



**HAL**  
open science

**Analyse et développement d'outils numériques  
déterministes et stochastiques résolvant les équations du  
bruit neutronique et applications aux réacteurs  
thermiques et rapides**

Amélie Rouchon

► **To cite this version:**

Amélie Rouchon. Analyse et développement d'outils numériques déterministes et stochastiques résolvant les équations du bruit neutronique et applications aux réacteurs thermiques et rapides. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université Paris-Saclay, 2016. Français. NNT : 2016SACLS232 . tel-01381245

**HAL Id: tel-01381245**

**<https://theses.hal.science/tel-01381245v1>**

Submitted on 14 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLS232

THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
PRÉPARÉE À  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE N° 576  
Particules, Hadrons, Énergie, Noyaux, Instrumentation, Imagerie, Cosmos et  
Simulation (PHENIICS)

Spécialité de doctorat : Énergie nucléaire

Par

**Mme Amélie Rouchon**

Analyse et développement d'outils numériques déterministes et stochastiques  
résolvant les équations du bruit neutronique et applications aux  
réacteurs thermiques et rapides

**Thèse présentée et soutenue à la Maison de la Simulation (Saclay), le 19 septembre 2016 :**

**Composition du Jury :**

M. Allaire, Grégoire	Professeur, École Polytechnique	Président et Rapporteur
M. Demazière, Christophe	Professeur, Chalmers University of Technology	Rapporteur
M. Camarcat, Noël	Professeur, Mines ParisTech,	Examinateur
M. Pázsit, Imre	Professeur, Chalmers University of Technology	Examinateur
M. Ravetto, Piero	Professeur, Politecnico di Torino	Examinateur
M. Sanchez, Richard	Professeur, CEA Saclay et Université Paris-Sud	Directeur de thèse
M. Zmijarevic, Igor	Ingénieur-chercheur, CEA Saclay	Invité



# Résumé

---

## **Analyse et développement d'outils numériques déterministes et stochastiques résolvant les équations du bruit neutronique et applications aux réacteurs thermiques et rapides**

Le bruit neutronique désigne les fluctuations de la population neutronique induites par des changements déterministes ou stochastiques des sections efficaces macroscopiques lors du fonctionnement à puissance nominale d'un réacteur nucléaire. Ces perturbations peuvent avoir des origines diverses comme une variation de densité du caloporteur ou une vibration d'un élément mécanique (barres de contrôle, assemblages ou crayons combustibles...). Dans les réacteurs de puissance, ces bruits neutroniques sont observables par les détecteurs de neutrons placés à l'intérieur et à l'extérieur du cœur. Lorsque ces bruits sont jugés anormaux, tout l'enjeu est de savoir identifier et localiser leurs sources afin de pouvoir mettre en place les mesures de sûreté éventuellement nécessaires au bon fonctionnement de l'installation. Ces bruits peuvent aussi être exploités pour déterminer certaines propriétés du caloporteur comme sa vitesse ou son titre vapeur, ou encore d'autres propriétés dynamiques globales comme le coefficient de température d'un réacteur à eau pressurisée.

Les équations générales du bruit neutronique sont issues de la linéarisation et de la transformée de Fourier de l'équation de Boltzmann cinétique perturbée autour de l'état d'équilibre du cœur en suivant l'hypothèse de petites perturbations et en prenant en compte le couplage avec les équations des précurseurs. Ceci a pour résultat une équation à source dans le domaine fréquentiel. Résoudre cette équation complexe permet de prédire le bruit pour différents emplacements de détecteurs.

Cette thèse a pour principal objectif de mettre en place des outils de calculs neutroniques en implémentant notamment un solveur de bruit neutronique dans le code de transport déterministe multi-filière APOLLO3® développé au CEA.

Au cours de nos travaux, nous avons tout d'abord étudié et analysé la théorie classique du bruit neutronique. Il nous est apparu qu'il était plus judicieux de définir comme opérateur d'équilibre la moyenne temporelle de l'opérateur cinétique perturbé plutôt que l'opérateur de Boltzmann stationnaire. Ce nouvel opérateur d'équilibre, qui a été développé pour la théorie linéaire et non linéaire, permet en effet de prendre en compte le système de régulation de la puissance présent dans les cœurs de réacteurs qui contrebalance automatiquement tout surplus de réactivité introduit par des perturbations.

Nous avons implémenté par la suite la résolution numérique des équations du bruit en théorie de la diffusion et du transport dans une maquette dite « fil » pour des géométries à une dimension en multigroupe. La résolution des équations non linéarisées du bruit en théorie de la diffusion a aussi été implémentée afin d'étudier les limites de la théorie linéaire. Deux méthodes Monte Carlo ont été implémentées dans cette maquette : une méthode proposée très récemment dans la littérature et une nouvelle méthode que nous avons mise en place afin d'améliorer cette dernière. Cette nouvelle méthode a vocation à être implémentée dans le code Monte Carlo de référence TRIPOLI-4® développé au CEA. À l'aide de cette maquette, nous avons de plus proposé une nouvelle façon de modéliser plus exactement une vibration mécanique, modélisation que nous avons comparée avec les diverses modélisations analytiques existantes.

Enfin, nous avons implémenté la résolution des équations linéaires du bruit en théorie de la diffusion et du transport dans le code déterministe APOLLO3® (solveur réseau IDT). Afin de tester ce nouveau solveur, nous avons mené à bien des calculs de bruit sur un cœur complet de réacteur à eau légère et à baffle lourd à deux et trois dimensions. Ces simulations nous ont permis de conclure nos travaux en étudiant l'impact de certaines sources de bruit, une oscillation ou une vibration d'un assemblage par exemple, sur un système aussi réaliste que ceux étudiés en calculs stationnaires et ce en théorie de la diffusion et du transport à deux groupes d'énergie.

**Mots clefs :** bruit neutronique, domaine fréquentiel, poids complexes, perturbations, vibrations, APOLLO3®.



# Abstract

---

## **Analysis and development of deterministic and stochastic neutron noise computing techniques with applications to thermal and fast reactors**

Neutron noise analysis addresses the description of small time-dependent flux fluctuations induced by small global or local perturbations of the macroscopic cross-sections. These fluctuations may occur in nuclear reactors due to density fluctuations of the coolant, to vibrations of fuel elements, control rods, or any other structures in the core. In power reactors, ex-core and in-core detectors can be used to monitor neutron noise with the aim of detecting possible anomalies and taking the necessary measures for continuous safe power production. Thus, neutron noise techniques are more and more used by the nuclear industry for non-invasive monitoring, control and detection of anomalies in nuclear power plants. They are also applied to the measurement of the properties of the coolant, such as speed and void fraction, or of global dynamic properties such as the moderator temperature coefficient of a pressurized water reactor.

The general noise equations are obtained by assuming small perturbations around a steady state in the neutron field and by subsequently taking the Fourier transform in the frequency domain. The analysis is performed based on the neutron kinetic equations including the coupling with neutron precursors. For each frequency, the outcome of the Fourier transform analysis is a fixed-source equation for the perturbed neutron field, which can then be solved so as to predict noise measurements at detector locations.

The objective of this thesis is to develop techniques for neutron noise analysis and especially to implement a neutron noise solver in the deterministic transport code APOLLO3<sup>®</sup> developed at CEA.

First, we studied and analyzed the traditional neutron noise theory. In order to take into account the action of the regulating system which cancel the time-averaged reactivity added by a perturbation in a core, we found that it is preferable to choose as steady-state operator the time-averaged of the kinetic operator rather than the stationary Boltzmann operator. This new steady-state operator has been developed for the linear and the non-linear full theory.

Then, we have implemented a neutron noise solver in diffusion and transport theory for a simple "rod" geometry in multigroup. A non-linear neutron noise solver has been also implemented in diffusion theory for this rod geometry in order to analyze the limits of the linear theory. Moreover, two Monte Carlo methods that solve the transport equations for the neutron noise in the frequency domain have been implemented for this rod geometry : one recently developed in the literature and a new Monte Carlo algorithm that we have developed so as to improve the latter. This new algorithm is supposed to be implemented in the reference Monte Carlo code TRIPOLI-4<sup>®</sup> developed at CEA. In addition, a new one-dimension vibration model has been developed and tested for the rod geometry in order to simulate a periodic vibration of a mechanical element and to determine the neutron noise generated by this perturbation.

Lastly, a neutron noise solver has been implemented in diffusion and transport theory in the deterministic transport code APOLLO3<sup>®</sup> (IDT lattice solver). In order to test this new solver, we have performed neutron noise simulations in a large pressurized water reactor with heavy baffle in two and three dimensions. Thus, we have concluded our work by analyzing the neutron noise induced by different noise sources, an oscillation or a vibration of one assembly for example, in a case as realistic as ones used in stationary calculations. These simulations have been performed in diffusion and transport theory with two energy groups.

**Keywords :** neutron noise, frequency domain, complex weights, perturbations, vibrations, APOLLO3<sup>®</sup>.



# Remerciements

---

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement Richard Sanchez, mon directeur de thèse, Igor Zmijarevic, mon tuteur officiel, et Andrea Zoia, mon deuxième tuteur officieux, de m'avoir encadrée, soutenue et conseillée tout au long de ces trois années de thèse.

Ce travail de thèse s'est déroulé au sein du Laboratoire de Transport Stochastique et Déterministe (LTSD) du Service d'Études des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées (SERMA) du centre CEA de Saclay. Je remercie donc Patrick Blanc-Tranchant, ancien chef du SERMA, Marc Delpech, son successeur, ainsi que Franck Gabriel, chef du LTSD, de m'y avoir accueillie pendant ces trois années.

Mes remerciements vont aussi à mes deux rapporteurs, Grégoire Allaire et Christophe Demazière, pour leur relecture attentive de ce présent manuscrit et pour toutes leurs remarques. Merci également aux autres membres du jury, Imre Pázsit, Piero Ravetto et Noël Camarcat, d'avoir accepté d'examiner mon travail de doctorat.

Un grand merci à l'ensemble des membres du service pour leur chaleureuse compagnie, et tout spécialement à Karim Ammar et Cyril Patricot, anciens thésards devenus grands, d'avoir stoïquement supporté mes interminables « rouchonnades » chaque midi. J'exprime également toute ma reconnaissance à Anne Nicolas qui m'a fait découvrir le CEA.

Je n'oublie pas ma famille et mes proches, en particulier mes parents, pour leur support sans faille pendant toutes ces années.





# Table des matières

---

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>x</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Notations et conventions</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte et objectifs	1
Organisation du manuscrit	3
<b>1 Analyse et détection du bruit neutronique</b>	<b>5</b>
1.1 Les origines du bruit neutronique	5
1.1.1 Le bruit neutronique à bas flux et à haut flux	5
1.1.2 Un bref historique	6
1.2 Les sources de bruit dans les réacteurs de puissance	9
1.2.1 Les outils de détection	9
1.2.2 Les principales sources de bruit des différentes filières	13
1.3 Exemples de détection et d'analyse	17
1.3.1 Vibrations des supports de cuve d'un REP	17
1.3.2 Vitesse d'écoulement du caloporteur d'un REB	18
1.3.3 Vibrations des assemblages et d'une barre de commande d'un RNR-Na	19
1.4 Le bruit neutronique, un enjeu majeur pour la sûreté	21
1.4.1 Les simulateurs actuels de bruit neutronique	21
1.4.2 Les enjeux pour la sûreté des réacteurs d'aujourd'hui et de demain	22
1.5 Résumé du chapitre	24
<b>2 Théorie et équations du bruit neutronique</b>	<b>25</b>
2.1 La théorie linéaire	25
2.1.1 Équation du transport	26
2.1.2 Approximation de la diffusion	28
2.1.3 Approximation adiabatique	29
2.2 Un nouvel état d'équilibre	29
2.2.1 En théorie linéaire	29
2.2.2 En théorie non linéaire	32
2.3 Résolution analytique	33
2.3.1 Approche directe par les fonctions de Green	33
2.3.2 Approche indirecte par les fonctions de Green adjointes	35
2.3.3 Approximations de la cinétique	36
2.4 Les composantes globales et locales	38
2.4.1 Analyse du bruit dans un cœur homogène	38
2.4.2 Analyse spectrale et décomposition du bruit	45
2.4.3 Propriétés générales des composantes globales et locales	47
2.5 Résumé du chapitre	47

<b>3</b>	<b>Méthodes de résolution déterministe</b>	<b>49</b>
3.1	Implémentations numériques	49
3.1.1	Schéma numérique général	49
3.1.2	La maquette fil	50
3.1.3	Le code de transport APOLLO3®	51
3.2	Vérification & Validation	53
3.2.1	Systèmes à une dimension (maquette fil)	53
3.2.2	Systèmes à deux dimensions (APOLLO3®)	57
3.2.3	Systèmes à trois dimensions (APOLLO3®)	60
3.3	Études d'oscillations des sections efficaces	61
3.3.1	Cœur à une dimension (maquette fil)	62
3.3.2	Cœur à deux dimensions (APOLLO3®)	64
3.3.3	Cœur à trois dimensions (APOLLO3®)	71
3.4	Résumé du chapitre	76
<b>4</b>	<b>Méthodes de résolution stochastique</b>	<b>77</b>
4.1	Méthodes avec et sans annihilation des poids	77
4.1.1	Rappel sur la méthode de la capture implicite	78
4.1.2	Méthode avec annihilation des poids (MCNP4C)	79
4.1.3	Nouvelle méthode sans annihilation des poids	82
4.2	Comparaison et analyse des deux méthodes Monte Carlo	83
4.2.1	Comparaison avec les méthodes déterministes	83
4.2.2	Influence de la capture implicite et du facteur $\eta$	87
4.2.3	Des pistes d'amélioration et de réflexion	91
4.3	Résumé du chapitre	94
<b>5</b>	<b>Modélisations et analyses d'une vibration mécanique</b>	<b>95</b>
5.1	Modélisations analytiques	95
5.1.1	Modèle de Feinberg-Galanin-Williams	96
5.1.2	Modèle $\epsilon/d$	98
5.1.3	Les harmoniques de la source de bruit	99
5.2	Modélisation numérique d'une vibration périodique d'un volume fini	100
5.2.1	Modélisation générale	100
5.2.2	Modélisation adiabatique	103
5.3	Modélisation numérique d'une vibration périodique d'un Dirac	104
5.3.1	Modélisation générale	104
5.3.2	Modélisation adiabatique	108
5.4	Analyses et résultats	109
5.4.1	Vibration d'une barre absorbante (maquette fil)	109
5.4.2	Vibration d'un crayon combustible (maquette fil)	114
5.4.3	Vibration d'un assemblage combustible (APOLLO3®)	119
5.5	Résumé du chapitre	124
	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>125</b>
	<b>Publications</b>	<b>127</b>
	<b>Références</b>	<b>129</b>
	<b>Annexes</b>	<b>137</b>
A	L'alternative de Fredholm	137
B	Fonction de transfert fondamentale à 6 groupes de précurseurs	139
C	Quelques solutions analytiques	141
D	Propagation axiale d'une perturbation dans un cœur à trois dimensions (APOLLO3®)	145
E	Méthode de résolution stochastique testée à l'aide de MCNP5	149

# Liste des figures

---

1.1	Système de diagnostic en ligne du bruit neutronique dans le réacteur à haut flux HFIR . . . . .	7
1.2	Configuration du système ANABELIX . . . . .	8
1.3	Position des détecteurs de flux dans les réacteurs à eau . . . . .	9
1.4	Instrumentation du cœur du réacteur Superphénix . . . . .	10
1.5	Réseau de neurones non bouclé . . . . .	12
1.6	Cuve et assemblage combustible d'un réacteur à eau pressurisée . . . . .	14
1.7	Exemple de spectres de bruit neutronique de réacteurs à eau . . . . .	15
1.8	Cuve et assemblage combustible d'un réacteur à eau bouillante . . . . .	15
1.9	Vibration d'un tube d'instrumentation d'un réacteur à eau bouillante . . . . .	16
1.10	Cuve et assemblage combustible du réacteur à neutrons rapides Phénix . . . . .	17
1.11	Exemple de spectres de bruit neutronique de réacteurs à neutrons rapides . . . . .	17
1.12	Modes vibratoires des supports de cuve d'un réacteur à eau pressurisée . . . . .	18
1.13	Exemple de détection d'une vibration de type shell mode des supports de cuve d'un REP . . . . .	19
1.14	Exemple de détection de la vitesse du caloporteur d'un REB . . . . .	19
1.15	Exemple de détection d'une vibration des assemblages de Phénix . . . . .	20
1.16	Exemple de détection d'une vibration d'une barre de commande de Phénix . . . . .	21
1.17	Exemple de méthode de diagnostic en temps réel du bruit neutronique envisagée pour le futur . . . . .	23
2.1	Formes générales du module et de la phase de la fonction de transfert fondamentale . . . . .	35
2.2	Module de la fonction de transfert fondamentale d'un grand et d'un petit cœurs homogènes . . . . .	40
2.3	Module du bruit rapide et thermique d'un grand cœur homogène . . . . .	41
2.4	Phase du bruit rapide et thermique d'un grand cœur homogène . . . . .	42
2.5	Module du bruit rapide et thermique d'un petit cœur homogène . . . . .	43
2.6	Phase du bruit rapide et thermique d'un petit cœur homogène . . . . .	44
3.1	Schéma numérique général de résolution déterministe des équations du bruit neutronique . . . . .	50
3.2	Schéma de résolution des équations non linéaires du bruit neutronique . . . . .	51
3.3	Module et phase du bruit en milieu homogène infini à une dimension en fonction de la fréquence . . . . .	54
3.4	Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur. . . . .	54
3.5	Flux d'équilibre du cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	55
3.6	Module et phase du bruit engendré par une source isotrope dans le cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	55
3.7	Module et phase du bruit engendré par une vibration de la cuve dans le cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	56
3.8	Module et phase du bruit en milieu homogène infini à deux dimensions en fonction de la fréquence . . . . .	57
3.9	Cœur homogène à deux dimensions entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	58
3.10	Flux d'équilibre du cœur homogène à deux dimensions entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	58
3.11	Module et phase du bruit engendré par une source isotrope dans le cœur homogène à deux dimensions entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	59
3.12	Module et phase du bruit engendré par une source isotrope dans le cœur homogène à deux dimensions entouré d'un matériau réflecteur en fonction de l'ordre de quadrature $S_n$ . . . . .	59
3.13	Module et phase du bruit en milieu homogène infini à trois dimensions en fonction de la fréquence . . . . .	60
3.14	Plan axial du cylindre homogène de rayon $R$ . . . . .	61
3.15	Module et phase du bruit dans un cylindre homogène infini à trois dimensions . . . . .	61
3.16	Flux d'équilibre du cœur hétérogène à une dimension . . . . .	62

3.17	Évolution du module de la fonction de transfert fondamentale $G_0$ du cœur hétérogène à une dimension en fonction de la fréquence. . . . .	62
3.18	Module et phase du bruit rapide et thermique à 3 Hz engendré par une oscillation des sections efficaces du crayon central du 3 <sup>ème</sup> assemblage dans le cœur hétérogène à une dimension . . . . .	63
3.19	Plan de chargement du combustible. . . . .	64
3.20	Composition des assemblages UOX et UOXGD . . . . .	65
3.21	Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à deux dimensions en théorie du transport. . . . .	66
3.22	Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à deux dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	67
3.23	Différences relatives entre la diffusion et le transport des flux d'équilibre du cœur à deux dimensions. . . . .	67
3.24	Module du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport. . . . .	68
3.25	Module du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	69
3.26	Différences relatives entre la diffusion et le transport des modules du bruit dans le cœur à deux dimensions. . . . .	70
3.27	Phase du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport. . . . .	70
3.28	Phase du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimension en théorie de la diffusion. . . . .	71
3.29	Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	72
3.30	Flux rapide et thermique d'équilibre au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur $z$ du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	73
3.31	Module du bruit rapide et thermique engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	74
3.32	Module du bruit rapide et thermique au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur $z$ du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	74
3.33	Phase du bruit rapide et thermique engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	75
3.34	Phase du bruit rapide et thermique au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur $z$ du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion. . . . .	75
4.1	Schéma général de la « binning procedure » appliqué à chaque batch indépendant dans la méthode de Yamamoto. . . . .	81
4.2	Évolution du module de la fonction de transfert fondamentale du système étudié sans anisotropie en fonction de la fréquence. . . . .	83
4.3	Module du bruit rapide et thermique à 0,01 Hz, 1 Hz, 2 500 Hz et 10 000 Hz . . . . .	85
4.4	Flux rapide et thermique d'équilibre du système étudié avec anisotropie $P_1$ . . . . .	86
4.5	Parties réelles des termes isotropes et angulaires de la source de bruit . . . . .	86
4.6	Module et phase du bruit rapide et thermique à 3 Hz engendré par une oscillation des sections efficaces du 3 <sup>ème</sup> crayon . . . . .	86
4.7	Évolution du nombre de particules par génération à 0,01 Hz . . . . .	87
4.8	Évolution de la somme des parties réelles et imaginaires des poids par génération à 0,01 Hz avec ou sans capture implicite . . . . .	88
4.9	Évolution de la probabilité des fissions normale et $\omega$ en fonction du facteur $\eta$ à 10 000 Hz . . . . .	88
4.10	Évolution du nombre de particules par génération à 10 000 Hz avec ou sans capture implicite . . . . .	89
4.11	Évolution de la somme des parties réelles et imaginaires des poids par génération à 10 000 Hz avec ou sans capture implicite . . . . .	89
4.12	Évolution des parties réelle et imaginaire de $\tilde{k}$ en fonction de la fréquence . . . . .	90
4.13	Évolution de la partie réelle de $\tilde{k}^n$ . . . . .	90
4.14	Évolution de la partie imaginaire de $\tilde{k}^n$ . . . . .	90
4.15	Principe de la méthode du « combing » . . . . .	92
5.1	Schéma d'une vibration périodique d'un volume de taille finie . . . . .	101
5.2	Maillage pour la vibration d'un volume de taille finie. . . . .	101
5.3	Convergence de la modélisation d'une vibration périodique d'un volume de taille finie en fonction de la finesse du maillage . . . . .	103
5.4	Approximation de la modélisation adiabatique pour une vibration périodique d'un volume de taille finie. . . . .	104
5.5	Schéma d'une vibration périodique d'un Dirac . . . . .	105
5.6	Maillage pour la vibration d'un Dirac. . . . .	106

5.7	Convergence de la modélisation d'une vibration périodique d'un Dirac en fonction de la largeur du volume pour le cas de la barre faiblement absorbante	107
5.8	Convergence de la modélisation d'une vibration périodique d'un Dirac en fonction de la largeur du volume pour le cas de la barre fortement absorbante	107
5.9	Flux d'équilibre pour le cas d'une barre faiblement et fortement absorbante	110
5.10	Comparaison entre les modèles analytiques et numériques pour le cas de la barre faiblement absorbante	110
5.11	Comparaison entre les modèles analytiques et numériques pour le cas de la barre fortement absorbante	111
5.12	Comparaison des modules des quatre premières harmoniques du bruit en théorie non linéaire pour le cas de la barre fortement absorbante	111
5.13	Comparaison des modules des quatre premières harmoniques du bruit en théorie linéaire classique pour le cas de la barre fortement absorbante	112
5.14	Module et phase du bruit à $f_0$ et $2f_0$ pour le cas de la barre fortement absorbante en fonction de la théorie choisie.	112
5.15	Module et phase du bruit à $f_0$ et $2f_0$ pour le cas de la barre fortement absorbante en employant la modélisation adiabatique et son approximation	113
5.16	Comparaison des modules des quatre premières harmoniques du bruit rapide et thermique en théorie non linéaire	114
5.17	Évolution de $\delta\Sigma$ en fonction de la maille et de la fréquence	115
5.18	Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur hétérogène à une dimension	115
5.19	Module et phase du bruit rapide et thermique à $f_0$ et $2f_0$ en fonction de la théorie choisie	116
5.20	Module et phase du bruit rapide et thermique à $f_0$ et $2f_0$ en employant la modélisation adiabatique et son approximation	117
5.21	Module et phase du bruit rapide et thermique à $f_0$ et $2f_0$ en théorie linéaire classique en théorie de la diffusion et du transport	118
5.22	Module du bruit rapide et thermique à $f_0$ engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport.	119
5.23	Module du bruit rapide et thermique à $2f_0$ engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport.	120
5.24	Comparaison des modules du bruit rapide et thermique à $f_0$ et à $2f_0$ engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport.	121
5.25	Phase du bruit rapide et thermique en degré à $f_0$ engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport.	122
5.26	Phase du bruit rapide et thermique en degré à $2f_0$ engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport.	123
B.1	Comparaison des approximations de la fonction de transfert fondamentale avec 6 groupes de précurseurs	140
C.1	Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur.	141
D.1	Déphasage en fonction de la fréquence entre les positions axiales $z_a$ et $z_b$ au niveau de l'assemblage perturbé	146
D.2	Module et phase du bruit rapide à 1, 5, 10 et 15 Hz en fonction de la hauteur $z$ au niveau de l'assemblage perturbé	147



# Liste des tableaux

---

2.1	Plage de validité des approximations du réacteur point et adiabatique . . . . .	38
3.1	Taux de combustion des assemblages (MWj/t). . . . .	64
3.2	Températures du combustible, de la gaine et du modérateur. . . . .	65
4.1	Paramètres de calcul de la nouvelle méthode Monte Carlo . . . . .	84
4.2	Figures de mérite des calculs Monte Carlo . . . . .	84
4.3	Caractéristiques des deux méthodes Monte Carlo . . . . .	87
C.1	Données nucléaires et cinétiques du cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur . . . . .	143
C.2	Données nucléaires et cinétiques du milieu homogène infini et du cylindre homogène infini . . . . .	144





# Notations et conventions

---

Tout au long de ce document, de nombreux symboles sont utilisés. Afin de maintenir une certaine cohérence et pour éviter toute confusion, quelques définitions et conventions ont été établies ci-après.

## Outils mathématiques

$ \cdot $	valeur absolue ou module.
$\varphi$	phase (ou argument) d'une fonction ou d'un nombre complexe.
$\star$	produit de convolution défini par $(f \star g)(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r-r')g(r')dr' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r')g(r-r')dr'$ pour deux fonctions $f$ et $g$ réelles ou complexes, et par $(p \star q)(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(n-m)g(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(m)q(n-m)$ pour deux suites $p$ et $q$ .
$\langle \cdot \rangle$	moyenne temporelle.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire défini sur l'espace des phases $P$ par $\langle f, g \rangle = \int_P f(p)\overline{g(p)}dp$ où $\overline{g(p)}$ est le complexe conjugué de $g(p)$ .
$\vec{\nabla}$	gradient.
$\Delta$	laplacien (divergence du gradient).

Nous choisissons comme convention que la transformée de Fourier d'une fonction  $f$  soit définie par  $f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ <sup>1</sup>. Dans ce cas, pour toute fonction périodique  $f$  de période  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , sa transformée de Fourier est définie par  $f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$  avec  $F(n\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt$ . Dans le cas d'une fonction réelle,  $|F(-n\omega_0)| = |F(n\omega_0)|$  et la phase  $\varphi$  vérifie  $\varphi(-n\omega_0) = -\varphi(n\omega_0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, lorsque l'on repasse dans le domaine temporel, la fonction réelle périodique  $f$  est égale à  $f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} |F(n\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \varphi(n\omega_0))$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Rappelons que, par définition, la fonction de Dirac vérifie  $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}dt$ .

## Variables de l'espace des phases

$r$	variable spatiale.
$E$	variable énergétique.
$v$	module de la vitesse des neutrons (dépend directement de l'énergie).
$\vec{\Omega}$	variable angulaire (direction du vecteur vitesse).

## Grandeurs physiques

Rappelons au lecteur que les définitions du flux et du courant en neutronique diffèrent légèrement de celles communément admises en physique.

$\Psi$	flux neutronique angulaire défini par $n \times v$ où $n$ est la densité de neutrons de vitesse $v$ par unité de volume.
$\Phi$	flux neutronique scalaire défini par $\Phi(r, E) = \int_{(4\pi)} \Psi(r, E, \vec{\Omega})d\vec{\Omega}$ .
$\Psi^*$	flux neutronique angulaire adjoint.
$\Phi^*$	flux neutronique scalaire adjoint.
$\vec{J}$	densité courant neutronique défini par $\vec{J}(r, E) = \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \Psi(r, E, \vec{\Omega})d\vec{\Omega}$ .
$C$	concentration des précurseurs.
$k$	facteur de multiplication effectif.

1. C'est par souci de simplification que nous avons choisi de noter  $f(\omega)$  la transformée de Fourier de la fonction  $f(t)$ .

Un certain nombre de ces termes (le flux angulaire et le flux scalaire notamment) peuvent prendre l'indice  $g$  qui fait référence au groupe d'énergie  $g$ , et l'indice 0 qui fait référence à l'état d'équilibre du système. De même, certains termes peuvent être perturbés et nous désignons par  $\delta X$  le terme perturbé de  $X$  suite à une perturbation extérieure.

## Variables et grandeurs liées au bruit neutronique

$S$	source de bruit.
$S_g$	source de bruit du groupe $g$ .
$G$	fonction de Green aussi appelée fonction de transfert.
$G^*$	fonction de Green associée à l'équation du bruit adjointe.
$G_0$	fonction de transfert fondamentale (« zero-power reactor transfert function »).
$f$	fréquence (Hz).
$\omega$	fréquence angulaire définie par $\omega = 2\pi f$ (rad/s).
$T_0$	période de la perturbation (s).
$f_0$	fréquence de la perturbation définie par $f_0 = 1/T_0$ (Hz).
$\omega_0$	fréquence angulaire de la perturbation définie par $\omega_0 = 2\pi f_0$ (rad/s).

## Données nucléaires et cinétiques

Nous définissons ici les données nucléaires et cinétiques dans le cadre multigroupe. Le lecteur veillera à ne pas confondre les sections efficaces macroscopiques avec le symbole somme. Pour rappel, une section efficace macroscopique est une grandeur physique liée à la densité de probabilité d'interaction d'une particule par unité de longueur pour une réaction donnée (l'unité est le  $\text{cm}^{-1}$ ).

$\Sigma_t^g$	section efficace macroscopique totale du groupe d'énergie $g$ .
$\Sigma_a^g$	section efficace macroscopique d'absorption du groupe d'énergie $g$ .
$\Sigma_f^g$	section efficace macroscopique de fission du groupe d'énergie $g$ .
$\Sigma_s^{g' \rightarrow g}$	section efficace macroscopique de diffusion du groupe d'énergie $g'$ vers le groupe d'énergie $g$ .
$\Sigma_{0,s0}^{g' \rightarrow g}$	section efficace macroscopique de diffusion isotrope du groupe d'énergie $g'$ vers le groupe d'énergie $g$ (première composante de la décomposition de la section efficace macroscopique de diffusion sur les polynômes de Legendre).
$D_g$	coefficient de diffusion du groupe d'énergie $g$ .
$v_g$	vitesse des neutrons du groupe d'énergie $g$ .
$\nu_g$	nombre de neutrons produits par fission du groupe d'énergie $g$ .
$\chi_p^g$	spectre de fission des neutrons prompts du groupe d'énergie $g$ .
$\chi_{d,q}^g$	spectre de fission des neutrons retardés du groupe d'énergie $g$ et du groupe de précurseurs $q$ .
$\chi^g$	spectre de fission du groupe d'énergie $g$ ( $\chi^g = (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g + \sum_q \beta_q \chi_{d,q}^g$ ).
$\beta_q$	proportion de neutrons retardés du groupe de précurseurs $q$ parmi l'ensemble des neutrons prompts et retardés émis par fission (supposé indépendant de l'énergie).
$\beta$	proportion totale des neutrons retardés parmi l'ensemble des neutrons prompts et retardés émis par fission ( $\beta = \sum_q \beta_q$ ).
$\lambda_q$	constante de décroissance radioactive du groupe de précurseurs $q$ .
$\Lambda$	temps moyen de génération entre la naissance d'un neutron et son absorption (fission incluse).

Les sections efficaces ainsi définies peuvent prendre l'indice 0 qui fait référence à l'état d'équilibre du système. De même, elles peuvent aussi être perturbées et nous désignons par  $\delta \Sigma$  le terme perturbé de la section efficace macroscopique  $\Sigma$  suite à une perturbation extérieure.

Nous supposons pour l'ensemble de ce manuscrit que le lecteur est familier des rudiments de la neutronique, en particulier de l'équation de Boltzmann. Si tel n'est pas le cas, nous l'invitons à se reporter aux ouvrages de référence comme [52] ou [134].

# Introduction

---

## Contexte et objectifs

L'amélioration et l'optimisation de la sûreté des réacteurs nucléaires a toujours été un enjeu majeur pour la filière nucléaire mondiale. Au vu des accidents survenus ces dernières années, de l'augmentation drastique des contraintes de sûreté qui s'en est suivie, du prolongement de la durée de vie des centrales (américaines et françaises en particulier) ainsi que des divers projets de construction de nouveaux réacteurs de 4<sup>ème</sup> génération, cette problématique est plus que jamais d'actualité. La sûreté des réacteurs nucléaires actuels et futurs doit sans cesse être vérifiée, prouvée et surtout améliorée, notamment en France où la politique de l'Autorité de Sûreté Nucléaire y est particulièrement stricte. Les exploitants et les unités de recherche privées ou publiques se doivent donc d'explorer toutes les pistes tant technologiques que méthodologiques à même d'améliorer de quelque manière que ce soit la sûreté des réacteurs. Parmi ces pistes, l'étude du bruit neutronique en est une particulièrement prometteuse qui répondrait à de nombreuses problématiques comme la détection en temps réel de propriétés dynamiques globales ou d'anomalies survenant en cours de fonctionnement d'un réacteur nucléaire.

Le bruit neutronique (« power reactor noise ») désigne les fluctuations de la population neutronique dans un cœur de réacteur nucléaire. Ces fluctuations sont induites par des changements déterministes ou stochastiques des sections efficaces macroscopiques lors du fonctionnement à puissance nominale du réacteur. Ces perturbations des sections efficaces peuvent avoir des origines diverses comme une variation de densité du caloporteur ou une vibration d'un élément mécanique (une barre de contrôle, un crayon ou un assemblage combustible, la cuve elle-même...). Dans les réacteurs de puissance, ces bruits neutroniques sont observables par les détecteurs de neutrons placés à l'intérieur et à l'extérieur du cœur. Lorsque ces bruits sont jugés anormaux, tout l'enjeu est de savoir identifier et localiser leurs sources afin de pouvoir mettre en place les mesures de sûreté éventuellement nécessaires au bon fonctionnement de l'installation. L'analyse du bruit neutronique est ainsi particulièrement bien adaptée pour, d'une part, la surveillance, le contrôle et le diagnostic non destructif d'anomalies en temps réel dans les chaudières nucléaires, et d'autre part, pour la détermination en temps réel de certaines propriétés dynamiques globales ou de certaines propriétés des milieux comme la vitesse du caloporteur ou son titre vapeur.

L'étude du bruit neutronique n'est pas nouvelle et a été très florissante dans les années 1970 et 1980. Elle a malgré tout été quelque peu délaissée entre les années 1990 et le milieu des années 2000 avant que la problématique ne revienne petit à petit au premier plan. De nombreux travaux expérimentaux ont été réalisés, notamment sur les réacteurs rapides Phénix et Superphénix, et de nombreuses analyses analytiques ou semi-analytiques des équations du bruit ont été menées sur des systèmes simples. Néanmoins, la simulation précise des fluctuations de la population neutronique par des codes neutroniques est récente et n'a véritablement commencé qu'au début des années 2000. À ce jour, il n'existe que deux codes déterministes spécialement dédiés à la résolution des équations du bruit neutronique. Ces codes, développés par des unités de recherche universitaires suédoises pour l'un et iraniennes pour l'autre, n'offrent que la possibilité de mener des études en théorie de la diffusion à peu de groupes d'énergie. Or, les perturbations étudiées (une vibration d'une barre de contrôle ou d'un assemblage combustible par exemple) sont souvent locales et de faibles amplitudes. Traiter ce type de problème en théorie de la diffusion peut parfois s'avérer trop imprécis, notamment si l'objectif est de simuler précisément les réponses des détecteurs de flux. Avoir la possibilité de mener des études de bruit en théorie du transport via des codes industriels de transport déterministes et/ou Monte Carlo est l'un des principaux défis des années à venir. Le développement de simulateurs de bruit neutronique directement intégrés aux grands codes neutroniques industriels et multi-filières comme APOLLO3® ou TRIPOLI-4® développés au CEA sera en effet d'une aide précieuse pour compléter et optimiser les études de sûreté des réacteurs d'aujourd'hui et de demain. Cela permettra de simuler précisément en amont diverses sources de bruit et d'en déduire numériquement les réponses que donneraient les détecteurs de neutrons dans cette situation, afin d'en constituer une bibliothèque. Via notamment des méthodes d'apprentissage, il sera alors possible de comparer en temps réel les bruits enregistrés dans

un réacteur en fonctionnement avec ceux de la bibliothèque pour ainsi identifier les phénomènes normaux ou anormaux qui ont lieu dans le cœur. Le but est donc d'être capable, à terme, de correctement résoudre en temps réel le problème inverse, c'est-à-dire de remonter à la source de bruit connaissant simplement le bruit via les signaux des détecteurs.

Les équations générales du bruit neutronique sont issues de la linéarisation et de la transformée de Fourier de l'équation de Boltzmann cinétique perturbée autour de l'état d'équilibre du cœur en suivant l'hypothèse des petites perturbations et en prenant en compte le couplage avec les équations des précurseurs. Ceci a pour résultat une équation à source dans le domaine fréquentiel. Résoudre cette équation complexe permet de prédire le bruit pour différents emplacements de détecteurs. Pour chaque fréquence, le bruit est composé d'un module et d'une phase, il s'agit donc d'une fonction complexe dans le domaine fréquentiel. Bien que les équations du bruit neutronique soient des équations définies dans le domaine complexe et non plus réel, elles présentent de nombreuses similitudes avec l'équation de Boltzmann stationnaire. Moyennant quelques modifications plus ou moins significatives, il est donc possible d'employer les codes neutroniques déterministes ou stochastiques existants pour résoudre les équations du bruit neutronique, et d'ainsi bénéficier de toutes les méthodes numériques performantes et novatrices développées dans ces codes de transport.

C'est dans ce contexte général que s'inscrit cette présente thèse qui a pour principal objectif de mettre en place des outils de calculs neutroniques en implémentant notamment un solveur de bruit neutronique directement dans le code de transport déterministe APOLLO3<sup>®</sup>. Au cours de nos travaux, nous avons de plus été amenés à mettre en place une nouvelle méthode de résolution stochastique des équations du bruit. Cette nouvelle méthode a vocation à être à terme implémentée dans le code de transport Monte Carlo de référence TRIPOLI-4<sup>®</sup>. Un nouveau modèle de sources de bruit engendrées par des vibrations mécaniques a en outre été développé. Une nouvelle méthode basée sur la détermination d'un nouvel état d'équilibre a aussi été proposée afin de rendre plus robuste la théorie classique linéaire et non linéaire. Concernant cette dernière, la résolution des équations non linéarisées du bruit en théorie de la diffusion à une dimension a été implémentée pour ainsi étudier les limites de la théorie linéaire pour ce cas particulier. Afin d'illustrer et d'analyser l'ensemble des développements et des nouvelles méthodes que nous avons mis en place, des études de bruit dans des cœurs homogènes et hétérogènes avec une maquette à une dimension ont été menées. De même, des études dites « grandeurs nature » dans un grand cœur de réacteur à eau légère et à baffle lourd à deux et trois dimensions ont été réalisées en théorie du transport et de la diffusion avec APOLLO3<sup>®</sup>.

## Organisation du manuscrit

Ce présent manuscrit, décomposé en 5 chapitres, s'organise comme suit :

- **chapitre 1** : le premier chapitre introductif donne un panorama général sur l'étude passée, présente et future du bruit neutronique. La définition précise du bruit neutronique y est détaillée ainsi qu'un court historique de son origine et de son étude dans le domaine de l'ingénierie nucléaire. Les principaux outils de détection usuellement employés sont présentés. Les principales sources de bruit dans les trois grandes filières que sont les réacteurs à eau pressurisée, à eau bouillante et à neutrons rapides refroidis au sodium sont de plus détaillées. Des exemples concrets de détection et d'analyse du bruit neutronique sont en outre développés. Ce chapitre se conclut par une présentation des deux seuls codes déterministes spécialement dédiés à la simulation du bruit neutronique existants à ce jour, puis par un court développement sur les enjeux de l'étude approfondie du bruit pour la sûreté des réacteurs nucléaires. Un résumé détaillé du chapitre 1 est présenté en page 24 ;
- **chapitre 2** : le deuxième chapitre développe et détaille la théorie et les équations du bruit neutronique. La théorie générale et ses équations sont présentées ainsi que l'approximation de la diffusion très couramment appliquée, et l'approximation adiabatique telle que nous l'employons dans les études présentées dans ce manuscrit. Nous y développons de plus notre théorie sur un nouvel état d'équilibre qui permet de rendre plus robuste la théorie générale. Les principales méthodes de résolution analytique y sont de plus détaillées. Elles sont principalement basées sur l'emploi des fonctions de Green, directes ou adjointes, ou sur les approximations de la cinétique étendues au cas des équations du bruit. Enfin, les composantes dites « globales » et « locales » du bruit sont présentées. Ces deux composantes structurent le bruit neutronique et permettent de mieux comprendre la forme du flux neutronique résultant de diverses sources de bruit. Ce chapitre est en outre composé de deux annexes : A et B. Un résumé détaillé du chapitre 2 est présenté en page 47 ;
- **chapitre 3** : le troisième chapitre porte sur les méthodes de résolution déterministe des équations du bruit neutronique que nous avons mises en place au cours de nos travaux. Le schéma numérique général que nous avons adopté et implémenté dans une maquette dite « fil » à une dimension et dans le solveur réseau IDT du code de transport déterministe APOLLO3® y est présenté. Quelques tests de vérification et de validation de ces développements par comparaison avec des résultats analytiques sont détaillés. Ce chapitre se conclut par une première étude de sources de bruit en analysant des oscillations sinusoïdales des sections efficaces à l'aide des solveurs de bruit neutronique développés dans la maquette fil et dans le code déterministe APOLLO3®. Une étude d'oscillation des sections efficaces d'un assemblage combustible dans un grand cœur de réacteur à eau légère et à baffle lourd à deux et trois dimensions avec APOLLO3® est en particulier détaillée. Ce chapitre est en outre composé de deux annexes : C et D. Un résumé détaillé du chapitre 3 est présenté en page 76 ;
- **chapitre 4** : le quatrième chapitre aborde la question de la résolution stochastique des équations du bruit neutronique. La toute première méthode de résolution stochastique des équations du bruit développée dans la littérature en 2013 est présentée. La nouvelle méthode stochastique que nous avons mise en place dans la maquette fil à une dimension est ensuite détaillée. Enfin, des comparaisons avec les méthodes déterministes et quelques éléments d'analyse sur le comportement des algorithmes à hautes et basses fréquences sont présentés. Ce chapitre est en outre composé d'une annexe : E. Un résumé détaillé du chapitre 4 est présenté en page 94 ;
- **chapitre 5** : le dernier chapitre a pour sujet la modélisation d'une vibration mécanique et l'étude du bruit neutronique résultant. Les principales modélisations analytiques des vibrations mécaniques développées à ce jour dans la littérature ainsi que les résolutions analytiques associées y sont tout d'abord détaillées. Les deux modélisations numériques que nous avons mises en place permettant de modéliser des vibrations périodiques y sont ensuite présentées. Puis, en employant ces nouvelles modélisations numériques, des études de vibrations sont développées : une vibration d'une barre absorbante et d'un crayon combustible dans un cœur à une dimension avec la maquette fil ainsi qu'une vibration d'un assemblage combustible dans un grand cœur de réacteur à eau légère et à baffle lourd à deux dimensions avec APOLLO3®. Un résumé détaillé du chapitre 5 est présenté en page 124 ;

Un bilan des travaux réalisés et une discussion des diverses perspectives envisagées sont détaillés en fin de manuscrit en page 125.



# Analyse et détection du bruit neutronique

## Sommaire

<b>1.1 Les origines du bruit neutronique</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1 Le bruit neutronique à bas flux et à haut flux . . . . .	5
1.1.2 Un bref historique . . . . .	6
<b>1.2 Les sources de bruit dans les réacteurs de puissance</b> . . . . .	<b>9</b>
1.2.1 Les outils de détection . . . . .	9
1.2.2 Les principales sources de bruit des différentes filières . . . . .	13
<b>1.3 Exemples de détection et d'analyse</b> . . . . .	<b>17</b>
1.3.1 Vibrations des supports de cuve d'un REP . . . . .	17
1.3.2 Vitesse d'écoulement du caloporteur d'un REB . . . . .	18
1.3.3 Vibrations des assemblages et d'une barre de commande d'un RNR-Na . . . . .	19
<b>1.4 Le bruit neutronique, un enjeu majeur pour la sûreté</b> . . . . .	<b>21</b>
1.4.1 Les simulateurs actuels de bruit neutronique . . . . .	21
1.4.2 Les enjeux pour la sûreté des réacteurs d'aujourd'hui et de demain . . . . .	22
<b>1.5 Résumé du chapitre</b> . . . . .	<b>24</b>

Ce premier chapitre introductif a pour objectif de donner un panorama général sur l'étude passée, présente et future du bruit neutronique. Nous commencerons par le définir et par dresser un court historique de son origine et de son étude dans le domaine de l'ingénierie nucléaire. Les principales sources de bruit dans les trois grandes filières que sont les réacteurs à eau pressurisée, à eau bouillante et à neutrons rapides refroidis au sodium seront détaillées après avoir donné quelques éléments sur les outils de détection usuellement employés. Des exemples concrets de détection et d'analyse du bruit neutronique seront par la suite développés. Nous concluons ce chapitre par une présentation des deux seuls codes déterministes spécialement dédiés à la simulation du bruit neutronique existants à ce jour, puis par un court développement sur les enjeux de l'étude approfondie du bruit neutronique pour la sûreté des réacteurs nucléaires. Un résumé des points clefs sera établi en fin de chapitre.

## 1.1 Les origines du bruit neutronique

Après avoir défini les différents types de bruit neutronique, nous développerons dans cette section un bref historique sur l'origine et l'étude du bruit neutronique au niveau national et international.

### 1.1.1 Le bruit neutronique à bas flux et à haut flux

De manière générale, le bruit neutronique désigne les fluctuations de la population neutronique dans un cœur de réacteur nucléaire. Son analyse est particulièrement bien adaptée pour, d'une part, la surveillance, le contrôle et le diagnostic non destructif d'anomalies dans les chaudières nucléaires, et d'autre part, pour la détermination de certains paramètres cinétiques ou de certaines propriétés des milieux comme la vitesse du caloporteur ou son titre vapeur. Il existe deux types de fluctuations : les fluctuations intrinsèques aux marches branchantes (voir le paragraphe ci-dessous) qui sont particulièrement visibles à bas flux (dans les réacteurs expérimentaux ou lors du démarrage d'un réacteur de puissance par exemple) et les fluctuations résultant d'une perturbation physique à haut flux (une vibration



d'un assemblage combustible lors du fonctionnement à puissance nominale d'un réacteur par exemple). Ce présent manuscrit porte exclusivement sur l'étude et l'analyse du bruit neutronique à haut flux mais nous allons brièvement décrire, dans cette section, les deux types de bruit neutronique afin de clairement distinguer leurs différences tant du point de vue théorique que du point de vue de leurs champs d'application.

### Le bruit à bas flux

Le bruit neutronique à bas flux, appelé « zero power reactor noise » en anglais, désigne les fluctuations de la population neutronique dans un milieu multiplicateur à l'équilibre où toutes les propriétés des matériaux sont constantes [120, 129]. Dans de tels milieux et à bas flux, ces fluctuations ont pour origine la nature aléatoire du transport des neutrons causée par les processus de collision et de fission (d'où l'appellation de marches branchantes). La théorie du bruit à bas flux repose sur les équations de Kolmogorov, aussi appelées Chapman-Kolmogorov ou encore « master equations », qui caractérisent le comportement dynamique des neutrons. Ces équations, que ce soit sous leurs formes directes (« forward ») ou adjointes (« backward »), sont basées sur la théorie des probabilités et un paradigme markovien. Elles permettent la détermination de la statistique régissant la population neutronique (valeur moyenne, moments d'ordres supérieurs...) via celle de la population détectée par des détecteurs dans le cas particulier où le nombre total de neutrons est faible et où les fluctuations relatives sont donc importantes. Ceci permet, moyennant certaines hypothèses, de déterminer des paramètres cinétiques particulièrement importants tels que la réactivité sous-critique d'un réacteur, la fraction effective des neutrons retardés<sup>1</sup> ou la constante de décroissance des neutrons prompts par notamment les méthodes Feynman- $\alpha$ <sup>2</sup> ou Rossi- $\alpha$  pour ne citer qu'elles [120].

### Le bruit à haut flux

Le bruit neutronique à haut flux, appelé « power reactor noise » en anglais, désigne les fluctuations de la population neutronique induites par des changements déterministes ou stochastiques des sections efficaces macroscopiques lors du fonctionnement à puissance nominale du réacteur<sup>3</sup> [120]. Ces perturbations peuvent avoir des origines diverses comme une variation de densité du caloporteur, une vibration d'un élément mécanique comme une barre de contrôle ou un crayon combustible, ou encore une vibration de la cuve elle-même [59]. Dans les réacteurs de puissance, ces bruits neutroniques sont observables par les détecteurs de neutrons placés à l'intérieur et à l'extérieur du cœur. Lorsque ces bruits sont jugés anormaux, tout l'enjeu est de savoir identifier et localiser leurs sources afin de pouvoir mettre en place les mesures de sûreté éventuellement nécessaires au bon fonctionnement de l'installation. Ces bruits peuvent aussi être exploités pour déterminer certaines propriétés du caloporteur comme sa vitesse ou son titre vapeur, ou encore d'autres propriétés dynamiques globales comme le « Decay Ratio » d'un réacteur à eau bouillante ou le coefficient de température (« Moderator Temperature Coefficient ») d'un réacteur à eau pressurisée [78].

Les équations générales du bruit neutronique à haut flux sont issues de la linéarisation et de la transformée de Fourier de l'équation de Boltzmann cinétique perturbée autour de l'état d'équilibre du cœur en suivant l'hypothèse des petites perturbations et en prenant en compte le couplage avec les équations des précurseurs. Ceci a pour résultat une équation à source dans le domaine fréquentiel. Résoudre cette équation complexe permet de prédire le bruit pour différents emplacements de détecteurs. Pour chaque fréquence, le bruit est composé d'un module et d'une phase, il s'agit donc d'une fonction complexe dans le domaine fréquentiel.

Dans tout le reste de ce manuscrit, nous appellerons « bruit neutronique » le bruit neutronique à haut flux que nous venons de décrire. Le bruit neutronique issu des fluctuations intrinsèques aux marches branchantes sera toujours négligé comme cela est fait dans la pratique. Si nous avons vu les différences entre ces deux types de bruit, nous pouvons tout de même citer [109] et [128] où une théorie générale du bruit neutronique est mise en place regroupant au sein d'une même équation la théorie du bruit à bas et à haut flux. Bien que très intéressante, cette théorie générale semble peu exploitable dans la pratique contrairement aux deux théories précédemment citées.

## 1.1.2 Un bref historique

L'étude du bruit neutronique n'est pas nouvelle et a été très florissante dans les années 1970 et 1980. Si elle a été quelque peu délaissée entre les années 1990 et le milieu des années 2000, la problématique revient petit à petit au premier plan. En voici un bref historique.

1. Nous pouvons citer à ce sujet [43] qui décrit et détaille le système de mesure SPECTRON développé récemment au CEA Cadarache et spécialement dédié à la mesure de la fraction effective des neutrons retardés.

2. Cette méthode peut aussi être employée pour déterminer le facteur de multiplication effectif dans certains cas particuliers dans un réacteur expérimental [71].

3. Le lecteur veillera à ne pas confondre la théorie du bruit neutronique avec la propagation des incertitudes et la théorie des perturbations telles qu'elles sont classiquement étudiées en neutronique [6, 131].

### La naissance et les années fastes du bruit neutronique

L'origine du bruit neutronique puise sa source dans les expériences d'oscillations effectuées sur la pile au graphite de Clinton à Oak Ridge dans le Tennessee [120]. Cette pile est communément considérée comme le premier véritable réacteur nucléaire et a été construite après la pile de Fermi en 1943 par ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de ORNL (Oak Ridge National Laboratory). Ces toutes premières expériences d'oscillations n'ont pas été menées dans le cadre d'un programme de diagnostic d'anomalies mais simplement pour déterminer des données nucléaires comme la section efficace d'absorption thermique. L'analyse théorique de ces expériences est développée dans l'un des articles fondateurs du bruit neutronique de Weinberg et Schweinler [155].

Quelques années plus tard, au tout début des années 1970, il fut constaté que les vibrations anormales des barres de commande survenant dans le réacteur à haut flux de ORNL (High Flux Isotope Reactor) pouvaient être détectées et identifiées grâce aux spectres des détecteurs placés à l'intérieur du cœur. Des problèmes d'obstruction de tuyaux avaient aussi pu être détectés grâce à la même technique dans le réacteur à sels fondus expérimental de ORNL (Molten Salt Reactor Experiment) [57]. C'est ainsi qu'est véritablement né le concept de diagnostic et de surveillance des réacteurs nucléaires par l'étude du bruit neutronique : « *These experiences show that noise analysis can be used for some types of reactor malfunction diagnoses and parameter measurements when other methods cannot be used either because of the environment (radiation or temperature) or a lack of space for sensors.* » [57]. En guise d'illustration, la Fig. 1.1 présente l'un des tout premiers systèmes de diagnostic par l'étude du spectre d'une chambre d'ionisation mis en place dans le réacteur à haut flux HFIR.

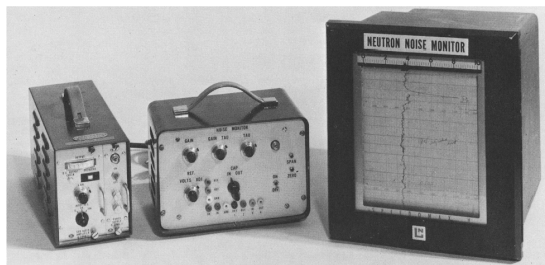


FIGURE 1.1 – Système de diagnostic en ligne du bruit neutronique dans le réacteur à haut flux HFIR [57].

À partir du début des années 1970, de très nombreuses études et analyses ont alors été menées comme celles sur le réacteur de puissance Palisades aux États-Unis (réacteur à eau pressurisée de 800 MW encore en fonctionnement dans le Michigan) concernant la détection des vibrations des supports de cuve [58], ou encore celles sur les vibrations des internes de cuve dans le réacteur à neutrons rapides Phénix [152]. Dès l'année 1974 se tient en Italie le premier symposium sur la surveillance et le diagnostic des réacteurs nucléaires connu sous le nom de SMORN pour « Symposium on Nuclear Reactor Surveillance and Diagnostic ». Ils seront 5 dans les années 1970 et 1980 (1974 en Italie, 1977 aux États-Unis, 1981 au Japon, 1984 en France et 1987 en Allemagne) puis seulement 3 dans les années 1990 et 2000 (1991 aux États-Unis, 1995 en France et enfin 2002 en Suède). Ces symposiums rassemblent de très nombreuses communications sur des thèmes liés aux techniques de surveillance et de diagnostic des composants du circuit primaire, allant du capteur aux techniques de traitement des informations recueillies.

### L'expérience des réacteurs rapides français

L'industrie et la recherche nucléaire française se sont intéressées dès le début des années 1970 à cette problématique du bruit neutronique. Citons par exemple la note technique interne au CEA de 1972 sur l'expérience NABO détaillant des essais de détection d'ébullition dans Rapsodie par l'analyse spectrale d'un détecteur acoustique [28], ou encore une seconde note technique de 1974 qui pose les premières pierres d'un grand projet d'analyse et de surveillance des réacteurs rapides français Phénix et Superphénix [89]. De très nombreuses études ont ainsi été menées dans ces deux réacteurs pendant plus de 30 ans [21, 40, 91, 94, 95, 152]. Un premier système d'analyse de bruit en ligne, ANABELIX (ANalyse de Bruit En Ligne de PhénIX dont le concept est résumé en Fig. 1.2), a été mis en place sur Phénix dès 1982 [22] puis un second plus performant, ANABEL, pour Superphénix dès sa mise en service [90].

Des propositions d'améliorations avaient même été présentées dans l'objectif de mettre en place un troisième système pour Superphénix 2 [92] mais les problèmes de Superphénix et sa fermeture prématurée en 1997 ont mis un sérieux coup d'arrêt au projet de surveillance des réacteurs par le bruit neutronique mené par le CEA. Ce projet n'a pas pour autant totalement disparu comme en atteste l'immense base de données SARA qui regroupe l'enregistrement de nombreux détecteurs de Phénix de 2000 à 2010 et qui constitue une masse d'informations formidable pour continuer l'étude du bruit neutronique. Ces données n'ont cependant été que très peu exploitées jusqu'à présent [167, 168].

Un travail expérimental très important a donc été mené pendant de nombreuses années sur les rapides français. Citons [92] et [93] qui résument clairement l'expérience du bruit neutronique sur les rapides français jusqu'au milieu

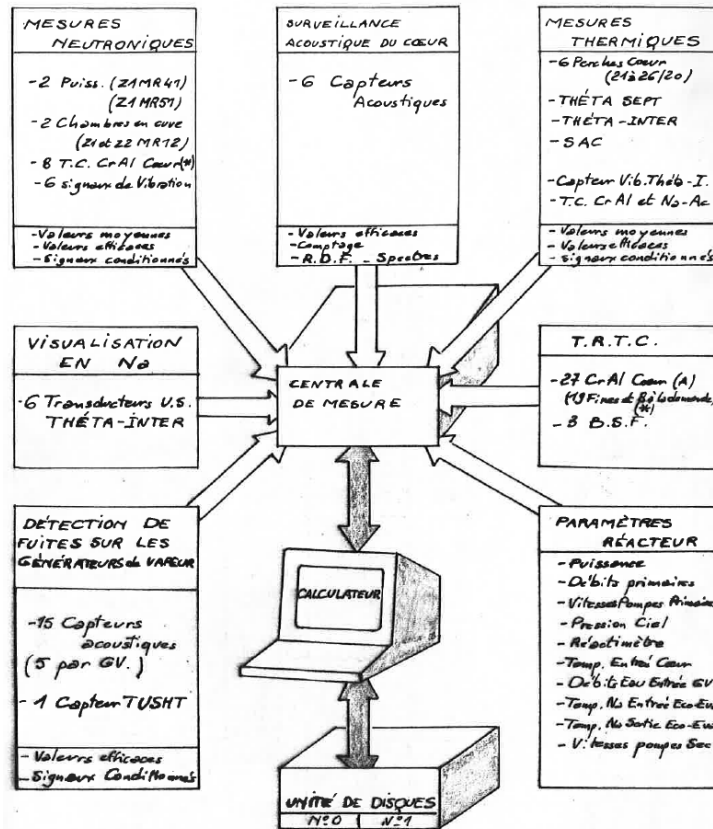


FIGURE 1.2 – Configuration du système ANABELIX d'analyse de bruit en ligne de Phénix [22].

des années 1980. Si, en France, la majorité de l'expérience sur le bruit neutronique nous vient des réacteurs rapides, plusieurs études ont tout de même été réalisées sur les réacteurs à eau pressurisée comme celles sur la centrale de Bugey 2 par exemple ou de Fessenheim [36, 37].

### Un nouveau souffle depuis quelques années

Après l'engouement des années 1970 et 1980 pour le bruit neutronique et tous ses champs d'application pour la surveillance et le contrôle non destructif d'un cœur de réacteur nucléaire, le sujet est petit à petit passé au second plan jusqu'au milieu des années 2000. Depuis quelques années, un regain d'intérêt pour l'étude du bruit neutronique semble se manifester de plus en plus fortement.

Entre les années 1990 et 2010, l'étude du bruit neutronique n'a pas disparu, loin de là comme en atteste les multiples publications dans de grandes revues comme *Annals of Nuclear Energy* ou *Progress in Nuclear Science* (nous aurons l'occasion d'en citer tout au long de ce manuscrit). Mais malgré ces nombreuses communications, l'analyse du bruit n'est presque plus portée par les grands instituts de recherche (CEA, ORNL...) ou les grands industriels du secteur (EDF, Areva...) comme auparavant, mais semble être presque exclusivement portée par quelques instituts de recherche universitaires comme l'université de Chalmers en Suède, auquel nous devons un très grand nombre de travaux sur la théorie du bruit neutronique, ou, plus récemment, l'université de Sharif en Iran ou celles de Kyoto au Japon (nous en parlerons plus en détail en section 1.4.1).

Néanmoins, un regain d'intérêt pour le sujet se manifeste depuis quelques années, comme le montre la thèse récente [167] sur le développement du diagnostic d'anomalies par le bruit neutronique dans les réacteurs rapides, fruit d'une collaboration de longue date entre l'université de Chalmers et le CEA (notamment le centre de Cadarache), et cette présente thèse. Ce regain d'intérêt peut être illustré par les récents problèmes de vibrations survenus dans certains types de pré-konvois<sup>4</sup> allemands et espagnols. En effet, l'industriel allemand E.ON a connu, il y a peu, des problèmes de vibrations anormales de ses nouveaux assemblages combustibles dans certains de ses pré-konvois [144]. Ces problèmes étaient tels qu'ils ont été obligés de baisser leur puissance nominale de 20MW thermique pour respecter les consignes de l'autorité de sûreté allemande. Cette baisse de puissance a évidemment un coût économique non négligeable et c'est pour anticiper et pallier ce type d'anomalies que E.ON a investi et continu d'investir dans l'étude du bruit neutronique malgré la fermeture programmée de ses centrales.

4. Les konvois et les pré-konvois sont des réacteurs à eau pressurisée de technologie allemande.

## 1.2 Les sources de bruit dans les réacteurs de puissance

La détection, l'analyse et la compréhension de l'origine du bruit neutronique via l'exploitation des signaux des détecteurs est un sujet très vaste et particulièrement complexe. Nous n'allons donner, dans cette section, que les grandes idées sur les méthodes de détection usuellement appliquées. Nous détaillerons en outre les principales sources de bruit connues dans les trois grandes filières que sont les réacteurs à eau pressurisée (REP), à eau bouillante (REB) et à neutrons rapides refroidis au sodium (RNR-Na).

### 1.2.1 Les outils de détection

La détection du bruit neutronique est essentiellement basée sur l'analyse des signaux des détecteurs de flux positionnés à l'intérieur (« in-core ») ou à l'extérieur (« ex-core ») du cœur. Le type et le positionnement de ces détecteurs vont brièvement être détaillés dans cette section avant que nous nous penchions sur quelques outils propres au domaine du traitement du signal. Nous terminerons cette section par un rapide focus sur les méthodes d'apprentissage potentiellement exploitables pour analyser en temps réel les signaux des détecteurs et mettre en place un diagnostic en ligne du bruit neutronique.

#### Mesure du flux neutronique

L'instrumentation nucléaire permettant la mesure du flux neutronique et de la réactivité [75, 99] peut être classée en :

- une instrumentation permanente utilisée pour le pilotage et la surveillance en temps réel du cœur,
- une instrumentation d'essai périodique (tous les 45 jours par exemple) utilisée comme référence pour l'étalonnage de l'instrumentation permanente et qui permet d'effectuer une mesure complète et précise de la distribution de puissance.

Ce sont donc les détecteurs de flux de l'instrumentation permanente qui sont préférentiellement utilisés pour la mesure du bruit neutronique. Le positionnement des détecteurs de l'instrumentation permanente diffère selon le type de réacteurs (voir Fig. 1.3 pour les réacteurs à eau et Fig. 1.4 pour un exemple sur Superphénix) :

- détecteurs ex-core latéraux pour les REP et sous la cuve pour les RNR-Na,
- détecteurs in-core pour les REB.

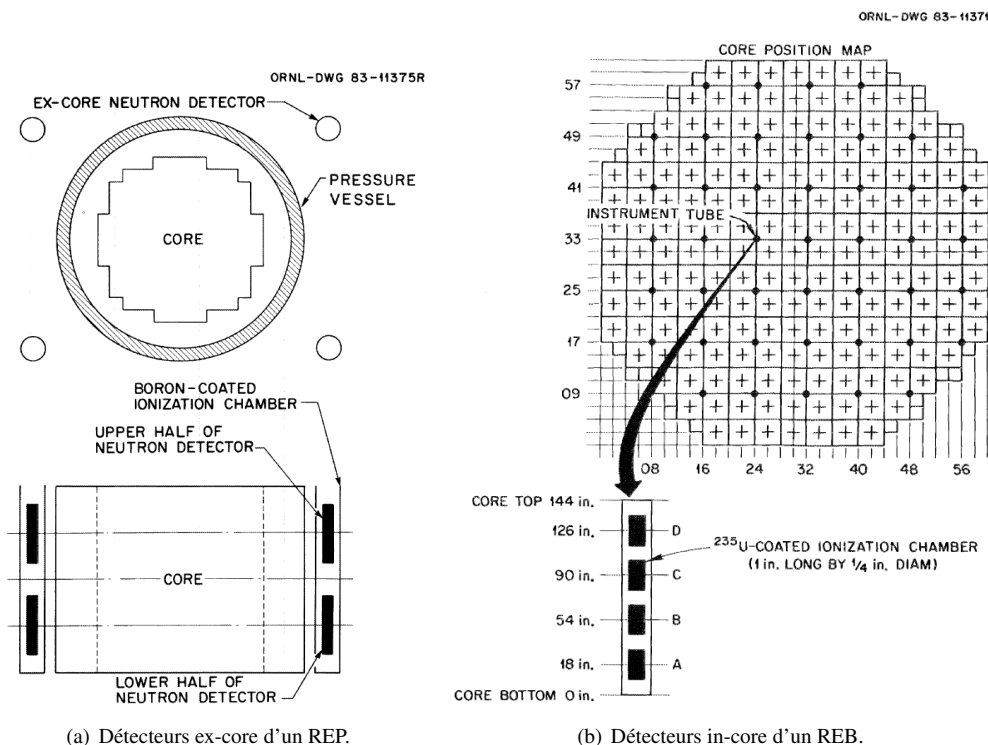


FIGURE 1.3 – Position des détecteurs de flux de l'instrumentation permanente dans les réacteurs à eau [59].

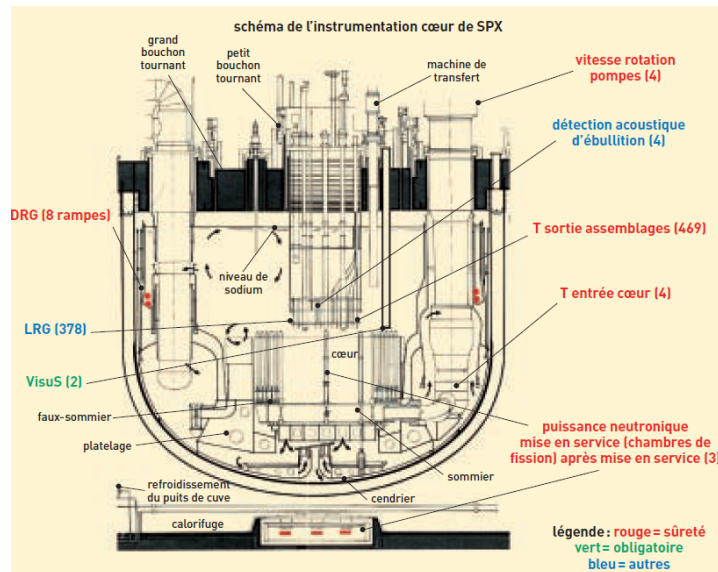


FIGURE 1.4 – Instrumentation du cœur du réacteur Superphénix (document CEA).

Le niveau de flux de neutrons étant très élevé dans le cœur d'un REP ( $\sim 10^{14}$  neutrons/cm<sup>2</sup>/s) et les conditions de fonctionnement particulièrement hostiles dans un cœur de RNR-Na<sup>5</sup>, l'instrumentation permanente de ces types de réacteurs doit être externe au cœur afin d'éviter la dégradation prématurée des détecteurs, et l'instrumentation interne (les détecteurs in-core) ne peut être que momentanément utilisée. Cette dernière peut cependant être ponctuellement exploitée pour affiner les mesures de bruit. Citons par exemple [9] où une méthode de diagnostic des modes vibratoires de la cuve est développée en utilisant les détecteurs ex-core et in-core d'un REP (ces modes vibratoires seront détaillés en section 1.2.2).

Si la détection du bruit neutronique est en grande partie issue de l'analyse des signaux des détecteurs de flux, les méthodes de détection ne se limitent pas à la simple exploitation de ces derniers mais analysent et comparent aussi ces signaux avec ceux d'autres types de détecteurs comme les sonars ou les thermocouples. Comme nous le verrons concrètement en section 1.3, la détection d'une vibration peut, par exemple, être effectuée en exploitant à la fois des détecteurs de flux et des accéléromètres. Les techniques d'analyse du bruit neutronique ne se basent donc pas uniquement sur l'exploitation des détecteurs de flux mais sur tout un ensemble de types de détecteurs dont ceux concernant la mesure du flux ont, il est vrai, une importance toute particulière.

En temps normal de fonctionnement, les signaux des divers détecteurs sont expérimentalement exploitables entre environ 0,01 Hz et 100 Hz. Les mesures à très basses fréquences (< 0,01 Hz) sont en effet dominées par les bruits de fond du cœur et nécessitent de longues heures d'enregistrement en continu pour espérer pouvoir les exploiter. À très hautes fréquences (> 100 Hz), les mesures sont quant à elles noyées par le bruit de détection, parasite d'un point de vue physique. C'est pourquoi la connaissance des sources de bruit des différents types de réacteurs se limite à cette gamme de fréquences qui va grossièrement de 0,01 Hz à 100 Hz.

Profitions de ce paragraphe pour faire un petit aparté sur la modélisation numérique des réponses des détecteurs de flux. La détermination de la fonction de réponse d'un détecteur est particulièrement complexe (voire impossible en théorie de la diffusion lorsqu'il s'agit des détecteurs ex-core). Dans la pratique, seuls les résultats en théorie du transport et en particulier ceux issus de calculs Monte Carlo sont exploitables (notamment pour les détecteurs ex-core). Pour les calculs déterministes, il est courant d'approximer la fonction de réponse d'un détecteur de flux par le calcul d'un taux d'absorption ou plutôt d'un taux de détection proportionnel au flux neutronique déterminé à l'emplacement du détecteur. Tout l'enjeu est de savoir correctement approximer la « section efficace de détection » employée pour modéliser cette fonction de réponse (mais aussi d'avoir des codes de transport déterministes capables de simuler suffisamment précisément un flux loin du cœur pour le cas des détecteurs ex-core). Dans les calculs Monte Carlo, il existe des méthodes plus précises basées par exemple sur l'emploi de fonctions de Green ou des cartes d'importance [153, 27]. Bien que directement lié à l'étude du bruit neutronique, ce présent manuscrit ne traite pas de cette problématique. Nous avons choisi de nous concentrer sur la modélisation et la résolution numérique des équations du bruit neutronique. À terme, il sera bien évidemment très important de creuser la question pour le cas particulier du bruit neutronique comme cela a déjà été initié dans [81, 82, 167].

5. Les conditions thermiques étaient telles que les détecteurs de flux en cuve des réacteurs Phénix et Superphénix ont dû être placés en dehors de la zone de fortes températures du cœur et des dispositions particulières ont dû être prises (« guides de neutrons » pour Superphénix par exemple) pour avoir un flux neutronique suffisant. À l'avenir, une nouvelle technologie de chambres à fission haute température placées en cuve est prévue pour le réacteur Astrid.

### Quelques éléments de traitement du signal

L'étude du bruit neutronique étant basée sur l'analyse des signaux réels de divers détecteurs, nous allons, dans ce paragraphe, donner quelques outils propres au domaine du traitement du signal [12, 20, 39]. Il ne s'agit que de quelques outils simples mais fondamentaux, qui donnent une bonne idée de la manière dont nous pouvons exploiter l'information contenue dans les signaux des détecteurs. Nous verrons en section 1.3 comment concrètement ces outils sont utilisés pour détecter une anomalie comme par exemple une vibration d'une barre de commande.

**Fonction de corrélation** Soient deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  réels et à énergie infinie. La fonction d'intercorrélation se définit par :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y(t - \tau)dt, \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Cette fonction permet de mesurer la similitude entre ces deux signaux. Elle est en effet maximale lorsque les deux signaux ont exactement la même forme. Ainsi, si nous observons un pic de cette fonction en  $\tau_1$  par exemple, alors les deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  sont, à un certain degré, corrélés entre eux avec un retard de  $\tau_1$ . En outre, la fonction d'intercorrélation de deux signaux périodiques de périodes différentes est une fonction périodique dont la période est le plus petit commun multiple de ces deux périodes. Si le rapport de ces deux périodes est un nombre irrationnel,  $C_{xy}$  est nulle.

Cette idée de calculer l'interdépendance entre deux signaux pris en deux temps différents suggère que nous pourrions faire la même chose avec un seul signal  $x(t)$  en le comparant à lui-même avec un temps décalé. C'est ce qui est appelé la fonction d'autocorrélation qui se définit simplement par :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t - \tau)dt, \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Cette fonction d'autocorrélation, fonction paire pour les signaux réels et maximale en  $\tau = 0$ , permet donc d'étudier la ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps. Par conséquent, si le signal est périodique, la fonction d'autocorrélation permettra de détecter cette périodicité<sup>6</sup>. Si le signal n'est pas strictement périodique mais est seulement caractérisé par des événements répétés avec des fréquences caractéristiques (un morceau de musique par exemple), la fonction d'autocorrélation va être sensible à ces répétitions et va permettre d'identifier les périodicités cachées du signal. Cette fonction nous renseigne aussi sur le degré de persistance d'un signal. En effet, si le signal varie doucement en fonction du temps, alors  $C_{xx}$  sera non nulle pour de faibles retards et nulle pour des retards suffisamment grands pour que le signal ait perdu toute dépendance de sa valeur initiale. Au contraire, si le signal varie rapidement,  $C_{xx}$  s'annulera beaucoup plus rapidement puisque le signal retardé aura tendance à être très rapidement décorrélé de sa valeur initiale. La fonction d'autocorrélation permet donc de quantifier la mémoire du signal et donc du phénomène physique qui en est à l'origine. La durée de corrélation est une façon de caractériser cette mémoire et se définit comme étant la durée au bout de laquelle le signal a perdu la mémoire de sa valeur initiale.

Toutes ces propriétés sur les fonctions d'inter et d'auto-corrélations permettent entre autres de détecter un signal périodique noyé dans un bruit. En effet, soient un signal réel périodique  $x(t)$  et un bruit blanc  $b(t)$  indépendant de  $x(t)$  et sans mémoire. Posons  $s(t)$  la somme de ces deux signaux. Par distributivité de l'opérateur de corrélation, nous avons :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{xb}(\tau) + C_{bx}(\tau) + C_{bb}(\tau), \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Les deux signaux  $x(t)$  et  $b(t)$  étant supposés indépendants,  $C_{xb}$  et  $C_{bx}$  sont nulles. De plus, par définition du bruit blanc,  $C_{bb}$  est nulle en dehors de 0. Ainsi,  $C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau)$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^*$ . Ce type de méthode permet de détecter la présence d'un signal même lorsque ce dernier est faible devant le bruit.

**Densité spectrale** La densité spectrale de puissance (DSP), appelée « power spectral density » en anglais (PSD), est simplement définie comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'inter ou d'auto-corrélation :

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(t)e^{-i\omega t}dt, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

La densité spectrale de puissance permet de représenter la distribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. Elle présente donc des pics en présence de périodicité pour un seul signal  $x(t)$  ou en présence de corrélations entre deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ . Sa phase, qui n'a de sens que si  $|S_{xy}(\omega)| > 0$ , représente le déphasage entre  $x(t)$  et  $y(t)$ .

6. Notons que pour les signaux périodiques, la fonction d'autocorrélation conserve l'information sur la fréquence mais pas sur la phase [39].

Dans la pratique, il est plus facile de calculer la fonction d'inter ou d'auto-corrélation en passant par le calcul de la densité spectrale.

Précisons qu'en anglais, la densité spectrale de puissance de la fonction d'autocorrélation est appelée « auto power spectral density » (APSD) et « cross power spectral density » (CPSD) pour la fonction d'intercorrélacion.

**Fonction de cohérence spectrale** Pour quantifier le degré de cohérence de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ , c'est la fonction de cohérence spectrale qui est calculée dans la pratique. Cette fonction est définie par :

$$\text{Coh}_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{\sqrt{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Cette fonction de cohérence permet de quantifier le degré de dépendance linéaire et de corrélation entre les densités spectrales de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Les propriétés générales de cette fonction sont les suivantes :

- le module de  $\text{Coh}_{xy}$  est compris entre 0 et 1. Si  $|\text{Coh}_{xy}(\omega)| = 0$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  sont totalement décorrélés en  $\omega$ , et si  $|\text{Coh}_{xy}(\omega)| = 1$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  sont totalement corrélés en  $\omega$ .
- la phase de  $\text{Coh}_{xy}$  n'a de sens et n'est significative que lorsque  $|\text{Coh}_{xy}(\omega)| > 0$  (autrement dit, la cohérence entre les deux signaux ne doit pas être négligeable). Elle représente le déphasage entre  $x(t)$  et  $y(t)$  à la fréquence  $\omega$ .

L'étude de la fonction de cohérence ne permet cependant pas de déterminer un lien de causalité entre les deux signaux mais simplement de dire si oui ou non ils ont tendance à fluctuer en même temps. Deux signaux peuvent donc avoir un fort degré de cohérence mais n'avoir en réalité aucune relation de causalité directe entre eux. Ils peuvent, par exemple, être influencés par un troisième signal  $z(t)$ . C'est l'étude de la fonction de cohérence partielle qui peut permettre de lever le doute sur l'existence d'un lien de causalité entre  $x(t)$  et  $y(t)$ . La fonction de cohérence partielle de  $x(t)$  et  $y(t)$  conditionnée par un troisième signal  $z(t)$  est définie par :

$$\text{Coh}_{xy/z}^{\text{Part}}(\omega) = \frac{\text{Coh}_{xy}(\omega) - \text{Coh}_{xz}(\omega)\text{Coh}_{yz}(\omega)}{\sqrt{(1 - |\text{Coh}_{xz}(\omega)|^2)(1 - |\text{Coh}_{yz}(\omega)|^2)}}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Cette fonction va permettre d'éliminer l'influence de  $z(t)$  et de mesurer le degré de cohérence directe entre  $x(t)$  et  $y(t)$ . Ainsi, si la variable  $z(t)$  a bien une influence sur  $x(t)$  et  $y(t)$  alors  $\text{Coh}_{xy}^{\text{Part}}$  est négligeable et la cohérence ordinaire entre  $x(t)$  et  $y(t)$  n'était que factice. Un exemple concret d'un tel problème est clairement illustré dans [78].

### Automatisation du diagnostic

Afin de pouvoir diagnostiquer et détecter en temps réel les anomalies survenant lors du fonctionnement des réacteurs, il est indispensable de disposer à terme de méthodes d'automatisation du diagnostic rapides et efficaces permettant d'alerter en temps réel les opérateurs. Il existe de nombreuses méthodes qui pourraient être adaptées à l'automatisation du diagnostic en ligne. Citons par exemple le krigeage [106], les réseaux de neurones [51] ou encore la méthode du filtre de Kalman [147].

Dans le domaine du bruit neutronique en particulier, c'est l'automatisation par réseaux de neurones qui a été le plus étudiée et le plus analysée [2, 62, 122, 127, 151]. Les réseaux de neurones sont une méthode de méta-modélisation dont le fonctionnement s'inspire des neurones biologiques et qui s'est largement développée dans les années 1980. Comme le détaille [51], « un neurone est une fonction algébrique non linéaire, paramétrée, à valeurs bornées ». Généralement c'est la fonction sigmoïde (fonction monotone croissante et bornée) qui est utilisée. Le réseau de neurones non bouclé à couches (voir Fig. 1.5) « réalise une fonction algébrique de ses entrées, par composition des fonctions réalisées par chacun des neurones ».

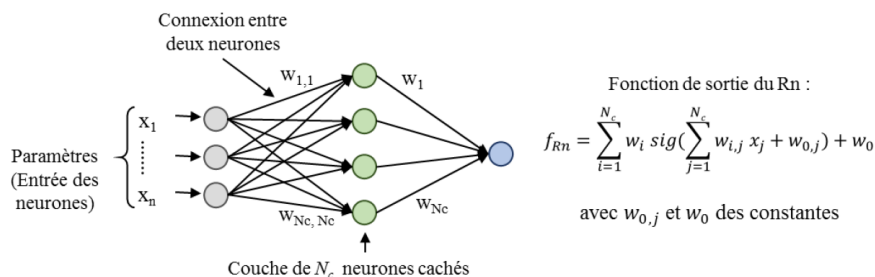


FIGURE 1.5 – Réseau de neurones (Rn) non bouclé avec une couche de neurones cachée [6].

Avant d'utiliser un réseau de neurones, il doit être entraîné. Cette étape nécessite une base de formation contenant plusieurs évaluations de la fonction de sortie  $f$  que l'on cherche à modéliser en fonction de la variable d'entrée  $x$ . La formation du réseau de neurones va consister à trouver les meilleurs poids synaptiques  $w$  pour retrouver la fonction  $f$  en fonction de  $x$ . Pour le bruit neutronique, cette étape de formation est effectuée grâce à un très grand nombre de simulations réalisées en amont à l'aide de codes de bruit neutronique. Par exemple, pour entraîner un réseau de neurones à la détection d'une vibration d'une barre absorbante dans un réacteur de type VVER<sup>7</sup>, les auteurs de [2] ont réalisé, avec leur code de bruit neutronique [1] (voir section 1.4.1), un très grand nombre de simulations de bruit neutronique (50 000). Pour chacune des simulations, l'amplitude d'absorption, la fréquence de vibration et la position de la barre ont été choisies aléatoirement générant ainsi les 50 000 sources de bruit différentes. Pour ce cas précis, les variables d'entrée du réseau de neurones sont le bruit neutronique obtenu à l'emplacement de chaque détecteur de flux et les variables de sortie sont l'amplitude d'absorption, la fréquence de vibration et la position de la barre.

L'un des enjeux de l'automatisation par réseau de neurones est donc de disposer de codes résolvant les équations du bruit neutronique de manière suffisamment précise et rapide afin de pouvoir effectuer rapidement un très grand nombre de simulations pour l'étape de formation. L'étude des méthodes d'automatisation du diagnostic est aussi une opportunité pour déterminer les emplacements et le nombre optimum des détecteurs de flux rendant la détection du bruit neutronique la plus performante possible.

## 1.2.2 Les principales sources de bruit des différentes filières

Chaque filière de réacteurs a des caractéristiques différentes (type d'assemblages, type de caloporteur et/ou de modérateur, spectre de fission, taille du système...) et ainsi des sources de perturbations différentes. Cette section a pour but de décrire brièvement les principales sources de bruit dans les réacteurs à eau pressurisée (REP), les réacteurs à eau bouillante (REB) et les réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (RNR-Na). Le lecteur intéressé pourra se référer aux articles [72, 121] concernant les réacteurs à sels fondus par exemple, ou [102] concernant les réacteurs de type VVER. Les différents symposiums SMORN regroupent aussi de nombreuses communications sur presque tous les types de réacteurs. Nous avons choisi de ne détailler que le cas des trois filières qui bénéficient de la plus grande expertise en matière de bruit neutronique.

Ainsi, nous allons détailler dans cette section les spectres de bruit neutronique en temps de fonctionnement nominal pour ces trois types de réacteurs. Il est en effet très important de connaître le plus précisément possible l'allure et les caractéristiques de ces spectres correspondant au fonctionnement normal des réacteurs car c'est entre autres par comparaison avec ces spectres de références que nous pouvons détecter d'éventuelles anomalies.

### Les réacteurs à eau pressurisée

Du fait de la pression du caloporteur (entre 150 et 160 bar) à l'intérieur du circuit primaire et de la structure mécanique interne des assemblages et des supports de cuve (voir Fig. 1.6), les principales sources de bruit neutronique dans un REP sont les vibrations de la cuve et des internes de cuve que ce soit les crayons combustibles, les assemblages ou les supports de cuve (« core support barrel »)<sup>8</sup>. Chacun de ces éléments a une tenue mécanique et une fréquence de vibration qui lui sont propres et qui peuvent être déterminées grâce à des études de tenue sismique des internes de cuve [135].

La Figure 1.7 détaille la forme typique d'un spectre de bruit neutronique dans un REP. Nous constatons que, comparé aux REB où nous verrons que le bruit est majoritairement gouverné par les variations de densité du caloporteur, le spectre d'un REP est caractérisé par différents pics de fréquences. Nous allons voir que ces fréquences sont caractéristiques des vibrations des différents éléments mécaniques du cœur.

Les principales sources de bruit dans les REP sont les suivantes [59, 78] :

- à très basses fréquences ( $< 0,01$  Hz) : comme nous l'avons déjà évoqué, il est difficile d'avoir des résultats avec une bonne précision à si basses fréquences. Néanmoins, il est estimé que les bruits causés à très basses fréquences sont issus des fluctuations usuelles engendrées par les actions de contrôle de l'installation. Le bruit à très basses fréquences peut être considéré comme un simple bruit de fond ;
- à basses et moyennes fréquences (entre 0,01 et 1 Hz) : nous observons à ces fréquences une très bonne corrélation entre les détecteurs de flux ex-core et les thermocouples. Ainsi, la source de bruit à basses et moyennes fréquences provient essentiellement des fluctuations de températures primaires du cœur ;
- à moyennes et hautes fréquences (entre 1 et 50 Hz) : c'est dans cette gamme de fréquences que nous observons la majorité des vibrations mécaniques ;

7. Les réacteurs VVER sont des réacteurs à eau pressurisée de technologie russe.

8. Notons que, contrairement aux REB, les vibrations de barres de commande sont assez rares dans un REP.



- ★ 1-10 Hz : bruit dominé par les vibrations des crayons combustibles (environ 1 Hz), des assemblages (quelques Hz) et par le premier mode vibratoire des supports de cuve<sup>9</sup> (appelé « beam mode » qui apparaît autour de 8 Hz, nous y reviendrons en section 1.3.1) ;
  - ★ 10-25 Hz : bruit dominé par les hauts modes vibratoires des assemblages, par le deuxième mode vibratoire des supports de cuve (appelé « shell mode » qui apparaît autour de 20 Hz) et par les vibrations des boucliers thermiques ;
  - ★ 25-50 Hz : bruit dominé par les vibrations induites par une propagation des turbulences engendrées par les pompes primaires. Ces vibrations correspondent entre autres à des vibrations verticales des internes de cuve et de la cuve elle-même [14, 15]. Une vibration des seconds supports de cuve<sup>10</sup> est aussi observée autour de 40 Hz.
- à hautes et très hautes fréquences (> 50 Hz) : le bruit à de telles fréquences n'est pas très bien connu et difficile à analyser du fait de sa faible amplitude et du bruit parasite de détection. Il semblerait que des hauts modes vibratoires de certains internes de cuve et de la cuve y soient possibles, notamment vers les 80 Hz.

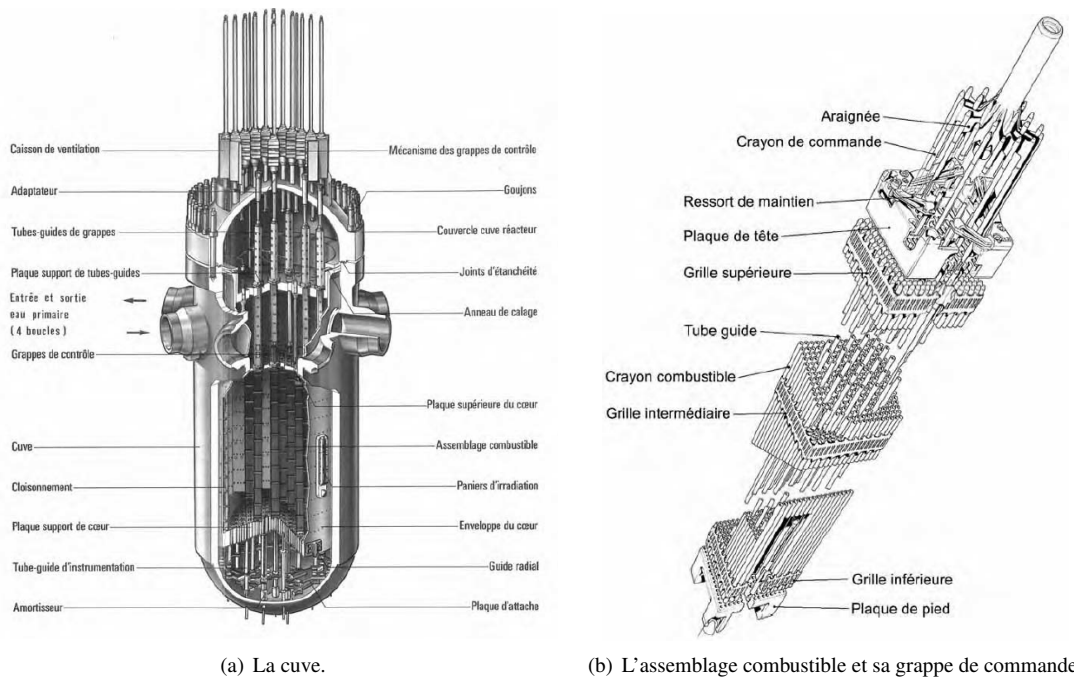


FIGURE 1.6 – Cuve et assemblage combustible d'un réacteur à eau pressurisée [38].

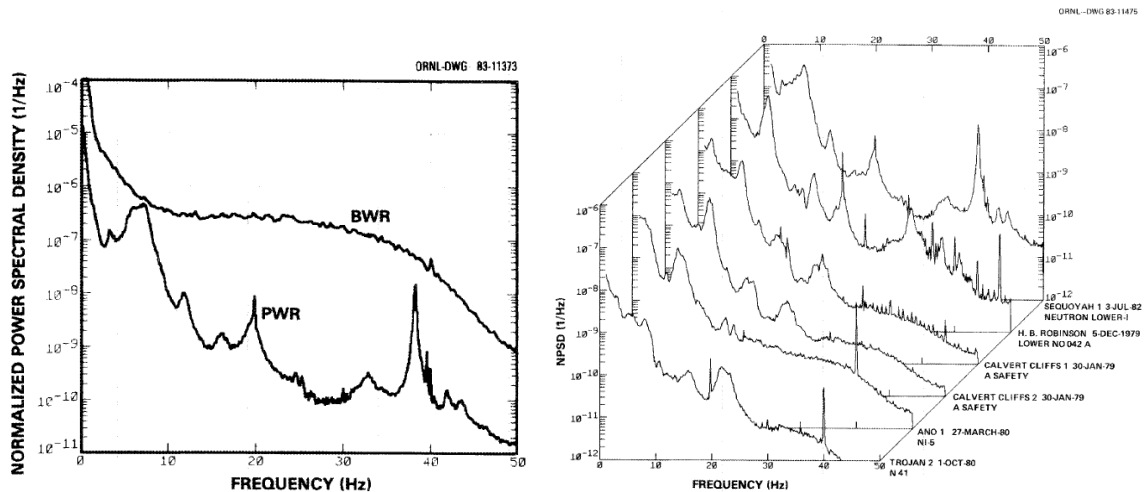
Cette énumération n'est évidemment pas exhaustive et il peut exister d'autres types de sources mais celles que nous venons de lister sont les principales sources de bruit usuellement constatées dans les REP en temps de fonctionnement nominal. Comme nous l'avons évoqué précédemment, il est très important de bien connaître le spectre de référence d'un réacteur en temps normal car c'est par comparaison avec celui-ci que les opérateurs pourront détecter une éventuelle anomalie. Par exemple, si nous savons qu'en temps normal les assemblages de notre réacteur vibrent autour d'une fréquence de 5 Hz, si un pic de fréquence apparaît sur le spectre de plusieurs détecteurs de flux autour de 7 Hz et que celui autour de 5 Hz disparaît, nous pouvons supposer un décalage de la fréquence de vibration d'un ou de plusieurs assemblages et ainsi détecter une éventuelle anomalie sur ces derniers (mauvaises fixations, pression non uniforme...). C'est un exemple volontairement très simplifié mais il permet d'illustrer l'importance de la connaissance du spectre d'un réacteur en temps de fonctionnement nominal.

### Les réacteurs à eau bouillante

Comme nous l'avons déjà rapidement évoqué, dans un REB, le bruit est majoritairement gouverné par les variations de densité et par l'ébullition du caloporteur. C'est ce qui explique la forme du spectre du bruit neutronique dans un REB schématisé par la Fig. 1.7(a). À cause de la génération de vapeur à l'intérieur même du cœur et du fort couplage entre la neutronique et la thermohydraulique, l'amplitude du bruit est toujours plus importante dans un REB que dans un REP. La Figure 1.8 rappelle la structure d'un cœur et d'un assemblage combustible de ce type de réacteurs à eau.

9. Les supports de cuve, « core support barrel » en anglais, constituent l'enveloppe du cœur (voir Fig. 1.6(a)).

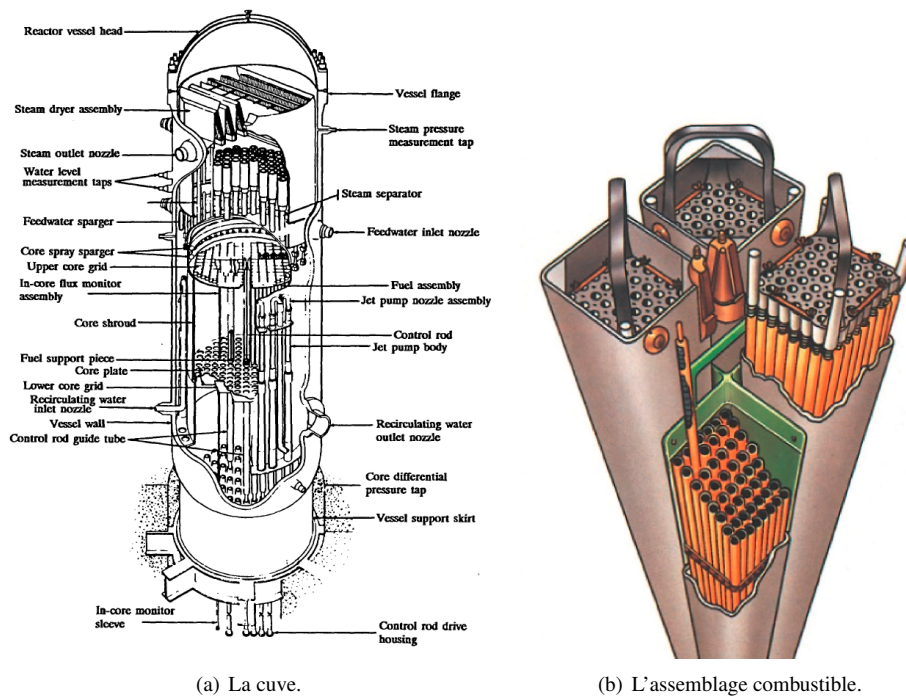
10. Les seconds supports de cuve, « secondary core support » en anglais, constituent les plaques d'attache du cœur (voir Fig. 1.6(a)).



(a) Comparaison des spectres typiques de REP et de REB.

(b) Comparaison entre les spectres de différents REP américains.

FIGURE 1.7 – Exemple de spectres de bruit neutronique de réacteurs à eau [59].



(a) La cuve.

(b) L'assemblage combustible.

FIGURE 1.8 – Cuve et assemblage combustible d'un réacteur à eau bouillante [34, 41].

Les sources de bruit dans les REB ne sont pas aussi bien délimitées par plages de fréquences que ne le sont celles dans les REP. Nous pouvons néanmoins lister quelques sources de bruit majeures, notamment à partir de 1 Hz [59, 78, 120] :

- > 1 Hz : de manière générale, le bruit est majoritairement gouverné par les perturbations dues à la formation de la vapeur et donc par les fluctuations de l'écoulement diphasique : une phase liquide en bas du cœur et une phase gazeuse en haut du cœur ;
- autour de 0,5 Hz : des oscillations locales dans les canaux peuvent apparaître à cause de la chute de pression en haut du cœur. Elles surviennent notamment lorsque les assemblages ne sont pas correctement fixés. Des oscillations globales peuvent aussi survenir du fait du coefficient de vide fortement négatif. Ces oscillations peuvent être de phase constante sur tout le cœur ou de phase opposée de part et d'autre du cœur ;
- 1-5 Hz : une vibration des barres de commande cruciformes (très nombreuses dans un REB) ou des tubes d'instrumentation contenant les détecteurs in-core peut être observée (environ 2 Hz) si le débit qui passe entre

ces tubes et les quatre boîtiers contenant les crayons combustibles est trop important<sup>11</sup> (voir Fig. 1.9). Ces vibrations peuvent aller jusqu'à exciter la fréquence de résonance des canaux (environ 5 Hz) qui entourent la barre de commande ou le tube d'instrumentation.

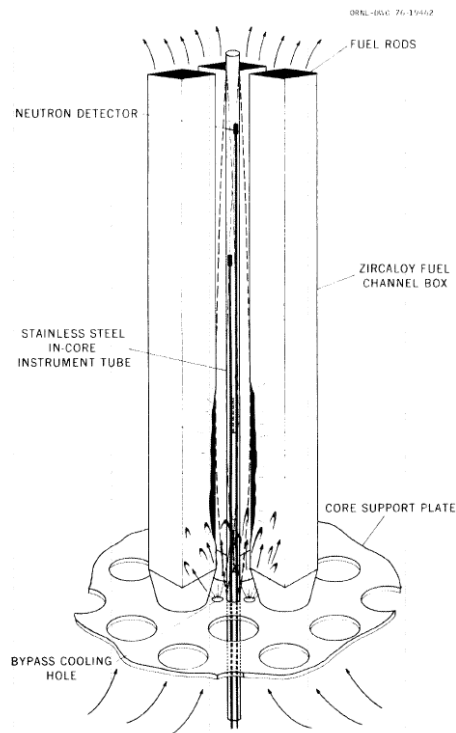


FIGURE 1.9 – Vibration d'un tube d'instrumentation d'un réacteur à eau bouillante [59].

Précisons que toutes les oscillations survenant autour de 0,5 Hz sont connues depuis très longtemps. Elles sont la source première des instabilités dynamiques propres aux réacteurs à eau bouillante. Afin de quantifier les plages d'instabilité d'un tel réacteur, un des indicateurs de stabilité le plus communément utilisé est le « Decay Ratio ». Il s'agit du rapport entre deux maxima consécutifs d'un oscillateur harmonique amorti (son logarithme népérien est donc ce qui est appelé le décrément logarithmique). Ce facteur est très important pour la sûreté des REB et peut être déterminé grâce à l'analyse du bruit neutronique. Le lecteur intéressé pourra se référer à [49] et [120] pour plus de détails.

### Les réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium

Même si la dynamique du bruit neutronique est différente de celle d'un REP du fait du temps de vie moyen du neutron prompt (quelques  $10^{-7}$  secondes), le spectre et la nature du bruit neutronique d'un RNR-Na comme Phénix (dont l'architecture est rappelée en Fig. 1.10) ou Superphénix, sont, d'un point de vue qualitatif, assez proches de ceux d'un REP comme l'illustre la Fig. 1.11.

Les principales sources de bruit d'un RNR-Na de type Phénix ou Superphénix peuvent être réparties en quatre zones fréquentielles distinctes [92, 93] :

- à très basses fréquences (< 0,01 Hz) : tout comme précédemment, les bruits causés à très basses fréquences sont issus des fluctuations usuelles engendrées par les actions de contrôle de l'installation ;
- à basses fréquences (entre 0,01 et 0,1 Hz) : nous observons à ces fréquences une décroissance en  $1/f^2$  de la densité spectrale d'autocorrélation des détecteurs, décroissance caractéristique des bruits issus de phénomènes thermohydrauliques internes au cœur ;
- à moyennes fréquences (entre 0,1 et 10 Hz) : la majorité des vibrations mécaniques sont observées sur cette plage de fréquences :
  - ★ 0,1-1 Hz : vibrations des assemblages libres ;

11. Comme cela est détaillé dans [59], ces vibrations peuvent être considérablement réduites en bouchant les interstices présents en bas de la barre de commande ou du tube d'instrumentation au niveau du support des internes de cuve. Cette solution ne peut cependant qu'être provisoire.

- ★ 0,1-2 Hz : vibrations des barres de commande ;
- ★ 1-10 Hz : vibrations des assemblages de la partie compacte du cœur (notamment autour de 6 Hz pour Phénix comme nous allons le voir en section 1.3.3). C'est aussi dans cette gamme de fréquences que le pronostic de détection de l'accident d'ébullition est maximal ;
- à hautes et très hautes fréquences (> 10 Hz) : comme dans un REP, des vibrations des internes de cuve ou de la cuve peuvent survenir à cause des turbulences engendrées par les pompes primaires. Rappelons que le bruit de détection, parasite du point de vue physique, rend très difficile l'analyse à très hautes fréquences.

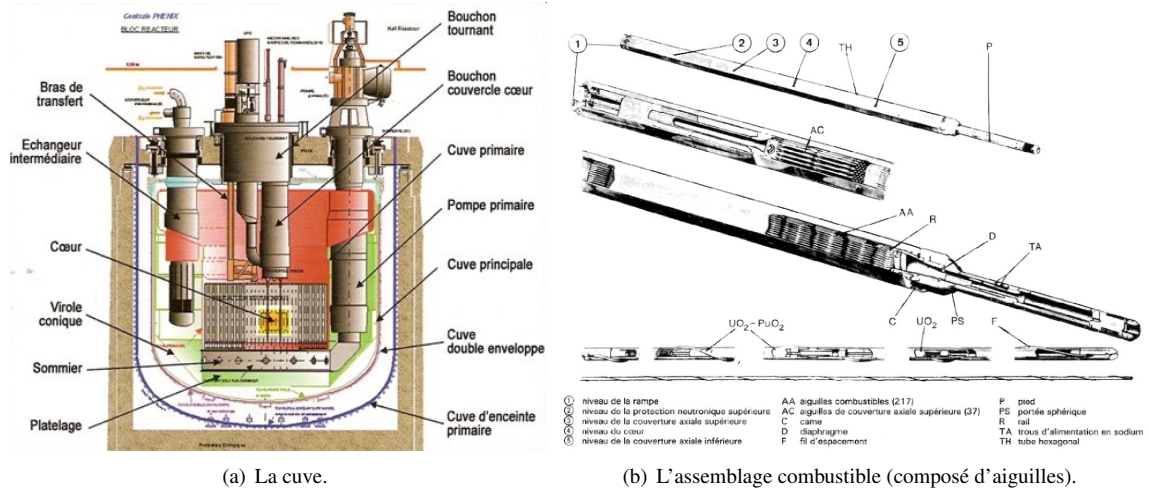


FIGURE 1.10 – Cuve et assemblage combustible du réacteur à neutrons rapides Phénix (documents CEA).

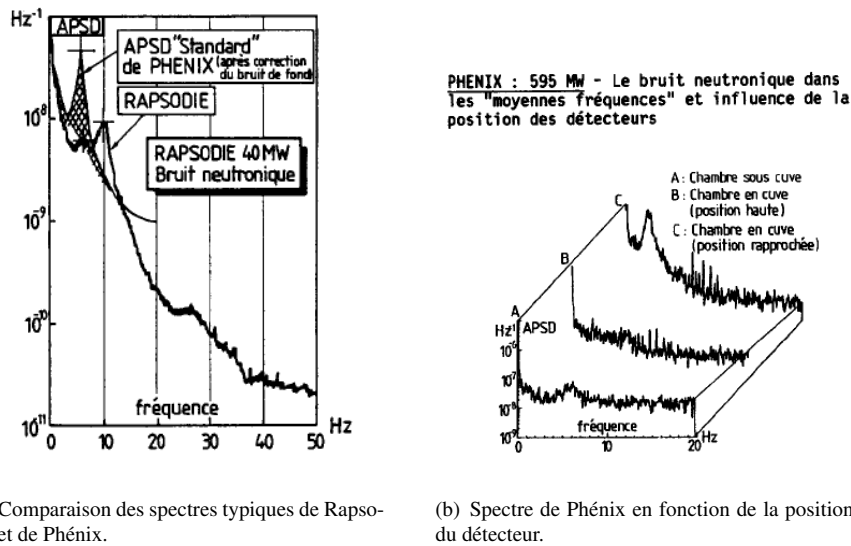


FIGURE 1.11 – Exemple de spectres de bruit neutronique de réacteurs à neutrons rapides [93].

### 1.3 Exemples de détection et d'analyse

Cette section a pour but de détailler des exemples simples mais concrets de détection par l'analyse du bruit neutronique. Nous allons étudier un cas précis pour chacune des trois filières dont les principales sources de bruit viennent d'être décrites à la section précédente.

#### 1.3.1 Vibrations des supports de cuve d'un REP

Comme nous l'avons détaillé précédemment, la principale source de bruit dans un REP vient des vibrations des différents internes de cuve dont les supports de cuve. Ces supports de cuve ont deux principaux modes vibratoires

appelés « beam mode » et « shell mode » décrits en Fig. 1.12. D'après des études vibratoires, nous savons que la fréquence caractéristique d'un beam mode se situe aux alentours de 8 Hz. Pour un shell mode, c'est environ 20 Hz comme nous allons le voir ci-après.

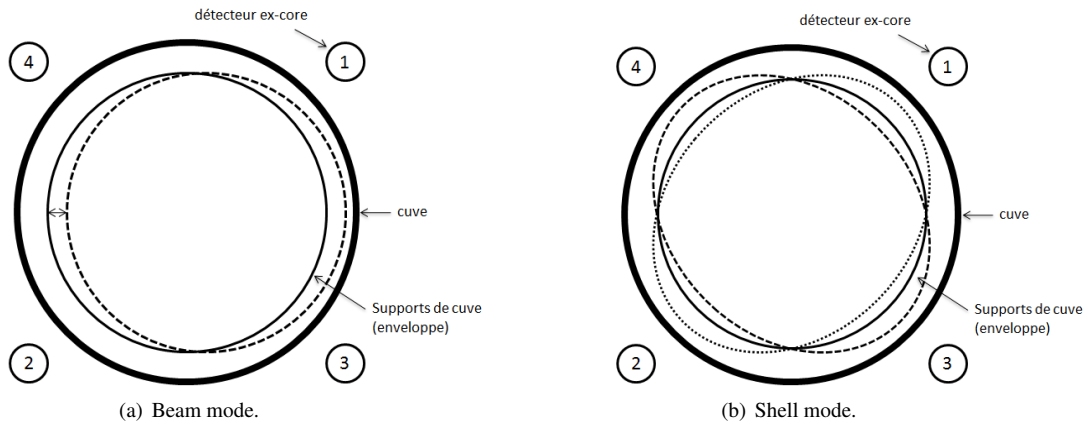


FIGURE 1.12 – Modes vibratoires des supports de cuve d'un réacteur à eau pressurisée.

Très schématiquement, si l'un de deux modes vibratoires des supports de cuve se produit à une fréquence  $\omega$ , toutes les fonctions de cohérence entre les quatre détecteurs ex-core vont avoir un pic proche de 1 à la fréquence  $\omega$  puisqu'il s'agit d'une perturbation que nous pouvons qualifier de « globale » qui va affecter tout le cœur. C'est l'étude des phases de ces fonctions de cohérence qui va permettre de déterminer s'il s'agit d'un beam mode ou d'un shell mode. En effet, pour les deux modes décrits en Fig. 1.12, nous avons :

- dans le cas d'un beam mode, les signaux des détecteurs croisés (les deux couples 1-2 et 3-4) vont être déphasés de  $180^\circ$ , les signaux adjacents suivant l'axe de vibration (les deux couples 1-4 et 3-2) vont aussi être déphasés de  $180^\circ$  mais les signaux adjacents orthogonalement à l'axe de vibration (les deux couples 1-3 et 4-2) ne seront pas déphasés ;
- dans le cas d'un shell mode, les signaux des détecteurs croisés ne vont pas être déphasés alors que les signaux adjacents vont être déphasés de  $180^\circ$ .

La Figure 1.13 illustre la détection d'une vibration de type shell mode des supports de cuve autour de 20 Hz dans le réacteur américain Sequoyah 1 (REP de 1150 MW). Rappelons que la phase de la fonction de cohérence entre deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  représente le déphasage entre ces deux signaux lorsque la cohérence est non négligeable. Le pic de cohérence autour de 40 Hz est, quant à lui, vraisemblablement imputable à une vibration des seconds supports de cuve.

### 1.3.2 Vitesse d'écoulement du caloporteur d'un REB

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'étude du bruit neutronique ne permet pas seulement de détecter des perturbations de type vibration mécanique, mais aussi des paramètres dynamiques ou cinétiques particulièrement importants comme le coefficient de modération ou la vitesse du caloporteur. C'est sur ce dernier point que nous allons nous pencher dans cette section et plus particulièrement sur la détermination de la vitesse du caloporteur du réacteur suisse Mühleber (REB de 335 MW). La connaissance en temps réel de cette vitesse est un des éléments majeurs conditionnant la sûreté d'une telle installation. En effet, la moindre variation inhabituelle de ce paramètre peut être le symptôme direct d'une anomalie telle que la formation de dépôts ou la présence de débris au sein du cœur.

Grâce à la structure et aux positionnements des différents détecteurs in-core d'un REB, la détermination de la vitesse du caloporteur y est particulièrement aisée, davantage que pour un REP où le manque d'instrumentation interne rend l'analyse beaucoup plus compliquée [120]. Le calcul de cette vitesse est en effet basé sur la détermination du déphasage entre deux détecteurs de flux in-core alignés verticalement comme en Fig. 1.14(a). En supposant que l'écoulement du caloporteur de vitesse  $v_e$  puisse se traduire par une propagation axiale d'une perturbation locale de bas en haut du cœur, nous pouvons estimer que le temps de propagation  $\tau$  de cette perturbation locale entre deux détecteurs alignés verticalement de positions axiales respectives  $z_1$  et  $z_2$  ( $z_2 > z_1$ ), soit de  $\tau = \frac{z_2 - z_1}{v_e}$ . Nous supposons donc que les signaux de ces deux détecteurs sont raisonnablement identiques à un déphasage près. Autrement dit, nous supposons que le signal en  $z_2$  est déphasé de  $-\omega\tau$  par rapport au signal en  $z_1$  dans le domaine fréquentiel (avec  $\omega$  la fréquence angulaire). C'est bien ce que nous observons en Fig. 1.14(b) où le déphasage entre les détecteurs B et C est linéaire entre environ 4 et 9 Hz. Le fait que, sur cette gamme de fréquences, la fonction de cohérence entre ces deux détecteurs B et C ne soit pas négligeable comme le montre la Fig. 1.14(c), nous permet de considérer ce déphasage

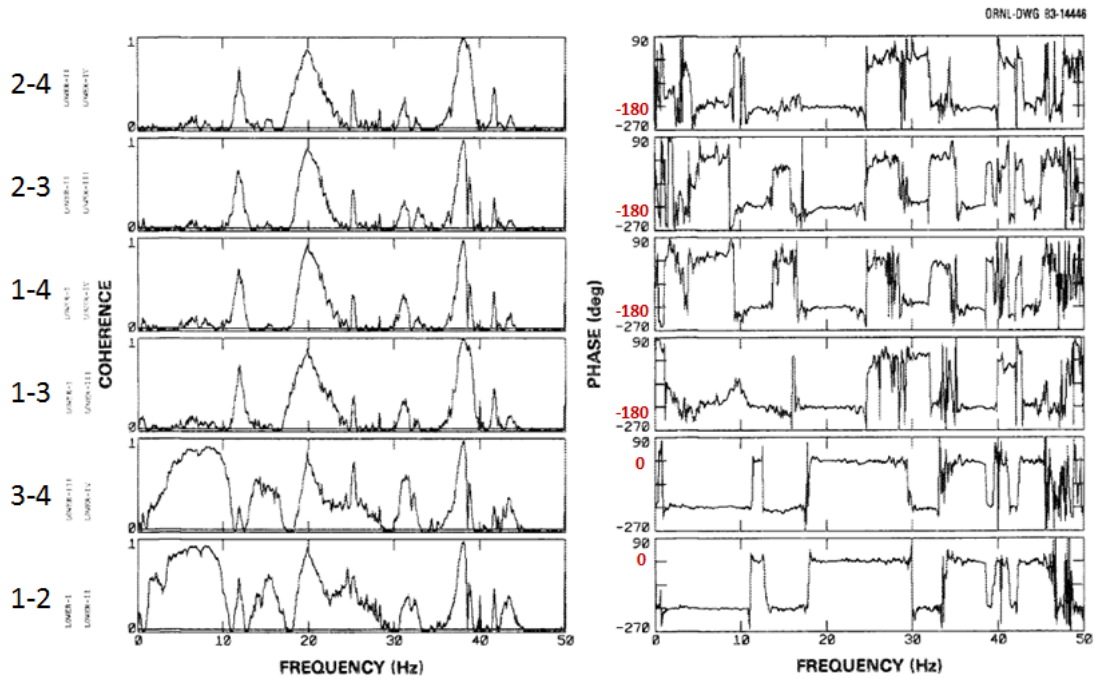


FIGURE 1.13 – Exemple de détection d’une vibration de type shell mode des supports de cuve (20 Hz) sur le réacteur américain Sequoyah 1 par l’analyse du module et de la phase des fonctions de cohérence entre les détecteurs ex-core [59]. La numérotation des 4 détecteurs est donnée en Fig. 1.12.

comme exploitable (rappelons que la phase d’une fonction de cohérence n’est significative, c’est-à-dire exploitable, que si le module de la fonction de cohérence n’est pas négligeable).

Ainsi, sachant que les détecteurs B et C sont distants de 91,4 cm et que le temps  $\tau$  peut être estimé à environ 0,17s, la vitesse d’écoulement du caloporteur de notre exemple est d’environ 537 cm/s, valeur classique pour ce type de réacteur.

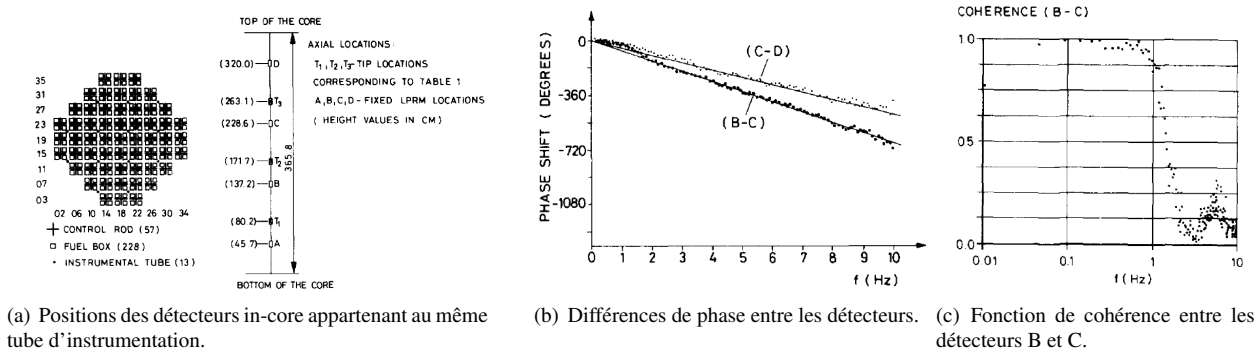


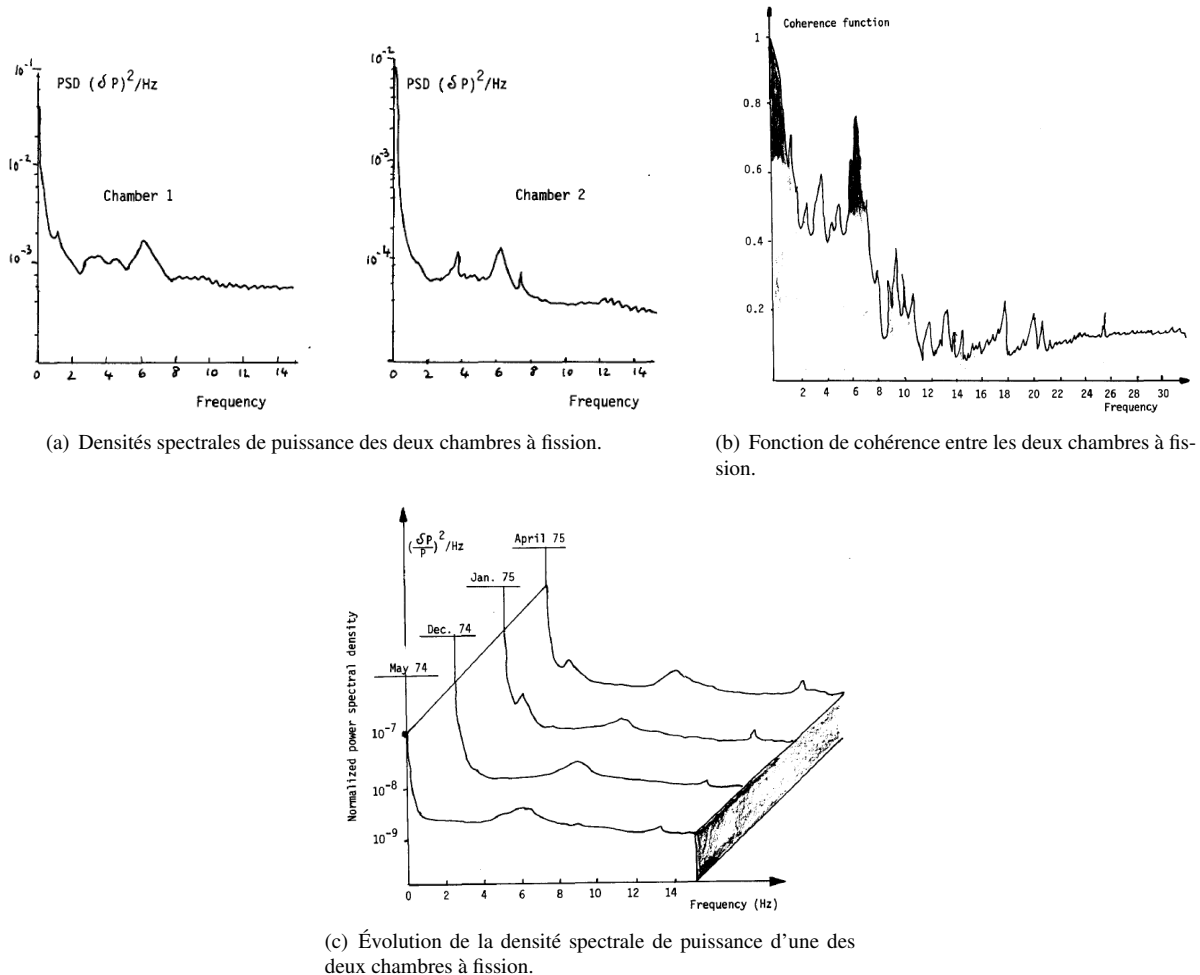
FIGURE 1.14 – Exemple de détection de la vitesse du caloporteur du réacteur suisse Mühleberg par l’analyse du déphasage entre des détecteurs alignés verticalement et appartenant au même tube d’instrumentation [78, 79].

### 1.3.3 Vibrations des assemblages et d’une barre de commande d’un RNR-Na

À l’instar des réacteurs à eau pressurisée, la majorité des sources de bruit d’un réacteur à neutrons rapides de type Phénix provient des vibrations des internes de cuve. La Figure 1.15 illustre la détection du premier mode vibratoire des assemblages du réacteur Phénix autour de 6 Hz. En effet, nous constatons en Fig. 1.15(a) un pic des densités spectrales de puissance de deux chambres à fission à 6 Hz. Cela signifie que les signaux de ces deux détecteurs présentent une certaine périodicité d’environ 0,15 s. La Figure 1.15(b) montre en outre que la fonction de cohérence entre ces deux signaux présente un pic à 6 Hz (rappelons que le pic à basses fréquences provient des fluctuations thermohydrauliques). Enfin, la Fig. 1.15(c) détaille l’évolution de la densité spectrale de puissance d’une des deux chambres à fission. Nous remarquons que le pic à 6 Hz n’évolue pas dans le temps. La vibration des assemblages à cette fréquence est en effet

normale et ce pic fait partie du spectre de Phénix en temps normal de fonctionnement. Cependant, nous observons l'apparition d'un pic autour de 1 Hz à partir de janvier 1975. Comme le montre la Fig. 1.16, il s'agit du premier mode vibratoire d'une des 6 barres de commande de Phénix. Contrairement à la vibration des assemblages, cette vibration de la barre de commande n'est pas normale et est symptomatique d'une anomalie. Comme expliqué dans [152], la barre de commande défectueuse a dû être remplacée ce qui a permis un retour à la normale, c'est-à-dire une disparition du pic à 1 Hz.

Précisons que le léger pic autour de 13 Hz que nous observons en Fig. 1.15(c) est la conséquence des perturbations dues aux pompes primaires.



**FIGURE 1.15** – Exemple de détection d'une vibration des assemblages de Phénix (6 Hz) par l'analyse des densités spectrales de puissances et de la fonction de cohérence entre deux chambres à fission [152].

Toutes les détections des vibrations que nous venons d'expliquer ne sont possibles que si nous connaissons au préalable les modes vibratoires de chacun des éléments mécaniques constituant le cœur : 20 Hz pour le shell mode d'un REP, 6 Hz pour les assemblages de Phénix, 1 Hz pour ses barres de commande... Cela implique de mener des études vibratoires approfondies afin de connaître au mieux les fréquences des potentielles sources de bruit issues de ces vibrations. Nous pouvons évoquer à ce sujet le code SMAC, basé sur le logiciel de calcul par éléments finis en mécanique des structures et des fluides Cast3M développé au CEA, qui permet de modéliser les assemblages combustibles en quasi-statique [33]. Citons en outre la plate-forme d'essais TAMARIS du CEA (Tables et Moyens d'Analyses des Risques Sismiques) composé notamment de 4 tables vibrantes (dont la plus importante d'Europe) qui permet de mener à bien diverses études sismiques sur de très nombreux éléments mécaniques d'une centrale nucléaire dont les internes de cuve [150].

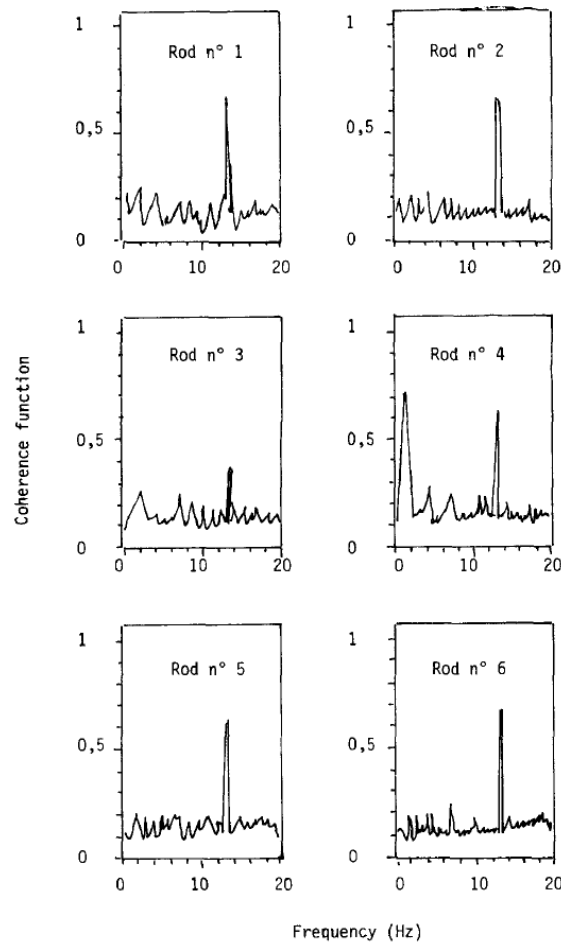


FIGURE 1.16 – Exemple de détection d’une vibration d’une barre de commande de Phénix (barre n° 4 à 1 Hz) par l’analyse de la fonction de cohérence entre une chambre à fission et des accéléromètres placés sur chacune des barres de commande [152].

## 1.4 Le bruit neutronique, un enjeu majeur pour la sûreté

Après avoir détaillé les codes actuels dédiés au bruit neutronique, nous évoquerons dans cette section les enjeux de l’étude du bruit neutronique pour la sûreté des réacteurs d’aujourd’hui et de demain.

### 1.4.1 Les simulateurs actuels de bruit neutronique

Il existe actuellement deux codes déterministes spécialement dédiés au bruit neutronique : CORE SIM et NOISIM. Ces deux codes peuvent résoudre les équations du bruit neutronique en théorie de la diffusion à une, deux ou trois dimensions. Deux méthodes de résolution stochastique des équations du bruit neutronique ont récemment été testées, l’une avec le code Monte Carlo MCNP4C [162] et l’autre avec le code MCNP5 [130], mais il ne s’agit que de premiers tests et non de véritables simulateurs de bruit neutronique (nous y reviendrons en détail au chapitre 4).

#### CORE SIM

La Chalmers University of Technology (Göteborg, Suède) est l’une des plus grandes universités de Suède. Nous devons à sa division de l’ingénierie nucléaire de très nombreux travaux sur la théorie du bruit neutronique et le premier code déterministe spécialement dédié à la simulation du bruit neutronique [44, 45, 48, 50]. Ce code, nommé CORE SIM, est développé sous Matlab® depuis les années 2000. CORE SIM résout, par des méthodes basées sur la méthode des différences finies, l’équation de Boltzmann stationnaire et les équations du bruit neutronique en théorie de la diffusion à une, deux ou trois dimensions ainsi que les équations adjointes en stationnaire et en bruit. Il peut en outre déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d’ordres supérieurs de l’équation stationnaire. Initialement développé pour mener à bien des études de bruit sur des réacteurs à eau en théorie de la diffusion à seulement deux groupes d’énergie, une extension à trente-trois groupes et une prise en charge des géométries hexagonales a été mise en place par la suite pour l’étude des réacteurs rapides [154, 167]. Un solveur thermohydraulique traitant des problèmes bi



ou monophasique a aussi été développé et couplé au solveur neutronique [46, 85]. Tout comme le solveur neutronique résout les équations stationnaires et perturbées de la neutronique, ce solveur résout les équations stationnaires et perturbées de la thermohydraulique. Le couplage séquentiel entre les deux solveurs s'effectue via les sections efficaces et les taux de fission.

## NOISIM

La Sharif University of Technology (Téhéran, Iran) est un acteur très récent dans le domaine du bruit neutronique. C'est en 2010 que l'article [103] présente un code déterministe, basé sur la méthode des différences finies, résolvant les équations du bruit neutronique en théorie de la diffusion à deux groupes d'énergie et à deux dimensions pour les géométries hexagonales des réacteurs VVER<sup>12</sup>. Ce code a été par la suite amélioré pour aboutir au code de bruit neutronique NOISIM résolvant les équations stationnaires et les équations du bruit neutronique en théorie de la diffusion à deux groupes d'énergie et à trois dimension [100, 101, 102]. Tout comme CORE SIM, ce code intègre un solveur neutronique (nommé TRYDIN-3) et un solveur thermohydraulique (nommé SHC-Noise) couplés par un couplage séquentiel. NOISIM est aussi adapté aux géométries rectangulaires et triangulaires.

Précisons que le code présenté dans [1] peut être vu comme une « variante » de celui présenté dans [103]. Cette variante emploie une discrétisation spatiale basée sur l'approximation linéaire de la méthode des éléments finis de Galerkin utilisant des éléments triangulaires non structurés.

### 1.4.2 Les enjeux pour la sûreté des réacteurs d'aujourd'hui et de demain

Nous l'avons vu au fil des différentes sections précédentes, l'étude approfondie du bruit neutronique peut être un atout majeur pour la sûreté des réacteurs nucléaires toutes technologies et toutes filières confondues. Les codes déterministes dédiés au bruit neutronique que nous venons de détailler peuvent traiter des problèmes de bruit pour plusieurs types de réacteurs. Néanmoins, ces codes universitaires n'offrent que la possibilité de mener des études en théorie de la diffusion à peu de groupes (deux pour les réacteurs à eau et éventuellement trente-trois pour les réacteurs rapides avec CORE SIM). Or, les sources de bruit sont souvent des perturbations locales de faibles amplitudes (une vibration par exemple) et traiter ce type de problème en théorie de la diffusion peut parfois s'avérer trop imprécis et approximatif, notamment si l'objectif est de simuler précisément les réponses des détecteurs de flux. Avoir la possibilité de mener des études de bruit en théorie du transport via des codes déterministes et/ou Monte Carlo est l'un des principaux défis des années à venir.

Le développement de simulateurs de bruit neutronique directement intégrés aux grands codes neutroniques industriels et multi-filières comme APOLLO3® [64, 143] ou TRIPOLI-4® [31, 32] sera d'une aide précieuse pour compléter et optimiser les études de sûreté des réacteurs d'aujourd'hui et de demain. Comme cela est fait dans CORE SIM et NOISIM, un couplage entre la neutronique et la thermohydraulique devra être aussi intégré à ces simulateurs de bruit neutronique. Développer des solveurs numériques dédiés au bruit neutronique dans des grands codes industriels permettra ainsi de disposer de solides bases pour mettre en place des méthodes complètes et robustes de diagnostic en temps réel du bruit neutronique dont un exemple est brièvement schématisé en Fig. 1.17. Pour cela, le but est, à terme, d'être capable de correctement résoudre en temps réel le problème inverse, c'est-à-dire de remonter à la source de bruit connaissant simplement le bruit via les signaux des détecteurs<sup>13</sup>. Cela permettra en outre de compléter et d'améliorer les études de sûreté effectuées en amont et en aval. Nous pouvons citer par exemple l'étude des meilleures configurations possibles des divers détecteurs de flux lors du design des futurs réacteurs de 4<sup>ème</sup> génération, ou encore l'analyse a posteriori d'une anomalie qui aurait été détectée en cours de fonctionnement du réacteur mais à laquelle les opérateurs n'auraient pas trouvé d'explication (les problèmes de bruit survenus il y a peu dans certains des pré-konvois allemands en sont le parfait exemple [144]).

12. Les réacteurs russes VVER ont en effet la particularité notable d'avoir des assemblages de forme hexagonale. L'unique centrale nucléaire iranienne, la centrale nucléaire de Bouchehr, est un réacteur de type VVER 1000 de dernière génération dont la mise en service n'a eu lieu qu'en 2011.

13. En guise d'illustration, nous pouvons citer l'article [145], très connu dans son domaine, qui montre comment le bruit sismique peut être exploité pour résoudre un problème inverse dans le but de déterminer les propriétés du sous-sol. Pour plus de détails sur la théorie générale des problèmes inverses, le lecteur intéressé pourra se référer à [66, 76].

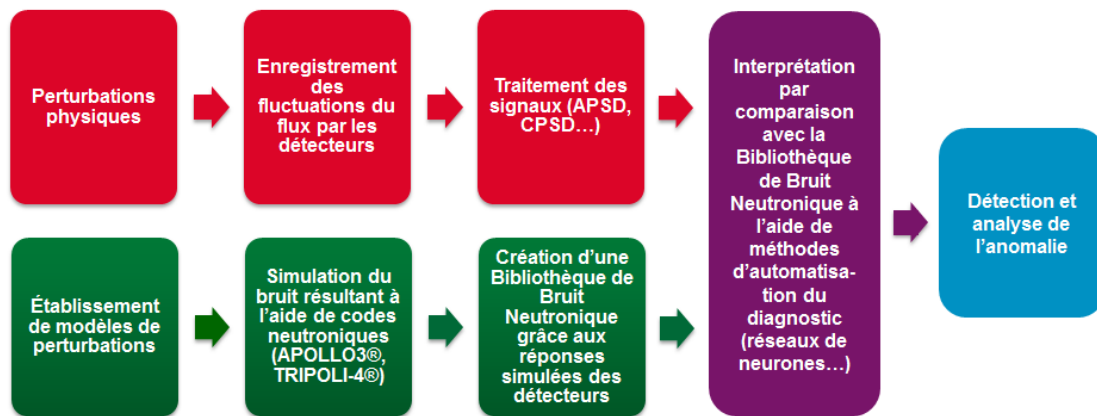


FIGURE 1.17 – Exemple de méthode de diagnostic en temps réel du bruit neutronique envisagée pour le futur.

C'est dans ce cadre général que s'inscrit cette présente thèse. Comme nous l'avons précisé en introduction, cette thèse a pour principal objectif de mettre en place des outils de calculs neutroniques en implémentant notamment un solveur de bruit neutronique dans le code de transport déterministe multi-filière APOLLO3®. Ce développement sera détaillé au chapitre 3. Une nouvelle méthode de résolution stochastique des équations du bruit a aussi été mise en place comme nous le verrons au chapitre 4. Cette nouvelle méthode a vocation à être implémentée dans le code de transport Monte Carlo de référence TRIPOLI-4®. Un nouveau modèle de sources de bruit engendrées par des vibrations mécaniques a en outre été développé. La mise en place et l'analyse de ce nouveau modèle seront détaillées au chapitre 5. Enfin, une nouvelle méthode basée sur la détermination d'un nouvel état d'équilibre permettant de rendre plus robuste la théorie classique linéaire et non linéaire a été développée comme nous le verrons au chapitre suivant, le chapitre 2.

## 1.5 Résumé du chapitre

Ce premier chapitre introductif a abordé et développé les points suivants :

- **définition et histoire du bruit neutronique** : le bruit neutronique (« power reactor noise ») désigne les fluctuations de la population neutronique induites par des changements déterministes ou stochastiques des sections efficaces macroscopiques lors du fonctionnement à puissance nominale du réacteur. Ces perturbations peuvent avoir des origines diverses comme une variation de densité du caloporteur ou une vibration d'un élément mécanique. Ces bruits peuvent aussi être exploités pour déterminer certaines propriétés du caloporteur comme sa vitesse ou son titre vapeur, ou encore d'autres propriétés dynamiques globales. L'étude du bruit neutronique a réellement commencé au début des années 1970 et a connu un fort développement jusqu'à la fin des années 1980. Si elle a été quelque peu délaissée entre les années 1990 et le milieu des années 2000, la problématique revient petit à petit au premier plan. En France, un travail expérimental très important a été mené pendant de nombreuses années sur les réacteurs à neutrons rapides Phénix et Superphénix.
- **la détection du bruit neutronique** : l'instrumentation permanente préférentiellement utilisée pour la mesure du bruit neutronique est l'ensemble des détecteurs ex-core pour les REP et les RNR-Na et l'ensemble des détecteurs in-core pour les REB. En temps normal de fonctionnement, les signaux des détecteurs sont expérimentalement exploitables entre environ 0,01 Hz et 100 Hz. Afin de pouvoir diagnostiquer et détecter en temps réel les anomalies, il est indispensable de disposer à terme de méthodes d'automatisation du diagnostic rapides et efficaces permettant d'alerter en temps réel les opérateurs. Dans le domaine du bruit neutronique, c'est l'automatisation par réseaux de neurones qui a été le plus étudiée et le plus analysée. L'étude des méthodes d'automatisation du diagnostic est aussi une opportunité pour déterminer les emplacements et le nombre optimum des détecteurs de flux rendant la détection du bruit neutronique la plus performante possible.
- **les différentes sources de bruit dans les réacteurs de puissance** : les principales sources de bruit neutronique dans un REP sont les vibrations des internes de cuve (crayons combustibles, assemblages...) ou de la cuve elle-même. Même si la dynamique du bruit neutronique est différente de celle d'un REP, le spectre et la nature du bruit neutronique d'un RNR-Na comme Phénix ou Superphénix sont qualitativement assez proches de ceux d'un REP. Dans un REB, le bruit est majoritairement gouverné par les variations de densité et par l'ébullition du caloporteur. Des exemples simples mais concrets de détection dans un REP, un REB et un RNR-Na ont été détaillés.
- **les simulateurs actuels de bruit neutronique** : il existe actuellement deux codes déterministes spécialement dédiés au bruit neutronique : CORE SIM et NOISIM. Ces deux codes peuvent résoudre les équations du bruit neutronique en théorie de la diffusion à deux groupes d'énergie (ou trente-trois pour les réacteurs rapides avec CORE SIM) et à une, deux ou trois dimensions.
- **les enjeux pour la sûreté des réacteurs** : l'étude approfondie du bruit neutronique peut être un atout majeur pour la sûreté des réacteurs nucléaires toutes technologies et toutes filières confondues. Le développement de simulateurs de bruit neutronique directement intégrés aux grands codes neutroniques industriels et multi-filières comme APOLLO3® ou TRIPOLI-4® sera d'une aide précieuse pour compléter et optimiser les études de sûreté des réacteurs d'aujourd'hui et de demain.

# Théorie et équations du bruit neutronique

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>La théorie linéaire</b>	<b>25</b>
2.1.1	Équation du transport	26
2.1.2	Approximation de la diffusion	28
2.1.3	Approximation adiabatique	29
<b>2.2</b>	<b>Un nouvel état d'équilibre</b>	<b>29</b>
2.2.1	En théorie linéaire	29
2.2.2	En théorie non linéaire	32
<b>2.3</b>	<b>Résolution analytique</b>	<b>33</b>
2.3.1	Approche directe par les fonctions de Green	33
2.3.2	Approche indirecte par les fonctions de Green adjointes	35
2.3.3	Approximations de la cinétique	36
<b>2.4</b>	<b>Les composantes globales et locales</b>	<b>38</b>
2.4.1	Analyse du bruit dans un cœur homogène	38
2.4.2	Analyse spectrale et décomposition du bruit	45
2.4.3	Propriétés générales des composantes globales et locales	47
<b>2.5</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>47</b>

Ce deuxième chapitre développe et détaille la théorie et les équations du bruit neutronique. Dans un premier temps, la théorie générale et ses équations seront présentées ainsi que l'approximation de la diffusion très couramment appliquée, et l'approximation adiabatique telle que nous l'employons dans les études présentées dans ce manuscrit. Nous développerons, dans un second temps, notre théorie sur un nouvel état d'équilibre qui permet de rendre plus robuste la théorie générale. Nous verrons en effet que l'existence d'une solution périodique aux équations du bruit neutronique n'est pas triviale lorsque la moyenne de la source de bruit est non nulle. Nous verrons comment ce nouvel état d'équilibre est déterminé en théorie linéaire et non linéaire. Dans un troisième temps, nous présenterons les principales méthodes de résolution analytique basées sur l'emploi des fonctions de Green, directes ou adjointes, ou sur les approximations de la cinétique étendues au cas des équations du bruit. Enfin, dans un quatrième et dernier temps, nous analyserons les composantes dites « globales » et « locales » qui structurent le bruit neutronique et qui permettent de mieux comprendre la forme du flux neutronique résultant de diverses sources de bruit. Un résumé de tous ces développements sera établi en fin de chapitre.

## 2.1 La théorie linéaire

Cette première section met en place et détaille les équations générales du transport et les équations issues de l'approximation de la diffusion dans le cadre de la théorie linéaire du bruit neutronique. Nous développerons en outre l'approximation adiabatique que nous avons employée et qui s'inspire directement de celle appliquée dans les approximations de la cinétique que nous détaillerons en section 2.3.3.

La théorie la plus générale du bruit neutronique fait l'hypothèse de perturbations stochastiques ou déterministes des sections efficaces. Les sources de bruit induites par ces perturbations peuvent alors avoir un spectre fréquentiel continu avec éventuellement une fréquence de résonance dominante. Une autre approche de la théorie est basée sur l'hypothèse plus simple mais plus pragmatique de perturbations déterministes périodiques induisant un bruit périodique. C'est cette approche que nous avons choisie de traiter exclusivement dans ce manuscrit.

### 2.1.1 Équation du transport

Les équations générales du bruit neutronique sont issues de la linéarisation et de la transformée de Fourier de l'équation de Boltzmann cinétique perturbée autour de l'état d'équilibre du cœur en suivant l'hypothèse des petites perturbations et en prenant en compte le couplage avec les équations des précurseurs. Ceci a pour résultat une équation à source complexe dans le domaine fréquentiel que nous allons maintenant décrire.

#### Théorie générale

Afin de simplifier nos notations, la dépendance du flux et des opérateurs en la variable énergétique  $E$  et la variable angulaire  $\vec{\Omega}$  est sous-entendue. Supposons de petites perturbations périodiques des sections efficaces macroscopiques autour de l'état d'équilibre suivant <sup>1</sup> :

$$\left( \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_0(r) - H_0(r) - P_0(r) \right) \Psi_0(r) = 0, \forall r \in \mathcal{D}, \quad (2.1)$$

avec  $\Psi_0$  le flux angulaire,  $\mathcal{D}$  le domaine spatial et :

- $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}$  explicitant les disparitions par fuite,
- $\Sigma_0$  la section efficace totale explicitant les absorptions et les disparitions par transfert d'énergie,
- $H_0$  l'opérateur de diffusion <sup>2</sup> explicitant les apports par transfert d'énergie,
- $P_0$  l'opérateur de production explicitant les apports par fission.

Cet état d'équilibre est toujours supposé critique et nous notons  $k = 1$  le facteur de multiplication effectif. L'équation 2.1 est ce que nous nommons en physique des réacteurs l'équation de Boltzmann. Il s'agit d'une simple équation bilan régissant le transport de la population neutronique dans un domaine donné. Le lecteur non familier de cette équation fondamentale pourra se référer à [52] ou [134] qui l'introduisent de manière simple et pédagogique. Pour simplifier nos notations <sup>3</sup>, posons  $L_0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_0 - H_0 - P_0$ .

Nous imposons une perturbation temporelle des sections efficaces. Nous avons donc besoin de considérer l'équation cinétique suivante :

$$\left[ \frac{1}{v} \partial_t + L(r, t) \right] \Psi(r, t) = 0, \forall (r, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

où  $v$  est la vitesse des neutrons,  $L = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma - H - P$  l'opérateur cinétique avec  $\Sigma$  la section efficace totale dépendante du temps,  $H$  l'opérateur de diffusion dépendant du temps,  $P$  l'opérateur de production (avec les fissions prompts et retardées) dépendant du temps et  $\Psi$  le flux angulaire dépendant du temps. Précisons, et c'est important, que la théorie du bruit neutronique suppose toujours que les perturbations conservent la criticité.

Nous imposons à l'opérateur cinétique  $L$  une perturbation périodique de période  $T_0$  :

$$L(r, t) = L_0(r) + \delta L(r, t). \quad (2.3)$$

Cette perturbation est supposée démarrer à  $t = -\infty$ . Nous considérons donc que l'étape de transition est terminée et que nous sommes en régime établi. Tout comme l'opérateur cinétique  $L$ , nous décomposons le flux de la manière suivante :

$$\Psi(r, t) = \Psi_0(r) + \delta \Psi(r, t). \quad (2.4)$$

Nous appelons « bruit » le terme  $\delta \Psi$ . En introduisant les expressions 2.3 et 2.4 dans l'Eq. 2.2, nous obtenons l'équation cinétique à source suivante :

$$\left[ \frac{1}{v} \partial_t + L(r, t) \right] \delta \Psi(r, t) = -\delta L(r, t) \Psi_0(r). \quad (2.5)$$

1. Le respect des conditions aux limites est toujours implicitement sous-entendu.

2. Soulignons que  $H_0$  est souvent appelé opérateur de diffusion en théorie du transport par abus de langage.

3. Précisons qu'ici l'opérateur  $L_0$  dépend en réalité implicitement du temps car  $L_0(r) \Psi(r, t)$  comprend les termes  $\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_q(t-t')} \partial_{t'} P_{0,d,q}(r) \Psi(r, t') dt'$  avec  $P_{0,d,q}$  l'opérateur de production des neutrons retardés du groupe de précurseurs  $q$ . Lorsque le flux est stationnaire, ces termes sont nuls et  $L_0$  coïncide avec l'opérateur de Boltzmann stationnaire tel qu'il est classiquement défini. Cela n'est pas le cas lorsque le flux dépend du temps.

Nous supposons que nous pouvons négliger les termes du second ordre  $\delta L \delta \Psi$ . Nous obtenons alors l'équation cinétique linéarisée suivante :

$$\left[ \frac{1}{v} \partial_t + L_0(r) \right] \delta \Psi(r, t) = -\delta L(r, t) \Psi_0(r). \quad (2.6)$$

Nous appliquons enfin la transformée de Fourier afin d'obtenir l'équation linéaire traditionnelle du bruit neutronique définie par :

$$L_{0,\omega}(r) \delta \Psi(r, \omega) = -\delta L(r, \omega) \Psi_0(r), \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

avec  $L_{0,\omega}(r) = i \frac{\omega}{v} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_0 - H_0 - P_{0,\omega}$ . À cause des équations cinétiques des précurseurs, l'opérateur de production  $P_{0,\omega}$  dépend de la fréquence. Du fait du passage en Fourier, le bruit est une fonction complexe dans le domaine fréquentiel et sa partie réelle et imaginaire sont couplées par deux termes :  $i \frac{\omega}{v}$  et par l'opérateur de production  $P_{0,\omega}$ . Nous appelons « source de bruit » le membre droit de l'Eq. 2.7.

Comme nous l'avons précisé en introduction, l'objectif principal de cette présente thèse est de résoudre le plus précisément possible cette équation 2.7 (ou ses semblables décrites dans le reste de ce chapitre) à l'aide des méthodes déterministes et stochastiques usuellement employées en neutronique<sup>4</sup>. Bien évidemment, il n'est pas question de résoudre cette équation pour une infinité de valeur de  $\omega$ . Puisque nous imposons une perturbation périodique, la source de bruit définie par l'Eq. 2.7 aura toujours un spectre discret. Au vu des modélisations employées dans la pratique, soit ce spectre est fini et composé de seulement quelques harmoniques (une seule pour une simple oscillation sinusoïdale des sections efficaces par exemple) ou soit, s'il est infini, seules les premières harmoniques sont importantes (c'est typiquement le cas pour la modélisation d'une vibration périodique que nous avons mise en place et que nous détaillerons au chapitre 5). De plus, pour tout  $\omega$  non nul, l'opérateur  $L_{0,\omega}$  n'étant pas singulier, la solution à l'équation  $L_{0,\omega}(r) \delta \Psi(r, \omega) = 0$  est la fonction nulle. Une source de bruit nulle en un  $\omega$  non nul donné engendre donc un bruit nul en  $\omega$ . Dans les faits, l'équation du bruit neutronique n'est donc résolue que pour un petit nombre de fréquences correspondant aux harmoniques les plus importantes du spectre de la source de bruit.

Ainsi, une fois l'Eq. 2.7 résolue pour les harmoniques les plus importantes qui composent la source de bruit, nous pouvons repasser dans le domaine temporel afin de déterminer le flux total réel périodique. Compte tenu des conventions utilisées (voir la section *Notations et conventions* en page xvii), ce flux total réel périodique est défini par :

$$\Psi(r, t) = \Psi_0(r) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N |\delta \Psi|(r, \omega_n) \cos(\omega_n t + \varphi(r, \omega_n)), \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

avec  $|\delta \Psi|(r, \omega_n)$  et  $\varphi(r, \omega_n)$  respectivement le module et la phase du bruit  $\delta \Psi(r, \omega_n)$  à la fréquence positive  $\omega_n$  composant les  $N$  harmoniques les plus importantes de la partie positive du spectre discret de la source de bruit.

### Équation détaillée multigroupe

Dans le cas multigroupe avec un seul noyau fissile<sup>5</sup> et  $Q$  groupes de précurseurs, pour chaque groupe d'énergie  $1 \leq g \leq G$ , l'état critique du système est le suivant :

$$\left( \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}^g(r) \right) \Psi_{0,g}(r, \vec{\Omega}) = \sum_{g'} \int_{(4\pi)} \Sigma_{0,s}^{g' \rightarrow g}(r, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \Psi_{0,g'}(r, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + \frac{\chi^g}{4\pi k} \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{0,f}^{g'}(r) \Phi_{0,g'}(r). \quad (2.9)$$

Toutes les notations sont standards et détaillées dans la section *Notations et conventions* en page xvii. Rappelons ici que  $\chi^g = (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g + \sum_q \beta_q \chi_{d,q}^g$  où  $\chi_p^g$  est le spectre de fission des neutrons prompts et  $\chi_{d,q}^g$  celui des neutrons retardés du groupe de précurseurs  $q$ . Les équations cinétiques prenant en compte la concentration  $C$  des précurseurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{v} \partial_t + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_t^g(r, t) \right) \Psi_g(r, \vec{\Omega}, t) &= \sum_{g'} \int_{(4\pi)} \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(r, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}, t) \Psi_{g'}(r, \vec{\Omega}', t) d\vec{\Omega}' \\ &+ \frac{1}{4\pi k} (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_f^{g'}(r, t) \Phi_{g'}(r, t) + \frac{1}{4\pi k} \sum_q \chi_{d,q}^g \lambda_q C_{q,g}(r, t), \\ \partial_t C_{q,g}(r, t) &= \beta_q \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_f^{g'}(r, t) \Phi_{g'}(r, t) - \lambda_q C_{q,g}(r, t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

4. Nous pourrions envisager de résoudre l'Eq. 2.6 directement dans le domaine temporel par discrétisation en pas de temps plus ou moins fin. Mais, à l'instar des calculs cinétiques ou d'évolution, cette méthode serait extrêmement coûteuse en temps de calcul. Il sera toujours beaucoup plus rapide de passer par la résolution dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel.

5. Dans le cas général, il faut bien sûr prendre en compte tous les noyaux fissiles présents dans le système étudié.

Si nous perturbons toutes les sections efficaces et que nous notons  $\Psi_g(r, \vec{\Omega}, t) = \Psi_{0,g}(r, \vec{\Omega}) + \delta\Psi_g(r, \vec{\Omega}, t)$ , l'équation détaillée du bruit neutronique est de la forme :

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}^g(r)) \delta\Psi_g(r, \vec{\Omega}, \omega) &= -i \frac{\omega}{v_g} \delta\Psi_g(r, \vec{\Omega}, \omega) + \sum_{g'} \int_{(4\pi)} \Sigma_{0,s}^{g' \rightarrow g}(r, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) \delta\Psi_{g'}(r, \vec{\Omega}', \omega) d\vec{\Omega}' \\ &+ \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g + \sum_q \left( \frac{\lambda_q^2 \beta_q}{\lambda_q^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda_q \beta_q \omega}{\lambda_q^2 + \omega^2} \right) \chi_{d,q}^g \right] \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{0,f}^{g'}(r) \delta\Phi_{g'}(r, \omega) \\ &+ S_g(r, \vec{\Omega}, \omega), \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec  $i$  l'imaginaire pur,  $\delta\Phi_g$  le bruit scalaire,  $\omega = 2\pi f$  la fréquence angulaire et  $S_g$  la source de bruit définie par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} S_g(r, \vec{\Omega}, \omega) &= -\delta\Sigma_t^g(r, \omega) \Psi_{0,g}(r, \vec{\Omega}) + \sum_{g'} \int_{(4\pi)} \delta\Sigma_s^{g' \rightarrow g}(r, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}, \omega) \Psi_{0,g'}(r, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \\ &+ \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g + \sum_q \left( \frac{\lambda_q^2 \beta_q}{\lambda_q^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda_q \beta_q \omega}{\lambda_q^2 + \omega^2} \right) \chi_{d,q}^g \right] \sum_{g'} \nu_{g'} \delta\Sigma_f^{g'}(r, \omega) \Phi_{0,g'}(r), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les termes de type  $\delta\Sigma$  désignent les termes perturbés des sections efficaces.

### 2.1.2 Approximation de la diffusion

La théorie de la diffusion repose sur trois grandes approximations :

1. l'application de la loi de Fick<sup>6</sup> qui, sous forme abrégée, s'écrit  $\vec{J} = -D \vec{\nabla} \Phi$ ,
2. la dérivée temporelle du courant est considérée comme négligeable, le terme  $\partial_t \vec{J}$  des équations cinétiques est donc négligé,
3. les coefficients de diffusion sont considérés comme constants et non sujet aux perturbations quelle que soit la source de bruit.

Sous ces trois hypothèses, l'équation critique d'équilibre du système devient :

$$\left( -\vec{\nabla} D_g(r) \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}^g(r) \right) \Phi_{0,g}(r) = \sum_{g'} \Sigma_{0,s0}^{g' \rightarrow g}(r) \Phi_{0,g'}(r) + \frac{\chi^g}{k} \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{0,f}^{g'}(r) \Phi_{0,g'}(r), \quad (2.13)$$

et l'équation du bruit neutronique devient :

$$\begin{aligned} \left( -\vec{\nabla} D_g(r) \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}^g(r) \right) \delta\Phi_g(r, \omega) &= -i \frac{\omega}{v_g} \delta\Phi_g(r, \omega) + \sum_{g'} \Sigma_{0,s0}^{g' \rightarrow g}(r) \delta\Phi_{g'}(r, \omega) \\ &+ \frac{1}{k} \left[ (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g + \sum_q \left( \frac{\lambda_q^2 \beta_q}{\lambda_q^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda_q \beta_q \omega}{\lambda_q^2 + \omega^2} \right) \chi_{d,q}^g \right] \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{0,f}^{g'}(r) \delta\Phi_{g'}(r, \omega) \\ &+ S_g(r, \omega), \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec comme source de bruit purement isotrope :

$$\begin{aligned} S_g(r, \omega) &= -\delta\Sigma_t^g(r, \omega) \Phi_{0,g}(r) + \sum_{g'} \delta\Sigma_{s0}^{g' \rightarrow g}(r, \omega) \Phi_{0,g'}(r) \\ &+ \frac{1}{k} \left[ (1 - \sum_q \beta_q) \chi_p^g + \sum_q \left( \frac{\lambda_q^2 \beta_q}{\lambda_q^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda_q \beta_q \omega}{\lambda_q^2 + \omega^2} \right) \chi_{d,q}^g \right] \sum_{g'} \nu_{g'} \delta\Sigma_f^{g'}(r, \omega) \Phi_{0,g'}(r). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Rappelons que  $\Sigma_{0,s0}^{g' \rightarrow g}$  est la section efficace de diffusion isotrope du groupe  $g'$  vers le groupe  $g$  (c'est la toute première composante de la décomposition de la section efficace de diffusion sur les polynômes de Legendre).

Il existe assez peu d'études sur la pertinence et la plage de validité de ces hypothèses en théorie du bruit neutronique [117, 47]. Nous apporterons au cours des prochains chapitres quelques éléments d'analyse en comparant des résultats en théorie de la diffusion et en théorie du transport.

6. Ajoutons qu'en théorie multigroupe, il est nécessaire de faire l'approximation suivante sur les transferts anisotropes :

$$\int \Sigma_{s1}(E' \rightarrow E) \vec{J}(E') dE' \approx \vec{J}(E) \int \Sigma_{s1}(E \rightarrow E') dE'.$$

### 2.1.3 Approximation adiabatique

Pour conclure cette section, nous allons introduire l'approximation adiabatique que nous avons employée au cours de nos études (notamment celles concernant la vibration au chapitre 5). Nous verrons plus loin dans ce chapitre que l'approximation adiabatique a été initialement introduite dans le cadre de la théorie de la cinétique (voir section 2.3.3) mais que nous ne l'employons pas exactement de la même manière.

Tout d'abord, réécrivons l'Eq. 2.5 de la manière suivante :

$$\left[ \frac{1}{v} \partial_t + L_0(r) \right] \delta\Psi(r, t) = -\delta L(r, t) \Psi(r, t). \quad (2.16)$$

Au lieu d'approximer la source de bruit  $-\delta L(r, t) \Psi(r, t)$  par  $-\delta L(r, t) \Psi_0(r)$  comme dans la théorie linéaire classique, nous l'approximons par le terme  $-\delta L(r, t) \Psi_0^{\text{AD}}(r, t)$  où  $\Psi_0^{\text{AD}}$  est un flux d'équilibre défini par l'approximation adiabatique suivante (l'indice AD fait référence à « Adiabatic ») :

$$L_0(r, t) \Psi_0^{\text{AD}}(r, t) = 0. \quad (2.17)$$

Cette équation est l'équation critique dans lequel le système est défini par les valeurs momentanées de toutes les sections efficaces à un temps  $t$  de la perturbation. Le temps  $t$  est un simple paramètre et non une variable de l'équation. Cette dernière est donc une équation d'équilibre à l'instant  $t$ . Nous supposons pour cela qu'à chaque instant  $t$  le flux et la concentration des précurseurs sont à l'équilibre. Comme nous allons le voir prochainement, à la différence de la théorie de la cinétique, nous appliquons l'approximation adiabatique directement sur le flux total de la source de bruit et non sur la fonction de forme (nommée  $\Gamma$  à la section 2.3.3) dépendante du temps, de l'énergie et de l'espace issue de la factorisation du flux total.

En posant  $\Psi^{\text{AD}}(r, t) = \Psi_0(r) + \delta\Psi^{\text{AD}}(r, t)$ , l'équation du bruit neutronique dans le cadre de l'approximation adiabatique est donc la suivante :

$$L_{0,\omega}(r) \delta\Psi^{\text{AD}}(r, \omega) = -\widehat{\delta L \Psi_0^{\text{AD}}}(r, \omega). \quad (2.18)$$

Le terme  $\widehat{\delta L \Psi_0^{\text{AD}}}(r, \omega)$  correspond à la transformée de Fourier du produit  $\delta L(r, t) \Psi_0^{\text{AD}}(r, t)$ . Nous verrons concrètement au chapitre 5 que, dans le cadre de la vibration, cette transformée de Fourier peut se calculer directement sans passer par le calcul du produit de convolution.

## 2.2 Un nouvel état d'équilibre

Nous avons décrit, à la section précédente, la théorie générale du bruit neutronique. Nous allons voir, dans cette section, que cette théorie classique est mise à mal lorsque la moyenne temporelle de la source de bruit est non nulle. En effet, dans ce cas, l'existence d'une solution périodique aux équations linéaires ou non linéaires du bruit neutronique n'est pas triviale. Afin de nous affranchir de ce problème, nous avons introduit un nouvel état d'équilibre qui nous permet d'annuler la moyenne temporelle de la source de bruit. Nous allons développer ce nouvel état d'équilibre en théorie linéaire et non linéaire.

### 2.2.1 En théorie linéaire

Une condition *nécessaire* pour déterminer la solution périodique de l'équation du bruit neutronique en théorie linéaire peut être obtenue en intégrant l'Eq. 2.6 sur l'intervalle  $[t, t + T_0]$ . Ceci aboutit à l'équation suivante [139] :

$$L_0(r) \langle \delta\Psi \rangle(r) = -\langle \delta L \rangle(r) \Psi_0(r), \quad (2.19)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne temporelle. Nous remarquons que cette équation n'est d'autre que l'Eq. 2.7 en  $\omega = 0$ .

La condition *nécessaire* de périodicité du bruit est donc équivalente à la résolubilité de l'Eq. 2.19. L'opérateur  $L_0$  étant singulier (son noyau n'est pas réduit au singleton 0), d'après l'alternative de Fredholm [5, 77, 131], l'Eq. 2.19 admet des solutions *si et seulement si* la source  $-\langle \delta L \rangle(r) \Psi_0(r)$  est orthogonale à l'unique solution<sup>7</sup> de l'équation adjointe  $L_0^*(r) f(r) = 0$ , c'est-à-dire au flux adjoint  $\Psi_0^*$  (nous développons en annexe A la justification mathématique précise de l'application du théorème de Fredholm). L'existence de solutions à l'Eq. 2.19 n'est donc pas triviale. D'un point de vue physique, ceci se comprend par le fait que l'équation homogène sans second membre de l'Eq. 2.19, qui correspond très exactement à l'équation critique, admet déjà une solution non nulle  $\Psi_0$ . Or, si une source extérieure est rajoutée à un système déjà critique, le flux de ce système va diverger ou tendre vers zéro sauf éventuellement si les phénomènes des contre-réactions sont pris en compte.

Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que, dans le cas particulier d'un système homogène infini, même si on impose une source de bruit périodique, le bruit peut ne pas être périodique si la moyenne temporelle de la source de bruit n'est pas nulle.

7. Notons que le théorème de Fredholm stipule que la source doit être orthogonale à chacune des solutions de l'équation adjointe. Cependant, il est démontré que dans le cas particulier de l'opérateur de Boltzmann stationnaire adjoint, cette solution est unique.



### Exemple en milieu homogène infini

Plaçons-nous dans le cas simple d'un système homogène infini en théorie de la diffusion monocinétique à un seul groupe de précurseurs. Supposons le système critique ( $k = 1$ ) et supposons que seule la section efficace d'absorption soit perturbée de la manière suivante :  $\Sigma_a(t) = \Sigma_{0,a} + \delta\Sigma_a(t)$  avec  $\delta\Sigma_a(t) = \mu + \zeta \sin(\omega_0 t)$  où  $\mu$  et  $\zeta$  sont des nombres réels quelconques et  $\omega_0$  est la fréquence angulaire de la perturbation. Dans ce cas, la source de bruit est simplement égale à  $-\delta\Sigma_a(t)\Phi_0$  avec  $\Phi_0$  le flux d'équilibre. Or, dans un milieu homogène infini en théorie de la diffusion monocinétique, nous savons que l'opérateur de Boltzmann est autoadjoint. Ainsi, la transformée de Fourier de la source de bruit en  $\omega = 0$  (égale à  $-2\pi\mu\Phi_0$ ) n'est pas orthogonale à la solution de l'équation adjointe  $L_0^* f = 0$ . La condition *nécessaire* de périodicité du bruit n'est donc pas respectée. Le bruit n'est donc pas périodique, alors que la source de bruit l'est, car la moyenne temporelle de cette dernière n'est pas nulle.

Pour bien voir les choses, résolvons concrètement le problème. Les équations cinétiques de notre système sont les suivantes (rappelons que  $k$  est supposé constant et égal à 1) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v}\partial_t + \Sigma_a(t)\right)\Phi(t) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_{0,f}\Phi(t) + \lambda C(t), \\ \partial_t C(t) + \lambda C(t) &= \beta\nu\Sigma_{0,f}\Phi(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'état d'équilibre étant critique, cela impose  $\Sigma_{0,a} = \nu\Sigma_{0,f}$  et  $\lambda C_0 = \beta\nu\Sigma_{0,f}\Phi_0$ . En appliquant la théorie linéaire, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v}\partial_t + \beta\nu\Sigma_{0,f}\right)\delta\Phi(t) &= -\delta\Sigma_a(t)\Phi_0 + \lambda\delta C(t), \\ \partial_t\delta C(t) + \lambda\delta C(t) &= \beta\nu\Sigma_{0,f}\delta\Phi(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

De ces deux dernières équations, nous pouvons en déduire la suivante :

$$\frac{1}{v}\partial_t^2\delta C(t) + \left(\frac{\lambda}{v} + \beta\nu\Sigma_{0,f}\right)\partial_t\delta C(t) = -\beta\nu\Sigma_{0,f}\delta\Sigma_a(t)\Phi_0. \quad (2.22)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, la solution de l'équation homogène est nulle. Le système étant linéaire, nous pouvons déterminer les solutions particulières de l'Eq. 2.22 pour chacun des deux termes de  $\delta\Sigma_a(t)$ . Pour le terme sinusoïdal, la solution particulière est évidemment périodique. Ce n'est cependant pas le cas pour le terme constant puisque nous avons :

$$\delta C_{p\mu}(t) = -\frac{\beta\nu\Sigma_{0,f}\mu\Phi_0}{\frac{\lambda}{v} + \beta\nu\Sigma_{0,f}}t + A, \quad (2.23)$$

avec  $A$  une constante. Ainsi :

$$\delta\Phi_{p\mu}(t) = -\frac{\mu\Phi_0}{\frac{\lambda}{v} + \beta\nu\Sigma_{0,f}}[1 + \lambda t] + \frac{\lambda A}{\beta\nu\Sigma_{0,f}}. \quad (2.24)$$

La solution particulière liée à la partie de la source de bruit en  $-\mu\Phi_0$  n'est donc pas périodique sauf si  $\mu = 0$ . Nous venons donc de démontrer d'une autre façon la non périodicité du bruit alors que la source de bruit est périodique.

### Définition d'un nouvel état d'équilibre

La démonstration du paragraphe précédent sur un cas très simple ne peut pas constituer une démonstration pour le cas général mais elle tend tout de même à montrer que l'existence d'une solution périodique n'est pas triviale lorsque la source de bruit n'est pas de moyenne temporelle nulle. C'est pourquoi nous pensons qu'il est préférable de travailler par défaut avec une source de moyenne temporelle nulle. Or, jusqu'à présent, à part supposer que  $\delta L$  était la conséquence de petites perturbations physiques, nous n'avons fait aucune autre hypothèse concernant sa forme. Nous n'avons notamment pas supposé que la moyenne temporelle de  $\delta L$  était nulle. Pour obtenir une source de moyenne temporelle nulle, il nous faut définir un nouvel opérateur d'équilibre  $L_{0,NS}$  qui n'est rien d'autre que la moyenne temporelle de l'opérateur cinétique  $L$  :

$$L_{0,NS}(r) = \langle L \rangle(r) = L_0(r) + \langle \delta L \rangle(r), \quad (2.25)$$

où l'indice NS fait référence à la dénomination « New Steady state ». L'opérateur cinétique  $L_{NS}$  est maintenant décomposé de la façon suivante :

$$L_{NS}(r, t) = L_{0,NS}(r) + \delta L_{NS}(r, t), \quad (2.26)$$

avec  $\delta L_{\text{NS}}(r, t) = \delta L(r, t) - \langle \delta L \rangle(r)$ . Si le modèle de perturbation implique une moyenne temporelle de  $\delta L$  nulle alors  $L_{0,\text{NS}} = L_0$  et la source de bruit est déjà nulle en  $\omega = 0$ . C'est par exemple le cas pour une simple perturbation sinusoïdale des sections efficaces mais nous allons voir au chapitre 5 que ce n'est pas le cas pour une vibration. Ce nouvel opérateur d'équilibre définit un nouveau flux d'équilibre  $\Psi_{0,\text{NS}}$ , et une nouvelle valeur propre  $k_{0,\text{NS}}$ . Nous décomposons le flux de la manière suivante :

$$\Psi_{\text{NS}}(r, t) = \Psi_{0,\text{NS}}(r) + \delta\Psi_{\text{NS}}(r, t). \quad (2.27)$$

Tout comme la méthode traditionnelle, nous appliquons la théorie linéaire et la transformée de Fourier. L'équation 2.7 devient alors :

$$L_{0,\text{NS},\omega}(r)\delta\Psi_{\text{NS}}(r, \omega) = -\delta L_{\text{NS}}(r, \omega)\Psi_{0,\text{NS}}(r), \quad (2.28)$$

avec  $\langle \Psi_{\text{NS}} \rangle(r) = \Psi_{0,\text{NS}}(r)$ , c'est-à-dire  $\langle \delta\Psi_{\text{NS}} \rangle(r) = 0$ . Ainsi, étant de moyenne temporelle nulle,  $\delta\Psi_{\text{NS}}$  est la solution périodique minimale de l'Eq. 2.28.

La signification physique de ce nouvel opérateur d'équilibre  $L_{\text{NS}}$  vient des systèmes de régulation de la puissance présents dans les cœurs de réacteurs [139]<sup>8</sup>. En effet, dans les réacteurs de puissance, il existe un système de régulation, basé sur les barres de commande et sur les contre-réactions (l'effet Doppler par exemple), qui stabilise automatiquement la puissance autour de la puissance nominale ou désirée par l'opérateur. Lorsqu'une perturbation, une vibration locale par exemple, introduit un surplus de réactivité (négative ou positive) le système de régulation contrebalance automatiquement cet ajout en introduisant une réactivité opposée. Cette action des barres de commande ou des contre-réactions annule donc la moyenne temporelle de la réactivité ajoutée par la perturbation. Ceci doit être pris en compte si nous voulons affiner nos modèles et nous garantir de la périodicité de la solution des équations du bruit. Une modélisation exacte de ce système de régulation n'est techniquement pas possible. Nous pensons que sa prise en compte peut être effectuée en choisissant un nouvel opérateur d'équilibre égal à la moyenne temporelle de l'opérateur cinétique, et ainsi obtenir un facteur de multiplication effectif  $k_{\text{NS}}$  légèrement différent du facteur initial décrit en section 2.1.1.

### Cas particulier de l'approximation adiabatique

Nous allons voir comment nous avons appliqué le développement de ce nouvel état d'équilibre dans le cas particulier de l'approximation adiabatique définie en section 2.1.3. De la même manière que précédemment, nous cherchons à annuler la moyenne temporelle de la source de bruit. Nous définissons pour cela un nouvel opérateur cinétique  $L_{\text{AD}}$  défini par :

$$L_{\text{AD}}(r, t) = L_{0,\text{AD}}(r) + \delta L_{\text{AD}}(r, t), \quad (2.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} L_{0,\text{AD}}(r) &= L_0(r) + \frac{\langle \delta L \Psi_0^{\text{AD}} \rangle(r)}{\langle \Psi_0^{\text{AD}} \rangle(r)}, \\ \delta L_{\text{AD}}(r, t) &= \delta L(r, t) - \frac{\langle \delta L \Psi_0^{\text{AD}} \rangle(r)}{\langle \Psi_0^{\text{AD}} \rangle(r)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En effet, de cette façon  $[\delta L_{\text{AD}} \Psi_0^{\text{AD}}](r, \omega = 0) = 0$  et ainsi la source de bruit s'annule en  $\omega = 0$ . Nous décomposons alors le flux total de la manière suivante :

$$\Psi_{\text{AD}}(r, t) = \Psi_{0,\text{AD}}(r) + \delta\Psi_{\text{AD}}(r, t), \quad (2.31)$$

avec  $\Psi_{0,\text{AD}}$  le nouvel état d'équilibre défini par le nouvel opérateur d'équilibre  $L_{0,\text{AD}}$  (avec pour valeur propre  $k_{\text{AD}}$ ). Ainsi, l'équation du bruit neutronique dans le cadre de l'approximation adiabatique et en prenant en compte ce nouvel état d'équilibre devient :

$$L_{0,\text{AD},\omega}(r)\delta\Psi_{\text{AD}}(r, \omega) = -\widehat{\delta L_{\text{AD}} \Psi_0^{\text{AD}}}(r, \omega), \quad (2.32)$$

avec  $\langle \Psi_{\text{AD}} \rangle(r) = \Psi_{0,\text{AD}}(r)$ , c'est-à-dire  $\langle \delta\Psi_{\text{AD}} \rangle(r) = 0$ .

8. Notons qu'un raisonnement similaire (pour ne pas dire identique) est développé en section 3 du chapitre 10 de [131]. Il en est aussi question en section 2 de [155].

### 2.2.2 En théorie non linéaire

Prenons maintenant en compte le terme  $\delta L \delta \Psi$  négligé en théorie linéaire pour ainsi obtenir la solution exacte des équations du bruit neutronique non linéarisées. De la même manière qu'en théorie linéaire, une condition *nécessaire* pour la détermination peut être obtenue en intégrant l'Eq. 2.5 sur l'intervalle  $[t, t + T_0]$ . Ceci nous donne l'équation suivante [139] :

$$L_0(r) \langle \delta \Psi \rangle(r) = - \langle \delta L \Psi \rangle(r). \quad (2.33)$$

Comme précédemment, l'alternative de Fredholm s'applique et ainsi l'Eq. 2.33 admet des solutions *si et seulement si* la source  $- \langle \delta L \Psi \rangle(r)$  est orthogonale à la solution de l'équation adjointe  $L_0^*(r) f(r) = 0$ . De la même façon qu'en théorie linéaire, l'existence de solutions à l'Eq. 2.33 n'est donc pas triviale.

Nous allons montrer, sur un cas simple, que même en théorie non linéaire le bruit peut ne pas être périodique si la moyenne temporelle de la source de bruit n'est pas nulle quand bien même cette dernière est périodique.

#### Exemple en milieu homogène infini

Soit un milieu homogène infini comme dans l'exemple développé à la section précédente. Par souci de simplicité, plaçons-nous cette fois-ci en théorie de la diffusion monocinétique sans prise en compte des précurseurs. L'équation cinétique devient alors :

$$\frac{1}{v} \partial_t \Phi(t) + \Sigma_a(t) \Phi(t) = \nu \Sigma_f(t) \Phi(t). \quad (2.34)$$

Supposons là aussi que seule la section efficace d'absorption soit perturbée de la manière suivante :  $\Sigma_a(t) = \Sigma_{0,a} + \mu + \zeta \sin(\omega_0 t)$  avec  $\mu$  et  $\zeta$  des nombres réels quelconques et  $\omega_0$  la fréquence angulaire de la perturbation. Compte tenu de l'état d'équilibre,  $\Sigma_{0,a} = \nu \Sigma_{0,f}$ .

Sans appliquer la théorie linéaire et sans passer par la transformée de Fourier, le flux total  $\Phi$  vérifie l'équation :

$$\frac{1}{v} \partial_t \Phi(t) + (\mu + \zeta \sin(\omega_0 t)) \Phi(t) = 0. \quad (2.35)$$

Nous en déduisons la solution de référence :

$$\Phi(t) = A e^{-v\mu t + \frac{v\zeta}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)}, \quad (2.36)$$

avec  $A$  une constante à déterminer.

Nous constatons tout de suite que si  $\mu \neq 0$ , alors la solution de référence n'est pas périodique et tend vers 0 si  $\mu > 0$  et vers l'infini si  $\mu < 0$ . Il faut donc impérativement que  $\mu = 0$ , c'est-à-dire  $\langle \delta \Sigma_a \rangle = 0$ , pour obtenir une solution de référence périodique. Ceci illustre bien le fait qu'il faille, dans ce cas précis, une source de bruit de moyenne temporelle nulle pour qu'une solution périodique existe. Enfin, pour déterminer la solution de référence minimale, il faut choisir  $A$  de telle sorte que  $\langle \Phi \rangle = \Phi_0$ . C'est selon nous la solution physique la plus acceptable.

#### Définition d'un nouvel état d'équilibre

Comme en théorie linéaire, nous pensons qu'il est donc préférable de travailler avec une source de bruit de moyenne temporelle nulle. Pour ce faire, il nous faut déterminer un nouvel opérateur d'équilibre  $L_{0,R}$  (avec pour valeur propre  $k_R$ ) et un nouveau flux d'équilibre  $\Psi_{0,R}$  tels que la source de bruit soit nulle en  $\omega = 0$ . L'indice R fait référence à la dénomination « Reference » puisque nous allons déterminer la solution exacte de référence des équations non linéarisées. Le nouvel opérateur cinétique permettant l'annulation de la moyenne temporelle de la source de bruit est le suivant :

$$L_R(r, t) = L_{0,R}(r) + \delta L_R(r, t), \quad (2.37)$$

avec :

$$\begin{aligned} L_{0,R}(r) &= L_0(r) + \frac{\langle \delta L \Psi_R \rangle(r)}{\langle \Psi_R \rangle(r)}, \\ \delta L_R(r, t) &= \delta L(r, t) - \frac{\langle \delta L \Psi_R \rangle(r)}{\langle \Psi_R \rangle(r)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Décomposons flux total sous la forme  $\Psi_R(r, t) = \Psi_{0,R}(r) + \delta \Psi_R(r, t)$ . L'équation non linéarisée du bruit neutronique prenant en compte ce nouvel état d'équilibre devient :

$$L_{0,R,\omega}(r) \delta \Psi_R(r, \omega) = - \widehat{\delta L_R \Psi_R}(r, \omega). \quad (2.39)$$

Le bruit  $\delta \Psi_R(r, \omega)$  ainsi défini est la solution périodique de référence minimale telle que  $\langle \Psi_R \rangle(r) = \Psi_{0,R}(r)$ . Nous verrons au chapitre 3 comment nous déterminons concrètement par itération la solution exacte de l'équation non linéarisée en respectant ce nouvel état d'équilibre dans le cadre de la théorie de la diffusion. Précisons qu'avec nos conventions,  $\widehat{\delta L_R \Psi_R}(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} (\delta L_R(r, \omega) \star \Psi_R(r, \omega))$  avec  $\star$  le produit de convolution.

## 2.3 Résolution analytique

Nous l'avons déjà évoqué, l'étude des problèmes liés au bruit neutronique a commencé dès les années 1970. C'est pourquoi beaucoup d'études reposent uniquement sur des résolutions analytiques ou semi-analytiques des équations du bruit. Ces méthodes sont principalement basées sur l'utilisation des fonctions de Green, directes ou adjointes, en milieu homogène ou dans des systèmes simples peu hétérogènes. Une variante des approximations de la cinétique a aussi vu le jour et permet, encore aujourd'hui, de mener à bien les premières analyses qualitatives.

Après avoir présenté la théorie des fonctions de Green et leurs applications dans le cas des équations du bruit, nous présenterons sa variante par l'adjoint puis les approximations de la cinétique employées en bruit neutronique.

### 2.3.1 Approche directe par les fonctions de Green

Dans cette section, nous allons commencer par présenter brièvement la méthode générale de résolution des équations linéaires différentielles par les fonctions de Green avant de détailler cette méthode dans le cas particulier de l'équation du bruit en théorie de la diffusion.

#### Théorie générale des fonctions de Green

Les fonctions de Green ne sont pas des fonctions spéciales comme peuvent l'être les fonctions de Bessel ou de Hankel, mais désigne un objet mathématique sur lequel est fondée une méthode de résolution des équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles [10, 18, 131]. La fonction de Green est en effet un moyen systématique de déterminer la solution particulière de ces équations. Nous allons présenter cette méthode de résolution dans le cas des équations linéaires différentielles dans le domaine réel.

Soit une équation différentielle linéaire inhomogène :

$$\hat{L}(r)f(r) = S(r), \quad (2.40)$$

avec  $\hat{L}(r) = \sum_{n=0}^N a_n(r) \frac{d^n}{dr^n}$  et  $S$  le second membre (équivalent à la source de bruit). La fonction de Green  $G$  de cette équation est la fonction respectant les conditions aux limites du domaine et satisfaisant l'équation où la source  $S$  est remplacée par un simple Dirac :

$$\hat{L}(r)G(r, r') = \delta(r - r'). \quad (2.41)$$

La solution particulière  $f_p$  que l'Eq. 2.40 s'exprime alors comme :

$$f_p(r) = \int G(r, r')S(r')dr', \quad (2.42)$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{L}(r)f_p(r) &= \int \hat{L}(r)G(r, r')S(r')dr' \\ &= \int \delta(r - r')S(r')dr' \\ &= S(r). \end{aligned} \quad (2.43)$$

La solution générale de l'Eq. 2.40 est donc :

$$f(r) = f_h(r) + \int G(r, r')S(r')dr', \quad (2.44)$$

avec  $f_h$  la solution de l'équation homogène  $\hat{L}f = 0$ .

Le grand avantage de l'utilisation des fonctions de Green est que ces dernières contiennent toute l'information sur la dynamique interne du système. Ainsi, une fois que la fonction de Green est déterminée pour un système donné, il suffit d'appliquer l'expression 2.42 pour déterminer la solution particulière  $f_p$  engendrée par n'importe quelle source  $S$ . La difficulté de cette méthode réside néanmoins sur la détermination de la bonne fonction de Green correspondant au problème physique posé. Pour une équation à coefficients  $a_n$  constants (cas des systèmes homogènes par exemple), il n'y a pas de difficultés particulières, mais la dépendance éventuelle de ces coefficients en  $r$  (cas des systèmes hétérogènes par exemple) augmente considérablement la difficulté de trouver  $G$ .

### Application au cas du bruit neutronique

Dans le cas du bruit neutronique, la solution  $f_h$  de l'équation homogène est nulle pour tout  $\omega$  non nul. Il est donc simplement nécessaire de déterminer la solution particulière  $f_p$  via le calcul de la fonction de Green  $G$  du système. Cette méthode est, à notre connaissance, exclusivement appliquée dans le cas de la théorie de la diffusion.

Pour fixer les idées, reprenons l'Eq. 2.14 qui, à une dimension et avec seulement un groupe d'énergie et un groupe de précurseurs, devient :

$$\left(-\vec{\nabla} D(r) \vec{\nabla} + \Sigma_{0,a}(r)\right) \delta\Phi(r, \omega) = -i \frac{\omega}{v} \delta\Phi(r, \omega) + \frac{1}{k} \left[1 - \frac{\beta\omega^2}{\lambda^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda\beta\omega}{\lambda^2 + \omega^2}\right] \nu\Sigma_{0,f}(r) \delta\Phi(r, \omega) + S(r, \omega). \quad (2.45)$$

Dans le cas d'un système homogène (critique rappelons-le, c'est-à-dire  $k = 1$ ), cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta\delta\Phi(r, \omega) + B^2(\omega)\delta\Phi(r, \omega) = -\frac{S(r, \omega)}{D}, \quad (2.46)$$

avec  $B^2$  défini par :

$$B^2(\omega) = B_0^2 \left(1 - \frac{1}{\rho_\infty G_0(\omega)}\right), \quad (2.47)$$

où :

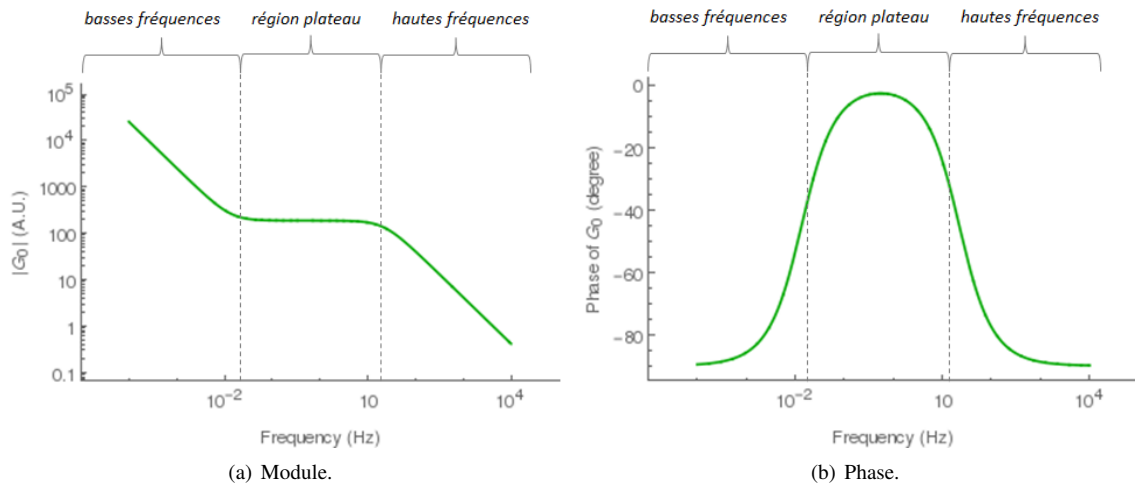
- $B_0^2 = \frac{\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a}}{D}$  le laplacien-matière,
- $\rho_\infty = \frac{\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a}}{\nu\Sigma_{0,f}}$  la réactivité du milieu infini,
- $\Lambda = \frac{1}{v\nu\Sigma_{0,f}}$  le temps de génération,
- $G_0(\omega) = \frac{1}{i\omega\left(\Lambda + \frac{\beta}{\lambda + i\omega}\right)}$ .

La fonction  $G_0$  est communément appelée « fonction de transfert fondamentale » du système (« zero-power reactor transfer function » en anglais) et a initialement été introduite dans le cadre de la théorie de la cinétique point, théorie que nous aborderons en section 2.3.3 [52]. La Figure 2.1 détaille la forme générale que peut prendre son module et de sa phase en fonction de la fréquence. Nous pouvons y distinguer trois grandes régions : les basses fréquences, la région plateau où le module de  $G_0$  peut être considéré comme constant ( $|G_0(\omega)| \approx 1/\beta$ ), et les hautes fréquences. Les frontières entre ces trois régions dépendent des données cinétiques du système.  $G_0$  étant une simple fonction de transfert de classe 1 et d'ordre 2, elle possède un pôle nul, un pôle non nul et un zéro [108]. Ses deux fréquences angulaires de coupure sont :

- $\omega_b = \lambda$  (limite des basses fréquences en rad/s),
- $\omega_h = \lambda + \frac{\beta}{\Lambda}$  (limite des hautes fréquences en rad/s).

Pour le cas général d'un système hétérogène multidimensionnel en théorie multigroupe,  $G_0$  peut s'approximer par une expression identique mais en employant les données cinétiques effectives pondérées par le flux adjoint  $\Phi_0^*$  telles que :

- $\beta_{\text{eff}} = \frac{\langle \Phi_0^*, P_{0,d} \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^*, P_0 \Phi_0 \rangle}$ ,
- $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{\langle \Phi_0^*, 1/v \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^*, P_0 \Phi_0 \rangle}$ ,
- $\lambda_{\text{eff}} = \frac{\beta_{\text{eff}}}{\sum_q \frac{\beta_{\text{eff},q}}{\lambda_q}}$  avec  $\beta_{\text{eff},q} = \frac{\langle \Phi_0^*, P_{0,d,q} \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^*, P_0 \Phi_0 \rangle}$ ,



**FIGURE 2.1** – Formes générales du module et de la phase de la fonction de transfert fondamentale (exemple pour un cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur).

où  $P_{0,d}$  désigne l'opérateur de production de l'ensemble des neutrons retardés,  $P_{0,d,q}$  l'opérateur de production des neutrons retardés du groupe de précurseurs  $q$  et  $P_0$  l'opérateur de production des neutrons prompts et retardés. L'annexe B apporte quelques précisions supplémentaires sur l'approximation de  $G_0$  lorsque nous traitons un cas à plusieurs groupes de précurseurs.

Compte tenu de ces expressions et des valeurs des données cinétiques usuellement employées, la limite des basses fréquences se situe généralement autour de 0,01 Hz et la limite des hautes fréquences peut aller de quelques dizaines à quelques centaines de Hz selon le système étudié<sup>9</sup>. Ainsi, l'étude de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  permet de déterminer approximativement les plages des trois régions que sont celles des basses fréquences, du plateau et des hautes fréquences, et apporte donc une première analyse qualitative du comportement du système face au bruit neutronique.

La fonction de Green  $G$ , aussi appelé fonction de transfert du système, correspondant à l'Eq. 2.46 vérifie les conditions aux limites du système et l'équation suivante :

$$\Delta_r G(r, r', \omega) + B^2(\omega)G(r, r', \omega) = \delta(r - r'). \quad (2.48)$$

Une fois la fonction de Green du système déterminée, le bruit engendré par la source  $S$  se déduit directement de l'égalité :

$$\delta\Phi(r, \omega) = \int G(r, r', \omega)S(r', \omega)dr'. \quad (2.49)$$

### 2.3.2 Approche indirecte par les fonctions de Green adjointes

Comme lors de la résolution de l'équation de Boltzmann stationnaire, il existe une approche directe (« forward method ») que nous venons à l'instant de détailler, et une approche indirecte (« backward method ») par l'adjoint. C'est cette dernière approche, appliquée au cas des équations du bruit, que nous allons détailler dans cette section [113, 116, 118].

Commençons par reprendre l'Eq. 2.7 que nous rappelons ici dans le cas de la théorie de la diffusion :

$$L_{0,\omega}(r)\delta\Phi(r, \omega) = S(r, \omega), \quad (2.50)$$

avec  $S$  la source de bruit. Définissons le produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_P f(p)\overline{g(p)}dp, \quad (2.51)$$

avec  $P$  l'espace des phases et  $\overline{g(p)}$  le complexe conjugué de  $g(p)$ . L'opérateur adjoint  $L_{0,\omega}^*$  de l'opérateur direct  $L_{0,\omega}$  est défini par la propriété :

$$\langle f, L_{0,\omega}g \rangle = \langle L_{0,\omega}^*f, g \rangle, \quad (2.52)$$

9. Pour un réacteur de puissance à neutrons thermiques par exemple, la limite des basses fréquences est d'environ 0,013 Hz et celle des hautes fréquences d'environ 55 Hz en considérant  $\Lambda_{\text{eff}} \approx 20$  microsecondes.

quelles que soient les fonctions  $f$  et  $g$  appartenant à l'espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

La fonction de Green adjointe  $G^*$  vérifie donc l'équation :

$$L_{0,\omega}^*(r)G^*(r, r', \omega) = \delta(r - r'). \quad (2.53)$$

Or :

$$\langle L_{0,\omega}^* G^*, \delta\Phi \rangle = \langle G^*, L_{0,\omega} \delta\Phi \rangle. \quad (2.54)$$

Ainsi, le bruit se déduit de l'expression suivante :

$$\delta\Phi(r', \omega) = \int \overline{G^*(r, r', \omega)} S(r, \omega) dr. \quad (2.55)$$

Rappelons que, par la méthode directe, le bruit est égal à  $\delta\Phi(r, \omega) = \int G(r, r', \omega) S(r', \omega) dr'$ . Au vu de ces deux expressions, nous comprenons la différence de point de vue entre la méthode directe et la méthode indirecte par l'adjoint. En effet, nous remarquons que  $r$  et  $r'$  jouent un rôle opposé entre ces deux approches : pour les deux approches  $r$  est une variable et  $r'$  un paramètre (c'est-à-dire qu'à chaque nouvelle valeur de  $r'$ , il faut déterminer les nouvelles fonctions  $G$  et  $G^*$  correspondantes), mais dans l'approche directe  $r$  correspond à la position du détecteur et  $r'$  à la position de la source alors que dans l'approche indirecte  $r$  correspond à la position de la source et  $r'$  à celle du détecteur. Ainsi, si nous souhaitons effectuer plusieurs calculs avec différentes positions de la source de bruit mais une position unique pour le détecteur, de la même manière que dans les calculs stationnaires, l'approche indirecte est préférable. Si, au contraire, nous souhaitons connaître le bruit en plusieurs positions de détecteurs, l'approche directe est plus performante. Le choix de l'approche directe ou adjointe est donc en partie régi par le nombre de positions de la source de bruit et le nombre de positions des détecteurs.

### 2.3.3 Approximations de la cinétique

Les approximations usuellement employées en cinétique peuvent aussi être appliquées dans le cas des problèmes de bruit. Elles ne permettent pas de déterminer des solutions aussi précises qu'avec la méthode par les fonctions de Green mais permettent d'apporter des réponses qualitatives intéressantes en particulier via l'étude de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$ .

#### Rappel de la théorie classique

Les approximations de la cinétique sont basées sur la factorisation du flux angulaire  $\Psi$  en un facteur d'amplitude  $P$  dépendant uniquement du temps et en une fonction de forme  $\Gamma$  dépendante du temps, de l'énergie et de l'espace [18, 52, 68, 69] :

$$\Psi(r, E, \Omega, t) = P(t)\Gamma(r, E, \Omega, t). \quad (2.56)$$

Afin de rendre cette décomposition unique, il est usuel d'imposer la normalisation suivante :

$$\partial_t \int \Psi_0^*(r, E, \Omega)\Gamma(r, E, \Omega, t) dr dE d\Omega = 0, \quad (2.57)$$

avec  $\Psi_0^*$  le flux d'équilibre adjoint.

Pour plus de simplicité, plaçons-nous dans le cas de la diffusion monocinétique où le flux est égal à son adjoint. La factorisation devient alors :

$$\Phi(r, t) = P(t)\Gamma(r, t), \quad (2.58)$$

et la normalisation :

$$\partial_t \int \Phi_0(r)\Gamma(r, t) dr = 0. \quad (2.59)$$

Il est en outre supposé que la cinétique commence à  $t = 0$  et qu'à  $t < 0$  le système soit à l'état d'équilibre. Nous pouvons alors choisir de normaliser  $P$  et  $\Gamma$  de telle sorte que  $P(t = 0) = 1$  et  $\Gamma(r, t = 0) = \Phi_0(r)$ .

Le facteur d'amplitude  $P$  vérifie, après quelques manipulations algébriques, un système d'équations différentielles issues des équations cinétiques de départ :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda(t)} P(t) + \lambda C(t) \\ \frac{dC}{dt}(t) &= \frac{\beta}{\Lambda(t)} P(t) - \lambda C(t), \end{aligned} \quad (2.60)$$

où :

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{\int (\nu\Sigma_f(r,t) - \Sigma_a(r,t) - \nu\Sigma_{0,f}(r) + \Sigma_{0,a}(r))\Phi_0(r)\Gamma(r,t)dr}{\int \nu\Sigma_{0,f}(r)\Phi_0(r)\Gamma(r,t)dr}, \\ \Lambda(t) &= \frac{\int 1/\nu\Phi_0(r)\Gamma(r,t)dr}{\int \nu\Sigma_{0,f}(r)\Phi_0(r)\Gamma(r,t)dr}, \\ C(t) &= \frac{\int C(r,t)\Phi_0(r)dr}{\int 1/\nu\Phi_0(r)\Gamma(r,t)dr},\end{aligned}\quad (2.61)$$

avec  $C$  la concentration des précurseurs. La détermination complète de  $P$  nécessitant la connaissance préalable de la fonction de forme  $\Gamma$ , cette dernière est donc usuellement calculée à partir de deux types d'approximations :

- l'approximation dite « du réacteur point » où  $\Gamma$  est tout simplement supposé égal au flux d'équilibre pour tout temps  $t$  :  $\Gamma(r,t) = \Phi_0(r)$ . Dans ce cas,  $\Phi(r,t) = P(t)\Phi_0(r)$ .
- l'approximation dite « adiabatique » où  $\Gamma$  est supposé vérifier pour chaque instant  $t$  l'équation d'équilibre du système comprenant les valeurs instantanées des sections efficaces  $\Sigma(r,t)$ . Autrement dit, la fonction de forme vérifie en chaque instant  $t$  ( $t$  est donc un simple paramètre) l'équation adiabatique suivante :

$$-\vec{\nabla}D(r,t)\vec{\nabla}\Gamma_{AD}(r,t) + \Sigma_a(r,t)\Gamma_{AD}(r,t) = \frac{\nu\Sigma_f(r,t)}{k(t)}\Gamma_{AD}(r,t). \quad (2.62)$$

### Approximations appliquées au cas du bruit

Reprenons l'exemple en théorie de la diffusion à un groupe d'énergie et un groupe de précurseurs dans un milieu homogène. Comme nous l'avons détaillé précédemment, le flux se factorise en :

$$\Phi(r,t) = P(t)\Gamma(r,t). \quad (2.63)$$

Nous supposons maintenant qu'une perturbation a eu lieu en  $t = -\infty$  et que nous sommes en régime établi. Nous décomposons alors les trois fonctions de la manière suivante :

$$\begin{aligned}P(t) &= 1 + \delta P(t) \\ \Gamma(r,t) &= \Phi_0(r) + \delta\Gamma(r,t) \\ \Phi(r,t) &= \Phi_0(r) + \delta\Phi(r,t),\end{aligned}\quad (2.64)$$

avec  $\Phi_0$  le flux d'équilibre du système. De l'Eq. 2.63 et en linéarisant au premier ordre, nous en déduisons :

$$\delta\Phi(r,t) = \underbrace{\Phi_0(r)\delta P(t)}_{\text{terme « réacteur point »}} + \underbrace{\delta\Gamma(r,t)}_{\text{terme dépendant de l'espace}}. \quad (2.65)$$

À partir des équations cinétiques de départ, en linéarisant au premier ordre et en appliquant la transformée de Fourier, nous obtenons :

$$\delta P(\omega) = \delta\rho(\omega)G_0(\omega), \quad (2.66)$$

avec  $G_0$  la fonction de transfert fondamentale du système définie précédemment et  $\delta\rho$  le terme perturbé de la réactivité qui, au premier ordre, est égal à :

$$\delta\rho(\omega) = \frac{\int [\nu\delta\Sigma_f(r,\omega) - \delta\Sigma_a(r,\omega)]\Phi_0^2(r)dr}{\nu\Sigma_{0,f} \int \Phi_0^2(r)dr}. \quad (2.67)$$

L'approximation du réacteur point et l'approximation adiabatique sont ensuite appliquées de la manière suivante [55, 61, 80] :

- dans l'approximation dite « du réacteur point », le terme dépendant de l'espace  $\delta\Gamma$  est considéré comme négligeable par rapport au terme « réacteur point ». Le bruit est donc approximé au simple terme :

$$\delta\Phi(r,\omega) = \delta\rho(\omega)G_0(\omega)\Phi_0(r). \quad (2.68)$$

Cette approximation est en général applicable dans le cas de perturbations lentes<sup>10</sup>, dans des systèmes de petites tailles ou lorsque la perturbation ne dépend pas de l'espace (lorsqu'elle est homogène sur tout le système par exemple). Ceci équivaut à dire que cette approximation est viable lorsque  $|\delta\rho(\omega)G_0(\omega)| \gg 1$  [78].

10. En effet, lorsque la période de la perturbation est beaucoup plus grande que le temps moyen de génération  $\Lambda$ , l'ensemble du système a tendance à "répondre" instantanément à la perturbation. C'est pourquoi  $G_0$  croît fortement à basses fréquences. À l'inverse, à hautes fréquences, lorsque la période de la perturbation est beaucoup plus petite que le temps moyen de génération  $\Lambda$ , l'ensemble du système n'a pas le temps de suivre les fluctuations de la perturbation (excepté localement). C'est pourquoi  $G_0$  décroît fortement à hautes fréquences.



- concernant l'approximation dite « adiabatique »,  $\Gamma$  est supposé vérifier pour chaque instant  $t$ , comme pour le cas classique, l'Eq. 2.62 d'équilibre du système comprenant les valeurs instantanées des sections efficaces  $\Sigma(r, t)$ . Puis  $\delta\Gamma_{AD} = \Phi_0 - \Gamma_{AD}$ . Le bruit est donc approximé par l'expression :

$$\delta\Phi(r, \omega) = \delta\rho(\omega)G_0(\omega)\Phi_0(r) + \delta\Gamma_{AD}(r, \omega). \quad (2.69)$$

Cette approximation est viable lorsque le bruit dévie de l'approximation du réacteur point de manière suffisamment lente pour que nous puissions calculer sa dépendance spatiale de manière quasi-statique. Elle est ainsi généralement viable pour les petits systèmes et ceux de tailles intermédiaires mais rarement pour les grands systèmes même à basses fréquences. Comme nous l'avons déjà signalé, à la différence de la section 2.1.3, l'approximation adiabatique est ici appliquée sur la fonction de forme  $\Gamma$  et non directement sur le flux total.

Le Tableau 2.1 détaille concrètement les plages de validité de ces approximations dans le cas du bruit neutronique.

TABLEAU 2.1 – Plage de validité des approximations du réacteur point et adiabatique en fonction de la fréquence et de la taille du système (● = viable, ● = peu viable, ● = non viable).

	Basses fréquences	Région plateau	Hautes fréquences
Petit système			
réacteur point	●	●	●
adiabatique	●	●	●
Système intermédiaire			
réacteur point	●	●	●
adiabatique	●	●	●
Grand système			
réacteur point	●	●	●
adiabatique	●	●	●

## 2.4 Les composantes globales et locales

Pour faciliter son analyse, le bruit neutronique est usuellement séparé en deux composantes : une composante globale et une composante locale [16, 17, 78]. Cette section a pour but de décrire ces deux composantes. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, la connaissance de leurs propriétés générales permet de mieux appréhender et de mieux comprendre la structure du bruit engendré par diverses perturbations. De manière générale, les composantes globales et locales sont définies de la façon suivante :

- la composante globale varie lentement en espace, a une relaxation spatiale lente et s'accompagne d'une phase spatiale constante ou variant lentement,
- la composante locale varie rapidement en espace, a une relaxation spatiale rapide et peut s'accompagner, selon la perturbation, d'un ou de plusieurs déphasages en espace.

Afin d'introduire les principales propriétés de ces deux composantes, nous allons, dans un premier temps, les expliciter et les décrire analytiquement sur le cas très simple d'un cœur homogène et nous étudierons leurs comportements pour le cas d'un grand cœur et d'un petit cœur. Dans un deuxième temps, nous verrons comment nous pouvons les approximer par l'analyse spectrale et par la décomposition du bruit sur la base des vecteurs propres du laplacien. Nous verrons que cette deuxième approche, bien que n'étant qu'une approximation de ces deux composantes, met en lumière d'autres caractéristiques. Nous récapitulerons enfin les propriétés les plus importantes des deux composantes.

### 2.4.1 Analyse du bruit dans un cœur homogène

Nous reprenons ici les expressions analytiques décrites et détaillées dans [53]. Soit un cœur homogène critique à une dimension de longueur  $h$  avec des conditions de vide aux bords. Plaçons-nous en théorie de la diffusion à deux groupes d'énergie et un seul groupe de précurseurs. Imposons en outre un spectre de fission thermique nul et une absence d'upscattering<sup>11</sup>. Dans ces conditions, le flux d'équilibre multigroupe est, à un facteur de normalisation près,

11. Pour rappel, l'upscattering désigne les transferts par diffusion qui ont lieu des groupes de basses énergies vers les groupes de plus hautes énergies. On parle de termes de « remontée » par diffusion.

de la forme :

$$\begin{aligned}\Phi_{0,1}(r) &= \sin\left(\frac{\pi}{h}r\right), \\ \Phi_{0,2}(r) &= \frac{\Sigma_{0,s_0}^{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{0,a}^1 + D_2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi}{h}r\right).\end{aligned}\quad (2.70)$$

Comme nous l'avons vu en section 2.3.1, le bruit des groupes rapide et thermique se déduisent de la fonction de Green de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta\Phi_1(r, \omega) \\ \delta\Phi_2(r, \omega) \end{pmatrix} = \int_0^h \begin{pmatrix} G_{11}(r, r', \omega) & G_{12}(r, r', \omega) \\ G_{21}(r, r', \omega) & G_{22}(r, r', \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(r', \omega) \\ S_2(r', \omega) \end{pmatrix} dr', \quad (2.71)$$

avec  $S_1$  et  $S_2$  la source de bruit respectivement du groupe rapide et thermique. Compte tenu de la simplicité du système étudié, nous pouvons déterminer la forme analytique des différentes composantes de la fonction de Green du problème.

Posons tout d'abord :

- $\nu\Sigma_{f,1}(\omega) = \nu_1\Sigma_{0,f}^1(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega})$  et  $\nu\Sigma_{f,2}(\omega) = \nu_2\Sigma_{0,f}^2(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega})$ ,
- $\Sigma_1(\omega) = \Sigma_{0,a}^1 + \Sigma_{0,s_0}^{1 \rightarrow 2} + i\omega/v_1 - \nu\Sigma_{f,1}(\omega)$  et  $\Sigma_2(\omega) = \Sigma_{0,a}^2 + i\omega/v_2$ .

Par définition, les composantes de la fonction de Green vérifient :

$$\begin{pmatrix} D_1\Delta - \Sigma_1(\omega) & \nu\Sigma_{f,2}(\omega) \\ \Sigma_{0,s_0}^{1 \rightarrow 2} & D_2\Delta - \Sigma_2(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(r, r', \omega) & G_{12}(r, r', \omega) \\ G_{21}(r, r', \omega) & G_{22}(r, r', \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(r - r') & 0 \\ 0 & \delta(r - r') \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Les solutions analytiques de cette équation sont les suivantes :

- $G_{11}(r, r', \omega) = (D_2\Delta - \Sigma_2(\omega))G_i(r, r', \omega)$ ,
- $G_{21}(r, r', \omega) = -\Sigma_{0,s_0}^{1 \rightarrow 2}G_i(r, r', \omega)$ ,
- $G_{12}(r, r', \omega) = -\nu\Sigma_{f,2}(\omega)(1 - \beta)G_i(r, r', \omega)$ ,
- $G_{22}(r, r', \omega) = (D_1\Delta - \Sigma_1(\omega))G_i(r, r', \omega)$ ,

avec :

$$G_i(r, r', \omega) = G_g(r, r', \omega) + G_l(r, r', \omega), \quad (2.73)$$

où :

$$\begin{aligned}G_g(r, r', \omega) &= \frac{1}{D_1D_2(l(\omega)^2 + g(\omega)^2)g(\omega)\sin(g(\omega)h)} \begin{cases} \sin(g(\omega)(h - r'))\sin(g(\omega)r) & \text{si } r < r' \\ \sin(g(\omega)(h - r))\sin(g(\omega)r') & \text{si } r \geq r' \end{cases}, \\ G_l(r, r', \omega) &= \frac{-1}{D_1D_2(l(\omega)^2 + g(\omega)^2)l(\omega)\sinh(l(\omega)h)} \begin{cases} \sinh(l(\omega)(h - r'))\sinh(l(\omega)r) & \text{si } r < r' \\ \sinh(l(\omega)(h - r))\sinh(l(\omega)r') & \text{si } r \geq r' \end{cases}.\end{aligned}\quad (2.74)$$

$g(\omega)$  et  $l(\omega)$  sont très exactement les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation différentielle 2.72, et valent donc :

$$\begin{aligned}g(\omega)^2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} + \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} - \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right)^2 + \frac{4}{D_1D_2} \Sigma_{0,s_0}^{1 \rightarrow 2} \nu\Sigma_{f,2}(\omega)}, \\ l(\omega)^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} + \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} - \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right)^2 + \frac{4}{D_1D_2} \Sigma_{0,s_0}^{1 \rightarrow 2} \nu\Sigma_{f,2}(\omega)}.\end{aligned}\quad (2.75)$$

Nous n'avons pas nommé ces deux racines  $g$  et  $l$  par hasard. Elles définissent en effet la composante globale et la composante locale du bruit neutronique. La composante globale correspond au terme de dépendance spatiale en sin donc de relaxation spatiale lente, et la composante locale correspond au terme de dépendance spatiale en sinh donc de relaxation spatiale rapide.

Pour bien visualiser la différence entre ces deux composantes et leurs dépendances tant énergétique que fréquentielle, nous allons analyser le bruit rapide et thermique résultant d'une simple source ponctuelle unitaire au point  $r_s$  définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad S_1(r, \omega) = S_2(r, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = r_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.76)$$

Nous allons donc étudier la réponse impulsionnelle d'un cœur homogène suite à une impulsion au point  $r_s$ . Nous appelons  $\delta\Phi_g$  la composante globale du bruit correspondante au terme en sin et  $\delta\Phi_l$  la composante locale du bruit correspondante au terme en sinh. La somme  $\delta\Phi_g + \delta\Phi_l$  correspond donc au bruit neutronique total.

Nous allons mener cette étude sur deux tailles de cœur différentes :

- un grand cœur de taille  $h = 323$  cm (avec  $r_s = 100$  cm),
- un petit cœur de taille  $h = 100$  cm (avec  $r_s = 30$  cm).

La Figure 2.2 présente la dépendance fréquentielle de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  des deux systèmes étudiés. Il en ressort que la fréquence de coupure des basses fréquences est d'environ 0,013 Hz (0,085 rad/s) pour les deux systèmes et que celle à hautes fréquences est d'environ 22 Hz (140 rad/s) pour le grand cœur et 6,5 Hz (40 rad/s) pour le petit cœur.

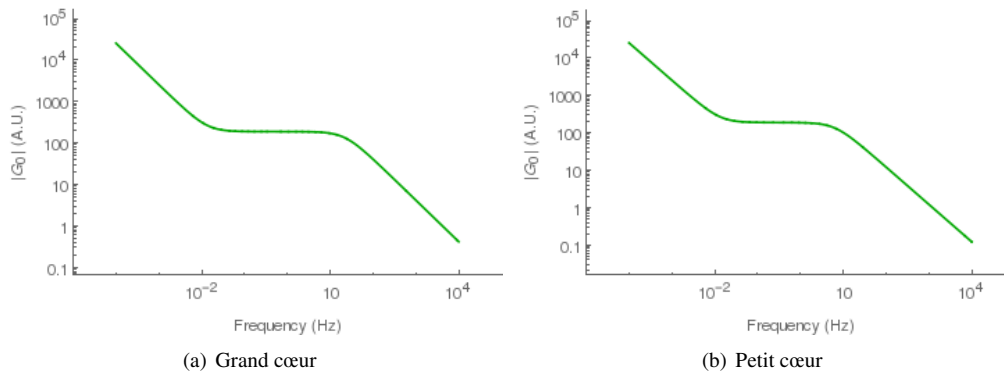


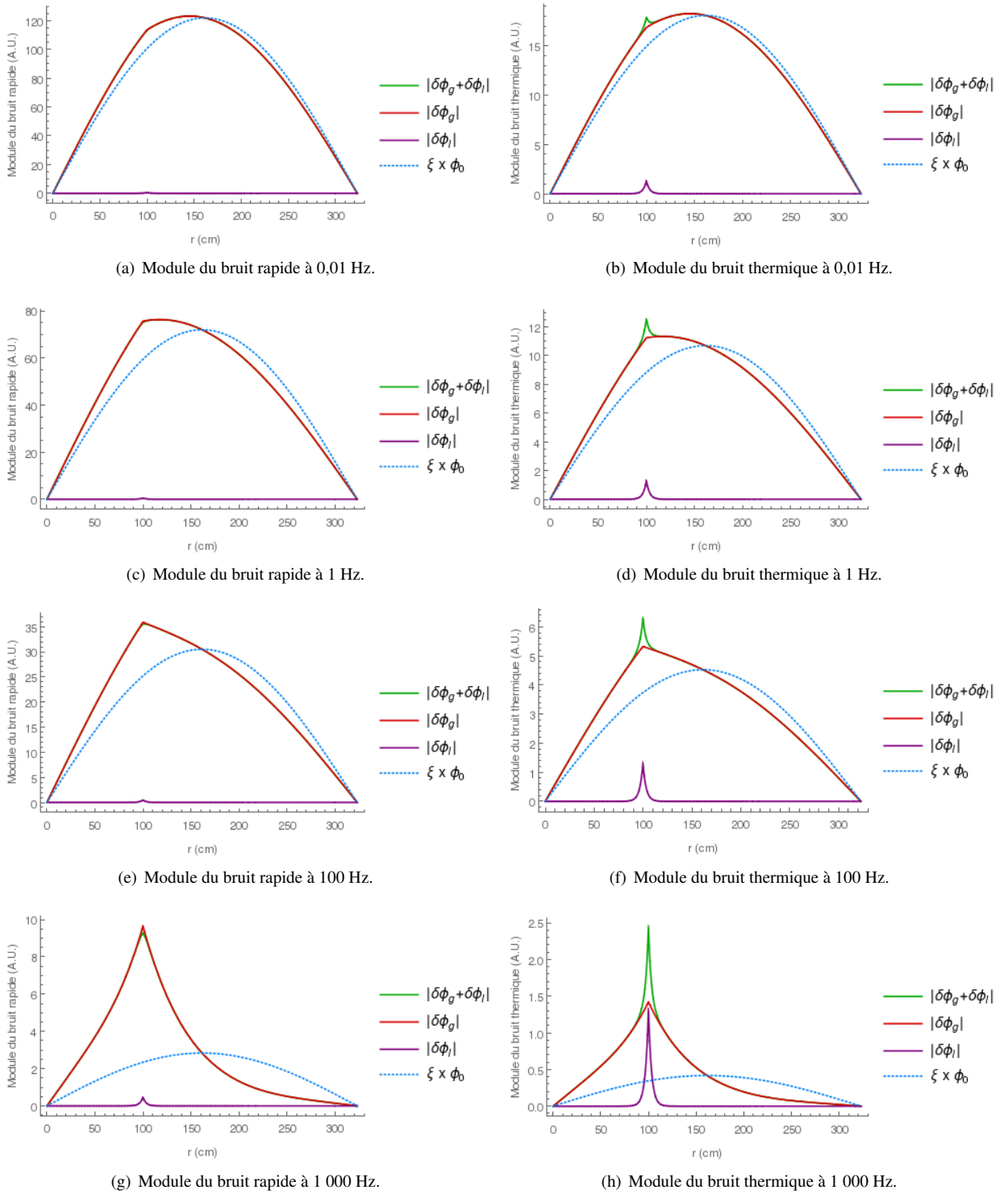
FIGURE 2.2 – Module de la fonction de transfert fondamentale du grand et du petit cœurs homogènes.

Les Figures 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 décrivent le comportement en module et en phase des composantes globales et locales du bruit rapide et thermique en fonction de la fréquence pour le grand cœur et le petit cœur. L'ajout du terme  $\xi\Phi_0$ , où  $\xi$  est un simple facteur de normalisation dépendant de la fréquence mais presque pas du groupe d'énergie, permet d'apprécier les différences de forme entre le flux d'équilibre et la composante globale afin d'estimer si cette dernière peut être approximée ou non au terme réacteur point (terme qui est, rappelons-le, proportionnel au flux d'équilibre). Précisons que nous avons détaillé les résultats à très hautes fréquences (1 000 Hz) à titre indicatif. Dans la pratique, comme cela a déjà été signalé, les résultats à de telles fréquences ne sont expérimentalement pas exploitables.

De l'analyse de ces figures, nous pouvons faire les constats suivants :

- **pour le grand cœur** : le bruit du groupe rapide est presque exclusivement affecté par la composante globale et est approximativement proportionnel au flux d'équilibre à basses fréquences (0,01 Hz) mais pas à moyennes fréquences (1 Hz) et encore moins à hautes et très hautes fréquences (100 et 1 000 Hz). Le bruit du groupe thermique est à la fois affecté par la composante locale autour de la perturbation et par la composante globale loin de la perturbation, composante globale qui, là aussi, suit approximativement le flux d'équilibre à basses fréquences. Plus la fréquence est élevée plus la composante locale va augmenter et devenir de plus en plus visible. Concernant les phases de deux composantes, elles sont en opposition pour le bruit rapide mais en phase ou presque pour le bruit thermique. Plus la fréquence augmente, plus les phases vont dériver et se déphaser par rapport aux phases au point  $r_s$  au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la perturbation ;
- **pour le petit cœur** : le bruit du groupe rapide est aussi majoritairement affecté par la composante globale mais est cette fois-ci approximativement proportionnel au flux d'équilibre à basses (0,01 Hz), à moyennes (1 Hz) et à hautes fréquences (100 Hz) (mais pas à 1 000 Hz). Le bruit du groupe thermique suit les mêmes tendances que pour le cas du grand cœur à la différence près que la composante locale est un peu plus importante pour le grand cœur (elle est en effet d'amplitude comparable à celle de la composante globale en  $r_s$ ). Concernant les phases des deux composantes, elles suivent les mêmes tendances que pour le grand cœur, néanmoins elles dérivent et se déphasent moins fortement par rapport aux phases au point  $r_s$  au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la perturbation ;
- l'amplitude du bruit des groupes rapide et thermique diminue au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Ces constatations ne peuvent se généraliser brutalement à n'importe quel bruit mais elles donnent néanmoins une estimation des tendances générales des composantes globales et locales. Nous allons détailler, dans la section suivante, une approximation de ces deux composantes à un groupe d'énergie via la décomposition du bruit sur la base des vecteurs propres du laplacien. Cela nous permettra d'apporter quelques éléments supplémentaires à ces premières constatations.



**FIGURE 2.3** – Module du bruit rapide et thermique à 0,01 Hz, 1 Hz, 100 Hz et 1 000 Hz pour un grand cœur homogène ( $r_s = 100$  cm). Le facteur normalisation  $\xi$  du flux d'équilibre  $\Phi_0$  est égal à  $|\delta\Phi_g|(h/2)/\Phi_0(h/2)$ . Pour une fréquence donnée,  $\xi$  est presque identique pour les deux groupes.

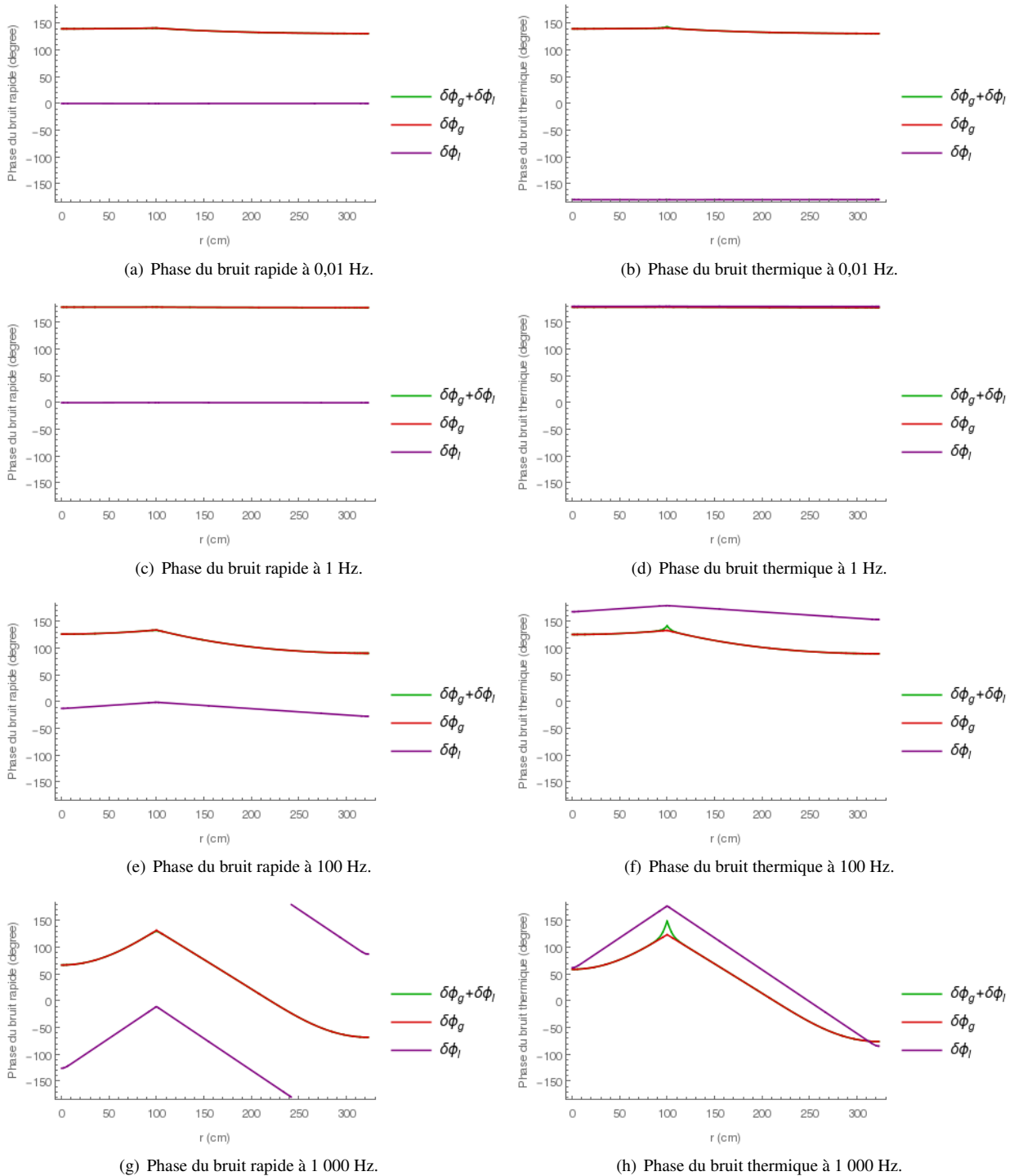
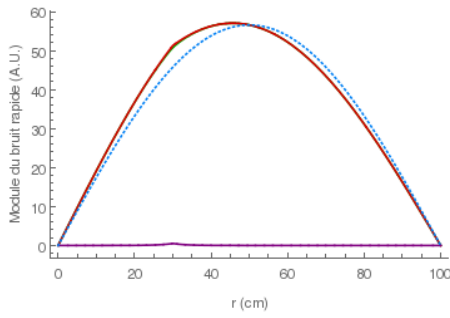
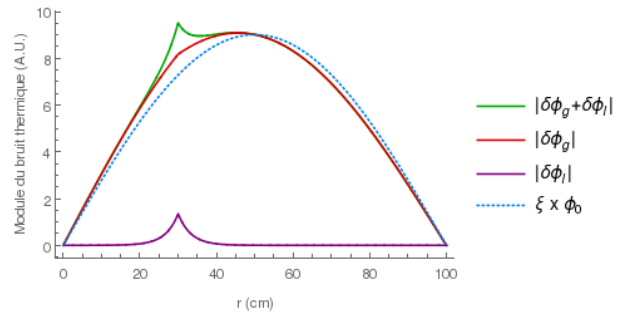


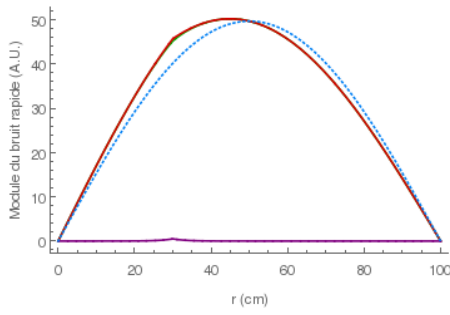
FIGURE 2.4 – Phase du bruit rapide et thermique à 0,01 Hz, 1 Hz, 100 Hz et 1 000 Hz pour un grand cœur homogène ( $r_s = 100$  cm).



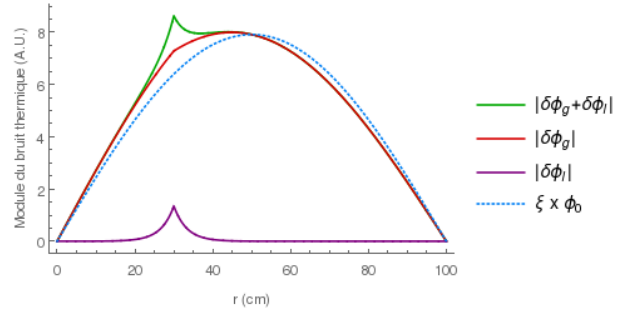
(a) Module du bruit rapide à 0,01 Hz.



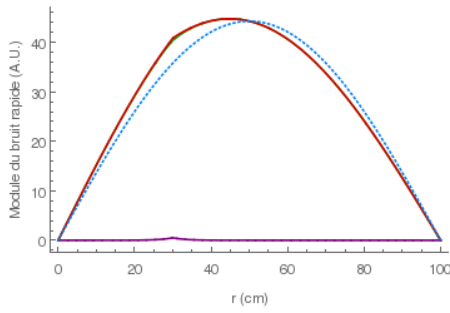
(b) Module du bruit thermique à 0,01 Hz.



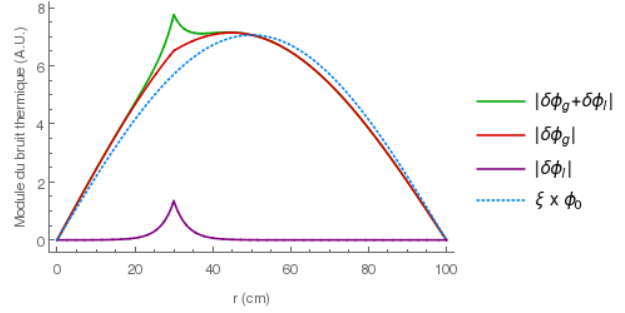
(c) Module du bruit rapide à 1 Hz.



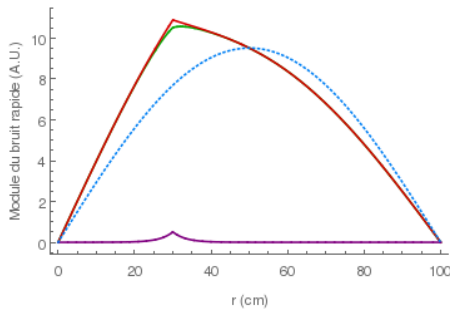
(d) Module du bruit thermique à 1 Hz.



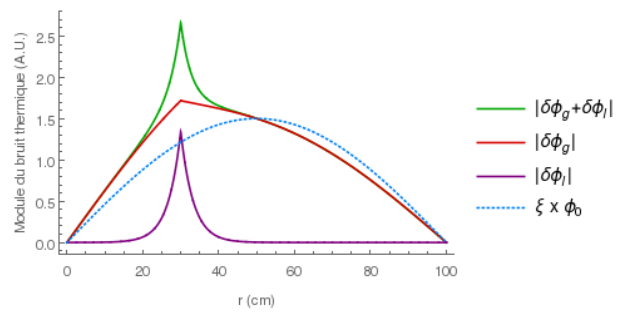
(e) Module du bruit rapide à 100 Hz.



(f) Module du bruit thermique à 100 Hz.

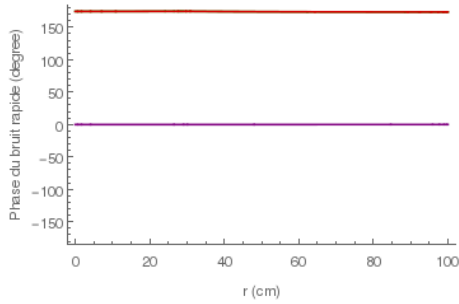


(g) Module du bruit rapide à 1 000 Hz.

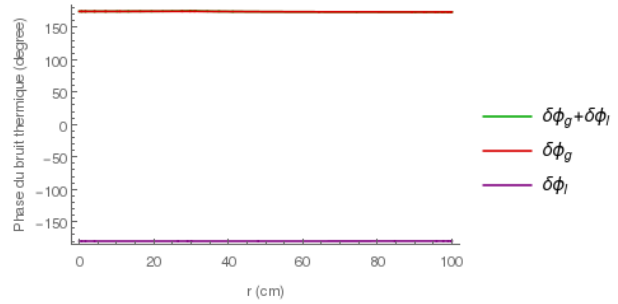


(h) Module du bruit thermique à 1 000 Hz.

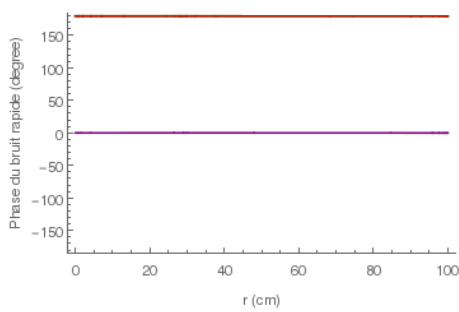
**FIGURE 2.5** – Module du bruit rapide et thermique à 0,01 Hz, 1 Hz, 100 Hz et 1 000 Hz pour un petit cœur homogène ( $r_s = 30$  cm). Le facteur normalisation  $\xi$  du flux d'équilibre  $\Phi_0$  est égal à  $|\delta\Phi_g|(h/2)/\Phi_0(h/2)$ . Pour une fréquence donnée,  $\xi$  est presque identique pour les deux groupes.



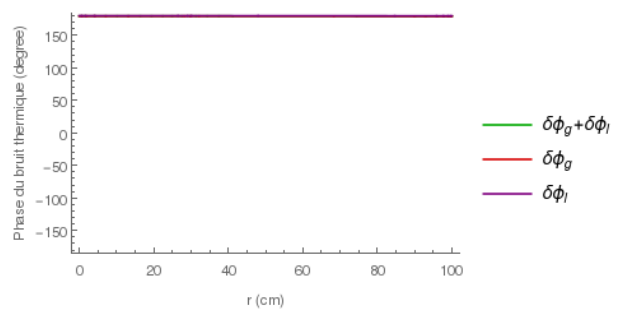
(a) Phase du bruit rapide à 0,01 Hz.



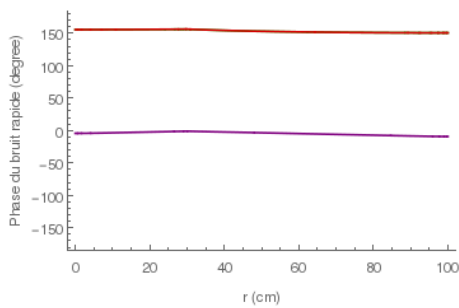
(b) Phase du bruit thermique à 0,01 Hz.



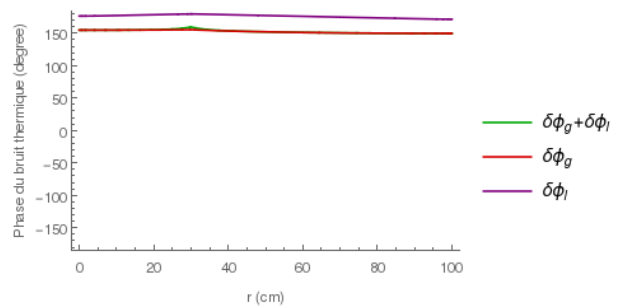
(c) Phase du bruit rapide à 1 Hz.



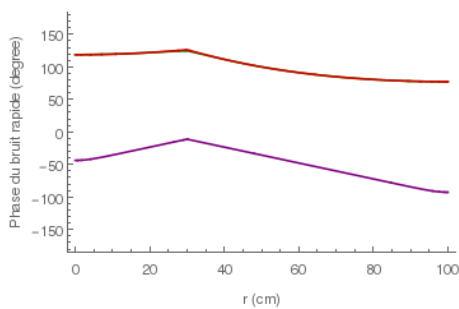
(d) Phase du bruit thermique à 1 Hz.



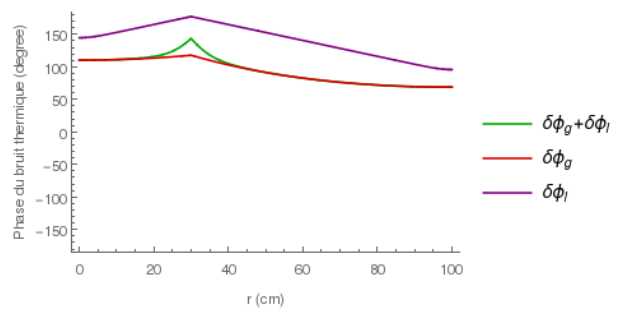
(e) Phase du bruit rapide à 100 Hz.



(f) Phase du bruit thermique à 100 Hz.



(g) Phase du bruit rapide à 1 000 Hz.



(h) Phase du bruit thermique à 1 000 Hz.

**FIGURE 2.6** – Phase du bruit rapide et thermique à 0,01 Hz, 1 Hz, 100 Hz et 1 000 Hz pour un petit cœur homogène ( $r_s = 30$  cm).

### 2.4.2 Analyse spectrale et décomposition du bruit

Comme précédemment, soit un milieu homogène critique à une dimension de longueur  $h$  avec des conditions de vide aux bords. Plaçons-nous cette fois-ci en théorie de la diffusion à un groupe d'énergie et un groupe de précurseurs. L'équation critique d'un tel système est la suivante :

$$\Delta\Phi_0(r) + B_0^2\Phi_0(r) = 0, \quad (2.77)$$

avec  $B_0^2 = \frac{\nu\Sigma_{0,f}/k - \Sigma_{0,a}}{D}$ . Nous laissons ici volontairement apparaître le facteur de multiplication effectif  $k = 1$ . Imposons une perturbation de la section efficace d'absorption. Au premier ordre, l'équation du bruit associée est donc :

$$\Delta\delta\Phi(r, \omega) + B^2(\omega)\delta\Phi(r, \omega) = \frac{\delta\Sigma_a(r, \omega)\Phi_0(r)}{D}, \quad (2.78)$$

avec  $B^2(\omega)$  défini par l'Eq. 2.47 de la section 2.3.1.

Nous allons voir, dans ce cas particulier, de quelle manière nous pouvons décomposer le bruit en une approximation de la composante globale et une approximation de la composante locale en le projetant sur la base des vecteurs propres du laplacien comme cela est détaillé dans [54]<sup>12</sup>. Nous insistons bien sur le fait qu'il s'agit d'une approximation et non d'une équivalence stricte aux définitions établies en section 2.4.1. Les composantes globales et locales sont en effet considérées dans la littérature comme étant définies par les termes issues des racines  $g(\omega)$  et  $l(\omega)$  en théorie de la diffusion à deux groupes d'énergie. Nous prenons ici la liberté de considérer que ce que nous allons détailler dans la suite de cette section peut s'interpréter comme une approximation de ces deux composantes en théorie de la diffusion à seulement un groupe d'énergie.

#### Décomposition du bruit

Posons  $\Phi_n$  le  $n$ -ième vecteur propre du laplacien associé à la valeur propre<sup>13</sup>  $B_n^2 = \frac{\nu\Sigma_{0,f}/k_n - \Sigma_{0,a}}{D}$ , autrement dit  $\Phi_n$  vérifie :

$$\Delta\Phi_n(r) + B_n^2\Phi_n(r) = 0. \quad (2.79)$$

Sous les conditions de Dirichlet, c'est-à-dire en supposant le flux nul aux limites du système, l'ensemble des vecteurs propres du laplacien forment une base hilbertienne de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  [5, 131]<sup>14</sup>. Par ailleurs, le flux d'équilibre  $\Phi_0$  constitue bien le premier vecteur propre de cette base associé à la valeur propre  $B_0^2$ , et ainsi  $k_0 = k$  correspond bien au facteur de multiplication effectif. Dans ce cas particulier, il est aussi prouvé que la suite des valeurs propres  $(B_n^2)_{n \geq 0}$  est réelle, strictement positive et croissante, et qu'ainsi  $0 < B_0^2 \leq B_1^2 \leq B_2^2 \leq \dots \leq B_n^2 \leq \dots$  soit  $0 < 1/k_0 \leq 1/k_1 \leq 1/k_2 \leq \dots \leq 1/k_n \leq \dots$

Décomposons  $\delta\Phi$  sur cette base :

$$\delta\Phi(r, \omega) = \sum_{n \geq 0} a_n(\omega)\Phi_n(r), \quad (2.80)$$

avec  $a_n$  des coefficients à déterminer. À partir des équations 2.78, 2.79 et 2.80, nous aboutissons à :

$$-\sum_{n \geq 0} a_n(\omega)\nu\Sigma_{0,f} \left[ \left( \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_0} \right) + \frac{1}{G_0(\omega)} \right] \Phi_n(r) = \frac{\delta\Sigma_a(r, \omega)\Phi_0(r)}{D}. \quad (2.81)$$

Grâce à l'orthogonalité des vecteurs propres deux à deux, nous en déduisons :

$$a_n(\omega) = -\frac{\int \delta\Sigma_a(r, \omega)\Phi_0(r)\Phi_n(r)dr}{\nu\Sigma_{0,f} \left[ \left( \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_0} \right) + \frac{1}{G_0(\omega)} \right] \int \Phi_n^2(r)dr}, \quad (2.82)$$

et ainsi :

$$\delta\Phi(r, \omega) = \delta\rho_0(\omega)G_0(\omega)\Phi_0(r) + \sum_{n \geq 1} \frac{\delta\rho_n(\omega)}{\left( \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_0} \right) + \frac{1}{G_0(\omega)}} \Phi_n(r), \quad (2.83)$$

avec :

$$\delta\rho_n(\omega) = -\frac{\int \delta\Sigma_a(r, \omega)\Phi_0(r)\Phi_n(r)dr}{\nu\Sigma_{0,f} \int \Phi_n^2(r)dr}. \quad (2.84)$$

12. Cette projection sur la base des vecteurs propres du laplacien a par ailleurs été appliquée en premier lieu dans [155].

13. D'un point de vue strictement mathématique,  $\Phi_n$  est associé à la valeur propre  $-B_n^2$ .

14. Le lecteur intéressé pourra trouver toutes les justifications mathématiques au sujet la théorie spectrale de l'équation de transport en dimension infinie dans ces références, notamment la démonstration de la complétude de la base des vecteurs propres généralisés du calcul critique.



### Analyse du spectre du laplacien

Étudions dans un premier temps les valeurs propres  $(B_n^2)_{n \geq 0}$ . Puisque nous sommes dans un milieu homogène à une dimension, nous en déduisons facilement que les vecteurs propres  $\Phi_n$  sont, dans  $\mathbb{R}$ , simplement de la forme :

$$\Phi_n(r) = E_n \cos(B_n r) + F_n \sin(B_n r), \quad (2.85)$$

avec  $E_n$  et  $F_n$  des coefficients à déterminer selon les conditions aux limites du système. Nous avons imposé un flux nul aux frontières donc impérativement  $E_n \cos(B_n \times 0) = 0$  et  $F_n \sin(B_n h) = 0$ . Nous en déduisons que la composante cosinusoidale est éliminée et que les valeurs des  $(B_n^2)_{n \geq 0}$  sont <sup>15</sup> :

$$B_n^2 = \left( \frac{(n+1)\pi}{h} \right)^2. \quad (2.86)$$

Nous remarquons que la série ainsi définie est bien réelle, strictement positive et croissante. Pour tout  $n > 0$ , nous en déduisons ensuite :

$$\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_0} = \frac{D}{\nu \Sigma_{0,f}} \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 > 0. \quad (2.87)$$

Ainsi, plus  $n$  est grand, moins la  $n$ -ième composante de  $\delta\Phi$  va être importante comparé à la première ou à la deuxième composante. C'est pourquoi nous pouvons approximer  $\delta\Phi$  à ses deux premières composantes, c'est-à-dire :

$$\delta\Phi(r, \omega) \approx \underbrace{\delta\rho_0(\omega) G_0(\omega) \Phi_0(r)}_{\text{exemple d'approximation de la composante globale}} + \underbrace{\frac{\delta\rho_1(\omega)}{\left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_0} \right) + \frac{1}{G_0(\omega)}}}_{\text{exemple d'approximation de la composante locale}} \Phi_1(r). \quad (2.88)$$

De plus, nous avons, dans notre cas particulier,  $\Phi_0(r) = F_0 \sin(\frac{\pi}{h} r)$  et  $\Phi_1(r) = F_1 \sin(\frac{2\pi}{h} r)$ .

Comme attendu, le flux d'équilibre  $\Phi_0$  est positif et ne change pas de signe. Nous constatons que le deuxième vecteur propre  $\Phi_1$  change une fois de signe. Cette dernière constatation se vérifie sur des géométries complexes et fortement hétérogènes comme le montre les études menées dans [29] et [30] où les quinze premiers vecteurs propres et valeurs propres (voire plus dans certains cas) sont calculés grâce au code Monte Carlo MCNP. Au vu de ces études, nous pouvons estimer que le deuxième vecteur propre  $\Phi_1$  va toujours changer qu'une fois de signe sur toute la géométrie et que la deuxième valeur propre  $k_1$  va toujours être strictement positive et inférieure à  $k_0 = k$ . Ces deux références montrent aussi une autre tendance générale qui est que plus le système est couplé moins la deuxième valeur propre  $k_1$  va être proche de la première  $k_0$ .

Cette approximation des composantes globales et locales introduit les propriétés suivantes :

- $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_0(\omega) = +\infty$  donc la composante globale a tendance à dominer à basses fréquences,
- $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_0} \right) = +\infty$  donc la composante globale a tendance à dominer pour les petits systèmes (ou les systèmes très couplés),
- $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_0} \right) = 0$  donc la composante locale a tendance à dominer localement pour les grands systèmes (ou les systèmes peu couplés),
- si la perturbation est homogène ou symétrique, c'est-dire si  $\int \delta\Sigma_a(r, \omega) \Phi_0(r) \Phi_1(r) dr = 0$ , alors la composante globale a tendance à dominer,
- si la perturbation est antisymétrique, c'est-dire si  $\int \delta\Sigma_a(r, \omega) \Phi_0^2(r) dr = 0$ , alors la composante locale a tendance à dominer.

15. Pour mémoire, lorsque le réacteur, approximé à une pile nue homogène, est critique, le laplacien-matière  $B_0^2$  est égal au laplacien-géométrique  $(\pi/h)^2$  [134].

### 2.4.3 Propriétés générales des composantes globales et locales

L'étude des composantes globales et locales menée dans les deux sections précédentes nous permet de lister les propriétés générales suivantes :

- plus le système est grand et/ou plus la fréquence augmente, plus la composante globale s'éloigne du terme réacteur point (c'est-à-dire moins elle est proportionnelle au flux d'équilibre),
- plus le système est petit (ou très couplé) et/ou plus la fréquence diminue, plus la composante globale va avoir tendance à dominer,
- plus le système est grand (ou peu couplé) et/ou plus la fréquence augmente, plus la composante locale va être localement visible autour de la perturbation en particulier pour les groupes thermiques,
- la composante locale affecte davantage les groupes thermiques que les groupes rapides<sup>16</sup>,
- l'amplitude des composantes globales et locales et donc du bruit diminuent au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Il existe une dernière propriété générale détaillée dans [17] qui mentionne que la composante globale devrait être plus affectée par les termes d'ordres supérieurs du bruit que la composante locale, c'est-à-dire que la composante globale est plus sensible à la théorie linéaire ( $\delta\Sigma\delta\Phi$  négligé) que ne l'est la composante locale.

## 2.5 Résumé du chapitre

Au cours de ce chapitre théorique, nous avons détaillé les points suivants :

- **les équations du bruit neutronique** : les équations linéaires du bruit neutronique sont issues de la linéarisation et de la transformée de Fourier de l'équation de Boltzmann cinétique perturbée autour de l'état d'équilibre du cœur en suivant l'hypothèse des petites perturbations et en prenant en compte le couplage avec les équations des précurseurs. L'équation du bruit neutronique est donc une équation à source complexe dans le domaine fréquentiel. L'approximation de la diffusion appliquée au bruit neutronique repose sur trois grandes hypothèses : la loi de Fick est appliquée, la dérivée temporelle du courant est considérée comme négligeable et les coefficients de diffusion sont considérés comme constants. Nous avons introduit l'approximation adiabatique qui consiste à approximer le flux total de la source de bruit non pas par le flux d'équilibre comme dans la théorie linéaire classique, mais par un flux d'équilibre défini par l'approximation adiabatique, c'est-à-dire vérifiant l'équation critique dans lequel le système est défini par les valeurs momentanées de toutes les sections efficaces à un temps  $t$  de la perturbation.
- **l'introduction d'un nouvel état d'équilibre** : nous avons mis en place un nouvel état d'équilibre qui nous permet de minimiser le bruit et de rendre plus robuste la théorie générale classique lorsque la moyenne temporelle de la source de bruit est non nulle. En effet, la théorie classique est mise à mal lorsque la moyenne de la source de bruit périodique est non nulle car, dans ce cas, l'existence d'une solution périodique aux équations du bruit neutronique n'est pas triviale. Afin de nous affranchir de ce problème, nous avons introduit un nouvel état d'équilibre qui nous permet d'annuler la moyenne temporelle de la source de bruit. En théorie linéaire, ce nouvel opérateur d'équilibre est simplement défini comme étant la moyenne temporelle de l'opérateur cinétique. Ce nouvel état d'équilibre est ainsi une façon de modéliser l'action des barres de commande ou des contre-réactions qui, dans un réacteur, annule automatiquement la moyenne temporelle de la réactivité ajoutée par les perturbations. Nous avons en outre développé ce nouvel état d'équilibre dans le cadre de l'approximation adiabatique et de la théorie non linéaire.
- **les résolutions analytiques** : de nombreuses études reposent sur des résolutions analytiques ou semi-analytiques des équations du bruit. Ces méthodes sont principalement basées sur l'utilisation des fonctions de Green, directes ou adjointes, en milieu homogène ou dans des systèmes simples peu hétérogènes. Une variante des approximations de la cinétique a aussi vu le jour et permet, encore aujourd'hui, de mener à bien les premières analyses qualitatives.
- **les composantes globales et locales** : le bruit neutronique est usuellement séparé en une composante globale et une composante locale. La composante globale varie lentement en espace, a une relaxation spatiale lente et s'accompagne d'une phase spatiale constante ou variant lentement. La composante locale varie rapidement en espace, a une relaxation spatiale rapide et peut s'accompagner, selon la perturbation, d'un ou de plusieurs déphasages en espace. Les principales propriétés de ces deux composantes ont été détaillées.

16. Cette propriété vient en partie du fait que le libre parcours moyen des neutrons thermiques est plus faible que celui des neutrons rapides.



# Méthodes de résolution déterministe

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Implémentations numériques</b>	<b>49</b>
3.1.1	Schéma numérique général	49
3.1.2	La maquette fil	50
3.1.3	Le code de transport APOLLO3®	51
<b>3.2</b>	<b>Vérification &amp; Validation</b>	<b>53</b>
3.2.1	Systèmes à une dimension (maquette fil)	53
3.2.2	Systèmes à deux dimensions (APOLLO3®)	57
3.2.3	Systèmes à trois dimensions (APOLLO3®)	60
<b>3.3</b>	<b>Études d'oscillations des sections efficaces</b>	<b>61</b>
3.3.1	Cœur à une dimension (maquette fil)	62
3.3.2	Cœur à deux dimensions (APOLLO3®)	64
3.3.3	Cœur à trois dimensions (APOLLO3®)	71
<b>3.4</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>76</b>

Ce chapitre porte sur les méthodes de résolution déterministe des équations du bruit neutronique que nous avons mises en place au cours de nos travaux. Les méthodes de résolution stochastique seront abordées au chapitre suivant. Nous présenterons, dans un premier temps, le schéma numérique général que nous avons adopté et implémenté dans la maquette dite « fil » et dans l'un des solveurs réseaux du code de transport déterministe APOLLO3®. Nous détaillerons, dans un second temps, quelques tests de vérification et de validation de ces développements par comparaison avec des résultats analytiques. Puis, dans un troisième et dernier temps, nous conclurons ce chapitre par une première étude de sources de bruit en analysant des oscillations sinusoïdales des sections efficaces à l'aide des solveurs de bruit neutronique développés dans la maquette fil et dans le code déterministe APOLLO3®. Les points clés abordés au cours de ce chapitre seront résumés en fin de celui-ci.

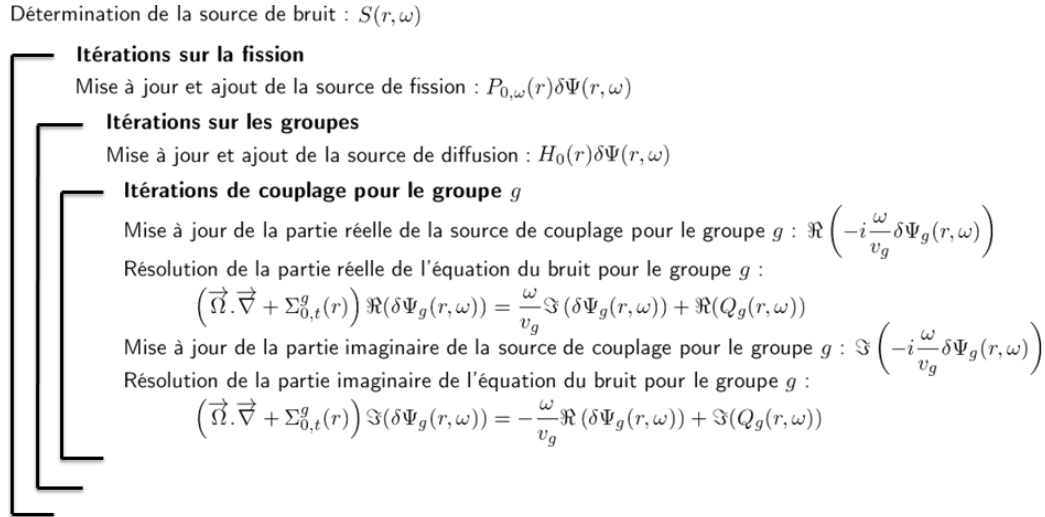
## 3.1 Implémentations numériques

Après avoir présenté le schéma numérique général employé, nous détaillerons son implémentation dans la maquette fil et dans le solveur réseau IDT du code déterministe APOLLO3®.

### 3.1.1 Schéma numérique général

L'un des objectifs de cette thèse est de mettre en place des outils de calculs numériques résolvant les équations du bruit neutronique directement dans le code de transport déterministe multi-filière APOLLO3® en cours de développement au CEA [64, 143]. Il a donc fallu s'adapter à l'architecture et aux méthodes numériques implémentées dans ce code de transport. Ce dernier résolvant entre autres l'équation de Boltzmann stationnaire dans le domaine réel, seules des quantités purement réelles sont manipulées. Contrairement aux codes déterministes CORE SIM ou NOI-SIM (voir section 1.4.1) qui manipulent directement des nombres complexes, nous n'avons pas cette possibilité avec APOLLO3®. Nous aurions éventuellement pu implémenter un solveur de bruit manipulant directement des variables complexes mais cela aurait compliqué le processus de maintenance dans le temps du solveur car ce dernier aurait été le

seul à manipuler des variables complexes. Nous aurions aussi techniquement pu modifier l'ensemble du solveur réseau IDT pour qu'il manipule directement des variables complexes et non plus seulement réelles. Cela aurait été faisable quoique fastidieux à mettre en place. D'autre part, il n'est pas sûr que les performances des calculs stationnaires n'en auraient pas pâti. Nous sommes donc partis du principe que nous devons ne manipuler que des quantités réelles. C'est pourquoi nous avons opté pour le schéma de résolution général décrit en Fig. 3.1.



**FIGURE 3.1** – Schéma numérique général de résolution déterministe des équations du bruit neutronique dans le cadre de la théorie du transport (le cas particulier de la théorie de la diffusion s'en déduit directement). Le terme  $Q_g$  correspond à toutes les sources de bruit, de fission et de diffusion du groupe  $g$ .

Nous avons donc adopté un schéma numérique calqué sur le schéma classique du calcul à source (il s'agit donc d'un algorithme de point fixe) en ajoutant une boucle d'itérations supplémentaire au niveau de la résolution à un groupe afin d'itérer entre la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation du bruit. Notons que cette boucle d'itérations suit la méthode de Gauss-Seidel et non de Jacobi, c'est-à-dire que la mise à jour des sources de couplage en  $i\frac{\omega}{v}$  se fait avant chaque résolution de la partie réelle ou de la partie imaginaire des équations [111]. Bien entendu, tout calcul de bruit doit être précédé de la détermination de l'état d'équilibre en résolvant l'équation de Boltzmann stationnaire (et ce même si l'on choisit une source de bruit indépendante du flux d'équilibre car il est indispensable de connaître la valeur propre de l'état d'équilibre). Ce schéma numérique simple a l'avantage de pouvoir s'implémenter dans n'importe quel code déterministe puisque les solveurs à l'échelle du groupe d'énergie peuvent être utilisés tels quels sans aucune modification (à la condition près qu'ils acceptent des sources et des flux négatifs).

Nous allons brièvement décrire, dans les deux sections suivantes, l'implémentation de ce schéma général et les développements annexes que nous avons mis en place dans la maquette dite « fil » et dans le code de transport APOLLO3®.

### 3.1.2 La maquette fil

Nous avons commencé nos travaux sur le bruit neutronique en implémentant la résolution des équations du bruit dans une maquette très simple à une dimension où les particules ne peuvent aller que vers la droite ou vers la gauche. Ce type de géométrie est connu sous le nom de géométrie « fil » (« rod geometry » en anglais) [70, 157]. En théorie de la diffusion pour les calculs stationnaires, la géométrie fil est strictement équivalente à la géométrie de type « plaque infinie » (« slab geometry » en anglais). Cette maquette fil<sup>1</sup>, codée en Fortran, a été développée pour des géométries composées d'un ou de plusieurs milieux homogènes avec trois conditions aux limites différentes possibles : vide, réflexion, albédo. Elle peut résoudre des problèmes à source fixe (avec ou sans fission), critique et de bruit en théorie de la diffusion et du transport<sup>2</sup> à plusieurs groupes d'énergie et plusieurs groupes de précurseurs. Les méthodes déterministe et stochastique ont été implémentées pour tous les types de problèmes que nous venons de citer (nous aborderons en détail au chapitre 4 les méthodes de résolution stochastique des équations du bruit). Cette maquette fil prend aussi en charge les anisotropies de type  $P_1$ . Toute la partie déterministe de cette maquette fil est basée sur la méthode classique des différences finies.

1. Précisons que cette maquette fil s'est basée sur une maquette déjà existante qui ne traitait que des problèmes stationnaires à source ou critique à un seul groupe d'énergie en diffusion et en transport (sachant que le solveur stochastique ne résolvait initialement que des problèmes à source fixe sans fission).

2. Attention à ne pas confondre le transport « fil » où les particules ne peuvent aller que vers la droite ou vers la gauche, avec le transport à une dimension tel qu'il est classiquement défini dans les codes de transport industriels.

Nous avons aussi employé la librairie d'algèbre linéaire LAPACK [97] pour implémenter un module déterminant, en théorie de la diffusion, tous les vecteurs propres et toutes les valeurs propres de l'opérateur de Boltzmann stationnaire  $L_0$  et de son opérateur adjoint  $L_0^*$ , mais aussi de l'opérateur  $L_{0,\omega}$  et de son adjoint  $L_{0,\omega}^*$  pour toute fréquence  $\omega$ . Ce module offre en outre la possibilité de calculer les données cinétiques effectives pondérées par le flux adjoint en théorie de la diffusion ce qui nous permet de déterminer la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  du système étudié (voir section 2.3.1).

### Cas particulier de la solution exacte

La résolution des équations non linéaires du bruit (voir section 2.2.2) a été implémentée pour la théorie de la diffusion uniquement. La méthode de résolution choisie est détaillée en Fig. 3.2. Afin d'accélérer les itérations sur le produit de convolution, nous y avons ajouté une surrelaxation successive [111].

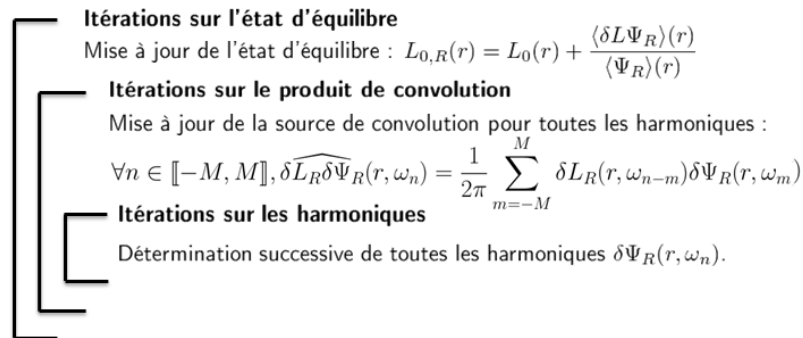


FIGURE 3.2 – Schéma de résolution des équations non linéaires du bruit en théorie de la diffusion implémenté dans la maquette fil. L'entier  $M$  désigne l'amplitude du produit de convolution.

### 3.1.3 Le code de transport APOLLO3®

Le code de transport déterministe APOLLO3®, actuellement en cours de développement au CEA, est un code multi-filière de calcul neutronique 3D. Ce code nouvelle génération réunit au sein d'un même code déterministe des solveurs cœurs<sup>3</sup> issus du code cœur CRONOS2 (MINOS et MINARET, ce dernier remplaçant le solveur PRIAM) et des solveurs réseaux<sup>4</sup> issus du code réseau APOLLO2 (IDT et TDT) [87, 88, 140, 141]. Étant un code multi-filière, APOLLO3® a aussi vocation à succéder au code déterministe ERANOS dédié à l'étude des réacteurs rapides en intégrant certaines de ses caractéristiques comme par exemple la méthode des sous-groupes de son solveur réseau ECCO pour l'autoprotection [136, 137].

Les principales caractéristiques des quatre solveurs d'APOLLO3® sont les suivantes :

- MINOS : solveur 2D/3D de diffusion multigroupe et de transport simplifié multigroupe  $SP_n$  basé sur la méthode des éléments finis de Raviart-Thomas permettant le traitement de géométries régulières cartésiennes ou hexagonales [13] ;
- MINARET : solveur 2D/3D de transport multigroupe  $S_n$  (ordonnées discrètes) et  $SP_n$  basé sur les éléments finis discontinus de Galerkin permettant le traitement de géométries avec maillage non structuré conforme [107] ;
- TDT : solveur 1D/2D/3D de transport multigroupe  $S_n$  basé sur la méthode des caractéristiques longues (MOC pour « method of characteristics ») ou sur la méthode des probabilités de collision ( $P_{ij}$  1D/2D) permettant le traitement de géométries générales non structurées [104] ;
- IDT : solveur 1D/2D/3D de transport multigroupe  $S_n$  basé soit sur la méthode des différences finies, soit sur la méthode nodale, soit sur la méthode des caractéristiques courtes (MOSC pour « method of short characteristics ») permettant le traitement de géométries homogènes cartésiennes structurées ou hétérogènes [105, 165]. Un solveur de diffusion nodale multigroupe a très récemment été intégré au solveur IDT [42].

Face à cette grande diversité de solveurs et aux contraintes de temps, nous avons dû faire un choix : dans quel solveur implémenter le schéma de résolution détaillé en Fig. 3.1 ? Les problèmes de bruit neutronique ont à la fois des « aspects réseaux » puisqu'il s'agit d'étudier des perturbations locales, et des « aspects cœurs » puisque le but est de déterminer l'impact de ces perturbations locales sur tout le cœur. Le solveur IDT offre un bon compromis en ayant

3. Un calcul dit « réseau » est un calcul détaillé en espace et en énergie d'un motif élémentaire du cœur (assemblages, crayons combustibles...).

4. Un calcul dit « cœur » consiste à effectuer la résolution de l'équation de transport en remplaçant les motifs élémentaires hétérogènes du cœur par des pâtes homogènes élémentaires obtenues par le calcul réseau.

les principales caractéristiques d'un solveur cœur (même s'il est usuellement identifié comme étant un solveur réseau) et en ayant la possibilité de mener à bien des calculs en théorie du transport et de la diffusion. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler exclusivement sur celui-ci. Il sera bien sûr intéressant d'étendre à terme le développement aux autres solveurs, notamment à l'un des solveurs cœurs.

Nous avons ainsi adapté le solveur de transport 2D et le solveur de diffusion nodale 2D et 3D d'IDT pour des géométries homogènes cartésiennes structurées uniquement. Les trois « sous » solveurs principaux d'IDT (transport pour les géométries homogènes, transport pour les géométries hétérogènes et diffusion nodale) ont l'avantage de partager les boucles d'itérations sur la fission et sur les groupes. La distinction entre les trois solveurs ne se fait donc qu'à l'échelle du groupe d'énergie. De plus, pour le transport, la distinction entre la méthode des différences finies, nodale et des caractéristiques courtes ne s'effectue qu'au moment du balayage par direction. Tout ceci facilite donc l'implémentation du schéma de résolution détaillé en Fig. 3.1. Néanmoins, compte tenu de la complexité du code et des temps de calcul, seule la résolution des équations linéaires du bruit a été implémentée. Pour les mêmes raisons, l'approximation adiabatique décrite en section 2.1.3 a été uniquement implémentée dans la maquette fil.

Outre l'adaptation des solveurs, il a aussi fallu intégrer la prise en compte des données cinétiques ainsi que la lecture des bibliothèques associées (ces données n'étaient pas encore prises en charge par la partie réseau d'APOLLO3®).

### Le solveur de transport homogène d'IDT

Seul le solveur 2D du solveur de transport homogène d'IDT a été modifié pour intégrer le schéma général de résolution des équations du bruit neutronique. Ce solveur est basé soit sur la méthode des différences finies, soit sur la méthode nodale, soit sur la méthode des caractéristiques courtes. Dans l'ensemble de nos études, nous avons choisi de n'utiliser que la méthode des caractéristiques courtes. Les deux autres méthodes (différences finies et nodale) sont opérationnelles pour la simulation du bruit mais nous ne les avons pas employées dans nos études. La méthode des caractéristiques courtes permet la résolution exacte de la transmission au travers de régions homogènes. Dans le cas de mailles cartésiennes homogènes, la transmission dans une maille peut se calculer analytiquement (la méthode a été adaptée au cas des cellules cartésiennes hétérogènes mais nous n'avons pas étendu nos développements à cette partie du solveur). Le domaine complet est résolu par un balayage de l'ensemble des directions angulaires (déterminées selon l'ordre  $S_n$  des ordonnées discrètes) en calculant successivement le flux des différentes régions grâce à la continuité du flux à l'interface entre les mailles. Sans rentrer dans les détails, précisons qu'il existe trois degrés d'approximation spatiale pour le flux volumique : constant, linéaire (de la forme  $a_0 + a_1x + a_2y$ ) ou bilinéaire (de la forme  $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ ). Sauf mention contraire, nous utiliserons dans nos études l'approximation linéaire et une discrétisation angulaire  $S_n$  d'ordre 8.

### Le solveur de diffusion nodale d'IDT

Afin de comparer la théorie du transport et la théorie de la diffusion dans le cadre du bruit, nous avons implémenté le schéma général de résolution des équations du bruit dans les solveurs 2D et 3D du solveur de diffusion nodale d'IDT. Ce solveur de diffusion est basé sur la méthode de l'expansion nodale (« nodal expansion method » en anglais). L'un des avantages de cette méthode est que l'équation de la diffusion à trois dimensions (resp. deux dimensions) est remplacée par trois (resp. deux) équations couplées de la diffusion à une dimension. Cela nécessite néanmoins l'introduction de certaines approximations sur la forme des fuites transverses et sur la forme du flux dans chacune des mailles. Le flux à une dimension est en effet approximé par une fonction polynomiale soit d'ordre 2 (approximation parabolique de la forme  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ ) soit d'ordre 4 (approximation quartique de la forme  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ). Étant plus précise, nous utiliserons dans nos études l'approximation quartique.

### Les parties réelles et imaginaires

Comme nous l'avons signalé, nous ne manipulons que des nombres réels. Concrètement, pour décomposer les parties réelles et imaginaires des différents tableaux ou vecteurs manipulés, nous avons simplement doublé le nombre  $n_c$  de composantes spatiales correspondant très exactement au degré d'approximation spatiale du flux volumique (3 pour les caractéristiques linéaires en transport par exemple ou 5 pour l'approximation quartique en diffusion). Ainsi, les  $n_c$  premières composantes correspondent à la partie réelle et les  $n_c$  suivantes à la partie imaginaire.

### Les accélérations

Afin d'accélérer les simulations de bruit neutronique, nous avons adapté certaines des accélérations disponibles dans le solveur IDT : l'accélération de Chebyshev<sup>5</sup> pour les itérations sur la fission et une méthode de rétablissement du bilan par groupe<sup>6</sup> (« rebalancing ») pour les itérations sur les groupes [19, 142]. Pour les accélérations des itéra-

5. Très grossièrement, l'accélération de Chebyshev consiste à définir un nouvel itéré comme une combinaison linéaire des deux itérés précédents avec des coefficients adéquats obtenus à l'aide des polynômes de Chebyshev.

6. Le rétablissement du bilan par groupe se fait en multipliant les composantes du flux par un paramètre dépendant du groupe qui assure que le bilan donné par l'équation de conservation sur tout le domaine géométrique est respecté dans chaque groupe thermique.

tions internes du solveur de transport, nous avons choisi d'utiliser l'accélération synthétique BPA<sup>7</sup> (pour « Boundary Projection Acceleration ») car, parmi celles disponibles dans le solveur IDT, c'est la méthode d'accélération des internes la plus robuste [3, 19]. Pour cette dernière, aucune modification n'a été nécessaire. Concernant l'accélération de Chebychev, nous l'appliquons séparément sur la partie réelle et la partie imaginaire de l'intégrale de fission. Précisons que, par souci de simplicité et de robustesse, nous avons choisi d'appliquer le test de convergence sur l'intégrale de fission uniquement sur sa partie prompte (sa partie retardée contient en effet un très grand nombre de termes de valeurs particulièrement faibles). Concernant la méthode de rétablissement du bilan par groupe, l'équation bilan a dû être adaptée pour prendre en compte les nouvelles sources de bruit mais le déroulement de la méthode reste parfaitement identique au cas stationnaire.

Précisons que nous n'avons pas implémenté de méthodes d'accélération au niveau de l'itération entre la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation du bruit à l'échelle du groupe. Il sera à l'avenir intéressant d'étudier la possibilité d'en ajouter une afin de rendre le schéma itératif encore plus efficace<sup>8</sup>.

## 3.2 Vérification & Validation

Il n'existe pas de benchmarks pour les calculs de bruit neutronique. Nous n'avons à notre disposition que quelques résultats analytiques simples en théorie de la diffusion uniquement pour vérifier et valider nos développements. Nous allons présenter, dans les trois sections suivantes, plusieurs comparaisons entre des résultats analytiques et nos calculs numériques obtenus avec la maquette fil et avec le code APOLLO3®. Nous allons notamment comparer nos résultats numériques avec des résultats analytiques dans un milieu homogène infini à une, deux et trois dimensions, dans un cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur à une et deux dimensions et enfin dans un cylindre homogène infini à trois dimensions. L'ensemble de ces systèmes est constitué de géométries homogènes cartésiennes structurées.

### 3.2.1 Systèmes à une dimension (maquette fil)

Nous allons comparer, dans cette section, les résultats analytiques à une dimension et nos résultats numériques obtenus avec la maquette fil pour un milieu homogène infini puis pour un cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur. Dans les deux cas, nous travaillons à deux groupes d'énergie et un groupe de précurseurs, sans upscattering, sans spectre thermique et avec un scattering isotrope. Tous les résultats analytiques sont calculés en théorie de la diffusion uniquement. Nos résultats numériques avec la maquette fil sont calculés en théorie de la diffusion et/ou en théorie du transport.

Rappelons que la théorie de la diffusion en bruit neutronique repose sur trois grandes approximations : l'application de la loi de Fick, la dérivée temporelle du courant est considérée comme négligeable et les coefficients de diffusion sont considérés comme constants (voir section 2.1.2).

#### Milieu homogène infini

Pour traiter le cas très simple d'un milieu homogène infini, nous avons repris les données nucléaires de [162] (données que nous détaillons en fin de l'annexe C.2). Le facteur de multiplication infini du système est égal à  $k_\infty = 1,116201$ . Nous choisissons d'imposer une source de bruit isotrope, constante et égale à -1 pour le groupe thermique quelle que soit la fréquence. La solution analytique en théorie de la diffusion se déduit alors simplement de l'équation du bruit suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1(\omega) & -\nu\Sigma_{f,2}(\omega) \\ -\Sigma_{s0}^{1\rightarrow 2} & \Sigma_2(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\Phi_1(\omega) \\ \delta\Phi_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

avec :

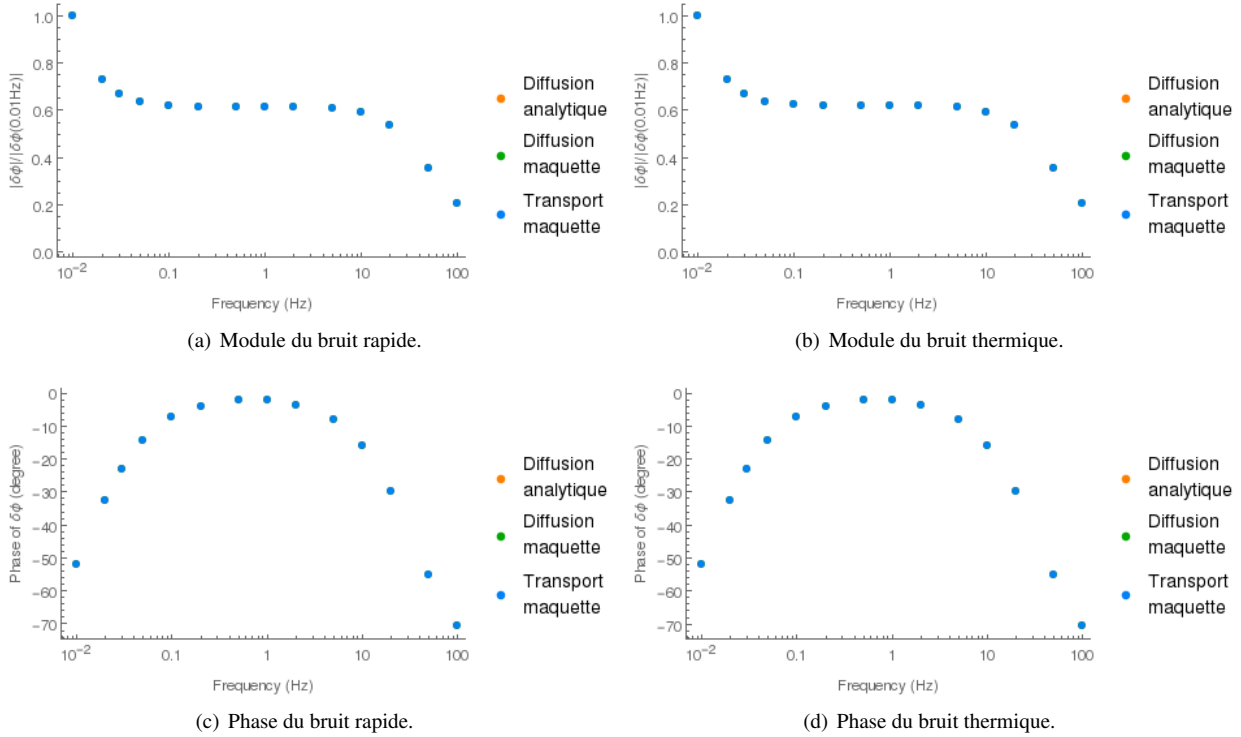
- $\nu\Sigma_{f,1}(\omega) = \frac{\nu_1\Sigma_{0,f}^1}{k_\infty} \left(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega}\right)$  et  $\nu\Sigma_{f,2}(\omega) = \frac{\nu_2\Sigma_{0,f}^2}{k_\infty} \left(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega}\right)$ ,
- $\Sigma_1(\omega) = \Sigma_{0,a}^1 + \Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2} + \frac{i\omega}{v_1} - \nu\Sigma_{f,1}(\omega)$  et  $\Sigma_2(\omega) = \Sigma_{0,a}^2 + \frac{i\omega}{v_2}$ .

7. Les accélérations synthétiques des itérations internes sont basées sur une estimation de l'erreur calculée à l'aide d'un opérateur de transport approché. Dans le processus itératif, on utilise une approximation d'un ordre inférieur de l'équation du transport pour corriger la solution après chaque itération interne. Cette équation peut être soit l'équation de la diffusion, soit l'équation du transport  $S_n$  avec un ordre d'approximation angulaire inférieur. Dans le cas de l'accélération BPA, il s'agit d'une équation du transport d'un ordre d'approximation angulaire inférieur obtenue en faisant la projection du flux angulaire aux bords des mailles.

8. Nous pouvons citer à ce propos [56, 110] où des méthodes d'accélération des équations déterministes du transport en milieu stochastique sont développées dans le cas particulier d'un milieu composé de deux matériaux différents aléatoirement ordonnés. Ces méthodes pourraient être applicables au cas des équations couplées du bruit à l'échelle du groupe car le problème fait intervenir des équations couplées ayant des similitudes avec celles du bruit.



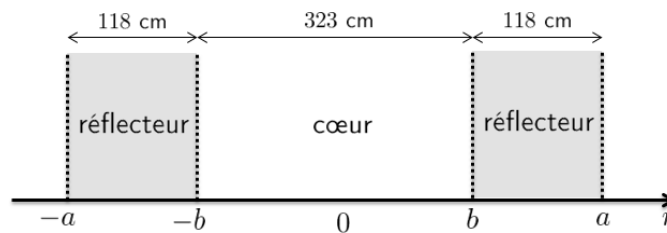
La Figure 3.3 présente les résultats analytiques et les résultats numériques en théorie de la diffusion et du transport en fonction de la fréquence. Nous constatons une très bonne cohérence entre l'analytique et le numérique. Comme attendu pour un tel système, le bruit suit, à un facteur de normalisation près, la fonction de transfert fondamentale  $G_0$ . Compte tenu de la très faible différence entre la théorie de la diffusion et la théorie du transport, nous pouvons conclure que, dans ce système très simple à une dimension, les approximations de la théorie de la diffusion en bruit neutronique sont parfaitement viables.



**FIGURE 3.3** – Module et phase du bruit rapide et thermique en milieu homogène infini à une dimension en fonction de la fréquence. Les résultats analytiques et numériques sont tous superposés (résultats numériques obtenus avec la maquette fil).

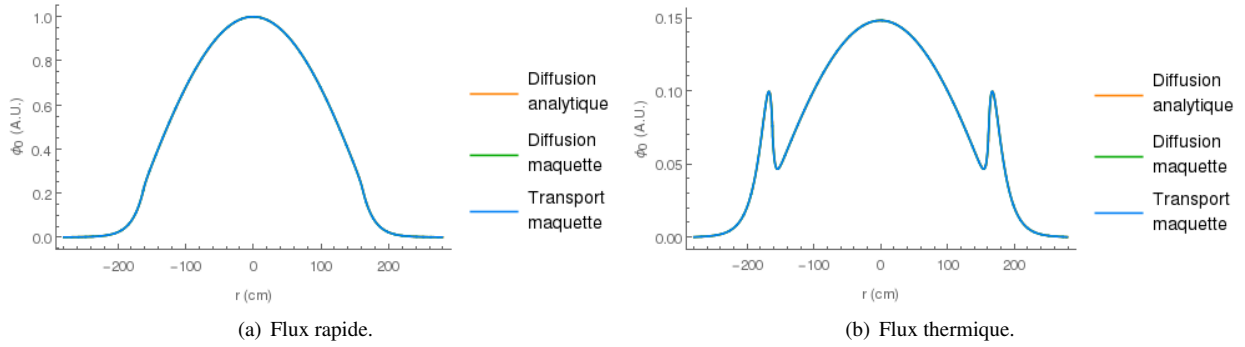
### Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur

Nous allons maintenant comparer les résultats analytiques et numériques, toujours avec la maquette fil, dans le cas d'un cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur. Nous avons repris pour cela les résultats analytiques exposés dans [45, 149] que nous détaillons en annexe C.1 (les données nucléaires employées y sont aussi précisées). La Figure 3.4 précise la géométrie du système et ses dimensions. Le facteur de multiplication effectif du système est  $k = 0,99733$  (valeur identique au pcm près entre le calcul analytique et le calcul numérique en théorie de la diffusion). La Figure 3.5 présente les flux rapide et thermique d'équilibre du système. Nous constatons une très bonne cohérence entre l'analytique en théorie de la diffusion et les résultats numériques en théorie de la diffusion et du transport (le problème traité est en effet principalement diffusif). La fonction de transfert fondamentale  $G_0$  du système étudié est celle détaillée en Fig. 2.1 du chapitre 2.



**FIGURE 3.4** – Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur.

Nous allons étudier deux sources de bruit différentes : une première isotrope pour un simple test et une seconde modélisant une vibration de la cuve de type shell mode (voir la section 1.3.1 pour la définition d'une vibration de type shell mode).



**FIGURE 3.5** – Flux d'équilibre du cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur. Les résultats analytiques et numériques sont tous superposés (résultats numériques obtenus avec la maquette fil). Les flux sont normalisés par la valeur en  $r = 0$  du flux rapide.

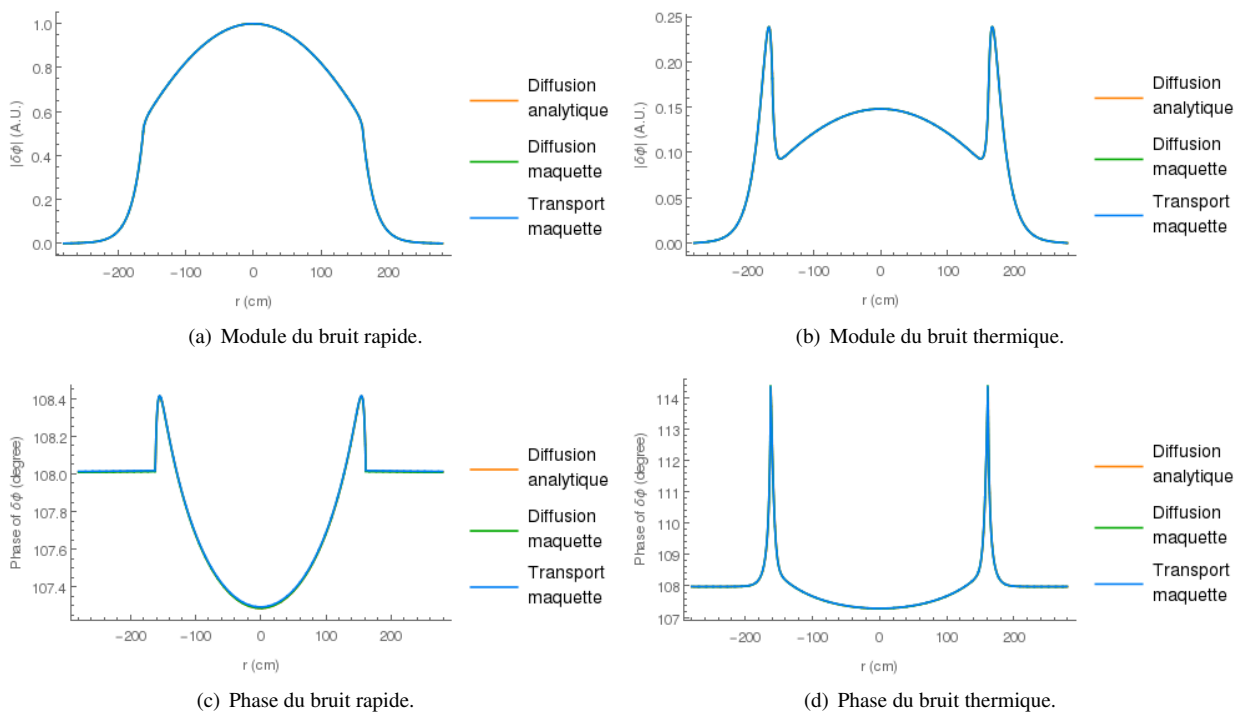
**Source isotrope** Définissons une source isotrope<sup>9</sup> aux frontières du cœur et du réflecteur aux points  $-b$  et  $b$  de la manière suivante :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad S_1(r, \omega) = \begin{cases} -1 + 5i & \text{si } r = \pm b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3.2)$$

et :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad S_2(r, \omega) = \begin{cases} -0,7 - 0,1i & \text{si } r = \pm b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3.3)$$

Analytiquement, la source est définie par deux Dirac en espace aux points  $-b$  et  $b$ . Numériquement, la source est définie sur deux petites mailles de taille 0,001 cm autour des points  $-b$  et  $b$ . La Figure 3.6 présente les résultats pour une source de fréquence 1 Hz. Nous constatons la très bonne cohérence entre les résultats analytiques et numériques. Les résultats en théorie de la diffusion et du transport sont pratiquement identiques. Cela implique donc que, dans le système étudié, les approximations de la théorie de la diffusion en bruit neutronique sont viables lorsque la source de bruit est identique pour les deux théories.



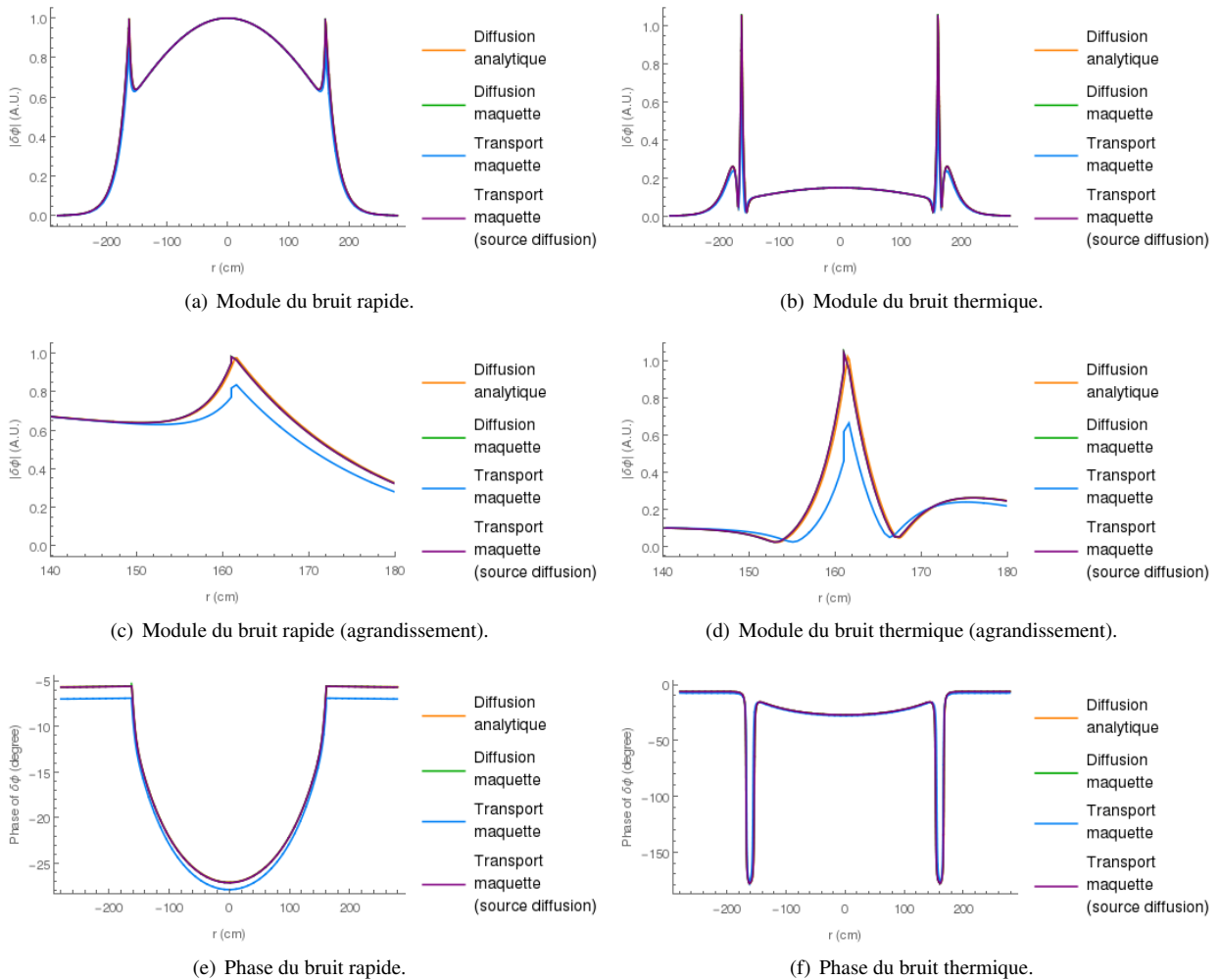
**FIGURE 3.6** – Module et phase du bruit rapide et thermique à 1 Hz engendré par une source isotrope dans le cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur. Les résultats analytiques et numériques sont tous superposés (résultats numériques obtenus avec la maquette fil). Les modules sont normalisés par la valeur en  $r = 0$  du bruit rapide.

9. Les valeurs des parties réelles et imaginaires de cette source isotrope ont été choisies arbitrairement.

**Vibration de type shell mode** Nous reprenons ici la source de bruit définie dans [45, 149]. Il s'agit d'une modélisation d'une vibration de la cuve de type shell mode en employant le modèle  $\epsilon/d$  (modèle analytique que nous détaillerons en section 5.1.2). Nous ne cherchons pas ici à étudier la pertinence d'une telle modélisation (cela sera fait au chapitre 5). Nous souhaitons simplement vérifier la cohérence des résultats de notre solveur de bruit neutronique avec les résultats analytiques. Sans entrer dans les détails, cette modélisation aboutit à définir les termes perturbés des sections efficaces de la manière suivante :

$$\delta\Sigma(r, t) = \epsilon(t)(\Sigma_{0,\text{cœur}} - \Sigma_{0,\text{réflecteur}})[\delta(r + b) + \delta(r - b)], \quad (3.4)$$

avec  $\epsilon(t)$  l'amplitude de la vibration. Supposons que la transformée de Fourier de  $\epsilon(t)$  soit simplement égale à  $\delta(\omega_0 - \omega)$  avec  $\omega_0$  la fréquence angulaire de la vibration, et imposons une fréquence de vibration de 20 Hz. Comme précédemment, la source est définie par deux Dirac en espace aux points  $-b$  et  $b$  pour le calcul analytique, et sur deux petites mailles de taille 0,001 cm autour des points  $-b$  et  $b$  pour le calcul numérique. La modélisation aboutissant à une source de bruit différente entre la théorie du transport et la théorie de la diffusion (avec notamment l'apparition d'une composante angulaire), nous allons, dans ce paragraphe, imposer deux sources de bruit différentes pour le transport : la première qui est la source de bruit issue de la théorie du transport (et qui est clairement détaillée par l'Eq. 2.12 du chapitre 2) et la seconde qui est la source de bruit issue de la théorie de la diffusion (et qui est clairement détaillée par l'Eq. 2.15 du chapitre 2). Cela nous permettra de différencier l'impact des approximations de la diffusion sur l'opérateur  $L_{0,\omega}$  et sur la source de bruit. Les résultats sont rassemblés en Fig. 3.7.



**FIGURE 3.7** – Module et phase du bruit rapide et thermique à 20 Hz engendré par une vibration de la cuve de type shell mode dans le cœur homogène à une dimension entouré d'un matériau réflecteur. Les courbes oranges, vertes et violettes sont toutes superposées (résultats numériques obtenus avec la maquette fil). Les modules sont normalisés par la valeur en  $r = 0$  du bruit rapide.

Nous constatons une nouvelle fois la très bonne cohérence entre les résultats analytiques et numériques en théorie de la diffusion. Concernant la théorie du transport, lorsque la source de bruit est identique à celle de la diffusion, les modules et les phases sont pratiquement identiques à ceux de la théorie de la diffusion. Ce n'est cependant pas le cas lorsqu'on impose la source de bruit issue de la théorie du transport. Ainsi, dans le système étudié, l'impact des approximations de la théorie de la diffusion est plus important et plus visible lorsque ces approximations sont appliquées à la source de bruit que lorsqu'elles sont appliquées à l'opérateur  $L_{0,\omega}$ .

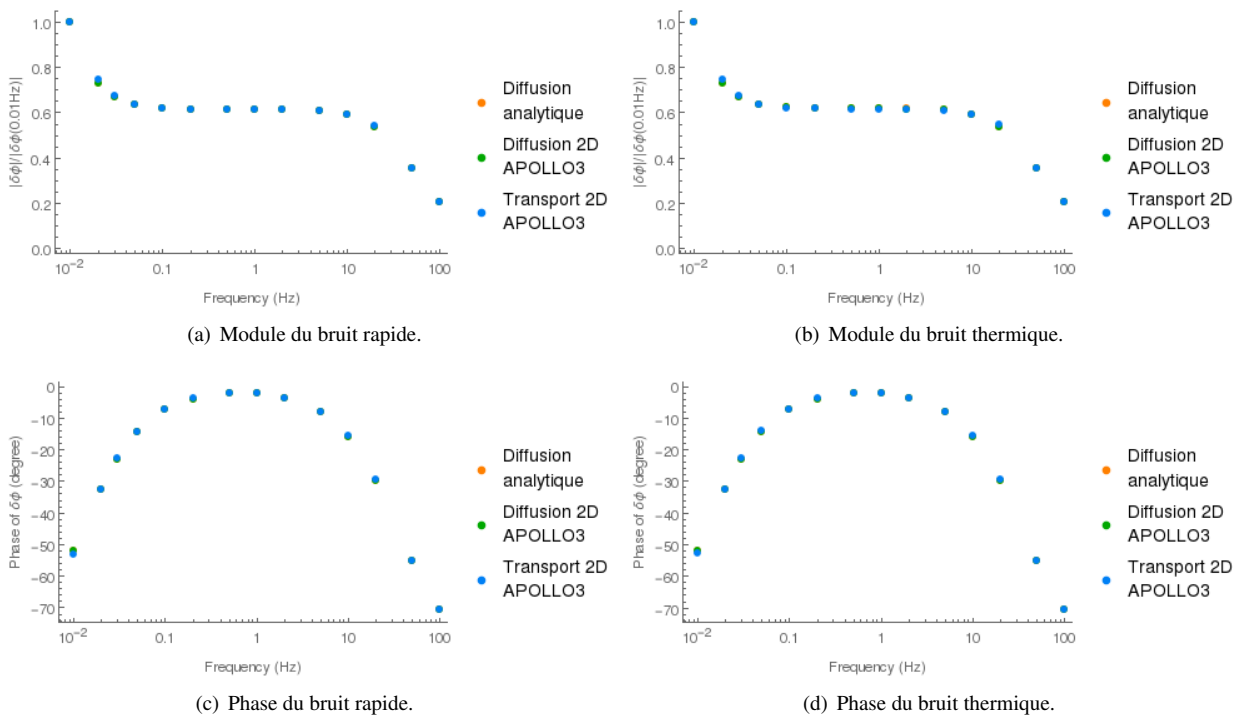
Ces diverses comparaisons entre des résultats analytiques et nos résultats numériques nous permettent ainsi de vérifier et de valider nos solveurs déterministes de bruit neutronique développés dans la maquette fil. Nous allons maintenant effectuer le même type de comparaisons avec le code APOLLO3<sup>®</sup> pour des systèmes à deux puis trois dimensions.

### 3.2.2 Systèmes à deux dimensions (APOLLO3<sup>®</sup>)

Nous allons reprendre exactement les mêmes systèmes définis à la section 3.2.1 en les généralisant au cas à deux dimensions afin de vérifier et de valider, dans une certaine mesure, les solveurs de transport et de diffusion résolvant les équations du bruit développés dans le solveur IDT d'APOLLO3<sup>®</sup>.

#### Milieu homogène infini

Tout comme à la section précédente, nous choisissons d'imposer une source de bruit isotrope, constante et égale à -1 pour le groupe thermique quelle que soit la fréquence. La Figure 3.8 présente les résultats analytiques et les résultats numériques en théorie de la diffusion et du transport à deux dimensions en fonction de la fréquence. Nous constatons une bonne cohérence entre l'analytique et le numérique<sup>10</sup>. Contrairement au cas à une dimension, nous distinguons tout de même un léger effet transport à basses fréquences quand bien même la source de bruit est identique entre le transport et la diffusion.



**FIGURE 3.8** – Module et phase du bruit rapide et thermique en milieu homogène infini à deux dimensions en fonction de la fréquence. Les résultats analytiques et numériques sont presque tous superposés (résultats numériques obtenus avec APOLLO3<sup>®</sup>).

10. Le solveur IDT n'ayant pas de boucle itérative sur les conditions aux limites pour le transport, la convergence a été délicate à obtenir pour les résultats en théorie du transport (et ce même pour le flux d'équilibre).

### Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur

Concernant la validation sur le cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur, nous avons choisi de n'étudier ici que le cas de la source isotrope définie en section 3.2.1. Rappelons que les résultats analytiques de ce système sont décrits en annexe C.1 et que, dans ce présent paragraphe, les coefficients de diffusion sont égaux à  $D_g = \frac{1}{3\Sigma_{0,t}}$  ce qui donne un facteur de multiplication effectif de  $k = 1,00455$  (valeur identique au pcm près entre le calcul analytique et le calcul numérique en théorie de la diffusion). Une géométrie fil étant strictement équivalente à une géométrie de type plaque infinie en théorie de la diffusion pour les calculs stationnaires, nous avons simplement imposé des conditions de réflexion dans la direction orthogonale à l'axe  $r$  pour construire notre géométrie à deux dimensions (voir Fig. 3.9 où le maillage choisi est aussi détaillé). Malgré une définition de la source de bruit différente, nous avons supposé que les résultats analytiques du bruit étaient très peu différents entre la géométrie fil et la géométrie plaque infinie en théorie de la diffusion. Nous avons donc pris la liberté de comparer directement le bruit issu du calcul analytique à une dimension et celui issu du calcul APOLLO3® à deux dimensions. Comme nous avons exploité la symétrie du problème, nous n'avons effectué les calculs numériques que sur une moitié de la géométrie. C'est pourquoi tous les résultats numériques présentés dans ce paragraphe couvrent uniquement la partie droite de la géométrie ( $r \geq 0$ ).

La Figure 3.10 présente les flux rapide et thermique d'équilibre du système. Au vu des comparaisons des flux d'équilibre entre la diffusion et le transport, nous notons que le système est principalement diffusif. La source est numériquement définie sur plusieurs mailles couvrant une région de largeur 0,001 cm et de longueur 200 cm autour de  $r = b$ . Elle est donc assez différente de celle définie analytiquement par un Dirac en  $r = b$ . La Figure 3.11 présente les résultats pour une source de fréquence 1 Hz. Nous constatons une bonne cohérence entre les résultats analytiques et numériques malgré la différence notable de définition des sources entre l'analytique et le numérique.

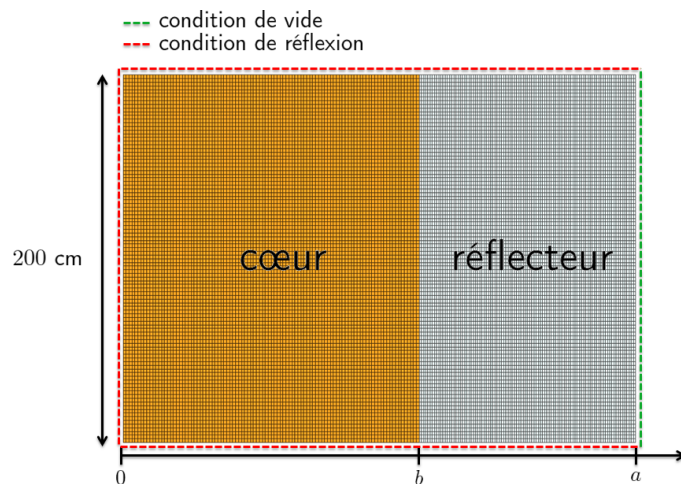


FIGURE 3.9 – Cœur homogène à deux dimensions entouré d'un matériau réflecteur (géométrie APOLLO3® avec maillage).

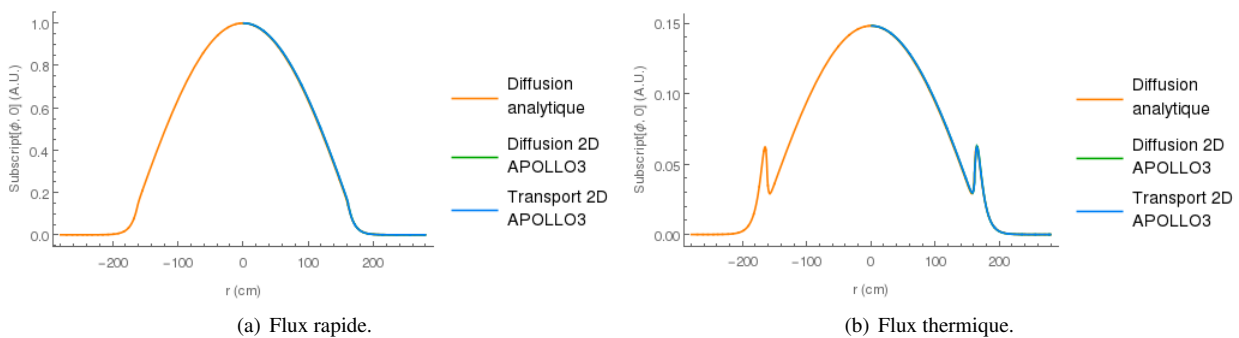
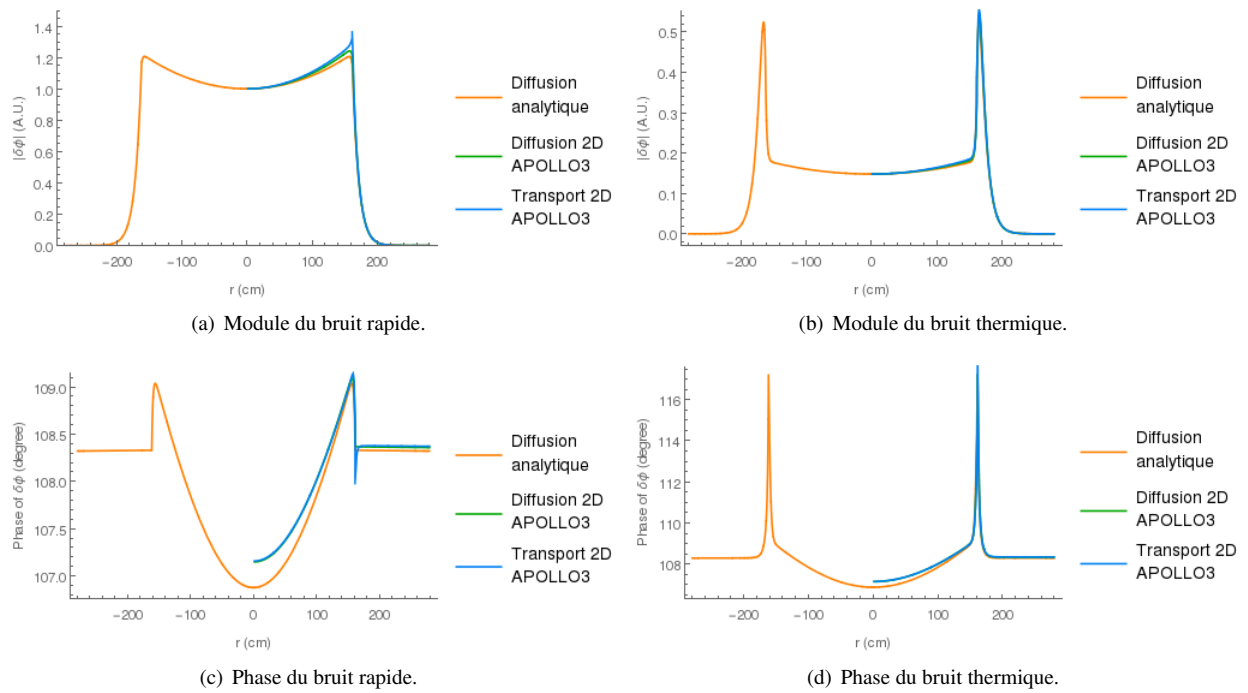
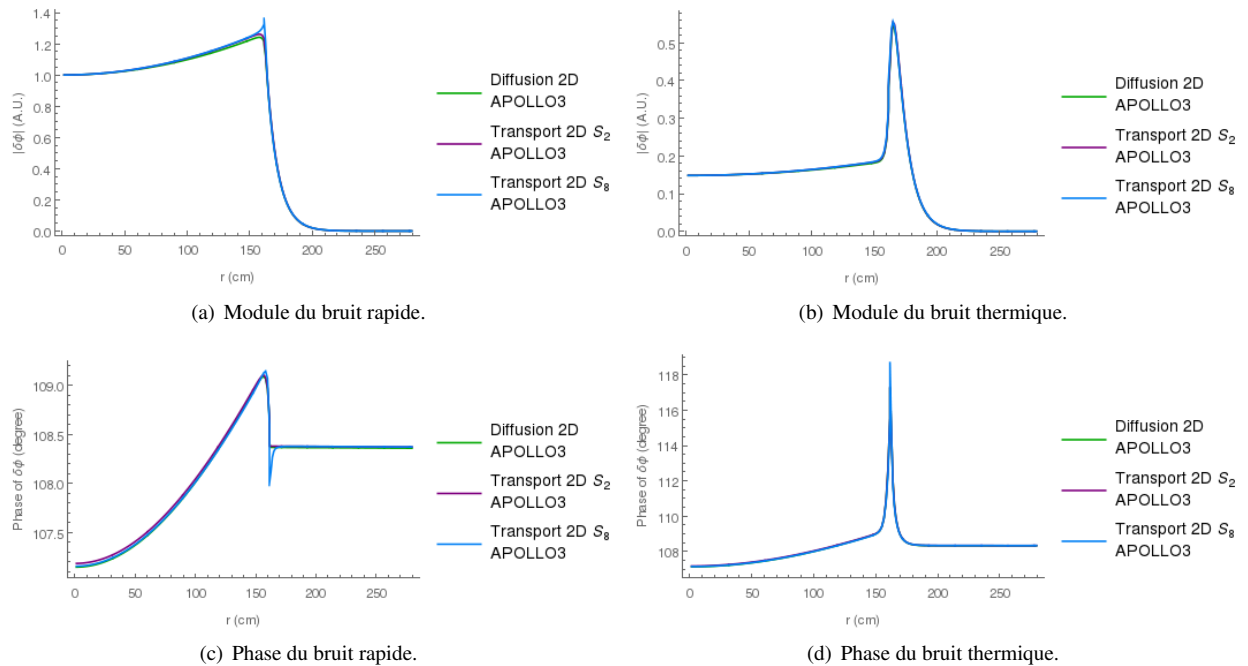


FIGURE 3.10 – Flux d'équilibre du cœur homogène à deux dimensions entouré d'un matériau réflecteur. Les résultats analytiques et numériques sont tous superposés (résultats numériques obtenus avec APOLLO3® pour  $r \geq 0$  uniquement, la partie  $r < 0$  s'en déduit par symétrie). Les flux sont normalisés par la valeur en  $r = 0$  du flux rapide.



**FIGURE 3.11** – Module et phase du bruit rapide et thermique à 1 Hz engendré par une source isotrope dans le cœur homogène à deux dimensions entouré d’un matériau réflecteur (résultats numériques obtenus avec APOLLO3® pour  $r \geq 0$  uniquement, la partie  $r < 0$  s’en déduit par symétrie). Les modules sont normalisés par la valeur en  $r = 0$  du bruit rapide.

Afin de vérifier que la différence entre les résultats en théorie de la diffusion et en théorie du transport ne soit pas due à une imprécision de développement du solveur de transport mais bien à un effet transport, nous comparons en Fig. 3.12 les résultats numériques en théorie du transport avec comme ordre  $S_n$  2 et 8 (ce dernier étant la valeur par défaut). Comme attendu, nous constatons que les résultats à l’ordre 2 en  $S_n$  sont presque équivalents aux résultats de la diffusion nodale.



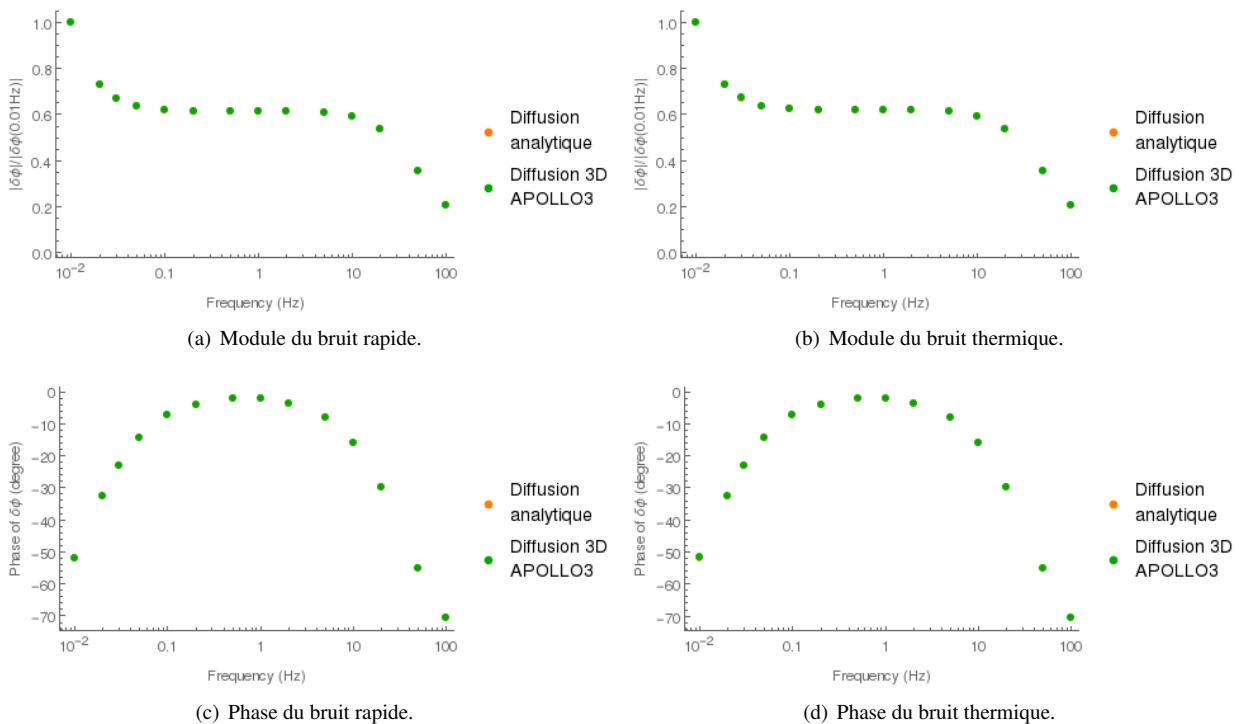
**FIGURE 3.12** – Module et phase du bruit rapide et thermique à 1 Hz engendré par une source isotrope dans le cœur homogène à deux dimensions entouré d’un matériau réflecteur en fonction de l’ordre  $S_n$  (résultats numériques obtenus avec APOLLO3® pour  $r \geq 0$  uniquement). Les modules sont normalisés par la valeur en  $r = 0$  du bruit rapide.

### 3.2.3 Systèmes à trois dimensions (APOLLO3®)

Concernant les systèmes à trois dimensions, seul le solveur de diffusion nodale a été modifié pour résoudre les équations du bruit. Comme précédemment, nous allons commencer par valider notre développement sur le cas du milieu homogène infini à trois dimensions. Nous comparerons ensuite les résultats analytiques et nos résultats numériques dans le cas d'un cylindre homogène infini à trois dimensions.

#### Milieu homogène infini

La source de bruit imposée est, comme précédemment, isotrope, constante et égale à -1 pour le groupe thermique quelle que soit la fréquence. La Figure 3.13 présente les résultats analytiques et les résultats numériques en théorie de la diffusion en fonction de la fréquence. Nous constatons une très bonne cohérence entre l'analytique et le numérique.



**FIGURE 3.13** – Module et phase du bruit rapide et thermique en milieu homogène infini à trois dimensions en fonction de la fréquence. Les résultats analytiques et numériques sont tous superposés (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

#### Cylindre homogène infini

Nous traitons ici le cas d'un cylindre homogène infini à trois dimensions de rayon  $R = 180$  cm dont les résultats analytiques et les données nucléaires et cinétiques employées sont issus de [86, 162] et détaillés en annexe C.2. Les données nucléaires et cinétiques sont les mêmes que celles employées pour le milieu homogène infini. Le facteur de multiplication du système est de  $k = 1,10956$  en théorie de la diffusion. La Figure 3.14 détaille le maillage des plans axiaux de la géométrie à trois dimensions définie dans APOLLO3® sachant que le maillage selon l'axe du cylindre est de 10 mailles pour une longueur de 100 cm (nous avons bien sûr imposé des conditions de réflexion axiale). Pour chaque plan axial, cette géométrie à mailles cartésiennes conformes a été définie de telle sorte que sa surface soit égale à la surface du cercle de rayon  $R$ . Profitant des symétries du problème, nous avons traité qu'un quart de la géométrie en imposant les conditions de réflexion comme schématisé en Fig. 3.14.

Pour ne pas briser la symétrie du problème, nous avons choisi d'imposer une source de bruit unitaire de fréquence 1 Hz au centre du cylindre pour le groupe thermique uniquement. Analytiquement, la source est définie par un Dirac au point  $r = 0$ . Numériquement, elle est définie sur toutes les mailles centrales du cylindre allant de 0 à 100 cm selon l'axe du cylindre. Elle est donc sensiblement différente de celle définie en analytique. C'est pourquoi les résultats analytiques et numériques présentés en Fig. 3.15 sont différents proches du centre du cylindre. Néanmoins, excepté au niveau de la maille centrale, nous constatons une bonne cohérence entre les résultats analytiques et numériques.

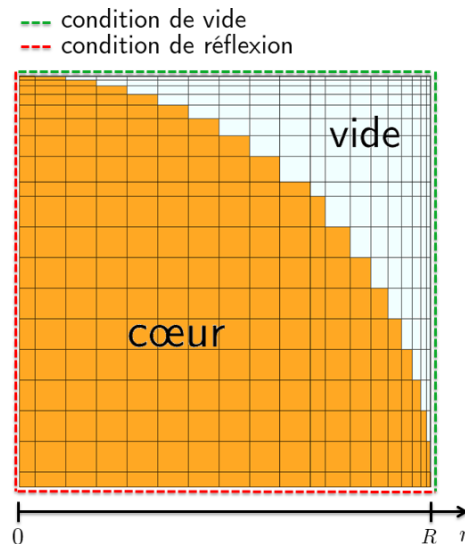


FIGURE 3.14 – Plan axial du cylindre homogène de rayon  $R$  (géométrie APOLLO3® 1/4<sup>ème</sup> avec maillage).

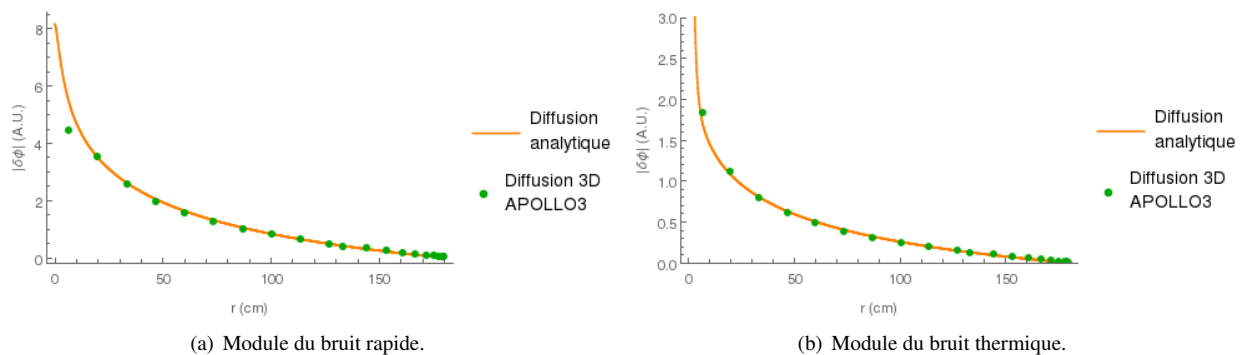


FIGURE 3.15 – Module et phase du bruit rapide et thermique dans un cylindre homogène infini à trois dimensions à 1 Hz (résultats numériques obtenus avec APOLLO3® et appartenant à la 5<sup>ème</sup> maille axiale).

Ces comparaisons entre des résultats analytiques et nos résultats numériques avec APOLLO3® nous permettent donc de vérifier et de valider, dans une certaine mesure, nos développements. Néanmoins, ces quelques comparaisons ne peuvent bien évidemment pas constituer une base de vérification et de validation en tant que telle. Seules des comparaisons plus poussées avec des données expérimentales et des résultats Monte Carlo permettront à terme de véritablement vérifier et valider les solveurs de bruit neutronique développés.

### 3.3 Études d'oscillations des sections efficaces

Afin d'illustrer les capacités des solveurs que nous venons de présenter à la section précédente, nous allons étudier, dans cette section, l'impact d'une oscillation des sections efficaces macroscopiques sur le flux dans un cœur hétérogène à une dimension avec la maquette fil puis à deux et trois dimensions avec APOLLO3®. La source étudiée est ici volontairement « générique » et ne traduit pas directement un effet physique particulier. Elle peut éventuellement s'interpréter comme étant une façon simpliste de modéliser une variation périodique locale de température. Rappelons que tous les calculs ont été effectués à zéro puissance, c'est-à-dire sans prise en compte des contre-réactions induites par le couplage avec la thermohydraulique puisque le couplage avec cette dernière n'a pas encore été réalisé. L'impact des perturbations que nous allons étudier est très certainement différent lorsque ces phénomènes sont pris en compte (il devrait notamment être plus atténué puisque les contre-réactions ont tendance à stabiliser le cœur).

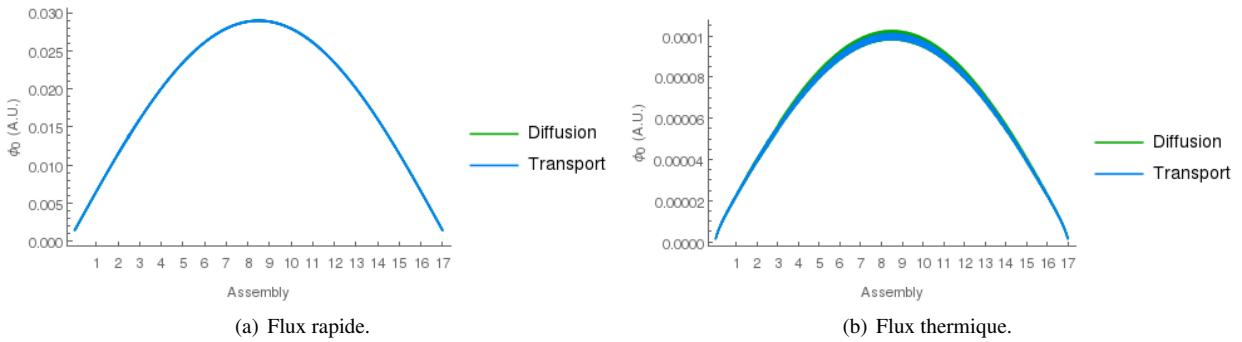
Précisons qu'une étude d'une propagation axiale d'une perturbation de bas en haut du cœur à trois dimensions a en outre été réalisée en annexe D.



### 3.3.1 Cœur à une dimension (maquette fil)

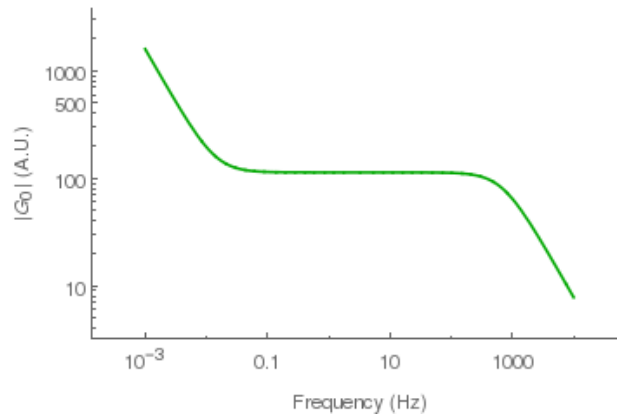
Le cœur à une dimension étudié avec la maquette fil est simplement composé de 17 assemblages identiques eux-mêmes composés de 17 crayons identiques dans un modérateur homogène. La taille de chaque crayon homogène est de 1,08 cm et la distance inter-crayon de 0,36 cm. Ce cœur, parfaitement symétrique, a donc une longueur de 416,16 cm et ses assemblages de 24,48 cm. Nous travaillons ici à 4 groupes d'énergie et 6 groupes de précurseurs avec une anisotropie de scattering  $P_1$  (précisons que dans ce cas tous les coefficients de diffusion  $D_g$  sont égaux à  $1/(\Sigma_{0,t}^g - \Sigma_{0,s1}^g)$ ) et un unique isotope fissile. Par souci de clarté, nous n'allons présenter que les résultats du groupe 1 (groupe rapide) et du groupe 4 (groupe thermique). Nous allons mener les calculs numériques en théorie de la diffusion et en théorie du transport.

Les flux d'équilibre des groupes 1 et 4 du système sont présentés en Fig. 3.16. Le facteur de multiplication effectif est de  $k_d = 1.000016$  en théorie de la diffusion et de  $k_t = 1.000118$  en théorie du transport. Nous constatons donc un faible écart entre les deux théories concernant l'état d'équilibre du système.



**FIGURE 3.16** – Flux rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) d'équilibre du cœur hétérogène à une dimension (résultats numériques obtenus avec la maquette fil). Les variations du flux thermique dues aux alternances des milieux combustible/modérateur sont peu visibles compte tenu de l'échelle (un agrandissement de ces résultats est présenté en Fig. 5.18(b) du chapitre 5).

La Figure 3.17 détaille l'évolution du module de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  du système étudié en fonction de la fréquence (voir section 2.3.1). Nous constatons que la limite des basses fréquences est de 0,014 Hz et celle des hautes fréquences de 690 Hz.



**FIGURE 3.17** – Évolution du module de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  du cœur hétérogène à une dimension en fonction de la fréquence.

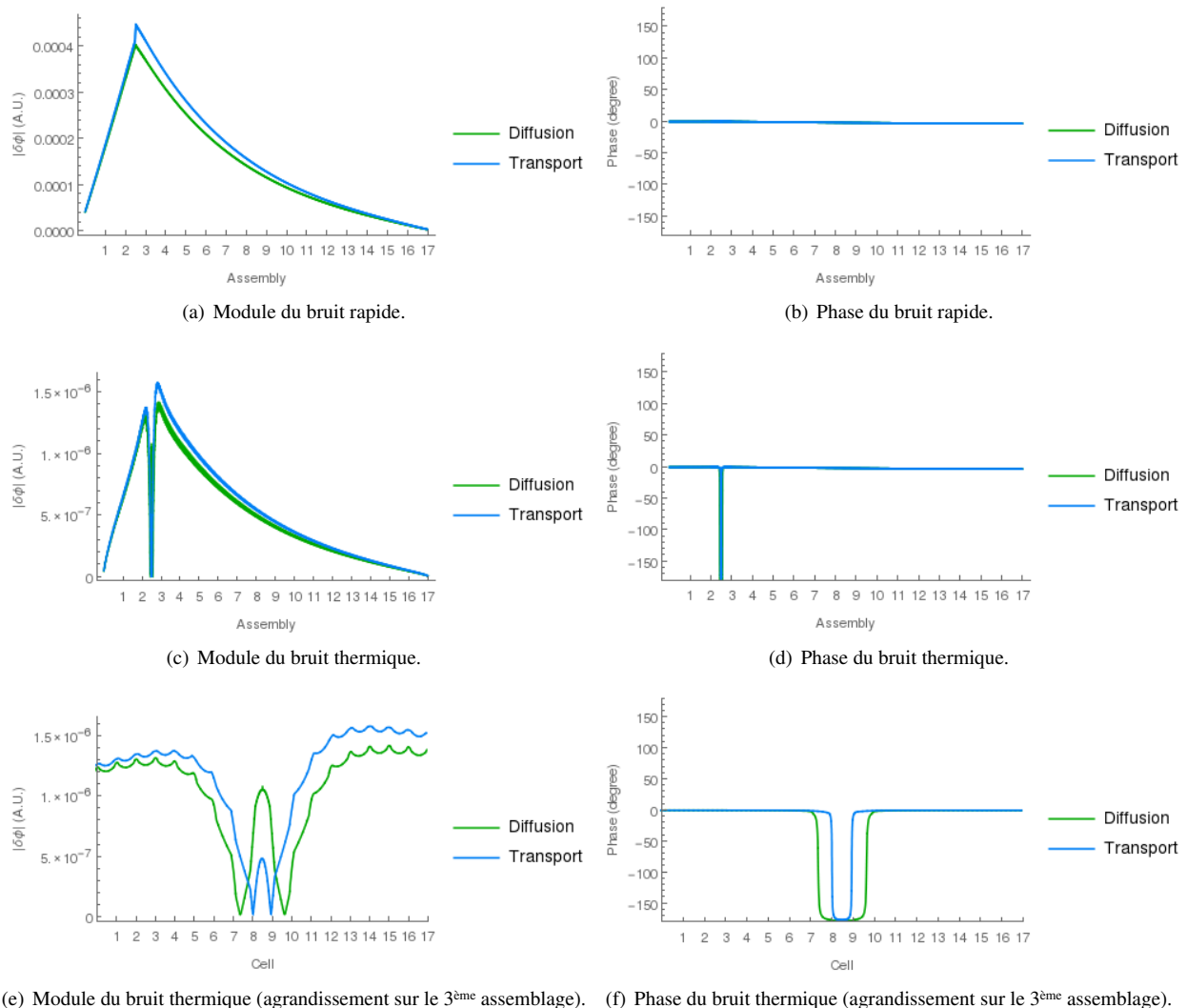
Nous avons choisi d'imposer une oscillation sinusoïdale de 3 Hz à toutes les sections efficaces macroscopiques du crayon central du 3<sup>ème</sup> assemblage. L'amplitude des oscillations est de 0,5% autour de la valeur d'équilibre des sections efficaces. Les termes perturbés des sections efficaces sont donc définis par :

$$\delta\Sigma(r, E, t) = 0,5\% \Sigma_0(r, E) \cos(\omega_0 t), \quad (3.5)$$

avec  $\omega_0$  la fréquence angulaire de la perturbation. Compte tenu de la forme de ces termes perturbés, la source de bruit est monochromatique de fréquence angulaire  $\omega_0$  et de moyenne temporelle nulle. Le bruit le sera donc aussi.

La Figure 3.18 présente le module et la phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à 3 Hz en théorie du transport et de la diffusion. Analysons tout d'abord la forme du bruit obtenu. Comme attendu pour un grand système, nous remarquons que la composante globale du bruit n'est pas approximativement proportionnelle au flux d'équilibre

et donc ne suit pas le terme réacteur point (voir section 2.4 pour un rappel sur les propriétés des composantes globales et locales). Nous observons que la composante locale est davantage visible pour le groupe thermique par rapport au groupe rapide et qu'elle s'accompagne localement de plusieurs changements de phase pour le groupe thermique. Nous retrouvons donc quelques-unes des principales propriétés des composantes globales et locales du bruit. Concernant les différences observées entre le transport et la diffusion, nous notons que ces dernières ne sont pas très importantes hormis localement au niveau du 3<sup>ème</sup> assemblage.



**FIGURE 3.18** – Module et phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à 3 Hz engendré par une oscillation des sections efficaces du crayon central du 3<sup>ème</sup> assemblage dans le cœur hétérogène à une dimension (résultats numériques obtenus avec la maquette fil).

Profitons de cette section pour évoquer les travaux qui ont été menés dans la littérature pour quantifier l'impact de l'approximation de la diffusion en théorie du bruit neutronique en la comparant, dans des cas simples, à l'approximation  $P_1$ <sup>11</sup>. Deux articles traitent concrètement du sujet : [117] et [47].

Le premier étudie analytiquement l'approximation  $P_1$  à un groupe d'énergie et la compare avec l'approximation de la diffusion. Cette première étude montre que lorsque la fluctuation de la section efficace d'absorption domine, la différence quantitative entre les deux approximations est faible, mais que lorsque seule la section efficace de diffusion est perturbée, la différence entre les deux approximations n'est pas négligeable (rappelons que le coefficient de diffusion est toujours supposé constant en théorie de la diffusion même si les sections efficaces de diffusion sont perturbées). Or, il se trouve que pour le cas du cœur que nous venons d'étudier, la somme des sections efficaces d'absorption domine largement sur celle des sections efficaces de diffusion. Autrement dit, lorsque nous imposons une oscillation de toutes

11. Attention à ne pas confondre l'approximation dite  $P_1$  qui consiste à approximer le flux angulaire à ses deux premières composantes de sa décomposition sur les harmoniques sphériques (à une dimension celles-ci deviennent les polynômes de Legendre), et l'approximation d'anisotropie de type  $P_1$  où ce sont les sections efficaces macroscopiques de diffusion qui sont approximées à leurs deux premières composantes de leurs décompositions sur les polynômes de Legendre.

les sections efficaces, la partie de la source de bruit provenant de la perturbation des sections efficaces d'absorption domine sur celle provenant de la perturbation des sections efficaces de diffusion. Cela expliquerait donc pourquoi nos écarts entre la diffusion et le transport sont relativement faibles (excepté localement au niveau de la perturbation). Nous verrons que les grands écarts que nous observerons en section 4.2.1 entre la diffusion et le transport dans un petit cœur peuvent à l'inverse s'expliquer en partie par le fait que, dans le cas étudié en section 4.2.1, la somme des sections efficaces d'absorption ne domine pas sur celle des sections efficaces de diffusion.

Le deuxième article présente des comparaisons entre les deux approximations à deux groupes d'énergie dans des cœurs homogènes entourés de matériaux réflecteurs (exactement du même style que celui étudié à la section 3.2.1). Dans les cœurs étudiés, il montre que lorsque l'on perturbe les sections efficaces de diffusion la différence entre les deux approximations est essentiellement locale, et qu'elle s'atténue grandement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la perturbation. C'est donc la composante locale qui est la plus affectée. Ceci rejoint ainsi les constatations que nous venons de faire sur nos résultats précédents. En outre, cet article montre que plus le gradient de flux est faible plus les deux approximations sont proches l'une de l'autre.

### 3.3.2 Cœur à deux dimensions (APOLLO3®)

Nous allons introduire, dans cette section, une première application dite « grandeur nature » en modélisant, à deux dimensions, un grand cœur de réacteur à eau légère avec baffle lourd [67, 96]. Commençons tout d'abord par décrire ce dernier avant d'étudier l'impact d'une oscillation des sections efficaces d'un de ses assemblages pour un cas simple à 2 groupes d'énergie.

#### Description du cœur étudié

Le cœur étudié est composé de 241 assemblages combustibles entouré d'un réflecteur lourd. Le plan de chargement, décrit en Fig. 3.19, est équivalent à un état de fin de cycle<sup>12</sup>.

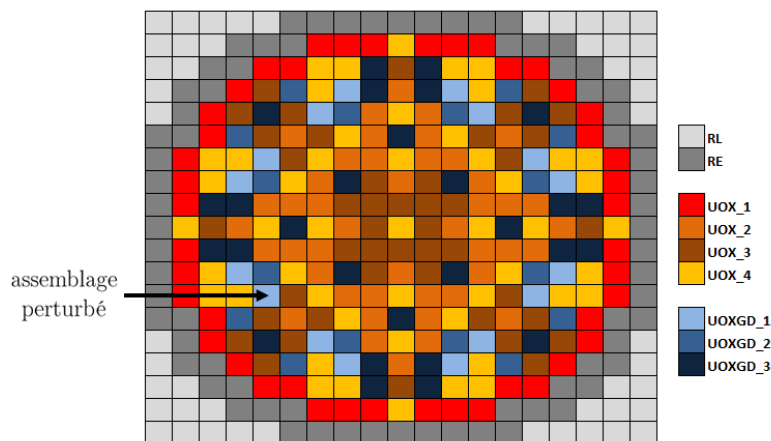


FIGURE 3.19 – Plan de chargement du combustible.

Ce plan de chargement est composé de deux types d'assemblages : des assemblages UOX et des assemblages UOXGD contenant des crayons gadolinium. Le numéro accompagnant la désignation du type de l'assemblage correspond au nombre de cycles pendant lesquels l'assemblage a séjourné dans le cœur. Les taux de combustion associés sont donnés dans le Tab. 3.1.

TABLEAU 3.1 – Taux de combustion des assemblages (MWj/t).

Cycle	UOX	UOXGD
1	14198	19060
2	31797	33997
3	45634	48982
4	56225	

Les assemblages combustibles sont constitués d'un réseau régulier de  $17 \times 17$  crayons dont 24 tubes guides et sont modélisés avec une lame d'eau en périphérie. Les crayons combustibles ont un taux d'enrichissement en uranium 235

12. Le cœur initialement employé dans [96] est constitué d'un plan de chargement correspondant à un état de début de cycle. Afin d'atténuer les pics de flux au niveau du réflecteur, nous avons pris la liberté d'adapter ce plan de chargement en décalant d'un cycle tous les assemblages excepté ceux du cycle 4 pour les assemblages UOX et du cycle 3 pour les assemblages UOXGD. Cela nous a permis d'obtenir un plan de chargement presque équivalent à un état de fin de cycle.

de 4,9%. Les assemblages UOXGD disposent de 12 crayons gadolinium. Il y a 265 crayons combustibles standards sans poison dans les assemblages UOX et 253 dans les assemblages UOXGD (voir Fig. 3.20). Chaque cellule est décrite exactement, c'est-à-dire avec le combustible, la gaine et le modérateur. Par souci de simplification, le réflecteur lourd a été modélisé par un milieu homogène composé à 95% d'acier et 5% d'eau borée à la même concentration que celle du cœur. La taille d'un assemblage est de 21,455×21,455 cm et les dimensions des crayons et des tubes guides correspondent à des données technologiques standards pour les réacteurs à eau pressurisée. La concentration en bore est initialement de 1400 ppm et la densité moyenne de l'eau de 0,7243 g/cm<sup>3</sup>. Les températures combustible et modérateur sont décrites au Tab. 3.2.

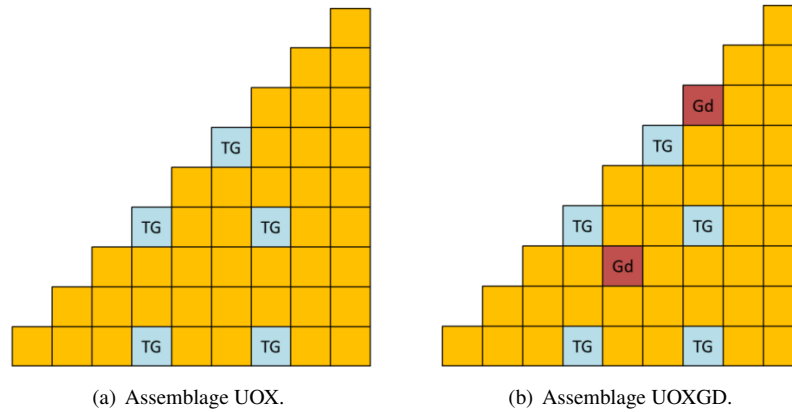


FIGURE 3.20 – Composition des assemblages UOX et UOXGD (géométrie 1/8<sup>ème</sup>, TG = tube guide, Gd = crayon gadolinium) [96].

TABLEAU 3.2 – Températures du combustible, de la gaine et du modérateur.

	Température (°C)
Combustible	501
Gaine	351
Modérateur	301

L'objectif étant d'effectuer un premier calcul cœur simplifié, nous avons, à l'aide d'APOLLO3®, homogénéisé le cœur que nous venons de décrire à 2 groupes d'énergie assemblage par assemblage<sup>13</sup>. L'homogénéisation a été réalisée avec autoprotection (sur un maillage 281 groupes jusqu'à l'ordre  $P_1$  pour le scattering) mais sans l'étape d'équivalence<sup>14</sup>. Après l'étape d'homogénéisation, nous avons attribué à chaque assemblage homogène une température homogène de 501°C et au réflecteur une température homogène de 301°C. Les sections efficaces du réflecteur ont été obtenues par un calcul de traverse 1D comprenant une partie combustible de 180 cm modélisée par un assemblage UOX homogénéisé (cycle 3) et le réflecteur homogène sur 21,455 cm. Un seul milieu réflecteur a été généré pour tout le cœur (noté RE dans la Fig. 3.19). Un milieu homogène quasi-vide complète la géométrie extérieure au réflecteur de manière à former un maillage cartésien global (noté RL dans la Fig. 3.19). Des conditions de vide ont été imposées aux frontières de la géométrie. La concentration en bore a été réajustée à 536 ppm afin d'obtenir un cœur homogénéisé assemblage par assemblage critique.

### Paramètres des calculs numériques

Le maillage spatial employé est de 17×17 mailles pour chaque assemblage homogène (il s'agit donc d'un maillage à l'échelle crayon). Les paramètres et les hypothèses de calcul en théorie du transport et de la diffusion sont les suivants (voir section 3.1.3 pour un rappel sur les caractéristiques du solveur IDT) :

- transport : caractéristiques courtes, approximation linéaire du flux volumique, ordonnées discrètes  $S_8$ , correction d'anisotropie  $P_0^*$ <sup>15</sup>,
- diffusion : expansion nodale, approximation quartique du flux volumique, correction d'anisotropie  $P_0^*$ .

Nous allons étudier l'impact d'une oscillation sinusoïdale de 3 Hz imposée à toutes les sections efficaces macroscopiques de l'assemblage UOXGD\_1 en position (5,7) (voir Fig. 3.19). L'amplitude des oscillations est de 1% autour de la valeur d'équilibre des sections efficaces. Les termes perturbés des sections efficaces sont donc définis par :

$$\delta\Sigma(r, E, t) = 1\% \Sigma_0(r, E) \cos(\omega_0 t), \quad (3.6)$$

13. Lors de cette homogénéisation, nous avons conservé une quinzaine d'isotopes fissiles (Pu, U, Am, Cm et Np de divers nombres de masse).

14. Les facteurs de discontinuité ne sont donc pas employés pour les calculs en diffusion nodale.

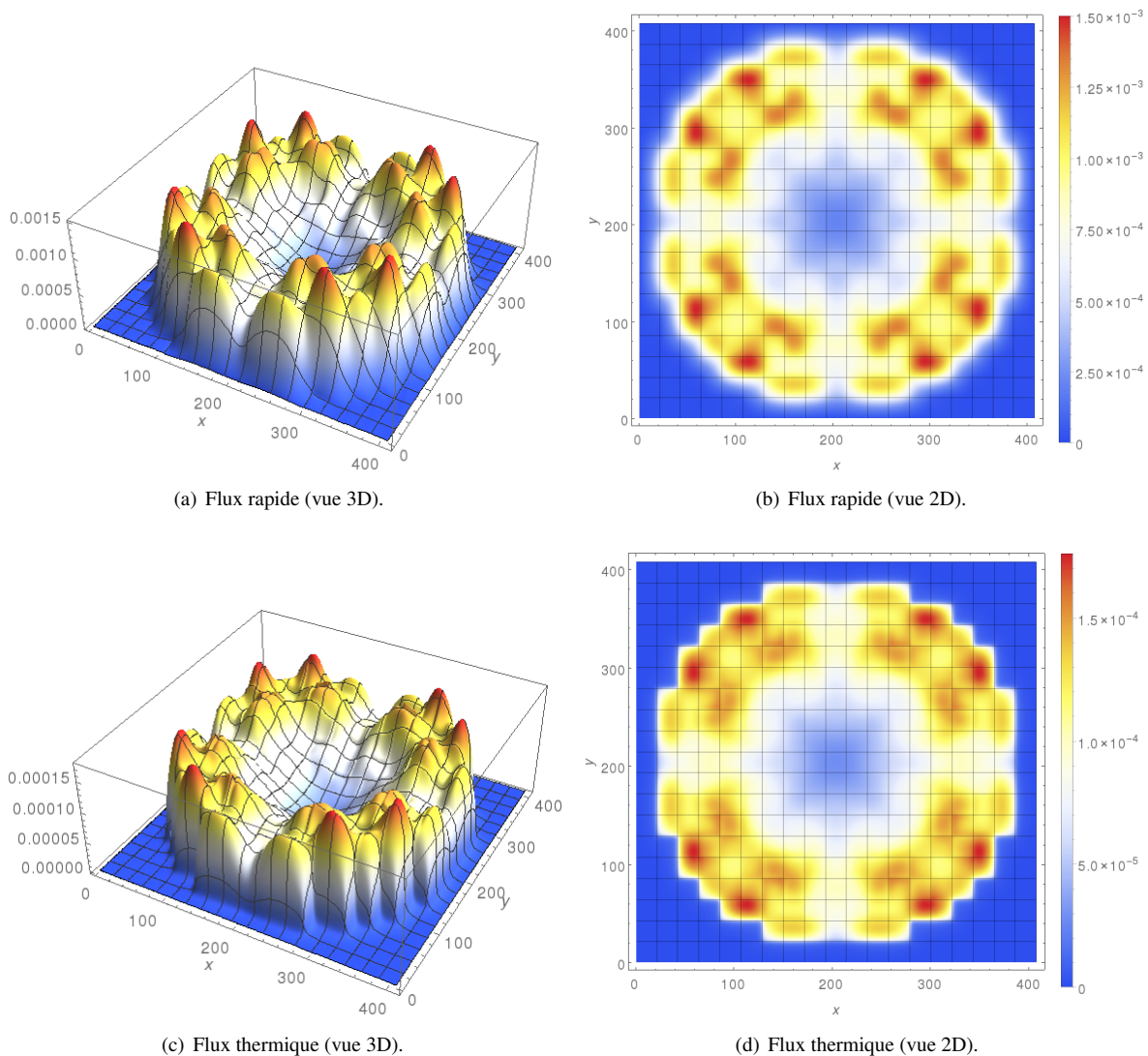
15. Toutes les sections efficaces macroscopiques de selfscattering sont corrigées par :  $(\Sigma_{0,s0}^{g \rightarrow g})^* = \Sigma_{0,s0}^{g \rightarrow g} - \sum_{g'} \Sigma_{0,s1}^{g \rightarrow g'}$ .

avec  $\omega_0$  la fréquence angulaire de la perturbation. Tous les flux d'équilibre sont normés de telle sorte que l'intégrale des taux de fission soit égale à l'unité (cette norme a été choisie arbitrairement). Les sources de bruit construites à partir de ces flux d'équilibre sont ainsi normées de la même manière en transport et en diffusion. Nous pouvons donc comparer directement les modules et les phases obtenus avec les deux théories. Dans tout le reste de cette section, nous désignons par « différence relative entre la diffusion et le transport » le terme  $\frac{\Psi_{diffusion}}{\Psi_{transport}} - 1$ . Les différences relatives dans les zones à l'extérieur du réflecteur (zones correspondant aux assemblages notés RL en Fig. 3.19) ne seront pas considérées compte tenu du fait que la diffusion n'y est pas viable.

### Flux d'équilibre rapide et thermique

Les Figures 3.21 et 3.22 présentent les flux rapide et thermique d'équilibre obtenus en théorie du transport et de la diffusion. Le facteur de multiplication effectif obtenu en théorie de la diffusion est de  $k_d = 0,9994891$  et en théorie du transport de  $k_t = 1,000349$ . L'écart entre les deux facteurs n'est donc que de 86 pcm. La Figure 3.23 détaille les différences relatives entre les deux théories. Nous constatons que ces dernières sont toutes inférieures en valeur absolue à 5,5%. Malgré l'absence de l'étape d'équivalence lors de l'homogénéisation, les écarts entre la diffusion et le transport sont ainsi relativement raisonnables. Ceci tend à montrer que les comparaisons que nous allons maintenant effectuer entre les modules et les phases du bruit obtenus en théorie du transport et de la diffusion sont, dans une certaine mesure, justifiées ou tout du moins sont raisonnables.

Nous n'avons pas pu calculer les données cinétiques effectives pondérées par le flux adjoint pour ce cœur. Néanmoins, connaissant les données cinétiques typiques des réacteurs à neutrons thermiques, nous pouvons estimer que la limite des basses fréquences se situe autour de 0,013 Hz et celle des hautes fréquences autour de 55 Hz.



**FIGURE 3.21** – Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

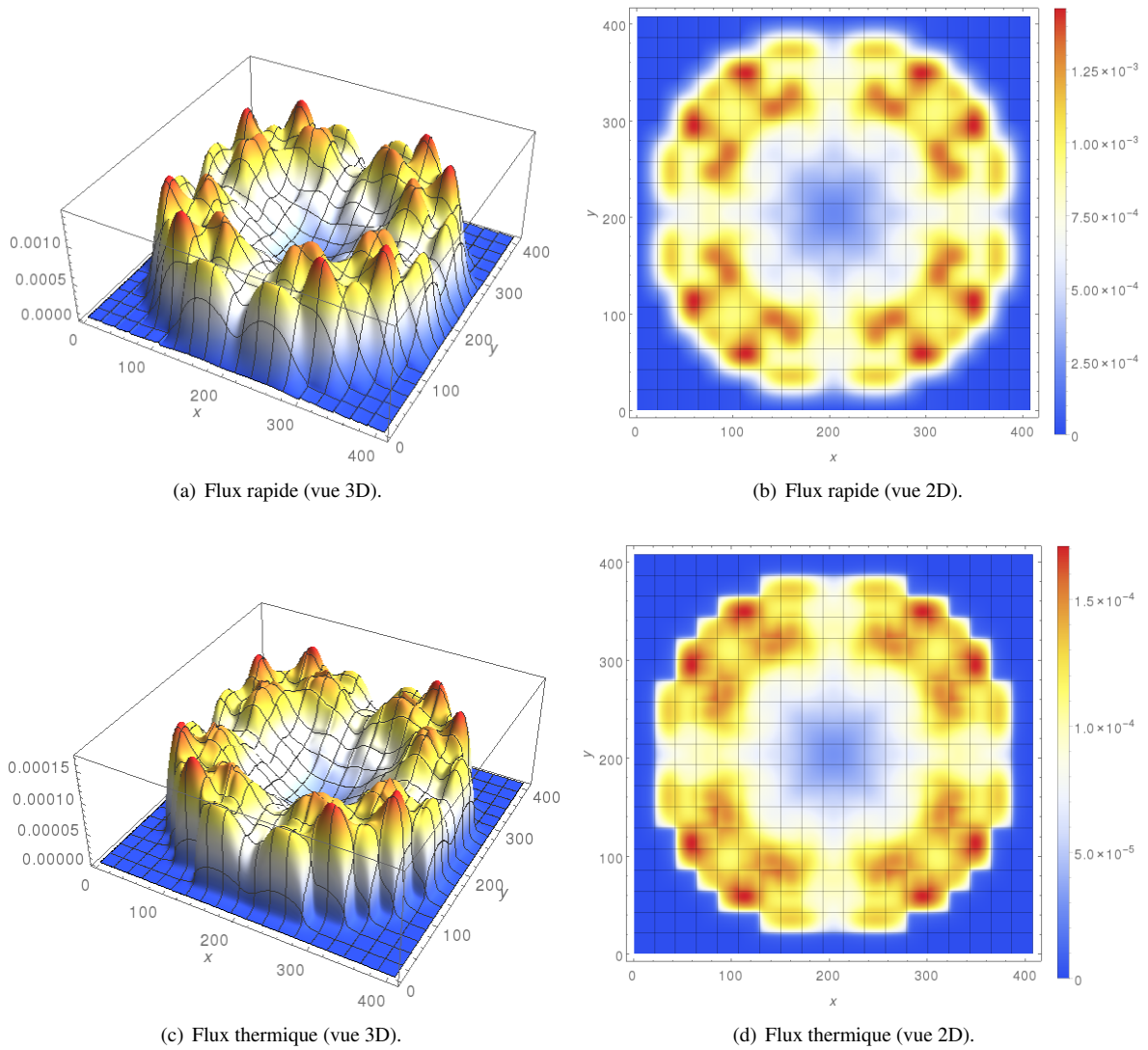


FIGURE 3.22 – Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à deux dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

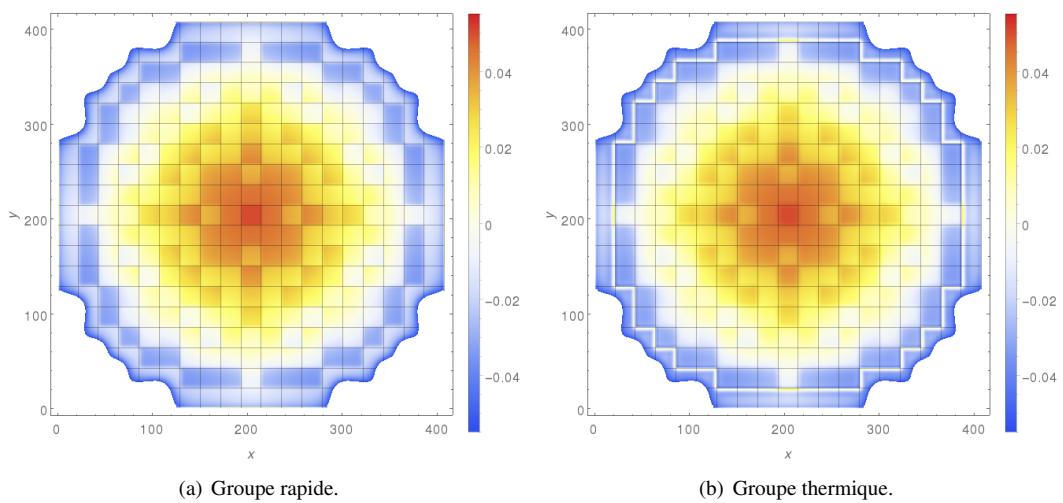
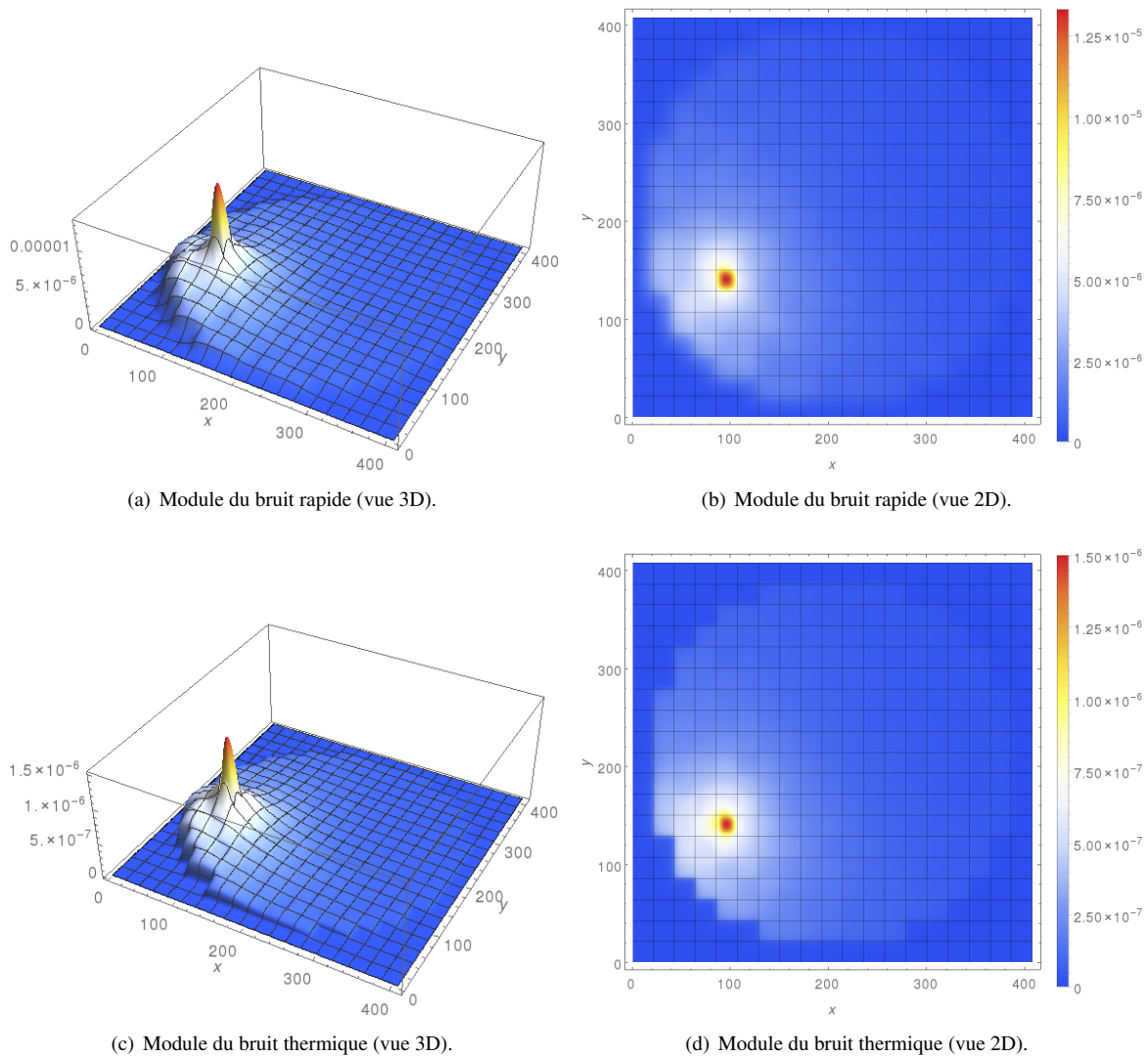


FIGURE 3.23 – Différences relatives entre la diffusion et le transport des flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à deux dimensions (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

### Module et phase du bruit rapide et thermique

La source de bruit étant monochromatique, le bruit n'est donc composé que d'une seule harmonique en  $\omega_0$ . Les Figures 3.24, 3.25, 3.27 et 3.28 détaillent les modules et les phases du bruit rapide et thermique obtenus en théorie du transport et de la diffusion. Comme attendu pour un grand système, la composante globale du bruit ne suit pas la forme du flux d'équilibre et la composante locale est particulièrement visible autour de la perturbation. On constate que la longueur de relaxation spatiale de la composante locale n'est que d'environ un assemblage. Le pic du bruit engendré par l'oscillation est donc très localisé autour de l'assemblage perturbé. Concernant la phase, elle est globalement constante sur l'ensemble du cœur avec un très léger déphasage d'au maximum 4 degrés entre la région perturbée et la périphérie du cœur.

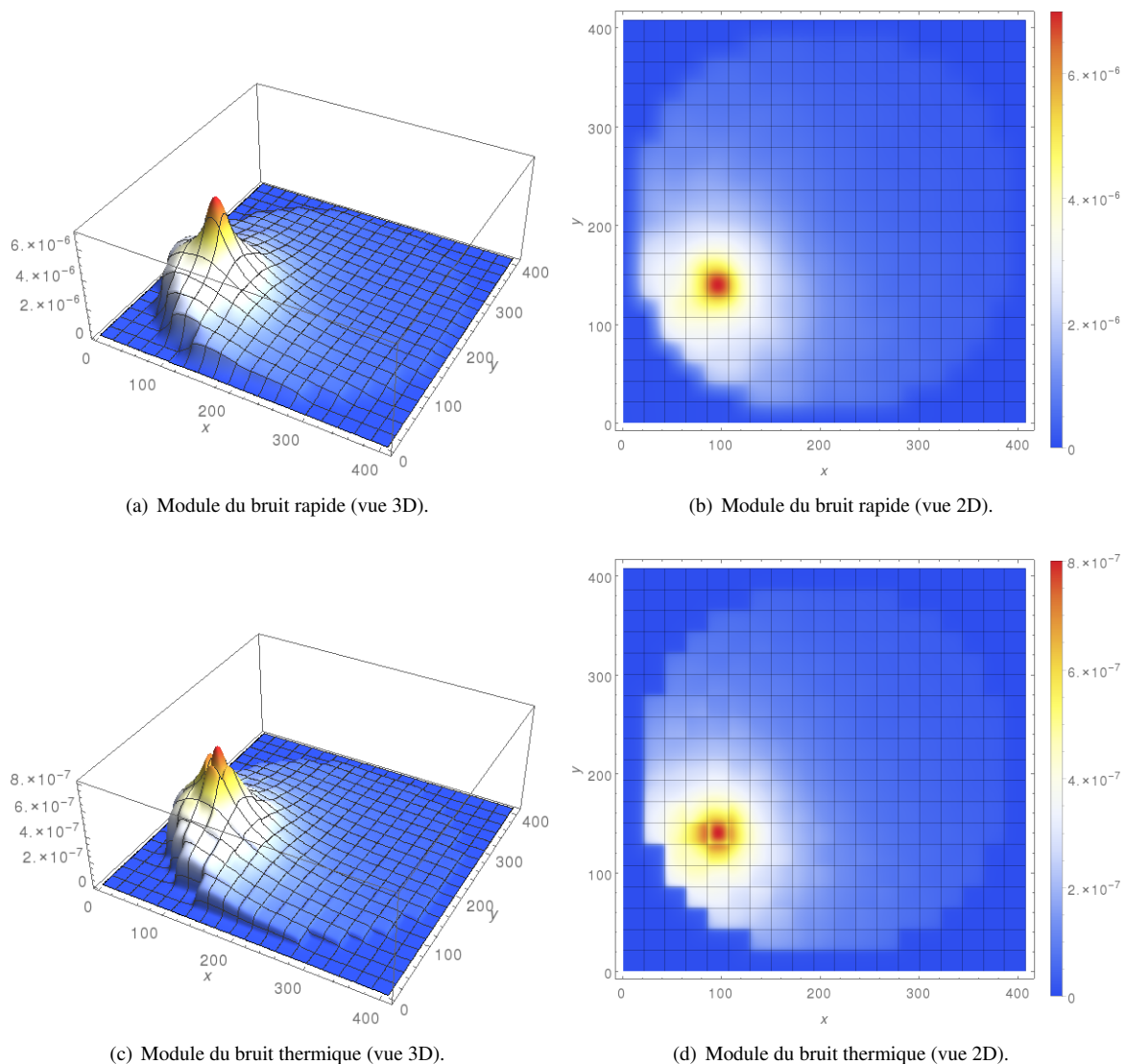
Notons que ces résultats obtenus avec APOLLO3® peuvent être, dans une certaine mesure, qualitativement comparés avec les résultats présentés en Figs. 8 et 9 de [44]. Ces derniers sont issus d'une source de bruit localisée de la forme  $S(r, \omega) = \pm \Phi_0^1(r) \delta(r - r_p)$  (le signe dépendant du groupe d'énergie) dans un cœur typique de réacteurs à eau bouillante en théorie de la diffusion à 2 groupes d'énergie. Les résultats des deux simulations ont qualitativement les mêmes caractéristiques même si la source de bruit n'est pas tout à fait identique dans les deux cas.



**FIGURE 3.24** – Module du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

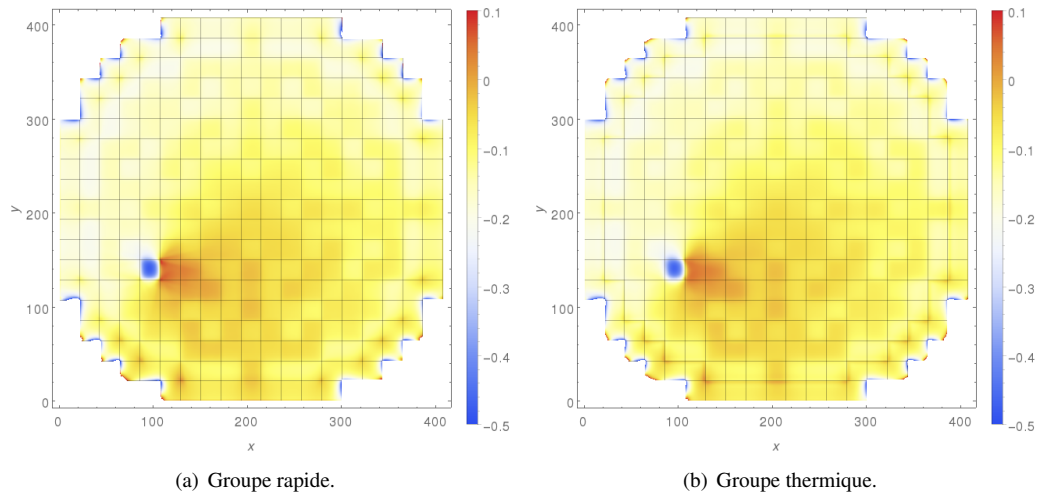
Les résultats en théorie du transport et en théorie de la diffusion ont les mêmes caractéristiques. Cependant, même si les phases sont sensiblement comparables, les modules sont eux localement assez différents au niveau de l'assemblage perturbé. Comme le montre la Fig. 3.26 qui présente les différences relatives des modules entre les deux théories, ces différences relatives peuvent atteindre localement les 50% en valeur absolue. Les modules obtenus en théorie de la diffusion sont 2 fois plus faibles au niveau de l'assemblage perturbé par rapport à ceux obtenus en théorie du transport. Loin de la perturbation, les différences relatives sont néanmoins raisonnables et avoisinent les 10%. Assez logiquement, l'effet transport est donc surtout local. Notons que nous avons choisi de perturber une région où l'écart des flux d'équilibre entre les deux théories est le plus faible ( $< 1\%$ ). Les différences relatives que nous observons entre les modules sont donc essentiellement dues à un effet transport (sur l'opérateur  $L_{0,\omega}$  et sur la source de bruit) et non à une différence entre les sources de bruit causée par une différence entre les flux d'équilibre. Compte tenu des valeurs des modules, l'amplitude des variations temporelles du flux est, en théorie du transport, au maximum de  $+0,084\%$  par rapport au flux d'équilibre localement autour de la perturbation. Une oscillation d'amplitude 1% des sections efficaces d'un seul assemblage induit donc (heureusement) une oscillation du flux d'amplitude maximale relativement faible par rapport au flux d'équilibre.

Nous avons bien conscience que ces premiers résultats « grandeurs natures » à seulement 2 groupes d'énergie ne peuvent donner de conclusions générales (loin de là) sur la comparaison entre les théories du transport et de la diffusion en bruit neutronique. Ils donnent néanmoins de premières constatations qualitatives qui tendent à montrer que les effets transports ne semblent localement pas négligeables.

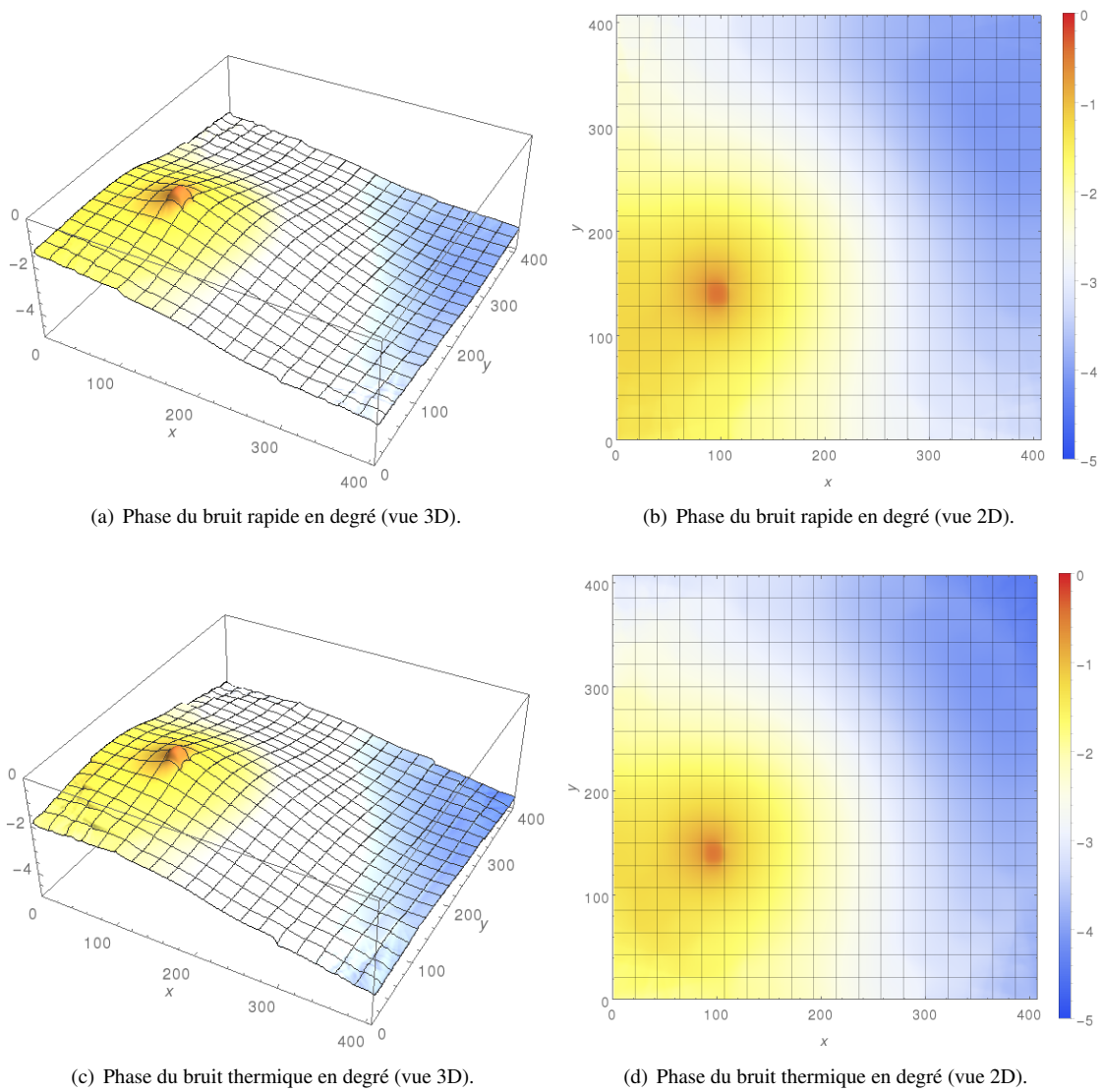


**FIGURE 3.25** – Module du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

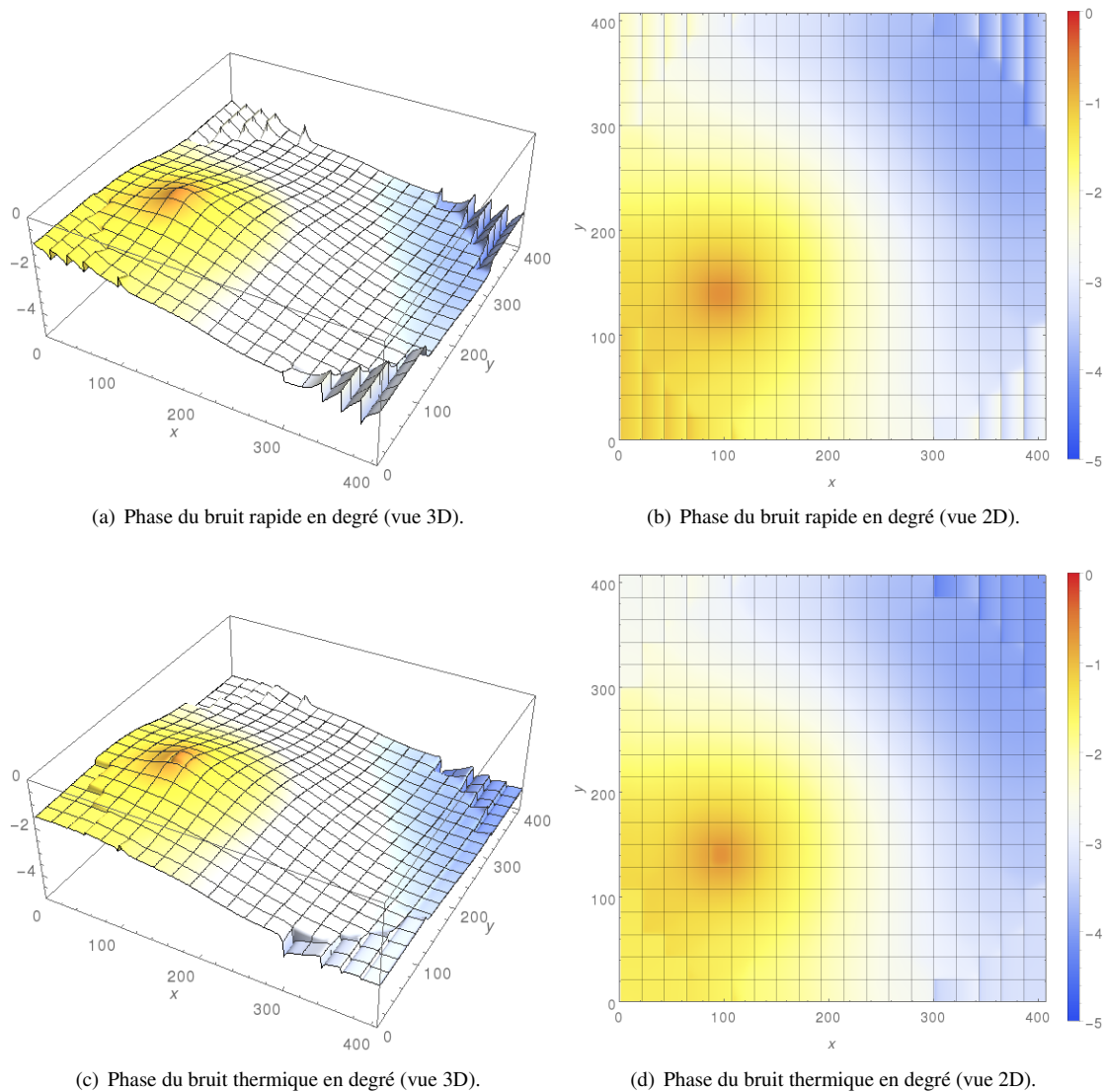




**FIGURE 3.26** – Différences relatives entre la diffusion et le transport des modules du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).



**FIGURE 3.27** – Phase du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).



**FIGURE 3.28** – Phase du bruit rapide et thermique à 3Hz engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à deux dimension en théorie de la diffusion (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

### 3.3.3 Cœur à trois dimensions (APOLLO3®)

Afin de mener à bien un premier calcul de bruit neutronique « grandeur nature » à trois dimensions, nous avons construit un cœur à trois dimensions de réacteur à eau légère avec baffle lourd en nous basant sur le cœur à deux dimensions de la section précédente. Ce cœur, homogénéisé à 2 groupes d'énergie assemblage par assemblage, a une hauteur de 420 cm et est décomposé axialement en 21 plans axiaux de hauteur 20 cm. Le premier et le dernier plan axial sont uniquement constitués d'assemblages réflecteurs (noté RE sur la Fig. 3.19). Les 19 autres plans sont tous identiques et définis par le même plan de chargement et par les mêmes dimensions que le cœur à deux dimensions de la section 3.3.2. En dehors des zones réflecteurs, le cœur ne présente donc pas d'hétérogénéités axiales<sup>16</sup>. Des conditions de vide sont imposées aux frontières de la géométrie.

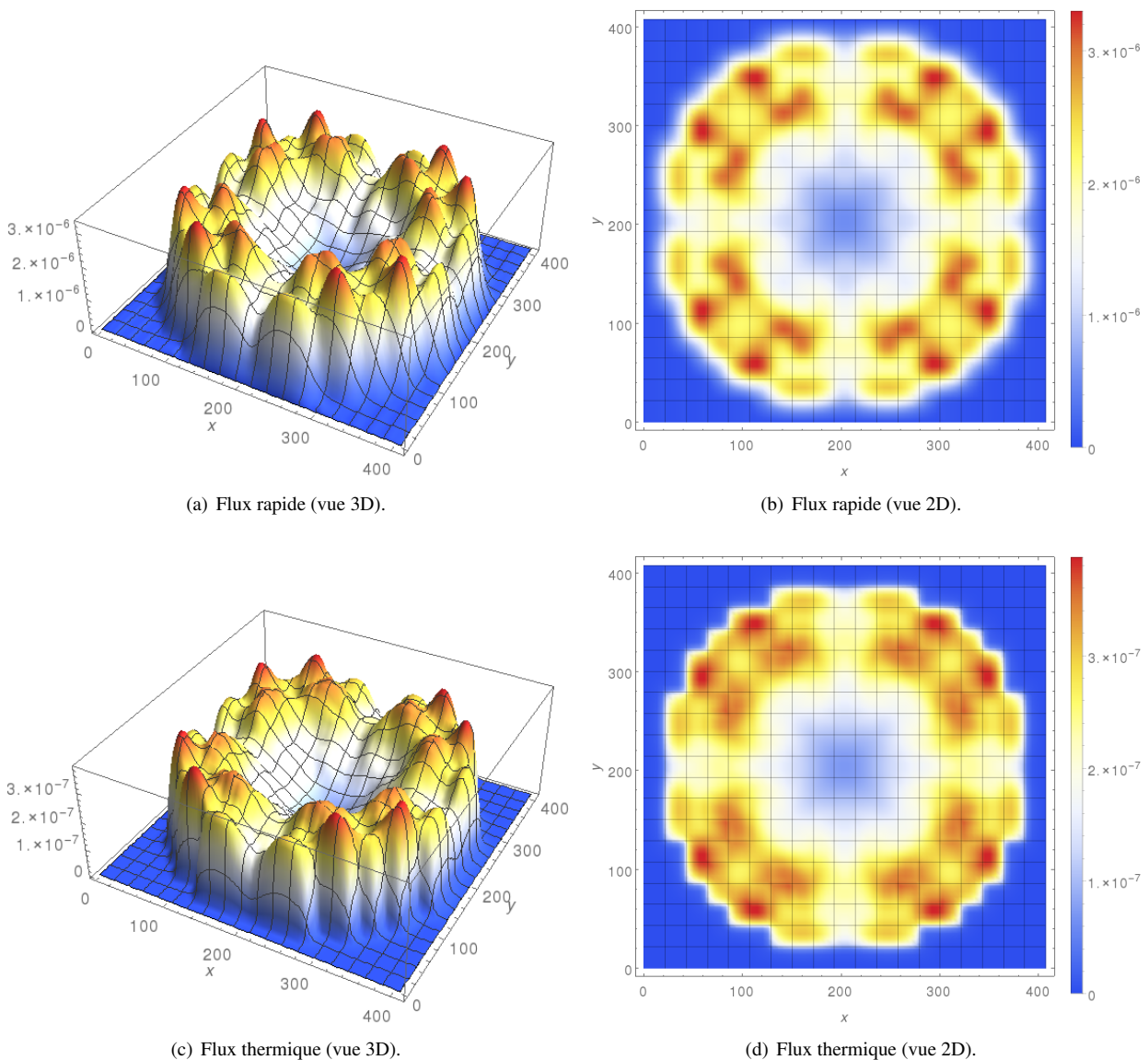
Seuls des calculs en théorie de la diffusion ont été effectués à trois dimensions. Comme précédemment, une correction d'anisotropie  $P_0^*$  est appliquée et les flux d'équilibre sont normés de telle sorte que l'intégrale des taux de fission soit égale à l'unité. Le maillage spatial employé est de  $4 \times 4$  mailles pour chaque assemblage homogénéisé de tous les plans axiaux (il est donc un peu plus grossier que le maillage du cœur à deux dimensions).

<sup>16</sup>. Par souci de simplification, nous n'avons en effet pas pris en compte l'hétérogénéité axiale induite par l'usure axiale non uniforme du combustible.

De la même manière qu'à la section précédente, nous allons imposer une oscillation sinusoïdale de 3 Hz à toutes les sections efficaces macroscopiques de l'assemblage UOXGD\_1 en position (5,7) (voir Fig. 3.19) et ce sur toute la hauteur de l'assemblage (380 cm). L'amplitude des oscillations est de 1% autour de la valeur d'équilibre des sections efficaces.

### Flux d'équilibre rapide et thermique

La Figure 3.29 présente les flux rapide et thermique d'équilibre du 5<sup>ème</sup> plan axial obtenus en théorie de la diffusion. Nous constatons que ces nappes de flux sont, à un facteur près, sensiblement de la même forme que les nappes du cœur à deux dimensions. Le facteur de multiplication effectif obtenu est de  $k = 0,9967435$ . L'écart entre ce dernier et le facteur de multiplication effectif du cœur à deux dimensions en théorie de la diffusion est donc de 274 pcm. La Figure 3.32 détaille l'évolution des flux rapide et thermique d'équilibre au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur  $z$ . Comme attendu, la distribution du flux axial suit la forme d'un sinus.



**FIGURE 3.29** – Flux rapide et thermique d'équilibre du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques appartenant au 5<sup>ème</sup> plan axial obtenus avec APOLLO3®).

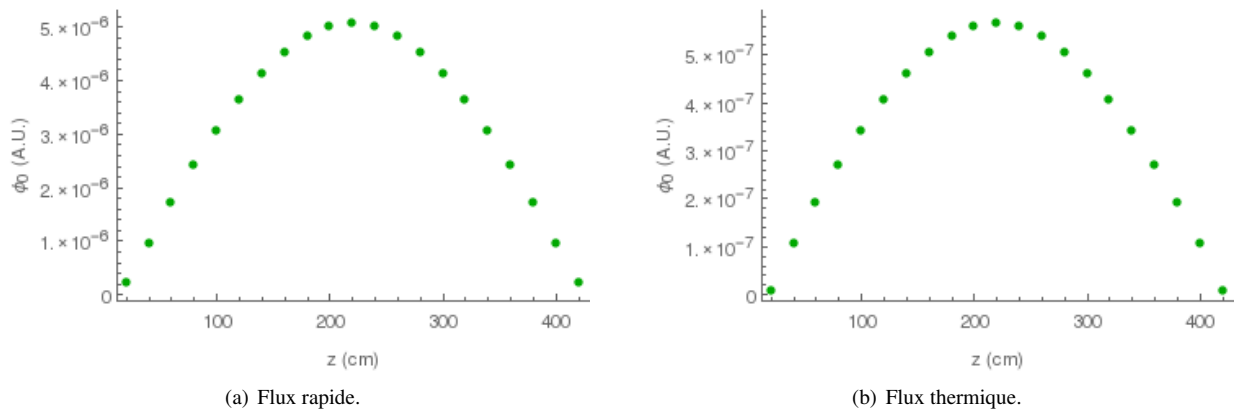


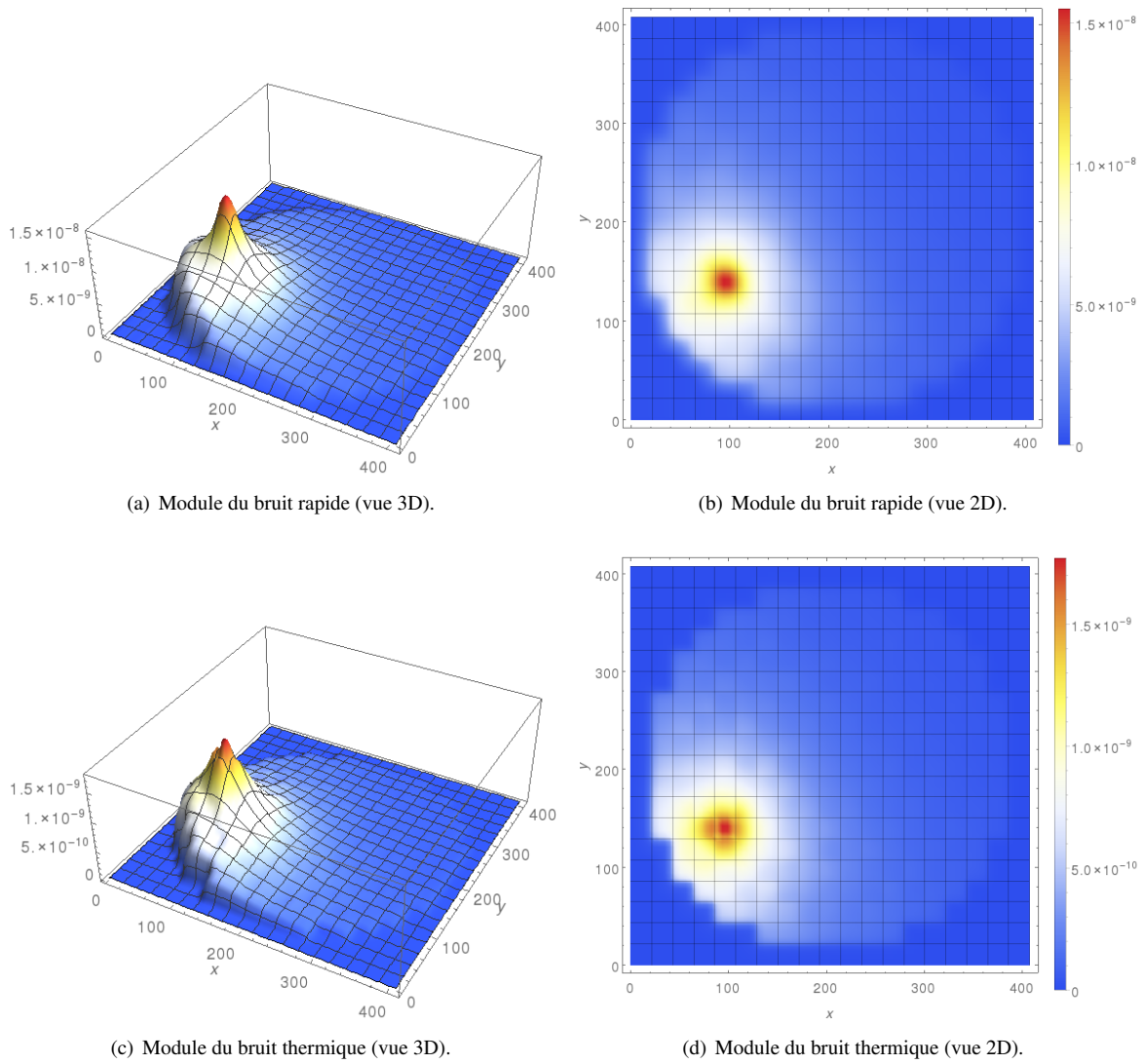
FIGURE 3.30 – Flux rapide et thermique d'équilibre au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur  $z$  du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

### Module et phase du bruit rapide et thermique

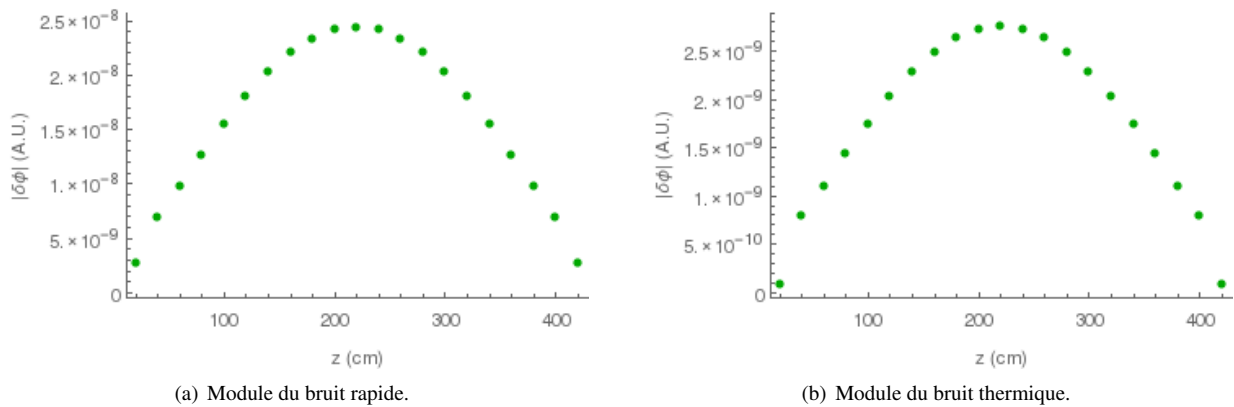
Les Figures 3.31 et 3.33 détaillent les modules et les phases du bruit rapide et thermique obtenus à 3 Hz en théorie de la diffusion. Comme pour le flux d'équilibre, nous constatons assez logiquement que les formes de ces modules et de ces phases suivent celles des nappes du cœur à deux dimensions. Les Figures 3.32 et 3.34 présentent l'évolution des modules et des phases du bruit rapide et thermique au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur  $z$ . Elles montrent que, comme pour le flux d'équilibre, l'amplitude du bruit suit une évolution sinusoïdale en fonction de la hauteur  $z$ . Ceci était attendu puisque le cœur ne présente pas d'hétérogénéités axiales en dehors des zones réflecteurs et que la source de bruit suit, via le flux d'équilibre, une évolution en sinus en fonction de la hauteur. Il serait intéressant d'étudier à l'avenir la même source de bruit mais dans un cœur présentant de fortes hétérogénéités axiales (un réacteur à eau bouillante par exemple, ou en prenant en compte l'usure axiale non uniforme du combustible). Concernant la phase, nous constatons qu'elle n'évolue presque pas en fonction de la hauteur  $z$ . Nous pouvons en conclure que la phase est quasi constante dans tout le cœur.

Une seconde étude de bruit dans ce cœur à trois dimensions a été réalisée en annexe D. Il s'agit de l'analyse d'une propagation axiale d'une perturbation de bas en haut du cœur. Cette étude est un exemple de modélisation numérique qui pourrait être envisagée pour simuler le problème présenté en section 1.3.2 au sujet de la détermination de la vitesse d'écoulement du caloporteur.

Les divers résultats présentés dans cette section, et plus généralement dans ce chapitre, ne constituent qu'une ébauche d'étude de l'impact de quelques sources de bruit sur des systèmes à une, deux ou trois dimensions sans prise en compte des phénomènes des contre-réactions induites par le couplage avec la thermohydraulique. De plus, les comparaisons effectuées avec APOLLO3® entre les théories du transport et de la diffusion et les conclusions associées ne sont évidemment que partielles. Seules des comparaisons plus poussées à de nombreux groupes d'énergie et à l'aide de simulations Monte Carlo pourront à terme donner des conclusions générales sur la pertinence de l'emploi de la théorie de la diffusion en bruit neutronique.



**FIGURE 3.31** – Module du bruit rapide et thermique engendré par une oscillation d'un assemblage dans le cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques appartenant au 5<sup>ème</sup> plan axial obtenus avec APOLLO3®).



**FIGURE 3.32** – Module du bruit rapide et thermique au niveau de l'assemblage perturbé en fonction de la hauteur  $z$  du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

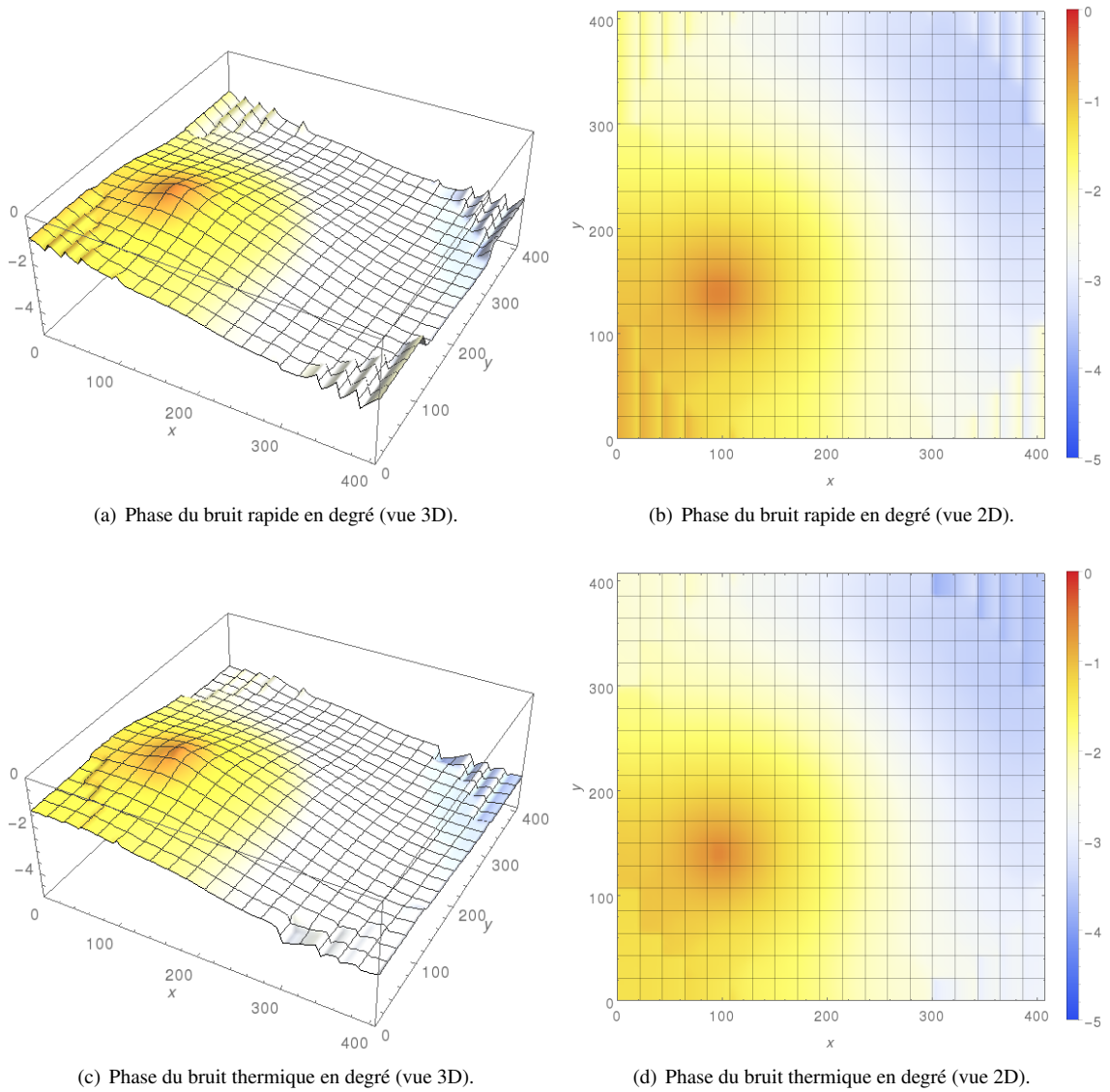


FIGURE 3.33 – Phase du bruit rapide et thermique engendré par une oscillation d’un assemblage dans le cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques appartenant au 5<sup>ème</sup> plan axial obtenus avec APOLLO3®).

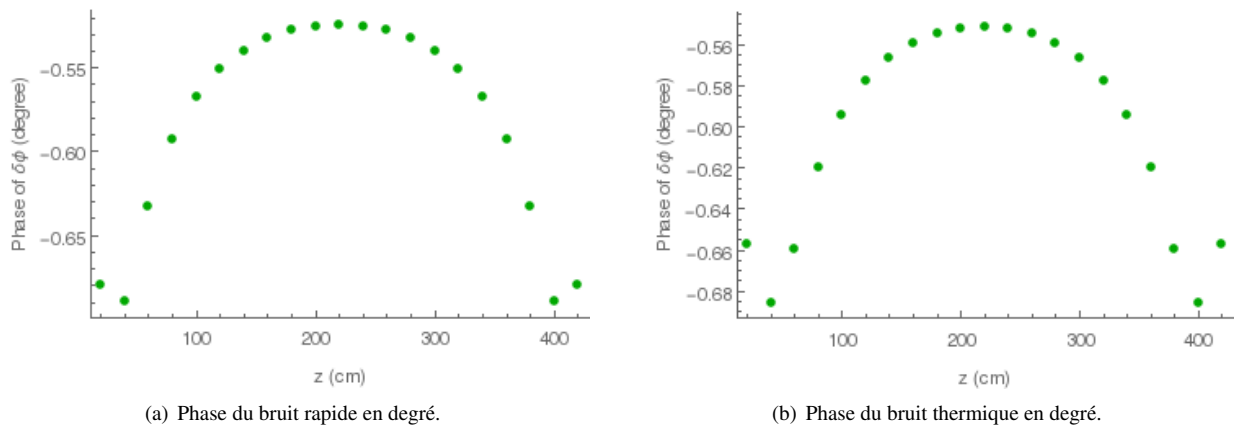


FIGURE 3.34 – Phase du bruit rapide et thermique au niveau de l’assemblage perturbé en fonction de la hauteur  $z$  du cœur à trois dimensions en théorie de la diffusion (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

### 3.4 Résumé du chapitre

Les points clefs suivants ont été développés et détaillés dans ce troisième chapitre :

- **schéma numérique de résolution déterministe** : partant du principe que nous devons ne manipuler que des quantités réelles, nous avons adopté un schéma numérique calqué sur le schéma classique du calcul à source en ajoutant une boucle d'itérations supplémentaire au niveau de la résolution à un groupe afin d'itérer entre la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation du bruit. Ce schéma numérique simple a l'avantage de pouvoir s'implémenter dans n'importe quel code déterministe puisque les solveurs à l'échelle du groupe d'énergie peuvent être utilisés tels quels sans aucune modification (à la condition près qu'ils acceptent des sources et des flux négatifs). Ce schéma général a été implémenté dans une maquette multigroupe à une dimension dite « fil » (en transport et en diffusion) et dans le code de transport déterministe APOLLO3® (dans le solveur réseau IDT uniquement, en transport et en diffusion) ;
- **V&V** : il n'existe pas de benchmarks pour les calculs de bruit neutronique. Nous n'avons eu à notre disposition que quelques résultats analytiques simples en théorie de la diffusion uniquement pour vérifier et valider nos développements. Plusieurs comparaisons entre des résultats analytiques et nos calculs numériques obtenus avec la maquette fil et avec le code APOLLO3® ont été réalisées. Nous avons notamment comparé nos résultats numériques avec les résultats analytiques dans un milieu homogène infini à une, deux et trois dimensions, dans un cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur à une et deux dimensions, et enfin dans un cylindre homogène infini à trois dimensions. Ces quelques comparaisons ne peuvent bien évidemment pas constituer une base de vérification et de validation en tant que telle pour le solveur de bruit neutronique développé dans APOLLO3®. Seules des comparaisons plus poussées avec des données expérimentales et des résultats Monte Carlo permettront à terme de véritablement vérifier et valider ce dernier ;
- **oscillations des sections efficaces** : nous avons étudié l'impact d'une oscillation des sections efficaces macroscopiques sur le flux dans un cœur hétérogène à une dimension avec la maquette fil puis à deux et trois dimensions avec APOLLO3®. Le cœur employé avec APOLLO3® est un grand cœur complet de réacteur à eau légère avec baffle lourd homogénéisé à 2 groupes d'énergie assemblage par assemblage. Nous avons vérifié que nos résultats étaient qualitativement en accord avec des résultats présentés dans la littérature, notamment concernant la comparaison entre la théorie du transport et la théorie de la diffusion.

# Méthodes de résolution stochastique

## Sommaire

<b>4.1 Méthodes avec et sans annihilation des poids</b> . . . . .	<b>77</b>
4.1.1 Rappel sur la méthode de la capture implicite . . . . .	78
4.1.2 Méthode avec annihilation des poids (MCNP4C) . . . . .	79
4.1.3 Nouvelle méthode sans annihilation des poids . . . . .	82
<b>4.2 Comparaison et analyse des deux méthodes Monte Carlo</b> . . . . .	<b>83</b>
4.2.1 Comparaison avec les méthodes déterministes . . . . .	83
4.2.2 Influence de la capture implicite et du facteur $\eta$ . . . . .	87
4.2.3 Des pistes d'amélioration et de réflexion . . . . .	91
<b>4.3 Résumé du chapitre</b> . . . . .	<b>94</b>

Ce quatrième chapitre aborde la question de la résolution stochastique des équations du bruit neutronique. La résolution des équations du bruit par la méthode Monte Carlo n'a été que très peu et que très récemment étudiée dans la littérature. Seulement deux méthodes ont été présentées et testées à ce jour : l'une avec le code Monte Carlo MCNP4C en 2013 et l'autre avec le code MCNP5 en 2015 [130, 162]. Nous allons essentiellement nous focaliser sur la première méthode développée par Toshihiro Yamamoto (Université de Kyoto) dans [162]. Cette méthode Monte Carlo originale, bien que donnant de bons résultats, présente néanmoins quelques faiblesses, notamment celle de devoir utiliser un maillage spatial. En nous basant sur cette méthode et sur celle mise en place récemment dans TRIPOLI-4® pour résoudre le problème à valeur propre  $\alpha$  [166], nous avons développé une nouvelle méthode Monte Carlo plus performante, plus facile à mettre en œuvre et qui n'impose pas l'utilisation d'un maillage. Ces deux méthodes ont été implémentées dans la maquette fil. La nouvelle méthode que nous avons mise en place pourrait être implémentée dans TRIPOLI-4®.

Ce chapitre se divise en deux sections : la première présentera la méthode stochastique développée dans [162] et celle que nous avons mise en place, et la seconde détaillera leurs comparaisons et apportera quelques éléments d'analyse sur le comportement des algorithmes à hautes et basses fréquences. Nous résumerons les points clés de ces développements en fin de chapitre.

*L'ensemble des travaux présentés dans ce chapitre a été réalisé en collaboration avec Andrea Zoia.*

## 4.1 Méthodes avec et sans annihilation des poids

Cette section détaille la méthode Monte Carlo développée par Toshihiro Yamamoto dans [162], méthode basée sur une technique d'annihilation des poids et sur une section efficace totale complexe, ainsi que la nouvelle méthode que nous avons mise en place qui n'impose pas l'utilisation d'une technique d'annihilation des poids et qui est basée sur une section efficace totale réelle. Mais, avant tout cela, nous allons faire un petit rappel sur les techniques de biaisage en Monte Carlo en détaillant la méthode classique de la capture implicite.

La méthode proposée par [130] étant très différente des deux méthodes que nous allons aborder, nous avons choisi de la présenter en annexe E.



### 4.1.1 Rappel sur la méthode de la capture implicite

Une simulation Monte Carlo est dite analogue quand le modèle stochastique reproduit le plus exactement possible le phénomène physique étudié [98, 148]. En neutronique, les simulations Monte Carlo ne sont que très rarement analogues car les phénomènes physiques sont souvent biaisés pour accélérer les calculs. Prenons l'exemple le plus élémentaire et le plus utilisé en neutronique : la capture implicite.

Lors d'une collision, le neutron a une probabilité  $p_s = \Sigma_{0,s0}/\Sigma_{0,t}$  de diffuser et une probabilité  $1 - \Sigma_{0,s0}/\Sigma_{0,t}$  d'être absorbé (c'est-à-dire d'être capturé ou de créer une fission). Le poids statistique de la particule est  $w = 1$  et ne change pas au cours de la simulation. Le poids de la particule n'est donc pas affecté par la collision. Lorsqu'une particule n'est pas diffusée mais qu'elle est absorbée, son histoire se termine et elle ne contribuera plus à la statistique. Or, créer une particule coûte cher et c'est généralement une perte de performance que d'autoriser l'absorption, c'est-à-dire la mort de la particule. C'est pourquoi nous biaisons volontairement l'absorption en l'éliminant. Nous imposons pour cela une probabilité de scattering de  $\tilde{p}_s = 1$  et non plus de  $p_s < 1$ . Cependant, pour conserver les propriétés statistiques du problème, il faut impérativement biaiser le poids de la particule pour que le produit poids  $\times$  probabilité soit conservé. Le poids de la particule après collision doit donc être :

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= w \frac{p_s}{\tilde{p}_s}, \\ &= w \frac{\Sigma_{0,s0}}{\Sigma_{0,t}}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Par ce biaisage, nous avons donc interdit l'absorption des particules. Or, deux problèmes se posent : comment créer une fission si l'absorption est toujours interdite et quand se termine l'histoire de la particule s'il n'existe pas de fuites ?

Pour répondre à la première question, nous utilisons exactement la même méthode : nous forçons la probabilité  $p_f = \Sigma_{0,f}/\Sigma_{0,t}$  de créer une fission à  $\tilde{p}_f = 1$  et nous biaisons le poids des particules ainsi créées par  $\Sigma_{0,f}/\Sigma_{0,t}$ <sup>1</sup> (on dit alors que l'on force la fission). Attention, ce sont les poids des particules créées par fission qui sont biaisés, pas le poids du neutron incident qui va continuer son histoire. Le poids de ce neutron incident n'est biaisé que par  $\Sigma_{0,s0}/\Sigma_{0,t}$ .

À chaque fois que nous biaisons un poids, celui-ci diminue et tend vers zéro au fur et à mesure des collisions. Or, lorsque le poids d'une particule devient trop faible, sa contribution (éventuelle) au calcul n'est plus significative face aux ressources engagées pour sa simulation. C'est pourquoi on utilise la méthode dite de la roulette russe qui s'applique à chaque particule à la fin de chaque collision et qui se décrit de la manière suivante :

1. nous définissons un poids de seuil  $w_{\min} < 1$  et une probabilité de survie  $P = w < 1$  ( $w$  étant le poids de la particule après collision) ;
2. si la particule suivie a un poids supérieur à  $w_{\min}$ , rien ne se passe et la particule continue son histoire avec le même poids. Si la particule suivie a un poids inférieur à  $w_{\min}$ , un nombre aléatoire  $\xi$  est tiré uniformément entre 0 et 1 et :
  - si  $\xi \leq P$  alors la particule survit et voit son poids modifié et devenir égal à 1 (ce qui correspond au poids initial qui est attribué à la particule lors de sa création) ;
  - si  $\xi > P$  alors la particule est tuée ;
3. en pratique, le poids de seuil choisi est souvent 0,25 (norme MCNP) ou 0,8 (norme TRIPOLI).

La roulette russe conserve le poids moyen. En effet, avant la roulette, la particule a une probabilité  $p = 1$  d'avoir un poids de  $w$  et a, après la roulette, une probabilité  $P = w$  d'avoir un poids de  $W = 1$ , ce qui donne bien  $pw = PW$ . La roulette russe permet donc d'éliminer les particules à très faible poids et rend possible les calculs sans fuites avec capture implicite.

Dans tout le reste de ce chapitre, nous appelons « capture implicite » l'ensemble de cette méthode, c'est-à-dire le biaisage du poids par  $\Sigma_{0,s0}/\Sigma_{0,t}$  lors de chaque collision, l'application de la roulette russe et le biaisage de la fission. C'est sous cette forme que la capture implicite est implémentée dans les codes Monte Carlo industriels tels que TRIPOLI-4® ou MCNP.

1. En pratique, ce n'est pas le poids que nous biaisons directement mais plutôt le nombre de neutrons créés lors de la fission, c'est-à-dire que ce nombre  $n_f$ , initialement égal à  $\text{Int}(\nu + \xi)$ , devient égal à  $\text{Int}(\nu \Sigma_{0,f}/\Sigma_{0,t} + \xi)$  avec  $\xi$  un nombre aléatoire uniformément tiré entre 0 et 1. Ceci revient au même puisque le poids total des  $n_f$  particules créées par la fission est égal à  $n_f w$ .

### 4.1.2 Méthode avec annihilation des poids (MCNP4C)

En neutronique, la résolution d'équations complexes n'est pas le propre des problèmes de bruit. En effet, les équations issues de la théorie des fuites hétérogènes peuvent elles aussi être résolues dans le domaine fréquentiel. C'est d'ailleurs via ce type d'équations que Yamamoto a commencé à travailler sur la résolution des équations complexes en Monte Carlo [160, 161]. L'étude de ce premier problème lui a permis de mettre au point, à l'aide de MCNP4C, la méthode que nous allons décrire dans la suite de cette section et qui est clairement détaillée par son auteur dans [162]. Yamamoto a aussi récemment mis à profit ces travaux en proposant une nouvelle méthode Monte Carlo pour déterminer le CPSD (« cross power spectral density » dont la définition est donnée en section 1.2.1) dans les ADS (« accelerator-driven systems ») ainsi qu'une nouvelle méthode Monte Carlo concernant la détermination des paramètres cinétiques  $\beta_{\text{eff}}$  et  $\Lambda_{\text{eff}}$  via l'introduction de perturbations complexes [163, 164].

Pour fixer les idées, reprenons l'équation linéaire du bruit introduite en section 2.1.1, qui, à seulement un groupe de précurseurs, s'écrit :

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}(r, E) + i\frac{\omega}{v}) \delta\Psi(r, \vec{\Omega}, E, \omega) &= \iint \Sigma_{0,s}(r, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \delta\Psi(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\ &+ \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \beta)\chi_p(E) + \left( \frac{\lambda^2 \beta}{\lambda^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda \beta \omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \chi_d(E) \right] \iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta\Psi(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\ &+ S(r, \vec{\Omega}, E, \omega). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Rappelons que, la valeur propre  $k$  étant fixée, il s'agit de résoudre un problème à source et non un problème critique.

#### Des poids complexes

Une façon intuitive de résoudre une équation complexe en théorie Monte Carlo est de travailler avec des particules possédant non plus un seul mais deux poids que nous noterons  $w(\omega) = \{w_{\Re}(\omega), w_{\Im}(\omega)\}$ . Les parties réelle et imaginaire de ce nouveau poids à valeur complexe peuvent être positives ou négatives. Chaque estimateur de trace ou de collision aura donc lui aussi une partie réelle pour encaisser les poids réels et une partie imaginaire pour encaisser les poids imaginaires.

#### Un scattering inchangé

Comme le montre l'Eq 4.2, l'opérateur de scattering de l'équation du bruit est strictement identique à l'opérateur de scattering des calculs stationnaires. La gestion du scattering est donc inchangée par rapport à ces derniers.

#### Une section efficace totale complexe

Dans la méthode développée par Yamamoto, la section efficace complexe  $\Sigma_{0,t} + i\frac{\omega}{v}$  est directement utilisée. Or, en l'absence de perturbations, la densité de probabilité de faire une collision après avoir parcouru un chemin  $s$  sans collision est définie par  $e^{-\tau} d\tau$  avec  $\tau = \int_0^s \Sigma_{0,t}(r, E) dr$ . Cela voudrait dire qu'en calcul de bruit cette même « densité de probabilité » serait définie par  $e^{-\tau'} d\tau'$  avec  $\tau' = \int_0^s (\Sigma_{0,t}(r, E) + i\frac{\omega}{v}) dr$ . Afin de donner une interprétation probabiliste à une telle expression, Yamamoto propose d'employer la probabilité utilisée en calcul stationnaire et de biaiser les poids de façon à respecter le produit poids  $\times$  probabilité. Après un  $j^{\text{ème}}$  parcours de longueur  $s_j$ , le poids complexe  $w_j$  est donc biaisé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_j &= w_j \frac{e^{-\int_0^{s_j} (\Sigma_{0,t}(r, E) + i\frac{\omega}{v}) dr}}{e^{-\int_0^{s_j} \Sigma_{0,t}(r, E) dr}}, \\ &= w_j e^{-i\frac{\omega}{v} s_j}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les poids sont ainsi continûment biaisés tout au long du parcours de la particule. De fait, le calcul de l'estimateur de trace est plus complexe que celui calculé en condition stationnaire et est décrit par :

$$\begin{aligned} TL_j &= \int_0^{s_j} w_j e^{-i\frac{\omega}{v} r} dr, \\ &= w_j \frac{v}{\omega} \left[ \sin\left(\frac{\omega}{v} s_j\right) + i \left( \cos\left(\frac{\omega}{v} s_j\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### Un opérateur de fission complexe

La probabilité d'avoir une fission est égale à  $\Sigma_{0,f}/\Sigma_{0,t}$  comme dans le cas stationnaire. En appliquant la capture implicite décrite en section 4.1.1, le nombre de particules créées par fission est de  $\text{Int}(\nu\Sigma_{0,f}/\Sigma_{0,t} + \xi)$  avec  $\xi$  un

nombre aléatoire uniformément tiré entre 0 et 1. Or, le spectre de fission est maintenant complexe. Il faut donc biaiser le poids, noté  $w^*$ , de chaque nouvelle particule créée par fission de la façon suivante :

$$w^* = \frac{w}{k\chi(E)} \left[ (1 - \beta)\chi_p(E) + \left( \frac{\lambda^2\beta}{\lambda^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda\beta\omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \chi_d(E) \right], \quad (4.5)$$

avec  $w$  le poids avant la collision et  $\chi(E) = (1 - \beta)\chi_p(E) + \beta\chi_d(E)$  le spectre total.

### Deux roulettes russes indépendantes

Par défaut, la capture implicite est activée dans cette méthode et la roulette russe est appliquée de la façon suivante :

1. deux roulettes russes indépendantes sont appliquées respectivement sur la valeur absolue de la partie réelle et de la partie imaginaire du poids de la particule ;
2. la particule n'est tuée que si la partie réelle et la partie imaginaire sont tuées en même temps par ces deux roulettes indépendantes ;
3. si seulement la partie réelle ou la partie imaginaire survit, la particule survit ;
4. lorsque la partie réelle et/ou la partie imaginaire survit, sa valeur est réinitialisée à  $\pm 1$  selon son signe avant la roulette russe (donc à  $-1$  si la valeur était négative et  $+1$  si elle était positive) ;
5. les poids minima des deux roulettes sont choisis identiques (et égaux à 0,25 par défaut dans l'ensemble de nos simulations).

### La « binning procedure »

La méthode développée par Yamamoto pourrait s'arrêter là : le calcul à source serait alors géré exactement comme dans un calcul classique. Ceci fonctionne mais que pour une plage de fréquences bien précise<sup>2</sup> : la région plateau et le début de la région des hautes fréquences (voir section 2.3.1 pour un rappel sur la définition des hautes et des basses fréquences qui sont, rappelons-le, délimitées par les fréquences de coupure de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  du système étudié). À basses fréquences et à très hautes fréquences, ceci ne fonctionne plus lorsque la capture implicite est activée. Nous constatons en effet une explosion du nombre de particules créées par le processus de fission rendant le calcul non viable (nous analyserons ce phénomène plus en détail en section 4.2.2). Plus précisément, nous constatons que la somme des parties réelles (resp. imaginaires) positives et la somme des parties réelles (resp. imaginaires) négatives des poids divergent. Pour pallier ce problème, Yamamoto propose de compenser les parties positives et négatives des parties réelles et imaginaires des poids en utilisant une méthode d'annihilation des poids appelée la « binning procedure » [24, 158]. Cette méthode, appliquée à chacun des batches indépendants du calcul à source, est basée sur un algorithme très similaire à celui du calcul critique, c'est-à-dire que chaque particule créée par fission au cours d'une génération est stockée et va être utilisée pour initialiser les sources de fission de la génération suivante. Cet algorithme, résumé en Fig. 4.1, s'organise comme suit :

1. les régions fissiles de la géométrie sont finement maillées par des mailles spatiales (« bins »). Soit  $p$  le nombre total de bins ;
2. au cours d'une génération, les particules créées par fission sont stockées dans chaque bin correspondant au lieu de la fission ;
3. à la fin de chaque génération, les poids des particules sont sommés dans chaque bin et à chacun de ces  $p$  bins va correspondre un poids total de  $w_q = \sum_{j=1}^{n_q} w_{\text{part } j}$  avec  $n_q$  le nombre de particules stockées dans le bin  $q$  ;
4. le nouveau nombre  $m_q$  de particules sources pour la génération suivante est égal à  $\text{Int}(\text{Max}(|\Re(w_q)|, |\Im(w_q)|), 1)$  avec  $\text{Int}()$  la partie entière. Afin de préserver le poids total, ces  $m_q$  particules vont toutes être initialisées avec un poids identique de  $w_q/m_q$  et échantillonnées uniformément sur le bin  $q$  correspondant (ceci est licite seulement si la fission est toujours supposée isotrope) ;
5. le batch se termine lorsqu'à la fin d'une génération  $\sum_q m_q = 0$  (donc lorsqu'il n'y a plus aucune particule source pour la génération suivante).

Cette méthode d'annihilation des poids est robuste (pourvu que le maillage soit suffisamment fin) mais contraire à l'esprit des calculs Monte Carlo, qui, par essence, doivent s'affranchir de tout maillage spatial quel qu'il soit.

2. Dans [162], l'auteur ne précise pas que sa méthode fonctionne sans l'emploi de la « binning procedure » pour cette plage de fréquences. Nous l'avons constaté en implémentant sa méthode et en la testant pour diverses fréquences.

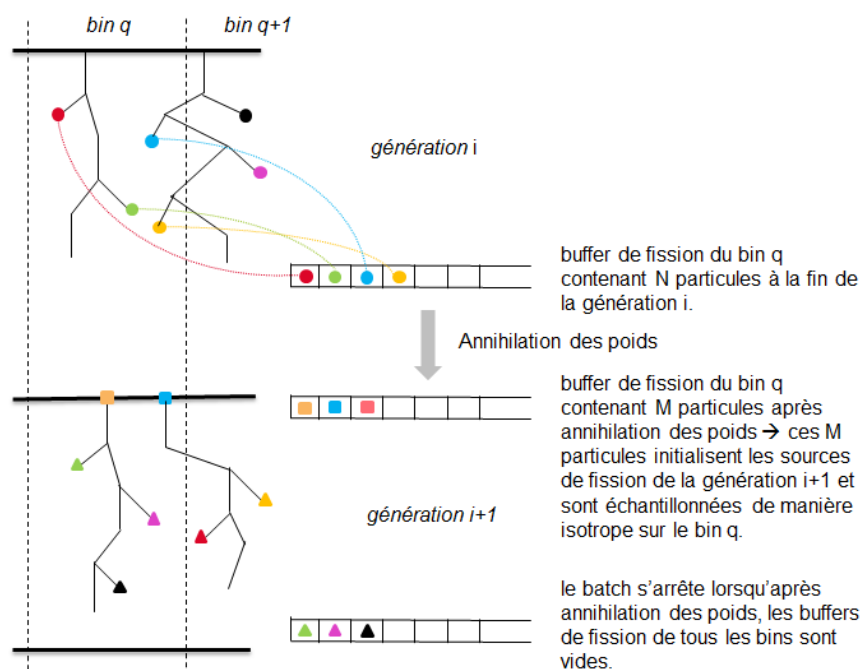


FIGURE 4.1 – Schéma général de la « binning procedure » appliqué à chaque batch indépendant dans la méthode de Yamamoto.

La méthode développée par Yamamoto et testée dans MCNP4C peut se résumer en trois points clefs :

- l'utilisation de poids complexes,
- l'utilisation d'une section efficace totale complexe, ce qui implique un biaisage continu des poids lors du déplacement,
- l'utilisation d'une méthode d'annihilation des poids imposant l'emploi d'un maillage spatial fin et, pour chacun des batches indépendants, l'emploi d'un algorithme très similaire à celui du calcul critique.

Dans la nouvelle méthode que nous avons mise en place, nous avons cherché à nous affranchir de l'utilisation d'une section efficace totale complexe qui alourdit grandement le déplacement de la particule, et de l'utilisation d'une méthode d'annihilation des poids. Précisons que, dans l'article original [162], Yamamoto a implémenté sa méthode dans la boucle critique du code MCNP4C et n'a donc fait que des calculs à un seul et unique batch, sans pouvoir calculer les erreurs statistiques. Ce n'est pas le cas dans nos simulations, puisque nous avons implémenté cette méthode dans la maquette fil et nous avons pu calculer les erreurs statistiques grâce aux nombreux batches indépendants que nous lançons pour chaque simulation.

### 4.1.3 Nouvelle méthode sans annihilation des poids

La nouvelle méthode que nous allons décrire à présent s'inspire de celle récemment développée dans TRIPOLI-4® pour résoudre le problème à valeur propre  $\alpha$  [166]. Comme dans la méthode présentée en section précédente, nous allons utiliser des particules à poids complexes.

#### Une section efficace totale réelle

Le point de départ de cette nouvelle méthode est l'ajout du terme  $\frac{\eta - i}{\eta} \eta \frac{\omega}{v}$  (avec  $\eta$  un réel de même signe que  $\omega$ ) aux deux membres de l'Eq 4.2. Cette dernière devient alors :

$$\begin{aligned} & \left( \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}(r, E) + \eta \frac{\omega}{v} \right) \delta \Psi(r, \vec{\Omega}, E, \omega) = \frac{\eta - i}{\eta} \eta \frac{\omega}{v} \delta \Psi(r, \vec{\Omega}, E, \omega) \\ & + \iint \Sigma_{0,s}(r, \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \delta \Psi(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\ & + \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \beta) \chi_p(E) + \left( \frac{\lambda^2 \beta}{\lambda^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda \beta \omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \chi_d(E) \right] \iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta \Psi(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\ & + S(r, \vec{\Omega}, E, \omega). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nous travaillons ainsi avec une nouvelle section efficace totale réelle et positive  $\tilde{\Sigma}_{0,t} = \Sigma_{0,t} + \Sigma_{f,\omega}$  où  $\Sigma_{f,\omega} = \eta \frac{\omega}{v} > 0$ <sup>3</sup>. Le déplacement de la particule se fait donc exactement comme dans les calculs stationnaires mais en utilisant la section  $\tilde{\Sigma}_{0,t}$  et non plus  $\Sigma_{0,t}$ . L'estimateur de trace est ainsi calculé aussi simplement que dans les calculs stationnaires :

$$\begin{aligned} TL_j &= \int_0^{s_j} w_j dr, \\ &= w_j s_j. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tout comme dans la méthode précédente, le scattering est aussi traité comme dans les calculs stationnaires.

#### Une nouvelle pseudo-fission $\omega$

Nous avons donc « concentré » tous les opérateurs complexes et tous les biaisages au moment de la collision. Nous avons maintenant à traiter deux types de fission : la fission dite « normale » de probabilité  $\Sigma_{0,f}/\tilde{\Sigma}_{0,t}$  que nous traitons exactement comme dans la méthode de Yamamoto (sauf que nous utilisons  $\tilde{\Sigma}_{0,t}$  et non plus  $\Sigma_{0,t}$ ), et une pseudo-fission que nous notons «  $\omega$ -fission » de probabilité  $\Sigma_{f,\omega}/\tilde{\Sigma}_{0,t}$ . Cette nouvelle  $\omega$ -fission affecte le flux angulaire et non le flux scalaire. Les particules ainsi créées sont de simples copies du neutron incident mais avec un nouveau poids  $w^{**}$  défini par :

$$w^{**} = w \frac{\eta - i}{\eta}. \quad (4.8)$$

Lorsque la capture implicite est activée, la roulette russe est appliquée de la même manière que dans la méthode précédente.

#### La désactivation de la capture implicite

Puisque la  $\omega$ -fission affecte le flux angulaire et non le flux scalaire, la méthode d'annihilation des poids utilisée par Yamamoto n'est plus valable avec notre nouvelle méthode (il aurait fallu que nous rajoutions un maillage angulaire en plus du maillage spatial). Nous ne l'avons donc pas appliquée et nous avons ainsi employé l'algorithme classique du calcul à source.

La nouvelle méthode ainsi présentée fonctionne pour toutes les fréquences de la région plateau et du début de la région des hautes fréquences avec la capture implicite activée et un  $\eta$  égal à 1. Comme nous allons le voir dans les résultats suivants cette section, il nous a suffi de désactiver la capture implicite pour réaliser les calculs à basses fréquences et à très hautes fréquences, et d'adapter en plus la valeur du facteur  $\eta$  pour les calculs à très hautes fréquences à partir d'une certaine limite (nous y reviendrons en détail en section 4.2.2). Cependant, pour le cas très particulier du milieu homogène infini, cette nouvelle méthode n'est pas applicable à hautes et basses fréquences que ce soit avec ou sans capture implicite. Sans que nous puissions donner d'explications précises, l'utilisation de méthodes d'annihilation des poids semble indispensable pour les hautes et basses fréquences dans un milieu homogène infini. Il s'agit du

3. Puisque nous imposons  $\eta > 0$  si  $\omega > 0$  et  $\eta < 0$  si  $\omega < 0$ , la nouvelle section efficace  $\Sigma_{f,\omega}$  est toujours positive.

seul cas où cette nouvelle méthode ne peut donner de résultats pour toutes les fréquences. Néanmoins, comme nous l'avons déjà signalé, seules les fréquences entre 0,01 Hz et 100 Hz sont physiquement intéressantes, et il se trouve que ces fréquences appartiennent très souvent à la région plateau et non aux régions des basses ou des hautes fréquences.

La nouvelle méthode que nous avons développée peut se résumer en cinq points clefs :

- l'utilisation de poids complexes,
- l'utilisation d'une section efficace totale réelle, ce qui implique que le poids n'est plus biaisé lors du déplacement,
- la gestion de deux types de fission,
- la désactivation de la capture implicite à basses fréquences et à très hautes fréquences, et un ajustement du facteur  $\eta$  à très hautes fréquences (à partir d'une certaine limite),
- l'absence de méthodes d'annihilation des poids, ce qui permet l'utilisation de l'algorithme classique du calcul à source.

## 4.2 Comparaison et analyse des deux méthodes Monte Carlo

Dans cette section, nous allons comparer les deux méthodes Monte Carlo décrites précédemment avec des résultats déterministes issus de la maquette fil en théorie de la diffusion et en théorie du transport, et cela dans le cas d'une géométrie hétérogène à 4 groupes d'énergie<sup>4</sup> et 6 groupes de précurseurs. L'influence de la capture implicite et du facteur  $\eta$  de la nouvelle méthode sera ensuite analysée ainsi que le comportement de cette dernière à basses et à très hautes fréquences. Nous concluons cette section en détaillant diverses pistes d'amélioration qu'il serait intéressant d'explorer ou de continuer d'explorer à l'avenir pour optimiser notre nouvelle méthode.

### 4.2.1 Comparaison avec les méthodes déterministes

Le système que nous allons étudier est composé de 17 crayons combustibles de 1,08 cm (avec une distance inter-crayons de 0,36 cm) dans un modérateur avec des conditions de vide aux frontières. La taille du système n'est donc que de 24,48 cm, soit 17 fois plus petite que le cœur décrit en section 3.3.1. Deux variantes seront traitées : la première avec un scattering isotrope où nous comparerons les deux méthodes Monte Carlo, et la deuxième avec une anisotropie de scattering  $P_1$  où nous étudierons, avec la nouvelle méthode, le cas d'une source de bruit anisotrope changeant de signe. Avec un scattering isotrope, la valeur propre du système est de  $k = 0,9993$  en théorie du transport, et avec anisotropie  $P_1$  de  $k = 0,9996$  en théorie du transport. Tous les résultats Monte Carlo ont été obtenus avec 3 000 batches indépendants de 10 000 particules.

Dans un premier temps, nous avons déterminé la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  de notre système sans anisotropie (voir Fig. 4.2). Ceci nous a permis de délimiter la région des basses fréquences ( $< 0,014$  Hz), la région plateau et la région des hautes fréquences ( $> 240$  Hz). Pour le cas où l'anisotropie  $P_1$  est prise en compte, la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  est pratiquement identique (la limite des hautes fréquences est simplement décalée de +30 Hz).

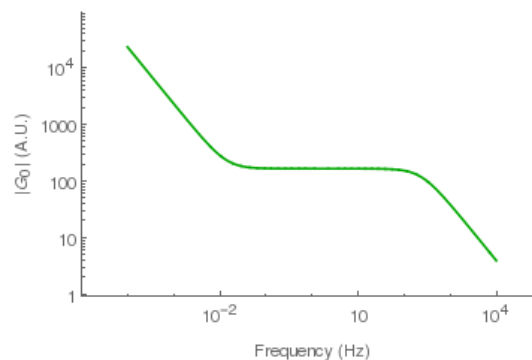


FIGURE 4.2 – Évolution du module de la fonction de transfert fondamentale du système étudié sans anisotropie en fonction de la fréquence.

4. Précisons que nous avons implémenté dans la maquette fil les deux méthodes Monte Carlo pour le cas particulier d'un découpage multigroupe en énergie et non pour le cas général du modèle continu en énergie.

### Source isotrope réelle

Nous travaillons ici avec un scattering isotrope et nous imposons une source de bruit isotrope purement réelle de valeur -1 pour le groupe thermique (groupe 4) dans l'ensemble du 3<sup>ème</sup> crayon. Le Tableau 4.1 détaille les paramètres de calcul de la nouvelle méthode pour chacune des quatre fréquences étudiées : 0,01 Hz (basse fréquence), 1 Hz (région plateau), 2 500 Hz (très haute fréquence, il n'est pas encore nécessaire d'ajuster la valeur du facteur  $\eta$ , seule la capture implicite doit être désactivée) et 10 000 Hz (très haute fréquence, il est nécessaire d'ajuster la valeur du facteur  $\eta$  en plus de désactiver la capture implicite)<sup>5</sup>. Pour la méthode de Yamamoto, la « binning procedure » est toujours appliquée (avec au total 302 bins correspondant exactement au maillage utilisé pour les calculs déterministes) et la capture implicite est activée.

TABLEAU 4.1 – Paramètres de calcul de la nouvelle méthode Monte Carlo

	0,01 Hz	1 Hz	2 500 Hz	10 000 Hz
Capture implicite	désactivée	activée	désactivée	désactivée
Facteur $\eta$	1	1	1	100

La Figure 4.3 présente les résultats ainsi obtenus pour le groupe rapide (groupe 1) et le groupe thermique (groupe 4). Nous constatons que les deux méthodes Monte Carlo donnent de bons résultats et sont cohérents avec les résultats déterministes.

Nous allons maintenant comparer les performances des deux méthodes Monte Carlo. Comme le montrent les figures de mérite<sup>6</sup> (FoM) des différentes simulations présentées dans le Tab. 4.2, notre nouvelle méthode a une meilleure FoM que celle développée par Yamamoto pour les basses fréquences et la région plateau. Ceci vient du fait que nous travaillons avec une section efficace totale purement réelle, ce qui rend la gestion du déplacement et le calcul de l'estimateur de trace beaucoup plus rapide. Néanmoins, notre nouvelle méthode n'a pas une meilleure FoM à très hautes fréquences (nous y reviendrons en détail en section 4.2.2). Nous constatons donc que, sur la plage de fréquences d'intérêt située entre 0,01 Hz et 100 Hz, notre méthode est sensiblement plus performante que celle proposée par Yamamoto.

TABLEAU 4.2 – Figures de mérite des calculs Monte Carlo

	0,01 Hz	1 Hz	2 500 Hz	10 000 Hz
Méthode de Yamamoto	1,00	3,21	9,45	17,88
Nouvelle méthode	2,78	7,88	7,69	3,37

### Source anisotrope complexe

Afin d'étudier une source anisotrope complexe, nous allons prendre en compte une anisotropie  $P_1$  (tous les coefficients de diffusion  $D_g$  sont alors égaux à  $1/(\Sigma_{0,t}^g - \Sigma_{0,s1}^g)$ ) et imposer une oscillation sinusoïdale de 3 Hz à toutes les sections efficaces macroscopiques du 3<sup>ème</sup> crayon. De la même manière qu'en section 3.3.1, l'amplitude des oscillations est de 0,5% autour de la valeur d'équilibre des sections efficaces. Les termes perturbés des sections efficaces sont donc définis par :

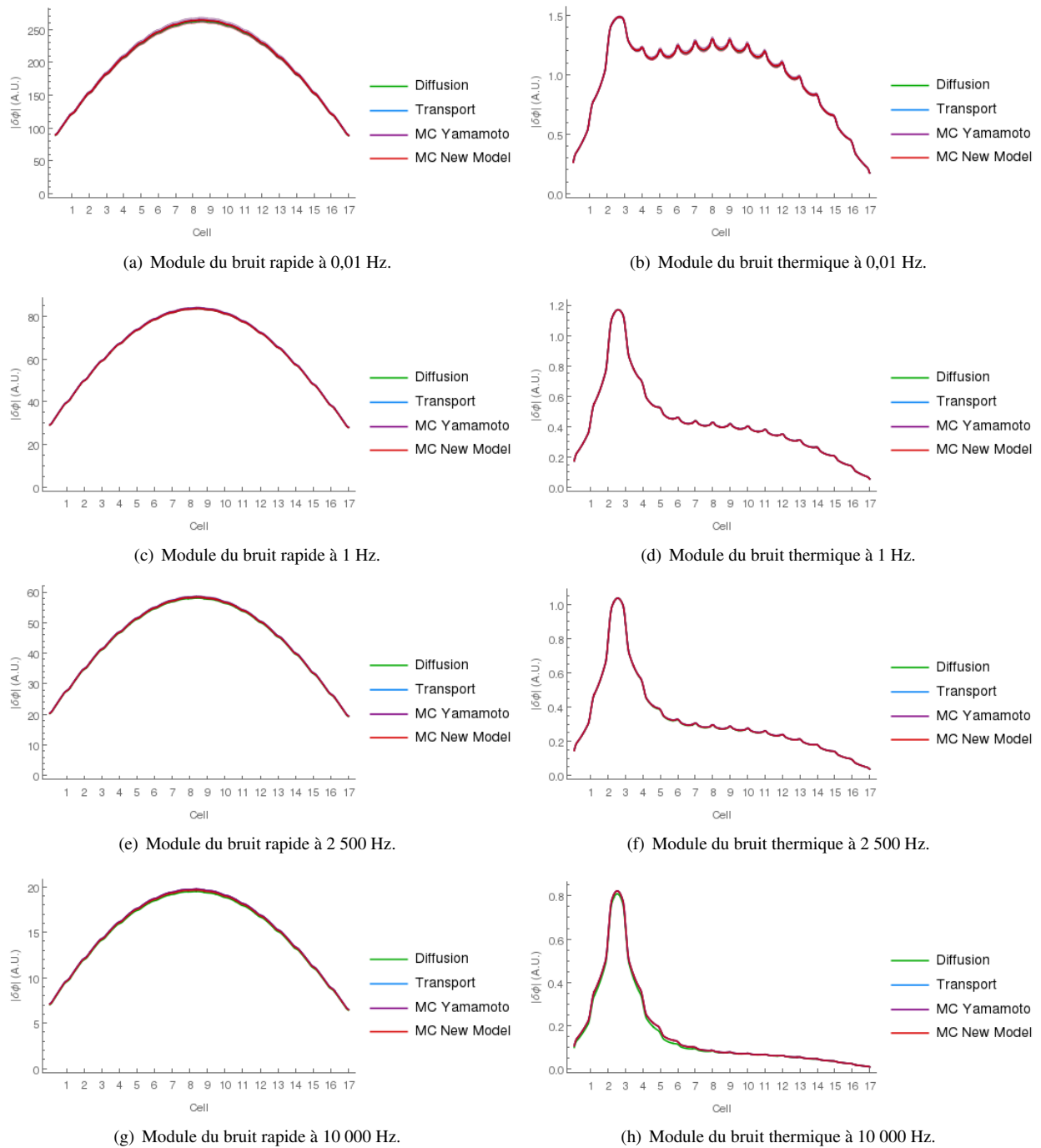
$$\delta\Sigma(r, E, t) = 0,5\% \Sigma_0(r, E) \cos(\omega_0 t), \quad (4.9)$$

avec  $\omega_0$  la fréquence angulaire de la perturbation. Nous n'allons employer ici que la nouvelle méthode Monte Carlo. Compte tenu de la fréquence de la source de bruit, la capture implicite peut être activée et nous pouvons simplement imposer  $\eta = 1$ . La Figure 4.4 présente les flux rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) d'équilibre du système (par souci de simplification, seuls les résultats déterministes y sont détaillés). Nous y observons de légères différences entre le transport et la diffusion.

La particularité de la source de bruit choisie est qu'elle est anisotrope et qu'elle change de signe en fonction de l'espace et du groupe d'énergie. En guise d'exemple, la Fig. 4.5 détaille la partie réelle de la source de bruit du groupe 2 en fonction de la maille du 3<sup>ème</sup> crayon (ce crayon est délimité par les mailles 41 et 70). Nous constatons que même si le terme isotrope de la source est positif cela n'implique pas que les deux termes angulaires de la source (vers la droite et vers la gauche) soient tous les deux positifs. Ceci illustre le fait qu'il faille échantillonner avec soin la source de bruit.

5. Même si les fréquences 2 500 Hz et 10 000 Hz n'ont physiquement pas d'intérêt, nous les avons employées afin de tester la robustesse des algorithmes à très hautes fréquences. C'est en effet à partir de ces fréquences que, comme nous allons le voir, les problèmes commencent à arriver.

6. La quantification de la performance d'une simulation Monte Carlo se fait en mesurant la figure de mérite (« Figure of Merit » en anglais) qui se définit par  $\frac{1}{\sigma^2 T}$  où  $\sigma^2$  est la variance des résultats de la simulation et  $T$  le temps de simulation. Ainsi, plus la simulation Monte Carlo converge rapidement, plus la FoM est importante.



**FIGURE 4.3** – Module du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à 0,01 Hz, 1 Hz, 2 500 Hz et 10 000 Hz engendré par une source isotrope réelle. Les résultats Monte Carlo (estimateur de trace) sont présentés avec les barres d’erreur de  $3\sigma$  (peu visibles compte tenu de l’échelle). Tous les résultats ont été obtenus avec la maquette fil.

La Figure 4.6 détaille le module et la phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) engendré par l’oscillation. Nous constatons tout d’abord la très bonne cohérence entre les résultats déterministe et stochastique en théorie du transport. La source de bruit complexe a donc été correctement échantillonnée. Concernant les résultats en théorie de la diffusion (où la source de bruit est de fait isotrope), nous remarquons une différence significative avec ceux issus de la théorie du transport, différence bien plus importante que celle que nous observions en section 3.3.1 lorsque nous imposons la même oscillation au crayon central du 3<sup>ème</sup> assemblage du cœur. Ceci est en accord avec le fait que les effets transports sont principalement des effets locaux en particulier lors des calculs à source où la source est localisée. Ils sont donc, de manière générale, plus prononcés dans les petits systèmes que dans les grands systèmes. De plus, dans notre cas étudié, la somme des sections efficaces d’absorption ne domine pas sur celle des sections efficaces de diffusion, ce qui amplifie les différences entre la diffusion et le transport comme nous l’avons



vu à la section 3.3.1. Enfin, nous vérifions bien que, dans ce petit système, la composante globale du bruit peut être approximée au terme réacteur point et qu'elle domine même pour le groupe thermique (voir section 2.4 pour un rappel sur les propriétés des composantes globales et locales du bruit).

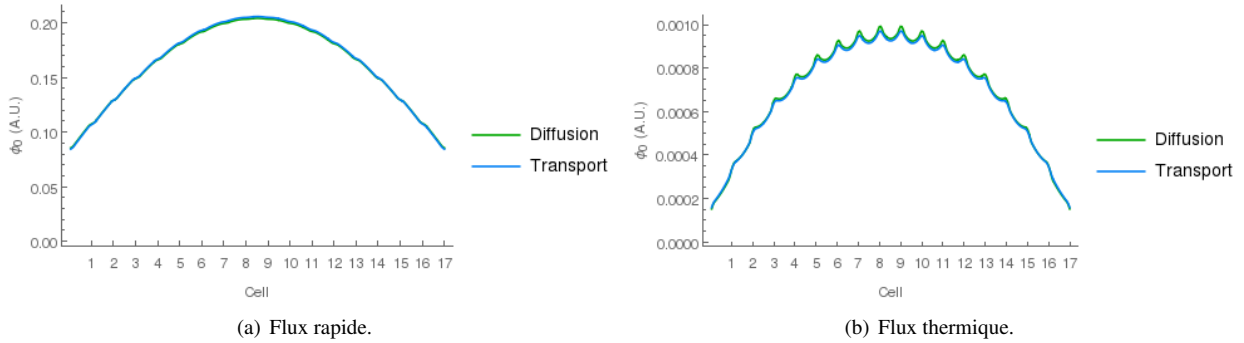


FIGURE 4.4 – Flux rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) d'équilibre du système étudié avec anisotropie  $P_1$  (résultats déterministes obtenus avec la maquette fil).

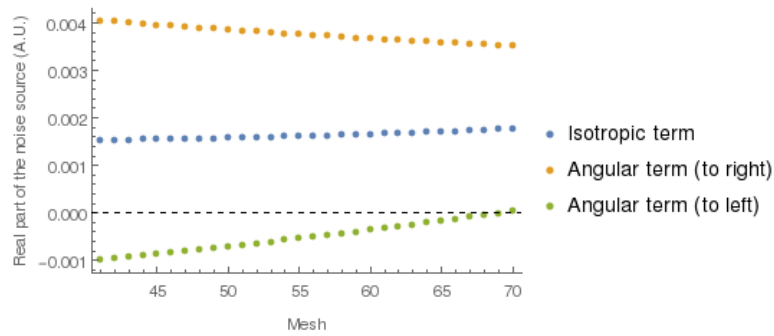


FIGURE 4.5 – Parties réelles des termes isotropes et angulaires de la source de bruit dans le 3<sup>ème</sup> crayon pour le groupe 2 à 3 Hz.

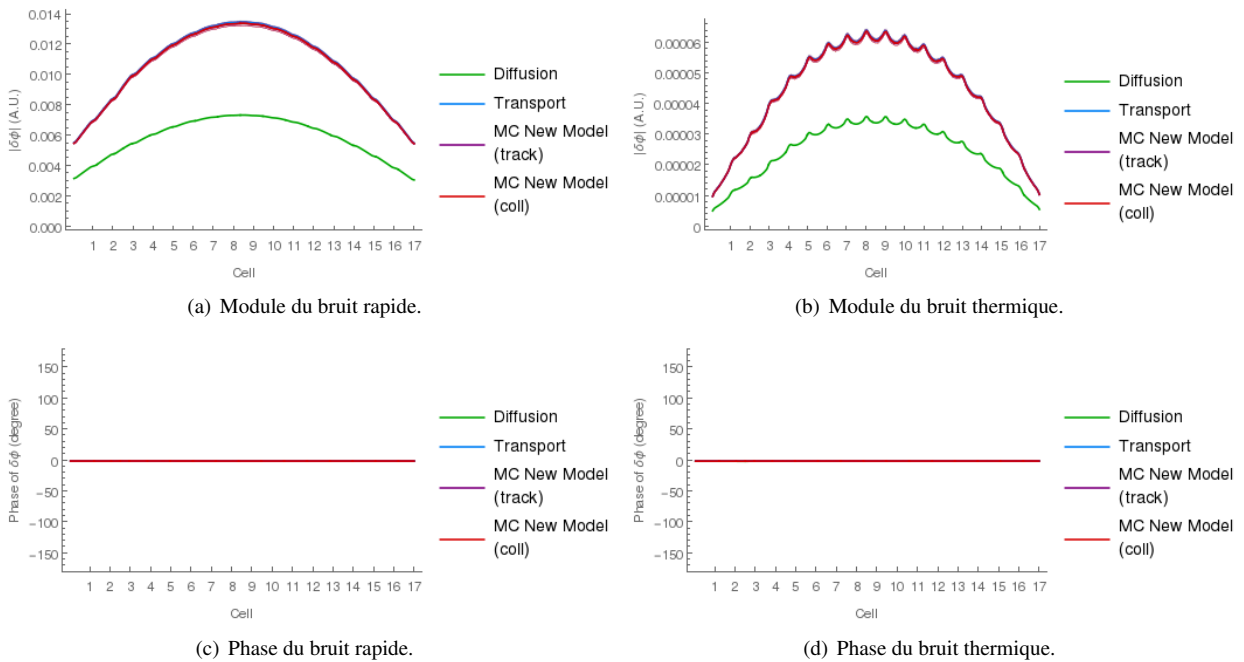


FIGURE 4.6 – Module et phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à 3 Hz engendré par une oscillation des sections efficaces du 3<sup>ème</sup> crayon. Les résultats Monte Carlo (estimateurs de trace et de collision), obtenus avec la nouvelle méthode uniquement, sont présentés avec les barres d'erreur de  $3\sigma$  (peu visibles compte tenu de l'échelle). Tous les résultats ont été obtenus avec la maquette fil.

### 4.2.2 Influence de la capture implicite et du facteur $\eta$

Cette section a pour but d'apporter un éclairage sur le comportement des algorithmes employés à hautes et basses fréquences, et d'étudier l'influence de la capture implicite et du facteur  $\eta$ . Le Tableau 4.3 récapitule les caractéristiques des deux méthodes Monte Carlo décrites précédemment. Les résultats présentés dans cette section sont issus du même problème sans anisotropie que celui étudié en section 4.2.1.

TABLEAU 4.3 – Caractéristiques des deux méthodes Monte Carlo

	Méthode de Yamamoto	Nouvelle méthode
Capture implicite	Activable pour toutes les fréquences.	Activable uniquement sur la région plateau et au début de la région des hautes fréquences.
Annihilation des poids	Indispensable à basses fréquences et à très hautes fréquences si la capture implicite est activée.	Non employée.
Facteur $\eta$	Non employé.	À ajuster à très hautes fréquences à partir d'une certaine limite ( $\eta \approx 100$ ).

#### La capture implicite

Dans la région plateau et jusqu'au début des hautes fréquences (jusqu'à 1 000 Hz environ pour le cas du système étudié en section 4.2.1), nous constatons que les deux méthodes Monte Carlo fonctionnent avec ou sans la capture implicite, et avec ou sans l'annihilation des poids pour le cas de la méthode de Yamamoto. À basses et à très hautes fréquences, la capture implicite doit être désactivée pour la nouvelle méthode, et, concernant la méthode de Yamamoto, la capture implicite doit être désactivée ou la « binning procedure » doit être employée. En guise d'illustration, la Fig. 4.7 détaille l'évolution du nombre de particules et la Fig. 4.8 celle de la somme des parties réelles et imaginaires des poids à 0,01 Hz pour le cas de la nouvelle méthode. Concernant cette dernière, précisons qu'afin de faciliter les comparaisons avec la méthode de Yamamoto, nous avons choisi, pour chacun des batches indépendants, de gérer par génération les particules créées par fission et non pas au fur et à mesure de leur apparition comme cela est fait dans l'algorithme classique du calcul à source. Les deux points de vue (par génération ou au fur et à mesure) sont strictement équivalents puisque nous n'employons pas de techniques d'annihilation des poids.

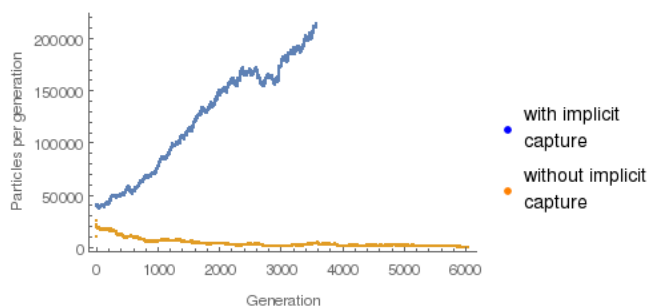
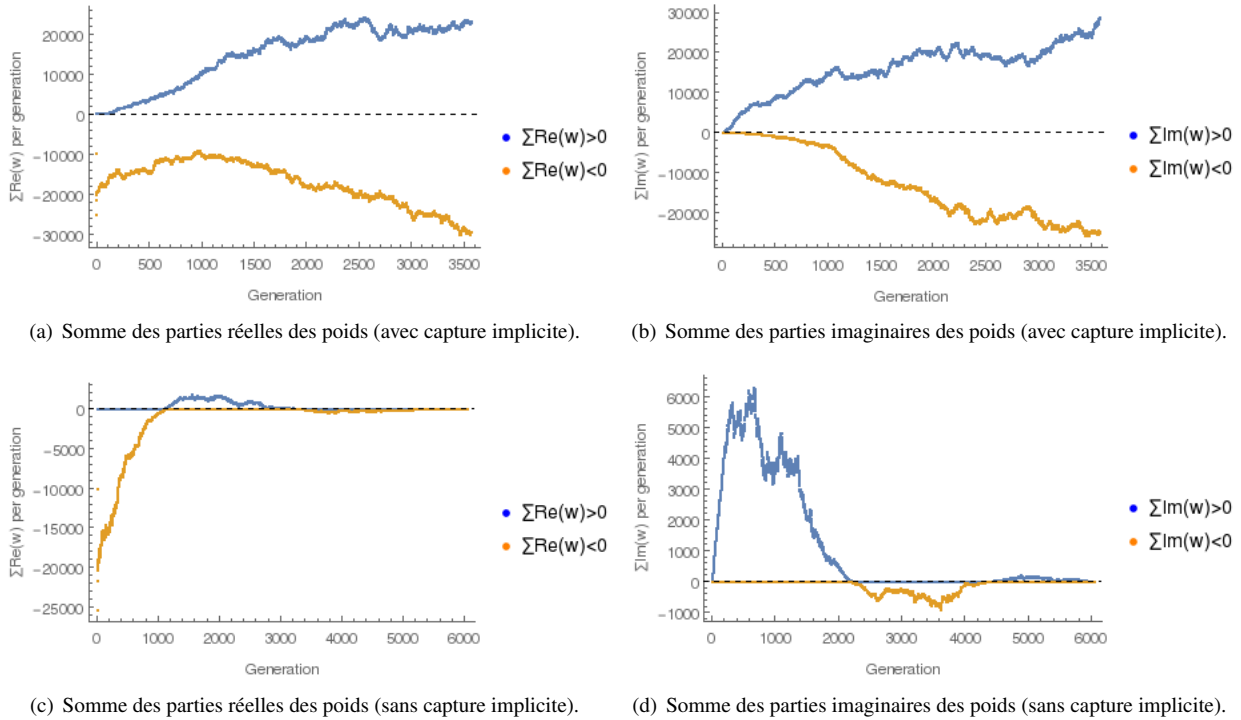


FIGURE 4.7 – Évolution du nombre de particules par génération à 0,01 Hz (résultats obtenus avec la nouvelle méthode).

Sans pour autant pouvoir fournir d'explications précises et détaillées, nous comprenons que c'est à cause de la fission forcée via l'application de la capture implicite que nous constatons une explosion du nombre de particules à basses et à très hautes fréquences. Nous avons effectué de nombreux tests en jouant sur la valeur du poids de seuil des deux roulettes russes mais sans jamais réussir à obtenir de résultats satisfaisants. Si nous ne voulons ou ne pouvons pas appliquer de méthodes d'annihilation des poids, la solution la plus basique mais la plus simple est donc de désactiver la capture implicite. Nous constatons qu'alors les simulations sont viables et donnent de bons résultats.

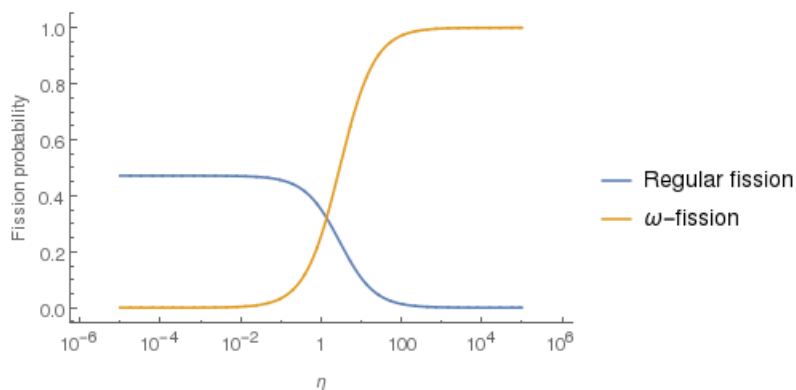
#### Ajustement du facteur $\eta$

Concernant la nouvelle méthode, en plus de devoir désactiver la capture implicite, nous devons ajuster la valeur du facteur  $\eta$  à très hautes fréquences à partir d'une certaine limite (qui est d'environ 5 000 Hz pour le cas du système étudié) pour obtenir de bons résultats. La Figure 4.9 présente l'évolution de la probabilité des fissions normale et  $\omega$  en

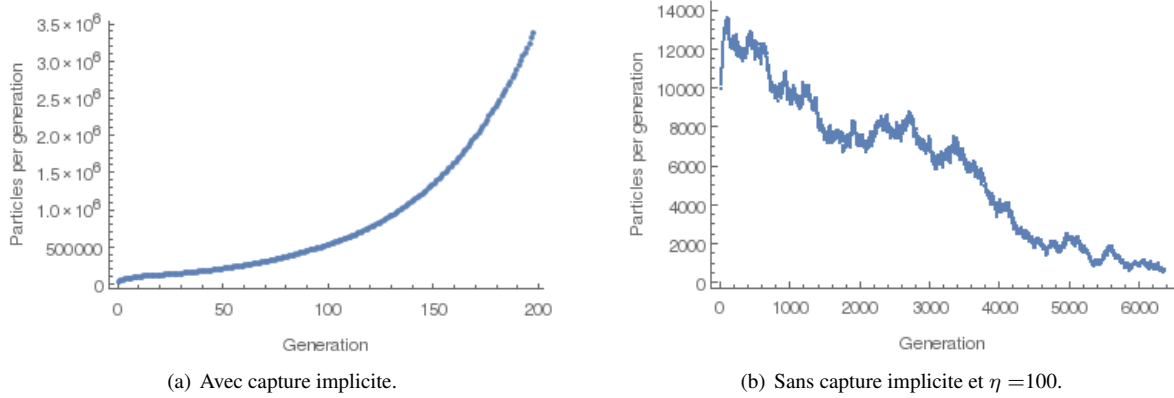


**FIGURE 4.8** – Évolution de la somme des parties réelles et imaginaires des poids de toutes les particules par génération à 0,01 Hz avec ou sans capture implicite (résultats obtenus avec la nouvelle méthode).

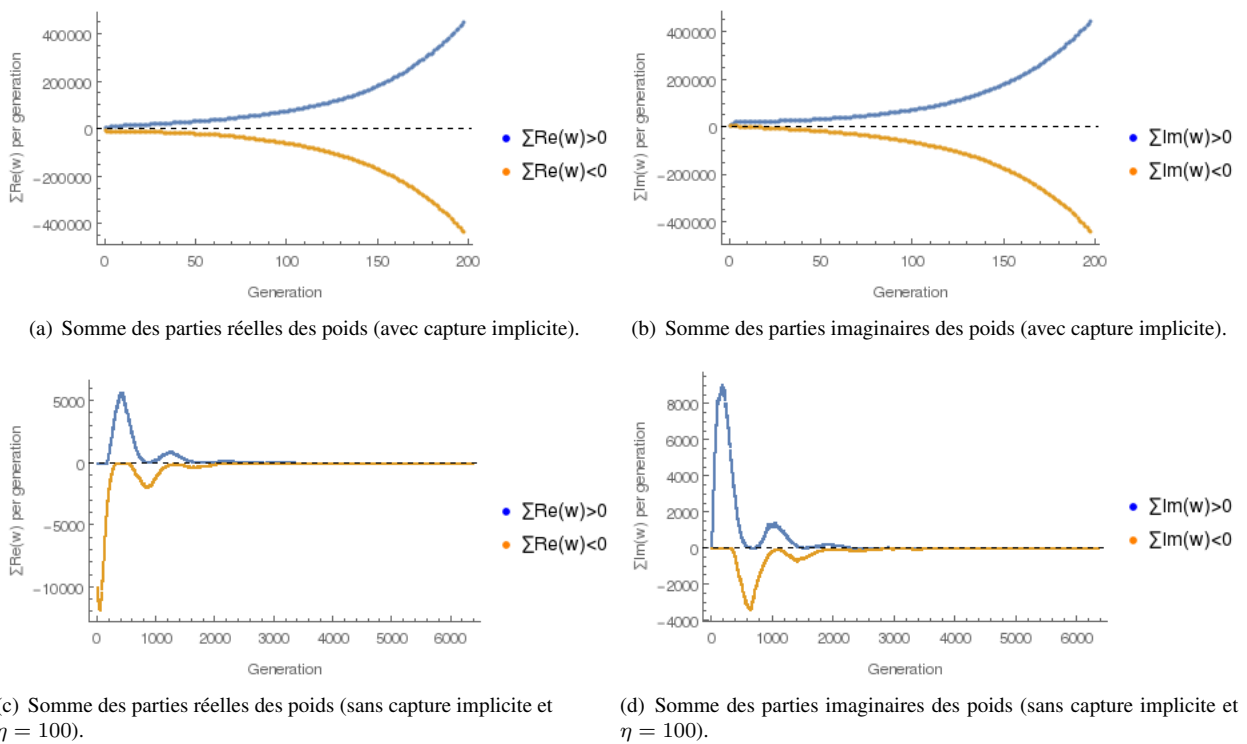
fonction du facteur  $\eta$  à 10 000 Hz pour le groupe 4 sans capture implicite. Sachant qu'en moyenne la fission normale génère de 2 à 3 particules et la  $\omega$ -fission une seule, nous comprenons qu'en choisissant un  $\eta$  suffisamment grand, nous pouvons faire baisser de manière suffisamment importante le nombre total de particules créées par toutes les fissions et ainsi rendre nos simulations viables (mais cela augmente artificiellement le nombre de générations et donc les temps de calcul puisque la probabilité de faire une  $\omega$ -fission tend vers 1 lorsque  $\eta$  augmente :  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\eta\omega/v}{\Sigma_{0,t} + \eta\omega/v} = 1$ ). Dans notre cas, nous constatons qu'un  $\eta$  de valeur 100 suffit. Nous trouvons le même ordre de grandeur pour plusieurs autres systèmes non présentés ici. Les Figures 4.10 et 4.11 illustrent ces constatations en détaillant l'évolution du nombre de particules et de la somme des parties réelles et imaginaires des poids à 10 000 Hz.



**FIGURE 4.9** – Évolution de la probabilité des fissions normale et  $\omega$  en fonction du facteur  $\eta$  à 10 000 Hz pour le groupe 4 sans capture implicite.



**FIGURE 4.10** – Évolution du nombre de particules par génération à 10 000 Hz avec ou sans capture implicite (résultats obtenus avec la nouvelle méthode).



**FIGURE 4.11** – Évolution de la somme des parties réelles et imaginaires des poids de toutes les particules par génération à 10 000 Hz avec ou sans capture implicite (résultats obtenus avec la nouvelle méthode).

### Étude du « facteur de multiplication » de l'équation du bruit

Pour aller un peu plus loin et tâcher d'apporter quelques éléments supplémentaires de compréhension, nous allons étudier, dans ce dernier paragraphe, l'évolution de l'équivalent du « facteur de multiplication » de l'équation du bruit en fonction de la fréquence. Reprenons le formalisme introduit en section 2.1.1 et posons  $\tilde{L}_{0,\omega}(r) = i\frac{\omega}{v} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_0 - H_0$ . L'équation linéaire du bruit neutronique peut se réécrire comme suit :

$$\tilde{L}_{0,\omega}(r)\delta\Psi(r,\omega) = P_{0,\omega}(r)\delta\Psi(r,\omega) - \delta L(r,\omega)\Psi_0(r). \quad (4.10)$$

Introduisons le facteur  $\tilde{k}$  tel que son inverse soit la valeur propre généralisée de vecteur propre généralisé  $f_{\tilde{k}}$  du problème sans source :

$$\tilde{L}_{0,\omega}(r)f_{\tilde{k}}(r,\omega) = \frac{1}{\tilde{k}}P_{0,\omega}(r)f_{\tilde{k}}(r,\omega). \quad (4.11)$$

Ce facteur  $\tilde{k}$  peut s'interpréter comme le « facteur de multiplication » de l'équation du bruit et donner une information sur la dynamique du calcul Monte Carlo du problème. Ce facteur  $\tilde{k}$  est un nombre complexe dépendant de  $\omega$  et

strictement égal au facteur de multiplication effectif  $k$  en  $\omega = 0$ .

Travaillons sur le système sans anisotropie détaillé en section 4.2.1. La Figure 4.12 présente l'évolution des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{k}$  en fonction de la fréquence, et les Figs. 4.13 et 4.14 détaillent l'évolution des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{k}^n$  en fonction du nombre de générations  $n$  et en fonction de la fréquence.

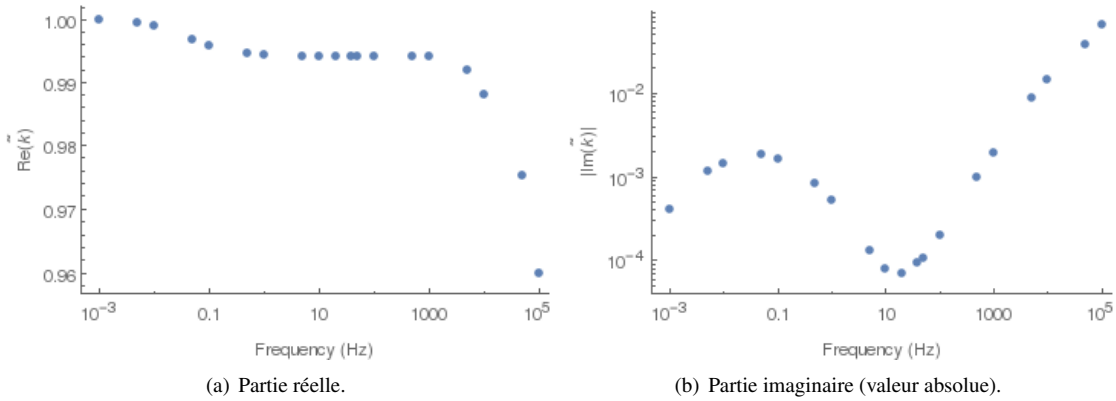


FIGURE 4.12 – Évolution des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{k}$  en fonction de la fréquence.

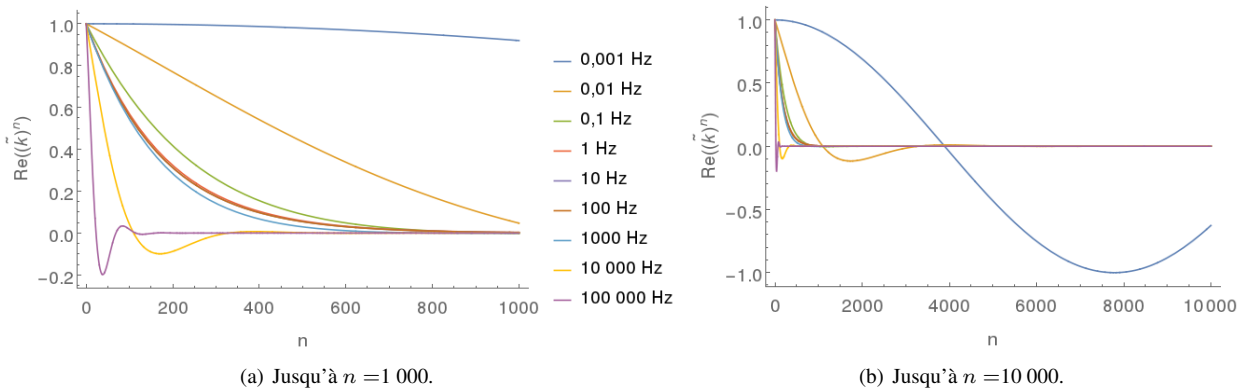


FIGURE 4.13 – Évolution de la partie réelle de  $\tilde{k}^n$  en fonction du nombre de générations  $n$  et en fonction de la fréquence.

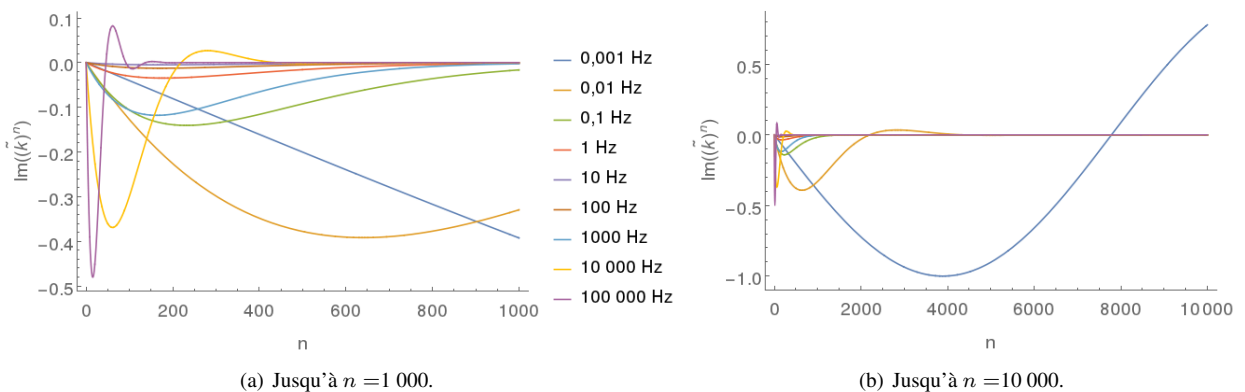


FIGURE 4.14 – Évolution de la partie imaginaire de  $\tilde{k}^n$  en fonction du nombre de générations  $n$  et en fonction de la fréquence.

Nous constatons donc que pour les fréquences supérieures à 0,01 Hz et inférieures à 1 000 Hz, le facteur  $\tilde{k}^n$ , et donc la population, a tendance, à partir d'un certain nombre de générations, à décroître exponentiellement au fur et à mesure des générations. Or, c'est sur cette même plage de fréquences que les deux méthodes Monte Carlo fonctionnent avec ou sans la capture implicite, et avec ou sans l'annihilation des poids pour le cas de la méthode de Yamamoto. C'est donc sur cette plage de fréquences que les deux méthodes Monte Carlo sont les plus robustes. Au vu des évolutions en

dehors de cette gamme de fréquences, nous comprenons pourquoi les deux méthodes y sont moins robustes. En accord avec ces évolutions, les Figs. 4.7 et 4.10 montrent bien que l'évolution du nombre de particules par génération est particulièrement rapide à 10 000 Hz alors qu'elle est beaucoup plus lente à 0,01 Hz. Concernant la nouvelle méthode à très hautes fréquences, il existe une limite floue entre la plage de fréquences où il est simplement nécessaire de désactiver la capture implicite et la plage de fréquences où il est en plus nécessaire d'ajuster la valeur du facteur  $\eta$ . Dans le cas du système étudié, cette limite semble se situer autour de 5 000 Hz.

Nous avons essayé d'apporter autant d'éléments de compréhension que possible mais une étude plus approfondie serait de rigueur pour mieux comprendre les phénomènes en jeu. Néanmoins, comme cela a déjà été rappelé de nombreuses fois, seules les fréquences entre 0,01 Hz et 100 Hz sont physiquement intéressantes et il se trouve que c'est sur cette plage de fréquences que les deux méthodes Monte Carlo sont les plus robustes.

### 4.2.3 Des pistes d'amélioration et de réflexion

Les travaux sur la résolution des équations complexes du bruit en simulation Monte Carlo sont, comme nous l'avons précisé, très récents. Il reste encore plusieurs points à améliorer, notamment la mise en place de méthodes d'annihilation des poids ne faisant pas appel à un quelconque maillage et permettant l'activation de la capture implicite quelle que soit la fréquence. La nouvelle méthode que nous avons mise en place permet essentiellement d'accélérer la méthode de Yamamoto via l'emploi d'une section efficace totale réelle, et non plus complexe, mais ne permet pas d'activer la capture implicite en dehors de la région plateau et du début de la région des hautes fréquences.

Nous allons brièvement décrire, dans cette section, les différentes méthodes d'annihilation des poids existantes et notamment développées et utilisées dans les calculs Monte Carlo des vecteurs et des valeurs propres d'ordres supérieurs. Nous détaillerons ensuite la méthode du « combing » employée pour le contrôle de la population lors des simulations dynamiques, méthode que nous pensons prometteuse pour notre problème. Enfin, nous présenterons une méthode alternative que nous avons testée qui consiste à utiliser non plus un seul type de particules avec un poids complexe mais quatre types de particules avec chacun un poids réel positif.

#### Les techniques d'annihilation des poids

Il existe plusieurs techniques d'annihilation des poids : la « binning procedure » employée par Yamamoto est l'une des techniques les plus simples à mettre en œuvre. Ces techniques sont notamment utilisées lors du calcul du second vecteur propre qui a une composante positive et négative (ce qui implique la gestion de particules avec un poids qui peut être positif ou négatif). Le second vecteur propre et la seconde valeur propre de l'équation critique sont de plus en plus utilisés dans l'analyse des transitoires d'un réacteur et dans l'amélioration de la sûreté de ces derniers. Nous avons vu en section 2.4 leur utilité dans la compréhension de la structure du bruit neutronique. Ajoutons que ces techniques sont aussi régulièrement employées dans les calculs Monte Carlo en mécanique quantique et en chimie [8].

Voici une liste que nous pensons exhaustive des différentes techniques d'annihilation des poids employées en simulations Monte Carlo dans le cadre de la neutronique :

- la « binning procedure » que nous avons déjà détaillée en section 4.1.2. Celle-ci n'est pas une méthode exacte mais elle s'avère plutôt robuste. Elle a cependant le désavantage notable d'utiliser un maillage fin en espace et de n'être applicable que pour des fissions isotropes.
- la « point detector procedure », entre autres développée dans [8, 24], consiste à sommer ponctuellement les poids positifs et négatifs des particules via l'utilisation d'un estimateur ponctuel de flux. Cette méthode, qui est une forme d'échantillonnage préférentiel, est dite exacte et n'utilise pas de maillage que ce soit en espace ou en énergie. Elle est néanmoins très coûteuse en temps de calcul.
- la « regional cancellation procedure » introduite dans [26] est une méthode exacte qui utilise là encore un maillage spatial mais beaucoup moins fin que dans la « binning procedure ». Cette méthode est à mi-chemin entre la « binning procedure » et la « point detector procedure ».
- une méthode basée sur le « Kernel Density Estimator » proposée par Yamamoto dans [159] permet d'estimer la densité des sources de fission en chaque point sans avoir recours à un maillage spatial. La méthode est cependant adaptée au calcul de la seconde valeur propre et semble particulièrement complexe à adapter à notre problème à source.
- la « pairing net-weight calculation » présentée dans [146] développe une façon d'additionner les fonctions de densité des sources de fission positives et négatives puis d'échantillonner sur la valeur absolue. Pour ce faire, des paires de particules ayant un poids négatif et positif sont formées pour ne donner qu'une seule et unique particule avec pour poids la somme des deux poids précédents. Plusieurs problèmes se posent alors : sur quel

critère former les paires (les auteurs ont choisi le critère spatial dans leur exemple à une dimension), il doit y avoir autant de particules à poids négatifs que de particules à poids positifs (si le nombre de particules à poids positifs  $n_p$  est supérieur au nombre à poids négatifs  $n_n$ , les auteurs proposent de choisir aléatoirement  $n_n$  particules à poids positifs parmi les  $n_p$  existantes) et surtout comment former des paires dans le cas de la nouvelle méthode que nous avons mise en place où deux types de fission coexistent.

Excepté la « binning procedure », ces différentes méthodes sont compliquées à mettre en place et nécessitent un travail long et approfondi pour les adapter à notre problème quand cela est possible (ce qui ne nous semble pas toujours évident car ces méthodes ont été mises en place pour le cas particulier des calculs critiques et non à source). C'est pourquoi nous avons choisi de nous limiter à l'implémentation de la « binning procedure » utilisée par la méthode de Yamamoto et à l'étude de différents tests basés sur la méthode du « combing » que nous allons maintenant décrire.

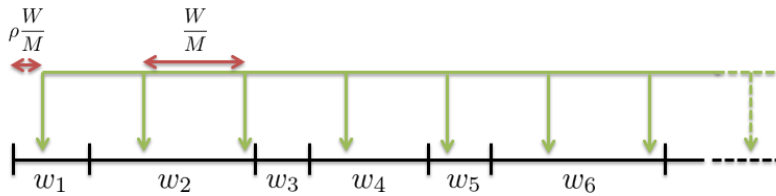
### La méthode du « combing »

La méthode appelée « combing method » (« comb » pour peigne en anglais) est connue depuis longtemps et est clairement détaillée dans [25]. Cette méthode permet de choisir  $M$  particules de poids positifs parmi  $K$  sans introduire de biais et en conservant le poids moyen. Elle peut être utilisée en neutronique afin de contrôler la population des neutrons lors des simulations Monte Carlo dynamiques. Cette méthode est aussi employée pour les simulations Monte Carlo en physique des semi-conducteurs et pour la détermination du spectre de très grandes matrices toujours en simulation Monte Carlo [23, 65, 83].

Le principe général est le suivant :

1. soient  $M$  particules à choisir parmi  $K$  particules de poids strictement positifs  $w_i$  ( $i \in \llbracket 1, K \rrbracket$ ). Soient  $W = \sum_{i=1}^K w_i$  le poids total des  $K$  particules et  $C_j = \sum_{i=1}^j w_i$  le poids cumulé ( $j \in \llbracket 1, K \rrbracket$ );
2. les positions des dents du peigne sont définies, pour tout  $m \in \llbracket 1, M \rrbracket$ , par  $t_m = \rho \frac{W}{M} + (m-1) \frac{W}{M}$  avec  $\rho$  un nombre aléatoire uniformément tiré entre 0 et 1 (indispensable si nous ne voulons pas introduire de biais);
3. la particule  $j$  est choisie si  $C_{j-1} < t_m \leq C_j$ . Elle est choisie  $q$  fois avec  $q$  défini par  $q < \frac{w_j}{W/M} \leq q+1$ . Il y a donc une probabilité  $p_{j,q} = q+1 - \frac{w_j}{W/M}$  qu'il y ait  $q$  dents dans l'intervalle  $j$  et  $p_{j,q+1} = \frac{w_j}{W/M} - q$  qu'il y en ait  $q+1$ ;
4. afin de préserver le poids total, les  $M$  particules ainsi choisies vont toutes avoir un nouveau poids identique égal à  $\frac{W}{M}$ .

La Figure 4.15 résume ce qui vient d'être détaillé.



**FIGURE 4.15** – Principe de la méthode du « combing ». La particule 1 est choisie 1 fois, la particule 2 est choisie 2 fois, la particule 3 est choisie 0 fois, la particule 4 est choisie 1 fois et ainsi de suite.

D'après [23], cette méthode peut être adaptée à la gestion de particules possédant deux poids pouvant être négatifs ou positifs. Voici de quelle façon :

1. soient  $M$  particules à choisir parmi  $K$  particules de poids  $w'_i$  et  $w''_i$  ( $i \in \llbracket 1, K \rrbracket$ ). Soient, pour tout  $i \in \llbracket 1, K \rrbracket$ ,  $p'_i = \frac{|w'_i|}{\sum_{j=1}^K |w'_j|}$ ,  $p''_i = \frac{|w''_i|}{\sum_{j=1}^K |w''_j|}$  et le poids cumulé  $C_j = \sum_{i=1}^j \frac{1}{2}(p'_i + p''_i)$ . Le poids total  $W = C_K$  est donc normalisé à 1;
2. les positions des dents du peigne sont définies, pour tout  $m \in \llbracket 1, M \rrbracket$ , par  $t_m = \rho \frac{W}{M} + (m-1) \frac{W}{M}$  avec  $\rho$  un nombre aléatoire uniformément tiré entre 0 et 1 (indispensable si nous ne voulons pas introduire de biais);
3. comme précédemment, la particule  $j$  est choisie si  $C_{j-1} < t_m \leq C_j$  et elle peut être choisie plusieurs fois en fonction de la différence  $C_j - C_{j-1}$ ;
4. on assigne à la  $m$ -ième particule ainsi choisie les poids suivants :  $\tilde{w}'_m = \frac{p'_j \text{signe}(w'_j)}{p'_j + p''_j}$  et  $\tilde{w}''_m = \frac{p''_j \text{signe}(w''_j)}{p'_j + p''_j}$ .

Cette méthode a été appliquée dans [23] au cas du calcul du second vecteur propre par simulation Monte Carlo. Il s'agit donc d'une application au calcul critique. Nous avons testé cette méthode ainsi que plusieurs variantes sur notre problème de bruit, qui est, rappelons-le, un problème à source : aucunes n'ont donné pour l'instant de résultats satisfaisants. Il serait tout de même intéressant d'appliquer cette méthode pour le cas d'un problème à source et notamment de la coupler avec la « point detector procedure » comme cela est en partie fait dans [23].

### Quatre types de particules

Comme nous l'avons décrit précédemment, la façon la plus intuitive de résoudre les équations complexes du bruit est de travailler avec des particules à poids complexes. Une autre façon de procéder est de travailler avec quatre types de particules à poids réels positifs : «  $\mathcal{R}+$  », «  $\mathcal{R}-$  », «  $\mathcal{S}+$  » et «  $\mathcal{S}-$  ». Une particule va donc transporter deux informations : son type et son poids (qui sera toujours positif). Au cours de son histoire, la particule va éventuellement changer de type, voir son poids être modifié (mais il restera toujours positif) et créer d'autres particules de type différent ou identique au sien. Les différents estimateurs vont maintenant avoir non plus deux mais quatre composantes : une encaissant les poids des particules de type  $\mathcal{R}+$ , une autre pour les poids de type  $\mathcal{R}-$ , une troisième pour le type  $\mathcal{S}+$  et enfin une dernière pour le type  $\mathcal{S}-$ .

Nous avons implémenté cette variante à quatre types de particules pour le cas de la nouvelle méthode utilisant la section efficace totale réelle. Avec cette méthode, le déplacement se fait comme dans les calculs stationnaires et ne change ni le type ni le poids de la particule. Tout va se jouer à la collision. Pour la  $\omega$ -fission par exemple, et en supposant la capture implicite activée, cela va se comporter comme suit :

1.  $\text{Int}(\Sigma_{f,\omega}/\tilde{\Sigma}_{0,t} + \xi)$  particules de même type et de même poids que la particule incidente vont être créées (avec  $\xi$  un nombre aléatoire uniformément tiré entre 0 et 1),
2.  $\text{Int}(\Sigma_{f,\omega}/\tilde{\Sigma}_{0,t} + \gamma)$  autres particules de type  $-i \times$  type de la particule incidente<sup>7</sup> et de poids  $w/\eta$  vont être créées (avec  $\gamma$  un nombre aléatoire uniformément tiré entre 0 et 1 et  $w$  le poids de la particule incidente).

Cette méthode multiplie donc par quatre le nombre de particules à gérer. Au vu de nos premiers tests, elle ne semble viable que pour les fréquences de la région plateau et seulement avec la capture implicite activée. Elle ne va donc avoir d'intérêt que si nous arrivons à mettre en place une méthode d'annihilation des poids (autre que la « binning procedure ») permettant l'activation de la capture implicite à hautes et basses fréquences.

L'ensemble des points que nous venons de détailler dans cette section montre donc qu'il reste encore des pistes à tester pour espérer améliorer l'efficacité de la résolution stochastique des équations du bruit à basses et très hautes fréquences. Ces pistes de réflexion sont aussi valables et pertinentes concernant l'étude des fuites hétérogènes et la détermination de la seconde valeur propre par les méthodes stochastiques. En effet, nous avons vu que ces deux problématiques avaient des points en commun avec les problèmes de bruit : la gestion de particules à poids complexes pour le cas des fuites hétérogènes, et la gestion de particules à poids négatifs ou positifs pour le cas de la seconde valeur propre. Ainsi, toute avancée dans une des trois problématiques (le bruit, les fuites hétérogènes ou la seconde valeur propre) peut profiter aux deux autres.

7. Si la particule incidente est de type  $\mathcal{R}+$ , ces nouvelles particules seront de type  $\mathcal{S}-$ . Si la particule incidente est de type  $\mathcal{R}-$ , ces nouvelles particules seront de type  $\mathcal{S}+$  et ainsi de suite.



### 4.3 Résumé du chapitre

Ce quatrième chapitre concernant les méthodes de résolution stochastique des équations du bruit neutronique a développé les points clefs suivants :

- **méthode stochastique testée dans MCNP4C** : l'étude de la problématique des fuites hétérogènes par les méthodes Monte Carlo a permis à Toshihiro Yamamoto (Université de Kyoto) de tester en 2013 dans MCNP4C une méthode de résolution Monte Carlo des équations du bruit. Cette méthode est basée sur l'utilisation d'un poids complexe, d'une section efficace totale complexe impliquant un biaisage continu des poids lors du déplacement, et d'une méthode d'annihilation des poids (« binning procedure ») imposant l'emploi d'un maillage spatial fin et, pour chacun des batches indépendants, l'emploi d'un algorithme très similaire à celui du calcul critique. Cette méthode a été implémentée dans la maquette fil.
- **nouvelle méthode stochastique mise en place** : dans la nouvelle méthode que nous avons mise en place, nous avons cherché à nous affranchir de l'utilisation d'une section efficace totale complexe qui alourdit grandement le déplacement de la particule, et de l'utilisation d'une méthode d'annihilation des poids. La nouvelle méthode que nous avons développée et implémentée dans la maquette fil est basée sur l'utilisation d'un poids complexe et d'une section efficace totale réelle (le poids n'est donc plus biaisé lors du déplacement). Elle impose en outre la gestion de deux types de fission, la désactivation de la capture implicite à basses fréquences et à très hautes fréquences accompagnée d'un ajustement d'un facteur  $\eta$  à très hautes fréquences (à partir d'une certaine limite). L'absence de méthodes d'annihilation des poids nous permet l'utilisation de l'algorithme classique du calcul à source contrairement à la méthode précédente. Cette nouvelle méthode, en plus d'être plus simple d'implémentation, s'avère être sensiblement plus performante que la méthode testée dans MCNP4C sur la plage fréquentielle d'intérêt qui va de 0,01 Hz à 100 Hz.
- **comportement à basses et très hautes fréquences** : nous avons constaté qu'à basses et à très hautes fréquences la capture implicite devait être désactivée pour la nouvelle méthode, et, concernant la méthode de Yamamoto, la capture implicite devait être désactivée ou la « binning procedure » devait être employée. Concernant la nouvelle méthode, en plus de devoir désactiver la capture implicite, nous devons ajuster la valeur du facteur  $\eta$  à très hautes fréquences à partir d'une certaine limite pour obtenir de bons résultats. Il semble que ces comportements à basses et très hautes fréquences soient liés à la dépendance fréquentielle du « facteur de multiplication » de l'équation du bruit.
- **des pistes d'amélioration** : il reste encore des pistes à tester pour espérer améliorer l'efficacité de la résolution stochastique des équations du bruit à basses et très hautes fréquences. Parmi ces pistes d'amélioration, nous pouvons citer différentes méthodes d'annihilation des poids notamment développées et utilisées dans les calculs Monte Carlo des vecteurs et des valeurs propres d'ordres supérieurs. Nous pouvons aussi citer la méthode du « combing » employée pour le contrôle de la population lors des simulations dynamiques, méthode dont nous avons testé certaines variantes mais sans succès à ce jour. Une dernière piste que nous avons testée consiste à utiliser non plus un seul type de particules avec un poids complexe mais quatre types de particules avec chacun un poids réel positif. Cette dernière piste ne semble intéressante que si nous arrivons à mettre en place une méthode d'annihilation des poids (autre que la « binning procedure ») permettant l'activation de la capture implicite à hautes et basses fréquences. Ces diverses pistes de réflexion sont aussi valables et pertinentes concernant l'étude des fuites hétérogènes et la détermination de la seconde valeur propre par les méthodes stochastiques.

# Modélisations et analyses d'une vibration mécanique

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Modélisations analytiques</b>	<b>95</b>
5.1.1	Modèle de Feinberg-Galanin-Williams	96
5.1.2	Modèle $\epsilon/d$	98
5.1.3	Les harmoniques de la source de bruit	99
<b>5.2</b>	<b>Modélisation numérique d'une vibration périodique d'un volume fini</b>	<b>100</b>
5.2.1	Modélisation générale	100
5.2.2	Modélisation adiabatique	103
<b>5.3</b>	<b>Modélisation numérique d'une vibration périodique d'un Dirac</b>	<b>104</b>
5.3.1	Modélisation générale	104
5.3.2	Modélisation adiabatique	108
<b>5.4</b>	<b>Analyses et résultats</b>	<b>109</b>
5.4.1	Vibration d'une barre absorbante (maquette fil)	109
5.4.2	Vibration d'un crayon combustible (maquette fil)	114
5.4.3	Vibration d'un assemblage combustible (APOLLO3®)	119
<b>5.5</b>	<b>Résumé du chapitre</b>	<b>124</b>

Ce dernier chapitre a pour sujet la modélisation d'une vibration mécanique et l'étude du bruit neutronique résultant. Nous allons, dans un premier temps, détailler les principales modélisations analytiques des vibrations mécaniques développées à ce jour dans la littérature ainsi que les résolutions analytiques associées. Nous présenterons ensuite les deux modélisations numériques que nous avons mises en place permettant de simuler deux types de vibrations périodiques : une vibration périodique d'un élément de taille finie où l'amplitude de la vibration est plus petite que la taille de l'élément perturbé, et une vibration périodique d'un élément de très petite taille où l'amplitude de la vibration est plus grande que la taille de l'élément perturbé. Nous détaillerons les résultats de ces nouvelles modélisations numériques en étudiant la vibration d'une barre absorbante et d'un crayon combustible dans un cœur à une dimension avec la maquette fil ainsi que la vibration d'un assemblage combustible dans un cœur à deux dimensions avec APOLLO3®. Les points importants développés au cours de ce chapitre seront résumés à la fin de celui-ci.

## 5.1 Modélisations analytiques

L'utilisation de la fonction de Dirac pour modéliser des vibrations d'absorbants a été présentée pour la première fois dans [155] mais ce n'est qu'en 1970 que Williams introduit et emploie formellement ce type de modélisations en s'inspirant des travaux de Feinberg et Galanin [60, 156]. La première modélisation analytique d'une vibration mécanique développée dans la littérature que nous allons présenter dans cette section porte ainsi le nom de Feinberg-Galanin-Williams (FGW). Nous détaillerons par la suite la modélisation dite «  $\epsilon/d$  » développée par Pázsit qui modélise la barre absorbante par un volume de taille finie et non plus par un simple Dirac [126]. Cette seconde modélisation

s'avère être plus robuste et plus générale que celle de FGW. Nous aborderons enfin le problème des termes d'ordre supérieur qui sont systématiquement négligés dans tous ces modèles analytiques.

Les modèles analytiques que nous allons détailler font l'hypothèse classique de vibrations de petites amplitudes par rapport à la taille du système ou par rapport à la taille de l'élément mécanique perturbé. Elles ne font pas l'hypothèse d'une vibration périodique contrairement aux modélisations numériques que nous présenterons aux sections 5.2 et 5.3. L'amplitude  $\epsilon(t)$  de la vibration est en effet supposée être de nature stochastique (et donc pouvant avoir un spectre continu avec éventuellement une fréquence de résonance qui est alors considérée comme étant la fréquence principale dominant sur toutes les autres). Nous verrons que seuls les termes du premier ordre en  $\epsilon(\omega)$  sont pris en compte. Ces modélisations analytiques ont été initialement développées pour le cas particulier de vibrations de barres de contrôle en théorie de la diffusion. C'est la raison pour laquelle, dans la très grande majorité des études présentées dans la littérature, seule la section efficace d'absorption est supposée être perturbée<sup>1</sup>.

Nous ne les détaillerons pas dans ce présent manuscrit mais il est important de savoir qu'il existe d'autres façons de modéliser une vibration basées sur le traitement de longueurs d'extrapolation ou de conditions aux frontières dépendantes du temps [63]. Ces modélisations n'ont cependant été que très peu employées dans la littérature. De même, nous ne les détaillerons pas mais plusieurs méthodes de localisation de vibrations ont été proposées dans la littérature : certaines basées sur les modèles analytiques de vibrations que nous allons présenter [119, 123, 124, 125] et d'autres sur l'utilisation des réseaux de neurones [2, 62, 122, 127, 151].

### 5.1.1 Modèle de Feinberg-Galanin-Williams

Nous allons, dans cette section, détailler les grandes étapes de calcul aboutissant au modèle de Feinberg-Galanin-Williams (FGW). Nous reprendrons pour cela les arguments développés par Pázsit dans [114]. Ce modèle sera présenté sous sa forme générale à une dimension puis sous l'approximation de barres faiblement absorbantes où la théorie linéaire peut s'appliquer. Précisons que ce modèle pour les géométries à deux dimensions n'existe que sous une forme heuristique.

#### Forme générale

Nous reprenons ici l'essentiel de la démonstration développée et détaillée dans [114]. Soit un système homogène  $\mathcal{D}$  à une dimension de largeur  $2a$  avec des conditions de vide aux frontières. Nous nous plaçons en théorie de la diffusion à un groupe d'énergie et un groupe de précurseurs. Soit une barre purement absorbante de constante de Galanin<sup>2</sup>  $\gamma$  placée au point  $r_p$  dont la section efficace macroscopique d'absorption est définie par :

$$\Sigma_{0,a}^{rod}(r) = \gamma\delta(r - r_p), \forall r \in \mathcal{D}. \quad (5.1)$$

Ce système doit être critique avec la barre absorbante. En posant  $\Phi_\gamma$  le flux d'équilibre du système avec la barre, l'équation critique de ce système est la suivante<sup>3</sup> :

$$D\Delta\Phi_\gamma(r) + (\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a})\Phi_\gamma(r) - \gamma\delta(r - r_p)\Phi_\gamma(r) = 0, \forall r \in \mathcal{D}. \quad (5.2)$$

Imposons un petit déplacement  $\epsilon$  dépendant du temps ( $|\epsilon/a| \ll 1$ ) de la barre absorbante autour de sa position d'équilibre  $r_p$  et, pour tout  $(r, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}$ , posons :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_a(r, t) &= \gamma[\delta(r - r_p - \epsilon(t)) - \delta(r - r_p)], \\ \Phi(r, t) &= \Phi_\gamma(r) + \delta\Phi(r, t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Les équations cinétiques du système perturbé sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v}\partial_t\delta\Phi(r, t) &= D\Delta\delta\Phi(r, t) + (\nu\Sigma_{0,f}(1 - \beta) - \Sigma_{0,a})\delta\Phi(r, t) - \delta\Sigma_a(r, t)\Phi_\gamma(r) \\ &\quad - \gamma\delta(r - r_p - \epsilon(t))\delta\Phi(r, t) + \lambda\delta C(r, t), \\ \partial_t\delta C(r, t) &= \beta\nu\Sigma_{0,f}\delta\Phi(r, t) - \lambda\delta C(r, t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

1. Nous pouvons néanmoins citer [73] qui traite le cas d'une vibration d'un crayon combustible où plusieurs types de sections efficaces sont perturbées.

2. La constante de Galanin quantifie l'amplitude d'absorption d'une barre purement absorbante modélisée par un Dirac en espace [60].

3. Précisons que l'Eq. 5.2 n'a pas de sens au sens classique car la solution n'est pas deux fois dérivable. Elle a par contre bien un sens au sens faible, c'est-à-dire variationnel, puisque la solution est une fois dérivable.

Nous n'allons pas appliquer la théorie linéaire, c'est-à-dire que nous n'allons pas négliger le terme  $\delta\Sigma_a\delta\Phi$ . En effet, d'après [114], ce terme est proportionnel au produit  $\gamma\epsilon^4$  :

$$\begin{aligned}\delta\Sigma_a(r, t)\delta\Phi(r, t) &= \gamma[\delta(r - r_p - \epsilon(t)) - \delta(r - r_p)]\delta\Phi(r, t) \\ &\approx -\gamma\epsilon(t)\delta'(r - r_p)\delta\Phi(r, t) \\ &\approx \gamma\epsilon(t)\partial_r\delta\Phi(r_p, t)\delta(r - r_p).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Or, toujours d'après [114],  $\partial_r\delta\Phi(r_p, t)$  est une constante du signe de  $\epsilon(t)$  donc si seul  $\epsilon$  est supposé petit, le terme  $\delta\Sigma_a\delta\Phi$  n'est pas négligeable devant  $\delta\Sigma_a\Phi_\gamma$ . Ce n'est que dans le cas de l'hypothèse d'une barre faiblement absorbante que nous pouvons négliger le terme  $\delta\Sigma_a\delta\Phi$  et appliquer la théorie linéaire. Dans ce paragraphe, nous ne supposons pas  $\gamma$  petit.

À partir de la transformée de Fourier de l'Eq. 5.4, nous obtenons :

$$\Delta\delta\Phi(r, \omega) + B_\gamma^2(\omega)\delta\Phi(r, \omega) = S(r, \omega), \quad (5.6)$$

avec la source de bruit  $S$  définie dans le domaine temporel par :

$$S(r, t) = \frac{\gamma}{D}[\delta(r - r_p - \epsilon(t)) - \delta(r - r_p)]\Phi_\gamma(r) + \frac{\gamma}{D}\delta(r - r_p - \epsilon(t))\delta\Phi(r, t), \quad (5.7)$$

et  $B_\gamma^2(\omega)$  par :

$$B_\gamma^2(\omega) = B_0^2\left(1 - \frac{1}{\rho_\infty G_0(\omega)}\right), \quad (5.8)$$

où  $B_0^2 = \frac{\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a}}{D}$ ,  $\rho_\infty = \frac{\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a}}{\nu\Sigma_{0,f}}$  et  $G_0(\omega) = 1/[i\omega(\frac{1}{\nu\nu\Sigma_{0,f}} + \frac{\beta}{\lambda + i\omega})]$  la fonction de transfert fondamentale. L'indice  $\gamma$  de  $B_\gamma^2(\omega)$  précise que les données nucléaires utilisées sont celles rendant le système avec la barre absorbante critique. La fonction de Green  $G$  correspondant à l'Eq. 5.6 vérifie l'équation suivante :

$$\Delta_r G(r, r', \omega) + B_\gamma^2(\omega)G(r, r', \omega) = \delta(r - r'). \quad (5.9)$$

Sachant que  $\delta\Phi(r, \omega) = \int G(r, r', \omega)S(r', \omega)dr'$  et en linéarisant au premier ordre en  $\epsilon$ , nous obtenons, après quelques manipulations algébriques, la solution finale suivante :

$$\begin{aligned}\delta\Phi(r, \omega) &= \frac{\gamma}{D} \int (G(r, r_p + \epsilon(t), \omega) - G(r, r_p, \omega))\Phi_\gamma(r_p)e^{-i\omega t} dt \\ &\quad + \frac{\gamma}{D}G(r, r_p, \omega)\frac{\overline{\Phi}'_\gamma(r_p) + \frac{\gamma}{D}\overline{G}'(r_p, r_p, \omega)\Phi_\gamma(r_p)}{1 - \frac{\gamma}{D}G(r_p, r_p, \omega)}\epsilon(\omega),\end{aligned}\quad (5.10)$$

avec :

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}'_\gamma(r_p) &= \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{d\Phi_\gamma(r)}{dr} \right|_{r_p-\xi} + \left. \frac{d\Phi_\gamma(r)}{dr} \right|_{r_p+\xi} \right] \quad (\xi \rightarrow 0), \\ \overline{G}'(r_p, r_p, \omega) &= \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial G}{\partial r'}(r_p, r, \omega) \right|_{r_p-\xi} + \left. \frac{\partial G}{\partial r'}(r_p, r, \omega) \right|_{r_p+\xi} \right] \quad (\xi \rightarrow 0).\end{aligned}\quad (5.11)$$

Si  $|r - r_p| > |\epsilon(t)|$  pour tout  $t$ , alors l'Eq. 5.10 se simplifie en :

$$\delta\Phi(r, \omega) = \frac{\gamma}{D} \left[ \left. \frac{\partial G}{\partial r'}(r, r', \omega) \right|_{r_p} \Phi_\gamma(r_p) + G(r, r_p, \omega)\frac{\overline{\Phi}'_\gamma(r_p) + \frac{\gamma}{D}\overline{G}'(r_p, r_p, \omega)\Phi_\gamma(r_p)}{1 - \frac{\gamma}{D}G(r_p, r_p, \omega)} \right] \epsilon(\omega). \quad (5.12)$$

### Approximation de faible absorption

Si, en plus de supposer l'amplitude  $\epsilon$  de la vibration petite, nous supposons que la barre a un faible pouvoir absorbant ( $\gamma \ll 1$ ), alors nous pouvons appliquer la théorie linéaire et négliger le terme  $\delta\Sigma_a\delta\Phi$ . L'équation 5.12 devient alors [112, 114] :

$$\begin{aligned}\delta\Phi(r, \omega) &= \frac{\gamma}{D} \left[ \left. \frac{\partial G}{\partial r'}(r, r', \omega) \right|_{r_p} \Phi_0(r_p) + G(r, r_p, \omega)\Phi_0'(r_p) \right] \epsilon(\omega) \\ &= \frac{\gamma}{D} \frac{\partial}{\partial r'} \left[ G(r, r', \omega)\Phi_0(r') \right] \Big|_{r_p} \epsilon(\omega),\end{aligned}\quad (5.13)$$

4. Notons que ces approximations manquent de justifications mathématiques rigoureuses. De plus, on se permet de prendre ici quelques libertés avec les notations concernant la distribution de Dirac et sa dérivée.

avec  $\Phi_0$  le flux d'équilibre du système sans la barre absorbante. La fonction de Green  $G$  est inchangée par rapport à l'Eq. 5.12 mais le flux d'équilibre n'est plus celui du système contenant la barre absorbante que nous avons noté  $\Phi_\gamma$ . En effet, le fait de considérer  $\gamma$  petit implique que nous linéarisons au premier ordre en  $\gamma$  à chaque fois que cela est possible<sup>5</sup>. Or, d'après [112],  $\Phi_\gamma = \Phi_0 + \mathcal{O}(\gamma)$  donc l'Eq. 5.2 linéarisée au premier ordre en  $\gamma$  conduit à l'équation critique régissant le système sans la barre de commande :

$$D\Delta\Phi_0(r) + (\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a})\Phi_0(r) = 0, \forall r \in \mathcal{D}. \quad (5.14)$$

Cette modélisation impliquant une approximation de faible absorption est très majoritairement utilisée dans la littérature. Elle est notamment employée dans le code CORE SIM détaillé en section 1.4.1.

Pour conclure cette section, ajoutons qu'il serait à l'avenir intéressant de reprendre ce modèle analytique en choisissant soigneusement la norme (et l'espace fonctionnel) avec laquelle les perturbations sont petites afin de pouvoir appliquer la théorie linéaire même lorsque  $\gamma$  n'est pas petit (certains outils mathématiques permettent en effet de préciser la notion de « petit » dans des normes « faibles » différentes de celle du maximum). S'inspirer de travaux effectués en optimisation de formes ou en théorie des perturbations pourra être d'une grande aide [4, 132, 133, 138].

### 5.1.2 Modèle $\epsilon/d$

Avant de détailler les grandes lignes de cette modélisation, précisons que la description de ce modèle est clairement présentée dans la référence [126] qui est la version corrigée de [115], correction qui a été mise au point en premier lieu dans [74]. Comme à la section précédente, nous n'allons présenter que la version à une dimension du modèle. La version à deux dimensions est détaillée dans [126] et a l'avantage de ne pas être une simple forme heuristique comme l'est celle du modèle de FGW présenté précédemment.

Soit un système homogène  $\mathcal{D}$  à une dimension de largeur  $2a$  avec des conditions de vide aux frontières. Nous nous plaçons en théorie de la diffusion à un groupe d'énergie et un groupe de précurseurs. Soit une barre purement absorbante de section efficace d'absorption  $\Sigma_{0,a}^{rod}$  centrée au point  $r_p$  et de largeur finie  $d$ . Ce système doit être critique avec la barre absorbante. En posant  $\Phi_p$  le flux d'équilibre du système avec la barre telle qu'elle vient d'être définie, l'équation d'équilibre de ce système est la suivante<sup>6</sup> :

$$D\Delta\Phi_p(r) + (\nu\Sigma_{0,f} - \Sigma_{0,a})\Phi_p(r) - \Sigma_{0,a}^{rod}[H(r - r_p + d/2) - H(r - r_p - d/2)]\Phi_p(r) = 0, \forall r \in \mathcal{D}, \quad (5.15)$$

avec  $H$  la fonction de Heaviside définie par :  $\forall r \in \mathbb{R}, H(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$ .

Imposons un petit déplacement  $\epsilon$  dépendant du temps ( $|\epsilon/d| \ll 1$ ) de la barre absorbante autour de sa position d'équilibre  $r_p$  et, pour tout  $(r, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}$ , posons :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_a(r, t) &= \Sigma_{0,a}^{rod}[H(r - r_p - \epsilon(t) + d/2) - H(r - r_p - \epsilon(t) - d/2) - H(r - r_p + d/2) + H(r - r_p - d/2)], \\ \Phi(r, t) &= \Phi_p(r) + \delta\Phi(r, t). \end{aligned} \quad (5.16)$$

En linéarisant  $\delta\Sigma_a$  au premier ordre en  $\epsilon$  nous obtenons<sup>7</sup> :

$$\delta\Sigma_a(r, t) \approx \Sigma_{0,a}^{rod}\epsilon(t)[\delta(r - r_p - d/2) - \delta(r - r_p + d/2)]. \quad (5.17)$$

Puis, en appliquant la théorie linéaire (ce qui est licite lorsque la barre est modélisée par un volume fini et non par un Dirac), l'équation du bruit dans le système critique défini par l'Eq. 5.15 est la suivante :

$$\Delta\delta\Phi(r, \omega) + B_p^2(\omega)\delta\Phi(r, \omega) - \frac{\Sigma_{0,a}^{rod}}{D}[H(r - r_p + d/2) - H(r - r_p - d/2)]\delta\Phi(r, \omega) = S_p(r, \omega), \quad (5.18)$$

avec  $B_p^2(\omega)$  défini comme à la section précédente (l'indice  $p$  précise que les données nucléaires utilisées sont celles rendant le système avec la barre absorbante de taille finie critique) et  $S_p(r, \omega) = \delta\Sigma_a(r, \omega)\Phi_p(r)/D$ . La fonction de Green  $G_p$  associée à cette équation vérifie donc :

$$\Delta_r G_p(r, r', \omega) + B_p^2(\omega)G_p(r, r', \omega) - \frac{\Sigma_{0,a}^{rod}}{D}[H(r - r_p + d/2) - H(r - r_p - d/2)]G_p(r, r', \omega) = \delta(r - r'). \quad (5.19)$$

5. Cette linéarisation au premier ordre en  $\gamma$  n'a pas été exploitée dans [7], c'est pourquoi les conclusions de cet article sont différentes de celles de [112].

6. Notons qu'en imposant  $\Sigma_{0,a}^{rod} \rightarrow +\infty$  et  $d \rightarrow 0$  de telle sorte que  $\Sigma_{0,a}^{rod}d = \gamma = \text{constante}$ , nous retrouvons l'Eq 5.2 avec la barre de contrôle modélisée par un Dirac et de constante de Galanin  $\gamma$ .

7. C'est lors de cette approximation que nous perdons les harmoniques supérieures de la source de bruit lorsque la vibration est supposée périodique.

Nous en déduisons la solution suivante :

$$\begin{aligned}\delta\Phi(r, \omega) &= \int G_p(r, r', \omega) S_p(r', \omega) dr' \\ &= \frac{\Sigma_{0,a}^{rod} \epsilon(\omega)}{D} [G_p(r, r_p + d/2, \omega) \Phi_p(r_p + d/2) - G_p(r, r_p - d/2, \omega) \Phi_p(r_p - d/2)].\end{aligned}\quad (5.20)$$

Cette solution peut être simplifiée en approximant la barre absorbante de volume fini à un Dirac au point  $r_p$  lors du calcul du flux d'équilibre et de la fonction de Green. Pour cela, introduisons la fonction de Green  $G_\gamma$  :

$$\Delta_r G_\gamma(r, r', \omega) + B_\gamma^2(\omega) G_\gamma(r, r', \omega) - \frac{\gamma}{D} \delta(r - r_p) G_\gamma(r, r', \omega) = \delta(r - r'), \quad (5.21)$$

où  $B_\gamma^2(\omega)$  est défini comme précédemment mais en utilisant les données nucléaires qui rendent critique le système avec la barre absorbante approximée à un Dirac en  $r_p$  et de section d'absorption  $\Sigma_{0,a}^{rod} d = \gamma$ . Appliquons maintenant les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}G_p(r, r_p \pm d/2, \omega) &\approx G_\gamma(r, r_p \pm d/2, \omega) \\ &\approx G_\gamma(r, r_p, \omega) \pm \frac{d}{2} \frac{\partial G_\gamma}{\partial r'}(r, r', \omega) \Big|_{r_p \pm \xi} \quad (\xi \rightarrow 0),\end{aligned}\quad (5.22)$$

et :

$$\begin{aligned}\Phi_p(r_p \pm d/2) &\approx \Phi_\gamma(r_p \pm d/2) \\ &\approx \Phi_\gamma(r_p) \pm \frac{d}{2} \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial r}(r) \Big|_{r_p \pm \xi} \quad (\xi \rightarrow 0).\end{aligned}\quad (5.23)$$

Puis, en procédant à l'équivalence  $\Sigma_{0,a}^{rod} d \leftrightarrow \gamma$  et en ne gardant que les termes du premier ordre en  $d$ , nous obtenons :

$$\delta\Phi(r, \omega) = \frac{\gamma}{D} [\overline{G'_\gamma}(r, r_p, \omega) \Phi_\gamma(r_p) + G_\gamma(r, r_p, \omega) \overline{\Phi'_\gamma}(r_p)] \epsilon(\omega), \quad (5.24)$$

avec  $\Phi_\gamma$  et  $\overline{\Phi'_\gamma}$  respectivement définis par l'Eq. 5.2 et l'Eq. 5.11 et :

$$\overline{G'_\gamma}(r, r_p, \omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial G_\gamma}{\partial r'}(r, r', \omega) \Big|_{r_p - \xi} + \frac{\partial G_\gamma}{\partial r'}(r, r', \omega) \Big|_{r_p + \xi} \right] \quad (\xi \rightarrow 0). \quad (5.25)$$

Les équations 5.12 du modèle de FGW et 5.24 du modèle  $\epsilon/d$  sont strictement équivalentes comme le montre [126] en exprimant  $\overline{G'_\gamma}$  et  $G_\gamma$  en fonction de  $\overline{G'}$  et  $G$ . D'après [126], cette équivalence justifie l'approximation de la barre absorbante par un Dirac en espace effectuée dans le modèle de FGW.

### 5.1.3 Les harmoniques de la source de bruit

La source de bruit des deux modèles analytiques que nous venons de présenter est, du fait de la linéarisation au premier ordre en  $\epsilon$ , proportionnelle à  $\epsilon(\omega)$  et ne contient donc que les harmoniques de  $\epsilon(\omega)$ . L'étude la plus précise sur les termes du second ordre en  $\epsilon$  se trouve dans [112] où  $\Sigma_{0,a}^{rod}$  est développé jusqu'au second ordre en  $\epsilon$  pour le modèle de FGW. Cet article montre que, dans un cas particulier, la composante du bruit engendrée par le terme du second ordre en  $\epsilon$  de la source de bruit est bien négligeable par rapport à la composante engendrée par le terme du premier ordre. Le cas étudié est celui d'une barre faiblement absorbante. Or, il se trouve, et nous allons le voir en détail dans la section 5.4, que la composante du bruit engendrée par la seconde harmonique de la source de bruit est d'autant plus faible que la perturbation est faible (c'est-à-dire de faible amplitude ou, pour le cas d'une barre de contrôle, de faible absorption). La démonstration effectuée dans [112] n'est donc pas directement généralisable.

Prenons maintenant l'exemple particulier d'une vibration périodique où l'amplitude  $\epsilon$  est un simple sinus ( $\epsilon(t) = \Delta_L \sin(\omega_0 t)$  avec  $\Delta_L$  l'amplitude de la vibration). Dans les modèles analytiques que nous venons de décrire, la source de bruit est alors une source monochromatique et la linéarisation du terme  $\Sigma_{0,a}^{rod}$  implique qu'une infinité d'harmoniques composant la transformée de Fourier de l'expression exacte 5.16 du modèle  $\epsilon/d$  ou de l'expression 5.3 du modèle de FGW, est négligée. Ces harmoniques négligées par la linéarisation n'ont jamais été véritablement étudiées et ont été très rapidement considérées comme négligeables par rapport à la première harmonique en  $\omega_0$ . L'article [155] les mentionne mais avance l'argument que si le détecteur n'est sensible qu'à la première harmonique en  $\omega_0$ , toutes les autres multiples de  $\omega_0$  ne seront pas détectées (argument valable dans les années 1950 mais plus aujourd'hui grâce aux techniques modernes de détection et de traitement du signal). Or, il se trouve que, comme

nous allons le détailler en section 5.4.2, la seconde harmonique en  $2\omega_0$  n'est pas toujours négligeable par rapport à la première harmonique en  $\omega_0$  pour le cas particulier d'une vibration périodique.

Afin de prendre en compte toutes les harmoniques de la source de bruit pour le cas particulier d'une vibration périodique<sup>8</sup>, nous avons choisi de ne pas développer au premier ordre les termes perturbés des sections efficaces et de calculer la transformée de Fourier des termes perturbés exacts. C'est ce que nous allons décrire dans les deux sections suivantes.

## 5.2 Modélisation numérique d'une vibration périodique d'un volume fini

Toutes les modélisations analytiques présentées en section 5.1 aboutissent à des expressions basées sur des fonctions de Dirac en espace<sup>9</sup>. Or, l'emploi de sources définies par des Dirac en espace est particulièrement délicat avec les méthodes déterministes telles qu'elles sont développées en neutronique (ces dernières sont notamment toutes, par construction, basées sur des maillages en espace). En outre, si nous souhaitons résoudre l'équation du bruit par des méthodes déterministes sans avoir à employer les fonctions de Green, nous devons éviter autant que faire se peut l'utilisation de Dirac en espace. C'est entre autres la raison pour laquelle nous avons choisi de reprendre le calcul de la source de bruit issue d'une vibration mécanique à partir de l'expression 5.16 en intégrant la transformée de Fourier de cette dernière sur un maillage spatial et non en la développant au premier ordre en  $\epsilon$  comme cela est fait dans les modélisations analytiques. Nous avons aussi choisi de perturber toutes les sections efficaces et pas seulement la section efficace d'absorption. En procédant ainsi et en supposant la vibration sinusoïdale, nous n'allons pas obtenir une source monochromatique mais une source polychromatique de spectre discret mais infini composé de toutes les fréquences multiples de la fréquence de la vibration comme cela est mentionné dans [155]. Ajoutons que, tout comme cela est sous-entendu dans les modélisations analytiques, nous traitons exclusivement le cas d'une vibration d'un corps rigide. Nous n'allons pas prendre en compte les phénomènes de compression du caloporteur ou la notion de masse ajoutée qui couple le mouvement du corps rigide à l'écoulement du fluide qui l'entoure [11, 84]. La propagation de proche en proche du phénomène vibratoire par compression est donc de fait négligée.

Cette section traite exclusivement de vibrations mécaniques périodiques et bilatérales d'un corps rigide ayant une largeur supérieure à l'amplitude de la vibration. Nous traiterons dans la section suivante le cas particulier où l'amplitude de la vibration est supérieure à la taille de l'élément perturbé. Nous allons, dans un premier temps, détailler notre calcul de la source de bruit dans le cas de la théorie linéaire classique établie en section 2.1.1, puis nous présenterons les résultats que nous obtenons lorsque que nous appliquons l'approximation adiabatique sur le flux du terme source (voir section 2.1.3). Une approximation de la modélisation adiabatique sera aussi détaillée.

### 5.2.1 Modélisation générale

Cette section détaille les principales étapes de calcul aboutissant à la nouvelle modélisation numérique d'une vibration périodique d'un volume de taille finie. Nous nous attarderons ensuite sur la convergence de ce modèle en fonction de la finesse du maillage choisi.

#### Mise en place de la modélisation

Dans le cadre de la théorie linéaire décrite en section 2.1.1, la source de bruit étant définie par des expressions de la forme  $\delta\Sigma(r, \omega)\Phi_0(r)$  avec  $\Phi_0$  le flux d'équilibre et  $\delta\Sigma$  le terme perturbé de la section efficace  $\Sigma_0$ , il nous suffit de déterminer la transformée de Fourier de  $\delta\Sigma$ .

Soit un crayon combustible homogène (ou une barre de commande, un assemblage homogène...) subissant une vibration périodique bilatérale dans un milieu homogène (le caloporteur par exemple) d'un système à une dimension. Posons  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  la fréquence angulaire de la vibration et  $\Delta_L$  son amplitude. Dans notre modélisation, nous définissons quatre régions perturbées, chacune de taille  $\Delta_L$ , décrites en Fig. 5.1(a). Nous allons détailler l'impact d'une telle perturbation sur les sections efficaces de la région 4 (voir Fig. 5.1(b)).

8. Nous avons choisi de travailler exclusivement en supposant des vibrations périodiques, notamment parce qu'il s'agit du cas le plus simple où la source de bruit non linéarisée au premier ordre en  $\epsilon$  (voir l'expression 5.16) est la plus facile à déterminer. C'est de plus l'hypothèse qui est faite dans l'article fondateur du bruit [155].

9. Précisons pour information qu'une modélisation d'une vibration périodique d'un assemblage dans un RNR-Na a été mise en place dans [168] à l'aide de CORE SIM sans l'utilisation de fonctions de Dirac en espace. Cette modélisation reste néanmoins purement monochromatique et basée sur de simples différences ou mélanges des sections efficaces du système non perturbé et du système perturbé (correspondant, par exemple, au cœur ayant un assemblage déplacé de quelques millimètres) et non sur un calcul direct de la transformée de Fourier de la source de bruit non linéarisée en  $\epsilon$ . En outre, cette modélisation oblige d'effectuer deux calculs séparés pour chaque demi-période.

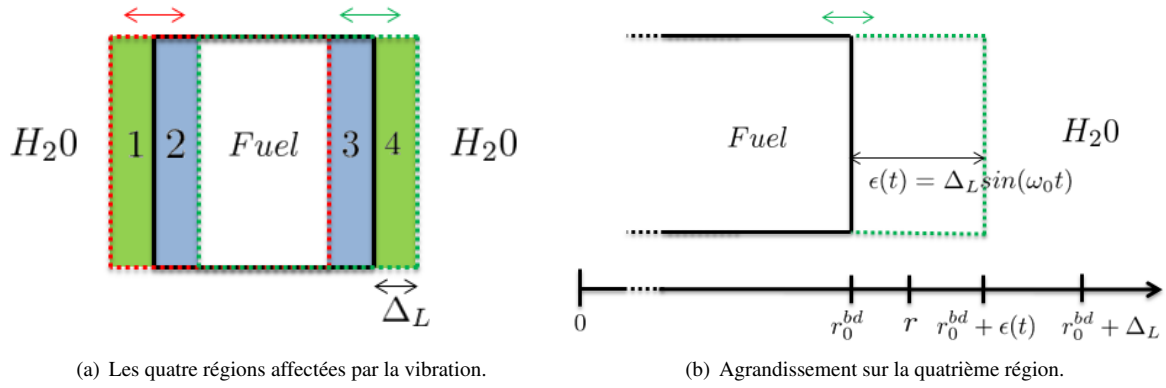


FIGURE 5.1 – Schéma d'une vibration périodique d'un volume de taille finie (exemple pour la vibration d'un crayon combustible).

Soient  $r \in [r_0^{bd}, r_0^{bd} + \Delta_L]$  et  $\epsilon(t) = \Delta_L \sin(\omega_0 t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  avec  $r_0^{bd}$  la position d'équilibre de la frontière droite du crayon. Posons, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Sigma(r, t) = \Sigma_0(r) + \delta\Sigma(r, t)$  avec  $\Sigma_0(r)$  la section efficace d'équilibre et  $\delta\Sigma(r, t)$  le terme perturbé engendré par la vibration. Nous avons le terme perturbé suivant :

$$\delta\Sigma(r, t) = \Delta_\Sigma H(r_0^{bd} + \epsilon(t) - r), \quad (5.26)$$

avec :

- $\Delta_\Sigma$  l'amplitude de la perturbation de la section efficace (dans notre cas précis  $\Delta_\Sigma = \Sigma_{0, fuel} - \Sigma_{0, H_2O}$ ),
- $H$  la fonction de Heaviside.

Nous imposons  $\Delta_L$  très inférieur à la largeur du crayon. Ainsi,  $H(r_0^{bd} + \epsilon(t) - r) = 1$  sur l'intervalle continu  $[\tau(r), \frac{T_0}{2} - \tau(r)] \subset [0, \frac{T_0}{2}]$  avec  $\tau$  défini par  $r = r_0^{bd} + \epsilon(\tau)$ . La transformée de Fourier de  $\delta\Sigma$  est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma(r, \omega) &= 2\Delta_\Sigma \left( \frac{\pi}{2} - \omega_0 \tau(r) \right) \delta(\omega) \\ &\quad - 2\Delta_\Sigma \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{+\infty} \frac{\sin(2p\omega_0 \tau(r))}{2p} \delta(\omega - 2p\omega_0) \\ &\quad - 2i\Delta_\Sigma \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega_0 \tau(r))}{2p+1} \delta(\omega - (2p+1)\omega_0). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Introduisons maintenant un maillage régulier composé de  $q$  mailles chacune de taille  $\Delta_L/q$  (voir Fig. 5.2) puis intégrons l'expression 5.27 sur la maille  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  délimitée par les positions  $r_i$  et  $r_{i+1}$  ( $r_{i+1} - r_i = \Delta_L/q$ ).

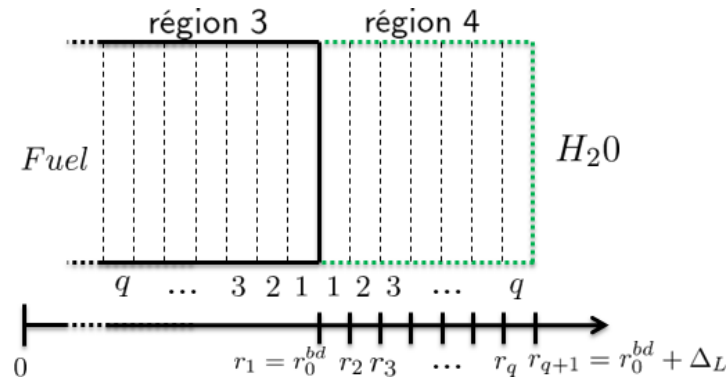


FIGURE 5.2 – Maillage pour la vibration d'un volume de taille finie.



En procédant au changement de variable  $r \rightarrow \tau$ , cette intégration spatiale sur la maille  $i$  a pour résultat la source de bruit suivante :

$$(\delta\Sigma\Phi_0)_i(\omega) = q\Delta_\Sigma\Phi_{0,i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(i)}^{\tau(i+1)} \delta(\omega - n\omega_0), \quad (5.28)$$

avec  $\Phi_{0,i} = \frac{1}{r_{i+1}-r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi_0(r)dr$ ,  $\tau(k) = \arcsin(\frac{k-1}{q})/\omega_0$  et :

$$\begin{aligned} f_0(\tau) &= 2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \omega_0\tau \right) \sin(\omega_0\tau) - \cos(\omega_0\tau) \right], \\ f_{\pm 1}(\tau) &= \mp i \left[ \tau\omega_0 + \frac{\sin(2\omega_0\tau)}{2} \right], \\ f_{2p}(\tau) &= \frac{1}{2p} \left[ \frac{\cos((2p+1)\omega_0\tau)}{2p+1} + \frac{\cos((2p-1)\omega_0\tau)}{2p-1} \right] \quad (p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}), \\ f_{2p+1}(\tau) &= -i \frac{1}{2p+1} \left[ \frac{\sin(2(p+1)\omega_0\tau)}{2(p+1)} + \frac{\sin(2p\omega_0\tau)}{2p} \right] \quad (p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Enfin, les termes perturbatifs  $\delta\Sigma$  des trois autres régions se déduisent directement de ce premier calcul grâce aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_{\text{région } 2}(\omega) &= -\delta\Sigma_{\text{région } 4}(\omega), \\ \delta\Sigma_{\text{région } 1}(\omega) &= \delta\Sigma_{\text{région } 4}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{\omega_0}\pi}, \\ \delta\Sigma_{\text{région } 3}(\omega) &= -\delta\Sigma_{\text{région } 4}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{\omega_0}\pi}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nous avons en particulier :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \delta\Sigma_{\text{région } 1}(\omega) = \delta\Sigma_{\text{région } 2}(\omega) = -\delta\Sigma_{\text{région } 3}(\omega) = -\delta\Sigma_{\text{région } 4}(\omega) & \text{si } \omega = (2p+1)\omega_0 \\ \delta\Sigma_{\text{région } 1}(\omega) = \delta\Sigma_{\text{région } 4}(\omega) = -\delta\Sigma_{\text{région } 3}(\omega) = -\delta\Sigma_{\text{région } 2}(\omega) & \text{si } \omega = 2p\omega_0 \end{cases}. \quad (5.31)$$

Nous constatons donc que ce nouveau modèle numérique aboutit à une source de bruit de spectre discret et infini et de moyenne temporelle non nulle.

### Convergence du modèle numérique

Notre nouveau modèle numérique est basé sur l'emploi d'un maillage spatial. Il est donc important d'en vérifier la bonne convergence. En effet, le maillage doit être choisi suffisamment fin pour correctement représenter la source de bruit sans éliminer artificiellement des fréquences. Par exemple, si nous utilisons uniquement une maille pour chacune des quatre régions, c'est-à-dire si  $q = 1$ , nous obtenons pour la région 4 :

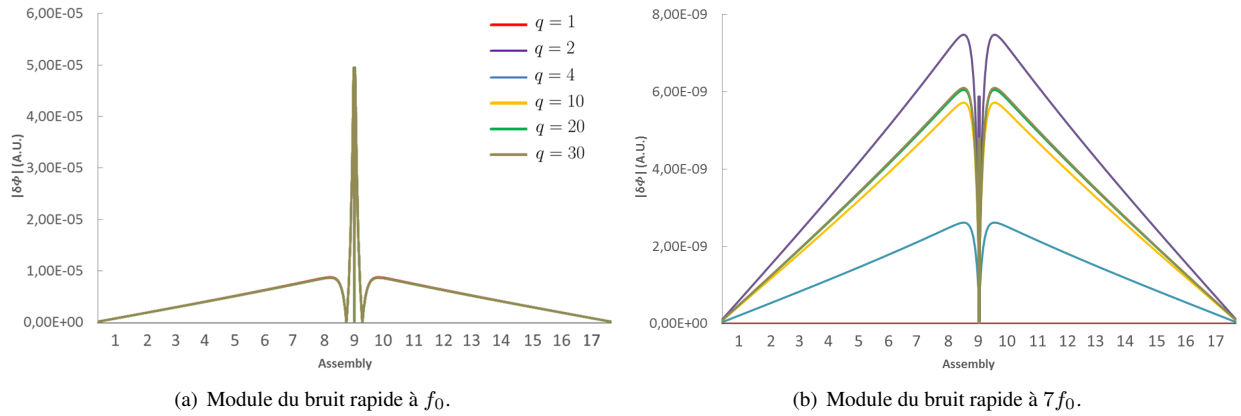
$$\delta\Sigma_{\text{région } 4}(\omega) = \Delta_\Sigma \left[ -\frac{i\pi}{2} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) - 2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\omega - 2p\omega_0)}{4p^2 - 1} \right]. \quad (5.32)$$

Nous avons perdu toutes les fréquences impaires excepté la première en  $\omega_0$ . Il faut donc choisir un maillage plus fin. De la même manière, si nous unifions les régions 3 et 4, nous avons :

$$\delta\Sigma_{\text{régions } 3 \text{ et } 4}(\omega) = -\Delta_\Sigma \frac{i\pi}{2} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)). \quad (5.33)$$

Ceci correspond, à un facteur près, à la simple transformée de Fourier d'un sinus. Une infinité de fréquences a été perdue et seule reste la première harmonique. Nous en déduisons que la finesse du maillage doit être a minima plus grande qu'une maille par région.

Nous allons maintenant vérifier la bonne convergence du modèle lorsque nous augmentons la finesse du maillage. En employant la maquette fil, nous allons comparer six maillages différents ( $q = 1, 2, 4, 10, 20$  et  $30$ ) sur un cœur à une dimension à 2 groupes d'énergie et 6 groupes de précurseurs avec une anisotropie de scattering  $P_1$ . Ce cœur, identique au cœur étudié en section 3.3.1, est composé de 17 assemblages eux-mêmes composés de 17 crayons avec des conditions de vide aux frontières. Nous perturbons le crayon central de cette géométrie symétrique avec une fréquence de  $f_0 = 1$  Hz et une faible amplitude de 0,018 cm (sachant que la taille d'un crayon est de 1,08 cm et la distance inter-crayon de 0,36 cm). La Figure 5.3 détaille les résultats pour le groupe rapide en théorie de la diffusion pour la première et la septième harmoniques.



**FIGURE 5.3** – Convergence de la modélisation d'une vibration périodique d'un volume de taille finie en fonction de la finesse du maillage (résultats obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

Tous les résultats sont superposés pour la première harmonique et nous constatons qu'ils convergent à partir de 20 mailles par région pour la septième harmonique (les résultats pour  $q = 20$  et  $q = 30$  sont en effet superposés). La nouvelle modélisation développée converge donc bien lorsque nous augmentons la finesse du maillage. Nous remarquons en outre que plus l'ordre de l'harmonique est élevé, plus il faut raffiner le maillage pour obtenir des résultats convergés.

Précisons tout de même que pour le cas particulier des résolutions stochastiques, la convergence des résultats lorsque le maillage est particulièrement fin, est délicate à obtenir. En effet, les méthodes de résolution stochastique sont, de manière générale, difficiles à faire converger lorsque la source est très localisée et d'intégrale presque nulle (autrement dit lorsque les sources positives et négatives sont très proches les unes des autres et sont, en valeur absolue, presque égales). Une façon de pallier ce problème est d'effectuer deux calculs séparés : l'un ne prenant en compte que la partie positive de la source de bruit et l'autre que sa partie négative. Le résultat final sera la simple somme des deux résultats ainsi obtenus (ou la différence si l'on travaille avec la valeur absolue de la partie négative de la source de bruit).

## 5.2.2 Modélisation adiabatique

Nous allons maintenant appliquer l'approximation adiabatique à la modélisation que nous venons de détailler à la section précédente. L'approximation adiabatique employée est clairement détaillée en section 2.1.3. Pour rappel, il s'agit de remplacer le flux total  $\Phi$  du terme source par le flux d'équilibre  $\Phi_0^{AD}$  déterminé de manière adiabatique en suivant le déplacement de l'élément perturbé ( $\Phi_0^{AD}$  dépend donc implicitement du temps). Une approximation de cette modélisation adiabatique sera ensuite brièvement présentée.

Nous allons une fois de plus détailler le calcul pour la source de bruit de la quatrième région. Reprenons les notations introduites à la section précédente. Soient  $r \in [r_0^{bd}, r_0^{bd} + \Delta_L]$  et  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . Nous définissons le « flux adiabatique »  $\Phi_0^{AD}$  de la façon suivante :  $\Phi_0^{AD}(r, k)$  correspond au flux d'équilibre du système lorsque le crayon s'est déplacé de  $k$  mailles vers la droite, autrement dit lorsque  $r_0^{bd} = r_{k+1}$ .  $\Phi_0^{AD}$  est ainsi une fonction dépendante du temps et il nous faut donc calculer la transformée de Fourier du produit  $\delta\Sigma \times \Phi_0^{AD}$  sur chacune des  $q$  mailles de la quatrième région. En procédant comme précédemment, c'est-à-dire en commençant par calculer la transformée de Fourier puis en intégrant sur la maille  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\delta\Sigma\Phi_0^{AD})_i(\omega) &= q\Delta_\Sigma\Phi_{0,i}^{AD}(i) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(i)}^{\tau(i+1)} \delta(\omega - n\omega_0) \\
&\quad + q\Delta_\Sigma \sum_{k=1}^{q-i} \left[ (\Phi_{0,i}^{AD}(i+k) - \Phi_{0,i}^{AD}(i+k-1)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(i+k)}^{\tau(i+k+1)} \delta(\omega - n\omega_0) \right], \quad (5.34)
\end{aligned}$$

avec  $\Phi_{0,i}^{AD}(k) = \frac{1}{r_{i+1}-r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi_0^{AD}(r, k) dr$ ,  $\tau(k) = \arcsin(\frac{k-1}{q})/\omega_0$  et les fonctions  $f_n$  définies par les expressions 5.29.

Les termes sources des trois autres régions se déterminent ensuite de la même façon qu'en section 5.2.1 (sachant que pour les régions 1 et 3, le flux  $\Phi_0^{AD}$  correspond au flux d'équilibre du système lorsque le crayon se déplace vers la gauche). Cette modélisation converge tout aussi bien que la modélisation précédente lorsque nous augmentons la finesse du maillage.

### Approximation de la modélisation adiabatique

Nous décrivons, dans ce paragraphe, les détails de l'approximation de la modélisation adiabatique que nous avons mise en place. Cette approximation a été introduite et présentée théoriquement en premier lieu dans [139]. Elle consiste à approximer, dans le terme source, le flux total  $\Phi$  par le flux d'équilibre  $\Phi_0$  suivant le déplacement de l'élément perturbé et non plus par le flux adiabatique  $\Phi_0^{AD}$ . Autrement dit, le terme source devient  $\delta\Sigma(r, t)\Phi_0(r_0(t))$  avec  $r_0(t) = r - \epsilon(t)$ . La Figure 5.4 détaille le principe de cette approximation.

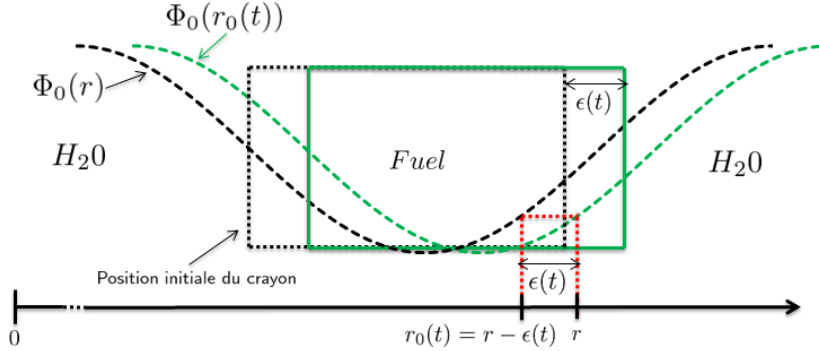


FIGURE 5.4 – Approximation de la modélisation adiabatique pour une vibration périodique d'un volume de taille finie.

En reprenant les notations précédentes, nous obtenons pour la maille  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  de la quatrième région (voir Fig. 5.2) :

$$\begin{aligned} (\widetilde{\delta\Sigma\Phi_0})_i(\omega) &= q\Delta_\Sigma \Phi_{0,1}^{\text{région 3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(i)}^{\tau(i+1)} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &+ q\Delta_\Sigma \sum_{k=1}^{q-i} \left[ \left( \Phi_{0,k+1}^{\text{région 3}} - \Phi_{0,k}^{\text{région 3}} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(i+k)}^{\tau(i+k+1)} \delta(\omega - n\omega_0) \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

De la même manière qu'à la section 5.2.1, les termes sources des trois autres régions se déterminent entre autres grâce aux relations 5.30 (sachant qu'il faut correctement faire correspondre le flux d'équilibre  $\Phi_0(r_0(t))$  et la région perturbée). Cette modélisation converge tout aussi bien que la modélisation générale lorsque nous augmentons la finesse du maillage.

Sans que nous n'ayons trouvé d'explications satisfaisantes, nous constatons que malheureusement cette approximation ne donne pas les résultats escomptés et ne permet pas d'améliorer la modélisation générale pour toutes les harmoniques de la source de bruit, contrairement à la modélisation adiabatique. Comme nous allons le détailler en section 5.4.2, nous verrons que les résultats concernant la première harmonique sont corrects et presque équivalents aux résultats de la modélisation adiabatique mais pas ceux concernant la seconde harmonique.

## 5.3 Modélisation numérique d'une vibration périodique d'un Dirac

Après avoir détaillé notre modélisation pour le cas d'une vibration d'amplitude plus petite que la taille de l'élément perturbé, nous allons présenter, dans cette section, notre modélisation dans le cas particulier où la taille de l'élément perturbé est plus petite que l'amplitude de la vibration. Cela peut s'interpréter comme une façon de modéliser numériquement la vibration d'un Dirac dont le modèle analytique a été présenté en section 5.1.1 (nous comparerons d'ailleurs les deux modélisations en section 5.4.1 pour le cas d'une vibration d'une barre absorbante). Comme précédemment, nous allons tout d'abord présenter la modélisation générale en théorie linéaire classique puis nous détaillerons les résultats obtenus lorsque que nous appliquons l'approximation adiabatique sur le flux du terme source. De la même manière qu'à la section précédente, une approximation de cette modélisation adiabatique sera aussi présentée.

### 5.3.1 Modélisation générale

Cette section détaille les principales étapes de calcul aboutissant à la nouvelle modélisation numérique d'une vibration périodique d'un volume de très petite taille. Nous nous attarderons ensuite sur la convergence de ce modèle en fonction de la taille du volume choisie.

### Mise en place de la modélisation

Prenons le cas d'une vibration périodique d'une barre de contrôle homogène de taille  $\Delta_R$  dans un milieu homogène (le caloporteur par exemple) d'un système à une dimension. Les frontières d'équilibre gauche et droite de la barre sont respectivement notées  $r_m$  et  $r_M$ . Posons  $\Delta_L$  l'amplitude de la vibration (qui est cette fois-ci supérieure à  $\Delta_R$ ) et  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  sa fréquence angulaire. La Figure 5.5(a) décrit cette situation.

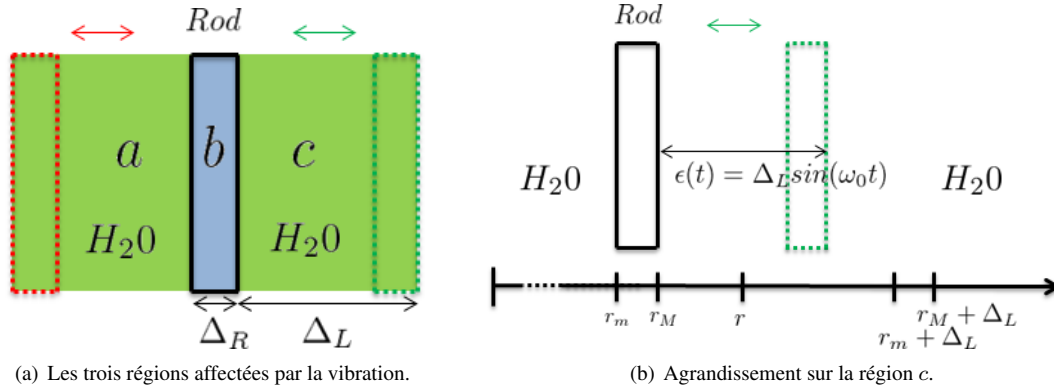


FIGURE 5.5 – Schéma d'une vibration périodique d'un Dirac (exemple pour la vibration d'une barre de contrôle).

Nous allons développer nos calculs pour les régions  $b$  et  $c$ . Commençons par la région  $c$  détaillée en Fig. 5.5(b). Soient  $r \in [r_M, r_M + \Delta_L]$  et  $\epsilon(t) = \Delta_L \sin(\omega_0 t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous avons le terme perturbatif suivant :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma(r, t) &= \Delta_\Sigma \Pi(r, r_m + \epsilon(t), r_M + \epsilon(t)) \\ &= \Delta_\Sigma (H(r_M + \epsilon(t) - r) - H(r_m + \epsilon(t) - r)), \end{aligned} \quad (5.36)$$

avec :

- $\Delta_\Sigma$  l'amplitude de la perturbation de la section efficace (dans notre cas précis  $\Delta_\Sigma = \Sigma_{0,rod} - \Sigma_{0,H_2O}$ ),
- $\Pi$  la fonction porte définie par :  $\forall r \in \mathbb{R}, \Pi(r, r_m, r_M) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_m \leq r \leq r_M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ,
- $H$  la fonction de Heaviside.

Le terme perturbatif  $\delta\Sigma$  est donc la différence de deux vibrations périodiques décrites en section 5.2.1. Ainsi,  $\Pi(r, r_m + \epsilon(t), r_M + \epsilon(t)) = 1$  sur deux intervalles continus  $[\tau_M(r), \tau_m(r)] \subset [0, \frac{T_0}{4}]$  et  $[\frac{T_0}{2} - \tau_m(r), \frac{T_0}{2} - \tau_M(r)] \subset [\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{2}]$  avec  $\tau_m$  défini par  $r = r_m + \epsilon(\tau_m)$  et  $\tau_M$  défini par  $r = r_M + \epsilon(\tau_M)$ . Le calcul de la transformée de Fourier de  $\delta\Sigma$  aboutit donc à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma(r, \omega) &= 2\Delta_\Sigma \left( \frac{\pi}{2} - \omega_0 \tau_M(r) - \frac{\pi}{2} + \omega_0 \tau_m(r) \right) \delta(\omega) \\ &\quad - 2\Delta_\Sigma \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{+\infty} \frac{\sin(2p\omega_0 \tau_M(r)) - \sin(2p\omega_0 \tau_m(r))}{2p} \delta(\omega - 2p\omega_0) \\ &\quad - 2i\Delta_\Sigma \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega_0 \tau_M(r)) - \cos((2p+1)\omega_0 \tau_m(r))}{2p+1} \delta(\omega - (2p+1)\omega_0). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Pour plus de simplicité, nous imposons dans cette modélisation une amplitude de vibration égale à un multiple de la taille de l'élément perturbé. Nous imposons donc un maillage régulier composé de  $q$  mailles chacune de longueur  $\Delta_R$  (voir Fig. 5.6). En intégrant l'expression 5.37 sur la maille  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  de la région  $c$  délimitée par les positions  $r_i$  et  $r_{i+1}$ , nous obtenons la source de bruit suivante :

$$(\delta\Sigma\Phi_0)_i(\omega) = q\Delta_\Sigma\Phi_{0,i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( [f_n(\tau)]_{\tau(i)}^{\tau(i+1)} - [f_n(\tau)]_{\tau(i+1)}^{\tau(i+2)} \right) \delta(\omega - n\omega_0), \quad (5.38)$$

avec  $\Phi_{0,i} = \frac{1}{r_{i+1}-r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi_0(r) dr$ ,  $\tau(k) = \arcsin(\frac{k-1}{q})/\omega_0$ <sup>10</sup> et les fonctions  $f_n$  définies précédemment par les expressions 5.29.

10. Précisons que pour la dernière maille  $i = q$ , nous imposons implicitement  $\tau(i+2) = \tau(i+1)$ .

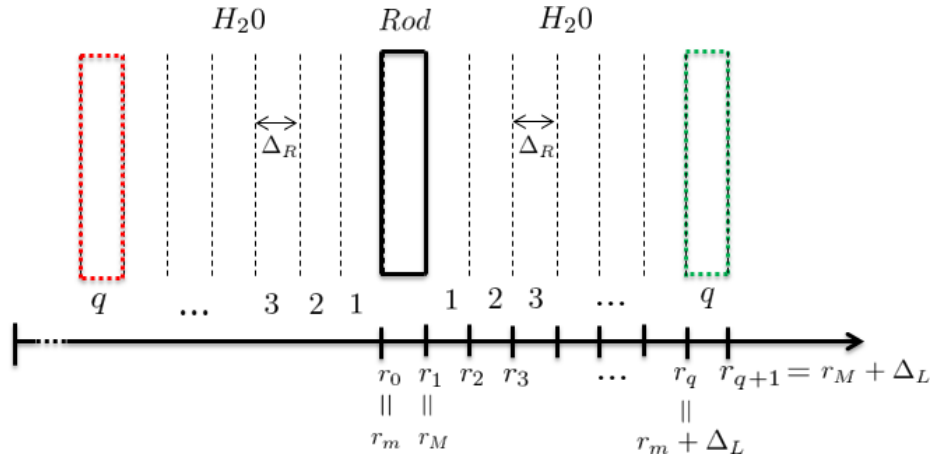


FIGURE 5.6 – Maillage pour la vibration d'un Dirac.

Puis, le terme perturbatif de la région  $a$  se déduit simplement de ce premier calcul par la relation suivante :

$$\delta\Sigma_{\text{région } a}(\omega) = \delta\Sigma_{\text{région } c}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{\omega_0}\pi}. \quad (5.39)$$

Nous devons maintenant déterminer l'expression de  $\delta\Sigma$  pour la région  $b$ , c'est-à-dire pour tout  $r \in [r_m, r_M]$ . Dans cette région nous avons :

$$\delta\Sigma(r, t) = -\Delta_\Sigma(H(r_m + \epsilon(t) - r) + H(r - r_M - \epsilon(t))), \quad (5.40)$$

où :

- $H(r_m + \epsilon(t) - r) = 1$  sur l'intervalle continu  $[\tau_m(r), \frac{T_0}{2} - \tau_m(r)] \subset [0, \frac{T_0}{2}]$ ,
- $H(r - r_M - \epsilon(t)) = 1$  sur l'intervalle continu  $[\tau_M(r), \frac{3T_0}{2} - \tau_M(r)] \subset [\frac{T_0}{2}, T_0]$ .

Notons que pour cette région  $\tau_M(r) \geq \frac{T_0}{2}$  alors que pour la région  $c$   $\tau_M(r) \leq \frac{T_0}{4}$ . Nous en déduisons la transformée de Fourier suivante :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma(r, \omega) &= -2\Delta_\Sigma \left( \frac{\pi}{2} - \omega_0\tau_m(r) + \frac{3\pi}{2} - \omega_0\tau_M(r) \right) \delta(\omega) \\ &+ 2\Delta_\Sigma \sum_{p=-\infty, p \neq 0}^{+\infty} \frac{\sin(2p\omega_0\tau_m(r)) + \sin(2p\omega_0\tau_M(r))}{2p} \delta(\omega - 2p\omega_0) \\ &+ 2i\Delta_\Sigma \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega_0\tau_m(r)) + \cos((2p+1)\omega_0\tau_M(r))}{2p+1} \delta(\omega - (2p+1)\omega_0); \end{aligned} \quad (5.41)$$

avec  $\tau_m(r) = \arcsin(\frac{r-r_m}{\Delta_L})/\omega_0 \in [0, \frac{T_0}{4}]$  et  $\tau_M(r) = \arcsin(\frac{r-r_M}{\Delta_L})/\omega_0 \in [\frac{T_0}{2}, \frac{3T_0}{4}]$ .

Puis, en intégrant entre  $r_m$  et  $r_M$ , nous obtenons :

$$(\delta\Sigma\Phi_0)_{rod}(\omega) = -2q\Delta_\Sigma\Phi_{0,rod} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [f_{2p}(\tau)]_0^{\tau^{(2)}} \delta(\omega - 2p\omega_0), \quad (5.42)$$

avec  $\Phi_{0,rod} = \frac{1}{r_M-r_m} \int_{r_m}^{r_M} \Phi_0(r)dr$  et les fonctions  $f_{2p}$  définies précédemment par les expressions 5.29. Le terme source  $(\delta\Sigma\Phi_0)_{rod}$  est donc seulement composé des harmoniques paires.

Tout comme pour la modélisation précédente, nous constatons que la source de bruit induite par notre modélisation numérique d'une vibration d'un Dirac est de moyenne temporelle non nulle et est composée d'un spectre discret mais infini.

### Convergence du modèle numérique

Puisque cette nouvelle modélisation numérique est, comme pour la précédente, basée sur l'emploi d'un maillage spatial, il convient d'en vérifier la bonne convergence. Nous allons pour cela étudier le cas simple d'une vibration d'une barre purement absorbante dans un cœur homogène à un seul groupe d'énergie et un seul groupe de précurseurs et avec un scattering isotrope en théorie de la diffusion. La taille du système est de  $h = 200$  cm. Nous allons étudier deux cas de figure : l'un avec une barre faiblement absorbante de constante de Galanin  $\gamma_1 = 0,005$  en  $r_p = 100$  cm, et l'autre avec une barre fortement absorbante de constante de Galanin  $\gamma_2 = 0,1$  en  $r_p = 50$  cm. Pour chacune des quatre tailles de barres étudiées (1 mm, 0,1 mm, 0,01 mm et 0,001 mm), il nous faut respecter l'égalité  $\sum_{0,a}^{rod} \Delta R = \gamma$  et ajuster la section efficace d'absorption du cœur homogène afin de conserver un système critique.

Les Figures 5.7 et 5.8 détaillent les résultats obtenus pour le flux d'équilibre et pour le module de la première harmonique du bruit dans le cas d'une vibration de fréquence angulaire  $\omega_0 = 10$  rad/s (soit  $f_0 \approx 1,6$  Hz) et d'amplitude 1 mm. Nous constatons que notre modélisation numérique converge correctement lorsque nous diminuons la taille de la barre. Dans les cas étudiés, nous pouvons considérer que les résultats sont convergés pour une taille de la barre de 0,01 mm.

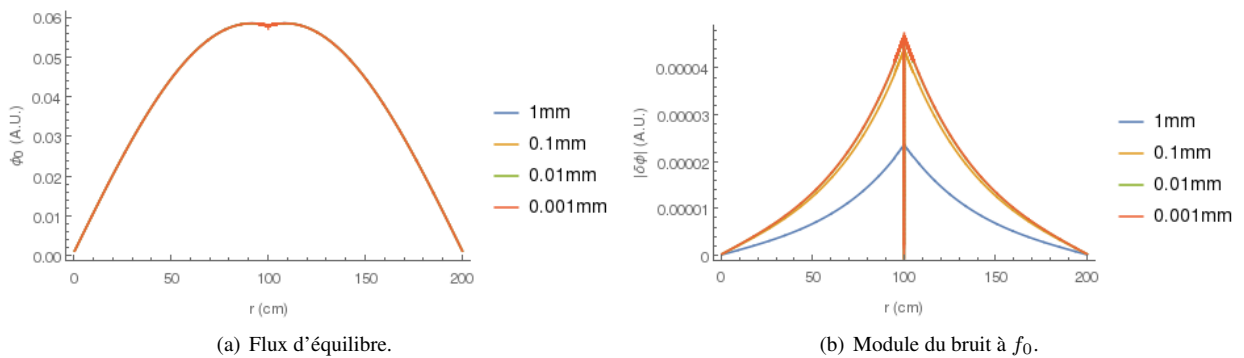


FIGURE 5.7 – Convergence de la modélisation d'une vibration périodique d'un Dirac en fonction de la largeur du volume pour le cas de la barre faiblement absorbante en  $r_p = 100$  cm (résultats obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

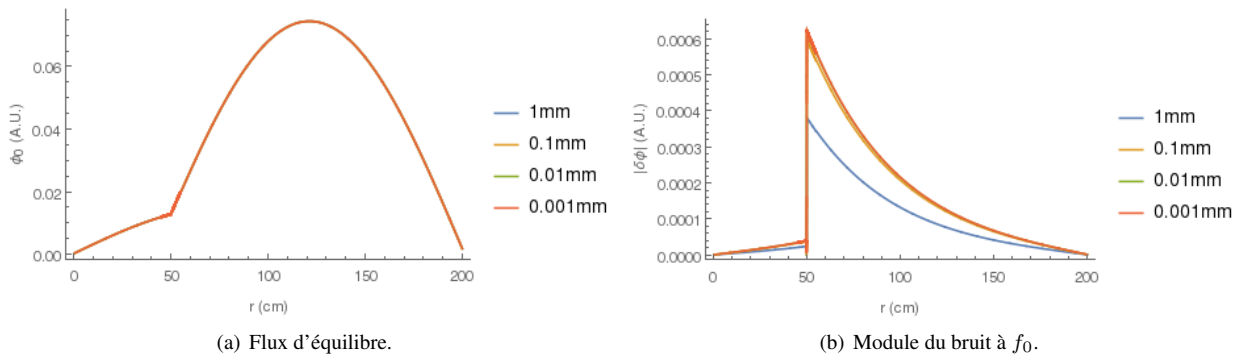


FIGURE 5.8 – Convergence de la modélisation d'une vibration périodique d'un Dirac en fonction de la largeur du volume pour le cas de la barre fortement absorbante en  $r_p = 50$  cm (résultats obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

### 5.3.2 Modélisation adiabatique

Comme précédemment, nous allons décrire notre modélisation dans le cas de l'approximation adiabatique telle que définie en section 2.1.3. Nous remplaçons donc uniquement le flux du terme source par le flux d'équilibre déterminé de manière adiabatique en suivant le déplacement de l'élément perturbé.

Pour le cas des régions  $a$  et  $c$ , il s'agit simplement de remplacer le flux d'équilibre  $\Phi_{0,i}$  par le flux d'équilibre  $\Phi_{0,i}^{AD}(i)$  sachant que  $\Phi_{0,i}^{AD}(i)$  correspond au flux adiabatique lorsque la barre s'est déplacée de  $i$  mailles vers la gauche (noté alors  $\Phi_{0,i}^{AD-}(i)$ ) pour la région  $a$  et vers la droite (noté alors  $\Phi_{0,i}^{AD+}(i)$ ) pour la région  $c$ . Pour le cas de la barre elle-même (la région  $b$ ), le calcul est plus compliqué et aboutit à :

$$\begin{aligned}
(\delta\Sigma\Phi_0^{AD})_{rod}(\omega) &= -q\Delta\Sigma \left( \Phi_{0,rod}^{AD+}(1) + (-1)^n \Phi_{0,rod}^{AD-}(1) \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_0^{\tau(2)} \delta(\omega - n\omega_0) \\
&- q\Delta\Sigma \sum_{k=1}^{q-1} \left[ \left( \Phi_{0,rod}^{AD+}(k+1) - \Phi_{0,rod}^{AD+}(k) + (-1)^n \left( \Phi_{0,rod}^{AD-}(k+1) - \Phi_{0,rod}^{AD-}(k) \right) \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(k+1)}^{\tau(k+2)} \delta(\omega - n\omega_0) \right], \quad (5.43)
\end{aligned}$$

avec  $\Phi_{0,rod}^{AD\pm}(k) = \frac{1}{r_M - r_m} \int_{r_m}^{r_M} \Phi_0^{AD\pm}(r, k) dr$ ,  $\tau(k) = \arcsin(\frac{k-1}{q})/\omega_0$  et les fonctions  $f_n$  définies par les expressions 5.29. Nous remarquons tout de suite que, dans cette approximation, les fréquences impaires existent pour le terme source  $(\delta\Sigma\Phi_0^{AD})_{rod}$  alors que ce n'est pas le cas pour la modélisation générale décrite précédemment. Nous vérifions que cette modélisation converge bien lorsque nous diminuons la taille de l'élément perturbé.

#### Approximation de la modélisation adiabatique

Nous allons appliquer maintenant la même approximation de la modélisation adiabatique que celle appliquée pour la vibration périodique d'un volume fini. Rappelons que cette approximation consiste à approximer, dans le terme source, le flux total  $\Phi$  par le flux d'équilibre  $\Phi_0$  suivant le déplacement de l'élément perturbé et non plus par le flux adiabatique  $\Phi_0^{AD}$  (le terme source devient donc  $\delta\Sigma(r, t)\Phi_0(r_0(t))$  avec  $r_0(t) = r - \epsilon(t)$ ).

Pour le cas des régions  $a$  et  $c$ , il s'agit simplement de remplacer le flux d'équilibre  $\Phi_{0,i}$  par le flux d'équilibre  $\Phi_{0,rod}$  de la barre. Pour la barre elle-même (la région  $b$ ), cela est un peu plus compliqué et nous obtenons (voir Fig. 5.6) :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\delta\Sigma\Phi_0})_{rod}(\omega) &= -q\Delta\Sigma \left( \Phi_{0,1}^{\in\text{région } a} + (-1)^n \Phi_{0,1}^{\in\text{région } c} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_0^{\tau(2)} \delta(\omega - n\omega_0) \\
&- q\Delta\Sigma \sum_{k=1}^{q-1} \left[ \left( \Phi_{0,k+1}^{\in\text{région } a} - \Phi_{0,k}^{\in\text{région } a} + (-1)^n \left( \Phi_{0,k+1}^{\in\text{région } c} - \Phi_{0,k}^{\in\text{région } c} \right) \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [f_n(\tau)]_{\tau(k+1)}^{\tau(k+2)} \delta(\omega - n\omega_0) \right]. \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Nous vérifions bien que cette approximation converge lorsque nous diminuons la taille de l'élément perturbé. Contrairement au cas précédent de la vibration d'un volume fini, nous constatons que cette approximation appliquée à la vibration d'un Dirac donne les résultats espérés. Comme nous allons le voir en section 5.4.1, ces derniers sont en effet presque équivalents aux résultats obtenus avec la modélisation adiabatique pour toutes les harmoniques.

## 5.4 Analyses et résultats

Cette dernière section développe et détaille les résultats obtenus en employant les différentes modélisations d'une vibration que nous venons de présenter. Nous comparerons, dans un premier temps, les modélisations analytiques et numériques pour le cas particulier d'une vibration périodique d'une barre absorbante de très petite taille dans un simple cœur homogène avec la maquette fil. Nous étudierons ensuite le cas d'une vibration périodique d'un crayon combustible dans un cœur hétérogène avec la maquette fil. Puis enfin nous analyserons avec APOLLO3® les résultats d'une vibration périodique d'un assemblage combustible dans le même cœur à deux dimensions que celui de la section 3.3.2. Comme en section 3.3, tous ces calculs ont été réalisés à zéro puissance.

### 5.4.1 Vibration d'une barre absorbante (maquette fil)

Pour le cas particulier d'une vibration périodique d'une barre absorbante de très petite taille, nous allons commencer par comparer notre modélisation numérique présentée en section 5.3.1 avec les modèles analytiques de la section 5.1 en théorie de la diffusion. Une comparaison des quatre premières harmoniques du bruit sera ensuite présentée en employant la modélisation numérique. Nous verrons que seules les deux premières harmoniques sont à prendre en compte. Rappelons que dans le cadre de cette modélisation numérique, la moyenne temporelle de la source de bruit est non nulle que ce soit en théorie linéaire ou non linéaire. L'application de la théorie du nouvel état d'équilibre décrite en section 2.2 est donc de rigueur. Pour mémoire, cette théorie permet d'annuler la moyenne temporelle de la source de bruit et de prendre en compte l'action des barres de commande ou des contre-réactions qui annule la moyenne temporelle de la réactivité ajoutée par les perturbations. C'est pourquoi nous comparerons, dans un dernier paragraphe, les harmoniques 1 et 2 du bruit issu des théories suivantes en employant notre modélisation numérique :

- la théorie linéaire classique décrite en section 2.1. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_T$  ( $T$  pour « Traditional »);
- la théorie du nouvel état d'équilibre en théorie linéaire décrite en section 2.2.1. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_{NS}$  (NS pour « New Steady state »);
- la théorie du nouvel état d'équilibre en théorie linéaire avec l'emploi de l'approximation adiabatique décrite aux sections 2.1.3, 2.2.1 et 5.3.2. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_{AD}$  (AD pour « Adiabatic »);
- la théorie non linéaire décrite en section 2.2.2 (voir aussi Fig. 3.2) avec une amplitude du produit de convolution de 10. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_R$  ( $R$  pour « Reference »).

Comme en section 5.3.1, nous allons étudier le cas simple d'une vibration d'une barre purement absorbante dans un cœur homogène à un seul groupe d'énergie et un seul groupe de précurseurs avec la maquette fil en théorie de la diffusion avec un scattering isotrope. La taille du système est de  $h = 200$  cm. Deux cas de figure vont être étudiés : l'un avec une barre faiblement absorbante de constante de Galanin  $\gamma_1 = 0,005$  en  $r_p = 100$  cm, et l'autre avec une barre fortement absorbante de constante de Galanin  $\gamma_2 = 0,1$  en  $r_p = 50$  cm. Sachant que la taille de la barre est de 0,01 mm, la section efficace d'absorption employée dans notre modélisation numérique est de  $\Sigma_{0,a}^{rod} = \frac{\gamma}{\Delta_R}$ . La section efficace d'absorption du cœur homogène est à chaque fois ajustée afin de conserver un système critique. Tous les flux d'équilibre sont normalisés à la même puissance (les sources de bruit sont donc toutes normalisées de la même manière ce qui nous permet de comparer directement les modules et les phases des modèles analytiques et numériques). La vibration a une fréquence angulaire de  $\omega_0 = 10$  rad/s (soit  $f_0 \approx 1,6$  Hz) et une amplitude de 1 mm.

#### Comparaison des modélisations analytiques et numériques (barre faiblement et fortement absorbante)

Pour les deux cas étudiés (une barre faiblement absorbante et une barre fortement absorbante), nous allons tout d'abord comparer les trois modèles suivants :

- notre modélisation numérique d'une vibration périodique d'un Dirac (voir section 5.3.1) dans le cadre de la théorie linéaire classique du bruit développée en section 2.1. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_T$  ( $T$  pour « Traditional »);
- la modélisation analytique de FGW sous sa forme générale (voir Eq. 5.12). Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_{FGW}^{Strong}$ . Pour rappel, les équations 5.12 du modèle de FGW et 5.24 du modèle  $\epsilon/d$  sont strictement équivalentes;
- la modélisation analytique de FGW dans le cadre de l'approximation de faible absorption (voir Eq. 5.13). Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_{FGW}^{Weak}$ .



Nous allons uniquement comparer les flux d'équilibre et les modules et les phases de la première harmonique <sup>11</sup>. Les comparaisons des autres harmoniques et des différentes théories (linéaire avec ou sans la théorie du nouvel état d'équilibre, adiabatique, non linéaire...) seront faites au paragraphe suivant.

La Figure 5.9 présente les comparaisons des flux d'équilibre employés dans les trois modèles suscités (pour rappel, seule la modélisation analytique de FGW avec l'approximation de faible absorption emploie le flux d'équilibre du cœur sans la barre absorbante).

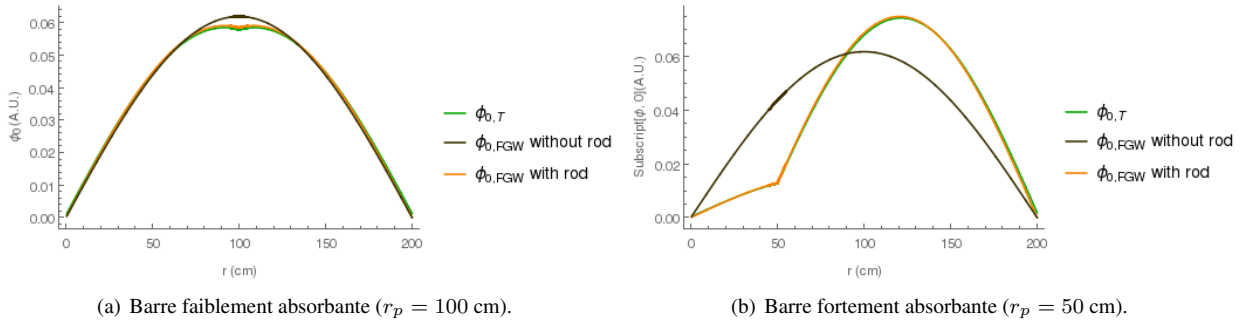


FIGURE 5.9 – Flux d'équilibre pour le cas d'une barre faiblement et fortement absorbante (résultats numériques  $\Phi_{0,T}$  obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

Nous constatons sans grande surprise que les flux d'équilibre avec ou sans la barre sont raisonnablement proches dans le cas d'une barre faiblement absorbante mais sont sensiblement différents dans le cas d'une barre fortement absorbante. La dépression du flux d'équilibre autour de la barre absorbante ne peut donc pas être négligée pour le cas de la barre fortement absorbante.

Les Figures 5.10 et 5.11 détaillent les modules et les phases de la première harmonique des trois modèles pour le cas de la barre faiblement et fortement absorbante.

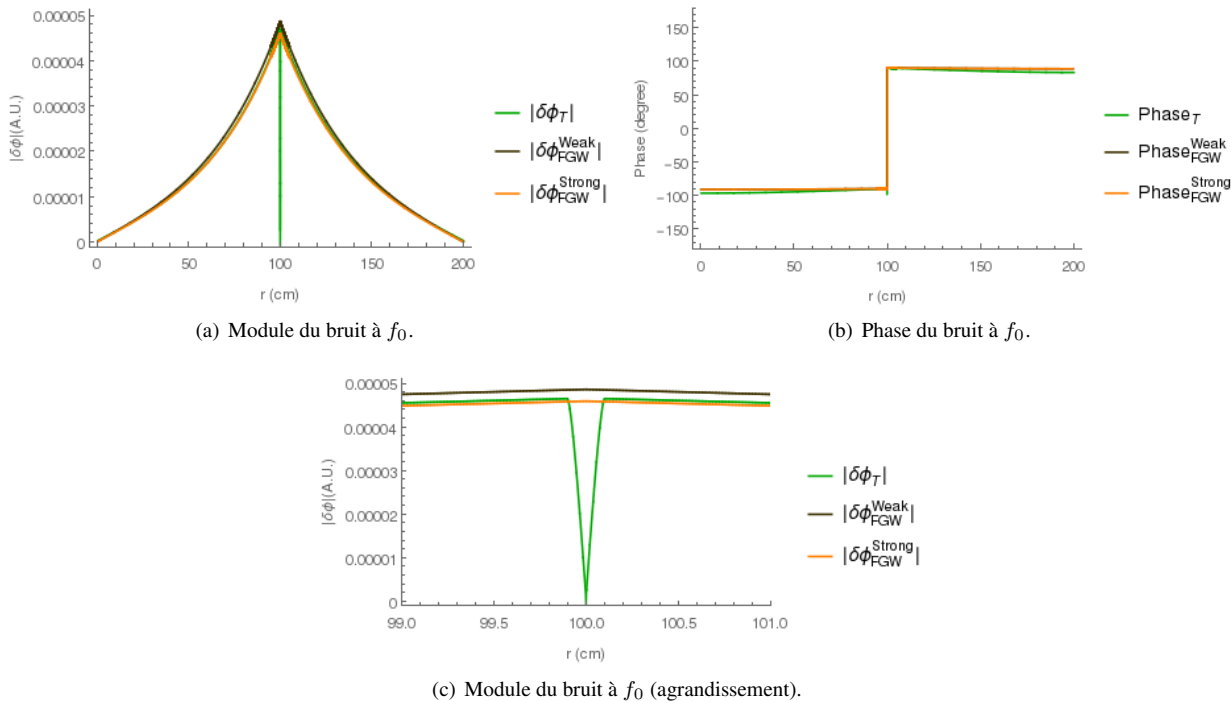
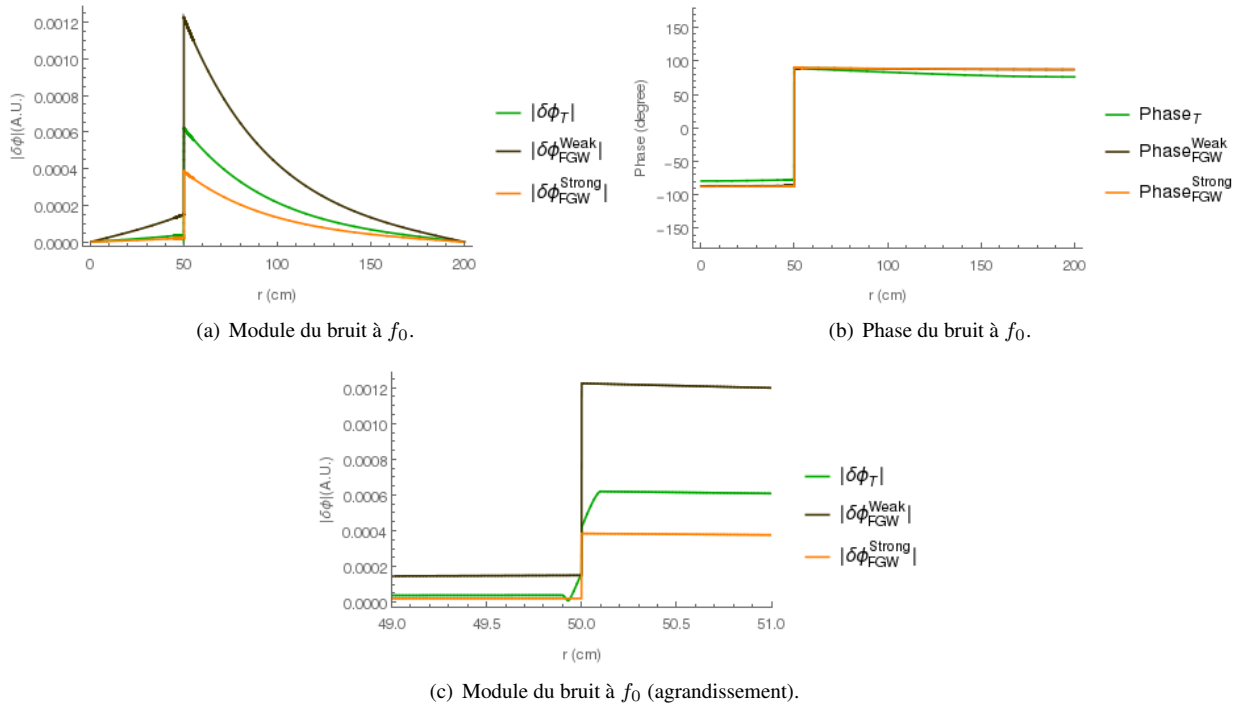


FIGURE 5.10 – Comparaison entre les modèles analytiques et numériques pour le cas de la barre faiblement absorbante en  $r_p = 100$  cm (résultats numériques  $\delta\Phi_T$  obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

<sup>11</sup>. Dans le cas d'une vibration sinusoïdale,  $\epsilon^2(t) = \Delta_L^2/2(1 - \cos(2\omega_0 t))$ . Le terme de second ordre en  $\epsilon$  contient donc à la fois une partie de l'harmonique fondamentale en  $\omega = 0$  et une partie de la seconde harmonique. C'est pourquoi nous avons choisi de ne pas comparer les résultats numériques et analytiques des harmoniques supérieures du bruit.



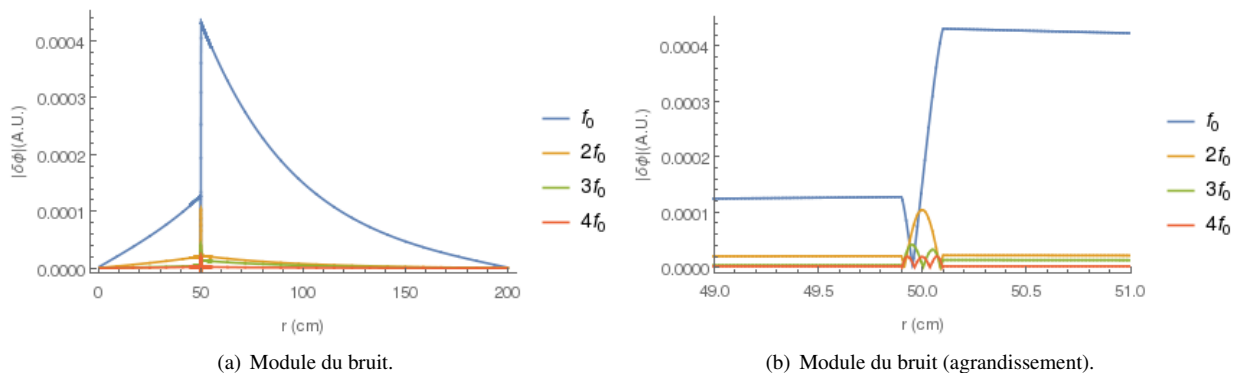
**FIGURE 5.11** – Comparaison entre les modèles analytiques et numériques pour le cas de la barre fortement absorbante en  $r_p = 50$  cm (résultats numériques  $\delta\Phi_T$  obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

Concernant le cas faiblement absorbant, nous constatons que les résultats des trois modèles sont sensiblement proches les uns des autres. L'approximation de faible absorption du modèle de FGW semble donc valide dans ce premier cas. Notons que les résultats de notre modélisation numérique sont particulièrement proches de la modélisation analytique de FGW sous sa forme générale. Concernant maintenant le cas fortement absorbant, les différences entre les trois modèles sont importantes, notamment entre les résultats du modèle de FGW dans le cadre de l'approximation de faible absorption et les deux autres modèles. Comme attendu, l'approximation de faible absorption n'est donc pas valide dans ce cas.

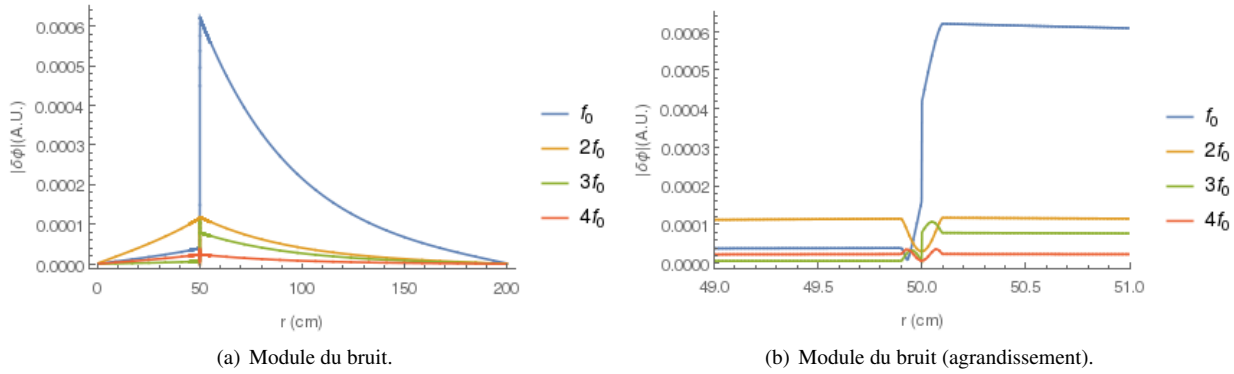
Rappelons que les équations 5.12 et 5.13 du modèle de FGW sont valables uniquement si  $|r - r_p| > |\epsilon(t)|$  pour tout  $t$ . C'est pourquoi les résultats proches de la perturbation sont à comparer avec précaution. Compte tenu de ces comparaisons, nous pouvons néanmoins estimer que notre modélisation numérique semble correctement simuler une vibration périodique d'un Dirac comparée aux modélisations analytiques employées dans la littérature.

### Comparaison des différentes harmoniques (barre fortement absorbante)

À partir de maintenant, nous allons exclusivement employer notre modélisation numérique et analyser le cas de la barre fortement absorbante. Les Figures 5.12 et 5.13 présentent les modules des harmoniques 1, 2, 3 et 4 du bruit en théorie non linéaire et en théorie linéaire classique. Nous constatons que les contributions des harmoniques 3 et 4 sont négligeables. Les harmoniques à prendre en compte sont donc seulement les deux premières :  $f_0$  et  $2f_0$ .



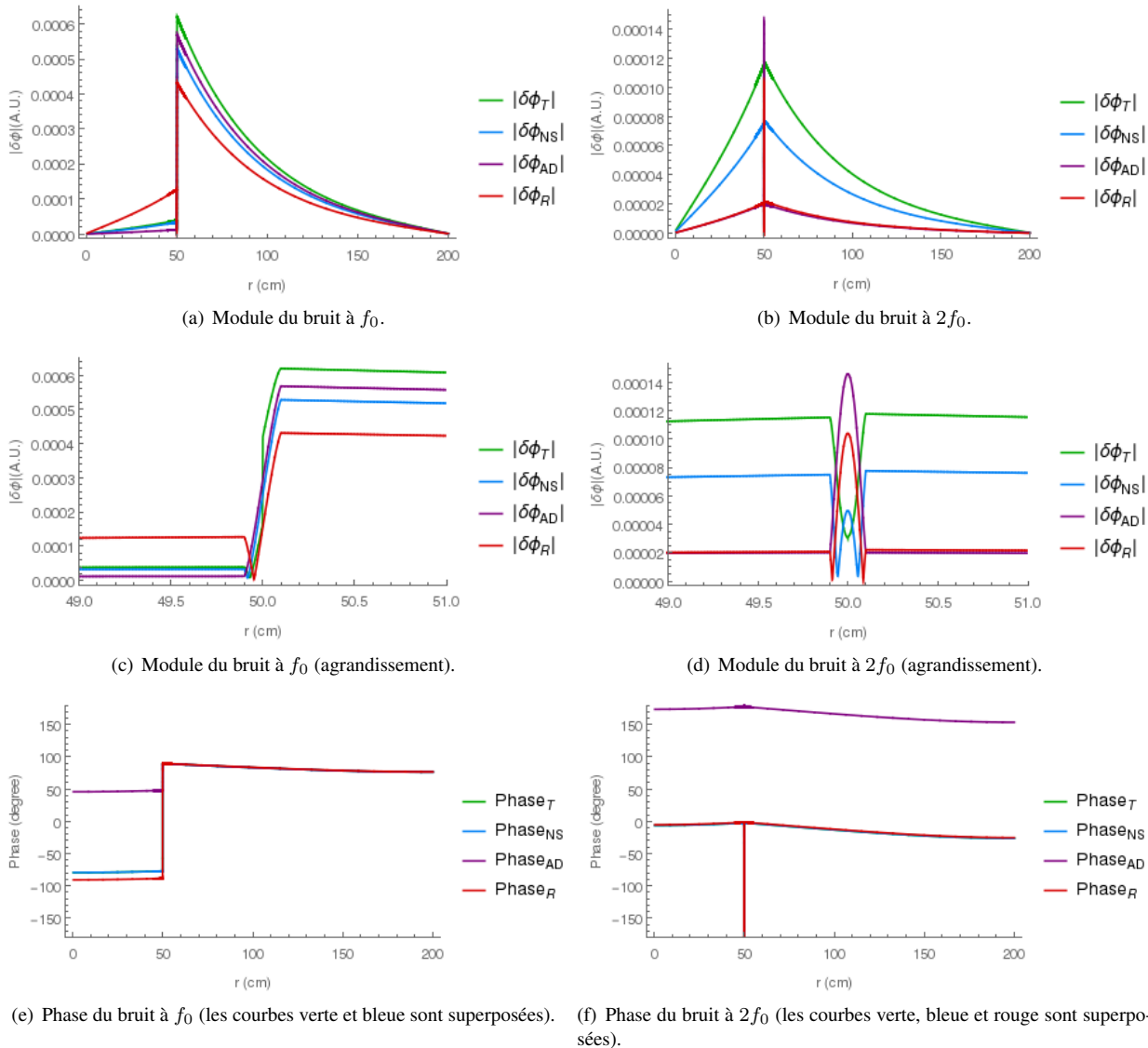
**FIGURE 5.12** – Comparaison des modules des quatre premières harmoniques du bruit en théorie non linéaire pour le cas de la barre fortement absorbante en  $r_p = 50$  cm (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).



**FIGURE 5.13** – Comparaison des modules des quatre premières harmoniques du bruit en théorie linéaire classique pour le cas de la barre fortement absorbante en  $r_p = 50$  cm (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

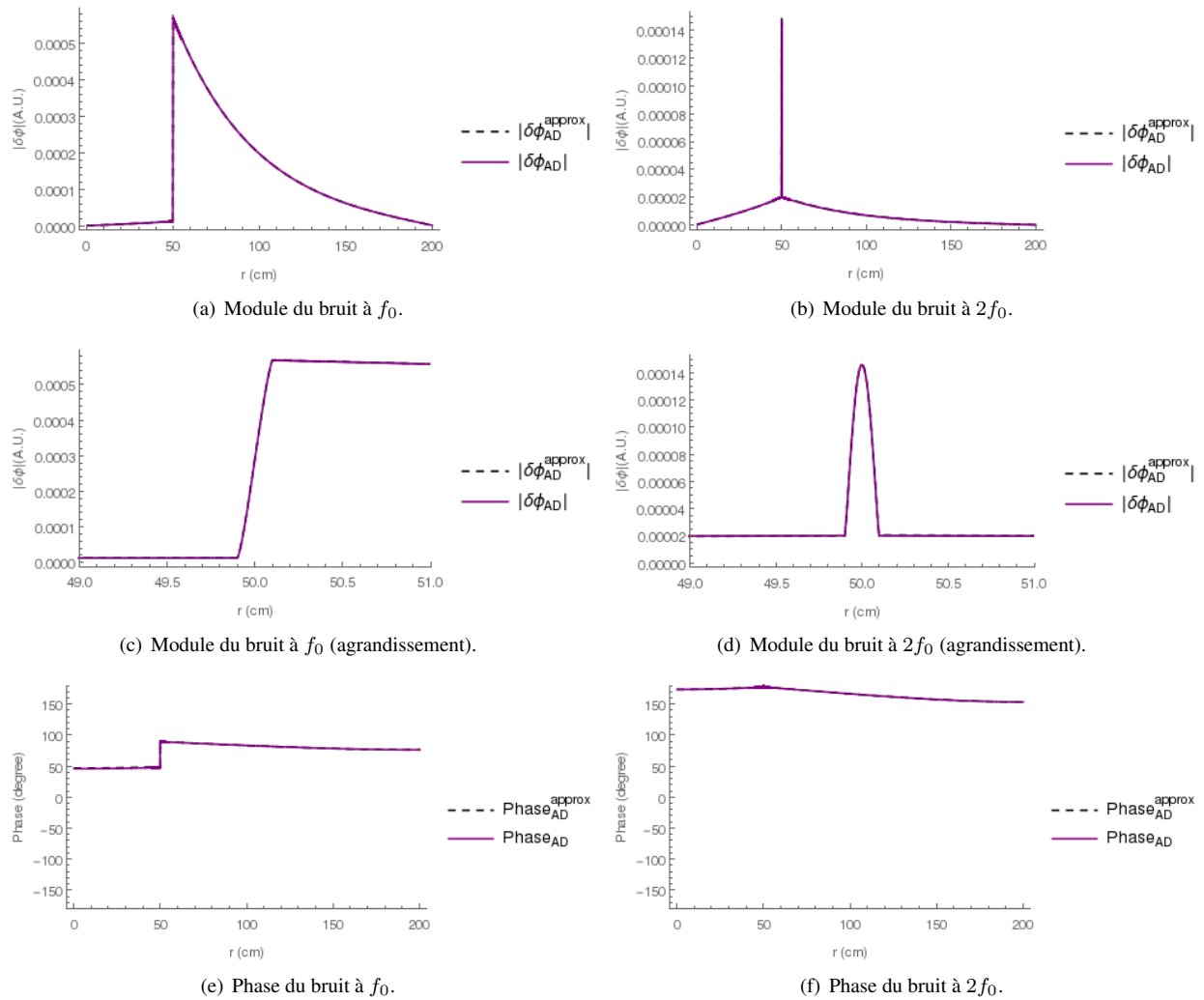
**Comparaison des différentes théories (barre fortement absorbante)**

Nous comparons, dans ce dernier paragraphe, les quatre théories listées en début de section pour les deux premières harmoniques en employant notre modélisation numérique dans le cas de la barre fortement absorbante. La Figure 5.14 détaille les résultats obtenus.



**FIGURE 5.14** – Module et phase du bruit à  $f_0 = 1$  Hz et  $2f_0 = 2$  Hz pour le cas de la barre fortement absorbante en  $r_p = 50$  cm en fonction de la théorie choisie (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

En toute honnêteté, nous avons détaillé ces comparaisons à titre indicatif car nous n'avons pas trouvé de justifications ou d'interprétations satisfaisantes<sup>12</sup> qui pourraient expliquer les différences observées entre les quatre théories (excepté le fait que la théorie linéaire est assez logiquement mise à mal lorsque la barre est fortement absorbante, autrement dit les termes non linéaires doivent être pris en compte). Nous notons par exemple que la modélisation adiabatique semble correctement estimer le module de la seconde harmonique par rapport à la solution de référence mais pas sa phase. Concernant la première harmonique, cette modélisation adiabatique ne permet pas de se rapprocher de la solution de référence. Néanmoins, une chose est sûre, l'approximation de la modélisation adiabatique décrite en section 5.3.2 a les résultats escomptés dans le cas étudié. En effet, comme le montre la Fig. 5.15, cette approximation donne des résultats presque équivalents à ceux obtenus avec la modélisation adiabatique.



**FIGURE 5.15** – Module et phase du bruit à  $f_0 = 1$  Hz et  $2f_0 = 2$  Hz pour le cas de la barre fortement absorbante en  $r_p = 50$  cm en employant la modélisation adiabatique et son approximation (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

12. Des erreurs de développement ne sont évidemment pas à exclure même si nous avons été particulièrement attentifs lors de l'implémentation des modélisations dans la maquette fil.

### 5.4.2 Vibration d'un crayon combustible (maquette fil)

Nous allons maintenant étudier, avec la maquette fil, la vibration d'un crayon combustible dans le même cœur hétérogène à une dimension que celui de la section 3.3.1. Pour rappel, il s'agit d'un cœur composé de 17 assemblages identiques eux-mêmes composés de 17 crayons identiques dans un modérateur homogène (la taille de chaque crayon homogène est de 1,08 cm et la distance inter-crayon de 0,36 cm). Ce cœur, parfaitement symétrique, a donc une longueur de 416,16 cm et ses assemblages de 24,48 cm. Nous travaillons ici à 4 groupes d'énergie et 6 groupes de précurseurs avec une anisotropie de scattering  $P_1$  et un unique isotope fissile. Nous n'allons présenter que les résultats du groupe 1 (groupe rapide) et du groupe 4 (groupe thermique).

La modélisation utilisée est celle d'une vibration périodique d'un volume fini décrite en section 5.2. Une vibration de fréquence  $f_0 = 1$  Hz et d'amplitude 0,09 cm est imposée au crayon central du 3<sup>ème</sup> assemblage. Le maillage choisi pour modéliser cette vibration est de 20 mailles ( $q = 20$ ) pour chacune des quatre régions du modèle (voir Fig. 5.2). Dans le cadre de cette modélisation numérique, la moyenne temporelle de la source de bruit est non nulle que ce soit en théorie linéaire ou non linéaire. Comme pour la modélisation d'une vibration d'un Dirac, l'application de la théorie du nouvel état d'équilibre décrite en section 2.2 est donc de rigueur.

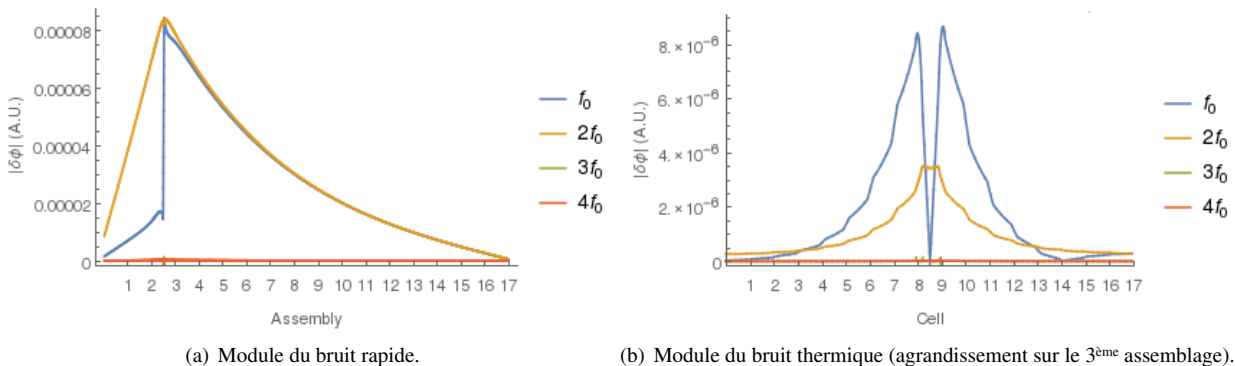
Nous commencerons par traiter le problème en théorie de la diffusion uniquement. Une comparaison des quatre premières harmoniques du bruit va tout d'abord être présentée dans le cadre de la théorie non linéaire. Nous verrons que seules les deux premières harmoniques sont à prendre en compte. Nous comparerons ensuite les flux d'équilibre et les harmoniques 1 et 2 du bruit issu des théories suivantes en diffusion :

- la théorie linéaire classique décrite en section 2.1. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_T$  ( $T$  pour « Traditional ») ;
- la théorie du nouvel état d'équilibre en théorie linéaire décrite en section 2.2.1. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_{NS}$  (NS pour « New Steady state ») ;
- la théorie du nouvel état d'équilibre en théorie linéaire avec l'emploi de l'approximation adiabatique décrite aux sections 2.1.3, 2.2.1 et 5.2.2. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_{AD}$  (AD pour « Adiabatic ») ;
- la théorie non linéaire décrite en section 2.2.2 (voir aussi Fig. 3.2) avec une amplitude du produit de convolution de 10. Les résultats correspondants seront notés  $\Phi_R$  ( $R$  pour « Reference »).

Enfin, les résultats de la théorie linéaire classique en diffusion et en transport seront comparés dans un dernier paragraphe.

#### Comparaison des différentes harmoniques

La Figure 5.16 compare les modules des harmoniques 1, 2, 3 et 4 du bruit en théorie non linéaire pour les groupes rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4). Puisque nous avons choisi un maillage de 20 mailles pour chacune des quatre régions du modèle, nous sommes sûrs de la bonne convergence des résultats. Nous constatons que les harmoniques 1 et 2 dominent et que les contributions des harmoniques 3 et 4 (et de toutes les autres harmoniques) sont négligeables. Nous obtenons des conclusions similaires pour toutes les autres théories. Les harmoniques les plus importantes sont donc les deux premières :  $f_0$  et  $2f_0$ .



**FIGURE 5.16** – Comparaison des modules des quatre premières harmoniques du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) en théorie non linéaire (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

Ceci peut s'expliquer par le fait que pour chacune des quatre régions perturbées, le terme perturbatif  $\delta\Sigma(r, \omega)$  ne change pas de signe pour  $f_0$  et  $2f_0$  alors qu'il change de signe pour toutes les autres harmoniques (voir Fig. 5.17). Ainsi, pour les harmoniques plus grandes que deux, la source de bruit change de signe dans chacune des régions perturbées ce qui a pour conséquence un bruit très faible pour ces harmoniques comme le montre la Fig. 5.16.

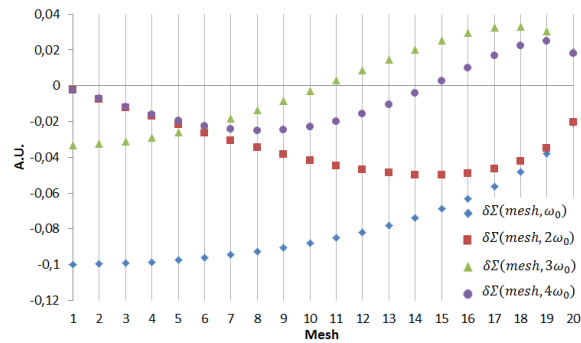


FIGURE 5.17 – Évolution de  $\delta\Sigma$  en fonction de la maille et de la fréquence (région 4 composée de 20 mailles).

### Comparaison des différentes théories

Commençons par comparer les états d'équilibre des quatre théories. Les valeurs propres des quatre états d'équilibre sont :  $k_T = 1,000016$ ,  $k_{NS} = 0,9999347$ ,  $k_{AD} = 0,9999399$ , et  $k_R = 0,9999401$ . Elles sont sensiblement comparables. La valeur propre  $k_{AD}$  est la plus proche de celle de référence  $k_R$ . La Figure 5.18 détaille les flux d'équilibre des groupes rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4). Nous remarquons que l'opérateur d'équilibre  $L_{0,AD}$  semble être la meilleure approximation de l'opérateur d'équilibre de référence  $L_{0,R}$ . Notons que l'opérateur d'équilibre  $L_{0,NS}$  reste tout de même une bonne approximation de l'opérateur d'équilibre de référence  $L_{0,R}$ .

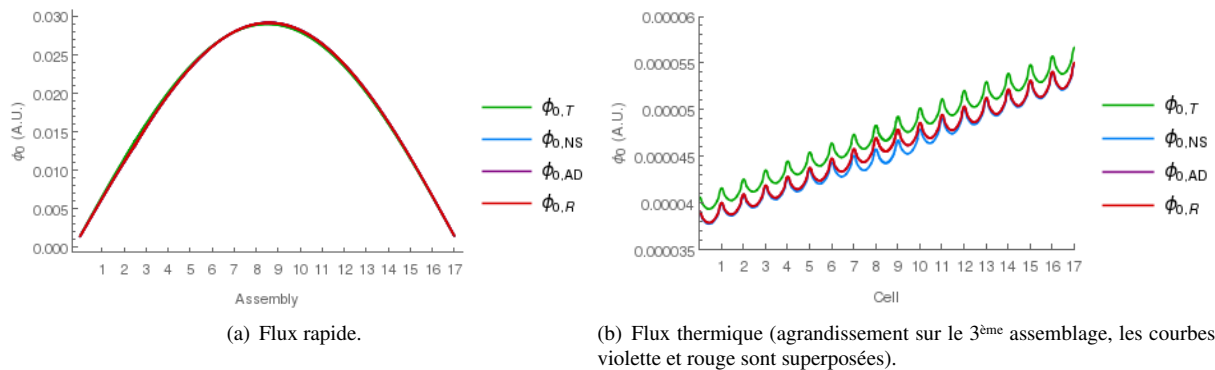


FIGURE 5.18 – Flux rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) d'équilibre du cœur hétérogène à une dimension (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

La Figure 5.19 compare le module et la phase de la première et de la seconde harmoniques du bruit rapide et thermique obtenus avec les quatre théories. Pour plus de lisibilité, nous avons zoomé sur le 3<sup>ème</sup> assemblage pour le module du groupe thermique.

Comparons tout d'abord les quatre théories. À  $f_0$ , les résultats sont très proches les uns des autres alors qu'à  $2f_0$  nous observons des différences significatives. Nous remarquons rapidement que  $\delta\Phi_{AD}$  est la meilleure approximation de la solution de référence  $\delta\Phi_R$  en particulier pour la seconde harmonique. L'approximation adiabatique que nous avons mise en place améliore donc sensiblement la théorie linéaire dans le cas étudié. Concernant  $\delta\Phi_{NS}$ , la théorie ne permet pas d'améliorer les résultats de la seconde harmonique du bruit mais elle permet d'obtenir un état d'équilibre très proche de celui de référence comme nous l'avons vu précédemment.

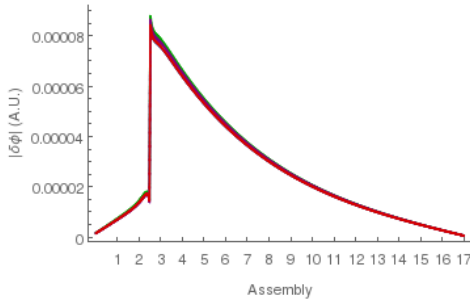
Analysons maintenant les modules à  $f_0$  et  $2f_0$ . Pour le groupe rapide à  $f_0$ , nous avons une composante globale avec une lente variation spatiale, et une composante locale proche de la perturbation au milieu du 3<sup>ème</sup> assemblage. La phase est constante<sup>13</sup> sur tout le cœur (environ  $-\pi/2$ ). Pour le groupe thermique à  $f_0$ , la composante locale domine fortement près de la perturbation et nous constatons plusieurs changements de phases à cet endroit. La phase reste néanmoins constante loin de la perturbation (environ  $-\pi/2$ ). Comparée au groupe rapide, la composante globale semble négligeable loin de la perturbation et est « écrasée » par l'amplitude de la composante locale. À  $2f_0$ , nous observons des comportements similaires mais avec une phase autour de 0 pour  $\delta\Phi_T$  et  $\delta\Phi_{NS}$  et autour de  $+\pi$  pour  $\delta\Phi_{AD}$  et  $\delta\Phi_R$ .

Nous en déduisons que, proche de la perturbation, les composantes globales et locales pour  $f_0$  et  $2f_0$  sont visibles pour le groupe rapide alors que seule la composante locale est visible pour le groupe thermique. Loin de la perturbation,

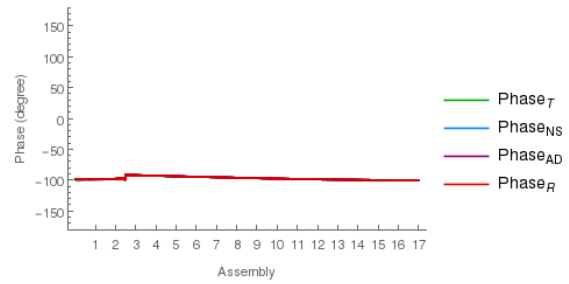
13. Comme cela est montré dans [112], une vibration n'implique pas une opposition de phase systématique de part et d'autre de la perturbation. Cela dépend entre autres de la taille du système et de l'emplacement de la vibration.

seule la composante globale existe pour tous les groupes mais son amplitude est plus grande pour le groupe rapide que pour le groupe thermique. Nous avons de plus un déphasage de  $\pm\pi/2$  selon la théorie employée entre ces deux harmoniques.

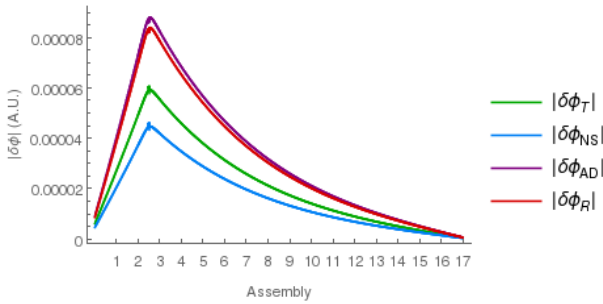
Nous constatons en outre que la seconde harmonique affecte davantage le groupe rapide que le groupe thermique et donc affecte davantage la composante globale que locale. Comme attendu, nous vérifions que la composante globale ne peut pas être décrite par le terme du réacteur point et que la composante locale affecte plus le groupe thermique que le groupe rapide. Grâce à plusieurs autres calculs non présentés ici, nous avons constaté que le module de la seconde harmonique était plus important et plus proche de la première harmonique pour les grands systèmes et pour



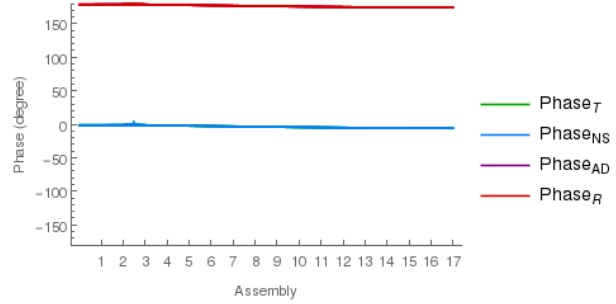
(a) Module du bruit rapide à  $f_0$ .



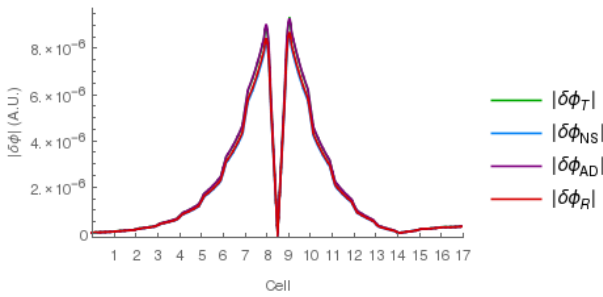
(b) Phase du bruit rapide à  $f_0$ .



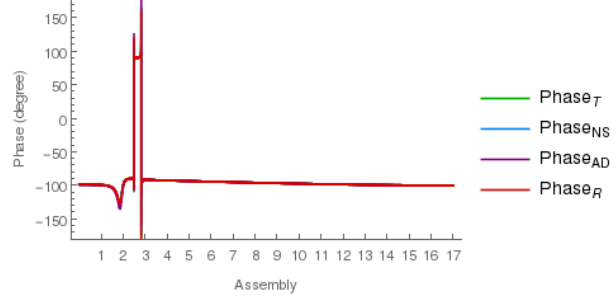
(c) Module du bruit rapide à  $2f_0$ .



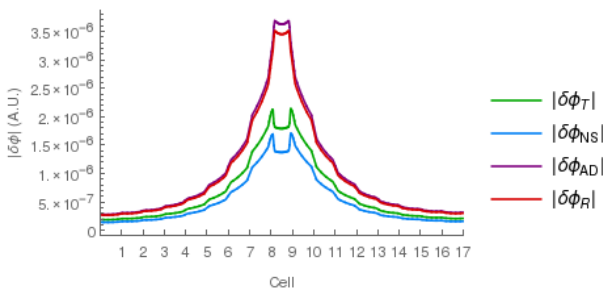
(d) Phase du bruit rapide à  $2f_0$  (les courbes verte/bleue et violette/rouge sont superposées).



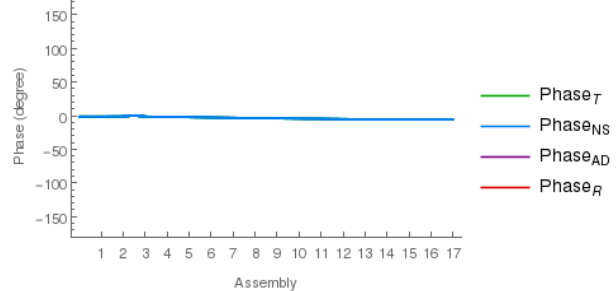
(e) Module du bruit thermique à  $f_0$  (agrandissement sur le 3<sup>ème</sup> assemblage).



(f) Phase du bruit thermique à  $f_0$ .



(g) Module du bruit thermique à  $2f_0$  (agrandissement sur le 3<sup>ème</sup> assemblage).

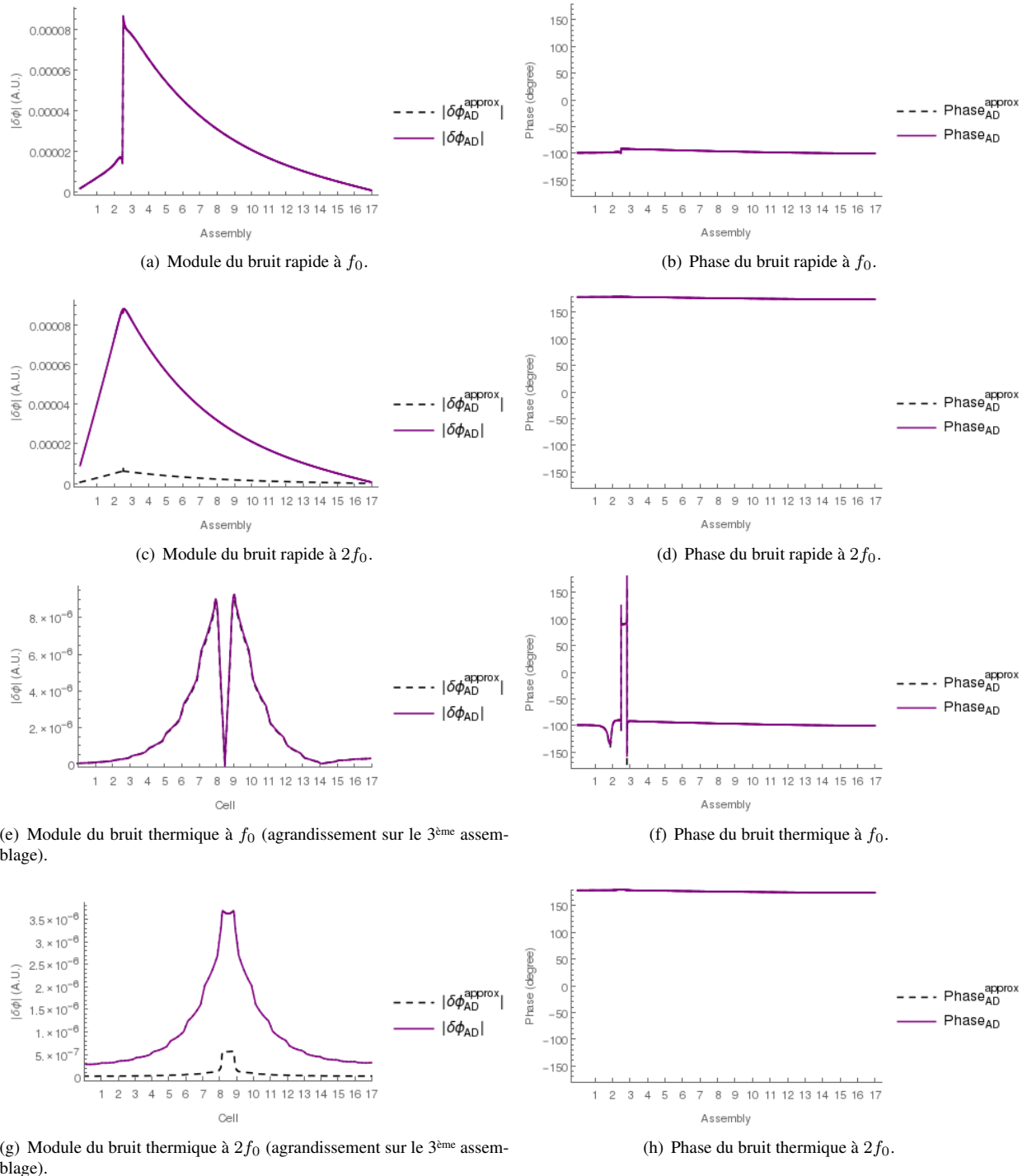


(h) Phase du bruit thermique à  $2f_0$  (les courbes verte/bleue et violette/rouge sont superposées).

**FIGURE 5.19** – Module et phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à  $f_0 = 1$  Hz et  $2f_0 = 2$  Hz en fonction de la théorie choisie (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).

les grandes amplitudes de vibrations. De plus, les termes d'ordres supérieurs sont plus importants pour les cas de grandes amplitudes de vibrations et pour les petits systèmes. Précisons que certaines de nos observations concernant les composantes globales et locales et la première et deuxième harmoniques sont en accord avec [112] mais que, dans notre cas, la seconde harmonique n'est pas négligeable.

Enfin, la Figure 5.20 compare les résultats obtenus entre la modélisation adiabatique et son approximation. Comme nous l'avons déjà évoqué en section 5.2.2, nous constatons que l'approximation de la modélisation adiabatique ne donne pas les résultats espérés et ne permet pas d'améliorer la modélisation générale pour toutes les harmoniques de la source de bruit, contrairement à la modélisation adiabatique. Les résultats concernant la première harmonique sont en effet corrects et presque équivalents aux résultats de la modélisation adiabatique mais pas ceux concernant la seconde harmonique. Nous n'avons malheureusement pas réussi à trouver d'explication à ceci.

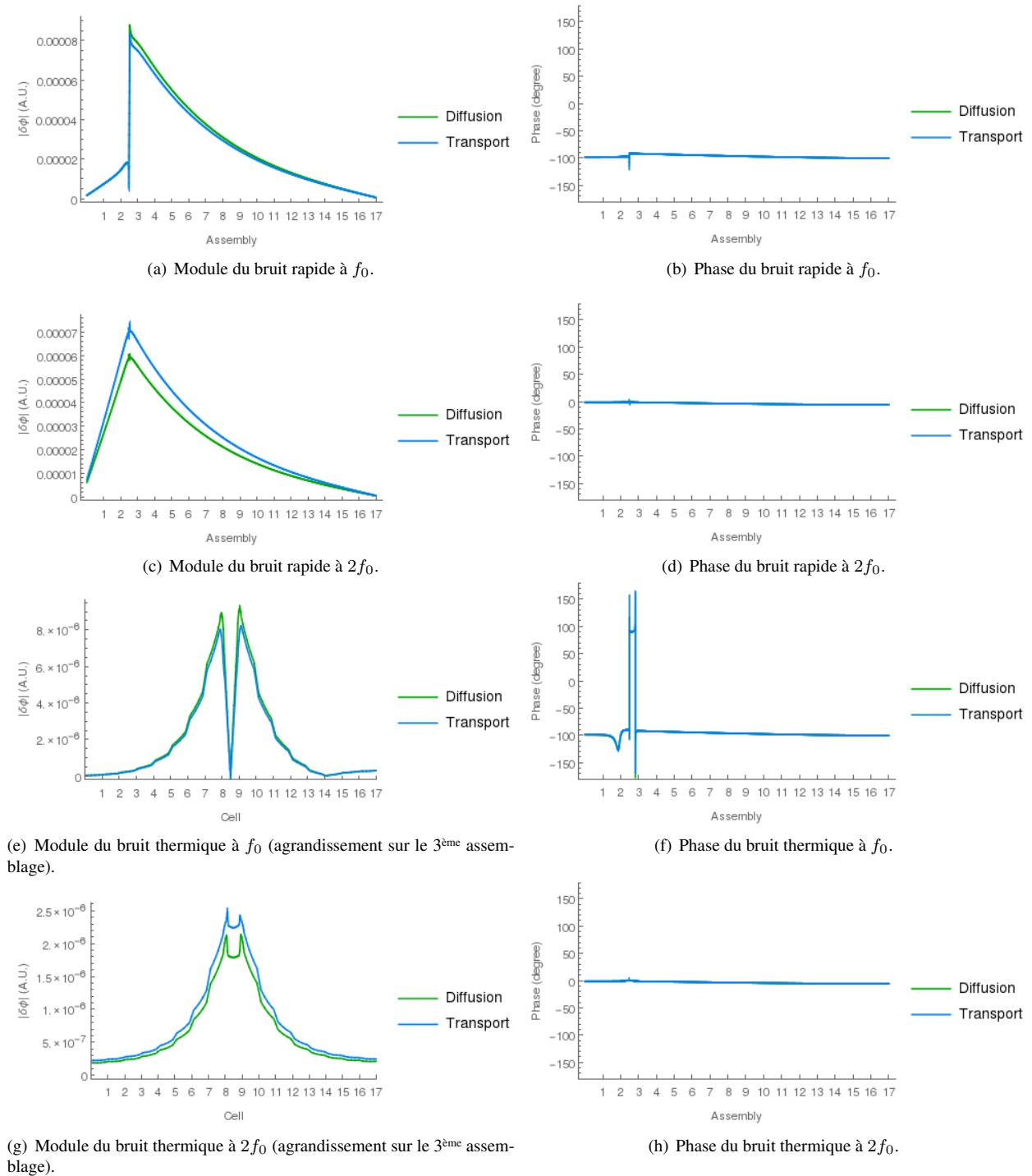


**FIGURE 5.20** – Module et phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à  $f_0 = 1$  Hz et  $2f_0 = 2$  Hz en employant la modélisation adiabatique et son approximation (résultats numériques obtenus avec la maquette fil en théorie de la diffusion).



**Comparaison diffusion/transport**

Terminons notre étude en comparant brièvement les résultats de la théorie linéaire classique en diffusion et en transport. Nous avons déjà vu en section 3.3.1 qu'il y avait un faible écart entre la théorie du transport et celle de la diffusion concernant l'état d'équilibre du système (voir Fig. 3.16). La Figure 5.21 présente les modules et les phases de la première et de la seconde harmonique obtenus en théorie du transport et de la diffusion. Comme en section 3.3.1, nous notons que les différences entre le transport et la diffusion ne sont pas très importantes hormis localement au niveau du 3<sup>ème</sup> assemblage. Rappelons que nous travaillons exactement sur le même système que celui de la section 3.3.1. Il est donc logique d'obtenir les mêmes conclusions que cette dernière, conclusions qui peuvent se résumer en un point clef : les effets transports sont essentiellement locaux dans le système étudié.

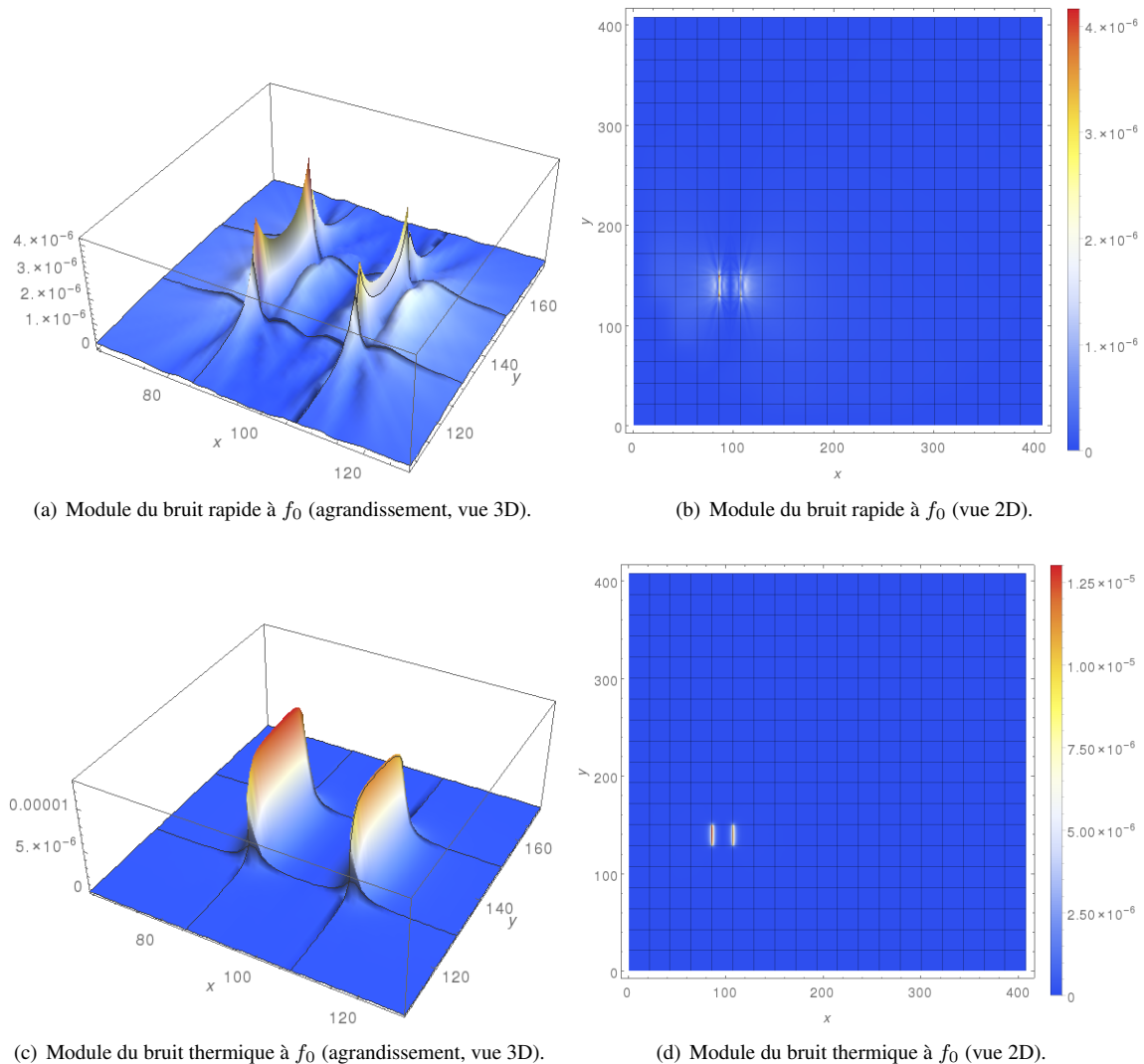


**FIGURE 5.21** – Module et phase du bruit rapide (groupe 1) et thermique (groupe 4) à  $f_0 = 1$  Hz et  $2f_0 = 2$  Hz en théorie linéaire classique (résultats numériques obtenus en théorie de la diffusion et du transport avec la maquette fil).

### 5.4.3 Vibration d'un assemblage combustible (APOLLO3®)

Pour conclure ce chapitre, nous allons analyser l'impact d'une vibration périodique d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions décrit en section 3.3.2 avec APOLLO3®. Pour mémoire, ce cœur est composé de 241 assemblages combustibles homogénéisés à 2 groupes d'énergie et est entouré d'un réflecteur lourd. Le plan de chargement est décrit en Fig. 3.19. Nous allons perturber l'assemblage UOXGD\_1 en position (5,7) par une vibration de fréquence  $f_0 = 5$  Hz et d'amplitude 0,049 cm soit l'épaisseur de la lame d'eau périphérique. Pour réaliser cette vibration, l'assemblage perturbé, et uniquement celui-ci, a été homogénéisé en séparant la lame d'eau périphérique (0,049 cm) de la partie combustible. Le maillage global choisi est de  $17 \times 17$  mailles par assemblage. Comme à la section précédente, nous employons la modélisation d'une vibration périodique d'un volume fini décrite en section 5.2. Au niveau de la perturbation, les quatre régions perturbées du modèle sont maillées par 10 mailles chacune ( $q = 10$ ). Ce maillage étant particulièrement fin (la largeur en  $x$  de chacune de ces mailles est en effet de seulement 0,0049 cm), seul le solveur de transport a été utilisé pour résoudre le problème. Le solveur de diffusion n'est en effet pas capable de converger correctement avec des mailles aussi fines (ce n'est d'ailleurs en général pas la vocation d'un solveur de diffusion). De la même manière qu'en section 3.3.2, les paramètres de calcul du solveur de transport sont les suivants : caractéristiques courtes, approximation linéaire du flux volumique, ordonnées discrètes  $S_8$  et correction d'anisotropie  $P_0^*$ . Seule la théorie linéaire classique (voir section 2.1) a pour l'instant été implémentée dans APOLLO3®. Nous utilisons donc uniquement cette dernière.

Les flux rapide et thermique d'équilibre ont déjà été présentés en Fig. 3.21. Pour rappel, le facteur de multiplication effectif obtenu en théorie du transport est de  $k_t = 1,000349$ . Les Figures 5.22 et 5.23 présentent les modules du bruit rapide et thermique pour les deux premières harmoniques<sup>14</sup>.

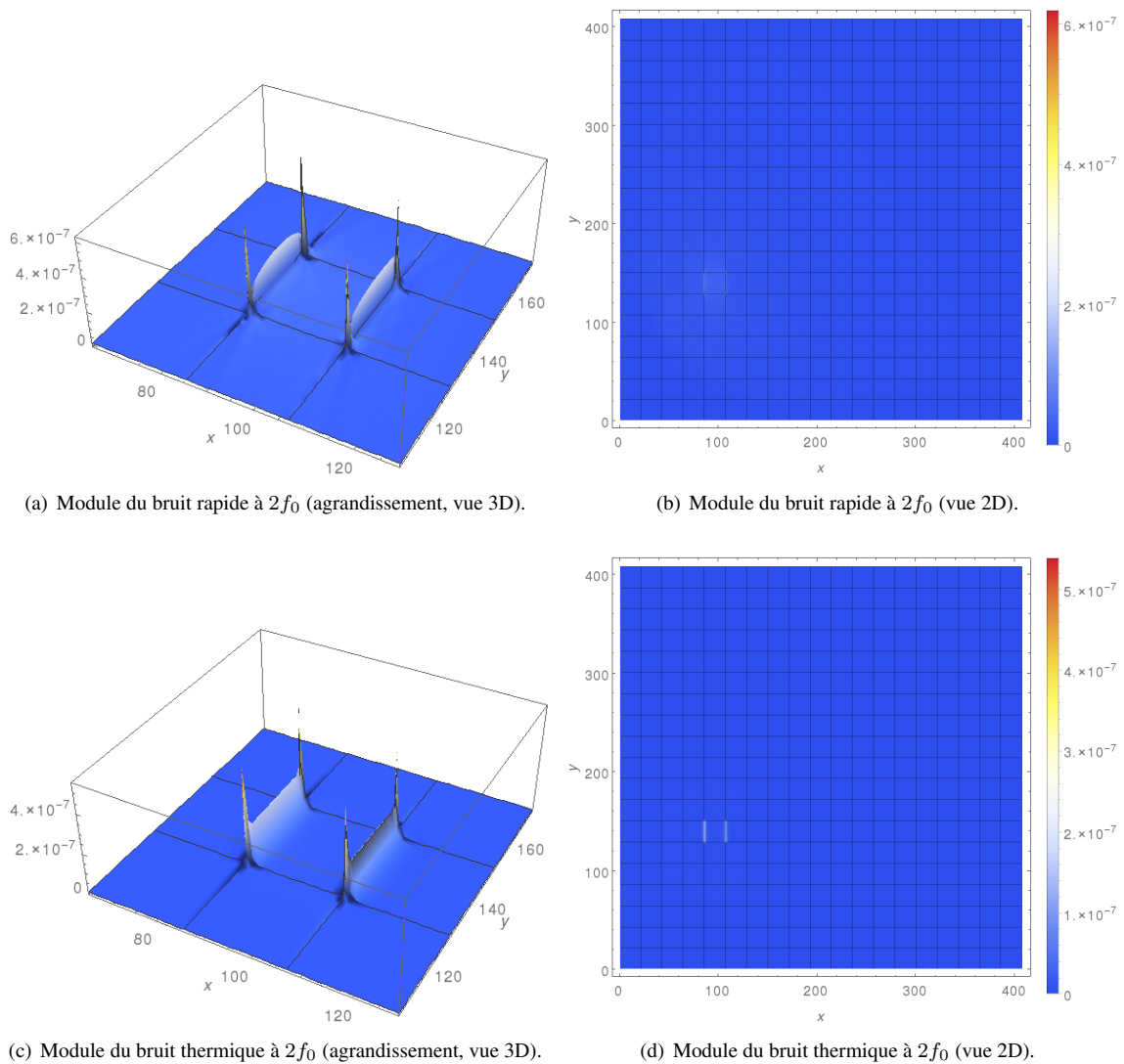


**FIGURE 5.22** – Module du bruit rapide et thermique à  $f_0 = 5$  Hz engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

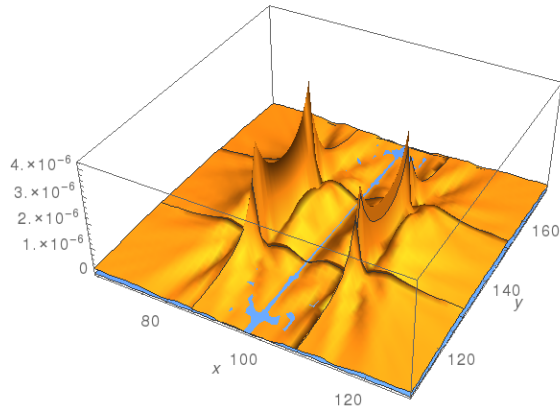
<sup>14</sup>. Les résultats ne sont pas détaillés dans ce manuscrit mais nous avons bien vérifié que seules ces deux premières harmoniques étaient importantes et que tous les autres pouvaient être négligés.

Nous constatons que les effets de la vibration sont particulièrement localisés. Ceci était attendu car l'amplitude de la vibration est très faible (0,049 cm soit deux fois plus petite qu'en section précédente). La composante locale domine assez largement autour de la perturbation pour les deux harmoniques, notamment pour le groupe thermique. Sa longueur de relaxation est aussi particulièrement petite (de l'ordre d'une ou deux longueurs de cellules combustibles). Les petits pics que nous observons par moment au niveau de la perturbation sont vraisemblablement dus à un effet maillage.

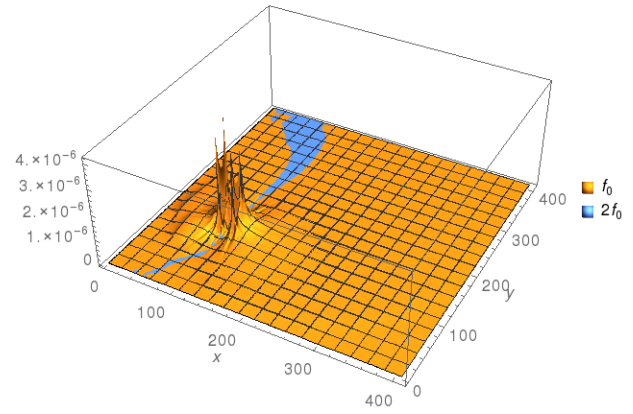
La Figure 5.24 compare la première et la seconde harmonique pour le groupe rapide et thermique. Même si cela n'est pas aussi net qu'en section 5.4.2, nous remarquons que la seconde harmonique ne peut pas être négligée si facilement que cela comme l'illustre la Fig. 5.24(g).



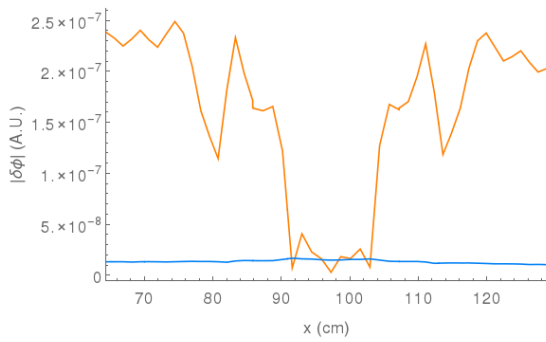
**FIGURE 5.23** – Module du bruit rapide et thermique à  $2f_0 = 10$  Hz engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).



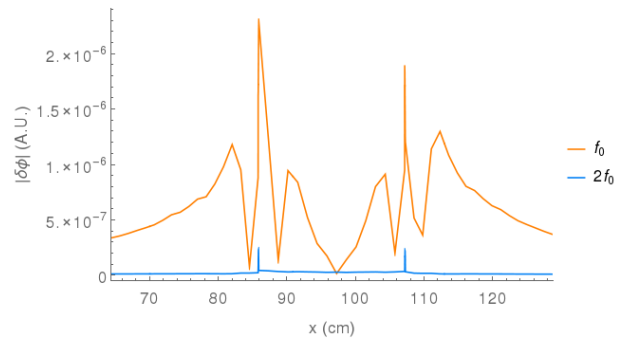
(a) Module du bruit rapide (agrandissement, vue 3D).



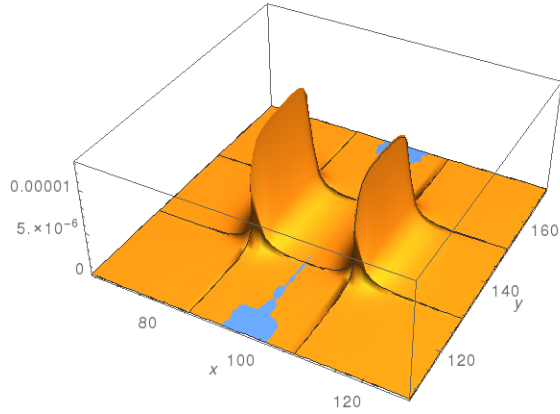
(b) Module du bruit rapide (vue 3D).



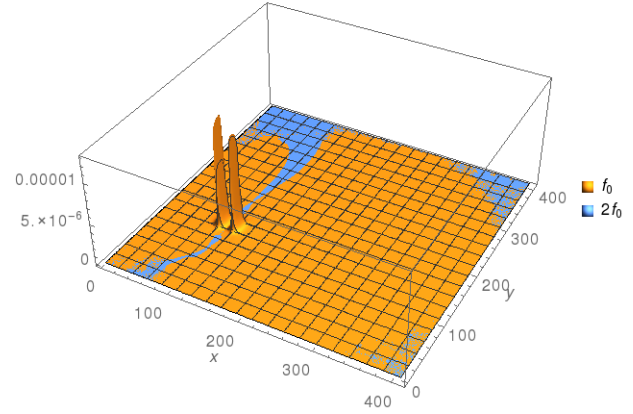
(c) Module du bruit rapide (coupe en  $y = 111$  cm).



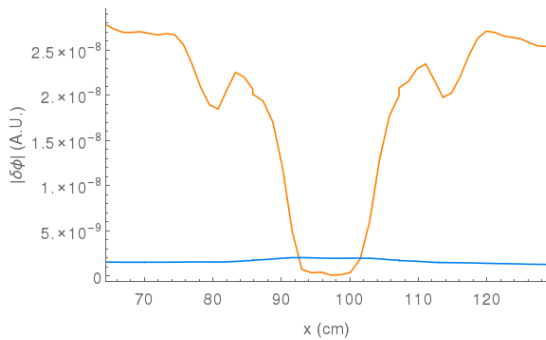
(d) Module du bruit rapide (coupe en  $y = 139$  cm).



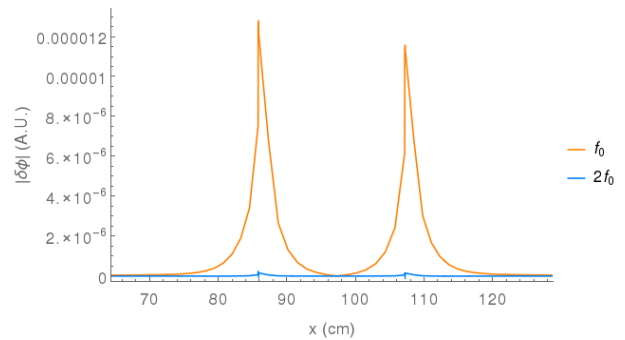
(e) Module du bruit thermique (agrandissement, vue 3D).



(f) Module du bruit thermique (vue 3D).



(g) Module du bruit thermique (coupe en  $y = 111$  cm).

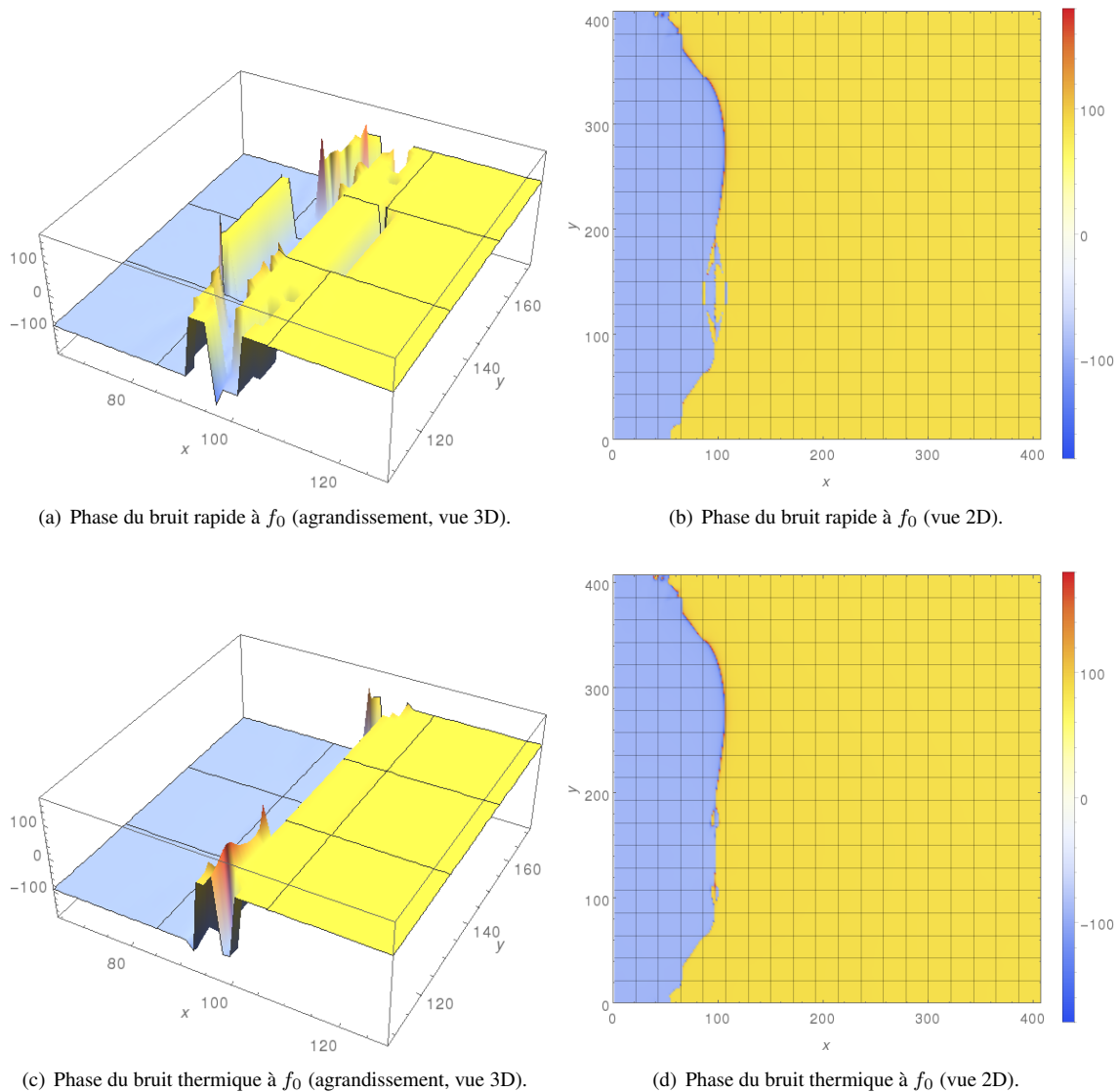


(h) Module du bruit thermique (coupe en  $y = 139$  cm).

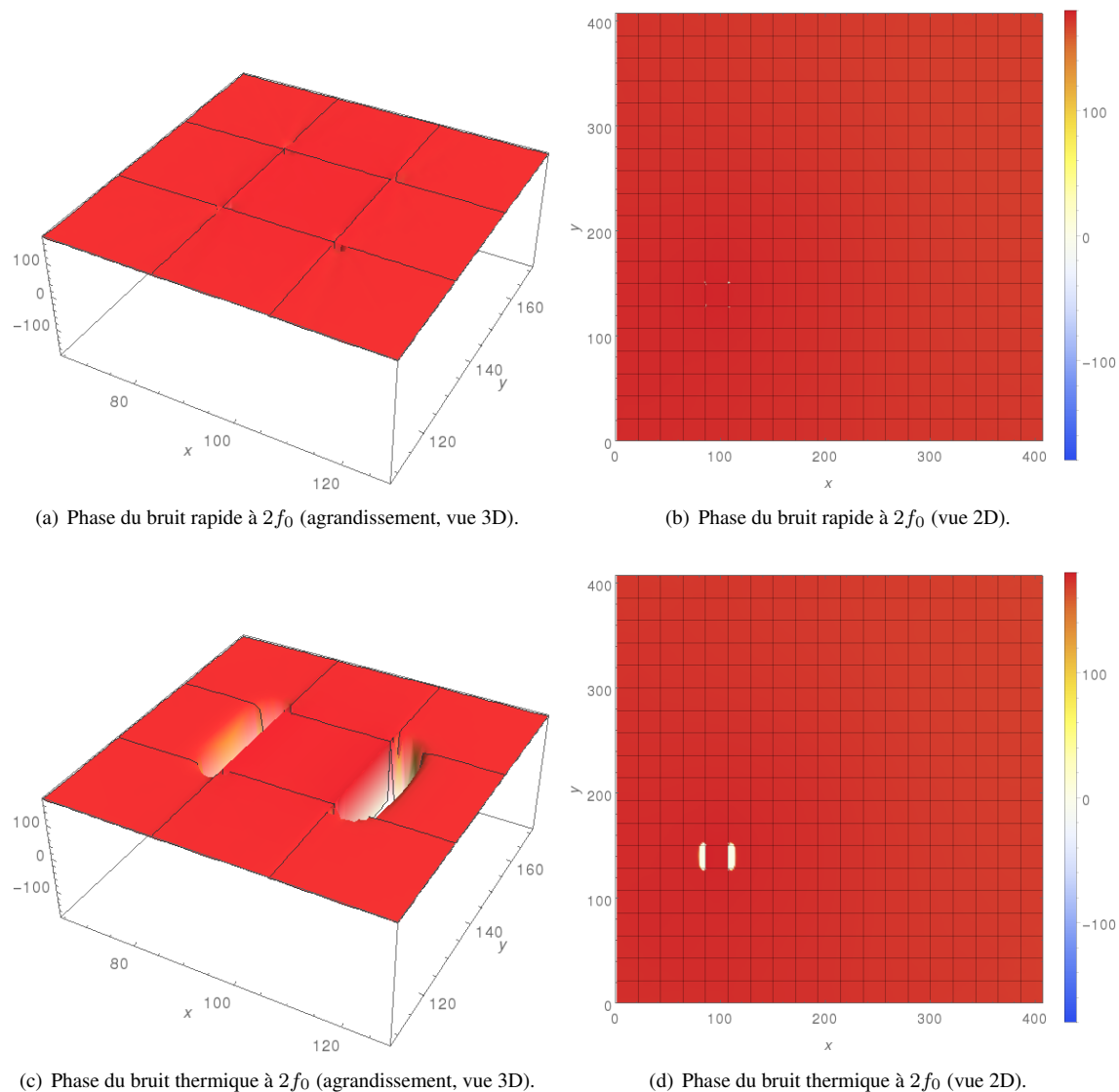
**FIGURE 5.24** – Comparaison des modules du bruit rapide et thermique à  $f_0 = 5$  Hz et à  $2f_0 = 10$  Hz engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

Les Figures 5.25 et 5.26 détaillent les phases du bruit rapide et thermique pour les deux premières harmoniques. Nous constatons une opposition de phase assez franche de part et d'autre de la perturbation pour le groupe rapide et thermique de la première harmonique. Comme en section précédente, la seconde harmonique est quasi constante et déphasée de  $\pm\pi/2$  par rapport à la première.

Les résultats présentés dans cette section, et plus largement dans ce chapitre, ne sont que des résultats préliminaires. Il serait intéressant d'étudier l'impact de plusieurs vibrations (de crayons ou d'assemblages) plus ou moins éloignées les unes des autres de différentes amplitudes et de différentes fréquences se produisant en même temps. Il pourrait en particulier être intéressant d'analyser l'impact d'une vibration commune d'un groupement d'assemblages ou encore l'impact de deux vibrations en opposition de phase proches l'une de l'autre. Des études à de nombreux groupes d'énergie seraient aussi de rigueur. Enfin, concernant la modélisation adiabatique que nous avons mise en place et qui semble particulièrement performante pour le cas d'une vibration d'un volume fini dans un système à une dimension, des analyses à deux et trois dimensions seraient à mener afin d'étudier la faisabilité et la viabilité de la modélisation dans des systèmes à plus d'une dimension.



**FIGURE 5.25** – Phase du bruit rapide et thermique en degré à  $f_0 = 5$  Hz engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).



**FIGURE 5.26** – Phase du bruit rapide et thermique en degré à  $2f_0 = 10$  Hz engendré par une vibration d'un assemblage dans le cœur à deux dimensions en théorie du transport (résultats numériques obtenus avec APOLLO3®).

## 5.5 Résumé du chapitre

Ce dernier chapitre a détaillé les éléments clefs suivants :

- **modélisations analytiques d'une vibration** : les deux principales modélisations analytiques d'une vibration mécanique employées dans la littérature ont été présentées. La première modélisation, connue sous le nom de modélisation de Feinberg-Galanin-Williams (FGW), est basée sur l'emploi de la fonction de Dirac pour modéliser des vibrations de barres absorbantes et sur l'utilisation des fonctions de Green pour déterminer le bruit résultant. Un développement au premier ordre en l'amplitude  $\epsilon$  de la vibration est réalisé. Dans le cas d'une barre faiblement absorbante (de constante de Galanin  $\gamma \ll 1$  quantifiant son amplitude d'absorption), les résultats de cette première modélisation peuvent se simplifier en linéarisant au premier ordre en  $\gamma$ . La seconde modélisation, dite «  $\epsilon/d$  », modélise la barre absorbante par un volume de taille finie et non plus par un simple Dirac. Un développement au premier ordre en  $\epsilon$  est aussi réalisé. Cette seconde modélisation, basée elle-aussi sur l'emploi des fonctions de Green, s'avère être plus robuste et plus générale que celle de FGW. C'est néanmoins cette dernière qui est la plus utilisée dans la littérature, notamment pour le cas de barres faiblement absorbantes ;
- **nouvelles modélisations numériques d'une vibration périodique** : les modélisations analytiques précédentes prennent en compte uniquement la première harmonique de la source de bruit. Or, il se trouve que pour les vibrations périodiques la seconde harmonique n'est pas toujours négligeable. Afin de prendre en compte toutes les harmoniques de la source de bruit pour le cas particulier d'une vibration périodique, nous avons choisi de ne pas développer au premier ordre en  $\epsilon$  le terme perturbé des sections efficaces et de calculer la transformée de Fourier des termes perturbés exacts. Ceci nous a amené à reprendre la modélisation d'une vibration en calculant la transformée de Fourier exacte de la source de bruit et en employant un maillage spatial afin d'adapter la modélisation au cas des méthodes de résolution déterministe. En procédant ainsi et en supposant la vibration sinusoïdale, nous n'avons pas obtenu une source monochromatique comme avec les modélisations analytiques mais une source polychromatique de spectre discret mais infini composé de toutes les fréquences multiples de la fréquence de la vibration. Dans le cadre de cette modélisation numérique, la moyenne temporelle de la source de bruit est non nulle que ce soit en théorie linéaire ou non linéaire. L'application de la théorie du nouvel état d'équilibre décrite au chapitre 2 est donc de rigueur. Cette modélisation numérique a été mise en place pour deux types de vibrations périodiques : une vibration périodique d'un élément de taille finie où l'amplitude de la vibration est plus petite que la taille de l'élément perturbé, et une vibration périodique d'un élément de très petite taille où l'amplitude de la vibration est plus grande que la taille de l'élément perturbé (ce second cas peut s'interpréter comme une façon de modéliser numériquement la vibration d'un Dirac) ;
- **analyses d'une vibration d'une barre de contrôle, d'un crayon et d'un assemblage** : nous avons comparé, dans un premier temps, les modélisations analytiques et numériques développées pour le cas particulier d'une vibration périodique d'une barre absorbante de très petite taille dans un simple cœur homogène avec la maquette fil. Nous en avons conclu que notre modélisation numérique simulait correctement la vibration d'un Dirac comparée aux modélisations analytiques. Nous avons ensuite étudié le cas d'une vibration périodique d'un crayon combustible dans un cœur hétérogène avec la maquette fil. Nous avons constaté que la seconde harmonique devait être prise en compte et que l'approximation adiabatique que nous avons mise en place au chapitre 2 améliorerait sensiblement la théorie linéaire et permettrait d'obtenir des résultats très proches de ceux de la théorie non linéaire. Enfin, nous avons analysé avec APOLLO3® les résultats d'une vibration périodique d'un assemblage combustible dans un cœur à deux dimensions en théorie du transport à 2 groupes d'énergie.

# Bilan et perspectives

---

Cette thèse a porté sur la mise en place d'outils de calculs neutroniques déterministes et stochastiques résolvant les équations du bruit neutronique. Les principaux apports de nos travaux ont été les suivants :

- implémentation d'un **solveur de bruit neutronique dans le code de transport déterministe APOLLO3<sup>®</sup>** (solveur réseau IDT). Ce solveur est à même de résoudre les équations linéaires du bruit neutronique en théorie du transport à deux dimensions et en théorie de la diffusion à deux et trois dimensions ;
- développement d'une **nouvelle méthode de résolution stochastique** des équations du bruit plus performante et plus simple à mettre en œuvre que la première méthode stochastique proposée dans la littérature en 2013. Cette nouvelle méthode, testée dans une maquette « fil » à une dimension, a vocation à être optimisée et implémentée dans le code de transport Monte Carlo TRIPOLI-4<sup>®</sup> ;
- mise en place d'une **nouvelle méthode basée sur la détermination d'un nouvel état d'équilibre permettant de rendre plus robuste la théorie classique linéaire et non linéaire** lorsque la moyenne temporelle de la source de bruit est non nulle. Ce nouvel état d'équilibre permet de prendre en compte les systèmes de régulation de la puissance présents dans les cœurs de réacteurs qui annulent automatiquement les surplus de réactivité ajoutés par les perturbations ;
- mise en place de **deux nouvelles modélisations numériques plus complètes des sources de bruit engendrées par des vibrations mécaniques périodiques**. Ces nouvelles modélisations ont été en partie comparées aux modélisations analytiques existantes.

Afin d'illustrer et d'analyser l'ensemble de ces développements et de ces nouvelles méthodes, des études de bruit dans des cœurs homogènes et hétérogènes avec une maquette à une dimension dite « fil » ont été menées. De même, des études « grandeurs natures » dans un grand cœur de réacteur à eau légère et à baffle lourd à deux et trois dimensions et à deux groupes d'énergie ont été réalisées en théorie du transport et de la diffusion avec APOLLO3<sup>®</sup>. Nous avons en particulier analysé l'impact d'une oscillation des sections efficaces d'un crayon combustible dans un cœur hétérogène à une dimension en théorie multigroupe avec la maquette fil, ainsi qu'une oscillation des sections efficaces d'un assemblage combustible dans le cœur à baffle lourd à deux et trois dimensions avec APOLLO3<sup>®</sup> en théorie du transport et de la diffusion. Une étude vibratoire d'une barre de contrôle dans un simple cœur homogène à une dimension a aussi été réalisée avec la maquette fil et nous a permis de comparer notre modélisation numérique avec les modélisations analytiques existantes. Une vibration périodique d'un crayon combustible dans un cœur hétérogène à une dimension, toujours avec la maquette fil, a en outre été analysée. En comparant divers résultats avec la solution de référence des équations non linéarisées du bruit, cette étude a montré la validité de la modélisation adiabatique que nous avons mise en place pour ce cas particulier. Cette modélisation adiabatique permet en effet d'améliorer sensiblement la théorie linéaire classique. Enfin, l'étude d'une vibration d'un assemblage combustible dans le cœur à deux dimensions avec APOLLO3<sup>®</sup> en théorie du transport nous a permis d'illustrer une nouvelle fois les capacités des solveurs de bruit développés dans ce code de transport déterministe.

Malgré les nombreuses études et analyses réalisées au cours de ces travaux (un peu) et surtout dans la littérature (beaucoup), il ne reste pas moins quantité de points à traiter et à explorer au sujet du bruit neutronique. Nous pouvons entre autres citer :

- la prise en compte du **couplage avec la thermohydraulique** ce qui permettra de grandement affiner les simulations en prenant en compte les effets des contre-réactions. Ce travail a déjà commencé dans les codes déterministes CORE SIM et NOISIM. Un travail identique sera à mettre œuvre dans APOLLO3<sup>®</sup> afin de coupler notre solveur de bruit neutronique avec un solveur thermohydraulique. À terme, un couplage avec la thermomécanique sera aussi à envisager ;



- **l'implémentation d'un solveur stochastique dans un des grands codes Monte Carlo industriels.** La nouvelle méthode de résolution stochastique que nous avons mise en place devrait être à terme optimisée et implémentée dans TRIPOLI-4®. Cela nous permettra de véritablement vérifier notre solveur de bruit développé dans APOLLO3® et d'analyser, comme cela est fait pour les calculs stationnaires classiques, les limites du solveur de bruit déterministe par rapport au solveur de bruit stochastique.
- **la comparaison poussée et approfondie des résultats numériques avec des données expérimentales** ou des données industrielles (les enregistrements des détecteurs de flux en cours de fonctionnement d'un réacteur industriel par exemple). Le travail qui reste à faire dans ce domaine est considérable. L'exploitation et l'analyse de l'immense base de données SARA qui regroupe l'enregistrement de nombreux détecteurs de Phénix de 2000 à 2010 peut être un bon point de départ. Cela a d'ailleurs déjà commencé à être réalisé dans [167, 168] ;
- **l'amélioration des modélisations numériques des sources de bruit**, un peu comme nous avons eu l'occasion de commencer à le faire pour le cas de la vibration. Concernant cette dernière, notre modélisation numérique devra être étendue à des géométries génériques telles que des cylindres afin de correctement modéliser la vibration d'un crayon combustible dans un cœur à deux dimensions par exemple. Des études mécaniques et/ou thermohydrauliques complémentaires des composants mécaniques constituant le cœur devront très probablement être réalisées si l'on souhaite affiner les modélisations des sources et les personnaliser pour chaque type de réacteurs ;
- **la modélisation numérique précise des réponses des détecteurs de flux** (dans les codes déterministes en particulier). Ce sujet particulièrement complexe n'est bien évidemment pas le propre des problèmes de bruit et concerne de nombreuses autres problématiques ;
- **la réalisation de vastes études en théorie du transport** pour quantifier l'impact de diverses sources de bruit (oscillations, vibrations, propagations...) dans différents types de réacteurs (à eau pressurisée, à eau bouillante, à neutrons rapides...) et pour analyser finement la validité des approximations de la diffusion en théorie du bruit neutronique. Il sera notamment intéressant d'analyser des cas où plusieurs sources de bruit sont imposées en même temps (une oscillation d'un assemblage et une vibration d'un groupement d'assemblages plus ou moins éloigné de la première perturbation par exemple) pour essayer de déterminer quand il est possible et quand il n'est pas possible de différencier l'impact sur le flux d'une des perturbations par rapport aux autres. Autrement dit, il faudra **analyser sur tout un ensemble de cas si la résolution du problème inverse est réalisable** (du moins en partie) ou non ;
- **l'amélioration des méthodologies liées au traitement du signal** employées pour post-traiter et analyser les signaux des détecteurs. Nous pouvons citer à ce sujet l'article très récent [35] qui applique au cas du bruit une technique basée sur l'analyse des « partial directed coherences » notamment utilisée en neuroscience et en économétrie pour analyser les relations causales entre les différentes variables d'un système ;
- **l'étude de différentes méthodes d'apprentissage** (et pas uniquement les réseaux de neurones) afin d'estimer qu'elle serait la méthode la plus performante et la plus adaptée pour mettre en place un diagnostic de bruit en temps réel.

Ainsi, malgré ce que peut laisser penser son nom, l'étude du bruit neutronique dépasse de toute évidence le cadre strict de la neutronique et fait appel à de nombreuses disciplines : neutronique, thermohydraulique, thermomécanique, traitement du signal, mathématiques appliquées... La complexité de cette problématique, et donc de sa résolution, ne sera surmontée que grâce à la mise en place d'une synergie constructive entre toutes ces disciplines.

# Publications

---

Les travaux réalisés au cours de cette présente thèse ont donné ou vont donner lieu aux publications suivantes :

- A. Rouchon et R. Sanchez, Analysis of Vibration-induced Neutron Noise using One-dimension Noise Diffusion Theory. *International Congress on Advances in Nuclear Plants : Nuclear Innovations for a Low-Carbon Future (ICAPP 2015)*, Nice, France, Mai, 3-6, 2015 ;
- A. Rouchon, A. Zoia et R. Sanchez, A New Monte Carlo Method for Neutron Noise Calculations. *Unifying Theory and Experiments in the 21st Century (PHYSOR 2016)*, Sun Valley, Idaho, États-Unis, Mai, 1-5, 2016 ;
- A. Rouchon, A. Zoia et R. Sanchez, A new Monte Carlo method for neutron noise calculations in frequency domain. *Soumis au journal Annals of Nuclear Energy fin juillet 2016 ;*
- A. Rouchon, R. Sanchez et I. Pázsit, Some Developments about Vibration-induced Neutron Noise using One-dimensional Noise Diffusion Theory. *Soumission prévue au journal Annals of Nuclear Energy ;*
- A. Rouchon, I. Zmijarevic et R. Sanchez, The new 2-D multigroup neutron noise solver of APOLLO3®. *Soumission prévue au journal Annals of Nuclear Energy ;*



# Références

---

- [1] Abolfazl Hosseini S. et Vosoughi N., Neutron noise simulation by GFEM and unstructured triangle elements. *Nuclear Engineering and Design*, 253:238–258, 2012.
- [2] Abolfazl Hosseini S. et Vosoughi N., Noise source reconstruction using ANN and hybrid methods in VVER-1000 reactor core. *Progress in Nuclear Energy*, 71:232–247, 2014.
- [3] Adams M.L. et Martin W.R., Boundary projection acceleration : A new approach to synthetic acceleration of transport calculations. *Nuclear Science and Engineering*, 100:177–189, 1988.
- [4] Allaire G., *Conception optimale de structures*. Mathématiques et Applications, Vol. 58, Springer, 2007.
- [5] Allaire G. et Golse F., Transport et diffusion (MAT/MAP 567). *Cours de l'Ecole Polytechnique, Cinquième Edition*, 2012.
- [6] Ammar K., *Conception multi-physiques et multi-objectifs des coeurs de RNR-Na hétérogènes : développement d'une méthode d'optimisation sous incertitudes*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, France, 2014.
- [7] Antonopoulos-Domis M., Reactivity and neutron density noise excited by random rod vibration. *Annals of Nuclear Energy*, 3:451–459, 1976.
- [8] Arnow D.M, Kalos M.H., Lee M.A. et Schmidt K.E., Green's function Monte Carlo for few fermion problems. *J. Chem. Phys*, 77:5562–5572, 1982.
- [9] Arzhanov V. et Pázsit I., Diagnostics of core barrel vibration by in-core and ex-core neutron noise. *Progress in Nuclear Energy*, 43:151–158, 2003.
- [10] Aslangul C., Mathématiques pour physiciens (LP 311). *Cours de l'Université Pierre et Marie CURIE*, 2008.
- [11] Axisa F., *Modélisation des systèmes mécaniques. Tome 3, Interactions fluide-structure*. Hermes Science Publications, 2001.
- [12] Bardi M., Introduction à l'analyse spectrale. *Cours de l'Université Pierre et Marie Curie, License de Physique*, 2012.
- [13] Baudron A.M. et Lautard J.J., Simplified PN transport core calculations in the APOLLO3 system. *International Conference on Mathematics and Computational Methods applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011), Rio de Janeiro, Brazil, May, 8-12., 2011*.
- [14] Bauernfeind V., Investigations on the vibrative excitation of PWR pressure vessel and internals by pressure noise analysis and model calculations. *Progress in Nuclear Energy*, 1:323–332, 1977.
- [15] Bauernfeind V., Vibration and pressure signals as sources of information for an on-line vibration monitoring system in PWR power plants. *Nuclear Science and Engineering*, 40:403–420, 1977.
- [16] Behringer K., Kosály G. et Pázsit I., Linear response of the neutron field to a propagating perturbation of moderator density (two-group theory of BWR-noise). *EIR-Bericht*, 359, 1979.
- [17] Behringuer K., Kosály G. et Kostic Lj., Theoretical investigation of local and global components of the neutron-noise field in a boiling water reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 63:306–318, 1976.
- [18] Bell G.I. et Glasstone S., *Nuclear Reactor Theory*. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

- [19] Bellier P., Coste-Delclaux M., Hebert A., Sanchez R., Stankovski Z. et Zmijarevic I., APOLLO2.5 : Notice théorique. *Rapport DMT SEMRA/LENR/RT/99-2719/A*, 2002.
- [20] Bendat J.S., *Principles and applications of random noise theory*. John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- [21] Berger R., Suivi des bruits neutroniques de PHENIX. *Note technique CEA, DER/SERA/LDM 98-6042*, 1998.
- [22] Berger R., Buravand Y. et Estienne C., ANABELIX analyse de bruit en ligne de PHENIX. *Note technique CEA, DRNR/SPCI/LMI 83-525*, 1983.
- [23] Booth T. E. et Gubernatis J.E., Monte Carlo determination of multiple extremal eigenpairs. *Physical Review*, 80, 2009.
- [24] Booth T.E., Computing the higher k-eigenfunctions by Monte Carlo power iteration : a conjecture. *Nuclear Science and Engineering*, 143:291–300, 2003.
- [25] Booth T.E., A weight (charge) conserving importance-weighted comb for Monte Carlo. *Radiation Protection & Shielding Topical Meeting, No. Falmouth, Massachusetts*, April 21-25, 1996.
- [26] Booth T.E. et Gubernatis J.E., Exact regional Monte Carlo weight cancellation for second eigenfunction calculations. *Nuclear Science and Engineering*, 165:129–153, 2010.
- [27] Bourganel S., Petit O. et Diop C.M., 3-D particle transport using green's functions in TRIPOLI-4<sup>®</sup> Monte Carlo code. Application to PWR neutron fluence and ex-core response studies. *Nuclear Technology*, 184:29–41, 2013.
- [28] Bret A., Essai de détection d'ébullition dans RAPSODIE - essai PHY63. *Note technique CEA, DRNR/SEDC/STRS/LEIS 72-43*, 1972.
- [29] Brown F., Carney S., Kiedrowski B. et Martin W., Fission matrix capability for MCNP, part I - Theory. *Joint International Conference on Supercomputing in Nuclear Applications + Monte Carlo (SNA-MC 2013), Paris, France, Oct., 27-31.*, 2013.
- [30] Brown F., Carney S., Kiedrowski B. et Martin W., Fission matrix capability for MCNP, part II - Applications. *Joint International Conference on Supercomputing in Nuclear Applications + Monte Carlo (SNA-MC 2013), Paris, France, Oct., 27-31.*, 2013.
- [31] Brun E., Damian F., Diop C.M., Dumonteil E., Hugot F.X., Jouanne C., Lee Y.K., Malvagi F., Mazzolo A., Petit O., Trama J.C., Visonneau T. et Zoia A., TRIPOLI-4<sup>®</sup>, CEA, EDF and AREVA reference Monte Carlo code. *Annals of Nuclear Energy*, 82:151–160, 2015.
- [32] Brun E., Dumonteil E., Hugot F.X., Huot N., Jouanne C., Lee Y.K., Malvagi F., Mazzolo A., Petit O., Trama J.C. et Zoia A., Overview of TRIPOLI-4<sup>®</sup> version 7, continuous-energy Monte Carlo transport code. *International Congress on Advances in Nuclear Power Plants (ICAPP 2011), Nice, France, May, 3-6.*, 2011.
- [33] Cast3M, <http://www-cast3m.cea.fr/>. 2016.
- [34] CEA, *La neutronique*. Monographie de la Direction de l'énergie Nucléaire, Editions Le Moniteur, 2013.
- [35] Chionis D., Dokhane A., Ferroukhi H. et Pautz A., On causality analysis of nuclear reactor noise using partial directed coherence. *Unifying Theory and Experiments in the 21st Century (PHYSOR 2016), Sun Valley, Idaho, United States, May, 1-5.*, 2016.
- [36] Cloue J. et Vincent C., Résultats des mesures de bruits neutroniques effectuées sur Bugey 2 en fin de cycle 4. *Note technique CEA, DRE/SEN/LPA 83-014*, 1983.
- [37] Cloue J. et Vincent C., Campagnes de mesure de bruit neutronique tranches 1 et 2 de Fessenheim cycle 5. *Note technique CEA, DRE/SEN/LPA 84-023*, 1984.
- [38] Coppelani P., Hassenboehler N., Joseph J., Petetrot J-F., Py J-P. et Zampa J-S., *La chaudière des réacteurs à eau sous pression*. EDP Sciences, 2004.
- [39] Cottet F., *Aide-mémoire Traitement du signal*. Dunod, 2005.
- [40] Crignon I., Val M., Dubuisson B., Brunet M., Bernardin, Le Guillou G. et Pont J., Application de la méthode de reconnaissance des formes au diagnostic d'anomalies de fonctionnement dans les réacteurs rapides. *Note technique CEA, DRNR/SEDC/STRS/LEIS 80-05*, 1980.

- [41] Damiano B. et Kryter R.C., Current applications of vibration monitoring and neutron noise analysis. *ORNL-TM-11398*, 1990.
- [42] Dante G., *Piecewise Assembly Homogenization via Flux Discontinuity Factors*. Thèse de doctorat, Politecnico di Torino, 2012.
- [43] de Izarra G., Jammes C., Geslot B., Di Salvo J. et Destouches C., SPECTRON, a neutron noise measurement system in frequency domain. *Review of Scientific Instruments*, 86, 2015.
- [44] Demazière C., Development of a 2-D 2-group neutron noise simulator. *Annals of Nuclear Energy*, 31:647–680, 2004.
- [45] Demazière C., CORE SIM : A multi-purpose neutronic tool for research and education. *Annals of Nuclear Energy*, 38:2698–2718, 2011.
- [46] Demazière C., Dykin V., Hernández-Solís A. et Boman V., Development of three-dimensional capabilities for modelling stationary fluctuations in nuclear reactor cores. *The Role of Reactor Physics toward a Sustainable Future (PHYSOR 2014)*, Kyoto, Japan, 28 Sept. - 3 Oct., 2014.
- [47] Demazière C. et Larsson V., Comparative study of 2-group P1 diffusion theories for the calculation of the neutron noise in 1D 2-region systems. *Annals of Nuclear Energy*, 36:1574–1587, 2009.
- [48] Demazière C. et Larsson V., Neutron noise calculations in three-dimensional systems. *International Conference on Mathematics and Computational Methods applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011)*, Rio de Janeiro, Brazil, May, 8-12., 2011.
- [49] Demazière C. et Pázsit I., Development of a method for measuring the moderator temperature coefficient by noise analysis and its experimental verification in Ringhals-2. *Nuclear Science and Engineering*, 148:1–29, 2004.
- [50] Demazière C. et Pázsit I., Numerical tools applied to power reactor noise analysis. *Progress in Nuclear Energy*, 51:67–81, 2009.
- [51] Dreyfus G., Martinez J-M., Samuelides M., Gordon M.B., Badran F., Thiria S. et Hérault L., *Réseaux de neurones : méthodologie et applications*. Eyrolles, collection : Algorithmes, 2004.
- [52] Duderstadt J.J. et Hamilton L.J., *Nuclear Reactor Analysis*. John Wiley & Sons, 1976.
- [53] Dykin V., Jonsson A. et Pázsit I., Qualitative and quantitative investigation of the propagation noise in various reactors systems. *Progress in Nuclear Energy*, 70:98–111, 2013.
- [54] Dykin V., Jonsson A. et Pázsit I., The role of the eigenvalue separation in reactor dynamics and neutron noise theory. *The Role of Reactor Physics toward a Sustainable Future (PHYSOR 2014)*, Kyoto, Japan, 28 Sept. - 3 Oct., 2014.
- [55] Dykin V. et Pázsit I., Investigation of the space-dependent noise induced by propagating perturbations. *Annals of Nuclear Energy*, 37:1329–1340, 2010.
- [56] Fichtl E.D., Warsa J.S. et Prinja A.K., Krylov iterative methods and synthetic acceleration for transport in binary statistical media. *Journal of Computational Physics*, 228:8413–8426, 2009.
- [57] Fry D. N., Experience in reactor malfunction diagnosis using on-line noise analysis. *Nuclear Technology*, 1971.
- [58] Fry D. N., Kryter R.C. et Robinson J.C., Analysis of neutron-density oscillations resulting from core barrel motion in the Palisades nuclear power plant. *ORNL-TM-4570*, 1974.
- [59] Fry D. N., March-Leuba J. et Sweeney F. J., Use of neutron noise of diagnosis of in-vessel anomalies in light-water reactors. *ORNL/TM-8774*, 1984.
- [60] Galanin A.D., *Thermal Reactor Theory*. Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [61] Garis N.S., Karlsson K.H. et Pázsit I., Application of static fuel management codes for determination of the neutron noise using the adiabatic approximation. *Kerntechnik*, 60:227–235, 2000.
- [62] Garis N.S. et Pázsit I., Control rod localisation with neural networks using a complex transfer function. *Progress in Nuclear Energy*, 34:87–98, 1999.

- [63] Garis N.S., Pázsit I. et Sahni D.C., Modelling of a vibrating reactor boundary and calculation of the induced neutron noises. *Annals of Nuclear Energy*, 23:1197–1208, 1996.
- [64] Golfier H., Lenain R., Calvin C., Lautard J.J., Baudron A., Fougeras P., Magat P., Martinolli E. et Dutheillet Y., APOLLO3 : a common project of CEA, AREVA and EDF for the development of a new deterministic multi-purpose code for core physics analysis. *International Conference on Advances in Mathematics, Computational Methods, and Reactor Physics, (M&C 2009), Saratoga Springs, New York, United States, May, 3-7., 2009.*
- [65] Gray M.G., Booth T.E., Kwan T.J.T. et Snell C.M., A multicomponent variance reduction scheme for Monte Carlo semiconductor simulators. *IEEE Transactions on electron devices*, 45:918–924, 1998.
- [66] Groetsch C.W., *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, Wiesbaden, 1993.
- [67] Guénaut C. et Golfier H., 2D standard and tight lattice core calculations using APOLLO2 : Validation with TRIPOLI4. *Rapport technique CEA, DEN/DANS/DM2S/SERMA/LPEC/RT/08-4597/A*, 2008.
- [68] Henry A.F., The application of reactor kinetics to the analysis of experiments. *Nuclear Science and Engineering*, 3:52–70, 1958.
- [69] Henry A.F., *Nuclear-reactor analysis*. The MIT Press, 1975.
- [70] Hoogenboom J.E., The two-direction neutral-particle transport model : a useful tool for research and education. *Transport Theory and Statistical Physics*, 37:65–108, 2008.
- [71] IRSN, Programme "pu-temperature". Évaluation de la réponse des détecteurs BF3. Calcul du Keff par la méthode " $\alpha$ -Feynman". *Rapport technique IRSN, DSU/SEC/T/2006-326*, 2006.
- [72] Jonsson A. et Pázsit I., Two-group theory of neutron noise in molten salt reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 38:1238–1251, 2011.
- [73] Jonsson A., Tran H.N., Dykin V. et Pázsit I., Analytical investigation of the properties of the neutron noise induced by vibrating absorber and fuel rods. *Kerntechnik*, 77:371–380, 2012.
- [74] Karlsson J., Calculation of the vibration noise by strong absorbers in slab reactor. *Report CTH-RF-118, Department of reactor Physics, Chalmers University of Technology*, 1996.
- [75] Kerkar N. et Paulin P., *Exploitation des coeurs REP*. EDP Sciences, 2008.
- [76] Kirsch A., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Number 120 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New-York, 1996.
- [77] Kolmogorov A. et Fomine S., *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. 3ème édition, Ellipse, 1994.
- [78] Kosály G., Noise investigations in boiling-water and pressurized-water reactors. *Progress in Nuclear Energy*, 5:145–199, 1980.
- [79] Kosály G., Kostic Lj., Miteff L., Varadi G. et Behringer K., Investigation on the local component of the neutron noise in a BWR and its application to the study of two-phase flow. *Progress in Nuclear Energy*, 1:99–117, 1977.
- [80] Kosály G., Mesko L. et Pázsit I., Investigation of the possibility of using static calculations (adiabatic-approximation) in the theory of neutron-noise. *Annals of Nuclear Energy*, 4:79–89, 1977.
- [81] Kosály G. et Sanchez R., Transport theory analysis of the neutron noise in BWRs. *EPRI NP-3590*, 1984.
- [82] Kosály G. et Sanchez R., Calculation of the 'seeing length' of an incore neutron detector in a BWR. *Progress in Nuclear Energy*, 15:611–620, 1985.
- [83] Kuilman F., Implementing the combining method in the dynamic Monte Carlo. *Bachelor End Thesis, Faculteit Technische Natuurwetenschappen*, 2012.
- [84] Lamb H., *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Quatrième édition, 1916.
- [85] Larsson V. et Demazière C., A coupled neutronics/thermal-hydraulics tool for calculating fluctuations in pressurized water reactors. *Annals of Nuclear Energy*, 43:68–76, 2012.

- [86] Larsson V., Demazière C., Pázsit I. et Tran H.N., Neutron noise calculations using the analytical nodal method and comparisons with analytical solutions. *Annals of Nuclear Energy*, 38:808–816, 2011.
- [87] Lautard J.J., Loubière S. et Fedon-Magnaud C., CRONOS a modular computational system for neutronic core calculations. *Specialist IAEA meeting, Advanced Computational Methods for Power Reactors*, Cadarache, France, 1990.
- [88] Lautard J.J., Magnaud C., Moreau F. et Baudron A.M., CRONOS2 : un logiciel de simulation neutronique des cours de réacteur. *Rapport scientifique DRN, SERMA/LENR/PU/00/2746/A*, 2000.
- [89] Le Guillou G., Mesures de bruits sur PHENIX : programme à court et moyen terme. *Note technique CEA, DRNR/SEDC 74-737*, 1974.
- [90] Le Guillou G., 3DC SUPER PHENIX Connaissances et résultats actuels relatifs au bruit neutronique. Principe d'une méthode de traitement. *Note technique CEA, DRNR/SEDC/LPC 76-2032*, 1976.
- [91] Le Guillou G., SUPER PHENIX - coeur 1207. Etude de la détection de l'ébullition localisée par la voie du bruit neutronique. *Note technique CEA, DRNR/SEDC/SPNR/ESPC 79-2038*, 1979.
- [92] Le Guillou G., Surveillance des composants technologiques du coeur des réacteurs à neutrons rapides par l'analyse des fluctuations neutroniques : état de l'art et propositions pour SPHX2. *Note technique CEA, DRNR/SP-CI/LSPC 86-430*, 1986.
- [93] Le Guillou G., Colonges J.C. et Pont J., Le bruit neutronique sur les réacteurs à neutrons rapides français : Bilan et perspectives après dix années d'expérience sur le réacteur PHENIX. *Progress in Nuclear Energy*, 1:491–500, 1985.
- [94] Le Guillou G., Pont J. et Bernardin B., Evaluation expérimentale du bruit neutronique de détection. Comparaison des chambres "en cuve" et "sous cuve" de PHENIX. *Note technique CEA, DRNR/SEDC/SPNR/ESPC 78-2005*, 1978.
- [95] Le Guillou G. et Sabatier C., Application de l'intelligence artificielle à l'aide à l'opérateur pour la conduite des réacteurs nucléaires à neutrons rapides. *Note technique CEA, DRNR/SPCI/LSPC 85-428*, 1985.
- [96] Lenain R., *Amélioration des méthodes de calcul de coeurs de réacteurs nucléaires dans APOLLO3 : décomposition de domaine en théorie du transport pour des géométries 2D et 3D avec une accélération non linéaire par la diffusion*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, France, 2015.
- [97] Librairie d'algèbre linéaire LAPACK, <http://www.netlib.org/lapack/>. 2016.
- [98] Lux I. et Koblinger L., *Monte Carlo Particle Transport Methods : Neutron and Photon Calculations*. CRC Press, 1991.
- [99] Lyoussi A., *Détection de rayonnements et instrumentation nucléaire*. EDP Sciences, 2010.
- [100] Malmir H. et Vosoughi N., Calculation and analysis of thermal-hydraulics fluctuations in pressurized water reactors. *Annals of Nuclear Energy*, 76:75–84, 2015.
- [101] Malmir H. et Vosoughi N., Investigating the propagation noise in PWRs via closed-loop neutron-kinetic/thermal-hydraulic noise calculations. *Annals of Nuclear Energy*, 80:101–113, 2015.
- [102] Malmir H. et Vosoughi N., Propagation noise calculations in VVER-type reactor core. *Annals of Nuclear Energy*, 78:10–18, 2015.
- [103] Malmir H., Vosoughi N. et Zahedinejad E., Development of a 2-D 2-group neutron noise simulator for hexagonal geometries. *Annals of Nuclear Energy*, 37:1089–1100, 2010.
- [104] Masiello E., Clemente R. et Santandrea S., Higher-order method of characteristic for 2-D unstructured meshes. *International Conference on Advances in Mathematics, Computational Methods, and Reactor Physics, (M&C 2009), Saratoga Springs, New York, United States, May, 3-7., 2009*.
- [105] Masiello E., Sanchez R. et Zmijarevic I., New numerical solution with the method of short characteristics for 2-D heterogeneous cartesian cells in the APOLLO2 code : Numerical analysis and tests. *Nuclear Science and Engineering*, 161:257–278, 2009.
- [106] Matheron G., La théorie des variables régionalisées et ses applications. *Les cahiers : École Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 1970.



- [107] Moller J.Y., Lautard J.J. et Schneider D., MINARET : A deterministic neutron transport solver for nuclear core calculations. *International Conference on Mathematics and Computational Methods applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011), Rio de Janeiro, Brazil, May, 8-12., 2011.*
- [108] Mosser J.D., Granjon Y. et Tanoh J., *Sciences industrielles pour l'ingénieur. 1<sup>re</sup> année MPSI-PCSI-PTSI.* Dunod, 2008.
- [109] Pál L. et Pázsit I., Theory of neutron noise in a temporally fluctuating multiplying medium. *Nuclear Science and Engineering*, 155:425–440, 2007.
- [110] Palmer T.S., A coupled diffusion synthetic acceleration for binary stochastic mixture transport iterations. *Nuclear science and engineering*, 158:40–48, 2007.
- [111] Patricot C., Revue des techniques de couplage séquentielles usuelles. *Note technique CEA, DEN/DANS/DM2S/SERMA/LPEC/NT/15-5799/A*, 2015.
- [112] Pázsit I., Investigation of the space-dependent noise induced by a vibrating absorber. *Atomkernenergie*, 30:29–34, 1977.
- [113] Pázsit I., Two-group theory of noise in reflected reactors with application to vibration absorbers. *Annals of Nuclear Energy*, 5:185–196, 1978.
- [114] Pázsit I., The linearization of vibration-induced noise. *Annals of Nuclear Energy*, 11:441–454, 1984.
- [115] Pázsit I., Control rod models and vibration induced noise. *Annals of Nuclear Energy*, 15:333–346, 1988.
- [116] Pázsit I., Dynamic transfer function calculations for core diagnostics. *Annals of Nuclear Energy*, 19:303–312, 1992.
- [117] Pázsit I., Neutron noise theory in the P1 approximation. *Progress in Nuclear Energy*, 40:217–236, 2002.
- [118] Pázsit I., Hugo van Dam and the dynamic adjoint function. *Annals of Nuclear Energy*, 30:1757–1775, 2003.
- [119] Pázsit I. et Analytis G. Th., Theoretical investigation of the neutron noise diagnostics of two-dimensional control rod vibrations in a PWR. *Annals of Nuclear Energy*, 7:171–183, 1980.
- [120] Pázsit I. et Demazière C., *Noise Techniques in Nuclear Systems*, volume 3. Handbook of Nuclear Engineering, Ed. D. G. Cacuci, Springer Verlag, 2010.
- [121] Pázsit I., Dykin V. et Sanchez R., The point kinetic component of neutron noise in an MSR. *Annals of Nuclear Energy*, 64:344–352, 2014.
- [122] Pázsit I., Garis N.S. et Glöckler O., On the neutron noise diagnostics of pressurized water reactor control rod vibrations. IV. Application of neural networks. *Nuclear Science and Engineering*, 124:167–177, 1996.
- [123] Pázsit I. et Glöckler O., On the neutron noise diagnostics of pressurized water reactor control rod vibrations. I. Periodic vibrations. *Nuclear Science and Engineering*, 85:167–177, 1983.
- [124] Pázsit I. et Glöckler O., On the neutron noise diagnostics of pressurized water reactor control rod vibrations. II. Stochastic vibrations. *Nuclear Science and Engineering*, 88:77–87, 1984.
- [125] Pázsit I. et Glöckler O., On the neutron noise diagnostics of pressurized water reactor control rod vibrations. III. Application at a power plant. *Nuclear Science and Engineering*, 99:313–328, 1988.
- [126] Pázsit I. et Karlsson J., On the perturbative calculation of the vibration noise by strong absorbers. *Annals of Nuclear Energy*, 24:449–466, 1997.
- [127] Pázsit I. et Kitamura M., The role of neural networks in reactor diagnostics and control. *Advances in Nuclear Science and Technology*, 24, 1996.
- [128] Pázsit I., Kuang Z.F. et Prinja A.K., A unified theory of zero power and power reactor noise via backward master equations. *Annals of Nuclear Energy*, 29:169–192, 2002.
- [129] Pázsit I. et Pál L., *Neutron Fluctuations. A treatise on the physics of branching processes.* Elsevier, 2008.
- [130] Pettersen E.E., Demazière C., Jareteg K., Schönfeldt T., Nonbol E. et Lauritzen B., Development of a Monte Carlo based method for calculating the effect of stationary fluctuations. *Joint International Conference on Mathematics and Computation (M&C 2015), Nashville, TN, United States, April, 19-23., 2015.*

- [131] Planchard J., *Méthodes mathématiques en neutronique*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, 1995.
- [132] Rahnema F. et Pomraning G.C., An anomaly in the use of perturbation theory. *Nuclear Science and Engineering*, 78:393–437, 1981.
- [133] Rahnema F. et Pomraning G.C., External boundary perturbations in neutron transport theory. *Journal of Mathematical Physics*, 24:687–701, 1983.
- [134] Reuss P., *Précis de neutronique*. EDP Sciences, 2003.
- [135] Ricciardi G. et Boccaccio B., Modelling of the flow induced stiffness of a PWR fuel assembly. *Nuclear Engineering and Design*, 282:8–14, 2015.
- [136] Rimpault G., Algorithmic features of the ECCO cell code for treating heterogeneous fast reactor subassemblies. *International Topical Meeting on Reactor Physics and Computation, Portland, Oregon, United States, May, 1-5.*, 1995.
- [137] Ruggieri J.M., Tommasi J., Lebrat J.F., Suteau C., Plisson-Rieunier D., De Saint-Jean C., Rimpault G. et Sublet J.C., ERANOS2.1 : international code system for GEN IV fast reactor analysis. *International Congress on Advances in Nuclear Power Plants (ICAPP 2006), Reno, Nevada, United States, June, 4-8.*, 2006.
- [138] Sanchez R., Duality, Green's functions and all that. *Transport Theory and Statistical Physics*, 27:445–478, 1998.
- [139] Sanchez R., Some comments in neutron noise theory. *Annals of Nuclear Energy*, 86:88–98, 2015.
- [140] Sanchez R., Mondot J., Stankovski Z., Cossic A. et Zmijarevic I., APOLLO II : A user-oriented, portable, modular code for multigroup transport assembly calculations. *Nuclear Science and Engineering*, 100:352–362, 1988.
- [141] Sanchez R., Zmijarevic I., Coste-Delclaux M., Masiello E., Santandrea S., Martinolli E., Villate L., Schwartz N. et Guler N., APOLLO2 Year 2010. *Nuclear Engineering and Technology*, 42:474–499, 2010.
- [142] Scaffoni M.M. et Abbate M.J., A group by group upscattering scaling method. *Annals of Nuclear Energy*, 13:101–106, 1986.
- [143] Schneider D., Dolci F., Gabriel F., Palau J-M., Guillo M. et Pothet B., APOLLO3 : CEA/DEN deterministic multi-purpose code for reactor physics analysis. *Unifying Theory and Experiments in the 21st Century (PHYSOR 2016), Sun Valley, Idaho, United States, May, 1-5.*, 2016.
- [144] Seidl M., Kosowski K., Schüler U. et Belblidia L., Review of the historic neutron noise behavior in german KWU built PWRs. *Progress in Nuclear Energy*, 85:668–675, 2015.
- [145] Shapiro N.M., Campillo M., Stehly L. et Ritzwoller M.H., High-resolution surface-wave tomography from ambient seismic noise. *Science*, 307:1615–1618, 2005.
- [146] Shi B. et Petrovic B., Calculating the second eigenpair in criticality calculations using the Monte Carlo method with source points pairing as an efficient net-weight (cancellation) algorithm. *Nuclear Science and Engineering*, 172:138–150, 2012.
- [147] Simon D., *Optimal State Estimation : Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [148] Spanier J. et Gelbard E.M., *Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [149] Sunde C., Demazière C. et Pázsit I., Calculation of the neutron noise induced by shell-mode core-barrel vibrations in a 1-D, two-group, two-region slab reactor model. *Nuclear Technology*, 154:129–141, 2005.
- [150] Tamaris, <http://www-tamaris.cea.fr/>. 2016.
- [151] Tambouratzis T. et Antonopoulos-Domis M., Instability localization with artificial neural networks (ANNs). *Annals of Nuclear Energy*, 29:235–253, 2002.
- [152] Tigeot Y. et Le Guillou G., Neutron noise induced by vibration on the French PHENIX LMFBR. *Progress in Nuclear Energy*, 1:487–496, 1977.

- [153] Trakas C. et Petit O., TRIPOLI-4<sup>®</sup> green's functions & MCNP5 importance to estimate ex-core detector response on a N4 PWR. *Joint International Conference of Supercomputing in Nuclear Applications and Monte Carlo (SNA-MC 2010), Tokyo, Japan, Oct., 17-20., 2010.*
- [154] Tran H.N., Zylbersztein F., Demazière C., Jammes C. et Filliatre P., A multi-group neutron noise simulator fast reactors. *Annals of Nuclear Energy*, 62:158–169, 2013.
- [155] Weinberg A.M. et Schweinler H.C., Theory of oscillation absorber in a chain reactor. *Physical Review*, 74:851–863, 1948.
- [156] Williams M.M.R., Reactivity changes due to the random vibration of control rods and fuel elements. *Nuclear Science and Engineering*, 39:144–150, 1970.
- [157] Wing G.M., *An introduction to transport theory*. John Wiley & Sons, 1962.
- [158] Yamamoto T., Convergence of the second eigenfunction in Monte Carlo power iteration. *Annals of Nuclear Energy*, 36:7–14, 2009.
- [159] Yamamoto T., Non-regionwise weight cancellation for Monte Carlo higher order criticality calculations using kernel density estimator. *Annals of Nuclear Energy*, 38:2515–2520, 2011.
- [160] Yamamoto T., Monte Carlo algorithm for buckling search and neutron leakage-corrected calculations. *Annals of Nuclear Energy*, 47:14–20, 2012.
- [161] Yamamoto T., Monte Carlo method with complex weights for neutron leakage-corrected calculations and anisotropic diffusion coefficient generations. *Annals of Nuclear Energy*, 50:141–149, 2012.
- [162] Yamamoto T., Monte Carlo method with complex-valued weights for frequency domain analyses of neutron noise. *Annals of Nuclear Energy*, 58:72–79, 2013.
- [163] Yamamoto T., Frequency domain Monte Carlo simulation method for cross power spectral density driven by periodically pulsed spallation neutron source using complex-valued weight Monte Carlo. *Annals of Nuclear Energy*, 63:711–720, 2014.
- [164] Yamamoto T. et Sakamoto H., A new concept of Monte Carlo kinetics parameter calculation using complex-valued perturbation. *Annals of Nuclear Energy*, 71:480–488, 2014.
- [165] Zmijarevic I., Multidimensional discrete ordinates nodal and characteristics methods for APOLLO2 code. *Mathematics and Computation (M&C 1999), Madrid, Spain, Sept., 27-30., 1999.*
- [166] Zoia A., Brun E. et Malvagi F., Alpha eigenvalue calculations with TRIPOLI-4<sup>®</sup>. *Annals of Nuclear Energy*, 63:276–284, 2014.
- [167] Zylbersztein F., *Developments and application of neutron noise diagnostics of sodium cooled fast reactors*. Thèse de doctorat, CEA, France, 2013.
- [168] Zylbersztein F., Filliatre P. et Jammes C., Analysis of the experimental neutron noise from the PHENIX reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 60:106–114, 2013.

## L'alternative de Fredholm

Cette annexe présente les justifications mathématiques de l'application du théorème de Fredholm employé en section 2.2. Commençons par exposer ce dernier en reprenant le théorème de Fredholm pour les équations à noyaux non dégénérés détaillé à la section 2 du chapitre 9 de [77].

**Théorème 1** Soit l'équation intégrale définie sur le segment  $[a, b]$  de la forme :

$$\Psi(s) = \int_a^b K(s, t)\Psi(t)dt + f(s), \quad (\text{A.1})$$

où  $f$  et  $K$  sont deux fonctions complexes continues et  $\Psi$  la fonction inconnue.  $K$  est défini comme étant le noyau de cette équation. Supposons que cet opérateur vérifie la seule condition de Hilbert-Schmidt (assurant sa compacité) :

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < +\infty, \quad (\text{A.2})$$

sans exiger que ce noyau soit dégénéré ou symétrique. Nous pouvons donc poser  $D$  un opérateur compact dans un espace de Hilbert  $H$  tel que l'Eq. A.1 puisse se réécrire de la manière suivante :

$$\Psi = D\Psi + f. \quad (\text{A.3})$$

En posant  $T = I - D$ , avec  $I$  l'opérateur identité, cette équation peut encore se simplifier en :

$$T\Psi = f. \quad (\text{A.4})$$

Considérons en outre l'équation homogène :

$$T\Psi_0 = 0, \quad (\text{A.5})$$

et les équations adjointes :

$$T^*\Upsilon = g, \quad (\text{A.6})$$

$$T^*\Upsilon_0 = 0, \quad (\text{A.7})$$

avec  $T^* = I - D^*$ . La liaison entre les propriétés des solutions de ces quatre équations se traduit par les assertions suivantes, dites théorèmes de Fredholm :

1. l'équation non homogène  $T\Psi = f$  est résoluble si et seulement si  $f$  est orthogonal à chaque solution de l'équation homogène adjointe  $T^*\Upsilon_0 = 0$  ;
2. (alternative de Fredholm) ou bien l'équation  $T\Psi = f$  a pour tout  $f \in H$  une solution et une seule, ou bien l'équation homogène  $T\Psi_0 = 0$  a des solutions non nulles ;
3. les équations homogènes A.5 et A.7 ont le même nombre (fini) de solutions linéairement indépendantes.

Nous cherchons à vérifier la résolubilité de l'équation :

$$L_0(r)\langle\delta\Psi\rangle(r) = -\langle\delta L\rangle(r)\Psi_0(r), \quad (\text{A.8})$$

sachant que l'équation homogène  $L_0(r)f(r) = 0$  admet déjà une solution non nulle  $\Psi_0$  qui n'est rien d'autre que le flux d'équilibre. L'espace de Hilbert dans lequel nous travaillons est l'espace  $\mathcal{L}^2$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini sur l'espace des phases  $P$  par  $\langle f, g \rangle = \int_P f(p)\overline{g(p)}dp$  où  $\overline{g(p)}$  est le complexe conjugué de  $g(p)$ .

Réécrivons l'opérateur de Boltzmann  $L_0$  de la façon suivante :

$$L_0 = A_0 - P_0, \quad (\text{A.9})$$

avec  $A_0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_0 - H_0$ . L'opérateur  $A_0$  étant inversible (voir section 3.1 du chapitre 11 de [131]), nous pouvons écrire :

$$L_0 = A_0(I - A_0^{-1}P_0). \quad (\text{A.10})$$

Comme cela est démontré en section 3.2 du chapitre 11 de [131], l'opérateur  $D_0 = A_0^{-1}P_0$  est compact. En posant  $T_0 = I - A_0^{-1}P_0 = I - D_0$ ,  $L_0$  peut se réécrire de la forme :

$$L_0 = A_0T_0, \quad (\text{A.11})$$

et ainsi :

$$T_0(r)\langle\delta\Psi\rangle(r) = -A_0^{-1}(r)\langle\delta L\rangle(r)\Psi_0(r). \quad (\text{A.12})$$

L'opérateur  $T_0$  vérifiant les hypothèses du théorème 1, nous pouvons appliquer la première assertion qui stipule que l'Eq. A.12 est résoluble *si et seulement si*  $-A_0^{-1}\langle\delta L\rangle(r)\Psi_0(r)$  est orthogonal à chaque solution de l'équation homogène adjointe  $T_0^*\Upsilon_0 = 0$  (avec  $T_0^* = L_0^*(A_0^{-1})^* = L_0^*(A_0^*)^{-1}$ ). Sachant que l'orthogonalité est au sens du produit scalaire défini précédemment, cette condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\langle -A_0^{-1}(r)\langle\delta L\rangle(r)\Psi_0(r), \Upsilon_0(r) \rangle = 0, \quad (\text{A.13})$$

ce qui équivaut à :

$$\langle -\langle\delta L\rangle(r)\Psi_0(r), (A_0^*)^{-1}(r)\Upsilon_0(r) \rangle = 0, \quad (\text{A.14})$$

où  $(A_0^*)^{-1}(r)\Upsilon_0(r)$  est bien solution de l'équation adjointe  $L_0^*\tilde{\Upsilon}_0 = 0$ . Nous avons donc montré que l'Eq. A.12, et donc l'Eq. A.8, était résoluble *si et seulement si*  $-\langle\delta L\rangle(r)\Psi_0(r)$  était orthogonale à chacune des solutions de l'équation adjointe  $L_0^*\tilde{\Upsilon}_0 = 0$ . ■

## Fonction de transfert fondamentale à 6 groupes de précurseurs

Cette annexe fait suite à l'analyse de la fonction de transfert fondamentale  $G_0$  étudiée en section 2.3.1. Comme il est précisé dans cette dernière, pour le cas général d'un système hétérogène multidimensionnel en théorie de la diffusion multigroupe,  $G_0$  peut s'approximer par l'expression suivante (indice C pour « Condensé ») :

$$G_0^C(\omega) = \frac{1}{i\omega(\Lambda_{\text{eff}} + \frac{\beta_{\text{eff}}}{\lambda_{\text{eff}} + i\omega})}, \quad (\text{B.1})$$

qui emploie les données cinétiques effectives pondérées par le flux adjoint  $\Phi_0^*$  rappelées ici :

- $\beta_{\text{eff}} = \frac{\langle \Phi_0^*, P_{0,d}\Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^*, P_0\Phi_0 \rangle},$
- $\Lambda_{\text{eff}} = \frac{\langle \Phi_0^*, 1/v\Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^*, P_0\Phi_0 \rangle},$
- $\lambda_{\text{eff}} = \frac{\beta_{\text{eff}}}{\sum_q \frac{\beta_{\text{eff},q}}{\lambda_q}}$  avec  $\beta_{\text{eff},q} = \frac{\langle \Phi_0^*, P_{0,d,q}\Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0^*, P_0\Phi_0 \rangle},$

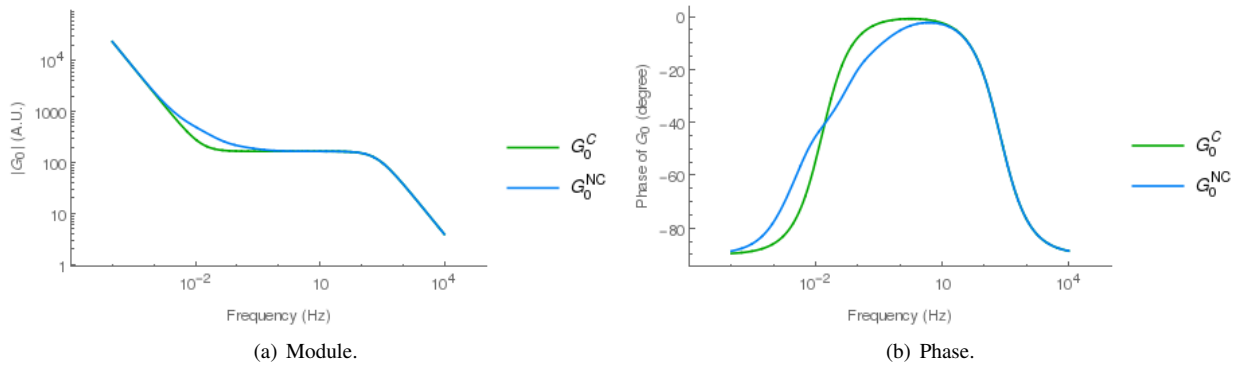
Il existe une deuxième façon un peu plus précise d'approximer  $G_0$  en ne condensant pas à un unique groupe de précurseurs comme précédemment. Cette approximation est la suivante (indice NC pour « Non Condensé ») :

$$G_0^{\text{NC}}(\omega) = \frac{1}{i\omega(\Lambda_{\text{eff}} + \sum_q \frac{\beta_{\text{eff},q}}{\lambda_q + i\omega})}. \quad (\text{B.2})$$

Nous allons qualitativement étudier la différence entre ces deux approximations sur un système critique unidimensionnel simple à 4 groupes d'énergie et 6 groupes de précurseurs en théorie de la diffusion avec la maquette fil (voir section 3.1.2). Ce système se compose de 17 crayons combustibles dans de l'eau avec des conditions de vide aux bords. La Figure B.1 détaille la fonction de transfert fondamentale obtenue en fonction de l'approximation choisie.

Le lecteur averti aura remarqué que les pôles de  $G_0^{\text{NC}}$  correspondent aux racines de l'équation de Nordheim (« in-hour equation » en anglais) lorsque celle-ci emploie les données cinétiques effectives telles que définies précédemment et suppose une réactivité nulle (c'est bien ce qui est toujours supposé en théorie du bruit neutronique puisque l'état d'équilibre est supposé critique). Ces racines étant plus complexes que dans le cas très simple à un groupe de précurseurs, il est usuel de les étudier graphiquement.

Pour le système étudié, à réactivité nulle et si nous excluons la racine nulle, les 5 plus petites racines de l'équation de Nordheim en valeur absolue, et donc les 5 plus petites fréquences de coupure, se situent autour de 0,014 Hz et sont particulièrement proches les unes des autres (0,58, 0,19, 0,03, 0,01 et 0,002 Hz). La dernière racine, la plus grande, se situe au niveau de la limite des hautes fréquences et est sensiblement égale à celle de  $G_0^C$  (240 Hz). Ces valeurs correspondent bien aux fréquences de coupure de la Fig. B.1.



**FIGURE B.1** – Comparaison du module et de la phase de la fonction de transfert fondamentale en fonction de l'approximation choisie dans le cas d'un système hétérogène à une dimension à 4 groupes d'énergie et 6 groupes de précurseurs.

Au vu de cette brève étude, nous constatons donc que l'approximation  $G_0^{NC}$  n'apporte pas d'informations sensiblement différentes par rapport à celles fournies avec l'approximation  $G_0^C$ . C'est pourquoi nous avons choisi d'employer la première approximation  $G_0^C$ , la plus simple, pour estimer la fonction de transfert fondamentale lorsque nous étudions un système à plusieurs groupes de précurseurs.

## Quelques solutions analytiques

Cette annexe présente les résultats analytiques du bruit neutronique en théorie de la diffusion à deux groupes d'énergie pour un cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur et pour un cylindre homogène infini. Les données nucléaires et cinétiques employées y sont aussi détaillées.

### C.1 Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur

Cette section détaille les résultats analytiques en théorie de la diffusion employés en section 3.2.1 et en section 3.2.2 pour le cas d'un cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur. Ces résultats analytiques sont issus de [45, 149]. Puisqu'une géométrie fil est strictement équivalente à une géométrie de type plaque infinie en théorie de la diffusion pour les calculs stationnaires, les résultats analytiques sont identiques dans les deux types de géométries. La seule donnée qui puisse changer est la définition du coefficient de diffusion qui est, dans le premier cas, égal à  $D = \frac{1}{\Sigma_{0,t}}$ , et dans le deuxième cas égal à  $D = \frac{1}{3\Sigma_{0,t}}$ . Malgré une définition de la source de bruit différente, nous avons supposé que les résultats analytiques du bruit étaient très peu différents entre la géométrie fil et la géométrie plaque infinie en théorie de la diffusion.

Rappelons que nous nous plaçons en théorie de la diffusion à seulement deux groupes d'énergie et un groupe de précurseurs, et que nous imposons un scattering isotrope sans upscattering ni de spectre de fission thermique. La géométrie et les dimensions du système sont rappelées en Fig. C.1.

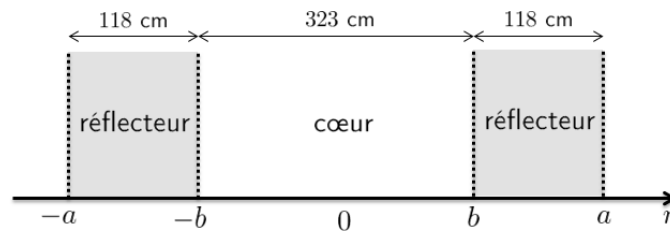


FIGURE C.1 – Cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur.

Nous imposons une source de bruit complexe modélisée par deux Dirac en  $-b$  et en  $b$  de la manière suivante (les indices 1 et 2 désignent le groupe d'énergie) :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad S_1(r, \omega) = \begin{cases} s_1 & \text{si } r = \pm b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{C.1})$$

et :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad S_2(r, \omega) = \begin{cases} s_2 & \text{si } r = \pm b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (\text{C.2})$$

Nous désignons, dans tout le reste de cette section, par l'indice  $c$  le flux et les sections efficaces du cœur homogène, et par l'indice  $r$  le flux et les sections efficaces du réflecteur homogène.



Les équations du bruit neutronique sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} D_1^c \Delta - \Sigma_1^c(\omega) & \nu \Sigma_{f,2}^c(\omega) \\ \Sigma_{0,s0}^{c,1 \rightarrow 2} & D_2^c \Delta - \Sigma_2^c(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \Phi_1^c(r, \omega) \\ \delta \Phi_2^c(r, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_1(r, \omega) \\ -S_2(r, \omega) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

et :

$$\begin{pmatrix} D_1^r \Delta - \Sigma_1^r(\omega) & 0 \\ \Sigma_{0,s0}^{r,1 \rightarrow 2} & D_2^r \Delta - \Sigma_2^r(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \Phi_1^r(r, \omega) \\ \delta \Phi_2^r(r, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_1(r, \omega) \\ -S_2(r, \omega) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

avec :

- $\nu \Sigma_{f,1}^c(\omega) = \frac{\nu_1 \Sigma_{0,f}^{c,1}}{k} \left(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega}\right),$
- $\nu \Sigma_{f,2}^c(\omega) = \frac{\nu_2 \Sigma_{0,f}^{c,2}}{k} \left(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega}\right),$
- $\Sigma_1^c(\omega) = \Sigma_{0,a}^{c,1} + \Sigma_{0,s0}^{c,1 \rightarrow 2} + \frac{i\omega}{v_1} - \nu \Sigma_{f,1}^c(\omega),$
- $\Sigma_2^c(\omega) = \Sigma_{0,a}^{c,2} + \frac{i\omega}{v_2},$
- $\Sigma_1^r(\omega) = \Sigma_{0,a}^{r,1} + \Sigma_{0,s0}^{r,1 \rightarrow 2} + \frac{i\omega}{v_1},$
- $\Sigma_2^r(\omega) = \Sigma_{0,a}^{r,2} + \frac{i\omega}{v_2}.$

En passant par la méthode des fonctions de Green (voir section 2.3.1) comme cela a été fait pour la solution analytique décrite en section 2.4.1, nous obtenons la solution analytique suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta \Phi_1^c(r, \omega) \\ \delta \Phi_2^c(r, \omega) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ C_g(\omega) \end{pmatrix} \cos(g(\omega)r) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ C_l(\omega) \end{pmatrix} \frac{\cosh(l(\omega)r)}{\cosh(l(\omega)b)},$$

$$\begin{pmatrix} \delta \Phi_1^r(r, \omega) \\ \delta \Phi_2^r(r, \omega) \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ C_\kappa(\omega) \end{pmatrix} \frac{\sinh(\kappa_1(\omega)(|r| - a))}{\sinh(\kappa_1(\omega)(b - a))} + A_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sinh(\kappa_2(\omega)(|r| - a))}{\sinh(\kappa_2(\omega)(b - a))}, \quad (\text{C.5})$$

avec :

$$g(\omega)^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma_1^c(\omega)}{D_1^c} + \frac{\Sigma_2^c(\omega)}{D_2^c} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Sigma_1^c(\omega)}{D_1^c} - \frac{\Sigma_2^c(\omega)}{D_2^c} \right)^2 + \frac{4}{D_1^c D_2^c} \Sigma_{0,s0}^{c,1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}^c(\omega)},$$

$$l(\omega)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma_1^c(\omega)}{D_1^c} + \frac{\Sigma_2^c(\omega)}{D_2^c} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Sigma_1^c(\omega)}{D_1^c} - \frac{\Sigma_2^c(\omega)}{D_2^c} \right)^2 + \frac{4}{D_1^c D_2^c} \Sigma_{0,s0}^{c,1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}^c(\omega)}, \quad (\text{C.6})$$

et :

- $\kappa_1(\omega) = \sqrt{\frac{\Sigma_1^r(\omega)}{D_1^r}},$
- $\kappa_2(\omega) = \sqrt{\frac{\Sigma_2^r(\omega)}{D_2^r}},$
- $C_\kappa(\omega) = \frac{\Sigma_{0,s0}^{r,1 \rightarrow 2}}{D_2^r (\kappa_2(\omega)^2 - \kappa_1(\omega)^2)},$
- $C_g(\omega) = \frac{\Sigma_{0,s0}^{c,1 \rightarrow 2}}{\Sigma_2^c(\omega) + D_2^c g(\omega)^2},$
- $C_l(\omega) = \frac{\Sigma_{0,s0}^{c,1 \rightarrow 2}}{\Sigma_2^c(\omega) - D_2^c l(\omega)^2}.$

Les coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  se déterminent grâce aux conditions aux limites et aux conditions de continuité suivantes :

- $\delta\Phi^r(a, \omega) = 0$ ,
- $\delta\Phi^c(b, \omega) = \delta\Phi^r(b, \omega)$ ,
- $D_1^r \partial_r \delta\Phi_1^r(b, \omega) - D_1^c \partial_r \delta\Phi_1^c(b, \omega) = -s_1$ ,
- $D_2^r \partial_r \delta\Phi_2^r(b, \omega) - D_2^c \partial_r \delta\Phi_2^c(b, \omega) = -s_2$ .

Le respect de ses quatre égalités aboutit à la résolution du système suivant (la variable  $\omega$  est sous-entendue) :

$$\begin{pmatrix} -\cos(gb) & -1 & 1 & 0 \\ -C_g \cos(gb) & -C_l & C_\kappa & 1 \\ gD_1^c \sin(gb) & -lD_1^c \tanh(lb) & \kappa_1 D_1^r \coth(\kappa_1(b-a)) & 0 \\ C_g g D_2^c \sin(gb) & -C_l l D_2^c \tanh(lb) & C_\kappa \kappa_1 D_2^r \coth(\kappa_1(b-a)) & \kappa_2 D_2^r \coth(\kappa_2(b-a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Notons que les solutions analytiques du flux d'équilibre et du facteur de multiplication effectif peuvent se déterminer par la résolution des équations précédentes en imposant  $\omega = 0$  et une source de bruit strictement nulle. Le facteur de multiplication effectif  $k$  est tel que le déterminant de la matrice de l'Eq. C.7 soit nul.

Les données nucléaires et cinétiques employées en section 3.2.1 et en section 3.2.2 pour le calcul de l'état d'équilibre et du bruit neutronique de ce cœur homogène sont résumés dans le Tab. C.1. Pour les calculs avec la maquette fil, les coefficients de diffusion sont égaux à  $D_g = \frac{1}{\Sigma_{0,t}^g}$  ce qui donne un facteur de multiplication effectif de  $k = 0,99733$ . Pour les calculs 2D en diffusion nodale avec APOLLO3®, les coefficients de diffusion sont égaux à  $D_g = \frac{1}{3\Sigma_{0,t}^g}$  ce qui donne un facteur de multiplication effectif de  $k = 1,00455$ .

TABLEAU C.1 – Données nucléaires et cinétiques du cœur homogène entouré d'un matériau réflecteur

(a) Données nucléaires			(b) Données cinétiques	
	Cœur	Réflecteur		
$\Sigma_{0,t}^1$	0,232 cm <sup>-1</sup>	0,254 cm <sup>-1</sup>	$v_1$	$1,82304 \times 10^7$ cm.s <sup>-1</sup>
$\Sigma_{0,t}^2$	0,895 cm <sup>-1</sup>	1,27 cm <sup>-1</sup>	$v_2$	$4,13067 \times 10^5$ cm.s <sup>-1</sup>
$\Sigma_{0,a}^1$	0,0115 cm <sup>-1</sup>	-0,0098 cm <sup>-1</sup>	$\beta$	535 pcm
$\Sigma_{0,a}^2$	0,102 cm <sup>-1</sup>	0,0284 cm <sup>-1</sup>	$\lambda$	0,08521 s <sup>-1</sup>
$\Sigma_{0,s0}^{1 \rightarrow 2}$	0,0151 cm <sup>-1</sup>	0,0238 cm <sup>-1</sup>		
$\nu_1 \Sigma_{0,f}^1$	0,00567 cm <sup>-1</sup>			
$\nu_2 \Sigma_{0,f}^2$	0,143 cm <sup>-1</sup>			

## C.2 Cylindre homogène infini

Nous détaillons dans cette section les résultats analytiques en théorie de la diffusion employés en section 3.2.3 pour le cas d'un cylindre homogène infini à trois dimensions. Ces résultats analytiques sont issus de [86]. Comme précédemment, nous nous plaçons en théorie de la diffusion à seulement deux groupes d'énergie et un groupe de précurseurs, sans upscattering ni spectre de fission thermique et avec un scattering isotrope. Les données nucléaires et cinétiques sont celles employées dans [162] et sont détaillées dans le Tab. C.2 en fin de cette section.

Soit un cylindre homogène infini de rayon  $R$ . Imposons une source unitaire définie par un Dirac en  $r = 0$  pour le groupe thermique uniquement. La source de bruit étant centrée, le bruit est invariant par rotation autour de l'axe du cylindre et ne dépend donc que de la distance  $r$  au centre. L'équation du bruit d'un tel système est la suivante :

$$\begin{pmatrix} D_1\Delta - \Sigma_1(\omega) & \nu\Sigma_{f,2}(\omega) \\ \Sigma_{s0}^{1\rightarrow 2} & D_2\Delta - \Sigma_2(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\Phi_1(r, \omega) \\ \delta\Phi_2(r, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta(r) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

avec :

- $\nu\Sigma_{f,1}(\omega) = \frac{\nu_1\Sigma_{0,f}^1}{k} \left(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega}\right)$  et  $\nu\Sigma_{f,2}(\omega) = \frac{\nu_2\Sigma_{0,f}^2}{k} \left(1 - \frac{i\beta\omega}{\lambda + i\omega}\right)$ ,
- $\Sigma_1(\omega) = \Sigma_{0,a}^1 + \Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2} + i\omega/v_1 - \nu\Sigma_{f,1}(\omega)$  et  $\Sigma_2(\omega) = \Sigma_{0,a}^2 + i\omega/v_2$ .

En procédant comme pour les autres solutions analytiques décrites en section 2.4.1 ou en annexe C.1 et en prenant en compte les conditions limites du système, la solution analytique est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta\Phi_1(r, \omega) \\ \delta\Phi_2(r, \omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{4D_2(C_l(\omega) - C_g(\omega))} \begin{pmatrix} 1 \\ C_g(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0(g(\omega)r) \frac{Y_0(g(\omega)R)}{J_0(g(\omega)R)} - Y_0(g(\omega)r) \\ + \frac{1}{2\pi D_2(C_l(\omega) - C_g(\omega))} \begin{pmatrix} 1 \\ C_l(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0(l(\omega)r) \frac{K_0(l(\omega)R)}{I_0(l(\omega)R)} - K_0(l(\omega)r) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

où :

- $g(\omega)^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} + \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} - \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right)^2 + \frac{4}{D_1 D_2} \Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2} \nu\Sigma_{f,2}(\omega)}$ ,
- $l(\omega)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} + \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Sigma_1(\omega)}{D_1} - \frac{\Sigma_2(\omega)}{D_2} \right)^2 + \frac{4}{D_1 D_2} \Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2} \nu\Sigma_{f,2}(\omega)}$ ,
- $C_g(\omega) = \frac{\Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2}}{\Sigma_2(\omega) + D_2 g(\omega)^2}$ ,
- $C_l(\omega) = \frac{\Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2}}{\Sigma_2(\omega) - D_2 l(\omega)^2}$ .

$J_0$  et  $Y_0$  sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre 0, et  $I_0$  et  $K_0$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de première et de seconde espèce d'ordre 0.

TABLEAU C.2 – Données nucléaires et cinétiques du milieu homogène infini et du cylindre homogène infini

(a) Données nucléaires		(b) Données cinétiques	
$\Sigma_{0,t}^1$	0,285 cm <sup>-1</sup>	$v_1$	2,8 × 10 <sup>7</sup> cm.s <sup>-1</sup>
$\Sigma_{0,t}^2$	2,1 cm <sup>-1</sup>	$v_2$	3,0 × 10 <sup>5</sup> cm.s <sup>-1</sup>
$\Sigma_{0,a}^1$	0,005 cm <sup>-1</sup>	$\beta$	700 pcm
$\Sigma_{0,a}^2$	0,1 cm <sup>-1</sup>	$\lambda$	0,08 s <sup>-1</sup>
$\Sigma_{0,s0}^{1\rightarrow 2}$	0,0308 cm <sup>-1</sup>		
$\nu_1 \Sigma_{0,f}^1$	0,003 cm <sup>-1</sup>		
$\nu_2 \Sigma_{0,f}^2$	0,12 cm <sup>-1</sup>		

## Propagation axiale d'une perturbation dans un cœur à trois dimensions (APOLLO3®)

Cette annexe présente les résultats d'une propagation axiale d'une perturbation de bas en haut du cœur à trois dimensions étudié en section 3.3.3 avec APOLLO3® [53, 55]. Ce type de perturbation peut s'interpréter comme étant une façon simpliste de modéliser une propagation axiale d'une variation périodique locale de température. Pour rappel, le cœur étudié est celui d'un réacteur à eau légère et à baffle lourd à trois dimensions homogénéisé à 2 groupes d'énergie assemblage par assemblage. Ce cœur a une hauteur de 420 cm et est décomposé axialement en 21 plans axiaux de hauteur 20 cm. Le premier et le dernier plan axial sont uniquement constitués d'assemblages réflecteurs. Les 19 autres plans sont tous identiques et définis par le même plan de chargement détaillé en Fig. 3.19. Des conditions de vide sont imposées aux frontières de la géométrie. Comme en section 3.3.3, nous allons travailler uniquement en théorie de la diffusion avec une correction d'anisotropie  $P_0^*$  et une approximation quartique du flux volumique. Le maillage spatial employé est de  $4 \times 4$  mailles pour chaque assemblage homogénéisé de tous les plans axiaux.

Nous allons imposer une propagation axiale de bas en haut du cœur d'une oscillation périodique de 1% de toutes les sections efficaces macroscopiques de l'assemblage UOXGD\_1 en position (5,7) (voir Fig. 3.19) et ce sur toute la hauteur de l'assemblage (380 cm). Les termes perturbés des sections efficaces sont donc définis par :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma(z, E, t) &= \delta\Sigma(z = z_i, E, t - \frac{z}{v_e}) \\ &= 1\% \Sigma_0(z = z_i, E) \cos\left(\omega_0(t - \frac{z}{v_e})\right), \end{aligned} \quad (D.1)$$

avec  $z$  la position axiale,  $z_i$  la position axiale de départ de la perturbation,  $\omega_0$  la fréquence angulaire de la perturbation et  $v_e$  sa vitesse de propagation axiale (supposée constante quelle que soit la hauteur  $z$ ). En appliquant la transformée de Fourier, nous obtenons simplement :

$$\begin{aligned} \delta\Sigma(z, E, \omega) &= \delta\Sigma(z = z_i, E, \omega) e^{-i \frac{\omega}{v_e} z} \\ &= \pi 1\% \Sigma_0(z = z_i, E) e^{-i \frac{\omega}{v_e} z} \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (D.2)$$

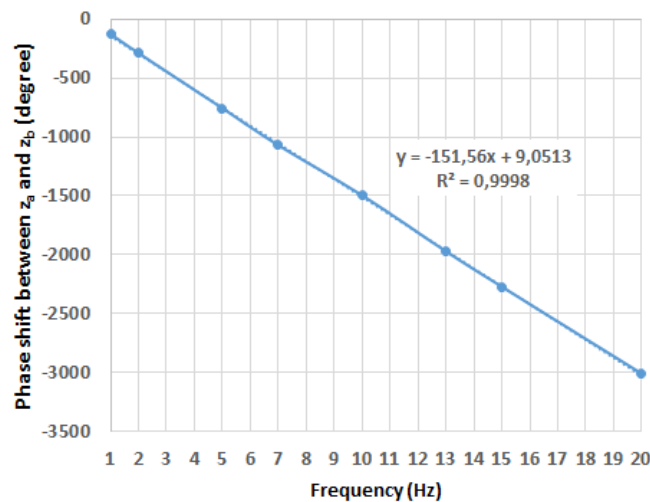
Nous avons choisi d'imposer une vitesse de propagation de  $v_e = 190$  cm/s. La propagation démarre de  $z_i = 20$  cm (début du premier plan axial contenant les assemblages combustibles) et se termine en  $z_f = 400$  cm (fin du dernier plan axial contenant les assemblages combustibles). En intégrant sur toute la hauteur de chaque plan axial, la source de bruit du  $k$ -ième plan axial délimité par les positions axiales  $z_k$  et  $z_{k+1}$  est définie par :

$$(\delta\Sigma\Phi_0)_k(\omega) = \frac{v_e}{\omega} \frac{\pi 1\% \Sigma_{0,z_i}}{z_{k+1} - z_k} \Phi_{0,k} \left[ \sin\left(\frac{\omega}{v_e} z_{k+1}\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v_e} z_k\right) + i \left( \cos\left(\frac{\omega}{v_e} z_{k+1}\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v_e} z_k\right) \right) \right] \delta(\omega - \omega_0), \quad (D.3)$$

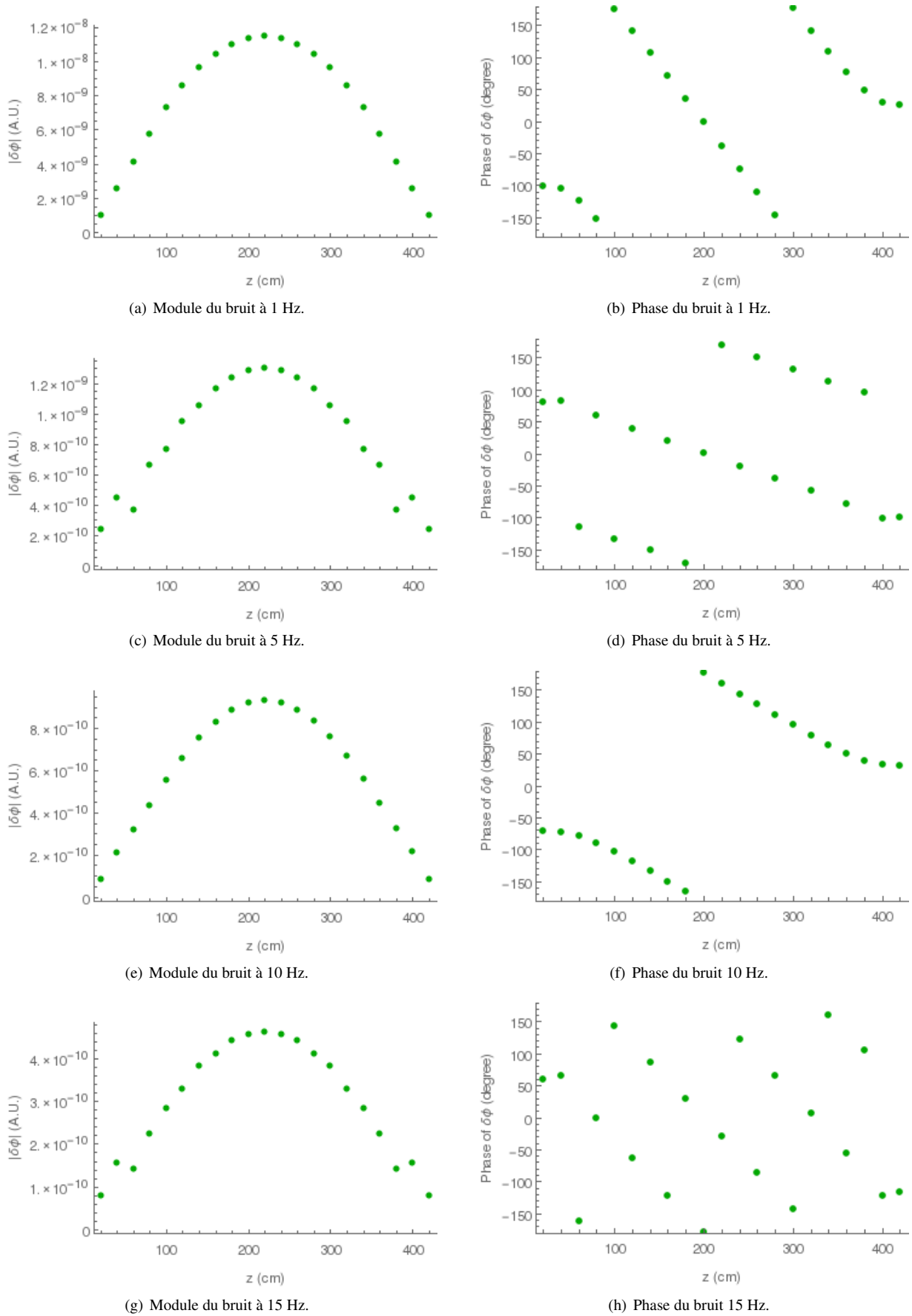
avec  $\Phi_{0,k} = \frac{1}{z_{k+1} - z_k} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Phi_0(z) dz$  et  $\Sigma_{0,z_i}$  la section efficace d'équilibre au niveau du plan axial  $z_i$ .

Nous allons étudier cette source de bruit pour différentes valeurs de  $\omega_0$ . La Figure D.2 détaille l'évolution des modules et des phases du bruit rapide à 1, 5, 10 et 15 Hz en fonction de la hauteur  $z$  au niveau de l'assemblage perturbé. Nous constatons que le module suit quasiment la forme d'un sinus (et donc du flux d'équilibre) en fonction de la hauteur  $z$  quelle que soit la fréquence choisie. Concernant la phase, son évolution varie sensiblement en fonction de la fréquence. Comme cela est détaillé dans [55] (voir notamment les Figs. 10, 11 et 12 de cette référence), puisque nous travaillons sur un grand système et que les fréquences choisies sont toutes de la gamme des moyennes fréquences appartenant à la région plateau de la fonction de transfert fondamentale du système, la phase et le module du bruit vont avoir tendance à avoir les mêmes évolutions spatiales que celles de la phase et du module de la perturbation. En effet, les oscillations spatiales du module du bruit observées par exemple dans [53] et [55] sont dues à des interférences entre le terme réacteur point et le terme dépendant de l'espace (voir l'Eq. 2.65 de la section 2.3.3). Or, dans un grand système à moyennes fréquences (sur la région plateau par exemple), le terme dépendant de l'espace domine sensiblement sur le terme réacteur point. Les interférences entre les deux termes sont donc très peu visibles. C'est pourquoi, dans ce cas précis, la phase et le module du bruit ont tendance à suivre les mêmes évolutions spatiales que celles de la phase et du module de la perturbation. La période spatiale de la phase de la perturbation dépend de la fréquence choisie : pour 1 Hz, elle est de 190 cm, pour 5 Hz de 38 cm, pour 10 Hz de 19 cm et pour 15 Hz de 12,7 cm. Ces périodes spatiales expliquent donc l'évolution des phases observée en Fig. D.2. Concernant le module, puisque celui de la source de bruit est directement proportionnel au flux d'équilibre et que ce dernier suit une évolution en sinus en fonction de la hauteur, il est normal que le module du bruit suive la même évolution.

Terminons cette brève étude en analysant l'évolution du déphasage entre le 3<sup>ème</sup> plan axial ( $z_a = 60$  cm) et le 7<sup>ème</sup> ( $z_b = 140$  cm) en fonction de la fréquence. La Figure D.1 présente l'évolution de ce déphasage au niveau de l'assemblage perturbé (rappelons utilement qu'une phase est définie à  $2\pi$  près). Grâce à une simple régression linéaire, nous obtenons une droite affine de pente  $-151,56$  °/Hz. Or, comme nous l'avons déjà vu en section 1.3.2, le bruit en  $z_b$  est déphasé de  $-\omega\tau$  par rapport au bruit en  $z_a$  avec  $\tau = \frac{z_b - z_a}{v_e}$  le temps de propagation de la perturbation. Ainsi,  $\tau = 0,421$  s ce qui nous donne une vitesse de propagation de  $v_e = 190,024$  cm/s. À  $10^{-2}$  près, c'est bien la vitesse que nous avons imposée.



**FIGURE D.1** – Déphasage en fonction de la fréquence entre les positions axiales  $z_a = 60$  cm et  $z_b = 140$  cm au niveau de l'assemblage perturbé (résultats numériques obtenus avec APOLLO3<sup>®</sup> en théorie de la diffusion). L'équation  $y = -151,56x + 9,0513$  correspond au résultat d'une régression linéaire (ajustement affine) de coefficient de détermination  $R^2 = 0,9998$ .



**FIGURE D.2** – Module et phase du bruit rapide à 1, 5, 10 et 15 Hz en fonction de la hauteur  $z$  au niveau de l'assemblage perturbé (résultats numériques obtenus avec APOLLO3® en théorie de la diffusion).



## Méthode de résolution stochastique testée à l'aide de MCNP5

Cette annexe détaille la méthode stochastique de résolution des équations du bruit neutronique proposée par [130] et développée à l'aide du code Monte Carlo MCNP5. Cette méthode est très différente de celles présentées en section 4.1 car elle impose une itération entre la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation du bruit. Elle n'exige (presque) aucune modification du code Monte Carlo employé mais présente néanmoins à ce jour une limitation significative que nous allons voir ci-après. Nous avons pris la liberté de présenter, dans cette annexe, une version plus générale de la méthode présentée dans [130] qui se limite à un cas à deux groupes d'énergie.

Reprenons l'équation linéaire du bruit détaillée en section 2.1.1 qui, en théorie du transport à seulement un groupe de précurseurs, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}(r, E) + i\frac{\omega}{v}) \delta\Psi(r, \vec{\Omega}, E, \omega) &= \iint \Sigma_{0,s}(r, \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \delta\Psi(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 + \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \beta)\chi_p(E) + \left( \frac{\lambda^2 \beta}{\lambda^2 + \omega^2} - i \frac{\lambda \beta \omega}{\lambda^2 + \omega^2} \right) \chi_d(E) \right] &\iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta\Psi(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 + S(r, \vec{\Omega}, E, \omega), &
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

avec  $S$  la source de bruit. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, cette équation peut se réécrire sous la forme de deux équations couplées (les indices  $\Re$  et  $\Im$  désignent respectivement les parties réelles et imaginaires) :

$$\begin{aligned}
 (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}(r, E)) \delta\Psi_{\Re}(r, \vec{\Omega}, E, \omega) &= \iint \Sigma_{0,s}(r, \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \delta\Psi_{\Re}(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 + \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \beta)\chi_p(E) + \frac{\lambda^2 \beta}{\lambda^2 + \omega^2} \chi_d(E) \right] &\iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta\Psi_{\Re}(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 + Q_1(r, \vec{\Omega}, E, \omega), &
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \Sigma_{0,t}(r, E)) \delta\Psi_{\Im}(r, \vec{\Omega}, E, \omega) &= \iint \Sigma_{0,s}(r, \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}, E' \rightarrow E) \delta\Psi_{\Im}(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 + \frac{1}{4\pi k} \left[ (1 - \beta)\chi_p(E) + \frac{\lambda^2 \beta}{\lambda^2 + \omega^2} \chi_d(E) \right] &\iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta\Psi_{\Im}(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 + Q_2(r, \vec{\Omega}, E, \omega), &
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 Q_1(r, \vec{\Omega}, E, \omega) &= \frac{\omega}{v} \delta\Psi_{\Im}(r, \vec{\Omega}, E, \omega) + \frac{1}{4\pi k} \frac{\lambda \beta \omega}{\lambda^2 + \omega^2} \chi_d(E) \iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta\Psi_{\Im}(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 &+ S_{\Re}(r, \vec{\Omega}, E, \omega), \\
 Q_2(r, \vec{\Omega}, E, \omega) &= -\frac{\omega}{v} \delta\Psi_{\Re}(r, \vec{\Omega}, E, \omega) - \frac{1}{4\pi k} \frac{\lambda \beta \omega}{\lambda^2 + \omega^2} \chi_d(E) \iint \nu(E') \Sigma_{0,f}(r, E') \delta\Psi_{\Re}(r, \vec{\Omega}', E', \omega) dE' d\vec{\Omega}' \\
 &+ S_{\Im}(r, \vec{\Omega}, E, \omega).
 \end{aligned} \tag{E.4}$$



Les deux équations couplées E.2 et E.3 peuvent toutes deux être vues comme des équations stationnaires à source résolubles par simulation Monte Carlo classique (à condition de pouvoir très légèrement modifier dans le code l'échantillonnage de l'énergie de fission ou plus simplement de pouvoir modifier les bibliothèques des sections efficaces comme dans le cas multigroupe présenté dans [130]). C'est en partant de cette constatation que les auteurs de [130] proposent d'itérer entre ces deux équations pour obtenir la solution de l'équation du bruit de départ E.1. Cependant, dans les codes Monte Carlo actuels, il est possible de définir uniquement des sources positives. À chaque pas d'itérations, les composantes isotropes et angulaires des sources  $Q_1$  et  $Q_2$  doivent donc toujours être de même signe<sup>1</sup> (et de même signe pour tous les groupes dans le cas du modèle multigroupe utilisé dans [130]). Ceci impose des conditions restrictives sur la source de bruit  $S$ . En effet, comme illustré en section 4.2.1, nous constatons que pour une simple oscillation sinusoïdale des sections efficaces la source de bruit peut changer de signe en fonction de l'espace et du groupe d'énergie. D'autre part, même si le terme isotrope de la source de bruit est positif, cela n'implique pas que les termes angulaires de la source soient tous positifs. De plus, quand bien même nous imposons une source de bruit de composantes isotropes et angulaires toutes positives, cela n'implique pas forcément que les composantes isotropes et angulaires des termes sources  $Q_1$  et  $Q_2$  restent de même signe pour chaque itération.

Ainsi, même si cette méthode Monte Carlo est sensiblement plus simple à mettre en place que celles présentées en section 4.1, elle ne permet pas à ce jour d'imposer une source de bruit quelconque et risque d'être assez coûteuse en temps de calcul puisqu'elle impose la réalisation de nombreuses simulations Monte Carlo.

---

1. Puisque nous travaillons sur les équations linéaires du bruit, si, pour une itération donnée, les composantes isotropes et angulaires de  $Q_1$  ou de  $Q_2$  sont toutes négatives, il suffit de prendre leurs valeurs absolues et de déphaser le résultat obtenu par  $\pm\pi$ .



**Titre :** Analyse et développement d'outils numériques déterministes et stochastiques résolvant les équations du bruit neutronique et applications aux réacteurs thermiques et rapides.

**Mots clefs :** bruit neutronique, domaine fréquentiel, poids complexes, perturbations, vibrations, APOLLO3®.

**Résumé :** Le bruit neutronique désigne les fluctuations de la population neutronique induites par des changements des sections efficaces macroscopiques lors du fonctionnement à puissance nominale d'un réacteur nucléaire. Ces perturbations peuvent avoir des origines diverses comme une variation de densité du caloporteur ou une vibration d'un élément mécanique (barres de contrôle, assemblages combustibles...). Ces bruits sont observables par les détecteurs de neutrons du réacteur. Lorsqu'ils sont jugés anormaux, tout l'enjeu est de savoir identifier et localiser leurs sources afin de pouvoir mettre en place les mesures de sûreté éventuellement nécessaires au bon fonctionnement de l'installation.

Cette thèse a pour principal objectif de mettre en place des outils de calculs neutroniques déterministes et stochastiques en implémentant notamment un solveur de bruit neutronique dans le code de transport déterministe multi-filière

APOLLO3® développé au CEA. Au cours de nos travaux, nous avons en outre mis en place une nouvelle méthode de résolution stochastique des équations du bruit neutronique.

Un nouveau modèle des sources de bruit engendrées par des vibrations mécaniques a de plus été développé. Une nouvelle méthode basée sur la détermination d'un nouvel état d'équilibre a aussi été proposée afin de rendre plus robuste la théorie classique linéaire et non linéaire. Afin d'illustrer et d'analyser l'ensemble des développements et des nouvelles méthodes mis en place, des études de bruit dans des cœurs homogènes et hétérogènes à une dimension ont été menées. De même, des études « grandeurs natures » dans un grand cœur de réacteur à eau légère et à baffle lourd à deux et trois dimensions ont été réalisées en théorie du transport et de la diffusion avec APOLLO3®.

**Title :** Analysis and development of deterministic and stochastic neutron noise computing techniques with applications to thermal and fast reactors.

**Keywords :** neutron noise, frequency domain, complex weights, perturbations, vibrations, APOLLO3®.

**Abstract :** Neutron noise analysis addresses the description of small time-dependent flux fluctuations induced by small global or local perturbations of the macroscopic cross-sections. These fluctuations may occur in nuclear reactors due to density fluctuations of the coolant, to vibrations of fuel elements, control rods, or any other structures in the core. In power reactors, ex-core and in-core detectors can be used to monitor neutron noise with the aim of detecting possible anomalies and taking the necessary measures for continuous safe power production.

The objective of this thesis is to develop techniques for neutron noise analysis and especially to implement a neutron noise solver

in the deterministic transport code APOLLO3® developed at CEA. A new Monte Carlo algorithm that solves the transport equations for the neutron noise has been also developed.

In addition, a new vibration model has been developed. Moreover, a method based on the determination of a new steady state has been proposed for the linear and the non-linear full theory so as to improve the traditional neutron noise theory. In order to test these new developments we have performed neutron noise simulations in one-dimensional systems and in a large pressurized water reactor with heavy baffle in two and three dimensions with APOLLO3® in diffusion and transport theories.

