}$  correspond à la 1-forme suivante :

$$\omega_{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^d A_j dx_j.$$

On peut ainsi définir le champ magnétique en dimension  $d$  quelconque comme la 2-forme suivante :

$$\sigma_{\mathbf{B}} = d\omega_{\mathbf{A}} = \sum_{j < k} B_{jk} dx_j \wedge dx_k,$$

où la notation  $d\omega$  désigne la différentielle extérieure à la forme différentielle  $\omega$ .

Dans le cas de la dimension  $d = 2$ , on considère implicitement que le champ magnétique est normal à la section et on l'identifie à la fonction :

$$\mathbf{B} = \partial_{x_1} A_2 - \partial_{x_2} A_1.$$

Dans le cas de la dimension  $d = 3$ , le champ magnétique est le champ de vecteur suivant :

$$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) = (B_{23}, -B_{13}, B_{12}) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Dans ce travail, on s'intéresse exclusivement à une extension autoadjointe particulière. Il s'agit de l'extension de Friedrichs associée à la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  définie sur  $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$  de la manière suivante :

$$(1.2) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \mapsto \int_{\Omega} |(-ih\nabla + \mathbf{A})u(x)|^2 dx.$$

Le domaine de forme  $\text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  est donné par :

$$\text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}) = \{u \in L^2(\Omega), |\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u)| < +\infty\}.$$

L'ouvert  $\Omega$  étant borné et régulier, le domaine de forme est dans notre cas donné par :

$$\text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}) = H^1(\Omega).$$

On appelle réalisation de Neumann du Laplacien magnétique cette extension autoadjointe (notée  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ ) et condition de Neumann magnétique au bord la condition suivante :

$$(-ih\nabla + \mathbf{A})u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

pour toute fonction  $u$  appartenant au domaine de l'opérateur  $\text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  où  $\nu$  désigne la normale (unitaire) intérieure à  $\partial\Omega$ .

Le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est toujours donné par :

$$\text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}) = \{u \in L^2(\Omega), (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 u \in L^2(\Omega), (-ih\nabla + \mathbf{A})u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Dans le cas où  $\Omega$  est borné et régulier, un théorème classique de régularité (voir [4] et [22]) donne :

$$\text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}) = \{u \in H^2(\Omega), (-ih\nabla + \mathbf{A})u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Une propriété fondamentale du Laplacien magnétique est son invariance de jauge (conjugaison de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  par  $e^{i\phi/h}$ , voir la proposition B.1 en Annexe) :

$$e^{-i\phi/h} (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 e^{i\phi/h} = (-ih\nabla + \mathbf{A} + \nabla\phi)^2,$$

où  $\phi \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Elle implique que les opérateurs  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega}$  sont unitairement équivalents. L'invariant spectral naturel est donc le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . La problématique générale est la suivante, il s'agit de trouver  $\psi \neq 0$  et  $\lambda$  tels que :

$$\begin{cases} (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 \psi & = \lambda \psi & \text{sur } \Omega \\ (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi \cdot \nu & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

L'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  étant positif et à résolvante compacte, son spectre est discret et inclus dans  $\mathbb{R}^+$ .

**Notation 1.1.** On note :

$$\lambda_{n,\mathbf{A},\Omega}(h) = \lambda_n(h)$$

la  $n$ -ième valeur propre (comptée avec multiplicité).

### 1.3. Résultats précédemment connus

Le but de l'analyse semi-classique du Laplacien magnétique est de déterminer le comportement asymptotique de  $\lambda_{n,\mathbf{A},\Omega}(h)$  et des fonctions propres associées quand  $h$  tend vers 0. De nombreuses références sur cette problématique peuvent être trouvées dans [28] et [66]. On pourra consulter ces deux ouvrages généraux pour comprendre l'histoire des problèmes, les résultats et certaines méthodes semi-classiques en présence de champs magnétiques. Les sous-sections 1.3.1 et 1.3.2 qui suivent visent à rappeler l'essentiel des résultats connus liés à la problématique générale (dans une formulation simplifiée), et la sous-section 1.3.3 vise à présenter le contexte qui a motivé ce travail.

**1.3.1. Résultats connus dans le cas des champs magnétiques qui ne s'annulent pas.** Le cas des champs magnétiques qui ne s'annulent pas a fait l'objet de nombreuses analyses. De récents travaux décrivent cet opérateur pour des géométries particulières du domaine  $\Omega$ .

#### En dimension 2

Dans le cas où le champ magnétique est constant, on peut consulter les travaux de Bolley et Helffer ([11]), Bauman, Phillips et Tang ([9]) ainsi que del Pino, Felmer et Sternberg ([25]) pour le cas des disques, ceux de Helffer et Morame ([42]) pour le cas d'un domaine régulier, les travaux de Bonnaillie ([12]) dans le cas d'un domaine à coins, ceux de Lu et Pan ([53]) ainsi que ceux de Raymond ([61]) dans le cas d'un domaine régulier. Dans le cas d'un champ magnétique variable qui ne s'annule pas, on peut consulter les travaux de Bonnaillie-Noël ([12]), Bonnaillie-Noël et Dauge ([14]), Bonnaillie-Noël et Fournais ([18]) dans le cas d'un domaine à coins, mais aussi les travaux de Raymond et Vu-Ngoc dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .

#### En dimension 3

Dans le cas d'un champ magnétique constant, on peut consulter par exemple Helffer et Morame ([43]) pour le cas d'un domaine régulier, Fournais et Persson ([29]) dans le cas des boules ou encore Popoff et Raymond ([60]) dans le cas des lentilles. Dans le cas d'un champ magnétique variable qui ne s'annule pas, on peut consulter Lu et Pan ([54]), Raymond ([64]), Helffer et Kordyukov ([38]) pour un domaine régulier en dimension 3 et Bonnaillie-Noël, Dauge et Popoff ([17]) dans le cas d'un domaine polyédral, mais aussi les travaux de Helffer, Kordyukov, Raymond et Vu-Ngoc dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .

De nombreuses méthodes ont été développées dans le cas des champs magnétiques qui ne changent pas de signe et le sujet est désormais bien connu en dimension 2 et 3. Dans le cas d'un champ magnétique variable, le théorème suivant donne un équivalent de la plus petite valeur propre en dimension 2 :

**Théorème 1.2** (Équivalent de la première valeur propre). *Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Pour un champ magnétique  $\mathbf{B}$  (considéré de classe  $\mathcal{C}^1$ ) ne s'annulant pas sur  $\bar{\Omega}$ , on a :*

$$\lambda_1(h) = B_0^{\mathbf{B}} h + \mathcal{O}(h^{5/4}),$$

où

$$B_0^{\mathbf{B}} = \min \left\{ \min_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{B}(\mathbf{x})|, \Theta_0 \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |\mathbf{B}(\mathbf{x})| \right\},$$

et où  $\Theta_0$  correspond au bas du spectre du Laplacien magnétique (pour un champ magnétique constant égal à 1) sur un demi-plan avec condition de Neumann au bord (voir la notation 2.4). Cette quantité est strictement plus petite que 1 (voir la proposition 2.5).

Le premier terme de l'asymptotique est dû à Lu et Pan ([53]) tandis que le reste en  $\mathcal{O}(h^{5/4})$  de l'asymptotique résulte des travaux de Helffer et Morame ([42]).

Le théorème suivant est un résultat de localisation de la première fonction propre (voir [53], [42], [25] et [61]).

**Théorème 1.3** (Estimée d'Agmon). *Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Pour un champ magnétique  $\mathbf{B}$  ne s'annulant pas sur  $\bar{\Omega}$ . On suppose que :*

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} |\mathbf{B}(x)| > \Theta_0 \min_{x \in \partial\Omega} |\mathbf{B}(x)|.$$

Alors il existe  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  :

$$\int_{\Omega} e^{2\alpha h^{-1/2}d(x, \partial\Omega)} |\psi_{1,h}(x)|^2 dx \leq C \|\psi_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $\psi_{1,h}$  désigne un vecteur propre associé à la première valeur propre  $\lambda_1(h)$  et où  $d(x, \partial\Omega)$  désigne la distance du point  $x$  au bord  $\partial\Omega$ .

On obtient avec ce résultat que le vecteur propre  $\psi_{1,h}$  se localise (lorsque  $h \rightarrow 0$ ) près du bord.

**Récapitulatif des résultats connus dans le cas d'un champ magnétique qui ne s'annule pas :**

		$\mathbf{B} \equiv 1$	$\mathbf{B}$ variable
$d = 2$	disque	[11], [9], [25]	[29]
	$\Omega$ régulier	[42]	[43], [61], [67]
	$\Omega$ polygonal curviligne	[12], [14], [18]	[5]
	$\Omega = \mathbb{R}^2$		[67]
$d = 3$	boule	[29]	
	$\Omega$ régulier	[53], [27], [61]	[45], [46], [63], [38], [34]
	$\Omega$ lentille	[60]	
	$\Omega = \mathbb{R}^3$		[34]
	$\Omega$ polyédral		[17]
$d = n$	$\Omega$ variété sans bord		[36], [37], [39]

**1.3.2. Résultats connus dans le cas des champs magnétiques qui s'annulent.** On dénombre beaucoup moins de travaux destinés à étudier des champs magnétiques qui s'annulent. L'analyse de cette situation a principalement commencé dans le cas où la courbe d'annulation ne rencontre pas le bord, avec les travaux de Helffer et Morame (voir [41]). Cette étude s'est poursuivie avec les travaux de Dombrowski et Raymond (voir [26]). L'étude du cas d'interaction où la courbe d'annulation rencontre la condition de Neumann au bord a commencé avec les travaux de Pan et Kwék (voir [58]). On notera que [20], [65], [7] et [6] concernent également du cas où la ligne d'annulation du champ magnétique rencontre le bord, mais ils ne traitent pas de l'asymptotique (pour  $h \rightarrow 0$ ) des petites valeurs propres de  $\mathcal{P}_{h,A,\Omega}$ . Les papiers [20] et [65] traitent en grande partie de l'influence de la régularité du champ magnétique à travers l'étude

d'une ligne d'annulation brisée ([65] étudie plus précisément la limite petit angle), tandis que [7] et [6] s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau pour  $\kappa \rightarrow +\infty$  (voir (1.1)). On trouve dans [58] le résultat suivant pour le premier terme de l'asymptotique :

**Théorème 1.4.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathbf{B}$  un champ magnétique régulier s'annulant sur une courbe  $\Gamma$  régulière coupant le bord en un nombre fini de points et de manière non tangente, telle que  $|\nabla \mathbf{B}|$  ne s'annule en aucun point de  $\Gamma$ . On a :*

$$\lambda_1(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3},$$

où

$$L_0^{\mathbf{B}} = \min \left\{ M_0 \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3}, \min_{x \in \partial \Omega \cap \Gamma} \zeta_1^{\theta(x)} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} \right\},$$

et où  $\theta(x)$  est l'angle formé par la courbe d'annulation  $\Gamma$  et la tangente à  $\partial \Omega$  au point  $x$ . Les constantes  $M_0$  et  $\zeta_1^\theta$  correspondent au bas du spectre du Laplacien magnétique (pour un champ magnétique vérifiant respectivement  $\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \sigma$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau \cos \theta - \sigma \sin \theta$  sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  avec condition de Neumann au bord (voir les notations 2.10 et 2.14).

Ce résultat est le pendant du théorème 1.2, précédemment énoncé pour un champ magnétique ne s'annulant pas. Dans ces deux théorèmes, le terme dominant de l'asymptotique résulte d'une "compétition" entre deux quantités spectrales. On note que le théorème 1.4 ne donne pas de reste explicite. Dans le cas où  $\Gamma$  est une courbe d'annulation régulière ne rencontrant pas le bord  $\partial \Omega$ , on a une asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres (voir [26]) :

**Théorème 1.5.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathbf{B}$  un champ magnétique régulier s'annulant sur une courbe  $\Gamma$  régulière n'intersectant pas le bord  $\partial \Omega$  et telle que  $|\nabla \mathbf{B}|$  ne s'annule en aucun point de  $\Gamma$ . On suppose que la dérivée normale  $\delta$  du champ magnétique admet un unique minimum non dégénéré (atteint en  $x_0$  noté  $\delta_0 = \delta(x_0)$ ) sur  $\Gamma$ . Pour tout  $n \geq 1$ , il existe une suite  $(\lambda_{n,j})_{j \geq 0}$  et  $h_0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  :*

$$\lambda_n(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^{4/3} \sum_{j \leq 0} \lambda_{n,j} h^{j/6},$$

où  $\lambda_{n,0} = \delta_0^{2/3} M_0$  et  $\lambda_{n,1} = 0$ .

On note que dans [26], on donne également un développement des fonctions propres en puissances de  $h$ . On montre en particulier que les premiers vecteurs propres se concentrent (lorsque  $h$  tend vers 0) près du point  $x_0 \in \Gamma$ .

**Récapitulatif des résultats connus dans le cas d'un champ magnétique qui s'annule :**

		courbe régulière simple	ligne brisée	hypersurface	point
$d = 2$	$\Omega$ régulier	[58], [26], [7], [6]	[20], [65]		
	$\Omega$ polygonal				
$d = n$	$\Omega$ variété sans bord			[56], [35]	[41]

**1.3.3. But du travail.** Ce travail s'inscrit dans la lignée des travaux [41], [26] et [58]. Il inclut le cas où la courbe d'annulation rencontre le bord. Le but de cette étude est de répondre à la problématique générale visant à expliciter le comportement des basses valeurs propres et des fonctions propres associées lorsque le paramètre  $h$  tend vers 0, mais aussi de comprendre l'influence d'une annulation sur l'asymptotique. On décrit l'asymptotique des fonctions propres et des vecteurs propres associés dans le cas où le champ magnétique s'annule le long de certaines courbes intersectant  $\partial\Omega$ . La partie I concerne le cas d'une annulation linéaire tandis que la partie II concerne le cas d'une annulation quadratique.

#### 1.4. Résultats obtenus pour un champ magnétique s'annulant linéairement

On décrit dans cette section le contenu de la partie I. Celle-ci concerne le cas où le champ magnétique s'annule le long d'une courbe régulière simple  $\Gamma$  en dimension 2, intersectant le bord en un nombre fini de points sans être tangente à  $\partial\Omega$ . On suppose de plus que l'annulation se fait au premier ordre, c'est-à-dire que  $|\nabla\mathbf{B}|$  ne s'annule en aucun point de  $\Gamma$  (voir l'hypothèse 1).

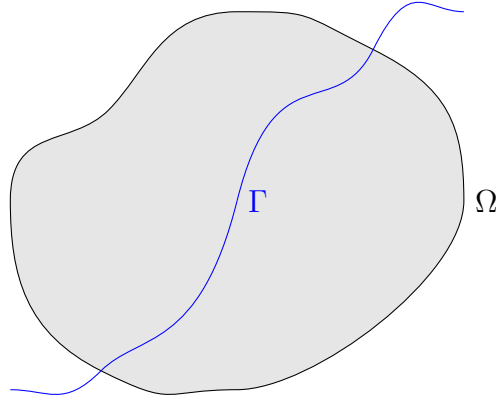


FIGURE 1. Domaine  $\Omega$  et courbe d'annulation  $\Gamma$ .

**1.4.1. Équivalent préliminaire de la première valeur propre  $\lambda_1(h)$ .** On cherche à déterminer le comportement asymptotique de  $\lambda_{1,\mathbf{A},\Omega}(h) = \lambda_1(h)$  quand  $h$  tend vers 0 et à comprendre l'influence d'une annulation du champ magnétique sur cette asymptotique. L'objectif est d'améliorer le résultat de Pan et Kwek (voir [58]) donné dans le théorème 1.4, en explicitant un terme de reste. Contrairement au cas considéré dans [26] (voir le théorème 1.5), le fait que la ligne d'annulation rencontre le bord rend la démonstration plus difficile.

1.4.1.1. *Énoncé du résultat.* Le théorème 1.7 se retrouve plus tard en début de chapitre 3 via le théorème 3.2. C'est le pendant du théorème 1.2 qui traite le cas d'un champ magnétique qui ne s'annule pas. Le théorème 1.7 vient préciser le théorème 1.4 puisqu'il explicite le terme de reste. On commence par introduire une notation concernant les deux quantités importantes rencontrées dans le théorème 1.4 :

**Notation 1.6.**

$$M_1^{\mathbf{B}} = M_0 \inf_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla\mathbf{B}(x)|^{2/3},$$

$$\Lambda_1^{\mathbf{B}} = \inf_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \zeta_1^{\theta(x)} |\nabla\mathbf{B}(x)|^{2/3}.$$

**Théorème 1.7** (Équivalent de la première valeur propre). *Il existe  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$*

$$L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} - Ch^{22/15} \leq \lambda_1(h) \leq L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} + Ch^{5/3},$$

où on rappelle que  $L_0^{\mathbf{B}} = \min \{M_1^{\mathbf{B}}, \Lambda_1^{\mathbf{B}}\}$  (voir le théorème 1.4).

**Remarque 1.8.** Dans le cas d'un domaine à coin  $\Omega$  et pour un champ magnétique qui ne s'annule pas, le premier terme de l'asymptotique de la plus petite valeur propre est de l'ordre de  $h$ , comme dans le théorème 1.2 (voir [14]). Comme les termes d'ordre  $h^{4/3}$  sont asymptotiquement plus petits que les termes d'ordre  $h$ , les résultats obtenus restent valables dans le cas où la ligne d'annulation ne rencontre pas de coin.

1.4.1.2. *Heuristique.* Cette sous-section vise à expliquer une technique bien connue de l'analyse semi-classique qui consiste à étudier l'opérateur de Schrödinger sans paramètre semi-classique ( $h = 1$ ) sur des domaines non bornés appelés "domaines modèles". La procédure suivante est applicable pour tout ouvert  $\Omega$  borné et simplement connexe dans  $\mathbb{R}^d$ . Ce domaine est considéré régulier mais ce qui suit reste valable pour un domaine polygonal curviligne en dimension 2 avec un nombre fini de coins et un domaine polyédral avec un nombre fini d'arêtes et de sommets en dimension 3, dès lors que l'ensemble d'annulation ne rencontre pas les singularités de  $\partial\Omega$ . La localisation des états quantiques est un phénomène bien connu de la limite semi-classique (voir la figure 2). Il s'agit d'un fait assez logique, le régime

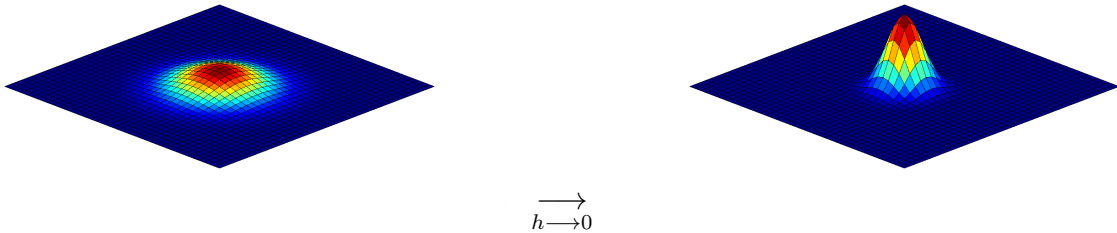


FIGURE 2. Localisation des fonctions propres dans la limite semi-classique.

semi-classique matérialise une transition entre le monde de la mécanique quantique (où l'on parle de probabilité de présence) et le monde de la mécanique classique (où la notion de position a un sens ponctuel). On peut naturellement s'attendre à ce que "l'incertitude" sur la répartition des particules (donnée par la distribution  $|\psi|^2$ ) diminue en même temps que  $h$  tend vers 0. Considérons à titre d'exemple le cas d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel électrique. La première fonction propre  $g_1$  de l'oscillateur harmonique  $-\hbar^2\Delta + |\mathbf{x}|^2$  en dimension 2 est donnée par :

$$(1.3) \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2h}\right).$$

Cette "convergence" - qui peut se voir comme l'approximation d'une masse de Dirac - met en lumière le rôle "local" des sous-domaines. La description précise des éléments propres passe par la compréhension des différents modèles sous-jacents qui structurent le spectre. Concernant l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , la question



est de savoir où se localisent les premières fonctions propres dans la limite semi-classique (voir figure 3). Il existe différents types de sous-domaines susceptibles d'apporter une contribution asymptotique

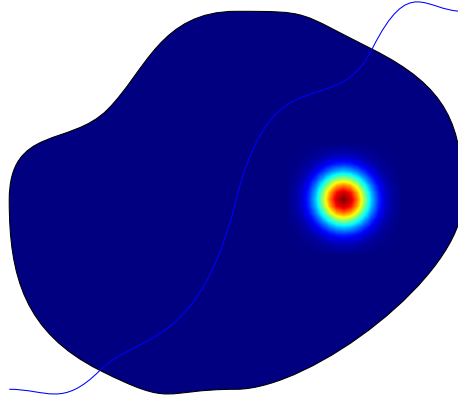


FIGURE 3. Où se localise la première fonction propre ?

différente : ceux relatifs au bord  $\partial\Omega$  et à la courbe d'annulation  $\Gamma$ . On dénombre quatre classes de sous-domaines (voir la figure 4) :

$$\Omega \setminus \Gamma, \partial\Omega \setminus \Gamma, \Gamma \setminus \partial\Omega, \partial\Omega \cap \Gamma.$$

Faire tendre  $h$  vers 0 revient en quelque sorte à "zoomer" sur chacun de ses sous-domaines. On se ramène

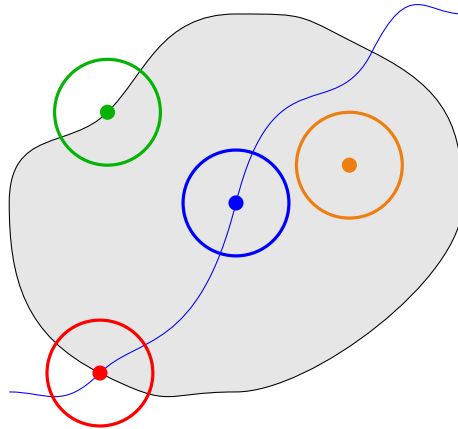


FIGURE 4. Classes des sous-domaines.

alors à l'étude d'opérateurs de Schrödinger sans paramètre semi-classique ( $h = 1$ ) sur des domaines redressés non bornés appelés "domaines modèles". L'avantage d'une telle méthode est qu'on se ramène à l'espace  $\mathbb{R}^2$  tout entier ou bien sur le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2$  suivant les cas. Cette méthode permet d'utiliser les invariances par translation. Dans la majorité des cas, cela permet de réduire l'étude spectrale à celle d'un opérateur de référence avec potentiel électrique plus simple et mieux connu en dimension 1. On présente dans ce qui suit chacun des opérateurs modèles qui apparaissent.

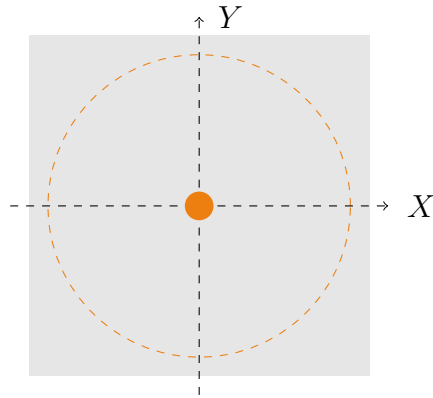
Les différentes étapes de la stratégie de localisation précédente (appelé "zoom") sont les suivantes. On commence par considérer l'opérateur sur un domaine tronqué. Dans les cas concernant le bord et la

courbe d'annulation, on effectue ensuite un changement de variable (licite pour une troncature suffisamment petite) redressant la géométrie du domaine. On termine avec un changement d'échelle semi-classique pour se ramener au plan ou au demi-plan tout entier. La justification rigoureuse de ce procédé viendra de l'estimation des termes de reste (dus aux différentes approximations). Ces différentes étapes suggèrent diverses notations pour le système de coordonnées.

**Notation 1.9.** On rappelle que l'on désigne par  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  les coordonnées d'un point de  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Les variables  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  font référence aux coordonnées curvilignes locales qui apparaissent après changement de variable (voir l'Annexe B.3), tandis que les variables  $(X, Y)$  et  $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  font références aux coordonnées curvilignes locales pour le problème modèle après changement d'échelle.

Pour toute coordonnée  $x_j$ , on rappelle enfin que l'on a introduit la notation  $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$ .

### L'oscillateur harmonique



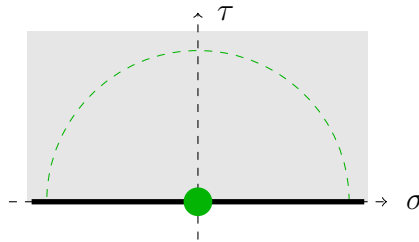
L'opérateur modèle qui apparaît est le Laplacien magnétique  $\mathcal{P}_{1,\mathbf{A},\mathbb{R}^2}$  dans le cas où  $\mathbf{B} \equiv 1$  :

$$D_Y^2 + (D_X - Y)^2, \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Par des transformations unitaires on se ramène à l'oscillateur harmonique :

$$\mathcal{H} = D_Y^2 + Y^2, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

### L'opérateur de De Gennes



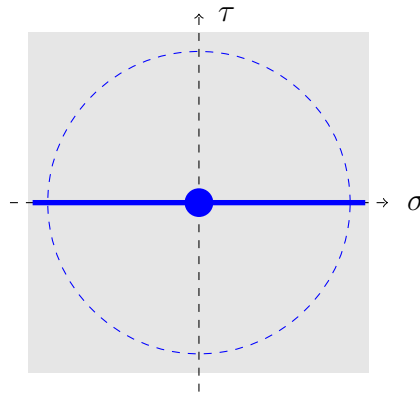
L'opérateur modèle qui apparaît est le Laplacien magnétique  $\mathcal{P}_{1,\mathbf{A},\mathbb{R}_+^2}$  dans le cas où  $\mathbf{B} \equiv 1$  :

$$D_\tau^2 + (D_\sigma - \tau)^2, \text{ sur } \mathbb{R}_+^2.$$

Par des transformations unitaires on se ramène à l'opérateur de De Gennes :

$$\mathcal{G}(\xi) = D_\tau^2 + (\xi - \tau)^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ avec condition de Neumann au bord, avec } \xi \in \mathbb{R}.$$

### L'opérateur de Montgomery



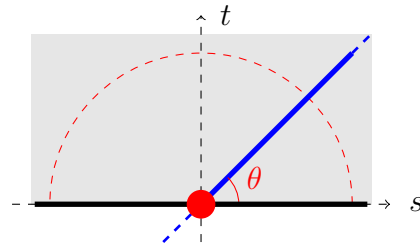
L'opérateur modèle qui apparaît est le Laplacien magnétique  $\mathcal{P}_{1,\mathbf{A},\mathbb{R}^2}$  dans le cas où  $\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau$  :

$$D_\tau^2 + \left( D_\sigma - \frac{\tau^2}{2} \right)^2, \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Par des transformations unitaires on se ramène à l'opérateur de **Montgomery** :

$$\mathcal{M}(\eta) = D_\tau^2 + \left( \eta - \frac{\tau^2}{2} \right)^2, \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ avec } \eta \in \mathbb{R}.$$

### L'opérateur de Pan et Kwek



L'opérateur modèle qui apparaît est le Laplacien magnétique  $\mathcal{P}_{1,\mathbf{A},\mathbb{R}_+^2}$  dans le cas où l'expression du champ magnétique est  $\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau \cos \theta - \sigma \sin \theta$ , avec  $\theta \in (0, \pi)$ . On obtient l'opérateur de **Pan et Kwek** :

$$\mathcal{K}_\theta = D_\tau^2 + \left( D_\sigma + \sigma \tau \sin \theta - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta \right)^2, \text{ sur } \mathbb{R}_+^2 \text{ avec condition de Neumann } D_\tau \psi = 0 \text{ sur } \{\tau = 0\}.$$

L'importance de ces opérateurs de référence justifie le fait qu'on s'intéresse à un certain nombre de leurs propriétés, qui vont se retranscrire dans la structure du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . Pour chacun des modèles, on donne dans le tableau suivant la propriété utile (à savoir l'infimum du spectre) pour déterminer le premier terme de l'asymptotique.

Ce qui suit décrit les grandes lignes de la preuve du résultat final de cette première partie (voir le théorème 5.18).

1.4.1.3. *Méthode.* L'équivalent de la première valeur propre s'obtient en deux étapes.

#### Minoration de la première valeur propre $\lambda_1(h)$

C'est dans cette partie que réside la principale difficulté de l'analyse (évoquée au début de la section 1.4.1).

Cas	Opérateurs de référence	Infimum du spectre
(1)	$\mathcal{H} = D_Y^2 + Y^2$ sur $\mathbb{R}$	1
(2)	$\mathcal{G}(\xi) = D_\tau^2 + (\xi - \tau)^2$ sur $\mathbb{R}_+$ avec condition de Neumann	$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \text{Sp}(\mathcal{G}(\xi)) = \Theta_0$
(3)	$\mathcal{M}(\eta) = D_\tau^2 + \left(\eta - \frac{\tau^2}{2}\right)^2$ sur $\mathbb{R}$	$\inf_{\eta \in \mathbb{R}} \text{Sp}(\mathcal{M}(\eta)) = M_0$
(4)	$\mathcal{K}_\theta = D_\tau^2 + \left(D_\sigma + \sigma\tau \sin \theta - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta\right)^2$ sur $\mathbb{R}_+^2$ avec condition de Neumann	$\inf \text{Sp}(\mathcal{K}_\theta) = \zeta_1^\theta$

TABLEAU 1.4.1. Tableau récapitulatif des opérateurs de référence.

Le principe du Min-Max (voir le théorème A.9 en Annexe) donne en particulier une formulation variationnelle pour la plus petite valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  :

$$(1.4) \quad \lambda_1(h) = \min_{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

où on rappelle que  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est la forme quadratique associée à l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , dont l'expression est donnée par :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) = \int_{\Omega} |(-ih\nabla + \mathbf{A})u|^2 dx,$$

pour tout  $u \in H^1(\Omega)$ . On explicite l'asymptotique de la première valeur propre en minimisant cette forme quadratique. On se base pour cela sur une formule fondamentale de localisation. Pour une famille  $(\chi_j^h)_j$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact vérifiant :

$$\sum_j (\chi_j^h)^2 = 1, \text{ sur } \Omega,$$

(c'est-à-dire que les  $((\chi_j^h)^2)_j$  forment une partition de l'unité), on a l'identité suivante (voir la formule (3.3)) :

$$(1.5) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) = \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j \|u|\nabla(\chi_j^h)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cette formule s'interprète de la manière suivante : "L'énergie globale est égale à la somme des énergies locales modulo un terme de reste". En supposant que le reste de la partition de l'unité :

$$h^2 \sum_j \|u|\nabla(\chi_j^h)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

soit négligeable, l'estimation de  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  se ramène à celle des  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_j^h}$ , où les  $\Omega_j^h = \text{supp}(\chi_j^h) \cap \Omega$  sont des sous-domaines de  $\Omega$ . La méthode qui suit est la suivante : en minorant (à un terme d'erreur près) la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u)$  par le minimum sur  $j$  des quantités  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_j^h}(u)$ , on obtient une minoration de la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u)$  par l'infimum sur  $j$  des spectres des opérateurs locaux  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_j^h}$ .

Les supports des fonctions troncature  $\chi_j^h$  sont contenu dans une boule dont le centre et le rayon dépendent de  $h$ . Lorsque  $h$  tend vers 0, les sous-domaines  $\Omega_j^h$  constituent (autour de certains points  $x_j$ ) une zone

où vont se localiser les fonctions propres. À partir d'un découpage adapté du domaine  $\Omega$ , on distingue quatre types d'ensembles :

$$\Omega \setminus \Gamma, \partial\Omega \setminus \Gamma, \Gamma \setminus \partial\Omega, \partial\Omega \cap \Gamma.$$

Pour  $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on note respectivement  $\Omega_\ell$  chacun de ces ensemble, et  $\mathbf{x}_j^{(\ell)}$  les centres des boules choisis en fonction des alternatives suivantes :  $\mathbf{x}_j^{(1)} \in \Omega \setminus \Gamma$ ,  $\mathbf{x}_j^{(2)} \in \partial\Omega \setminus \Gamma$ ,  $\mathbf{x}_j^{(3)} \in \Gamma \setminus \partial\Omega$ ,  $\mathbf{x}_j^{(4)} \in \partial\Omega \cap \Gamma$ . Suivant ces distinctions, on note les  $\Omega_j^h$  de la manière suivante :  $\Omega_j^{(\ell),h}$ . Les opérateurs modèles introduits précédemment se retrouvent en effectuant un changement d'échelle semi-classique. Il s'agit d'un changement de variable du type suivant :

$$\mathbf{X} - \mathbf{x}_j^{(\ell)} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(\ell)}}{h^{\beta(\ell)}}.$$

Suivant le cas  $\ell$  considéré, on peut trouver un  $\beta(\ell)$  de sorte d'avoir "l'approximation" suivante (en un sens très formel) :

$$\mathcal{P}_{h, \mathbf{A}, \Omega_j^{(\ell),h}} \sim h^{p(\ell)} \mathcal{P}_{1, \mathbf{A}^{(\ell)}, \Pi_j^{(\ell)}},$$

avec :

$$\Pi_j^{(\ell)} = \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}_+^2,$$

et où  $\mathbf{A}^{(\ell)}$  est un potentiel modèle convenablement choisi qui dépend du point considéré.

Ce procédé est une simple homogénéisation en puissance de  $h$ . Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

Cas	Opérateurs modèles locaux (dépendants de $h$ )	Changement d'échelle $\beta^{(l)}, h^{p^{(l)}}, \Pi_j^{(l)} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$	Opérateurs modèles locaux homogénéisés sur le domaine modèle	Infimum du spectre
(1)	$h^2 D_y^2 + (hD_x -  \mathbf{B}(x_j^{(1)}) y)^2$ sur $\mathcal{B}(x_j^{(1)}, h^p)$	$\frac{1}{2}, h, \mathbb{R}^2$	$h \left( D_Y^2 + (D_X -  \mathbf{B}(x_j^{(1)}) Y)^2 \right)$	$ \mathbf{B}(x_j^{(1)}) h$
(2)	$h^2 D_t^2 + (hD_s -  \mathbf{B}(x_j^{(2)}) t)^2$ sur $\mathcal{B}(x_j^{(2)}, h^p)$ avec condition de Neumann	$\frac{1}{2}, h, \mathbb{R}_+^2$	$h \left( D_\tau^2 + (D_\sigma -  \mathbf{B}(x_j^{(2)}) \tau)^2 \right)$	$\Theta_0  \mathbf{B}(x_j^{(2)}) h$
(3)	$h^2 D_t^2 + \left( hD_s -  \nabla \mathbf{B}(x_j^{(3)})  \frac{t^2}{2} \right)^2$ sur $\mathcal{B}(x_j^{(3)}, h^p)$	$\frac{1}{3}, h^{4/3}, \mathbb{R}^2$	$h^{4/3} \left( D_\tau^2 + \left( D_\sigma -  \nabla \mathbf{B}(x_j^{(3)})  \frac{\tau^2}{2} \right)^2 \right)$	$M_0  \nabla \mathbf{B}(x_j^{(3)}) ^{\frac{2}{3}} h^{\frac{4}{3}}$
(4)	$h^2 D_t^2 + \left( hD_s +  \nabla \mathbf{B}(x_j^{(4)})  \left( st \sin \theta(x_j^{(4)}) - \frac{t^2}{2} \cos \theta(x_j^{(4)}) \right) \right)^2$ sur $\mathcal{B}(x_j^{(4)}, h^p)$ avec condition de Neumann	$\frac{1}{3}, h^{4/3}, \mathbb{R}_+^2$	$h^{4/3} \left( D_\tau^2 + \left( D_\sigma +  \nabla \mathbf{B}(x_j^{(4)})  \left( \sigma \tau \sin \theta(x_j^{(4)}) - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta(x_j^{(4)}) \right) \right)^2 \right)$	$\zeta_1^{\theta(x_j^{(4)})}  \nabla \mathbf{B}(x_j^{(4)}) ^{\frac{2}{3}} h^{\frac{4}{3}}$

TABLEAU 1.4.2. Tableau récapitulatif de l'infimum du spectre sur les sous-domaines locaux.

L'infimum du spectre de chaque opérateur modèle est obtenu à partir de l'infimum du spectre de l'opérateur de référence qui lui est unitairement équivalent. On observe que les quantités spectrales liées à la courbe d'annulation (cas (3) et (4)) sont asymptotiquement les plus petites. Le premier terme de l'asymptotique du théorème 1.4 (tout comme celui du théorème 1.2 dans le cas d'un champ magnétique qui ne s'annule pas) apparaît alors naturellement. Dans les régions où l'infimum du spectre possède la même échelle (en puissance de  $h$ ), la quantité minimale résulte d'une compétition entre la contribution à l'intérieur et la contribution du bord. Celles-ci dépendent fortement de l'expression du champ magnétique linéarisée au premier ordre. Cette approche donne une minoration de la forme quadratique sur les sous-domaines locaux, modulo un terme d'erreur en puissance de  $h$  (non explicité dans le tableau). La difficulté majeure de la preuve est d'arriver à contrôler la transition entre les différentes échelles semi-classiques ( $h$  et  $h^{4/3}$ ) dans une région proche de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ .

### Majoration de la première valeur propre $\lambda_1(h)$

On rappelle une conséquence utile du théorème spectral (voir le théorème A.6 présenté en Annexe) :

**Proposition 1.10.** *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et tout  $\psi \in \text{Dom}(T)$ , la distance  $d(\lambda, \text{Sp}(T))$  de  $\lambda$  au spectre de l'opérateur  $T$  dans  $\mathbb{C}$  vérifie l'inégalité :*

$$d(\lambda, \text{Sp}(T))\|\psi\| \leq \|(T - \lambda)\psi\|.$$

Cette proposition implique que si on trouve une bonne fonction test normalisée  $\psi$  (appelée quasimode) et un nombre complexe  $\lambda$  tels que  $\|(T - \lambda)\psi\| \leq \varepsilon$ , alors  $d(\lambda, \text{Sp}(T)) \leq \varepsilon$ . Cette méthode permet donc d'exhiber des nombres  $\lambda$  proches du spectre à  $\varepsilon$  près, ce qui permet en particulier d'obtenir une majoration de la plus petite valeur propre.

On construit des quasimodes à partir des fonctions propres des opérateurs de [Montgomery](#) et de [Pan et Kwek](#). Il s'agit de modifier leur expression en appliquant dans l'ordre inverse les transformations (changement d'échelle et changement de variable) qui ont permis de ramener l'étude spectrale à celle de ces opérateurs dominants. On applique pour finir le théorème spectral à l'opérateur  $T = \mathcal{P}_{h,A,\Omega}$  en utilisant les deux bons candidats  $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{P}_{h,A,\Omega})$  obtenus respectivement pour l'opérateur de [Montgomery](#) et de [Pan et Kwek](#).

La minoration et la majoration obtenues donnent un équivalent de la première valeur propre. Il s'agit de l'élément clé permettant d'obtenir des estimées d'Agmon.

**1.4.2. Estimées d'Agmon.** Les estimées d'Agmon sont un résultat de décroissance exponentielle des fonctions propres. De telles estimées ne nécessitent pas de connaître (a priori) l'expression des fonctions propres. Elles donnent en quelque sorte l'échelle de localisation dans la limite semi-classique. Pour illustrer ce propos, on peut penser à la première fonction propre de l'oscillateur harmonique  $-h^2\Delta + |x|^2$  en dimension 2 (donnée via l'équation (1.3)) pour laquelle on a une décroissance exponentielle en dehors de tout voisinage ne contenant pas l'origine.

1.4.2.1. *Énoncé du résultat.* Le théorème 1.11 est une version simplifiée du théorème 4.4 (énoncé dans le chapitre 4). Il est l'analogue du théorème 1.3 pour un champ magnétique variable qui ne s'annule pas :

**Théorème 1.11** (Estimée d'Agmon). *Il existe  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  :*

$$\int_{\Omega} e^{2\alpha h^{-1/3}d(x,\Gamma)} |\psi_{1,h}(x)|^2 dx \leq C \|\psi_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $\psi_{1,h}$  désigne un vecteur propre associé à la première valeur propre  $\lambda_1(h)$  et où  $d(x, \Gamma)$  désigne la distance du point  $x$  à la courbe d'annulation  $\Gamma$ .

Le théorème 4.8 (énoncé plus loin) donne un résultat concernant un plus grand nombre de valeurs propres. Dans ce cas transverse à  $\Gamma$ , l'échelle de localisation est en  $h^{1/3}$ . Dans le cas d'un champ magnétique qui ne s'annule pas, celle-ci est en  $h^{1/2}$  (voir le théorème 1.3).

1.4.2.2. *Heuristique.* Au regard de la mécanique classique, il est intuitivement facile de deviner où vont se localiser les premières fonctions propres. Les positions physiquement stables sont celles où la valeur du potentiel est minimale. En se rappelant que  $|\psi|^2$  représente une densité de probabilité, on s'attend logiquement à ce que les fonctions propres se localisent dans les régions où l'énergie est asymptotiquement la plus petite. Cette vision se retranscrit dans la formulation variationnelle (voir (1.4)). Dans le cas d'étude considéré (voir encore le tableau 1.4.2), les fonctions propres vont se localiser sur la courbe d'annulation (au bord ou à l'intérieur suivant la géométrie de  $\partial\Omega$  et  $\Gamma$ ).

1.4.2.3. *Méthode.* Il s'agit de montrer que la masse de toute fonction propre est essentiellement concentrée près de  $\Gamma$ . Pour établir un tel résultat, il est indispensable de disposer d'un terme de reste explicite dans l'estimation préliminaire de  $\lambda_1(h)$  car on utilise de manière cruciale l'estimation :

$$\lambda_1(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} + o(h^{4/3}).$$

On ne trouve pas d'estimées d'Agmon dans [58], car un tel terme de reste n'y figure pas. Des estimées d'Agmon sont énoncées dans [26], mais dans le cas où la ligne d'annulation ne rencontre pas le bord.

**1.4.3. Réduction à des modèles.** Dans le chapitre 5, sous l'hypothèse  $\Lambda_1^{\mathbf{B}} < M_1^{\mathbf{B}}$  (voir la notation 1.6) assurant la localisation de la première fonction propre sur l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$ , on montre que le bas du spectre du modèle de départ correspond au bas du spectre d'un problème modèle plus explicite, faisant intervenir au premier ordre l'opérateur de référence  $\mathcal{K}_\theta$ , modulo un reste petit suivant  $h$ . Les preuves se basent sur une réduction à différents problèmes modèles.

Les estimées d'Agmon permettent d'une part de ramener l'étude du Laplacien magnétique sur  $\Omega$ , à celle des opérateurs localisés sur  $\Omega_x$  (où  $\Omega_x$  désigne un voisinage suffisamment petit de sorte que le passage en coordonnées curvilignes soit licite, pour certains  $x \in \partial\Omega \cap \Gamma$ ). On regroupe ces différents opérateurs locaux en imposant une condition de Dirichlet en dehors des  $\Omega_x$ . Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  correspond alors au spectre de l'opérateur "somme directe"  $\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}^{\text{loc}}$ , modulo un reste en  $\mathcal{O}(e^{-Ch^{-1/3}})$ .

Après un processus d'homogénéisation, on obtient d'autre part que le spectre de l'opérateur  $\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}^{\text{loc}}$  correspond (après approximation) au spectre de l'opérateur "somme directe"  $\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} h^{4/3} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} \mathcal{K}_\theta(x)$ .

Le problème de départ se reformule finalement en terme des problèmes modèles regroupés, modulo un terme de reste petit suivant  $h$ . La méthode utilisée se retrouve dans [14].

1.4.3.1. *Énoncé du résultat.* Le résultat final du chapitre 5 et de la partie I est énoncé dans le théorème 5.18. Il donne un développement asymptotique complet des (premières) valeurs propres à n'importe quel ordre. Le résultat qui suit est énoncé dans une version simplifiée, ne donnant que le premier terme de l'asymptotique pour les premières valeurs propres. Les notations suivantes servent à quantifier le nombre  $N_{\Omega,\mathbf{B}}$  des valeurs propres pour lesquelles on donne un développement asymptotique :



**Notation 1.12.** Pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , on désigne par  $\zeta_n^\theta$  la  $n$ -ième valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{K}_\theta$  (comptée avec multiplicité) et on note  $N(\theta)$  l'élément défini par :

$$N(\theta) = \#(\text{Sp}_{\text{disc}}(\mathcal{K}_\theta) \cap (0, M_0)) = \# \{n, \zeta_n^\theta < M_0\}.$$

Pour tout  $x \in \partial\Omega \cap \Gamma$  et tout  $1 \leq n \leq N(\theta(x))$  on note encore (avec multiplicité) :

$$\begin{aligned} \Lambda_n^x &= |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} \zeta_n^{\theta(x)}, \\ \{\Lambda_n^{\mathbf{B}}, n \in \mathbb{N}^*\} &= \coprod_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \{\Lambda_n^x, n \in \mathbb{N}^*\} \text{ (union disjointe),} \\ N_{\Omega, \mathbf{B}} &= \# \{\Lambda_n^{\mathbf{B}} < M_1^{\mathbf{B}}, n \in \mathbb{N}^*\}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.13.** On s'attend à ce que pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , la valeur de  $N(\theta)$  soit finie mais ce fait n'est pas démontré et on peut éventuellement avoir  $N_{\Omega, \mathbf{B}} = \infty$ .

**Remarque 1.14.** On note encore que la définition de  $\Lambda_1^{\mathbf{B}}$  dans la notation 1.12 n'entre pas en conflit avec la définition donnée dans la notation 1.6.

**Notation 1.15.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$  on note :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_N &= \{\lambda_n(h), 1 \leq n \leq N\}, \\ \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}} &= \{h^{4/3} \Lambda_n^{\mathbf{B}}, 1 \leq n \leq N\}. \end{aligned}$$

**Théorème 1.16.** On suppose que la condition (voir la notation 1.6) :

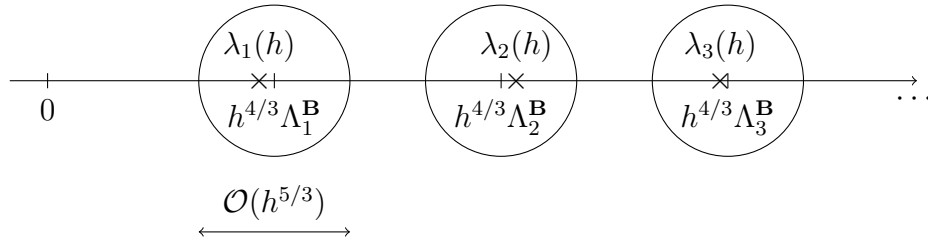
$$(1.6) \quad \Lambda_1^{\mathbf{B}} < M_1^{\mathbf{B}}$$

est satisfaite. Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$ , il existe une constante  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  :

$$d(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}}) \leq C_N h^{5/3},$$

où  $d(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}})$  désigne la distance entre les deux ensembles  $\mathfrak{S}_N$  et  $\mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}}$ .

Ce résultat donne une approximation des basses valeurs propres modulo un terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{5/3})$ . La réduction à des problèmes modèles se résume dans le schéma suivant :



Ce qui suit vise à expliquer le rôle de la condition (1.6) du théorème 1.16 (qui apparaît plus tard dans l'hypothèse 4.1). Comme cela a été évoqué, celle-ci assure que la première fonction propre se localise sur l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$ . Il convient de savoir lequel des opérateurs modèles (entre l'opérateur de [Montgomery](#) et l'opérateur de [Pan et Kwek](#)) est l'opérateur dominant structurant le bas du spectre. Cela passe par la connaissance de la zone de localisation de la première fonction propre ( $\Omega \cap \Gamma$  ou  $\partial\Omega \cap \Gamma$ ) qui est donnée par l'ensemble des  $x$  où est atteint le minimum :

$$\min \left\{ M_0 \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3}, \min_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \zeta_1^{\theta(x)} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} \right\} = \min \{M_1^{\mathbf{B}}, \Lambda_1^{\mathbf{B}}\},$$

(voir une nouvelle fois le tableau 1.4.2), qui dépend de la géométrie du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de  $\partial\Omega$ . Il résulte de l'étude détaillée de l'opérateur  $\mathcal{K}_\theta$  que pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\zeta_1^\theta < M_0$  (voir la proposition 2.15). Dans le cas générique où  $|\nabla\mathbf{B}| \equiv 1$  (comme on suppose que la courbe  $\Gamma$  n'est pas tangente au bord, ce qui équivaut à  $\theta(\mathbf{x}) \neq 0[\pi]$  pour tout  $\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap \Gamma$ ) la contribution à l'intersection du bord et de la courbe d'annulation est strictement plus petite que la contribution de la courbe d'annulation à l'intérieur du domaine, ce qui donne que l'opérateur  $\mathcal{K}_\theta$  est l'opérateur dominant et que la première fonction propre va se localiser sur  $\partial\Omega \cap \Gamma$ .

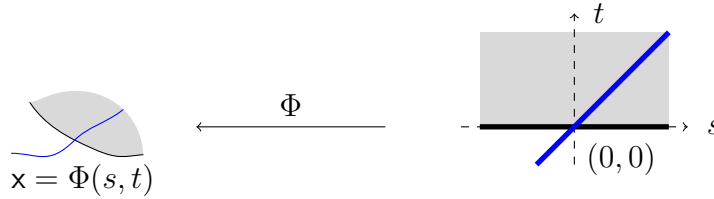
1.4.3.2. *Heuristique.* On décrit dans cette sous-section les étapes de réduction aux problèmes modèles.

### Problème initial :

C'est le problème de départ. On s'intéresse au bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur  $\Omega$ .

### Problème décomposé :

Il s'agit d'un problème "découpé" où l'on impose une condition de Dirichlet en dehors des zones proches de l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$ . Cela revient à réduire le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  à un ensemble de fonctions dont le support est localisé sur l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$ . Ce procédé a pour but d'autoriser (en tout point de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ ) un changement de variable redressant la géométrie du bord et de la ligne d'annulation visant à faire apparaître un domaine modèle (à terme,  $\mathbb{R}_+^2$ ). Ce changement de variable n'est valable que localement, sur un voisinage assez petit.



En chaque point  $\mathbf{x}$  de  $\partial\Omega$ , on considère un voisinage  $\Omega_{\mathbf{x}}$  suffisamment petit de sorte que ce changement de variable soit licite. Le domaine de l'opérateur est donné par  $\{\psi \in \text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}), \text{supp}(\psi) \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap \Gamma} \Omega_{\mathbf{x}}\}$ .

Cet opérateur (noté  $\bigoplus_{\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{\mathbf{x}}}^{\text{loc}}$ ) est la "somme directe" d'opérateurs locaux. Les estimées d'Agmon traduisent une décroissance exponentielle (suivant  $h$ ) en dehors d'un voisinage de  $\partial\Omega \cap \Gamma$  pour les (premières) fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . Cela se retranscrit de la manière suivante : le bas du spectre de ce modèle ( $\{\lambda_1^{\text{loc}}(h) \leq \lambda_2^{\text{loc}}(h) \leq \dots\}$ ) est le même que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , modulo un reste exponentiellement petit en  $\mathcal{O}(e^{-Ch^{-1/3}})$ .

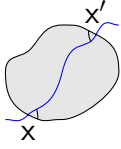
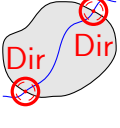
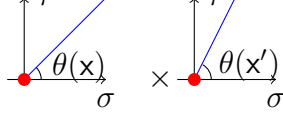
### Problème modèle :

L'opérateur final est une réunion des opérateurs de référence  $\mathcal{K}_\theta$  :

$$\bigoplus_{\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap \Gamma} h^{4/3} |\nabla\mathbf{B}(\mathbf{x})|^{2/3} \mathcal{K}_{\theta(\mathbf{x})}.$$

Ce problème modèle s'obtient à partir du problème "décomposé" précédent, après un changement de variable, un changement d'échelle, et approximation. On obtient ainsi que le bas du spectre de cet opérateur final est proche du bas du spectre de l'opérateur modèle intermédiaire, modulo un terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{5/3})$ .

Cette heuristique se résume dans le tableau suivant :

	Initial	Décomposé	Modèle
Domaine $\Omega$			
Opérateur	$\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$	$\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}^{\text{loc}}$	$\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} h^{4/3}  \nabla \mathbf{B}(x) ^{2/3} \mathcal{K}_{\theta(x)}$
Spectre	$(\lambda_n(h))_{1 \leq n \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}}$	$(\lambda_n^{\text{loc}}(h))_{1 \leq n \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}}$	$(h^{4/3} \Lambda_n^{\mathbf{B}})_{1 \leq n \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}}$
	$\mathcal{O}(e^{-Ch^{-1/3}})$		$\mathcal{O}(h^{5/3})$

L'ensemble  $\{h^{4/3} \Lambda_1^{\mathbf{B}} \leq h^{4/3} \Lambda_2^{\mathbf{B}} \leq \dots\}$  est donc une approximation du bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , modulo un terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{5/3})$ .

1.4.3.3. *Méthode.* Cette asymptotique s'obtient en regroupant et en classant les valeurs propres générées par chacun des problèmes modèles. On donne ici les grandes lignes de cette stratégie qu'on retrouve dans [14]. On commence par effectuer un changement de variable local pour se ramener à une géométrie redressée du bord et de la courbe d'annulation et réécrire plus simplement l'opérateur dans les coordonnées curvilignes  $(s, t)$ . Après le changement d'échelle :

$$\sigma = h^{-1/3} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{1/3} s, \text{ et } \tau = h^{-1/3} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{1/3} t,$$

qui se ramène (presque) au domaine  $\mathbb{R}_+^2$ , on peut (au même titre que le développement d'une fonction sous forme de série entière) développer l'opérateur obtenu (noté  $\mathcal{K}_h$ ) en puissances de  $h$ , en un sens formel, sans parler de convergence (on utilise la notation  $\sim$  au lieu du signe  $=$  pour un tel développement) :

$$\mathcal{K}_h \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{K}_j h^{j/3},$$

et l'on recherche des paires propres  $(\zeta, \psi)$  :

$$\zeta \sim \sum_{j \geq 0} \zeta_j h^{j/3} \text{ et } \psi \sim \sum_{j \geq 0} \psi_j h^{j/3},$$

vérifiant :

$$\mathcal{K}\psi \sim \zeta\psi,$$

dans le sens où l'on cherche une solution pour laquelle on a une identification des coefficients du développement suivant chacune des termes en  $h^{j/3}$  de l'équation, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

• Termes en  $h^0$ . On résout :

$$\mathcal{K}_0 \psi_0 = \zeta_0 \psi_0.$$

Il est facile de voir que  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_{\theta(x)}$ . On retrouve ainsi l'opérateur de Pan et Kwek en tant qu'opérateur dominant. On obtient alors que  $\zeta_0 \in \text{Sp}(\mathcal{K}_{\theta(x)})$  et que  $\psi_0$  est dans le sous espace propre associé.

On peut prendre  $\zeta_0 = \zeta_n^{\theta(x)}$  et choisir  $\psi_0(\sigma, \tau)$  comme fonction propre associée.

- Termes d'ordre supérieur. Ce procédé peut s'appliquer à un ordre arbitrairement grand.

Le développement formel de l'opérateur en puissances de  $h$  est justifié grâce aux estimées d'Agmon (voir les corollaires 4.5 et 4.9) qui permettent de contrôler les termes de reste issus du développement de Taylor du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Le résultat final (voir le théorème 5.18) donne un développement asymptotique complet des premières valeurs propres, et pas seulement au premier ordre (contrairement à la version simplifiée donnée via le théorème 1.16). Ce résultat s'obtient à partir du processus de résolution précédent, qui permet d'explicitier successivement chacun des termes de l'asymptotique à un ordre arbitrairement grand.

**1.4.4. Simulations numériques.** On présente dans le chapitre 6 des calculs numériques de valeurs propres et de vecteurs propres (module et phase), réalisés à partir de la librairie éléments finis Méliana++. On présente des calculs dans le cas où  $\Omega$  est le rectangle  $\Omega = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times [-1, 1]$  et où le champ magnétique  $\mathbf{B}(s, t) = s$  s'annule suivant l'axe des ordonnées (voir la figure 5). On rappelle que dans notre cadre

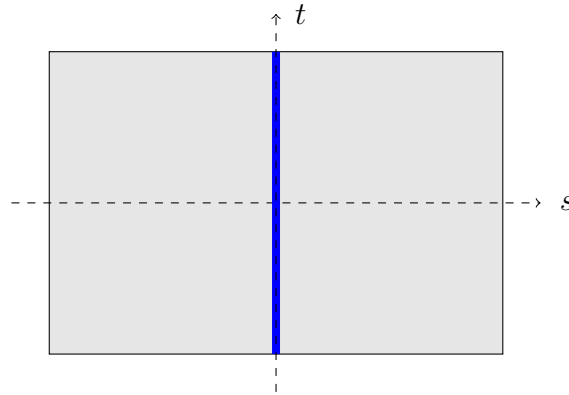


FIGURE 5. Domaine  $\Omega$  et courbe d'annulation pour l'étude numérique.

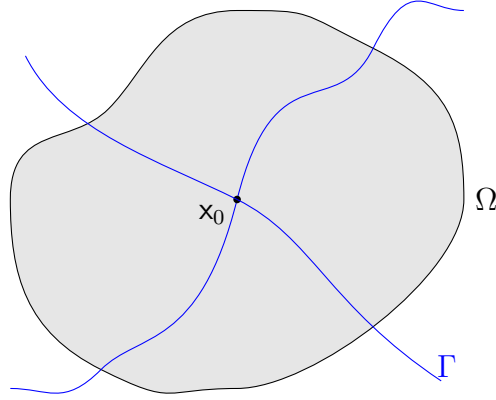
d'étude, on suppose que  $\Omega$  est régulier (voir les hypothèses 1). Il convient de remarquer que les résultats obtenus restent valables dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert polygonal dès lors que la courbe d'annulation ne passe pas par un coin, de sorte que les graphiques que l'on présente constituent bien une illustration des théorèmes de la partie I.

## 1.5. Résultats obtenus pour un champ magnétique s'annulant quadratiquement

On décrit dans cette section le contenu de la deuxième partie. Celle-ci concerne l'analyse d'un modèle d'annulation quadratique à l'intérieur d'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Il s'agit d'une annulation différente de celle présentée en première partie. On se place dans le cas où le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'annule le long d'une courbe simple et régulière  $\Gamma$  qui possède un nombre fini de points doubles à l'intérieur de  $\Omega$ . On note  $\Sigma$  l'ensemble de ses points doubles. On suppose que la courbe intersecte le bord de  $\Omega$  de manière non tangente en un nombre fini de points et qu'elle s'intersecte de manière non tangente en tout point  $x_0 \in \Sigma$ . On suppose de plus que pour tout  $x \in \Gamma \setminus \Sigma$ ,  $|\nabla \mathbf{B}(x)| \neq 0$  et que la matrice Hessienne du champ magnétique est non dégénérée en tout point  $x_0 \in \Sigma$  (voir l'hypothèse 2).

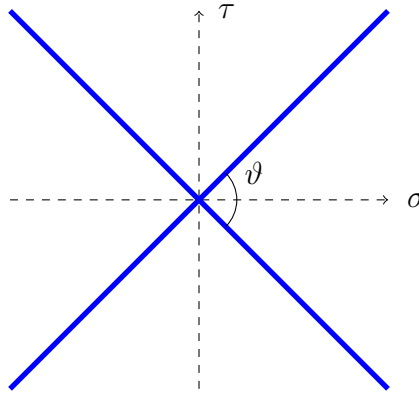
### 1.5.1. Étude semi-classique dans le cas d'un champ magnétique s'annulant quadratiquement.

Dans ce cas, l'analyse est différente en raison des points doubles, mais la structure de l'étude reste la même que dans la partie précédente. Le cœur de l'étude se situe dans la minoration.

FIGURE 6. Domaine  $\Omega$  et courbe d'annulation  $\Gamma$ .

Le champ magnétique de l'opérateur modèle sous-jacent (étudié en détails dans le chapitre 2) se présente comme le produit de deux fonctions linéaires. L'opérateur modèle étudié (sur  $\mathbb{R}^2$ ) est l'extension autoadjointe de l'opérateur suivant :

$$\mathcal{X}_\varepsilon = D_\tau^2 + \left( D_\sigma + \varepsilon^2 \sigma^2 \tau - \frac{\tau^3}{3} \right)^2.$$



Géométriquement, la valeur de  $\varepsilon$  représente la valeur de la tangente de l'angle formé par l'une des deux droites d'annulation avec l'axe des abscisses ( $\varepsilon = \tan \frac{\vartheta}{2}$ ). Cet opérateur a de nombreuses propriétés de symétrie, et est analytique suivant  $\varepsilon$  (au sens de la théorie des perturbations analytiques de Kato, voir [50] et [51]). La propriété la plus importante est qu'il est à résolvante compacte (on reprend la démonstration en montrant que le spectre essentiel est vide via l'utilisation du théorème de Persson). Ce fait est connu depuis longtemps et est vérifié pour toute une classe d'opérateurs définis sur l'espace tout entier (voir [44] et [40]). On note alors (avec multiplicité) :

$$\text{Sp}(\mathcal{X}_\varepsilon) = \{ \varkappa_1(\varepsilon) \leq \varkappa_2(\varepsilon) \leq \dots \leq \dots \}.$$

Ces propriétés sont énoncés dans la section 2.5.

1.5.1.1. *Énoncé du résultat.* On montre dans le chapitre 7 le théorème suivant :

**Notation 1.17.** Pour tout  $x \in \Sigma$  désigne par  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  les valeurs propres de la matrice Hessienne de  $B$  au point  $x$  de sorte que  $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ , et on note :

$$\Xi(x) = |\beta(x)|,$$

$$\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{|\alpha(x)|}{|\beta(x)|}}.$$

**Théorème 1.18** (Équivalent de la plus petite valeur propre). *Il existe  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :*

$$C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} - Ch^{19/12} \leq \lambda_1(h) \leq C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} + Ch^{7/4},$$

avec :

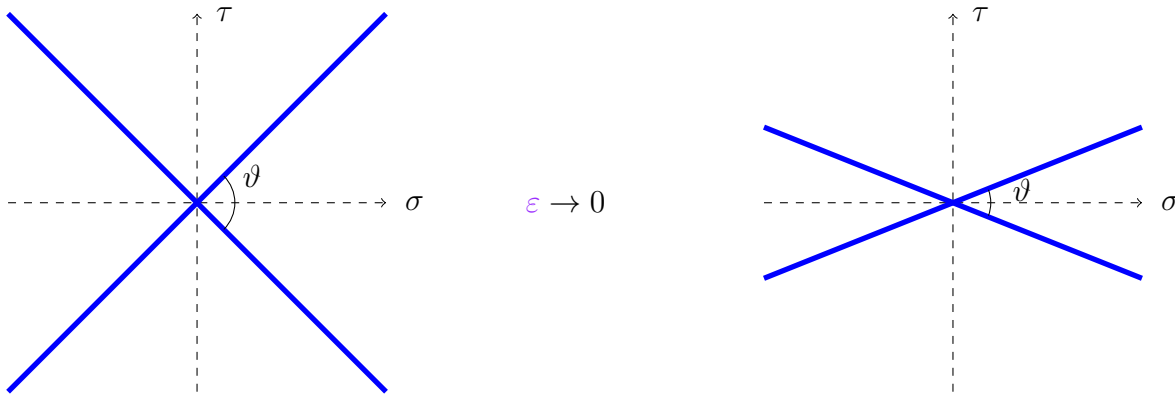
$$C_0^{\mathbf{B}} = \inf_{x \in \Sigma} \Xi(x)^{1/2} \varkappa_1(\varepsilon(x)).$$

La quantité  $\varepsilon(x)$  représente la tangente du demi-angle de l'opérateur modèle au point  $x \in \Sigma$ . La quantité  $\Xi(x)$  apparaît quant à elle après un développement de Taylor (au point  $x$ ) du champ magnétique. Il s'agit du coefficient multiplicatif devant la partie quadratique modèle " $\tau^2 - \varepsilon(x)^2 \sigma^2$ ".

1.5.1.2. *Méthode.* On utilise un procédé généralisant la méthode utilisée dans la sous-section 3.1 de la partie I.

### 1.5.2. Étude partiellement semi-classique de l'opérateur modèle croix dans la limite petit angle.

Dans le chapitre 10, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude spectrale dans la limite petit angle  $\varepsilon \rightarrow 0$  (où  $\varepsilon = \tan \frac{\vartheta}{2}$ ), pour l'opérateur modèle  $\mathcal{X}_\varepsilon$ . Dans ce régime, l'opérateur est partiellement semi-



classique (le paramètre destiné à tendre vers 0, à savoir  $\varepsilon$  dans ce cas, n'est en facteur que devant un des termes de dérivation). En effet, après le changement d'échelle  $\sigma = \varepsilon^{-1}s$ ,  $\tau = t$ , l'étude se ramène à l'opérateur unitairement équivalent suivant sur  $L^2(\varepsilon^{-1}dsdt)$  :

$$D_t^2 + \left( \varepsilon D_s - \frac{t^3}{3} + s^2 t \right)^2.$$

En remplaçant formellement  $\varepsilon D_s$  par  $\xi$  et  $s$  par  $\alpha$ , on obtient un opérateur 1D à deux paramètres, appelé symbole, dont l'expression est donnée par :

$$\mathcal{X}_{\alpha, \xi} = D_t^2 + \left( \xi - \frac{t^3}{3} + \alpha^2 t \right)^2.$$

Dans la limite petit angle, l'étude spectrale de  $\mathcal{X}_\varepsilon$  se ramène à celle de la famille d'opérateurs  $(\mathcal{X}_{\alpha, \xi})_{(\alpha, \xi) \in \mathbb{R}^2}$ . L'asymptotique des valeurs propres s'exprime en fonction de l'infimum de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  du symbole opérateur de  $\mathcal{X}_\varepsilon$  donnée par  $\varrho_1(\alpha, \xi) = \inf \text{Sp}(\mathcal{X}_{\alpha, \xi})$ . On se base sur des travaux développés dans [65] et [19].

1.5.2.1. *Énoncé des résultats principaux.* Le théorème 1.20 que l'on donne ici établit que la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  atteint son minimum sur un ensemble compact. Son énoncé apparaît dans le théorème 10.9. Le théorème 1.21, présenté dans la section 10.2 donne l'asymptotique des valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Notation 1.19.** On note :  $S_0 = \min_{(\alpha, \xi) \in \mathbb{R}^2} \varrho_1(\alpha, \xi)$ .

**Théorème 1.20** (Résultat principal pour le symbole opérateur). *Les minima globaux de la fonction  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  étudiée sur la quart de plan  $\{\alpha > 0, \xi > 0\}$  sont contenus dans un compact inclus dans l'ensemble :*

$$\left\{ 0 \leq \xi \leq \frac{2}{3}\alpha^3 \right\}.$$

On illustre numériquement les valeurs prises par la fonction de bande sur un domaine compact. On conjecture l'existence de deux minima, numériquement atteints en  $(\pm 0.784, 0)$ . La courbe qui apparaît

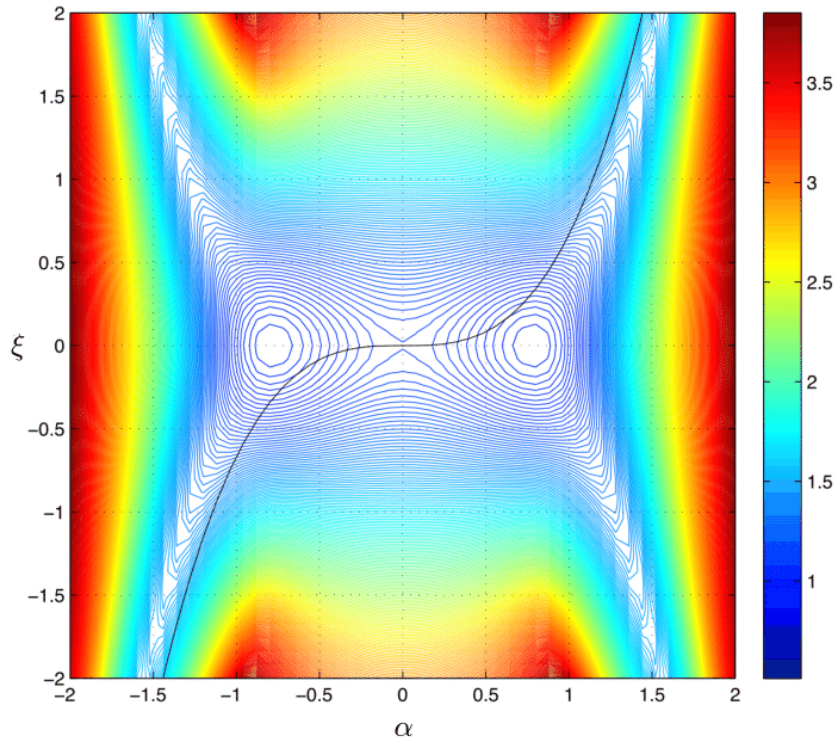


FIGURE 7. Valeurs numériques de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  pour une discrétisation 50x50.

en noire sur la figure 7 correspond à l'ensemble  $\{\xi = \frac{2}{3}\alpha^3\}$ .

**Théorème 1.21.** *Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  :*

$$|\lambda_n(\varepsilon) - S_0| \leq C\varepsilon.$$

Cette étude suit la même stratégie que celle développée dans [65]. Dans le présent cas d'étude, on ne suppose plus que la fonction de bande admet un unique minimum, et on ne fait pas non plus l'hypothèse que les minima sont non dégénérés. Dans la limite petit angle, on obtient que l'asymptotique (en  $\varepsilon$ ) pour toutes les valeurs propres a le même terme dominant.

1.5.2.2. *Heuristique.* Dans le régime  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le spectre de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  est petit là où le symbole opérateur prend de petites valeurs.

1.5.2.3. *Méthode.* Le résultat sur le symbole (théorème 1.20) s'établit via des études de signe des dérivées partielles de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  en utilisant des formules de Feynman-Hellmann démontrées dans la section 10.1.2. La suite de l'analyse (théorème 1.21) se base sur l'approximation de Born-Oppenheimer. Dans cette limite semi-classique, elle consiste à approcher le spectre de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  par l'infimum du spectre d'un opérateur 1D à paramètre. On obtient une majoration de  $\kappa_n(\varepsilon)$  par une construction de quasimode dont l'expression s'obtient par un développement en série formelle de l'opérateur suivant des puissances de  $\varepsilon^{1/2}$ . Ce développement en série formelle est justifié par des estimées d'Agmon. La minoration est un peu plus délicate. Pour l'obtenir, on utilise le formalisme de la décomposition en états cohérents pour obtenir un analogue de la formule de localisation (voir la formule 1.5).





## CHAPITRE 2

### Présentation des opérateurs modèles

Ce chapitre concerne l'analyse du spectre d'opérateurs de Laplace magnétiques sur  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}_+^2$ , pour des champs magnétiques modèles, dans le cas où le paramètre semi-classique  $h$  est égal à 1. Il s'agit des opérateurs modèles apparus après changement d'échelle (voir les tableaux 1.4.1 et 1.4.2). Dans cette présentation, on reprend la convention de la notation 1.9. On donne en particulier les résultats connus sur les opérateurs de référence 1D unitairement équivalents.

#### 2.1. Champ constant à l'intérieur

On considère le Laplacien magnétique sur tout le plan  $\mathbb{R}^2$ , dans le cas modèle d'un champ magnétique constant strictement positif  $\mathbf{B} \equiv 1$ . On considère l'expression suivante du potentiel vecteur :

$$\mathbf{A} = (-Y, 0).$$

Cela revient à considérer l'opérateur :

$$D_Y^2 + (D_X - Y)^2.$$

En appliquant la transformée de Fourier partielle  $\mathcal{F}_{X \mapsto \xi}$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ , on se ramène isométriquement à l'étude spectrale d'une famille d'opérateurs à un paramètre ( $\xi \in \mathbb{R}$ ) :

$$D_Y^2 + (\xi - Y)^2.$$

Le domaine étant invariant par translation en la variable  $Y$ , on peut absorber le paramètre de Fourier  $\xi$  pour se ramener de manière équivalente à l'opérateur :

$$D_Y^2 + Y^2.$$

On reconnaît l'oscillateur harmonique. On se ramène ainsi à l'étude de l'opérateur autoadjoint de référence en dimension 1 donné par :

$$\mathcal{H} = D_Y^2 + Y^2,$$

agissant sur  $L^2(\mathbb{R})$  et donné comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique suivante :

$$\mathbf{B}^1(\mathbb{R}) \ni u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} (|u'(Y)|^2 + Y^2|u(Y)|^2) dY,$$

où la définition des espaces  $\mathbf{B}^k$  est donnée en Annexe C. Avant de rappeler les propriétés importantes de l'oscillateur harmonique, on introduit quelques notations.

**Notation 2.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction suivante :

$$H_n(Y) = e^{Y^2/2} \left( Y - \frac{d}{dY} \right)^n e^{-Y^2/2} = (-1)^n e^{Y^2/2} \left( \frac{d}{dY} \right)^n e^{-Y^2/2},$$

où les  $H_n$  sont les polynômes de Hermite (de degré  $n$ ).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit la suite de fonctions  $(f_n^{\mathcal{H}})_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par récurrence de la manière suivante :

$$f_1^{\mathcal{H}}(Y) = e^{-\frac{Y^2}{2}}, \quad f_n^{\mathcal{H}} = c_n (a^*)^{n-1} f_1^{\mathcal{H}},$$

où  $a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dY} + Y \right)$  (opérateur de création), et où  $c_n$  est une constante de normalisation pour la norme  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ces fonctions sont appelées fonctions de Hermite. Elles forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Proposition 2.2.** *L'oscillateur harmonique possède les propriétés suivantes :*

- (1) *L'opérateur  $\mathcal{H}$  est à résolvante compacte.*
- (2) *Les valeurs propres de  $\mathcal{H}$  sont simples et  $\text{Sp}(\mathcal{H}) = 2\mathbb{N}^* - 1$ . Un vecteur propre associé à la valeur propre  $2n - 1$  est  $f_n^{\mathcal{H}}$ .*
- (3) *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la restriction de  $\mathcal{H}$  à  $B^{k+2}(\mathbb{R})$  définit un isomorphisme de  $B^{k+2}(\mathbb{R})$  sur  $B^k(\mathbb{R})$ .*

## 2.2. Champ constant au bord

On considère la réalisation de Neumann du Laplacien magnétique dans le cas modèle d'un champ uniforme  $\mathbf{B} \equiv 1$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ , et la même expression du potentiel vecteur que dans le cas précédent :

$$\mathbf{A} = (-\tau, 0).$$

Cela revient à étudier le même opérateur :

$$D_\tau^2 + (D_\sigma - \tau)^2,$$

mais cette fois-ci sur un demi-espace avec condition de Neumann au bord. En appliquant la transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}_{\sigma \rightarrow \xi}$ , on se ramène à l'opérateur 1D (avec un paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$ ) suivant :

$$D_\tau^2 + (\xi - \tau)^2,$$

cette fois-ci sur une demi-droite. Comme  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , on ne peut absorber le paramètre  $\xi$  par translation comme dans le cas précédent. On obtient ainsi une famille  $(\mathcal{G}(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}}$  d'opérateurs indexée par le paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$ . L'opérateur  $\mathcal{G}(\xi)$  de référence est l'opérateur de De Gennes, défini comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$B^1(\mathbb{R}^+) \ni u \mapsto \int_0^{+\infty} (|u'(\tau)|^2 + (\xi - \tau)^2 |u(\tau)|^2) d\tau.$$

Le domaine de l'opérateur  $\mathcal{G}(\xi) = D_\tau^2 + (\xi - \tau)^2$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  est  $\text{Dom}(\mathcal{G}(\xi)) = \{u \in B^2(\mathbb{R}^+), u'(0) = 0\}$ . Les principaux résultats connus relatifs à cet opérateur sont résumés dans ce qui suit (voir par exemple [28], [10], [24], [5] et [13]).

**Proposition 2.3.** *L'opérateur de De Gennes possède les propriétés suivantes :*

- (1) *Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  l'opérateur  $\mathcal{G}(\xi)$  est à résolvante compacte.*
- (2) *Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  la plus petite valeur propre  $\mu_1(\xi)$  est simple et les fonctions propres associées ne s'annulent pas.*
- (3) *La fonction  $\xi \mapsto \mu_1(\xi)$  est analytique sur  $\mathbb{R}$ , admet un unique minimum (atteint en  $\xi_0 > 0$ ) qui est non dégénéré, est décroissante sur  $(-\infty, \xi_0)$ , croissante sur  $(\xi_0, +\infty)$ , et vérifie  $\mu_1(0) = 1$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu_1(\xi) = +\infty$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mu_1(\xi) = 1$ .*
- (4) *Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , les fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{G}(\xi)$  appartiennent à  $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ .*

**Notation 2.4.** On pose :  $\Theta_0 = \mu_1(\xi_0)$ .

On retrouve la quantité spectrale introduite au théorème 1.2 et qui apparaît dans les tableaux 1.4.1 et 1.4.2 de l'introduction.

**Proposition 2.5.** *La constante universelle  $\Theta_0$  vérifie :  $\Theta_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\Theta_0 = \xi_0^2$ . On a l'approximation numérique suivante  $\Theta_0 \approx 0.5901$  (voir [13]).*

### 2.3. Champ s'annulant linéairement sur une droite

On considère sur tout  $\mathbb{R}^2$  le cas modèle d'un champ magnétique  $\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau$  qui s'annule linéairement sur la droite d'équation  $\tau = 0$ , avec  $|\nabla \mathbf{B}| \equiv 1$  sur cette même droite. L'expression du potentiel vecteur associé que l'on considère est la suivante :

$$\mathbf{A} = \left( -\frac{\tau^2}{2}, 0 \right).$$

Cela revient à étudier l'opérateur :

$$D_\tau^2 + \left( D_\sigma - \frac{\tau^2}{2} \right)^2.$$

Après la transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}_{\sigma \rightarrow \eta}$  on ramène l'étude à celle de l'opérateur unitairement équivalent suivant :

$$D_\tau^2 + \left( \eta - \frac{\tau^2}{2} \right)^2.$$

On retrouve alors l'opérateur de Montgomery  $\mathcal{M}(\eta)$  défini comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \left( |u'(\tau)|^2 + \left( \eta - \frac{\tau^2}{2} \right)^2 |u(\tau)|^2 \right) d\tau,$$

sur le domaine de forme  $\{u \in L^2(\mathbb{R}), u' \in L^2(\mathbb{R}), \tau^2 u \in L^2(\mathbb{R})\}$ . On résume dans ce qui suit les propriétés connues de l'opérateur  $\mathcal{M}(\eta)$  (voir [47], [58], [28], [57], [35]).

**Proposition 2.6.** *Pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$ , l'opérateur de Montgomery possède les propriétés suivantes :*

- (1) *L'opérateur  $\mathcal{M}(\eta)$  est à résolvante compacte. On note  $(\nu_n(\eta))_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de ses valeurs propres.*
- (2) *La plus petite valeur propre  $\nu_1(\eta)$  est simple.*
- (3) *Les fonctions propres associées à la valeurs propre  $\nu_1(\eta)$  ne s'annulent pas.*

**Notation 2.7.** On désigne par :

$$f_1^{\mathcal{M}(\eta)}$$

l'unique fonction propre positive et de norme 1 associée à la valeur propre  $\nu_1(\eta)$ .

Pour tout  $\eta$ , la famille  $(\mathcal{M}(\eta))_\eta$  est analytique de type (B) au sens de la théorie des perturbations analytiques de Kato (voir par exemple [28]) de sorte que la famille  $(\nu_1(\eta), f_1^{\mathcal{M}(\eta)})$  dépend analytiquement de  $\eta$ . Il en découle des formules de "Feynman-Hellmann" dont l'une est donnée par la proposition suivante (voir [26] pour la preuve) :

**Proposition 2.8.** *Pour tout  $\eta_0 \in \mathbb{R}$ , on a :*

$$(\mathcal{M}(\eta_0) - \nu_1(\eta_0)) \left( \partial_\eta f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)} \right)_{|\eta=\eta_0} = - (\partial_\eta \mathcal{M}(\eta))_{|\eta=\eta_0} f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}.$$

$$\partial_\eta (\nu_1(\eta_0)) (\eta) = \int_{\mathbb{R}} 2 \left( \eta - \frac{\tau^2}{2} \right) \left( f_1^{\mathcal{M}(\eta)} \right)^2 (\tau) d\tau.$$

*En particulier, en un point critique  $\eta_0$  de  $\nu_1$  on a :*

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}} 2 \left( \eta - \frac{\tau^2}{2} \right) \left( f_1^{\mathcal{M}(\eta)} \right)^2 (\tau) d\tau = 0.$$

Pour tout  $\xi$ , la famille  $(\mathcal{G}(\xi))_\xi$  est également analytique de type (B) au sens de la théorie des perturbations analytiques de Kato et on a de la même manière des formules de Feynman-Hellmann associées. On détaille ici d'avantage les propriétés de l'opérateur de Montgomery car ces formules de Feynman-Hellmann seront utilisées dans la construction de quasimodes (voir la sous-section 3.2.5).

**Proposition 2.9.** *On a :*

- (1) *La fonction  $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \nu_1(\eta)$  est analytique, admet un unique minimum (atteint en  $\eta_0 > 0$ ) qui est non dégénéré, et vérifie  $\lim_{|\eta| \rightarrow +\infty} \nu_1(\eta) = +\infty$ .*
- (2) *Les fonctions propres associées à la valeur propre  $\nu_1(\eta)$  (qui est simple) appartiennent à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et sont paires.*

**Notation 2.10.** On pose :  $M_0 = \nu_1(\eta_0)$ .

On retrouve la quantité spectrale introduite au théorème 1.4 et qui apparaît dans les tableaux 1.4.1 et 1.4.2 de l'introduction.

**Proposition 2.11.** *On a :  $\eta_0 > 0$  et les approximations numériques suivantes :  $\eta_0 \approx 0.35$ ,  $M_0 \approx 0.5698$  (voir [20] et aussi [47]).*

Les calculs numériques ont été effectués avec la librairie éléments fini Mélima++ développées à l'université de Rennes 1, pour un élément  $\mathbb{P}_{150}$ . La figure 2 montre numériquement que la courbe  $\eta \mapsto \nu_2(\eta)$  admet un unique minimum. Une valeur numérique de ce minimum est donnée par :

$$\inf_{\eta \in \mathbb{R}} \nu_2(\eta) \approx 1.6537.$$

**Notation 2.12.** En supposant qu'il existe bel et bien un unique minimum, on note  $\eta_{0,2}$  le point en lequel ce minimum est atteint.

## 2.4. Champ s'annulant linéairement au bord

On considère le champ magnétique modèle suivant sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  :

$$\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau \cos \theta - \sigma \sin \theta,$$

s'annulant sur la droite d'équation  $\tau \cos \theta - \sigma \sin \theta = 0$ , avec  $|\nabla \mathbf{B}| \equiv 1$  sur cette même droite. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\sigma, \tau)$  considéré est le suivant :

$$\mathbf{A} = \left( \sigma \tau \sin \theta - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta, 0 \right).$$

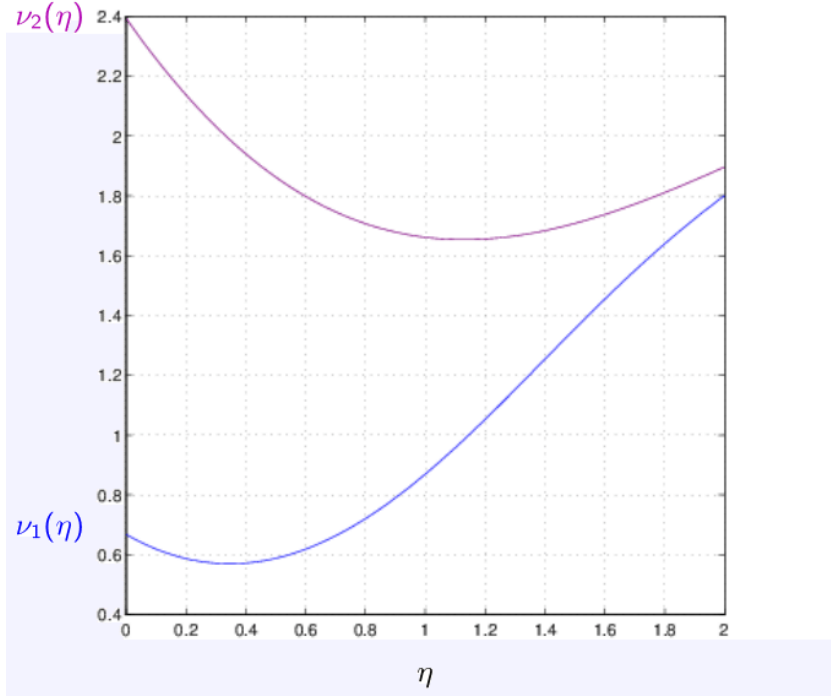


FIGURE 1. Calculs numériques des deux premières valeurs propres de  $\mathcal{M}(\eta)$  en fonction de  $\eta \in [0, 2]$ .

Cela revient à étudier l'opérateur :

$$\mathcal{K}_\theta = \left( D_\sigma + \sigma\tau \sin \theta - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta \right)^2 + D_\tau^2,$$

sur  $\mathbb{R}_+^2 = \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2, \tau > 0\}$ , avec condition de Neumann au bord  $D_\tau u = 0$ , défini comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^2} \left| \left( D_\sigma + \sigma\tau \sin \theta - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta \right) u \right|^2 + |D_\tau u|^2 d\sigma d\tau,$$

dont le domaine de forme est l'ensemble des fonctions  $u$  de  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$  pour lesquelles cette dernière quantité est finie. Cet opérateur de référence est l'opérateur de Pan et Kwek (introduit dans [58]). Dans [21] on trouve le résultat suivant :

**Proposition 2.13.** *Pour tout  $\theta$ , le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Pan et Kwek vérifie l'inégalité suivante :*

$$\inf \text{Sp}_{\text{ess}}(\mathcal{K}_\theta) = \nu_1(\eta_0) = M_0.$$

**Notation 2.14.** On désigne par  $\zeta_1^\theta = \inf \text{Sp}(\mathcal{K}_\theta)$ .

On retrouve la quantité spectrale introduite au théorème 1.4 et qui apparaît dans les tableaux 1.4.1 et 1.4.2 de l'introduction. Par symétrie, l'étude se réduit au cas où  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Dans [58], Pan et Kwek démontrent la proposition suivante :

**Proposition 2.15.** *On a :*

$$(I) \zeta_1^0 = M_0.$$

(2)  $\zeta_1^\theta < M_0$ , pour tout  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .

Ce fait est illustré numériquement dans [20]. On y trouve les courbes des valeurs propres pour différentes valeurs de l'angle  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  : On retrouve dans le graphique ci-dessus la valeur de  $M_0$  et la courbe

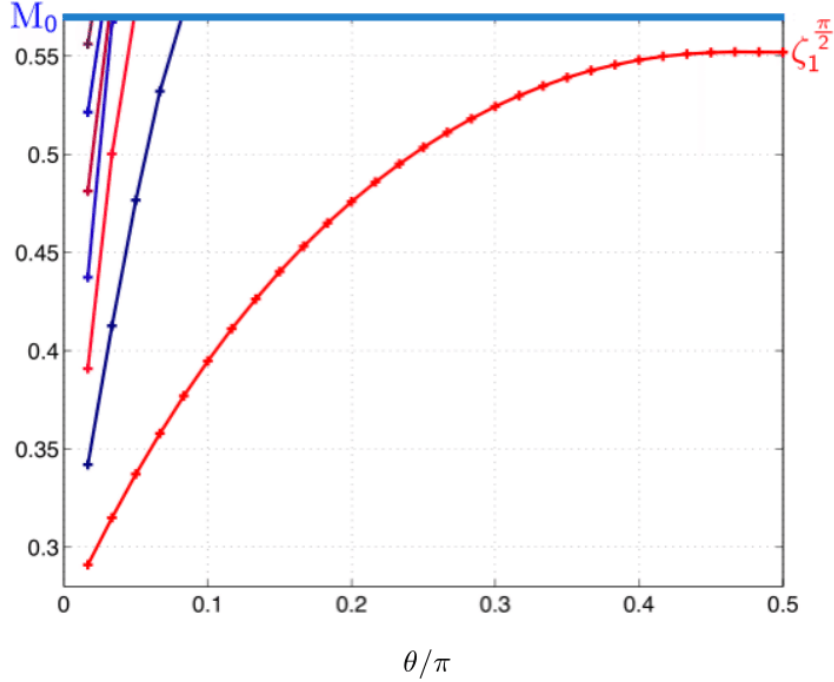


FIGURE 2. Calculs numériques du bas du spectre de l'opérateur de Pan et Kwek  $\mathcal{K}_\theta$ . Valeurs propres  $\zeta_n^\theta$  sous le seuil du spectre essentiel pour  $\theta \in \{\frac{k\pi}{60}, 1 \leq k \leq 30\}$ .

$\theta \mapsto \zeta_1^\theta$ . On rappelle la notation suivante introduite dans la notation 1.12)

**Notation 2.16.** Pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , on désigne par  $N(\theta)$  l'élément de  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  défini par :

$$N(\theta) = \#\left(\text{Sp}_{\text{disc}}(\mathcal{K}_\theta) \cap (0, M_0)\right) = \#\left\{n, \zeta_n^\theta < M_0\right\}.$$

**Remarque 2.17.** Pour  $\theta$  fixé quelconque, on ne sait pas si  $\zeta_n^\theta$  est simple. La question de la monotonie suivant le paramètre  $\theta$  n'est pas non plus établie, et on rappelle qu'on ignore également si  $N(\theta)$  est fini.

Le théorème de Persson (voir A.4 en Annexe) donne une décroissance exponentielle des fonctions propres associées à une valeur propre située (strictement) sous le spectre essentiel  $M_0$  de l'opérateur de Pan et Kwek  $\mathcal{K}_\theta$  défini dans la section 2.4, (pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ). Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.18.** Pour tout  $\theta \in (0, \pi)$  et tout  $n$  tel que  $\zeta_n^\theta < M_0$ , l'espace vectoriel des fonctions propres associées est inclus dans l'espace  $H_{\text{exp}}^\infty \subset \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+})$  (défini en Annexe C).

La preuve de ce résultat découle du corollaire B.19 présenté en Annexe.

## 2.5. Champ magnétique s'annulant quadratiquement

On se place sur le plan  $\mathbb{R}^2$  tout entier. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère l'expression suivante du potentiel vecteur magnétique :

$$\mathbf{A} = \left( \varepsilon^2 \sigma^2 \tau - \frac{\tau^3}{3}, 0 \right).$$

L'expression du champ magnétique associé est donnée par :

$$\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau^2 - \varepsilon^2 \sigma^2,$$

correspondant au cas modèle de l'annulation suivant les droites d'équation  $\tau = \pm \varepsilon \sigma$ . On note  $\mathcal{X}_\varepsilon$ , la réalisation autoadjointe de l'opérateur :

$$\left( D_\sigma + \left( -\frac{\tau^3}{3} + \varepsilon^2 \sigma^2 \tau \right) \right)^2 + D_\tau^2,$$

défini sur  $\mathbb{R}^2$  comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left( D_\sigma + \varepsilon^2 \sigma^2 \tau - \frac{\tau^3}{3} \right) u \right|^2 + |D_\tau u|^2 \, d\sigma d\tau.$$

Dans ce qui suit, on donne les principales propriétés de cet opérateur modèle. On commence par noter que pour des raisons de symétrie évidentes, on peut se restreindre au cas où  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

**Proposition 2.19** (Propriétés de symétrie). *L'opérateur ainsi que le domaine sont invariants par l'involution  $(\sigma, \tau) \mapsto (-\sigma, -\tau)$ .*

**Proposition 2.20** (Résolvante compacte). *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  est à résolvante compacte.*

Cette proposition s'avère être le cas particulier d'un résultat donné dans [40] (basé sur des travaux antérieurs, voir [44]) concernant plus généralement les opérateur de Schrödinger avec champ magnétique  $\mathbf{B}$  et potentiel électrique  $V$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Le théorème (1.1) énoncé dans [40] donne une condition suffisante très générale sur les dérivées successive de  $\mathbf{B}$  et  $V$  pour que l'opérateur soit à résolvante compacte. Dans le cas particulier que l'on considère, on a  $V \equiv 0$ . On reprend les mêmes notations que dans [40] pour introduire :

$$m(s, t) = |\partial_s \mathbf{B}(s, t)| + |\partial_t \mathbf{B}(s, t)| = |2\varepsilon s| + |2t|.$$

La condition (1.9) est trivialement vérifiée car :

$$|2\varepsilon| + |2| + |2\varepsilon s - 2t| \leq 4(m(s, t) + 1),$$

ce qui permet d'appliquer le théorème (1.1) pour  $r = 1$ . Comme on a  $\lim_{|(s,t)| \rightarrow +\infty} m(s, t) = +\infty$ , le corollaire (1.2) de [40] s'applique et donne que l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  est à résolvante compacte pour tout  $\varepsilon > 0$ . On effectue ici (par intérêt pour le lecteur) une démonstration directe dans le cas particulier que l'opérateur modèle  $\mathcal{X}_\varepsilon$ . Il est intéressant de voir que l'argument clé de cette preuve est le caractère confinant de la norme du gradient à l'infini.

**PREUVE DE LA PROPOSITION 2.20.** On commence par voir qu'il suffit d'effectuer la preuve pour l'opérateur :

$$(2.2) \quad \left( D_s + \frac{st^2}{2} \right)^2 + D_t^2.$$

On part de  $\mathcal{X}_\varepsilon$  et on effectue le changement d'échelle suivant :

$$\sigma = \varepsilon^{-2/3} s, \quad \tau = t.$$

L'opérateur de départ  $D_\tau^2 + \left( D_\sigma + \left( -\frac{\tau^3}{3} + \varepsilon^2 \sigma^2 \tau \right) \right)^2$  est donc unitairement équivalent à l'opérateur :

$$D_t^2 + \varepsilon^{4/3} \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + s^2 t \right) \right)^2.$$



Pour des raisons géométriques évidentes, on peut se restreindre au cas où  $\varepsilon \in (0, 1]$ . On a la "minoration" suivante (au sens des formes quadratiques) :

$$(2.3) \quad D_t^2 + \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + \varepsilon^2 s^2 t \right) \right)^2 \geq \varepsilon^{4/3} \left( D_t^2 + \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + s^2 t \right) \right)^2 \right).$$

Par inclusion, il vient alors que si l'opérateur  $D_t^2 + \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + s^2 t \right) \right)^2$  est à résolvante compacte, alors l'opérateur  $D_t^2 + \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + \varepsilon^2 s^2 t \right) \right)^2$  (c'est-à-dire  $\mathcal{X}_\varepsilon$ ) l'est également. On part de l'expression de l'opérateur  $D_t^2 + \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + s^2 t \right) \right)^2$ , et on effectue le changement de variable suivant :

$$s = \frac{\sigma - \tau}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{\sigma + \tau}{\sqrt{2}},$$

qui est une rotation vectorielle du plan d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . La matrice  $A$  de l'application linéaire  $(\sigma, \tau) \mapsto \left( \frac{\sigma - \tau}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma + \tau}{\sqrt{2}} \right)$  a pour inverse sa transposée de sorte que l'opérateur se réécrit de la manière suivante :

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} D_\sigma + \frac{\sqrt{2}}{2} D_\tau \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} D_\sigma - \frac{\sqrt{2}}{2} D_\tau + \frac{\sqrt{2}}{6} \sigma^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma^2 \tau - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma \tau^2 + \frac{\sqrt{2}}{6} \tau^3 \right)^2.$$

En développant cette dernière expression, les termes de dérivation croisés se simplifient et l'on obtient l'expression suivante sous forme factorisée :

$$\left( D_\tau + \frac{\sigma^3}{6} + \frac{\tau^3}{6} - \frac{\sigma^2 \tau}{2} - \frac{\sigma \tau^2}{2} \right)^2 + \left( D_\sigma - \frac{\sigma^3}{6} - \frac{\tau^3}{6} + \frac{\sigma^2 \tau}{2} + \frac{\sigma \tau^2}{2} \right)^2.$$

En considérant le changement de jauge donné par  $\phi(\sigma, \tau) = -\left( \frac{\sigma^3 \tau}{6} - \frac{\sigma^2 \tau^2}{4} + \frac{\tau^4}{24} - \frac{\sigma \tau^3}{6} \right)$ , l'opérateur se réécrit de la manière suivante :

$$D_\tau^2 + \left( D_\sigma - \frac{\sigma^3}{6} + \sigma \tau^2 \right)^2.$$

Un dernier changement de jauge ramène finalement l'étude à celle de l'opérateur  $D_\tau^2 + (D_\sigma + \sigma \tau^2)^2$ . La transformation  $\sigma = s$ ,  $\tau = \frac{t}{\sqrt{2}}$  permet de considérer l'opérateur  $2D_t^2 + \left( D_s + \frac{st^2}{2} \right)^2$ , qui est lui-même minoré par l'opérateur défini en (2.2). On peut donc se restreindre à montrer que l'opérateur défini via (2.2) est à résolvante compacte. On note  $\mathcal{Q}$  la forme quadratique associée. On va minorer la quantité  $\mathcal{Q}(\psi)$  pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  supportée en dehors du compact  $[-R, R]^2$  et conclure avec le théorème de Persson (voir le théorème A.11 en Annexe). On introduit une partition de l'unité recouvrant  $\mathbb{R}^2 \setminus [-R, R]$ . On considère deux fonctions d'une variable réelle  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{X}_1$  définie de la manière suivante :

$$(2.4) \quad \mathcal{X}_0(\cdot) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \left( -\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right) \\ 0 & \text{sur } (-\infty, R] \cup [R, +\infty) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_1(\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \left( -\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right) \\ 1 & \text{sur } (-\infty, R] \cup [R, +\infty) \end{cases},$$

avec :

$$(2.5) \quad \mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2 = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

et :

$$(2.6) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathcal{X}_j'(t)| \leq \frac{C}{R}, \quad \text{pour tout } j \in \{0, 1\}.$$

On introduit trois nouvelles fonctions  $\chi_1, \chi_2$  et  $\chi_3$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  de la manière suivante :

$$(2.7) \quad \chi_1(s, t) = \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_1(t), \quad \chi_2(s, t) = \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_0(t), \quad \chi_3(s, t) = \mathcal{X}_0(s)\mathcal{X}_1(t).$$

Compte tenu des propriétés (2.4), (2.5) et (2.6), il est facile de voir que les fonctions ainsi introduites constituent un recouvrement de  $\mathbb{R}^2 \setminus [-R, R]^2$  vérifiant :

$$(2.8) \quad \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \mathcal{X}_1(t)^2 + (\mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_0(t))^2 = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus [-R, R]^2,$$

avec

$$(2.9) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |\chi'_j(t)| \leq \frac{C}{R}, \quad \text{pour tout } j \in \{1, 2, 3\}.$$

La formule de localisation (voir l'Annexe B.2) donne que pour toute fonction  $\psi$  dans le domaine de forme :

$$(2.10) \quad \mathcal{Q}(\psi) = \sum_{j \in \{1, 2, 3\}} \mathcal{Q}(\chi_j \psi) - \|\psi \chi'_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Le terme de reste est majoré de la manière suivante :

$$(2.11) \quad \sum_{j \in \{1, 2, 3\}} \|\psi \chi'_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{C^2}{R^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

On donne désormais une minoration de la forme quadratique sur chacun des sous domaines. Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$  on pose  $\chi_j \psi = \psi_j$ . Le champ magnétique a un signe sur chacune des composantes connexes du support de la fonction  $\chi_1$ . Un résultat classique que nous présenterons par la suite (voir le lemme 3.6) donne :

$$(2.12) \quad \mathcal{Q}(\psi_1) \geq \int_{\mathbb{R}^2} |st| |\psi_1|^2 ds dt \geq R^2 \|\psi_1\|^2.$$

Pour la minoration de  $\mathcal{Q}(\psi_2)$ , on effectue la transformation suivante :

$$s = \sigma, \quad t = \sigma^{-1/3} \tau.$$

Après changement de coordonnées, on a la correspondance suivante en terme de dérivation :

$$D_t = \sigma^{1/3} D_\tau, \quad D_s = D_\sigma + \frac{\sigma^{-1}}{3} \tau D_\tau.$$

L'opérateur  $D_t^2 + \left(D_s + \frac{st^2}{2}\right)^2$  est unitairement équivalent à l'opérateur suivant sur  $L^2(\sigma^{-1/3} d\sigma d\tau)$  :

$$\sigma^{2/3} D_\tau^2 + \left(D_\sigma + \sigma^{1/3} \frac{\tau^2}{2} + \frac{\sigma^{-1/3}}{3} \tau D_\tau\right)^2.$$

En conjuguant l'opérateur de la manière suivante :

$$\sigma^{-1/6} \left( \sigma^{2/3} D_\tau^2 + \left(D_\sigma + \sigma^{1/3} \frac{\tau^2}{2} + \frac{\sigma^{-1}}{3} \tau D_\tau\right)^2 \right) \sigma^{1/6},$$

on obtient que l'opérateur  $D_t^2 + \left(D_s + \frac{st^2}{2}\right)^2$  est unitairement équivalent à l'opérateur suivant sur

$$\sigma^{2/3} D_\tau^2 + \left(D_\sigma + \sigma^{1/3} \frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{3\sigma} \tau D_\tau - \frac{i}{6\sigma}\right)^2.$$

Comme  $D_\tau \tau = -i + \tau D_\tau$ , on a alors  $-\frac{i}{6\sigma} = \frac{1}{6\sigma} (D_\tau \tau - \tau D_\tau)$ . On se ramène donc à l'opérateur :

$$\sigma^{2/3} D_\tau^2 + \left( D_\sigma + \sigma^{1/3} \frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{6\sigma} (\tau D_\tau + D_\tau \tau) \right)^2.$$

On note  $\psi_2^b$  la transformation canonique de la fonction  $\psi_2$ . On a pour les formes quadratiques :

$$\mathcal{Q}^b(\psi_2^b) = \mathcal{Q}(\psi_2).$$

Pour tout  $\eta \in (0, 1)$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^b(\psi_2^b) &\geq (1 - \eta) \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{2/3} \left( |D_\tau \psi_2^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/3} D_\sigma + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi_2^b \right|^2 \right) d\sigma d\tau \\ &\quad - \frac{\eta^{-1}}{36} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sigma} (\tau D_\tau + D_\tau \tau) \psi_2^b \right|^2 d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

La fonction  $\psi_2^b$  est supportée dans l'ensemble  $\{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2, |\tau| \leq R\sigma^{1/3}, |\sigma| \geq R\}$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^b(\psi_2^b) &\geq (1 - \eta) R^{2/3} \int_{\mathbb{R}^2} |D_\tau \psi_2^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/3} D_\sigma + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi_2^b \right|^2 d\sigma d\tau \\ &\quad - \frac{\eta^{-1}}{36} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sigma} (\tau D_\tau + D_\tau \tau) \psi_2^b \right|^2 d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Comme  $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$  on a avec l'inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{1}{\sigma} (\tau D_\tau + D_\tau \tau) \psi_2^b \right|^2 = \left( \frac{1}{\sigma} \right)^2 (|2\tau D_\tau \psi_2^b + \psi_2^b|^2) \leq \frac{2}{\sigma^2} |\psi_2^b|^2 + \frac{8}{\sigma^2} |\tau D_\tau \psi_2^b|^2.$$

Sur le support considéré, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sigma} (\tau D_\tau + D_\tau \tau) \psi_2^b \right|^2 d\sigma d\tau \leq \frac{2}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau + \frac{8R^{8/3}}{R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |D_\tau \psi_2^b|^2 d\sigma d\tau.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} (2.13) \quad \mathcal{Q}^b(\psi_2^b) &\geq \left( (1 - \eta) R^{2/3} - \frac{8\eta^{-1} R^{2/3}}{36} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |D_\tau \psi_2^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/3} D_\sigma + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi_2^b \right|^2 d\sigma d\tau \\ &\quad - \frac{2\eta^{-1}}{36R^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

On se focalise désormais sur le terme :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}(\psi_2^b) = \int_{\mathbb{R}^2} |D_\tau \psi_2^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/3} D_\sigma + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi_2^b \right|^2 d\sigma d\tau.$$

On peut écrire :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}(\psi_2^b) = \int_{\mathbb{R}^2} \left( |D_\tau \psi_2^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/6} D_\sigma \sigma^{-1/6} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{i}{6} \sigma^{-4/3} \right) \psi_2^b \right|^2 \right) d\sigma d\tau.$$

On a la minoration suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathcal{M}}^b(\psi_2^b) &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \left( |D_\tau \psi_2^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/6} D_\sigma \sigma^{-1/6} + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi_2^b \right|^2 \right) d\sigma d\tau \\ &\quad + \frac{1}{3} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} i\sigma^{-4/3} \left[ \left( \sigma^{-1/6} D_\sigma \sigma^{-1/6} + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi^b \right] \overline{\psi^b} d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $2\operatorname{Re} \left( [\partial_\sigma \psi_2^b] \overline{\psi_2^b} \right) = \partial_\sigma |\psi_2^b|^2$  on trouve avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{3} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} i\sigma^{-4/3} [(\sigma^{-1/6} D_\sigma \sigma^{-1/6}) \psi_2^b] \overline{\psi_2^b} d\sigma d\tau \right| &= \frac{1}{3} \left| \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{-5/3} \partial_\sigma |\psi_2^b|^2 - \frac{1}{6} \sigma^{-8/3} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau \right| \\ &\leq \left| \frac{5}{18} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{-8/3} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau - \frac{1}{18} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{-8/3} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau \right| \\ &\leq CR^{-8/3} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Avec le calcul fonctionnel, et en se servant de ce que l'on connaît de l'opérateur de Montgomery (voir la section 2.3), on obtient que :

$$(2.14) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left( |D_\tau \psi^b|^2 + \left| \left( \sigma^{-1/6} D_\sigma \sigma^{-1/6} + \frac{\tau^2}{2} \right) \psi^b \right|^2 \right) d\sigma d\tau \geq M_0 \int_{\mathbb{R}^2} |\psi^b|^2 d\sigma d\tau.$$

En résumé on obtient à partir de (2.13) :

$$\mathcal{Q}^b(\psi_2^b) \geq \left( \left( (1-\eta)R^{2/3} - \frac{2\eta^{-1}R^{2/3}}{9} \right) (M_0 - CR^{-8/3}) - \frac{\eta^{-1}}{18R^2} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau.$$

Finalement, en choisissant  $\eta = \frac{1}{2}$  on a :

$$\mathcal{Q}^b(\psi_2^b) \geq (CR^{2/3}M_0 - C'R^{-2}) \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2^b|^2 d\sigma d\tau.$$

De manière équivalente on a alors :

$$(2.15) \quad \mathcal{Q}(\psi_2) \geq (CR^{2/3}M_0 - C'R^{-2}) \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2|^2 d\sigma d\tau.$$

La minoration de  $\mathcal{Q}(\psi_3)$  s'obtient à partir de celle obtenue pour  $\mathcal{Q}(\psi_2)$ . On effectue un changement de jauge donné par :

$$\phi(s, t) = \frac{s^2 t^2}{4},$$

qui ramène l'étude à celle de l'opérateur unitairement équivalent suivant :

$$D_s^2 + \left( D_t - \frac{s^2 t}{2} \right)^2,$$

pour lequel on a la même minoration que celle donnée via (2.15) par symétrie des variables  $(s, t)$  et invariance du domaine :

$$(2.16) \quad \mathcal{Q}(\psi_3) \geq (CR^{2/3}M_0 - C'R^{-2}) \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_2|^2 d\sigma d\tau.$$

Il reste désormais à recouper les résultats. On reprend (2.10), (2.11), (2.12), (2.15) et (2.16). Comme  $(CR^{2/3}M_0 - C'R^{-2})$ , le théorème de Persson (voir le théorème A.11) permet de conclure que le spectre

essentiel de l'opérateur  $D_t^2 + \left(D_s + \frac{st^2}{2}\right)^2$  est vide, ce qui donne finalement que pour tout  $\varepsilon > 0$  l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  est à résolvante compacte.  $\square$

On rappelle la notation suivante définie dans l'introduction :

**Notation 2.21.**  $\text{Sp}(\mathcal{X}_\varepsilon) = \{\varkappa_1(\varepsilon) \leq \varkappa_2(\varepsilon) \leq \dots \leq \dots\}$ .

**Proposition 2.22** (Décroissance exponentielle des fonctions propres). *Pour toute fonction propre  $\psi_\varepsilon$  de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que : on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2c|x|} |\psi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < +\infty$$

DÉMONSTRATION. C'est un fait classique (voir [2], [3] et [28]).  $\square$

**Proposition 2.23** (Analyticité). *À transformation unitaire près dépendant analytiquement de  $\varepsilon$ , l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  dépend analytiquement de  $\varepsilon$ , pour  $\varepsilon \in (0, +\infty)$ .*

DÉMONSTRATION. Partant de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$ , on effectue une nouvelle fois la dilatation  $s = \varepsilon^{2/3}\sigma$  et  $t = \tau$ . On se ramène ainsi à l'opérateur partiellement semi-classique suivant :

$$\varepsilon^{4/3} \left( D_s + \left( -\frac{t^3}{3} + s^2 t \right) \right)^2 + D_t^2,$$

pour lequel le domaine est indépendant de  $\varepsilon$ .  $\square$

## 2.6. Champs magnétiques s'annulant de manière dégénérée

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on considère sur tout  $\mathbb{R}^2$  le cas modèle d'un champ magnétique  $\mathbf{B}(\sigma, \tau) = \tau^k$  qui s'annule linéairement sur la droite d'équation  $\tau = 0$ . L'expression du potentiel vecteur associé que l'on considère est la suivante :

$$\mathbf{A} = \left( -\frac{\tau^{k+1}}{k+1}, 0 \right).$$

Cela revient à étudier l'opérateur :

$$(2.17) \quad \left( D_\sigma - \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 + D_\tau^2.$$

Cette sous-section vient compléter la sous-section 2.3 correspondant au cas où  $k = 1$ . Après la transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}_{\sigma \rightarrow \xi}$ , on ramène l'étude spectrale de l'opérateur (2.17) à l'étude spectrale d'une famille d'opérateurs auto-adjoints  $\mathcal{M}^{[k]}(\xi)$  est défini par :

$$\mathcal{M}^{[k]}(\xi) = D_\tau^2 + \left( \xi - \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit d'un opérateur de Montgomery généralisé défini comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \left( |u'(\tau)|^2 + \left( \xi - \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \right)^2 |u(\tau)|^2 \right) d\tau,$$

sur le domaine de forme  $\{u \in L^2(\mathbb{R}), u' \in L^2(\mathbb{R}), \tau^{k+1}u \in L^2(\mathbb{R})\}$ . Même si on ne retrouvera dans notre étude que les opérateurs  $\mathcal{M}^{[1]}(\xi)$  et  $\mathcal{M}^{[2]}(\xi)$ , il convient néanmoins de rappeler quelques propriétés générales importantes des opérateurs  $\mathcal{M}^{[k]}(\xi)$  (voir [33], [47], [30]).

**Proposition 2.24.** *Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'opérateur  $\mathcal{M}^{[k]}(\xi)$  possède les propriétés suivantes :*

- (1) *Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $\mathcal{M}^{[k]}(\xi)$  est à résolvante compacte. On note  $(\nu_n^{[k]}(\xi))_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de ses valeurs propres.*
- (2) *Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , la plus petite valeur propre  $\nu_1^{[k]}(\xi)$  est simple et les fonctions propres associées ne s'annulent pas.*
- (3) *La fonction  $\xi \mapsto \nu_1^{[k]}(\xi)$  est analytique et admet un unique minimum non dégénéré noté  $M_0^{[k]}$ . On a de plus que pour tout  $k \in 2\mathbb{N}^*$ , ce minimum est atteint pour  $\xi = 0$ .*

**Remarque 2.25.** La quantité  $M_0$  définie dans la notation 2.10 correspond à  $M_0^{[1]}$ .



**I**

**Annulation le long d'une courbe régulière simple**



## Cadre d'étude

**Hypothèse 1.** Dans cette partie, on travaille sous les hypothèses suivantes :

- (1) Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'annule le long d'une courbe simple et régulière  $\Gamma$ .
- (2) Le gradient  $\nabla\mathbf{B}$  est partout non nul sur la courbe  $\Gamma$ .
- (3) La courbe intersecte le bord de  $\Omega$  de manière non tangente, et en un nombre fini de points.

**Notation 2.26.** On désigne par  $\theta(x)$  : l'angle formé par les deux tangentes à  $\Gamma$  et  $\partial\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega \cap \Gamma$  (on pourra considérer cette valeur dans  $(0, \frac{\pi}{2})$  indépendamment de tout choix).

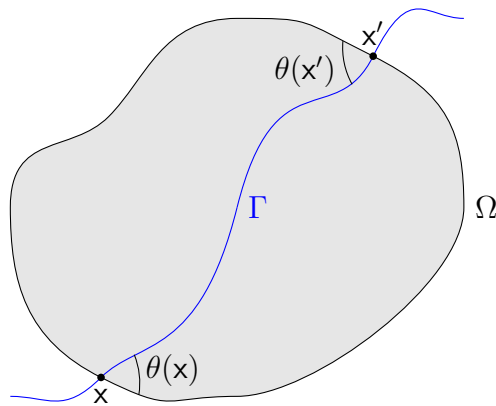


FIGURE 3. Domaine  $\Omega$  et courbe d'annulation  $\Gamma$

## CHAPITRE 3

### Équivalent de la plus petite valeur propre

On rappelle la notation suivante définie dans l'introduction (voir 1.6) :

**Notation 3.1.**

$$M_1^{\mathbf{B}} = M_0 \inf_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3},$$

$$\Lambda_1^{\mathbf{B}} = \inf_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \zeta_1^{\theta(x)} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3}.$$

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1.7 énoncé dans l'introduction. On rappelle ici son énoncé :

**Théorème 3.2** (Équivalent de la première valeur propre). *Il existe  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :*

$$L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} - Ch^{22/15} \leq \lambda_1(h) \leq L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} + Ch^{5/3},$$

avec :

$$L_0^{\mathbf{B}} = \min \{M_1^{\mathbf{B}}, \Lambda_1^{\mathbf{B}}\}.$$

Ce résultat est une conséquence des théorèmes 3.3 et 3.19 qui vont être démontrés.

### 3.1. Minoration

#### 3.1.1. Énoncé du résultat.

**Théorème 3.3** (Minoration de la plus petite valeur propre). *Il existe  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  et tout  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  on a :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq (L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} - Ch^{22/15}) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $L_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans l'énoncé du théorème 3.2.

En particulier on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\lambda_n(h) \geq \lambda_1(h) \geq L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} - Ch^{22/15}.$$

**Remarque 3.4.** Dans le cas où  $M_1^{\mathbf{B}} \leq \Lambda_1^{\mathbf{B}}$ , on a avec le point 2 de la proposition 2.15 que (par continuité du gradient du champ magnétique) :

$$M_0 \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} = M_0 \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3}.$$

La condition  $\Lambda_1^{\mathbf{B}} < M_1^{\mathbf{B}}$  sera considérée par la suite (voir (4.1)).

**3.1.2. Partition de l'unité.** L'étude spectrale du Laplacien magnétique dans la limite semi-classique passe par l'étude d'une hiérarchie d'opérateurs modèles qui apparaissent localement. La présence d'un bord - comme c'est le cas ici - rend plus difficile cette approche. L'utilisation d'une partition de l'unité permet d'exhiber ces opérateurs locaux de référence, et d'obtenir une minoration préliminaire de la forme quadratique. Cette minoration est une étape clé de l'étude.

Soit  $0 \leq \rho \leq 1$  et  $C > 0$ . On peut trouver (voir [1, Lemma 7.10]) une partition de l'unité  $(\chi_j^h)$  vérifiant les propriétés suivantes sur  $\Omega$  :

$$(3.1) \quad \sum_j |\chi_j^h|^2 = 1,$$

$$(3.2) \quad \sum_j |\nabla \chi_j^h|^2 \leq Ch^{-2\rho},$$

$$\exists x_j, \text{ supp}(\chi_j^h) \subset \mathcal{B}(x_j, h^\rho),$$

où  $\mathcal{B}(x_j, R)$  est le disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  centré en  $x_j$  et de rayon  $R$ .

Dans tout ce qui suit,  $C$  désigne n'importe quelle constante positive arbitraire. Le principe du Min-Max (voir le théorème A.9 en Annexe) donne en particulier que :

$$\lambda_1(h, \mathbf{A}, \Omega) = \lambda_1(h) = \min_{\substack{u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}) \\ u \neq 0}} \frac{\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

La minimisation de la forme quadratique se présente donc comme un moyen d'expliciter l'asymptotique de la première valeur propre, pour  $h \rightarrow 0$ . Pour une telle partition de l'unité, on a l'identité suivante :

$$(3.3) \quad \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(u) = \sum_j \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j \|u \nabla(\chi_j^h)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cette identité est une formule de localisation bien connue. Un énoncé est donné via la proposition B.4 (voir Annexe B.2). Cette identité est connue depuis longtemps (voir [31] où elle est utilisée implicitement et aussi [52], [1, Lemme 7.11] et [23]).

Comme cela a déjà été évoqué dans l'introduction, dès lors que le terme de reste

$$h^2 \sum_j \|u \nabla(\chi_j^h)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est négligeable, l'estimation de  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}$  se ramène à celle des  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(\chi_j^h u)$ . Ces dernières quantités font intervenir les formes quadratiques  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega_j^h}$ , où les  $\Omega_j^h$  sont des sous-domaines de  $\Omega$ , définis par :

$$\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega_j^h}(u) = \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(\chi_j^h u),$$

avec  $\Omega_j^h = \text{supp}(\chi_j^h) \cap \Omega$ . L'approche qui suit est la suivante : en minorant (à un terme d'erreur près) la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(u)$  par le minimum sur  $j$  des quantités  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega_j^h}(u)$ , on obtiendra une minoration de la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(u)$  par l'infimum sur  $j$  des spectres des opérateurs  $\mathcal{P}_{h, \mathbf{A}, \Omega_j^h}$ .

Conformément à cette présentation, on va dans cette section minorer les formes quadratiques " $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega_j^h}$ " sur chacun des sous domaines du découpage. Les opérateurs précédemment introduits apparaîtront successivement.

**Lemme 3.5** (Contrôle du reste de la partition de l'unité). *Pour tout  $u \in L^2(\Omega)$ , la contribution globale du terme de reste issue de la partition de l'unité est donnée par :*

$$h^2 \sum_j \|u|\nabla(\chi_j^h)|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\text{IMS}} h^{-2\rho+2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

DÉMONSTRATION. Ceci est immédiat avec la propriété (3.2).  $\square$

**3.1.3. Minoration locale de la forme quadratique.** Le lemme suivant est un résultat basique important que l'on trouve dans [8] (voir également [28, Lemme 1.4.1] et [66, Proposition 0.2]).

**Lemme 3.6.** *La forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  précédemment définie vérifie :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \left| \int_{\Omega} h\mathbf{B}(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right|, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. On note  $P_1 = (-ih\partial_{x_1} + A_1)$  et  $P_2 = (-ih\partial_{x_2} + A_2)$ . En désignant par  $[P_1, P_2]$  le commutateur de  $P_1$  et  $P_2$ , on peut facilement voir pour commencer que  $[P_1, P_2] = -ih\mathbf{B}$ . En prenant désormais  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , on a alors :

$$-ih \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})|u|^2 \, d\mathbf{x} = \langle [P_1, P_2]u, u \rangle.$$

Puis, comme  $|u|^2 = u\bar{u}$ , on a par intégration par parties :

$$-ih \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})|u|^2 \, d\mathbf{x} = -i \left( \int_{\Omega} P_2 u P_1 \bar{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} P_1 u P_2 \bar{u} \, d\mathbf{x} \right).$$

La fonction  $u$  étant à support compact, les termes de bord sont nuls. En notant :

$$Z = \int_{\Omega} P_2 u P_1 \bar{u} \, d\mathbf{x},$$

on remarque alors que le terme de droite de l'égalité précédente est :

$$-i(Z - \bar{Z}) = -2i\text{Im}(\langle P_1 u, P_2 u \rangle).$$

En prenant désormais le module, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} h\mathbf{B}(\mathbf{x})|u|^2 \, d\mathbf{x} \right| &= 2\text{Im}(\langle P_1 u, P_2 u \rangle) \\ &\leq 2|\langle P_1 u, P_2 u \rangle| \\ &\leq 2\|P_1 u\| \|P_2 u\| \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \|P_1 u\|^2 + \|P_2 u\|^2. \end{aligned}$$

Finalement, on a bien obtenu :

$$\left| \int_{\Omega} h\mathbf{B}(\mathbf{x})|u|^2 \, d\mathbf{x} \right| \leq \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u).$$

$\square$

Ce résultat donne immédiatement une minoration locale de la forme quadratique, pour tout point  $\mathbf{x}_j \in \Omega \setminus \Gamma$ . Concernant les points  $\mathbf{x}_j \in \partial\Omega \cup \Gamma$ , on a un résultat analogue, mais cette fois-ci avec un terme de reste.

On présente ici l'approche générale (voir l'Annexe B.3 pour les détails) :

**Notation 3.7.** On désigne par  $\Phi$  un changement de coordonnées local redressant le bord ou la courbe d'annulation.

On note  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \circ \Phi$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \circ \Phi$ . À l'aide d'un changement de jauge, il est toujours possible (voir le point (B.10) dans la preuve de la proposition B.13 en Annexe B.3) de choisir  $\tilde{\mathbf{A}}$  de la manière suivante :

$$(3.4) \quad \tilde{A}_1(s, t) = - \int_0^t (1 - t'k(s)) \tilde{\mathbf{B}}(s, t') dt', \quad \tilde{A}_2(s, t) = 0.$$

C'est cette expression qui est considérée par la suite.

On écrira le développement de Taylor de  $\tilde{A}_1$  au point  $x_j$  de la manière suivante :

$$\tilde{A}_{1,j}(s, t) = \underline{A}_{1,j}(s, t) + r_j(s, t),$$

où  $r_j(s, t)$  désigne le terme de reste.

**Lemme 3.8** (Minoration locale de la forme quadratique). *Il existe une constante  $C_{\Omega, \mathbf{B}}$  ne dépendant que du domaine  $\Omega$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$  telle que pour tout  $0 < \eta < 1$  et pour tout  $v \in H^1(\Omega_j^h)$  (fonction test à support compact inclus dans le disque ouvert  $\mathcal{B}(x_j, h^\rho)$ ), la quantité  $\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(v)$  est minorée de la manière suivante :*

$$\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(v) \geq (1 - C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho) \left( \underbrace{(1 - \eta) \int_{\Phi^{-1}(\mathcal{B}(x_j, h^\rho))} |(hD_s + \underline{A}_{1,j}(s, t))w|^2 + |hD_t w|^2 ds dt}_{\text{Terme principal lié à la forme quadratique d'un opérateur modèle}} - \eta^{-1} \underbrace{\int_{\Phi^{-1}(\mathcal{B}(x_j, h^\rho))} |r_j(s, t)|^2 |w|^2 ds dt}_{\text{Terme résiduel}} \right),$$

avec  $w = e^{i\phi}(v \circ \Phi)$ .

Comme pour le résultat précédent (le lemme 3.6), on obtient une réécriture locale de la forme quadratique, mais cette fois-ci avec un terme de reste. Dans tous les cas le schéma de preuve est analogue et se fait en deux étapes : on commence par réécrire la forme quadratique dans un système de coordonnées correspondant à une situation géométrique "redressée", on "aplatit" la métrique, puis on effectue un développement de Taylor d'un potentiel vecteur bien choisi.

**DÉMONSTRATION.** On donne les grandes lignes de la preuve, en se référant aux propositions B.11 et B.13 de l'Annexe B.3. On considère une fonction test  $v$  à support compact dans  $\mathcal{B}(x_j, h^\rho)$ .

### Changement de coordonnées

Pour  $x_j \in \partial\Omega$ ,  $\gamma$  désigne une paramétrisation de la frontière  $\partial\Omega$  tandis que pour  $x \in \Gamma \setminus \partial\Omega$ ,  $\gamma$  désigne une paramétrisation de la courbe d'annulation  $\Gamma$ . Indépendamment du cas considéré, la forme quadratique se réécrit localement sous la forme générale suivante (voir l'Annexe B.3, proposition B.11) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(v) &= \int_{\Omega_j^h} |(-ih\nabla + \mathbf{A})v|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\mathcal{B}(x_j, h))} \left( (1 - tk(s))^{-2} |(hD_s + \tilde{A}_{1,j})w|^2 + |(hD_t)w|^2 \right) (1 - tk(s)) ds dt, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in H^1(\Omega_j^h)$ , avec  $w = e^{i\phi}(v \circ \Phi)$ , où  $\Phi$  désigne l'un des changements de variable local.

### Développement de Taylor de la métrique

Les courbes à redresser étant compactes, la condition  $|(s, t)| \leq h^\rho$ , implique qu'il existe une constante  $C_{\Omega, \mathbf{B}} \geq 0$  (ne dépendant que de  $\Omega$  et  $\mathbf{B}$ ) et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$\begin{aligned} 0 < (1 - C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho) &\leq (1 - tk(s)) \leq (1 + C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho), \\ 0 < (1 - C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho) &\leq (1 - tk(s))^{-1} \leq (1 + C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho). \end{aligned}$$

### Développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique A

On écrit un développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique :

$$\tilde{A}_{1,j}(s, t) = \underline{A}_{1,j}(s, t) + r_j(s, t),$$

où  $r_j$  désigne le terme de reste. Le support de la fonction  $v$  étant inclus dans le disque ouvert  $\mathcal{B}(x_j, h^\rho)$ , le terme de reste sera majoré par une certaine puissance de  $h$  qui dépendra du cas considéré.

À partir de la minoration :

$$\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(v) \geq (1 - C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho) \int_{\Phi^{-1}(\mathcal{B}(x_j, h^\rho))} |(hD_s + \tilde{A}_{1,j})w|^2 + |hD_t w|^2 \, ds dt,$$

en séparant les termes carrés, pour tout  $0 < \eta < 1$  on obtient la "réduction" suivante, typique des problèmes magnétiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(v) &\geq (1 - C_{\Omega, \mathbf{B}} h^\rho) \left( (1 - \eta) \int_{\Phi^{-1}(\mathcal{B}(x_j, h^\rho))} |(hD_s + \underline{A}_{1,j}(s, t))w|^2 + |hD_t w|^2 \, ds dt \right. \\ &\quad \left. - \eta^{-1} \int_{\Phi^{-1}(\mathcal{B}(x_j, h^\rho))} |r_j(s, t)|^2 |w|^2 \, ds dt \right). \end{aligned}$$

□

En effectuant un changement d'échelle semi-classique (voir le tableaux 1.4.2 en introduction), on retrouve dans la première intégrale, l'expression de la forme quadratique de l'opérateur modèle correspondant étudié dans la section 2. L'influence du redressement ne se voit pour ainsi dire presque pas dans l'asymptotique étant donné qu'on retrouve - sous réserve qu'on arrive à gérer le terme résiduel - que le comportement du terme principal de l'asymptotique (le terme dominant) est dicté par le bas du spectre de l'opérateur modèle.

Il est commode d'effectuer un choix spécifique pour les  $x_j$  (où on rappelle que  $\text{supp}(\chi_j^h) \subset \mathcal{B}(x_j, h^\rho)$ ).

**Notation 3.9.** On note :

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \Gamma, \quad \Omega_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad \Omega_3 = \Gamma \setminus \partial\Omega, \quad \Omega_4 = \partial\Omega \cap \Gamma.$$

Pour tout  $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on désigne par :

$$x_j^{(\ell)}$$

tout point  $x_j$  de  $\Omega_\ell$ , et par :

$$\underline{A}_{1,j}^{(\ell)}, \text{ et } r_j^{(\ell)},$$

respectivement le terme principal et le reste du développement de Taylor (jusqu'au premier terme non nul) au point  $x_j^{(\ell)} \in \Omega_\ell$ .

Pour chacun des quatre cas, on résume les résultats du lemme 3.8 dans le tableau suivant :

Cas	Partie principale du développement de Taylor de $\underline{A}_{1,j}^{(\ell)}$	Majoration du terme de reste $r_j^{(\ell)}(s, t)$
(1)	$( \mathbf{B}(\mathbf{x}_j^{(1)}) t, 0)$	Pas de reste
(2)	$( \mathbf{B}(\mathbf{x}_j^{(2)}) t, 0)$	$ r_j^{(2)}(s, t)  \leq \mathcal{O}(h^{2\rho})$
(3)	$(-\frac{t^2}{2} \nabla\mathbf{B}(\mathbf{x}_j^{(3)}) , 0)$	$ r_j^{(3)}(s, t)  \leq \mathcal{O}(h^{3\rho})$
(4)	$( \nabla\mathbf{B}(\mathbf{x}_j^{(4)})  \left( st \sin \theta(\mathbf{x}_j^{(4)}) - \frac{t^2}{2} \cos \theta(\mathbf{x}_j^{(4)}) \right), 0)$	$ r_j^{(4)}(s, t)  \leq \mathcal{O}(h^{3\rho})$

TABLEAU 3.1.1. Résumé des développements de Taylor

**3.1.4. Lemmes préliminaires.** La présence d'une ligne d'annulation du champ magnétique fait non seulement apparaître une échelle différente en  $h^{4/3}$  dans l'asymptotique attendue de  $\lambda_1(h)$ , mais elle entraîne aussi un changement radical dans l'analyse semi-classique. En reprenant la colonne "Infimum du spectre" dans le tableau 1.4.1 de l'introduction, on s'aperçoit que chacune des quantités spectrales (donnant la contribution asymptotique locale) dépend du point  $\mathbf{x}_j^{(\ell)}$  ( $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ ). À titre comparatif, si on reprend le cas où le champ magnétique est de signe constant (voir le théorème 1.2 en introduction dans le cas d'un champ magnétique qui ne s'annule pas), on voit que le fait que le terme  $\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{B}(\mathbf{x})|$  vaut 0 entraîne une difficulté supplémentaire. Il n'est pas aussi évident d'obtenir une minoration de la forme quadratique car il faut gérer la zone de transition entre les deux échelles semi-classiques en  $h$  et  $h^{4/3}$ . On va bien évidemment utiliser de manière cruciale l'hypothèse d'annulation linéaire (voir le point (2) de l'hypothèse 1) pour donner une estimation de l'énergie dans une zone proche de la ligne d'annulation  $\Gamma$ . Le rôle fondamental de cette hypothèse se retrouve dans le lemme 3.11 (donnant un résultat de minoration uniforme d'explicitier la dépendance en  $h$  du champ magnétique au voisinage de la courbe d'annulation).

**Notation 3.10.** Soit  $T_0 > 0$ . Pour tout  $0 < T \leq T_0$ , on définit un voisinage tubulaire de  $\Gamma$ , noté  $\Gamma_T$  :

$$\Gamma_T = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}, d(\mathbf{x}, \Gamma) \leq T\}.$$

**Lemme 3.11.** Il existe trois constantes strictement positives  $T$ ,  $c(\mathbf{B})$  et  $\tilde{c}(\mathbf{B})$  (fixées) telles que :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_T, |\mathbf{B}(\mathbf{x})| \geq c(\mathbf{B})d(\mathbf{x}, \Gamma) \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_T, |\mathbf{B}(\mathbf{x})| \geq \tilde{c}(\mathbf{B}).$$

Le terme de reste  $r_j^{(4)}$  dans le tableau 3.1.1 (due à l'interaction entre la condition de Neumann au bord et la courbe d'annulation du champ magnétique) oblige à raffiner la méthode usuelle pour obtenir une minoration de la forme quadratique. L'amélioration se base sur le recouvrement suivant de  $\Omega$ .

**Notation 3.12.** On choisit  $T$  suffisamment petit comme dans le lemme 3.11, et on considère un découpage du type suivant recouvrant  $\Omega$  :

- (1)  $\Gamma^{[1]} = \Omega \setminus \Gamma_T$ .
- (2)  $\Gamma^{[2]}(h) = \Gamma_{T'} \setminus \Gamma_{R'h^{d'}}$  avec  $T' > T$ . Ici  $R' > 0$  et  $d' > 0$  seront choisis plus tard.
- (3)  $\Gamma^{[3]}(h) = \Gamma_{hd}$  avec  $0 < d < d'$ . En conséquence, pour  $h > 0$  assez petit,  $\Gamma^{[2]}(h) \cap \Gamma^{[3]}(h)$  est une réunion de bandes de largeur  $\geq \frac{h^d}{2}$ .

**3.1.5. Minoration de la forme quadratique sur les sous domaines.** À partir d'une bonne partition de l'unité, on va utiliser les lemmes 3.5, 3.8 et 3.11 pour obtenir la contribution asymptotique relative à chacune des zones du découpage précédemment défini. La difficulté viendra essentiellement du contrôle de chacun des termes de reste dus au développement de Taylor, en plus de celui provenant de la partition de l'unité (donné dans le lemme 3.5).

**Lemme 3.13** (Minoration de la forme quadratique sur  $\Gamma^{[1]}$ ). *Il existe  $c_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[1]}}(u) \geq c_0 h \|u\|^2.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle immédiatement de l'étude du champ magnétique qui ne s'annule pas. En effet, on a qu'il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[1]}}(u) \geq \left( \min \left\{ \inf_{x \in \Gamma^{[1]} \setminus \partial\Omega} |\mathbf{B}(x)|, \Theta_0 \inf_{x \in \Gamma^{[1]} \cap \partial\Omega} |\mathbf{B}(x)| \right\} h - Ch^{5/4} \right) \|u\|^2,$$

ce qui donne le résultat. La constante  $c_0$  n'est pas optimale mais on a seulement besoin d'un terme dominant en  $h$  pour absorber le terme de reste.  $\square$

**Remarque 3.14.** On note qu'on se sert ici d'un résultat déjà établi, valable sur un ensemble (simplement) connexe. Celui-ci est utilisé sur chacune des composantes connexes de  $\Gamma^{[1]}$ .

**Lemme 3.15** (Minoration de la forme quadratique sur  $\Gamma^{[2]}(h)$ ). *Pour tout  $\rho > 0$ , il existe  $C > 0$  et  $C_{2,\text{IMS}} > 0$ , tels que pour tout  $R' > 0$  il existe  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}(u) \geq \left( \left( \frac{1}{2} \Theta_0 C(\mathbf{B}) R' h^{1+d'} - 2Ch^{4\rho} \right) - C_{2,\text{IMS}} h^{2-2\rho} \right) \|u\|^2.$$

DÉMONSTRATION. On effectue ici une partition de l'unité avec des boules  $\mathcal{B}(x_j^{(2)}, h^\rho)$  et des fonctions troncatures associées  $\chi_j^h$ , vérifiant les propriétés présentées dans la section 3.1.2, et telle que toute boule soit située à une distance supérieure ou égale à  $\frac{R'h^{d'}}{2}$  de la courbe d'annulation  $\Gamma$ . Le recouvrement de  $\Gamma^{[2]}$  est assuré avec une distance de sécurité toujours valable indépendamment de la valeur de  $\rho$ . On obtient alors que :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}(\chi_j^h u) \geq \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}(\chi_j^h u) - C_{2,\text{IMS}} h^{2-2\rho} \|\chi_j^h u\|^2,$$

où  $C_{2,\text{IMS}}$  est une constante qui ne dépend pas de  $h$ .

On applique désormais le lemme de minoration locale de la forme quadratique 3.8 au cas où  $\ell = 2$  (voir le tableau 3.1.1), en prenant  $\eta = \frac{1}{2}$ . La connaissance du bas du spectre de l'opérateur modèle de De Gennes (voir la section 2.2) permet d'obtenir après scaling :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}(\chi_j^h u) \geq \left( \frac{1}{2} \min \left\{ \inf_{x_j \in \Gamma^{[2]}(h) \setminus \partial\Omega} |\mathbf{B}(x_j)|, \Theta_0 \inf_{x_j \in \Gamma^{[2]}(h) \cap \partial\Omega} |\mathbf{B}(x_j)| \right\} - 2Ch^{4\rho} \right) \|\chi_j^h u\|^2.$$

Le lemme de minoration uniforme 3.11 donne :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}(\chi_j^h u) \geq \left( \frac{1}{2} \Theta_0 c(\mathbf{B}) R' h^{1+d'} - 2Ch^{4\rho} \right) \|\chi_j^h u\|^2.$$

où  $c(\mathbf{B})$  est une constante qui dépend uniquement du champ magnétique.



Ceci donne finalement :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}(u) \geq \left( \left( \frac{1}{2} \Theta_0 c(\mathbf{B}) R' h^{1+d'} - 2Ch^{4\rho} \right) - C_{2,\text{IMS}} h^{2-2\rho} \right) \|u\|^2.$$

□

**Lemme 3.16** (Minoration de la forme quadratique sur  $\Gamma^{[3]}(h)$ ). *Pour tout  $d > 0$ , on a qu'il existe  $C > 0$ , et  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < \eta < 1$  et  $0 < h < h_0$  on a :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[3]}} \geq (1 - C_{\Omega,\mathbf{B}} h^d) ((1 - \eta) L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} - \eta^{-1} Ch^{6d}) \|u\|^2,$$

où on rappelle que  $L_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans l'énoncé du théorème 3.3 par :

$$L_0^{\mathbf{B}} = \min \{M_1^{\mathbf{B}}, \Lambda_1^{\mathbf{B}}\}.$$

conformément à la notation 3.1.

**DÉMONSTRATION.** On effectue ici une partition de l'unité avec des boules  $\mathcal{B}(x_j^{(3)}, 2h^d)$  et des fonctions troncatures associées  $\chi_j^h$  vérifiant les propriétés présentées dans la section 3.1.2. Le recouvrement de  $\Gamma^{[3]}$  est bien assuré. On applique désormais le lemme de minoration local de la forme quadratique 3.8 au cas où  $\ell = 3, 4$  (voir le tableau 3.1.1). La connaissance du bas du spectre des opérateurs modèles de Montgomery et de Pan et Kwek (voir respectivement les sections 2.3 et 2.4) permet d'obtenir le résultat après scaling.

Pour tout  $j$  tel que  $x_j \in \Gamma \setminus \partial\Omega$ , on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[3]}(h)}(u) \geq (1 - C_{\Omega,\mathbf{B}} h^d) ((1 - \eta) M_1^{\mathbf{B}} h^{4/3} - \eta^{-1} Ch^{6d}) \|u\|^2.$$

Pour tout  $j$  tel que  $x_j \in \Gamma \cap \partial\Omega$ , on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[3]}(h)}(u) \geq (1 - C_{\Omega,\mathbf{B}} h^d) ((1 - \eta) \Lambda_1^{\mathbf{B}} h^{4/3} - \eta^{-1} Ch^{6d}) \|u\|^2.$$

□

**Remarque 3.17.** On note que dans chacun des lemmes précédents, la constante  $C$  est indépendante du point  $x_j^{(\ell)}$  (pour  $\ell \in \{2, 3, 4\}$ ) et du paramètre semi-classique  $h$ , elle ne dépend que du champ magnétique  $\mathbf{B}$  ou du bord du domaine  $\partial\Omega$ . On note encore que dans chacun des lemmes de minoration locale, les  $x_j^{(\ell)}$  sont considérés fixés, mais sont quelconques dans  $\Omega \setminus \Gamma$ ,  $\partial\Omega \setminus \Gamma$ ,  $\Gamma \setminus \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega \cap \Gamma$ , pour  $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$  (respectivement). Ces lemmes sont valables pour  $h$  assez petit de sorte que  $\mathcal{B}(x_j^{(\ell)}, h^\rho)$  soit également contenue dans  $\Omega \setminus \Gamma$ ,  $\partial\Omega \setminus \Gamma$ ,  $\Gamma \setminus \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega \cap \Gamma$  (respectivement). On va appliquer ces lemmes au travers de la partition de l'unité pour laquelle les  $x_j^{(\ell)}$  dépendent de  $h$ , il faudra donc prendre garde à l'uniformité pour la minoration de la forme quadratique.

**3.1.6. Résumé de la minoration.** En combinant les résultats précédemment obtenus, issus du lemme de minoration locale 3.8, du lemme technique 3.11 ainsi que (3.5), on obtient à partir du découpage précédent le tableau suivant (voir la notation 3.1) :

On peut heuristiquement comprendre que la minoration finale de la forme quadratique est donnée par le minimum des énergies locales recouvrant le domaine, ce qui se traduit ici de la manière suivante :

$$\lambda_{h,\mathbf{A},\Omega} \gtrsim \min \{ \lambda_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[1]}}, \lambda_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[2]}(h)}, \lambda_{h,\mathbf{A},\Gamma^{[3]}(h)} \}.$$

Stricto sensu, il faut donner une minoration globale de la forme quadratique. On considère pour cela des fonctions troncatures  $(\mathfrak{X}_j^{h,[1]}, \mathfrak{X}_j^{h,[2]}, \mathfrak{X}_j^{h,[3]})$  associées au recouvrement de  $\Omega$  (défini dans la notation 3.12),

Sous domaines de $\Omega$		Minoration de la forme quadratique
$\Gamma^{[1]}$		$c_0 h \ u\ ^2$
$\Gamma^{[2]}(h)$		$\left( \left( \frac{1}{2} \Theta_0 c(\mathbf{B}) R' h^{1+d'} - 2C h^{4\rho} \right) - C_{2,\text{IMS}} h^{2-2\rho} \right) \ u\ ^2$
$\Gamma^{[3]}(h)$	$x_j^{(3)} \in \Gamma \setminus \partial\Omega$	$(1 - C_{\Omega,\mathbf{B}} h^d) \left( (1 - \eta) M_1^{\mathbf{B}} h^{4/3} - \eta^{-1} C h^{6d} \right) \ u\ ^2$
	$x_j^{(4)} \in \Gamma \cap \partial\Omega$	$(1 - C_{\Omega,\mathbf{B}} h^d) \left( (1 - \eta) \Lambda_1^{\mathbf{B}} h^{4/3} - \eta^{-1} C h^{6d} \right) \ u\ ^2$

TABLEAU 3.1.2. Résumé de la minoration

où pour tout  $j$  et tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathfrak{X}_j^{h,[k]}$  est une fonction troncature dont le support est inclus dans  $\mathcal{B}(x_j, h^{\rho_k})$  avec  $x_j \in \Gamma^{[k]}(h)$ . Les  $\rho_k$  sont choisis de la manière suivante :

$$\rho_1 = 0 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \rho_3 = d.$$

Le terme en  $h^d$  donne un plus grand rayon que le terme en  $h^{d'}$ . Comme (pour  $h > 0$  assez petit)  $\Gamma^{[2]}(h) \cap \Gamma^{[3]}(h)$  est une réunion de bandes de largeur supérieure ou égale à  $\frac{h^d}{2}$ , on peut supposer que pour tout  $j$  :

- (1)  $|\nabla \mathfrak{X}_j^{h,[1]}| \leq C_1$ ,
- (2)  $|\nabla \mathfrak{X}_j^{h,[2]}| \leq C_2 h^{-d}$ ,
- (3)  $|\nabla \mathfrak{X}_j^{h,[3]}| \leq C_3 h^{-d}$ .

Avec le découpage précédent, la formule de localisation permet d'écrire que pour tout  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  :

$$(3.5) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{h,[1]} u) + \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{h,[2]} u) + \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{h,[3]} u) - C_{\text{IMS}} h^{2-2d} \|u\|^2.$$

Il reste à voir avec le tableau 3.1.2 qu'il est possible de trouver un jeu de paramètres pour lequel on peut démontrer le résultat attendu.

**3.1.7. Preuve du théorème 3.3.** On commence par choisir les paramètres de manière à optimiser le terme de reste. La clé de cette asymptotique est qu'on peut choisir une valeur particulière pour  $d$  de manière à obtenir - sur le sous domaine  $\Gamma^{[2]}(h)$  - une contribution positive qui absorbe à la fois le terme de reste issu du développement de Taylor (en  $h^{4\rho}$ ) et le terme de reste issu de la deuxième partition de l'unité (en  $h^{2-2\rho}$ ), et qui fait également en sorte que la contribution qui en résulte soit (asymptotiquement) strictement plus grande que l'asymptotique attendue (en  $h^{4/3}$ ), et que le reste global issu de la première formule de localisation (en  $h^{2-2d}$ ) soit compatible avec cette asymptotique. On détermine dans cette partie les valeurs optimales pour ces choix de paramètres, dans le but d'obtenir le meilleur reste possible avec cette approche. Au préalable, on choisit  $R'$  suffisamment grand de sorte que (voir la notation du théorème 3.3 et du lemme 3.16) :

$$(3.6) \quad \left( \frac{1}{2} \Theta_0 c(\mathbf{B}) R' - 2C - C_{2,\text{IMS}} \right) > L_0^{\mathbf{B}}.$$

**Notation 3.18.** On fixe un  $R'$  vérifiant (3.6) et on note :

$$L_{\Omega, \mathbf{B}} = \frac{1}{2} \Theta_0 c(\mathbf{B}) R' - 2C - C_{2, \text{IMS}}.$$

On note que ce choix ne dépend que de  $\Omega$  et de  $\mathbf{B}$ .

Plusieurs conditions doivent être satisfaites :

$$(3.7) \quad d < d',$$

$$(3.8) \quad 1 + d' \leq \frac{4}{3},$$

$$(3.9) \quad 1 + d' \leq \min(4\rho, 2 - 2\rho).$$

C'est le choix d'un paramètre  $R'$  suffisamment grand (voir (3.6)) mais préalablement fixé (dépendant uniquement du champ magnétique et de la donnée des opérateurs modèles) qui permet d'avoir une inégalité large dans (3.8) et (3.9). Sur  $\Gamma^{[3]}(h)$  on prend  $\eta = h^p$  avec  $p > 0$  (le même dans les deux cas). L'exposant  $\varrho$  du terme de reste est alors donné par :

$$\varrho = \min \left\{ \frac{4}{3} + p, 6d - p, 2 - 2d, \frac{4}{3} + d \right\}.$$

Pour avoir un résultat optimal, il faut maximiser cet exposant  $\varrho$ . On commence par remarquer que dans le cas d'une courbure nulle, le reste en  $h^{4/3+d}$  n'existe pas. On cherche à déterminer le reste optimal dans ce dernier cas. Les exposants des termes de reste sur  $\Gamma^{[3]}(h)$  sont donnés par :

$$\frac{4}{3} + p \quad \text{et} \quad 6d - p.$$

L'égalisation de ce deux termes donne :

$$p = 3d - \frac{2}{3}.$$

Le terme de reste de la partition de l'unité est quant à lui donné par :

$$2 - 2d.$$

En égalisant ce terme avec le terme précédent, on obtient :

$$d = \frac{4}{15}.$$

On remarque ensuite que pour cette dernière valeur de  $d$  (à savoir  $d = \frac{4}{15}$ ), on a  $\frac{4}{3} + d = \frac{24}{15}$ . En choisissant alors  $p = \frac{2}{15}$ ,  $d = \frac{4}{15}$  et  $\rho = \frac{1}{3} = d'$ , pour lesquelles les contraintes (3.7), (3.8) et (3.9) sont bien vérifiées (avec une égalité dans (3.8) et (3.9)), on obtient un terme de reste (optimal avec cette approche) en  $h^{22/15}$ .

**DÉMONSTRATION.** Avec ce choix des paramètres, la minoration de la forme quadratique permet d'obtenir l'asymptotique souhaitée avec (3.5) et le tableau 3.1.2.  $\square$

### 3.2. Majoration

#### 3.2.1. Énoncé du résultat.

**Théorème 3.19** (Majoration de la plus petite valeur propre). *Il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a la majoration suivante de  $\lambda_1(h)$  :*

$$\lambda_1(h) \leq L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} + Ch^{5/3},$$

où on rappelle que  $L_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans l'énoncé du théorème 3.3.

Ce théorème va résulter des propositions 3.24 et 3.35 qui apparaîtront dans les deux sous-sections suivantes. Les preuves de ces deux propositions sont analogues. En tenant compte du changement de variable et du changement de jauge, on construit un quasimode à partir des fonctions propres (tronquées pour que le changement de variable soit licite) de l'opérateur modèle sous-jacent. On utilise la décroissance exponentielle des vraies fonctions propres de l'opérateur modèle pour contrôler les termes de reste qui apparaissent après linéarisation de la métrique et développement de Taylor.

#### 3.2.2. Quasimode localisant à l'intersection du bord et de la courbe d'annulation.

**Notation 3.20.** Dans cette sous-section, pour  $\Upsilon > 0$  et  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , on considère l'expression suivante du potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}_{\theta, \Upsilon}(s, t) = \left( \Upsilon \left( st \sin \theta - \frac{t^2}{2} \cos \theta \right), 0 \right).$$

**Notation 3.21.** Pour tout  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , on désigne par  $\psi_1^{\mathcal{K}_\theta}$  une fonction propre (quelconque) associée à la plus petite valeur propre  $\zeta_1^\theta$  de l'opérateur de Pan et Kwek  $\mathcal{K}_\theta$  (voir la section 2.4).

Le lemme suivant résulte d'un simple calcul.

**Lemme 3.22.** *La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^2$  par :*

$$(3.10) \quad \psi_{1, h, \theta, \Upsilon}(s, t) = \Upsilon^{1/3} h^{-1/3} \psi_1^{\mathcal{K}_\theta} \left( \Upsilon^{1/3} h^{-1/3} s, \Upsilon^{1/3} h^{-1/3} t \right),$$

*est une fonction propre (normalisée si  $\psi_1^{\mathcal{K}_\theta}(\sigma, \tau)$  l'est pour la norme  $\mathbf{L}_{\sigma, \tau}^2(\mathbb{R}_+^2)$ ), associée à la valeur propre  $\Upsilon^{2/3} \zeta_1^\theta h^{4/3}$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h, \mathbf{A}_{\theta, \Upsilon}, \mathbb{R}_+^2}$ .*

Soit  $x_j^{(4)} = x_0$  un point de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ . On peut supposer que ses coordonnées sont  $(0, 0)$  dans le système  $(s, t)$ . On note  $\Omega_{x_0}$  un voisinage du point  $x_0$  dans  $\Omega$  sur lequel le changement de coordonnées est bien défini (voir le changement de coordonnées dans l'Annexe B.3).

**Notation 3.23.** Pour ce  $x_0$  fixé, on note  $\Upsilon(x_0) = |\nabla \mathbf{B}(x_0)|$ , et on définit :

$$\mathbf{A}_{x_0}(s, t) = \mathbf{A}_{\theta(x_0), \Upsilon(x_0)}(s, t).$$

Pour tout  $R_{x_0} > 0$ , on définit  $\chi_{R_{x_0}}$  une fonction troncature sur  $\Omega$ , vérifiant la condition suivante :

$$\text{supp}(\chi_{R_{x_0}}) \subset \mathcal{B}(x_0, 2R_{x_0}) \subset \Omega_{x_0}, \quad 0 \leq \chi_{R_{x_0}} \leq 1, \quad \chi_{R_{x_0}} \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{B}(x_0, R_{x_0}).$$

En reprenant (3.10), on note enfin  $\tilde{\psi}_{1, h, x_0}$  la fonction définie sur  $\Omega_{x_0}$  par :

$$\tilde{\psi}_{1, h, x_0} = \left( e^{-i\phi_b/h} \psi_{1, h, \theta(x_0), \Upsilon(x_0)} \right) \circ \Phi_b^{-1},$$

où on rappelle que  $\Phi_b$  et  $\phi_b$  sont définis dans l'Annexe B.3.

On choisit de plus  $\chi_{R_{x_0}}$  telle que  $\chi_{R_{x_0}} \circ \Phi_b$  soit une fonction (troncature) radiale de la forme suivante :

$$(3.11) \quad \chi_{R_{x_0}} \circ \Phi_b = \chi \circ (|\cdot|^2),$$

avec  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ . Par difféomorphisme, il est toujours possible d'effectuer un tel choix tout en respectant les conditions de localisation précédentes.

**Proposition 3.24.** *La fonction suivante définie sur  $\Omega$  par :*

$$\psi_{1,h,x_0}(\mathbf{x}) = \chi_{R_{x_0}}(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x}),$$

(voir (3.10) et la notation 3.23) est dans le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . De plus, il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :

$$\left\| \left( \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - h^{4/3} |\nabla \mathbf{B}(x_0)|^{2/3} \zeta_1^{\theta(x_0)} \right) \psi_{1,h,x_0} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{5/3} \|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Remarque 3.25.** Dans ce cas on note qu'on a une localisation isotrope (c'est à dire homogène pour chacune des variables) en  $h^{1/3}$  pour ce choix de quasimode.

**Notation 3.26.** Dans la suite de cette étude, pour la preuve de la proposition 3.24, on utilisera plus simplement :  $\Omega_0 = \Omega_{x_0}$ ,  $\Upsilon_0 = \Upsilon(x_0)$ ,  $\theta_0 = \theta(x_0)$ ,  $\chi_{R_{x_0}} = \chi_0$  et  $R_0 = R_{x_0}$ .

**3.2.3. Lemmes techniques.** Les lemmes suivants servent à contrôler les normes  $L^2$  des différents termes de reste qui vont apparaître dans la preuve de la proposition 3.24.

**Lemme 3.27.** *Soit  $K$  un sous ensemble compact de  $\Omega_0$  ne contenant pas  $x_0$ . Il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$\left( \int_K |\nabla \tilde{\psi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x})|^2 + |\tilde{\psi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq Ce^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

DÉMONSTRATION. On reprend l'expression de la fonction  $\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$  introduite en (3.10). On a :

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Phi_b^{-1}(K)} |\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}(s,t)|^2 dsdt \right)^{1/2} &= \left( \int_{\Phi_b^{-1}(K)} \left| \Upsilon_0^{1/3} h^{-1/3} \psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}} \left( \Upsilon_0^{1/3} h^{-1/3} s, \Upsilon_0^{1/3} h^{-1/3} t \right) \right|^2 dsdt \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \int_{h^{-1/3} \Phi_b^{-1}(K)} \left| \psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}(\sigma, \tau) \right|^2 d\sigma d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Il découle immédiatement de la proposition 2.18 qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}|^2 \exp\left(2\alpha\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right) d\sigma d\tau < +\infty.$$

Par difféomorphisme, l'ensemble  $\Phi_b^{-1}(K)$  ne contenant pas l'origine, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\sqrt{s^2 + t^2} > \delta$  sur  $K$ . En utilisant l'inégalité précédente (a fortiori valable sur  $K$ ) on a :

$$\int_{h^{-1/3} \Phi_b^{-1}(K)} \left| \psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}(\sigma, \tau) \right|^2 d\sigma d\tau \leq \exp(-\alpha h^{1/3}) \int_{h^{-1/3} \Phi_b^{-1}(K)} |\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}|^2 \exp\left(2\alpha\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right) d\sigma d\tau.$$

On en déduit que :

$$\left( \int_{\Phi_b^{-1}(K)} |\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}(s,t)|^2 dsdt \right)^{1/2} < Ce^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

On prouve une inégalité identique pour la fonction  $\nabla\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$ . On a donc finalement montré qu'il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$\left( \int_{\Phi_b^{-1}(K)} |\nabla\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}(s,t)|^2 + |\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2} \leq Ce^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

On remarque que :

$$\nabla(e^{i\phi_b}\psi) = ie^{i\phi_b}\psi\nabla\phi_b + e^{i\phi_b}\nabla\psi.$$

En se servant de la régularité de  $\phi_b$  sur le compact  $K$  et du fait que les normes  $\|\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  et  $\|\nabla\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  sont finies, on en déduit finalement le résultat du théorème par changement de variable.  $\square$

**Lemme 3.28.** *On a qu'il existe  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que :*

$$\left| \|\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} - \|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right| \leq Ce^{-\alpha h}.$$

DÉMONSTRATION. On peut tout d'abord facilement voir que :

$$\|\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \|\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \|e^{-i\phi_b/h}\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Comme  $\psi_{1,h,x_0} = \chi_0 \tilde{\psi}_{1,h,x_0}$ , le reste se déduit du lemme 3.27 précédent en introduisant la fonction troncature  $\chi_0$  pour que le changement de variable soit licite.  $\square$

**Lemme 3.29.** *Pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_N > 0$  telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} t^n \left( |hD_t\psi|^2 + |(hD_s + \tilde{A}_1)\psi|^2 \right) \, dsdt \leq C_N h^{n/3+4/3} \|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $\psi = e^{-i\phi_b/h}\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est immédiate en utilisant le lemme 3.22 et le lemme 3.27 (ainsi que le lemme 3.28 pour revenir à la norme  $\|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}$ ).  $\square$

**Lemme 3.30.** *Pour tout entier  $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |s^m t^n \partial_s^k \partial_t^\ell \psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2} \leq Ch^{(m+n-k-\ell)/3} \|\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. On reprend l'expression de la fonction  $\psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$  introduite en (3.10). Comme dans la preuve précédente, le résultat s'obtient par dérivation et changement de variable en utilisant la décroissance exponentielle de la fonction  $\psi_1^{\mathcal{K}_\theta}$  (voir la proposition 2.18).  $\square$

**3.2.4. Démonstration de la proposition 3.24.** Par construction, la fonction test est bien dans le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . En effet, il est facile de voir pour commencer que  $\psi_{1,h,x_0} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$ , il faut donc juste vérifier que la condition de Neumann  $\nu \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi_{1,h,x_0} = 0$  est bien satisfaite sur  $\partial\Omega$ . Cette propriété ne dépend pas du choix du système de coordonnées, il suffit donc simplement de la vérifier dans le système  $(s, t)$ . Après changement de variable et changement de jauge, la fonction test  $\psi_{1,h,x_0}$ , l'opérateur  $(-ih\nabla + \mathbf{A})$  et le vecteur normal  $\nu$  au bord s'expriment respectivement de la manière suivante :

$$(\chi_0 \circ \Phi_b) \psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}, \quad \left( hD_s + \tilde{A}_1, hD_t \right), \quad (0, 1).$$

Comme  $\psi = \psi_{1,h,\theta_0,\gamma_0}$  vérifie la condition de Neumann  $D_t\psi = 0$  sur l'ensemble  $\{t = 0\}$ , il suffit de voir que  $\chi_0 \circ \Phi_b$  vérifie cette même condition. En reprenant la condition (3.11), on a par construction :

$$(D_t\chi_0 \circ \Phi_b)(s, t) = 2t(D_t\chi)(s^2 + t^2).$$

On a donc  $(D_t\chi_0 \circ \Phi_b) = 0$  sur l'ensemble  $\{t = 0\}$ , ce qui donne que la condition de Neumann est bel et bien satisfaite et que  $\psi_{1,h,x_0}$  est bien dans le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ .

On considère désormais l'action de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur la fonction test  $\psi_{1,h,x_0}$  :

$$(3.12) \quad \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\psi_{1,h,x_0} = \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\chi_0\tilde{\psi}_{1,h,x_0} = \underbrace{[\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}, \chi_0]\tilde{\psi}_{1,h,x_0}}_{\text{Terme 1}} + \underbrace{\chi_0\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\tilde{\psi}_{1,h,x_0}}_{\text{Terme 2}}.$$

On commence par donner une estimation du premier terme qui apparaît dans (3.12). Il faut pour cela contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus du commutateur  $[\mathcal{P}, \chi]$  dont l'expression est donnée par :

$$[\mathcal{P}, \chi] = -2h^2(\nabla\chi) \cdot \nabla - h^2\Delta\chi - 2ih\mathbf{A} \cdot \nabla\chi.$$

Le support des fonctions troncatures  $\nabla\chi_0$  et  $\Delta\chi_0$  ne contenant pas l'origine, on peut appliquer le lemme 3.27 qui donne qu'il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$(3.13) \quad \|[\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}, \chi_0]\tilde{\psi}_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

On donne maintenant une estimation du deuxième terme qui apparaît dans (3.12). Il faut pour cela étudier l'action l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur la fonction test  $\tilde{\psi}_{1,h,x_0}$  sur le support de  $\chi_0$ .

### Développement de Taylor de la métrique

On va contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus du développement de Taylor de la métrique. Sur le support de la fonction troncature  $\chi_0$  inclus dans  $\Phi_b^{-1}(\Omega_0)$ , dans les coordonnées  $(s, t)$  et après changement de jauge, l'opérateur  $\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  se réécrit de la manière suivante (voir l'Annexe B.3, proposition B.11) :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Phi_b^{-1}(\Omega_0)} = h^2(1 - tk(s))^{-1}D_t(1 - tk(s))D_t + (1 - tk(s))^{-1} \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) (1 - tk(s))^{-1} \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right),$$

où on a noté plus simplement  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_{1,j}$ . Sur le support de la troncature  $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 \circ \Phi_b$ , l'expression de  $\tilde{\psi}_{1,h,x_0}$  dans le nouveau système de coordonnées est donnée par :

$$(\tilde{\psi}_{1,h,x_0} \circ \Phi_b)(s, t) = e^{-i\phi_b(s,t)/h}\psi_{1,h,\theta_0,\gamma_0}(s, t).$$

Après changement de jauge, cela revient à considérer la fonction  $\psi_{1,h,\theta_0,\gamma_0}$ . On rappelle que  $t_0$  est pris de sorte que  $t_0 \max |k(s)| < 1$ . Sur le support de la fonction troncature  $\tilde{\chi}_0$ , on peut développer le terme  $(m(s, t))^{-1} = (1 - tk(s))^{-1}$  sous la forme  $(m(s, t))^{-1} = 1 + z(s, t)$  où  $z$  est une fonction régulière vérifiant les estimées :

$$(3.14) \quad |z(s, t)| \leq C|(s, t)|, \quad |D_s z(s, t)| \leq C|(s, t)|, \quad |D_t z(s, t)| \leq C, \quad |D_t^2 z(s, t)| \leq C.$$

L'opérateur est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Phi_b^{-1}(\Omega_0)} &= \left( h^2 D_t^2 + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right)^2 \right) + z \left( h^2 D_t^2 + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right)^2 \right) \\ &\quad + h^2 D_t(-tk(s)D_t) + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) \\ &\quad + h^2 z D_t(-tk(s)D_t) + z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right). \end{aligned}$$

On note ici  $\psi = \psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$ . On utilisera par la suite (voir le lemme 3.28) que  $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}$ , et le fait que la quantité  $\|\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  est fixée. On va donner un contrôle de l'action du terme :

$$h^2 D_t(-tk(s)D_t) + (hD_s + \tilde{A}_1) z (hD_s + \tilde{A}_1).$$

On obtient facilement avec les lemmes 3.29 et 3.30 et les estimées 3.14 que :

$$(3.15) \quad \left\| \left[ h^2 D_t(-tk(s)D_t) + (hD_s + \tilde{A}_1) z (hD_s + \tilde{A}_1) \right] \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq Ch^{5/3} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

### Développement de Taylor du potentiel vecteur

Il reste à traiter l'action de l'opérateur  $h^2 D_t^2 + (hD_s + \tilde{A}_1)^2$  sur  $\psi$ . L'opérateur modèle dominant apparaît en effectuant un développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique. Comme  $\tilde{\mathbf{B}}(0,0) = 0$ , son développement est le suivant :

$$\tilde{A}_1(s,t) = \partial_s \tilde{\mathbf{B}}(0,0)st + \partial_t \tilde{\mathbf{B}}(0,0)\frac{t^2}{2} + r_j^{(4)}(s,t) = \underbrace{\Upsilon_0 \left( st \sin \theta_0 - \frac{t^2}{2} \cos \theta_0 \right)}_{A_{1,j}^{(4)}(s,t)} + r_j^{(4)}(s,t),$$

où, sur le support de la troncature  $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 \circ \Phi_b$ , le terme de reste  $r_j^{(4)}$  vérifie :

$$|r_j^{(4)}(s,t)| \leq C|(s,t)|^3.$$

Il reste désormais à contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus de ce développement de Taylor. On note plus simplement  $\underline{A}_{1,j}^{(4)} = A_0$  et  $r_j^{(4)} = r_0$ . En développant, on a :

$$(hD_s + \tilde{A}_1)^2 = (hD_s + A_0)^2 + 2hr_0D_s + h(D_sr_0) + 2A_0r_0 + (r_0)^2.$$

Par suite avec le lemme 3.30 on obtient les estimées suivantes pour la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  :

$$(3.16) \quad \|(2hr_0D_s)\psi\| \leq Ch^{5/3}\|\psi\|, \quad \|(h(D_sr_0))\psi\| \leq Ch^{5/3}\|\psi\|,$$

$$(3.17) \quad \|(2A_0r_0)\psi\| \leq Ch^{5/3}\|\psi\|, \quad \|(r_0)^2\psi\| \leq Ch^2\|\psi\|.$$

Par ailleurs, l'action de l'opérateur dominant  $(h^2 D_t^2 + (hD_s + A_0)^2)$  sur  $\psi$  donne :

$$(h^2 D_t^2 + (hD_s + A_0)^2) \psi = h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \zeta_1^{\theta_0} \psi.$$

En reprenant alors l'identité (3.12) ainsi que les points (3.13), (3.16) et (3.17), on obtient finalement (en utilisant également le lemme 3.28) qu'il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :

$$\left\| \left( \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \zeta_1^{\theta_0} \right) \psi_{1,h,x_0} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{5/3} \|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}.$$

**3.2.5. Quasimode localisant sur la courbe d'annulation, à l'intérieur du domaine.** Dans cette sous-section, on exhibe un quasimode pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . On commence par introduire un certain nombre de notations.

On rappelle (voir la notation 2.7) que  $f_1^{\mathcal{M}(\eta)}$  désigne une fonction propre (normalisée) de l'opérateur de Montgomery (défini dans la section 2.3), associée à la valeur propre  $\nu_1(\eta)$ . Le résultat suivant découle d'un simple calcul.



**Lemme 3.31.** *La fonction définie par :*

$$(3.18) \quad \varphi_{1,\eta_0}(\sigma, \tau) = e^{i\eta_0\sigma} f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}(\tau),$$

*vérifie :*

$$\left( D_\tau^2 + \left( D_\sigma - \frac{\tau^2}{2} \right)^2 \right) \varphi_{1,\eta_0} = M_0 \varphi_{1,\eta_0}.$$

La fonction  $\varphi_{1,\eta_0}$  apparaît naturellement comme brique de base dans la construction du quasimode. On note cependant qu'on a une localisation seulement suivant la variable  $t$  et pas suivant la variable  $s$ . Pour avoir une bonne localisation suivant cette première variable, on va multiplier artificiellement cette dernière fonction par une gaussienne.

**Notation 3.32.** On désigne par  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(\sigma) = \pi^{-1/4} e^{-\sigma^2/2}$  (de norme 1 dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) et par  $g_{h,\Upsilon}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g_{h,\Upsilon}(s) = \Upsilon^{1/6} h^{-1/6} g(\Upsilon^{1/6} h^{-1/6} s).$$

Pour tout  $\Upsilon > 0$ , on désigne par  $\varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  de la manière suivante :

$$\varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon}(s, t) = \Upsilon^{1/3} h^{-1/3} \varphi_{1,\eta_0}(\Upsilon^{1/6} h^{-1/6} s, \Upsilon^{1/3} h^{-1/3} t) g_{h,\Upsilon}(s),$$

qui est normalisée dans  $L^2(\mathbb{R}_{s,t}^2)$  dès lors que  $f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}(\tau)$  l'est pour la norme  $L^2(\mathbb{R}_\tau)$ .

**Remarque 3.33.** Rappelons qu'avec la proposition 2.15, on a  $\zeta_1^\theta < M_0$ ,  $\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Comme cela a déjà été évoqué à travers la remarque 3.4, dans le cas où  $M_1^{\mathbf{B}} \leq \Lambda_1^{\mathbf{B}}$  (voir notation 3.1), cela donne que le point  $x_0 \in \Gamma$  réalisant cet infimum est à l'intérieur de  $\Omega$ . En désignant par  $(s_0, t_0) = (s_0, 0)$  ses coordonnées curvilignes (voir l'annexe B.3) on note que ce point vérifie la condition  $\partial_s \tilde{\mathbf{B}}(s_0, 0) = 0$ .

On se place ici en un point :

$$(3.19) \quad x_j^{(3)} = x_0 = \Phi_a(s_0, 0),$$

(voir l'annexe B.3) appartenant à  $\Gamma \setminus \partial\Omega$ .

**Notation 3.34.** En reprenant (3.18), on note enfin  $\tilde{\varphi}_{1,h,x_0}$  la fonction définie sur  $\Omega_{x_0}$  par :

$$\tilde{\varphi}_{1,h,x_0} = (e^{-i\phi_a/h} \varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon(x_0)}) \circ \Phi_a^{-1},$$

où on rappelle que  $\Phi_a$  et  $\phi_a$  sont définis dans l'annexe B.3.

Comme dans ce qui précède (voir la section 3.2.2), pour tout  $R_{x_0} > 0$ , on désigne par  $\chi_{R_{x_0}}$  une fonction troncature sur  $\Omega$ , telle que :

$$\text{supp}(\chi_{R_{x_0}}) \subset \mathcal{B}(x_0, 2R_{x_0}) \subset \Omega_{x_0}, \quad 0 \leq \chi_{R_{x_0}} \leq 1, \quad \chi_{R_{x_0}} \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{B}(x_0, R_{x_0}),$$

On énonce désormais le résultat principal de cette section :

**Proposition 3.35.** *La fonction suivante :*

$$\varphi_{1,h,x_0}(x) = \chi_{R_{x_0}}(x) \tilde{\varphi}_{1,h,x_0}(x) \text{ sur } \Omega,$$

est dans le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . De plus, il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :

$$\|(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - h^{4/3} |\nabla \mathbf{B}(x_0)|^{2/3} M_0) \varphi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{5/3} \|\varphi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On note que contrairement au cas précédent de la section 3.2.2, on a une échelle différente en  $h^{1/6}$  suivant la variable  $s$  et  $h^{1/3}$  suivant la variable  $t$  (voir [26]). La structure du quasimode est dans ce cas anisotrope. Dans la preuve de la proposition 3.35, on utilisera encore les mêmes notations simplifiées que celles introduites dans 3.26.

**3.2.6. Lemmes techniques.** Les lemmes suivants servent à contrôler les normes  $L^2$  des différents termes de reste qui vont apparaître dans la preuve de la proposition 3.35.

**Lemme 3.36.** *Soit  $K$  un sous ensemble compact de  $\Omega_0$  ne contenant pas  $x_0$ . Il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$\left( \int_K |\nabla \tilde{\varphi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x})|^2 + |\tilde{\varphi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq C e^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à celle du lemme 3.27. □

**Lemme 3.37.** *On a qu'il existe  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que :*

$$\left| \|\varphi_{1,\eta_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \|\varphi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right| \leq C e^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

DÉMONSTRATION. Pour la preuve de ce résultat, on procède comme dans la preuve du lemme 3.28. □

**Lemme 3.38.** *Pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_N > 0$  telle que, pour  $\varphi = e^{-i\phi_a/h} \varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon_0}$  :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} t^n \left( |hD_t \varphi|^2 + |(hD_s + \tilde{A}_1)\varphi|^2 \right) \, ds dt \leq C_N h^{n/3+4/3} \|\varphi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

DÉMONSTRATION. On procède cette fois-ci comme dans le lemme 3.29 en utilisant la décroissance exponentielle de la fonction  $g$  et de la fonction  $f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}$  (voir le théorème 2.9). □

**Lemme 3.39.** *Pour tout entier  $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^2} |s^m t^n \partial_s^k \partial_t^\ell \varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon_0}(s, t)|^2 \, ds dt \right)^{1/2} \leq C h^{(m-k)/6+(n-\ell)/3} \|\varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon_0}\|_{L^2}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à celle du lemme 3.30 mais avec une différence notable qui est que les échelles semi-classiques ne sont pas les même suivant les variables  $s$  et  $t$  (anisotropie). Voyons que le résultat est la même avec un argument d'homogénéité (les puissances de  $\Upsilon$  (fixé) rentrent dans la constante  $C$ ).

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbb{R}^2} |s^m t^n \partial_s^k \partial_t^\ell \varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon_0}(s, t)|^2 \, ds dt \right)^{1/2} \\ & \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^2} |s^m t^n (h^{-k/6} h^{-\ell/3}) (\partial_s^k \partial_t^\ell \varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon_0})(s, t)|^2 \, ds dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On conclut avec le changement de variable  $\sigma = h^{-1/6} s$  et  $\tau = h^{-1/3} t$ . □

**3.2.7. Preuve de la proposition 3.35.** Il est facile de voir pour commencer que par construction, la fonction test est bien dans le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ .

### Résolution formelle

On va développer formellement l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  (exprimé dans les coordonnées curvilignes locales) suivant les puissances de  $h$ . Cette approche fait apparaître l'opérateur de Montgomery en tant qu'opérateur dominant et permet d'exhiber la structure du quasimode. On rappelle que l'expression de l'opérateur dans les coordonnées  $(s, t)$  est donnée par (voir l'Annexe B.3, proposition B.11) :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A}} =$$

$$(3.20) \quad h^2 (1 - tk(s))^{-1} D_t (1 - tk(s)) D_t + (1 - tk(s))^{-1} \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) (1 - tk(s))^{-1} \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right),$$

On remarque là encore qu'on ne fait pas apparaître la dépendance en  $j$  de terme  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_{1,j}$ . On cherche des solutions (en un sens formel) à l'équation :

$$(3.21) \quad \tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A}}\varphi = \lambda\varphi + \mathcal{O}(h^{5/3}).$$

On effectue le changement d'échelle suivant pour l'opérateur  $\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A}}$  :

$$\sigma = h^{-1/6}\Upsilon^{1/3}s, \quad \tau = h^{-1/3}\Upsilon^{1/3}t.$$

On multiplie par  $h^{-4/3}$  l'opérateur ainsi obtenu, et on effectue le changement de jauge  $e^{i\eta_0\sigma/h^{1/6}}$ . On note désormais  $\mathcal{M}_h$  cet opérateur. Celui-ci peut se développer en puissance de  $h$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_0 + h^{1/6}\mathcal{M}_1 + h^{1/3}\mathcal{M}_2 + \dots,$$

avec :

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\eta_0), \text{ et } \mathcal{M}_1 = 2 \left( \eta_0 - \frac{\tau^2}{2} \right) D_\sigma.$$

Le terme  $\mathcal{M}_2$  est quant à lui de la forme :

$$\mathcal{M}_2 = D_\sigma^2 + \frac{2}{3}\alpha\sigma^2\mathcal{M}_0 + M.$$

où  $\alpha = \frac{1}{2}\delta^{-1}(0)\delta''(0) \neq 0$ ,  $M = 2\kappa(0)\delta(0)^{-4/3} \left( \frac{\tau^2}{2} - \eta_0 \right) \tau^3 + 2\tau\delta(0)^{-1/3}\kappa(0) \left( -\eta_0 + \frac{\tau^2}{2} \right)^2$ , et où la fonction  $\kappa$  apparaît dans le développement de Taylor (suivant la variable  $t$ ) du potentiel (voir (3.27) à venir), mais il n'est pas nécessaire de l'expliciter d'avantage, seulement de savoir qu'il s'agit d'un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficient polynomiaux en  $\sigma$  et  $\tau$ . On s'intéresse aux quasimodes de la forme :

$$\varphi = \sum_{j=0}^1 h^{j/6}\varphi_j, \quad \text{avec} \quad \lambda = \sum_{j=0}^1 h^{j/6}\lambda_j.$$

En reprenant (3.21) et les transformations précédentes, on cherche donc  $\varphi$  et  $\lambda$  de sorte que l'équation suivante :

$$\mathcal{M}_h\varphi = \lambda\varphi + \mathcal{O}(h^{1/3})$$

soit vérifiée au sens des séries formelles. On identifie successivement chaque terme relativement aux puissances de  $h$ .

**Termes en  $h^0$ .** On résout l'équation  $(\mathcal{M}_0 - \lambda_0)\varphi_0 = 0$  qui revient à :

$$\mathcal{M}(\eta_0)\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0.$$

On obtient par définition que  $\varphi_0$  est dans le spectre de l'opérateur dominant " $\mathcal{M}(\eta_0)$ ". On choisit :

$$\lambda_0 = M_0,$$

et on prend  $\varphi_0$  (unitaire) sous la forme tensorisée :

$$\varphi_0(\sigma, \tau) = f_0(\sigma)f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}(\tau),$$

avec  $f_0$  (dans la classe de Schwartz) à déterminer (on a une grande liberté pour ce choix et on choisira celui de la gaussienne  $g$ ). Il est clair qu'on a  $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ .

**Termes en  $h^{1/6}$ .** On résout l'équation  $(\mathcal{M}_0 - \lambda_0)\varphi_1$  qui revient à :

$$(\mathcal{M}(\eta_0) - M_0)\varphi_1 = (\lambda_1 - \mathcal{M}_1)\varphi_0.$$

La fonction  $\varphi_0$  étant déterminée, en prenant le produit scalaire avec  $f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}$  on obtient avec la condition de Fredholm (appliquée à tout  $\sigma$  fixé, le produit scalaire étant pris par rapport à la variable  $\tau$ ) :

$$0 = \langle (\mathcal{M}_0 - \lambda_0)\varphi_1, f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)} \rangle_\tau = \lambda_1 - \langle \mathcal{M}_1\varphi_0, f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)} \rangle_\tau.$$

Le calcul de  $\mathcal{M}_1\varphi_0$  donne :

$$\mathcal{M}_1\varphi_0(\sigma, \tau) = 2 \left( \eta_0 - \frac{\tau^2}{2} \right) f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}(\tau) (D_\sigma f_0)(\sigma).$$

On trouve alors :

$$\langle \mathcal{M}_1\varphi_0, \varphi_0 \rangle = 2(D_\sigma f_0)(\sigma)f_0(\sigma) \int_{\mathbb{R}^2} \left( \eta_0 - \frac{\tau^2}{2} \right) \left( f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)} \right)^2(\tau) d\tau.$$

Comme on se situe au point critique  $\eta_0$  de la fonction de bande  $\nu_1$ , en remarquant que :

$$(\partial_\eta \mathcal{M}(\eta))|_{\eta=\eta_0} = 2 \left( \eta_0 - \frac{\tau^2}{2} \right),$$

on a avec la formule de Feynman-Hellmann donnée dans la proposition 2.8, on trouve finalement que  $\langle \mathcal{M}_1\varphi_0, \varphi_0 \rangle = 0$ , ce qui impose :

$$\lambda_1 = 0.$$

On peut expliciter l'expression de  $\varphi_1$  par identification à l'aide de l'identité (2.1) de la proposition 2.8 :

$$\varphi_1(\sigma, \tau) = (D_\sigma f_0)(\sigma)(\partial_\eta f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)})_{\eta_0}(\tau) + f_1(\sigma)f_1^{\mathcal{M}(\eta_0)}(\tau).$$

On note que sous la condition de Fredholm, on peut prendre  $\varphi_1 \perp \varphi_0$  en choisissant  $f_1 = 0$ . Le corollaire B.19 présenté en Annexe donne immédiatement que  $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ .

L'action de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur la fonction test  $\varphi_{1,h,x_0}$  donne :

$$(3.22) \quad \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\varphi_{1,h,x_0} = \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\chi_0 \tilde{\varphi}_{1,h,x_0} = \underbrace{[\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}, \chi_0] \tilde{\varphi}_{1,h,x_0}}_{\text{Terme 1}} + \underbrace{\chi_0 \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} \tilde{\varphi}_{1,h,x_0}}_{\text{Terme 2}}$$

On commence par donner une estimation du premier terme qui apparaît dans (3.22). Il faut pour cela contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus du commutateur  $[\mathcal{P}, \chi]$  dont l'expression est donnée par :

$$[\mathcal{P}, \chi] = -2h^2(\nabla\chi) \cdot \nabla - h^2\Delta\chi - 2ih\mathbf{A} \cdot \nabla\chi.$$

Le support des fonctions troncatures  $\nabla\chi_0$  et  $\Delta\chi_0$  ne contenant pas l'origine, on peut appliquer le lemme 3.36 qui donne qu'il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$ ,  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$(3.23) \quad \|\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} \chi_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-\alpha h^{-1/3}}.$$

On donne maintenant une estimation du premier terme qui apparaît dans (3.22). Il faut pour cela étudier l'action l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur la fonction test  $\tilde{\varphi}_{1,h,x_0}$  sur le support de  $\chi_0$ .

### Développement de Taylor de la métrique

On va contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus du développement de Taylor de la métrique. Sur le support de la fonction troncature  $\chi_0$  inclus dans  $\Phi_a^{-1}(\Omega_0)$ , dans les coordonnées  $(s, t)$  et après changement de jauge, l'opérateur  $\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  se réécrit de la manière suivante (voir l'Annexe B.3.1) :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Phi_a^{-1}(\Omega_0)} = h^2 (1 - tk(s))^{-1} D_t (1 - tk(s)) D_t + (1 - tk(s))^{-1} \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) (1 - tk(s))^{-1} \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right),$$

où on a noté  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_{1,j}$  (voir le développement en puissance de  $h$  de l'opérateur (3.20)) et  $k_a = k$  (voir la notation B.9 en Annexe). Sur le support de la troncature  $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 \circ \Phi_a$ , l'expression de  $\tilde{\varphi}_{1,h,x_0}$  dans le nouveau système de coordonnées est donné par :

$$\left( \tilde{\varphi}_{1,h,x_0} \circ \Phi_a \right) (s, t) = e^{-i\phi_a(s,t)/h} \varphi_{1,h,\eta_0,r_0}(s, t).$$

Après changement de jauge, cela revient à considérer la fonction  $\varphi_{1,h,\eta_0,r_0}$ . Rappelons que  $t_0$  est pris de sorte que  $t_0 \max_s |k(s)| < 1$ . Sur le support de la fonction troncature  $\tilde{\chi}_0$ , on peut développer le terme  $(1 - tk(s))^{-1}$  sous la forme  $(1 - tk(s))^{-1} = 1 + z(s, t)$  où  $z$  est une fonction vérifiant les estimées :

$$(3.24) \quad |z(s, t)| \leq C|t|, \quad |D_s z(s, t)| \leq C|t|, \quad |D_t z(s, t)| \leq C, \quad |D_t^2 z(s, t)| \leq C.$$

L'opérateur est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Phi_a^{-1}(\Omega_0)} &= \left( h^2 D_t^2 + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right)^2 \right) + z \left( h^2 D_t^2 + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right)^2 \right) \\ &\quad + h^2 D_t (-tk(s) D_t) + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) \\ &\quad + h^2 z D_t (-tk(s) D_t) + z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right). \end{aligned}$$

On utilisera par la suite (voir le lemme 3.28) que  $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \|\psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}$ , et le fait que la quantité  $\|\psi_1^{\mathcal{K}_{\theta_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  est fixée.

On va donner un contrôle de l'action du terme :

$$h^2 D_t (-tk(s) D_t) + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right).$$

On obtient facilement avec les lemmes 3.29 et 3.30 et les estimées 3.14 que :

$$(3.25) \quad \left\| \left[ h^2 D_t (-tk(s) D_t) + \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) z \left( hD_s + \tilde{A}_1 \right) \right] \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C h^{5/3} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

### Développement de Taylor du potentiel vecteur

Il reste un dernier terme à traiter. L'étude est désormais réduite à celle de l'action de l'opérateur :

$$(3.26) \quad h^2 D_t^2 + \left( h D_s + \tilde{A}_1 \right)^2,$$

sur  $\varphi = \varphi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$ . En effectuant un développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique suivant la variable en  $t = 0$ , on a :

$$\tilde{\mathbf{B}}(s, t) = \tilde{\mathbf{B}}(s, 0)t + \partial_t^2 \tilde{\mathbf{B}}(s, 0) \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3).$$

Sur le support de la troncature  $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 \circ \Phi_b$ , ceci donne :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \underbrace{\partial_t \tilde{\mathbf{B}}(s, 0) \frac{t^2}{2}}_{\underline{A}_{1,j}^{(3)}(s,t)} + \underbrace{\kappa(s)t^3 + \mathcal{O}(t^4)}_{r_j^{(3)}(s,t)},$$

où  $\kappa(s)$  est une fonction régulière. En notant plus simplement  $\underline{A}_{1,j}^{(3)} = A_0$  et  $r_j^{(3)} = r_0$ , on obtient alors après développement :

$$(3.27) \quad h^2 D_t^2 + \left( h D_s + \tilde{A}_1 \right)^2 = \left( h^2 D_t^2 + (h D_s + A_0)^2 \right) + 2h D_s r_0 + 2A_0 r_0 + (r_0)^2.$$

On commence par contrôler les termes de reste. Le lemme 3.39 donne (toujours sur le support de la fonction troncature  $\tilde{\chi}_0$ ) les estimées suivantes pour la norme  $\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  :

$$(3.28) \quad \| (2h D_s r_0) \varphi \| \leq Ch^{11/6} \|\varphi\|, \quad \| (2A_0 r_0) \varphi \| \leq Ch^{5/3} \|\varphi\|, \quad \| r_0^2 \varphi \| \leq Ch^2 \|\varphi\|.$$

On reprend l'action de l'opérateur modèle :

$$h^2 D_t^2 + \left( h D_s - \delta(s) \frac{t^2}{2} \right)^2,$$

où  $\delta(s)$  est ici donné par :

$$\delta(s) = \partial_t \tilde{\mathbf{B}}(s, 0).$$

On se base désormais sur le développement en série formelle précédemment exposé. On observe que (voir la remarque 3.33 et le point (3.19)) la fonction  $|\delta|$  admet un minimum non dégénéré au point de coordonnées curvilignes  $(s_0, 0)$ , et que  $|\delta(s_0)| = |\nabla \tilde{\mathbf{B}}(s_0, 0)|$ . Un développement de Taylor en la variable  $s$  de la fonction (régulière)  $\delta$  au point  $s = s_0$  s'exprime alors de la manière suivante :

$$\delta(s) = \delta(s_0) + \underbrace{\delta'(s_0)}_{=0} s + \mathcal{O}(s^2).$$

Avec  $\Upsilon_0 = |\nabla \tilde{\mathbf{B}}(s_0, 0)| = |\nabla \mathbf{B}(x_0)| = |\delta(s_0)|$ . Quitte à effectuer la transformation unitaire  $s' = -s$ , on peut sans perte de généralité supposer que  $\delta(s_0) > 0$ . En notant respectivement  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{R}$  les opérateurs  $\left( h D_s - \Upsilon_0 \frac{t^2}{2} \right)$  et  $\mathcal{O}(s^2) t^2$ , un développement donne alors :

$$(3.29) \quad h^2 D_t^2 + \left( h D_s - \delta(s) \frac{t^2}{2} \right)^2 = h^2 D_t^2 + \left( h D_s - \Upsilon_0 \frac{t^2}{2} \right)^2 + \mathcal{P}_1 \mathcal{R} + \mathcal{R} \mathcal{P}_1 + \mathcal{R}^2.$$

On applique une nouvelle fois le lemme 3.39 qui donne (toujours sur le support de la fonction troncature  $\tilde{\chi}_0$ ) les estimées suivantes pour la norme  $\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  :

$$(3.30) \quad \| h (D_s \mathcal{R} + \mathcal{R} D_s) \varphi \| \leq Ch^{5/3} \|\varphi\|,$$

$$(3.31) \quad \left\| h \left( -\Upsilon_0 \frac{t}{2} \mathcal{R} - \mathcal{R} \Upsilon_0 \frac{t}{2} \right) \varphi \right\| \leq Ch^2 \|\varphi\|, \quad \| \mathcal{R}^2 \varphi \| \leq Ch^2 \|\varphi\|.$$

On rappelle que l'étude s'est finalement réduite à l'étude de l'action de l'opérateur  $h^2 D_t^2 + (hD_s + \tilde{A}_1)^2$  (voir (3.26)) sur  $\varphi = \varphi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}$ . Les développements (3.27), (3.29) et ainsi que les estimées associées (3.28), (3.30) et (3.31) permettent d'écrire que :

$$h^2 D_t^2 + (hD_s + \tilde{A}_1)^2 = h^2 D_t^2 + \left( hD_s - \Upsilon_0 \frac{t^2}{2} \right)^2 + \mathcal{O}(h^{5/3}).$$

La synthèse de cette analyse donne finalement qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$(3.32) \quad \left\| \left( h^2 D_t^2 + (hD_s + \tilde{A}_1)^2 - h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} M_0 \right) \varphi_{1,h,\eta_0,\Upsilon_0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{5/3}.$$

En reprenant alors l'identité (3.22) ainsi que les points (3.23), et (3.32), on obtient finalement (en utilisant également le lemme 3.37) qu'il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :

$$\left\| \left( \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} M_0 \right) \varphi_{1,h,x_0} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{5/3} \|\varphi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 3.35. La preuve de la proposition 3.19 découle immédiatement des propositions 3.24 et 3.35 en appliquant le théorème spectral A.6 rappelé en Annexe.

## Localisation des fonctions propres et estimées d'Agmon

Dans ce chapitre, on montre que les "premières" fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  vérifient la même propriété de "localisation" que les quasimodes précédemment construits. Ce résultat apparaît à travers les estimées d'Agmon. Il s'agit d'inégalités du même type que celles données dans les théorèmes 1.3 et 1.11 présentés dans l'introduction. Pour avoir le résultat le plus précis, il faut trouver la meilleure échelle en  $h$  dans la fonction à poids exponentiel.

**Notation 4.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $\psi_{n,h}$  une fonction propre (quelconque) associée à la valeur propre  $\lambda_n(h)$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ .

### 4.1. Énoncé des théorèmes de localisation

On va démontrer des propriétés de localisation relatives à différentes régions du domaine  $\Omega$ .

On rappelle le lemme technique bien connu suivant (voir [2], [3], [32], [48], [49] et aussi [66, Proposition 4.7 et 4.8]) :

**Lemme 4.2.** Pour  $\varphi$  une fonction lipschitzienne définie sur  $\Omega$  et à valeur réelle et pour  $u$  dans  $\text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  on a :

$$\text{Re}\langle \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} u, e^{2\varphi} u \rangle = \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(e^\varphi u) - h^2 \|\nabla \varphi\|^2 |e^\varphi u|^2.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat est analogue à la formule de localisation (3.3). Il se démontre comme dans (3.3) en remplaçant  $\chi$  par  $e^\varphi$ .  $\square$

#### Estimées d'Agmon relatives à la courbe d'annulation $\Gamma$ :

Le résultat suivant est crucial pour obtenir le résultat de localisation.

**Lemme 4.3.** Il existe  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  et tout  $0 < h < h_0$  :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \int_{\Omega} (\mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\Gamma}(\mathbf{x}) - Ch^{22/15}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

avec :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\Gamma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} L_{\Omega,\mathbf{B}} h^{4/3}, & d(\mathbf{x}, \Gamma) > R' h^{1/3} \\ L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3}, & d(\mathbf{x}, \Gamma) \leq R' h^{1/3} \end{cases},$$

où on rappelle que  $L_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans le théorème 3.3 et  $L_{\Omega,\mathbf{B}}$  dans la notation 3.18.

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle directement du tableau résumant l'asymptotique (voir la table 3.1.2) avec le même choix des paramètres.  $\square$

On énonce désormais le premier théorème de localisation. Ce résultat découle du raffinement précédent induit par le potentiel effectif  $\mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\Gamma}$ . Cela sera démontré ultérieurement dans la section 4.2 suivante.



**Théorème 4.4.** *Soit  $n$  tel que  $\lambda_n(h) \leq Lh^{4/3}$ , avec  $L > 0$  une constante. Il existe  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$ , et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  on a :*

$$(1) \int_{\Omega} e^{2\alpha h^{-1/3}d(x,\Gamma)} |\psi_{n,h}(x)|^2 dx \leq C \|\psi_{n,h}\|^2,$$

$$(2) \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega} \left( e^{\alpha h^{-1/3}d(\cdot,\Gamma)} \psi_{n,h} \right) \leq Ch^{4/3} \|\psi_{n,h}\|^2.$$

Il en découle directement le corollaire suivant :

**Corollaire 4.5.** *Soit  $n$  tel que  $\lambda_n(h) \leq Lh^{4/3}$ , avec  $L > 0$  une constante. Il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $N$  fixé, il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  on a :*

$$(1) \left( \int_{\Omega} (2\alpha d(x,\Gamma))^{2N} |\psi_{n,h}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_N h^{N/3} \|\psi_{n,h}\|,$$

$$(2) \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega} \left( (\alpha d(x,\Gamma))^N \psi_{n,h} \right) \leq C_N h^{4/3+2N/3} \|\psi_{n,h}\|^2.$$

### Estimées d'Agmon relatives à la zone de jonction $\partial\Omega \cap \Gamma$

On introduit la condition suivante (voir la notation 3.1) :

$$(4.1) \quad \Lambda_1^{\mathbf{B}} < M_1^{\mathbf{B}}.$$

Cette condition traduit le fait que la contribution à l'intersection du bord et de la courbe d'annulation est strictement plus petite que la contribution de la courbe d'annulation à l'intérieur du domaine. Il convient de remarquer que la définition des  $\Lambda_n^{\mathbf{B}}$  dans la notation 1.12 n'entre pas en conflit avec la définition de  $\Lambda_1^{\mathbf{B}}$  dans la notation 3.1. On introduit un nouvel ensemble :

**Notation 4.6.** Pour un niveau d'énergie fixé  $\Lambda_n^{\mathbf{B}}$ , on introduit l'ensemble :

$$(4.2) \quad \Gamma_n^{[4]} = \{x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma, \Lambda_1^{x_0} < \min\{\Lambda_n^{\mathbf{B}}, M_1^{\mathbf{B}}\}\}.$$

On va définir un nouveau potentiel effectif  $\mathcal{I}_{\mathbf{B},n}^{\partial\Omega \cap \Gamma}$  lié à des points bien précis de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ , pour voir que certaines zones vont être privilégiées.

**Lemme 4.7.** *Soit  $1 \leq n \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}$  et  $R' > 0$  (qu'on choisira assez grand comme dans (3.6)). On a qu'il existe  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  et tout  $0 < h < h_0$  :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \int_{\Omega} (\mathcal{I}_{\mathbf{B},n}^{\partial\Omega \cap \Gamma}(x) - Ch^{22/15}) |u(x)|^2 dx,$$

avec :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{B},n}^{\partial\Omega \cap \Gamma}(x) = \begin{cases} \Lambda_n^{\mathbf{B}} h^{4/3}, & d(x, \Gamma_n^{[4]}) > R' h^{1/3} \\ \Lambda_1^{\mathbf{B}} h^{4/3}, & d(x, \Gamma_n^{[4]}) \leq R' h^{1/3} \end{cases}.$$

**DÉMONSTRATION.** La preuve de ce résultat est analogue à celle du lemme 4.3. On reprend de la même manière le tableau résumant l'asymptotique (voir section 3.1.5) avec le même choix des paramètres. La dichotomie sur la zone de localisation se fait ici de manière plus précise par définition de l'ensemble  $\Gamma_n^{[4]}$ .  $\square$

On énonce maintenant le deuxième résultat de localisation lié au dernier découpage. Il découle du raffinement précédent induit par le potentiel effectif  $\mathcal{I}_{\mathbf{B},n}^{\partial\Omega \cap \Gamma}$ . Cela sera démontré avec le théorème 4.4 dans la section 4.2.

**Théorème 4.8.** Soit  $1 \leq n \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$(4.3) \quad |\lambda_n(h) - \Lambda_n^{\mathbf{B}} h^{4/3}| \underset{h \rightarrow 0}{\sim} C h^{4/3},$$

on a qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  on a :

$$(1) \quad \int_{\Omega} e^{2\alpha h^{-1/3} d(x, \Gamma_n^{[4]})} |\psi_{n,h}(x)|^2 dx \leq C_N \|\psi_{n,h}\|^2,$$

$$(2) \quad \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega} \left( e^{\alpha h^{-1/3} d(\cdot, \Gamma_n^{[4]})} \psi_{n,h} \right) \leq C_N h^{4/3} \|\psi_{n,h}\|^2.$$

Comme dans le cas précédent il en découle directement le corollaire suivant :

**Corollaire 4.9.** Soit  $1 \leq n \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel qu'il existe  $C > 0$  tel que la condition (4.3) du théorème 4.8 précédent soit vérifiée, à savoir :

$$|\lambda_n(h) - \Lambda_n^{\mathbf{B}} h^{4/3}| \underset{h \rightarrow 0}{\sim} C h^{4/3},$$

on a qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  on a :

$$(1) \quad \left( \int_{\Omega} (2\alpha d(x, \Gamma_n^{[4]}))^{2N} |\psi_{n,h}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_N h^{N/3} \|\psi_{n,h}\|,$$

$$(2) \quad \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega} \left( \left( \alpha d(x, \Gamma_n^{[4]}) \right)^N \psi_{n,h} \right) \leq C h^{4/3+2N/3} \|\psi_{n,h}\|^2.$$

## 4.2. Preuve des résultats de localisation

On effectue dans cette section la preuve des théorèmes 4.4 et 4.8. On reprend la quantité  $L_{\Omega, \mathbf{B}}$  définie dans la notation 3.18. On considère un couple d'éléments propres  $(\lambda_n(h), \psi_{n,h})$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h, \mathbf{A}, \Omega}$  sur  $\Omega$ .

Pour toute fonction scalaire  $\varphi$  lipschitzienne définie sur  $\Omega$ , on a clairement  $e^{\varphi} \psi_{n,h} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega})$ . Comme dans la preuve précédente, le lemme 4.2 donne que :

$$\mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(e^{\varphi} \psi_{n,h}) = \lambda_n(h) \|e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\nabla \varphi | e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2.$$

Avec la formule de localisation (voir proposition B.4) on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j \\ k \in \{1,2,3\}}} \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega} (\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}) \\ &= \sum_{\substack{j \\ k \in \{1,2,3\}}} \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega} (\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}) \left( \lambda_n(h) \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} |\nabla \varphi | e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\nabla \mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} | e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 \right). \end{aligned}$$

On considère la fonction suivante  $\varphi$  définie par :

$$(4.4) \quad \varphi(x) = \alpha d(x, \mathcal{Z}^{\bullet}) h^{-1/3}, \quad \forall x \in \Omega,$$

où  $\mathcal{Z}^{\bullet}$  désigne un certain sous ensemble de  $\Omega$  qui dépend du cas considéré, avec  $\alpha > 0$  un paramètre à déterminer. Le calcul de la norme du gradient  $\nabla \varphi$  donne :

$$(4.5) \quad |\nabla \varphi(x)|^2 = \alpha^2 h^{-2/3}.$$

On commence par donner un contrôle du terme de reste. En reprenant le résumé de l'asymptotique présenté dans la section 3.1.2, on a

$$(4.6) \quad \sum_{\substack{j \\ k \in \{1,2,3\}}} |\nabla \mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}}|^2 \leq Ch^{-8/15}.$$

Avec les points (4.6) et (4.5) et la propriété (3.1) de la partition de l'unité, on a :

$$\sum_{\substack{j \\ k \in \{1,2,3\}}} h^2 \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} |\nabla \varphi| e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\nabla \mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} |e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 \leq (\alpha^2 + Ch^{2/15}) h^{4/3} \|e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2.$$

La preuve des théorèmes 4.4 et 4.8 se fait de la même manière. On utilise une dichotomie dans les notations pour traiter simultanément ces deux cas. L'indice  $\Gamma$  servira dans la preuve du théorème 4.4 relatif à la courbe d'annulation  $\Gamma$  tandis que l'indice  $\partial\Omega \cap \Gamma$  sera utilisé la preuve du théorème 4.8 relatif à un sous ensemble de l'ensemble des points de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ .

Dans le deuxième cas, la condition (4.3) donne qu'il existe  $0 < \Lambda < \Lambda_n^{\mathbf{B}}$  tel que :

$$\lambda_n(h) \leq \Lambda h^{4/3} + o(h^{4/3}).$$

On reprend la notation 3.18. On note alors :

$$\mathcal{Z}^{\Gamma} = \Gamma,$$

$$M^{\Gamma}(h) = L_{\Omega, \mathbf{B}} h^{4/3}, \quad L^{\Gamma}(h) = L h^{4/3}, \quad m^{\Gamma}(h) = L_0^{\mathbf{B}} h^{4/3} + o(h^{4/3}),$$

(où l'on rappelle que  $L_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans la notation 3.1) et

$$\mathcal{Z}^{\partial\Omega \cap \Gamma} = \Gamma_n^{[4]},$$

$$M^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) = \Lambda_n^{\mathbf{B}} h^{4/3}, \quad L^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) = \Lambda h^{4/3} + o(h^{4/3}), \quad m^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) = \Lambda_1^{\mathbf{B}} h^{4/3} + o(h^{4/3}).$$

On distingue deux ensembles. On note que la convention utilisée pour la numérotation est analogue aux précédentes, on commence loin de la ligne d'annulation pour s'en rapprocher progressivement.

$$Z_1^{\bullet}(h) = \{j, d(x_j, \mathcal{Z}^{\bullet}) > R'h^{1/3}\} \text{ et } Z_2^{\bullet}(h) = \{j, d(x_j, \mathcal{Z}^{\bullet}) \leq R'h^{1/3}\}.$$

On a une majoration de  $\lambda_n(h)$  qui se situe sous un certain seuil :

$$(4.7) \quad \lambda_n(h) \leq L^{\bullet}(h).$$

Les lemmes 4.3 et 4.7 (qu'on peut appliquer via la condition (4.1)) avec les potentiels effectifs donnent une minoration suivant chacun des sous ensembles :

$$(4.8) \quad \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}) \geq M^{\bullet}(h) \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2, \quad \forall j \in Z_1^{\bullet}(h).$$

$$(4.9) \quad \mathcal{Q}_{h, \mathbf{A}, \Omega}(\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}) \geq m^{\bullet}(h) \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2, \quad \forall j \in Z_2^{\bullet}(h).$$

En reprenant (4.7), (4.8), (4.9), on a :

$$\sum_{\substack{j \in Z_1^{\bullet}(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} (M^{\bullet}(h) - L^{\bullet}(h) - (\alpha^2 + Ch^{2/15}) h^{4/3}) \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2 \leq \\ (L^{\bullet}(h) - m^{\bullet}(h) + (\alpha^2 + Ch^{2/15}) h^{4/3}) \sum_{\substack{j \in Z_2^{\bullet}(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^{\varphi} \psi_{n,h}\|^2.$$

On donne désormais les expressions de  $M^\bullet(h) - L^\bullet(h)$ , et  $L^\bullet(h) - m^\bullet(h)$ . Dans le cas de la courbe d'annulation, quitte à augmenter la valeur de  $R'$  en fonction du seuil  $L$  considéré, on a :

$$M^\Gamma(h) - L^\Gamma(h) = \underbrace{(L_{\Omega, \mathbf{B}} - L)}_{>0} h^{4/3} \quad \text{et} \quad L^\Gamma(h) - m^\Gamma(h) \geq \underbrace{(L - \Lambda_1^{\mathbf{B}})}_{\geq 0} h^{4/3} + o(h^{4/3}).$$

Dans le cas où la courbe d'annulation s'intersecte avec le bord, sous la condition (4.1), on trouve :

$$M^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) - L^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) = \underbrace{(\Lambda_n^{\mathbf{B}} - \Lambda)}_{>0} h^{4/3} + o(h^{4/3}) \quad \text{et} \quad L^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) - m^{\partial\Omega \cap \Gamma}(h) \geq \underbrace{(\Lambda - \Lambda_1^{\mathbf{B}})}_{\geq 0} h^{4/3} + o(h^{4/3}).$$

On a donc dans les deux cas, pour  $\alpha$  assez petit, qu'il existe  $c > 0$  et  $C \geq 0$  tels que pour  $h < h_0$  :

$$(4.10) \quad ch^{4/3} \sum_{\substack{j \in Z_1^\bullet(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^\varphi \psi_{n,h}\|^2 \leq Ch^{4/3} \sum_{\substack{j \in Z_2^\bullet(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} \psi_{n,h}\|^2.$$

Par choix de  $\varphi$  (voir (4.4)) adapté à l'échelle (spatiale) en  $h$  provenant de l'étude de la minoration, on a (par compacité de  $\Omega$ ) qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$(4.11) \quad \sum_{\substack{j \in Z_2^\bullet(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^\varphi \psi_{n,h}\|^2 \leq C \sum_{\substack{j \in Z_2^\bullet(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} \psi_{n,h}\|^2.$$

Pour  $h < h_0$  on a finalement avec (4.10), (4.11) et la propriété (3.1) de la partition de l'unité en section 3.1.2, l'inégalité asymptotique suivante :

$$ch^{4/3} \|e^\varphi \psi_{n,h}\|^2 \leq Ch^{4/3} \|\psi_{n,h}\|^2.$$

où  $c > 0$  et  $C \geq 0$ . Le point 2 du théorème 4.4 et le point 2 du théorème 4.8 se déduisent immédiatement de ce qui vient d'être établi.



## Développement asymptotique complet des premières valeurs propres

Dans tout ce chapitre, on se place sous la condition (4.1) assurant la localisation de la première fonction propre sur l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$ . Le résultat final (le théorème 5.18) donne un développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . On obtient en particulier que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  correspond au bas du spectre de l'opérateur "somme directe"

$$\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} h^{4/3} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} \mathcal{K}_{\theta(x)} \text{ modulo en terme de reste en } \mathcal{O}(h^{5/3}).$$

### 5.1. Problème localisé au bord sur la courbe d'annulation

On commence par l'étude d'un opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  localisé sur un voisinage  $\Omega_{x_0}$  d'un point  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  (suffisamment petit de sorte que le passage en coordonnées curvilignes soit licite) en imposant une condition de Dirichlet sur  $\partial\mathcal{B}(x_0, R_{x_0}) \setminus \partial\Omega$  où  $\mathcal{B}(x_0, R_{x_0}) \not\subset \Omega_{x_0}$ .

**Notation 5.1.** Soit  $x_j^{(4)} = x_0$  appartenant à  $\partial\Omega \cap \Gamma$  choisi de sorte que (voir les notations 1.12 et 3.1) :

$$\Lambda_1^{x_0} < M_1^{\mathbf{B}}.$$

On note  $\Omega_{x_0} = \mathcal{B}(x_0, R_{x_0}) \cap \Omega$  avec  $R_{x_0} > 0$  suffisamment petit de sorte que  $\Omega_{x_0}$  soit un voisinage sur lequel le difféomorphisme  $\Phi$  (voir section B.3) est bien défini avec  $\overline{\Omega}_{x_0} \cap (\partial\Omega \cap \Gamma) = \{x_0\}$ .

On reprend la notation 1.12 et on introduit quelques notations supplémentaires.

**Notation 5.2.** On note  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}^{\text{loc}}$  la réalisation autoadjointe sur  $\Omega_{x_0}$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  avec condition de Neumann sur  $\mathcal{B}(x_0, R_{x_0}) \cap \partial\Omega$  et condition de Dirichlet sur  $\partial(\mathcal{B}(x_0, R_{x_0})) \setminus \partial\Omega$ .

Pour tout  $n$  tel que  $\zeta_n^{\theta_0} < M_0$ , on note :

$$(\lambda_{n,x_0}(h), \psi_{n,h,x_0}) \quad \text{et} \quad (\lambda_{n,x_0}^{\text{loc}}(h), \psi_{n,h,x_0}^{\text{loc}})$$

une paire d'éléments propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}^{\text{loc}}$  (respectivement).

Pour finir on désigne par  $\mathcal{P}_{x_0}^{\text{mod}}$  l'opérateur suivant sur  $\mathbb{R}_+^2$  :

$$\mathcal{P}_{x_0}^{\text{mod}} = |\nabla \mathbf{B}(x_0)|^{2/3} h^{4/3} \mathcal{K}_{\theta(x_0)}.$$

Ce chapitre a en particulier pour but de montrer que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}^{\text{loc}}$  coïncide avec le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{x_0}^{\text{mod}}$  sur  $\mathbb{R}_+^2$ , modulo un terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{5/3})$ .

Dans la suite de ce chapitre, on utilisera encore les mêmes notations simplifiées que celles données dans 3.26.

### 5.1.1. Minoration.

**Proposition 5.3.** *Soit  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  et  $1 \leq N \leq N(\theta_0)$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N(\theta_0)$ , il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $1 \leq n \leq N$  et  $0 < h < h_0$  on ait :*

$$\lambda_{n,x_0}^{\text{loc}}(h) \geq \Lambda_n^{x_0} h^{4/3} - Ch^{5/3}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N(\theta_0)$  et  $1 \leq n \leq N$ .

Par inclusion des domaines, on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0} \leq \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}}.$$

Les résultats de minoration valables pour  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  le sont donc également (a fortiori) pour  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}}$ .

Pour prouver la proposition 5.3, il suffit de montrer que :

$$\lambda_{n,x_0}(h) \geq h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \mathcal{Q}_{\mathcal{K}_{\theta_0}}(\psi) - Ch^{5/3},$$

pour  $\psi$  dans un certain espace vectoriel de dimension  $n$ , pour finalement conclure avec le principe du Min-Max (théorème A.9 en Annexe).

On considère une base orthonormée  $\psi_{1,h}, \dots, \psi_{n,h}$  de fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  et on introduit l'espace vectoriel de dimension  $n$  suivant :

$$\mathbf{E}_{n,x_0}(h) = \text{Vect} \{ \psi_{k,h,x_0}, 1 \leq k \leq n \}.$$

Soit  $\psi = \sum_j \alpha_j \psi_{j,h} \in \mathbf{E}_{n,x_0}(h)$ . On a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) \leq \lambda_{n,x_0}(h) \|\psi\|^2.$$

En effet, en notant  $\mathcal{B}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$  la forme bilinéaire associée à  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$ , on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) = \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0} \left( \sum_j \alpha_j \psi_{j,h} \right) = \sum_j \alpha_j^2 \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi_{j,h}) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \mathcal{B}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi_{i,h}, \psi_{j,h}).$$

La famille étant orthogonale pour le produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$ , elle l'est également au sens de la forme quadratique car :

$$\mathcal{B}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi_{i,h}, \psi_{j,h}) = \langle \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0} \psi_{i,h,x_0}, \psi_{j,h,x_0} \rangle = \lambda_{i,x_0}(h) \langle \psi_{i,h,x_0}, \psi_{j,h,x_0} \rangle = \lambda_{i,x_0}(h) \delta_{ij}.$$

Comme  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi_{j,h,x_0}) = \lambda_{j,x_0}(h) \|\psi_{j,h,x_0}\|^2$  et que la suite des valeurs propres  $(\lambda_{n,x_0}(h))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante, on a avec le théorème de Pythagore :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) \leq \lambda_{n,x_0}(h) \sum_j \alpha_j^2 \|\psi_{j,h,x_0}\|^2 = \lambda_{n,x_0}(h) \|\psi\|^2.$$

On va minorer  $\lambda_{n,x_0}(h)$  en minorant  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi)$  et montrer que :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) \geq h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \mathcal{Q}_{\mathcal{K}_{\theta_0}}(\psi) - Ch^{5/3}.$$

Sur  $\Omega_0$ , on peut passer dans les coordonnées  $(s, t)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que les coordonnées curvilignes du point  $x_0$  sont  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la réécriture de la forme quadratique est la suivante :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( (1 - tk(s))^{-2} |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\psi}|^2 \right) (1 - tk(s)) ds dt.$$

Par régularité et compacité du bord, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|(1 - tk(s))| \geq 1 - C|t| \quad \text{et} \quad (1 - tk(s))^{-1} \geq 1 - C|t|.$$

On obtient (avec la notation simplifiée  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_{1,j}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) &\geq \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\psi}|^2 \right) dsdt \\ &\quad - \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} Ct \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\psi}|^2 \right) dsdt. \end{aligned}$$

Les estimées d'Agmon sont un élément crucial de la preuve. Le théorème 4.8 et le corollaire 4.9 restent vrais pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$ . Le corollaire 4.9 est indépendant du système de coordonnées et reste valable ici pour le potentiel vecteur magnétique donné par  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_1, 0)$  et pour n'importe quel  $\psi \in E_{n,x_0}(h)$ . Il en découle un résultat analogue au lemme 3.29 qui donne alors l'estimée suivante :

$$\int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} Ct \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\psi}|^2 \right) dsdt \leq Ch^{5/3}.$$

Il reste désormais à traiter le terme  $\int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\psi}|^2 \right) dsdt$ . On effectue un développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \partial_s \tilde{\mathbf{B}}(0, 0)st + \partial_t \tilde{\mathbf{B}}(0, 0) \frac{t^2}{2} + \underbrace{r_j^{(4)}(s, t)}_{\underline{A}_{1,j}^{(4)}(s,t)} = \Upsilon_0 \left( st \sin \theta_0 - \frac{t^2}{2} \cos \theta_0 \right) + r_j^{(4)}(s, t).$$

Le terme de reste  $r_j^{(4)}$  vérifie  $|r_j^{(4)}(s, t)| \leq C|(s, t)|^3$ . En notant plus simplement  $\underline{A}_{1,j}^{(4)} = A_0$  et  $r_j^{(4)} = r_0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) &\geq \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( |(hD_s + A_0)\tilde{\psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\psi}|^2 \right) dsdt \\ &\quad - \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} 2 \left( |(hD_s + A_0)\tilde{\psi}| |r_0\tilde{\psi}| \right) dsdt - \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} |r_0\tilde{\psi}|^2 dsdt. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le corollaire 4.9 (qui ne dépend pas du système de coordonnées et appliqué ici pour le potentiel vecteur magnétique donné par  $\tilde{\mathbf{A}} = (A_0, 0)$ ) on a :

$$\int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} 2 \left( |(hD_s + A_0)\tilde{\psi}| |r_0\tilde{\psi}| \right) dsdt \leq Ch^{5/3} \quad \text{et} \quad \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} |r_0\tilde{\psi}|^2 dsdt \leq Ch^2.$$

Les expressions de  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  et de  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$  étant formellement les mêmes, on peut reprendre le changement d'échelle de la section 2.4 qui donne finalement que :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\psi) \geq h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \mathcal{Q}_{\mathcal{K}_{\theta_0}}(\psi) - Ch^{5/3}.$$

Une conséquence de ce résultat est qu'il existe  $C > 0$  (dépendant de  $N$ ) tel que :

$$\lambda_{n,x_0}(h) \geq h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \zeta_n^{\theta_0} - Ch^{5/3}.$$

□



**5.1.2. Quasimodes et majoration.** La stratégie est basée sur le théorème spectral. On va développer l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}}$  (dans les coordonnées curviligne et après changement d'échelle) en puissance de  $h$  et chercher des solutions formelles à l'équation aux valeurs propres.

On considère  $\mathbf{x}_j^{(4)} = \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$ . La proposition B.13 en Annexe permet de se ramener à l'étude (locale) de la forme quadratique suivante :

$$\tilde{Q}(w) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( (1 - tk(s))^{-2} |(hD_s + \tilde{A}_1)w|^2 + |(hD_t)w|^2 \right) (1 - tk(s)) \, ds dt,$$

où  $\tilde{A}_{1,j} = \tilde{A}_1$  est donné par (B.10). L'opérateur se réécrit localement de la manière suivante (voir l'Annexe B.3, proposition B.11) :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Phi^{-1}(\Omega_0)} = h^2 (1 - tk(s))^{-1} D_t (1 - tk(s)) D_t + (1 - tk(s))^{-1} (hD_s + \tilde{A}_1) (1 - tk(s))^{-1} (hD_s + \tilde{A}_1),$$

et vérifie la condition de Neumann usuelle au bord.

On peut écrire :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \Upsilon_0 \left( st \sin \theta_0 - \frac{t^2}{2} \cos \theta_0 \right) + r_0(s, t),$$

où le terme de reste vérifie  $|r_0(s, t)| \leq C|(s, t)|^3$ . Le changement d'échelle :

$$\tau = h^{-1/3} \Upsilon_0^{1/3} t, \quad \sigma = h^{-1/3} \Upsilon_0^{1/3} s,$$

ramène l'étude à celle de l'opérateur suivant :

$$(5.1) \quad h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \mathcal{K}_h,$$

considéré sur  $\mathbb{R}_+^2$ , et vérifiant la condition de Neumann sur l'ensemble  $\{\tau = 0\}$ . On note que cette "approximation" au demi-plan tout entier sera rigoureusement justifiée par l'introduction d'une fonction troncature (voir (5.8)).

### Énoncé du résultat

**Proposition 5.4.** Soit  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N(\theta_0)$ . Sous la condition (4.1), il existe une constante  $C_N(J) > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $1 \leq n \leq N$  et tout  $0 < h < h_0$  :

$$d(\lambda_{n,\mathbf{x}_0}^{[J]}(h), \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}})) \leq C_N(J) h^{4/3+(J+1)/3},$$

avec

$$(5.2) \quad \lambda_{n,\mathbf{x}_0}^{[J]}(h) = h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \sum_{j=0}^J \lambda_{n,\mathbf{x}_0,j} h^{j/3} \quad \text{et} \quad \lambda_{n,\mathbf{x}_0,0} = \zeta_n^{\theta_0}.$$

**Remarque 5.5.** La quantité  $\Lambda_n^{\mathbf{x}_0} h^{4/3}$  (voir la notation 1.12) correspond à  $\lambda_{n,\mathbf{x}_0}^{[0]}(h)$ .

La preuve de la proposition 5.4 nécessite quelques résultats préliminaires.

### Développement en série formelle

Pour  $x_j^{(4)} = x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  et  $n$  tels que  $\zeta_n^{\theta_0} < M_0$ , la dépendance  $h$  de l'opérateur  $\mathcal{K}_h$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  défini via (5.1) permet de développer l'opérateur de la manière suivante :

$$(5.3) \quad \mathcal{K}_h \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{K}_j h^{j/3},$$

où l'expression de l'opérateur dominant  $\mathcal{K}_0$  est :

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_{\theta_0} = D_\tau^2 + \left( D_\sigma + \sigma\tau \sin \theta_0 - \frac{\tau^2}{2} \cos \theta_0 \right)^2.$$

On peut bien sûr expliciter l'unique expression de l'opérateur  $\mathcal{K}_1$  mais il est suffisant de remarquer qu'il s'agit d'un opérateur différentiel d'ordre au plus 2. De la même manière, pour respecter la condition de Neumann au bord des coefficients du développement, on considère le développement formel de l'opérateur suivant sur  $\partial\Omega$  :

$$\nu \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A}).$$

En optant pour des notations analogues, l'expression de cet opérateur dans le nouveau système de coordonnées sur l'ensemble  $\{\tau = 0\}$  est donnée par :

$$\mathcal{N} \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{N}_j h^{j/3}.$$

On peut facilement voir que dans le nouveau système de coordonnées, la condition de Neumann  $\mathcal{N}_0$  est donnée par  $\mathcal{N}_0\psi = D_\tau\psi = 0$ , et que tous les autres termes de son développement en série formelle sont nuls.

**Remarque 5.6.** Il est clair que pour tout  $j$ , l'ordre des opérateurs différentiels  $\mathcal{K}_j$  et  $\mathcal{N}_j$  (qui peuvent être explicités en écrivant un développement tronqué à un ordre suffisamment élevé) est inférieur ou égal à 2. Pour  $j \geq 2$  les  $\mathcal{K}_j$  sont des polynômes homogènes de degré  $j$ .

On cherche des solutions formelles de la forme :

$$\zeta \sim \sum_{j \geq 0} \zeta_j h^{j/3} \quad \text{et} \quad \psi \sim \sum_{j \geq 0} \psi_j h^{j/3},$$

de sorte qu'on ait (au sens des séries formelles) :

$$\mathcal{K}\psi \sim \zeta\psi.$$

On résout le système par identification suivant les puissances de  $h$ . On remarque que par construction, dès lors que la condition de Neumann est vérifiée pour  $\psi$ , elle est alors automatiquement satisfaite de la même manière pour tous les termes du développement en série formelle de  $\psi$ .

• Termes en  $h^0$ . On résout l'équation :

$$\mathcal{K}_0\psi_0 = \zeta_0\psi_0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,$$

qui donne par définition que  $\zeta_0$  est dans le spectre de l'opérateur  $\mathcal{K}_{\theta_0}$  et que  $\psi_0$  est une fonction propre associée. Le choix du  $\zeta_0$  dans le spectre de l'opérateur détermine de manière unique la valeur des autres coefficients. On peut choisir :

$$(5.4) \quad \zeta_0 = \zeta_n^{\theta_0} \text{ avec } n \text{ tel que } \zeta_n^{\theta_0} < M_0.$$

On en déduit que :

$$(5.5) \quad \psi_0(\sigma, \tau) = \psi_n^{\mathcal{K}_{\theta_0}}(\sigma, \tau).$$

La dépendance en  $x_0$  et  $n$  est donnée dans le théorème final en notant que  $\zeta_j = \zeta_{n, x_0, j}$  et  $\psi_j = \psi_{n, x_0, j}$ .

• Termes en  $h^{1/3}$ . On résout l'équation :

$$(\mathcal{K}_0 - \zeta_0) \psi_1 = (\zeta_1 - \mathcal{K}_1) \psi_0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2.$$

Avec (5.3), (5.4) et (5.5), on a :

$$(\mathcal{K}_{\theta_0} - \zeta_n^{\theta_0}) \psi_1 = (\zeta_1 - \mathcal{K}_1) \psi_n^{\mathcal{K}_{\theta_0}}.$$

La condition d'orthogonalité de Fredholm impose que le terme de droite de l'équation précédente appartienne à l'orthogonal du noyau de l'opérateur. Dans ce cas, on a en particulier que  $\langle \psi_1, \psi_0 \rangle = 0$ . En prenant le produit scalaire avec  $\psi_0$  dans l'expression précédente, on est amené à choisir  $\zeta_1$  :

$$(5.6) \quad \zeta_1 = \langle \mathcal{K}_1 \psi_0, \psi_0 \rangle_{\mathbb{R}_+^2}.$$

Une conséquence du théorème 2.18 est que  $\psi_0$  et  $\mathcal{K}_1 \psi_0$  appartiennent à  $L_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2)$  (et même dans  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ ). La condition (5.6) permet d'appliquer les résultats de la partie B.4 présentés en Annexe. Ces derniers donnent que  $\psi_1$  appartient à  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ .

• Termes d'ordre supérieur :

On procède par récurrence ("méthode de Grushin"). Soit  $J \geq 0$ . On suppose que les réels  $\zeta_0, \dots, \zeta_J$  et que les fonctions  $\psi_0, \dots, \psi_J$  sont déjà connus. On suppose de plus que les fonctions  $\psi_0, \dots, \psi_J$  sont dans  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ . L'équation à l'ordre  $J + 1$  s'écrit :

$$(\mathcal{K}_0 - \zeta_0) \psi_{J+1} = \zeta_{J+1} \psi_0 + \sum_{j=2}^J \zeta_j \psi_{J+1-j} - \sum_{j=1}^{J+1} \hat{\mathcal{P}}_j \psi_{J+1-j} - \hat{\mathcal{P}}_1 \psi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,$$

dont les inconnues sont  $\zeta_{J+1}$  et  $\psi_{J+1}$ .

On peut choisir  $\zeta_{J+1}$  de sorte que la condition (B.12) de la proposition B.16 présentée en Annexe soit satisfaite. Comme ce qui précède, il découle des résultats de l'Annexe B.4 que  $\psi_{J+1}$  appartient à  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ .

Comme à la fin de la preuve 3.24, on vérifie avec le système d'équations formelles au bord que les conditions de Neumann sont satisfaites par les fonctions  $\psi_{n, x_0, j}$  de sorte qu'elles appartiennent à l'ensemble  $\text{Dom}(\mathcal{K}_{\theta_0})$ . L'approche précédente peut se résumer dans le lemme suivant :

**Lemme 5.7.** *Pour tout  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N(\theta_0)$  on a (pour tout  $1 \leq n \leq N$ ) construit par récurrence une suite de nombre et de fonctions telles que pour tout  $J \geq 0$  :*

$$\sum_{j=0}^J \mathcal{K}_{J-j} \psi_{n, x_0, j} = \sum_{j=0}^J \zeta_{n, x_0, J-j} \psi_{n, x_0, j} \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,$$

avec  $\zeta_{n, x_0, 0} = \zeta_n^{\theta_0}$ ,  $\psi_{n, x_0, 0} = \psi_n^{\mathcal{K}_{\theta_0}}$  et  $\psi_{n, x_0, j} \in H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2) \subset \text{Dom}(\mathcal{K}_{\theta_0})$  pour tout  $j \geq 0$ .

La sous-section suivante a pour but de démontrer la proposition 5.4 pour laquelle il faudra respecter la condition de localisation des fonctions test. Avant de passer à la preuve on introduit quelques notations à partir de ce qui précède.

**Notation 5.8.** Avec la suite  $(\zeta_{n,x_0,j})_{j \geq 0}$  précédemment construite, on définit  $\zeta_{n,x_0,j} = \zeta_{n,j}$  et pour tout  $J \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$(5.7) \quad \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h) = h^{4/3} \Upsilon_0^{2/3} \sum_{j=0}^J \zeta_{n,x_0,j} h^{j/3},$$

$$\tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]}(s,t) = \Upsilon_0^{1/3} h^{-1/3} \sum_{j=0}^J \psi_{n,x_0,j} \left( \Upsilon_0^{1/3} h^{-1/3} s, \Upsilon_0^{1/3} h^{-1/3} t \right) h^{j/3} \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,$$

et

$$(5.8) \quad \psi_{n,h,x_0}^{[J]} = \chi_0 e^{-i\phi(\Phi^{-1})/h} \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]}(\Phi^{-1}) \text{ sur } \Omega_0,$$

où  $\chi_{R_{x_0}} = \chi_0$  est une fonction troncature de support inclut dans  $\Omega_0$  vérifiant les mêmes propriétés qu'en (3.11).

### Preuve du résultat

La proposition 5.4 se base sur quelques résultats intermédiaires.

**Lemme 5.9.** *Pour tout  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$ , tout  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \leq N(\theta_0)$  et tout  $J \geq 0$ , il existe une constante  $C_N(J) > 0$ ,  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $1 \leq n \leq N$  et tout  $0 < h < h_0$  la norme  $L^2(\Omega)$  des fonctions  $\psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  définies avec (5.8) vérifie :*

$$1 - C_N(J)h^{1/3} \leq \|\psi_{n,h,x_0}^{[J]}\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 + C_N(J)h^{1/3}.$$

La preuve de ce résultat est analogue à celle du lemme 3.27.

**PREUVE DE LA PROPOSITION 5.4.** On fixe  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$ ,  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \leq N(\theta_0)$  et on prend  $1 \leq n \leq N$ . Les fonctions  $\psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  vérifient la condition de Neumann sur  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0$  et la condition de Dirichlet est elle aussi bien vérifiée sur  $\partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega$ . Les fonctions  $\psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  appartiennent donc bien à  $\text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}})$ .

Avec l'expression de  $\psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  et le lemme 5.9 on a dans un premier temps qu'il existe  $h_0 > 0$  et une constante  $C_N(J) > 0$  tels que :

$$\forall h \in (0, h_0), 1 - C_N(J)h^{1/3} \leq \|\psi_{n,h,x_0}^{[J]}\|_{L^2} \leq 1 + C_N(J)h^{1/3}.$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \psi_{n,h,x_0}^{[J]} &= \chi_0 (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \\ &\quad + 2ih \nabla \chi_0 \cdot (-ih \nabla + \mathbf{A}) \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} - h^2 \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \Delta \chi_0. \end{aligned}$$

Sur le support de  $\chi_0$ , on a par construction :

$$\left\| \chi_0 (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_N(J) h^{4/3+(J+1)/3}.$$

Avec la décroissance exponentielle des fonctions  $\psi_n^{\mathcal{K}_{\theta_0}}$  (donnée via le lemme 5.7), et sur le support des fonctions  $\nabla \chi_0$  et  $\Delta \chi_0$  il s'ensuit :

$$\left\| 2ih \nabla \chi_0 \cdot (-ih \nabla + \mathbf{A}) \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} - h^2 \tilde{\psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \Delta \chi_0 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_N(J) \exp \left( -\alpha \frac{\Upsilon_0^{1/3} R_0}{h^{1/3}} \right).$$

Les inégalités précédentes donnent :

$$\left\| \left( \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h) \right) \psi_{n,h,x_0}^{[J]} \right\| \leq C_N(J) h^{4/3+(J+1)/3}.$$

Comme  $J$  est fixé et  $\Omega$  borné, la constante  $C_N(J)$  peut-être prise indépendamment de  $h$ . On conclut avec le théorème spectral généralisé A.7 présenté en Annexe.  $\square$

### Asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur localisé

On reprend les notations 2.16 et 5.2 ainsi que les expressions (5.7) précédemment introduites. À partir des deux sous-sections précédentes, on obtient le résultat suivant qui donne un développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur localisé.

On introduit la notation suivante (voir également la notation 1.15) :

**Notation 5.10.** Pour tout  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  tel que  $\Lambda_1^{x_0} < M_1^{\mathbf{B}}$ , tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}$  et  $J \in \mathbb{N}$  on note :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{N,x_0}^{\text{loc}} &= \{ \lambda_{n,x_0}^{\text{loc}}(h), 1 \leq n \leq N \}, \\ \mathfrak{S}_{N,x_0}^{[J]} &= \{ \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h), 1 \leq n \leq N \}, \\ \mathfrak{S}_{N,x_0} &= \left\{ \Upsilon_0^{2/3} h^{4/3} \zeta_n^{\theta_0}, 1 \leq n \leq N \right\}. \end{aligned}$$

**Théorème 5.11.** Soit  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$  tel que  $\Lambda_1^{x_0} < M_1^{\mathbf{B}}$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  vérifiant  $N \leq N(\theta_0)$  et tout  $J \geq 0$  il existe une constante  $C_N(J) > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d \left( \mathfrak{S}_{N,x_0}^{\text{loc}}, \mathfrak{S}_{N,x_0}^{[J]} \right) \leq C_N(J) h^{4/3+(J+1)/3}.$$

En particulier il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$d \left( \mathfrak{S}_{N,x_0}^{\text{loc}}, \mathfrak{S}_{N,x_0} \right) \leq C_N h^{5/3}.$$

**DÉMONSTRATION.** Ce résultat découle immédiatement des deux sections précédentes. La proposition 5.4 donne tout d'abord que pour tout  $x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$ , tout  $1 \leq n \leq N \leq N(\theta_0)$ , et tout  $J \in \mathbb{N}$ , il existe  $\lambda_{x_0}(h) \in \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0})$  et une constante  $C_N(J) > 0$  tels que :

$$|\lambda_{x_0}(h) - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)| \leq C_N(J) h^{4/3+(J+1)/3}.$$

La proposition 5.3 donne l'argument de séparation manquant pour dire qu'il existe un seul élément de  $\text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0})$  dans un voisinage de chacune de ces valeurs.  $\square$

## 5.2. Approximation du bas du spectre

En regroupant les différents résultats locaux de la section précédente, on obtient que le spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  correspond au spectre de l'opérateur "somme directe"  $\bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}^{\text{loc}}$ , modulo un reste en  $\mathcal{O}(e^{-Ch^{-1/3}})$ . À partir de ce résultat, on obtient un développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . On obtient en particulier que le bas du spectre coïncide avec le bas du spectre d'une "somme directe" d'opérateurs de Pan et Kwek modulo un terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{5/3})$ . Dans cette section, on compare (sous la condition (4.1)) le spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  à celui des opérateurs localisés introduits précédemment, ce qui permet finalement d'expliciter le développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ .

**5.2.1. Spectre de la réunion d'opérateurs locaux.** Grâce aux estimées d'Agmon, on montre que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est dans la limite semi-classique exponentiellement proche du bas du spectre de la réunion d'opérateurs locaux.

**Notation 5.12.** On note  $n_{\Omega,\mathbf{B}} \in \mathbb{N}^*$  le cardinal (fini) de l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$  et pour tout  $1 \leq j \leq n_{\Omega,\mathbf{B}}$  on rappelle que les éléments de  $\partial\Omega \cap \Gamma$  sont notés  $x_j^{(4)}$ .

En lien avec la notation 5.2, on considère sur  $\Omega$  l'opérateur modèle  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  défini par :

$$(5.9) \quad \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} = \bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}^{\text{loc}} = \bigoplus_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{loc}}|_{x_j^{(4)}}.$$

On désigne les éléments du spectre de cet opérateur (à résolvante compacte) de la manière suivante :

$$\text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}) = \{ \lambda_1^{\text{mod}}(h) \leq \lambda_2^{\text{mod}}(h) \leq \dots \leq \lambda_n^{\text{mod}}(h) \leq \dots \}.$$

**Notation 5.13.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}$  on note :

$$\mathfrak{S}_N^{\text{mod}} = \{ \lambda_n^{\text{mod}}(h), 1 \leq n \leq N \}.$$

**Proposition 5.14.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}$ , il existe  $C_N > 0$ ,  $\alpha_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\text{mod}}) \leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}}.$$

**DÉMONSTRATION.** On commence par fixer  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}$ . Pour tout  $x_j^{(4)}$ , on définit une fonction troncature (fixée)  $\chi_{x_j^{(4)}}$  supportée dans une boule de taille  $R_{x_j^{(4)}}$ , centrée au point  $x_j^{(4)}$  et strictement incluse dans le support de  $\Omega_{R_{x_j^{(4)}}}$ . On considère un entier  $1 \leq n \leq N$ . On rappelle que  $\psi_{n,h}$  est une fonction propre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , associé à la valeur propre  $\lambda_n(h)$ . On considère le quasimode suivant pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  :

$$\psi^{\text{mod}} = \left( \chi_{x_1^{(4)}} \psi_{n,h}, \dots, \chi_{x_{n_{\Omega,\mathbf{B}}}^{(4)}} \psi_{n,h} \right).$$

Cette dernière fonction est bien dans le domaine de l'opérateur. On rappelle que l'ensemble  $\Gamma_n^{[4]}$  est défini via la notation 4.6. Avec les estimées d'Agmon du corollaire 4.9, on obtient que :

$$\begin{aligned} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} - \lambda_n(h)) \psi \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} - \lambda_n(h)) \chi_{x_j^{(4)}} \psi_{n,h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n(h)) \chi_{x_j^{(4)}} \psi_{n,h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_N e^{-2\alpha_N h^{1/3}} \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n_{\Omega,\mathbf{B}} \\ x_j^{(4)} \in \Gamma_n^{[4]}}} \left\| \chi_{x_j^{(4)}} (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n(h)) \psi_{n,h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_N e^{-2\alpha_N h^{1/3}} \\ &\leq C_N e^{-2\alpha_N h^{1/3}}. \end{aligned}$$

Le théorème spectral donne qu'il existe une valeur propre  $\lambda_{k(n)}^{\text{mod}}(h)$  de l'opérateur modèle qui est exponentiellement proche de  $\lambda_n(h)$ . On a donc montré que pour tout  $1 \leq n \leq N$ , il existe  $C_N > 0$ ,  $\alpha_N > 0$  et  $h_0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d(\lambda_n(h), \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}})) \leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}}.$$

En considérant les suites croissantes des valeurs propres des opérateurs  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , on peut facilement voir que  $k$  est une fonction croissante vérifiant  $k(n) \geq n$ . On donc obtenu pour tout  $1 \leq n \leq N$  la majoration suivante :

$$\lambda_n^{\text{mod}}(h) \leq \lambda_n(h) + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}}.$$

Réciproquement on montre un résultat analogue pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  en utilisant les fonctions propres de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$ . On considère un couple  $(\lambda_n^{\text{mod}}(h), \psi_{n,h}^{\text{mod}})$  d'éléments propres de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  avec  $\psi_{n,h}^{\text{mod}}$  de la forme :

$$\psi_{n,h}^{\text{mod}} = \left( \psi_{n,h}^{\text{mod},1}, \dots, \psi_{n,h}^{\text{mod},n_{\Omega,\mathbf{B}}} \right),$$

où pour tout  $j$ , la fonction  $\psi_{n,h}^{\text{mod},j}$  est supportée dans  $\Omega_{x_j}^{(4)}$ . On peut prolonger par continuité (avec la valeur 0) la fonction  $\psi_{n,h}^{\text{mod},j}$  sur tout l'espace  $\Omega$  en gardant la même régularité  $H^2(\bar{\Omega})$  (étant donné que la condition de Dirichlet est satisfaite). Comme  $\text{supp}(\chi_{R_{x_j}^{(4)}}) \not\subset \Omega_{R_{x_j}^{(4)}}$ , on note que l'on s'affranchit des questions relatives au domaine de l'opérateur sur la discontinuité des conditions limites au bord entre Neumann et Dirichlet. On considère le quasimode suivant pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  :

$$\psi = \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \psi_{n,h}^{\text{mod},j}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \psi\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \chi_{x_j^{(4)}} \psi_{n,h,x_j^{(4)}}^{\text{mod}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| \chi_{x_j^{(4)}} (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \psi_{n,h}^{\text{mod},j} \right\|_{L^2(\Omega)} + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \psi_{n,h}^{\text{mod},j} \right\|_{L^2(\Omega_j^{(4)})} + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \psi_{n,h}^{\text{mod},j} \right\|_{L^2(\Omega_j^{(4)})} + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}} \\ &\leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}}. \end{aligned}$$

Le théorème spectral donne donc qu'il existe une valeur propre  $\lambda_{k'(n)}(h)$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  qui est exponentiellement proche de  $\lambda_n^{\text{mod}}(h)$ . On a donc montré que pour tout  $1 \leq n \leq N$ , il existe  $C_N > 0$ ,  $\alpha_N > 0$  et  $h_0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d(\lambda_n^{\text{mod}}(h), \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega})) \leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}}.$$

Comme ce qui précède, en considérant les suites croissantes des valeurs propres des opérateurs  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , on voit facilement que  $k'$  est une fonction croissante vérifiant  $k'(n) \geq n$ . On donc obtenu pour tout  $1 \leq n \leq N$  la majoration suivante :

$$\lambda_n(h) \leq \lambda_n^{\text{mod}}(h) + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/3}}.$$

On en déduit finalement le résultat de la proposition 5.14.  $\square$

**5.2.2. Asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres du Laplacien magnétique.** On explicite désormais le spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  en regroupant les expressions des spectres des différents opérateurs modèles. Pour l'énoncé du théorème final de la partie I, on reprend les notations originales données dans la notation 3.26 et on introduit :

**Notation 5.15.** Pour tout  $x \in \partial\Omega \cap \Gamma$ , on note  $\mathcal{P}_x^{\text{mod}}$  l'opérateur suivant défini sur  $\mathbb{R}_+^2$  :

$$\mathcal{P}_x^{\text{mod}} = h^{4/3} |\nabla \mathbf{B}(x)|^{2/3} \mathcal{K}_{\theta(x)}.$$

On désigne par :

$$(\Lambda_n(h))_{1 \leq n \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}} = (\Lambda_n h^{4/3})_{1 \leq n \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}}$$

la suite croissante des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de l'opérateur :

$$\mathcal{P}^{\text{mod}} = \bigoplus_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \mathcal{P}_x^{\text{mod}},$$

défini sur  $\mathbb{R}_+^2$ . En reprenant (5.2), pour tout  $J \geq 0$  on note de manière ordonnée :

$$\{\Lambda_n^{[J]}(h), 1 \leq n \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}\} = \{\lambda_{n, x_0}^{[J]}(h), x_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma, 1 \leq n \leq N(\theta(x_0))\}.$$

**Remarque 5.16.** La quantité  $\Lambda_n^{\mathbf{B}} h^{4/3}$  (voir la notation 1.12) correspond à  $\Lambda_n^{[0]}(h)$ .

On reprend les notation 1.15, 5.10 et 5.13 et on introduit :

**Notation 5.17.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$  et tout  $J \in \mathbb{N}$  on note :

$$\mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}, [J]} = \{\Lambda_n^{[J]}(h), 1 \leq n \leq N\}.$$

**Théorème 5.18.** *On se place dans le cadre de la condition (4.1) et on se fixe un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$ . Pour tout  $J \geq 0$  il existe  $C_N(J) > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$d(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}, [J]}) \leq C_N(J) h^{4/3 + (J+1)/3}.$$

*En particulier on a qu'il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$d(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}}) \leq C_N h^{5/3}.$$

**DÉMONSTRATION.** Ce résultat découle immédiatement de la proposition 5.11 de la section 5.1 et de la proposition 5.14, il suffit de regrouper l'ensemble des valeurs propres données par la réunion des problèmes locaux.  $\square$





## CHAPITRE 6

### Simulations numériques

Ce chapitre présente des simulations numériques effectués avec la librairie éléments finis Méliana++ (écrite en C++).

On considère dans le cas où  $\Omega$  est le rectangle  $\Omega = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times [-1, 1]$  et où l'expression du champ magnétique est la suivante :

$$\mathbf{B}(s, t) = s,$$

s'annule suivant l'axe des ordonnées. Le potentiel vecteur magnétique considéré dans les calculs est :

$$\mathbf{A}(s, t) = (-st, 0).$$

On rappelle (voir la remarque 1.8) que l'analyse précédente se généralise au cas où  $\Omega$  est un ouvert

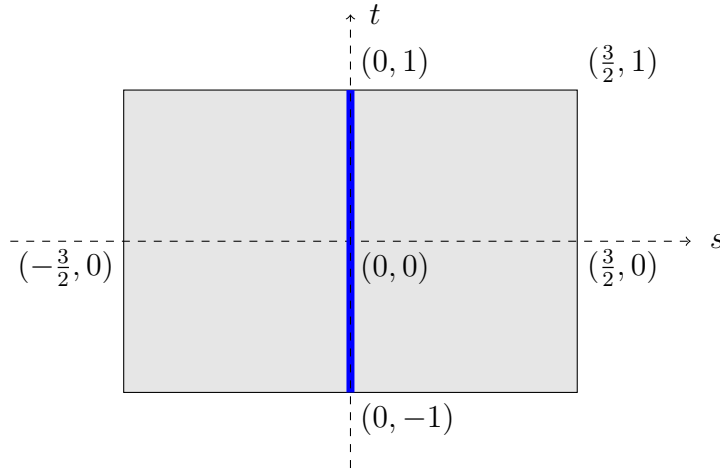


FIGURE 1. Domaine  $\Omega$  et courbe d'annulation  $\Gamma$  pour l'étude numérique.

polygonal dès lors que la courbe d'annulation ne passe pas par un coin. Les calculs numériques présentés ici sont donc bien une illustration des résultats théoriques obtenus.

Dans ce cas considéré, l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$  est réduit à deux points dont les coordonnées sont  $(0, -1)$  et  $(0, 1)$ . Pour chacun de ces deux points, l'angle  $\theta$  formé par la droite d'annulation et le bord est le même et vaut  $\frac{\pi}{2}$ . La quantité spectrale lié à l'opérateur modèle  $\mathcal{K}_\theta$  sous-jacent qui va apparaître est donc  $\zeta_1^{\frac{\pi}{2}}$ . On a  $|\nabla\mathbf{B}| \equiv 1$  en tout point de  $\overline{\Omega}$ , ce qui donne que :

$$\min_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \zeta_1^{\theta(x)} |\nabla\mathbf{B}(x)|^{2/3} = \zeta_1^{\frac{\pi}{2}},$$

et

$$M_0 \min_{x \in \Gamma} |\nabla\mathbf{B}(x)|^{2/3} = M_0.$$

Comme on a  $\zeta_1^{\frac{\pi}{2}} < M_0$  (voir la proposition 2.15), on est dans un cas où la condition (4.1) est bien satisfaite. Les théorèmes 4.8 et 5.18 s'appliquent et donnent en particulier que :

$$\lambda_1(h) = \zeta_1^{\frac{\pi}{2}} h^{4/3} + \mathcal{O}(h^{5/3}), \quad \lambda_2(h) = \zeta_1^{\frac{\pi}{2}} h^{4/3} + \mathcal{O}(h^{5/3}),$$

et que les deux premières fonctions propres se localisent près de l'ensemble  $\partial\Omega \cap \Gamma$ .

Les calculs numériques des figures 2, 3, 4, 5 et 6 ont été effectués pour  $24 \times 16$  éléments rectangulaires  $\mathbb{Q}_{10}$  (de degré partiel 10 en chaque variable).

### 6.1. Calculs numériques des premières valeurs propres

Les calculs numériques suivants présentent le comportement des dix premières valeurs propres pour des valeurs décroissantes du paramètre semi-classique. On a représenté en couleur les familles régulières des valeurs propres. Chaque couleur correspond à une courbe analytique (fonctions de  $\frac{1}{h}$ ). Cette désignation est différente de la numérotation des valeurs propres par ordre croissant. La figure 2 illustre entre autres la convergence numérique, lorsque  $\frac{1}{h}$  tend vers  $+\infty$  (c'est-à-dire lorsque  $h$  tend vers 0), de  $h^{-4/3}\lambda_1(h)$  et  $h^{-4/3}\lambda_2(h)$  vers la valeur  $\zeta_1^{\frac{\pi}{2}}$  dont on rappelle qu'une valeur numérique est donnée par (voir [20] et la figure 2) :

$$\zeta_1^{\frac{\pi}{2}} \approx 0.5494.$$

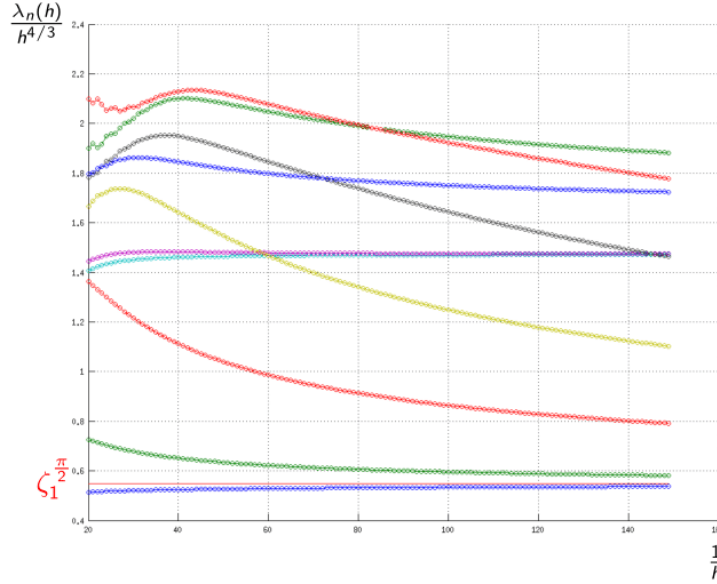


FIGURE 2. Courbes des dix premières valeurs propres  $\lambda_n(h)$  renormalisées par  $h^{-4/3}$  en fonction de  $\frac{1}{h}$ , avec  $\mathbf{B}(s, t) = s$  et  $\Omega = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times [-1, 1]$ .

### 6.2. Module et phase des dix premiers vecteurs propres pour $h = \frac{1}{100}$ et $h = \frac{1}{150}$

Les figures 3 et 4 présentent le module des dix premiers vecteurs propres. Ces graphiques illustrent la localisation des deux premières fonctions propres sur un voisinage de  $\partial\Omega \cap \Gamma$ , pour  $h$  suffisamment petit. Numériquement (voir la figure 2) l'opérateur  $\mathcal{K}_\theta$  admet une seule valeur propre pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . La

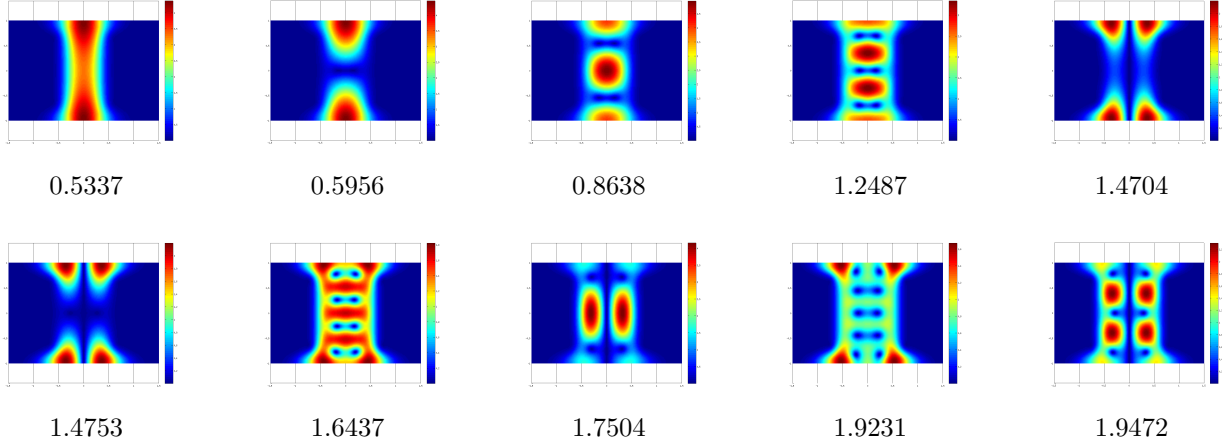


FIGURE 3. Module des dix premiers modes  $\psi_{n,h}$ ,  $h = \frac{1}{100}$  avec une valeur numérique de  $\lambda_n(h)h^{-4/3}$ . Éléments finis  $\mathbb{P}_1$ ,  $24 \times 16$  quadrangles de degré  $\mathbb{Q}_{10}$ .

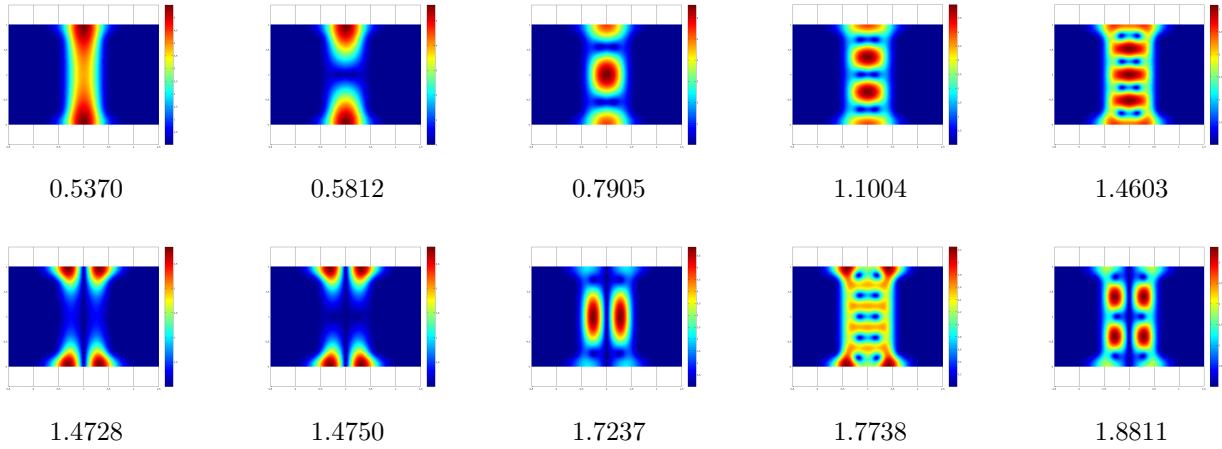


FIGURE 4. Module des dix premiers modes  $\psi_{n,h}$ ,  $h = \frac{1}{150}$  avec une valeur numérique de  $\lambda_n(h)h^{-4/3}$ . Éléments finis  $\mathbb{P}_1$ ,  $24 \times 16$  quadrangles de degré  $\mathbb{Q}_{10}$ .

théorie précédemment développée ne dit donc rien en dehors des deux premières valeurs propres. On peut néanmoins faire quelques remarques importantes. Le domaine possède un certain nombre de symétries (il est invariant par l'action du groupe engendré par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et l'opérateur commute avec les transformations suivantes :

$$\mathcal{S} : \psi(s, t) \mapsto \psi(-s, t),$$

$$\mathcal{T} : \psi(s, t) \mapsto \overline{\psi(s, -t)}.$$

En lien avec ces symétries, on observe différentes familles de courbes analytiques associées aux vecteurs propres qui localisent sur la ligne d'annulation. Les fonctions propres liées à la famille  $(\mathcal{M}(\eta))_{\eta \in \mathbb{R}}$  des opérateurs de Montgomery 1D sous-jacents (voir la section 2.3) se retrouvent suivant la variable  $s$ . Deux familles de courbes analytiques faisant apparaître deux niveaux d'énergie différents sont particulièrement intéressantes. L'une des familles de courbe converge vers la valeur  $M_0$  (on rappelle que

$M_0 = \nu_1(\eta_0)$ ) et est associée aux modes pairs (en la variable  $s$  transverse à la ligne d'annulation) de l'opérateur  $\mathcal{M}(\eta_0)$ , tandis que l'autre converge vers  $\inf_{\eta \in \mathbb{R}} \nu_2(\eta)$  (dont une valeur numérique approchée est donnée par  $\inf_{\eta \in \mathbb{R}} \nu_2(\eta) \approx 1.6537$ ) et est associée aux modes impairs de l'opérateur  $\mathcal{M}(\eta_{0,2})$  (voir la notation 2.12).

Les figures 5 et 6 présentent quant à elle la phase des dix premières valeurs propres. Les figures 3 et 5 ainsi que 4 et 6 sont associées au même calcul. On retrouve dans les figures 5 et 6 les deux familles de symétrie (liées aux modes pairs et impairs des opérateurs de Montgomery  $\mathcal{M}(\eta_0)$  et  $\mathcal{M}(\eta_{0,2})$ ) en regardant les lignes d'annulation de la phase. Les figures 5 et 6 montrent également de fortes oscillations de la phase (dans des zones loin de la ligne d'annulation). La structure de ces oscillations est en  $\frac{1}{h}$  (voir [16] pour plus de détails). Cet aspect rend les calculs numériques difficiles et justifie l'utilisation d'un haut degré pour l'interpolation polynomiale (ici degré 10) pour y pallier.

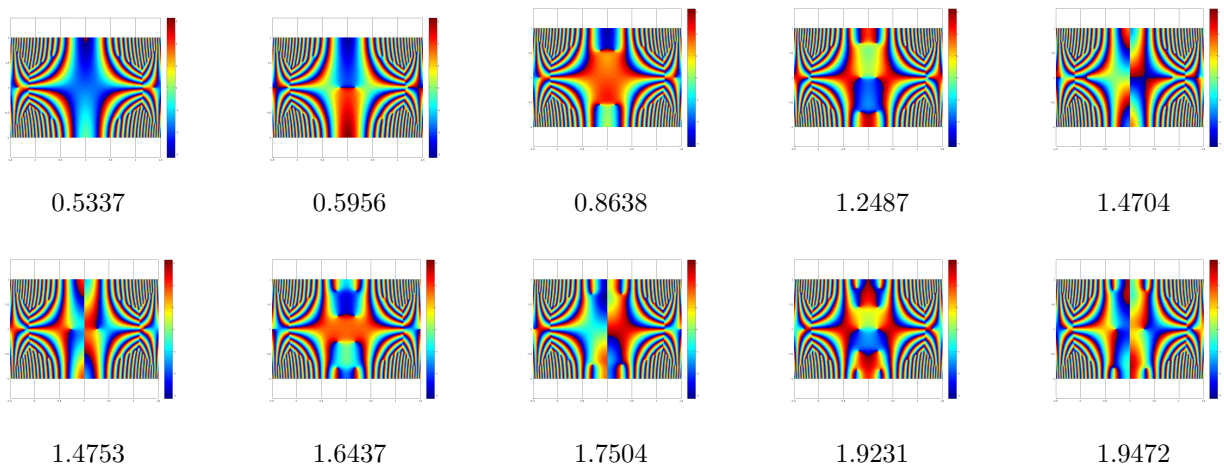


FIGURE 5. Argument (angle en radian) des dix premiers modes  $\psi_{n,h}$ ,  $h = \frac{1}{100}$  avec une valeur numérique de  $\lambda_n(h)h^{-4/3}$ . Éléments finis  $\mathbb{P}_1$ ,  $24 \times 16$  quadrangles de degré  $\mathbb{Q}_{10}$  (grille régulière).

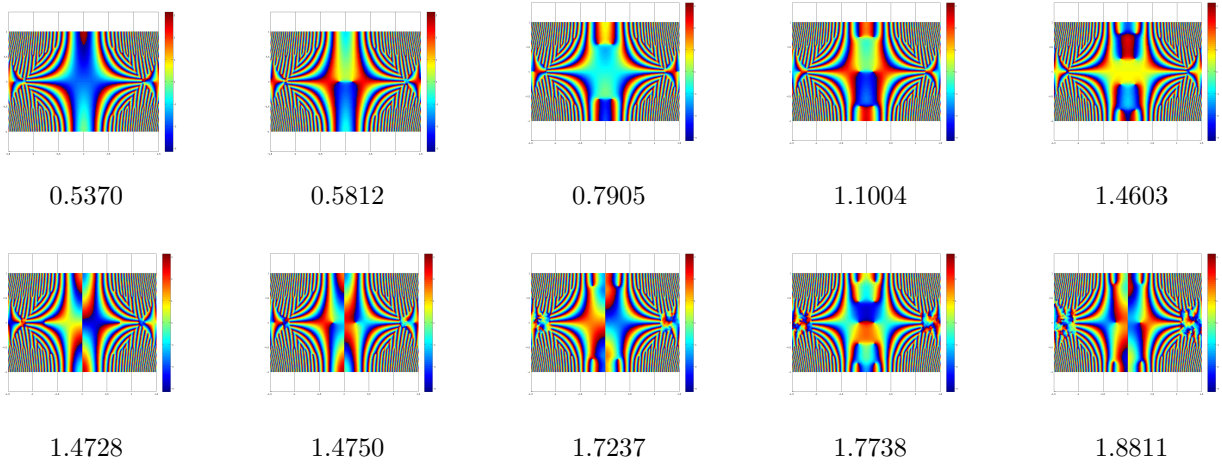


FIGURE 6. Argument (angle en radian) des dix premiers modes  $\psi_{n,h}$ ,  $h = \frac{1}{150}$  avec une valeur numérique de  $\lambda_n(h)h^{-4/3}$ . Éléments fins  $\mathbb{P}_1$ ,  $24 \times 16$  quadrangles de degré  $Q_{10}$  (grille régulière).



## **II**

### **Annulation quadratique à l'intérieur du domaine**



## Cadre d'étude

Le cas d'une annulation "simple" où le champ magnétique s'annule linéairement (voir l'hypothèse 1), a été traité dans la partie I. Cette première partie a fait apparaître deux échelles différentes dans la limite semi-classique, à savoir  $h$  et  $h^{4/3}$ . La deuxième partie est consacrée au cas d'une annulation "double" où le champ magnétique s'annule quadratiquement. Ce nouveau cadre d'étude fait apparaître une troisième échelle dans la limite semi-classique.

**Hypothèse 2.** Les hypothèses de cette partie sont les suivantes :

- (1) Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'annule le long d'une courbe régulière  $\Gamma$ .
- (2) La courbe intersecte le bord de  $\Omega$  de manière non tangente, et en un nombre fini de points.
- (3) La courbe d'annulation  $\Gamma$  admet un ensemble de points doubles  $\Sigma$  non vide et de cardinal fini vérifiant  $\partial\Omega \cap \Sigma = \emptyset$ .
- (4) Le gradient  $\nabla\mathbf{B}$  est partout non nul sur  $\Gamma \setminus \Sigma$ .
- (5) Pour tout  $x \in \Sigma$ , la matrice Hessienne  $\text{Hess}\mathbf{B}(x)$  du champ magnétique au point  $x$  est non dégénérée.

**Notation 6.1.** Pour tout  $x \in \Sigma$ , on désigne par  $\vartheta(x)$  la valeur de l'angle (dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ) formé par les deux tangentes à  $\Gamma$  au point  $x$  et par  $\varepsilon(x)$  la valeur donnée par la relation  $\varepsilon = \tan \frac{\vartheta}{2}$ .

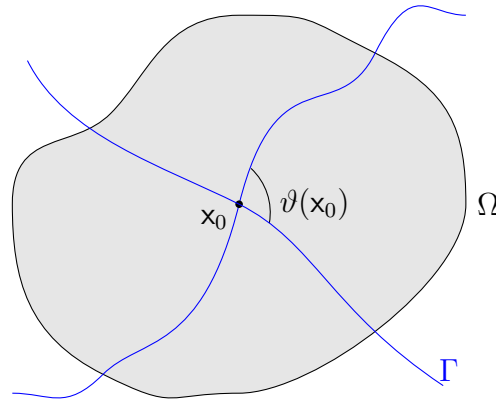


FIGURE 7. Domaine  $\Omega$  et courbe d'annulation  $\Gamma$

L'analyse est différente de celle effectuée dans la partie I en raison des points doubles, mais la structure de l'étude est la même. On établit un équivalent de la plus petite valeur propre, puis des estimées d'Agmon et finalement un développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres en se basant sur l'opérateur modèle dominant dont les propriétés ont été étudiées dans le chapitre 2.

## Équivalent de la plus petite valeur propre

On commence par rappeler la notation 1.17 de l'introduction :

Pour tout  $x \in \Sigma$ , on désigne par  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  les valeurs propres de la matrice Hessienne de  $\mathbf{B}$  au point  $x$  telles que  $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ , et on note :

$$\Xi(x) = |\beta(x)|,$$

$$\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{|\alpha(x)|}{|\beta(x)|}}.$$

La quantité  $\varepsilon(x)$  telle qu'elle est définie ici coïncide avec la définition donnée dans la notation 6.1. Rappelons encore que la quantité  $\Xi(x)$  représente le coefficient multiplicatif devant la partie quadratique modèle " $\tau^2 - \varepsilon(x)^2 \sigma^2$ " apparaissant après développement de Taylor du champ magnétique au point  $x \in \Sigma$ .

Ce chapitre a pour but de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 7.1** (Équivalent de la plus petite valeur propre). *Il existe  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :*

$$C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} - Ch^{19/12} \leq \lambda_1(h) \leq C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} + Ch^{7/4},$$

où on rappelle que  $C_0^{\mathbf{B}}$  est défini en introduction dans le théorème 1.18 par :

$$C_0^{\mathbf{B}} = \inf_{x \in \Sigma} \Xi(x)^{1/2} \varkappa_1(\varepsilon(x)).$$

Ce résultat est une conséquence des théorèmes 7.3 et 7.13 qui vont être démontrés.

**Remarque 7.2.** On s'est placé dans un cas de non dégénérescence de la matrice Hessienne pour tout point de  $\Sigma$  (voir les hypothèses 2). Cette hypothèse impose que l'intersection en chaque point double est non tangente, c'est à dire que  $\varepsilon$ , tel qu'on l'a défini, est différent de 0. Pour  $\varepsilon = 0$ , on a une annulation quadratique dégénérée du champ magnétique  $\mathbf{B}(s, t) = -t^2$ . L'asymptotique semi-classique reste la même, c'est-à-dire en  $h^{3/2}$ , car la composante non nulle du potentiel vecteur reste un polynôme homogène de degré 3, mais l'opérateur modèle sous-jacent  $D_\tau^2 + \left(D_\sigma - \frac{\tau^3}{3}\right)^2$  représente le cas singulier où les deux droites d'annulation sont confondues. Cet opérateur n'est pas à résolvante compacte. L'étude spectrale de ce dernier opérateur se ramène à l'étude spectrale de la famille  $(\mathcal{M}^{[2]}(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}}$  pour laquelle on a (voir la section 2.6) :

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \text{Sp}(\mathcal{M}^{[2]}(\xi)) = M_0^{[2]}.$$

Une valeur numérique de  $M_0^{[2]}$  est donnée par  $M_0^{[2]} \approx 0.66$ .

## 7.1. Minoration

### 7.1.1. Énoncé du résultat.

**Théorème 7.3** (Minoration de la plus petite valeur propre). *Il existe  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_0$  et tout  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  on a :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} \|u\|^2 - Ch^{19/12} \|u\|^2,$$

où  $C_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans le théorème 7.1. En particulier on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\lambda_n(h) \geq \lambda_1(h) \geq C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} - Ch^{3/2+1/12}.$$

### 7.1.2. Minoration locale de la forme quadratique.

**Notation 7.4.** On étend la notation 7.4 au cas où  $\ell = 5$  en notant  $\Omega_5 = \Sigma$  et en désignant par  $x_j^{(5)}$  les points de  $\Sigma$ .

Comme dans la partie I, on va obtenir une minoration de la forme quadratique en utilisant la formule de localisation, ce qui nécessite d'obtenir un résultat de minoration local. On procède pour cela comme dans la sous-section 3.1.3 en commençant par définir un nouveau système de coordonnées qui redresse la géométrie du bord et de la courbe d'annulation.

On se place au voisinage d'un point  $x_j^{(5)}$  de  $\Sigma$  et on considère en ce point deux vecteurs tangents (et unitaires) en chacune des deux courbes d'annulation du champ magnétique. Ces deux vecteurs sont non colinéaires car au point  $x_j^{(5)}$ , la matrice Hessienne du champ magnétique est non dégénérée (voir les hypothèses 2). On les note respectivement  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  et on les considère orientés dans le sens direct. On considère un système de coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  dans un repère orthonormé direct centré en  $x_j^{(5)}$  où les vecteurs de base  $(\vec{i}, \vec{j})$  sont défini de la manière suivante :  $\vec{i} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|}$ ,  $\vec{j} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|}$ . Les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont des vecteurs propres de la matrice Hessienne du champ magnétique au point  $x_j^{(5)}$ .

**Notation 7.5.** On note  $\Phi_c(s, t) = (x_1, x_2)$  ce système de coordonnées cartésiennes dans lequel les coordonnées du point  $x_j^{(5)}$  sont  $(0, 0)$

Le développement de Taylor du champ magnétique est donc donné par :

$$\mathbf{B}(s, t) = -|\alpha(x_j^{(5)})|s^2 + |\beta(x_j^{(5)})|t^2 + \mathcal{O}(\|(s, t)\|^3).$$

(voir la notation 1.17). On a supposé ici sans perte de généralité que la plus petite valeur propre en module était de signe négatif.

Dans ces coordonnées, l'expression de la forme quadratique et de l'opérateur est claire.

On effectue désormais le même choix de jauge que celui donné dans la remarque B.3.

**Notation 7.6.** On note  $\phi_c$  un tel choix de jauge.

Dans les nouvelles coordonnées et pour le choix de jauge  $\phi_c(s, t)$ , la partie principale du développement de Taylor du potentiel  $A_{1,j}^{(5)}$  (au point  $(0, 0) = \Phi_c^{-1}(x_j^{(5)})$ ) ainsi que le terme de reste sont donnés dans le tableau suivant (qui complète le tableau 3.1.1) :

Cas	Partie principale du développement de Taylor de $\underline{A}_{1,j}^{(\ell)}$	Majoration du terme de reste $r_j^{(\ell)}(s, t)$
(5)	$\Xi(\mathbf{x}_j^{(5)}) \left( \left( \varepsilon^2(\mathbf{x}_j^{(5)})s^2t - \frac{t^3}{3}, 0 \right) \right)$	$ r_j^{(5)}(s, t)  \leq \mathcal{O}(h^{4\rho})$

TABLEAU 7.1.1. Développement de Taylor

**7.1.3. Lemmes préliminaires.** Conformément à ce qui a été présenté, on va minorer la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  et ce, sans connaissance *a priori* sur le comportement des vecteurs propres de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . Le lemme suivant est un lemme de minoration uniforme, il est l'analogie du lemme 3.11 de la première partie.

**Lemme 7.7.** *Il existe trois constantes  $R > 0$ ,  $C(\mathbf{B}) > 0$ , et  $\tilde{C}(\mathbf{B}) > 0$  telles que :*

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ avec } d(\mathbf{x}, \Sigma) < R, \quad |\nabla \mathbf{B}(\mathbf{x})| \geq C(\mathbf{B})d(\mathbf{x}, \Sigma),$$

et

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ avec } d(\mathbf{x}, \Sigma) \geq R, \quad |\nabla \mathbf{B}(\mathbf{x})| \geq \tilde{C}(\mathbf{B}).$$

On effectue désormais un découpage du domaine. On supposera pour simplifier la preuve que l'on a un unique point double, c'est-à-dire que  $\Sigma = \{\mathbf{x}_0\}$ , mais la preuve s'effectue de la même manière dans le cas général en effectuant le même découpage en tout point  $\mathbf{x}_j^{(5)} \in \Sigma$ . On introduit trois zones  $\Sigma^{[1]}$ ,  $\Sigma^{[2]}(h)$  et  $\Sigma^{[3]}(h)$  recouvrant  $\Omega$ .

**Notation 7.8.** On rappelle que  $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r)$  désigne la boule ouverte de centre  $\mathbf{x}_0$  et de rayon  $r$ . On considère un découpage du type suivant :

- (1)  $\Sigma^{[1]} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_0, R_1)$  avec  $R_1 > 0$ . On suppose que  $\overline{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_0, R_1)$  est contenue dans  $\Omega$ .
- (2)  $\Sigma^{[2]}(h) = \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, R'_1) \setminus \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_0, R_2 h^{d_2})$  avec  $R'_1 > R_1 > R_2 h^{d_2}$  et tel que  $\overline{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_0, R'_1)$  soit encore contenue dans  $\Omega$ . Ici  $R_2 > 0$  et  $d_2 > 0$  seront choisis plus tard.
- (3)  $\Sigma^{[3]}(h) = \mathcal{B}(\mathbf{x}_0, h^{d_3})$  avec  $0 < d_3 < d_2$ . En conséquence, pour  $h > 0$  assez petit  $\Sigma^{[2]}(h) \cap \Sigma^{[3]}(h)$  est une couronne de largeur  $\geq \frac{1}{2}h^{d_3}$ .

**7.1.4. Partition de l'unité.** On considère une partition de l'unité (voir la sous-section 3.1.2) :

$$(\mathfrak{X}_j^{[1]}, \mathfrak{X}_j^{[2]}, \mathfrak{X}_j^{[3]})$$

associée à ce recouvrement. On peut supposer (grâce à la taille de la zone de transition entre  $\Sigma^{[2]}(h)$  et  $\Sigma^{[3]}(h)$ ) que pour tout  $j$  :

- (1)  $|\nabla \mathfrak{X}_j^{[1]}| \leq C_1$ ,
- (2)  $|\nabla \mathfrak{X}_j^{[2]}| \leq C_2 h^{-d_3}$ ,
- (3)  $|\nabla \mathfrak{X}_j^{[3]}| \leq C_3 h^{-d_3}$ .

La formule de localisation (voir l'Annexe B.2) permet d'obtenir :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{[1]}u) + \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{[2]}u) + \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{[3]}u) - h^2(C_1^2 + C_2^2 h^{-2d_3} + C_3^2 h^{-2d_3})\|u\|^2.$$

qu'on réécrit :

$$(7.1) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{[1]}u) + \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{[2]}u) + \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{[3]}u) - C_{\text{loc}}h^{2-2d_3}\|u\|^2.$$

On note  $u_k = \mathfrak{X}_j^{[k]}u$ ,  $k = 1, 2, 3$  et on traite séparément chacun d'eux.

### 7.1.5. Minoration de la forme quadratique sur les sous-domaines.

**Lemme 7.9** (Minoration de la forme quadratique sur  $\Sigma^{[1]}$ ). *Il existe une constante  $c_1$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_1) \geq c_1h^{4/3}\|u_1\|^2.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat est une conséquence directe du théorème 3.3 de minoration de la plus petite valeur propre. On l'obtient en dégradant la constant  $L_0^{\mathbf{B}}$  en prenant une constante  $c_1$  non optimale vérifiant  $c_1 < L_0^{\mathbf{B}}$  pour absorber le terme de reste.  $\square$

**Lemme 7.10** (Minoration de la forme quadratique sur  $\Sigma^{[2]}$ ). *On a :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_2) \geq C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2}\|u_2\|^2.$$

DÉMONSTRATION. On introduit une deuxième partition de l'unité avec des boules  $\mathcal{B}(x_j, h^\rho)$  et des fonctions de troncature associées  $\chi_j^h$  :

$$(7.2) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_2) \geq \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\chi_j^h u_2) - C_{2,\text{loc}}h^{2-2\rho}\|u_2\|^2,$$

où  $C_{2,\text{loc}}$  ne dépend pas de  $h$ .

Pour chaque  $j$  tel que  $x_j \in \Sigma^{[2]}(h)$ , le lemme 3.8 de minoration locale de la forme quadratique au cas où  $\ell = 3$  (voir le tableau 3.1.1 de la partie I) qui donne :

$$(7.3) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\chi_j^h u_2) \geq \left( \frac{1}{2}M_0 \inf_{x_j \in \Sigma^{[2]}(h)} |\nabla \mathbf{B}(x_j)|^{2/3} h^{4/3} - 2Ch^{6\rho} \right) \|\chi_j^h u_2\|^2.$$

Dans  $\Sigma^{[2]}(h)$ , le lemme 7.7 de minoration uniforme donne qu'on a :

$$|\nabla \mathbf{B}(x_j)| \geq C(\mathbf{B})R_2 h^{d_2}.$$

On peut ainsi déduire de (7.3) l'inégalité suivante :

$$(7.4) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\chi_j^h u_2) \geq \left( \frac{1}{2}M_0 C(\mathbf{B})^{2/3} R_2^{2/3} h^{4/3+2d_2/3} - 2Ch^{6\rho} \right) \|\chi_j^h u_2\|^2.$$

On choisit  $d_2$  et  $\rho$  tels que :

$$\frac{4}{3} + \frac{2d_2}{3} = 6\rho = \frac{3}{2}, \quad \text{soit} \quad d_2 = \rho = \frac{1}{4}.$$

L'équation (7.4) devient :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\chi_j^h u_2) \geq h^{3/2} \left( C'(\mathbf{B})R_2^{2/3} - 2C \right) \|\chi_j^h u_2\|^2.$$

On trouve alors avec (7.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_2) &\geq h^{3/2} \left( C'(\mathbf{B})R_2^{2/3} - 2C \right) \|u_2\|^2 - C_{2,\text{loc}}h^{2-2\rho}\|u_2\|^2 \\ &\geq h^{3/2} \left( C'(\mathbf{B})R_2^{2/3} - 2C - C_{2,\text{loc}} \right) \|u_2\|^2. \end{aligned}$$

On choisit  $R_2$  assez grand de sorte que :

$$(7.5) \quad C'(\mathbf{B})R_2^{2/3} - 2C - C_{2,\text{loc}} > C_0^{\mathbf{B}}.$$

□

**Notation 7.11.** On fixe un  $R_2$  vérifiant (7.5) et on note :

$$C_R^{\mathbf{B}} = C'(\mathbf{B})R_2^{2/3} - 2C - C_{2,\text{loc}}.$$

**Lemme 7.12** (Minoration de la forme quadratique sur  $\Sigma^{[3]}$ ). *Il existe une constante strictement positive  $C$  telle qu'on ait :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_3) \geq \left( C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2} - (C_0^{\mathbf{B}} + C)h^{3/4+4d_3} \right) \|u_3\|^2.$$

DÉMONSTRATION. On estime directement  $u_3$  sans nouvelle partition. La connaissance du bas du spectre de l'opérateur modèle  $\mathcal{X}_\varepsilon$  (voir la section 2.5) donne qu'il existe une constante  $C$  telle qu'on ait le résultat suivant (après le scaling  $\sigma = sh^{-1/4}$ ,  $\tau = th^{-1/4}$ ) :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_3) \geq \left( (1 - \eta)C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2} - \eta^{-1}Ch^{8d_3} \right) \|u_3\|^2.$$

On prend  $\eta = h^p$  avec  $p > 0$ , ce qui donne :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u_3) \geq \left( C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2} - C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2+p} - Ch^{8d_3-p} \right) \|u_3\|^2.$$

On égalise les ordres des termes de reste pour trouver  $p = 4d_3 - \frac{3}{4}$ . □

### 7.1.6. Preuve du théorème 7.1.

DÉMONSTRATION. On commence par choisir les paramètres de manière à optimiser les termes de reste. Pour trouver  $d_3$ , on égalise l'ordre du reste avec celui du reste de la formule de localisation dans (7.1) (voir aussi le lemme 3.5) :

$$2 - 2d_3 = \frac{3}{4} + 4d_3 \quad \text{d'où} \quad d_3 = \frac{5}{24}.$$

Cette valeur de  $d_3$  est bien plus petite que  $d_2 = \frac{1}{4}$  (on note qu'on trouve alors  $p = \frac{1}{12}$ ).

On reprend enfin l'identité (7.1) donnée via la partition de l'unité et la formule de localisation ainsi que les lemmes (7.9), (7.10) et (7.12) :

$$(7.6) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq c_1h^{4/3}\|u_1\|^2 + C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2}\|u_2\|^2 \\ + \left( C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2} - (C_0^{\mathbf{B}} + C)h^{3/4+4d_3} \right) \|u_3\|^2 - C_{\text{loc}}h^{2-2d_3}\|u\|^2.$$

Utilisant que  $\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2 = \|u\|^2$  et que  $c_1h^{4/3}$  est plus grand que  $C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2}$  pour  $h$  assez petit, on obtient

$$(7.7) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2}\|u\|^2 - (C_0^{\mathbf{B}} + C)h^{3/4+4d_3}\|u_3\|^2 - C_{\text{loc}}h^{2-2d_3}\|u\|^2 \\ \geq C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2}\|u\|^2 - C'h^{3/4+4d_3}\|u\|^2 - C_{\text{loc}}h^{2-2d_3}\|u\|^2 \\ \geq C_0^{\mathbf{B}}h^{3/2}\|u\|^2 - Ch^{3/2+1/12}\|u\|^2.$$

La dernière inégalité s'obtient avec la valeur de  $d_3$  précédemment choisie via (7.1.6). □

## 7.2. Majoration

### 7.2.1. Énoncé du résultat.

**Théorème 7.13** (Majoration de la plus petite valeur propre). *Il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$\lambda_1(h) \leq C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} + Ch^{7/4},$$

où  $C_0^{\mathbf{B}}$  est défini comme dans le théorème 7.1.

Ce théorème résultera de la proposition 7.18. La preuve est analogue à celle présentée dans la sous-section 3.2.2.

### 7.2.2. Construction d'un quasimode.

**Notation 7.14.** Dans cette sous-section, pour  $\Xi > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , on considère l'expression suivante du potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}_{\varepsilon, \Xi} = \left( \Xi \left( \varepsilon^2 s^2 t - \frac{t^3}{3} \right), 0 \right).$$

**Notation 7.15.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on désigne par  $\Psi_1^{\mathcal{X}_\varepsilon}$  une fonction propre associée à la plus petite valeur propre  $\varkappa_1(\varepsilon)$  de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  (voir la section 2.5).

Le lemme suivant résulte d'un simple calcul.

**Lemme 7.16.** *La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :*

$$(7.8) \quad \Psi_{1, h, \varepsilon, \Xi}(s, t) = \Xi^{1/4} h^{-1/4} \Psi_1^{\mathcal{X}_\varepsilon}(\Xi^{1/4} h^{-1/4} s, \Xi^{1/4} h^{-1/4} t),$$

*est une fonction propre (normalisée si  $\Psi_1^{\mathcal{X}_\varepsilon}(\sigma, \tau)$  l'est pour la norme  $\mathbf{L}_{\sigma, \tau}^2(\mathbb{R}^2)$ ), associée à la valeur propre  $\Xi^{2/3} \varkappa_1(\varepsilon) h^{3/2}$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h, \mathbf{A}_{\varepsilon, \Xi}, \mathbb{R}^2}$*

Soit  $x_0 \in \Sigma$ . On peut supposer que ses coordonnées sont  $(0, 0)$  dans le système  $(s, t)$ . On note  $\Omega_{x_0}$  un voisinage du point  $x_0$  dans  $\Omega$ .

**Notation 7.17.** Pour ce  $x_0$  fixé dans  $\Sigma$ , on note :

$$\mathbf{A}_{x_0}(s, t) = \mathbf{A}_{\varepsilon(x_0), \Xi(x_0)}.$$

Pour tout  $R_{x_0} > 0$ , on définit  $\chi_{R_{x_0}}$  une fonction troncature sur  $\Omega$ , vérifiant la condition suivante :

$$\text{supp}(\chi_{R_{x_0}}) \subset \mathcal{B}(x_0, 2R_{x_0}) \subset \Omega_{x_0}, \quad 0 \leq \chi_{R_{x_0}} \leq 1, \quad \chi_{R_{x_0}} \equiv 1 \text{ sur } \mathcal{B}(x_0, R_{x_0}).$$

En reprenant (7.8), on note enfin  $\tilde{\Psi}_{1, h, x_0}$  la fonction définie sur  $\Omega_{x_0}$  par :

$$\tilde{\Psi}_{1, h, x_0} = \left( e^{-i\phi_c/h} \Psi_{1, h, \varepsilon(x_0), \Xi(x_0)} \right) \circ \Phi_c^{-1},$$

où  $\Phi_c$  est défini dans la notation 7.5 pour désigner le choix des coordonnées cartésiennes introduites dans la sous-section 7.1.2 et où  $\phi_c$  est défini dans la notation 7.6.

**Proposition 7.18.** *La fonction suivante définie sur  $\Omega$  par :*

$$\Psi_{1,h,x_0}(\mathbf{x}) = \chi_{R_{x_0}}(\mathbf{x}) \tilde{\Psi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x}),$$

(voir (7.8) et la notation 7.17) est dans le domaine de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . De plus, il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :

$$\|(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - h^{3/2}\Xi(x_0)^{1/2}\mathcal{Z}_1(\varepsilon(x_0)))\Psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{7/4}\|\Psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On note qu'on a une localisation isotrope en  $h^{1/4}$  pour ce choix de quasimode.

On utilisera encore dans ce qui suit les notations simplifiées suivantes (analogue à celles introduite en introduites dans 3.26) :

**Notation 7.19.** On utilisera encore plus simplement :  $\Omega_0 = \Omega_{x_0}$ ,  $\Xi_0 = \Xi(x_0)$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0)$ ,  $\chi_{R_{x_0}} = \chi_0$  et  $R_0 = R_{x_0}$ .

**7.2.3. Lemmes techniques.** Les lemmes suivants servent à contrôler les normes  $L^2$  des différents termes de reste qui vont apparaître dans la preuve de la proposition 7.18.

**Lemme 7.20.** *Soit  $K$  un sous ensemble compact de  $\Omega_{x_0}$  ne contenant pas  $x_0$ . Il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$\left( \int_K |\nabla \tilde{\Psi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x})|^2 + |\tilde{\Psi}_{1,h,x_0}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq Ce^{-\alpha h^{-1/4}}.$$

DÉMONSTRATION. On reprend l'expression de la fonction  $\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}$  introduite en (7.8). On a :

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Phi_c^{-1}(K)} |\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2} &= \left( \int_{\Phi_c^{-1}(K)} \left| \Xi_0^{1/4} h^{-1/4} \Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}} \left( \Xi_0^{1/4} h^{-1/4} s, \Xi_0^{1/4} h^{-1/4} t \right) \right|^2 \, dsdt \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \int_{h^{-1/4}\Phi_c^{-1}(K)} \left| \Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}(\sigma,\tau) \right|^2 \, d\sigma d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il découle immédiatement de la proposition 2.22 qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}|^2 \exp\left(2\alpha\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right) \, d\sigma d\tau < +\infty.$$

Par difféomorphisme, l'ensemble  $\Phi_c^{-1}(K)$  ne contenant pas l'origine, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\sqrt{s^2 + t^2} > \delta$  sur  $K$ . En utilisant l'inégalité précédente, a fortiori valable sur  $K$ , on a :

$$\int_{h^{-1/4}\Phi_c^{-1}(K)} \left| \Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}(\sigma,\tau) \right|^2 \, d\sigma d\tau \leq \exp(-\alpha h^{1/4}) \int_{h^{-1/4}\Phi_c^{-1}(K)} |\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}|^2 \exp\left(2\alpha\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right) \, d\sigma d\tau.$$

d'où :

$$\left( \int_{\Phi_c^{-1}(K)} |\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2} < Ce^{-\alpha h^{-1/4}}.$$

On prouve une inégalité identique pour la fonction  $\nabla \Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}$ . On a donc finalement montré qu'il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$\left( \int_{\Phi_c^{-1}(K)} |\nabla \Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}(s,t)|^2 + |\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}(s,t)|^2 \, dsdt \right)^{1/2} \leq Ce^{-\alpha h^{-1/4}}.$$

On remarque que :

$$\nabla (e^{i\phi_c}\Psi) = ie^{i\phi_c}\Psi\nabla\phi_c + e^{i\phi_c}\nabla\Psi.$$



En se servant de la régularité de  $\Phi_c$  sur le compact  $K$  et du fait que les normes  $\|\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  et  $\|\nabla\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  sont finies, on en déduit finalement le résultat du théorème par changement de variable.  $\square$

**Lemme 7.21.** *On a qu'il existe  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que :*

$$\left| \|\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \|\Psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right| \leq C e^{-\alpha h^{1/4}}.$$

DÉMONSTRATION. On peut tout d'abord facilement voir que :

$$\|\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|e^{-i\phi_c/h}\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Comme  $\Psi_{1,h,x_0} = \chi_0 \tilde{\Psi}_{1,h,x_0}$ , le reste se déduit du lemme 7.20 précédent en introduisant la fonction troncature  $\chi_0$  pour que le changement de variable soit licite.  $\square$

**Lemme 7.22.** *Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_N > 0$  telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} t^n \left( |hD_t\Psi|^2 + |(hD_s + \tilde{A}_1)\Psi|^2 \right) dsdt \leq Ch^{n/4+3/2} \|\Psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $\Psi = e^{-i\phi_c/h}\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est immédiate en utilisant le lemme 7.16 et le lemme 7.20 (ainsi que le lemme 7.21 pour revenir à la norme  $\|\Psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}$ ).  $\square$

**Lemme 7.23.** *Pour tout entier  $k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^2} |s^m t^n \partial_s^k \partial_t^\ell \Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}(s, t)|^2 dsdt \right)^{1/2} \leq Ch^{(m+n-k-\ell)/4} \|\Psi_{1,h,\theta_0,\Upsilon_0}\|_{L^2}.$$

PREUVE DU LEMME 7.23. On reprend l'expression de la fonction  $\Psi_{1,h,\varepsilon_0,\Xi_0}$  introduite en (7.8). Comme dans la preuve précédente, le résultat s'obtient par dérivation et changement de variable en utilisant la décroissance exponentielle de la fonction  $\Psi_1^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}$  (voir le lemme 2.18).  $\square$

**7.2.4. Preuve de la proposition 7.18.** On considère désormais l'action de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur la fonction test  $\Psi_{1,h,x_0}$  :

$$(7.9) \quad \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\Psi_{1,h,x_0} = \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\chi_0\tilde{\Psi}_{1,h,x_0} = \underbrace{[\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}, \chi_0]\tilde{\Psi}_{1,h,x_0}}_{\text{Terme 1}} + \underbrace{\chi_0\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}\tilde{\Psi}_{1,h,x_0}}_{\text{Terme 2}}.$$

On commence par donner une estimation du premier terme qui apparaît dans (7.9). Il faut pour cela contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus du commutateur  $[\mathcal{P}, \chi]$  dont l'expression est donnée par :

$$[\mathcal{P}, \chi] = -2h^2(\nabla\chi) \cdot \nabla - h^2\Delta\chi - 2ih\mathbf{A} \cdot \nabla\chi.$$

Le support des fonctions troncatures  $\nabla\chi_0$  et  $\Delta\chi_0$  ne contenant pas l'origine, on peut appliquer le lemme 7.20 qui donne finalement qu'il existe  $\alpha > 0$ ,  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$(7.10) \quad \|[\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}, \chi_0]\tilde{\Psi}_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-\alpha h^{-1/4}}.$$

On donne maintenant une estimation du deuxième terme qui apparaît dans (7.9). Il faut pour cela étudier l'action de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur la fonction test  $\tilde{\Psi}_{1,h,x_0}$  sur le support de  $\chi_0$ .

**Développement de Taylor du potentiel vecteur**

On reprend l'expression (locale) de l'opérateur détaillée dans la sous-section 7.4. On note plus communément  $(s, t)$  les variables  $(x_1, x_2)$ . On va traiter l'action de l'opérateur  $h^2 D_t^2 + (hD_s + \tilde{A}_1)^2$  sur  $\Psi$ . On fait apparaître l'opérateur modèle dominant en effectuant un développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique. Comme  $\tilde{\mathbf{B}}(0, 0) = |\nabla \tilde{\mathbf{B}}| = 0$ , son développement est le suivant :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Hess} \tilde{\mathbf{B}}(0, 0) \cdot ((s, t), (s, t))}_{\underline{A}_{1,j}^{(5)}(s,t)} + r_j^{(5)}(s, t),$$

où le terme de reste  $r_j^{(5)}$  vérifie :

$$|r_j^{(5)}(s, t)| \leq C|(s, t)|^4$$

sur le support de la troncature  $\tilde{\chi}_0 = \chi_0 \circ \Phi_c$ . Il reste désormais à contrôler la norme  $L^2$  des termes de reste issus de ce développement de Taylor. On note plus simplement  $\underline{A}_{1,j}^{(5)} = A_0$  et  $r_j^{(5)} = r_0$ . En développant, on a :

$$(hD_s + \tilde{A}_1)^2 = (hD_s + A_0)^2 + 2hr_0D_s + h(D_s r_0) + 2A_0 r_0 + (r_0)^2.$$

Par suite avec le lemme 7.23 on obtient les estimées suivantes pour la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  :

$$(7.11) \quad \|(2hr_0D_s)\Psi\| \leq Ch^{7/4}\|\Psi\|, \quad \|(h(D_s r_0))\Psi\| \leq Ch^{7/4}\|\Psi\|,$$

$$(7.12) \quad \|(2A_0 r_0)\Psi\| \leq Ch^{7/4}\|\Psi\|, \quad \|(r_0)^2\Psi\| \leq Ch^2\|\Psi\|.$$

Par ailleurs, l'action de l'opérateur dominant  $h^2 D_t^2 + (hD_s + A_0)^2$  sur  $\Psi$  donne :

$$(h^2 D_t^2 + (hD_s + A_0)^2)\Psi = h^{3/2}\Xi_0^{1/2}\mathcal{K}_1(\varepsilon_0)\Psi.$$

En reprenant alors l'identité (7.9) ainsi que les points (7.10), (7.11) et (7.12), on obtient finalement (en utilisant également le lemme 7.21) qu'il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :

$$\left\| \left( \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - h^{3/2}\Xi_0^{1/2}\mathcal{K}_1(\varepsilon_0) \right) \Psi_{1,h,x_0} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{7/4}\|\Psi_{1,h,x_0}\|_{L^2(\Omega)}.$$



## Localisation des fonctions propres et estimées d'Agmon

Ce chapitre est le pendant du chapitre 4 dans le cas d'une annulation quadratique à l'intérieur du domaine.

**Notation 8.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $\Psi_{n,h}$  une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_n(h)$ .

### 8.1. Énoncé du théorème de localisation

Le résultat suivant est crucial pour obtenir le résultat de localisation.

**Lemme 8.2.** *Il existe  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$  et tout  $0 < h < h_0$  :*

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) \geq \int_{\Omega} (\mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\Sigma}(\mathbf{x}) - Ch^{3/2+1/12}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

avec :

$$\mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\Sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} C_R^{\mathbf{B}} h^{3/2}, & d(\mathbf{x}, \Sigma) > R_2 h^{1/4} \\ C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2}, & d(\mathbf{x}, \Sigma) \leq R_2 h^{1/4} \end{cases},$$

où on rappelle que  $C_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans le théorème 7.1 et  $C_R^{\mathbf{B}}$  dans la notation 7.11.

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle directement de la preuve de la minoration. □

On énonce désormais le théorème de localisation qui découle du raffinement précédent induit par le potentiel effectif  $\mathcal{I}_{\mathbf{B}}^{\Sigma}$ .

**Théorème 8.3.** *Soit  $L > 0$  et  $\lambda_n(h)$  une valeur propre de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  vérifiant  $\lambda_n(h) \leq Lh^{3/2}$ . Il existe  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$ , et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  on a :*

- (1)  $\int_{\Omega} e^{2\alpha h^{-1/4}d(\mathbf{x},\Sigma)} |\Psi_{n,h}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq C \|\Psi_{n,h}\|^2,$
- (2)  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega} \left( e^{\alpha h^{-1/4}d(\cdot,\Sigma)} \Psi_{n,h} \right) \leq Ch^{3/2} \|\Psi_{n,h}\|^2.$

Il en découle directement le corollaire suivant :

**Corollaire 8.4.** *Soit  $L > 0$  et  $\lambda_n(h)$  une valeur propre de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  vérifiant  $\lambda_n(h) \leq Lh^{3/2}$ . Il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $N$ , il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  on a :*

- (1)  $\left( \int_{\Omega} (2\alpha d(\mathbf{x}, \Sigma))^{2N} |\Psi_{n,h}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq C_N h^{N/4} \|\Psi_{n,h}\|,$
- (2)  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega} \left( (\alpha d(\mathbf{x}, \Sigma))^N \Psi_{n,h} \right) \leq C_N h^{3/2+2N/4} \|\Psi_{n,h}\|^2.$

## 8.2. Preuve du résultat de localisation

On démontre dans cette section le théorème 8.3. On reprend la notation 7.11. On considère un couple d'éléments propres  $(\lambda_n(h), \Psi_{n,h})$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur  $\Omega$ . Pour toute fonction scalaire  $\varphi$  lipschitzienne définie sur  $\Omega$ , on a  $e^\varphi \Psi_{n,h} \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega})$ . Avec le lemme (4.2) on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(e^\varphi \Psi_{n,h}) = \lambda_n(h) \|e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\nabla \varphi\| e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2.$$

Avec la formule de localisation (voir proposition B.4) on a :

$$\sum_{k \in \{1,2,3\}} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} e^\varphi \Psi_{n,h}) = \lambda_n(h) \|\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} |\nabla \varphi| e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\nabla \mathfrak{X}_j^{h\rho_k} |e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2.$$

On considère la fonction suivante  $\varphi$  définie par :

$$(8.1) \quad \varphi(\mathbf{x}) = \alpha d(\mathbf{x}, \Sigma) h^{-1/4}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Le calcul de la norme du gradient  $\nabla \varphi$  donne :

$$(8.2) \quad |\nabla \varphi(\mathbf{x})|^2 = \alpha^2 h^{-1/2}.$$

On commence par donner un contrôle du terme de reste. En reprenant la preuve de la minoration présentée dans la section 7.1

$$(8.3) \quad \sum_{k \in \{1,2,3\}} |\nabla \mathfrak{X}_j^{h\rho_k}|^2 \leq Ch^{-5/15}.$$

Avec les points (8.3) et (8.2) et la propriété (B.4) de la partition de l'unité, on a :

$$\sum_{k \in \{1,2,3\}} h^2 \|\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} |\nabla \varphi| e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 + h^2 \|\nabla \mathfrak{X}_j^{h\rho_k} |e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 \leq (\alpha^2 + Ch^{1/12}) h^{3/2} \|e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2.$$

La preuve du théorème 8.3 se fait de la même manière que la preuve des théorèmes 4.4 et 4.8.

On rappelle que (voir la notation 7.11) :

$$C_R^{\mathbf{B}} > C_0^{\mathbf{B}}.$$

$$M^\Sigma(h) = C_R^{\mathbf{B}} h^{3/2}, \quad L^\Sigma(h) = L h^{3/2}, \quad m^\Sigma(h) = C_0^{\mathbf{B}} h^{3/2} + o(h^{3/2}),$$

où l'on rappelle que  $C_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans le théorème 7.3. On distingue deux ensembles. On note que la convention utilisée pour la numérotation est analogue aux précédentes, on commence loin de la ligne d'annulation pour s'en rapprocher progressivement.

$$Z_1^\Sigma(h) = \{j, d(\mathbf{x}_j, \mathcal{Z}^\Sigma) > R_2 h^{1/4}\} \text{ et } Z_2^\Sigma(h) = \{j, d(\mathbf{x}_j, \mathcal{Z}^\Sigma) \leq R_2 h^{1/4}\}.$$

On a une majoration de  $\lambda_n(h)$  qui se situe sous un certain seuil :

$$(8.4) \quad \lambda_n(h) \leq L^\Sigma(h).$$

Le lemme 8.2 donne une minoration suivant chacun des sous ensembles :

$$(8.5) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} e^\varphi \Psi_{n,h}) \geq M^\Sigma(h) \|\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2, \quad \forall j \in Z_1^\Sigma(h).$$

$$(8.6) \quad \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} e^\varphi \Psi_{n,h}) \geq m^\Sigma(h) \|\mathfrak{X}_j^{h\rho_k} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2, \quad \forall j \in Z_2^\Sigma(h).$$

En reprenant (8.4), (8.5), (8.6), on a :

$$\sum_{\substack{j \in Z_1^\Sigma(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} (M^\Sigma(h) - L^\Sigma(h) - (\alpha^2 + Ch^{1/12}) h^{3/2}) \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 \leq \\ (L^\Sigma(h) - m^\Sigma(h) + (\alpha^2 + Ch^{1/12}) h^{3/2}) \sum_{\substack{j \in Z_2^\Sigma(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2.$$

On donne désormais les expressions de  $M^\Sigma(h) - L^\Sigma(h)$  et  $L^\Sigma(h) - m^\Sigma(h)$ .

Quitte à augmenter la valeur de  $R_2$  en fonction du seuil  $L$  considéré (voir (7.5) et la notation 7.11), on a :

$$M^\Sigma(h) - L^\Sigma(h) = \underbrace{(C_R^{\mathbf{B}} - L)}_{>0} h^{3/2}, \text{ et } L^\Sigma(h) - m^\Sigma(h) \geq \underbrace{(L - C_0^{\mathbf{B}})}_{\geq 0} h^{3/2} + o(h^{3/2}),$$

où on rappelle que  $C_0^{\mathbf{B}}$  est défini dans le théorème 7.1. On a donc pour  $\alpha$  assez petit, qu'il existe  $c > 0$  et  $C \geq 0$  tels que pour  $h < h_0$  :

$$(8.7) \quad ch^{3/2} \sum_{\substack{j \in Z_1^\Sigma(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 \leq Ch^{3/2} \sum_{\substack{j \in Z_2^\Sigma(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} \Psi_{n,h}\|^2.$$

Par choix de  $\varphi$  (voir (8.1)) adapté à l'échelle (spatiale) en  $h$  provenant de l'étude de la minoration, on a (par compacité de  $\Omega$ ) qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$(8.8) \quad \sum_{\substack{j \in Z_2^\Sigma(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 \leq C \sum_{\substack{j \in Z_2^\Sigma(h) \\ k \in \{1,2,3\}}} \|\mathfrak{X}_j^{h^{\rho_k}} \Psi_{n,h}\|^2.$$

Pour  $h < h_0$  on a finalement avec (8.7), (8.8) et la propriété (3.1) de la partition de l'unité en section 3.1.2, l'inégalité asymptotique suivante :

$$ch^{3/2} \|e^\varphi \Psi_{n,h}\|^2 \leq Ch^{3/2} \|\Psi_{n,h}\|^2.$$

où  $c > 0$  et  $C \geq 0$ . Le point 2 du théorème 8.3 se déduit immédiatement de ce qui vient d'être établi.



## Développement asymptotique complet des premières valeurs propres

Comme dans le chapitre 5, on donne un développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ . On obtient en particulier que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  correspond au bas du spectre de l'opérateur "somme directe"  $\bigoplus_{x \in \Sigma} h^{3/2} \Xi(x)^{1/2} \mathcal{X}_\varepsilon(x)$  modulo en terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{7/4})$ .

### 9.1. Problème localisé en un point double à l'intérieur

Comme dans la section 5.1, on commence par l'étude d'un opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}$  localisé sur un voisinage  $\Omega_{x_0}$  d'un point  $x_0 \in \Sigma$  (suffisamment petit de sorte que le passage en coordonnées curvilignes soit licite) en imposant une condition de Dirichlet sur  $\partial\mathcal{B}(x_0, R) \setminus \partial\Omega$  où  $\mathcal{B}(x_0, R) \subsetneq \Omega_{x_0}$ .

**Notation 9.1.** Soit  $x_j^{(5)} = x_0$  appartenant à  $\Sigma$ . On note  $\Omega_{x_0} = \mathcal{B}(x_0, R_{x_0}) \cap \Omega$  avec  $R_0 > 0$  suffisamment petit de sorte que  $\Omega_{x_0}$  soit un voisinage sur lequel le difféomorphisme  $\Phi_c$  (voir section B.3) est bien défini avec  $\overline{\Omega}_{x_0} \cap \Sigma = \{x_0\}$ .

On garde les mêmes notations que celle introduites en 5.2.

**Notation 9.2.** On note  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}^{\text{loc}}$  la réalisation autoadjointe sur  $\Omega_{x_0}$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  avec condition de Dirichlet sur  $\partial(\mathcal{B}(x_0, R_{x_0}))$ .

Pour tout  $n$ , on note respectivement :

$$(\lambda_{n,x_0}(h), \Psi_{n,h,x_0}) \quad \text{et} \quad (\lambda_{n,x_0}^{\text{loc}}(h), \Psi_{n,h,x_0}^{\text{loc}})$$

des paires d'éléments propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}^{\text{loc}}$ .

Pour finir on désigne par  $\mathcal{P}_{x_0}^{\text{mod}}$  l'opérateur suivant sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{P}_{x_0}^{\text{mod}} = \Xi(x_0)^{1/2} h^{3/2} \mathcal{X}_{\varepsilon(x_0)}.$$

Ce chapitre a en particulier pour but de montrer que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_0}}^{\text{loc}}$  coïncide avec le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{x_0}^{\text{mod}}$  sur  $\mathbb{R}^2$ , modulo un terme de reste en  $\mathcal{O}(h^{7/4})$ . Comme dans la notation 1.12 de l'introduction, on note :

**Notation 9.3.** Pour tout  $x_0 \in \Sigma$  et tout  $n \geq 1$  on note :

$$\Lambda_n^{x_0} = \Xi(x_0)^{1/2} \mathcal{X}_n(\varepsilon(x_0)),$$

et on note l'ensemble ordonné suivant :

$$\{\Lambda_n^{\mathbf{B}}, n \in \mathbb{N}^*\} = \coprod_{x_0 \in \Sigma} \{\Lambda_n^{x_0}, n \in \mathbb{N}^*\},$$

où on rappelle que  $\coprod$  désigne une union disjointe.

On utilisera par la suite les mêmes notations simplifiées que celles introduites en 7.19.



### 9.1.1. Minoration.

**Proposition 9.4.** *Soit  $x_0 \in \Sigma$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on ait :*

$$\lambda_{n,x_0}^{\text{loc}}(h) \geq \Lambda_n^{x_0} h^{3/2} - Ch^{7/4}.$$

DÉMONSTRATION. Par inclusion des domaines, on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0} \leq \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}}.$$

Les résultats de minoration valables pour  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$  le sont donc également (a fortiori) pour  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}}$ .

Pour prouver la proposition 9.4, il suffit de montrer que :

$$\lambda_{n,x_0}(h) \geq h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \mathcal{Q}_{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}(\Psi) - Ch^{7/4},$$

pour  $\Psi$  dans un certain espace vectoriel de dimension  $n$ , et conclure avec le principe du Min-Max (théorème A.9 en Annexe).

On considère une base orthonormée  $\Psi_{1,h}, \dots, \Psi_{n,h}$  de fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$  et on introduit l'espace vectoriel de dimension  $n$  suivant :

$$E_{n,x_0}(h) = \text{Vect} \{ \Psi_{k,h,x_0}, 1 \leq k \leq n \}.$$

Soit  $\Psi = \sum_j \alpha_j \Psi_{j,h} \in E_{n,x_0}(h)$ . On a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) \leq \lambda_{n,x_0}(h) \|\Psi\|^2.$$

En effet, en notant  $\mathcal{B}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$  la forme bilinéaire associée à  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$ , on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) = \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0} \left( \sum_j \alpha_j \Psi_{j,h} \right) = \sum_j \alpha_j^2 \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi_{j,h}) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \mathcal{B}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi_{i,h}, \Psi_{j,h}).$$

La famille étant orthogonale pour le produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$ , elle l'est également au sens de la forme quadratique car :

$$\mathcal{B}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi_{i,h}, \Psi_{j,h}) = \langle \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0} \Psi_{i,h,x_0}, \Psi_{j,h,x_0} \rangle = \lambda_{i,x_0}(h) \langle \Psi_{i,h,x_0}, \Psi_{j,h,x_0} \rangle = \lambda_{i,x_0}(h) \delta_{ij}.$$

Comme  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi_{j,h,x_0}) = \lambda_{j,x_0}(h) \|\Psi_{j,h,x_0}\|^2$  et que la suite des valeurs propres  $(\lambda_{n,x_0}(h))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante, on a avec le théorème de Pythagore :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) \leq \lambda_{n,x_0}(h) \sum_j \alpha_j^2 \|\Psi_{j,h,x_0}\|^2 = \lambda_{n,x_0}(h) \|\Psi\|^2.$$

On va minorer  $\lambda_{n,x_0}(h)$  en minorant  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi)$  et montrer que :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) \geq h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \mathcal{Q}_{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}(\Psi) - Ch^{7/4}.$$

Sur  $\Omega_0$ , on peut passer dans les coordonnées  $(s, t)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que les coordonnées curvilignes du point  $x_0$  sont  $(0, 0)$ . Dans ces coordonnées, la réécriture de la forme quadratique est la suivante :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( (1 - tk(s))^{-2} |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\Psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\Psi}|^2 \right) (1 - tk(s)) \, ds dt.$$

Par régularité et compacité du bord, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|(1 - tk(s))| \geq 1 - C|t| \quad \text{et} \quad (1 - tk(s))^{-1} \geq 1 - C|t|.$$

On obtient (avec la notation simplifiée  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_{1,j}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) &\geq \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\Psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\Psi}|^2 \right) dsdt \\ &\quad - \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} Ct \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\Psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\Psi}|^2 \right) dsdt. \end{aligned}$$

Les estimées d'Agmon sont un élément crucial de la preuve. Le théorème 4.8 et le corollaire 4.9 restent vrais pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$ . Le corollaire 4.9 est indépendant du système de coordonnées et reste valable ici pour le potentiel vecteur magnétique donné par  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_1, 0)$  et pour n'importe quel  $\Psi \in E_{n,\mathbf{x}_0}(h)$ . Il en découle un résultat analogue au lemme 3.29 qui donne alors l'estimée suivante :

$$\int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} Ct \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\Psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\Psi}|^2 \right) dsdt \leq Ch^{7/4}.$$

Il reste désormais à traiter le terme  $\int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( |(hD_s + \tilde{A}_1)\tilde{\Psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\Psi}|^2 \right) dsdt$ . On effectue un développement de Taylor du potentiel vecteur magnétique :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \text{Hess} \tilde{\mathbf{B}}(0, 0) \cdot ((s, t), (s, t))}_{\underline{A}_{1,j}^{(5)}(s, t)} + r_j^{(5)}(s, t).$$

Le terme de reste  $r_j^{(5)}$  vérifie  $|r_j^{(5)}(s, t)| \leq C|(s, t)|^4$ . En notant plus simplement  $\underline{A}_{1,j}^{(5)} = A_0$  et  $r_j^{(5)} = r_0$  on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\psi) &\geq \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} \left( |(hD_s + A_0)\tilde{\Psi}|^2 + |(hD_t)\tilde{\Psi}|^2 \right) dsdt \\ &\quad - \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} 2 \left( |(hD_s + A_0)\tilde{\Psi}| |r_0\tilde{\Psi}| \right) dsdt - \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} |r_0\tilde{\Psi}|^2 dsdt. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le corollaire 4.9 (qui ne dépend pas du système de coordonnées et appliqué ici pour le potentiel vecteur magnétique donné par  $\tilde{\mathbf{A}} = (A_0, 0)$ ) on a :

$$\int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} 2 \left( |(hD_s + A_0)\tilde{\Psi}| |r_0\tilde{\Psi}| \right) dsdt \leq Ch^{7/4} \quad \text{et} \quad \int_{\Phi^{-1}(\Omega_0)} |r_0\tilde{\Psi}|^2 dsdt \leq Ch^2.$$

Les expressions de  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  et de  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}$  étant formellement les mêmes, on peut reprendre le changement d'échelle de la section 2.4 qui donne finalement que :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}(\Psi) \geq h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \mathcal{Q}_{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}} - Ch^{7/4}.$$

Une conséquence de ce résultat est qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\lambda_{n,\mathbf{x}_0}(h) \geq h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \mathcal{X}_n(\varepsilon_0) - Ch^{7/4}.$$

□

**9.1.2. Quasimodes et majoration.** La stratégie est basée sur le théorème spectral. On va développer l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}}$  (dans les coordonnées curviligne et après changement d'échelle) en puissance de  $h$  et chercher des solutions formelles à l'équation aux valeurs propres. On considère  $x_j^{(5)} = x_0 \in \Sigma$ . On reprend l'expression (locale) de l'opérateur détaillée dans la sous-section 7.4 toujours en notant plus communément  $(s, t)$  les variables  $(x_1, x_2)$ . On peut écrire :

$$\tilde{A}_1(s, t) = \frac{1}{2} \text{Hess} \tilde{\mathbf{B}}(0, 0) \cdot ((s, t), (s, t)) + r_0(s, t),$$

où le terme de reste vérifie  $|r_0(s, t)| \leq C|(s, t)|^4$ . Le changement d'échelle :

$$\tau = h^{-1/4} \Xi_0^{1/4} t, \quad \sigma = h^{-1/4} \Xi_0^{1/4} s,$$

ramène l'étude à celle de l'opérateur suivant :

$$(9.1) \quad h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \mathcal{X}_h,$$

considéré sur  $\mathbb{R}^2$ . On note que cette "approximation" au plan tout entier sera rigoureusement justifiée par l'introduction d'une fonction troncature (voir le point (9.8) à venir).

### Énoncé du résultat

**Proposition 9.5.** Soit  $x_0 \in \Sigma$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a qu'il existe une constante  $C(J) > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$d(\lambda_{n,x_0}^{[J]}(h), \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}})) \leq C(J) h^{3/2+(J+1)/4},$$

avec

$$(9.2) \quad \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h) = h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \sum_{j=0}^J \lambda_{n,x_0,j} h^{j/4} \quad \text{et} \quad \lambda_{n,x_0,0} = \varkappa_n(\varepsilon_0).$$

**Remarque 9.6.** La quantité  $\Lambda_n^{x_0} h^{3/2}$  (voir la notation 9.3) correspond à  $\lambda_{n,x_0}^{[0]}(h)$ .

La preuve de la proposition 9.5 nécessite quelques résultats préliminaires.

### Développement en série formelle

Pour  $x_j^{(5)} = x_0 \in \Sigma$ , la dépendance en  $h$  de l'opérateur  $\mathcal{X}_h$  sur  $\mathbb{R}^2$  défini via (9.1) permet de développer l'opérateur de la manière suivante :

$$(9.3) \quad \mathcal{X}_h \sim \sum_{j \geq 0} \mathcal{X}_j h^{j/4},$$

où l'expression de l'opérateur dominant  $\mathcal{X}_0$  est :

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_{\varepsilon_0}.$$

On peut bien sûr expliciter l'unique expression de l'opérateur  $\mathcal{X}_1$  mais il est suffisant de remarquer qu'il s'agit d'un opérateur différentiel d'ordre au plus 2.

**Remarque 9.7.** Il est clair que pour tout  $j$ , l'ordre des opérateurs différentiels  $\mathcal{X}_j$  (qui peuvent être explicités en écrivant un développement tronqué à un ordre suffisamment élevé) est inférieur ou égal à 2. Pour  $j \geq 2$  les  $\mathcal{X}_j$  sont des polynômes homogènes de degré  $j$ .

On cherche des solutions formelles de la forme :

$$\varkappa \sim \sum_{j \geq 0} \varkappa_j h^{j/4} \quad \text{et} \quad \Psi \sim \sum_{j \geq 0} \Psi_j h^{j/4},$$

de sorte qu'on ait (au sens des séries formelles) :

$$\mathcal{X}\Psi \sim \varkappa\Psi.$$

On résout le système par identification suivant les puissances de  $h$ .

• Termes en  $h^0$ . On résout l'équation :

$$\mathcal{X}_0\Psi_0 = \varkappa_0\Psi_0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,$$

qui donne par définition que  $\varkappa_0$  est dans le spectre de l'opérateur  $\mathcal{X}_{\varepsilon(x_0)}$  et que  $\Psi_0$  est une fonction propre associée. Le choix du  $\varkappa_0$  dans le spectre de l'opérateur détermine de manière unique la valeur des autres coefficients. On peut choisir :

$$(9.4) \quad \varkappa_0 = \varkappa_n(\varepsilon_0).$$

On en déduit que :

$$(9.5) \quad \Psi_0(\sigma, \tau) = \Psi_n^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}(\sigma, \tau).$$

La dépendance en  $x_0$  et  $n$  est donnée dans le théorème final en notant que  $\varkappa_j = \varkappa_{n, x_0, j}$  et  $\Psi_j = \Psi_{n, x_0, j}$ .

• Termes en  $h^{1/4}$ . On résout l'équation :

$$(\mathcal{X}_0 - \varkappa_0)\Psi_1 = (\varkappa_1 - \mathcal{X}_1)\Psi_0 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Avec (9.3), (9.4) et (9.5), on a :

$$(\mathcal{X}_{\varepsilon_0} - \varkappa_n(\varepsilon_0))\Psi_1 = (\varkappa_1 - \mathcal{X}_1)\Psi_n^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}.$$

La condition d'orthogonalité de Fredholm impose que le membre de droite de l'équation précédente appartienne à l'orthogonal du noyau de l'opérateur. Dans ce cas, on a en particulier que  $\langle \Psi_1, \Psi_0 \rangle = 0$ . En prenant le produit scalaire avec  $\Psi_0$  dans l'expression précédente, on est amené à choisir  $\varkappa_1$  :

$$(9.6) \quad \varkappa_1 = \langle \mathcal{X}_1\Psi_0, \Psi_0 \rangle_{\mathbb{R}_+^2}.$$

Une conséquence du théorème 2.18 est que  $\Psi_0$  et  $\mathcal{X}_1\Psi_0$  appartiennent à  $L_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}^2)$  (et même dans  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ). La condition (9.6) permet d'appliquer les résultats de la partie B.4 présentés en Annexe. Ces derniers donnent que  $\Psi_1$  appartient à  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

• Termes d'ordre supérieur :

On procède par récurrence ("méthode de Grushin"). Soit  $J \geq 0$ . On suppose que les réels  $\varkappa_0, \dots, \varkappa_J$  et que les fonctions  $\Psi_0, \dots, \Psi_J$  sont déjà connus. On suppose de plus que les fonctions  $\Psi_0, \dots, \Psi_J$  sont dans  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . L'équation à l'ordre  $J+1$  s'écrit :

$$(\mathcal{X}_0 - \varkappa_0)\Psi_{J+1} = \varkappa_{J+1}\Psi_0 + \sum_{j=2}^J \varkappa_j\Psi_{J+1-j} - \sum_{j=1}^{J+1} \hat{\mathcal{P}}_j\Psi_{J+1-j} - \hat{\mathcal{P}}_1\Psi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,$$

dont les inconnues sont  $\varkappa_{J+1}$  et  $\Psi_{J+1}$ .

On peut choisir  $\varkappa_{J+1}$  de sorte que la condition (B.12) de la proposition B.16 présentée en Annexe soit satisfaite. Comme ce qui précède, il découle des résultats de l'Annexe B.4 que  $\Psi_{J+1}$  appartient à  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Par ailleurs, comme à la fin de la preuve 3.24, on vérifie avec le système d'équations formelles au bord que les conditions de Neumann sont satisfaites par les fonctions  $\Psi_{n,x_0,j}$  de sorte qu'elles appartiennent à l'ensemble  $\text{Dom}(\mathcal{X}_{\varepsilon_0})$ .

L'approche précédente peut se résumer dans le lemme suivant :

**Lemme 9.8.** *Pour tout  $x_0 \in \Sigma$  on a construit par récurrence une suite de nombre et de fonctions telles que pour tout  $J \geq 0$  :*

$$\sum_{j=0}^J \mathcal{X}_{J-j} \Psi_{n,x_0,j} = \sum_{j=0}^J \varkappa_{n,x_0,J-j} \Psi_{n,x_0,j} \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

avec  $\varkappa_{n,x_0,0} = \varkappa_n(\varepsilon_0)$ ,  $\Psi_{n,x_0,0} = \Psi_n^{\mathcal{X}_{\varepsilon_0}}$  et  $\Psi_{n,x_0,j} \in H_{\text{exp}}^{\infty}(\mathbb{R}^2) \subset \text{Dom}(\mathcal{X}_{\varepsilon_0})$  pour tout  $j \geq 0$ .

La sous-section suivante a pour but de démontrer la proposition 9.5 pour laquelle il faudra respecter la condition de localisation des fonctions test. Avant de passer à la preuve on introduit quelques notations à partir de ce qui précède.

**Notation 9.9.** Avec la suite  $(\varkappa_{n,x_0,j})_{j \geq 0}$  précédemment construite, on définit  $\varkappa_{n,x_0,j} = \varkappa_{n,j}$  et pour tout  $J \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$(9.7) \quad \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h) = h^{3/2} \Xi_0^{1/2} \sum_{j=0}^J \varkappa_{n,x_0,j} h^{j/4},$$

$$\tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]}(s, t) = \Xi_0^{1/4} h^{-1/4} \sum_{j=0}^J \Psi_{n,x_0,j} \left( \Xi_0^{1/4} h^{-1/4} s, \Xi_0^{1/4} h^{-1/4} t \right) h^{j/4} \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

et

$$(9.8) \quad \Psi_{n,h,x_0}^{[J]} = \chi_0 e^{-i\phi(\Phi^{-1})/h} \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]}(\Phi^{-1}) \text{ sur } \Omega_0,$$

où  $\chi_0$  est une fonction troncature avec les mêmes propriétés qu'en (3.11).

### Preuve du résultat

La proposition 9.5 se base sur quelques résultats intermédiaires.

**Lemme 9.10.** *Pour tout  $x_0 \in \Sigma$ , tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $J \geq 0$ , il existe une constante  $C(J) > 0$ ,  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  la norme  $L^2(\Omega)$  des fonctions  $\Psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  définie avec (9.8) vérifie :*

$$1 - C(J)h^{1/4} \leq \|\Psi_{n,h,x_0}^{[J]}\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 + C(J)h^{1/4}.$$

La preuve de ce résultat est analogue à celle du lemme 3.27.

PREUVE DE LA PROPOSITION 9.5. Les fonctions  $\Psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  vérifient la condition de Neumann sur  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0$  et la condition de Dirichlet est elle aussi bien vérifiée sur l'ensemble  $\partial\Omega_0 \setminus \partial\Omega$ . Les fonctions  $\Psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  appartiennent donc bien à  $\text{Dom}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0}^{\text{loc}})$ .

Avec l'expression de  $\Psi_{n,h,x_0}^{[J]}$  et le lemme 9.10 on a dans un premier temps qu'il existe  $h_0 > 0$  et une constante  $C(J) > 0$  tels que :

$$\forall h \in (0, h_0), \quad 1 - C(J)h^{1/4} \leq \|\Psi_{n,h,x_0}^{[J]}\|_{L^2} \leq 1 + C(J)h^{1/4},$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \Psi_{n,h,x_0}^{[J]} &= \chi_0 (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \\ &\quad + 2ih\nabla\chi_0 \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A}) \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} - h^2 \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \Delta\chi_0. \end{aligned}$$

Sur le support de  $\chi_0$ , on a par construction :

$$\left\| \chi_0 (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C(J)h^{3/2+(J+1)/4}.$$

Avec la décroissance exponentielle des fonctions  $\Psi_n^{\chi_{\varepsilon_0}}$  (donnée via le lemme 9.8), et sur le support des fonctions  $\nabla\chi_0$  et  $\Delta\chi_0$  il s'ensuit :

$$\left\| 2ih\nabla\chi_0 \cdot (-ih\nabla + \mathbf{A}) \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} - h^2 \tilde{\Psi}_{n,h,x_0}^{[J]} \circ \Phi^{-1} \Delta\chi_0 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C(J) \exp\left(-\alpha \frac{\Xi_0^{1/2} R_0}{h^{1/4}}\right).$$

Les inégalités précédentes donnent :

$$\left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{loc}} - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)) \Psi_{n,h,x_0}^{[J]} \right\| \leq C(J)h^{3/2+(J+1)/4}.$$

Comme  $J$  est fixé et  $\Omega$  borné, la constante  $C(J)$  peut-être prise indépendamment de  $h$ . On conclut avec le théorème spectral généralisé A.7 présenté en Annexe.  $\square$

### Asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur localisé

On reprend les notations 2.16 et 9.2 ainsi que les expressions (9.7) précédemment introduites. À partir des deux sous-sections précédentes, on obtient le résultat suivant qui donne un développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres de l'opérateur localisé.

**Notation 9.11.** Pour  $x_0 \in \Sigma$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $J \in \mathbb{N}$  on note :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{N,x_0}^{\text{loc}} &= \{ \lambda_{n,x_0}^{\text{loc}}(h), 1 \leq n \leq N \}, \\ \mathfrak{S}_{N,x_0}^{[J]} &= \{ \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h), 1 \leq n \leq N \}, \\ \mathfrak{S}_{N,x_0} &= \left\{ \Xi_0^{1/2} h^{3/2} \varkappa_n(\varepsilon_0), 1 \leq n \leq N \right\}. \end{aligned}$$

**Théorème 9.12.** Soit  $x_0 \in \Sigma$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et tout  $J \geq 0$ , il existe  $C_N(J) > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d\left(\mathfrak{S}_{N,x_0}^{\text{loc}}, \mathfrak{S}_{N,x_0}^{[J]}\right) \leq C_N(J)h^{3/2+(J+1)/4}.$$

En particulier on a qu'il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :

$$d\left(\mathfrak{S}_{N,x_0}^{\text{loc}}, \mathfrak{S}_{N,x_0}\right) \leq C_N h^{7/4}.$$

**DÉMONSTRATION.** Ce résultat découle immédiatement des deux sections précédentes. La proposition 9.5 donne tout d'abord que pour tout  $x_0 \in \Sigma$ , tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et tout  $J \in \mathbb{N}$ , il existe  $\lambda_{x_0}(h) \in \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0})$  et  $C_N(J) > 0$  tels que :

$$|\lambda_{x_0}(h) - \lambda_{n,x_0}^{[J]}(h)| \leq C_N(J)h^{3/2+(J+1)/4}.$$

La proposition 9.4 donne l'argument de séparation manquant pour dire qu'il existe un seul élément de  $\text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_0})$  dans un voisinage de chacune de ces valeurs.  $\square$

## 9.2. Approximation du bas du spectre

Dans cette section (qui est le pendant de la section 5.2), on compare le spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  à celui des opérateurs localisés introduits précédemment, ce qui permet finalement d'explicitier le développement asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres.

**9.2.1. Spectre de la réunion d'opérateurs locaux.** Grâce aux estimées d'Agmon, on montre que le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est dans la limite semi-classique exponentiellement proche du bas du spectre de la réunion d'opérateurs locaux.

**Notation 9.13.** On note  $n_{\Omega,\mathbf{B}} \in \mathbb{N}^*$  le cardinal (fini) de l'ensemble  $\Sigma$  et pour tout  $1 \leq j \leq n_{\Omega,\mathbf{B}}$  on rappelle que les éléments de  $\Sigma$  sont notés  $x_j^{(5)}$ .

En lien avec la notation 5.2, on considère sur  $\Omega$  l'opérateur modèle  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  défini par :

$$(9.9) \quad \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} = \bigoplus_{x \in \Sigma} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_x}^{\text{loc}} = \bigoplus_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega_{x_j^{(5)}}}^{\text{loc}}.$$

On désigne les éléments du spectre de cet opérateur (à résolvante compacte) de la manière suivante :

$$\text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}) = \{\lambda_1^{\text{mod}}(h) \leq \lambda_2^{\text{mod}}(h) \leq \dots \leq \lambda_n^{\text{mod}}(h) \leq \dots\}.$$

Comme dans les notations 5.13 et 9.11 on introduit :

**Notation 9.14.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  on note :

$$\mathfrak{S}_N^{\text{mod}} = \{\lambda_n^{\text{mod}}(h), 1 \leq n \leq N\}.$$

**Proposition 9.15.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $C_N > 0$ ,  $\alpha_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\text{mod}}) \leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}}.$$

**DÉMONSTRATION.** On commence par fixer un entier  $N \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x_j^{(5)}$ , on définit une fonction troncature (fixée)  $\chi_{x_j^{(5)}}$  supportée dans une boule de taille  $R_{x_j^{(5)}}$ , centrée au point  $x_j^{(5)}$  et strictement incluse dans le support de  $\Omega_{R_{x_j^{(5)}}}$ . On rappelle que  $\Psi_{n,h}$  est une fonction propre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , associé à la valeur propre  $\lambda_n(h)$ . On considère le quasimode suivant pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  :

$$\Psi^{\text{mod}} = \left( \chi_{x_1^{(5)}} \Psi_{n,h}, \dots, \chi_{x_{n_{\Omega,\mathbf{B}}}^{(5)}} \Psi_{n,h} \right).$$

Cette dernière fonction est bien dans le domaine de l'opérateur. On rappelle que l'ensemble  $\Gamma_n^{[4]}$  est défini via la notation 4.6. Avec les estimées d'Agmon du corollaire 4.9, on obtient que pour tout  $1 \leq n \leq N$ , il

existe  $C_N > 0$  et  $\alpha_N$  tels que :

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} - \lambda_n(h)) \Psi^{\text{mod}}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} - \lambda_n(h)) \chi_{x_j^{(5)}} \Psi_{n,h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n(h)) \chi_{x_j^{(5)}} \Psi_{n,h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_N e^{-2\alpha_N h^{1/4}} \\
&\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n_{\Omega,\mathbf{B}} \\ x_j^{(5)} \in \Gamma_n^{[4]}}} \left\| \chi_{x_j^{(5)}} (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n(h)) \Psi_{n,h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_N e^{-2\alpha_N h^{1/4}} \\
&\leq C_N e^{-2\alpha_N h^{1/4}}.
\end{aligned}$$

Le théorème spectral donne qu'il existe une valeur propre  $\lambda_{k(n)}^{\text{mod}}(h)$  de l'opérateur modèle qui est exponentiellement proche de  $\lambda_n(h)$ . On a donc montré que pour tout  $1 \leq n \leq N$ , il existe  $C_N > 0$ ,  $\alpha_N > 0$  et  $h_0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d(\lambda_n(h), \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}})) \leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}}.$$

En considérant les suites croissantes des valeurs propres des opérateurs  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , on peut facilement voir que  $k$  est une fonction croissante vérifiant  $k(n) \geq n$ . On donc obtenu pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la majoration suivante :

$$\lambda_n^{\text{mod}}(h) \leq \lambda_n(h) + C e^{-\alpha h^{-1/4}}.$$

Réciproquement on montre un résultat analogue pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  en utilisant les fonctions propres de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$ . On considère un couple  $(\lambda_n^{\text{mod}}(h), \Psi_{n,h}^{\text{mod}})$  d'éléments propres de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  avec  $\Psi_{n,h}^{\text{mod}}$  de la forme :

$$\Psi_{n,h}^{\text{mod}} = \left( \Psi_{n,h}^{\text{mod},1}, \dots, \Psi_{n,h}^{\text{mod},n_{\Omega,\mathbf{B}}} \right),$$

où pour tout  $j$ , la fonction  $\Psi_{n,h}^{\text{mod},j}$  est supportée dans  $\Omega_{x_j^{(5)}}^{(5)}$ . On peut prolonger par continuité (avec la valeur 0) la fonction  $\Psi_{n,h}^{\text{mod},j}$  sur tout l'espace  $\Omega$  en gardant la même régularité  $H^2(\overline{\Omega})$  (étant donné que la condition de Dirichlet est satisfaite). Comme  $\text{supp}(\chi_{R_{x_j^{(5)}}}) \subsetneq \Omega_{R_{x_j^{(5)}}}$ , on note qu'on s'affranchit des questions relatives au domaine de l'opérateur sur la discontinuité des conditions limites au bord entre Neumann et Dirichlet. On considère le quasimode suivant pour l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  :

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \Psi_{n,h}^{\text{mod},j}.$$



Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , il existe  $C_N > 0$  et  $\alpha_N$  tels que :

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \Psi\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \chi_{x_j^{(5)}} \Psi_{n,h,x_j^{(5)}}^{\text{mod}} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| \chi_{x_j^{(5)}} (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \Psi_{n,h}^{\text{mod},j} \right\|_{L^2(\Omega)} + C e^{-\alpha h^{-1/4}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \Psi_{n,h}^{\text{mod},j} \right\|_{L^2(\Omega_j^{(5)})} + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_{\Omega,\mathbf{B}}} \left\| (\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}} - \lambda_n^{\text{mod}}(h)) \Psi_{n,h}^{\text{mod},j} \right\|_{L^2(\Omega_j^{(5)})} + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}} \\
&\leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}}.
\end{aligned}$$

Le théorème spectral donne donc qu'il existe une valeur propre  $\lambda_{k'(n)}(h)$  de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  qui est exponentiellement proche de  $\lambda_n^{\text{mod}}(h)$ . On a donc montré que pour tout  $1 \leq n \leq N$ , il existe  $C_N > 0$ ,  $\alpha_N > 0$  et  $h_0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  on a :

$$d(\lambda_n^{\text{mod}}(h), \text{Sp}(\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega})) \leq C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}}.$$

Comme ce qui précède, en considérant les suites croissantes des valeurs propres des opérateurs  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}^{\text{mod}}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ , on voit facilement que  $k'$  est une fonction croissante vérifiant  $k'(n) \geq n$ . On donc obtenu pour tout  $1 \leq n \leq N$  la majoration suivante :

$$\lambda_n(h) \leq \lambda_n^{\text{mod}}(h) + C_N e^{-\alpha_N h^{-1/4}}.$$

On en déduit finalement le résultat de la proposition 9.15.  $\square$

**9.2.2. Asymptotique à tout ordre des premières valeurs propres du Laplacien magnétique.** On explicite désormais le spectre de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  en regroupant les expressions des spectres des différents opérateurs modèles. Pour l'énoncé du théorème final de cette partie, on reprend les notations originelles données dans 7.19.

**Notation 9.16.** Pour tout  $x \in \Sigma$ , on note  $\mathcal{P}_x^{\text{mod}}$  l'opérateur suivant défini sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{P}_x^{\text{mod}} = h^{3/2} \Xi(x)^{1/2} \mathcal{X}_{\varepsilon(x)}.$$

La suite croissante des valeurs propres comptées avec multiplicité de l'opérateur :

$$\mathcal{P}^{\text{mod}} = \bigoplus_{x \in \Sigma} \mathcal{P}_x^{\text{mod}},$$

défini sur  $\mathbb{R}^2$  est notée  $(\Lambda_n h^{3/2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ . En reprenant (5.2), pour tout  $J \geq 0$  on note :

$$\{\Lambda_n^{[J]}(h), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*\} = \{\lambda_{n,x_0}^{[J]}(h), x_0 \in \Sigma, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

**Remarque 9.17.** La quantité  $\Lambda_n^{\mathbf{B}} h^{3/2}$  (voir la notation 9.3) correspond à  $\Lambda_n^{[0]}(h)$ .

**Notation 9.18.** Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N \leq N_{\Omega,\mathbf{B}}$  et tout  $J \in \mathbb{N}$  on note :

$$\mathfrak{S}_N^{\mathbf{B},[J]} = \{\Lambda_n^{[J]}(h), 1 \leq \mathbf{n} \leq N\}.$$

**Théorème 9.19.** *On se place dans le cadre de l'hypothèse 2 (énoncée au début de la partie II). Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et tout  $J \geq 0$  il existe  $C_N(J) > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

$$d\left(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B};[J]}\right) \leq C_N(J)h^{3/2+(J+1)/4}.$$

*En particulier on a qu'il existe  $C_N > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  :*

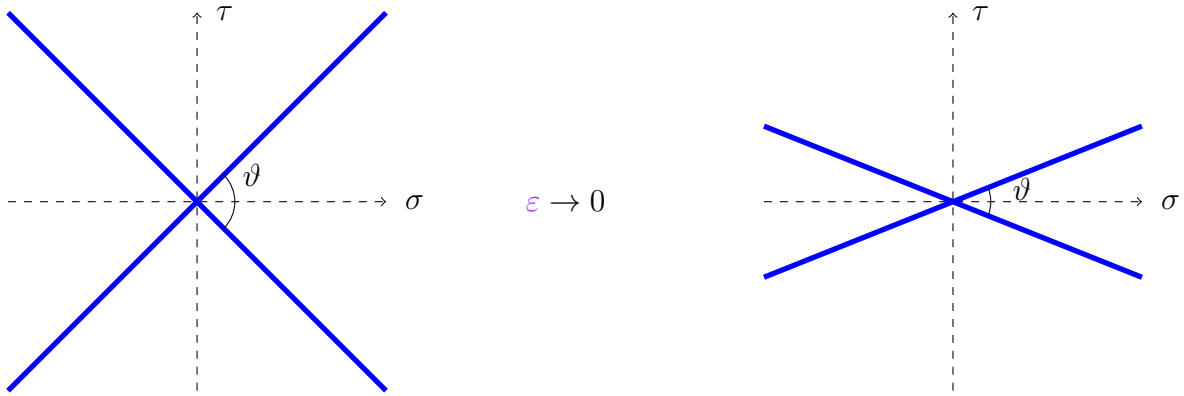
$$d\left(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_N^{\mathbf{B}}\right) \leq C_N h^{7/4}.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle immédiatement du théorème 9.12 et de la proposition 9.15, il suffit de regrouper l'ensemble des valeurs propres données par la réunion des problèmes locaux.  $\square$



## Opérateur modèle croix dans la limite petit angle

Les chapitres 7, 8 et 9 de la partie II complètent l'étude spectrale de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,A,\Omega}$ , dans le cas d'une annulation quadratique (non dégénérée) du champ magnétique, dans la limite semi-classique. Dans la suite de la partie II, on s'intéresse à un autre régime asymptotique. On effectue désormais l'étude spectrale dans la limite petit angle  $\varepsilon \rightarrow 0$  (où  $\varepsilon = \tan \frac{\vartheta}{2}$ ), pour l'opérateur modèle  $\mathcal{X}_\varepsilon$ . L'analyse n'est



plus semi-classique, mais partiellement semi-classique. Dans cette limite petit angle, on réduit l'analyse spectrale à celle d'un opérateur à deux paramètres sur  $\mathbb{R}$  (le symbole opérateur, noté  $X_{\alpha,\xi}$ ). La première section de ce chapitre est consacrée à l'étude de la famille  $(X_{\alpha,\xi})_{(\alpha,\xi) \in \mathbb{R}^2}$ , tandis que la deuxième section donne la structure du spectre de l'opérateur modèle 2D  $\mathcal{X}_\varepsilon$  en fonction de son symbole, dans le régime partiellement semi-classique  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 10.1. Symbole opérateur

On démontre dans la section 10.2 que l'analyse de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  dans la limite petit angle  $\varepsilon \rightarrow 0$  se réduit à l'étude spectrale de famille d'opérateurs en dimension 1  $(X_{\alpha,\xi})_{(\alpha,\xi) \in \mathbb{R}^2}$ . L'asymptotique des valeurs propres s'exprime en fonction de l'infimum de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha,\xi)$  du symbole opérateur de  $\mathcal{X}_\varepsilon$ . Dans cette section, on dégage un certain nombre de propriétés importantes de la famille  $(X_{\alpha,\xi})_{(\alpha,\xi) \in \mathbb{R}^2}$ .

Il s'agit de l'opérateur défini sur  $\mathbb{R}$  (pour tout  $(\alpha,\xi) \in \mathbb{R}^2$ ) de la manière suivante :

$$(10.1) \quad X_{\alpha,\xi} = D_t^2 + \left( \xi - \frac{t^3}{3} + \alpha^2 t \right)^2.$$

Comme dans l'introduction, on rappelle comment on obtient son expression formelle. On part de l'expression de l'opérateur (partiellement semi-classique)  $\mathcal{X}_\varepsilon$  et on effectue le changement d'échelle :

$$\sigma = \varepsilon^{-1}s, \quad \tau = t.$$

L'étude spectrale se ramène alors à l'opérateur unitairement équivalent suivant sur  $L^2(\varepsilon^{-1}dsdt)$  :

$$D_t^2 + \left( \varepsilon D_s - \frac{t^3}{3} + s^2 t \right)^2.$$

En remplaçant formellement  $\varepsilon D_s$  par  $\xi$  et  $s$  par  $\alpha$ , on obtient un opérateur en dimension  $1D$  à deux paramètres, appelé symbole, dont l'expression est donnée par 10.1. L'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$  est un opérateur de Schrödinger en dimension 1 avec potentiel électrique (qui est un polynôme pair) mais l'étude précise de son spectre reste difficile.

### 10.1.1. Propriétés de l'opérateur $1D$ .

**Proposition 10.1** (Analyticité). *La famille  $(X_{\alpha,\xi})$  pour  $\alpha, \xi \in \mathbb{R}$  est analytique (de type (B) selon la théorie de Kato voir [50]).*

**Proposition 10.2** (Résolvante compacte). *Pour tout  $(\alpha, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , l'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$  est à résolvante compacte.*

**Notation 10.3.** On note  $\varrho_n(\alpha, \xi)$  la  $n$ -ième valeur propre de l'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$ .

**Proposition 10.4.** *Pour tout couple  $(\alpha, \xi)$ , la valeur propre  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  est simple et dépend analytiquement de  $\alpha$  et de  $\xi$ . Les fonctions propres associées à la valeur propre  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  ne s'annulent pas et l'unique fonction propre positive normalisée  $u_{\alpha,\xi}$  associée à  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  dépend analytiquement de  $(\alpha, \xi)$ .*

DÉMONSTRATION. On démontre la simplicité par un procédé classique. L'analyticité découle quant à elle de la théorie de Kato. Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux éléments non nuls du sous espace propre associé à  $\varrho_1(\alpha, \xi)$ . On considère la fonction  $u = u_1(0)u_2 - u_2(0)u_1$  qui est dans le même espace propre. Il découle de la théorie de Sturm-Liouville que (la fonction régulière)  $u$  ne peut changer de signe. On suppose donc que  $u \geq 0$ . On remarque que  $u(0) = 0$  ce qui donne alors que 0 est un minimum local et donc que  $u'(0) = 0$ . Par unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz (le potentiel étant confinant les fonctions propres associées sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ), on a alors  $u = 0$ , ce qui donne finalement que  $u_1$  et  $u_2$  sont colinéaires et donc que le sous-espace propre associé à la plus petite valeur propre est de dimension 1.  $\square$

Le résultat qui suit découle immédiatement d'un argument de symétrie.

**Proposition 10.5.** *L'étude spectrale de l'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$  et de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  peut se restreindre au quart de plan  $\{\alpha \geq 0, \xi \geq 0\}$ .*

Dans tout ce qui suit l'étude s'effectue donc sur l'ensemble  $\{\alpha \geq 0, \xi \geq 0\}$ . On remarque également qu'on a une symétrie particulière pour  $\xi = 0$ .

**Proposition 10.6.** *Le potentiel  $V_{\alpha,\xi}(t) = \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right)^2$  est pair si et seulement si  $\xi = 0$ . Par ailleurs, pour tout  $\alpha$ , la fonction propre  $u_{\alpha,0}$  associée à la valeur propre  $\varrho_1(\alpha, 0)$  pour l'opérateur  $X_{\alpha,0}$  est paire.*

**10.1.2. Formules de Feynman-Hellmann.** On démontre dans cette sous-section des formules de Feynman-Hellmann concernant l'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$ . Celles-ci sont obtenues en dérivant l'équation :

$$X_{\alpha,\xi} u_{\alpha,\xi} = \varrho_1(\alpha, \xi) u_{\alpha,\xi}.$$

Ces formules seront utiles pour démontrer l'existence d'un minimum de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  sur tout  $\mathbb{R}^2$ .

**Notation 10.7.** On note  $(\partial_\alpha u)_{\alpha_0, \xi_0} = (\partial_\alpha u_{\alpha, \xi})_{(\alpha, \xi) = (\alpha_0, \xi_0)}$  et  $(\partial_\xi u)_{\alpha_0, \xi_0} = (\partial_\xi u_{\alpha, \xi})_{(\alpha, \xi) = (\alpha_0, \xi_0)}$ . On utilise les mêmes notations pour la dérivation par rapport à  $\alpha$  ou  $\xi$  de l'opérateur  $X_{\alpha, \xi}$ .

**Proposition 10.8.** Pour tout point  $(\alpha, \xi)$  on a les identités suivantes :

$$(10.2) \quad (\partial_\alpha \varrho_1)(\alpha, \xi) = 4\alpha \int_{\mathbb{R}} \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) t u_{\alpha, \xi}^2(t) dt,$$

$$(10.3) \quad (\partial_\xi \varrho_1)(\alpha, \xi) = 2 \int_{\mathbb{R}} \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) u_{\alpha, \xi}^2(t) dt.$$

En particulier, si  $(\alpha_c, \xi_c)$  est un point critique de  $\varrho_1(\alpha, \xi)$ , on a :

$$(10.4) \quad \alpha_c \int_{\mathbb{R}} \left( \xi_c + \alpha_c^2 t - \frac{t^3}{3} \right) t u_{\alpha_c, \xi_c}^2(t) dt = 0,$$

$$(10.5) \quad \int_{\mathbb{R}} \left( \xi_c + \alpha_c^2 t - \frac{t^3}{3} \right) u_{\alpha_c, \xi_c}^2(t) dt = 0.$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que l'expression de  $X_{\alpha, \xi}$  est donnée par :

$$X_{\alpha, \xi} = D_t^2 + \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right)^2.$$

On commence par dériver respectivement suivant  $\alpha$  et  $\xi$  l'égalité suivante :

$$X_{\alpha, \xi} u_{\alpha, \xi} = \varrho_1(\alpha, \xi) u_{\alpha, \xi},$$

où  $u_{\alpha, \xi}$  désigne une fonction propre associée à la valeur propre  $\varrho_1(\alpha, \xi)$ .

En notant plus simplement  $\varrho_1(\alpha, \xi) = \varrho_1$ , on a :

$$(10.6) \quad \begin{aligned} (X_{\alpha, \xi} - \varrho_1) \partial_\alpha u &= (\partial_\alpha \varrho_1 - [\partial_\alpha, X_{\alpha, \xi}]) u, \\ (X_{\alpha, \xi} - \varrho_1) \partial_\xi u &= (\partial_\xi \varrho_1 - [\partial_\xi, X_{\alpha, \xi}]) u. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha X_{\alpha, \xi} &= X_{\alpha, \xi} \partial_\alpha + 4\alpha t \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right), \\ \partial_\xi X_{\alpha, \xi} &= X_{\alpha, \xi} \partial_\xi + 2 \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} [\partial_\alpha, X_{\alpha, \xi}] &= 4\alpha t \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right), \\ [\partial_\xi, X_{\alpha, \xi}] &= 2 \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right). \end{aligned}$$

En évaluant l'expression précédemment obtenue au point  $(\alpha, \xi)$  (ici non nécessairement critique) on a :

$$(10.7) \quad (X_{\alpha, \xi} - \varrho_1(\alpha, \xi)) (\partial_\alpha u)_{\alpha, \xi} = \left( (\partial_\alpha \varrho_1)(\alpha, \xi) - 4\alpha t \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \right) u_{\alpha, \xi},$$

$$(10.8) \quad (X_{\alpha, \xi} - \varrho_1(\alpha, \xi)) (\partial_\xi u)_{\alpha, \xi} = \left( (\partial_\xi \varrho_1)(\alpha, \xi) - 2 \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \right) u_{\alpha, \xi}.$$

Pour que chacune des équations précédentes soit résoluble, la condition de Fredholm impose que le membre de droite de chaque égalité appartienne à l'orthogonal du noyau de l'opérateur du terme de gauche. En prenant alors le produit scalaire avec la fonction  $u_{\alpha,\xi}$ , on obtient (la fonction propre étant normalisée) que pour tout  $(\alpha, \xi)$  :

$$\begin{aligned} (\partial_\alpha \varrho_1)(\alpha, \xi) &= 4\alpha \int_{\mathbb{R}} \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) t u_{\alpha,\xi}^2(t) dt, \\ (\partial_\xi \varrho_1)(\alpha, \xi) &= 2 \int_{\mathbb{R}} \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) u_{\alpha,\xi}^2(t) dt. \\ \int_{\mathbb{R}} \alpha_c \left( \xi_c + \alpha_c^2 t - \frac{t^3}{3} \right) t u_{\alpha_c,\xi_c}^2(t) dt &= 0, \\ \int_{\mathbb{R}} \left( \xi_c + \alpha_c^2 t - \frac{t^3}{3} \right) u_{\alpha_c,\xi_c}^2(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

□

**10.1.3. Existence d'un minimum de la fonction de bande.** On va dans ce qui suit se focaliser sur l'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$  et montrer l'existence d'un minimum de la fonction de deux variables réelles  $\varrho_1(\alpha, \xi)$ . Les fonctions tests sur lesquelles agit l'opérateur 1D étant définies sur toute la droite réelle, il est clair qu'on a une invariance par symétrie centrale en  $(\alpha, \xi)$  de notre opérateur, c'est à dire que  $\varrho_{\alpha,\xi} = \varrho_{-\alpha,-\xi}$  pour tout  $(\alpha, \xi) \in \mathbb{R}^2$ . On peut donc sans perte de généralité restreindre notre étude à un demi-plan, prenons par exemple  $\alpha \geq 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ . On rappelle le résultat principal de cette sous-section, dont l'énoncé a été donné dans l'introduction avec le théorème 1.20 :

**Théorème 10.9.** *Les minima globaux de la fonction  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  étudiée sur la quart de plan  $\{\alpha > 0, \xi > 0\}$  sont contenus dans un compact inclus dans l'ensemble :*

$$\left\{ 0 \leq \xi \leq \frac{2}{3}\alpha^3 \right\}.$$

Il découlera directement des propositions 10.13 et 10.14.

On commence par montrer que le minimum ne peut être atteint dans la zone  $\xi \geq \frac{2}{3}\alpha^3 > 0$ , ce qui sera établi avec la proposition 10.13. Cette zone est liée au discriminant du polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  défini dans la notation suivante :

**Notation 10.10.** Pour tout  $(\alpha, \xi)$  on note  $P_{\alpha,\xi}$  le polynôme (en  $t$ ) donné par :

$$P_{\alpha,\xi}(t) = \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right).$$

Le lemme suivant donne une expression des racines de  $P_{\alpha,\xi}$ , ce qui sera utilisé dans la preuve des propositions 10.13 et 10.14.

**Lemme 10.11.** *Pour tout  $\alpha \geq 0$  et tout  $\xi \geq 0$ , le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  admet toujours une racine réelle simple  $t_3(\alpha, \xi) \geq 0$ . On a plus précisément :*

– Pour  $\xi < \frac{2}{3}\alpha^3$ , le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  admet trois racines réelles distinctes  $t_1(\alpha, \xi) < t_2(\alpha, \xi) < t_3(\alpha, \xi)$  données par :

$$t_k(\alpha, \xi) = j^{3-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 3\xi + i\sqrt{4\alpha^6 - 9\xi^2} \right)} + j^{k-3} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 3\xi - i\sqrt{4\alpha^6 - 9\xi^2} \right)}, \quad k \in \{1, 2, 3\},$$

où  $j$  désigne le nombre complexe donné par  $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

– Pour  $\xi = \frac{2}{3}\alpha^3$ , le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  admet une racine réelle simple et une racine réelle double données respectivement par :

$$t_3(\alpha, \xi) = 2\alpha \quad \text{et} \quad t_2(\alpha, \xi) = t_1(\alpha, \xi) = -\alpha.$$

– Pour  $\xi > \frac{2}{3}\alpha^3$ , le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  admet une unique racine réelle simple donnée par :

$$t_3(\alpha, \xi) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 3\xi + \sqrt{-4\alpha^6 + 9\xi^2} \right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( 3\xi - \sqrt{-4\alpha^6 + 9\xi^2} \right)}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est simple, il suffit de se référer aux formules de Cardan données en fonction du signe du discriminant du polynôme  $P_{\alpha,\xi}$ .  $\square$

**Remarque 10.12.** La cohérence de la notation  $t_1(\alpha, \xi)$ ,  $t_2(\alpha, \xi)$  et  $t_3(\alpha, \xi)$  pour désigner les racines du polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  indépendamment du signe du discriminant de  $P_{\alpha,\xi}$  est justifiée par la continuité des relations coefficients racines. On note bien que  $t_3(\alpha, \xi)$  est toujours racine réelle simple et que  $t_3(\alpha, \xi) > 0$  pour tout  $\xi > 0$ .

**Proposition 10.13.** Pour tout couple  $(\alpha, \xi)$  tel que  $\xi \geq \frac{2}{3}\alpha^3 > 0$ , on a :

$$(\partial_\alpha \varrho_1)(\alpha, \xi) - 2\alpha t_3(\alpha, \xi)(\partial_\xi \varrho_1)(\alpha, \xi) < 0.$$

En particulier, il ne peut exister de point critique sur la zone  $\xi \geq \frac{2}{3}\alpha^3 > 0$ .

DÉMONSTRATION. Les formules de Feynman-Hellmann de la proposition 10.8 donnent :

$$\begin{aligned} (\partial_\alpha \varrho_1)(\alpha, \xi) &= 4\alpha \int_{\mathbb{R}} \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) t u_{\alpha,\xi}^2(t) dt, \\ (\partial_\xi \varrho_1)(\alpha, \xi) &= 2 \int_{\mathbb{R}} \left( \xi + \alpha^2 t - \frac{t^3}{3} \right) u_{\alpha,\xi}^2(t) dt. \end{aligned}$$

On a donc :

$$(\partial_\alpha \varrho_1)(\alpha, \xi) - 2\alpha t_3(\alpha, \xi)(\partial_\xi \varrho_1)(\alpha, \xi) = \int_{\mathbb{R}} P_{\alpha,\xi}(t) (4\alpha t - 4\alpha t_3(\alpha, \xi)) u_{\alpha,\xi}^2(t) dt.$$

On voit facilement avec une étude de signe et le lemme 10.11 précédent que :

$$P_{\alpha,\xi}(t) (4\alpha t - 4\alpha t_3(\alpha, \xi)) \geq 0.$$

En effet, sur l'ensemble  $\{t < t_3(\alpha, \xi)\}$ ,  $P_{\alpha,\xi}$  est négatif et sur l'ensemble  $\{t \geq t_3(\alpha, \xi)\}$ ,  $P_{\alpha,\xi}$  est positif (car sur l'ensemble  $\xi \geq \frac{2}{3}\alpha^3 > 0$ , le polynôme a au plus deux racines réelles). C'est également le cas de la droite d'équation  $t - t_3(\alpha, \xi) = 0$ . Comme on ne s'annule que ponctuellement (aux points correspondants aux racines de  $P_{\alpha,\xi}$ ), ceci donne bien la stricte inégalité donnée dans l'énoncé de la proposition 10.13 par positivité de l'intégrale. Comme on considère le cas où  $\alpha > 0$ , on a  $\xi \neq 0$  et on peut alors conclure qu'il ne peut exister de point critique sur l'ensemble  $\xi \geq \frac{2}{3}\alpha^3 > 0$ .  $\square$

On fait un commentaire sur la figure 7 de l'introduction. La courbe noire d'équation  $\xi = \frac{2}{3}\alpha^3$  délimite les zones où le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  admet une, deux, ou trois racines réelles (respectivement au-dessus, sur et sous la courbe).

**Proposition 10.14.** La fonction  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\alpha, \xi) \mapsto \varrho_1(\alpha, \xi)$  admet un minimum.

Dans tout ce qui suit on désigne par  $Q_{\alpha,\xi}$  (ou plus simplement  $Q$ ) la forme quadratique associée à l'opérateur  $X_{\alpha,\xi}$  (encore noté plus simplement  $X$ ).



PREUVE DE LA PROPOSITION 10.14. Par symétrie (voir la proposition 10.5), on peut restreindre l'étude au quart de plan  $\{0 \leq \alpha, 0 \leq \xi\}$ . On effectue la preuve en trois étapes, sur les ensembles respectifs  $\{\xi \geq 0, \xi = \frac{2}{3}\alpha^3\}$ ,  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$  et  $\{0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3\}$ .

**Étude sur l'ensemble**  $\{\xi \geq 0, \xi = \frac{2}{3}\alpha^3\}$

On commence par effectuer l'étude sur l'ensemble  $\{\xi \geq 0, \xi = \frac{2}{3}\alpha^3\}$  pour  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas le potentiel ne dépend plus que du paramètre  $\alpha$  et ses racines sont  $\pm\alpha$  et  $2\alpha$ . L'opérateur étudié prend la forme factorisée suivante :

$$D_t^2 + \left( \frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right)^2.$$

On considère deux réels  $\alpha_-$  et  $\alpha_+$  tels que  $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$  avec  $|\alpha - \alpha_{\pm}| = R(\alpha)$ , où  $R(\alpha)$  est une quantité strictement positive, pouvant dépendre de  $\alpha$ , et vérifiant la condition

$$(10.9) \quad R(\alpha) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Cette quantité  $R(\alpha)$  sera explicitée par la suite. On considère deux fonctions plateaux  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  définies sur  $\mathbb{R}$  et formant une partition de l'unité telle que :

$$\mathcal{X}_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } (-\infty, \alpha] \\ 0 & \text{sur } [\alpha_+, +\infty) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{sur } (-\infty, \alpha_-] \\ 1 & \text{sur } [\alpha, +\infty) \end{cases},$$

avec :

$$\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2 = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

et :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathcal{X}_j'(t)| \leq \frac{C}{R(\alpha)}, \quad \text{pour tout } j \in \{1, 2\}.$$

La formule de localisation (voir l'Annexe B.2) donne que pour toute fonction  $\psi$  dans le domaine de forme :

$$(10.10) \quad \mathcal{Q}(\psi) = \mathcal{Q}(\mathcal{X}_1\psi) + \mathcal{Q}(\mathcal{X}_2\psi) - \|\psi \mathcal{X}_1'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|\psi \mathcal{X}_2'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Le terme de reste est majoré de la manière suivante :

$$(10.11) \quad \sum_{j \in \{1, 2\}} \|\psi \mathcal{X}_j'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{C^2}{R(\alpha)^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

On pose  $\Omega^{(1)} = (-\infty, \alpha_+]$  et  $\Omega^{(2)} = (\alpha_-, +\infty)$  et on va donner une minoration de la forme quadratique sur chacun de ces sous-domaines recouvrant  $\mathbb{R}$ .

Sur  $\Omega^{(1)}$ , on a  $(t - 2\alpha)^2 \geq (\alpha_+ - 2\alpha)^2$ . On pose  $\psi_1 = \mathcal{X}_1\psi$ . On a :

$$\mathcal{Q}(\psi_1) \geq \int_{-\infty}^{\alpha_+} |\psi_1'|^2 + \frac{(\alpha_+ - 2\alpha)^2}{9} (t + \alpha)^4 |\psi_1|^2 dt.$$

On pose  $B_1(\alpha) = \frac{(\alpha_+ - 2\alpha)^2}{9}$  (strictement positif avec la condition (10.9)). On obtient que  $\frac{\mathcal{Q}(\psi_1)}{\|\psi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + B_1(\alpha)(t + \alpha)^4,$$

sur  $L^2(-\infty, \alpha_+)$  avec condition de Dirichlet en  $\alpha_+$ . Après la translation  $t' = t + \alpha$  et après l'homogénéisation  $\tau = B_1(\alpha)^{1/6}t'$ , on obtient que le bas du spectre de ce dernier opérateur est lui-même minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$B_1(\alpha)^{1/3} (D_\tau^2 + \tau^4),$$

sur  $L^2(-\infty, b_1(\alpha))$ , avec  $b_1(\alpha) = B_1(\alpha)^{1/6}(\alpha_+ + \alpha)$  et condition de Dirichlet en  $b_1(\alpha)$ . En notant  $\omega_1^{(1)}(\alpha)$  le bas du spectre de l'opérateur  $D_\tau^2 + \tau^4$  sur  $L^2(-\infty, b_1(\alpha))$  avec condition de Dirichlet en  $b_1(\alpha)$ , obtient alors :

$$(10.12) \quad \mathbf{Q}(\psi_1) \geq B_1(\alpha)^{1/3} \omega_1^{(1)}(\alpha) \|\psi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Sur  $\Omega^{(2)}$ , on a  $(t + \alpha)^2 \geq (\alpha_- + \alpha)^2$ . On pose  $\psi_2 = \mathcal{X}_2\psi$ . On a :

$$\mathbf{Q}(\psi_2) \geq \int_{\alpha_-}^{+\infty} |\psi_2'|^2 + \frac{(\alpha_- + \alpha)^4}{9} (t - 2\alpha)^2 |\psi_2|^2 dt.$$

On pose  $B_2(\alpha) = \frac{(\alpha_- + \alpha)^4}{9} > 0$ . On obtient que  $\frac{\mathbf{Q}(\psi_2)}{\|\psi_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + B_2(\alpha)(t - 2\alpha)^2,$$

sur  $L^2(\alpha_-, +\infty)$ , avec condition de Dirichlet en  $\alpha_-$ . Après la translation  $t' = t - 2\alpha$  et après l'homogénéisation  $\tau = B_2(\alpha)^{1/4}t'$ , on obtient que le bas du spectre de ce dernier opérateur est lui-même minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$B_2(\alpha)^{1/2} (D_\tau^2 + \tau^2),$$

sur  $L^2(-b_2(\alpha), +\infty)$ , avec  $b_2(\alpha) = -B_2(\alpha)^{1/4}(\alpha_- - 2\alpha)$  et condition de Dirichlet en  $-b_2(\alpha)$ .

En notant  $\omega_1^{(2)}(\alpha)$  le bas du spectre de l'opérateur  $D_\tau^2 + \tau^2$  sur  $L^2(-b_2(\alpha), +\infty)$  et condition de Dirichlet en  $-b_2(\alpha)$ , obtient alors :

$$(10.13) \quad \mathbf{Q}(\psi_2) \geq B_2(\alpha)^{1/2} \omega_1^{(2)}(\alpha) \|\psi_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

En reprenant alors (10.10), (10.11), (10.12) et (10.13), on a :

$$(10.14) \quad \mathbf{Q}(\psi) \geq \min \left\{ B_1(\alpha)^{1/3} \omega_1^{(1)}(\alpha), B_2(\alpha)^{1/2} \omega_1^{(2)}(\alpha) \right\} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{C^2}{R(\alpha)^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

On passe désormais au choix du paramètre  $R(\alpha)$ . On fixe  $R(\alpha) = R > 0$ , avec  $R < \frac{1}{2}$  de sorte que la condition (10.9) soit bien vérifiée pour  $\alpha \geq 1$  (ceci n'est pas dérangeant pour cette partie de l'étude car on s'intéresse ici à  $\alpha \rightarrow +\infty$ ).

On a d'une part :

$$(10.15) \quad B_1(\alpha) = \frac{(\alpha - R)^2}{9} \quad \text{et} \quad B_2(\alpha) = \frac{(2\alpha - R)^4}{9},$$

et les comportements asymptotiques suivants pour  $\alpha \rightarrow +\infty$  (sans tenir compte des constantes multiplicatives) :

$$(10.16) \quad B_1(\alpha) \sim \alpha^2, \quad b_1(\alpha) \sim \alpha^{4/3}, \quad B_2(\alpha) \sim \alpha^4, \quad b_2(\alpha) \sim \alpha^2.$$

Indépendamment des quantités :

$$b_1(\alpha) = B_1(\alpha)^{1/6}(2\alpha + R) \quad \text{et} \quad b_2(\alpha) = B_2(\alpha)^{1/4}(\alpha + R),$$

le principe du Min-Max (voir l'Annexe A.3) donne d'autre part les minoration suivantes (uniformes en  $\alpha$ ) :

$$(10.17) \quad \omega_1^{(1)}(\alpha) \geq V_0 \quad \text{et} \quad \omega_1^{(2)}(\alpha) \geq 1,$$

où  $V_0$  désigne le bas du spectre de la réalisation autoadjointe de l'opérateur  $D_\tau^2 + \tau^4$  sur  $\mathbb{R}$ , défini comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$\psi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi'(\tau)|^2 + \tau^4 |\psi(\tau)|^2) d\tau,$$

sur le domaine de forme :

$$\{\psi \in L^2(\mathbb{R}), \psi' \in L^2(\mathbb{R}), \tau^2 \psi \in L^2(\mathbb{R})\},$$

tandis que la valeur numérique 1 correspond au bas du spectre de l'oscillateur harmonique défini dans la section 2.1.

On note que  $V_0 = 2^{2/3} \nu_1(0)$ , où  $\nu_1$  est la fonction de bande de l'opérateur de Montgomery  $\mathcal{M}(\eta)$  défini dans la section 2.3.

On reprend l'équation (10.14) ainsi que les points (10.17), (10.15) et (10.16). On a alors que pour toute constante arbitrairement grande  $B > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $\alpha \geq A$  :

$$(10.18) \quad \mathcal{Q}(\psi) \geq B\alpha^{2/3} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{C^2}{R^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui conclut l'étude sur l'ensemble  $\{\xi \geq 0, \xi = \frac{2}{3}\alpha^3\}$ .

Il reste à étudier l'opérateur  $X_{\alpha, \xi}$  sur les ensembles  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$  et  $\{0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3\}$ .

**Étude sur l'ensemble  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$**

On effectue l'étude sur l'ensemble  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$ . On observe que les racines de  $P_{\alpha, \xi}$  sont indépendantes de  $\xi$  et sont données par  $\pm\alpha$ . Il est alors naturel de considérer le même découpage de  $\mathbb{R}$  autour de  $\alpha$ .

Sur  $\Omega^{(1)} \subset (-\infty, 2\alpha)$ , on a  $(t - 2\alpha) < 0$ . Il est ici commode de travailler avec de nouvelles coordonnées  $(\alpha, \delta)$  en posant  $\xi = \delta + \frac{2}{3}\alpha^3$  avec  $\delta > 0$ . L'opérateur prend alors la forme suivante :

$$D_t^2 + \left( \delta - \frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right)^2.$$

Sur l'ensemble  $\{0 \leq \frac{2}{3}\alpha^3 < \xi\}$ , on a bien (pour  $\delta > 0$ ) :

$$\alpha + \xi \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha + \delta \rightarrow +\infty.$$

$$\left( \delta - \frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right)^2 = \delta^2 + 2\delta \left( -\frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right) + \left( -\frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right)^2.$$

Pour  $\delta > 0$  et sur  $\Omega^{(1)}$ , chacun des termes du membre de droite dans l'égalité précédente est positif. On a simplement :

$$\left( \delta - \frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right)^2 \geq \delta^2 + \left( -\frac{(t + \alpha)^2(t - 2\alpha)}{3} \right)^2.$$

En reprenant le résultat de la minoration précédente et en gardant les mêmes notations, on obtient sur cet ensemble :

$$\mathcal{Q}(\psi_1) \geq \left( \delta^2 + B_1(\alpha)^{1/3} \omega_1^{(1)}(\alpha) \right).$$

En revenant finalement au paramètre  $\xi$ , ceci donne :

$$(10.19) \quad \mathcal{Q}(\psi_1) \geq \underbrace{\left( \left( \xi - \frac{2}{3}\alpha^3 \right)^2 + B_1(\alpha)^{1/3} \omega_1^{(1)}(\alpha) \right)}_{\hat{B}_1(\alpha, \xi)} \|\psi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Il reste à donner une minoration sur  $\Omega^{(2)}$ . On effectue maintenant l'étude sur  $\Omega^{(2)}$ . Pour exhiber l'influence du paramètre  $\xi$ , on va revenir à la forme factorisée du potentiel.

On rappelle que sur l'ensemble  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$ , le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$  admet une unique racine réelle, notée  $t_3(\alpha, \xi)$ .

La forme factorisée de  $P_{\alpha,\xi}$  est la suivante :

$$P_{\alpha,\xi}(t) = (ut^2 + vt + w)(t - t_3(\alpha, \xi)).$$

En développant le polynôme  $P_{\alpha,\xi}$ , on obtient par identification :

$$u = -\frac{1}{3}, \quad v = -\frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}, \quad w = -\frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)}.$$

On a alors :

$$(10.20) \quad P_{\alpha,\xi}(t) = -\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}t + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)}\right)(t - t_3(\alpha, \xi)),$$

Sur  $\Omega^{(2)}$ , par positivité des coefficients on a :

$$\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}t + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{3}\alpha_-^2 + \frac{t_3(\alpha, \delta)}{3}\alpha_- + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \delta)}\right)^2.$$

Il suffit désormais de donner un encadrement simple de  $t_3(\alpha, \xi)$ . Pour  $\xi > \frac{2}{3}\alpha^3$ , il est facile de voir que :

$$t_3(\alpha, \xi) \geq 2\alpha,$$

car  $P_{\alpha,\xi}(2\alpha) > 0$ . En reprenant l'expression exacte de  $t_3(\alpha, \xi)$  (voir le lemme 10.11), on a une majoration de la racine  $t_3(\alpha, \xi)$  :

$$t_3(\alpha, \xi) \leq \left(3^{1/3} + \frac{3^{1/3}}{2}\right)\xi^{1/3} \leq 3\xi^{1/3}.$$

On a donc l'encadrement suivant pour  $t_3(\alpha, \xi)$  :

$$(10.21) \quad 2\alpha \leq t_3(\alpha, \xi) \leq 3\xi^{1/3}.$$

Ce contrôle permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}t + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)}\right)^2 \geq \frac{1}{9}(\alpha_-^2 + 2\alpha\alpha_- + \xi^{2/3})^2.$$

On pose  $\hat{B}_2(\alpha, \xi) = \frac{1}{9}(\alpha_-^2 + 2\alpha\alpha_- + \xi^{2/3})^2$ . On obtient que  $\frac{Q(\psi_2)}{\|\psi_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + \hat{B}_2(\alpha, \xi)(t - t_3(\alpha, \xi))^2,$$

sur  $L^2(\alpha_-, +\infty)$  avec condition de Dirichlet en  $\alpha_-$ . Après la translation  $t' = t - t_3(\alpha, \xi)$  et après l'homogénéisation  $\tau = \hat{B}_2(\alpha, \xi)^{1/4}t'$ , on obtient que le bas du spectre de ce dernier opérateur est lui-même minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$\hat{B}_2(\alpha, \xi)^{1/2}(D_\tau^2 + \tau^2),$$

sur  $L^2(-\hat{b}_2(\alpha, \xi), +\infty)$ , où  $\hat{b}_2(\alpha, \xi) = -\hat{B}_2(\alpha, \xi)^{1/4}(\alpha_- - t_3(\alpha, \xi))$  et condition de Dirichlet en  $-\hat{b}_2(\alpha, \xi)$ .

En notant  $\hat{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi)$  le bas du spectre de l'opérateur  $D_\tau^2 + \tau^2$  sur  $L^2(-\hat{b}_2(\alpha, \xi), +\infty)$  avec condition de Dirichlet en  $-\hat{b}_2(\alpha, \xi)$ , obtient alors :

$$(10.22) \quad \mathbf{Q}(\psi_2) \geq \hat{B}_2(\alpha, \xi)^{1/2} \hat{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi) \|\psi_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

En reprenant alors la formule de localisation (10.10), le terme de reste (10.11), ainsi que les estimées (10.19) et (10.22), on obtient la minoration suivante :

$$(10.23) \quad \mathbf{Q}(\psi) \geq \min \left\{ \hat{B}_1(\alpha, \xi), \hat{B}_2(\alpha, \xi)^{1/2} \hat{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi) \right\} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{C^2}{R(\alpha)^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Comme dans le cas précédent, on choisit désormais le paramètre  $R(\alpha)$ . On fixe  $R(\alpha) = R > 0$  avec  $R < \frac{1}{2}$  de sorte que la condition (10.9) soit bien vérifiée pour :

$$(10.24) \quad \alpha \geq 1.$$

On a d'une part :

$$(10.25) \quad \hat{B}_1(\alpha, \xi) = \left( \xi - \frac{2}{3}\alpha^3 \right)^2 + \frac{(\alpha - R)^2}{9} \quad \text{et} \quad \hat{B}_2(\alpha, \xi) = \frac{((\alpha - R)^2 + 2\alpha(\alpha - R) + \xi^{2/3})^2}{9}.$$

Sur l'ensemble  $0 \leq \frac{2}{3}\alpha^3 < \xi$  on a :

$$(10.26) \quad \lim_{\alpha+\xi \rightarrow +\infty} \hat{B}_1(\alpha, \xi) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha+\xi \rightarrow +\infty} \hat{B}_2(\alpha, \xi) = +\infty.$$

On remarquera que dans une région où  $\xi - \frac{2}{3}\alpha^3 \leq D$  (pour une certaine constante fixées  $D > 0$ , on a le comportements asymptotique suivant pour  $\alpha \rightarrow +\infty$  (sans tenir compte des constantes multiplicatives) :

$$\hat{B}_1(\alpha) \sim \alpha^2.$$

Comme dans le cas précédent, on retrouve qu'après scaling, l'énergie croit dans ce cas en  $\alpha^{2/3}$ .

Indépendamment des quantités :

$$\hat{b}_1(\alpha, \xi) = \hat{B}_1(\alpha, \xi)^{1/6} (2\alpha + R) \quad \text{et} \quad \hat{b}_2(\alpha, \xi) = \hat{B}_2(\alpha, \xi)^{1/4} (-\alpha + R + t_3(\alpha, \xi)),$$

le principe du Min-Max (voir l'Annexe A.3) donne comme dans (10.17) les minoration suivantes (uniformes en  $(\alpha, \xi)$ ) :

$$(10.27) \quad \omega_1^{(1)}(\alpha) \geq V_0 \quad \text{et} \quad \hat{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi) \geq 1.$$

On reprend l'équation (10.23) ainsi que les points (10.27), (10.25) et (10.36). On a alors que pour toute constante  $\hat{B} > 0$  arbitrairement grande, il existe  $\hat{A} > 0$  tel que pour tout  $\alpha + \delta > \hat{A}$  (avec  $\alpha \geq 0$  et  $\delta > 0$ ) :

$$(10.28) \quad \mathbf{Q}(\psi) \geq \hat{B} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{C^2}{R^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Avec le point (10.24), ce qui précède n'est valable que pour  $\alpha \geq 1$ . Pour conclure l'étude sur l'ensemble  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$ , il reste à étudier la bande  $\{0 \leq \alpha \leq 1, \xi > \frac{2}{3}\alpha^3\}$ .

On peut le faire simplement, sans partition de l'unité. On reprend la factorisation (10.20) qui reste valable. On va donner un minorant du terme (strictement positif pour tout  $t$  dans le cas où  $\xi > \frac{2}{3}\alpha^3$ ) :

$$F(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}t + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)}.$$

On a  $F'(t) = 0$  pour  $t = -\frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}$ , ce qui donne que pour tout  $\xi > \frac{2}{3}\alpha^3$  :

$$F(t) \geq -\frac{t_3(\alpha, \xi)^2}{12} + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)}.$$

On a donc dans ce cas que  $\frac{Q(\psi)}{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minoré par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + \left( -\frac{t_3(\alpha, \xi)^2}{12} + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)} \right)^2 (t - t_3(\alpha, \xi))^2,$$

sur  $\mathbb{R}$ . On reprend l'expression exacte de  $t_3(\alpha, \xi)$  donné dans le lemme 10.11. Uniformément en  $\alpha \in [0, 1]$ , on a l'équivalent suivant pour  $\xi \rightarrow +\infty$  :

$$t_3(\alpha, \xi) \underset{\xi \rightarrow +\infty}{\sim} (3\xi)^{1/3}.$$

On a donc qu'il existe  $B > 0$  et  $K > 0$  telles que pour tout  $\xi > K$  (avec  $\xi > \frac{2}{3}\alpha^3$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$ ) :

$$\left( -\frac{t_3(\alpha, \xi)^2}{12} + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)} \right) \geq B\xi^{2/3}.$$

On a donc dans ce cas que pour tout  $\xi > K$ ,  $\frac{Q(\psi)}{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est encore minoré par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + B^2\xi^{4/3}(t - t_3(\alpha, \xi))^2,$$

sur  $\mathbb{R}$ .

Après la translation  $t' = t - t_3(\alpha, \xi)$  et le changement d'échelle  $\tau = (B^2\xi^{4/3})^{1/4} t'$ , on obtient pour tout  $\xi > K$  que  $\frac{Q(\psi)}{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minoré par le bas du spectre de l'opérateur :

$$(B^2\xi^{4/3})^{1/2} (D_\tau^2 + \tau^2),$$

sur  $\mathbb{R}$ . On retrouve l'oscillateur harmonique (voir la section 2.1), ce qui donne finalement que pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $\xi > K$  (avec  $K$  préalablement fixé assez grand) :

$$Q(\psi) \geq (B^2\xi^{4/3})^{1/2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Comme  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} B^2\xi^{4/3} = +\infty$ , ceci conclut finalement l'étude sur l'ensemble  $\{\xi > \frac{2}{3}\alpha^3 \geq 0\}$ .

### Étude sur l'ensemble $\{0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3\}$

Il reste à effectuer l'étude sur l'ensemble  $\{0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3\}$ . On considère le même découpage de  $\mathbb{R}$  que dans les deux cas précédents.

Sur l'ensemble  $\{0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3\}$ , le polynôme  $P_{\alpha, \xi}$  admet trois racines réelles. Sa forme factorisée est la suivante :

$$P_{\alpha, \xi}(t) = -\frac{1}{3}(t - t_1(\alpha, \xi))(t - t_2(\alpha, \xi))(t - t_3(\alpha, \xi)),$$

où on rappelle que  $t_1(\alpha, \xi) \leq t_2(\alpha, \xi) \leq t_3(\alpha, \xi)$  (voir le lemme 10.11 pour les expressions exactes).

On peut remarquer avec une simple étude des variations de  $P_{\alpha, \xi}$  que :

$$t_1(\alpha, \xi) \leq t_2(\alpha, \xi) \leq 0 \leq t_3(\alpha, \xi).$$

On va une nouvelle fois avoir besoin d'un encadrement de  $t_3(\alpha, \xi)$ . Dans ce cas où  $0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3$  il est facile de voir que :

$$\sqrt{3}\alpha \leq t_3(\alpha, \xi) \leq 2\alpha,$$

car  $P_{\alpha, \xi}(\sqrt{3}\alpha) = \xi > 0$  et  $P_{\alpha, \xi}(2\alpha) < 0$ .

Pour avoir  $\alpha_+ < t_3(\alpha, \xi)$ , on impose la condition suivante sur le paramètre  $R(\alpha)$  :

$$(10.29) \quad \alpha + R(\alpha) < \sqrt{3}\alpha.$$

Sur  $\Omega^{(1)}$ , on a  $(t - t_3(\alpha, \xi))^2 \geq (t_3(\alpha, \xi) - \alpha_+)^2 \geq (\sqrt{3}\alpha - \alpha_+)^2$ . En gardant les mêmes notations que pour l'étude précédente, on a :

$$\mathbf{Q}(\psi_1) \geq \int_{-\infty}^{\alpha_+} |\psi_1'|^2 + \frac{(\sqrt{3}\alpha - \alpha_+)^2}{9} (t - t_1(\alpha, \xi))(t - t_2(\alpha, \xi)) |\psi_1|^2 dt.$$

On pose  $\check{B}_1(\alpha) = \frac{(\sqrt{3}\alpha - \alpha_+)^2}{9}$  (strictement positif avec la condition (10.9)). On obtient que  $\frac{\mathbf{Q}(\psi_1)}{\|\psi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + \check{B}_1(\alpha)(t - t_1(\alpha, \xi))(t - t_2(\alpha, \xi)),$$

sur  $L^2(-\infty, \alpha_+)$  avec condition de Dirichlet en  $\alpha_+$ . Après la translation  $t' = t + \frac{t_1(\alpha, \xi) + t_2(\alpha, \xi)}{2}$  et après l'homogénéisation  $\tau = \check{B}_1(\alpha)^{1/6} t'$ , on obtient que le bas du spectre de ce dernier opérateur est lui-même minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$\check{B}_1(\alpha)^{1/3} (D_\tau^2 + (\tau - D(\alpha, \xi))^2 (\tau + D(\alpha, \xi))^2),$$

sur  $L^2(-\infty, \check{b}_1(\alpha, \xi))$ , avec  $\check{b}_1(\alpha, \xi) = \check{B}_1(\alpha)^{1/6} \left( \alpha_+ + \frac{t_1(\alpha, \xi) + t_2(\alpha, \xi)}{2} \right)$  et condition de Dirichlet en  $\check{b}_1(\alpha, \xi)$  et où :

$$D(\alpha, \xi) = \frac{t_2(\alpha, \xi) - t_1(\alpha, \xi)}{2} > 0.$$

En notant  $\check{\omega}_1^{(1)}(\alpha, \xi)$  le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_\tau^2 + (\tau - D(\alpha, \xi))^2 (\tau + D(\alpha, \xi))^2$$

sur  $L^2(-\infty, \check{b}_1(\alpha, \xi))$  avec condition de Dirichlet en  $\check{b}_1(\alpha, \xi)$ , obtient alors :

$$(10.30) \quad \mathbf{Q}(\psi_1) \geq \check{B}_1(\alpha)^{1/3} \check{\omega}_1^{(1)}(\alpha, \xi) \|\psi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Il reste à donner une minoration sur  $\Omega^{(2)}$ .

La forme factorisée de  $P_{\alpha, \xi}$  donnée par (10.20) reste valable.

Sur  $\Omega^{(2)}$ , par positivité des coefficients on peut alors écrire de la même manière :

$$\left( \frac{1}{3}t^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}t + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)} \right)^2 \geq \left( \frac{1}{3}\alpha_-^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}\alpha_- + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \delta)} \right)^2.$$

L'encadrement de  $t_3(\alpha, \xi)$  qui a été obtenu précédemment pour  $0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3$  permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$\left( \frac{1}{3}t^2 + \frac{t_3(\alpha, \xi)}{3}t + \frac{\xi}{t_3(\alpha, \xi)} \right)^2 \geq \frac{1}{9} \left( \alpha_-^2 + \sqrt{3}\alpha\alpha_- + \frac{\xi}{2\alpha} \right)^2.$$

On pose  $\check{B}_2(\alpha, \xi) = \frac{1}{9} \left( \alpha_-^2 + \sqrt{3}\alpha\alpha_- + \frac{\xi}{2\alpha} \right)^2 > 0$ . On obtient que  $\frac{\mathbf{Q}(\psi_2)}{\|\psi_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$  est minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$D_t^2 + \check{B}_2(\alpha, \xi) (t - t_3(\alpha, \xi))^2,$$

sur  $L^2(\alpha_-, +\infty)$  avec condition de Dirichlet en  $\alpha_-$ . Après la translation  $t' = t - t_3(\alpha, \xi)$  et après l'homogénéisation  $\tau = \check{B}_2(\alpha, \xi)^{1/4}t'$ , on obtient que le bas du spectre de ce dernier opérateur est lui-même minorée par le bas du spectre de l'opérateur :

$$\check{B}_2(\alpha, \xi)^{1/2} (D_\tau^2 + \tau^2),$$

sur  $L^2(-\check{b}_2(\alpha, \xi), +\infty)$  avec condition de Dirichlet en  $-\check{b}_2(\alpha, \xi)$ , où  $\check{b}_2(\alpha, \xi) = -\check{B}_2(\alpha, \xi)^{1/4}(\alpha_- - t_3(\alpha, \xi))$ .

En notant  $\check{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi)$  le bas du spectre de l'opérateur  $(D_\tau^2 + \tau^2)$  sur  $L^2(-\check{b}_2(\alpha, \xi), +\infty)$  et condition de Dirichlet en  $-\check{b}_2(\alpha, \xi)$ , obtient alors :

$$(10.31) \quad \mathbf{Q}(\psi_2) \geq \check{B}_2(\alpha, \xi)^{1/2} \check{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi) \|\psi_2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

En reprenant alors la formule de localisation (10.10), le terme de reste (10.11), ainsi que les estimées (10.30) et (10.31), on obtient la minoration suivante :

$$(10.32) \quad \mathbf{Q}(\psi) \geq \min \left\{ \check{B}_1(\alpha)^{1/3} \check{\omega}_1^{(1)}(\alpha, \xi), \check{B}_2(\alpha, \xi)^{1/2} \check{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi) \right\} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{C^2}{R(\alpha)^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Comme dans les cas précédents, on choisit désormais le paramètre  $R(\alpha)$ . On fixe  $R(\alpha) = R > 0$  avec  $R < \frac{1}{2}$  de sorte que la condition (10.9) soit (comme dans (10.24)) bien vérifiée pour  $\alpha \geq 1$ . Pour  $R$  fixe, la contrainte (10.29) devient :

$$(10.33) \quad R < (\sqrt{3} - 1)\alpha,$$

qui est bien satisfaite pour tout  $\alpha \geq 1$  si on choisit  $R < \frac{1}{2}$ . Comme dans les cas précédent, ceci exclut de l'étude l'ensemble compact  $\{0 \leq \xi \leq \frac{2}{3}\alpha^3, 1 \leq \alpha\}$  (on note dans ce cas que la condition (10.9) est également bien vérifiée), ce qui n'est pas dérangeant dans la preuve de l'existence d'un minimum.

On a d'une part :

$$(10.34) \quad \check{B}_1(\alpha) = \frac{((\sqrt{3} - 1)\alpha - R)^2}{9} \quad \text{et} \quad \check{B}_2(\alpha, \xi) = \frac{((\alpha - R)^2 + \sqrt{3}\alpha(\alpha - R) + \frac{\xi}{2\alpha})^2}{9}.$$

On va de nouveau étudier la limite du minorant lorsque  $\alpha + \xi \rightarrow +\infty$  (avec  $\alpha \geq 0$  et  $\xi \geq 0$ ). Contrairement au cas précédent,  $\check{B}_1(\alpha)$  ne dépend pas de  $\xi$ . On remarque cependant que sur l'ensemble  $0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3$ , si  $\xi$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\alpha$  tend également vers  $+\infty$  de sorte qu'on a :

$$(10.35) \quad \lim_{\alpha + \xi \rightarrow +\infty} \check{B}_1(\alpha) = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha + \xi \rightarrow +\infty} \check{B}_2(\alpha, \xi) = +\infty.$$

On note qu'on a le comportement asymptotique suivant pour  $\alpha \rightarrow +\infty$  (sans tenir compte des constantes multiplicatives) :

$$(10.36) \quad \check{B}_1(\alpha) \sim \alpha^2.$$

Comme dans les deux cas précédent, on retrouve ainsi qu'après scaling, l'énergie croit dans ce cas en  $\alpha^{2/3}$ .

Indépendamment des quantités :

$$\check{b}_1(\alpha, \xi) = \check{B}_1(\alpha)^{1/6} \left( \alpha + R + \frac{t_1(\alpha, \xi) + t_2(\alpha, \xi)}{2} \right) \quad \text{et} \quad \check{b}_2(\alpha, \xi) = \check{B}_2(\alpha, \xi)^{1/4} (-\alpha + R + t_3(\alpha, \xi)),$$

le principe du Min-Max (voir l'Annexe A.3) donne comme dans (10.17) et (10.27) les minorations suivantes (uniformes en  $(\alpha, \xi)$ ) :

$$(10.37) \quad \check{\omega}_1^{(1)}(\alpha, \xi) \geq W_0 \quad \text{et} \quad \check{\omega}_1^{(2)}(\alpha, \xi) \geq 1,$$



où  $W_0 = \inf_{D \in \mathbb{R}} \text{Sp}(\mathcal{W}(D))$  où désigne la réalisation autoadjointe de l'opérateur :

$$D_\tau^2 + (\tau - D)^2(\tau + D)^2,$$

sur  $\mathbb{R}$ , défini comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique :

$$\psi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi'(\tau)|^2 + (\tau - D)^2(\tau + D)^2|\psi(\tau)|^2) d\tau,$$

sur le domaine de forme :

$$\{\psi \in L^2(\mathbb{R}), \psi' \in L^2(\mathbb{R}), \tau^2\psi \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

La connaissance de l'opérateur de Montgomery (voir la section 2.3) permet d'affirmer que la première fonction de bande de l'opérateur  $\mathcal{W}(D)$  admet un unique minimum non dégénéré atteint pour  $D = \sqrt{\eta_0}2^{1/3}$  et valant  $W_0 = 2^{2/3}M_0$ .

On reprend l'équation (10.32) ainsi que les points (10.37), (10.34) et (10.35). On a alors que pour toute constante  $\check{B} > 0$  arbitrairement grande, il existe  $\check{A} > 0$  tel que pour tout  $\alpha + \xi > \check{A}$  (pour  $\xi \geq 0$  et  $\alpha > 1$  avec (10.33)) :

$$(10.38) \quad \mathcal{Q}(\psi) \geq \check{B}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{C^2}{R^2}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

ce qui conclut l'étude sur l'ensemble  $\{0 \leq \xi < \frac{2}{3}\alpha^3\}$ .

On a donc finalement démontré que :

$$\lim_{|\alpha|+|\xi| \rightarrow +\infty} \varrho_1(\alpha, \xi) = +\infty,$$

ce qui donne en particulier l'existence d'un minimum. □

Ce qui suit complète l'étude du minimum en donnant un majorant numérique.

En utilisant la Librairie Éléments Finie Méliana++ sur le segment  $[-50, 50]$  avec condition (artificielle) de Dirichlet au bord avec 1 élément  $\mathbb{P}_{150}$  pour calculer numériquement la plus petite valeur propre de l'opérateur  $X_{\alpha, \xi}$ , pour une discrétisation régulière du carré  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  en  $\alpha$  et  $\xi$ , on trouve une valeur numérique de 0.53 pour le minimum. Comme on a, par principe du Min-Max (le théorème A.9 en Annexe) :

$$\inf \text{Sp}(X_{\alpha, \xi}) \text{ sur } \mathbb{R} \leq \inf \text{Sp}(X_{\alpha, \xi}^{\text{Dir}}) \text{ sur } [-50, 50],$$

pour tout couple  $(\alpha, \xi)$  (où  $X_{\alpha, \xi}^{\text{Dir}}$  désigne la réalisation de Dirichlet), on obtient que :

$$\min_{(\alpha, \xi) \in [-2, 2] \times [-2, 2]} \varrho_1(\alpha, \xi) \leq 0.53.$$

On renvoie à la figure 1 pour une illustration numérique.

**10.1.4. Conjectures.** On sait déjà (voir la proposition 10.13) que sur l'ensemble  $\{\xi = \frac{2}{3}\alpha^3\}$ , il ne peut exister de point critique. Les énoncés qui suivent sont des résultats attendus, mais qui restent à démontrer.

**Conjecture 10.15.** La fonction  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\alpha, \xi) \mapsto \varrho_1(\alpha, \xi)$  admet un unique minimum sur l'ensemble  $\{\alpha \geq 0, \xi \geq 0\}$ .

Une valeur numérique de  $(\alpha_0, \xi_0)$  est donnée par  $(\alpha_0, \xi_0) = (0.784, 0)$ .

**Conjecture 10.16.** On se place sous la conjecture 10.16 précédente. L'unique minimum de la fonction  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\alpha, \xi) \mapsto \varrho_1(\alpha, \xi)$  sur  $\{\alpha \geq 0, \xi \geq 0\}$  est atteint pour  $\xi = 0$ .

**Conjecture 10.17.** Les minima de la fonction de bande  $\varrho_1$  sont non dégénérés.

La figure 1, précédemment donnée en introduction (voir la figure 1), représente les valeurs prises par la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$  sur un domaine compact. Elle a été obtenue en utilisant la librairie Éléments Finie Méliana++ sur le segment  $[-50, 50]$  avec 1 élément  $\mathbb{P}_{150}$  pour calculer numériquement la plus petite valeur propre de l'opérateur  $X_{\alpha, \xi}$  pour une discrétisation régulière du carré  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  en  $\alpha$  et  $\xi$  (voir aussi la proposition 10.15). La courbe tracée en noir représente l'ensemble :

$$\left\{ \xi = \frac{2}{3}\alpha^3 \right\}$$

sur lequel le polynôme  $P_{\alpha, \xi}$  admet une racine réelle simple et une racine réelle double (voir le lemme 10.11). Cette courbe délimite la zone :

$$\left\{ \xi \geq \frac{2}{3}\alpha^3 > 0 \right\} \cup \left\{ \xi \leq \frac{2}{3}\alpha^3 < 0 \right\}$$

sur laquelle il ne peut pas exister de point critique (voir la proposition 10.13). La figure suivante présente

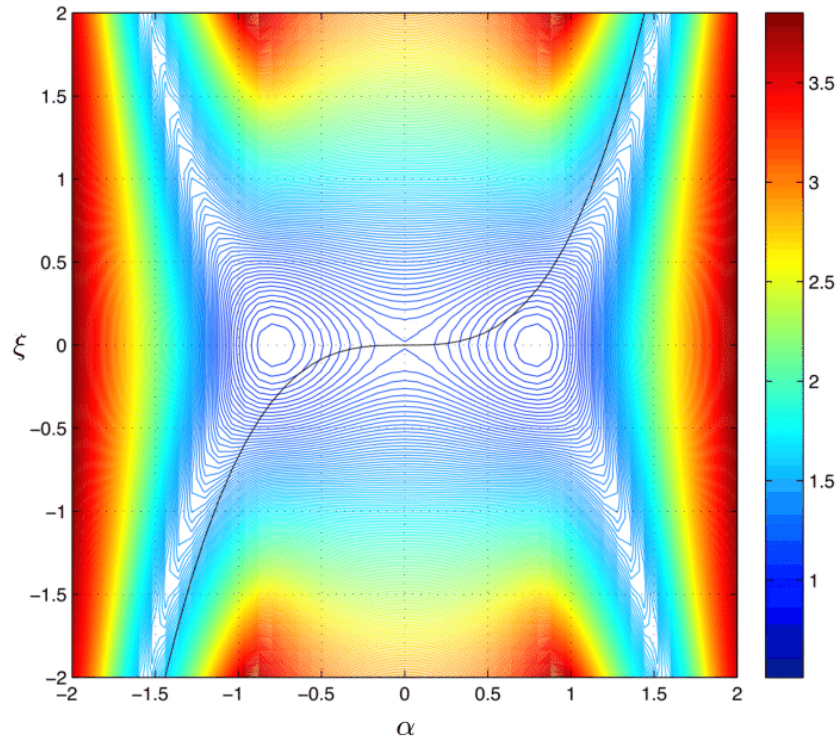


FIGURE 1. Valeurs numérique de  $\varrho_1(\alpha_k, \xi_l)$ , pour  $\alpha_k = -2 + \frac{4k}{50}$  et  $\xi_k = -2 + \frac{4l}{50}$  avec  $k, l \in \{1, \dots, 50\}$ .

la courbe numérique de la fonction (paire) partielle  $\alpha \mapsto \varrho_1(\alpha, 0)$  :

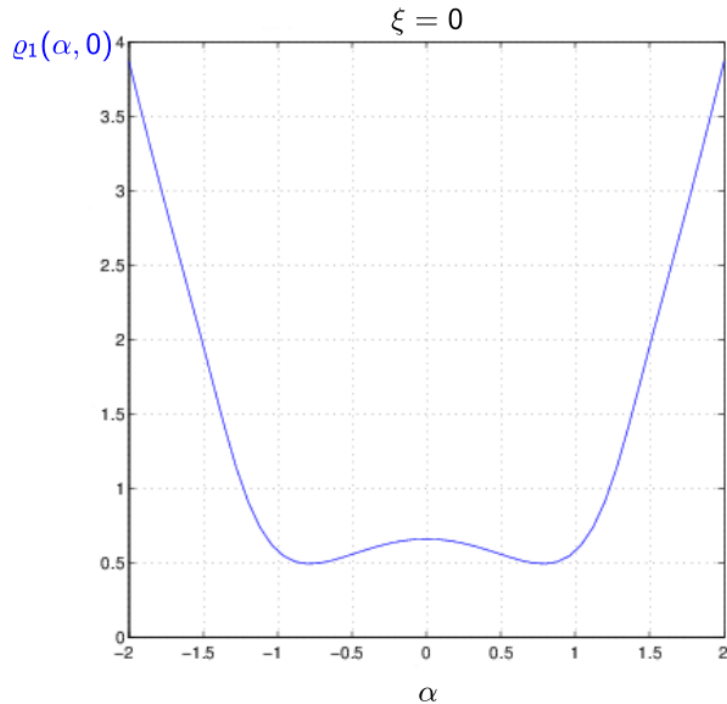


FIGURE 2. Courbe de  $\varrho_1(\alpha, 0)$  pour  $\alpha \in [-2, 2]$ .

La valeur des minima de cette courbe est voisine de la valeur 0.53 évoquée dans la preuve de la proposition 10.14. En  $\alpha = 0$ , on retrouve que :  $M_0^{[2]} \approx 0.66$ .

## 10.2. Étude spectrale dans la limite petit angle

**10.2.1. Énoncé du résultat principal.** On va déterminer la structure du bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en fonction du minimum de la "fonction de bande"  $(\alpha, \xi) \mapsto \varrho_1(\alpha, \sigma)$ .

**Théorème 10.18.** *Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  on ait :*

$$|\lambda_n(\varepsilon) - S_0| \leq C\varepsilon,$$

où on rappelle que  $S_0$  est définie dans la notation 1.19 de l'introduction.

**Remarque 10.19.** Pour démontrer le théorème 10.19, on ne fait aucune hypothèse sur les minima de la fonction de bande  $\varrho_1(\alpha, \xi)$ . On sait avec le théorème 10.9 qu'il s'agit d'un ensemble compact et on utilise seulement ce fait.

**Notation 10.20.** Dans ce qui suit, on désignera par  $(\alpha_0, \xi_0)$  un point quelconque vérifiant  $\varrho_1(\alpha_0, \xi_0) = S_0$ .

**10.2.2. Développement formel en puissance de  $\varepsilon$ .** On va établir un résultat de majoration des  $n$  premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$ . Le changement d'échelle :

$$(10.39) \quad \sigma = \varepsilon^{-1}s, \quad \tau = t,$$

ramène l'étude spectrale de l'opérateur  $\mathcal{X}_\varepsilon$  à celle de l'opérateur unitairement équivalent suivant en dimension 2 :

$$\mathcal{L}_\varepsilon = D_t^2 + \left( \varepsilon D_s + s^2 t - \frac{t^3}{3} \right)^2.$$

Avec le nouveau changement d'échelle :

$$(10.40) \quad s = \alpha_0 + \varepsilon^{1/2} \mathfrak{s}, \quad t = \mathfrak{t},$$

et le changement de jauge  $e^{i\xi_0 \mathfrak{s} / \varepsilon^{1/2}}$ , l'opérateur devient :

$$\mathfrak{L}_\varepsilon = D_{\mathfrak{t}}^2 + \left( \xi_0 + \varepsilon^{1/2} D_{\mathfrak{s}} + \varepsilon \mathfrak{s}^2 \mathfrak{t} + 2\varepsilon^{1/2} \alpha_0 \mathfrak{s} \mathfrak{t} + \alpha_0^2 \mathfrak{t} - \frac{\mathfrak{t}^3}{3} \right)^2.$$

**Proposition 10.21.** *Pour tout  $N \geq 1$ , il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  il existe au moins  $N$  valeurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{X}_\varepsilon$  (comptées avec multiplicité) contenues dans une boule de taille  $C_N \varepsilon^{3/2}$  centrée en  $S_0$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $N \geq 1$  un entier préalablement fixé. Les opérateurs  $\mathfrak{X}_\varepsilon$  et  $\mathfrak{L}_\varepsilon$  étant isospectraux (voir les changements d'échelle (10.39) et (10.40)), on va montrer le résultat pour l'opérateur  $\mathfrak{L}_\varepsilon$ .

On peut écrire formellement :

$$(10.41) \quad \mathfrak{L}_\varepsilon = \mathfrak{L}_0 + \varepsilon^{1/2} \mathfrak{L}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

avec :

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{X}_{\alpha_0, \xi_0}, \quad \mathfrak{L}_1 = (\partial_{\alpha} \mathfrak{X})_{\alpha_0, \xi_0} \mathfrak{s} + (\partial_{\xi} \mathfrak{X})_{\alpha_0, \xi_0} D_{\mathfrak{s}} = 2 \left( \xi_0 + \alpha_0^2 \mathfrak{t} - \frac{\mathfrak{t}^3}{3} \right) (D_{\mathfrak{s}} + 2\alpha_0 \mathfrak{s} \mathfrak{t}).$$

On s'intéresse à des quasimodes de la forme :

$$\psi = \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{j/2} \psi_j, \quad \text{avec } \varkappa = \sum_{j=0}^1 \varepsilon^{j/2} \varkappa_j,$$

de sorte que l'équation suivante :

$$\mathfrak{L}_\varepsilon \psi = \varkappa \psi + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

soit vérifiée au sens des séries formelles.

On identifie successivement chaque terme relativement aux puissances de  $\varepsilon$ .

**Termes en  $\varepsilon^0$ .** On résout l'équation :

$$\mathfrak{X}_{\alpha_0, \xi_0} \psi_0 = \varkappa_0 \psi_0,$$

et qui donne par définition que  $\varkappa_0$  est dans le spectre de l'opérateur dominant " $\mathfrak{X}_{\alpha_0, \xi_0}$ " et que  $\psi_0$  est une fonction propre associée. On choisit :

$$(10.42) \quad \varkappa_0 = S_0,$$

et on prend  $\psi_0$  (unitaire) sous la forme tensorisée :

$$(10.43) \quad \psi_0(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = f_0(\mathfrak{s}) u_0(\mathfrak{t}),$$

avec  $u_0 = u_{\alpha_0, \xi_0}$  et  $f_0$  dans la classe de Schwartz.

**Termes en  $\varepsilon^{1/2}$ .** On résout l'équation  $(\mathfrak{L}_0 - S_0) \psi_1 = -(\varkappa_1 - \mathfrak{L}_1) \psi_0$  qui revient à :

$$(\mathfrak{X}_{\alpha_0, \xi_0} - S_0) \psi_1 = (\varkappa_1 - \mathfrak{L}_1) \psi_0.$$

La fonction  $\psi_0$  étant déterminée, en prenant le produit scalaire avec  $u_0$ , on obtient avec la condition de Fredholm (appliquée à  $\mathfrak{s}$  fixé, le produit scalaire étant pris par rapport à la variable  $\mathfrak{t}$ ) :

$$0 = \langle (\mathfrak{L}_0 - \varkappa_0) \psi_1, u_0 \rangle_{\mathfrak{t}} = \varkappa_1 - \langle \mathfrak{L}_1 \psi_0, u_0 \rangle_{\mathfrak{t}}.$$

Le calcul de  $\mathfrak{L}_1\psi_0$  donne :

$$\mathfrak{L}_1\psi_0(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = 2 \left( \xi_0 + \alpha_0^2 \mathfrak{t} - \frac{\mathfrak{t}^3}{3} \right) (u_{\alpha_0, \xi_0}(\mathfrak{t})(D_{\mathfrak{s}}f_0)(\mathfrak{s}) + 2\alpha_0 \mathfrak{s} \mathfrak{t} f_0(\mathfrak{s}) u_{\alpha_0, \xi_0}(\mathfrak{t})).$$

On trouve alors :

$$\langle \mathfrak{L}_1\psi_0, \psi_0 \rangle = 2(D_{\mathfrak{s}}f_0)(\mathfrak{s})f_0(\mathfrak{s}) \int_{\mathbb{R}} \left( \xi_0 + \alpha_0^2 \mathfrak{t} - \frac{\mathfrak{t}^3}{3} \right) u_{\alpha_0, \xi_0}^2(\mathfrak{t}) \, d\mathfrak{t} + 4\alpha_0 \mathfrak{s} f_0^2(\mathfrak{s}) \int_{\mathbb{R}} \left( \xi_0 + \alpha_0^2 \mathfrak{t} - \frac{\mathfrak{t}^3}{3} \right) \mathfrak{t} u_{\alpha_0, \xi_0}^2(\mathfrak{t}) \, d\mathfrak{t}.$$

Le couple  $(\alpha_0, \xi_0)$  est un point critique de la fonction de bande  $\varrho_1$ , on a donc avec les deux premières identités de la proposition 10.8 que  $\langle \mathfrak{L}_1\psi_0, \psi_0 \rangle = 0$ , ce qui impose :

$$(10.44) \quad \varkappa_1 = 0.$$

On peut expliciter l'expression à l'aide de (10.4) et (10.5), par "identification" :

$$(10.45) \quad \psi_1(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = (D_{\mathfrak{s}}f_0)(\mathfrak{s})(\partial_{\xi}u_{\alpha, \xi})_{\alpha_0, \xi_0}(\mathfrak{t}) + \mathfrak{s}f_0(\mathfrak{s})(\partial_{\alpha}u_{\alpha, \xi})_{\alpha_0, \xi_0}(\mathfrak{t}) + f_1(\mathfrak{s})u_0(\mathfrak{t}).$$

On note que sous la condition de Fredholm, on peut prendre  $\psi_1 \perp \psi_0$  en choisissant  $f_1 = 0$ .

Il est clair que la fonction  $\psi_0$  appartient à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . Il en découle par un procédé classique (analogue à celui présenté dans l'Annexe B.4) que la fonction  $\psi_1$  appartient également à l'ensemble  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ .

On peut facilement voir avec l'analyse précédente que pour n'importe quelle fonction  $\psi$  de la forme :

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon^{1/2}\psi_1,$$

où  $\psi_0$  et  $\psi_1$  sont données respectivement comme dans (10.43) et (10.45), on a :

$$\|(\mathfrak{L}_{\varepsilon} - S_0)\psi\| \leq C\varepsilon\|\psi\|,$$

pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$  pour une certaine constante  $C > 0$  et un certain  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit. Dans cette dernière construction, on note qu'on a le choix du  $f_0$ , qu'il suffit de prendre dans la classe de Schwartz.

On note  $(f_n^{\mathcal{H}})_{n \in \mathbb{N}^*}$  la base hilbertienne des fonctions de Hermite dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $E_n$  l'espace vectoriel engendré par les  $n$  premières fonctions de Hermite, et par  $F_n$  l'espace vectoriel suivant :

$$F_n(\varepsilon) = \{ \psi = \psi_0 + \varepsilon^{1/2}\psi_1, \psi_0, \psi_1 \text{ respectivement donnés par (10.43) et (10.45) avec } f_0 \in E_n \}.$$

L'espace vectoriel  $F_n$  est clairement de dimension  $n$  et contenu dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . Par construction il existe une constante  $C_n > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit tels que pour tout  $\psi \in F_n$  on a pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  :

$$\|(\mathfrak{L}_{\varepsilon} - S_0)\psi\| \leq C_n\varepsilon\|\psi\|.$$

En prenant  $n = N$ , on peut désormais conclure avec le théorème spectral généralisé (voir le théorème A.8 en Annexe). Celui-ci donne que pour une certaine constante  $C_N$  et  $\varepsilon_0$  assez petit et tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  on a :

$$\dim \text{Im} \left( \mathbf{1}_{[S_0 - C_N\varepsilon, S_0 + C_N\varepsilon]}(\mathfrak{L}_{\varepsilon}) \right) \geq N.$$

On en déduit le résultat pour l'opérateur  $\mathcal{X}_{\varepsilon}$  par équivalence unitaire.  $\square$

**Remarque 10.22.** A fortiori, ce résultat donne une majoration des  $N$  premières valeurs propres.

**10.2.3. Estimées d'Agmon semi-classiques.** En utilisant la proposition 2.22 et la proposition 10.14, on montre le résultat suivant :

**Proposition 10.23.** *Soit  $C_0 > 0$ . Il existe  $C > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  et  $c_0 > 0$  tels que pour toute paire d'éléments propres  $(\varkappa, \psi)$  de l'opérateur  $\mathcal{L}_\varepsilon$  vérifiant  $\varkappa \leq S_0 + C\varepsilon$  on a pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  :*

$$\|e^{2c_0|t|}\psi\|^2 < C\|\psi\|^2, \quad \mathcal{Q}_\varepsilon(e^{2c_0|t|}\psi) \leq C\|\psi\|^2.$$

La preuve est basée sur celle donnée dans [19, Proposition 2.5]. On commence par montrer que l'hypothèse 1.7 de [19] est satisfaite.

**Lemme 10.24.** *Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ , il existe  $R_* > 0$  tel que :*

$$\mathcal{Q}_\varepsilon^{\text{Dir}, \Omega_{R_*}} \geq S_0^*.$$

avec  $S_0^* > S_0$ .

DÉMONSTRATION. Ce résultat s'établit directement avec la proposition 2.20 □

Dans ce qui suit on utilise seulement le fait que le minimum est atteint (proposition 10.14).

PREUVE DE LA PROPOSITION 10.24. On considère  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction troncature supportée dans un voisinage de 0. Sans que cela soit nécessaire, on peut supposer que  $\chi \leq 1$ . On pose  $\Phi_\ell(s, t) = c_0\chi(t/\ell)|t|$ . Une application de la formule de localisation donne :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(e^{\Phi_\ell}\psi) = \varkappa\|e^{\Phi_\ell}\psi\| + \|\|\nabla\Phi_\ell|e^{\Phi_\ell}\psi\|^2.$$

On peut borner le gradient  $|\nabla\Phi_\ell|$  uniformément par rapport à  $\ell \geq 1$ . Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\ell \geq 1$  on a :

$$\|\|\nabla\Phi_\ell|e^{\Phi_\ell}\psi\|^2 \leq Cc_0^2\|e^{\Phi_\ell}\psi\|^2.$$

Avec cette dernière estimation et l'hypothèse du théorème qui donne une majoration de la valeur propre :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(e^{\Phi_\ell}\psi) \leq (S_0 + C_0\varepsilon + Cc_0^2)\|e^{\Phi_\ell}\psi\|^2.$$

Pour  $R > 0$ , on introduit une partition de l'unité  $(\chi_{1,R}, \chi_{2,R})$  suivant la variable  $t$  de sorte que :

$$\chi_{1,R}^2(t) + \chi_{2,R}^2(t) = 1, \quad |\nabla\chi_{1,R}|^2 + |\nabla\chi_{2,R}|^2 \leq CR^{-2} \text{ et } \text{supp}\chi_{2,R} \cap \mathcal{B}(0, R) = \emptyset.$$

Pour  $j \in \{1, 2\}$ , on introduit une partition de l'unité sur  $\mathbb{R}^2$  donnée par  $\chi_{j,R}^\times(t) = \chi_{j,R}(|t|)$ .

La formule de localisation appliquée de nouveau permet de déduire de ce qui précède que :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\chi_{1,R}^\times e^{\Phi_\ell}\psi) + \mathcal{Q}_\varepsilon(\chi_{2,R}^\times e^{\Phi_\ell}\psi) - CR^{-2}\|e^{\Phi_\ell}\psi\|^2 \leq (S_0 + C_0\varepsilon + Cc_0^2)\|e^{\Phi_\ell}\psi\|^2.$$

Comme  $\chi$  est borné ( $\chi \leq 1$ ), on peut écrire que :

$$\|\chi_{1,R}^\times e^{\Phi_\ell}\psi\|^2 \leq e^{Rc_0}\|\psi\|^2.$$

Dès lors que le terme  $e^{\Phi_\ell}$  est borné sur le support de  $\chi$ , on peut alors écrire qu'il existe  $C, C' > 0$  telles que pour tout  $\ell$  et  $\varepsilon$  :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\chi_{2,R}^\times e^{\Phi_\ell}\psi) - (S_0 + C_0\varepsilon + Cc_0^2 + CR^{-2})\|\chi_{2,R}^\times e^{\Phi_\ell}\psi\|^2 \leq C'\|\psi\|^2.$$

On note que la constante  $C'$  dépend bien évidemment de  $R$  mais est indépendante de  $\ell$  et de  $\varepsilon$ .

On désigne par  $\mathcal{Q}_\varepsilon^{\text{Dir}, \Omega_R}$  la forme quadratique associée à la réalisation Dirichlet de l'opérateur :

$$D_t^2 + \left( \xi_0 + \varepsilon^{1/2} D_s + \varepsilon \mathfrak{s}^2 t + 2\varepsilon^{1/2} \alpha_0 \mathfrak{s} t + \alpha_0^2 t - \frac{t^3}{3} \right)^2$$

sur le domaine  $\Omega_R = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{B}(0, R)}$ .

Le lemme 10.25 donne :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\chi_{2,R} e^{\Phi_\ell} \psi) \geq S_0^* \|\chi_{2,R} e^{\Phi_\ell} \psi\|^2.$$

On obtient l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  :

$$c \|\chi_{2,R} e^{\Phi_\ell} \psi\|^2 \leq C' \|\psi\|^2.$$

On note ensuite qu'il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\ell \geq 1$  et tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  on ait :

$$\|e^{\Phi_\ell} \psi\| \leq C \|\psi\|^2.$$

La conclusion s'obtient par passage à la limite  $\ell \rightarrow +\infty$  en utilisant le lemme de Fatou.  $\square$

Comme dans [19, Proposition 2.6], on obtient un résultat analogue par rapport à la variable  $s$  :

**Proposition 10.25.** *Soit  $C_0 > 0$ . Il existe  $C > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  et  $c_0 > 0$  tels que pour toute paire d'éléments propres  $(\varkappa, \psi)$  de l'opérateur  $\mathcal{L}_\varepsilon$  vérifiant  $\varkappa \leq S_0 + C\varepsilon$  on a :*

$$\|e^{2c_0|s|} \psi\|^2 < C \|\psi\|^2, \quad \mathcal{Q}_\varepsilon(e^{2c_0|s|} \psi) \leq C \|\psi\|^2.$$

**Corollaire 10.26.** *Soit  $C_0$  et  $k, l, d \in \mathbb{N}$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $C > 0$ , et  $c_0 > 0$  (voir notation du théorème 10.24 précédent) tels que pour toutes paires d'éléments propres  $(\varkappa, \psi)$  de  $\mathcal{L}_\varepsilon$  avec  $\varkappa \leq S_0 + C_0\varepsilon$  et tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  on a :*

$$\begin{aligned} \|t^k s^l \psi\| &\leq C \|\psi\|, & \mathcal{Q}_\varepsilon(t^k s^l \psi) &\leq C \|\psi\|^2, \\ \|(D_t)^d s^l t^k \psi\| &\leq C \|\psi\|, & \|(\varepsilon D_s)^d s^l t^k \psi\| &\leq C \|\psi\|. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Comme dans [19, Proposition 2.6], le résultat pour  $d = 1$  découle immédiatement des propositions 10.24 et 10.26 précédentes. Le résultat pour  $d \geq 2$  s'obtient en dérivant successivement l'équation aux valeurs propres  $\mathcal{L}_\varepsilon \psi = \varkappa \psi$ .  $\square$

**10.2.4. Décomposition en états cohérents.** On va démontrer un résultat de minoration des  $n$  premières valeurs propres en dessous d'un certain seuil. Combiné au résultat de la sous-section 10.2.2, cela va donner le dernier argument manquant pour la preuve du théorème principal 10.19. On pose :

$$g_0(\mathfrak{s}) = 2\pi^{-1/2} e^{-\mathfrak{s}^2/2},$$

et on introduit respectivement l'opérateur d'annihilation  $a$  et l'opérateur de création  $a^*$  (son adjoint formel) :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathfrak{s} + \partial_s), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathfrak{s} - \partial_s).$$

On a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} [a, a^*] &= 1, \quad \mathfrak{s} = \frac{a + a^*}{\sqrt{2}}, \quad \partial_s = \frac{a - a^*}{\sqrt{2}}, \quad aa^* = \frac{1}{2} (D_s^2 + \mathfrak{s}^2 + 1), \\ a^*a &= \frac{1}{2} (D_s^2 + \mathfrak{s}^2 - 1). \end{aligned}$$

On introduit les états cohérents :

$$f_{u,p}(\mathfrak{s}) = e^{ips} g_0(\mathfrak{s} - u),$$

et la projection associée définie pour  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  par :

$$(10.46) \quad \Pi_{u,p}\psi = \langle \psi, f_{u,p} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\mathbf{s})} f_{u,p} = \psi_{u,p} f_{u,p},$$

vérifiant les résultats connus suivants :

**Lemme 10.27.**

$$\psi = \int \Pi_{u,p}\psi \, dudp.$$

DÉMONSTRATION. La preuve se base sur le théorème de Fubini et la formule d'inversion de Fourier. On commence par introduire les notations suivantes :

$$\psi_t = \psi(\cdot, t), \quad g_u = g_0(\cdot - u), \quad \varphi_{t,u} = \psi_t g_u.$$

On part de  $\int \Pi_{u,p}\psi \, dudp$  en revenant à la définition de  $\Pi_{u,p}$  :

$$\begin{aligned} \left( \int \Pi_{u,p}\psi \, dudp \right) (\mathbf{s}, t) &= \int \langle \psi, f_{u,p} \rangle_{\mathbf{s}}(t) f_{u,p}(\mathbf{s}) \, dudp \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ips} g_0(\mathbf{s} - u) \left( \int_{\mathbb{R}_y} \psi(y, t) e^{-ipy} g_0(y - u) \, dy \right) \, dudp \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\varphi_{t,u}}(p) e^{ips} g_u(\mathbf{s}) \, dudp \\ &= \int_{\mathbb{R}_u} g_u(\mathbf{s}) \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}_p} \widehat{\varphi_{t,u}}(p) e^{ips} \, dp}_{2\pi\varphi_{t,u}(\mathbf{s})} \right) \, du. \end{aligned}$$

Comme  $\int_{\mathbb{R}} g_0(\mathbf{s})^2 \, d\mathbf{s} = \frac{1}{2\pi}$ , on a le résultat. □

**Lemme 10.28** (Formule de Parseval). *On a :*

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \int |\psi_{u,p}|^2 \, dudpdt.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que :

$$\int \psi \overline{\varphi} \, d\mathbf{s}dt = \int_{\mathbb{R}} \int \psi_{u,p} \overline{\psi_{u,p}} \, dudpdt.$$

la preuve se base sur le lemme 10.28 et le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} \int \psi \overline{\varphi} \, d\mathbf{s}dt &= \int \mathbb{R}^2 \psi(\mathbf{s}, t) \left( \int \Pi_{u,p}\varphi(\mathbf{s}, t) \, dudp \right) \, d\mathbf{s}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\varphi_{u,p}(t)} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}_s} \psi(\mathbf{s}, t) \overline{f_{u,p}(\mathbf{s})} \, d\mathbf{s}}_{\langle \psi, f_{u,p} \rangle_{\mathbf{s}}} \right) \, dudpdt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int \psi_{u,p} \overline{\varphi_{u,p}} \, dudpdt. \end{aligned}$$



On conclut en prenant  $\varphi = \overline{\psi}$ . □

**Lemme 10.29.** *Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a :*

$$(10.47) \quad (a)^m (a^*)^n \psi = \int \left( \frac{u - ip}{\sqrt{2}} \right)^n \left( \frac{u + ip}{\sqrt{2}} \right)^m \Pi_{u,p} \psi \, du dp.$$

DÉMONSTRATION. Un simple calcul donne :

$$a f_{u,p} = \frac{u + ip}{\sqrt{2}} f_{u,p}.$$

Le résultat s'obtient facilement par récurrence en utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. □

Les changements d'échelle (10.39) et (10.40) et le changement de jauge  $e^{i\xi_0 s/\varepsilon^{1/2}}$  ramène l'étude à celle de l'opérateur :

$$\mathfrak{L}_\varepsilon = D_t^2 + \left( \xi_0 + \varepsilon^{1/2} D_s + \varepsilon s^2 t + 2\varepsilon^{1/2} \alpha_0 s t + \alpha_0^2 t - \frac{t^3}{3} \right)^2,$$

qui s'écrit encore sous la forme :

$$\mathfrak{L}_\varepsilon = D_t^2 + (V_0(t) + \varepsilon^{1/2} (D_s + 2\alpha_0 s t) + \varepsilon s^2 t)^2.$$

On écrit explicitement :

$$\mathfrak{L}_\varepsilon = \mathfrak{L}_0 + \varepsilon^{1/2} \mathfrak{L}_1 + \varepsilon \mathfrak{L}_2 + \varepsilon^{3/2} \mathfrak{L}_3 + \varepsilon^2 \mathfrak{L}_4,$$

où

$$V_0(t) = \left( \xi_0 + \alpha_0^2 t - \frac{t^3}{3} \right),$$

et

$$\mathfrak{L}_0 = X_{\alpha_0, \xi_0},$$

$$\mathfrak{L}_1 = (\partial_\alpha X)_{\alpha_0, \xi_0} s + (\partial_\xi X)_{\alpha_0, \xi_0} D_s,$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2} \left( (\partial_\alpha^2 X)_{\alpha_0, \xi_0} s^2 + (\partial_\xi^2 X)_{\alpha_0, \xi_0} D_s^2 + (\partial_\alpha \partial_\xi X)_{\alpha_0, \xi_0} s D_s + (\partial_\xi \partial_\alpha X)_{\alpha_0, \xi_0} D_s s \right),$$

$$\mathfrak{L}_3 = 2 (D_s + 2\alpha_0 s t) s^2 t,$$

$$\mathfrak{L}_4 = (s^2 t)^2,$$

où on note que  $\mathfrak{L}_1$  et  $\mathfrak{L}_2$  sont plus explicitement donnés par :

$$\mathfrak{L}_1 = 2V_0(t) (D_s + 2\alpha_0 s t),$$

$$\mathfrak{L}_2 = 2V_0(t) s^2 t + (D_s + 2\alpha_0 s t)^2.$$

On réécrit ce dernier opérateur de la manière suivante :

$$(10.48) \quad \mathfrak{L}_\varepsilon = \underbrace{\mathfrak{L}_0 + \varepsilon^{1/2} \mathfrak{L}_1 + \varepsilon \mathfrak{L}_2^W + \varepsilon^{3/2} \mathfrak{L}_3^W + \varepsilon^2 \mathfrak{L}_4^W}_{\mathfrak{L}_\varepsilon^W} + \underbrace{\varepsilon \mathfrak{L}_{2,\text{reste}} + \varepsilon^{3/2} \mathfrak{L}_{3,\text{reste}} + \varepsilon^2 \mathfrak{L}_{4,\text{reste}}}_{\mathfrak{L}_{\varepsilon,\text{reste}}}.$$

Ce réordonnement (anti-Wick) consiste à mettre tous les opérateurs  $a^*$  à droite.

Grâce à l'identité  $a^* a = a a^* - 1$ , il est facile de voir très généralement que pour tout  $j$ , les  $\mathfrak{L}_{j,\text{reste}}$  sont des polynômes de degré  $j$  en  $s$  et  $D_s$ . On détermine ici explicitement leur expression.

On peut réécrire avec les identités  $\mathfrak{s} = \frac{a+a^*}{\sqrt{2}}$ ,  $\partial_{\mathfrak{s}} = \frac{a-a^*}{\sqrt{2}}$  :

$$\mathfrak{L}_1 = 2V_0(\mathfrak{t}) \left( -i \frac{a-a^*}{\sqrt{2}} + 2\alpha_0 \left( \frac{a+a^*}{\sqrt{2}} \right) \mathfrak{t} \right) = 2V_0(\mathfrak{t}) \left( \left( -\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{2\alpha_0 \mathfrak{t}}{\sqrt{2}} \right) a + \left( \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{2\alpha_0 \mathfrak{t}}{\sqrt{2}} \right) a^* \right).$$

Par linéarité en  $\mathfrak{s}$  et  $\partial_{\mathfrak{s}}$ , on a :

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1^W.$$

On obtient en développant :

$$\begin{aligned} \left( -i \frac{a-a^*}{\sqrt{2}} + 2\alpha_0 \left( \frac{a+a^*}{\sqrt{2}} \right) \mathfrak{t} \right)^2 &= -\frac{a^2 - aa^* - a^*a + (a^*)^2}{2} \\ &\quad + 2\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2 (a^2 + aa^* + a^*a + (a^*)^2) - i2\alpha_0 \mathfrak{t} (a^2 - (a^*)^2), \\ \left( \frac{a+a^*}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{1}{2} (a^2 + aa^* + a^*a + (a^*)^2). \end{aligned}$$

Comme  $[a, a^*] = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \left( -i \frac{a-a^*}{\sqrt{2}} + 2\alpha_0 \left( \frac{a+a^*}{\sqrt{2}} \right) \mathfrak{t} \right)^2 &= -\frac{a^2 - 2aa^* + (a^*)^2}{2} \\ &\quad + 2\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2 (a^2 + 2aa^* + (a^*)^2) - i2\alpha_0 \mathfrak{t} (a^2 - (a^*)^2) - \frac{1}{2} - 2\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2, \\ \left( \frac{a+a^*}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{1}{2} (a^2 + 2aa^* + (a^*)^2 - 1), \end{aligned}$$

On obtient finalement en réordonnant :

$$\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2^W + \mathfrak{L}_{2,\text{reste}}, \quad \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{L}_3^W + \mathfrak{L}_{3,\text{reste}}, \quad \mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_4^W + \mathfrak{L}_{4,\text{reste}},$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_2^W &= -\frac{a^2 - 2aa^* + (a^*)^2}{2} + 2\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2 (a^2 + 2aa^* + (a^*)^2)^2 - i2\alpha_0 \mathfrak{t} (a^2 - (a^*)^2) \\ &\quad + \mathfrak{t} V_0(\mathfrak{t}) (a^2 + 2aa^* + (a^*)^2), \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_2^W &= \left( -\frac{1}{2} + 2\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2 - i2\alpha_0 \mathfrak{t} + \mathfrak{t} V_0(\mathfrak{t}) \right) a^2 + (1 + 4\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2 + 2\mathfrak{t} V_0(\mathfrak{t})) (aa^*) \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2} + 2\alpha_0^2 \mathfrak{t}^2 + i2\alpha_0 \mathfrak{t} + \mathfrak{t} V_0(\mathfrak{t}) \right) (a^*)^2. \end{aligned}$$

En notant que  $a^*a^2 = a^2a^* - 2a$  et  $a^*aa^* = a(a^*)^2 - a^*$  d'une part :

$$\mathfrak{L}_3^W = \frac{\mathfrak{t}}{\sqrt{2}} \left( (-i + 2\alpha_0 \mathfrak{t}) a^3 + (-i + 6\alpha_0 \mathfrak{t}) a^2 a^* + (i + 6\alpha_0 \mathfrak{t}) a (a^*)^2 + (i + 2\alpha_0 \mathfrak{t}) (a^*)^3 \right),$$

et que  $(aa^*)^2 = a^2(a^*)^2 - aa^*$  d'autre part on a :

$$\mathfrak{L}_4^W = \frac{\mathfrak{t}^2}{4} (a^4 + 6a^2(a^*)^2 + (a^*)^4 + 4a^3 a^* + 4a(a^*)^3).$$

Les termes de reste sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{2,\text{reste}} &= \left( -\frac{1}{2} - 2\alpha_0 \mathfrak{t}^2 - 2\mathfrak{t}V_0(\mathfrak{t}) \right), \\ \mathfrak{L}_{3,\text{reste}} &= \frac{\mathfrak{t}}{\sqrt{2}} \left( (-i - 6\alpha_0 \mathfrak{t}) a - 3(i + 2\alpha_0 \mathfrak{t}) a^* \right), \\ \mathfrak{L}_{4,\text{reste}} &= \frac{\mathfrak{t}^2}{4} - \frac{1}{2} (a^2 + 4aa^* + (a^*)^2).\end{aligned}$$

On reprend la réécriture donnée par (10.48). Le lemme 10.30 permet de réécrire l'opérateur  $\mathfrak{L}_\varepsilon^W$  sous forme intégrale :

$$(10.49) \quad \mathfrak{L}_\varepsilon^W = \int \mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon} \Pi_{u,p} \psi \, dudp$$

Avec ce réarrangement, on obtient directement :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon} &= D_{\mathfrak{t}}^2 + \left( \xi_0 + \alpha_0^2 \mathfrak{t} + \varepsilon^{1/2} p + \varepsilon u^2 \mathfrak{t} + \varepsilon^{1/2} 2\alpha_0 u \mathfrak{t} - \frac{\mathfrak{t}^3}{3} \right)^2 \\ &= D_{\mathfrak{t}}^2 + (V_0(\mathfrak{t}) + \varepsilon^{1/2} (p + 2\alpha_0 u \mathfrak{t}) + \varepsilon u^2 \mathfrak{t})^2,\end{aligned}$$

dont l'expression s'avère être :

$$\mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon} = \mathsf{X}_{\alpha_0 + u\varepsilon^{1/2}, \xi_0 + p\varepsilon^{1/2}}.$$

On obtient donc finalement avec (10.48) :

$$(10.50) \quad \mathfrak{L}_\varepsilon \psi = \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon} \Pi_{u,p} \psi \, dudp + \mathfrak{L}_{\varepsilon,\text{reste}}.$$

On démontre désormais la proposition suivante :

**Proposition 10.30.** *Il existe  $h_0, C > 0$  tel que pour toute paire d'éléments propres  $(\varkappa, \psi)$  de l'opérateur  $\mathfrak{L}_\varepsilon$  vérifiant  $\varkappa \leq S_0 + C_0\varepsilon$  on a :*

$$\mathfrak{Q}_\varepsilon(\psi) \geq \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{Q}_{u,p,\varepsilon}(\psi_{u,p}) \, dudp - C\varepsilon \|\psi\|^2 \geq (S_0 - C\varepsilon) \|\psi\|^2,$$

où  $\mathfrak{Q}_{u,p,\varepsilon}$  est la forme quadratique associée à  $\mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon}$ .

DÉMONSTRATION. On reprend l'identité (10.50). Par définition on a :

$$\mathfrak{Q}_\varepsilon(\psi) = \langle \mathfrak{L}_\varepsilon \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}}.$$

On commence par obtenir un contrôle des termes de reste  $\langle \mathfrak{L}_{\varepsilon,\text{reste}} \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}}$  en utilisant le corollaire 10.27. Les opérateurs  $\mathfrak{L}_{2,\text{reste}}$ ,  $\mathfrak{L}_{3,\text{reste}}$  et  $\mathfrak{L}_{4,\text{reste}}$  sont des polynômes en  $\mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{t}$ ,  $\partial_{\mathfrak{s}}$  et  $\partial_{\mathfrak{t}}$ . En reprenant le changement d'échelle :

$$s = \varepsilon^{1/2} \mathfrak{s}, \quad t = \mathfrak{t},$$

on obtient les estimées suivantes :

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{L}_{2,\text{reste}} \psi, \psi \rangle &\leq C \|\psi\|^2, \\ \langle \mathfrak{L}_{3,\text{reste}} \psi, \psi \rangle &\leq C\varepsilon^{-1/2} \|\psi\|^2, \\ \langle \mathfrak{L}_{4,\text{reste}} \psi, \psi \rangle &\leq C\varepsilon^{-1} \|\psi\|^2.\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$(10.51) \quad \langle \mathfrak{L}_{\varepsilon,\text{reste}} \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}} \leq C\varepsilon \|\psi\|^2.$$

On s'occupe désormais de la partie principale  $\mathfrak{Q}_\varepsilon^W(\psi) = \langle \mathfrak{L}_\varepsilon^W \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}}$  de (10.50). On reprend la définition de la projection  $\Pi_{u,p} \psi$  donnée par (10.46). Comme l'opérateur  $\mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon}$  commute avec  $f_{u,p}(\mathfrak{s})$ , on peut écrire (avec le théorème de Fubini) :

$$(10.52) \quad \begin{aligned} \mathfrak{Q}_\varepsilon^W(\psi) &= \int_{\mathbb{R}_t} \int \mathfrak{L}_{u,p,\varepsilon} \psi_{u,p}(\mathfrak{t}) \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}_s} \overline{f_{u,p}(\mathfrak{s})} \psi(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) \, d\mathfrak{s}}_{\psi_{u,p}(\mathfrak{t})} \right) \, dudp \, d\mathfrak{t} \\ &= \int \mathfrak{Q}_{u,p,\varepsilon}(\psi_{u,p}) \, dudp. \end{aligned}$$

On obtient alors avec (10.51) et (10.52) :

$$\mathfrak{Q}_\varepsilon(\psi) \geq \int \mathfrak{Q}_{u,p,\varepsilon}(\psi_{u,p}) \, dudp - C\varepsilon \|\psi\|^2.$$

Comme :

$$\mathfrak{Q}_{u,p,\varepsilon}(\psi_{u,p}) \geq \varrho_1(\alpha_0 + u\varepsilon^{1/2}, \xi_0 + p\varepsilon^{1/2}) \int_{\mathbb{R}_t} |\psi_{u,p}|^2 \, d\mathfrak{t} \geq S_0 \int_{\mathbb{R}_t} |\psi_{u,p}|^2 \, d\mathfrak{t},$$

on obtient finalement avec la formule de Parseval du lemme 10.29 :

$$\varkappa \|\psi\|^2 = \mathfrak{Q}_\varepsilon(\psi) \geq S_0 \|\psi\|^2 - C\varepsilon \|\psi\|^2,$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

**10.2.5. Preuve du théorème 1.8.** On peut désormais établir le théorème 10.19. Le résultat découle immédiatement des propositions 10.22 et 10.31.

### 10.3. Simulations numériques pour l'opérateur modèle croix

Cette partie est dédiée à l'illustration numérique des résultats et des conjectures précédemment exposées.

Si on suppose que les conjectures 10.16 et 10.18 sont vraies, on a les résultats suivants (voir [19]) :

**Proposition 10.31.** *Sous les conjectures 10.16 et 10.18, on peut démontrer que pour tout  $n = 2p - 1$  avec  $p \geq 1$ , on a un développement asymptotique de la forme :*

$$\varkappa_n(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \varkappa_{n,j} \varepsilon^{j/2} \quad \text{et} \quad \varkappa_{n+1}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \varkappa_{n+1,j} \varepsilon^{j/2},$$

avec  $\varkappa_{n,0} = \varkappa_{n+1,0} = S_0$ ,  $\varkappa_{n,1} = \varkappa_{n+1,1} = 0$ , et où  $\varkappa_{n,2}$  et  $\varkappa_{n+1,2}$  désignent la  $p$ -ième valeur propre de  $\frac{1}{2} \text{Hess}_{\varrho_1}(\alpha_0, \xi_0)(\sigma, D_\sigma)$ .

On note encore pour finir que sous ces mêmes hypothèses, il est possible de démontrer le résultat suivant, énoncé sous forme de conjecture :

**Conjecture 10.32.** Sous les conjectures 10.16 et 10.18, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\varkappa_{2p}(\varepsilon) - \varkappa_{2p-1}(\varepsilon) \leq \mathcal{O}(\varepsilon^\infty).$$

Cette différence est même exponentiellement petite en  $\varepsilon$ .

**Remarque 10.33.** Ce dernier résultat précise un peu plus la structure du spectre qui donne que les valeurs propres se mettent par paires exponentiellement proches.

On commence par introduire la notation suivante :

**Notation 10.34.** Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\varepsilon_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}$ .

Les simulations numériques des figures 3 et 4 concernent les 6 premières valeurs propres pour 10 valeurs de  $\varepsilon$  données par  $\varepsilon_k$  pour  $k \in \{1, \dots, 10\}$ . Les courbes de ces deux graphiques sont fonctions de  $\log_2(\varepsilon_k^{-1})$  de sorte que l'axe des abscisses présente des valeurs décroissantes de  $\varepsilon$  apparaissant sur des demi-entiers.

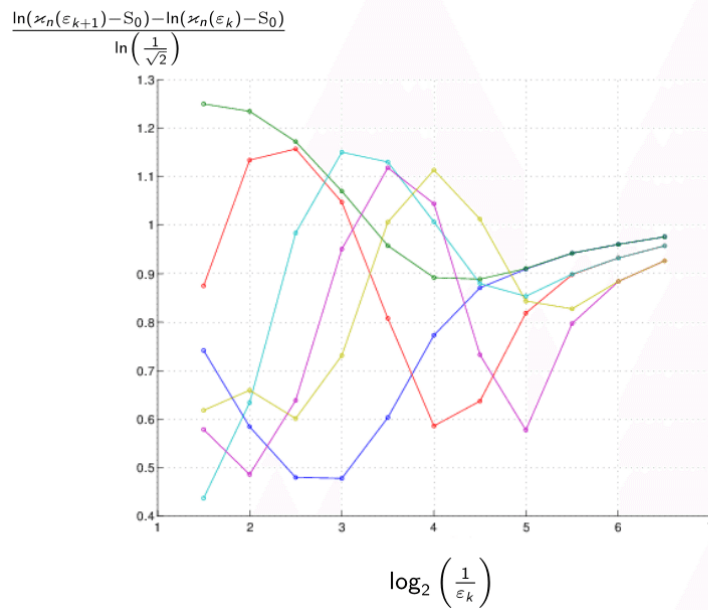


FIGURE 3. Convergence numérique vers l'exposant du deuxième terme de l'asymptotique (en  $\varepsilon$ ) pour les six premières valeurs propres de  $\mathcal{X}_\varepsilon$ .

La figure 3 représente  $[\ln(\mathcal{X}_n(\varepsilon_{k+1}) - S_0) - \ln(\mathcal{X}_n(\varepsilon_k) - S_0)] / \ln(2^{-1/2})$  (pour  $n \in \{1, \dots, 6\}$ ) en fonction de  $\log_2(\varepsilon_k^{-1})$ . On remarque que la valeurs des courbes numériques tend vers 1 correspondant à l'exposant du terme de reste en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ .

La figure 4 représente  $[\mathcal{X}_n(\varepsilon_k) - S_0] / \varepsilon_k$  (pour  $n \in \{1, \dots, 6\}$ ) en fonction de  $\log_2(\varepsilon_k^{-1})$ . On remarque que les courbes numériques s'organisent par paires. On observe la convergence de chacune de ces paires suivant une grille de valeurs correspondant aux valeurs propres de  $\frac{1}{2}\text{Hess}_{\varrho_1}(\alpha_0, \xi_0)(\sigma, D_\sigma)$  (oscillateur harmonique).

**10.3.1. Module du premier vecteur propre pour des valeurs décroissantes de  $\varepsilon$ .** On donne dans cette sous-section les graphiques numériques obtenus pour le premier vecteur propre.

Les figure 5 et 6 représentent respectivement le module et le logarithme du module (en  $\log_{10}$ ) pour différents valeur de  $\varepsilon_k$  ( $k \in \{1, \dots, 10\}$ ). Les échelles de la figure 5 sont données par :

$$[-a_k, a_k] \times [-8, 8],$$

où pour tout  $k = 1, \dots, 10$ ,  $a_k = \frac{4}{\varepsilon_k}$ . Dans les deux figures (5 et 6), la croix blanche représente les deux droites d'annulation.

On peut décrire la structure théorique des fonctions propres dans les variables "physiques".

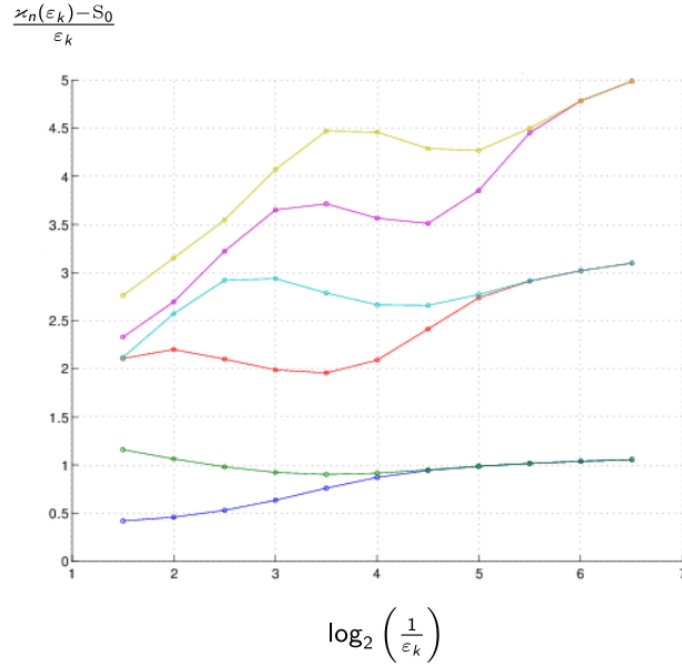


FIGURE 4. Convergence numérique vers le facteur multiplicatif du deuxième terme de l'asymptotique en  $\varepsilon$  pour les six premières valeurs propres de  $\mathcal{X}_\varepsilon$ .

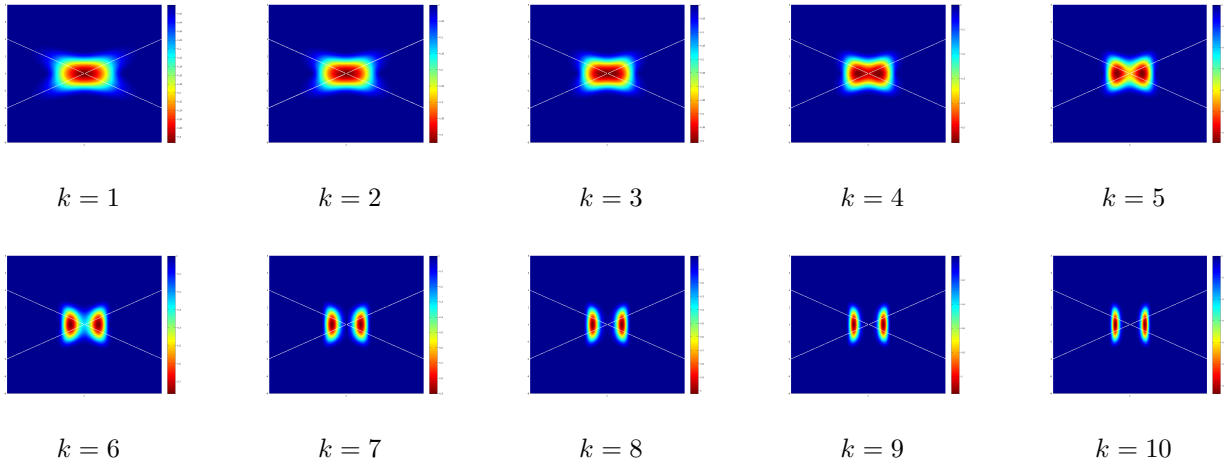


FIGURE 5. Module du premier mode de l'opérateur de  $\mathcal{X}_\varepsilon$ , pour différentes valeurs numériques de  $\varepsilon_k$  ( $k \in \{1, \dots, 10\}$ ). Éléments finis,  $48 \times 6$  éléments rectangulaires  $\mathbb{Q}_{10}$  (degré partiel 10 en chaque variable) pour une grille régulière.

### Centre de localisation dans la limite petit angle

On reprend le développement en puissance de  $\varepsilon$  de l'opérateur  $\mathfrak{L}_\varepsilon$ . La fonction  $\psi_0 = \psi_0^\varepsilon$  est donnée par :

$$(10.53) \quad \psi_0^\varepsilon(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) = f_0(\mathfrak{s})u_0(\mathfrak{t})e^{i\xi_0\mathfrak{s}/\varepsilon^{1/2}}.$$

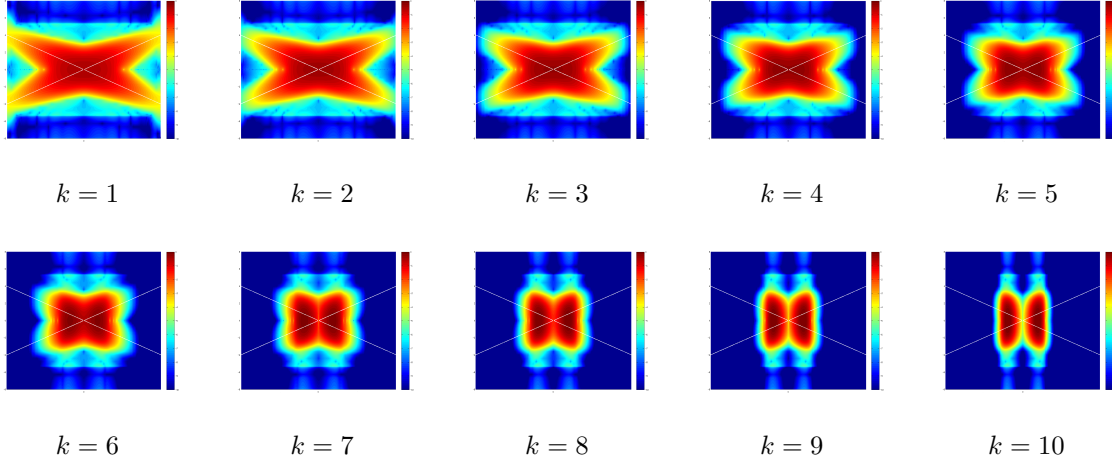


FIGURE 6. Logarithme du module du premier mode (en  $\log_{10}$ ) de l'opérateur de  $\mathcal{X}_\varepsilon$ , pour différentes valeurs numériques de  $\varepsilon_k$  ( $k \in \{1, \dots, 10\}$ ). Éléments finis,  $48 \times 6$  éléments rectangulaires  $\mathbb{Q}_{10}$  (degré partiel 10 en chaque variable) pour une grille régulière.

Le changement d'échelle (10.40) donne qu'un bon quasimode pour l'opérateur  $\mathcal{L}_\varepsilon$  est donné par :

$$f_0 \left( \frac{s - \alpha_0}{\varepsilon^{1/2}} \right) u_0(t) e^{i\xi_0 \frac{s - \alpha_0}{\varepsilon}}.$$

Il apparaît alors que l'opérateur  $\mathcal{L}_\varepsilon$  est bien adapté pour une étude numérique, étant donné qu'on peut prendre une taille de domaine fixe.

En revenant aux variables "physiques"  $(s, t)$ , on obtient l'expression suivante :

$$f_0 \left( \varepsilon^{1/2} \sigma - \frac{\alpha_0}{\varepsilon^{1/2}} \right) u_0(\tau) e^{i\xi_0 \left( \sigma - \frac{\alpha_0}{\varepsilon} \right)}.$$

Dans la limite petit angle  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ceci donne que les deux centres de localisation s'étalent à l'échelle  $\varepsilon^{-1/2}$  et s'échappent à l'infini sur l'axe des abscisses en  $s$  à "vitesse"  $\frac{1}{\varepsilon}$ . La "zone de localisation" des deux premières fonctions propres part à l'infini sur l'axe réel. C'est en un certain sens logique. Si on considère le cas singulier où  $\varepsilon = 0$  (les deux lignes d'annulation sont confondues), on retrouve l'opérateur de Montgomery  $\mathcal{M}^{[2]}(\xi)$ , qui a du spectre essentiel. Il est en quelque sorte naturel de retrouver la "perte de masse à l'infini", caractéristique des suites de Weyl.

## Théorie spectrale

### A.1. Définitions

Dans ce qui suit  $\mathcal{H}$  désigne un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T$  est un opérateur auto-adjoint de domaine  $\text{Dom}(T)$ .

**Definition A.1** (Spectre). Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T$  un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . Le spectre de l'opérateur  $T$  est l'ensemble noté  $\text{Sp}(T)$  et défini par :

$$\text{Sp}(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T),$$

où  $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C}, (T - z) \text{ est bijectif}\}$  désigne l'ensemble résolvant.

**Definition A.2** (Spectre discret, spectre essentiel). Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T$  un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . Le spectre discret de l'opérateur  $T$ , noté  $\text{Sp}_{\text{disc}}(T)$ , est l'ensemble de ses valeurs propres isolées de multiplicité finie. Le spectre essentiel de  $T$ , noté  $\text{Sp}_{\text{ess}}(T)$ , est donné par  $\text{Sp}_{\text{ess}}(T) = \text{Sp}(T) \setminus \text{Sp}_{\text{disc}}(T)$ .

**Definition A.3** (Paires propres). Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T$  un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\text{disc}}(T)$ , on dit que  $(\lambda, \psi)$  est une paire propre de  $T$  si  $\psi$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Pour finir on précise ce qu'on entend par développement asymptotique à tout ordre :

**Definition A.4** (Suite  $\beta$  affine). Soit  $\beta > 0$ . On dit qu'une suite  $(\beta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est  $\beta$  affine s'il s'agit d'une suite strictement croissante de réels positifs dont tous les termes peuvent s'écrire sous la forme suivante  $\beta_j = B_0 + j\beta$  partir d'un certain rang (avec  $B_0 \geq 0$ ).

**Definition A.5** (Développement asymptotique à tout ordre). Soit  $(\beta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite  $\beta$  affine  $\lambda(h)$  une fonction de  $h$ . On dit que  $\lambda$  admet un développement asymptotique à tout ordre s'il existe un réel strictement positif  $\beta$  et une suite de réels  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $J \in \mathbb{N}$  il existe  $C_J$ , et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $h \in (0, h_0)$  :

$$\left| \lambda(h) - \sum_{j=0}^J \lambda_j h^{\beta_j} \right| \leq C_J h^{\beta_{J+1}}.$$

On note alors :

$$\lambda(h) \sim \sum_{j=0}^J \lambda_j h^{\beta_j}.$$

On parle plus précisément de développement asymptotique à tout ordre en puissance de  $h^\beta$ .



## A.2. Théorème spectral

On commence par rappeler le théorème fondamental suivant :

**Théorème A.6** (Théorème spectral). *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint. Pour tout élément  $z$  de l'ensemble résolvant on a :*

$$\|(T - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \text{Sp}(T))}.$$

Ce résultat donne le corollaire suivant, utile en pratique :

**Corollaire A.7.** *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et tout  $\psi \in \text{Dom}(T)$ , la distance de  $\lambda$  au spectre de l'opérateur  $T$  dans  $\mathbb{C}$  vérifie l'inégalité :*

$$d(\lambda, \text{Sp}(T))\|\psi\| \leq \|(T - \lambda)\psi\|.$$

Ce dernier résultat implique que si on trouve une bonne fonction test normalisée  $\psi$  (appelée quasimode) et un nombre complexe  $\lambda$  tels que  $\|(T - \lambda)\psi\| \leq \varepsilon$ , alors  $d(\lambda, \text{Sp}(T)) \leq \varepsilon$ .

**Proposition A.8** (Théorème spectral généralisé). *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint et soit  $\varepsilon > 0$ . On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que pour tout  $\psi \in F \subset \text{Dom}(T)$  (où  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $N$ ), on a l'inégalité suivante :*

$$(A.1) \quad \|(T - \lambda)\psi\| \leq \varepsilon\|\psi\|.$$

Alors on a :

$$\dim \text{Im} \left( \mathbb{1}_{[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]}(T) \right) \geq N.$$

Sous ces hypothèses, ce résultat donne que pour une erreur de l'ordre de  $\varepsilon$ , il existe au moins  $N$  valeurs propres proches de  $\lambda$  (en comptant avec multiplicité).

**DÉMONSTRATION.** Sous les hypothèses du théorème, la condition (A.1) permet d'appliquer le corollaire A.7. Il existe  $\mu \in \text{Sp}(T)$  tel que  $\mu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ . Si  $\mu \in \text{Sp}_{\text{ess}}(T)$ , on a alors par définition que  $\dim \text{Im} \left( \mathbb{1}_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)}(T) \right) = +\infty$  et le résultat est vérifié. Dans le cas contraire,  $\mu$  est dans le spectre discret de l'opérateur  $T$ . Si la multiplicité de  $\mu$  est supérieure ou égale à  $N$ , alors le résultat est démontré. Supposons que  $\mu$  est de multiplicité finie  $\text{mult}(\mu)$  inférieure ou égale à  $N - 1$ . Par définition on a  $E_\mu = \dim \text{Ker}(T - \mu \text{Id}) = \text{mult}(\mu) \leq N - 1$  (où  $E_\mu$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\mu$ ). On considère la projection  $\Pi$  sur  $E_\mu$  en tant qu'application linéaire de l'espace vectoriel  $F$  sur l'espace vectoriel  $E_\mu$  :

$$\begin{aligned} \Pi : F &\longmapsto E_\mu \\ f &\longmapsto \Pi(f). \end{aligned}$$

Pour des raisons évidentes de dimension, cette application ne peut être injective, ce qui implique que le noyau n'est pas trivial. On a alors :

$$\text{Ker}(\Pi) = E_\mu^\perp \cap F.$$

La dimension de ce sous-espace vectoriel est au moins égale à 1. On peut considérer une fonction normalisée  $\psi \neq 0$  telle que  $\psi$  appartienne à l'ensemble  $\text{Ker}(\Pi)$ . Comme  $\psi$  appartient à  $F$ , on a que  $\psi$  vérifie la condition (A.1) du théorème. L'espace vectoriel  $E_\mu^\perp$  étant stable par  $T$ , on peut alors appliquer le corollaire A.7 à l'opérateur (autoadjoint)  $T|_{E_\mu^\perp}$ . On a qu'il existe  $\nu \in \text{Sp}(T|_{E_\mu^\perp})$  tel que  $\nu \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ . Remarquons alors que  $\nu \neq \mu$ . Si  $\nu \in \text{Sp}_{\text{ess}}(T|_{E_\mu^\perp})$ , c'est nécessairement le cas car  $\mu$  est dans le spectre

discret de  $T$ . Dans le cas contraire, on a  $\nu \in \text{Sp}_{\text{disc}}(T|_{E_\mu^\perp})$ . On note  $\psi_\nu \neq 0$  une fonction propre de l'opérateur  $T|_{E_\mu^\perp}$ , associé à la valeur propre  $\nu$ . Supposons par l'absurde que  $\nu \neq \mu$ . Comme  $\psi_\nu \in E_\nu \cap E_\mu^\perp$ , on a alors  $\psi_\nu \in E_\mu \cap E_\mu^\perp = \{0\}$ , ce qui donne la contradiction  $\psi_\nu = 0$ .  $\square$

### A.3. Le principe du Min-Max

**Théorème A.9** (Min-max). *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint borné inférieurement,  $Q$  la forme quadratique associée à  $T$ , et  $\text{Dom}(Q)$  son domaine de forme. On définit le  $n$ -ième quotient de Rayleigh comme :*

$$\mu_n = \sup_{u_1, \dots, u_{n-1} \in \text{Dom}(Q)} \left( \inf_{u \in \{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp \setminus \{0\}} \frac{Q(u)}{\|u\|^2} \right) = \inf_{u_1, \dots, u_n \in \text{Dom}(Q)} \left( \sup_{u \in [u_1, \dots, u_n] \setminus \{0\}} \frac{Q(u)}{\|u\|^2} \right),$$

où  $[u_1, \dots, u_n]$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $u_1, \dots, u_n$ .

Alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a l'alternative suivante :

- L'opérateur  $T$  possède au moins  $n$  valeurs propres (comptées avec multiplicité) sous son spectre essentiel, et  $\mu_n$  est la  $n$ -ième valeur propre (comptée avec multiplicité).
- La quantité  $\mu_n$  correspond au bas du spectre essentiel de l'opérateur  $T$ . Dans ce cas  $\mu_n = \mu_{n+1} = \dots$  et l'opérateur  $T$  possède moins de  $n$  valeurs propres (comptées avec multiplicité) sous  $\mu_n$ .

DÉMONSTRATION. Voir par exemple [28] et [55].  $\square$

### A.4. Spectre essentiel et estimées d'Agmon

On rappelle le résultat suivant qui donne une caractérisation séquentielle du spectre essentiel :

**Proposition A.10** (Critère de Weyl). *Soit  $T$  un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$ . Un réel  $\lambda$  appartient à  $\text{Sp}_{\text{ess}}(T)$  si et seulement si il existe une suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0} \subset \text{Dom}(T)$  vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi_n\|_n = 1, \\ \|(T - \lambda)\varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ (\varphi_n) \text{ tend faiblement vers } 0. \end{cases}$$

Le théorème de Persson est un résultat qui permet de déterminer le bas du spectre essentiel d'un opérateur de Schrödinger avec condition de Neumann ou de Dirichlet au bord (voir [59] et aussi [28] et [66, Théorème 1.37]).

**Théorème A.11.** *Soit  $\Omega$  un ouvert non borné de  $\mathbb{R}^2$  à bord lipschitzien. Le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger (avec condition de Neumann ou de Dirichlet au bord de  $\partial\Omega$ )*

$$-\Delta_{\mathbf{A}} = (-i\nabla + \mathbf{A})^2$$

est donné par :

$$\inf \text{Sp}_{\text{ess}}(-\Delta_{\mathbf{A}}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{B}(0, R))} \frac{\int_{\Omega} |(-i\nabla + \mathbf{A})\psi|^2 dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 dx},$$

où  $\mathcal{C}_0^\infty$  désigne l'ensemble des fonctions à support compact. où  $\mathcal{B}(0, R)$  est la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $R$  (pour n'importe quelle norme).

**Théorème A.12.** *Soit  $-\Delta_{\mathbf{A}}$  une réalisation autoadjointe du Laplacien magnétique. On suppose que le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est dans l'espace  $\mathcal{C}^\infty$ . Pour toute fonction propre  $u_\lambda$  associée à la valeur propre  $\lambda$  de  $-\Delta_{\mathbf{A}}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , si on a :*

$$\lambda < \inf \text{Sp}_{\text{ess}}(-\Delta_{\mathbf{A}}),$$

*alors, pour tout  $\alpha < 1$ , il existe une constante  $C_\alpha$  telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(x)|^2 \exp(2\alpha \sqrt{\inf \text{Sp}_{\text{ess}}(-\Delta_{\mathbf{A}}) - \lambda} |x|) dx < +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Voir par exemple [28]. □

On note que ce résultat reste vrai sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

## ANNEXE B

### Localisation, coordonnées locales, et décroissance exponentielle

#### B.1. Changement de jauge

**Proposition B.1** (Changement de jauge). *Soit  $\phi \in H^2(\Omega)$ . Les opérateurs  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  et  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega}$  sont unitairement équivalents. De plus,  $u$  est une fonction propre de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  si et seulement si  $e^{i\phi/h}u$  est une fonction propre de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega}$ , et les valeurs propres associées sont les mêmes.*

Pour garder la possibilité d'appliquer la théorie de Kato, le domaine de l'opérateur ne doit pas dépendre de  $h$ , ce qui est bien le cas dès lors que la condition suivante est satisfaite :

$$\nu(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

ce à quoi on peut toujours se ramener via un changement de jauge.

**Proposition B.2.** *Soit  $\mathbf{A} \in H^1(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert régulier et connexe. Alors il existe une fonction  $\phi \in H^2(\Omega)$  telle que  $\underline{\mathbf{A}}$  défini par  $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla\phi$  vérifie :*

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}} = 0 \text{ sur } \Omega, \text{ et } \underline{\mathbf{A}} \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

DÉMONSTRATION. Voir [28, p. 285]. □

**Remarque B.3.** Étant donné un potentiel vecteur  $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ , à changement de jauge près, on peut choisir le potentiel suivant :

$$(B.1) \quad A_1(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \mathbf{B}(x_1, y) dy, \quad \tilde{A}_2(x_1, x_2) = 0.$$

Il suffit de considérer le changement de jauge  $\phi$  défini par :

$$(B.2) \quad \phi(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} A_2(x_1, y) dy + \int_0^{x_1} A_1(x, 0) dx.$$

Ce choix vérifie bien la condition  $\mathbf{A} \cdot \nu = 0$  sur la frontière de l'ensemble  $\{x_2 > 0\}$ .

#### B.2. Formule de localisation

Le lemme suivant est un résultat fondamental de localisation (voir par exemple [23]).

**Proposition B.4** (Formule de localisation). *Soit  $(\chi_j^h)_j$  une famille de fonctions à support compact (dont le support contenu dans une boule de rayon  $h^\rho$ ) formant une partition de l'unité telle que :*

$$\sum_j (\chi_j^h)^2 = 1, \text{ sur } \Omega.$$

Alors on a :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(u) = \sum_j \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j \| |u| \nabla(\chi_j^h) \|^2_{L^2(\Omega)},$$

pour tout  $u$  appartenant au domaine de forme de  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$ .

**Remarque B.5.** Ce résultat justifie le postulat donnant que "l'énergie globale est égale à la somme des énergies locales, modulo un terme de reste" évoqué dans l'introduction. Il permet de réduire l'analyse semi-classique de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  à l'analyse spectrale des opérateurs modèles introduits dans la section 2, en réduisant l'étude de la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  sur des sous domaines de  $\Omega$ .

### B.3. Réécriture locale de la forme quadratique et de l'opérateur

**B.3.1. Changement de coordonnées local.** On considère un point  $x_0 \in \bar{\Omega}$ . Par régularité du bord et de la courbe d'annulation, il existe un difféomorphisme local  $\Phi$  défini sur voisinage  $\Omega_{x_0}$  suffisamment petit qui redresse le bord ou la courbe d'annulation. On désigne par  $(s, t) = \Phi^{-1}$  ses coordonnées curvilignes locales. Dans ces nouvelles coordonnées, l'expression de la métrique plate standard  $g$  est notée par :

$$g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} = g_{11} ds \otimes ds + g_{12} ds \otimes dt + g_{21} dt \otimes ds + g_{22} dt \otimes dt.$$

On désigne par  $G$  la matrice du tenseur métrique, par  $|g| = \det(G)$  son déterminant, et par  $(g^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  les coefficients de sa matrice inverse.

**Notation B.6.** On note encore  $(y_1, y_2) = (s, t)$  les coordonnées curvilignes pour alléger les expressions qui suivent.

En réécrivant la forme quadratique et l'opérateur dans ce nouveau système de coordonnées, on a directement le résultat suivant :

**Proposition B.7.** *Dans le système de coordonnées locales donné par le changement de variable  $\Phi$ , la forme quadratique de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  se réécrit de la manière suivante :*

$$(B.3) \quad \tilde{\mathcal{Q}}_{h,\mathbf{A},\Omega}(v) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{x_0})} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g^{ij} \left( hD_{y_i} v + \tilde{A}_i v \right) \cdot \overline{\left( hD_{y_j} v + \tilde{A}_j v \right)} \right) |g|^{1/2} dy,$$

pour tout  $v \in H^1(\Omega_{x_0})$  où  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  sont donnés par :

$$\tilde{A}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot \mathbf{A} \circ \Phi, \quad \tilde{A}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \mathbf{A} \circ \Phi.$$

L'expression de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est quant à elle donnée par :

$$(B.4) \quad \tilde{\mathcal{P}}_{h,\mathbf{A},\Omega} = |g|^{-1/2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \left( hD_{y_i} + \tilde{A}_i \right) \left( |g|^{1/2} g^{ij} \left( hD_{y_j} + \tilde{A}_j \right) \right).$$

### Changement de coordonnées au voisinage du bord ou de la courbe d'annulation

On peut définir un changement de coordonnées pour lequel les calculs explicites sont simples.

**Notation B.8.** On note :

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \Gamma, \quad \Omega_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad \Omega_3 = \Gamma \setminus \partial\Omega, \quad \Omega_4 = \partial\Omega \cap \Gamma.$$

Pour tout  $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on désigne par :

$$x_j^{(\ell)}$$

tout point  $x_j$  de  $\Omega_\ell$ .

**Notation B.9.** On désigne par  $\gamma_b$  et  $\gamma_a$  une paramétrisation normale du bord  $\partial\Omega$  et de la courbe d'annulation  $\Gamma$  et on note  $k_b$  et  $k_a$  leur courbure (respectivement).

Dans ce qui suit,  $\gamma$  désigne l'une ou l'autre de ces paramétrisations et  $k$  sa courbure associée. On considère le nouveau système de coordonnées locales suivant :

$$(B.5) \quad \Phi(s, t) = \gamma(s) + t\nu(s),$$

où  $t$  désigne la distance à  $\gamma$  et  $\nu(s)$  le vecteur normal tel que pour tout  $s$ ,  $\det(\gamma'(s), \nu(s)) = 1$ .

**Notation B.10.** Comme pour la notation B.9, on distinguera ces deux changements de variable lorsque cela sera nécessaire, en notant  $\Phi_b$  et  $\Phi_a$  les changements de variable redressant respectivement le bord  $\partial\Omega$  et la courbe d'annulation  $\Gamma$ .

Dans ce cas, la matrice  $G$  du tenseur métrique est diagonale et donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} (1 - tk(s))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La proposition B.7 devient alors :

**Proposition B.11.** Avec le changement de coordonnées précédent  $\Phi^{-1}$ , la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  se réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(v) &= \int_{\Omega_{x_0}} |(-ih\nabla + \mathbf{A})v|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{x_0})} \left( (1 - tk(s))^{-2} |(hD_s + (1 - tk(s))(\mathbf{A} \circ \Phi) \cdot \gamma') \tilde{v}|^2 \right. \\ &\quad \left. + |(hD_t + (\mathbf{A} \circ \Phi) \cdot \nu') \tilde{v}|^2 \right) (1 - tk(s)) ds dt, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in H^1(\Omega_{x_0})$ , avec  $\tilde{v} = v \circ \Phi$ .

L'expression de  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est quant à elle donnée par :

$$h^2 (1 - tk(s))^{-1} D_t (1 - tk(s)) D_t + (1 - tk(s))^{-1} (hD_s + \tilde{A}_1) (1 - tk(s))^{-1} (hD_s + \tilde{A}_1),$$

**DÉMONSTRATION.** On peut effectuer la preuve dans ce cas simple. Celle-ci s'effectue de la même manière pour une paramétrisation du bord ou de la courbe d'annulation, on omet donc les indices a et b dans la démonstration. On désigne par  $\alpha$  l'angle orienté et régulier formé par l'axe des abscisses et le vecteur  $\gamma'(s)$ . Avec la relation  $\alpha'(s) = k(s)$  pour tout  $s$ , la matrice Jacobienne  $J_\Phi$  s'écrit :

$$(B.6) \quad J_\Phi(s, t) = (\gamma'(s) + t\nu'(s), \nu(s)).$$

Comme  $\nu'(s) = -k(s)\gamma'(s)$  (dans le cas d'une paramétrisation normale), l'expression du Jacobien est donnée par :  $\det J_\Phi(s, t) = (1 - tk(s))$ . On vérifie facilement que  $\Phi$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme pour tout  $t < t_0$ , avec  $t_0 > 0$  assez petit. On note  $\Omega_{x_0} \subset \Omega$  l'image de ce difféomorphisme et :

$$\tilde{\mathbf{B}}(s, t) = \mathbf{B}(\Phi(s, t)).$$

Pour toute fonction test  $v \in H^1(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega_{x_0}$ , l'expression de la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  est (dans ce nouveau système de coordonnées) donnée par :

$$\mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(v) = \int_{\Omega_{x_0}} |(-ih\nabla + \mathbf{A})v|^2 dx.$$

Il suffit pour cela de donner l'expression de l'opérateur  $\mathcal{P}_{h,\mathbf{A},\Omega}$  dans le nouveau système de coordonnées, ce qui se résume à donner l'expression du gradient (dans les coordonnées  $(s, t)$ ) dans la base  $(\gamma'(s), \nu(s))$ . On désigne par :

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \quad \text{et} \quad \nu(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s))$$

les coordonnées de  $\gamma(s)$  et  $\nu(s)$  dans la base canonique.

$$\Phi : (s, t) \longmapsto (\gamma_1(s) + t\nu_1(s), \gamma_2(s) + t\nu_2(s)).$$

$$(B.7) \quad \gamma'(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)) \quad \text{et} \quad \nu(s) = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)).$$

On rappelle que pour une paramétrisation normale  $\nu'(s) = -k(s)\gamma'(s)$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} = (1 - tk(s)) \cos \alpha \frac{\partial v}{\partial x_1} + (1 - tk(s)) \sin \alpha \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\sin \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

En inversant le système linéaire on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{1}{1 - tk(s)} \cos \alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} - \sin \alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{1}{1 - tk(s)} \sin \alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} + \cos \alpha \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}.$$

On en déduit finalement que l'expression du gradient dans la base  $(\gamma'(s), \nu(s))$  et dans les coordonnées  $(s, t)$  est donnée par :

$$\left( \frac{\partial}{\partial s}, \frac{1}{1 - tk(s)} \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

L'expression du potentiel est quant à elle donnée par :

$$\mathbf{A} \circ \Phi = \left( \mathbf{A} \circ \Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \mathbf{A} \circ \Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = ((1 - tk(s))\mathbf{A} \circ \Phi \cdot \gamma', \mathbf{A} \circ \Phi \cdot \nu) = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2).$$

□

**Remarque B.12.** Il convient de remarquer que l'expression de la matrice Jacobienne et la réécriture de la forme quadratique sont les mêmes, qu'on travaille avec une paramétrisation du bord ou de la courbe d'annulation. Les différences fondamentales entre ces deux cas sont que  $\forall s, \gamma_a(s, 0) = 0$  (ce qui apparaîtra au niveau du développement de Taylor, menant ainsi l'étude à celle de l'opérateur de Montgomery), et qu'on a une condition de Neumann sur  $\gamma_b$  (ce qui se retrouve là aussi seulement au niveau de l'opérateur modèle, et pas au niveau du difféomorphisme). Cette remarque justifie la notation peu ambiguë de  $\gamma$  pour désigner une paramétrisation du bord ou de la courbe d'annulation.

Ce changement de coordonnées permet de trouver un opérateur unitairement équivalent pour lequel l'expression du potentiel vecteur est plus simple pour une étude spectrale.

### B.3.2. Choix de jauge.

**Proposition B.13.** *Il existe un changement de jauge  $\phi$  (correspondant à la conjugaison par  $e^{i\phi/h}$  avec  $\phi \in H^2(\Omega)$  voir la proposition B.1) pour lequel l'expression de la forme quadratique donnée dans la proposition B.11 est (localement) la suivante :*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{h,\mathbf{A},\Omega}(v) &= \int_{\Omega_{x_0}} |(-ih\nabla + \mathbf{A})v|^2 dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(\Omega_{x_0})} \left( (1 - tk(s))^{-2} |(hD_s + \tilde{A}_1)w|^2 + |(hD_t)w|^2 \right) (1 - tk(s)) ds dt, \end{aligned}$$

où on a noté  $w = e^{i\phi/h}\tilde{v}$  et  $\tilde{v} = v \circ \Phi$ .

**Notation B.14.** Comme dans la notation B.10, on a désigné par  $\phi_b$  et  $\phi_a$  ce changement de jauge dans le cas du bord et de la courbe d'annulation respectivement.

DÉMONSTRATION. La preuve étant analogue dans les deux configurations, on omet une nouvelle fois les indices b et a et on note simplement  $\phi$  l'un ou l'autre de ces changements de jauge. On rappelle que  $k(s)$  désigne la courbure de  $\gamma$  au point  $s$ . Le vecteur accélération est donnée par :

$$\gamma''(s) = k(s)\nu(s).$$

La proposition B.11 donne :

$$\tilde{A}_1(s, t) = (1 - tk(s))\mathbf{A}(\Phi(s, t)) \cdot \gamma'(s), \quad \tilde{A}_2(s, t) = \mathbf{A}(\Phi(s, t)) \cdot \nu(s).$$

On a :

$$\partial_s \tilde{A}_2(s, t) = \partial_s (\mathbf{A} \circ \Phi)(s, t) \cdot \nu(s) + (\mathbf{A} \circ \Phi)(s, t) \cdot \underbrace{\nu'(s)}_{=-k(s)\gamma'(s)},$$

et

$$\partial_t \tilde{A}_1(s, t) = -k(s)\mathbf{A}(\Phi(s, t)) \cdot \gamma'(s) + (1 - tk(s))\partial_t (\mathbf{A} \circ \Phi) \cdot \gamma'(s)$$

Le calcul de  $\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$  donne :

$$(\partial_s \tilde{A}_2 - \partial_t \tilde{A}_1)(s, t) = (\mathbf{D}_{\Phi(s, t)} \mathbf{A} \times (1 - tk(s))\gamma'(s)) \cdot \nu(s) - (1 - tk(s)) (\mathbf{D}_{\Phi(s, t)} \mathbf{A} \times \nu(s)) \cdot \gamma'(s).$$

En reprenant (B.7), on obtient finalement :

$$(\partial_s \tilde{A}_2 - \partial_t \tilde{A}_1)(s, t) = (1 - tk(s)) (\partial_{x_1} A_2(\Phi(s, t)) - \partial_{x_2} A_1(\Phi(s, t))),$$

ce qui donne :

$$(B.8) \quad (\partial_s \tilde{A}_2 - \partial_t \tilde{A}_1)(s, t) = (1 - tk(s))\tilde{\mathbf{B}}(s, t).$$

En considérant le changement de jauge donné par :

$$(B.9) \quad \phi(s, t) = \int_0^t \tilde{A}_2(s, t') dt' + \int_0^s \tilde{A}_1(s', 0) ds',$$

qui correspond à la conjugaison de l'opérateur par  $e^{i\phi/\hbar}$ , on obtient une nouvelle expression du potentiel vecteur. En notant de la même manière  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  les nouveaux potentiels obtenus, on a :

$$(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) - (\partial_s \phi, \partial_t \phi).$$

On obtient facilement que  $\tilde{A}_2(s, t) = 0$ , et avec la relation (B.8) on trouve en dérivant sous le signe intégral que  $\tilde{A}_1(s, t) = \tilde{A}_1(s, t) - \left( \int_0^t \partial_s \tilde{A}_2(s, t') dt' + \tilde{A}_1(s, 0) \right)$ . On a donc finalement obtenu les expressions suivantes :

$$(B.10) \quad \tilde{A}_1(s, t) = - \int_0^t (1 - t'k(s))\tilde{\mathbf{B}}(s, t') dt', \quad \tilde{A}_2(s, t) = 0.$$

□

**Remarque B.15.** Remarquons que dans ce système de coordonnées, la condition au bord " $\nu \cdot \mathbf{A} = 0$ " (voir la proposition B.2) est bien satisfaite.



#### B.4. Décroissance exponentielle des fonctions propres de l'opérateur de Pan et Kwek

On s'intéresse aux propriétés de décroissance des solutions d'équations apparaissant dans la construction de quasimodes (section 5.1.2) de la forme :

$$(B.11) \quad (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta)u = v,$$

où  $v$  est donnée et  $u$  est l'inconnue (avec  $1 \leq n \leq N_{\Omega, \mathbf{B}}$ ). Cette section reprend des travaux développés dans [62, p. 100].

**Proposition B.16.** *Soit  $v \in \mathbf{L}_{exp}^2(\mathbb{R}_+^2)$  telle que :*

$$(B.12) \quad \langle v, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle = 0.$$

Alors, si  $u$  désigne une solution de  $(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta)u = v$ , on a :

$$u \in \mathbf{H}_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2),$$

(où on rappelle que la définition de l'espace  $\mathbf{H}_{exp}^1(\mathbb{R}_+^2)$  est donnée en Annexe C).

**DÉMONSTRATION.** On commence par prouver le contrôle suivant la variable  $s$ . On considère une fonction troncature régulière  $\chi$  vérifiant :

$$\chi(s) = 1, \quad \text{si } |s| \leq 1 \quad \text{et} \quad \chi(s) = 0, \quad \text{si } |s| \geq 2,$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on désigne par  $\chi_n$  la fonction définie par  $\chi_n(s) = \chi\left(\frac{s}{n}\right)$ . On considère l'opérateur de multiplication (borné et inversible)  $e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}$ . Vérifions qu'il stabilise  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta)$ . Soit donc  $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{K}_\theta)$ , on a :

$$\mathcal{K}_\theta (e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} \psi) = e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} \mathcal{K}_\theta \psi + [\mathcal{K}_\theta, e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}] \psi.$$

En notant plus simplement  $A_1(s, t) = \left(st \sin \theta - \frac{t^2}{2} \cos \theta\right)$  et  $e = e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}$ , le calcul du commutateur  $[\mathcal{K}_\theta, e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}]$  donne :

$$[\mathcal{K}_\theta, e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}] = [D_s^2 + 2A_1 D_s, e] = (D_s^2 e) + 2(D_s e) D_s + 2A_1 (D_s e).$$

Par un calcul direct, on voit que  $D_s e$  et  $(D_s^2 e)$  sont des fonctions à support compact. Comme  $D_s \psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^2)$ , on a  $\mathcal{K}_\theta (e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} \psi) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^2)$ . Par ailleurs, comme  $D_t$  commute avec  $e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle}$ , on obtient que la condition de Neumann est bien satisfaite pour la fonction  $e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} \psi$  ce qui donne finalement que  $\mathcal{K}_\theta (e^{-\epsilon\chi_n(s)\langle s \rangle} \psi) \in \text{Dom}(\mathcal{K}_\theta)$ . Pour plus de commodité, on effectue ici la preuve dans le cas simple où le sous-espace propre (noté  $E_{\zeta_n^\theta}$ ) associé à la valeur propre  $\zeta_n^\theta$  (pour tout  $n$  tel que  $\zeta_n^\theta < M_0$ ) est de dimension 1, mais le résultat reste valable dans le cas général en dimension  $d$  quelconque.  $n$  tel que  $\zeta_n^\theta < M_0$

On introduit l'opérateur :

$$\mathfrak{K}_\theta = \begin{bmatrix} (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) & \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \\ \langle \cdot, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle & 0 \end{bmatrix},$$

défini sur  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta) \times \mathbb{C}$  (et à valeur dans  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta) \times \mathbb{C}$ ) de la manière suivante :

$$\mathfrak{K}_\theta(u, \lambda) = ((\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta)u + \lambda \psi_n^{\mathcal{K}_\theta}, \langle u, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle).$$

**Remarque B.17.** Le résultat dans le cas général s'obtient en considérant une base  $(\psi_{n,1}^{\mathcal{K}_\theta}, \dots, \psi_{n,d}^{\mathcal{K}_\theta})$  du sous-espace propre (de dimension  $d$ ) associé à la valeur propre  $\zeta_n^\theta$ , et l'opérateur :

$$\mathfrak{K}_\theta = \begin{bmatrix} (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) & \psi_{n,1}^{\mathcal{K}_\theta} & \cdots & \psi_{n,d}^{\mathcal{K}_\theta} \\ \langle \cdot, \psi_{n,1}^{\mathcal{K}_\theta} \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \cdot, \psi_{n,d}^{\mathcal{K}_\theta} \rangle & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

défini sur  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta) \times \mathbb{C}^d$  (et à valeur dans  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta) \times \mathbb{C}^d$ ) de la manière suivante :

$$\mathfrak{K}_\theta(u, \lambda_1, \dots, \lambda_d) = \left( (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) u + \lambda_1 \psi_{n,1}^{\mathcal{K}_\theta} + \cdots + \lambda_d \psi_{n,d}^{\mathcal{K}_\theta}, \langle u, \psi_{n,1}^{\mathcal{K}_\theta} \rangle, \dots, \langle u, \psi_{n,d}^{\mathcal{K}_\theta} \rangle \right).$$

Cet opérateur est injectif. En effet, par linéarité, il suffit de voir que la noyau de l'opérateur est trivial. Ceci se traduit par le système :

$$\begin{cases} (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) u + \lambda \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} = 0 \\ \langle u, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle = 0 \end{cases}.$$

Étant injectif, cet opérateur  $\mathfrak{K}_\theta$  est donc inversible sur son image. Cette image est  $L^2(\mathbb{R}_+^2) \times \mathbb{C}$ . En effet, si on considère  $v \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\mu \in \mathbb{C}$ . En utilisant la résolvante régularisée et la décomposition en somme directe  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta) = E_{\zeta_n^\theta} \oplus E_{\zeta_n^\theta}^\perp$ , on va exhiber  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $u \in \text{Dom}(\mathcal{K}_\theta)$  vérifiant l'équation :

$$\mathfrak{K}_\theta \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Il suffit de prendre  $\lambda = \langle v, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle$  et  $u = (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta)_{\text{Reg}}^{-1} (v - \langle v, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle \psi_n^{\mathcal{K}_\theta}) + \mu \psi_n^{\mathcal{K}_\theta}$ , ce qui donne le caractère surjectif.

La condition  $\langle v, \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle = 0$  donne que (B.11) équivaut à :

$$\mathfrak{K}_\theta \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il existe une unique solution (nécessairement orthogonale à  $\psi_n^{\mathcal{K}_\theta}$ ) qu'on note  $u$ . On pose  $\underline{u} = e^{-\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} u$  et  $\underline{v} = e^{-\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} v$ . On peut alors écrire :

$$\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n} = \begin{bmatrix} e^{\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{K}_\theta \begin{bmatrix} e^{-\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque que  $\text{Dom}(\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n}) = \text{Dom}(\mathfrak{K}_\theta)$ . On obtient avec un simple calcul :

$$\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n} = \begin{bmatrix} e^{\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} (\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) e^{-\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} & e^{\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \\ \langle \cdot, e^{-\epsilon \chi_n(s) \langle s \rangle} \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle & 0 \end{bmatrix}.$$

Avec cette dernière expression, il apparaît que l'opérateur  $\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n}$  est une perturbation de l'opérateur  $\mathfrak{K}_\theta$ . En effet, avec le développement en série entière de la fonction exponentielle, on peut écrire :

$$\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n} = \mathfrak{K}_\theta + \epsilon B_{n,\epsilon}.$$

On peut voir que  $\epsilon B_{n,\epsilon}$  est une perturbation de l'ordre de  $\epsilon$  en montrant que  $B_{n,\epsilon}$  est borné uniformément en  $n$  et  $\epsilon$ . Il faut pour cela montrer qu'il existe  $C > 0$  indépendant de  $n$  et  $\epsilon$  tel que pour tout  $\psi \neq 0$  :

$$\|B_{n,\epsilon}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Il suffit de le vérifier sur chacun des coefficients de  $\epsilon B_{n,\epsilon}$  donné par :

$$\epsilon B_{n,\epsilon} = \begin{bmatrix} e^{\epsilon\chi_n(s)<s>} [(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta), e^{-\epsilon\chi_n(s)<s>}] & (e^{\epsilon\chi_n(s)<s>} - 1) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \\ \langle \cdot, (e^{-\epsilon\chi_n(s)<s>} - 1) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \rangle & 0 \end{bmatrix},$$

où la notation  $[\cdot, \cdot]$  désigne le commutateur. Ce résultat s'obtient pour  $\epsilon > 0$  assez petit grâce à la propriété de décroissance exponentielle de la fonction  $\psi_n^{\mathcal{K}_\theta}$ .

Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, on a donc que l'opérateur  $\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n}$  est inversible et qu'il existe  $C(\epsilon) > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\|(\mathfrak{K}_\theta^{\epsilon,n})^{-1}\| \leq C(\epsilon).$$

Cela conduit à l'inégalité :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C(\epsilon)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

On en déduit alors que :

$$\|e^{-\epsilon\chi_n(s)<s>}u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C(\epsilon)\|e^{-\epsilon\chi_n(s)<s>}v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}.$$

Le théorème de convergence dominée montre que  $\|e^{-\epsilon\chi_n(s)<s>}v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  converge vers  $\|e^{-\epsilon}v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que la suite  $(e^{-\epsilon\chi_n(s)<s>}v)$  converge faiblement (à extraction d'une sous-suite près) dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$  vers un certain élément  $v^*$ . La convergence au sens des distributions et le théorème de convergence dominée donnent ensuite que  $e^{-\epsilon<s>}u = v^* \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ , ce qui prouve la décroissance en  $s$ .

On procède de la même manière pour démontrer la décroissance en  $t$ , mais il faut tenir compte de la condition de Neumann. La fonction troncature  $\chi_n$  qu'on considère est cette fois-ci définie de la manière suivante :

$$\chi_n(t) = 0 \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad \chi_n(t) = 1 \text{ si } 1 \leq t \leq n, \quad \text{et} \quad \chi_n(t) = 0 \text{ si } t > 2n.$$

Comme ce qui précède, l'opérateur de multiplication (borné et inversible)  $e^{-\epsilon\chi_n(t)}t$  préserve  $\text{Dom}(\mathcal{K}_\theta)$ . La suite de la preuve se fait de manière analogue, en utilisant cette fois-ci la décroissance exponentielle de  $\psi_n^{\mathcal{K}_\theta}$  suivant la variable  $t$  et le fait que :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{K}_\theta}(e^{\alpha/2(t+\langle s \rangle)}u) < +\infty.$$

□

**Corollaire B.18.** *La fonction  $\psi_n^{\mathcal{K}_\theta}$  appartient à  $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  (voir le chapitre C en Annexe pour la définition).*

DÉMONSTRATION. On rappelle que  $\psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in H_{\text{exp}}^1(\mathbb{R}_+^2)$ . En dérivant par rapport à  $s$  l'équation :

$$(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} = 0,$$

on a :

$$(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) \partial_s \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} = -2t \sin \theta \left( D_s + st \sin \theta - \frac{t^2}{2} \cos \theta \right) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in L_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

La proposition B.16 donne alors que  $D_s \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in H_{\text{exp}}^1(\mathbb{R}_+^2)$ . On en déduit alors par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $D_s^k \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in H_{\text{exp}}^1(\mathbb{R}_+^2)$ .

De la même manière, en dérivant par rapport à  $t$  l'équation :

$$(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} = 0,$$

on a :

$$(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta) \partial_t \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} = 2t \cos \theta \left( D_s + st \sin \theta - \frac{t^2}{2} \cos \theta \right) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in \mathbf{L}_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

La proposition B.16 donne alors que  $D_t \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in \mathbf{H}_{\text{exp}}^1(\mathbb{R}_+^2)$ .

En revenant à l'équation :

$$D_t^2 \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} = \left( - \left( D_s + st \sin \theta - \frac{t^2}{2} \cos \theta \right) - \zeta_n^\theta \right) \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in \mathbf{L}_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2),$$

qu'on dérive  $m$  fois par rapport à  $s$ , on obtient ensuite avec ce qui précède et toujours en utilisant la proposition B.16 que :  $D_t^2 D_s^k \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in \mathbf{L}_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2)$ . De manière analogue, en dérivant par rapport à  $t$  ce qui en résulte on a :  $D_t^3 D_s^k \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in \mathbf{L}_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2)$ . Finalement, on a par récurrence que pour tout entier  $k, \ell$  :

$$D_s^k D_t^\ell \psi_n^{\mathcal{K}_\theta} \in \mathbf{L}_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2).$$

□

**Corollaire B.19.** *Soit  $w \in \mathbf{H}_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  et  $v \in \text{Dom}(\mathcal{K}_\theta)$  telles que  $(\mathcal{K}_\theta - \zeta_n^\theta)v = w$ . Alors  $v \in \mathbf{H}_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à celle du corollaire B.18.

□

On note qu'en particulier  $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+})$  car on a  $\mathbf{H}_{\text{exp}}^\infty \subset \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+})$ .



## ANNEXE C

### Notation

$\mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^{d-} \times \mathbb{R}_*^+$ , pour tout entier  $d \geq 2$

$D = -i\partial$

$\mathcal{B}(x, R)$  boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $R$

$d(x, \Gamma)$ ,  $d(x, \Sigma)$  désignent la distance du point  $x$  à l'ensemble  $\Gamma$  et  $\Sigma$  (respectivement)

Étant donnés deux ensembles  $\mathfrak{S}_1$  et  $\mathfrak{S}_2$ , on désigne par  $d(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$  la distance entre ces deux ensembles

$\mathcal{B}^k = \{u \in \mathcal{L}^2, \tau^p u^{(q)} \in \mathcal{L}^2, \forall p, q \in \mathbb{N}, p + q \leq k\}$

$\mathcal{L}_{\text{exp}}^2 = \{f \in \mathcal{L}^2, \exists \alpha > 0, e^{\alpha(\cdot)} f \in \mathcal{L}^2\}$

$\mathcal{H}_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}_+^2) = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^2), \forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, D_s^k D_t^\ell f \in \mathcal{L}_{\text{exp}}^2(\mathbb{R}_+^2)\}$

$\text{Sp}$ ,  $\text{Sp}_{\text{disc}}$  et  $\text{Sp}_{\text{ess}}$  désigneront respectivement le spectre, le spectre discret et le spectre essentiel

$\gamma_a, \gamma_b$  désignent respectivement une paramétrisation (normale) de la courbe d'annulation et du bord

$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  les coordonnées d'un point de  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$(s, t) \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  les coordonnées curvilignes locales pour le problème modèle en dimension  $d = 2$  (voir les sections B.3 et B.1 en Annexe)

$(X, Y)$  et  $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}_+^2$  les coordonnées curvilignes locales pour le problème modèle après changement d'échelle

Indépendamment des coordonnées, on désigne par  $|\cdot, \cdot|$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$



## Bibliographie

- [1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.
- [2] ———, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of  $N$ -body Schrödinger operators*, vol. 29 of Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.
- [3] ———, *Bounds on exponential decay of eigenfunctions of Schrödinger operators*, in Schrödinger operators (Como, 1984), vol. 1159 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1985, pp. 1–38.
- [4] S. AGMON, A. DOUGLIS, AND L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), pp. 623–727.
- [5] F. ALOUGES AND V. BONNAILLIE, *Analyse numérique de la supraconductivité*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 337 (2003), pp. 543–548.
- [6] K. ATTAR, *Energy and vorticity of the Ginzburg-Landau model with variable magnetic field*, Asymptot. Anal., 93 (2015), pp. 75–114.
- [7] ———, *The ground state energy of the two dimensional Ginzburg-Landau functional with variable magnetic field*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 32 (2015), pp. 325–345.
- [8] J. AVRON, I. HERBST, AND B. SIMON, *Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions*, Duke Math. J., 45 (1978), pp. 847–883.
- [9] P. BAUMAN, D. PHILLIPS, AND Q. TANG, *Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field*, Arch. Rational Mech. Anal., 142 (1998), pp. 1–43.
- [10] C. BOLLEY AND B. HELFFER, *An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 58 (1993), pp. 189–233.
- [11] C. BOLLEY AND B. HELFFER, *The Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting film in the large  $\kappa$  limit*, European J. Appl. Math., 8 (1997), pp. 347–367.
- [12] V. BONNAILLIE, *On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners*, Asymptot. Anal., 41 (2005), pp. 215–258.
- [13] V. BONNAILLIE-NOËL, *Harmonic oscillators with Neumann condition of the half-line*, Commun. Pure Appl. Anal., 11 (2012), pp. 2221–2237.
- [14] V. BONNAILLIE-NOËL AND M. DAUGE, *Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corners*, Ann. Henri Poincaré, 7 (2006), pp. 899–931.
- [15] ———, *Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corners*, Ann. Henri Poincaré, 7 (2006), pp. 899–931.
- [16] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, D. MARTIN, AND G. VIAL, *Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 196 (2007), pp. 3841–3858.
- [17] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, AND N. POPOFF, *Ground state energy of the magnetic Laplacian on corner domains*, ArXiv e-prints, (2014).
- [18] V. BONNAILLIE-NOËL AND S. FOURNAIS, *Superconductivity in domains with corners*, Rev. Math. Phys., 19 (2007), pp. 607–637.



- [19] V. BONNAILLIE-NOËL, F. HÉRAU, AND N. RAYMOND, *Magnetic WKB Constructions*, Arch. Ration. Mech. Anal., 221 (2016), pp. 817–891.
- [20] V. BONNAILLIE-NOËL AND N. RAYMOND, *Breaking a magnetic zero locus : model operators and numerical approach*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 95 (2015), pp. 120–139.
- [21] ———, *Magnetic Neumann Laplacian on a sharp cone*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 53 (2015), pp. 125–147.
- [22] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [23] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH, AND B. SIMON, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, study ed., 1987.
- [24] M. DAUGE AND B. HELFFER, *Eigenvalues variation. I : Neumann problem for Sturm–Liouville operators.*, J. Differ. Equations, 104 (1993), pp. 243–262.
- [25] M. DEL PINO, P. L. FELMER, AND P. STERNBERG, *Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity*, Comm. Math. Phys., 210 (2000), pp. 413–446.
- [26] N. DOMBROWSKI AND N. RAYMOND, *Semiclassical analysis with vanishing magnetic fields*, J. Spectr. Theory, 3 (2013), pp. 423–464.
- [27] S. FOURNAIS AND B. HELFFER, *Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 56 (2006), pp. 1–67.
- [28] S. FOURNAIS AND B. HELFFER, *Spectral methods in surface superconductivity*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 77, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.
- [29] S. FOURNAIS AND M. PERSSON, *Strong diamagnetism for the ball in three dimensions*, Asymptot. Anal., 72 (2011), pp. 77–123.
- [30] S. FOURNAIS AND M. P. SUNDQVIST, *A uniqueness theorem for higher order anharmonic oscillators*, J. Spectr. Theory, 5 (2015), pp. 235–249.
- [31] L. GÄRDING, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scand., 1 (1953), pp. 55–72.
- [32] B. HELFFER, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, vol. 1336 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [33] B. HELFFER, *The Montgomery model revisited*, Colloq. Math., 118 (2010), pp. 391–400.
- [34] B. HELFFER, Y. KORDYUKOV, N. RAYMOND, AND S. VU NGOC, *Magnetic Wells in Dimension Three*. working paper or preprint, May 2015.
- [35] B. HELFFER AND Y. A. KORDYUKOV, *Spectral gaps for periodic Schrödinger operators with hypersurface magnetic wells : analysis near the bottom*, J. Funct. Anal., 257 (2009), pp. 3043–3081.
- [36] B. HELFFER AND Y. A. KORDYUKOV, *Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator : the case of discrete wells*, in Spectral theory and geometric analysis, vol. 535 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 55–78.
- [37] ———, *Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator II : The case of degenerate wells*, Comm. Partial Differential Equations, 37 (2012), pp. 1057–1095.
- [38] ———, *Eigenvalue estimates for a three-dimensional magnetic Schrödinger operator*, Asymptot. Anal., 82 (2013), pp. 65–89.
- [39] ———, *Accurate semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator*, Ann. Henri Poincaré, 16 (2015), pp. 1651–1688.
- [40] B. HELFFER AND A. MOHAMED, *Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 38 (1988), pp. 95–112.
- [41] B. HELFFER AND A. MOHAMED, *Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells*, J. Funct. Anal., 138 (1996), pp. 40–81.
- [42] B. HELFFER AND A. MORAME, *Magnetic bottles in connection with superconductivity*, J. Funct. Anal., 185 (2001), pp. 604–680.

- [43] B. HELFFER AND A. MORAME, *Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case)*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 37 (2004), pp. 105–170.
- [44] B. HELFFER AND J. NOURRIGAT, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, vol. 58 of Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [45] B. HELFFER AND X.-B. PAN, *Reduced Landau-de Gennes functional and surface smectic state of liquid crystals*, J. Funct. Anal., 255 (2008), pp. 3008–3069.
- [46] ———, *On some spectral problems and asymptotic limits occurring in the analysis of liquid crystals*, Cubo, 11 (2009), pp. 1–22.
- [47] B. HELFFER AND M. PERSSON, *Spectral properties of higher order anharmonic oscillators*, J. Math. Sci. (N. Y.), 165 (2010), pp. 110–126. Problems in mathematical analysis. No. 44.
- [48] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND, *Multiple wells in the semiclassical limit. I*, Comm. Partial Differential Equations, 9 (1984), pp. 337–408.
- [49] ———, *Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 42 (1985), pp. 127–212.
- [50] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 1966.
- [51] ———, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [52] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1953.
- [53] K. LU AND X.-B. PAN, *Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains*, J. Math. Phys., 40 (1999), pp. 2647–2670.
- [54] ———, *Surface nucleation of superconductivity in 3-dimensions*, J. Differential Equations, 168 (2000), pp. 386–452. Special issue in celebration of Jack K. Hale’s 70th birthday, Part 2 (Atlanta, GA/Lisbon, 1998).
- [55] P. LÉVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale - Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2003.
- [56] R. MONTGOMERY, *Hearing the zero locus of a magnetic field*, Comm. Math. Phys., 168 (1995), pp. 651–675.
- [57] X.-B. PAN, *Surface superconductivity in 3 dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc., 356 (2004), pp. 3899–3937.
- [58] X.-B. PAN AND K.-H. KWEK, *Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc., 354 (2002), pp. 4201–4227.
- [59] A. PERSSON, *Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded schrödinger operator*, Mathematica Scandinavica, 8 (1960), pp. 143–153.
- [60] N. POPOFF AND N. RAYMOND, *When the 3D magnetic Laplacian meets a curved edge in the semiclassical limit*, SIAM J. Math. Anal., 45 (2013), pp. 2354–2395.
- [61] N. RAYMOND, *Sharp asymptotics for the Neumann Laplacian with variable magnetic field : case of dimension 2*, Ann. Henri Poincaré, 10 (2009), pp. 95–122.
- [62] ———, *Spectral Methods and Liquid Crystals Theory*, theses, Université Paris Sud - Paris XI, Oct. 2009.
- [63] ———, *Contribution to the asymptotic analysis of the Landau-de Gennes functional*, Adv. Differential Equations, 15 (2010), pp. 159–180.
- [64] ———, *On the semiclassical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field*, Asymptot. Anal., 68 (2010), pp. 1–40.
- [65] N. RAYMOND, *Breaking a magnetic zero locus : asymptotic analysis*, Math. Models Methods Appl. Sci., 24 (2014), pp. 2785–2817.
- [66] ———, *Bound States of the Magnetic Schrödinger Operator*, Advanced Studies in Pure Mathematics, EMS Tracts in Mathematics, US, 2016.
- [67] N. RAYMOND AND S. VŪ NGỌC, *Geometry and spectrum in 2D magnetic wells*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 65 (2015), pp. 137–169.
- [68] B. SIMON, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. I. Nondegenerate minima : asymptotic expansions*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.), 38 (1983), pp. 295–308.