



**HAL**  
open science

# Approche probabiliste d'aide au diagnostic des voûtes en maçonnerie

Abdelmounaim Zanaz

► **To cite this version:**

Abdelmounaim Zanaz. Approche probabiliste d'aide au diagnostic des voûtes en maçonnerie. Génie civil. Université de Limoges, 2016. Français. NNT : 2016LIMO0052 . tel-01382448

**HAL Id: tel-01382448**

**<https://theses.hal.science/tel-01382448v1>**

Submitted on 17 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITE DE LIMOGES

ECOLE DOCTORALE SCIENCES TECHNOLOGIE ET SANTE

Equipe de recherche ou Laboratoire GEMH-EA 3178

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Discipline / Spécialité : Génie civil

Présentée et soutenue par

Abdelmounaim ZANAZ

le 20-09-2016

**Approche probabiliste d'aide au diagnostic  
des voûtes en maçonnerie**

Thèse dirigée par : **Sylvie YOTTE**

Codirigée par : **Fazia FOUCHAL**

JURY :

Rapporteurs

M. Frédéric DUPRAT, professeur, INSA de Toulouse

M. Franck SCHOEFS, professeur, GeM, Université de Nantes

Examineurs

M. Alaa CHATEAUNEUF, Professeur, Institut Pascal, Université de Clermont Ferrand

M. Frédéric DUBOIS, Dr. ingénieur de recherche, LMGC, Université de Montpellier

M. Jean François SEIGNOL, Ingénieur de recherche, IFSTTAR

Mme. Fazia FOUCHAL, Maître de Conférences, GEMH, Université de Limoges

Mme. Sylvie YOTTE, Professeur, GEMH, Université de Limoges



*Je tiens à dédier ce mémoire à mes très chers parents qui m'ont toujours soutenu, à mes frères et sœurs, ainsi qu'à ma très chère épouse Nora et mes adorables enfants, Manel, Walid & la petite Lina.*

*Avec amour et gratitude...*

# Remerciements

Je souhaite remercier dans un premier temps, le Ministère de la défense Algérienne et en particulier, Monsieur Le général de corps d'Armée, vice-ministre de la Défense nationale, chef d'état-major de l'Armée nationale populaire pour *m' avoir donné la chance de poursuivre de telle formation et pour son intérêt particulier qu'il accorde à la formation continue*, Monsieur le Directeur Central des infrastructures militaires, Monsieur le Directeur du centre des Etudes Techniques, ainsi que Monsieur le Directeur des ressources humaines pour leurs encouragements permanents.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à Mme Sylvie Yotte, Mme Fazia Fouchale et Mr Alaa Chateaufeuf pour leur accueil et leur *confiance, ainsi qu'à toute l'équipe pédagogique du laboratoire GEMH d'Egletons et à sa tête Mr Christoph Petit*.

Je remercie Mr Frédéric Duprat et Mr Franck Shoefs qui ont accepté de rapporter ce *travail, qu'ils trouvent ici toute ma gratitude et mes remerciements. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers Mr Frédéric Dubois et Mr Jean François Seignol qui ont accepté d'être examinateurs de ce mémoire*.

Je remercie tous les professeurs : Mr Frédéric Dubois ; Mme Anne Millen ; Mr Takarli Mokhfi ; Mme Fatima Allou ; Mr Octavian Pop ; Mr Claude Chazal et Mr *Laurent Ulmet, toute l'équipe de l'atelier de recherche* : Mr Hamidou Sebbah ; Mr Jérôme Dopeux et Mr Mickaël Metrope, tous les doctorants : Amine ; Ebrahim ; Lamyaa ; Rahma ; Rémy ; Maximin ; Frédéric et Marion, ainsi que toute l'équipe administrative : Mme Marion Guichon ; Mme Séverine Dumas ; Mme Ema Pop et Mme Claire Lyse Toupy.

Je remercie mes très chers parents, pour leur soutien et leurs prières, mes frères et *sœurs et particulièrement Abdelhakim qui n'a jamais cessé d'aider tout le monde*.

Mes remerciements vont bien sûr à ma petite famille, ma chère femme Nora pour son soutien et surtout pour sa patience, et mes enfants : Manel ; Walid et Lina pour le bonheur *qu'ils m'apportent*.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée pour mes proches : Mohamed ; Abderrazak ; Abdelfattah ; Omar Halouane ; Moussa et Madjid Kidouche ; Brahim Ben Douhou ; Khaled Abdiche ; Mohamed Slimani; Abdelali Bouflih ; Azzeddine, *Samir, Mourad, Nadir et Karim Chaouch. Merci de m'avoir encouragé.*

## Droits d'auteurs



Cette création est mise à disposition selon le Contrat : « **Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Pas de modification 3.0 France** » disponible en ligne :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/fr/>

# Sommaire

Introduction .....	9
I. Etude bibliographique .....	14
1- Matériaux utilisés en maçonnerie .....	14
1-1. Matériaux solides.....	14
1-1.1. Variabilité des pierres naturelles.....	14
1-1.1.1. A l'échelle de la classe géologique de la roche.....	15
1-1.1.2. A l'échelle du type de roche.....	17
1-1.1.3. A l'échelle du site (carrière) d'extraction.....	19
1-1.2. Briques en terre cuite .....	21
1-2. Mortiers .....	23
2- Comportement de la maçonnerie .....	29
3- Principales altérations de la pierre .....	31
3-1. Désordres structuraux .....	32
3-1.1. Fissures et déformations .....	32
3-1.2. Détachement.....	33
3-2. Désordres des matériaux.....	33
3-2.1. Figures induites par une perte de matière .....	33
3-2.2. Processus chimique de dissolution de la calcite en présence de l'eau .....	34
3-2.3. Processus d'altération des roches magmatiques .....	35
3-2.4. Altération chromatique et dépôt.....	36
3-2.5. Colonisation biologique .....	36
4- Méthodes d'auscultations des ouvrages.....	37
4-1. Méthodes destructives (CD) .....	37
4-2. Méthodes de contrôle non destructif (CND) .....	38
4-3. Instrumentation de l'ouvrage .....	38
4-4. Quelle technique adopter pour quel défaut ? .....	39
5- Etat de l'art des méthodes de calcul des voûtes maçonnées.....	40
5-1. Méthodes dites empiriques .....	41
5-2. Méthode MEXE (Military Engineering eXperimental Establishment).....	42
5-3. Méthode REAM (Railway Empirical Assessment Method) .....	42
5-4. Méthode d'analyse limite .....	44
5-5. Méthode de calcul à la rupture.....	46
5-6. Méthode des éléments finis (MEF) .....	47
5-6.1. Micro-modélisation-détaillée.....	49
5-6.2. Micro-modélisation-simplifiée.....	49
5-7. Méthode des éléments distincts (MED).....	53
5-8. Couplage mécano-fiabiliste .....	55
5-8.1. Méthodes FORM/SORM .....	57
5-8.2. Simulations de Monte Carlo .....	60
6- Conclusion .....	61
II. Problème d'inspection et étude du cas.....	65
1- Introduction .....	65
2- Modèle de calcul.....	67
2-1. Application du modèle et validation.....	70
3- Perte d'épaisseur causée par des infiltrations d'eau .....	72
3-1. Modélisation du défaut .....	73
3-2. Analyse de la voûte.....	76

3-2.1.	Influence de la profondeur du défaut .....	77
3-2.2.	Influence de la position du défaut .....	79
4-	Conclusion .....	86
III.	Variabilité naturelle du module d'Young.....	89
1-	Principe de l'analyse.....	90
2-	Influence de la variabilité du module d'Young sur la capacité portante .....	92
2-1.	Modélisation de la variabilité de la charge critique .....	97
2-2.	Analyse des résultats .....	99
3-	Influence de la variabilité du module d'Young sur le mécanisme de ruine .....	100
3-1.	Mécanisme de ruine avec $CV = 5\%$ .....	100
3-2.	Mécanisme de ruine avec $CV = 10\%$ .....	102
3-3.	Mécanisme de ruine avec $CV = 20\%$ .....	103
4-	Synthèse des résultats .....	105
5-	Conclusion .....	106
IV.	Fiabilité d'une voûte.....	109
1	Introduction .....	109
2	Principe de l'analyse fiabiliste .....	111
3-	Influence de la variabilité du module d'Young sur la fiabilité d'une voûte .....	114
4-	Fiabilité de la voûte dans le temps.....	118
4-1.	Loi de vieillissement.....	119
4-2.	Simulation de l'inspection .....	120
4-2.1.	Prise en compte de l'historique du trafic .....	128
4-2.2.	Actualisation de la probabilité de défaillance .....	132
4-2.3.	Introduction d'une augmentation du trafic.....	136
5-	Conclusion .....	138
	Conclusion générale et perspectives.....	140
	Bibliographie .....	143
	Annexes .....	149
I-	Annexe A– ArcProg_Z software .....	149
II-	Annexe B– Classification des pierres de construction et terminologie .....	156
III-	Annexe C– Notion d'indice de fiabilité (Lemaire 2014) .....	167
IV-	Annexe D– Caractéristiques des ouvrages ayant servi de comparaison .....	173
V-	Annexe E– Etapes de calcul.....	176

# Introduction

Le problème que l'on choisit d'aborder dans ce travail est la maintenance d'un pont maçonné. La structure porteuse dans ce cas est une voûte. Les structures en voûte sont présentes dans la plupart des anciens ouvrages maçonnés : tunnels, ponts, palais, cathédrales ou autres. Arches et voûtes sont avec les murs les structures porteuses utilisées en maçonnerie. Leur bon état est alors la clef du bon fonctionnement d'un ouvrage. Les ouvrages maçonnés constituent à présent une proportion importante du patrimoine culturel. Toutefois, la plupart de ces ouvrages sont centenaires et le processus de dégradation s'est déjà enclenché depuis des décennies. Aujourd'hui, leur maintenance et réparation présentent des problèmes importants à leurs gestionnaires. Parfois des réparations ont été entreprises sans pour autant assurer la durabilité souhaitée. La fréquence des interventions se trouve augmentée et les coûts induits deviennent rapidement insupportables. Une situation qui a poussé certains gestionnaires à abandonner complètement leurs ouvrages, malgré leur valeur et leur importance patrimoniales. En effet, l'une des causes majeures d'abandon d'ouvrage est le coût excessif des inspections et des réparations. La question qui se pose dans de telles circonstances est de savoir comment mettre au point une stratégie à la fois efficace et surtout économique de maintenance de ces ouvrages, capable de prolonger leurs durées de vie ?

La maintenance d'un ouvrage repose sur une démarche comportant plusieurs étapes. Une inspection de premier niveau d'ordinaire visuelle permet de déterminer s'il faut poursuivre ou non les investigations et propose une démarche pour cette poursuite en précisant ce que l'on cherche, sur quelles parties de l'ouvrage on recherche et avec quels moyens. Si l'inspection de premier niveau donne un résultat défavorable l'étape suivante est donc une inspection de second niveau. Elle est souvent suivie d'un recalcul d'ouvrage qui permet d'apprécier la capacité de l'ouvrage à assurer la fonction prévue sur la durée souhaitée.

Ces différentes étapes ont fait l'objet de travaux importants dans le cas d'ouvrages en béton (projet MEDACHS, DURATINET, ANR EvaDéOS, ANR C2D2, ..). La maçonnerie a été peu étudiée, et ce qui existe, sur le plan scientifique, consiste surtout en des modèles de calcul développé pour des monuments à forte valeur patrimoniale (cathédrales, châteaux, ponts anciens et célèbres). Pour la gestion d'ouvrages courants ou bien de faible réputation (petit pont dans un petit village perdu en Corrèze par exemple) ou bien pour la gestion d'un

ensemble de ponts d'un département, il n'existe pas d'études. Dans ce qui suit, on se restreint au cas particulier d'un pont, et on se fixe pour objectif d'explorer des possibilités de recherches offertes par un tel sujet. Il s'agit de tester des approches, d'ouvrir des perspectives pour de futurs travaux et ainsi de clarifier les besoins en recherche.

Au cours des dernières années, des méthodes basées sur la fiabilité des structures ont été développées. Ces méthodes prennent en compte les incertitudes des variables impliquées dans la réponse mécanique de l'ouvrage. La plupart des expériences réalisées ont montré les économies budgétaires réalisées par une évaluation précise et efficace basée sur une approche probabiliste (Casas 2011). Dans cette optique, le travail de recherche proposé dans ce mémoire de thèse simule le diagnostic d'une voûte de pont en maçonnerie. Une approche probabiliste est couplée avec la méthode des éléments finis et implémentée dans un outil numérique développé dans le cadre de cette thèse, baptisé **ArcProg\_Z**, afin d'initier une telle démarche pour l'évaluation du comportement d'une voûte en maçonnerie.

Un état de l'art est réalisé dans le premier chapitre, qui va nous permettre de définir nos choix de méthodes de calcul et les paramètres et lois à prendre en compte dans la suite de la thèse.

Les données de l'inspection sont d'une importance capitale dans le processus de prise de décision des gestionnaires d'ouvrages. Il est donc impératif de connaître leur précision et d'en tenir compte dans l'évaluation de l'ouvrage réalisée par la suite. Cela dépend généralement de trois facteurs : la qualification et l'expérience de l'opérateur, les performances des moyens techniques mis à sa disposition et le nombre des mesures effectuées. Ce dernier facteur, en particulier, implique souvent les dépenses les plus importantes. L'optimisation du nombre des mesures peut donc réduire considérablement le coût de l'inspection. Par ailleurs, plus les désordres sont détectés et identifiés tôt, plus le gestionnaire aura de choix sur l'action à mener et surtout du temps pour l'engager. Des avantages qui permettent d'optimiser les répartitions des échéances ultérieures et réduire le coût global des inspections sur la durée de vie de l'ouvrage. Cette optimisation illustre le besoin d'un outil numérique d'aide à la décision, à la fois efficace et simple d'utilisation, qui permettrait d'acquiescer suffisamment d'information sur l'état de l'ouvrage avec le minimum de mesure et prédire son comportement le long de sa durée de vie. Le cas d'inspection traité dans cette thèse au chapitre II vise l'une des pathologies qui affectent de façon prépondérante les voûtes en pierres calcaires et qui est liée à la perte d'épaisseur localisée causée par les

infiltrations des eaux. Les caractéristiques géométriques du défaut (position, profondeur et étendue) ne sont a priori pas connues et les méthodes CND disponibles n'ont pas donné d'informations utiles sur le défaut. La méthodologie proposée considère la possibilité d'effectuer une seule et unique mesure (carottage), ce qui constitue l'une des situations d'inspection les plus défavorables. Elle présente également une démarche d'évaluation probabiliste de l'influence de la profondeur ainsi que la position d'un défaut sur la capacité portante de la voûte.

Le chapitre III s'intéresse à l'influence de la variabilité du module d'Young sur la capacité portante et sur le mécanisme de rupture. En effet la bibliographie montre d'une part une très grande variabilité des caractéristiques mécaniques et physiques de la pierre (module de Young variant dans un ratio de 1 à 2 pour des pierres extraites du même massif par exemple (Binda et al. 2003), d'autre part une absence de prise en compte de cette variabilité dans la plupart des travaux conduisant au recalcul d'ouvrages. En considérant le module comme variable aléatoire, l'importance de la prise en compte de la variabilité du module dans les calculs est mise en évidence, que ce soit pour évaluer la capacité portante de la voûte ou pour prédire son mécanisme de ruine.

Le chapitre IV de cette thèse consiste à utiliser les résultats du chapitre III pour mener une étude de fiabilité d'une voûte en maçonnerie. La première partie de ce chapitre évalue l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance « instantanés » de la voûte en fonction du coefficient de variation du module d'Young des différents segments. La seconde partie intègre le facteur temps dans les calculs pour prédire l'évolution de la probabilité de défaillance de la voûte dans le temps. Une nouvelle loi de vieillissement a également été proposée et adoptée pour alimenter le modèle de prédiction. La méthodologie proposée dans ce chapitre est appliquée pour simuler cinq situations probables dans lesquelles un ouvrage pourrait se trouver. La première et la deuxième simulation consistent à déterminer la variation de la probabilité de défaillance le long de la durée de vie (de référence) de l'ouvrage avec ou sans la prise en compte de l'historique du trafic. La troisième simulation tient compte de nouvelles mesures devenues disponibles suite à une inspection à l'instant  $t$  de la durée de vie de l'ouvrage en utilisant l'actualisation bayésienne implémentée dans l'outil numérique développé, pour améliorer le modèle initial et réduire l'incertitude sur la prévision du comportement à long terme de l'ouvrage. Les deux derniers cas simulent une augmentation du trafic provisoire et permanente respectivement. L'actualisation de la probabilité de défaillance

permet d'estimer, en fonction de la durée d'application de l'augmentation du trafic, la marge du temps dont disposerait le gestionnaire de l'ouvrage pour prendre les dispositions nécessaires à la baisse de cette probabilité de défaillance. Cette méthodologie permet en outre, d'évaluer la durée maximale d'application de cette augmentation du trafic et l'impact d'un éventuel retard qui pourrait être accusé que ce soit par rapport à la date de début de l'application de cette augmentation ou à sa durée d'application.

Ces 3 cas d'étude, inspection, calcul de capacité portante en situation d'incertitude et analyse fiabiliste, permettent d'établir les besoins et recherche dans le domaine du diagnostic des ouvrages maçonnés. Ces besoins sont propres à la maçonnerie et sont liés à la fois aux matériaux utilisés et à la structure même des ouvrages.

# **Chapitre : I**

## **Etude bibliographique**

# **I. Etude bibliographique**

Cette étude bibliographique s'articule autour de quatre grands points, le premier présente les matériaux utilisés dans la construction des ouvrages maçonnés. Le second recense les principales altérations mises en évidence jusqu'à présent. Le troisième point présente les différentes méthodes de contrôle employées pour la détermination des caractéristiques géométriques et/ou mécaniques des éléments de structures maçonnées. Le dernier point de cette étude bibliographique donne un aperçu sur l'état de l'art des méthodes de calcul des voûtes en maçonnerie.

Par souci de clarté, la classification de roches et la nomenclature des pierres de construction ainsi que la terminologie employée dans le domaine de la construction des ouvrages en maçonnerie sont présentées en annexe B.

## **1- Matériaux utilisés en maçonnerie**

Les principaux matériaux que l'on peut apercevoir lors d'une inspection d'un ouvrage maçonné appartiennent à deux grandes catégories : les matériaux solides (pierres ou briques) et les matériaux agglutinants (mortiers). La maçonnerie est donc un matériau composite, mélange d'éléments solides et de joints de mortier.

### **1-1. Matériaux solides**

On distingue les solides d'origine naturelle qui proviennent du classement géologique défini précédemment, et qui permettent de façonner les matériaux pierreux de construction, pierres de taille, moellons ...etc., et les blocs d'origine artificielle, essentiellement de la terre cuite, qui sont principalement les briques pleines ou perforées. A présent, il en existe d'autres produits moulés à base de matériaux divers (béton ou béton cellulaire par exemple) dérivés, pour leurs formes et leurs dimensions, de matériaux en terre cuite.

#### **1-1.1. Variabilité des pierres naturelles**

Les pierres naturelles sont hétérogènes et anisotropes, en particulier celles d'origine sédimentaire dont la texture présente des strates. Il est donc nécessaire de connaître la direction préférentielle pour une résistance optimale pour chaque type de contraintes. Dans la

suite de cette partie bibliographique, nous ne nous intéressons qu'aux types de pierre les plus utilisées dans la construction des ouvrages en maçonnerie, à savoir :

- **la craie** (d'origine sédimentaire), très présente dans les ouvrages et monuments des villes du nord de la France, tel que la cathédrale de Beauvais avec la plus haute voûte en pierre du monde ;
- **le calcaire** (roche sédimentaire), présent dans de nombreuses régions de France : Le limousin, Poitou-Charentes, Ile de France, Picardie, Centre, Provence, Aquitaine et Bourgogne ;
- **le grès** (roche sédimentaire), très utilisé dans le bâtiment (appui et encadrement de fenêtre, linteau, ...etc.) et les façades des monuments telle que la cathédrale de Strasbourg ;
- **le schiste** (roche métamorphique), utilisé principalement dans les soutènements ;
- **le quartzite** (roche métamorphique), connu pour son excellente résistance à l'abrasion, il est utilisé principalement en revêtement et pavage ;
- **le granite** (roche métamorphique), connu pour son excellente résistance à l'abrasion, il est utilisé principalement en revêtement et pavage.

En termes de caractéristiques mécaniques, les valeurs trouvées dans la littérature présentent une large variabilité. Cette variabilité « naturelle » des caractéristiques mécaniques des roches dépend fortement de l'histoire de leur processus géologique de formation dans leur environnement. Les valeurs présentées dans la littérature ancienne ont toujours suscité la méfiance dans le milieu des chercheurs. En effet, la caractérisation expérimentale des pierres de construction a fait l'objet d'un grand nombre d'études. Notre analyse des données collectées est effectuée à trois échelles d'observation : à l'échelle de la classe géologique (magmatique, sédimentaire et métamorphique), à l'échelle du type de roche (calcaire, grès, craie, granite, quartzite, schistes, ...etc.) et à l'échelle de la carrière (du site d'extraction ou de prélèvement).

#### **1-1.1.1. A l'échelle de la classe géologique de la roche**

La classification géologique des roches a souvent été prise en considération dans le cadre des essais de caractérisation mécanique, mais à cette échelle, un grand nombre d'essais est requis pour assurer la représentativité des résultats. Dans la littérature, seulement deux références ont été trouvées où le nombre de sites de localisation des roches ainsi que le

nombre d'échantillons prélevés par site sont représentatifs, en l'occurrence les travaux de D'Andrea (D'Andrea, Fisher, and D. E. Fogelson 1965). Les auteurs ont publié dans un rapport technique les résultats de leur campagne expérimentale menée sur des roches provenant de 49 sites différents, dont 12 roches magmatiques, 15 métamorphiques et 22 sédimentaires. Ces résultats ont révélé des dispersions importantes des mesures de la résistance, à la compression et à la traction. Le coefficient de variation (CV) de l'ensemble des mesures est compris entre 4,7% et 47,8% pour la résistance à la compression, et entre 6,6% et 54,9% pour la résistance à la traction selon le site (sur les 49 sites de prélèvement). La plus forte dispersion est observée sur les roches sédimentaires avec un CV qui varie de 9% à plus de 54%. Les dispersions des deux autres types de roches sont assez proches comparées au premier, avec une légère supériorité pour les roches métamorphiques. Plus récemment, (Kahraman and Gunaydin 2009) ont effectué une campagne expérimentale sur 17 roches magmatiques, 16 métamorphiques et 19 roches sédimentaires. Le coefficient de variation varie de 1,8% à 15,8% et de 2,3% à 32,5% pour la résistance à la compression et à la traction, respectivement. Les dispersions observées sur les trois types de roches sont très proches les unes des autres, mais celles des roches sédimentaires restent tout de même les plus fortes. Les résultats obtenus par ces auteurs sont récapitulés selon la classe des roches dans le tableau 1. Concernant le protocole suivi pour les essais effectués, les auteurs n'ont donné aucune précision.

Tableau 1: Caractéristiques mécaniques des roches selon leur classe géologique.

Auteurs	Classe géologique des roches		Module d'Young [GPa]	Résistance à la compression $f_{cp}$ [MPa]		Résistance à la traction $f_{tp}$ [MPa]	
			Moy	Moy	CV [%]	Moy	CV [%]
(D'Andrea, Fisher, and D. E. Fogelson 1965)	Magmatiques	Min	40,08	97,97	6,0	6,94	6,6
		Max	111,51	297,75	47,8	16,10	28,7
	Métamorphiques	Min	30,94	87,11	7,5	6,00	8,6
		Max	122,76	317,60	43,2	17,79	36,5
	Sédimentaires	Min	2,67	10,83	4,7	0,28	9,1
		Max	93,93	182,96	43,3	9,90	54,9
(Kahraman and Gunaydin 2009)	Magmatiques	Min		50,20	3,1	3,00	3,6
		Max		202,90	11,9	14,40	31,0
	Métamorphiques	Min		24,10	1,8	2,20	4,1
		Max		210,60	15,8	13,30	30,0
	Sédimentaires	Min		39,40	3,2	3,0	2,3
		Max		175,00	13,9	7,10	32,5

### **1-1.1.2. A l'échelle du type de roche**

Cette échelle de caractérisation des roches a intéressé un grand nombre de chercheurs, dont la plupart se sont concentrés uniquement sur les valeurs moyennes de leurs mesures. L'analyse des valeurs collectées de la littérature, relatives aux principaux types de roche auxquels nous nous sommes intéressés, a permis de définir des gammes de variation des caractéristiques mécaniques de base (résistance à la compression, résistance à la traction et module d'Young). Les résultats de cette analyse sont résumés, selon les auteurs, dans le tableau 2.

Dans les années cinquante, (Blair 1956) a effectué une longue série d'essais sur 325 types de roche prélevés de 68 sites différents pour déterminer leurs caractéristiques physiques et mécaniques. Les essais ont été effectués en trois étapes. La première a été publiée en 1950, la seconde en 1951, et la troisième en 1956. Les principaux types de roches étudiés (par rapport au nombre de sites) étaient : les calcaires, grès, schistes, quartzite et roches granitiques. Malheureusement, l'auteur ne s'est intéressé qu'aux valeurs moyennes des mesures selon le site, les dispersions n'ont en revanche pas été étudiées.

Dans les années soixante dix, la SNCF, dans un rapport technique du département de l'équipement (IN 1250 1975), donne quelques valeurs de résistance à l'écrasement de certains types de pierre utilisés dans la construction des tunnels anciens en maçonnerie ; les valeurs qui sont nettement inférieures à celles données par Blair. En 1997, (Fabre and Gustkiewicz 1997) ont publié une note technique sur les propriétés poroélastiques des calcaires et des grès, provenant de France et de Pologne. Dans cette note, les auteurs présentent les résultats des essais effectués sur ces deux types de roches d'origines sédimentaires (calcaire et grès). Les sites de prélèvement ont été choisis pour couvrir une large gamme de porosité (3 à 47%). Les mesures effectuées sur les calcaires rentrent dans l'intervalle des valeurs proposées par Blair, alors que celles effectuées sur les grès sont supérieures, ce qui élargit encore plus l'intervalle de variation de la résistance de ce type de roches. En 2007, l'Union Internationale des Chemins de fer a proposé, dans un rapport technique (UIC 2007), des gammes de valeurs du module d'Young et de résistance à la compression de certains types de pierre à prendre comme référence dans le cadre de l'inspection, de l'évaluation et de la maintenance des ponts en maçonnerie. Un autre type de roche, le granite, se trouve avec des intervalles de variation de sa résistance et de son module plus étendus, et peuvent atteindre 300 MPa et 100 GPa respectivement.

Tableau 2: Caractéristiques mécaniques des roches

Auteurs	Type de roche	Résistance à la compression simple $f_{cp}$ [MPa]		Résistance à la traction simple $f_{tp}$ [MPa]		Module d'élasticité E [ $\times 10^3$ MPa]	
		Min	Max	Min	Max	Min	Max
(SETRA 1982b) Extrait de J. Mandel 1978	Craie	2	12	0,1	1,5	2	10
	Calcaire ordinaire	7	40	0,5	5	5	30
	Calcaire compact	40	100	5	15	30	60
	Grès	7	60	0,5	5	7	50
	Schiste	15	70	0	10	7	60
	Quartzite	80	300	7	20	25	80
	Granite	60	180	6	15	15	70
(Blair 1956)	Calcaire	70	198	3	9	15	70
	Grès	34	162	1	4	7	28
	Schiste	77	201	8	9	11	56
	Quartzite	299	641			78	99
	Granite	162	213	3	6	20	43
(D'Andrea, Fisher, and D. E. Fogelson 1965)	Craie	15	20	0,5	1	3	7
	Calcaire	54	143	5	9	18	63
	Grès	11	42	0	1	2	7
	Schiste	145	169	8	9	71	78
	Quartzite	219	318	11	18	47	64
	Granite	135	221	8	14	44	77
(IN 1250 1975)	Calcaire	10	11				
	Grès	20	80				
	Granite	61					
(Fabre and Gustkiewicz 1997)	Calcaire	30	120				
	Grès	41	186				
(UIC 2007)	Calcaire	20	90			7	25
	Grès	18	180			6	50
	Schiste	60	170			15	50
	Quartzite	150	440			40	130
	Granite	27	300			10	100
(Kılıç and Teymen 2008)	Calcaire	112	163			15,9	19,7
	Grès	111	160			13,2	20,7
	Quartzite	210				23,9	
(Como 2013)	Calcaire tendre	20	90			30	60
	Calcaire compact	80	190			40	70
	Quartzite	150	300			50	70
	Granite	160	240			50	60

L'année suivante, (Kılıç and Teymen 2008) publient les résultats d'une campagne expérimentale effectuée sur 19 types de pierre en utilisant des méthodes de mesure non destructives et des mesures indirectes pour en estimer les caractéristiques mécaniques. Enfin,

en 2013, (Como 2013) dans son livre « Masonry Strength and Deformability » a présenté des gammes de valeurs de densité, de module et de résistance à la compression de quelques roches volcaniques, métamorphiques et sédimentaires. Les gammes de variation des mesures de résistance et du module, obtenues dans les deux dernières références, ne change en rien les étendues de mesures précédentes.

La superposition des données fournies par ces différents auteurs donne les gammes de variations présentées dans le tableau 3.

Tableau 3: Caractéristiques mécaniques des roches.

Type de roche	Résistance à la compression simple $f_{cp}$ [MPa]		Résistance à la traction simple $f_{tp}$ [MPa]		Module d'élasticité E [ $\times 10^3$ MPa]	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max
Craie	2	20	0,1	1,5	2	10
Calcaire	7	198	0,5	15	5	70
Grès	7	186	0	5	2	50
Schiste	15	201	0	10	7	78
Quartzite	80	641	7	20	24	130
Granite	27	300	3	15	10	100

### 1-1.1.3. A l'échelle du site (carrière) d'extraction

Les gammes de valeurs représentées dans le tableau précédent mettent bien en évidence l'existence d'une grande variabilité des caractéristiques mécaniques dans le même type de roches. Cette variabilité n'est pas liée uniquement au fait que les éprouvettes testées provenaient de différentes carrières, même les échantillons extraits de la même carrière sont concernés par cette variabilité. En effet, les essais effectués par certains auteurs l'ont clairement révélé. Le tableau 4 récapitule les résultats (disponibles dans la littérature) des campagnes expérimentales menées par différents auteurs et précise le nombre de sites de prélèvement des échantillons analysés ainsi que le nombre d'éprouvettes testées par site, soit un total de 70 sites et près de 440 éprouvettes prélevées. Comme nous pouvons le constater, il y a un large intervalle de variation des mesures. La plus forte dispersion de mesures de résistance, à la compression comme à la traction, est observée sur les pierres d'origines sédimentaires (calcaires, grès, craie) avec un coefficient de variation qui varie, selon le site de prélèvement, de 0,4% à 40% et de 4% à 34% en compression et en traction respectivement.

On peut observer par ailleurs, que les autres types de pierres présentent des dispersions assez similaires, qu'elles soient d'origines magmatiques ou métamorphiques.

Tableau 4: Résultats des essais effectués par les auteurs.

Auteurs	Type de roche		Résistance à la compression simple $f_{cp}$ [MPa]				Résistance à la traction simple $f_{tp}$ [MPa]			
			Moy	CV [%]	$N_{site}$	$N_{es/sit}$	Moy	CV [%]	$N_{site}$	$N_{es/sit}$
(D'Andrea, Fisher, and D. E. Fogelson 1965)	Craie	Min	15,25	4,7	5	11	0,93	14,4	5	17
		Max	19,44	13,8			0,53	18,7		
	Calcaire	Min	35,93	9,4	12	11	2,26	9,6	12	17
		Max	182,96	40,3			9,90	34,2		
	Grès	Min	10,83	6,0	5	11	0,28	9,1	5	17
		Max	41,66	20,2			1,16	23,3		
	Schiste	Min	145,01	17,6	2	11	8,95	14,5	2	17
Max		168,81	20,7	9,35			19,2			
Quartzite	Min	219,13	17,7	2	11	10,67	9,6	2	17	
	Max	317,60	18,9			17,79	20,6			
Granite gneiss	Min	138,58	7,5	2	11	6,00	8,6	2	17	
	Max	212,56	15,7			14,44	14,3			
Granite	Min	136,40	4,5	4	11	9,20	10,7	4	17	
	Max	220,87	23,3			12,66	20,1			
(Bieniawski 1975)	Grès	Min	55,10	5,5	3	28	2,33	8,8	3	68
		Max	56,10	6,4			2,83	9,8		
Quartzite	Min	180,3	8,7	3	26	8,30	16,2	3	41	
	Max	187,8	15,3			10,37	22,4			
(Kahraman 2001)	Calcaire	Min	16	0,4	11	10	1,4	8,9	11	10
		Max	124	10,8			9,8	31,6		
Grès	Min	20	1,0	4	10	4,57	5,2	4	10	
	Max	149	5,1			13,57	21,4			
(Kahraman and Gunaydin 2009)	Calcaire	Min	79	3,5	7	6	4,9	4,7	7	6
		Max	175	12,7			7,1	13,8		
	Granite	Min	84	3,1	8	7	4,4	3,6	8	7
Max		133	8,0	14,4			15,8			
Schiste	Min	70	8,5	2	7	4,1	21,9	2	7	
	Max	111	9,3			8,7	25,9			
Moy : Valeur moyenne ; CV : Coefficient de variation ; $N_{site}$ : Nombre de sites de prélèvement ; $N_{es/sit}$ : Nombre d'essai par sites de prélèvement.										

### 1-1.2. Briques en terre cuite

Les briques, couramment utilisées dans la construction des anciens ouvrages voûtés, sont des blocs d'argile (silicates d'alumine hydratés) durcies artificiellement (cuites). Elles sont employées dans la construction depuis les Grecs et les Romains. Pour faciliter la dessiccation et limiter le retrait au feu, on mélangeait l'argile avec une notable proportion de sable ou de terre argilo-sableuse, quelques fois avec des mâchefers (Denfer 1891). La qualité est très variable, due aux conditions de production de l'époque. En effet, les différentes étapes de production étaient essentiellement manuelles. Le moulage se faisait avec des gabarits en bois sablés pour éviter l'adhérence de l'argile. La cuisson se faisait dans des fours artisanaux. Les flammes se situaient sous le plancher du four à travers lequel la chaleur montait vers les briques disposées au-dessus. Ces fours ne pouvaient pas assurer une répartition uniforme de la température intérieure, ce qui se répercute inévitablement sur la qualité du produit fini. Les caractéristiques physico-chimiques des briques diffèrent d'une brique à l'autre. Elles dépendent de leur place dans le four ; celles qui étaient juste au dessus du feu étaient presque vitrifiées (généralement de couleur noire), d'autres (de couleur jaune) ne sont pas assez cuites, leurs positions étaient trop éloignées de la source de chaleur.

Une étude a été effectuée sur cinq sites géographiques et historiques différents datant du I<sup>er</sup> siècle, XII<sup>ème</sup>, XVII<sup>ème</sup> et XVIII<sup>ème</sup> siècle qui font partie du grand patrimoine historique de la ville de Toulouse dans le Sud-ouest de la France (Gargiulio Riccio M. et al. 2001). Cette étude a permis de faire le lien entre la couleur de la brique et sa résistance à l'altération. En effet, des briques de couleurs très variées allant du jaune au noir ont été observées sur les différents monuments. Leur caractérisation minéralogique, effectuée par diffractométrie aux rayons-X, a permis de justifier ces différences chromatiques :

La composition minéralogique change en fonction des conditions thermiques auxquelles les briques ont été soumises lors de la phase *de cuisson*, d'où un comportement différent vis-à-vis du processus d'altération.

Cette même étude a permis également de reconstituer la série chromatique complète (jaune, orange, rouge, rouge foncé et noir) en supposant que le mélange initial d'argile était le même pour l'ensemble des échantillons de briques du même site. Les résultats des analyses diffractométriques ont montré que les briques de couleur jaune (température de cuisson inférieure à 750° C) renfermaient toujours de l'argile témoin d'une cuisson insuffisante. Les

briques orange (température de cuisson estimée à environ 850° C) présentent des résidus de calcite. Les briques rouge à noir (températures de l'ordre de 900 à 1100° C) ne présentent plus de minéraux argileux, d'où leur résistance à l'altération. Par ailleurs, des mesures de porosité des briques de différentes couleurs ont été effectuées par deux méthodes : la porosimétrie à l'eau et au mercure. Les résultats varient entre 16% et 36%. Les briques de plus hautes températures (rouge foncé à noir) sont moins poreuses que celles de plus basses températures (jaune). Ces dernières sont de ce fait plus sensibles à l'altération. Actuellement, trois minéraux essentiels sont utilisés dans la fabrication industrielle de la brique en terre cuite : l'argile, pour assurer la plasticité, le fondant comme le feldspath, pour abaisser le point de fusion, et enfin, le filler ou le dégraissant comme le quartzite pour rapporter de la résistance et diminuer le retrait lors du séchage.

La qualité de la brique est généralement classée selon les auteurs en 4 catégories (Tableau 5). Les gammes de résistances à la compression et du module d'élasticité de la brique en terre cuite sont généralement moins étendues que celles des pierres naturelles. Cependant, l'ensemble des expériences menées sur la brique a souvent montré une dispersion assez large des caractéristiques mécaniques.

Tableau 5: Classification de la brique en terre cuite.

Auteurs	Brique de qualité	Résistance à la compression simple $f_{cp}$ [MPa]		Module d'élasticité E [ $\times 10^3$ MPa]	
		Min	Max	Min	Max
(Denfer 1891))	Moyenne	9	20		
(SETRA 1982a)b)	Inférieure	6	10	5	25
	Moyenne	10	20		
	Très bonne	20	30		
	Exceptionnelle	35	70		
(UIC 2007)	Tendre	4	8	1	5
	Moyenne	8	15	5	10
	Dure	15	30	10	15
	Clinker	30	50	15	20

Le tableau 6 récapitule les moyennes et les coefficients de variation des valeurs (par rapport au nombre d'éprouvettes testées) des principales caractéristiques mécaniques trouvées dans la littérature selon les auteurs.

Tableau 6: Caractéristiques mécaniques de la brique selon les auteurs.

Auteurs	Nombre d'éprouvettes		Résistance à la compression $f_{cp}$		Module d'élasticité E [ $\times 10^3$ MPa]	
			Moy [MPa]	CV [%]	Moy [MPa]	CV [%]
(Binda, Fontana, and Frigerio 1988)	30		26,9		4,865	
(Kaushik, Rai, and Jain 2007)	40	Min	16,10	8,0	5,030	10,0
		Max	28,90	33,0	7,516	34,0
(Karaman, Gunal, and Ersahin 2006)	150		18,63	31		
(Domède et al. 2008)	6		22,75	14,8	16,673	10,4
(Cancelliere, Imbimbo, and Sacco 2010)	6		38,5	8	16	
(Garzón-Roca, Marco, and Adam 2013)	96		57,79	61		
(Sassoni, Mazzotti, and Pagliai 2014)	6	Min	19,3	6,2	6,5	6,2
		Max	39,8	7,8	10	9
(Drougkas, Roca, and Molins 2015)	24		23,18	12,3	4,243	20,6

## 1-2. Mortiers

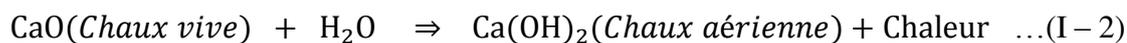
Le mélange d'eau, de liant et du sable est appelé mortier. Dans la plupart des anciens ouvrages voûtés, on en retrouve principalement trois types : mortier de chaux, de ciment et du mélange ciment et chaux.

La chaux est le résultat de la calcination du calcaire (thermolyse). On distingue la chaux aérienne et la chaux hydraulique.

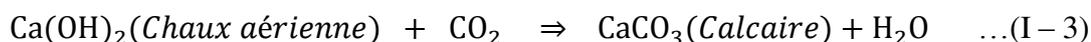
**La chaux aérienne** provient de la calcination du calcaire pur suivant le processus chimique suivant :



La chaux aérienne, appelée aussi chaux éteinte est obtenu par l'hydratation de la chaux vive selon la réaction chimique (I – 2).



Elle est dite « aérienne », car elle réagit avec de l'oxyde de carbone (CO<sub>2</sub>) de l'air pour durcir (durcissement par carbonatation) :



**La chaux hydraulique** provient du calcaire argileux (10 à 20% d'argile). Elle est appelée ainsi « hydraulique » parce qu'elle durcit en présence d'eau. Par ailleurs, il existe un autre type de matériau, que les romains mélangeaient avec de la chaux grasse, appelé pouzzolane en référence à la roche magmatique connue sous le même nom, pour obtenir un liant présentant les qualités de la chaux hydraulique.

La maçonnerie hourdée en mortier de chaux aérienne est souvent assujettie aux dégradations des joints, car lors de la pose du mortier la carbonatation ne peut atteindre le cœur des joints et donc, l'extinction de la chaux vive ne peut être parfaite ce qui rend ces joints vulnérable à la présence d'eau, la chaux non éteinte se dissout lentement et disparaît par lixiviation (voir paragraphe suivant). Les mortiers de chaux hydraulique sont moins altérables par l'eau, l'hydratation est plus homogène et la lixiviation est moins importante.

Pour constituer un mortier de chaux et/ou de ciment, quatre proportions (Tableau 7) ont été couramment utilisés (Denfer 1891) dont les mortiers résultants ont été numérotés :

Tableau 7: Mortiers utilisés dans la construction des anciens ouvrages en maçonnerie.

Mortier	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4
Proportion : Sable / liant (Ciment ou chaux)	1 : 5	1 : 3	1 : 2	1 : 1

Un autre type de mortier qui s'ajoute aux précédents, il s'agit du plus simple des mortiers et le plus économique, le mortier de terre. L'inconvénient majeur de ce type de mortier est sa vulnérabilité à l'eau. En effet, les ouvrages ou parties d'ouvrages en maçonnerie hourdée de mortier de terre doivent être parfaitement protégés de l'eau.

Le mortier N° 1 ne s'employait qu'avec du ciment Portland ou avec de la chaux de qualité pour les massifs et blocages. Le mortier N° 2 était communément employé pour le

hourdis des murs de constructions ordinaires. Le mortier N° 3 était employé pour les maçonneries soignées. Enfin, le mortier N° 4 était employé dans le hourdis des maçonneries étanches et/ou enduit étanche. Le sable joue le rôle de matière inerte, il augmente économiquement le volume du mortier, il divise la chaux pour la rendre plus perméable à l'air et lui faciliter la prise par carbonatation. En outre, un mortier constitué de mélange d'un demi-volume de chaux issue du calcaire pur (grasse) pour un volume de ciment connu sous le nom de mortier bâtard a pu être utilisé dans certaines régions pour minimiser le temps de prise.

En termes de caractéristiques mécaniques, les seules valeurs que l'on trouve dans la littérature ancienne concernent la résistance à la compression simple. En général, cette résistance est comprise entre 2 et 7 MPa (SETRA 1982b). Au cours des dernières décennies, plusieurs recherches ont été menées pour caractériser les différents types de mortier et leur influence sur le comportement du complexe maçonnerie. (Binda et al. 2003) ont testé, dans le cadre de la reconstruction de la cathédrale de Noto en Sicile (Italie), plusieurs compositions de mortier dans le but d'obtenir un mortier compatible avec l'ancien. Ils ont mélangé, avec un ratio de poids liant/granulats de 1/3 la chaux hydraulique avec du sable propre, la chaux hydraulique avec du sable fin, le mastic de chaux avec : la pouzzolane, la poussière de briques et avec un mélange de poussière de brique et du sable. Pour chaque composition, trois éprouvettes de 40x40x160 mm<sup>3</sup> (norme Italiennes UNI-ENV 459) ont été testées en compression et en flexion à 28 jours du coulage. Les résultats ont montré que le mortier à base de mastic de chaux et de la pouzzolane donne les résistances les plus élevées (en compression comme en flexion), mais c'est le mortier de chaux hydraulique qui a été jugé le plus compatible avec la pierre et le mortier en place. Dans la même année (Lanas and Alvarez-Galindo 2003) publient une étude menée sur le comportement des nouveaux mortiers de chaux aérienne de cette époque. Un total de 180 échantillons, préparés selon 5 compositions différentes avec des ratios chaux/sable de 1:1, 1:2, 1:3, 1:4 et 1:5, ont été analysés à 3 j, 7 j, 28 j, 91 j, 182 j et 365 jours, pour étudier leur comportement mécanique à long terme, dans le but de déterminer la composition appropriée pour les travaux de restauration des ouvrages. Les résultats ont montré que le ratio chaux/sable de 1:1 offre la plus haute résistance, mais dépasser ce ratio i.e. mettre une quantité de sable inférieure produit des fissures en internes et en surface de l'éprouvette à cause de la quantité excessive du liant qui, ajoutent les auteurs, abandonne partiellement sa fonction de liant et se comporte comme matériau de remplissage. (Al-Mukhtar and Beck 2005) présentent les caractéristiques hydriques et mécaniques d'un mortier à base de chaux hydraulique et de poudre de tuffeau

(roche sédimentaire marine). Huit ratios chaux/tuffeau ont été utilisés allant de 1:20 à 9:10 pour la confection des éprouvettes. Les résultats ont permis d'observer que la résistance du mortier, à la compression comme à la traction, augmente en fonction du pourcentage de chaux qu'il contient. Quatre ans plus tard, (Domède et al. 2009) publient les résultats d'une recherche sur le comportement mécanique de la maçonnerie ancienne. Deux formes d'éprouvettes de mortier de chaux hydraulique (NHL3.5) ont été testées avec un dosage de  $400 \text{ kg/m}^3$  : l'éprouvette traditionnelle  $4 \times 4 \times 16 \text{ cm}^3$ , et l'éprouvette cylindrique de 6 cm de diamètre et 12 cm de haut. Pour le premier type d'éprouvette, les essais mécaniques ont été effectués à 7, 28, 60, 75, 170, 254 jours du coulage et après un essai de vieillissement accéléré. Pour le second, les essais ont été effectués à 1 mois, à 2 mois et après l'essai de vieillissement accéléré. Dans les deux cas, 6 éprouvettes ont été testées à chaque date. Les résultats ont montré que la résistance à la compression du mortier varie entre 2 et 7 MPa, ce qui est en conformité avec (SETRA 1982b). (Costigan and Pavía 2012) ont effectué une campagne expérimentale sur quatre types de mortier de chaux. Un mortier de chaux aérienne calcique à 90% de chaux pure éteinte (CL90s), et trois types de mortier de chaux hydraulique (NHL2, NHL3.5 et NHL5). Pour chaque type, 12 éprouvettes ont été testées en compression à 1, 2, 6 et 12 mois du coulage (3 éprouvettes par échéance d'essai), et 9 éprouvettes testées en flexion aux trois premières échéances d'essai. Les auteurs ont suivi l'évolution de la résistance des différents mortiers dans le temps, ainsi que l'influence de cette évolution sur la résistance globale de l'ensemble briques/mortier. Ils ont conclu que la résistance à la compression de la maçonnerie est davantage influencée par la résistance de la liaison brique/mortier plutôt que par la résistance à la compression du mortier, et l'augmentation de la résistance du mortier n'a pas augmenté de façon significative la résistance de la maçonnerie. De plus, l'élément de maçonnerie hourdé avec du mortier ayant la résistance la plus faible (CL90s), qui a développé la plus forte liaison. (Drougkas, Roca, and Molins 2015) publient à leur tour les résultats d'une recherche expérimentale sur le comportement mécanique du mortier de chaux, de la brique d'argile solide et du complexe briques/mortier. Deux types de mortier ont été utilisés : un mortier de chaux aérienne (ALM) sous forme de mastic de chaux aérienne calcique à 90% (CL90s), et un mortier de chaux hydraulique (NHL3.5). Pour chaque mortier, 24 éprouvettes  $4 \times 4 \times 16 \text{ cm}^3$  ont été préparées avec un ratio liant/sable de 1:3, et testées en flexion et en compression à 14, 28, 42 et 49 jours pour le premier mortier, et à 7, 14, 28 et 49 jours pour le second. Les résultats ont mis en évidence une différence significative entre les deux mortiers. La résistance à la compression du mortier de chaux aérienne présentait un taux initial d'augmentation faible, et qui diminuait

encore plus après 28 jours, alors que le mortier de chaux hydraulique présente une résistance significative à 7 jours, mais le taux d'augmentation de cette résistance était plus faible que celui du mortier de chaux aérienne jusqu'à 49 jours. La différence entre les valeurs de résistance obtenues à 28 et à 49 jours est significative pour les deux mortiers. Par ailleurs, une dispersion très apparente des résultats obtenus dans le premier cas (ALM) a été soulignée (coefficient de variation de près de 55%), contrairement à la dispersion observée dans le second (NHL3.5) qui était plutôt faible (coefficient de variation inférieur à 10%). Les résultats obtenus par ces différents auteurs sont synthétisés dans les tableaux 8 et 9. Il est précisé que pour certains résultats (Lanas et Alvarez-Galindo 2003, Al-Mukhtar et Beck 2005, Costigan et Pavía 2012, Drougkas, Roca, et Molins 2015), les valeurs affichées dans ces tableaux sont obtenues après numérisation des graphiques publiés par ces auteurs. Cependant, il a été parfois impossible d'extraire les valeurs de certaines courbes (en particulier les résultats obtenues à 3 et 7 jours par Lanas). Dans le cas de plusieurs éprouvettes testées avec le même ratio, la valeur affichée est la valeur moyenne des résultats obtenus par les auteurs aux dates des essais.

Tableau 8: Résistance à la flexion du mortier de chaux selon différents auteurs.

Auteurs	Type de chaux	Ratio	Résistance à la flexion [MPa] selon l'âge, type et dosage du mortier [Jour]													
			7	14	28	42	49	60	75	91	170	182	254	365	540	VA
Binda et al. (2003)	CH+SP	1:3			0,7											
	CH+SF	1:3			0,74											
	MC+PZ	1:3			0,9											
	MC+PB	1:3			0,53											
	MC+PB	1:3			0,5											
Lanas et Alvarez-Galindo (2003)	CA	1:1			0,25					0,45	0,6	1,1				
		1:2			0,28					0,38	0,55	0,9				
		1:3			0,15					0,33	0,49	0,56				
		1:4			0,22					0,34	0,48	0,49				
		1:5			0,11					0,37	0,5	0,46				
Costigan et Pavía (2012)	NHL5	1:3			1,22			1,85			2,57					
	NHL3.5	1:3			0,61			0,73			1,08					
	NHL2	1:3			0,32			0,38			0,49					
	CL90s	1:3			0,12			0,34			0,44					
Drougkas, Roca, et Molins (2015)	CA	1:3		0,1	0,15	0,17	0,4									
	CH	1:3	0,12	0,55	0,69		0,8									

VA : Après vieillissement accéléré ; CH : Chaux hydraulique ; SP : Sable propre ; SF : Sable fin ; MC : Mastic de chaux ; PZ : Pouzzolane ; PB : Poussière de briques ; CA : Chaux aérienne ; NHL : Chaux hydraulique commerciale ; CL90s : Chaux aérienne commerciale ; CG : Chaux grasse ; CTH : Chaux très hydraulique ; TF : Tuffeau.

Tableau 9: Résistance à la compression du mortier de chaux selon différents auteurs.

Auteurs	Type de chaux	Ratio	Résistance à la compression [MPa] selon l'âge, type et dosage du mortier [Jour]														
			7	14	21	28	42	49	60	91	170	182	254	365	540	VA	
(Denfer 1891))	CG		3,5														
	CH		7,4														
	CTH		14,4														
(SETRA 1982a)b)	Rondelet (1802)	CA													3-6,5		
	Vicat (1812)	CG		2-2,5													
		CH		7,5													
		CTH		14,6													
	Tourtay (1885)	CH	500			2											
Séjourné (1914)	CA	350				1,8				3,4	5,2						
Binda et al. (2003)	CH+SP	1:3				1,6											
	CH+SF	1:3				1,21											
	MC+PZ	1:3				4,11											
	MC+PB	1:3				1,47											
	MC+PB+S	1:3				1,22											
Lanas et Alvarez-Galindo (2003)	CA	1:1				0,88				1,38	1,7	4,26					
		1:2				0,84				1,11	1,57	3,22					
		1:3				0,43				0,96	1,35	2,3					
		1:4				0,54				0,99	1,53	1,81					
		1:5				0,53				1,04	1,49	1,69					
Al-Mukhtar et Beck (2005)	CH+TF Sans compactage	1:20				1,15											
		1:10				1,5											
		3:20				2,5											
		1:5				2,9											
		3:10				4											
		1:2				5,3											
		7:10				7,9											
		9:10				7											
	CH+TF Avec compactage	1:20				2,2											
		1:10				3,15											
		3:20				3,8											
		1:5				2,2											
		3:10				5											
		1:2				7,95											
7:10				10													
9:10				11,7													
Domède et al. (2009)	CH	400				3,58 3,81			3,58 3,93						7,07 9,7		
Costigan et Pavía (2012)	NHL5	1:3				4,31			6,85	11,94			13,01				
	NHL3.5	1:3				4,1			5,92	9,06			9,74				
	NHL2	1:3				1,84			2,24	2,56			2,64				
	CL90s	1:3				0,15			0,87	1,35			1,37				
Drougkas, Roca, et Molins (2015)	CA	1:3		0,65		0,97	1,3	1,2									
	CH	1:3	1,39	1,71		1,61		1,8									

## 2- Comportement de la maçonnerie

La variabilité des caractéristiques mécaniques des éléments solides (pierres et briques) et des mortiers conduit inévitablement à la variabilité du comportement mécanique du complexe maçonnerie. Ce dernier a fait l'objet d'un grand nombre d'études de caractérisation. On distingue deux types de campagnes expérimentales : la première, que l'on va appeler de type I, est menée sur un assemblage non altéré d'éléments solides (pierres ou briques) avec différents types de mortier en vue d'un dimensionnement de nouvelles structures en maçonneries. La seconde, de type II (tableau 10), est menée sur des ouvrages existants dont les matériaux peuvent être fortement altérés, dans un but de maintenance, de réparation et/ou de renforcement. Dans les deux cas, la caractérisation des matériaux constitutifs d'un ouvrage constitue une étape cruciale. Cette échelle d'analyse (échelle de la structure) est plus importante que les trois précédentes. Elle permet de tenir compte d'un paramètre qui ne concerne pas la pierre même, mais sa sélection (par le maçon) pour faire partie de la structure ou d'une partie précise de la structure de l'ouvrage. Les données collectées, issues des résultats des essais effectués par différents auteurs, sont récapitulées dans le tableau 10. Ces valeurs représentent les caractéristiques mécaniques de base du matériau maçonnerie réellement mis en place. On peut remarquer que quelle que soit l'association, briques/mortier ou pierres/mortier, les caractéristiques mécaniques du matériau maçonnerie présentent une large dispersion. Pour la première association (briques/mortier), le coefficient de variation varie, selon le type de mortier utilisé, de 2% à 29% pour la résistance à la compression, et de 3% à 40% pour le module d'Young. Pour la seconde combinaison (pierres/mortier), ce coefficient varie de 9% à 33% et de 12% à 46% pour la résistance à la compression et le module d'Young respectivement. Une autre remarque importante peut être formulée : les dispersions observées sur l'ensemble des essais effectués sur les prismes confectionnés en laboratoire (essais de type I) sont nettement inférieures à celles observées sur des ouvrages existants (essais de type II). Sur l'ensemble des campagnes expérimentales de type I, les valeurs maximales du coefficient de variation sont de l'ordre de 24% pour la résistance à la compression et de 38% pour le module d'élasticité, alors que sur l'ensemble des essais de type II, le coefficient de variation a dépassé 33% et 46% pour les deux caractéristiques mécaniques respectivement, soit une augmentation de près de 38% en termes de résistance et près de 22% en termes de module d'Young.

Tableau 10: Caractéristiques mécaniques du complexe maçonnerie selon les auteurs.

Auteurs	Type d'éléments solides	Mortiers (ratios)	Dosage [kg/m <sup>3</sup> ] / Ratio [-:-]	Résistance à la compression f <sub>cp</sub> [MPa]		Module d'élasticité E [MPa]			
				Moy	CV [%]	Moy	CV [%]		
Compagnes expérimentales de type I	(Binda, Fontana, and Frigerio 1988)	Briques	CA+PZ+S	1:4:9,28	11,00		1 651		
			CIM+PZ+S	1:3:5	14,50		3 833		
			CIM+RA+S	1:0:1,5	17,80		4 567		
	(Kaushik, Rai, and Jain 2007)	Briques	CIM+CA+S	1:0:6	4,10	24,1	2 300	24,0	
				1:0:3	7,50	18,0	4 200	38,0	
				1:0,5:4,5	6,60	20,0	3 800	35,0	
	(Domède et al. 2008)	Briques	NHL3.5	400	9,02	17,5	5 254	10,3	
	(Vasconcelos and Lourenço 2009)	Granite	Pierres sèches	PR_S	73,00	9,1	14 722	19,0	
				PR_SR	51,90	16,2	7 934	37,1	
				CA	PR_SM	37,00	11,8	4 629	17,5
				AR_G	PR_SS	64,20	13,5	8 920	12,6
	(Costigan and Pavía 2012)	Briques	NHL5	1:3	8,50	8,0	1 528	3,0	
NHL3.5			1:3	8,90	2,0	970	10,0		
NHL2			1:3	4,80	8,0	542	24,0		
CL90s			1:3	4,30	6,0	317	9,0		
(Sassoni, Mazzotti, and Pagliai 2014)	Briques	CA+CIM	0,5:0,5:5	10,6	18,9				
			1,5:1,5:5	13,3	12				
(Drougkas, Roca, and Molins 2015)	Briques	CA	1:3	11,24	12,2	417	19,3		
		CH	1:3	12,17	22,2	1 469	27,7		
Compagnes expérimentales de type II	Auteurs	Type Eléments solides	Désignation de l'ouvrage	Zone de prélèvement	Résistance à la compression f <sub>cp</sub> [MPa]		Module d'élasticité E [MPa]		
	(Brenchich and Sabia 2008)	Briques	Pont de Tonaro Italie	EPP1	8,53	28,8	1 650	22,7	
				EPP2	9,93	17,6	1 985	39,6	
	(Costa et al. 2015)	Granite	Pont Vila Fira Portugal		66,90	9,0	22 400	27,0	
			Pont Lagoncinha Portugal		51,00	26,0	39 200	46,0	
	(Parent et al. 2015)	Calcaire	P.S.M.C Paris	EPBMP	53,30	33,2	34 200	40,4	
EPHMP				11,50	16,6	10 800	20,7		

CA : Chaux aérienne ; CH : Chaux hydraulique ; S : Sable ; PZ : Pouzzolane ; NHL : Chaux hydraulique commerciale ; CIM : Ciment ; AR\_G : Argile sèche issue du tamisage d'un sol granitique ; NHL : Chaux hydraulique commerciale ; CL90s : Chaux aérienne commerciale ; PR\_S : Prisme à joint sciés ; PR\_SR : Prisme à joint rugueux ; PR\_SM : Prisme avec joints en mortier de chaux ; PR\_SS : Prisme avec joints en mortier d'argile sèche issue du tamisage d'un sol granitique ; EPP : Echantillon prélevé de la pile du Pont ; EPBMP : Echantillon prélevé de la partie basse du mur ; EPHMP : Echantillon prélevé de la partie haute du mur ; P.S.M.C : Prieuré Saint Martin des Champs à Paris.

Cette différence d'ordre de grandeur des mesures (en termes de valeurs moyennes et de dispersion) entre ces deux types de campagnes expérimentales est principalement due au vieillissement « hétérogène » des matériaux en place (i.e. des échantillons prélevés des ouvrages existants), qui dépend essentiellement de deux facteurs : le premier, lié à la composition minéralogique qui varie d'une pierre (brique) à l'autre, et le second est lié à la variabilité du degré d'exposition des différentes zones de prélèvement aux conditions environnementales. Au final, c'est la résistance de toute la structure qui peut être diminuée sous l'effet du processus de dégradation des matériaux. Il est donc nécessaire de savoir identifier les différentes altérations, de les classer et surtout et de connaître leurs causes pour assurer la pertinence du diagnostic puis de l'éventuelle réparation.

### **3- Principales altérations de la pierre**

Les pierres des ouvrages subissent au fil du temps de multiples changements physico-chimiques générant diverses formes d'altérations pouvant être classées en cinq grandes familles (ICOMOS-ISCS 2008) :

- fissures et déformations;
- détachement ;
- figures induites par une perte de matière ;
- altération chromatique et dépôt ;
- colonisation biologique.

Les deux premières formes d'altération manifestent des désordres **structuraux** et les trois autres des désordres des **matériaux**.

Les altérations de la pierre ont de nombreuses causes et origines possibles. Elles dépendent des facteurs dits externes qui traduisent l'environnement immédiat (conditions climatiques, pollution ...etc.) mais aussi des facteurs internes propres à chaque type de pierres, qui font que leurs réactions vis-à-vis des contraintes environnementales ne sont pas les mêmes. En effet, la forme et l'intensité de l'altération dépendent de certaines propriétés intrinsèques de la pierre (mécaniques, chimiques et minéralogiques, texture, porosité ...etc.).

Le dénominateur commun dans l'apparition de la plupart des altérations est la présence d'eau. En effet, l'eau mobilise les sels solubles, gèle, dissout les minéraux, favorise

la prolifération des végétaux, modifie les propriétés mécaniques, etc. Il est donc important d'assurer une parfaite étanchéité associée à un bon système de drainage tout en évitant d'emprisonner l'eau au cœur des matériaux. Dans la suite de ce paragraphe, les formes d'altérations sont développées en faisant référence aux voûtes maçonnées.

### **3-1. Désordres structuraux**

#### **3-1.1. Fissures et déformations**

Une fissure est définie comme étant un plan de rupture vu en coupe qui résulte de la séparation partielle d'une pierre et/ou de joint en deux parties. Connaître leur origine est souvent difficile et nécessite parfois l'instrumentation de l'ouvrage afin de suivre leur évolution pour établir le diagnostic. Une fissure traversant complètement l'élément fissuré est appelée fracture, elle témoigne d'une rupture franche du matériau, les deux parties étant complètement désolidarisées. L'ouverture d'une fracture, contrairement à celle d'une simple fissure, est souvent centimétrique, elle suit en général les zones de moindre résistance à la traction que sont généralement les joints. Un type particulier de fissures pouvant altérer la pierre appelé « clivage », il décrit le développement d'une cassure le long du plan de faiblesse, telles que les microfissures. Une pierre posée en délit par exemple peut se cliver le long de plan de litage sous chargement important. Toute fissure ou fracture est caractérisée par trois facteurs :

- son ouverture, définie comme étant la distance qui sépare les deux lèvres de la fissure ;
- le désaffleurement, différence de niveaux entre les deux parties séparées par la fissure et enfin ;
- le rejet, déplacement relatif, dans le sens parallèle de la fissure, entre les deux lèvres de la fissure.

Les déformations peuvent affecter l'ouvrage sur l'ensemble de sa structure (déformation globale) ou sur une partie seulement (déformation localisée). Dans les deux cas, un changement de forme est observé. La déformation dite globale ou massive de l'ouvrage est généralement le résultat d'un problème de faiblesse, soit des parties porteuses de l'ouvrage (altération massive des semelles, piles, culées...), soit du terrain d'assise (altération du sol des fondations). Ce type de déformations se caractérise par la perte de linéarité de l'ouvrage. Les déformations localisées peuvent affecter toutes les parties de l'ouvrage. Elles sont des

indicateurs des zones atteintes de pathologies et représentent des alertes pour des désordres plus graves.

### 3-1.2. Détachement

Il s'agit de rejet de pierres suite à une altération de leurs joints provoquant leur disparition. Cette chute de pierres constitue une forme de **désorganisation** de la maçonnerie qui peut être locale ou plus étendue, elle constitue une menace pour la stabilité et la sécurité de l'ouvrage. Lorsque les joints sont détruits sur une profondeur importante, la maçonnerie hourdée se transforme pratiquement en maçonnerie de pierres sèches et le risque de chute de pierres devient plus important. Le détachement de pierres peut être total (chute de moellon en entier) ou partiel (détachement d'une ou plusieurs couches de la pierre). Dans ce dernier cas, il peut s'agir de **boursouffure**, détachement d'une couche superficielle sous forme de bombement creux, d'**éclatement**, perte locale de matière en surface de la pierre, due à des pressions internes, de **délitage** qui affecte les pierres dont la texture présente des strates (pierres d'origine sédimentaire comme la pierre calcaire par exemple, ou métamorphique comme la pierre schisteuse), décrit un détachement selon une orientation préexistante conduisant à la dissociation d'une ou de quelques couches. Le détachement de plusieurs couches fines subparallèles à la surface de la pierre est appelé **exfoliation** ou **desquamation**. Lorsque les épaisseurs de couches sont plus ou moins importantes (plaques) et le nouveau parement de la pierre sous la plaque détachée est pulvérulent.

L'autre forme de détachement qui affecte tout type de pierre est la **désagrégation**, elle désigne une décohésion des grains individuels ou d'agrégat de grains de la pierre en surface et/ou en profondeur.

Les désordres structuraux favorisent et accélèrent d'autres types de désordres qui sont propres aux matériaux particulièrement en présence de l'eau. Ces deux types de désordres sont souvent associés, l'un entraîne l'autre.

## 3-2. Désordres des matériaux

### 3-2.1. Figures induites par une perte de matière

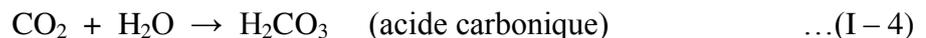
Ce type d'altération affecte principalement les pierres issues des roches sédimentaires et métamorphiques. Les roches magmatiques sont rarement touchées. Cela peut se traduire par

une **alvéolisation** (formation de cavités (alvéoles) à la surface de la pierre), une **concrétion** (dissolution et précipitation de la calcite en milieu humide plus ou moins acide) ou encore, une **érosion** (disparition de la surface originelle de la pierre causée par tout agent externe (écoulement d'eau, rafale de vent ... etc.).

Une perte de matière est souvent associée à d'autres formes d'altération, telles que la désagrégation et/ou la desquamation. Le processus chimique de dissolution de la calcite et la production du phénomène de concrétionnement est décrit ci-dessous.

### 3-2.2. Processus chimique de dissolution de la calcite en présence de l'eau

Dans ce paragraphe nous allons décrire le cas d'altération de la pierre le plus fréquent. Il s'agit du phénomène de dissolution des carbonates (calcaire, craie, travertin ...etc.). Le processus débute dans l'eau de pluie qui va se charger de dioxyde de soufre (SO<sub>2</sub>) et/ou de dioxyde de carbone (CO<sub>2</sub>). Celui-ci provient en partie de l'air (origine atmosphérique, avec les gaz d'échappement des véhicules) mais aussi du dioxyde de carbone contenu dans le sol qui résulte de la respiration des êtres vivants et/ou de la décomposition des matières organiques (origine biogénique). Dans les deux cas, la réaction chimique donne un produit acide :



Chacun de ces deux acides (carbonique et sulfurique) va se dissocier (dilué) dans l'eau suivant les réactions suivantes :



Dans le cas des pierres calcaire, c'est le carbonate de calcium (CaCO<sub>3</sub>) qui est pris pour cible par les ions acide (H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>) selon cette réaction :



Les ions de calcium passent ainsi en solution sous forme d'hydrocarbonate de calcium (Ca<sup>2+</sup> + 2HCO<sub>3</sub><sup>-</sup>) qui pourront être transportés par l'eau. La conséquence directe est la perte de la matière et donc modification de la géométrie.

Lorsque l'eau chargée d'ions  $\text{Ca}^{2+}$  arrive à s'infiltrer entre les joints et traverser l'épaisseur de la pierre, un phénomène inverse à la dissolution se produira : le concrétionnement. La réaction finale s'écrit :



Cela se produit donc, lorsque l'eau perd une partie de son oxyde de carbone (dégazage) ou si une partie de l'eau s'évapore. Les ions calcium précédemment en solution vont se précipiter en se transformant en carbonate de calcium (**concrétion**).

Connaitre les caractéristiques des principales altérations permet de les identifier, mais il faut d'abord les détecter. Plus le désordre est détecté tôt, plus le maître d'ouvrage aura de choix sur l'action à mener et surtout du temps pour l'engager. Les avantages permettent d'optimiser les réparations, i.e. avoir la possibilité de choisir quand et comment intervenir en minimisant le coût des interventions. Cette détection précoce des désordres ne peut être réalisée qu'à travers la mise en place d'une stratégie efficace de surveillance de l'état de l'ouvrage qui permet de suivre son évolution à partir d'un état de référence. Ce dernier est donc actualisé tout au long de la durée de vie de l'ouvrage. A partir des résultats de la surveillance mise en place, le maître d'ouvrage définit sa stratégie de maintenance et de réparation. Il est donc essentiel d'évaluer la fiabilité des résultats des inspections, sachant que la stratégie est fortement liée à la capacité de détection de la technique utilisée.

### **3-2.3. Processus d'altération des roches magmatiques**

L'altération chimique des roches magmatiques se fait en présence de l'eau (milieu humide). Les réactions sont principalement des hydrolyses c'est-à-dire la destruction des minéraux par l'eau, auxiliairement des oxydations (particulièrement l'oxydation du fer) et des hydratations de certains minéraux peu hydratés contenus dans la roche comme les oxydes de fer produisant un gonflement du minéral et donc favorise la destruction de la roche. Les éléments solubles sont lessivés. Les parties insolubles restent en place, se recombinent et forment d'autres minéraux, principalement des argiles. Cependant, des travaux (Isabelle Cojan et Maurice Renard) ont montré par ailleurs que, grâce à leur très faible porosité (inférieure à 1% (Chamley 1987)), ces roches offrent une bonne résistance aux altérations. Ces travaux ont permis d'évaluer la vitesse d'hydrolyse d'un minéral silicaté en mesurant la vitesse de libération de la silice issue du minéral dans le milieu. Cette vitesse est fonction de

la surface de contact du minéral, du pH et d'une constante de vitesse de libération "k" propre au minéral, qui est mesurée en mole/m<sup>2</sup>/an. Le tableau 11 donne quelques valeurs de k.

Tableau 11: Vitesse de libération de la silice issue du minéral dans le milieu [Chamley 1987]

Désignation	k [mole/m <sup>2</sup> /an]	Désignation	k [mole/m <sup>2</sup> /an]
anorthite	1,76 10 <sup>-1</sup>	Feldspath K	5,26 10 <sup>-5</sup>
néphéline	8,83 10 <sup>-2</sup>	olivine	3,78 10 <sup>-5</sup>
Enstatite	3,15 10 <sup>-3</sup>	muscovite	8,09 10 <sup>-6</sup>
albite	3,75 10 <sup>-4</sup>	quartz	1,29 10 <sup>-7</sup>

### 3-2.4. Altération chromatique et dépôt

Une **altération chromatique** indique la modification d'un ou plusieurs paramètres caractérisant la couleur de la pierre (teinte, clarté, saturation ou pureté de la couleur). Cette pathologie peut affecter tout type de pierre en surface (**patine**) comme en profondeur. Les principales causes peuvent être chimiques et/ou biologiques.

**Le dépôt**, désigne l'accumulation de matériaux exogènes (pollutions...) en surface de la pierre, la couche formée est généralement peu adhérente au substrat. Il peut s'agir aussi d'**efflorescence**, dans le cas de présence de poudre blanche (cristaux) en surface de la pierre résultant du transfert puis de l'évaporation superficielle d'eau contenant des sels ou de **Subflorescence**, qui indique l'accumulation des sels, à la différence des efflorescences, sous la surface de la pierre, et qui conduit souvent à une perte de matière par desquamation.

La forme la plus connue du dépôt est la formation d'une **croûte** qui indique la formation d'une enveloppe issue des dépôts de matériaux en surface de la pierre pour retrouver son aspect le plus brut et le plus naturel. De couleur grise à noir, parfois claire, une croûte, à l'inverse des dépôts exogènes, est plus ou moins attachée au substrat, ce qui fait que son arrachement y emporte souvent une partie. Il ne faut pas la confondre avec **encroûtement**, on emploie ce terme quand la figure d'altération est clairement identifiée comme étant le résultat d'un processus de précipitation à partir d'une percolation de solutions à travers la maçonnerie.

### 3-2.5. Colonisation biologique

Il ne s'agit pas seulement des plantes mais aussi de micro-organismes tels que les bactéries, algues, lichen, mousse, moisissure, etc. Les colonisations biologiques se

développent aussi bien sur la surface de la pierre, que dans des fissures et/ou cavités. Leur prolifération est favorisée par l'humidité. L'altération de la maçonnerie (joints et/ou pierres) peut être provoquée par les acides sécrétés par certains végétaux mais aussi par la pénétration et la croissance des racines qui entraîne la désorganisation de la maçonnerie, accompagnée souvent de chute de pierres.

#### **4- Méthodes d'auscultations des ouvrages**

Plusieurs méthodes d'auscultation sont aujourd'hui disponibles. Elles sont classées en deux grandes catégories : les méthodes non destructives et les méthodes destructives, auxquelles il faut rajouter les méthodes de surveillance (instrumentation). Dans le premier cas, l'auscultation est effectuée sans dégrader les matériaux en place alors que dans le second, l'ouvrage est localement détérioré (au niveau des zones auscultées) par les moyens d'auscultation. Les méthodes de surveillance peuvent appartenir à la première comme à la seconde catégorie, elles permettent le suivi en continu des évolutions de certains désordres (tassement et/ou déplacement d'appuis, déformation, fissuration, ...etc.).

##### **4-1. Méthodes destructives (CD)**

La plupart des méthodes d'évaluation des ouvrages en maçonnerie exigent, comme principaux paramètres d'entrée, la rigidité de la structure et d'autres propriétés mécaniques. Les méthodes destructives sont, dans de nombreux cas, nécessaires pour déterminer certaines de ces propriétés, mais il convient de noter que les résultats donnés par la majorité des méthodes destructives sont affectés par d'importantes incertitudes. De plus, ces résultats ne constituent que des informations localisées sur quelques parties de l'ouvrage. Ils ne peuvent donc pas être directement généralisés à l'ensemble de la structure. Pour cette raison il faut utiliser une stratégie permettant d'obtenir des résultats statistiquement fiables.

Certaines techniques de mesures localisées, en surface ou à faible profondeur dans le matériau, ne sont plus considérées comme destructives, mais semi-destructives ou à dégradation mineure (Minor destructive test Methods). Elles sont définies comme étant des procédures d'essai, qui sont non destructives par rapport à l'élément structural, mais destructives par rapport à l'échantillon prélevé. Utilisées généralement pour les investigations préliminaires, certaines de ces méthodes offrent la possibilité d'extraire des éléments structuraux cachés, de petits échantillons à analyser en laboratoire en réduisant au minimum

les dommages induits (Marastoni et al. 2016). Ces techniques peuvent être utilisées pour extraire les propriétés d'élasticité et de résistance, qui sont difficiles à obtenir avec les méthodes de contrôle non destructif.

#### **4-2. Méthodes de contrôle non destructif (CND)**

Si les méthodes destructives se concentrent principalement sur les caractéristiques mécaniques des matériaux, les essais non destructifs peuvent fournir une évaluation qualitative globale de l'état de l'ouvrage et des informations supplémentaires sur sa géométrie interne (Orbán and Gutermann 2009). Une complication supplémentaire est ajoutée par la possibilité de présence de défauts cachés tels que la perte d'épaisseur de la voûte, la séparation des rouleaux, les vides dans le remplissage, etc. Dans de telles situations, les méthodes de contrôle non destructif peuvent fournir des informations précieuses sur la structure et les matériaux permettant d'établir les paramètres d'entrée pour l'analyse numérique, à condition de savoir quelle technique utiliser pour caractériser quel défaut, avec quel niveau de fiabilité (capacité de détection) et dans quelles conditions d'utilisation. Dans le cas où ces méthodes ne peuvent pas fournir des informations utiles et fiables, les combiner avec des techniques destructives peut s'avérer inévitable.

#### **4-3. Instrumentation de l'ouvrage**

Après avoir effectué une expertise complète de l'état de l'ouvrage, si la présence d'un désordre est confirmée, il est important de suivre son évolution dans le temps. Cette surveillance, qui se fait sur plusieurs années, doit être la plus régulière et la plus rigoureuse possible, car le suivi irrégulier peut engendrer des pics de dépenses qui sont difficiles à supporter et pourraient entraîner, si les dépenses sont différées, la dégradation des conditions d'exploitation de l'ouvrage (SETRA 2011). Aujourd'hui, les gestionnaires d'ouvrages disposent d'une large gamme de capteurs qui, connectés à des centrales d'acquisition, permettent d'assurer une haute surveillance de l'ouvrage, un suivi en continu de l'évolution des paramètres représentatifs de certains désordres (suivi de l'ouverture, du désaffleurement, ou le rejet d'une fissure, suivi du tassement d'appui, suivi de l'inclinaison d'une pile, etc.). Ces grandeurs mesurées (déplacement, rotation, déformation, etc.) sont acquises automatiquement et peuvent être récupérées à distance (télémessures) en faisant appel à de la télétransmission. Cette dernière permet, en cas de franchissement des valeurs seuils fixées au préalable, le déclenchement d'alarme ou d'alerte permettant la mise en place des mesures

conservatoires et sécuritaires nécessaires. L'utilisation des capteurs électroniques s'avère donc indispensable pour pouvoir suivre finement l'évolution des désordres, mais ne doit en aucune manière se substituer à la surveillance visuelle des ouvrages qui reste la base de la surveillance (IFSTTAR 2005).

Aujourd'hui, certains gestionnaires d'ouvrages ont de plus en plus recours à la surveillance en continu plutôt que d'engager une réparation ou un renforcement. Les principales raisons pour lesquelles un maître d'ouvrage décide de placer un ouvrage endommagé sous surveillance seraient, d'une part, de le maintenir en état de service et, d'autre part, de différer l'intervention (réparation et/ou renforcement). Ce maintien en service est souvent accompagné par des mesures de restriction de la circulation, qui peuvent être selon le poids, la taille ou la vitesse des véhicules.

#### **4-4. Quelle technique adopter pour quel défaut ?**

Le choix d'une technique plutôt qu'une autre dépend principalement de deux critères : le premier est lié à la capacité de cette technique à détecter le défaut dont il est question sans avoir recours aux méthodes destructives. Les gestionnaires d'ouvrages exigent souvent l'utilisation des méthodes CND, tout particulièrement lorsqu'il s'agit d'ouvrages classés. Malheureusement, pour certains types de défaut, l'utilisation de ces méthodes ne donne pas de résultats utiles. En effet, dans une intéressante étude, (Orbán and Gutermann 2009) ont évalué l'efficacité d'une large sélection de techniques disponibles par rapport à leur applicabilité pour l'évaluation des ponts voûtés en maçonnerie. Le tableau 12 donne un aperçu du niveau d'utilité des différentes méthodes d'essai pour la détermination des paramètres d'entrée pour l'analyse des ponts en maçonnerie.

Le second critère concerne le coût de la technique. En effet, le choix des gestionnaires d'ouvrage est souvent influencé par les coûts des opérations. Pour éviter d'introduire des procédures de diminution de coût au détriment de l'efficacité de l'opération, il est nécessaire de trouver un compromis entre efficacité et coût de la technique. Ce compromis peut être facilité par une approche fiabiliste du comportement des ouvrages qui permet d'évaluer les probabilités de défaillance de la structure. Au cours des dernières années, plusieurs méthodes d'évaluation des structures basées sur l'approche fiabiliste ont été développées. La plupart des expériences réalisées ont montré les économies obtenues par une évaluation précise et efficace basée sur une approche probabiliste (Casas 2011).

Tableau 12: Evaluation des méthodes de contrôle par rapport à leur applicabilité pour l'évaluation des ponts en voûtes maçonnées (Orbán and Gutermann 2009).

PROPRIETES	Méthodes	CND			CD							Surveillance						
		Méthodes soniques	Géoradar	Thermographie infrarouge	Mesure de conductivité	Carottage et analyse de carotte	Endoscopie	Essai Flat-Jack	Scléromètre	Essai de pénétration dans le mortier	Test d'arrachement	Test du marteau	Emission acoustique	Suivi de fissuration	Profilage laser	Suivi d'humidité	suivi de déformations	Essai dynamique
Géométrie	Profil de la voûte													1				
	Epaisseur de la voûte	2	2		3	1	1											
	Géométrie des culées	2	2		3	1	1											
	Géométrie des piles	2	2		3	1	1											
	Epaisseur des fondations	2	2		3													
	Présence et géométrie de calage	3	3		3	1	1											3
	Epaisseur des tympans	2	2		3	1	1											
	Présence et géométrie de tympans internes	2	2	3	3	3	2											3
	Présence et géométrie des éléments cachés	2	1	3	3	3	1											
Nature et étendue de réparation ou de renforcement antérieur	3	3	3	3	1	1											3	
Propriétés des matériaux	Type, résistance et état des éléments solides			3		1	2	2	2	2	2					3		
	Type, résistance et état du mortier			3		2	2			2						3		
	Densité de la maçonnerie	3	3		3	1	2		3									3
	Densité du remplissage	3	3		3	1	2											3
	Teneur et distribution de l'humidité dans la maçonnerie		2	2	2	2	3								1			
	Teneur et distribution de l'humidité dans le remplissage		2		2	2	3											
	Propriétés mécaniques du remplissage	3	3		3	1	2											3
Défauts	Déplacement ou perte d'élément solide			3			3					2			1			
	Fissure sur l'intrados de la voûte	2	3	2			3					3	1	3				3
	Fissure sur l'extrados de la voûte	2	3				3					3						3
	Détachement des tympans	2	3			3	2					3						3
	Déformation de la voûte													1			1	
	Séparation des rouleaux	3	2			3	2					3	3					3
	Défauts, cavités dans la maçonnerie et remplissage	2	2	3	3	3	2					3						
	Décollement de surface	3	3	2		2	2		3		3	2						
	Perte de la matière au niveau des joints	3	2	2	3	3	2			2		3			2			
Décomposition des voussoirs, briques			3		2	2		2		2	2							
Problèmes des fondations	2	2		3	3	3											2	3
<b>1</b>	Peut fournir des information très utiles. Les paramètres mesurés sont principalement quantitatives et fiables.																	
<b>2</b>	Peut fournir des informations utiles. Les paramètres mesurés sont principalement quantitatives généralement fiables.																	
<b>3</b>	Ne peut fournir que des informations complémentaires. Les paramètres mesurés sont principalement quantitative avec une fiabilité limitée.																	
	Ne peut fournir aucune information utile.																	

## 5- Etat de l'art des méthodes de calcul des voûtes maçonnées

Il s'agit ici, d'exposer l'évolution des principes de calcul, d'analyser les méthodes les plus récentes, de montrer leurs limites et avantages, et enfin, de dévoiler sur quelle méthode a porté notre choix pour l'élaboration de ce travail de recherche.

Plusieurs méthodes, selon l'époque, ont été employées pour le calcul des ouvrages en maçonnerie, elles sont décrites dans les sections suivantes.

### 5-1. Méthodes dites empiriques

Il s'agit des règles qui permettent de déterminer les dimensions des principaux éléments structuraux, les uns en fonction des autres par le biais de relations simples élaborées en introduisant des coefficients obtenus expérimentalement, parfois fonctions du type de matériaux utilisé. Il convient donc de citer les formules proposées par quelques illustres constructeurs et qui ont subsisté très longtemps en l'absence de théorie de modélisation correcte de ce type de structures (Tableau 13).

Tableau 13: Quelques règles empiriques de calcul.

Année	Auteur	Voûte plein cintre et ellipse	Voûte surbaissée (arc)
XV Siècle	Alberti	$t = s/10$	-
1714	Gautier ( $s > 10\text{m}$ )	$t = 0,32 + s/15$	-
1777	Perronet	$t = 0,325 + 0,035 s$	$t = 0,325 + 0,0694 \rho$
1809	Gauthey ( $s < 16\text{m}$ )	$t = 0,33 + s/48$	-
1809	Gauthey ( $16\text{m} \leq s < 32\text{m}$ )	$t = s/48$	-
1809	Gauthey ( $s > 32\text{m}$ )	$t = 0,67 + s/48$	-
1809	Sganzin	$t = 0,325 + 0,3472 s$	-
1845	Déjardin	$t = 0,30 + 0,045 s$	$t = 0,30 + 0,025 s$
1854	L'Eveillé	$t = 0,333 + 0,033 s$	$t = 0,33 + 0,033 s$
1862	Rankine	$t = 0,19 \sqrt{r}$	-
1870	Dupuit	$t = 0,20 \sqrt{s}$	$t = 0,15 \sqrt{s}$
1885	Croizette-desnoyers	$t = 0,15 + 0,20 \sqrt{\rho}$	-
1855	Lesguillier	$t = 0,10 + 0,20\sqrt{s}$	$t = 0,10 + 0,020\sqrt{s}$
1914	Sejourne	$t = 0,15 + 0,15\sqrt{s}$	-

**t** : Epaisseur à la clé; **s** : Portée de la voûte ; **r** : rayon de l'arc de cercle de même portée et de même montée ;  
**ρ** : Rayon de courbure.

D'autres formules empiriques ont été mises au point afin d'évaluer très rapidement, parfois même sur site, la résistance des ponts. Ces formules ont donné naissance à des méthodes très simples de calcul de la capacité portante des ponts-voûtes.

## **5-2. Méthode MEXE (Military Engineering eXperimental Establishment)**

Développée par Alfred John Sutton PIPPARD (1891-1969) en collaboration avec Letitia CHITTY (1897-1982) dans les années trente, lors de ses cinq dernières années à Imperial college quand ils faisaient des recherches sur les barrages-voûtes, cette méthode a été adaptée par les Officiers de génie britanniques lors de la seconde guerre mondiale, qui l'ont baptisée MEXE, pour servir d'outil de décision pour les commandants des troupes concernant le passage ou non de leur convoi « exceptionnellement lourd » sur les ponts. Elle permet en effet, d'évaluer très rapidement la résistance des ponts en maçonnerie sans avoir recours à des calculs compliqués.

Le principe de cette méthode consiste à calculer la charge admissible à l'essieu  $Q_{adm}$  pour un pont en fonction d'une charge à l'essieu dite idéale calculée relativement à un pont "idéal" caractérisé par une ouverture de 20m avec une voûte d'intrados parabolique butée contre des culées parfaitement rigides, associée à un facteur appelé coefficient global d'adaptation qui tient compte de la géométrie du pont à calculer, de son type (à un seul ou à plusieurs arcs), de son état global, du matériau utilisé, de l'épaisseur et de l'état des joints et enfin d'un facteur dynamique pris égal à 1,25.

Bien que ce soit une méthode très pratique, son utilisation est limitée aux voûtes reposant sur des culées supposées rigides et encastrées dont l'ouverture ne peut dépasser 20m, leur surbaissement devrait être supérieur à  $\frac{1}{4}$  et l'épaisseur de remblai à la clé comprise entre 30cm et 150cm. De plus, la maçonnerie est considérée sans résistance en traction et d'une résistance infinie en compression et aucun glissement n'est possible entre voussoirs.

## **5-3. Méthode REAM (Railway Empirical Assessment Method)**

Si la méthode MEXE nécessite tout de même un certain nombre de calculs, la méthode REAM quant à elle, a été élaborée dans le but de pouvoir faire des évaluations préliminaires des ponts en maçonnerie tout en évitant de faire des calculs. Il s'agit d'un abaque très facile à utiliser, qui a été mis au point sur la base d'une étude menée sur différents ponts avec portée de voûte comprise entre 2m et 25m, surbaissement supérieur à  $\frac{1}{8}$ , épaisseur de remplissage comprise entre 25cm et 150cm à la clé et une charge à l'essieu comprise entre 10 et 25 tonnes. Cette méthode permet d'obtenir l'épaisseur requise de la voûte.

Le principe est très simple, il faut travailler de gauche à droite (Figure 1) en suivant les étapes suivantes :

1. mesurer l'ouverture.
2. estimer le rapport ouverture/flèche.
3. marquer les points sur les échelles et dessiner la ligne qui coupe l'anneau basique (épaisseur de la voûte).
4. si l'épaisseur sur le pont est supérieure, alors on s'arrête là.
5. si elle est inférieure, il faut estimer la profondeur du remplissage, la marquer sur l'échelle et tracer à travers pour trouver une nouvelle épaisseur d'anneau (modifiée pour remplissage).
6. si cela est toujours insuffisant, projeter jusqu'à la dernière échelle pour avoir une charge plus réduite.

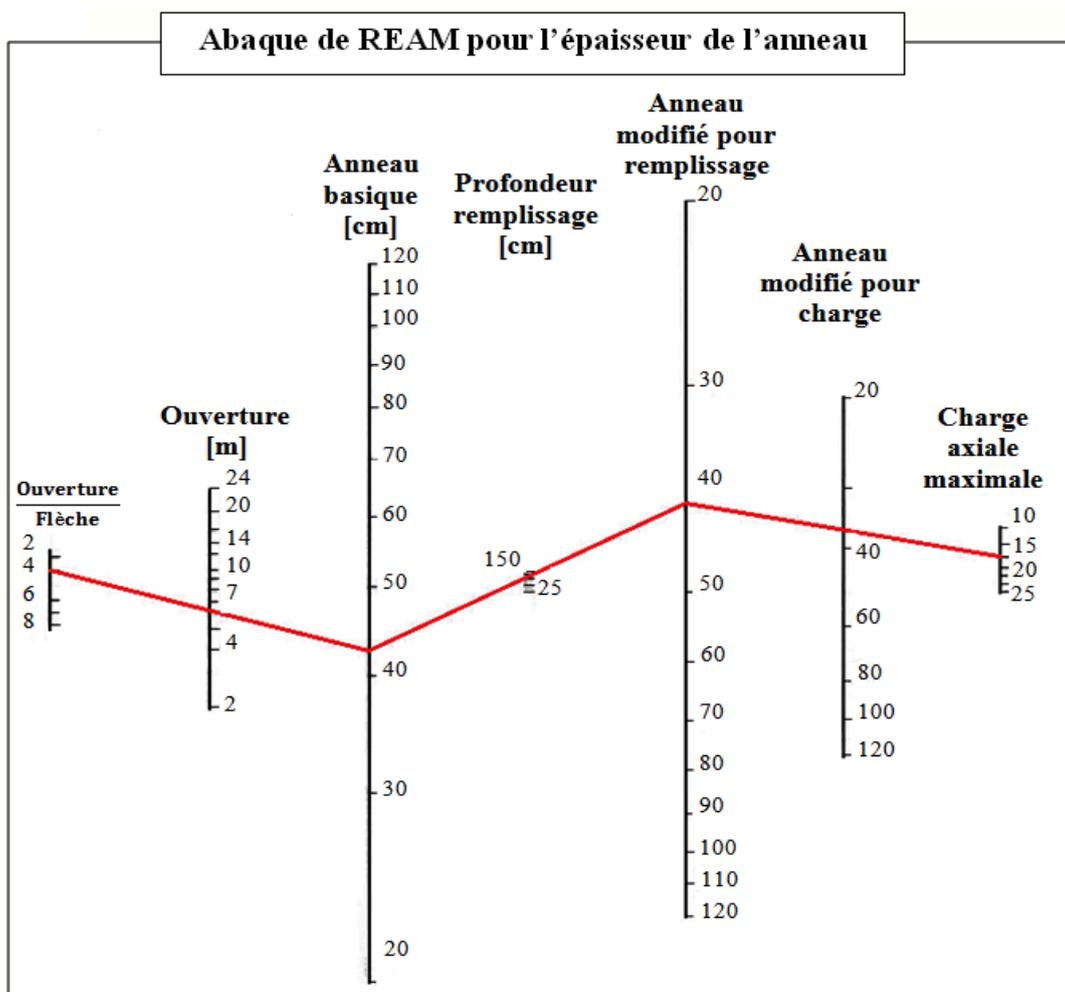


Figure 1 : Abaque de la méthode REAM.

Source : (Harvey 2007)

Par exemple, pour une ouverture de 6m (voir figure 1) et un rapport ouverture/flèche de 4 nous avons un anneau basique de 42cm, avec un remplissage estimé de 1m, l'épaisseur de l'anneau est ramenée à 40cm, ce qui nous donne pour une charge maximale de 15 tonnes et une épaisseur requise de 37cm.

#### 5-4. Méthode d'analyse limite

Cette méthode est réservée à l'étude des structures dont le matériau est considéré au comportement élasto-plastique parfait. C'est à (Kooharian 1953) que revient l'idée d'adapter cette méthode pour l'étude des arcs formés de voussoirs.

Le principe de cette méthode consiste à déterminer les chargements admissibles sous lesquels la structure ne s'effondrait pas. Pour cela, Kooharian s'est basé, dans son ouvrage « limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches », sur deux théorèmes issus de l'analyse limite, le premier théorème "lower-bound theorem" affirme :

*L'effondrement ne se produira pas si à chaque étape d'un chargement un état stable et statiquement admissible peut être trouvé.*

A l'équilibre, la somme des forces et moments sur chaque bloc est nulle, ce qui permet la détermination des sollicitations s'exerçant sur les joints et tracer les points d'application des résultantes des sollicitations sur chacun. La courbe reliant ces points est appelée ligne de pression (Figure 2) et correspond à un état stable et statiquement admissible.

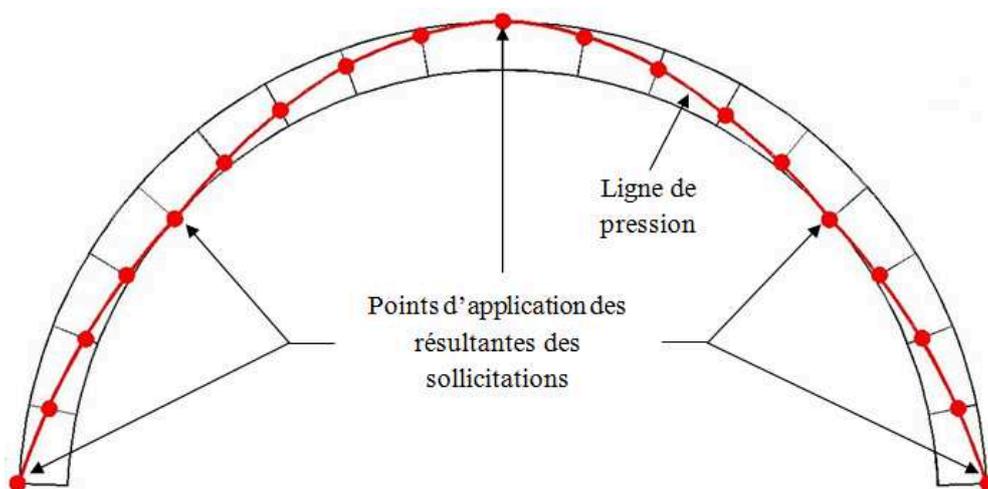


Figure 2 : Centres et Ligne de pression.

Ainsi, Kooharian précise que si une ligne de pression se trouve à l'intérieur de l'arc, alors la stabilité de la structure est garantie, bien que l'état réel d'équilibre de la structure ne soit pas connu (Kooharian 1953).

Le second théorème "upper-bound theorem" affirme :

L'effondrement se produira (*ou s'est déjà produit*) si un mécanisme cinématiquement admissible peut être trouvé [...]. Un mécanisme cinématiquement admissible est un mécanisme caractérisé par la condition suivante : pour un déplacement virtuel du mécanisme, le travail des forces extérieures doit être au moins aussi grand que le travail des forces intérieures.

Ce théorème est reformulé par O'Dwyer dans son ouvrage « Funicular analysis of masonry vault, 1999 » comme suit :

Si la formation du mécanisme ne requiert pas la dépense d'une énergie supplémentaire, mais au contraire aboutit à une diminution de l'énergie potentielle de l'arc et de son chargement, alors le mécanisme se formera.

D'après le premier théorème, l'existence d'une ligne de pression intérieure est synonyme de stabilité de l'arc, le chargement considéré ne provoquerait pas l'effondrement. En revanche, si aucune ligne de pression intérieure n'a pu être trouvée, des rotules pourraient se former pouvant générer un mécanisme (formation de trois rotules (Figure 3(a)) ou de quatre rotules (Figure 3(b)) pouvant être dangereux pour la stabilité de la voûte.

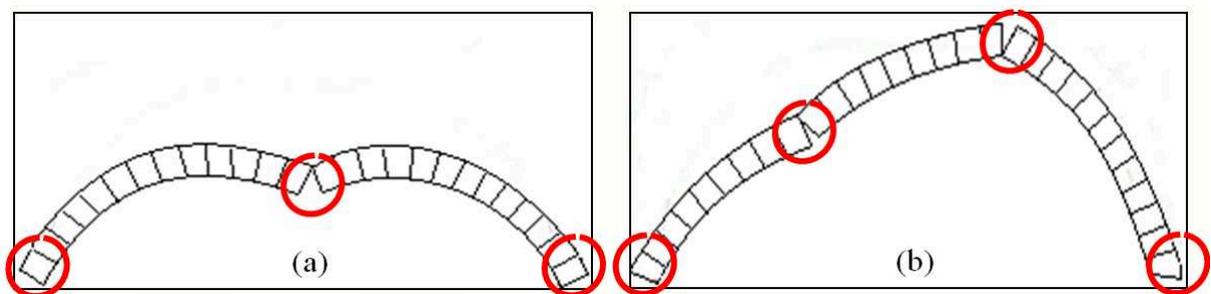


Figure 3 : Mécanismes de ruine.

Le second principe permet alors de vérifier si ces mécanismes pouvaient effectivement provoquer l'effondrement.

## 5-5. Méthode de calcul à la rupture

En 1976, J. Salençon pose les bases du calcul à la rupture et généralise l'analyse limite, en remplaçant la condition de parfaite plasticité par un critère de résistance sur le matériau. C'est une théorie qui permet de définir un domaine, appelé "ensemble de chargement potentiellement supportable" en dehors duquel l'instabilité est certaine. Pour la rendre applicable aux structures en maçonnerie, la plupart des auteurs ont admis les hypothèses de calcul suivantes :

- la maçonnerie est considérée sans résistance en traction et d'une résistance importante mais finie en compression  $\sigma_0$ .
- le critère de résistance adopté à l'interface pierres/mortier (joints) est le critère de frottement sec de Coulomb dont l'équation générale est fonction de la cohésion et de l'angle de frottement.

Le principe de cette méthode consiste à fractionner la voûte en plusieurs blocs "voussoirs" (ce modèle est proche de la réalité). La stabilité de la voûte impose que chacun de ces blocs soit en équilibre. Les sollicitations (moment fléchissant, effort normal et effort tranchant (M, N, T)) au niveau des joints doivent satisfaire les inégalités suivantes :

$$M_i \leq N_i h_i (1 - N_i/\sigma_0 S_i) \quad \text{et} \quad T_i \leq N_i \operatorname{tg}\varphi \quad \dots(I - 10)$$

Les effets de l'effort tangent étant négligés ( $\varphi$  très faible), la première inégalité définit un domaine convexe limité par deux arcs de parabole d'équation  $|M_i| \leq N_i \cdot h_i \cdot (1 - N_i/\sigma_0 S_i)$  (Figure 8). En d'autres termes, la valeur absolue de l'excentricité en chaque joint ne peut dépasser la demi-hauteur des voussoirs :  $|e_i| \leq h_i$ , ce qui nous ramène à la condition de MERY, précisément le centre de pression sur le joint doit se trouver en moins à l'intérieur de la voûte (Mery 1840).

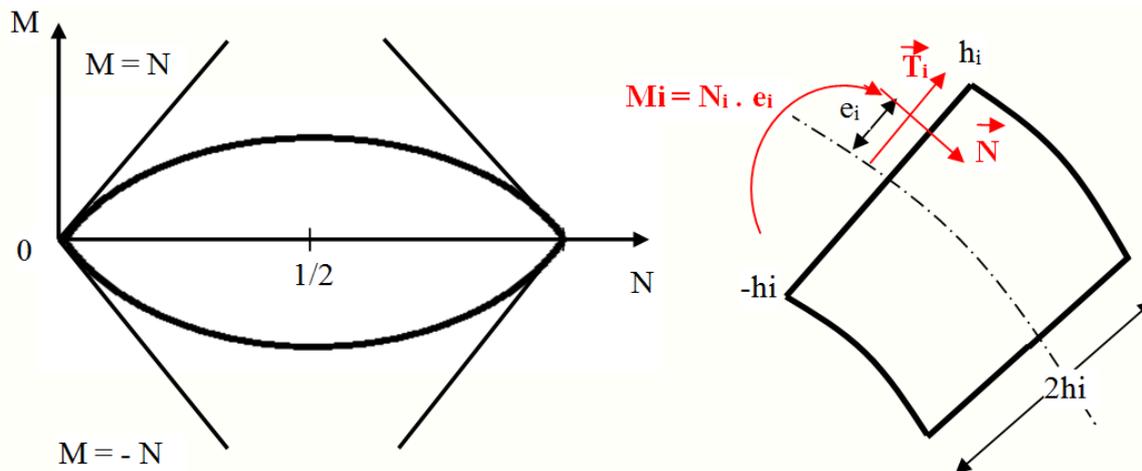


Figure 4 : Domaine de stabilité potentielle pour une section dans le plan (N, M).

Source : (SETRA 1982b).

Connaissant la géométrie, le chargement et la capacité de résistance des matériaux constitutifs de la voûte, nous pouvons déterminer pour chaque chargement les sollicitations au niveau des joints et tracer les lignes de pression correspondantes. De plus, nous pouvons tracer la ligne de pression identifiant la charge extrême  $Q_{\text{extrême}}$  qui, rapportée à la charge réelle  $Q$ , nous donne un coefficient  $F$ , appelé "coefficient de rupture", caractérisant la capacité portante de la voûte d'une manière globale, sans passer par le calcul des contraintes, ni introduire les lois de comportement des matériaux, interprété de la manière suivante :

- $F > 1$  : la voûte est **potentiellement stable**
- $F < 1$  : la voûte est **certainement instable**

Plusieurs logiciels ont été élaborés sur la base de ces méthodes, les plus récents sont VOUTE et RING. Le premier est élaboré par Delbecq (Delbecq 1982) sur la base de la méthode de calcul à la rupture, avec l'application de charges ponctuelles directement sur l'extrados de la voûte. Le second est mis au point par Gilbert (Gilbert 2001), basé sur la méthode d'analyse limite en considérant le comportement de la maçonnerie comme ductile, avec l'application d'une charge d'essieux répartie sur le matériau de remplissage.

## 5-6. Méthode des éléments finis (MEF)

Cette méthode, grâce à l'évolution phénoménale de l'outil informatique, a révolutionné le calcul des structures. Le principe est d'approximer la solution d'un problème complexe en le divisant en problèmes simples. Bien que l'idée remonte loin dans le temps,

l'application à la solution des équations aux dérivées partielles est plus récente. En effet, les premières véritables applications de cette méthode en mécanique des structures datent de 1956. Un groupe de chercheurs (Turner, Lough, Martin et Topp) de Boeing l'utilisent pour calculer la voilure d'un avion. La méthode des éléments finis est maintenant reconnue comme l'une des principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles dans des géométries quelconques, que ce soit 1D, 2D, 3D et même en 4D introduisant le temps, soit espace-temps (problème d'évolution). Elle permet également de tenir compte de tous les paramètres susceptibles d'avoir une influence sur le résultat final et qui permettent de se rapprocher de plus en plus de la solution réelle. Le principe de cette méthode, à l'instar des autres méthodes d'approximation, est de remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équation différentielle ou intégrale) par un autre discret (équation matricielle) de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement.

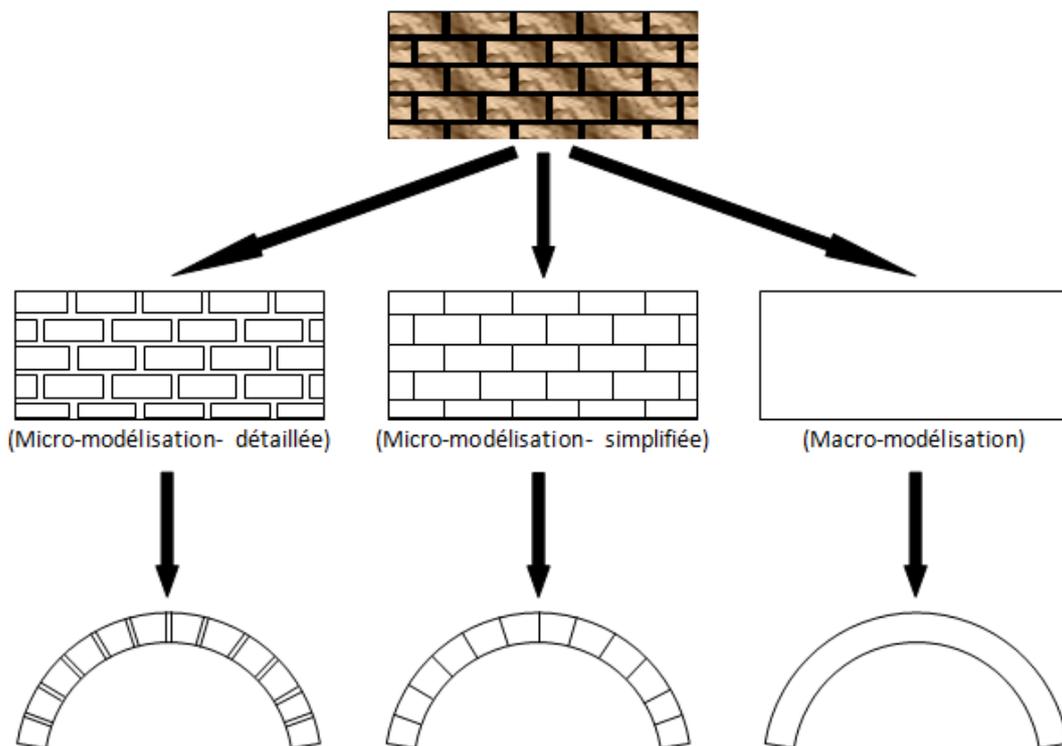


Figure 5 : Echelles de modélisation de la maçonnerie.

La difficulté majeure de l'application de cette méthode à la maçonnerie réside dans sa modélisation car, en plus de son hétérogénéité et de son anisotropie, la maçonnerie est un matériau composite constitué de blocs solides (pierres et/ou briques) et de joints (mortier) ; des matériaux aux comportements très différents auxquels il faut rajouter le lien entre eux. A présent, trois approches majeures se distinguent : l'approche micro-échelle-détaillée qui décrit

chacun des matériaux, leurs comportements et le comportement des zones de contact (interfaces), l'approche micro-échelle-simplifiée qui considère directement les joints comme étant des éléments d'interface et enfin, l'approche macro-échelle considérant la maçonnerie comme un matériau homogénéisé (Figure 5).

#### **5-6.1. Micro-modélisation-détaillée**

Le mortier, pierre et/ou brique sont modélisés individuellement ainsi que leurs interactions. Chaque matériau est caractérisé par sa propre loi de comportement, quant aux zones de contact, une loi d'interface vient compléter le modèle. Plusieurs modèles ont été adoptés pour approcher le comportement des unités solides (pierres ou briques) et celui du mortier, allant des simples modèles élastiques (Stafford Smith and B. Rahman, K.M.K 1972), (Page, A.W. 1978) aux modèles endommageables complexes (Reyes et al. 2009), (Pelà, Cervera, and Roca 2011), (Pelà, Cervera, and Roca 2013).

Cette approche est considérée comme étant l'outil d'analyse de maçonnerie le plus précis, mais un tel niveau de raffinement nécessite un effort de calcul intensif, qui limite aujourd'hui son application à l'analyse de petits éléments (i.e. des échantillons de laboratoire) ou de détails de structure.

#### **5-6.2. Micro-modélisation-simplifiée**

A la différence de la précédente, les joints de mortier sont supposés sans épaisseur et considérés directement comme des éléments d'interface. Les dimensions des blocs solides sont par conséquent étendues pour compenser le volume du mortier. Cette simplification a été proposée par Lourenço en 1995 (PB Lourenço, Jan G Rots, and Johan Blaauwendraad 1995) en réajustant les propriétés élastiques de l'élément expansé, les termes de sa matrice de raideur élastique sont obtenus à partir des modules (d'Young et de cisaillement) des matériaux composant la maçonnerie et de l'épaisseur réelle des joints (Figure 6).

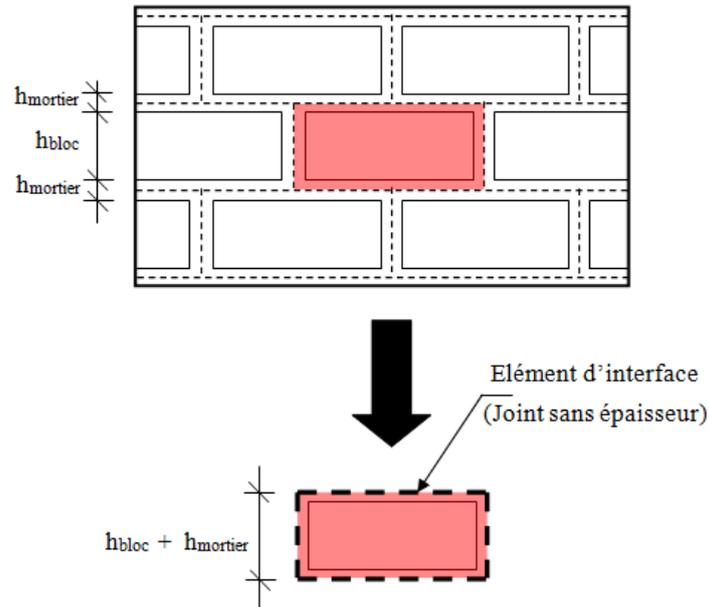


Figure 6 : Micro-modélisation-simplifiée de la maçonnerie.

Source : [(PB Lourenço, Jan G Rots, and Johan Blaauwendraad 1995)].

Cette simplification demeure insuffisante pour l'appliquer aux grandes structures en maçonnerie. Il a fallu donc étendre encore plus les dimensions du bloc solide pour créer un nouvel élément qui pourrait servir de cellule de base pour constituer le nouvel appareillage de la structure à calculer qui n'a pas forcément de rapport avec son appareillage réel. Il s'agit du volume élémentaire représentatif (VER), i.e. un nouvel élément aux propriétés géométriques et mécaniques équivalentes au même volume de maçonnerie réel. Depuis 1996, différents types de VER ont été proposés (Figure 7), pour la plupart en 2D destinés aux structures maçonnées dont l'appareillage est considéré périodique (de Buhan and de Felice 1997), (Pegon and Anthoine 1997), (Luciano and Sacco 1997), (Zucchini and Lourenço 2002), (Mistler, Anthoine, and Butenweg 2007), (Zucchini and Lourenço 2009).

De Buhan et de Felice considèrent, à travers leur modèle de VER (Figure 7(a)), que les blocs sont formés de matériau homogène obéissant à l'hypothèse de contraintes planes et les joints de mortier sont des éléments d'interfaces sans épaisseur soumis au critère Mohr-Coulomb. La comparaison effectuée entre les valeurs théoriques et expérimentales a montré que la stabilité de la structure est une fonction décroissante de sa finesse. Un rapport  $\left(\frac{2a}{b}\right)$  de 4,375 a donné une bonne concordance entre valeurs théoriques et expérimentales. Dans la même année (1997), Pegon et Anthoine, grâce à leur modèle (Figure 7(b)), mettent en évidence l'importance des joints verticaux. Ils affirment en outre que dans le cas d'une

analyse en 2D, l'hypothèse de déformations planes doit être adoptée et que l'hypothèse de contraintes planes peut conduire à des résultats erronés, aussi bien quantitativement que qualitativement. Luciano et Sacco proposent à leur tour le modèle (c) de la même figure, ses caractéristiques homogénéisées sont formulées de façon variationnelle en supposant que la fissuration ne se développe qu'au niveau du mortier en raison de sa faible résistance comparée à celle des unités solides. Le mortier est considéré au comportement élastique-fragile parfait de faible épaisseur et donc les fissures se développent, soit verticalement, ou horizontalement uniquement. Aussi, lorsque une fissure commence à se développer, une rupture complète du joint est supposée i.e. l'ouverture de la fissure augmente jusqu'à ce que cette dernière atteigne les blocs qui sont considérés indéfiniment élastiques.

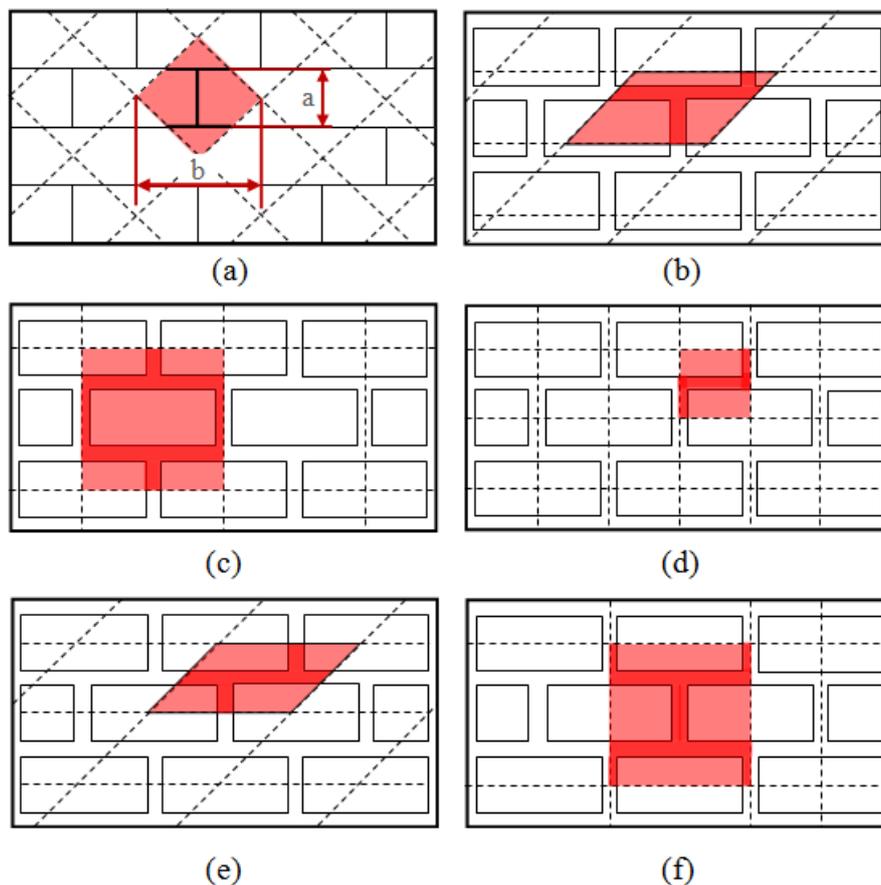


Figure 7 : Quelques cellules de base proposées.

Source : [(a) : de Buhan and de Felice 1997 ; (b) : (Pegon and Anthoine 1997)(de Buhan and de Felice 1997) (c) : (Luciano and Sacco 1997 ; (d) : Zucchini and Lourenço 2002 ; (e) : Mistler, Anthoine, and Butenweg 2007 ; (f) : Zucchini and Lourenço 2009]

En 2002, Zucchini et Lourenço développent un modèle dérivé des déformations réelles de la cellule de base (Figure 7(d)) en introduisant des modes de déformation internes

supplémentaires concernant l'homogénéisation en deux étapes standards. Les auteurs ont démontré à travers le modèle proposé qu'au-delà d'un ratio de rigidité blocs/mortier de 1000, l'erreur maximale dans le calcul du module d'Young homogénéisé est inférieure à 5%. Il est également montré que la surface de rupture anisotrope obtenue à partir du modèle homogénéisé semble bien représenter les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Mistler, Anthoine et Butenweg, en 2007, proposent un modèle (Figure 7(e)) dans un but de généraliser la procédure d'homogénéisation, appliquée auparavant au comportement dans le plan de la maçonnerie, au comportement hors plan. Les résultats ont montré que l'utilisation des caractéristiques en plan pour déterminer la rigidité hors plan conduit à une évaluation approximative de la rigidité à la flexion, mais l'approximation est jugée raisonnable par les auteurs. En 2009, Zucchini et Lourenço reviennent avec un nouveau modèle (Figure 7(f)). Ils ont pu reproduire les caractéristiques fondamentales d'un mur en maçonnerie soumis au cisaillement jusqu'à la rupture en adoptant un maillage éléments finis grossier. Le comportement des zones d'intersection des joints verticaux et des joints horizontaux est assimilé à des ressorts montés en série avec les joints d'assise dans la direction horizontale et en parallèle dans la direction verticale. Le modèle d'endommagement adopté en traction est un modèle scalaire isotrope simple (le défaut est considéré réparti de manière uniforme pour les trois directions) avec une surface d'endommagement de type Rankine. Un modèle de Drucker-Prager non associé (Zucchini and Lourenço 2007) a été adopté pour la simulation des déformations plastiques des différentes cellules.

D'autres approches d'homogénéisation ont été proposées pour la modélisation des structures de maçonnerie non-périodiques, (Cluni and Gusella 2004),(Gusella and Cluni 2006). Le volume élémentaire équivalent est déterminé par la méthode « test-window » et un critère probabiliste de convergence (Huet 1990) développée pour l'analyse des structures aux matériaux composites. La taille et la position des fenêtres sont choisies d'une manière tout-à-fait arbitraire. Les termes du tenseur de rigidité du milieu homogénéisé sont obtenus en considérant la hiérarchie des estimations relative aux conditions aux limites essentielles (en termes de déplacements nodaux) et naturelles (en terme de forces nodales). La première étape est de fixer les dimensions de la fenêtre. Chacune des portions de maçonnerie délimitée par les fenêtres (aux dimensions fixées), avec leur agencement de pierres et de mortier selon leurs positions (Figure 8(a)), est ensuite extraite de l'ensemble et analysée séparément. Ces portions

sont modélisées avec un maillage éléments finis considérant les deux matériaux (pierres et mortier).

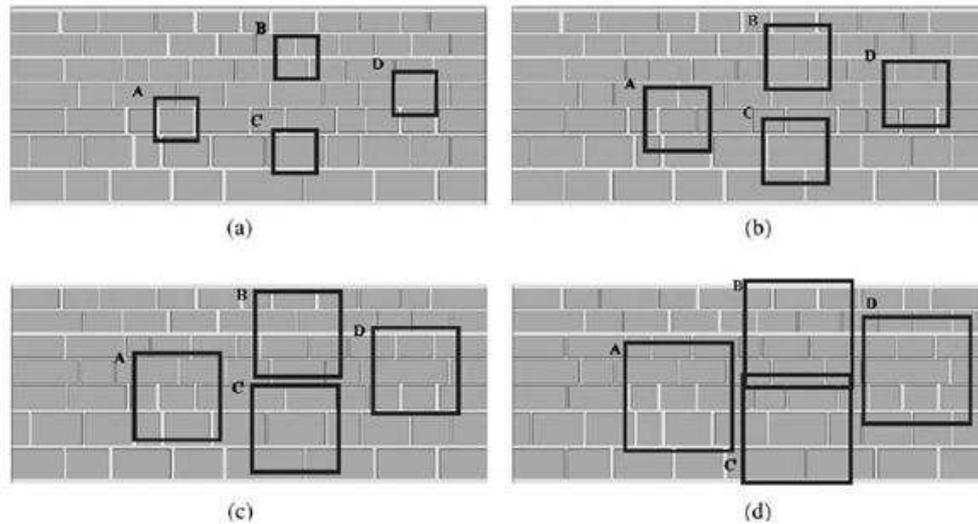


Figure 8 : Tailles et positions des test-windows sur le mur en maçonnerie.

Source : [(Cluni and Gusella 2004)]

En fonction des conditions aux limites appliquées (essentielle et naturelle), deux matrices de rigidité, notées  $C^e$  et  $C^n$ , sont obtenues pour chacune de ces positions. Ensuite, les moyennes de  $C^e$  et  $C^n$ , notées  $\langle C^e \rangle$  et  $\langle C^n \rangle$ , pour les différentes positions, sont calculées. Enfin, les termes de la matrice de rigidité effective, notés  $C_{ij}^*$ , sont estimés par des valeurs moyennes et des coefficients de variation  $\delta$  définis comme suit :

$$\tilde{C}_{ij}^* = \frac{\langle C^e \rangle_{ij} + \langle C^n \rangle_{ij}}{2} \quad \text{et} \quad \delta = \max_{ij} \left| \frac{\langle C^e \rangle_{ij} - \langle C^n \rangle_{ij}}{\tilde{C}_{ij}^*} \right| \quad \dots (I - 11)$$

L'étape suivante consiste à choisir de nouvelles dimensions de la fenêtre (plus grandes, figure 8(b)) pour le test-window, et ainsi de suite. L'itération est arrêtée lorsque  $\delta$  est suffisamment petit c'est-à-dire  $\langle C^e \rangle$  et  $\langle C^n \rangle$  sont suffisamment proches pour pouvoir estimer  $C^*$  par  $\tilde{C}^*$ . Concernant l'exemple présenté par les auteurs, quatre itérations ont suffi pour atteindre une bonne convergence.

### 5-7. Méthode des éléments distincts (MED)

Cette méthode est particulièrement adaptée à la mécanique des roches. Développée par Cundall (Cundall 1971), cette méthode permet de modéliser les milieux présentant un

caractère divisé (discontinu). Dans le calcul par éléments finis, les discontinuités peuvent être introduites en petit nombre à l'aide d'éléments de contact, les calculs étant limités aux petites déformations. Dès lors que l'on veut modéliser un milieu présentant un réseau de discontinuité et permettre les grands déplacements, la méthode des éléments distincts se révèle mieux adaptée, que ce soit pour les problèmes stationnaires ou évolutifs faisant intervenir la variable temps.

Un modèle MED considère la structure comme un empilement de blocs séparés (éléments discrets) qui peuvent se déplacer et, dans la plupart des techniques, se déformer indépendamment les uns des autres. Les blocs peuvent former des contacts à travers lesquels les efforts peuvent être transmis d'un bloc à l'autre. Il existe de nombreuses méthodes permettant de calculer les déplacements résultant du chargement. Les deux méthodes d'éléments distincts les plus répondues pour le calcul des structures en maçonnerie sont UDEC (Universal Discret Element Code) et DDA (Discontinuous Deformation analysis). La première (UDEC) est une méthode pas-à-pas développée à l'origine par Cundall (Cundall 1971) pour modéliser les roches fracturées et utilisée plus tard pour mettre au point le logiciel commercial connu sous le même nom. La seconde (DDA) est aussi une méthode pas-à-pas développée par Shi (Shi 1988). Dans cette méthode chaque bloc a un point de référence. Dans sa version simplifiée, les degrés de liberté d'un élément sont les déplacements de son point de référence. Dans la version « plus complexe », les éléments forment des contacts déformables et les déformations peuvent être décrites par des polynômes de degrés supérieurs.

Les deux méthodes UDEC et DDA, ainsi que leur combinaison avec la MEF, ont été utilisées avec succès pour l'analyse des arches en maçonnerie (Owen et al. 1998), (Thavalingam et al. 2001), (Giordano, Mele, and De Luca 2002).

Les logiciels développés sur la base de ces méthodes assurent aujourd'hui une très grande précision de modélisation du comportement des matériaux et des structures, mais seulement lorsque les données d'entrée, supposées constantes, sont fiables. On parle alors de méthodes d'analyse « déterministe ». Cependant, la science de l'ingénieur est plongée dans l'incertain et les données disponibles ne sont souvent que des réalisations de variables aléatoires. La conception n'est alors qu'un jeu de hasard dans lequel l'objectif est de maximiser les chances de succès d'un dimensionnement (Lemaire, Chateauneuf, and Mitteau 2005). La requalification d'ouvrages existants s'inscrit dans le même contexte. L'objectif, cette fois, est de maximiser les chances de pertinence d'un renforcement ou d'une réparation.

Il ne s'agit donc pas de solution unique mais de plusieurs, pour répondre aux exigences fonctionnelles et esthétiques d'un ouvrage. Actuellement, la théorie de la fiabilité des structures apporte des outils d'aide à la décision. Couplée aux modèles mécaniques, elle permet d'intégrer les incertitudes dans le processus de dégradation des structures, dans l'intensité du chargement, etc. Par ailleurs, plusieurs expériences ont montré les économies considérables pouvant être réalisées par une évaluation précise et efficace basé sur l'approche probabiliste (Casas 2011).

### 5-8. Couplage mécano-fiabiliste

L'étude fiabiliste d'une structure requière de bonnes connaissances dans quatre domaines de compétence (Figure 9). La mécanique, pour définir un modèle permettant d'évaluer la réponse mécanique « déterministe » de la structure. La fiabilité, pour l'analyse des différents modes de défaillance possibles et définir un état-limite de défaillance. Le domaine des statistiques, pour analyser les dispersions des paramètres d'entrée du modèle mécanique. Enfin, la probabilité, pour associer modèle et paramètres afin d'évaluer la probabilité que l'état-limite de défaillance défini soit dépassé (i.e. la probabilité de défaillance de la structure). La structure est finalement considérée comme sûre si cette probabilité de défaillance est inférieure à une valeur de référence, appelée probabilité de défaillance acceptable.

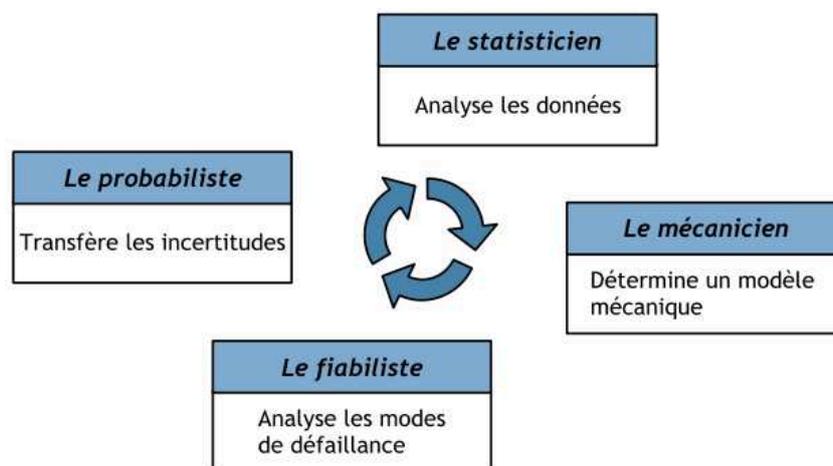


Figure 9 : Disciplines en collaboration dans l'élaboration d'une étude fiabiliste.

Source : [Lemaire 2004].

La définition de l'état limite est le point de départ du calcul mécano-fiabiliste. Cet état limite constitue la frontière entre le domaine de sûreté et le domaine de défaillance

(Figure 10). Lorsque l'état limite est atteint, la structure ne répond plus aux critères de conception, c'est-à-dire « la marge de sûreté » exprimée par l'état limite devient nulle. Mathématiquement, l'état limite est représenté par la fonction d'état limite  $g(X)$ , où  $X$  est le vecteur des variables aléatoires, que l'on peut décomposer en deux sous-vecteurs de variables aléatoires : le premier englobe l'ensemble des variables de résistance noté ( $R$ ) et le second représente l'ensemble de variables de chargement noté ( $S$ ). L'expression de la fonction d'état limite est donnée par la relation (I - 12).

$$g(X) = g(R, S) = R - S \quad \dots (I - 12)$$

La probabilité de défaillance de la structure s'écrit :

$$P_f = P(g(X) \leq 0) = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x) dx \quad \dots (I - 13)$$

où  $f_X$  est la densité de probabilité jointe de  $X$ .

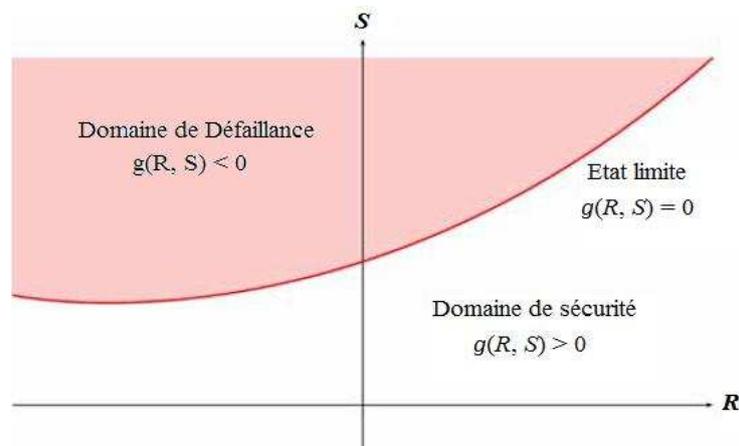


Figure 10 : Domaine de défaillance, état limite et domaine de sûreté.

Source : [SETRA 2012].

Une difficulté majeure est couramment rencontrée dans le calcul de cette intégrale qui, dans la plupart des cas, se révèle impossible à calculer. Pour remédier à ce problème, diverses méthodes ont été développées pour « estimer » cette probabilité de défaillance sans passer par le calcul de l'intégrale. Deux catégories se distinguent : les méthodes d'approximation (méthodes dites de niveau II), basées sur le développement en séries de Taylor, telles que FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method), et les méthodes dérivées des simulations de Monté Carlo (méthodes de niveau III).

### 5-8.1. Méthodes FORM/SORM

Les approximations FORM et SORM permettent de déterminer les coordonnées d'un point particulier appelé point de calcul noté  $P^*$ , appelé également point de défaillance le plus probable. La distance qui sépare ce point de l'origine du repère dans l'espace normé est appelée indice de fiabilité, que l'on note  $\beta$ . Il existe plusieurs indices adaptés aux types de surface d'état limite parmi lesquels :

- Indice de fiabilité de Cornell  $\beta_c$  défini comme l'espérance (moyenne) de la marge de sureté  $g(X)$  rapportée à son écart type :

$$\beta_c = \frac{E(g(X))}{\sigma(g(X))} \quad \dots (I - 14)$$

Dans le cas d'un état limite linéaire avec variables normales, la probabilité de défaillance peut être exprimée en fonction de l'indice de Cornell à travers la relation :

$$P_f = \Phi(-\beta_c) \quad \dots (I - 15)$$

Où  $\Phi(\cdot)$  représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Indice de Hasofer-Lind défini comme la distance la plus courte entre la surface d'état limite et l'origine du repère dans l'espace des variables normales centrées réduite et indépendantes  $u_i$  après transformation des variables de base  $x_i$  (voir Annexe C). Cet indice de fiabilité est évalué dans ce nouvel espace en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{HL} = \min \sqrt{\sum_i u_i^2} \\ \text{et} \\ H(u_i) \leq 0 \end{array} \right. \quad (I - 16)$$

Où  $H(u_i)$  est la fonction d'état limite dans l'espace normé réduit.

Dans l'approche au premier ordre (FORM), la surface d'état limite est approchée par un hyperplan tangent au point de conception  $P^*$  (Figure 11).

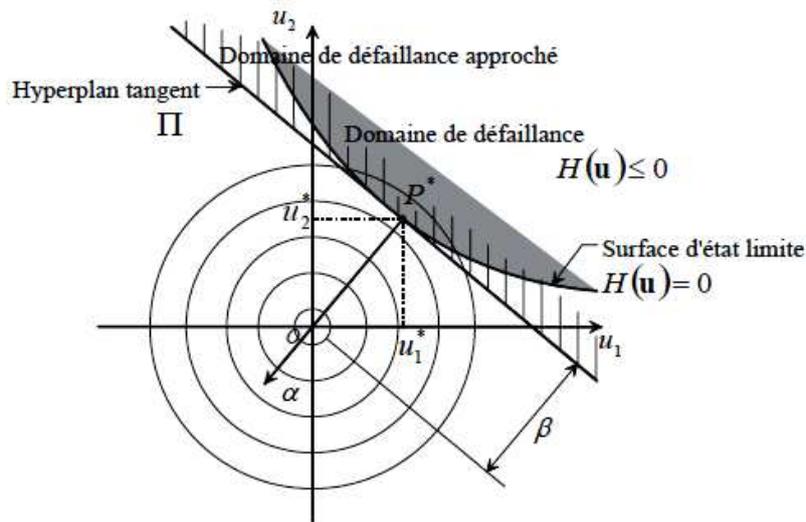


Figure 11 : Illustration de l'approximation FORM dans l'espace standard.

Source : [(Lemaire, Chateauneuf, and Mitteau 2005)]

L'équation d'un tel hyperplan est donnée par l'expression :

$$(\Pi) : L(\{U\}) = \sum_i \alpha_i U_i + \beta \quad (\text{I} - 17)$$

Avec :

$$\{P^*\} = -\beta\{\alpha\} \quad (\text{I} - 18)$$

La surface de défaillance devient linéaire, la probabilité de défaillance est estimée par la relation (I – 15).

Dans une approche de second ordre (SORM), la surface d'état limite est approchée par un hyperparaboloïde passant par le point de conception (Figure 12). Cette surface quadratique est obtenue suite à un développement de Taylor au deuxième ordre de la fonction de performance (fonction d'état limite) au voisinage du point de conception.

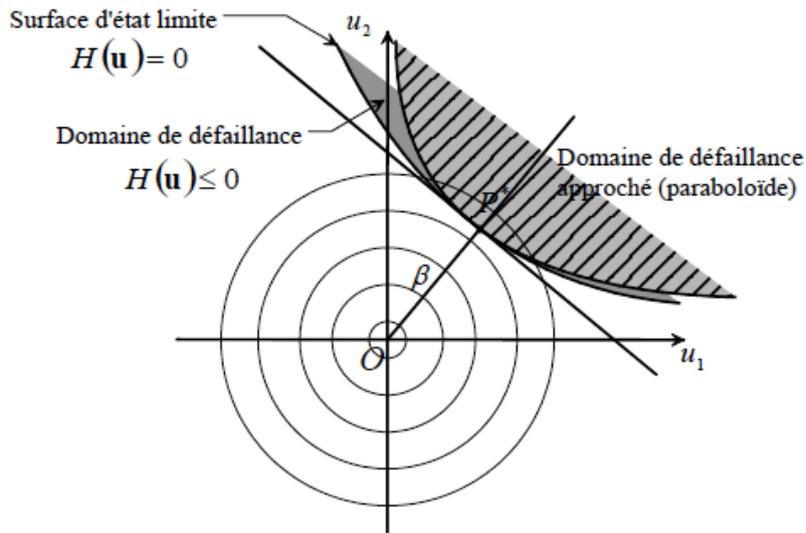


Figure 12 : Illustration de l'approximation SORM dans l'espace standard.

Source : [(Lemaire 2004)]

Plusieurs formules ont été proposées pour approcher la probabilité de défaillance :

– la formule asymptotique de Breitung (Breitung 1989) :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - k_i \beta)^{-1/2} \quad \dots (I - 19)$$

Cette approximation donne des résultats pertinents lorsque  $\beta$  est assez grand ( $\beta > 2$ ). Elle a d'abord été modifiée par Hohenbichler (Hohenbichler et al. 1987) en remplaçant  $\beta$  par  $\left(\frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)}\right)$ , puis améliorée par Tvedt (Tvedt 1983) pour permettre l'estimation de la probabilité de défaillance correspondant à des valeurs plus petites de  $\beta$ .

– la formule générale de Tvedt (Tvedt 1990) :

$$P_f \approx \varphi(\beta) R_e \left\{ i \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{i\infty} s^{-1} \exp \left[ \frac{(u + \beta)^2}{2} \right] \prod_{j=1}^{n-1} (1 - k_j s)^{-1/2} ds \right\} \quad \dots (I - 20)$$

Où  $R_e$  est la partie réelle d'un nombre complexe, et  $i = \sqrt{-1}$ . Cette formule fournit une approximation plus fine de la probabilité de défaillance.

Les méthodes d'approximation FORM & SORM présentent l'avantage d'estimer la probabilité de défaillance pour un coût de calcul relativement faible. Cependant, la validation des résultats obtenus par une technique de simulation de niveau III telle que la méthode de Monte Carlo est nécessaire. Cette dernière requiert un nombre important de réalisation pour obtenir une bonne précision. Afin de remédier à ce problème, des techniques de simulation

conditionnée ont été développées, en particulier l'échantillonnage par tirage d'importance. Connaissant le point de conception, cette méthode permet d'effectuer des simulations de Monte Carlo ciblées autour du point de conception déterminé (Figure 13), conduisant plus fréquemment à la défaillance et, par conséquent, d'estimer la probabilité de défaillance en un minimum de tirage.

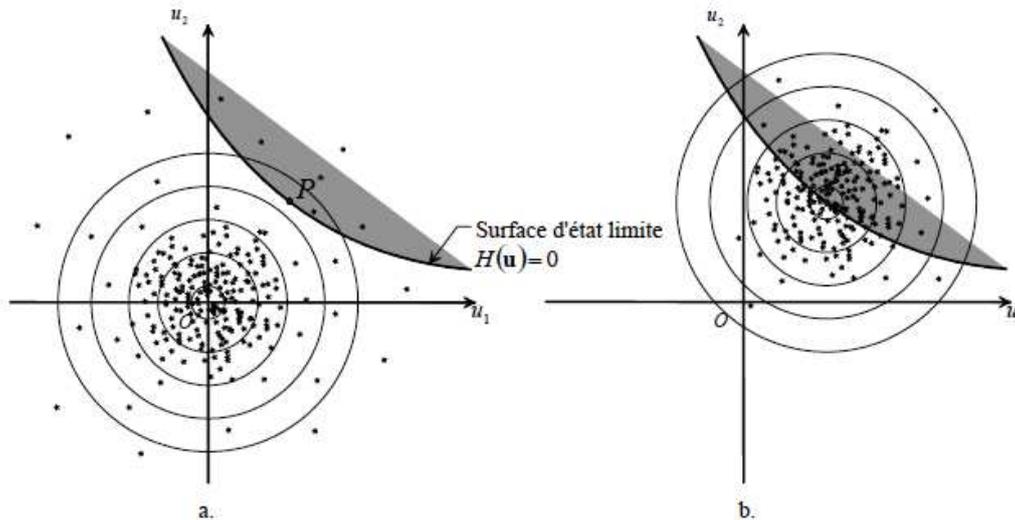


Figure 13 : Simulation de Monte Carlo standard (a.) et tirage d'importance (b.).

Source : [(Lemaire 2004)]

### 5-8.2. Simulations de Monte Carlo

Cette technique, dont le principe est très simple, fournit la solution la plus précise à l'intégral (1 – 13) sans passer par le calcul de l'indice de fiabilité. Toutefois, elle nécessite d'effectuer un nombre important de tirage aléatoire pour atteindre une bonne précision dans l'estimation de la probabilité de défaillance (de l'ordre de  $n+2$  à  $n+3$  tirages pour des probabilités de défaillance de l'ordre de  $10^{-n}$ ). Suite à chaque tirage, la marge de sureté est évaluée. La probabilité de défaillance est définie comme le nombre de tirage ayant conduit à la défaillance, que l'on note  $N_{déf}$ , rapporté au nombre total de simulations  $N_s$ :

$$P_f = \frac{N_{déf}}{N_s} \quad \dots (I - 21)$$

En fait, pour un nombre de tirages  $N_s \rightarrow \infty$ , l'estimation de la probabilité de défaillance devient exacte (Faber 2007). Cependant, les simulations peuvent être très coûteuses en termes de temps de calcul. Dès lors, l'incertitude sur l'estimation devient un paramètre très

important. Il est montré que l'estimation est proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{N_{déf}}}$ , qui signifie que pour une probabilité de défaillance de l'ordre de  $10^{-6}$ , il faudra effectuer  $10^8$  simulations pour obtenir une estimation avec un coefficient de variation de 10%. Des simulations supplémentaires seront donc nécessaires pour réduire la variance de l'estimation.

Afin de pouvoir tirer profit des avantages de cette technique en minimisant l'impact de ses inconvénients, un compromis doit être trouvé entre les deux paramètres antagonistes : la précision du modèle mécanique et le temps de calcul. Cette thèse s'inscrit dans cette démarche.

## 6- Conclusion

L'étude de l'état de l'art des méthodes de calcul des voûtes en maçonnerie a montré que la micro-modélisation-détaillée présente souvent l'outil d'analyse des structures maçonnées le plus précis. Toutefois, un tel niveau de raffinement est extrêmement lourd en termes de temps de calcul, ce qui a limité l'application de cette approche à l'analyse de petits éléments ou de détail de structure. Cette restriction a incité certains chercheurs à simplifier cette méthode, en admettant une certaine marge d'erreur, pour élargir son domaine d'application. La première simplification, proposée par Lourenço en 1995, suppose les joints du mortier sans épaisseur, et les dimensions des éléments solides sont élargies pour compenser le volume du mortier en réajustant leurs propriétés mécaniques. Cette simplification a pu réduire le temps de calcul, mais demeure insuffisante pour l'appliquer à l'échelle de l'ouvrage. La seconde simplification propose d'étendre encore plus les dimensions des éléments solides en introduisant la notion du volume élémentaire représentatif (VER) aux propriétés géométriques et mécaniques « homogénéisées » équivalentes au même volume de maçonnerie réel. Cette approche constitue la base de conception de la plupart des logiciels et applications qui existent jusqu'à présent pour le calcul des ouvrages en maçonnerie. Ces outils numériques, dits « déterministes », ont fait preuve d'une très grande précision. Cependant, cette précision n'est assurée que si les paramètres d'entrée du modèle (géométriques, physiques et mécaniques), supposés constants, sont précis. Par ailleurs, l'étude bibliographique, menée sur les matériaux utilisés en maçonnerie, a montré d'une part qu'il est parfois très difficile, voir impossible de caractériser certains défauts (paramètres géométriques : position et/ou profondeur des défauts), et d'autre part a mis en évidence une

large variabilité des caractéristiques mécaniques que ce soit en termes de résistance (à la compression comme à la traction) ou du module d'Young.

En conséquence, s'orienter vers une approche probabiliste semble être le choix le plus adapté à la problématique posée au début de cette thèse, qui est de mettre au point un outil numérique d'aide au diagnostic des voûtes en maçonnerie permettant d'intégrer l'aléatoire dans le processus de dégradation de la structure et de tenir compte de cette variabilité des caractéristiques mécaniques du matériau maçonnerie. Ce choix est également motivé par des considérations économiques. Il est rappelé qu'au final, parmi toutes les méthodes efficaces de diagnostic qui peuvent exister, c'est la plus économique qui intéresserait les gestionnaires des ouvrages.

L'analyse bibliographique conduit aux constats suivants :

- un gros travail est fait et se poursuit sur les modèles de calculs or, le problème du bureau d'études chargé du diagnostic est d'informer, le plus rapidement possible, ses mandataires (propriétaires des ouvrages) sur l'état de leurs ouvrages. Cela exclut les modélisations complexes et les résultats hautement précis sur le vieillissement et l'endommagement des matériaux ;
- la variabilité des propriétés mécaniques de la maçonnerie n'est pas prise en compte or, nous avons montré, à travers les résultats publiés par différents auteurs (Tableau 10), son importance et son influence ;
- l'endommagement est lui aussi variable (lié principalement à la forme de la structure, aux conditions environnementales auxquelles elle est exposée, etc.), et n'a pas été pris en compte dans ce qui a été fait jusqu'à présent ;
- la hiérarchisation des zones d'ouvrage à inspecter, permettant de savoir quelles sont celles qui devront être inspectées en premier, n'a pas été traité ;
- le problème de fiabilité de l'ouvrage dépendant du temps avec la prise en compte de la variabilité des caractéristiques mécaniques n'a pas été traité.

Par la suite, nous choisissons de développer, parmi les points qui viennent être soulevés, trois cas particuliers qui feront chacun l'objet d'un chapitre :

- la perte d'épaisseur localisée de la voûte ;
- l'influence de la variabilité du module d'Young sur le comportement de la voûte ;

- la fiabilité de la voûte dépendant du temps.

Devant l'étendue du travail à réaliser, nous faisons le choix de rester dans une phase « exploratoire », de façon à pouvoir orienter des travaux de recherche ultérieurs.

# **Chapitre : II**

## **Problèmes d'inspection et étude de cas**

## II. Problème d'inspection et étude du cas

### 1- Introduction

Les ponts en maçonnerie, encore en service, représentent plus de 40% des ponts en Europe (Kamiński and Bień 2013), dont la plupart sont centenaires où le processus de dégradation s'est déjà mis en place depuis des plusieurs années. La première question qui vient à l'esprit est comment réparer ces ouvrages, tout en garantissant une action, à la fois pertinente et économique, capable de prolonger leurs durées de vie ? Il est important de souligner que d'une manière générale, les travaux de réparation sont directement liés au diagnostic. Plus le diagnostic est précis, plus les réparations sont durables et surtout moins coûteuses dans le temps. Le contrôle non destructif (CND), dans certains cas (voir tableau 12), permet d'avoir une cartographie, d'identifier la présence de défaut, mais ne permet pas d'en identifier l'ampleur. C'est le cas par exemple de la perte d'épaisseur de la voûte. Les méthodes citées dans le tableau 12 (méthodes soniques, géoradar, mesures de conductivité) sont principalement qualitatives et donnent généralement une information variées (note attribuée par les auteurs est 2 ou 3). L'ampleur du défaut est elle donnée par un carottage.

Parallèlement, les maîtres d'ouvrages exigent parfois l'emploi de méthodes CND et n'autorisent qu'un nombre très limité de carottage. Cependant, l'étude bibliographique, effectuée sur les principales altérations susceptibles d'affecter les ouvrages maçonnés ainsi que sur leurs techniques d'auscultation, a montré qu'il est parfois très difficile, voire impossible de détecter certains types de défaut sans avoir recours au carottage. Le défaut qui nous intéresse ici est situé à l'interface entre le remblai et l'extrados de la voûte. Un défaut d'étanchéité de la chaussée sur le pont entraîne une infiltration des eaux. L'infiltration n'est pas uniforme mais se fait à la verticale de chaque défaut de la chaussée. Elle est donc localisée en plusieurs points.

Nous nous intéressons à une seule localisation. L'eau s'infiltré et s'écoule par gravité, pour atteindre la voûte. Suivant la perméabilité des joints et des pierres, une partie traverse, une autre s'écoule suivant la pente formée par la voûte tout en s'infiltrant progressivement. L'identification au cours de l'inspection visuelle peut se faire :

- soit par l'observation d'une perte importante de matière (dissolution de la calcite, désagrégation...etc.) localisée sur l'intrados si le mécanisme d'infiltration est ancien ;
- soit par l'observation d'une zone humide sur l'intrados si l'infiltration est récente.

C'est ce dernier cas qui est traité. L'eau, en s'écoulant sur la voûte, dissout certains de composants du matériau constitutif. Une perte d'épaisseur, liée à l'infiltration apparaît alors. Ce désordre est localisé sur l'extrados et n'est pas visible. Or toute perte de matière a une influence sur la capacité portante de la voûte, une influence qui peut être minime ou importante. A partir de l'observation d'une zone plus humide, ou bien bénéficiant d'une variation de teinte par rapport aux inspections précédentes, nous voulons déterminer la variation d'épaisseur à prendre en compte. Pour cela, nous réalisons un carottage. Or la question que nous nous posons est où carotter pour avoir l'information la plus utile possible. C'est l'objet de ce chapitre.

Pour tenir compte des incertitudes sur la localisation du défaut, son ampleur (profondeur, étendue ...etc.), nous choisissons d'utiliser une approche probabiliste. Nous ne faisons qu'un seul carottage, qui ne donne qu'une valeur de la profondeur du défaut (celle au point du carottage). Cette valeur permet le recalcul de la capacité portante de la voûte. Le gestionnaire peut-il s'appuyer sur cette valeur de résistance par la suite ? Nous simulerons plusieurs cas de figures (position de défaut, profondeur de défaut, lieu de carottage), pour identifier les distributions de la capacité portante de la voûte correspondantes. Pour simuler un grand nombre de cas, un modèle simple de calcul (**ArcProg\_Z**) a été développé. Il s'appuie sur la méthode des éléments finis. Le pont est modélisé en 2D, par des éléments poutres, que nous appellerons segments. Chaque segment représente une portion de la voûte sur sa profondeur. Les caractéristiques mécaniques d'un segment de voûte sont homogénéisées sur la profondeur. Ce choix de simplification permet de diminuer le temps de calcul et ainsi d'effectuer un grand nombre de simulations.

Le présent chapitre est composé de trois parties. La première définit les hypothèses du modèle adopté (chargement, matériaux, ...etc.), ainsi que sa validation pour le calcul de la réponse mécanique. La seconde présente le cas d'inspection traité et enfin, la troisième partie porte sur une modélisation probabiliste de l'inspection, en utilisant les simulations de Monte Carlo. Dans cette étude les résultats sont analysés en fonction de l'évaluation de la capacité portante de la voûte.

## 2- Modèle de calcul

Des tests expérimentaux effectués sur des ponts ont montré que la rupture d'une arche est généralement de nature globale et qu'il est rare que ce soit causé par la rupture de l'un de ses composants (Casas 2011). De plus, le mode de rupture le plus identifié est celui caractérisé par la formation de mécanismes à quatre rotules (trois rotules dans le cas d'un système symétrique chargé à la clé de voûte). Le principe de formation des rotules est conditionné par le théorème du tiers central i.e. une rotule apparaît sur un nœud si le centre de pression (point d'application de la résultante des sollicitations) au niveau de ce même nœud est en dehors du tiers central de l'épaisseur de la voûte (Figure 14). Dans ce cas le matériau est sollicité partiellement en traction. Or on néglige la résistance en traction du matériau. Il y a donc rupture partielle en traction du segment. C'est ainsi qu'est définie une rotule. Sur la figure 14, est représentée la ligne passant par les centres de pression. On constate qu'en 4 points cette ligne sort du tiers central de l'épaisseur de la voûte. L'arc perd son hyperstaticité, devient un mécanisme qui le conduit à la ruine (Figure 14b). Le modèle proposé dans ce travail permet cette analyse globale de la voûte tout en minimisant le temps de calcul (Zanaz et al. 2016). La voûte est assimilée à une ossature plane encadrée, formée d'éléments poutres (segments) à deux nœuds chargés en flexion et en compression. La formation de rotules est conditionnée par le théorème du tiers central, i.e. une rotule apparaît sur un nœud si le centre de pression (point d'application de la résultante des sollicitations) au niveau de ce même nœud est en dehors du tiers central de l'épaisseur de la voûte.

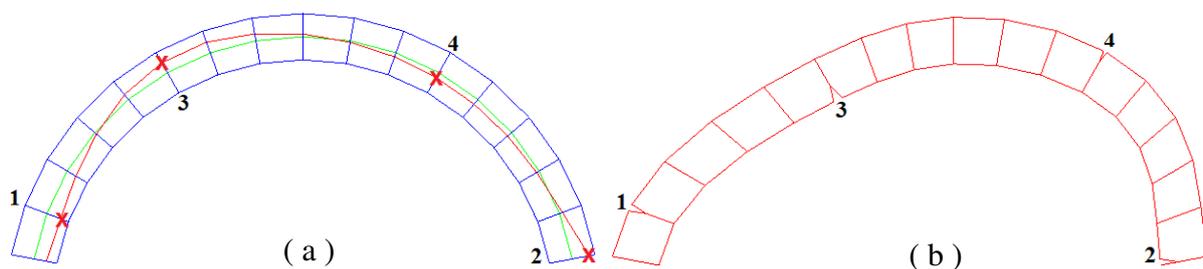


Figure 14 : (a) : Ligne de pression ; (b) : Mécanisme de ruine (ArcProg\_Z).

Source : [Zanaz et al. 2016].

Les caractéristiques homogénéisées de chaque segment sont condensées au niveau de sa fibre moyenne. Cette méthode permet de donner la limite inférieure (lower bound) de la capacité portante de la voûte (Koocharian 1953). Le chargement prend en compte: la charge permanente du remplissage, la charge à l'essieu sous forme de charge ponctuelle en surface

et la réaction du remblai. Cette dernière est modélisée par des ressorts horizontaux et verticaux agissant en chacun des nœuds ( $i$ ) et affectés par des coefficients de raideur ( $k_{hi}$  et  $k_{vi}$ ) tenant compte du module de réaction du terrain et de la surface de contact correspondant à chaque nœud (Figure 15). Cette raideur des ressorts est nulle lorsque les déformations ont pour effet d'éloigner la structure de la voûte du remplissage (remblai).

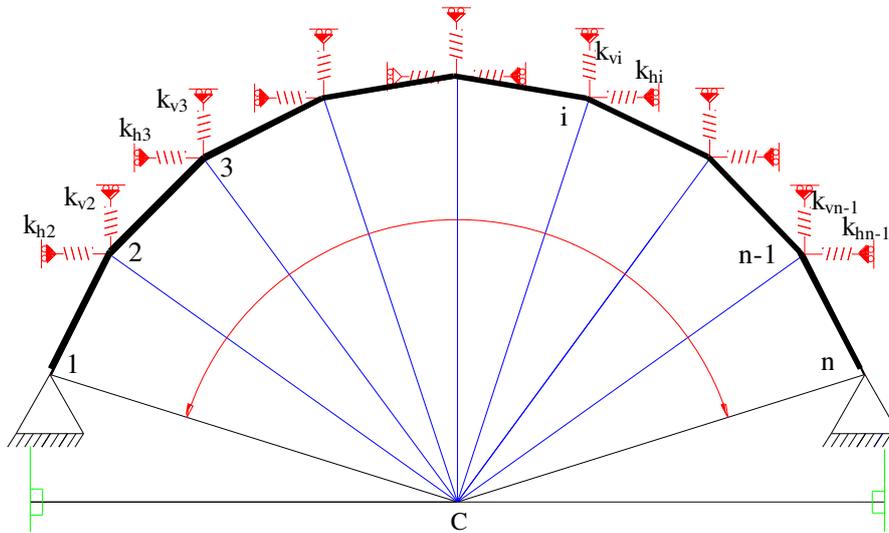


Figure 15 : Modélisation de la réaction du terrain du remplissage.

Source : [Zanaz et al. 2015; Zanaz et al. 2016].

La procédure de calcul est illustrée sur la figure 16. Dans cette procédure, la position de la charge ponctuelle en surface est déplacée le long de la demi-voûte avec un pas  $\Delta x$ . A chaque position de charge, une analyse incrémentale par éléments finis est effectuée. La charge appliquée est augmentée avec un pas  $\Delta p$  jusqu'à la formation des 4 rotules, synonyme de mécanisme de ruine. La charge critique est ainsi déterminée pour la position spécifiée de la charge à l'essieu. La procédure peut donc être poursuivie pour les autres positions du chargement afin de modéliser le trafic sur le pont. Ce qui permet d'en déduire la valeur minimale des charges critiques calculées qui correspond à la capacité portante de la voûte  $P_{cr}$ , ainsi que la position critique correspondante  $X_{cr}$  et le mécanisme de ruine correspondant.

Les différentes étapes de calcul ainsi que la détermination des contraintes verticales et les pressions horizontales engendrées par celles-ci sont présentées en annexe E.

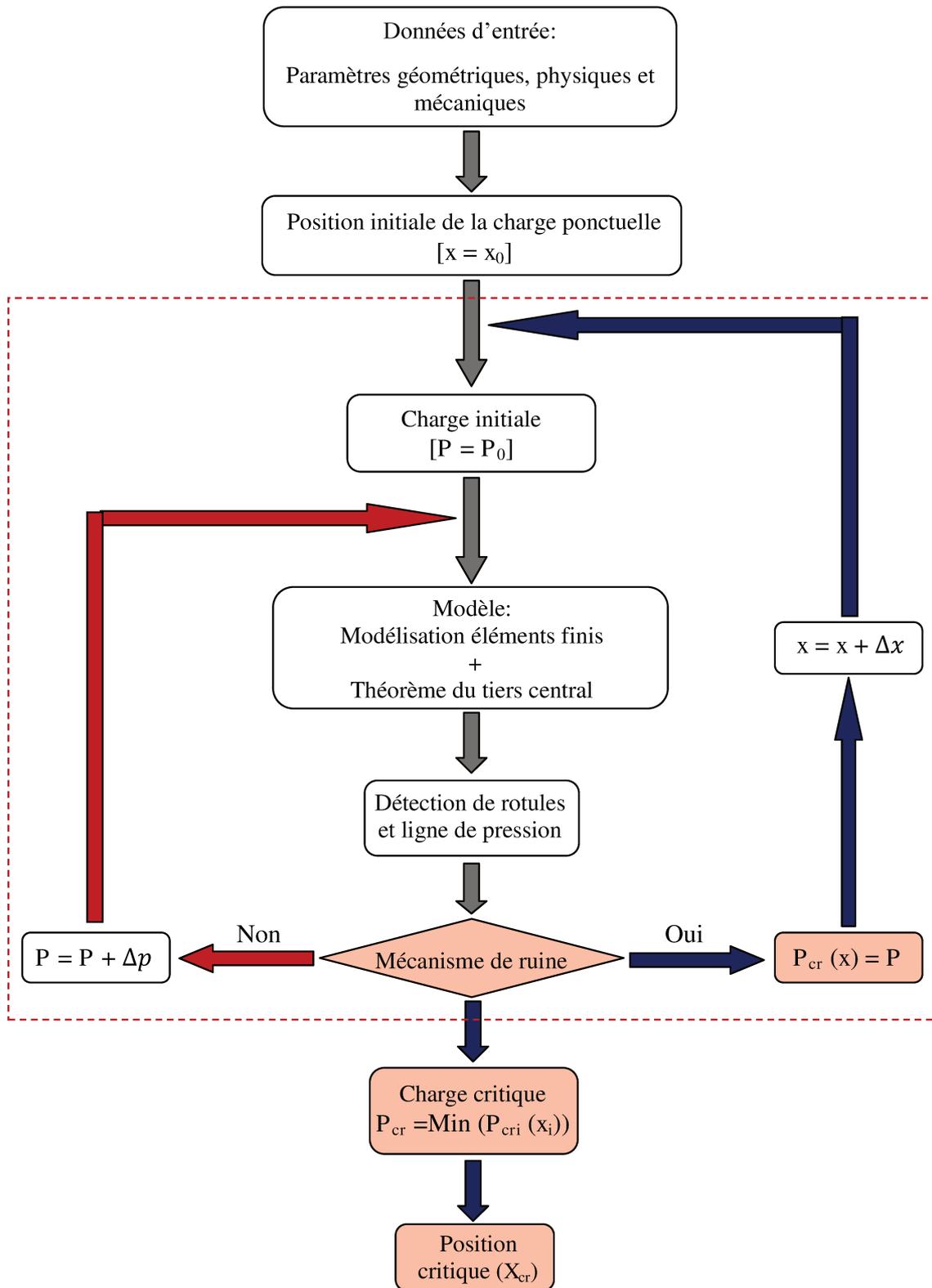


Figure 16 : Algorithme de la procédure de calcul (ArcProg\_Z).

Source : [Zanaz et al. 2016].

## 2-1. Application du modèle et validation

Afin de valider ce modèle numérique, les comparaisons ont été effectuées avec des données de la littérature. L'ensemble des caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques des ouvrages, objet de cette comparaison, sont reportées en annexe D.

Le pont Schwarzwasserbrücke en Suisse a été modélisé avec le logiciel Ring 2.0 (Grandjean 2009). Cet ouvrage composé de 40 voussoirs est caractérisé par une ouverture de 16,75 m et une flèche de 2,84 m. L'analyse par éléments finis a été effectuée au moyen du programme ArcProg\_Z en utilisant les paramètres d'entrée de cet ouvrage et la comparaison est effectuée par rapport aux deux principaux résultats:

- la charge critique ;
- les positions des rotules.

Les résultats (Figure 17) montrent les 4 rotules aux mêmes positions (joints numéro 1, 12, 25 et 41). La charge critique donnée par Ring 2.0 de 678,4 kN est très proche de celle obtenue par ArcProg\_Z égale à 679,3 kN, soit un écart d'environ 0,1% (Zanaz et al. 2016).

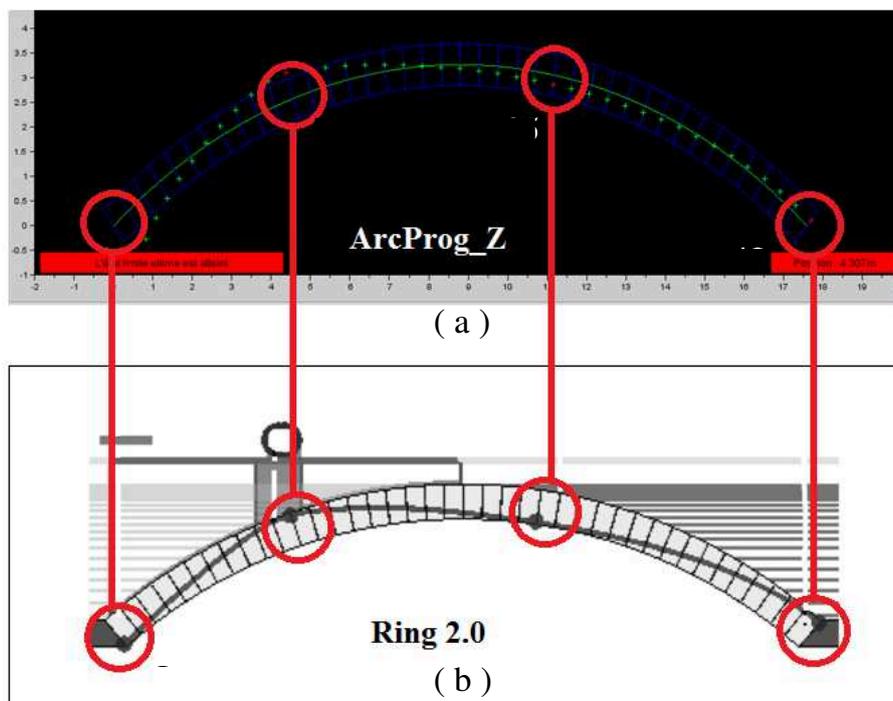


Figure 17 : Comparaison des positions des rotules données par : (a) ArcProg\_Z ; (b) Ring 2.0 (Schwarzwasserbrücke).

Les résultats expérimentaux, disponibles dans la littérature, fournissent une intéressante étude de cas réel. Il s'agit du Shinafoot Bridge (Royaume-Uni), qui est un ouvrage constitué d'une seule voûte composée de 11 voussoirs et qui a été testé jusqu'à la ruine. L'essai consistait à charger de façon incrémentale au quart de l'ouverture de la voûte. L'effondrement s'est produit suite à la formation d'un mécanisme à quatre rotules sous une charge totale à la rupture de 2524 kN (Grandjean 2009). La simulation de ce même essai avec le logiciel développé dans le cadre de cette thèse (Figure 18) a donné le même mécanisme de ruine (formation des quatre rotules aux mêmes endroits (joints numéro 1, 4, 8 et 12)) sous une charge totale à la rupture de 2434 kN, soit un écart de 3,6% (Zanaz et al. 2016).

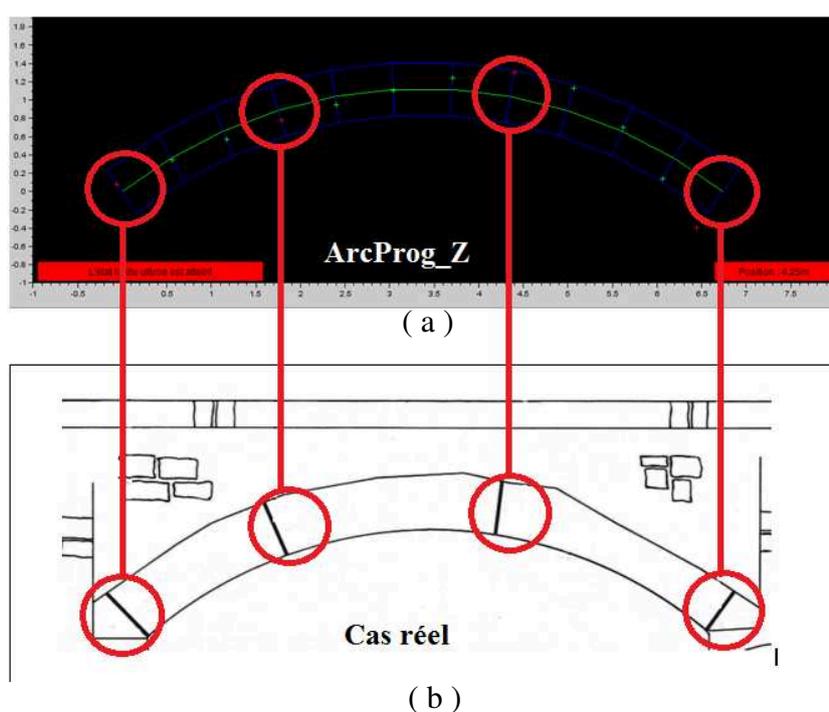


Figure 18 : Comparaison des positions des rotules données par : (a) ArcProg\_Z ; (b) cas réel (Shinafoot Bridge).

Nous avons donc traité 2 cas d'études issus de la littérature. Dans un premier temps, une comparaison avec un logiciel commercial donne des résultats très proches ce qui est satisfaisant. Le logiciel est basé sur les mêmes hypothèses de modélisation (Structure 2D constituée d'éléments poutres). Dans un deuxième temps une confrontation avec un cas réel donne un résultat très satisfaisant. Il ne permet pas de traiter le cas 3D, en particulier le cas d'une voute très longue ou d'un défaut ponctuel, i.e. l'emprise du défaut sur la profondeur de la voute est supposé suffisamment étendu pour ne pas envisager un mécanisme de ruine en 3D.

Avec cette démarche et sous ces hypothèses nous pouvons étudier maintenant la problématique introduite plus haut sur le complément d'inspection en cas d'infiltration d'eau.

### 3- Perte d'épaisseur causée par des infiltrations d'eau

L'étude bibliographique a montré que la présence d'eau est déterminante dans l'apparition de la plupart des altérations des ouvrages en maçonnerie. Le modèle proposé ici traite le cas le plus rencontré lors des inspections des anciens ouvrages maçonnés, qui est lié à la perte de matière affectant potentiellement les pierres calcaires qui peut être causée par des infiltrations des eaux. La figure 19 présente la configuration de la voûte analysée, le chargement et le défaut considérés. Par soucis de simplicité, l'étude se limite à un seul défaut localisé (perte d'épaisseur de quelques segments). Etendre l'étude à plusieurs défauts peut se faire sans difficulté. La voûte est soumise aux charges verticales dues à son poids propre, à celui du matériau de remplissage et à la charge d'essieux ainsi qu'aux pressions horizontales associées (voir annexe E).

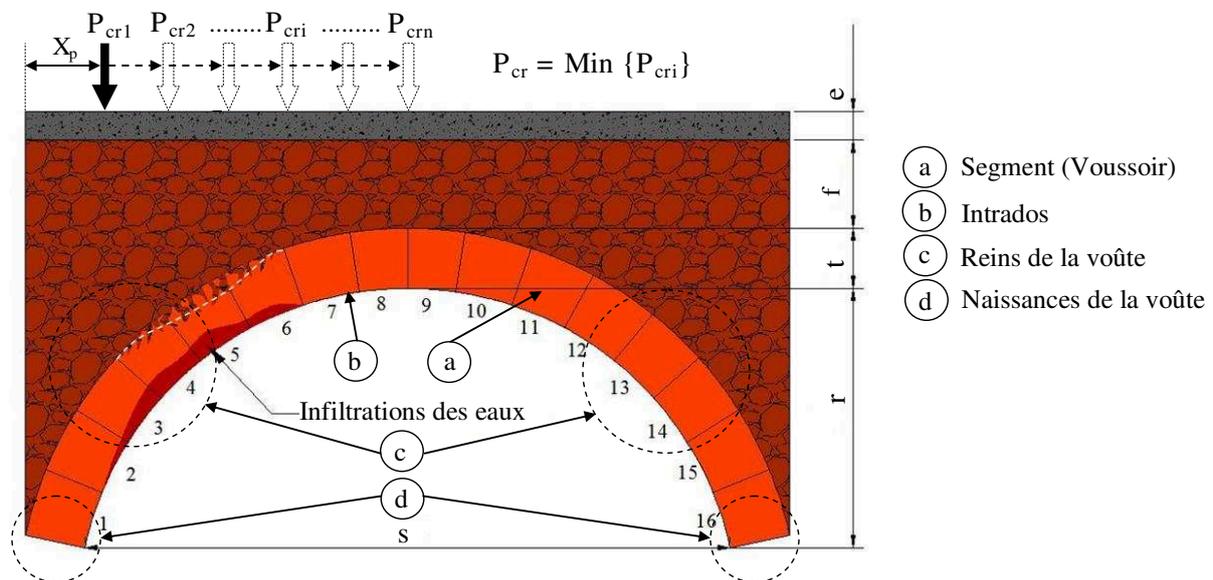


Figure 19 : Configuration de la voûte considérée.

Source : [Zanaz et al. 2016].

La situation d'inspection considérée pour les ponts en maçonnerie correspond au cas d'infiltrations d'eau supposées être observées sur le côté gauche de l'intrados de la voûte (Figure 19). Ces infiltrations peuvent indiquer l'existence d'un défaut caché. L'épaisseur restante du segment concerné et/ou des segments adjacents, l'étendue du défaut et sa position

sont des paramètres incertains. Par ailleurs, l'évaluation des méthodes de contrôle par rapport à leurs applicabilités pour les ponts en maçonnerie, effectuée par (Oliveira et al. 2010), a montré que la seule méthode qui peut fournir des informations utiles sur ce type de défaut est le carottage, les méthodes non destructives telles que: le géoradar, les méthodes acoustiques et les mesures de conductivité ne peuvent pas fournir des informations suffisamment utiles. Cependant, avant de réaliser tout carottage, il est nécessaire d'apporter des réponses à deux questions importantes :

- où le carottage devrait être effectué ?
- combien de carottes doit on réaliser ?

Dans la majorité des cas, il est impossible de répondre avec précision à ces questions, ce qui implique souvent d'effectuer des prélèvements supplémentaires et, par conséquent, des coûts supplémentaires. En se basant sur une approche probabiliste, l'objectif de cette étude est d'y répondre à la première question en considérant le cas où un seul et unique carottage peut être effectué.

### 3-1. Modélisation du défaut

Pour modéliser ce cas, une hypothèse a été faite sur l'étendue du défaut qui sera fonction de sa profondeur maximale. Pour des raisons de simplification, tous les segments de la voûte sont supposés avoir le même module d'Young. Le défaut est caractérisé de la manière suivante : la position du défaut, qui correspond à celle de sa profondeur maximale, est définie par sa distance par rapport à l'extrémité gauche de la voûte, notée  $X_d$  comme indiqué sur la figure 20. Pour étudier l'influence de la position du défaut sur la capacité portante de la voûte, l'étendue du défaut  $l$  est projetée sur l'axe horizontal, avec :

$$l = l_l + l_r \quad \dots (II - 1)$$

où,  $l_l$  et  $l_r$  sont respectivement les longueurs maximales de l'étendue du défaut à gauche et à droite du point de profondeur maximale.

La profondeur maximale du défaut est positionnée par rapport à  $X_d$  de façon à avoir  $\frac{1}{3}$  de cette longueur noté  $l_r$  à droite de  $X_d$  et la longueur restante à gauche sera notée  $l_l$ . Le déplacement horizontal de cet intervalle le long de la demi-ouverture permet d'avoir plus de segments affectés par le défaut en s'approchant de l'appui et de moins en moins en

s'approchant de la clé de voûte (Figure 21). De cette façon, les pertes de matière dissymétriques causées par les infiltrations d'eau seront caractérisées en tenant compte de l'effet de la pesanteur, qui conduit à un flux plus important à gauche qu'à droite de la position  $X_d$ . Cette configuration est valable pour un défaut supposé à gauche de la clé de voûte. Lorsque les infiltrations d'eaux sont observées sur le côté droit de la clé de voûte, sa géométrie pourrait être gérée de façon symétrique par rapport à l'axe vertical à mi-portée, le sens d'écoulement de l'eau sera orienté cette fois vers la droite. Le cas particulier où le défaut est localisé au niveau de la clé impose des flux similaires de part et d'autre de la clé ( $l_l = l_r$ ). Dans ce cas, la géométrie du défaut elle-même devient symétrique. Par ailleurs, l'étendue du défaut ( $l_l + l_r$ ) est liée à la capacité d'écoulement le long de la surface extérieure de la voûte (extrados), cela dépend de la stratification et de la porosité des pierres en place.

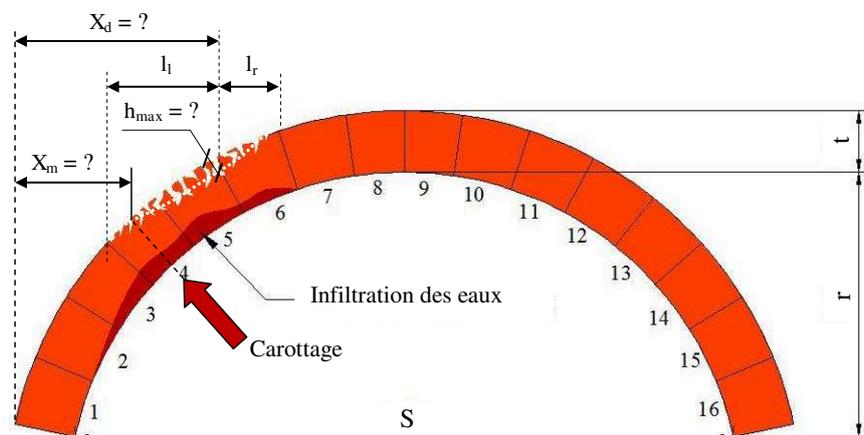


Figure 20 : Modélisation d'un défaut causé par des infiltrations des eaux (étape 1).

Source : [Zanaz et al. 2016]

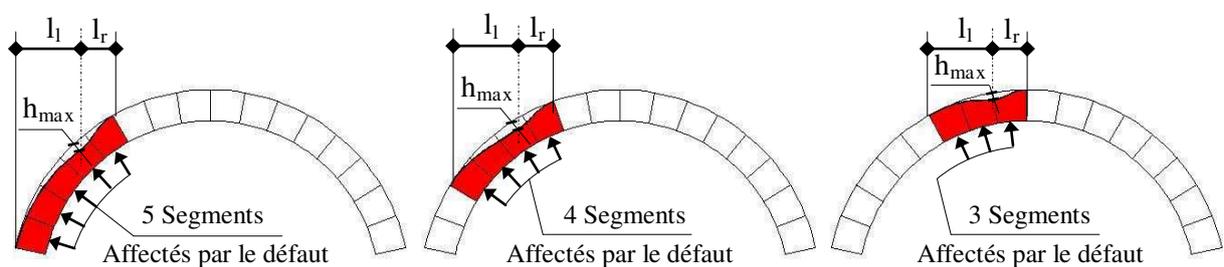


Figure 21 : Nombre de segments affectés par le défaut en fonction de la position du défaut.

Source : [Zanaz et al. 2016]

Afin de pouvoir prévoir sur quel segment la mesure doit être effectuée, un carottage sur chacun des segments, composant la demi-voûte, est simulé ci-dessous. La profondeur du défaut mesurée et notée  $h_m$ . Il convient de souligner que dans la pratique cette mesure ne peut

être déterminée qu'après analyse de l'éprouvette en laboratoire et ainsi, la hauteur de voussoir sain équivalente sera mesurée. La position de mesure notée  $X_m$  est déterminée en supposant que le prélèvement est effectué au milieu de chaque voussoir. L'incertitude sur  $X_m$  est liée au fait que la mesure est ponctuelle et qu'il est estimé que cette perte d'épaisseur en un point de mesure donné indique une perte de matière au voisinage de la mesure.

La répartition du défaut est modélisée par deux polynômes de degré 4 de part et d'autre de la position  $X_d$  (Equations (II – 2)). Pour déterminer les coefficients polynomiaux, les conditions géométriques sont imposées (Figure 22) en considérant la continuité des pentes entre :

- les deux courbes au point de la profondeur maximale du défaut ;
- les extrémités du défaut et la partie non affectée de la voûte.

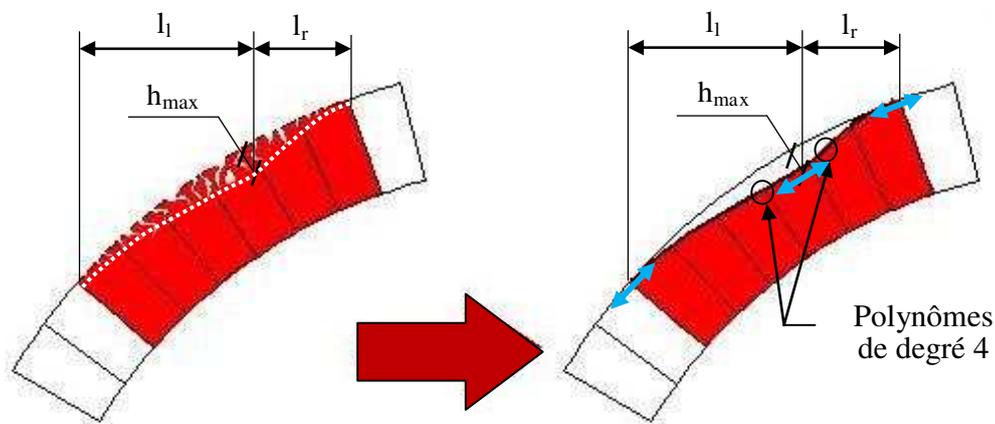


Figure 22 : Modélisation du défaut (étape 2).

Source : [Zanaz et al. 2016]

Dans l'analyse numérique par éléments finis, l'épaisseur d'un segment est supposée constante sur sa longueur et l'épaisseur du bas du segment est considérée comme celle du segment. A partir de ces conditions, les expressions des polynômes, pour les parties gauche et droite du défaut respectivement, peuvent être décrites par les relations suivantes :

$$\begin{cases} h_{dg} = h_{max}(x - (x_d - l_l))^2(x - (x_d + l_l))^2 \\ h_{dd} = \alpha h_{max}(x - (x_d - l_r))^2(x - (x_d + l_r))^2 \end{cases} \quad \dots \text{(II - 2)}$$

où,  $h_{dg}$  et  $h_{gg}$  sont respectivement les profondeurs du défaut à droite et à gauche de la profondeur maximale du défaut, notée  $h_{max}$ .

L'épaisseur restante du segment, qui contribue à la résistance, est alors déduite par les relations (II – 3), indiquant la position du défaut à droite ou à gauche selon la position du point de mesure.

$$\begin{cases} h_{vg} = h_{hv} - h_{dg} = h_{hv} - h_{max}(x - (x_d - l_l))^2(x - (x_d + l_l))^2 \\ h_{vd} = h_{hv} - h_{dd} = h_{hv} - \alpha h_{max}(x - (x_d - l_r))^2(x - (x_d + l_r))^2 \end{cases} \dots (II - 3)$$

En déduisant la profondeur du défaut, qui dépend de  $h_{max}$  et de  $X_d$ , à partir de l'épaisseur de la voûte initiale, le programme éléments finis détermine la position et le nombre de segments ayant subi des pertes de matière, modifie leurs épaisseurs respectives et calcule la réponse mécanique (Figure 23).

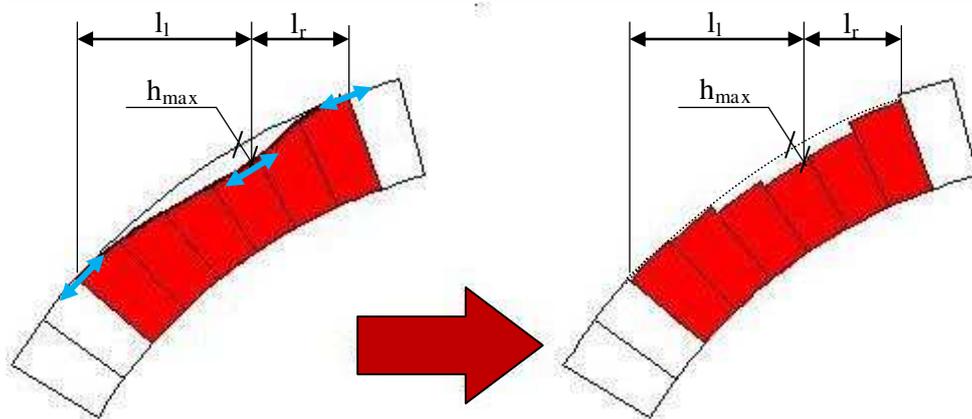


Figure 23 : Discretisation du modèle du défaut (étape 3).

Source : [(Zanaz et al. 2016)].

### 3-2. Analyse de la voûte

La voûte, objet de cette analyse, est celle d'un pont à Alger (Algérie). Elle est composée de 16 segments de pierres calcaires, dont les caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques sont récapitulées dans le tableau 14. Ces paramètres sont issus du dossier de l'ouvrage. L'objectif de cette partie d'étude est d'estimer la charge du trafic qui provoquera l'effondrement, qui se traduit par la formation de 4 rotules en fonction des paramètres du défaut.

La valeur mesurée de la profondeur du défaut, notée  $h_m$ , prise en compte dans l'application numérique est de 0,02 m. Dans un premier temps, l'étude est limitée aux cinq

valeurs indiquées dans le tableau 15 avec un pas de 0,5 m pour simuler les positions du défaut  $X_d$  le long de la demi-voûte.

Tableau 14: Caractéristiques physiques et mécaniques prises en compte (Zanaz et al. 2016)

Désignation	Unité	Valeur
Ouverture (S)	m	6,18
Flèche (r)	m	2,50
Épaisseur de la voûte (t)	m	0,58
Hauteur du remplissage à la clé (f)	m	0,85
Épaisseur de la voie de roulement (e)	m	0,28
Poids volumique des segments	kN/m <sup>3</sup>	24
Poids volumique de la voie de roulement	kN/m <sup>3</sup>	21
Poids volumique du remplissage	kN/m <sup>3</sup>	18
Module d'Young des segments	GPa	48
Résistance à la traction des segments	kN/m <sup>2</sup>	0
Module d'Young du remplissage	MPa	20
Cohésion du remplissage	kN/m <sup>2</sup>	0
Angle de diffusion de la voie de roulement	rad	$\pi/6$
Angle de diffusion du remplissage	rad	$\pi/6$
Angle de frottement du remplissage	rad	$\pi/6$

Pour chaque position, différentes pertes d'épaisseur sont considérées. Les pas de 0,25 m et 5 kN sont fixés pour la position de la charge ponctuelle  $X_p$  et sa valeur, respectivement.

Tableau 15: Paramètres du défaut (Zanaz et al. 2016)

Désignation	$X_d$	$l_r$	$l_l$	$h_m$
Valeurs [m]	1,0	0,5	1,0	0,02
	1,5			
	2,0			
	2,5			
	3,0			

### 3-2.1. Influence de la profondeur du défaut

Pour les différentes valeurs de la position du défaut  $X_d$  considérées, la figure 24 donne la charge critique du trafic en fonction de la profondeur du défaut. Ces résultats montrent que pour la même position du défaut, la charge critique et la profondeur du défaut sont linéairement reliées. Pour une valeur de perte d'épaisseur nulle, tous les résultats tendent vers le même point, qui correspond à la charge critique de la voûte sans défaut. Avec l'augmentation de la perte d'épaisseur, il est montré que le taux de diminution de la charge critique est fortement lié à la position du défaut.

L'équation générale de la charge critique en fonction de la position du défaut peut être écrite comme suit :

$$P_{cr} = P_{cr0} + \alpha(X_d) \cdot h_{max} \quad \dots (II - 4)$$

où,  $P_{cr}$  est la charge critique,  $\alpha$  est la pente (i.e. taux de diminution de la charge critique) et  $P_{cr0}$  est la charge critique de la voûte sans défaut. Pour exprimer la pente  $\alpha$  en fonction de la position du défaut maximal  $X_d$ , un polynôme du deuxième degré, évalué par régression linéaire (relation (II - 5)) est adopté.

$$\alpha(X_d) = 406,09 - 595,18 \cdot X_d + 144,36 \cdot X_d^2 \quad \dots (II - 5)$$

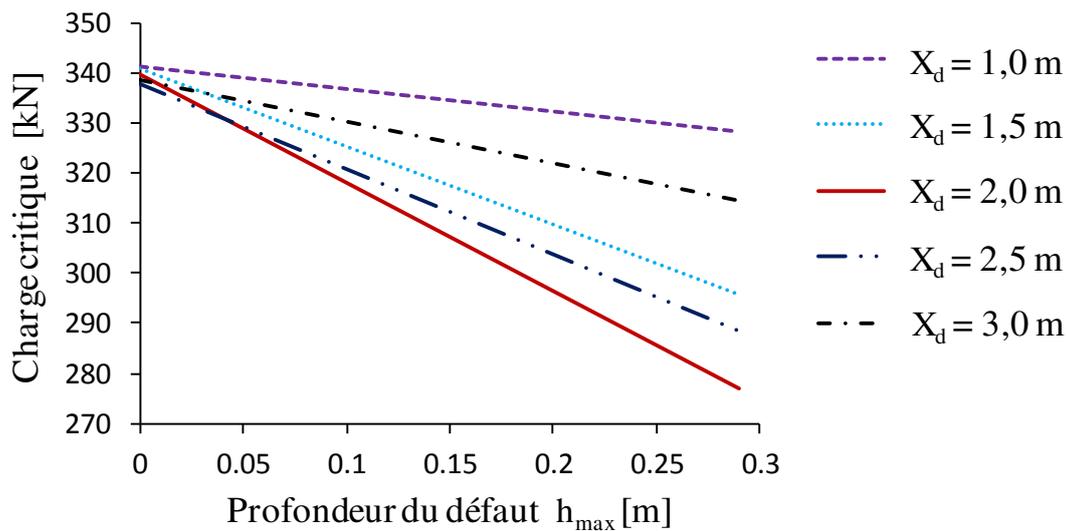


Figure 24 : Charge critique en fonction de la profondeur du défaut.

Source : [Zanaz et al. 2016].

La comparaison des pentes des différentes droites en utilisant l'équation (II - 5) montre une bonne approximation des valeurs de référence. L'erreur maximale est évaluée à environ 5% (tableau 16).

Tableau 16: Quantification de l'erreur sur les valeurs des pentes

$X_d$ [m]	Valeur de la pente		Ecart [%]
	Calcul	Polynôme	
1,00	-45,876	-44,73	2,56
1,50	-156,1	-161,87	3,70
2,00	-217,28	-206,83	5,05
2,50	-171,47	-179,61	4,75
3,00	-82,564	-80,21	2,93

Il est donc possible maintenant de calculer la capacité portante à l'aide de la formule (II – 5) et des données du tableau 16. Les relations trouvées sont propres à ce pont. Mais le fait de trouver une relation linéaire entre la capacité portante et la profondeur du défaut est un résultat important. En effet dans le cadre d'une inspection, si on ne fait pas l'étude probabiliste qui suit, cette relation donne une borne supérieure à la valeur de la capacité portante. Ce n'est certes pas sécuritaire mais cela peut constituer une base de décision. D'autre part, elle peut être utilisée sur plusieurs années de la vie de l'ouvrage, tant que les caractéristiques de l'ouvrage n'ont pas trop évolué. Par la suite, plutôt que d'utiliser cette relation, pour ne pas ajouter l'erreur sur les coefficients à l'erreur sur notre modèle, nous recalculerons avec le programme les capacités portantes. La rapidité de calcul nous permet de choisir cette solution sans que cela ait un impact trop fort sur le temps d'étude.

### 3-2.2. Influence de la position du défaut

Dans la pratique, au cours d'une inspection, une mesure de l'épaisseur de la voûte est effectuée. Dans le cas d'une mesure unique sur l'arche, la position du défaut maximum demeure inconnue. Il est alors nécessaire d'étudier toutes les positions possibles (Figure 25). Pour une mesure effectuée à une distance  $X_m$  de l'appui gauche, l'épaisseur mesurée peut être soit à gauche ( $X_m < X_d$ ), soit à droite ( $X_m > X_d$ ) du défaut maximum  $h_{max}$ . Un cas particulier peut également être rencontré, lorsque le point de mesure correspond au point du défaut maximum ( $X_m = X_d$ ). Il est supposé aussi que lorsque la perte d'épaisseur est supérieure à la moitié de l'épaisseur initiale notée  $t$  du segment, le défaut devient visible sur l'intrados de la voûte. Cela signifie que les défauts ayant atteint cette ampleur sont directement identifiés au cours de l'inspection visuelle et sont hors du cadre de cette étude.

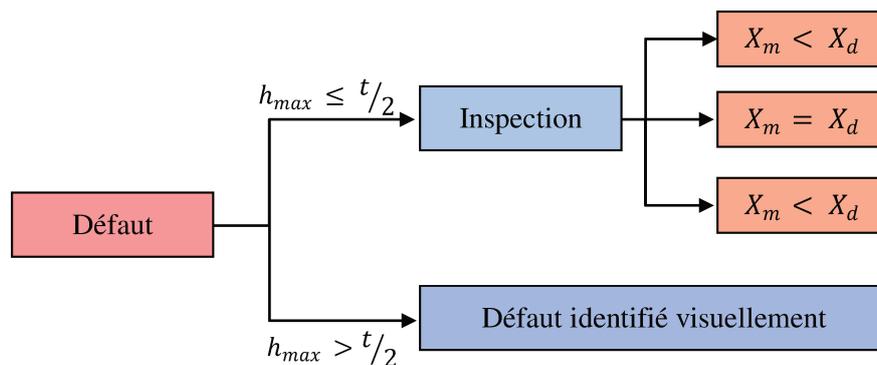


Figure 25 : Arbre de l'inspection.

La première étape est de déterminer, à partir de l'épaisseur mesurée  $h_m$ , la valeur maximale du défaut en fonction de sa position  $X_d$ . Une perte d'épaisseur  $h_m$  mesurée sur une carotte prélevée à la position  $X_m$  peut donc correspondre à une position du côté gauche  $X_{ml}$  ou du côté droit  $X_{mr}$  du défaut maximum  $h_{max}$ , comme montré sur la figure 26. Pour déterminer la charge critique correspondant à cette mesure, il est nécessaire d'en déduire la profondeur maximale du défaut  $h_{max}$ , l'emplacement du défaut et le nombre de segments affectés par le défaut.

En vertu de ces considérations, un point de mesure correspond à plusieurs couples ( $X_d$ ,  $h_{max}$ ) selon la relation (II – 6). Nous pouvons constater que  $h_{max}$  ne dépend que de  $X_d$  et des paramètres  $l_r$  et  $l_l$ . Que le point de mesure soit à gauche ou à droite de la profondeur maximale du défaut, la relation associée, donnant  $h_{max}$ , peut être obtenue.

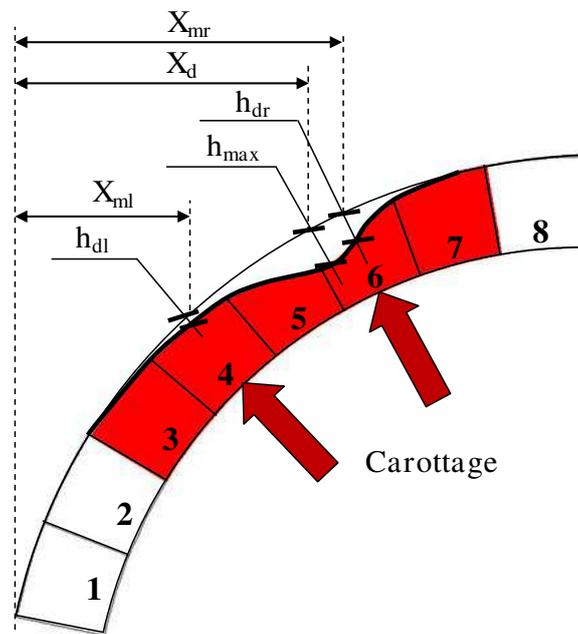


Figure 26 : Position relative du défaut et du point de mesure.

Source : [Zanaz et al. 2016]

Pour un point de mesure donné  $X_m$ , les équations (II – 6) donnent la relation entre  $h_{max}$  et  $X_d$ , à travers laquelle la profondeur maximale du défaut peut être déduite en fonction de la position connue de la mesure  $X_m$  et de la position de la profondeur maximale du défaut  $X_d$  qui demeure inconnue.

$$\begin{cases} h_{max} = \frac{h_{dl}}{(x - (x_d - l_l))^2 (x - (x_d + l_l))^2} \\ h_{max} = \frac{h_{dr}}{\alpha (x - (x_d - l_r))^2 (x - (x_d + l_r))^2} \end{cases} \dots (II - 6)$$

En admettant une distribution uniforme (équiprobabilité de positionnement du défaut), la figure 27 montre les différentes possibilités pour des paramètres de mesure ( $X_m$ ,  $h_m$ ) données. Ces paramètres d'entrée conduisent à plusieurs possibilités ( $X_{d i}$ ,  $h_{max i}$ ), qui sont supposées équiprobables (comme aucune autre information n'est disponible pour favoriser une évaluation préférentielle). En d'autres termes, de larges gammes de localisations et de profondeurs du défaut peuvent être associées à chaque valeur  $h_m$  de l'épaisseur de la voûte mesurée à une position  $X_m$ . Puisque chaque configuration du défaut ( $X_d$ ,  $h_{max}$ ) correspond à une charge critique différente, les charges critiques obtenues conduiront à la fonction de densité de probabilité de la capacité portante de la voûte.

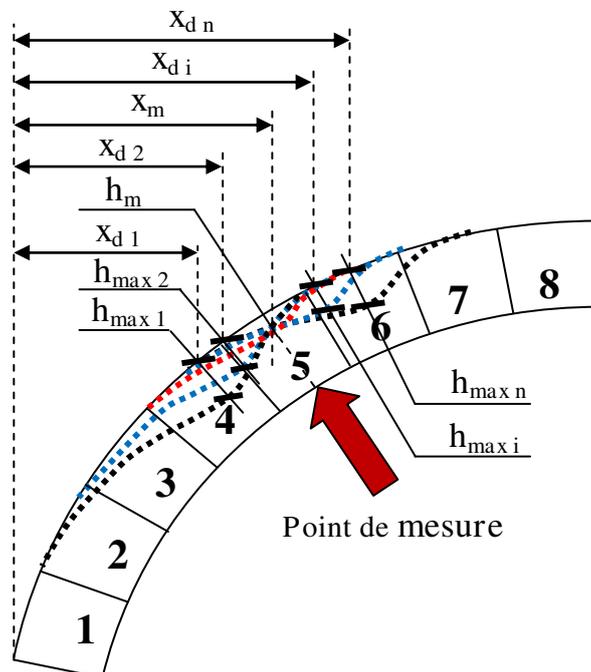


Figure 27 : Positions possibles du défaut  $X_d$  correspondant au même point de mesure  $X_m$ .

Source : [Zanaz et al. 2016]

Pour chaque position du défaut  $X_d$ , une charge critique est déduite à l'issue de l'analyse par éléments finis, comme indiqué précédemment. Il s'ensuit que pour chaque position de mesure  $X_m$ , la courbe donnant la charge critique en fonction de la position du défaut peut être tracée. Pour les six segments de la moitié gauche de la voûte objet de notre exemple d'étude

(segments 2 à 7), la figure 28 donne les courbes de la charge critique obtenues pour une perte d'épaisseur mesurée  $h_m = 0,02$  m. Les limites à gauche et à droite de ces courbes sont liées à la profondeur maximale imposée du défaut  $h_{max}$ . Il est supposé que cette taille maximale ne peut dépasser la moitié de l'épaisseur du segment lorsque la surface de l'intrados de la voûte est intacte. Pour chaque position possible du défaut, la profondeur maximale du défaut est déterminée.

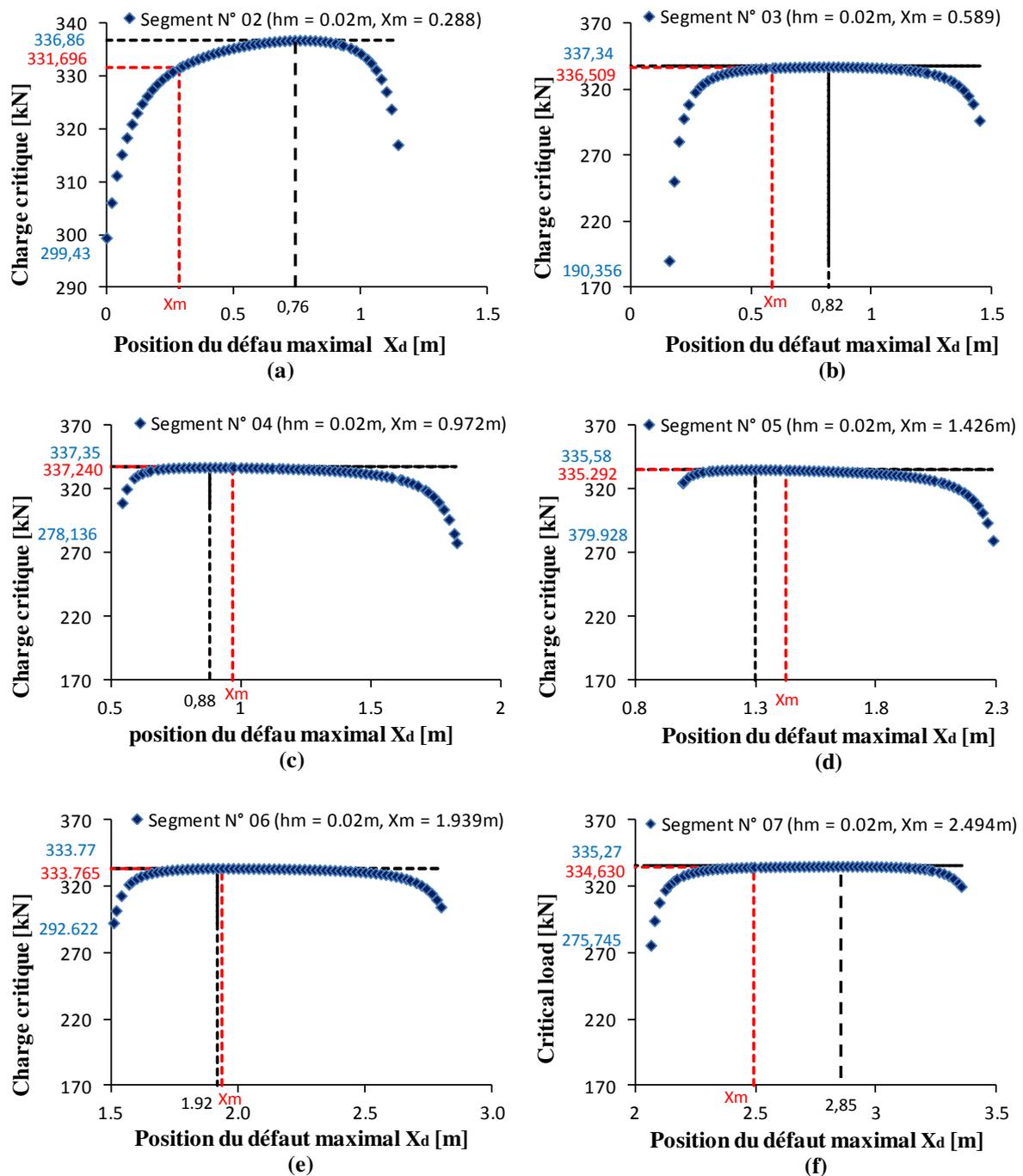


Figure 28 : Charge critique en fonction de la position du défaut pour les segments testés.

Source : [Zanaz et al. 2016]

Il convient de rappeler en outre, que la position de la mesure, notée  $X_m$ , est déterminée en supposant que le carottage est réalisé au milieu des segments. Les résultats montrent que pour les segments 2 et 3 (Figures 28(a) et 28(b) respectivement), la capacité portante la plus faible de la voûte correspond au cas où le défaut maximal est sur le côté gauche du point de mesure  $X_m$ , soit sur les naissances de la voûte (i.e. zones d'appuis). Pour les segments 4 et 5 (Figures 28(c) et 28(d)) contrairement aux deux précédents, la plus faible capacité portante de la voûte est obtenue avec un défaut maximal situé sur le côté droit du point de mesure, qui représente la zone des reins de la voûte (voir terminologie en annexe B).

Le segment numéro 6 (Figure 28(e)) présente pratiquement la même valeur de la capacité portante que le défaut maximal soit à gauche ou à droite. Dans ce cas, la capacité portante de la voûte est fortement liée à la valeur mesurée  $h_m$ . Enfin, concernant le septième segment (Figure 28(f)) la valeur la plus faible de la capacité portante de la voûte est à nouveau obtenue avec un défaut maximal localisé sur le côté gauche du point de mesure (i.e. reins de voûte). Tout ceci permet d'identifier deux zones de la voûte, où la présence d'un défaut conduit aux plus fortes pertes de capacité portante. Ces zones sont classées selon leur degré d'influence, qui met en avant les naissances de la voûte puis les reins. De plus, parmi les six segments testés, c'est le segment numéro 3 qui donne la valeur la plus faible de la charge critique (190,4 kN) et que nous allons maintenant analyser dans le détail. La même analyse peut également être appliquée sur les autres figures.

La figure (Figure 28(b)) présente le cas d'un prélèvement réalisé au milieu du segment 3 ( $X_m = 0,589$  m et  $h_m = 0,02$  m). Selon les hypothèses du modèle retenu, le défaut est localisé sur l'intervalle  $I = [0,589-0,5 ; 0,589+1,0]$ . Par ailleurs, la limite imposée sur  $h_{max}$  (inférieure à la moitié de l'épaisseur du segment) permet de réduire l'intervalle généré à  $[0,16 ; 1,23]$ . Dans cet intervalle de variation  $X_d$ , la capacité portante de la voûte varie de 190 kN à 337 kN. Si le défaut maximal était en  $X_m$ , la valeur critique du chargement serait de 336 kN.

En fait pour chaque segment testé, la valeur maximale de la charge critique est obtenue pour une perte maximale d'épaisseur localisée sur le segment sur lequel est effectuée la mesure. Plus le défaut maximal est loin du point de mesure, plus sa profondeur maximale  $h_{max}$  sera grande et plus la charge critique sera faible. Sachant que la plus grande des longueurs  $l_l$  ou  $l_r$  ne dépasse pas deux longueurs de segment, la plus faible capacité portante correspond à des défauts sur les segments adjacents au point de mesure. Les réparations

doivent donc avoir lieu sur le segment mesuré, mais aussi sur les segments adjacents, car la présence d'un défaut sur ces segments conduit à une capacité portante plus faible.

Comme toutes les valeurs de  $X_d$  appartenant à l'intervalle I sont équiprobables, les courbes de la figure 28 présentent les formes de la fonction de densité de probabilité de la charge critique  $p(P_{cr})$ , conditionnée par les positions de mesure  $X_m$ . Il est à noter en outre que cette analyse est effectuée pour une perte de matière mesurée  $h_m = 0,02$  m. Le calcul de la densité de probabilité sur l'intervalle  $I = [X_{d \min} ; X_{d \max}]$  est mené au moyen de l'intégration numérique des valeurs de  $P_{cr}(X_d)$ , en utilisant des simulations. La forme de la fonction de densité de probabilité dépend fortement du point de mesure, et implicitement de l'emplacement possible du défaut. La figure 29 représente les valeurs extrêmes inférieures (quantile à 10%) de la capacité portante prédite en fonction de la position de la profondeur maximale du défaut. Par exemple, dans le cas du segment numéro 3, une charge inférieure à 300 kN a 5% de chances d'être critique et représente 75% de l'étendue de charge critique [190 – 337kN]. En considérant que la profondeur du défaut maximale est au niveau du point de mesure, la charge critique réelle est de 336 kN, la charge critique à 5% est de 300kN, soit une erreur d'environ 11%.

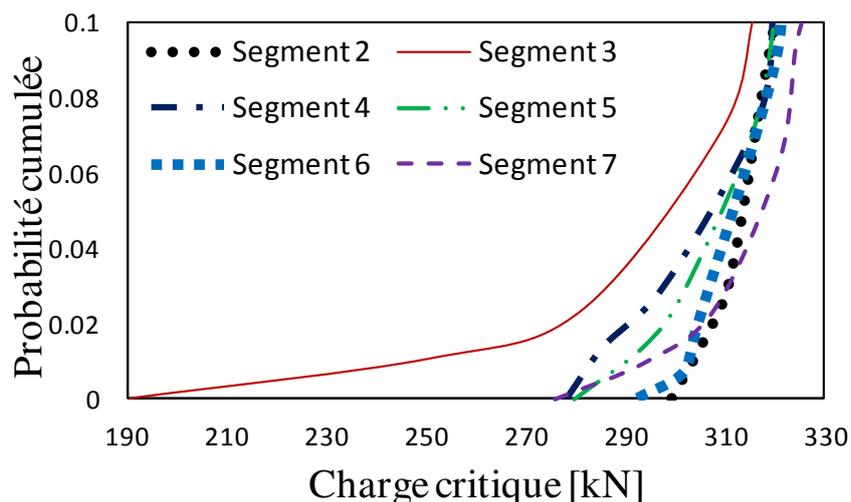


Figure 29 : Valeurs extrêmes des fonctions de répartition obtenues ( $h_m = 0,02$  m).

Source : [Zanaz et al. 2016]

Parmi les six cas de variation de la charge critique obtenus (relatifs aux six segments testés), le segment 3 présente l'intervalle le plus large. Etant donné le modèle et la forme de la voûte, ce segment correspond au point de mesure qui donne le plus grand nombre de segments, sur lesquels la profondeur maximale du défaut peut être localisée.

Pour l'ensemble des segments, la valeur maximale de la charge critique est d'environ 336 kN. La différence réside dans les valeurs minimales et les quantiles dans les valeurs extrêmes inférieures. Le tableau 17 donne quelques valeurs caractéristiques de ces distributions. Le quantile à 10% est très proche et varie entre 315 kN et 325 kN. Cela signifie que si nous admettons un risque de 10% d'erreur sur  $X_d$ , la capacité portante, quel que soit le segment mesuré, sera supérieure à 315 kN.

Tableau 17: Valeurs caractéristiques des distributions [Zanaz et al. 2016]

	Numéro du segment					
	2	3	4	5	6	7
Min	299	190	278	280	293	276
Max	337	337	337	336	334	335
1%	304	247	283	290	303	294
5%	315	297	310	310	313	320
10%	320	315	319	320	321	325

Pour rappel, le problème abordé au début de cette étude était de savoir sur quel segment le carottage serait le plus efficace afin de minimiser le nombre de mesures, dans le cas où des infiltrations d'eau sont observées sur tout le côté gauche de l'intrados de la voûte. L'analyse de ces valeurs montre que le choix d'un prélèvement sur le segment 3 conduit à une charge critique qui ne peut être dépassée que dans 1% des localisations du défaut (Tableau 17), plus faible que pour une mesure identique effectuée sur les autres segments. Cela signifie que le segment 3 est la meilleure option que l'on peut donner pour répondre à cette question. Dans le cas où la mesure de la perte d'épaisseur est nulle, il y aura deux possibilités : soit la voûte ne contient aucun défaut, soit le défaut existe, mais situé loin du point de mesure. Dans ce dernier cas, le défaut maximal pourrait être, selon les hypothèses du modèle, à plus de 1 m à droite ou de 0,5 m à gauche du point de mesure. Afin de confirmer la tendance la plus probable, un autre carottage devrait être réalisé et la même méthodologie pourrait être appliquée.

En cas d'information sur une localisation probable d'un défaut à l'issue de l'inspection visuelle, la figure 29 constitue une aide pour la recherche de la capacité portante à prendre en compte. Si une information est "lisible" (infiltration ponctuelle) sur le segment 6 par exemple, il est plus sage de faire un prélèvement sur ce segment ou bien sur les segments adjacents, sachant qu'on est assez loin du segment 3. On voit alors que les 3 fonctions de répartitions sont très proches.

#### 4- Conclusion

Dans ce chapitre une méthodologie probabiliste, visant à évaluer la capacité portante des voûtes endommagées, a été proposée. Dans le cas où les essais non destructifs (CND) ne peuvent pas fournir d'informations utiles sur le défaut, cette méthodologie permet de savoir sur quel segment de la voûte le carottage serait le plus efficace. Cela minimise considérablement le nombre de prélèvements et par conséquent, réduit le coût du diagnostic.

La conséquence de la présence d'un défaut sur la capacité portante d'une voûte a été simulée. Une étude de cas de diagnostic a été menée en considérant la perte d'épaisseur causée par les infiltrations des eaux. Le défaut a été modélisé en trois étapes :

- 1- l'étendue du défaut est supposée fonction de sa position pour tenir compte de l'effet de la gravité ;
- 2- la forme du défaut est approchée par deux polynômes de degré 4 à gauche et à droite du point de perte maximale d'épaisseur, qui sont déterminés en considérant des continuités de pentes entre les deux courbes, et entre les extrémités du défaut et le reste de la voûte ;
- 3- les courbes données par les deux polynômes sont projetées sur l'épaisseur de la voûte pour permettre au programme numérique de déterminer la position et le nombre de segments ayant subi des pertes d'épaisseur, de modifier leurs épaisseurs respectives et de calculer la réponse mécanique.

Les simulations effectuées ont permis d'obtenir, pour chaque segment, la fonction de densité de la charge critique, dont l'analyse a permis d'identifier le segment recherché. Ce dernier correspond au segment ayant le plus large intervalle de variation de la charge critique et sur lequel le prélèvement conduit à une charge critique ne pouvant être dépassée que dans 1% des localisations possibles du défaut. Pour l'ensemble des segments, les valeurs maximales des charges critiques sont très proches. La différence réside dans les valeurs minimales et les quantiles inférieurs. Enfin, la connaissance des distributions des charges critiques pour les autres valeurs de perte d'épaisseur permet de définir une stratégie d'inspection plus fine.

Pour approfondir et apporter des compléments à cette étude, nous pourrions chercher à répondre aux différentes questions suivantes :

- 1- quelle est, en fonction de la cinétique moyenne de lixiviation, la forme de la zone affectée ? En effet, le résultat dépend de cette cinétique. Une cinétique faible conjuguée à une porosité faible, conduit à une étendue de la zone affectée plus petite ;
- 2- quelle est l'incertitude totale que l'on a sur la détermination de la position  $X_d$  (ou  $h_{\max}$ ) pour une mesure  $X_m$  donnée ? Nous avons fait des approximations sur les trois étapes de l'algorithme. De plus, le fait d'affiner le maillage (augmentation du nombre de segments) conduit à une simplification moins forte de la courbe de la figure 26. L'influence de la taille du maillage est probablement non négligeable ;
- 3- quelle est l'influence de la variabilité du module d'Young ? Dans le chapitre suivant, le cas de cette variabilité sera abordé pour évaluer le comportement d'une voûte ne présentant aucun défaut particulier.

# **Chapitre : III**

## **Variabilité naturelle du module d'Young**

### III. Variabilité naturelle du module d'Young

L'étude bibliographique a mis en évidence une forte variabilité des caractéristiques mécaniques des éléments solides (pierres et briques (§ I-1.1 et I-1.2)), des mortiers et de leurs associations (maçonnerie (§ I-1.3)). En effet, il a été remarqué que quelle que soit l'association briques/mortier ou pierres/mortier, les caractéristiques mécaniques du matériau maçonnerie présentaient de larges dispersions (cette variabilité peut passer du simple au double pour des pierres extraites du même massif (Binda et al. 2003)). De plus durant l'inspection, les modules sont évalués par des méthodes qui d'une part donnent un module assorti d'une incertitude de mesure, mais d'autre part ne donnent pas toutes pour un même échantillon le même module. L'essai de compression donne un module quasi statique différent du module dynamique donné par une méthode sonique. De plus on estime le module d'Young à partir de quelques mesures réalisées sur la voûte. Le fait qu'un segment représente une partie de voûte comprise entre 2 génératrices (dans le cas d'un cylindre) conduit à homogénéiser les caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs du segment. Cette dernière opération tend elle à diminuer la variabilité du module d'Young. On est donc en présence d'une variation du module qui est liée au matériau, à la mesure, à l'estimation des valeurs pour toute la voûte et au modèle de calcul 2D. Le présent chapitre présente l'influence de la variabilité du module d'Young des segments sur le comportement des voûtes en maçonnerie.

Le chapitre précédent a montré que suivant la position d'un défaut la capacité portante peut varier fortement. Or un défaut conduit, dans le cadre du modèle utilisé, à une variation de l'inertie et de l'aire équivalente du segment. Il induit donc une variation de la raideur. Une variation du module d'Young apporte aussi une variation de la raideur. Or nous avons vu que varier la raideur influe sur la valeur de la capacité portante d'une part et que, suivant le segment impacté, l'effet sur la capacité portante n'est pas la même. Il est donc nécessaire d'évaluer l'influence de cette variabilité sur le comportement de la voûte.

Dans la suite du chapitre, nous allons donc envisagé un module d'Young variable suivant les segments. Nous nous intéresserons à l'influence de cette variabilité sur la capacité portante et sur le mécanisme de ruine.

L'outil numérique ArcProg\_Z, développé dans cette étude, permet de tenir compte de cette variabilité, en utilisant les simulations de Monte Carlo.

## 1- Principe de l'analyse

L'analyse consiste à affecter aux différents segments de la voûte des valeurs du module d'Young de façon aléatoire selon leur distribution probabiliste (Figure 34), par souci de simplification, une loi de distribution normale, tronquée en zéro, est adoptée dans cette étude. Conformément à la littérature, les modules des différents segments de la voûte sont supposés indépendants. ArcProg\_Z calcule ensuite la valeur de la charge critique ainsi que sa position et détermine le mécanisme de ruine correspondant à chaque combinaison de valeurs affectées. Le calcul est répété pour 10000 simulations de Monte Carlo, soit un total de 160000 valeurs du module d'Young générées aléatoirement par le programme suivant une loi normale définie par sa moyenne et son coefficient de variation. Aucune valeur négative n'a été tirée (les paramètres choisis de la loi normale en rendent la probabilité très faible) et le tirage est rejeté le cas échéant.

Trois valeurs du coefficient de variation (5, 10 et 20%) du module d'Young ont été considérées pour cette simulation visant à déterminer l'influence de cette variabilité sur le comportement global de la voûte. La valeur moyenne du module est prise égale à 48GPa. Pour chaque réalisation des modules, la position de la charge ponctuelle est déplacée le long de la demi-voûte avec un pas de 0,25m. ArcProg\_Z détermine ensuite la valeur de la charge critique correspondant à chaque position en augmentant la charge ponctuelle avec un pas de 5 kN jusqu'à l'apparition des 4 rotules satisfaisant le critère de rupture. La procédure a été présentée dans le chapitre précédent (Figure 19). La valeur minimale des charges critiques calculées, correspondant à la capacité portante de la voûte, est alors déduite, ainsi que la position X de cette charge minimale et les positions des 4 rotules formant le mécanisme de ruine. La voûte étudiée est composée de 16 voussoirs (Figure 30), d'une ouverture de 6,18 m, d'une flèche de 2,50 m, d'une hauteur de voussoirs de 0,58 m, d'une hauteur du remplissage à la clé de 0,85 m et d'une hauteur de voie de roulement de 0,28 m. Les paramètres physiques et mécaniques pris en compte dans la suite de cette étude sont résumées dans le tableau 18.

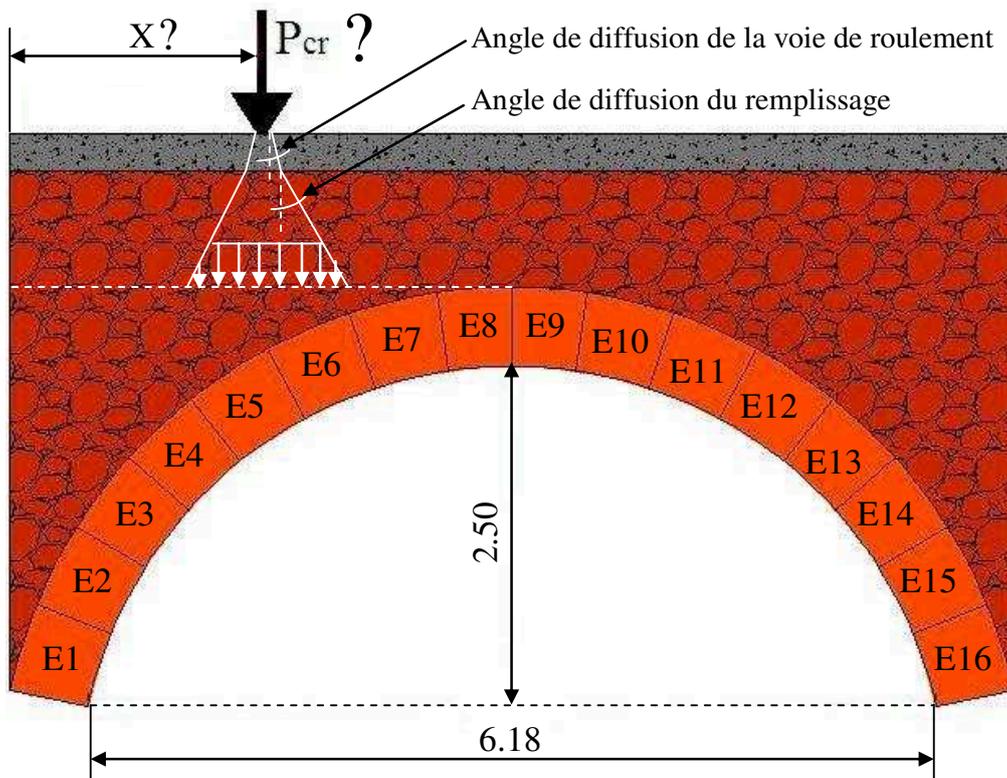


Figure 30 : Variabilité naturelle du module d'Young.

Source : [(Zanaz et al. 2015)]

Tableau 18: Caractéristiques physiques et mécaniques de la voûte étudiée [Zanaz et al. 2015]

Désignation	Unité	Valeur
Poids volumique de la voie de roulement	$\text{kN/m}^3$	21
Poids volumique du remplissage	$\text{kN/m}^3$	18
Cohésion du remplissage	$\text{kN/m}^2$	0
Angle de frottement interne du remplissage	rad	$\pi/6$
Angle de diffusion de la voie de roulement	rad	$\pi/6$
Angle de diffusion du remplissage	rad	$\pi/6$
Résistance à la traction des voussoirs	$\text{kN/m}^2$	0
Module d'Young du remplissage	$\text{kN/m}^2$	$20.10^3$

Les résultats obtenus sont analysés sous trois angles différents. Le premier concerne la variation de la capacité portante de la voûte en fonction des réalisations du module affectées aux segments. Le second angle observe les positions des rotules formées et le troisième angle étudie l'importance de la prise en compte de cette variabilité dans l'évaluation de la réponse mécanique.

## 2- Influence de la variabilité du module d'Young sur la capacité portante

Les 10000 valeurs de la charge critique obtenues suite aux simulations de Monte Carlo sont classées par ordre de grandeur et regroupées dans des classes de chargement de 5 kN (valeur du pas de chargement  $\Delta P$ ). Si les charges critiques  $P_{cr1}, P_{cr2}, \dots, P_{crk}$  apparaissent respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_k$  fois, avec  $P_{cr1} < P_{cr2} < \dots < P_{crk}$ , la densité de probabilité de chacune de ces charges est donnée par la relation :

$$p(P_{cr_i}) = \frac{n_i}{\sum_1^k n_i} = \frac{n_i}{10000} \quad (\text{III} - 1)$$

Cette estimation de probabilité est une approximation de la fonction de densité de probabilité de la capacité portante  $p(P_{cr_i})$ . La figure 31 donne la densité de probabilité de charge critique et sa fonction de répartition pour le coefficient de variation CV de 10%. L'estimation de la probabilité cumulée est donnée par:

$$P(P_{cr_i}) = \frac{\sum_1^j n_i}{\sum_1^{18} n_i} = \frac{\sum_1^j n_i}{10000} \quad (\text{III} - 2)$$

En considérant des classes de chargement de 5 kN, l'analyse des 10000 valeurs de la charge critique obtenues a donné 18 plages de données (classes).

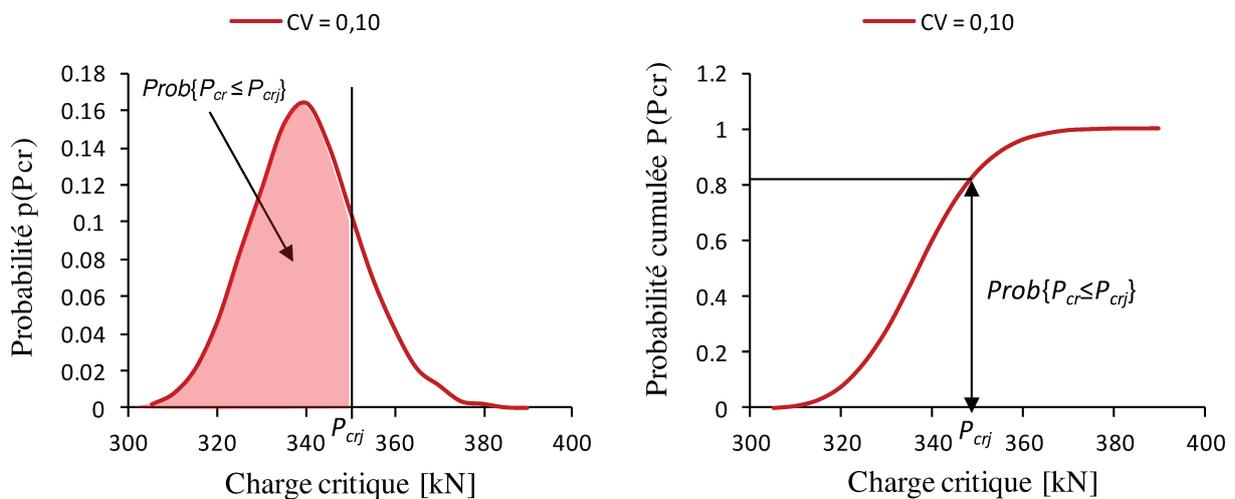


Figure 31 : Densité de probabilité et fonction de répartition de la charge critique (CV=0,1).

Source : [(Zanaz et al. 2015)]

Cette distribution de la charge critique semble être symétrique autour d'une valeur moyenne de 340 kN. Deux tests de normalité ont été effectués : le premier consiste à calculer et comparer l'asymétrie et l'aplatissement de cette distribution avec ceux caractérisant une distribution normale, qui sont 0 et 3 respectivement (AFG 2003). Le second impose de tracer la droite d'Henry, qui devrait représenter les valeurs de la charge critique obtenues en fonction de celles résultant de l'application de la loi normale inverse sur les valeurs de densité de probabilité correspondantes.

Le premier test nécessite d'abord le calcul de deux paramètres importants : la moyenne  $\mu$  et la dispersion (écart type) de la charge critique :

#### a) Calcul de la moyenne

A partir des 10000 tirages de Monte Carlo, la valeur moyenne de la charge critique (i.e. l'espérance de  $P_{cr}$ ) est estimée par les valeurs pondérées par leurs probabilités d'obtention.

$$\mu = \frac{a_1 P_{cr_1} + a_2 P_{cr_2} + \dots + a_{18} P_{cr_{18}}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{18}} = \frac{\sum_1^{18} a_i P_{cr_i}}{\sum_1^{18} a_i} = \frac{\sum_1^{18} a_i P_{cr_i}}{10000} \quad (\text{III} - 3)$$

Dans notre cas, nous obtenons :  $\mu = 339,79$  kN.

#### b) Calcul de la dispersion

La dispersion est mesurée par l'écart-type  $\sigma$ , défini par la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^{18} n_i (P_{cr_i} - \mu)^2}{\sum_1^{18} n_i}} = \sqrt{\frac{\sum_1^{18} n_i (P_{cr_i} - \mu)^2}{10000}} \quad \dots (\text{III} - 4)$$

L'application numérique nous donne :  $\sigma = 12,55$  kN. Ce qui permet d'en déduire la variance de la charge critique  $V = \sigma^2 = 157,49$  kN<sup>2</sup>, et son coefficient de variation  $CV = \sigma/\mu = 3,7\%$ .

#### c) Calcul d'asymétrie

Ce paramètre  $\beta_1$ , qui mesure le degré d'asymétrie, est calculé par le rapport des moments statistiques comme suit :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad \dots \text{(III - 5)}$$

où  $\mu_2$  et  $\mu_3$  sont respectivement les deuxième et troisième moments centrés définis par la formule (III - 6).

$$\mu_r = \frac{\sum_1^{18} n_i (Pcr_i - \mu)^r}{\sum_1^{18} n_i} \quad \dots \text{(III - 6)}$$

Dans notre application, nous obtenons :

$$\begin{cases} \mu_2 = 157,49 \text{ kN}^2 \\ \mu_3 = 376,05 \text{ kN}^3 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = 0,036 \approx 0$$

#### d) Calcul du degré d'aplatissement

Connu sous le nom de la Kurtosis, il est appelé aussi coefficient de moment d'aplatissement, noté  $\beta_2$  et exprimé par la formule :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad \dots \text{(III - 7)}$$

où  $\mu_4$  et  $\mu_2$  sont calculés avec la formule (III - 6). Il en résulte :

$$\begin{cases} \mu_2 = 157,49 \\ \mu_4 = 74948,83 \end{cases} \text{ On obtient } \beta_2 = 3,02 \approx 3$$

Le second test, après avoir appliqué la loi normale inverse sur les valeurs de densité de probabilité relatives aux classes de charges critiques obtenues, a permis de tracer la courbe de la figure 32.

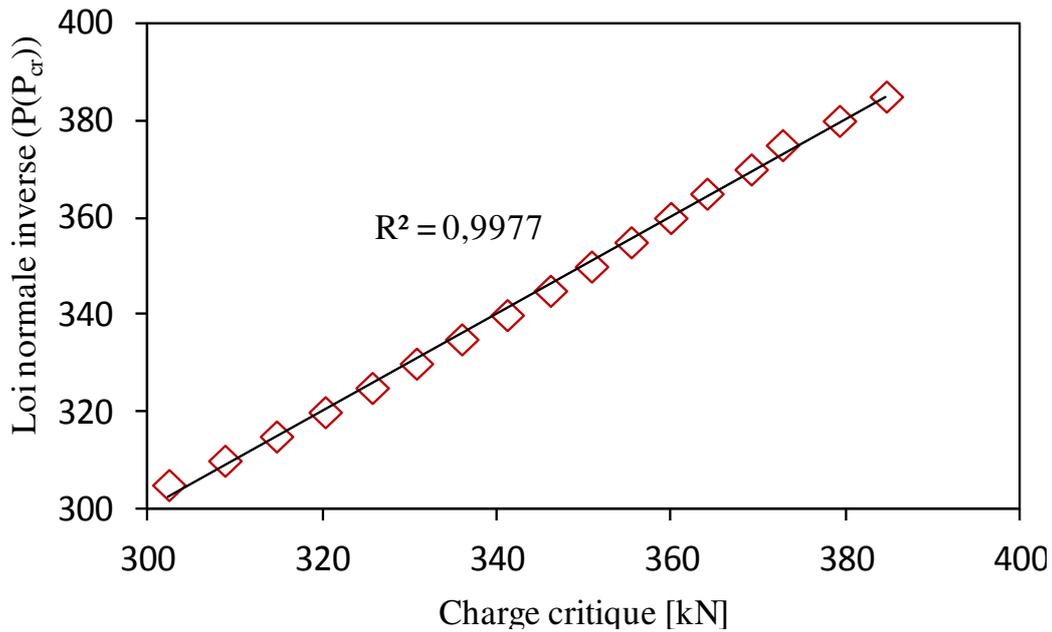


Figure 32 : Test de normalité de la distribution de la charge critique (droite d'Henry).

En vue des résultats obtenus, on peut considérer que la distribution est normale. La figure 33 montre une distribution normale avec une moyenne de 340 kN et un écart-type de 12,55 kN ajustée pour s'adapter à la même échelle que la distribution de fréquence précédente. L'erreur maximale est évaluée à 0,93%.

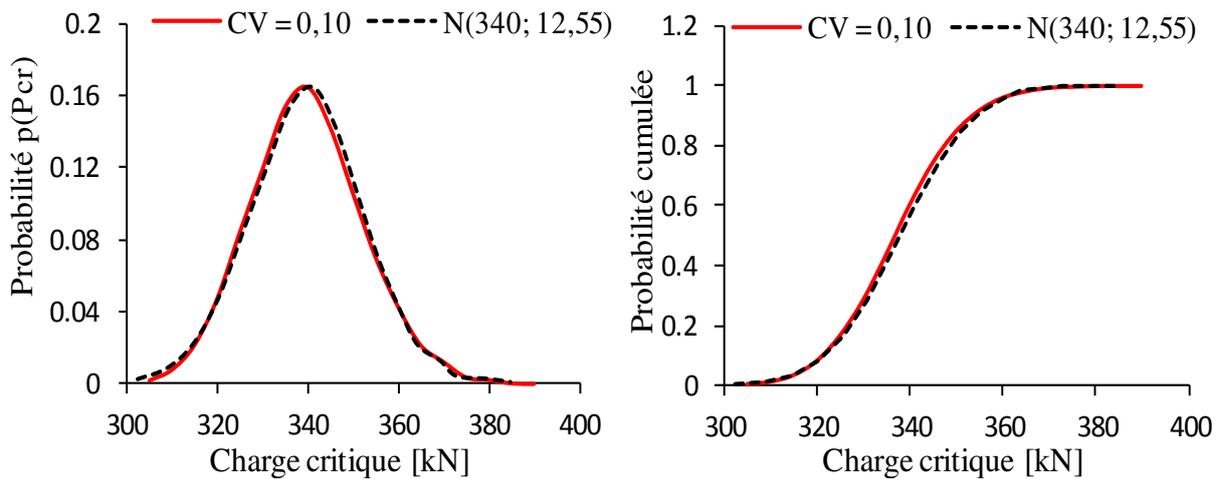


Figure 33 : Ajustement de la distribution de la charge critique (distribution normale).

De la même manière, il a été montré que les distributions normales autour de la même valeur moyenne de 340 kN avec les écarts-types de 6,44 kN et 27,23 kN s'ajustent aux distributions de fréquence correspondant aux deux autres valeurs du coefficient de variation

(5% et 20%) avec des erreurs de 0,98% et 4,77% respectivement. Le tableau 19 donne quelques valeurs caractéristiques des trois distributions.

Tableau 19: Valeurs caractéristiques

	Domaine de $P_{cr}$ [kN]				Quantiles [kN]				
	Min	Max	$\mu$	Ecart type	1%	2%	3%	4%	5%
$P_{cr}$ (CV=0,05)	315	370	340	6,44	324	326	327	328	328
$P_{cr}$ (CV=0,10)	305	390	340	12,55	310	314	316	317	319
$P_{cr}$ (CV=0,20)	250	515	340	27,23	277	285	290	293	296

Le domaine de variation de la charge critique s'élargit en fonction du coefficient de variation. Ainsi, prendre la valeur moyenne comme étant la capacité portante de la voûte est inappropriée, puisque la perte de stabilité se produira dès qu'une variation extrême du module d'Young des segments est réalisée. Dans ce cas, les calculs de valeurs conservatrices sont nécessaires à la prédiction de la limite critique de la capacité portante avec suffisamment de confiance. A titre d'exemple, la proportion des charges critiques inférieures à 315 kN peut être lue directement sur la courbe de probabilité cumulée de la figure 34.

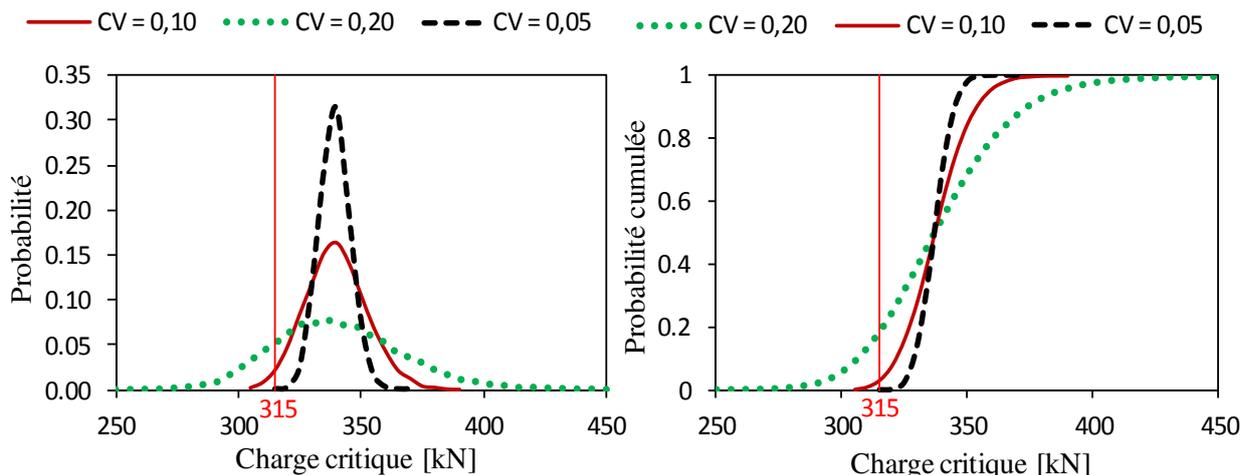


Figure 34 : Densité de probabilité et fonction de répartition de  $P_{cr}$  (CV =5%, 10% et 20%).

Source : [Zanaz et al. 2015]

Pour les trois valeurs du coefficient de variation du module d'Young considérées (5%, 10% et 20%), une charge critique inférieure à 315 kN correspond à des probabilités d'être dépassé de 0,19, 0,03 et 0,0001 respectivement. Or, la valeur moyenne de la charge critique obtenue pour la valeur moyenne du module d'Young est de 340 kN. Par ailleurs, la valeur du

coefficient de variation de 20% est couramment obtenue dans un lot provenant de la même carrière (voir § I 1-1.1.1.3). De plus, cette variabilité est souvent augmentée par des réparations partielles de la voûte. Ainsi, la capacité portante initiale de la voûte ne peut être systématiquement restituée.

## 2-1. Modélisation de la variabilité de la charge critique

Dans les trois cas, limiter la capacité portante de la voûte à la valeur minimale assurera sa stabilité avec une probabilité de 99,8%, et ce, quelles que soient les valeurs du module d'Young des différents segments. Si les gestionnaires des ouvrages considèrent une limite de confiance inférieure (95% par exemple), la capacité portante est augmentée de 4% à 16%. Dans tous les cas, prendre la valeur moyenne de la charge critique comme étant la capacité portante de la voûte peut surestimer la sûreté de la structure. Dans ce contexte, il convient de préciser que la valeur moyenne correspond à la capacité portante de la voûte sans la prise en compte de la variabilité du module d'Young (le cas déterministe), et des facteurs additionnels de sécurité doivent être considérés.

Il est donc important de trouver une relation qui relie la charge critique à la variabilité du module d'Young des différents segments, afin de définir l'influence de cette variabilité sur la capacité portante de la voûte. Pour cela, une régression linéaire, ajustée par le critère des moindres carrés, a été effectuée, conduisant à la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 P_{cr} &= 340 + 10^{-6} \cdot [0,488E_1 + 0,385E_2 + 0,158E_3 + 0,044E_4 + 0,17E_5 + 0,492E_6 + 0,685E_7 \\
 &+ 0,496E_8 + 0,045E_9 - 0,474E_{10} - 0,877E_{11} - 1,082E_{12} - 1,046E_{13} - 0,728E_{14} - 0,017E_{15} \\
 &+ 1,234E_{16}] \quad \dots \text{(III - 8)}
 \end{aligned}$$

Cette relation peut être écrite sous la forme :

$$P_{cr} = P_0 + \sum_1^{16} a_i(E_i) \quad \dots \text{(III - 9)}$$

La relation (III - 9) est composée de deux parties, la première partie est constante et représente la valeur moyenne de la charge critique. La seconde partie est variable et représente l'influence de la variabilité du module d'Young sur la charge critique.

Dans le cas du module E constant sur toute la voûte, la deuxième partie de la relation ci-dessus est nulle, ce qui impose :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{cr} = P_0 = \mu \\ \text{et} \\ \sum_1^{16} a_i = 0 \end{array} \right. \quad \dots \text{(III - 10)}$$

La relation finale s'écrit comme suit :

$$P_{cr} = \mu + \sum_1^{16} a_i(E_i) \quad \dots \text{(III - 11)}$$

La formule (III - 11) est valable pour une charge ponctuelle appliquée sur la partie gauche de la voûte. Pour une charge appliquée sur la partie droite la relation devient :

$$P_{cr} = \mu + \sum_1^{16} a_i(E_{17-i}) \quad \dots \text{(III - 12)}$$

Si on pose :  $E_i = \bar{E} + \Delta E_i$ , avec  $\bar{E}$  est la valeur moyenne du module d'Young. La formule (III - 11) donne :

$$P_{cr} = \mu + \sum_1^{16} a_i(E_i) = \mu + \sum_1^{16} a_i(\bar{E} + \Delta E_i) = \mu + \bar{E} \sum_1^{16} a_i + \sum_1^{16} a_i(\Delta E_i) \quad \dots \text{(III - 13)}$$

$$\sum_1^{16} a_i = 0 \Rightarrow P_{cr} = \mu + \sum_1^{16} a_i(\Delta E_i) \quad \dots \text{(III - 14)}$$

De la même manière, la relation (III - 12) devient :

$$P_{cr} = \mu + \sum_1^{16} a_i(\Delta E_{17-i}) \quad \dots \text{(III - 15)}$$

Enfin, les relations (III - 14) et (III - 15) s'écrivent respectivement :

$$P_{cr} = 340 + 10^{-6} [0,488\Delta E_1 + 0,385\Delta E_2 + 0,158\Delta E_3 + 0,044\Delta E_4 + 0,17\Delta E_5 + 0,492\Delta E_6 + 0,685\Delta E_7 + 0,496\Delta E_8 + 0,045\Delta E_9 - 0,474\Delta E_{10} - 0,877\Delta E_{11} - 1,082\Delta E_{12} - 1,046\Delta E_{13} - 0,728\Delta E_{14} - 0,017\Delta E_{15} + 1,234\Delta E_{16}] \quad \dots \text{(III - 16)}$$

$$P_{cr} = 340 + 10^{-6} [0,488\Delta E_{16} + 0,385\Delta E_{15} + 0,158\Delta E_{14} + 0,044\Delta E_{13} + 0,17\Delta E_{12} + 0,492\Delta E_{11} + 0,685\Delta E_{10} + 0,496\Delta E_9 + 0,045\Delta E_8 - 0,474\Delta E_7 - 0,877\Delta E_6 - 1,082\Delta E_5 - 1,046\Delta E_4 - 0,728\Delta E_3 - 0,017\Delta E_2 + 1,234\Delta E_1] \quad \dots \text{(III - 17)}$$

## 2-2. Analyse des résultats

En observant les relations (III – 16) et (III – 17), on peut constater que les variations du module des segments : 1, 8, 9 et 16 sont pondérées par des coefficients positifs quelle que soit la position de la charge ponctuelle. Cela veut dire que le fait d’assurer des valeurs de module supérieures à la valeur moyenne  $\bar{E}$  conduira certainement à une augmentation de la capacité portante de la voûte, contrairement aux autres segments où la variation du module aura un effet inverse quand la charge bascule vers l’autre moitié de la voûte (Tableau 20). Réciproquement, une diminution des modules des segments suscités donne des variations  $\Delta E$  négatives, pondérées par des coefficients positifs, conduit à une diminution de la capacité portante de la voûte.

Le tableau 20 montre que les segments à partir du numéro 2 à 7 et de 10 à 15, la variation du module doit être faible. Cela dit, les modules de ces segments doivent être proches de la valeur moyenne, particulièrement les segments 3 à 6 et 11 à 14, qui constituent les reins de la voûte. Une perte d’épaisseur au niveau de l’un de ces segments réduit sensiblement la capacité portante de la voûte et par conséquent, augmente le risque d’effondrement de la structure. Il est donc recommandé lors de l’inspection de commencer d’abord par les naissances de la voûte, puis les reins et finir par la clé de voûte. Le même ordre de priorité est maintenu en phase de réparation. Cela pourrait être très utile pour l’optimisation des plannings d’inspections et de réparations, et par conséquent, réduire les dépenses budgétaires.

Tableau 20: Valeurs des  $a_i$  en fonction de la position de la charge ponctuelle P.

Numéro de Voussoirs	P appliquée sur la moitié :	
	Gauche [ $\times 10^{-6}$ ]	Droite [ $\times 10^{-6}$ ]
1	0,488	1,234
2	0,385	-0,017
3	0,158	-0,728
4	0,044	-1,046
5	0,17	-1,082
6	0,492	-0,877
7	0,685	-0,474
8	0,496	0,045
9	0,045	0,496
10	-0,474	0,685
11	-0,877	0,492
12	-1,082	0,17
13	-1,046	0,044
14	-0,728	0,158
15	-0,017	0,385
16	1,234	0,488

### 3- Influence de la variabilité du module d'Young sur le mécanisme de ruine

En plus du calcul de la réponse mécanique relative à chaque combinaison des valeurs du module d'Young affectées aux différents segments, ArcProg\_Z détermine la position des rotules du mécanisme de rupture. La position des rotules est donc obtenue pour les trois cas traités. Les résultats sont triés par mécanisme. La probabilité d'apparition de chaque rotule est également calculée. Dans la section suivante, les résultats obtenus sont analysés pour chaque valeur du coefficient de variation.

#### 3-1. Mécanisme de ruine avec CV = 5%

La figure 35 donne un récapitulatif graphique des résultats obtenus dans les deux cas de position du chargement, à gauche et à droite de la clé de voûte. L'analyse développée dans ce paragraphe concerne le cas de la figure 35(a) relatif à un chargement appliqué à gauche de la clé de voûte. La méthodologie est la même pour le cas de chargement appliqué à droite de

la clé de voûte (Figure 35(b)) et conduit aux mêmes résultats. Sur les 10000 simulations aléatoires du module, la première rotule est observée sur le joint numéro 2 avec une probabilité de 100% :

$$P(2) = 1 \quad \dots \text{(III - 18)}$$

La seconde rotule est survenue sur le joint numéro 17 avec la même probabilité.

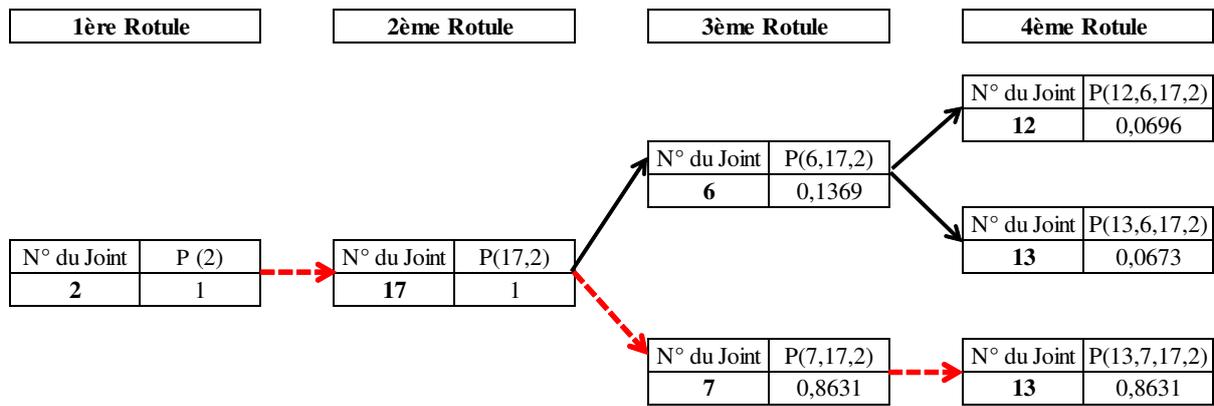
$$P(17|2) = 1 \quad \dots \text{(III - 19)}$$

En règle générale, l'apparition à la position donnée d'une rotule est conditionnée par celles des précédentes, mais les calculs ont montré que la troisième rotule peut apparaître sur l'un de ces deux joints : soit le joint numéro 6 avec une probabilité d'occurrence de 13,7%, soit le joint numéro 7 avec une probabilité de 86,3%.

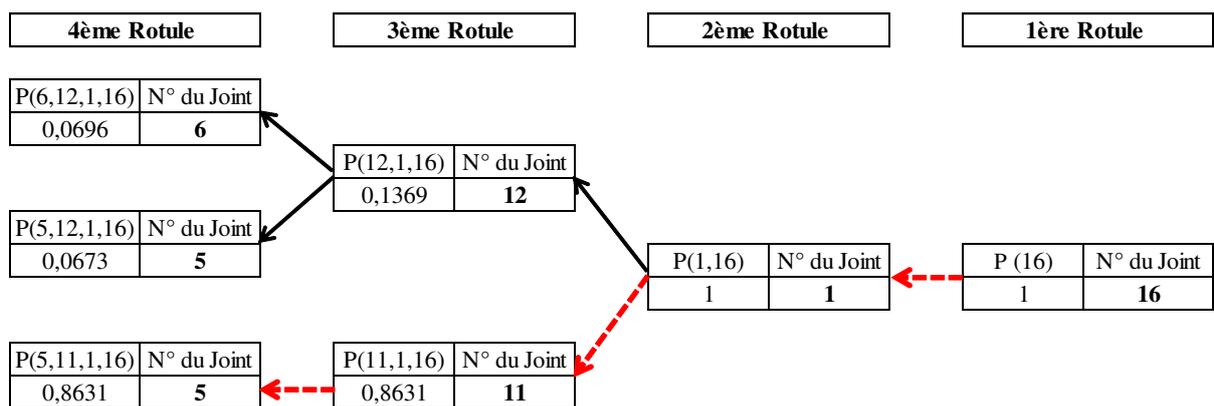
$$\begin{cases} P(6|2,17) = 0,137 \\ P(7|2,17) = 0,863 \end{cases} \quad \dots \text{(III - 20)}$$

Dans ce cas, la première et la deuxième rotule sont observées sur une seule position, ce qui signifie que la position de la quatrième rotule dépend uniquement de la position de la troisième. La formation de la quatrième rotule est synonyme de ruine et devrait survenir sur l'un des deux joints : 12 ou 13. Le résultat (III - 21) donne les valeurs de la probabilité d'apparition de la quatrième rotule sur ces joints, conditionnée par les positions des rotules précédentes. Ce résultat révèle la probabilité d'occurrence de trois mécanismes, dont les valeurs favorisent fortement le mécanisme (2-17-7-13) qui correspond au même mécanisme observé dans le cas déterministe où la variabilité du module d'Young n'est pas prise en compte. Cependant, deux autres mécanismes sont également observés et qui mériteraient encore plus d'attention en raison de leur probabilité d'occurrence, à savoir le mécanisme 2-17-6-12 avec une probabilité de 7% d'être le mécanisme de ruine de la voûte et le mécanisme 2-17-6-13 avec une probabilité d'occurrence de 6,7%.

$$\begin{cases} P(12|6,2,17) = 0,07 \\ P(13|6,2,17) = 0,067 \\ P(13|7,2,17) = 0,863 \end{cases} \quad \dots \text{(III - 21)}$$



(a) : Charge ponctuelle appliquée sur le côté gauche de la voûte



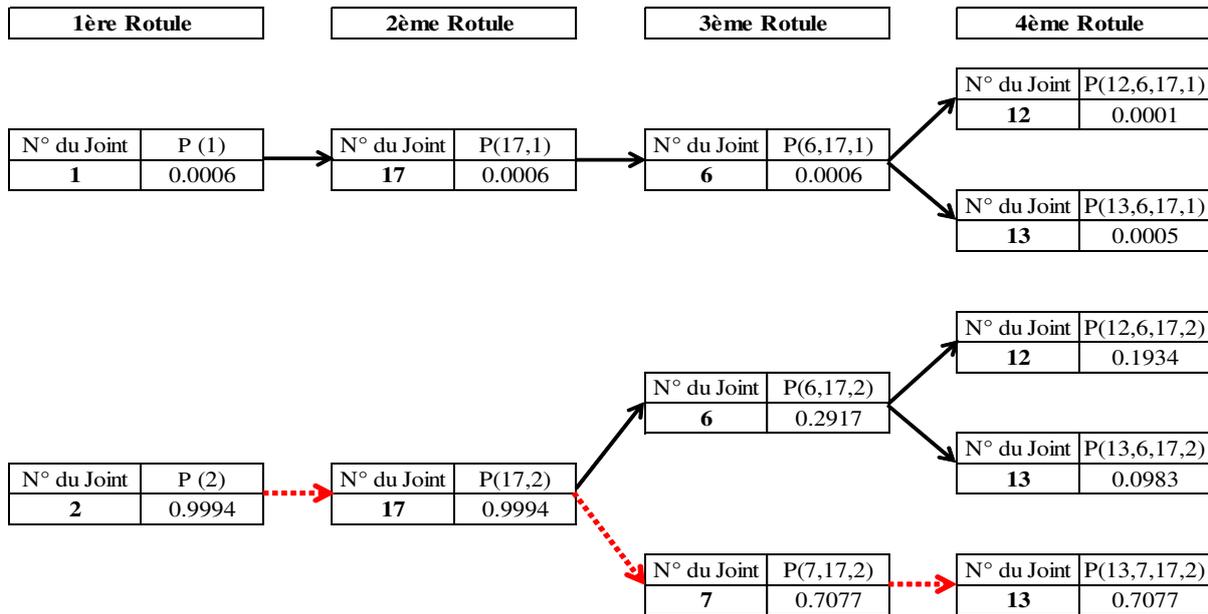
(b) : Charge ponctuelle appliquée sur le côté droit de la voûte

Figure 35 : Probabilités d'apparition des rotules (CV =5%).

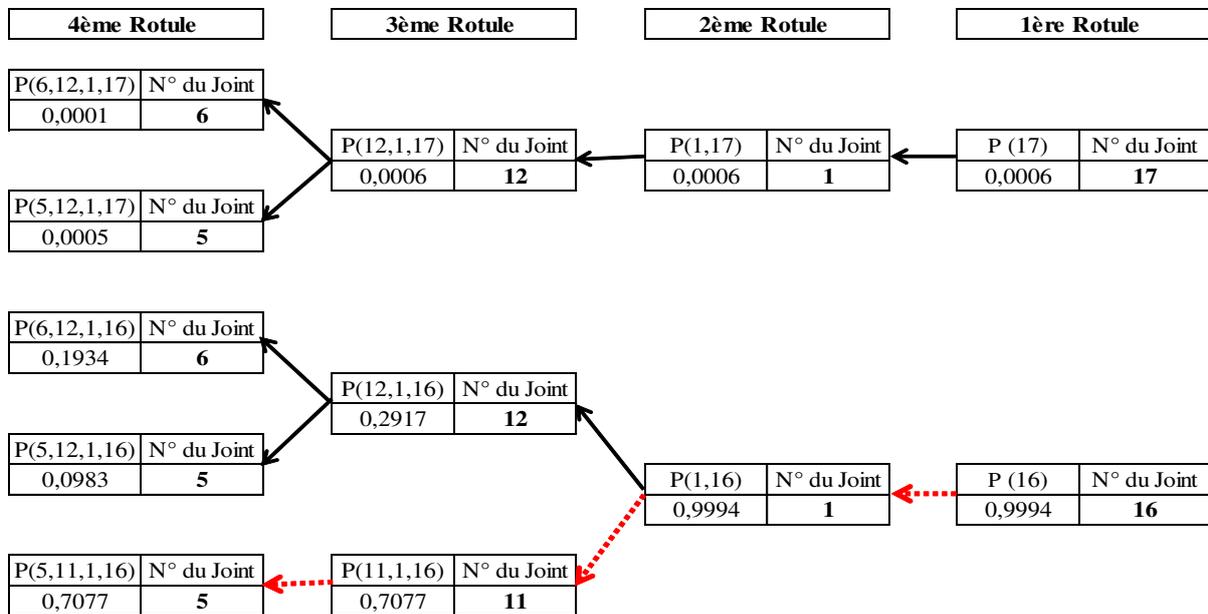
Source : [Zanaz et al. 2015]

### 3-2. Mécanisme de ruine avec CV = 10 %

En plus du mécanisme déterminé dans le cas déterministe, quatre autres mécanismes sont observés : (1-17-6-12), (1-17-6-13), (2-17-6-12) et (2-17-6-13) avec des probabilités d'occurrence de 0,01%, 0,05%, 19,3% et 9,8% respectivement. Le mécanisme le plus probable est encore le mécanisme (2-17-7-13) mais avec une probabilité plus faible : 70,8% au lieu de 86,3% dans le cas précédent, comme montré sur la figure 36. Les probabilités d'occurrence des deux mécanismes observés dans le premier cas (CV=5%), à savoir (2-17-6-12) et (2-17-6-13) ont augmenté de 7% à 19,3% et de 6,7% à 9,8% respectivement, ce qui met davantage en évidence l'importance de la prise en compte de la variabilité du module d'Young dans l'évaluation du comportement des voûtes.



(a) : Charge ponctuelle appliquée sur le côté gauche de la voûte



(b) : Charge ponctuelle appliquée sur le côté droit de la voûte

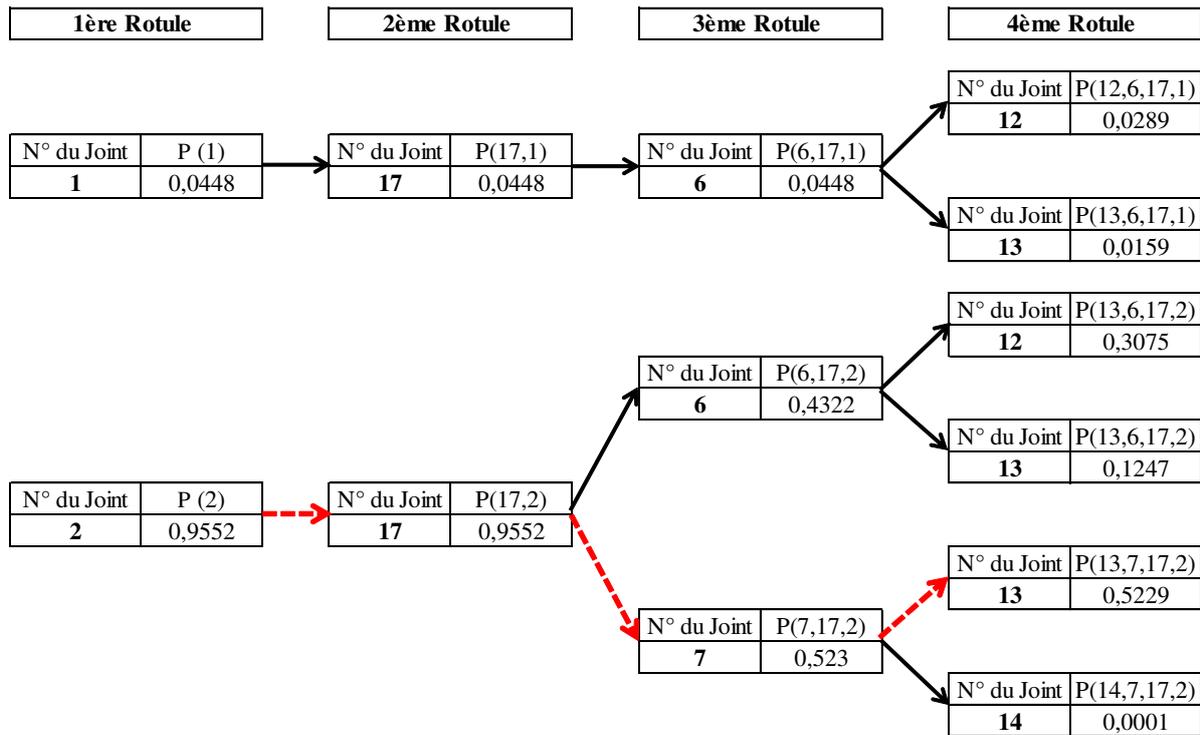
Figure 36 : Probabilité des positions d'apparition des rotules (CV=10%).

Source : [(Zanaz et al. 2015)]

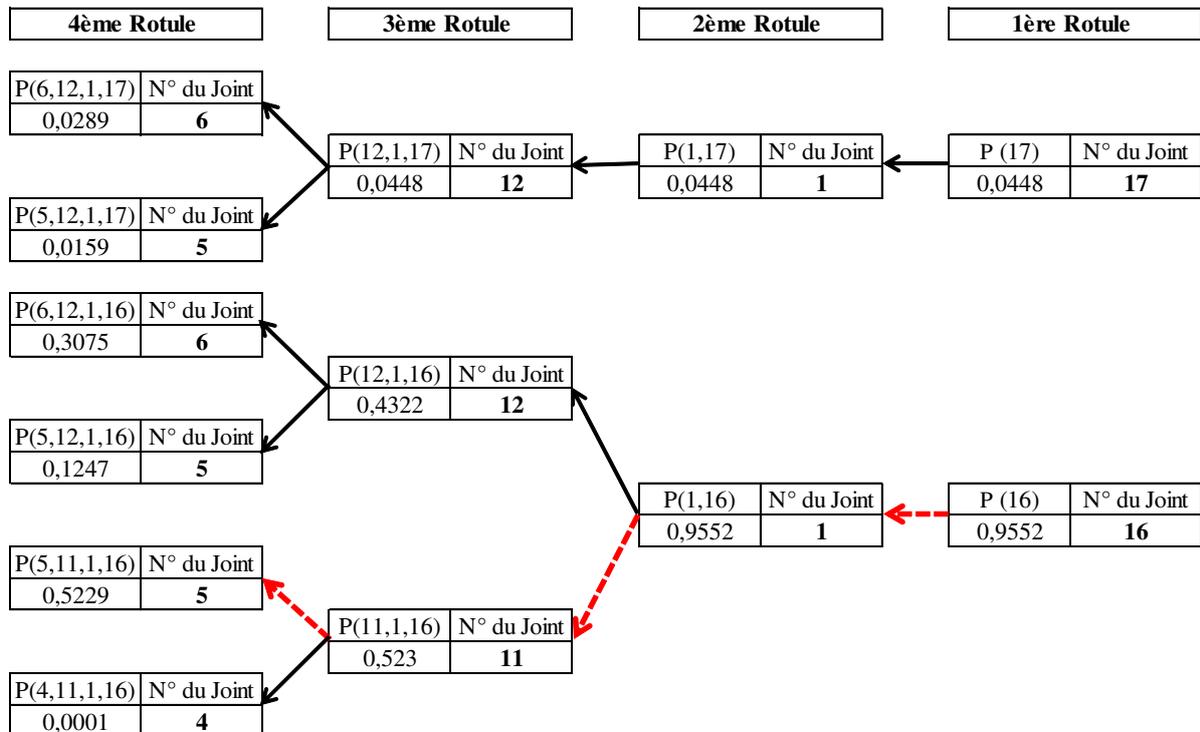
### 3-3. Mécanisme de ruine avec CV = 20 %

Dans ce dernier cas, cinq autres mécanismes sont observés : (1-17-6-12), (1-17-6-13), (2-17-6-12), (2-17-6-13) et (2-17-6-14) avec des probabilités d'occurrence de 2,9%, 1,6%, 30,8%, 12,5% et 0,01% respectivement (Figure 37). Le mécanisme le plus probable est une

fois de plus le mécanisme (2-17-7-13) mais avec une probabilité encore plus faible de 52,3%.



(a) : Charge ponctuelle appliquée sur le côté gauche de la voûte



(b) : Charge ponctuelle appliquée sur le côté droit de la voûte

Figure 37 : Probabilités d'apparition des rotules (CV =5%).

Source : [(Zanaz et al. 2015)]

#### 4- Synthèse des résultats

Pour chaque cas (déterministe, CV=5%, CV=10% et CV=20%), les mécanismes de ruine sont identifiés ainsi que leur probabilité de défaillance. Le tableau 21 récapitule tous les mécanismes identifiés pour chaque valeur du CV considérée ainsi que leur probabilité d'occurrence.

Tableau 21: Valeurs caractéristiques (Cas déterministe, CV = 5%, 10% et 20%)

CV	Probabilité d'occurrence des mécanismes observés					
	2-17-7-13	2-17-6-12	2-17-6-13	1-17-6-12	1-17-6-13	2-17-7-14
0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%
5%	86,31%	6,96%	6,73%	0%	0%	0%
10%	70,77%	19,34%	9,83%	0,1%	0,5%	0%
20%	52,29%	30,75%	12,47%	2,89%	1,59%	0,1%

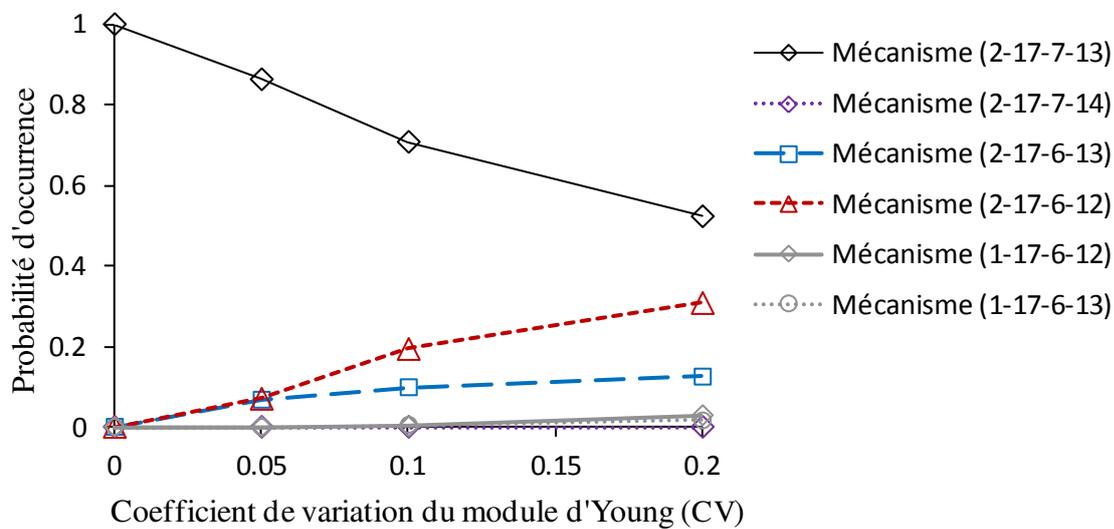


Figure 38 : Probabilité d'occurrence des mécanismes en fonction du CV.

Source : [(Zanaz et al. 2015)]

Ces résultats montrent que le mécanisme observé dans le cas déterministe correspond à celui ayant la plus forte probabilité d'occurrence, mais celle-ci diminue en fonction du coefficient de variation, alors que le nombre des autres mécanismes ainsi que leur probabilité d'occurrence augmentent (Figure 38). Cela signifie que lorsqu'une variation importante du module d'Young des segments de la voûte est avérée, sa prise en compte dans les calculs

deviendrait impérative, que ce soit pour la détermination de sa capacité portante ou pour prédire son mécanisme de ruine.

## **5- Conclusion**

Dans ce chapitre, une méthodologie probabiliste permettant la prise en compte de la variabilité naturelle du module d'Young des segments de la voûte à la fois pour évaluer sa capacité portante et prédire son mécanisme de ruine. La considération du module d'Young des segments comme variable aléatoire a permis de déterminer la fonction de répartition de la charge critique. Les calculs ont été effectués pour trois valeurs du coefficient de variation CV (5%, 10% et 20%).

Les résultats obtenus ont permis de proposer une relation liant la capacité portante de la voûte à la variabilité du module de ses segments. Cette relation a permis d'identifier les segments dont la baisse du module contribue le plus à la chute de la capacité portante de la voûte, i.e. des segments sur lesquels aucun défaut n'est toléré. Ce qui a servi à établir un ordre de priorité d'intervention, valable en inspection comme en réparation, et qui met en avant les naissances de la voûte, puis les reins et enfin la clé de voûte. Cette classification peut optimiser les plannings d'inspections et de réparations, et par conséquent, réduire les dépenses budgétaires.

Néanmoins, il est possible d'estimer la raideur équivalente à la répartition des défauts et d'aborder le problème non pas en variation du module mais en variation de raideur, ce qui permettrait de traiter le cas abordé au chapitre II.

Le travail présenté dans ce chapitre est un travail exploratoire. Il résout un petit problème et en soulève beaucoup d'autres, dont nous avons testé (traité) seulement une partie.

Par ailleurs, le module d'Young des pierres de construction est principalement lié à leur porosité qui elle, évolue en fonction du temps sous l'effet du vieillissement. Les informations tirées de cette étude sont importantes pour évaluer la capacité portante « instantanée » de la voûte et prédire son mécanisme de ruine, mais demeurent insuffisantes pour évaluer la sûreté de l'ouvrage le long de sa durée de vie. Il faudra donc compléter la recherche qui vient d'être présentée, par l'introduction d'une loi de vieillissement, traduisant l'affaiblissement du module d'Young des segments de la voûte en fonction du temps, afin de

mettre en œuvre un calcul de fiabilité et de fiabilité dépendant du temps, que nous allons développer dans le chapitre suivant.

# **Chapitre : IV**

## **Fiabilité d'une voûte**

# IV. Fiabilité d'une voûte

## 1 Introduction

Dans le cadre de la maintenance des anciens ouvrages d'art, leurs gestionnaires doivent spécifier et planifier les inspections et les actions en vue de s'informer au mieux sur l'état et le comportement de leurs ouvrages (Figure 39). Trois niveaux d'inspection se distinguent :

- l'inspection visuelle ;
- l'inspection détaillée ;
- la mise sous surveillance en continu de l'ouvrage (télésurveillance)

L'inspection visuelle est souvent à l'origine d'une intervention d'inspection détaillée et d'étude de diagnostic de comportement et d'état d'un ouvrage. Réalisée sans mettre en œuvre de moyens particuliers, sans mesures ni prélèvement, elle permet d'établir un pré-diagnostic de l'état apparent de l'ouvrage. La plupart des pathologies qui peuvent affecter les ouvrages en maçonnerie se manifestent par l'apparition des désordres structuraux plus ou moins visibles telles que des fissures, des défauts de géométrie, infiltrations des eaux, efflorescence, concrétion ...etc. et qui constituent des signaux d'alertes pour le gestionnaire d'ouvrages, leur permettant de mettre en place une stratégie d'inspection. Cette dernière devrait définir deux paramètres essentiels (Figure 39) : la périodicité des inspections ( $t_{i+1} - t_i$ ) et la profondeur de ces inspections.

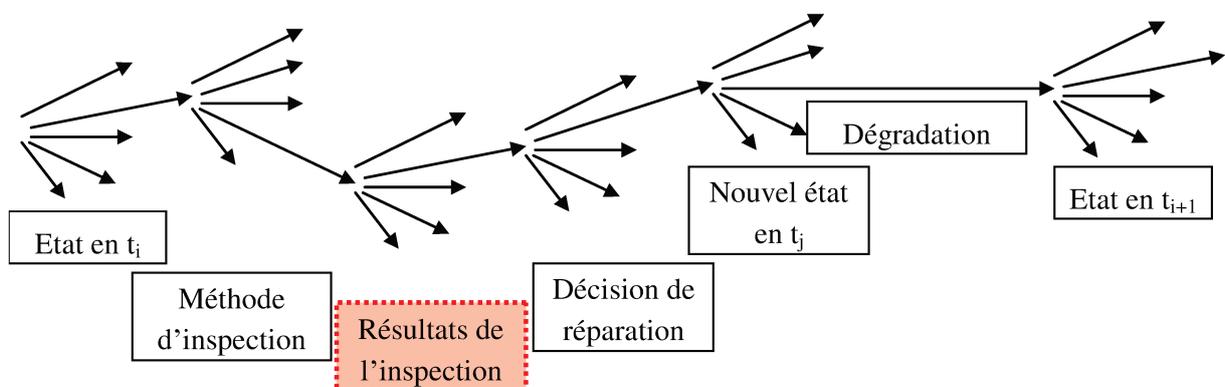


Figure 39 : Arbre de décision des inspections.

Source : [Julien Baroth, Franck Schoefs, and Denys Breysse 2011]

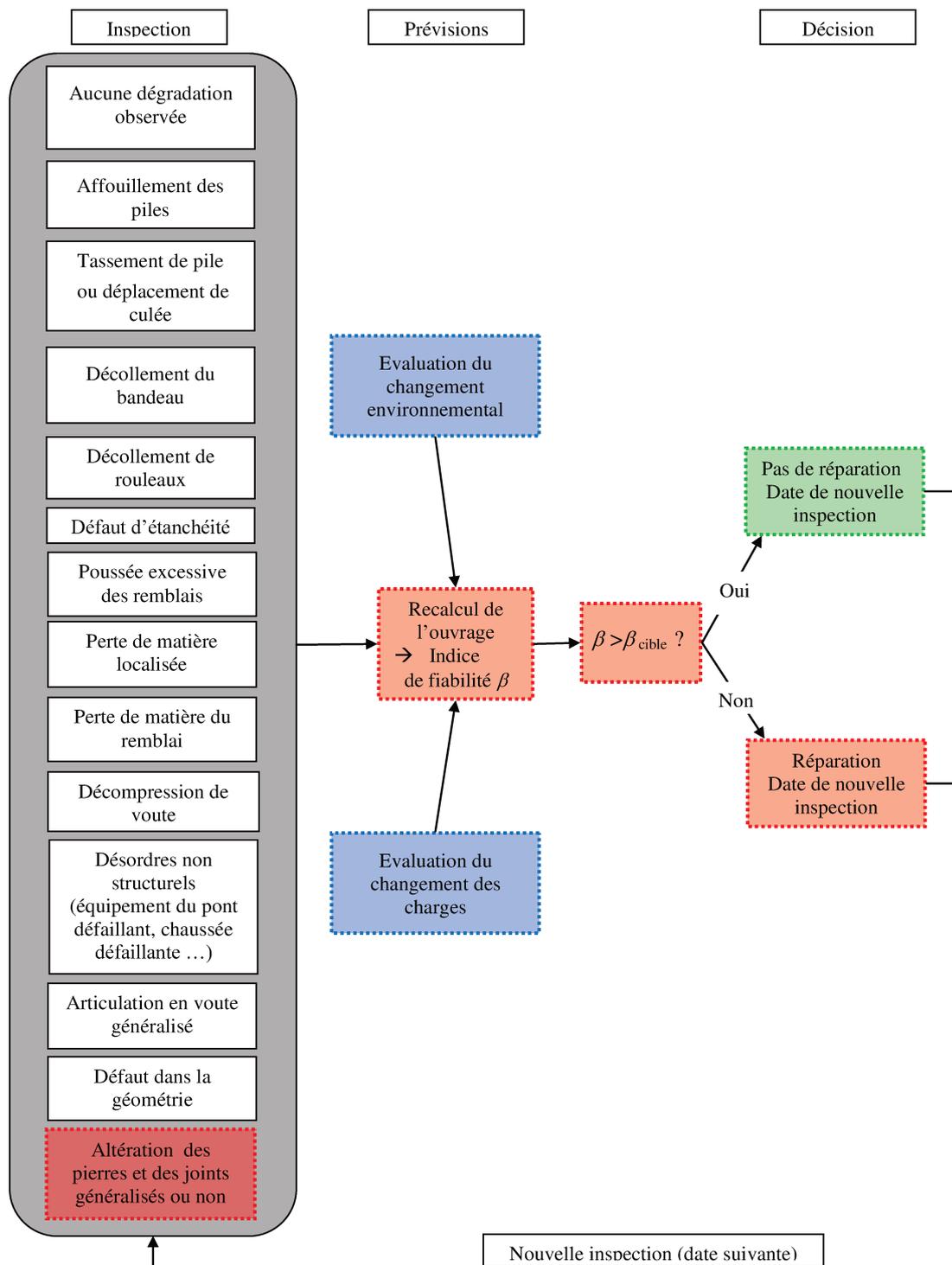


Figure 40 : Etape détaillée dans le cas d'ouvrages maçonnés.

Suite à l'inspection effectuée à l'instant  $t_i$  de la durée de vie de l'ouvrage, différentes possibilités de défaut sont listées, elles reprennent partiellement les causes de désordres identifiés dans l'IQOA (Image de la Qualité des Ouvrages d'art (SETRA 1996)). Leurs probabilités d'occurrence sont issues des historiques (retour d'expériences) pour les mêmes catégories d'ouvrages, mais aussi des résultats des inspections précédentes, et des travaux de

réparation antérieurs réalisés sur l'ouvrage. Dans le cas où l'inspection visuelle donne lieu une inspection détaillée, un recalcul peut être réalisé pour évaluer l'état présent de l'ouvrage mais aussi pour prévoir son état futur. Cette évaluation prend en compte des prévisions de chargement et des prévisions d'environnement. A l'issue, l'indice de fiabilité de l'ouvrage est estimé (Figure 40). Cet indice permet la prise de décision concernant la nécessité ou non d'engager des travaux de réparation de façon à pouvoir le maintenir au dessus de l'indice de fiabilité cible. Il détermine quelle sera la prochaine date d'inspection et quand risque d'avoir lieu la prochaine réparation. Par contre, dans la plupart des cas où l'inspection visuelle ne donne pas d'alerte, aucune mesure particulière n'est prise par le gestionnaire d'ouvrage, et la date de l'inspection suivante demeure généralement inchangée.

Nous choisissons de traiter le cas de l'altération généralisée du matériau (pierres et joints (Figure 40)) pour développer une application de la démarche fiabiliste à la gestion d'ouvrages maçonnés. Les résultats du chapitre précédent ont mis en évidence l'influence de la variabilité du module d'Young des segments sur la capacité portante de la voûte. A la date de la mise en service de l'ouvrage, cette variabilité naturelle n'est pas problématique. Elle est augmentée dans le temps sous l'effet des conditions environnementales et de chargement. Elle constitue une forme de pathologie très discrète qui peut être complètement invisible, ce qui la rend dangereuse. L'objectif de ce chapitre est d'évaluer l'influence de cette évolution de la variabilité du module sur la fiabilité instantanée et dépendante du temps de la voûte maçonnée.

## **2 Principe de l'analyse fiabiliste**

L'évaluation de la sécurité des structures est effectuée sur la base du principe de l'état limite. Ce dernier représente la limite entre le domaine de sûreté et le domaine de défaillance de la structure. Lorsque l'état limite est atteint, la structure ne répond plus aux critères de conception, c'est-à-dire « la marge de sûreté » exprimée par l'état limite devient nulle. Mathématiquement, la marge de sûreté est représentée par la fonction d'état limite  $g(X_i)$ , où  $X_i$  est le vecteur des variables aléatoires, que l'on peut décomposer en deux sous-vecteurs : le premier intervient dans la définition de la variable de résistance notée  $R$ , et le second intervient dans la définition de la variable de sollicitation notée  $S$  (nous admettons ici que les variables de résistance et de sollicitation sont indépendantes). L'expression de la fonction d'état limite est donnée par la relation (IV-01).

$$g(R, S) = R - S \quad \dots \text{(IV - 01)}$$

Dans le cas d'un état limite linéaire avec variables normales statistiquement indépendantes, nous pouvons en déduire la valeur moyenne et l'écart-type de la marge de sûreté  $g(R, S)$ , par les relations :

$$\mu_g = \mu_R - \mu_S \quad \dots \text{(IV - 02)}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad \dots \text{(IV - 03)}$$

Quand  $R=S$ , la structure atteint son état limite. Dans l'analyse probabiliste, la fiabilité de la structure est définie comme étant le complément de la probabilité de défaillance  $P_f$ . Cette probabilité de défaillance est définie comme suit :

$$P_f = P(g(R, S) \leq 0) \quad \dots \text{(IV - 04)}$$

Dans le cadre des approximations du premier ordre, la probabilité de défaillance est reliée à l'indice de fiabilité  $\beta$  par :

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad \dots \text{(IV - 05)}$$

où  $\Phi(\cdot)$  représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Cet indice de fiabilité souvent appelée indice de Cornell ne s'applique qu'à un état-limite linéaire de variables gaussiennes. Dans les cas contraires, il faut effectuer un changement de repère pour procéder à une transformation de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) et pouvoir déterminer un indice invariant dans toute représentation de l'état-limite. Cet indice de fiabilité généralisé, due à Hasofer et Lind, est présenté en annexe C.

Il convient par ailleurs de fixer une valeur de référence de cet indice de fiabilité, synonyme d'un niveau de sécurité que l'on juge acceptable. L'EN 1990 (Eurocodes structuraux 2003) définit les valeurs minimales recommandées en fonction des classes de fiabilité de l'ouvrage selon le type d'état limite considéré pour une période de référence de 1 et de 50 ans. On peut en déduire l'indice à 100 ans, durée de projet prescrite pour les ouvrages d'art, à partir de la formule (IV - 06).

$$\Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_1)]^n \quad \dots (IV - 06)$$

Le Tableau 22 donne les indices de fiabilité cibles  $\beta_0$  pour une classe de fiabilité RC2 (fiabilité moyenne), recommandée pour les ouvrages d'art.

Tableau 22: Valeurs des indices de fiabilité cibles  $\beta_0$ .

Classe de fiabilité	Etat limite	Période de référence		
		1 an	50 ans	100 ans
RC2	Ultime	4,7	3,8	3,72
	Service	2,9	1,5	1,0

La performance d'un ouvrage est évaluée en comparant son indice de fiabilité  $\beta$  à l'indice de fiabilité cible  $\beta_0$ . Le rapport  $\beta/\beta_0$  est appelé indicateur de performance de l'ouvrage que l'on note  $I_p$  (SETRA 2012).

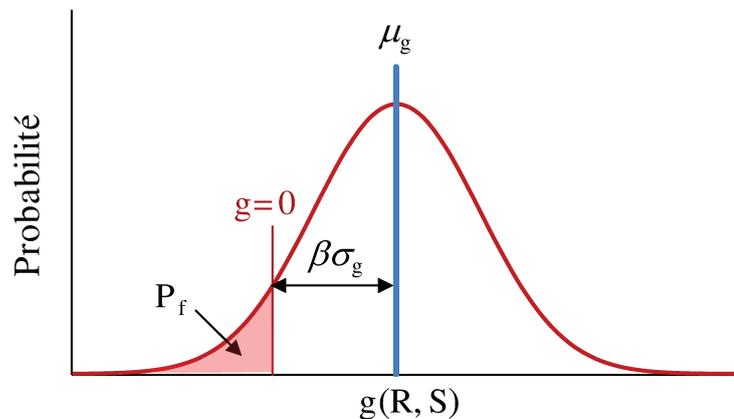


Figure 41 : Indice de fiabilité et probabilité de défaillance.

Source : [Lemaire, Chateauneuf, and Mitteau 2005]

Géométriquement, l'indice de fiabilité représente le nombre d'écart-types entre la moyenne de la marge de sûreté (fonction de performance) et la surface d'état limite définie par  $g = 0$  (Figure 41). Il définit le point le plus proche de cette limite par rapport à la moyenne, appelé point de calcul, dont les coordonnées sont données par la relation :

$$P^* \begin{cases} \mu_R - \sigma_R \cdot \alpha_R \cdot \beta \\ \mu_S - \sigma_S \cdot \alpha_S \cdot \beta \end{cases} \quad \dots (IV - 07)$$

avec  $\alpha_R$  et  $\alpha_S$  les composantes du vecteur des cosinus directeurs  $\{\alpha\}$ , orthogonal à la surface d'état limite et dirigé vers le domaine de défaillance. Ce vecteur permet de quantifier le poids relatif des variables dans le calcul de la probabilité de défaillance (AFGC 2003). Dans le cas de variables normales et indépendantes, le vecteur des cosinus directeurs est donné par :

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_R \\ \alpha_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ -\frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \end{Bmatrix} \quad \dots \text{(IV - 08)}$$

### 3- Influence de la variabilité du module d'Young sur la fiabilité d'une voûte

Reprenons le cas de la variabilité du module, étudié dans le chapitre précédent. La distribution de la charge critique obtenue par les simulations de Monte Carlo représente la distribution de la résistance R (Figures 42(a)). Le modèle de chargement adopté est celui du modèle de charge numéro 2 (LM2) défini par l'EN 1991-2 (Eurocode 1 2003), avec la prise en compte d'une seule charge à l'essieu de 200 kN appliquée sur toute la profondeur de la voûte. Cette valeur est représentative du quantile à 98% de la fonction de densité de probabilité de la loi supposée normale du chargement S. Les hyperparamètres de cette distribution sont obtenus de la manière suivante :

$$P(S < 200) = 0,98 \quad \dots \text{(IV - 09)}$$

On procède à un changement de variable en posant :  $Z = \left(\frac{S - \mu_S}{\sigma_S}\right)$ , avec  $\mu_S$  et  $\sigma_S$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type du chargement S, et Z suit une loi normale centrée réduite ( $Z \sim N(0, 1)$ ). La relation (IV-09) prend la forme :

$$P\left(Z < \frac{200 - \mu_S}{\sigma_S}\right) = 0,98 \quad \dots \text{(IV - 10)}$$

Le quantile de la loi normale centrée réduite à 0,98 est égal à 2,05, ce qui nous donne :

$$\left(\frac{200 - \mu_S}{\sigma_S}\right) \approx 2,05 \quad \Rightarrow \quad \mu_S = 200 - 2,05 \sigma_S \quad \dots \text{(IV - 11)}$$

Dans la suite de cette étude, une valeur moyenne du chargement S de 160 kN est adoptée. La relation (IV-11) nous donne un écart type de 19,5 kN (Figure 42 (b)). Le tableau 23 récapitule les propriétés des variables aléatoires.

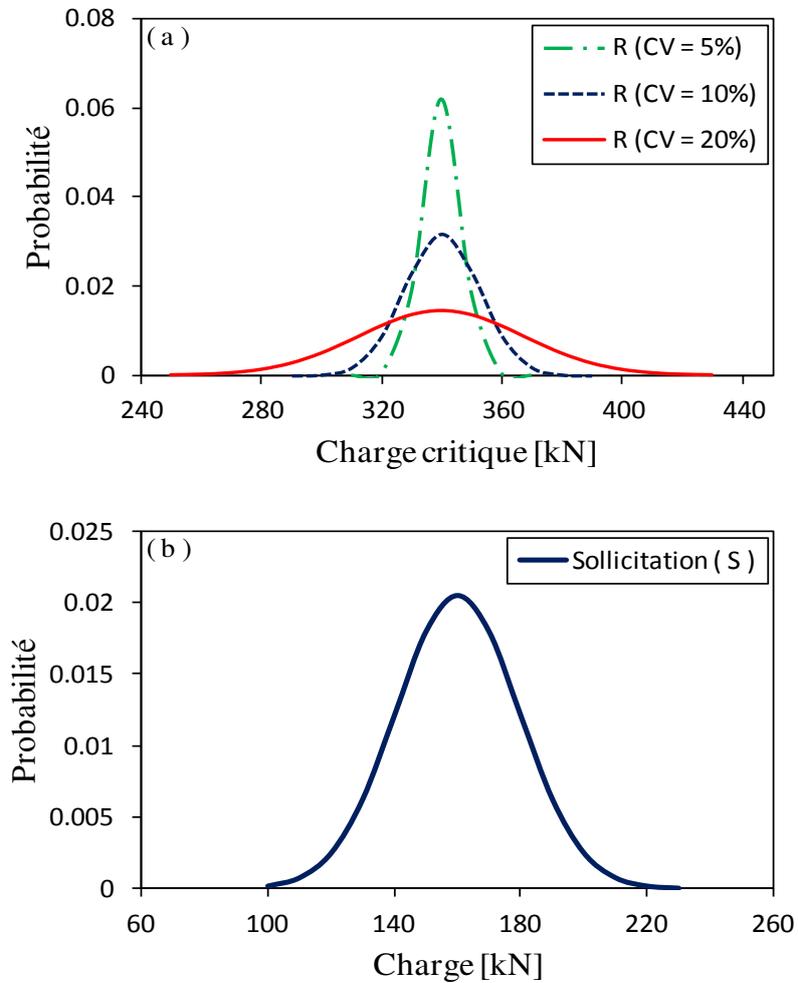


Figure 42 : Densités de probabilité de la résistance (R) et du chargement (S)

Tableau 23: Variables aléatoires et lois de probabilité associées pour le calcul de  $\beta$ .

Variable	Valeur moyenne [kN]	Loi de probabilité	Ecart type [kN]		
			CV = 5%	CV = 10%	CV = 20%
Résistance R	340	Normale	6,44	12,55	27,23
Chargement S	160	Normale	19,48		

L'indice de fiabilité  $\beta$  est calculé par le biais de la relation (IV-12).

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad \dots \text{(IV - 12)}$$

Pour un coefficient de variation du module d'Young de 20%, les relations (IV-02) et (IV-03) nous donnent :

$$\mu_g = 340 - 160 = 180 \text{ kN}$$

$$\sigma_g = \sqrt{27,23^2 + 19,48^2} = 33,48 \text{ kN}$$

De la relation (IV-12) on obtient la valeur de l'indice de fiabilité :

$$\beta = \frac{340 - 160}{\sqrt{27,23^2 + 19,48^2}} = 5,37 > \beta_0 = 3,7$$

Les cosinus directeurs valent respectivement :

$$\begin{cases} \alpha_R = \frac{27,23}{\sqrt{27,23^2 + 19,48^2}} = 0,81 \\ \alpha_S = -\frac{19,48}{\sqrt{27,23^2 + 19,48^2}} = -0,58 \end{cases}$$

La relation (IV - 07) permet d'en déduire les coordonnées du point de calcul  $P^*$ , et la probabilité conjointe  $P(R, S)$  (Figure 47).

$$P^* \begin{cases} 340 - 27,23 \cdot 0,81 \cdot 5,37 \\ 160 + 19,48 \cdot 0,58 \cdot 5,37 \end{cases} \approx \begin{cases} 221 \text{ kN} \\ 221 \text{ kN} \end{cases}$$

De la même manière, le calcul est effectué pour les autres valeurs du coefficient de variation du module d'Young des segments (5% et 10%), les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau 24.

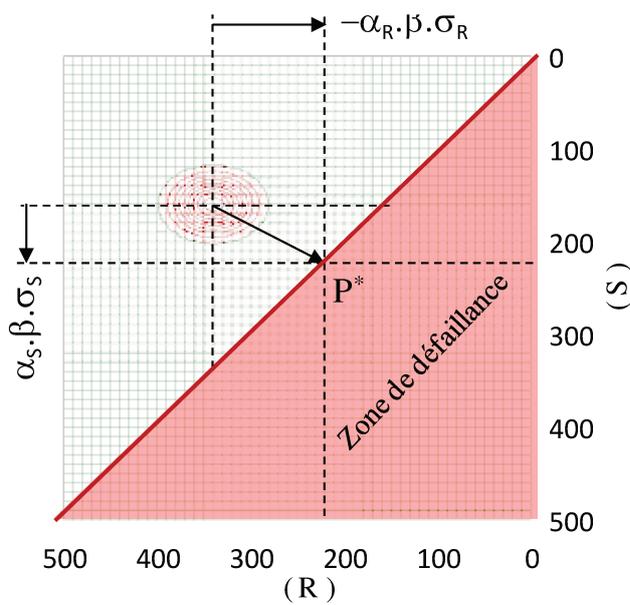
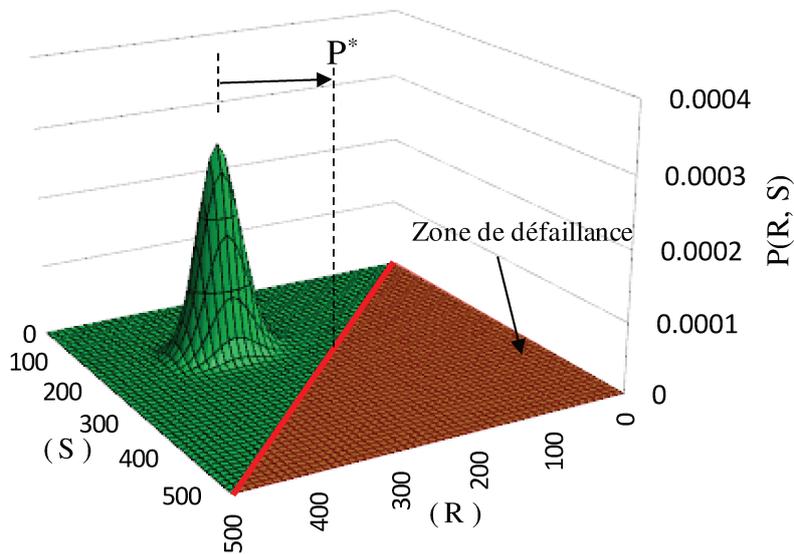


Figure 43 : Point de calcul et zone de défaillance.

Tableau 24: Evaluation de l'indice de fiabilité  $\beta$ .

Grandeur	Symbole	CV du module d'Young des segments			
		0%	5%	10%	20%
Marge de sûreté	$\mu_g$	180			
	$\sigma_g$	20	21	23	34
Indice de fiabilité	$\beta$	9,24	8,77	7,76	5,37
Cosinus directeurs	$\alpha_R$	0	0,31	0,54	0,81
	$\alpha_S$	-1	-0,95	-0,84	-0,58
Probabilité de défaillance	$P_f$	$< 10^{-8}$	$< 10^{-8}$	$< 10^{-8}$	$< 10^{-8}$

Ces résultats montrent que l'indice de fiabilité obtenu dans les trois cas est supérieur à l'indice de fiabilité cible  $\beta_0$  fixé par l'EN 1990. Toutefois, nous constatons une décroissance rapide de cet indice en fonction du coefficient de variation du module d'Young des segments de la voûte, il passe de 9,25, dans le cas d'un CV nul (cas déterministe), à 5,37 pour un CV de 20%, soit une baisse de près de 42% (Figure 44). Par ailleurs, l'augmentation de la dispersion du module d'Young des segments engendre une augmentation de la dispersion de la marge de sûreté et par conséquent une diminution de la fiabilité, alors que le poids de la variable de résistance  $\alpha_R$  augmente dans le calcul de la probabilité de défaillance au détriment de celui de la variable de sollicitation  $\alpha_S$  (en valeur absolue). D'où la nécessité de suivre cette décroissance dans le temps.

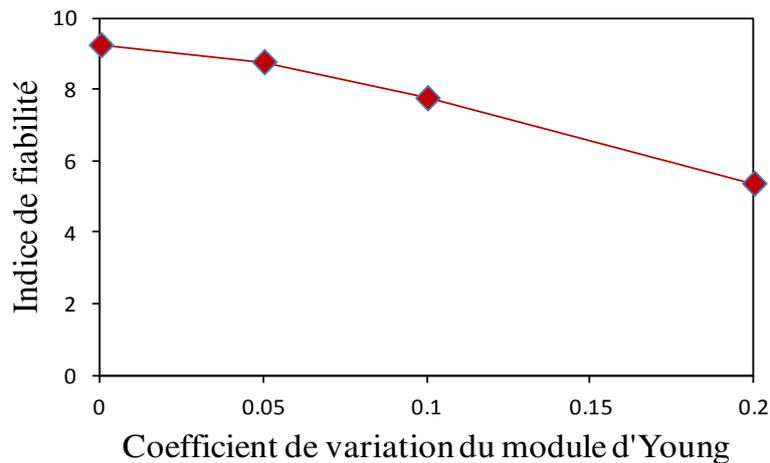


Figure 44 : Effet de la variabilité du module d'Young sur l'indice de fiabilité.

#### 4- Fiabilité de la voûte dans le temps

A la différence de la fiabilité dite statique, la défaillance de la voûte est caractérisée par une fonction de performance dépendant du temps :  $g(R, S, t)$ . Cette variable temps peut intervenir dans les deux autres variables (de résistance et de sollicitation) pour représenter l'évolution temporelle de ces grandeurs. Plus spécifiquement, la résistance de la voûte qui peut diminuer sous l'effet du processus de dégradation des matériaux.

Dans la suite de cette partie, la variation temporelle du chargement est supposée suffisamment lente pour pouvoir la négliger. Un calcul statique de  $S$  est donc acceptable. Nous allons maintenant étudier la fiabilité dépendant du temps de la voûte définie dans le chapitre III en nous basant sur une loi de vieillissement que l'on va définir dans la section suivante.

#### 4-1. Loi de vieillissement

Le module d'Young du matériau vieillissant peut se modéliser sous la forme :

$$E(t) = \begin{cases} E_0, & \text{si } t \leq t_{init} \\ E_0 \cdot e^{-bt^c}, & \text{si } t > t_{init} \end{cases} \quad \dots \text{(IV - 13)}$$

où  $E_0$  est le module d'Young initial du matériau,  $b$  et  $c$  sont des constantes positives, qui dépendent principalement des conditions environnementales du matériau, et  $t_{init}$  le temps d'initiation du processus de dégradation.

Cependant, le vieillissement des segments de la voûte ne peut pas être considéré comme homogène. En effet, chacun des segments présente une cinétique de lixiviation différente, une porosité différente, et les conditions environnementales auxquelles ils sont soumis sont différentes (problème d'orientation Nord, Sud, Est et Ouest). Il en résulte un module d'Young initial  $E_0$  différent d'un segment à l'autre. Nous précisons par ailleurs que,  $E_0$  représente le module du segment sur toute la profondeur de la voûte, et par conséquent, homogénéise la variation environnementale liée à l'exposition.

Pour tenir compte de cette différence du module initial  $E_0$ , nous considérons que pour une pierre calcaire de forte compacité, le module d'Young avoisine la valeur maximale  $E_{max}$ , issue de la littérature, pour les pierres calcaires [Efunda 2015], soit 70 GPa. La loi de vieillissement (IV - 13) nous donne la courbe de base. Les modules initiaux (première mesure) des segments de la voûte ( $E_1, E_2, \dots, E_n$ ) sont ensuite positionnés selon leurs valeurs moyennes et leurs incertitudes sur l'axe des ordonnées permettant d'estimer les temps écoulés  $\tau_i$  par rapport à  $t_{init}$  (Figure 45). L'incertitude sur le module d'Young provient du fait qu'on estime le module de chaque constituant du segment et aussi, de l'homogénéisation effectuée par la suite. En d'autres termes, les segments de la voûte sont assimilés à des pierres saines, issues de la même carrière, dont le processus de dégradation s'est déclenché depuis un temps  $\tau_i$ . Cela nous permet de considérer, dans un premier temps, les mêmes valeurs des constantes  $b$  et  $c$  pour la modélisation du vieillissement de l'ensemble des segments de la voûte, sous réserve de pouvoir les actualiser si d'autres mesures du module deviennent disponibles ultérieurement. Il convient de préciser que cette loi de vieillissement n'est valable que sur la durée de vie de référence (fixée à 100 ans) de l'ouvrage.

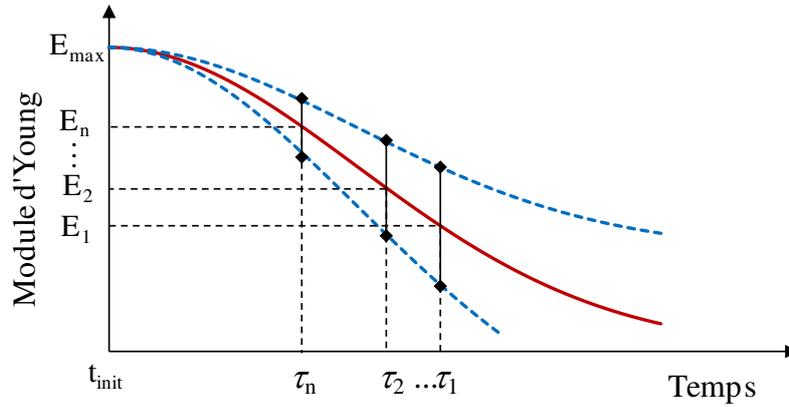


Figure 45 : Positionnement des modules des segments sur la courbe de base.

La loi de vieillissement (IV-13) permet d'écrire la loi de vieillissement pour un segment  $i$  comme suit:

$$E_i(t) = E_{max} \cdot e^{-b_i(t+\tau_i)^{c_i}} \quad \dots \text{(IV - 14)}$$

Et comme on fait l'hypothèse d'un même site de provenance, on choisit de prendre  $b$  et  $c$  constants pour tous les segments. L'expression (IV - 14) devient alors :

$$E_i(t) = E_{max} \cdot e^{-b(t+\tau_i)^c} \quad \dots \text{(IV - 15)}$$

#### 4-2. Simulation de l'inspection

La méthode proposée se base sur un calcul 2D, les mesures doivent donc être effectuées sur toute la profondeur de la voûte. Il en résulte pour chaque segment, à l'instant  $t = 0$  de mesure (première inspection), une valeur moyenne du module et un écart-type  $(\bar{E}_1, \sigma_1), (\bar{E}_2, \sigma_2), \dots, (\bar{E}_{16}, \sigma_{16})$ . Ces valeurs mesurées permettent d'en déduire les valeurs des  $\tau_i$  par l'intermédiaire de la loi (IV-15):

$$\text{(IV - 15)} \quad \stackrel{t=0 \text{ (1ère inspection)}}{\rightleftharpoons} \quad \bar{E}_i(0) = E_{max} \cdot e^{-b(\tau_i)^c} \quad \dots \text{(IV - 16)}$$

L'expression des  $\tau_i$  en fonction des valeurs mesurées  $E_i$  à l'instant  $t = 0$  s'écrit :

$$\tau_i = \left[ -\frac{1}{b} \cdot \ln \left( \frac{\bar{E}_i(0)}{E_{max}} \right) \right]^{\frac{1}{c}} \quad \dots \text{(IV - 17)}$$

En utilisant la relation (III-17), proposée dans le chapitre précédent, on obtient l'expression générale de la marge de sûreté en fonction des modules des segments, du chargement considéré :

$$g_0(R, S) = g_0(E_i, R_0, S) = R_0 - S + \sum_1^{16} a_i E_i(0) \quad \dots \text{(IV - 18)}$$

En supposant les variables aléatoires,  $E_i$  et  $S$ , normales et indépendantes, la moyenne et l'écart-type de la marge de sûreté s'écrivent :

$$g_0 \left\{ \begin{array}{l} \mu_{g_0} = R_0 - \mu_S + \sum_1^{16} a_i (\bar{E}_i(0)) \\ \sigma_{g_0} = \sqrt{\sigma_S^2 + \sum_1^{16} a_i^2 \sigma_{E_i}^2(0)} \end{array} \right. \quad \dots \text{(IV - 20)}$$

On obtient l'indice de fiabilité initial de la voûte :

$$\beta(t = 0) = \frac{R_0 - \mu_S + \sum_1^{16} a_i \bar{E}_i(0)}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sum_1^{16} a_i^2 \sigma_{E_i}^2(0)}} \quad \dots \text{(IV - 21)}$$

Les 17 cosinus directeurs s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{E_i} = \frac{a_i \sigma_{E_i}(0)}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sum_1^{16} a_i^2 \sigma_{E_i}^2(0)}} \\ \alpha_S = -\frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sum_1^{16} a_i^2 \sigma_{E_i}^2(0)}} \end{array} \right. \quad \dots \text{(IV - 23)}$$

Dans la suite, les valeurs de  $43 \cdot 10^{-6}$  et 2 sont adoptés pour les constantes  $b$  et  $c$  respectivement sous réserve de pouvoir les actualiser si d'autres mesures deviendront disponibles ultérieurement. Pour simuler les premières mesures, un tirage de 16 valeurs du module d'Young a été effectué selon une loi normale définie par la valeur moyenne de 48 GPa et un coefficient de variation de 5%, et pris en compte dans les calculs (Tableau 25).

Tableau 25: Paramètres d'entrée (t = 0).

N° Segment (i)	1	2	3	4
$\bar{E}_i$ [GPa]	49,083	46,541	48,404	49,558
N° Segment (i)	5	6	7	8
$\bar{E}_i$ [GPa]	44,208	43,565	44,478	47,304
N° Segment (i)	9	10	11	12
$\bar{E}_i$ [GPa]	48,465	49,129	53,852	49,811
N° Segment (i)	13	14	15	16
$\bar{E}_i$ [GPa]	52,684	51,977	52,376	44,956
CV <sub>Ei</sub>	5%			

Les valeurs des  $\tau_i$  correspondantes (Figure 46) sont déduites de l'expression (IV – 17) et données dans le tableau 26.

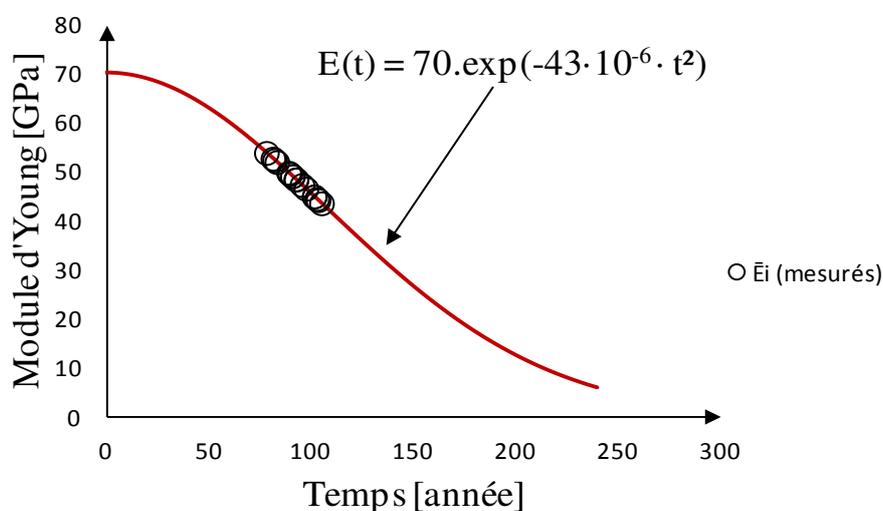


Figure 46 : Positionnement des modules des segments sur la courbe de base adoptée.

Tableau 26: Valeurs moyennes des  $\tau_i$ .

N° Segment (i)	1	2	3	4
$\bar{\tau}_i$ [année]	90,858	97,427	92,625	89,618
N° Segment (i)	5	6	7	8
$\bar{\tau}_i$ [année]	103,383	105,018	102,695	95,467
N° Segment (i)	9	10	11	12
$\bar{\tau}_i$ [année]	92,467	90,740	78,095	88,956
N° Segment (i)	13	14	15	16
$\bar{\tau}_i$ [année]	81,295	83,204	82,130	101,479

Pour toute valeur de t, la marge de sûreté instantanée est donnée par :

$$g_t = R_0 - S + \sum_1^{16} a_i \cdot E_{max} \cdot e^{-b(t+\tau_i)^2} \quad \dots \text{(IV - 24)}$$

La linéarisation sous forme logarithmique s'écrit :

$$\widehat{g}_t = \ln(R_0) - \ln(S) + \sum_1^{16} \frac{a_i}{|a_i|} \cdot [\ln(|a_i|) + \ln(E_{max}) - b(t + \tau_i)^2]$$

Il en résulte :

$$\widehat{g}_t = \ln(R_0) - \ln(S) + \sum_1^{16} \frac{a_i}{|a_i|} \cdot [\ln(|a_i|) + \ln(E_{max}) - bt^2 - 2b\tau_i t - b\tau_i^2] \quad \dots \text{(IV - 25)}$$

La relation (IV-17) permet d'écrire :

$$\tau_i = \left[ -\frac{1}{b} \cdot \ln\left(\frac{E_i(o)}{E_{max}}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{b} \cdot (\ln(E_{max}) - \ln(E_i(0))) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sachant que :

$$\mathbb{E}[\ln(E_i(0))] = \ln\left(\frac{\mathbb{E}[E_i(0)]}{\sqrt{1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(0))}{(\mathbb{E}[E_i(0))]^2}}}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[\ln(E_i(0))] = \ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(0))}{(\mathbb{E}[E_i(0)])^2}\right)$$

Nous obtenons :

$$\mathbb{E}[\tau_i] = \left[ \frac{1}{b} \cdot \left( \ln(E_{max}) - \ln\left(\frac{\mathbb{E}[E_i(0)]}{\sqrt{1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(0))}{(\mathbb{E}[E_i(0))]^2}}}\right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots \text{(IV - 26)}$$

L'expression des écarts type est obtenue de la manière suivante :

$$\tau_i^2 = -\frac{1}{b} \cdot \ln\left(\frac{E_i(o)}{E_{max}}\right) = \frac{1}{b} \cdot \ln(E_{max}) - \frac{1}{b} \cdot \ln(E_i(o))$$

Il en résulte :

$$\mathbb{V}(\tau_i^2) = \frac{1}{b^2} \cdot \mathbb{V}(\ln(E_i(o))) = \frac{1}{b^2} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(o))}{(\mathbb{E}[E_i(0)])^2} \right]$$

Par ailleurs, nous avons :

$$[\mathbb{V}(\tau_i)]^2 = \mathbb{V}(\tau_i^2) - 2\mathbb{V}(\tau_i)(\mathbb{E}[\tau_i])^2$$

Nous obtenons :

$$[\mathbb{V}(\tau_i)]^2 + 2(\mathbb{E}[\tau_i])^2[\mathbb{V}(\tau_i)] - \mathbb{V}(\tau_i^2) = 0$$

Cette équation admet deux racines, nous retenons la solution positive, car la variance est toujours positive (ou nulle) :

$$\mathbb{V}(\tau_i) = \sqrt{(\mathbb{E}[\tau_i])^4 + \frac{1}{b^2} \ln \left[ 1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(o))}{(\mathbb{E}[E_i(0)])^2} \right]} - (\mathbb{E}[E_i(0)])^2 \quad \dots \text{(IV - 27)}$$

On obtient alors :

$$\tau_i \left| \begin{array}{l} \mathbb{E}[\tau_i] = \left[ \frac{1}{b} \cdot \left( \ln(E_{max}) - \ln \left( \frac{\mathbb{E}[E_i(0)]}{\sqrt{1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(o))}{(\mathbb{E}[E_i(0)]^2)}}} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \sigma_{\tau_i} = \sqrt{\sqrt{(\mathbb{E}[\tau_i])^4 + \frac{1}{b^2} \ln \left[ 1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(o))}{(\mathbb{E}[E_i(0)]^2)} \right]} - (\mathbb{E}[E_i(0)])^2} \end{array} \right. \quad \dots \text{(IV - 28)}$$

La relation (IV-25) permet d'écrire :

$$\widehat{g}_t \left| \begin{array}{l} \widehat{g}_t = \ln(R_0) - \ln \left( \frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_s^2}{\mu_s^2}}} \right) + \sum_1^{16} \frac{a_i}{|a_i|} \cdot [\ln(|a_i|) + \ln(E_{max}) - bt^2 - 2b\bar{\tau}_i t - b\bar{\tau}_i^2] \\ \sigma_{\widehat{g}_t} = \sqrt{\left[ \ln \left( 1 + \frac{\sigma_s^2}{\mu_s^2} \right) \right] + \sum_1^{16} \ln \left[ 1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(o))}{(\bar{E}_i(o))^2} \right] + 4b^2 t^2 \sum_1^{16} \left[ \sqrt{\bar{\tau}_i^4 + \frac{1}{b} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{\mathbb{V}(E_i(o))}{(\bar{E}_i(o))^2} \right]} - \bar{\tau}_i^2 \right]} \end{array} \right. \quad \dots \text{(IV - 29)}$$

Finalement, l'indice de fiabilité s'écrit sous la forme :

$$\beta_t = \frac{\ln(R_0) - \ln\left(\frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_s^2}{\mu_s^2}}}\right) + \sum_1^{16} \frac{a_i}{|a_i|} \cdot [\ln(|a_i|) + \ln(E_{max}) - bt^2 - 2b\bar{\tau}_i t - b\bar{\tau}_i^2]}{\sqrt{\left[\ln\left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\mu_s^2}\right)\right] + \sum_1^{16} \ln\left[1 + \frac{V(E_i(o))}{(\bar{E}_i(o))^2}\right] + 4b^2 t^2 \sum_1^{16} \left[\sqrt{\bar{\tau}_i^4 + \frac{1}{b}} \cdot \ln\left[1 + \frac{V(E_i(o))}{(\bar{E}_i(o))^2}\right] - \bar{\tau}_i^2\right]}}$$

... (IV – 30)

La figure 47 représente la variation de l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance cumulée de la voûte, dans le temps.

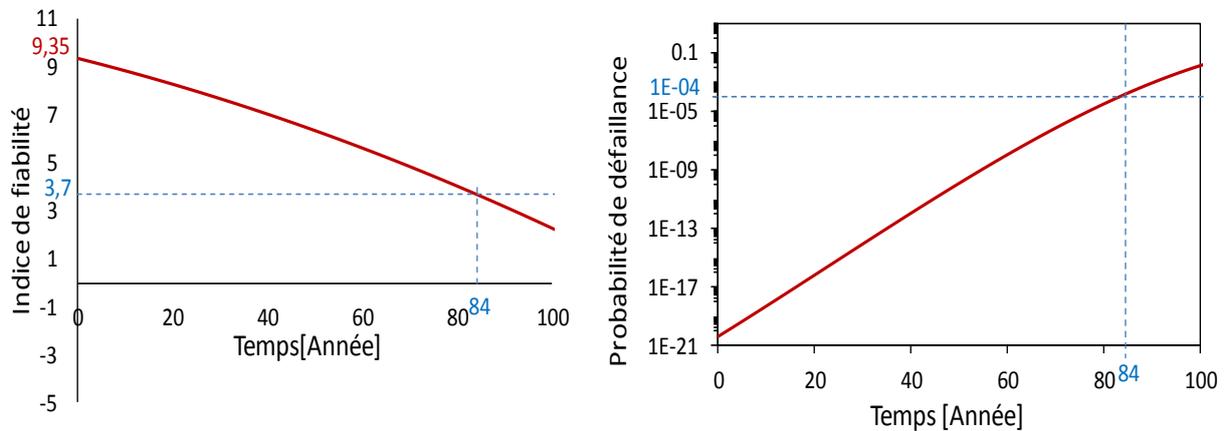


Figure 47 : Indice de fiabilité et probabilité de défaillance (CV=5%).

De la même manière, le calcul a été effectué pour deux autres cas étudiés (CV de 10% et 20%). Les tirages de valeurs du module d'Young selon ces deux coefficients de variation sont donnés dans le Tableau 27.

La variation de l'indice de fiabilité et de la probabilité de défaillance en fonction du temps pour les trois valeurs du CV (5%, 10% et 20%) sont illustrées dans la figure 48.

Tableau 27: Paramètres d'entrée (t = 0).

N° Segment (i)	$\bar{E}_i$ [GPa]		
	CV = 5%	CV = 10%	CV = 20%
1	49,083	45,889	42,537
2	46,541	45,262	42,232
3	48,404	47,191	56,255
4	49,558	45,389	50,143
5	44,208	47,004	37,682
6	43,565	41,956	53,501
7	44,478	34,991	30,138
8	47,304	40,495	53,746
9	48,465	45,471	28,953
10	49,129	53,051	61,002
11	53,852	48,526	53,589
12	49,811	52,236	36,583
13	52,684	50,341	42,707
14	51,977	51,677	54,521
15	52,376	47,362	47,974
16	44,956	44,222	44,728

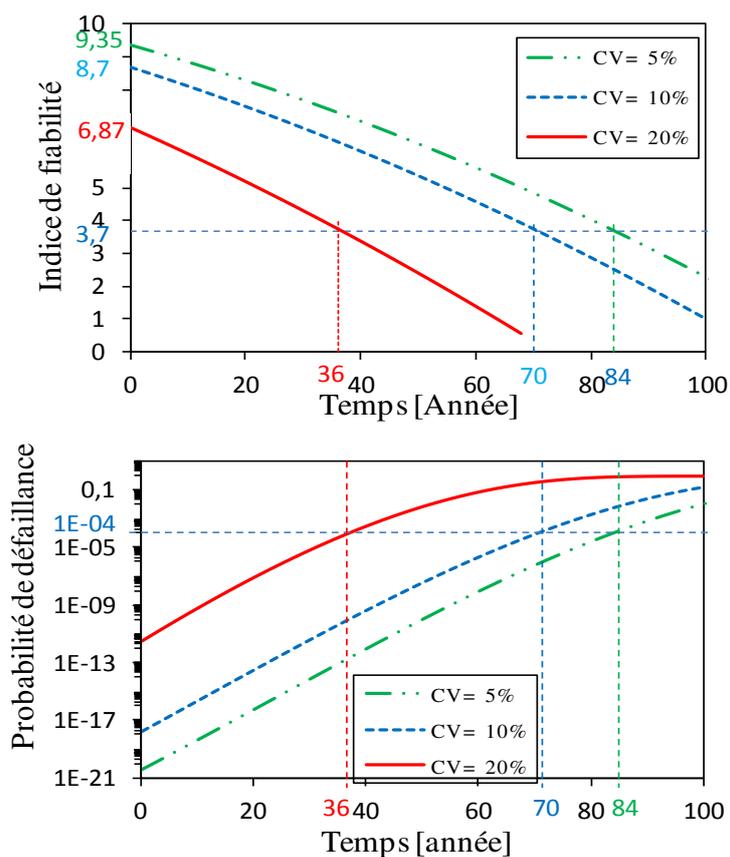


Figure 48 : Indice de fiabilité et probabilité de défaillance (CV=5%, 10% et 20%).

Ces résultats permettent, du point de vue théorique, d'estimer la marge de temps dont dispose le gestionnaire de l'ouvrage pour engager les travaux de réparation nécessaires à l'élévation du niveau de fiabilité de la structure avant qu'il ne devienne plus bas que le niveau requis, soit un  $\beta \geq 3,72$  ( $P_f \leq 10^{-4}$ ). Cette marge diminue en fonction du coefficient de variation du module d'Young des segments de la voûte, qui passe de 84 ans à 70 ans, puis à 36 ans, pour les trois valeurs initiales du CV : 5%, 10% et 20% respectivement. Prenons le cas par exemple d'un ouvrage dont le CV initial est estimé à 20%. Pour une inspection effectuée à  $t = 10$  ans (Figure 49), la probabilité de défaillance serait, selon les hypothèses du modèle de prévision, de l'ordre de  $10^{-10}$ . Si la date de l'inspection est repoussée à  $t = 20$  ans, la probabilité de défaillance de l'ouvrage serait de l'ordre de  $10^{-8}$ . Dans les deux cas la probabilité de défaillance cible n'est pas dépassée. Toutefois si la date de l'inspection est reportée au-delà de  $t = 40$  ans, correspondant à  $P_f = 3.10^{-4}$ , la probabilité cible serait dépassée. Ce modèle pourrait permettre de fixer un seuil de probabilité de défaillance pour le déclenchement d'une maintenance préventive permettant d'en déduire la prochaine date d'inspection.

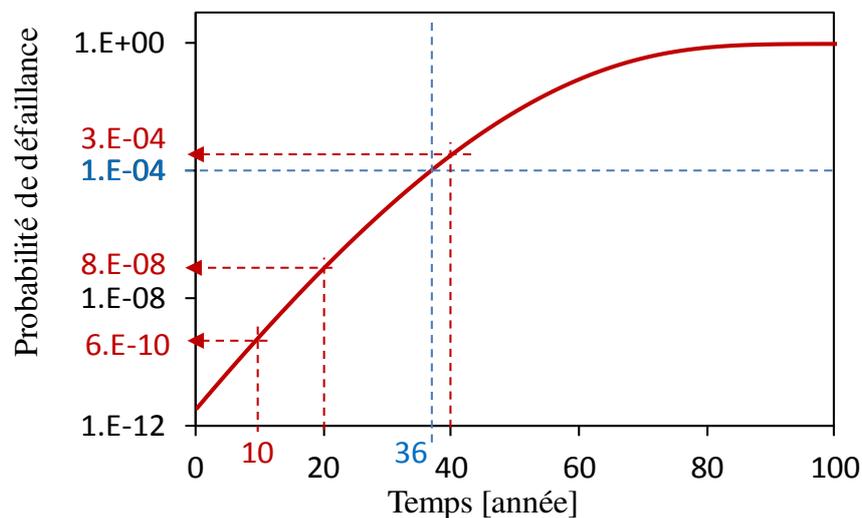


Figure 49 : Probabilité de défaillance (CV= 20%).

Cependant, en pratique, la prise en compte d'une charge à l'essieu de 200 kN représentant le quantile à 98% (§ IV-2) signifie que pendant toute sa durée de vie (i.e. durée de référence), l'ouvrage ne peut être soumis à cette valeur de chargement qu'à deux reprises en moyenne.

Le problème est qu'on ne sait pas à quel instant cela se produira, d'où la nécessité de tenir compte de l'historique du chargement (du trafic) que l'on va maintenant développer.

#### 4-2.1. Prise en compte de l'historique du trafic

Pour pouvoir prendre en compte cet historique du chargement, la démarche adoptée est la suivante (Figure 50) :

- La résistance obtenue en fonction du temps est comparée avec la sollicitation trouvée ;
- Nous avons substitué le calcul par éléments finis par la relation polynômiale (III –16), ce qui a permis de minimiser considérablement le temps de calcul ;
- Nous choisissons d'utiliser la méthode de Monte Carlo pour simuler 100 ans de trafic suivant la loi normale définie dans le tableau 23. Nous avons effectué  $10^8$  simulations. Pour chaque simulation, 100 valeurs du chargement sont tirées aléatoirement de façon simultanée. Sous l'hypothèse d'indépendance du trafic annuel, ce tirage représente les valeurs annuelles maximales du trafic, i.e. les pics annuels des charges à l'essieu. Le calcul est répété pour  $10^8$  simulations.
- Pour chaque tirage, les marges de sureté annuelles sont évaluées. Pour chaque année, le pic annuel est comparé à la résistance correspondante calculée dans le paragraphe précédent. La probabilité de défaillance annuelle (pour l'année t) est définie comme étant le nombre de tirage ayant conduit à la défaillance, que l'on note  $N_{\text{déf}}$  rapporté au nombre de simulations  $N_s$ :

$$P_f^t = \frac{N_{\text{déf}}^t}{N_s} \quad \dots \text{(IV - 31)}$$

- Un indicateur de défaillance  $I(\cdot)$  est introduit tel que :

$$I_{(t=1,100)}(g_t(X)) : \begin{cases} I_t(g_t(R, S, t)) = 0; & \text{si } g_t(R, S, t) > 0 \\ I_{(t=t,100)}(g_t(R, S, t)) = 1; & \text{si } g_t(R, S, t) \leq 0 \end{cases} \quad \dots \text{(IV - 32)}$$

La probabilité de défaillance exprimée par la relation (IV-31) devient :

$$P_f(t) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} I_t(g_t(X)) \quad \dots \text{(IV - 33)}$$

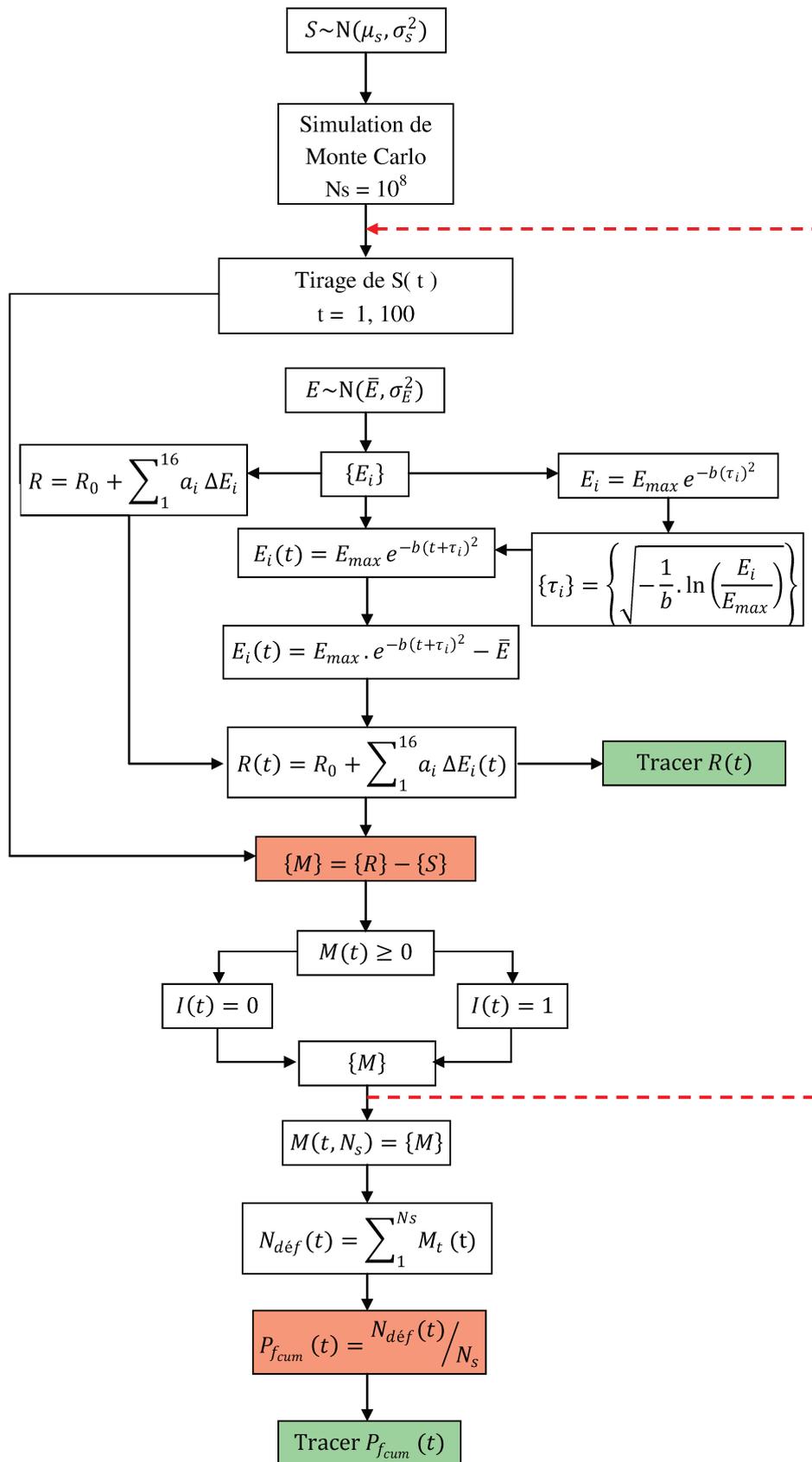


Figure 50 : Prise en compte de l'historique du trafic (ArcProg\_Z).

Cette démarche a été appliquée pour deux valeurs du coefficient de variation du module d'Young : 5% et 20%. La figure 51 présente la variation de la résistance de la voûte ainsi que sa probabilité de défaillance dans le temps.

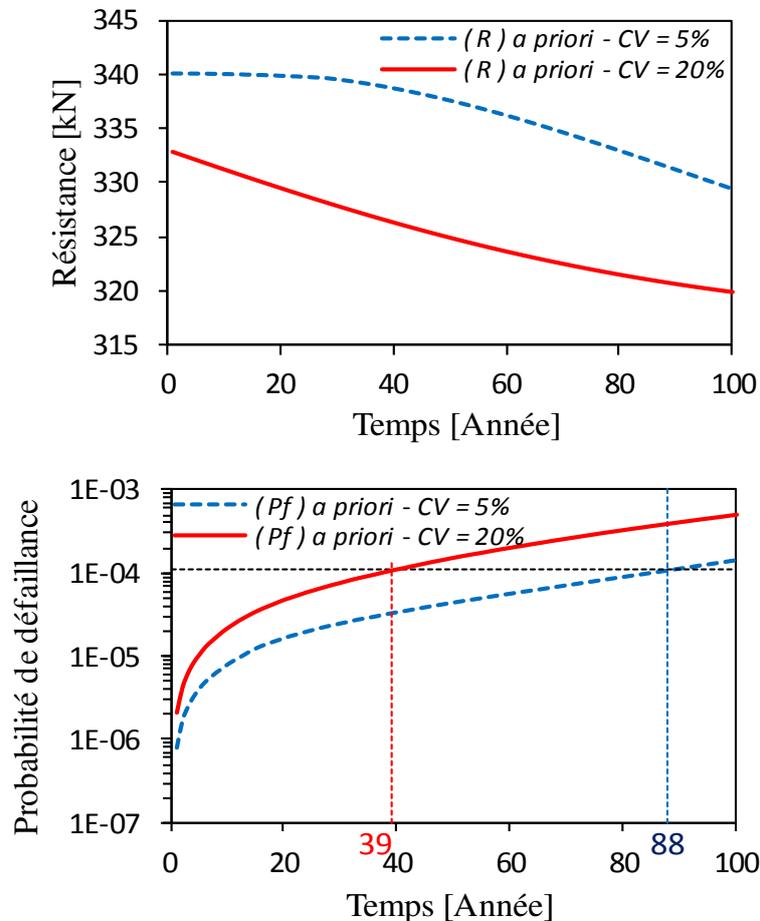


Figure 51 : Résistance et probabilité de défaillance de la voûte dans le temps.

La comparaison (Figure 52) avec le calcul précédent (sans la prise en compte de l'historique du trafic) a permis de constater que les deux calculs fournissent pratiquement les mêmes résultats concernant le délai de franchissement de la limite de défaillance, la différence réside dans les valeurs de cette probabilité avant et après cette limite de défaillance. En effet, la prise en compte de l'historique du trafic a un double effet sur la probabilité de défaillance le long de la durée de vie de l'ouvrage : elle augmente cette probabilité avant la limite de défaillance et elle la réduit après.

Nous rappelons que le premier calcul n'a pu être développé qu'en considérant la constante  $c$  égale à 2. Dans le cas où cette valeur est actualisée, ce calcul ne sera plus valable

et le recours au second calcul devient une possibilité pour évaluer la probabilité de défaillance de l'ouvrage le long de sa durée de vie.

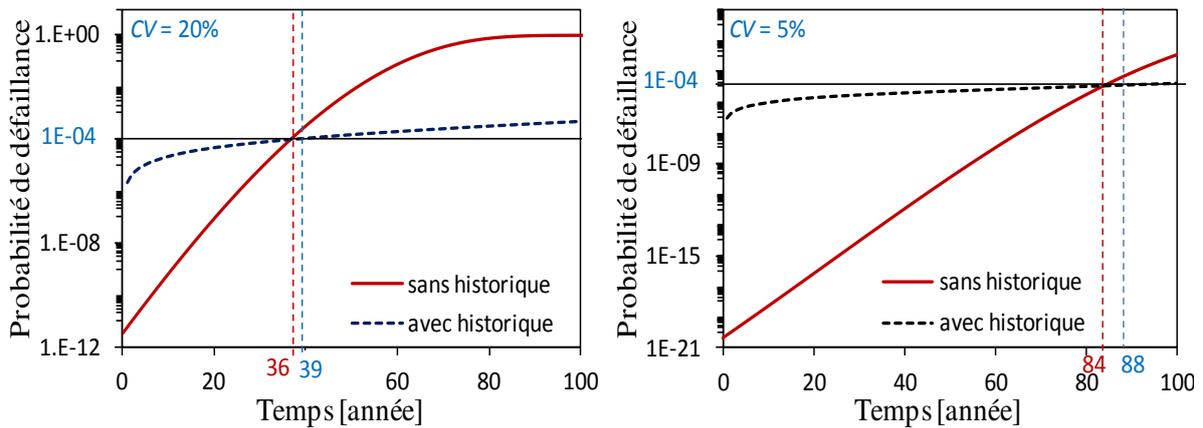


Figure 52 : Comparaison des deux méthodes de calcul.

Le coefficient de variation du module d'Young des segments augmente en fonction du temps (Figure 53). On peut remarquer que dans le premier cas de CV de 5%, ce dernier passe de 5% à près de 14% de façon quasi-linéaire sur 100 ans, alors que pour le second, ce paramètre augmente plus rapidement, il passe de 20% à plus de 45% et de façon qui peut être approximée à une loi linéaire (voir la figure 53). En effet, plus la valeur initiale du coefficient de variation est grande, plus la courbure de son évolution dans le temps est prononcée.

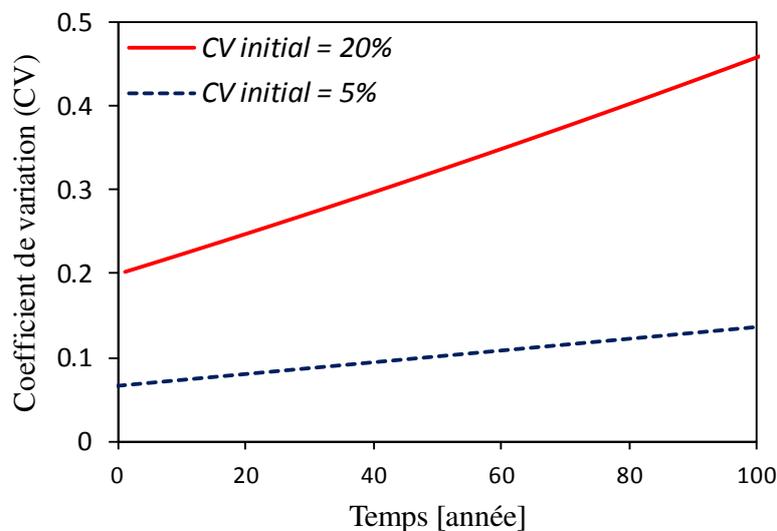


Figure 53 : Coefficient de variation du module d'Young dans le temps.

Dans tous les cas, effectuer des visites d'évaluation périodiques et/ou des inspections détaillées avant l'échéance est impératif. Suite à chaque inspection, si de nouvelles mesures deviennent disponibles, elles doivent être utilisées pour ajuster le modèle de dégradation et améliorer l'estimation de la résistance et de la probabilité de défaillance de l'ouvrage (Julien Baroth, Franck Schoefs, and Denys Breysse 2011). L'étude bibliographique a montré que l'actualisation bayésienne offre un cadre efficace pour la prise en compte des nouvelles mesures. Le modèle initial constitue la loi dite a priori de la probabilité de défaillance. Cette méthode a été implémentée avec succès dans l'outil ArcProg\_Z, et a permis de considérer deux situations numériques. La première considère une inspection à ( $t_1 = 10$  ans), la seconde simule une augmentation de trafic.

#### 4-2.2. Actualisation de la probabilité de défaillance

L'analyse de sensibilité des équations (III-20) et (III-21) a permis d'identifier les zones les plus affectées par la variation du module. Ces zones correspondent aux segments dont la variation du module est pondérée par les coefficients  $a_i$  les plus élevés, comme le montre les sensibilités déterministes (IV-33).

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial E_i} = \frac{\partial R}{\partial E_i} = a_i \quad \dots (IV - 33)$$

Dans un premier temps, nous utilisons ces sensibilités pour cibler les segments à mesurer lors de la première inspection et maximiser l'impact des informations obtenues.

Pour cibler les segments à inspecter dans le futur, il convient d'utiliser les sensibilités probabilistes données par :

$$S_{E_i}(t) = \frac{a_i \sigma_{E_i}(t)}{\sigma_R(t)} = \frac{a_i \sigma_{E_i}(t)}{\sqrt{\sum_1^{16} (a_i \sigma_{E_i}(t))^2}} \quad \dots (IV - 34)$$

Pour cette étude, nous supposons qu'à la suite d'une inspection effectuée à ( $t_1 = 10$  ans), des nouvelles mesures du module ( $\bar{E}_{\text{mesu}}$ ,  $CV_{\text{mesu}}$ ) sont rendues disponibles. Ces mesures concernent les segments des naissances (segments 1 et 16), des reins (segments 5 et 12) et de la clé de voûte (segments 8 et 9) identifiés en (§ III 3-2). A la suite de ces mesures, nous constatons un écart entre la valeur du module prédite par le modèle et la valeur issue de

l'inspection. Il faut donc actualiser la loi de vieillissement. Plusieurs solutions sont possibles parmi les quelles nous pouvons citer :

- actualiser seulement les segments mesurés ;
- tenir compte de la corrélation des modules des segments ;
- actualiser les constantes b et c en gardant le même  $\tau_i$  calculés précédemment, dans ce cas, tous les segments auront la même loi de vieillissement ;
- garder la même loi initiale et n'actualiser que les  $\tau_i$  en attribuant le  $\tau_i$  moyen issu de la mesure aux segments non mesurés.

Nous choisissons la première possibilité, seuls les segments mesurés seront actualisés. En effet, nous simulons uniquement la première inspection, qui permet d'obtenir à la date  $t_1$  des valeurs mesurées du module. Nous pouvons alors actualiser les valeurs des  $t_i$  des segments mesurés ou de tous les segments de la voûte. Mais ce n'est qu'à l'issue d'une deuxième inspection à la date  $t_2$  qu'il sera possible d'actualiser de façon intéressante la loi complète (i.e. les constantes b et c). Le choix effectué est motivé par d'une part, sa simplicité et d'autre part, par l'opportunité d'actualiser de manière plus pertinente après la deuxième inspection.

Le tableau 28 récapitule les valeurs prises en compte dans les calculs. Ces valeurs ont été choisies de façon à pouvoir simuler, le cas où le modèle de dégradation initial adopté se révèle optimiste (la résistance moyenne prédite par le modèle à ( $t_1 = 10$  ans) est supérieure à la nouvelle résistance moyenne mesurée après actualisation), mais aussi le cas où le modèle se révélerait pessimiste i.e. la résistance moyenne prédite par le modèle à ( $t_1 = 10$  ans) est, cette fois, inférieure à la nouvelle résistance moyenne mesurée.

Tableau 28: Valeurs des nouvelles mesures du module d'Young

N° Segment (i)	1	5	8	9	12	16
$E_{init_{CV=5\%}}$ [GPa]	49,083	44,208	47,304	48,465	49,811	44,956
$E_{init_{CV=20\%}}$ [GPa]	42,537	37,682	53,746	28,953	36,583	44,728
$\bar{E}_{init}$ [GPa]	48					
$\bar{E}_{mesu}$ [GPa]	44,087	44,135	43,967	44,827	44,206	41,354
$CV_{mesu}$	10%					

Dans les deux cas, des lois a priori normales sont choisies, avec une faible dispersion du module (CV=5%) pour le premier cas et, pour le second, un coefficient initial de variation du module de 20% est considéré.

Il est rappelé que la moyenne du module d'Young des segments est considéré comme variable aléatoire suivant une loi a priori de distribution normale, sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_{m_{E_i}}(m_{E_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\bar{E}}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m_{E_i} - m_{\bar{E}}}{\sigma_{\bar{E}}} \right)^2} \quad \dots \text{(IV - 35)}$$

où  $m_{\bar{E}}$  et  $\sigma_{\bar{E}}$  sont les hyperparamètres des valeurs moyennes des modules des segments qui sont supposés identiques pour tous les segments de la voûte. Le théorème de Bayes permet de combiner la loi a priori et les observations  $e_{i,t_1}$  (nouvelles mesures disponible à l'instant  $t_1$ ) pour obtenir la distribution dite a posteriori de la moyenne du module du segment mesuré  $f_{m_{E_i}}^{t_1}$ :

$$f_{m_{E_i}}^{t_1}(m_{E_i} | e_{i,t_1}) = \frac{L(e_{i,t_1} | m_{E_i}) \cdot f_{m_{E_i}}(m_{E_i})}{\int_0^{+\infty} L(e_{i,t_1} | \theta) \cdot f_{m_{E_i}}(\theta) d\theta} \quad \dots \text{(IV - 36)}$$

où  $L$  est la fonction de vraisemblance qui, en supposant que les observations sont indépendantes, est définie par :

$$L(e_{i,t_1} | m_{E_i}) = f_{E_i}(e_{i,t_1} | m_{E_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{E_i}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{e_{i,t_1} - m_{E_i}}{\sigma_{E_i}} \right)^2} \quad \dots \text{(IV - 37)}$$

La relation (IV-36) devient :

$$f_{m_{E_i}}^{t_1}(m_{E_i} | e_{i,t_1}) = \frac{\frac{1}{2\pi \sigma_{\bar{E}} \sigma_{E_i}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e_{i,t_1} - m_{E_i}}{\sigma_{E_i}} \right)^2 + \left( \frac{m_{E_i} - m_{\bar{E}}}{\sigma_{\bar{E}}} \right)^2 \right]}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_{\bar{E}} \sigma_{E_i}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e_{i,t_1} - \theta}{\sigma_{E_i}} \right)^2 + \left( \frac{\theta - m_{\bar{E}}}{\sigma_{\bar{E}}} \right)^2 \right]} d\theta} \quad \dots \text{(IV - 38)}$$

La détermination analytique de cette loi a posteriori est d'une difficulté importante. Néanmoins elle peut être approximée à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Le dénominateur est calculé par :

$$I = \frac{1}{N_I} \frac{1}{2\pi \sigma_{\bar{E}} \sigma_{E_i}} \sum_{i=1}^{N_I} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e_{i,t_1} - \theta_i}{\sigma_{E_i}} \right)^2 + \left( \frac{\theta_i - m_{\bar{E}}}{\sigma_{\bar{E}}} \right)^2 \right]} \quad \dots \text{(IV - 39)}$$

où  $N_I$  est le nombre de simulations effectuées pour le calcul du dénominateur. La moyenne actualisée du module du segment mesuré, est également calculée par simulations de Monte Carlo :

$$\begin{aligned} m_{E_i}^{t_1} &= \int_0^{\infty} m_{E_i} \cdot f_{m_{E_i}}^{t_1}(m_{E_i} | e_{i,t_1}) dm_{E_i} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{I} \cdot \frac{1}{2\pi \sigma_{\bar{E}} \sigma_{E_i}} \sum_{i=1}^N m_{E_i} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e_{i,t_1} - m_{E_i}}{\sigma_{E_i}} \right)^2 + \left( \frac{m_{E_i} - m_{\bar{E}}}{\sigma_{\bar{E}}} \right)^2 \right]} \quad \dots \text{(IV - 40)} \end{aligned}$$

où  $N$  est le nombre de simulations effectuées pour la détermination de la moyenne actualisée du module.

Afin de déterminer les nombres de simulation  $N_I$  et  $N$  nécessaires à l'actualisation des moyennes du module des segments testés (Tableau 28), une étude de convergence a été effectuée. Cette étude a permis de constater une convergence du calcul à partir de 50 000 simulations. Pour la suite du calcul,  $N_I$  et  $N$  sont fixés à 100 000 simulations.

Les nouvelles courbes de résistance de la voûte ainsi que sa probabilité de défaillance actualisées correspondant aux cas simulés sont données sur la figure 54. On peut observer que pour le premier cas (loi a priori de distribution normale avec CV=5%), la prévision sous-estime d'environ 60% la probabilité de défaillance. La marge du temps est passée de 88 ans à 50 ans, soit une diminution de près de 43%. Pour le second cas (CV=20%), la prévision surestime, cette fois, la probabilité de défaillance d'environ 42%. La marge du temps est passée de 39 ans à 62 ans, soit une augmentation de près de 60%. On remarque par ailleurs que les nouvelles courbes de probabilité de défaillance suivent les mêmes tendances.

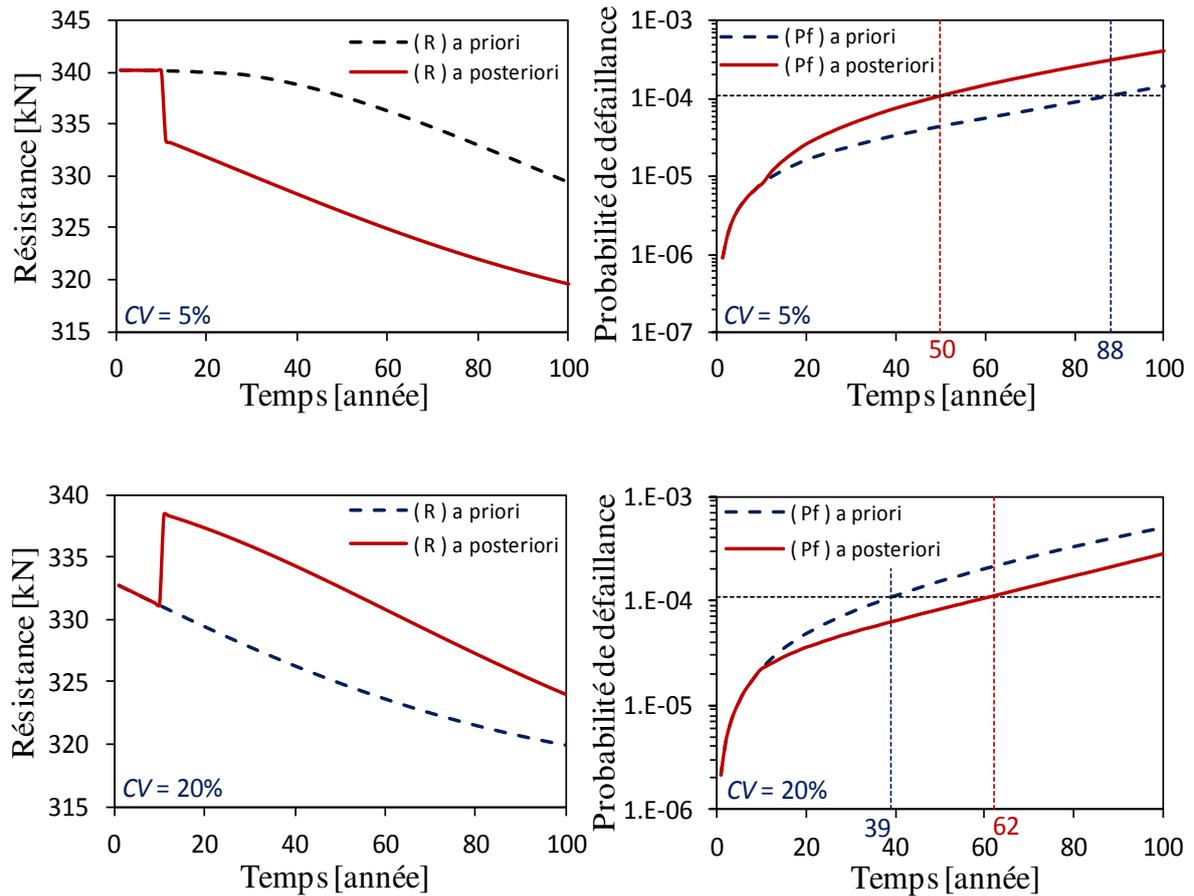


Figure 54 : Actualisation bayésienne de la probabilité de défaillance  
( $t_1 = 10$  ans,  $CV = 5\%$  et  $20\%$ ).

La prise en compte des nouvelles mesures dans le cadre de l'actualisation bayésienne a donc permis d'améliorer le modèle initial pour le long terme. Mener donc d'autres inspections pour rendre d'autres mesures disponibles accroîtrait le pouvoir prédictif du modèle.

#### 4-2.3. Introduction d'une augmentation du trafic

Reprenons le cas précédent avec le coefficient de variation du module d'Young de 5%. La probabilité de défaillance présentée dans la figure 54 est déterminée en considérant la valeur moyenne du chargement constante dans le temps (hypothèse de faible variation du chargement le long de la durée de vie de référence de l'ouvrage). L'objectif de cette étude est de tenir compte d'éventuelles augmentations du chargement moyen à partir de l'instant où un évènement se réalise (ou s'est réalisé) conduisant à cette augmentation, qui pourrait par ailleurs être provisoire (déviation temporaire d'une route à circulation plus grande par

exemple), ou permanente (ouverture d'une nouvelle usine à proximité, dont les véhicules emprunteraient l'ouvrage en question, ...etc.). Dans tous les cas, la probabilité de défaillance de l'ouvrage doit être actualisée afin de prendre, en temps utile, les dispositions appropriées à chaque situation. Pour la suite, l'hypothèse d'une augmentation provisoire de 5 % de la valeur moyenne initiale du chargement est considérée à partir de  $t = 20$  ans pour une durée de 5 ans.

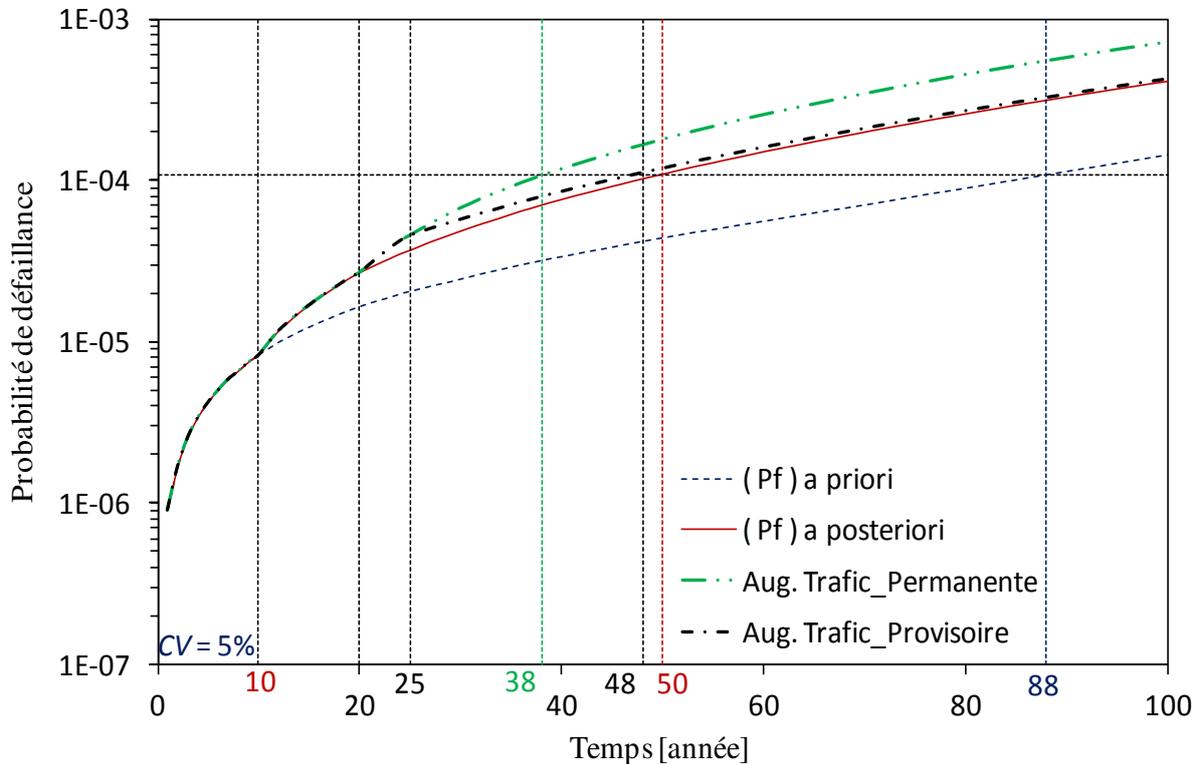


Figure 55 : Actualisation de la probabilité de défaillance avec la prise en compte d'une augmentation du trafic (provisoire ou permanente) à partir de ( $t = 20$  ans).

Que l'augmentation du trafic soit provisoire ou permanente, la méthodologie est la même, la différence réside dans le fait que la probabilité de défaillance actualisée présente d'abord un saut lié à l'augmentation du trafic et, après le retour du trafic à son état antérieur i.e. à partir de  $t = 25$  ans, retrouve très progressivement (mais pas instantanément) sa courbe initiale. La figure 55 illustre les résultats obtenus suite aux simulations de Monte Carlo. A partir de cette figure, plusieurs informations peuvent être tirées :

- dans le cas où la cause d'augmentation du trafic respecte sa durée d'application fixée (5 ans), la probabilité de défaillance de l'ouvrage n'est pas atteinte à 50 ans mais à 48 ans, soit une différence de 2 ans ;

- dans le cas d'une augmentation permanente du trafic, la probabilité de défaillance est augmentée de près de 26%, et la limite de défaillance est atteinte à 38 ans au lieu de 48 ans, soit une différence de 10 ans par rapport au cas précédent ;
- plus tôt l'augmentation provisoire du trafic est appliquée (à  $t = 15$  ans par exemple), plus faible sera son impact sur la probabilité de défaillance de l'ouvrage, l'inverse étant également vrai ;
- en considérant l'augmentation du trafic comme permanente à partir de  $t = 20$  ans, la limite de défaillance est atteinte à  $t = 38$  ans, ce qui impose que dans tous les cas, la durée d'augmentation du trafic doit être impérativement bien inférieure à 18 ans.

Cela signifie que l'impact d'une même augmentation du trafic d'une même durée sur la maintenance augmente selon l'âge de l'ouvrage, i.e. retarder un projet nécessitant une déviation du trafic vers un autre ouvrage, provoque un glissement qui rend la date de défaillance de cet ouvrage plus proche. L'influence de l'ampleur du retard dépend des paramètres du trafic (augmentation de sa valeur moyenne et/ou de sa dispersion), mais aussi du matériau (au travers de la loi de vieillissement) et de l'âge de l'ouvrage.

De plus, ce résultat est obtenu en ne tenant compte que d'un seul type de désordre (altération généralisée des segments de la voûte). D'autres types de désordres peuvent aussi influencer la date de défaillance (voir figure 40) de façon plus ou moins simultanée et n'ont pas été l'objet de cette étude.

## **5- Conclusion**

Après avoir déterminé, dans le chapitre précédent, les distributions de la capacité portante de la voûte en fonction de la variabilité du module des segments, ce chapitre met en évidence l'influence de cette variabilité sur la fiabilité de la voûte et présente un modèle de prédiction de sa performance dans le temps.

En comparant le modèle de chargement adopté avec le modèle de charge numéro 2 (LM2), défini par l'EN 1991-2 (Eurocode 1 2003), les paramètres de la distribution du chargement  $S$  ont été déterminés. La première partie du présent chapitre évalue l'indice de fiabilité « instantané » de la voûte en fonction du coefficient de variation du module d'Young. Les résultats ont dévoilé une décroissance rapide de cet indice en fonction du CV, qui a chuté de près de 42% pour un coefficient de variation de 20%. Cette baisse de performance a suscité

notre attention, à travers la seconde partie de ce chapitre, la fiabilité de la voûte dans le temps est étudiée dans le but de pouvoir prédire l'évolution de cette décroissante dans le temps. Une nouvelle loi de vieillissement a également été proposée et adoptée pour alimenter le modèle de prédiction.

La méthodologie proposée dans ce chapitre a été appliquée pour simuler cinq situations dans lesquelles un ouvrage pourrait se trouver. Les deux premières situations consistent à déterminer l'évolution de la probabilité de défaillance le long de la durée de vie de l'ouvrage avec et sans la prise en compte de l'historique du trafic. Les résultats ont montré que la marge de sûreté diminuait considérablement en fonction du coefficient de variation, une baisse de plus de 57% a été constatée pour un CV passant de 5% à 20%. La prise en compte de l'historique du trafic a augmenté de façon très légère la marge de sûreté (5 à 8%).

La troisième situation tient compte des nouvelles mesures devenues disponibles suite à une inspection à l'instant  $t$  de la durée de vie de l'ouvrage, en utilisant l'actualisation bayésienne. Cette méthode a été implémentée dans l'outil développé (ArcProg\_Z). Les valeurs prises en compte dans les calculs ont été choisies de façon à pouvoir simuler, le cas où le modèle de dégradation initial adopté se révèle optimiste (résistance moyenne prédite est supérieure à la nouvelle résistance moyenne mesurée), mais aussi le cas où le modèle se révélerait pessimiste (résistance moyenne prédite est inférieure à la résistance mesurée). Les deux cas sont analysés avec une loi a priori normale à faible et à forte dispersion du module. La prise en compte des nouvelles mesures dans le cadre de l'actualisation bayésienne a permis d'améliorer le modèle initial et de réduire l'incertitude sur la prévision du comportement à long terme. Ainsi, mener d'autres inspections pour rendre d'autres mesures disponibles accroîtrait le pouvoir prédictif du modèle.

Les deux derniers cas considèrent l'augmentation du trafic provisoire et permanente respectivement. Dans ce dernier cas, la probabilité de défaillance actualisée retrouve progressivement sa courbe initiale à la fin de la durée d'augmentation. L'actualisation de la probabilité de défaillance a permis d'estimer, en fonction de la durée d'augmentation du trafic, le délai dont disposerait le gestionnaire de l'ouvrage pour prendre les dispositions nécessaires pour réduire la probabilité de défaillance. Cette méthodologie a permis en outre, d'évaluer la durée maximale de cette augmentation du trafic et l'impact d'un éventuel retard qui pourrait être accusé, que ce soit par rapport à la date de début de l'application de cette augmentation ou à sa durée d'application.

## Conclusion générale et perspectives

L'objectif initial de la thèse était de tester des approches, d'ouvrir des perspectives pour de futurs travaux et ainsi de clarifier les besoins en recherche. On s'est restreint quelques problèmes d'inspection sous incertitude. En particulier aux variations de raideur que sont la présence localisée de perte de matière (chapitre II) et la perte de matière généralisée (chapitre III). Pour traiter ces deux cas un programme a été développé. Le modèle, sur lequel il s'appuie, permet l'analyse globale de la voûte tout en minimisant au maximum le temps de calcul. La voûte est assimilée à une ossature plane formée d'éléments poutres (segments) à deux nœuds chargées en flexion et en compression. La formation de rotules est conditionnée par le théorème du tiers central. La formation de 4 rotules conduit la voûte à la ruine. Ce modèle a constitué par ailleurs, le compromis recherché entre précision et temps de calcul. Les simulations de Monte Carlo ont été couplées à la méthode des éléments finis et implémentées dans un nouvel outil numérique, baptisé ArcProg\_Z, afin de proposer une méthodologie cohérente pour l'évaluation probabiliste de la capacité portante des voûtes et de prévision de son mécanisme de ruine. Il convient de préciser que cet outil ne remet pas en question les autres méthodes de modélisation, mais se veut être un outil complémentaire d'aide au diagnostic et au pronostic des voûtes en maçonnerie destiné principalement aux gestionnaires des ouvrages.

Cette méthodologie a permis de simuler l'une des situations d'inspection les plus défavorables, le cas d'une voûte présentant une perte d'épaisseur localisée causé par des infiltrations des eaux, dont les caractéristiques géométriques (position, profondeur et étendue du défaut) n'ont pas pu être fournis par les méthodes de contrôle non destructives (CND). L'objectif était de déterminer sur quel segment de la voûte le carottage serait le plus efficace afin de minimiser au maximum le nombre de prélèvements et réduire le coût du diagnostic. La forme du défaut était approchée par deux polynômes de degré 4 à gauche et à droite du point de perte maximale d'épaisseur, qui sont déterminés en considérant des continuités des pentes entre les deux courbes, et entre les extrémités du défaut et le reste de la voûte. Les simulations effectuées ont permis d'obtenir, pour chaque segment, la fonction de répartition de la capacité portante globale de la voûte, dont l'analyse a permis d'identifier le segment recherché, mais aussi des zones de la voûte, où la présence d'un défaut conduit aux plus fortes pertes de capacité portante. Ces zones ont été classées selon leur degré d'influence, qui a mis en avant les naissances de la voûte puis les reins.

Le deuxième cas étudié à l'aide de cet outil était l'influence de la variabilité du module d'Young des segments, d'abord sur la capacité portante de la voûte puis sur son mécanisme de ruine. En considérant le module des segments comme variable aléatoire, la fonction de répartition de la capacité portante de la voûte a été déterminée pour différentes valeurs du coefficient de variation. En termes de résistance, cette démarche a permis de proposer une relation liant la capacité portante de la voûte à la variabilité du module de ses segments. Cette relation a permis d'identifier les segments dont la chute du module contribue le plus à la chute de la capacité portante de la voûte i.e. des segments sur lesquels aucun défaut n'est toléré. Cette analyse a servi à établir un ordre de priorité d'intervention, valable en phase inspection comme en phase réparation, et qui met en avant les naissances de la voûte, puis les reins et enfin la clé de voûte. Cette classification, qui corrobore la première, peut optimiser les plannings des inspections et des réparations, et par conséquent, réduire les dépenses budgétaires. En termes de mécanismes de ruine, ces derniers ont été déterminés ainsi que leur probabilité de d'occurrence en fonction des valeurs du coefficient de variation considérées. Les résultats ont montré que le mécanisme observé dans le cas déterministe (coefficient de variation nul) correspond à celui ayant la plus forte probabilité d'occurrence, mais qui diminuait en fonction du coefficient de variation du module des segments, alors que le nombre des autres mécanismes ainsi que leur probabilité d'occurrence augmentaient. Cela a permis de conclure que si une variation importante du module d'Young des segments de la voûte est avérée, sa prise en compte dans les calculs deviendrait impérative, que ce soit pour la détermination de sa capacité portante ou pour prédire son mécanisme de ruine.

Enfin, une étude de fiabilité de la voûte étudiée précédemment a été menée. La performance de la voûte a été évaluée à travers le calcul de sa probabilité de défaillance « instantanés » en fonction du coefficient de variation CV du module d'Young des différents segments. Les résultats ont montré une augmentation rapide de cette probabilité en fonction du CV. Afin de pouvoir surveiller l'évolution de la probabilité de défaillance de la voûte dans le temps, une nouvelle loi de vieillissement a été proposée et adoptée pour alimenter le modèle de prédiction. La méthodologie proposée a permis de prédire l'évolution de la probabilité de défaillance de la voûte le long de la durée de vie de l'ouvrage, mais aussi l'actualisation de cette probabilité en cas de réalisation d'autres événements telle que la disponibilité de nouvelles mesures que ce soit liées à la résistance (mesures supplémentaire du module de Young de quelques segments) ou au chargement (augmentation provisoire ou

permanente du trafic). Dans les deux cas, les informations fournies par le modèle étaient cohérentes et constituent des éléments déterminants dans le processus de prise de décision.

Ce travail n'est pas exhaustif. La figure 40 montre les différentes causes qui peuvent occasionner des désordres sur un pont. Ces désordres peuvent se produire chacun à une date donnée différentes et sur une durée différente. Certains peuvent ne pas être détecté ou être détecté à tort. Un développement futur de la démarche adoptée serait la prise en compte des autres pathologies et de la capacité d'un inspecteur à les détecter correctement.

La prise en compte de l'instinct professionnel du maçon quant à la sélection ou le rejet d'une pierre, ou d'une brique, lors de la construction. Cet instinct, qui dépend de la qualification et de l'expérience du compagnon, pourrait conduire à la réduction de la variabilité des caractéristiques mécaniques des structures en maçonnerie. Le même compagnon peut aussi choisir pour les zones cruciales (reins, clés ou naissances) de la voûte des pierres de meilleure qualité. Il faudrait arriver à prendre en compte dans la modélisation le savoir faire des compagnons.

Le modèle était restreint aux pathologies conduisant à une ruine d'un arc 2D. Or, suivant la taille d'un défaut dans la 3ème direction relativement à la profondeur de la voûte, il faudra modéliser la voûte en 3D et répondre aux questions soulevées par la 3ème dimension : Quel est le critère de rupture ? Combien de rotules, qu'est ce qu'une rotule, quelle est l'influence de la profondeur de la voute sur le mécanisme de rupture ? Quelles sont les tailles relatives de défauts qui sont critiques ? ...

Le développement d'un programme analysant une voute en 3D sur le même principe que le modèle 2D a été entrepris et est présenté en annexe A.

La prise en compte de toutes ces possibilités constitue un défi important et un travail pour plusieurs années. L'étape d'après sera sans doute de réussir à transférer ces développement vers les utilisateurs finaux (gestionnaires d'ouvrages, entreprises diagnostic.).

## Bibliographie

- A Debaue. 1875. *Manuel de l'ingénieur des Ponts et chaussées* réd ... Dunod, 1875. <http://archive.org/details/manueldelingnie10debagoog>.
- AFG. 2003. *Application Des Notions de Fiabilité À La Gestion Des Ouvrages Existants*. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées.
- Agrawel. 1973. "Survey and Tabulation Method of Assessment and Strengthening of Masonry Arch Bridges." *Journal Institution Engineers, Civil Engineering Division* 53, 3, Pp. 148.
- Al-Mukhtar, M., and Kévin Beck. 2005. "Caractéristiques d'un mortier à base de chaux et de poudre de roche pour la restauration des monuments." In , 6p. RIPAM. <https://hal-insu.archives-ouvertes.fr/hal-00093494/document>.
- Bieniawski, Z. T. 1975. "The Point-Load Test in Geotechnical Practice." *Engineering Geology* 9 (1): 1–11. doi:10.1016/0013-7952(75)90024-1.
- Binda, L, G Baronio, C Tiraboschi, and C Tedeschi. 2003. "Experimental Research for the Choice of Adequate Materials for the Reconstruction of the Cathedral of Noto." *Construction and Building Materials, The reconstruction of Noto and Dresden Cathedrals*, 17 (8): 629–39. doi:10.1016/S0950-0618(03)00059-X.
- Binda, L., A. Fontana, and G. Frigerio. 1988. "Mechanical Behaviour of Brick Masonries Derived from Unit and Mortar Characteristics." *Brick and Block Masonry*(8 Th IBMAC) London, Elsevier Applied Science, 1: 205–16.
- Blair, Byron E. 1956. *Physical Properties of Mine Rock, Part IV: Including Indexes to Parts I, II, III, and IV. Report of Investigations / Bureau of Mines ;5244*. Washington, D.C.: U.S. Dept. of the Interior, Bureau of Mines. <http://catalog.hathitrust.org/Record/005949861>.
- Bourque, Pierre André. 2010. "Les Roches Sédimentaires." *Planète Terre*. <http://www2.ggl.ulaval.ca/personnel/bourque/s2/r.sedim.html>.
- Breitung, Karl. 1989. "Asymptotic Approximations for Probability Integrals." *Probabilistic Engineering Mechanics* 4 (4): 187–90. doi:10.1016/0266-8920(89)90024-6.
- Brencich, Antonio, and Donato Sabia. 2008. "Experimental Identification of a Multi-Span Masonry Bridge: The Tanaro Bridge." *Construction and Building Materials* 22 (10): 2087–99. doi:10.1016/j.conbuildmat.2007.07.031.
- Cancelliere, Iliaria, Maura Imbimbo, and Elio Sacco. 2010. "Experimental Tests and Numerical Modeling of Reinforced Masonry Arches." *Engineering Structures* 32 (3): 776–92. doi:10.1016/j.engstruct.2009.12.005.
- Casas, Joan R. 2011. "Reliability-Based Assessment of Masonry Arch Bridges." *Construction and Building Materials* 25 (4): 1621–31. doi:10.1016/j.conbuildmat.2010.10.011.
- Chamley, Hervé. 1987. *Sédimentologie*. Dunod. Vol. 2. Géosciences. Dunod.
- Cluni, Federico, and Vittorio Gusella. 2004. "Homogenization of Non-Periodic Masonry Structures." *International Journal of Solids and Structures* 41 (7): 1911–23. doi:10.1016/j.ijsolstr.2003.11.011.
- Como, Mario. 2013. "Masonry Strength and Deformability." In *Statics of Historic Masonry Constructions*, 1–49. Springer Series in Solid and Structural Mechanics 1. Springer Berlin Heidelberg. [http://link.springer.com.ezproxy.unilim.fr/chapter/10.1007/978-3-642-30132-2\\_1](http://link.springer.com.ezproxy.unilim.fr/chapter/10.1007/978-3-642-30132-2_1).
- Costa, C., A. Arêde, M. Morais, and A. Aníbal. 2015. "Detailed FE and DE Modelling of Stone Masonry Arch Bridges for the Assessment of Load-Carrying Capacity." *Procedia Engineering, ICSI 2015 The 1st International Conference on Structural*

- Integrity Funchal, Madeira, Portugal 1st to 4th September, 2015, 114: 854–61. doi:10.1016/j.proeng.2015.08.039.
- Costigan, Adrian, and Sara Pavia. 2012. “Influence of the Mechanical Properties of Lime Mortar on the Strength of Brick Masonry.” In *Historic Mortars*, edited by Jan Válek, John J. Hughes, and Caspar J. W. P. Groot, 359–72. RILEM Bookseries 7. Springer Netherlands. [http://link.springer.com.ezproxy.unilim.fr/chapter/10.1007/978-94-007-4635-0\\_28](http://link.springer.com.ezproxy.unilim.fr/chapter/10.1007/978-94-007-4635-0_28).
- CSTC. 2016. “Modes de Formation Des Roches.” Centre Scientifique et Technique de La Construction. Accessed April 28. <http://www.cstc.be/homepage/index.cfm?cat=publications&sub=tv-nit&pag=228&art=2&niv01=2.1>.
- Cundall. 1971. “A Computer Model for Simulating Progressive Large-Scale Movements in Blocky Rock System.” *Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics*, Vol. I. Nancy, France, n.II-8 (1971).
- D’Andrea, Dennis V., R. L. Fisher, and D. E. Fogelson. 1965. “Prediction of Compressive Strength from Other Rock Properties /”. [Washington, D.C.]: <http://hdl.handle.net/2027/mdp.39015078525931>.
- De Buhan, Patrick, and Gianmarco de Felice. 1997. “A Homogenization Approach to the Ultimate Strength of Brick Masonry.” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (7): 1085–1104. doi:10.1016/S0022-5096(97)00002-1.
- Delbecq. 1982. “Les Ponts En Maçonnerie, Constitution et Stabilité. SETRA, Bagneux, Fascicule 3 - Guide Pour L’utilisation Du Programme VOUTE, 1982, 156 P.”
- Denfer, J. 1891. *Architecture et Constructions Civiles. Maçonnerie. Collection Encyclopédie Des Travaux Publics*, 1891, Pp. 475.
- Domède, N., G. Pons, A. Sellier, and Y. Fritih. 2008. “Mechanical Behaviour of Ancient Masonry.” *Materials and Structures* 42 (1): 123–33. doi:10.1617/s11527-008-9372-z.
- . 2009. “Mechanical Behaviour of Ancient Masonry.” *Materials and Structures* 42 (1): 123–33. doi:10.1617/s11527-008-9372-z.
- Drougkas, Anastasios, Pere Roca, and Climent Molins. 2015. “Compressive Strength and Elasticity of Pure Lime Mortar Masonry.” *Materials and Structures* 49 (3): 983–99. doi:10.1617/s11527-015-0553-2.
- Eurocode 1. 2003. “Actions Sur Les Structures - Partie 2 : Actions Sur Les Ponts, Dues Au Trafic. NF EN 1991-2.”
- Eurocodes structuraux. 2003. “Base de Calcul Des Structures, NF EN 1990.”
- Faber, Michael Havbro. 2007. *Risk and Safety in Civil Engineering*. Swiss Fideral Institute of Technology. Zurich.
- Fabre, Denis, and Jerzy Gustkiewicz. 1997. “Poroelastic Properties of Limestones and Sandstones under Hydrostatic Conditions.” *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 34 (1): 127–34. doi:10.1016/S1365-1609(97)80038-X.
- Gargiulio Riccio M., Fontan F., Tollon F., and Fortuné J.-P. 2001. “Rôle Des Minéraux Néoformés Dans L’altération Des Monuments En Briques de Toulouse.” In: *Revue d’Archéométrie*, no. 25: 65–78. doi:10.3406/arsci.2001.1002.
- Garzón-Roca, Julio, Creu Obrer Marco, and Jose M. Adam. 2013. “Compressive Strength of Masonry Made of Clay Bricks and Cement Mortar: Estimation Based on Neural Networks and Fuzzy Logic.” *Engineering Structures* 48 (March): 21–27. doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.029.
- Gilbert. 2001. “M. RING: A 2D Rigid-Block Analysis Program for Masonry Arch Bridges.” In . *Proceedings of the 3rd International Arch Bridges Conference, Arch01, Paris, 2001*, P. 459-464.

- Giordano, A, E Mele, and A De Luca. 2002. "Modelling of Historical Masonry Structures: Comparison of Different Approaches through a Case Study." *Engineering Structures* 24 (8): 1057–69. doi:10.1016/S0141-0296(02)00033-0.
- Grandjean, Alix. 2009. "Capacité portante de ponts en arc en maçonnerie de pierre naturelle - Modèle d'évaluation intégrant le niveau d'endommagement". Thèse, LAUSANNE-SUISSE: ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE.
- Grectel. 1998. "Vocabulaire Historique Grec." francoib.chez-alice.fr/vocahist/appareil.htm.
- Gusella, and Cluni. 2006. "Random Field and Homogenization for Masonry with Nonperiodic Microstructure." *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 1 (2): 357e386.
- Harvey. 2007. "Rule of Thumb Method for the Assessment of Arches". Rapport UIC, draft, 2007, pp. 22.
- Hohenbichler, M., S. Gollwitzer, W. Kruse, and R. Rackwitz. 1987. "New Light on First- and Second-Order Reliability Methods." *Structural Safety* 4 (4): 267–84. doi:10.1016/0167-4730(87)90002-6.
- Huet, C. 1990. "Application of Variational Concepts to Size Effects in Elastic Heterogeneous Bodies." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (6): 813–41. doi:10.1016/0022-5096(90)90041-2.
- ICOMOS-ISCS. 2008. "Illustrated Glossary on Stone Deterioration Patterns". International Council On Monuments and Sites, International Scientific Committee for Stone, 2008, pp. 86.
- IFSTTAR. 2005. "La Télésurveillance Des Ouvrages D'art Sous Haute Surveillance". Institut Français des Sciences et Techniques des Réseaux.
- IN 1250. 1975. "Construction Des Tunnels Anciens En Maçonnerie". Notice générale IN 1250 - EF 9 C 4, n°3. France: Direction de l'équipement SNCF.
- Isabelle Cojan et Maurice Renard. n.d. *Sédimentologie*. Dunod, Paris, 2013, Pp 461, ISBN 978-2-10-059852-6.
- Julien Baroth, Franck Schoefs, and Denys Breysse. 2011. *Fiabilité Des Ouvrages: Sûreté, Variabilité, Maintenance, Sécurité*. Lavoitier.
- Kahraman, S. 2001. "Evaluation of Simple Methods for Assessing the Uniaxial Compressive Strength of Rock." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 38 (7): 981–94. doi:10.1016/S1365-1609(01)00039-9.
- Kahraman, S., and O. Gunaydin. 2009. "The Effect of Rock Classes on the Relation between Uniaxial Compressive Strength and Point Load Index." *Bulletin of Engineering Geology and the Environment* 68 (3): 345–53. doi:10.1007/s10064-009-0195-0.
- Kamiński, Tomasz, and Jan Bień. 2013. "Application of Kinematic Method and FEM in Analysis of Ultimate Load Bearing Capacity of Damaged Masonry Arch Bridges." *Procedia Engineering* 57: 524–32. doi:10.1016/j.proeng.2013.04.067.
- Karaman, S., H. Gunal, and S. Ersahin. 2006. "Assesment of Clay Bricks Compressive Strength Using Quantitative Values of Colour Components." *Construction and Building Materials* 20 (5): 348–54. doi:10.1016/j.conbuildmat.2004.11.003.
- Kaushik, H., D. Rai, and S. Jain. 2007. "Stress-Strain Characteristics of Clay Brick Masonry under Uniaxial Compression." *Journal of Materials in Civil Engineering* 19 (9): 728–39. doi:10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:9(728).
- Kılıç, A., and A. Teymen. 2008. "Determination of Mechanical Properties of Rocks Using Simple Methods." *Bulletin of Engineering Geology and the Environment* 67 (2): 237–44. doi:10.1007/s10064-008-0128-3.
- Kooharian. 1953. "Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches." *Journal of the American Concrete Institute* 317-328, V. 24, N° 4, Dec. 1952, Proceedings V. 49.

- Lanas, J, and José I Alvarez-Galindo. 2003. "Masonry Repair Lime-Based Mortars: Factors Affecting the Mechanical Behavior." *Cement and Concrete Research* 33 (11): 1867–76. doi:10.1016/S0008-8846(03)00210-2.
- Lemaire, Maurice. 2004. "How to Manage Industrial Studies". Det Norske Veritas.
- . 2014. "Approche Probabiliste du Dimensionnement-Modélisation de l'incertain et méthodes d'approximation." *Techniques de l'ingénieur* 2 (BM5004): 13.
- Lemaire, Maurice, Alaa Chateaneuf, and Jean-Claud Mitteau. 2005. *Fiabilité Des Structures*. Lavoisier. Paris: Hermès.
- Luciano, Raimondo, and Elio Sacco. 1997. "Homogenization Technique and Damage Model for Old Masonry Material." *International Journal of Solids and Structures* 34 (24): 3191–3208. doi:10.1016/S0020-7683(96)00167-9.
- Marastoni, Diego, Luca Pelà, Andrea Benedetti, and Pere Roca. 2016. "Combining Brazilian Tests on Masonry Cores and Double Punch Tests for the Mechanical Characterization of Historical Mortars." *Construction and Building Materials* 112 (June): 112–27. doi:10.1016/j.conbuildmat.2016.02.168.
- Mery. 1840. *Annales des ponts et chaussées: Partie technique. Mémoires et documents relatifs a l'art des constructions et au service de l'ingénieur*.
- Mistler, M., A. Anthoine, and C. Butenweg. 2007. "In-Plane and out-of-Plane Homogenisation of Masonry." *Computers & Structures, Computational Structures Technology*, 85 (17–18): 1321–30. doi:10.1016/j.compstruc.2006.08.087.
- Oliveira, Daniel V., Paulo B. Lourenço, and Cláudia Lemos. 2010. "Geometric Issues and Ultimate Load Capacity of Masonry Arch Bridges from the Northwest Iberian Peninsula." *Engineering Structures* 32 (12): 3955–65. doi:10.1016/j.engstruct.2010.09.006.
- Orbán, Zoltán, and Marc Gutermann. 2009. "Assessment of Masonry Arch Railway Bridges Using Non-Destructive in-Situ Testing Methods." *Engineering Structures* 31 (10): 2287–98. doi:10.1016/j.engstruct.2009.04.008.
- Owen, D RJ, D Peric, N Petrinic, C L Smokes, and P J James. 1998. "Finite/discrete Element Models for Assessment and Repair of Masonry Structures." In .
- Page, Junior. 1988. "Load Tests to Collapse on Tow Arch Bridges at Torksey and Shinafoot". Research report 159. Transport and Road Research Laboratory, Department of Transport.
- Page, A.W. 1978. "Finite Element Model for Masonry." *J. Struct. Div.* 104 (8), 1267e1285.
- Parent, Thomas, Nathalie Domede, Alain Sellier, and Ludivine Mouatt. 2015. "Mechanical Characterization of Limestone from Sound Velocity Measurement." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 79 (October): 149–56. doi:10.1016/j.ijrmms.2015.08.009.
- PB Lourenço, Jan G Rots, and Johan Blaauwendraad. 1995. "Two Approches for the Analysis of Masonry Structures : Micro and Macro-Modeling." *HERON* 40 (4): 313–40.
- Pegon, P., and A. Anthoine. 1997. "Numerical Strategies for Solving Continuum Damage Problems with Softening: Application to the Homogenization of Masonry." *Computers & Structures, Computational Structures Technology*, 64 (1–4): 623–42. doi:10.1016/S0045-7949(96)00153-8.
- Pelà, Luca, Miguel Cervera, and Pere Roca. 2011. "Continuum Damage Model for Orthotropic Materials: Application to Masonry." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (9–12): 917–30. doi:10.1016/j.cma.2010.11.010.
- . 2013. "An Orthotropic Damage Model for the Analysis of Masonry Structures." *Construction and Building Materials* 41 (April): 957–67. doi:10.1016/j.conbuildmat.2012.07.014.

- “Pont en maçonnerie.” 2014. Wikipédia. [http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Pont\\_en\\_ma%C3%A7onnerie&oldid=108392308](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Pont_en_ma%C3%A7onnerie&oldid=108392308).
- Reyes, E., J. C. Gálvez, M. J. Casati, D. A. Cendón, J. M. Sancho, and J. Planas. 2009. “An Embedded Cohesive Crack Model for Finite Element Analysis of Brickwork Masonry Fracture.” *Engineering Fracture Mechanics* 76 (12): 1930–44. doi:10.1016/j.engfracmech.2009.05.002.
- “Roche Magmatique.” 2016. Accessed April 26. [http://www.jeanduperrex.ch/Site/Roche\\_magmatique.html](http://www.jeanduperrex.ch/Site/Roche_magmatique.html).
- Sassoni, Enrico, Claudio Mazzotti, and Giulia Pagliai. 2014. “Comparison between Experimental Methods for Evaluating the Compressive Strength of Existing Masonry Buildings.” *Construction and Building Materials* 68 (October): 206–19. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.06.070.
- SETRA. 1982a. *Les Ponts En Maçonnerie - Histoire et Construction*. 4930 T1, Ministère Des Transport, Direction Des Routes, Trance, Juin 1982, 96 P.
- . 1982b. *Les Ponts En Maçonnerie, Constitution et Stabilité*. Ministère des transports, Direction des routes, 1982, pp. 333.
- . 1996. “Procès verbal de visite - Pont en maçonnerie, Images de la qualité des Ouvrages d’art”. F 9626 PVA au Service d’Etudes Techniques des Routes et Autoroutes, 1996, 96 p. (ISBN 2- 11- 085782-X).
- . 2011. “Surveillance et Entretien Courant Des Ouvrage D’art Routier”. Ministère de l’Ecologie, du Développement durable, des Transports et du Logement.
- . 2012. “Théorie de Fiabilité : Application À L’évaluation Structurale Des Ouvrages D’art”. Rapport d’études. Les Rapports. Paris.
- Shi, G H. 1988. “Discontinuous Deformation Analysis - A New Numerical Model for the Statics and Dynamics of Block Systems”. Berkeley: University of California.
- Stafford Smith, and B. Rahman, K.M.K. 1972. “The Variation of Stresses in Vertically Loaded Brickwork Walls.” *ICE Proc.* 51 (4), 689e700.
- Thavalingam, A, N Bicanic, J. I Robinson, and D. A Ponniah. 2001. “Computational Framework for Discontinuous Modelling of Masonry Arch Bridges.” *Computers & Structures* 79 (19): 1821–30. doi:10.1016/S0045-7949(01)00102-X.
- Tvedt, L. 1983. “Two Second-Order Approximations to the Failure Probability”. Technical Report RDIV 20-004-83. Oslo: Det Norske Veritas.
- . 1990. “Distribution of Quadratic Forms in Normal Space - Application to Structural Reliability.” *Journal of Engineering Mechanics* 116 (6): 1183–97.
- UIC. 2007. “Recommendations for the Inspection, Assessment and Maintenance of Masonry Arch Bridges”. Technical Report 778-3. Union Internationale des Chemins de fer.
- Vasconcelos, G., and P. B. Lourenço. 2009. “Experimental Characterization of Stone Masonry in Shear and Compression.” *Construction and Building Materials* 23 (11): 3337–45. doi:10.1016/j.conbuildmat.2009.06.045.
- Yardley, B W D, W S MacKenzie, and C Guilford. 1990. *Atlas of Metamorphic Rocks and Their Textures*. Longman Scientific & Technical. UK: Longman Group UK Limited.
- Zanaz, Abdelmounaim, Sylvie Yotte, Fazia Fouchal, and Alaa Chateaneuf. 2015. “Young’s Modulus Variability: Influence on Masonry Vault Behavior.” *International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering* 9 (9): 34–40.
- . 2016. “Efficient Masonry Vault Inspection by Monte Carlo Simulations: Case of Hidden Defect.” *Case Studies in Structural Engineering* 5 (June): 1–12. doi:10.1016/j.csse.2015.12.001.

- Zucchini, A, and P. B Lourenço. 2002. "A Micro-Mechanical Model for the Homogenisation of Masonry." *International Journal of Solids and Structures* 39 (12): 3233–55. doi:10.1016/S0020-7683(02)00230-5.
- Zucchini, A., and P. B. Lourenço. 2007. "Mechanics of Masonry in Compression: Results from a Homogenisation Approach." *Computers & Structures* 85 (3–4): 193–204. doi:10.1016/j.compstruc.2006.08.054.
- . 2009. "A Micro-Mechanical Homogenisation Model for Masonry: Application to Shear Walls." *International Journal of Solids and Structures* 46 (3–4): 871–86. doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.09.034.

# Annexes

## I- Annexe A– ArcProg\_Z software

Le développement d'une plateforme logicielle servant de support de la méthodologie proposée s'est naturellement imposé. Baptisée ArcProg\_Z (Figure 56), elle a été implémentée dans l'environnement Scilab® pour répondre aux objectifs essentiels suivants :

- Automatiser la prédiction de la réponse mécanique de la voûte en termes de capacité portante et de mécanisme de ruine.
- Assurer la simplicité d'utilisation de la méthodologie probabiliste proposée pour accroître son accessibilité.
- Convaincre les gestionnaires des ouvrages concernés ainsi que les acteurs détenteurs du pouvoir de décision de son potentiel.

L'objectif de cette annexe synthétique est d'explicitier l'organisation générale de « ArcProg\_Z » et de présenter ses multiples fonctionnalités déjà opérationnelles, mais aussi celles en cours d'implémentation.

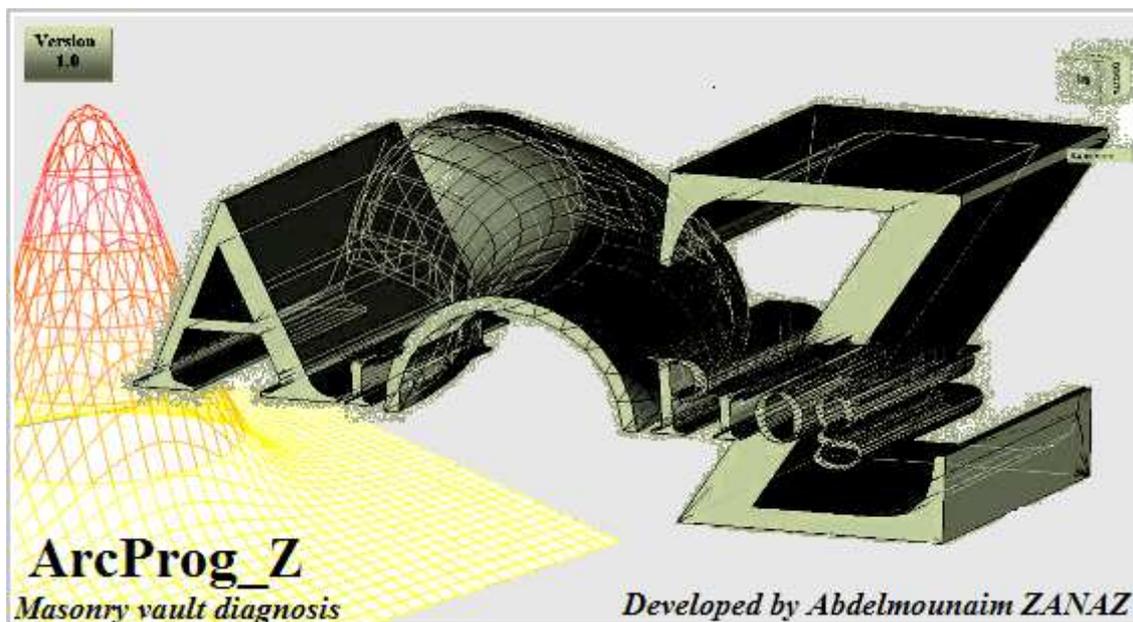


Figure 56 : Fenêtre d'accueil de la plateforme ArcProg\_Z.

## Définition du mode de calcul

ArcProg\_Z est conçu pour offrir la possibilité de travailler en 2D ou 3D (Figure 57). Les hypothèses de calcul sont les mêmes dans les deux types de calcul.

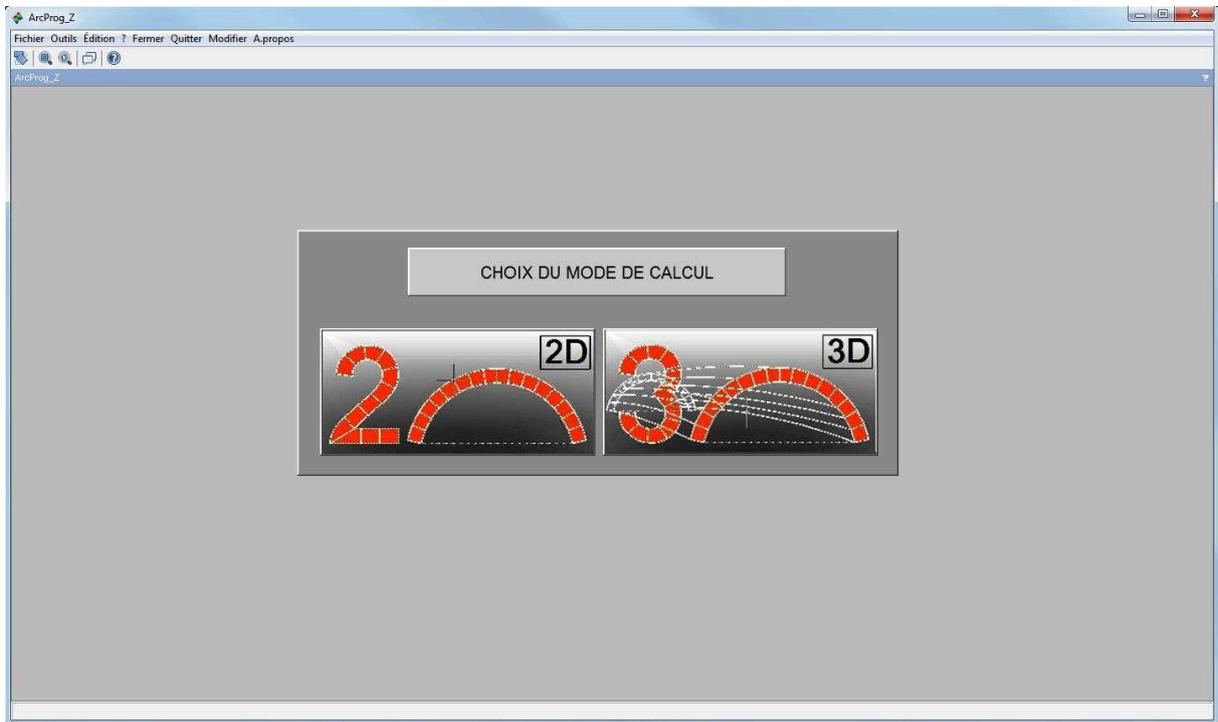


Figure 57 : Choix du mode de calcul.

A chaque type de calcul, est associée une interface graphique à travers laquelle, l'utilisateur pourra introduire très facilement les données d'entrée (paramètres géométriques, physiques et mécaniques, les paramètres de la charge ponctuelle, les conditions aux limites...etc.) nécessaires au calcul de la réponse mécanique et à la prédiction du mécanisme de ruine associé.

L'évaluation de la stabilité est indiquée sur le volet « Vérification de la stabilité » par affichage de message :

- « **STRUCTURE POTENTIELLEMENT STABLE** », si aucune rotule n'est formée sous le chargement considéré (Figure 58).
- « **FORMATION DE ROTULES** », dans le cas contraire (Figure 59).

Ci-après, les différentes fenêtres générées par ArcProg\_Z pour faciliter la saisie des données d'entrée et visualiser les résultats obtenus.

## Mode de calcul 2D

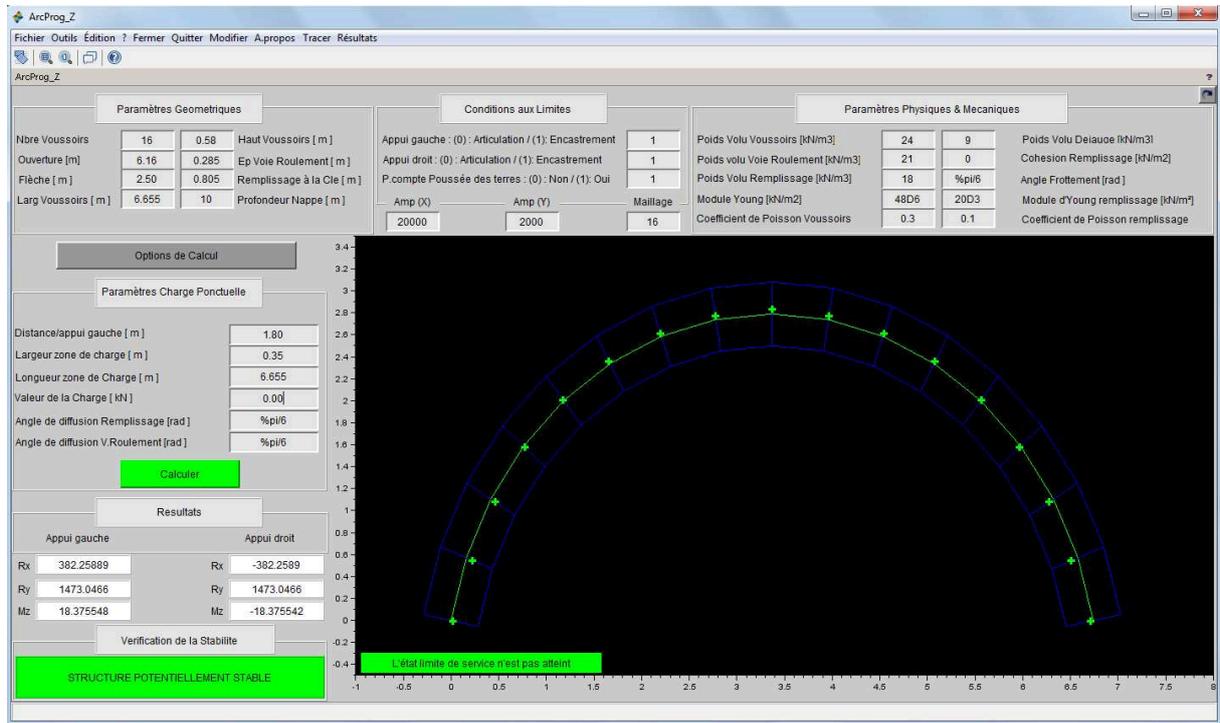


Figure 58 : Vérification de la stabilité (cas de structure potentiellement stable).

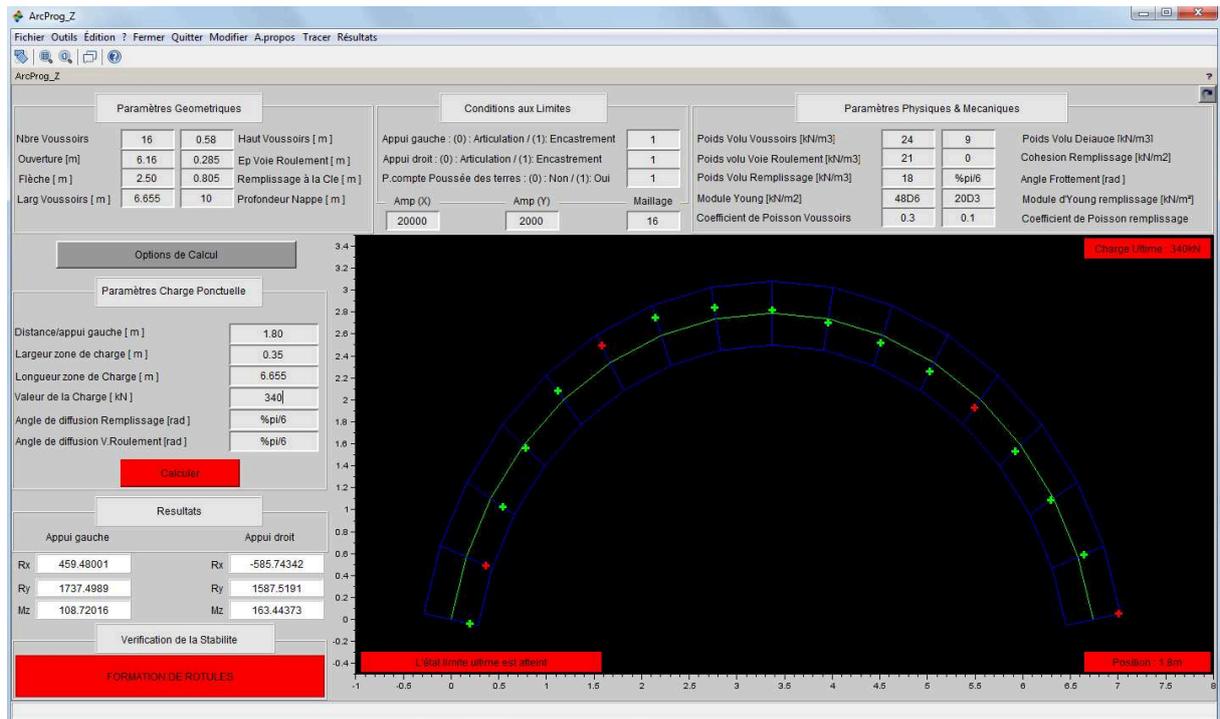


Figure 59 : Vérification de la stabilité (cas de formation de rotules).

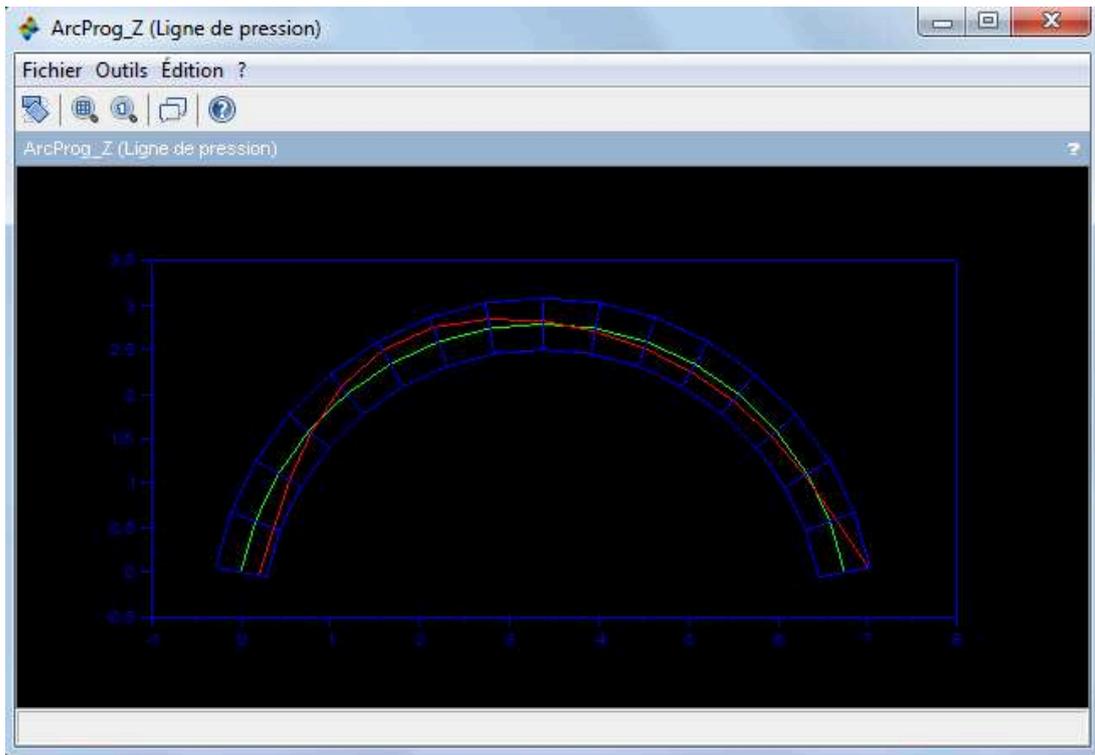


Figure 60 : Ligne de pression.

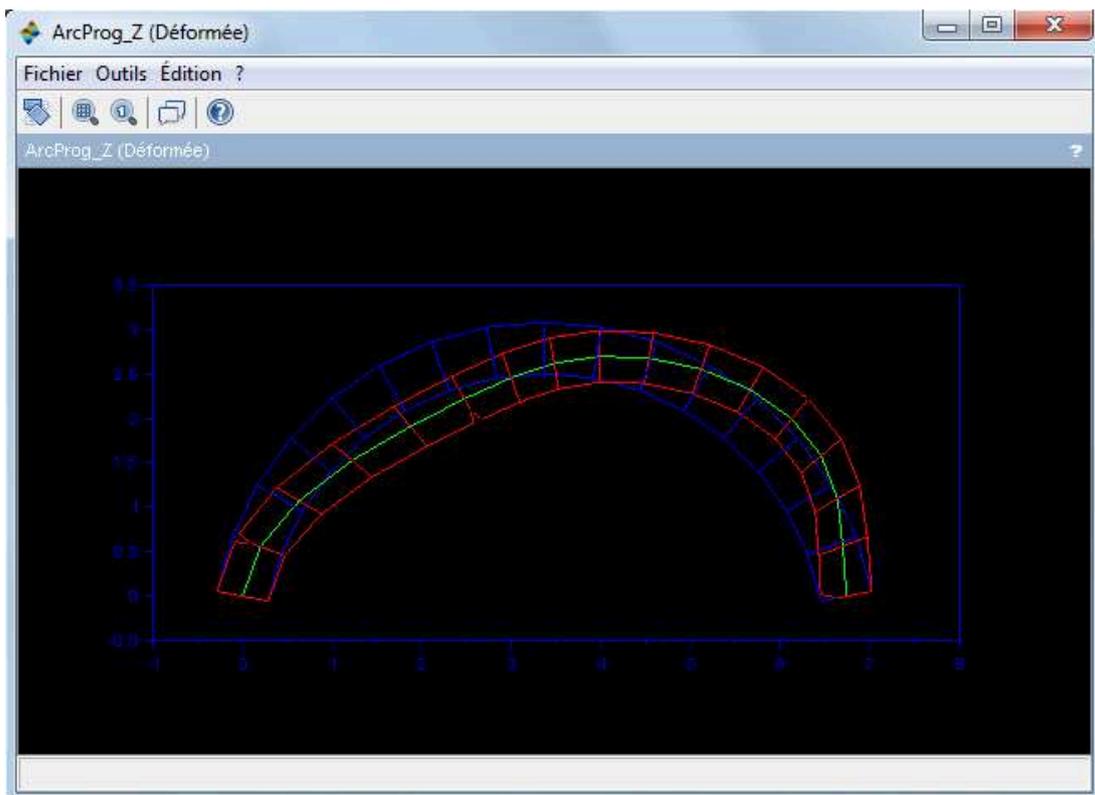


Figure 61 : Déformée.

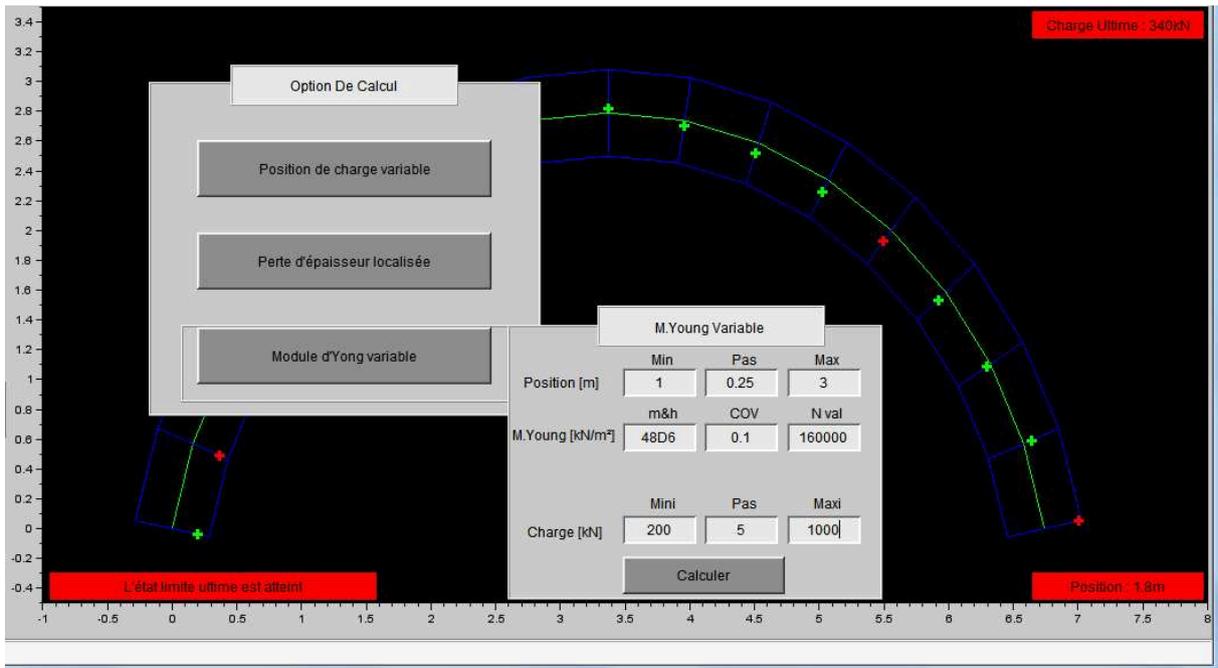


Figure 62 : Options de calcul.

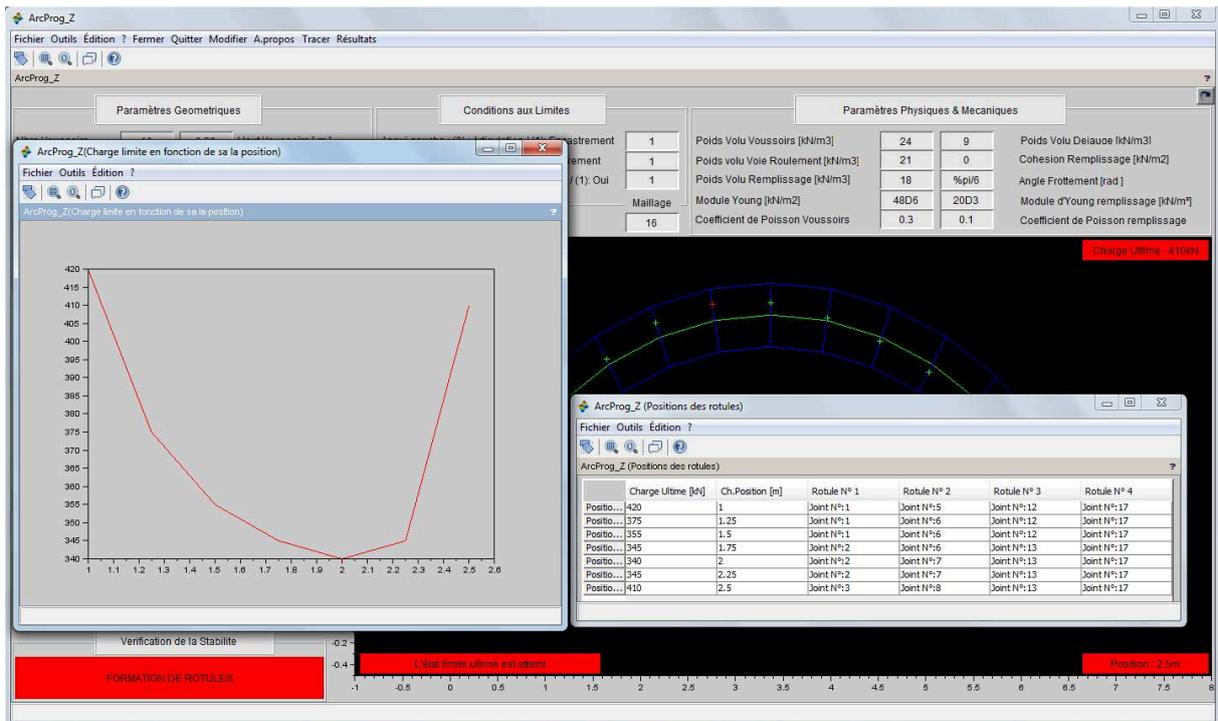


Figure 63 : Détermination de la capacité portante de la voûte et son mécanisme de ruine.

## Mode de calcul 3D

Ce mode de calcul est toujours en cours d'implémentation. A présent, le calcul de la réponse mécanique est fonctionnel. En utilisant des éléments poutres dans les deux sens avec des caractéristiques homogénéisées condensées au niveau de leur fibre moyenne, il nous a été possible d'effectuer le calcul en 3D de la voûte en moins de 10 secondes (avec un CPU Pentium® Dual-Core). Le temps de calcul pourrait être réduit encore plus avec un CPU plus performant (i3, i5 ou i7). L'application du théorème du tiers central dans les deux sens permet de localiser, dans les deux plans, les rotules formées sur toute la surface de la voûte. Les rotules en rouge correspondent aux rotules formées dans le plan de la voûte. Les autres (en vert) correspondent aux rotules formées dans le plan perpendiculaire au premier (Figure 64). Reste à définir un critère de rupture en 3D permettant de déterminer la capacité portante de la voûte, effectuer les testes de validation et pouvoir lancer des calculs probabilistes.

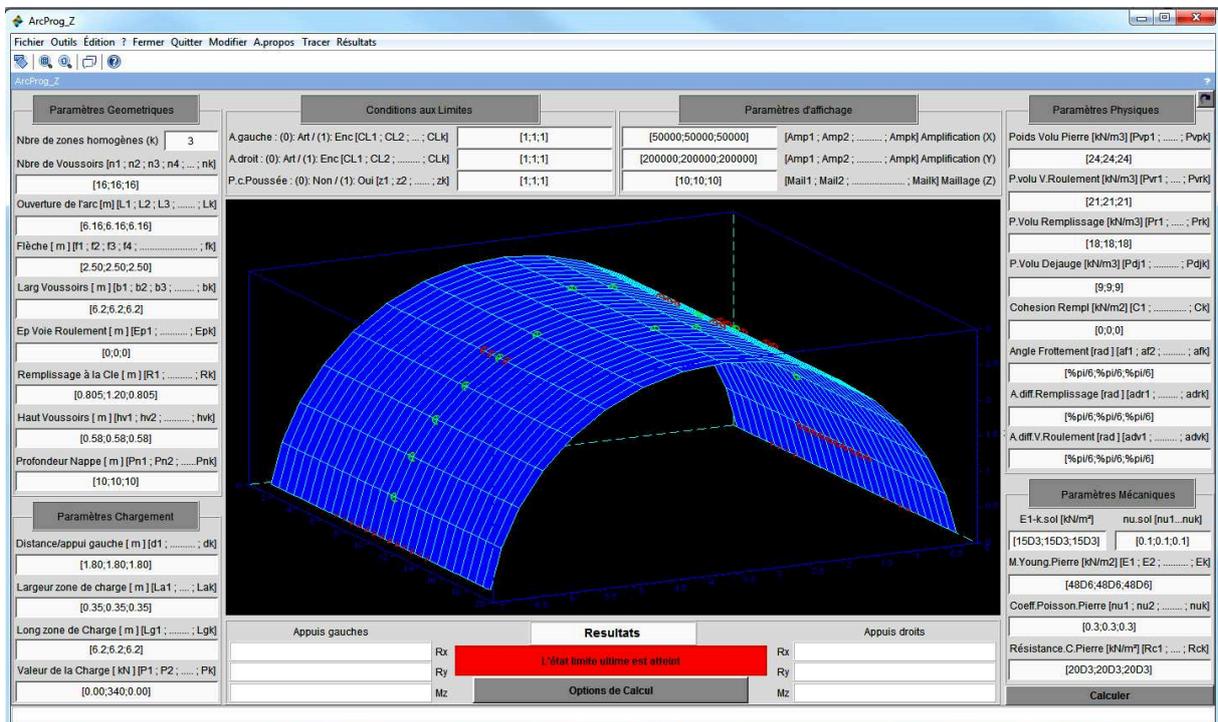


Figure 64 : Localisation des rotules formées.

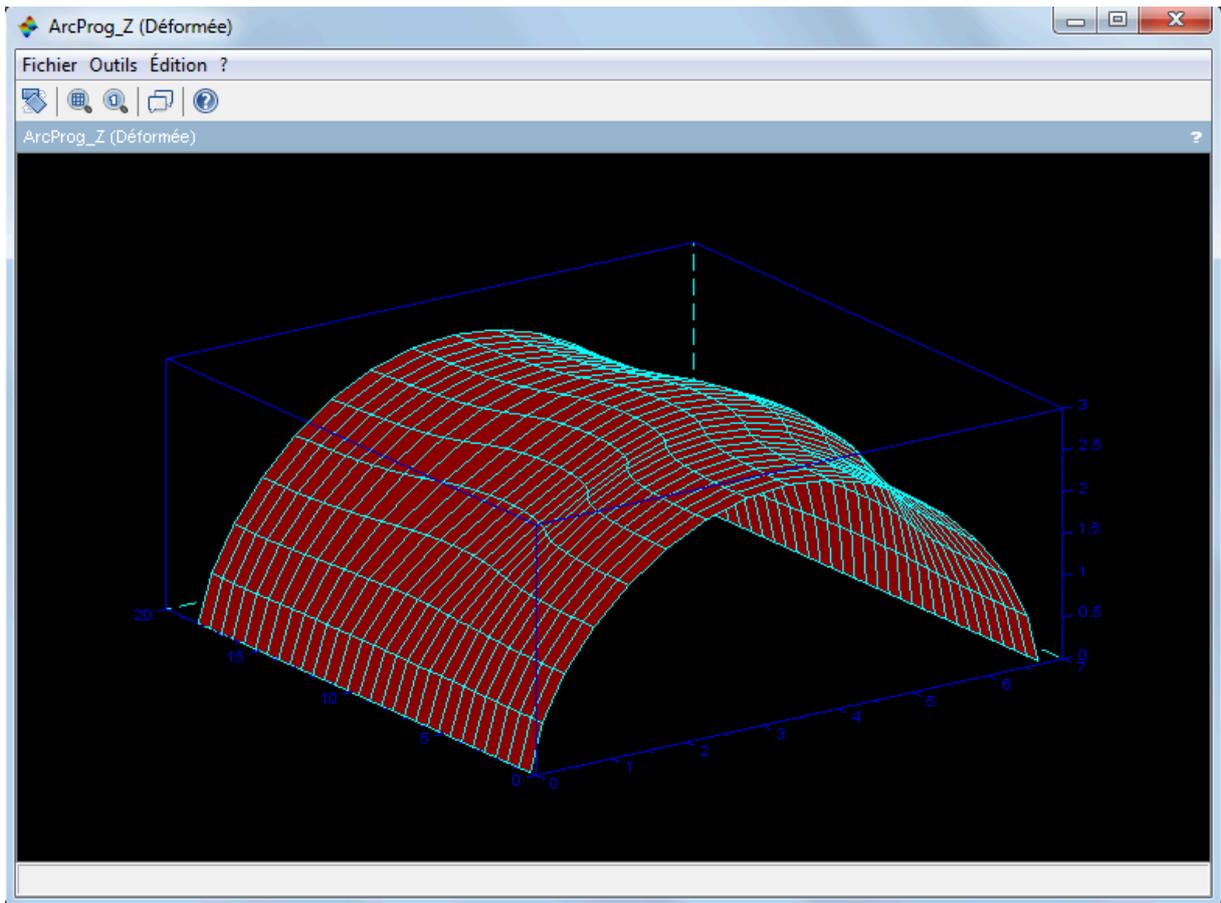


Figure 65 : Tracé de la déformée.

## II- Annexe B– Classification des pierres de construction et terminologie

### Types des roches et des pierres

L'unique source des matériaux naturels servant à confectionner des éléments en pierre naturelle est incontestablement la croûte terrestre, plus précisément, les minéraux qui la composent, ce qu'on appelle "**Les roches**". Du fait de leur processus géologique de formation complexe qui, pour certaines roches, se poursuit encore de nos jours. La connaissance du type de roche auquel les pierres d'un ouvrage appartiennent permet d'avoir une idée sur les pathologies susceptibles d'attaquer l'ouvrage en question et de leurs conséquences sur sa stabilité dans le temps. En effet, le comportement d'un ouvrage dépend de leurs caractéristiques mécaniques et physico-chimiques (porosité, capillarité, perméabilité, gélivité, comportement thermique ...etc.). Les différentes altérations des pierres de construction issues de ces roches seront décrites par la suite.

### Types des roches

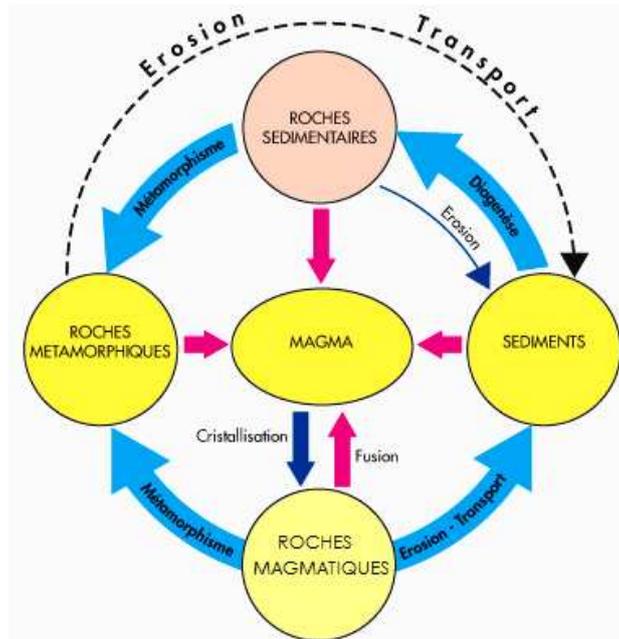


Figure 66 : Cyclicité des processus de formation des roches.

Source : [(CSTC 2016)]

La croûte terrestre est constituée d'une très grande variété de roches classées par les géologues en 3 grandes catégories : les roches magmatiques (cristallisation du magma liquide), les roches sédimentaires résultat du phénomène d'érosion des roches existantes, et

les roches métamorphiques issues de la transformation des deux types de roches précédents (magmatiques et sédimentaires). La figure 66 présente, de façon synthétique, ces trois grandes familles de roches ainsi que les processus de leur formation.

## Roches magmatiques

Appelées aussi Ignées ou éruptives, les roches magmatiques sont le résultat du refroidissement et de la solidification du magma liquide, comme le granite, le basalte, les porphyres, la diorite, la syénite, le gabbro, ... etc. Ces roches sont composées essentiellement de quartz, feldspath, mica et pyroxène. Lorsque ce processus de refroidissement et de solidification se produit en profondeur, on parle de **roches plutoniques**. C'est généralement le cas où la remontée du magma est très lente, permettant sa cristallisation progressive avant d'atteindre la surface, ce qui donne naissance à des roches grenues relativement bien cristallisées, dont les minéraux sont, parfois, facilement reconnaissables. Dans le cas du granite rose par exemple (Figure 67(a)), on peut voir très clairement les trois sortes de cristaux qui le constituent. Par contre, lorsque le processus se produit en surface, on parle alors de **roche volcanique**. La remontée du magma liquide en surface est si rapide que les cristaux n'ont pas eu assez de temps pour se développer. Le magma se refroidit très rapidement au contact brutal de l'air et/ou de l'eau, ce qui donne un aspect vitreux des roches formées, identifié à travers sa cassure caractéristique conchoïdale (Figure 67(b)). Les minéraux sont, pour la plupart, invisibles à l'œil nu et le recours aux analyses chimiques devient souvent nécessaire pour identifier ces roches.



Figure 67 : Roches magmatiques, (a) : plutonique, (b) : volcanique.

Source : [("Roche Magmatique" 2016)]

Les roches magmatiques sont aussi caractérisées par une excellente résistance à la compression simple, allant de 60 à 300 MPa. En revanche, elles sont très dures et sont donc au comportement fragile. Dans le domaine de la maçonnerie, la pierre la plus utilisée, extraite de ce type de roche, est le granite (quartz et Feldspaths). Il est l'un des matériaux de construction les plus nobles du monde. Grâce à ces caractéristiques mécaniques et esthétiques, le granite a été utilisé dans la réalisation de nombreux édifices célèbres en France comme ailleurs.

## Roches sédimentaires

Formées des dépôts de particules en surface (roches exogènes), tel que le sable (silice), désagrégation de roches et/ou d'accumulation de fossiles de plantes et d'animaux, les roches sédimentaires sont le résultat de quatre processus de formation : l'altération superficielle (source terrigène) ou sous marine (source allochimique) des matériaux qui produit des particules, le transport de ces particules par les cours d'eau, le vent ou la glace qui amène ces particules dans le milieu de dépôt, la sédimentation qui fait que ces particules, associées aux précipités chimiques dans le bassin de sédimentation (source orthochimique), se déposent dans un milieu donné pour former un sédiment et, finalement, la diagenèse (processus chimiques et mécaniques) qui transforme le sédiment en roche sédimentaire (Figure 68). Les roches sédimentaires sont réputées poreuses, leur porosité dépasse parfois les 30% et fait de ces roches le type le plus vulnérable aux altérations auxquelles une attention toute particulière est à porter. Les pierres les plus utilisées, issues de ce type de roches, sont : les pierres calcaires, les craies et les grès.

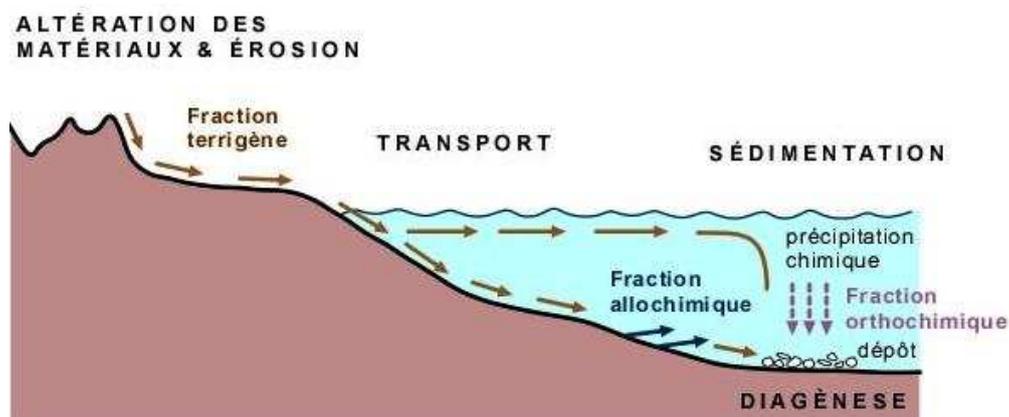


Figure 68 : Processus de formation des roches sédimentaires.

Source : [(Bourque 2010)]

Les roches sédimentaires ont la particularité de se déposer en couches parallèles formant des lits successifs (strates) d'épaisseurs différentes. Cette stratification est souvent bien mise en évidence par des différences de couleur, de composition et de texture (CSTC 2016).

### Roches métamorphiques

Ce sont des roches sédimentaires et/ou magmatiques qui ont subi un changement (recristallisation) infligé par plusieurs facteurs extérieurs dont la température et la pression. Leurs caractéristiques ont été déformées, voire partiellement détruites. Cette transformation « métamorphisme » se traduit par une modification de texture (Figure 69) et de la composition chimique de la roche avec la formation de nouveaux minéraux (néoformés). On peut citer le marbre (grains recristallisés de calcite et de dolomie), le quartzite (grains de quartz recristallisés), le schiste (le mica-quartz ...etc.), le gneiss (même élément que le granite mais de structure différente) ou l'ardoise.

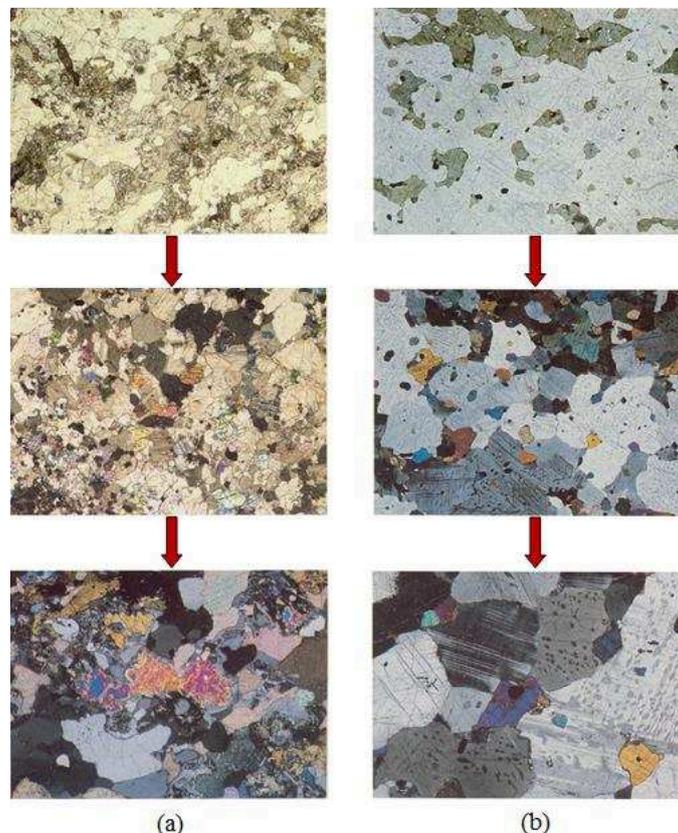


Figure 69 : Métamorphisme, (a) : roches sédimentaires, (b) : magmatiques.

Source : [(Yardley, MacKenzie, and Guilford 1990)]

Les caractéristiques mécaniques sont similaires à celles des roches magmatiques, voire même supérieures, comme par exemple le cas de quartzite dont la résistance peut dépasser les 300 MPa), ainsi que leur comportement (fragile). Avec une porosité légèrement supérieure par rapport aux roches magmatiques mais qui demeure très faible (inférieure à 9%), les roches métamorphiques font preuve d'une bonne résistance aux altérations. Les pierres, les plus utilisées dans la construction des ouvrages en maçonneries, provenant de ce type de roche sont principalement les schistes et les quartzites.

### **Les pierres de construction**

La matière première étant classifiée, mais qu'en est il des produits ? Il en existe plusieurs types : Ardoise, Basalte, Granite, Grès, Marbre, Pierre bleue belge, Pierre calcaire et le Quartzite. Les plus utilisées sont les Pierres calcaires, marbrières, les Granites et les Grès. Séjourné (1851-1936) a classé les pierres produites selon trois critères : La taille, la forme et l'endroit d'utilisation (destination) comme suit :

#### **Moellons ordinaire (MO)**

Eléments non façonnés, non équarris, de forme et de dimensions variables, employés soit en blocage, dans le remplissage, les massifs de fondations, le corps des culées et piles sans préparation spéciale, soit en parement (à joints irréguliers "Opus Incertum" (MOI), ou grossièrement disposés par assises horizontale (MOH)) et enfin, en voûte (MOV).

#### **Moellons équarris (ME)**

Symbolisés (MEV) quand ils sont taillés en voussoirs (élément formant l'appareillage d'un cintre d'une voûte ou arcade), on distingue les moellons piqués, smillés (piqués au marteau à deux pointes) et tétués (dégrossis au têtou). Ils sont employés principalement dans la construction des voûtes (les douelles, les queutages des grandes voûtes, vus des tympanes, les parapets) et les parements.

#### **Moellons d'appareil (MA)**

Symbolisés (MAV) lorsqu'ils sont taillés en voussoirs, leurs dimensions sont imposées au préalable. Ils sont employés dans les angles des culées et piles, le couronnement des parapets, plinthes, bandeaux de voûtes.

## Les libages (L)

Pierres de taille de grand appareil grossièrement équarries (grandes dimensions). Les libages sont utilisés pour reprendre de grandes sollicitations en compression ou dans des endroits susceptibles de recevoir des chocs ou impulsions.

## Pierres de tailles (PT)

Pierres dont plusieurs, voir toutes les faces sont soigneusement taillées et les arrêtes sont vivement mises en valeur. C'est en fonction de leurs dimensions, précisément leur hauteur d'assise ( $h$ ) qu'on distingue les grands appareils ( $h > 35\text{cm}$ ), moyens appareils ( $35 > h > 20\text{cm}$ ) et petits appareils ( $h < 20\text{cm}$ ). Elles sont utilisées dans les endroits les plus exposés aux regards, bandeaux, plinthes, couronnement, chaperons des piles et crossette d'appuis des piles des voûtes d'élégissement pour assurer un aspect esthétique captivant et fascinant.

## Terminologie

Afin de pouvoir décrire un ouvrage en maçonnerie, il est impératif de connaître le vocabulaire employé par les spécialistes depuis des siècles. Dans cette rubrique, nous allons définir les termes les plus répétés dans le monde des ouvrages maçonnés.

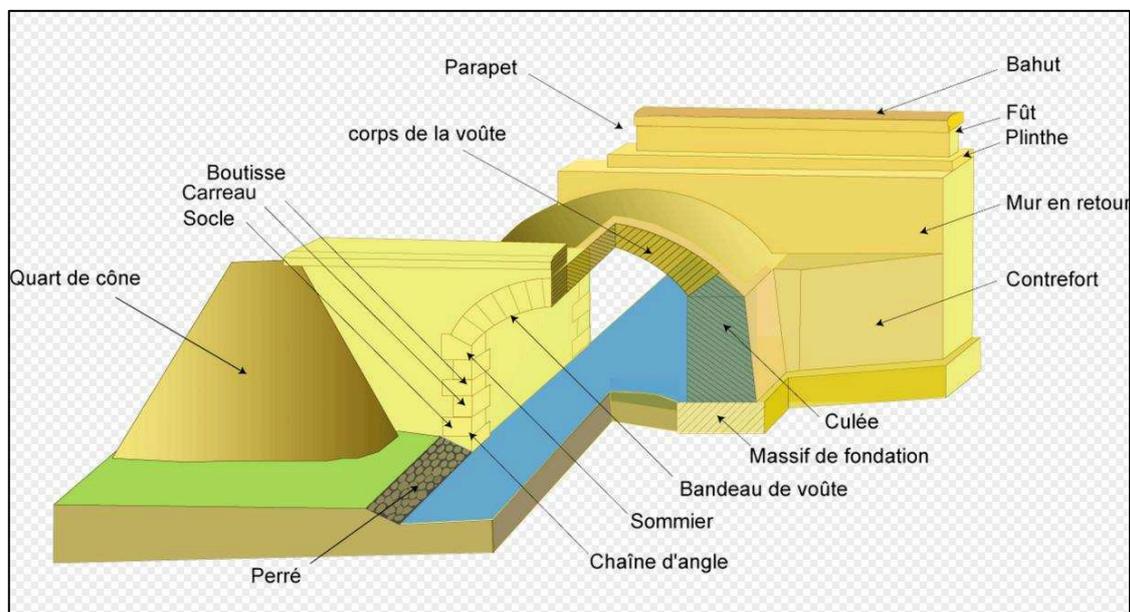


Figure 70 : Terminologie employée pour la description des Ponts en maçonnerie.

Source : ("Pont en maçonnerie" 2014)

## L'arche

Une arche de pont est constituée d'une voûte (plancher en arc de cercle) s'appuyant sur les piles et/ou les culées, surmontée d'un remplissage servant de plate-forme pour la chaussée et soutenu par les murs de tête (tympant et parapet (Plinthe, fût et bahut (couronnement))).

## La voûte

La voûte est la partie "active" de l'ouvrage. Elle est comprise entre deux surfaces cylindriques à génératrice horizontales appelées l'intrados (surface inférieure) et l'extrados (surface extérieure) et deux plans verticaux délimités par les murs de tête. La classification la plus courante des voûtes est celle en fonction de la forme de leur intrados, car l'extrados est rarement visible. En effet, les voûtes sont caractérisées par leur surbaissement  $\sigma$ , c'est le rapport de la flèche  $f$  (la hauteur de la clé par rapport au niveau des appuis) à la portée  $2a$  (distance horizontale entre appuis mesuré parallèlement à l'axe de l'ouvrage). On distingue :

1. **Voûte à plein cintre**, l'arc est un demi-cercle parfait ( $\sigma = \frac{1}{2}$ ), le centre est dans le plan de la naissance de la courbe. C'est le type de voûte qui produit le moins de poussée oblique car les extrémités de l'arc se posent perpendiculairement sur les appuis.
2. **Voûte plein cintre surhaussée**, c'est une voûte à plein cintre dont la clé a été surmontée, c'est-à-dire que l'élévation est supérieure au demi-cercle ( $\sigma > \frac{1}{2}$ ). Elle peut être établie, soit suivant une ellipse, soit suivant plusieurs arcs de cercle qui se raccordent, soit enfin en prenant deux arcs de cercle qui se croisent au sommet (clé), cette dernière disposition donne la voûte en ogive, qui constitue le caractère distinctif de l'architecture gothique.
3. **Voûte plein cintre cambrée**, c'est une voûte plein cintre dont les reins ont été surhaussés mais la hauteur demeure toujours égale à l'écartement des appuis ( $\sigma = \frac{1}{2}$ ).
4. **Voûte surbaissée**, c'est celle définie par un arc de cercle dont le centre est situé en dessous du plan des naissances ( $\sigma < \frac{1}{2}$ ).
5. **Voûte surbaissée cambrée**, c'est une voûte surbaissée ( $\sigma < \frac{1}{2}$ ) dont les reins ont été surhaussés sans accroissement de la flèche. Elle est établie, soit suivant une ellipse, soit suivant une courbe formée par une succession d'arcs de cercle de centres

différents et de rayons de plus en plus grands en s'approchant de la clé. Dans ce dernier cas elle est dite en **anse de panier**.

### Le bandeau

Le bandeau matérialise l'extrémité transversale de la voûte appelée tête de voûte. Réalisé en moellons d'appareil ou en pierres de taille, il est souvent considéré comme représentatif d'une période donnée (A Debauxe 1875).

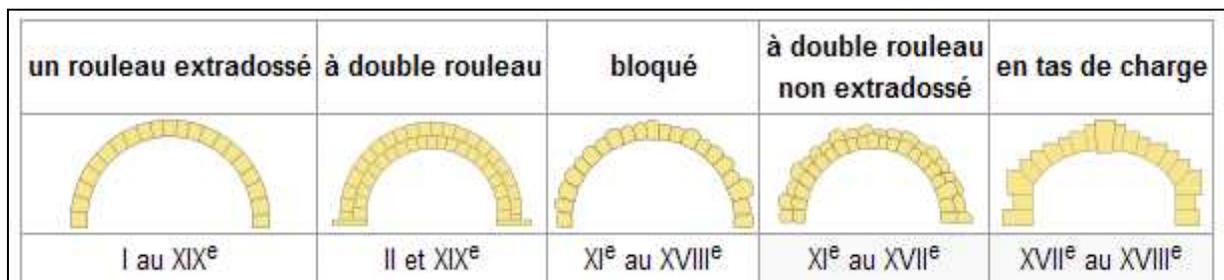


Figure 71 : Types de bandeaux.

Source : ("Pont en maçonnerie" 2014)

La géométrie du bandeau n'est généralement pas représentative de la géométrie interne de la voûte. Il faudra donc procéder à des investigations pour retrouver cette géométrie.

### La douelle

La douelle constitue la partie inférieure de la voûte (l'intrados). Située entre les bandeaux, elle est généralement réalisée en moellons équarris ou d'appareil de longueur uniforme mais qui peut varier d'une assise à la suivante.

### Le queutage

Le queutage constitue la partie supérieure de la voûte (l'extrados). Délimité également par les bandeaux, il surmonte la douelle. Sa constitution est très variée selon l'évaluation de la pression à laquelle il sera soumis, on peut se contenter de moellons bruts ou équarris jointés avec du mortier de chaux ou de ciment dans le cas de faibles pressions, jusqu'à prévoir des matériaux plus résistants et plus homogènes avec les bandeaux et la douelle.

## Les tympans

En plus de leur rôle de murs de soutènement vis-à-vis du remplissage qui transmet les charges à la voûte, ils assurent également un rôle porteur (poutres latérales) qui contribue à l'augmentation de la capacité portante de l'ouvrage. En effet, des ingénieurs indiens ont pu évaluer cette contribution entre 10% et 20% de la portance de la voûte seule (Agrawel 1973). Il convient de préciser que cette résistance supplémentaire n'existe que tant que la liaison voûte/tympan est intègre.

## Les parapets

Les parapets sont composés de plinthes, fûts et bahut (couronnement). Ce sont des éléments architecturaux mais qui ont également un rôle de retenue (garde-fou).

## Le remplissage

Contenu entre les murs de tête et la voûte, il permet la répartition des charges sur la voûte, ce qui contribue également à l'accroissement de 10% de la portance de la voûte seule pour une épaisseur de remplissage de 0,30m à la clé (Agrawel 1973).

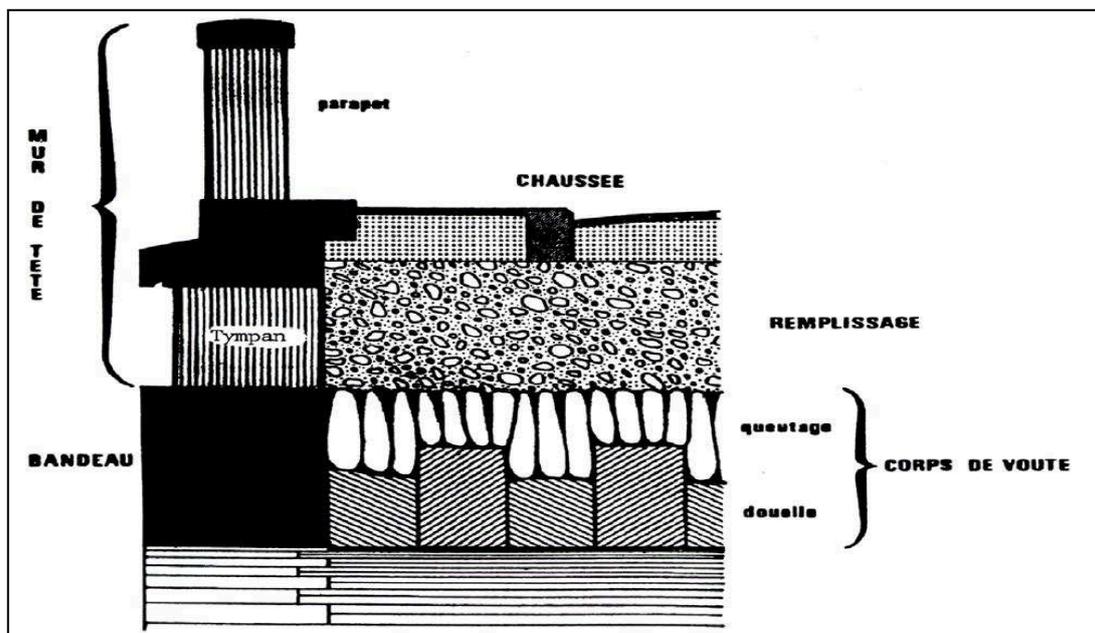


Figure 72 : Morphologie d'une voûte en maçonnerie.

Source : (SETRA 1996)

## **Les élégissements**

Les élégissements sont des évidements ménagés dans les tympans dans le but de réduire le volume du remplissage et donc son poids. Réalisés au moyen de petites voûtes accolées, ils permettent l'aération des voûtes principales mais présentent un inconvénient qui n'est pas négligeable, du fait que ces voûtes d'élévation créent des points d'appuis concentrés à leur retombée sur les voûtes principales. Des fissures d'origine thermique apparaissent de façon systématique dans ces voûtes et d'origine mécanique à leur retombée dans les voûtes principales.

## **Les culées**

Eléments massifs qui constituent les appuis de rives d'un pont dont la fonction est de reprendre la poussée de la voûte.

## **Les piles**

Appuis intermédiaires d'un pont constitués de partie résistante (parement de l'appui) et partie remplissage (cœur de l'appui).

## **Les murs en retour et les murs en aile**

Les murs en retour et les murs en aile sont des parois verticales ou faiblement inclinées ayant généralement un rôle de soutènement. Les murs en retour sont parallèles à l'axe de l'ouvrage, alors que les murs en aile sont parallèles à la voie franchie.

## **L'appareil (Opus)**

C'est la manière dont sont disposées les pierres de construction d'un mur. On distingue :

1. **L'appareil cyclopéen** (Gros blocs bruts, avec insertion de menues pierres dans les interstices)
2. **L'appareil polygonal**, irrégulier (opus incertum), les pierres sont aillées de façon à s'adapter les unes aux autres avec des joints courbés ou droits dans le cas des surfaces planes

3. **L'appareil trapézoïdal** (les joints horizontaux sont parallèles, mais les autres sont obliques)

4. **L'appareil isodome** ou rectangulaire (les pierres sont équarris, les joints horizontaux sont parallèles et les autres joints sont verticaux).

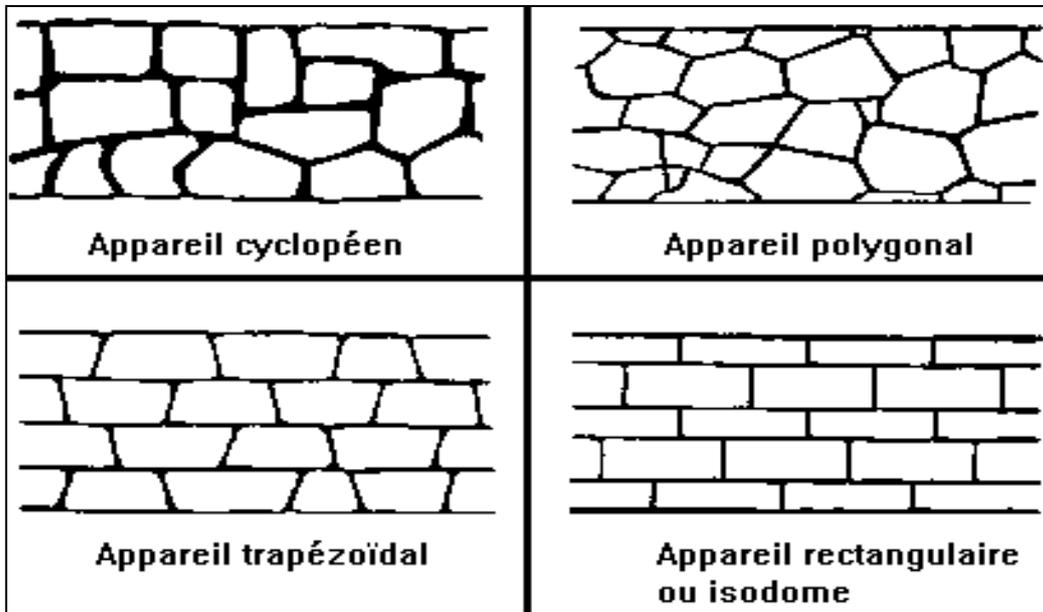


Figure 73 : Types d'appareil.

Source : (Grectel 1998)

### III- Annexe C– Notion d'indice de fiabilité (Lemaire 2014)

#### Indice de Rjanitzyne-Cornell

Si R et S sont deux variables gaussiennes indépendantes, alors  $Z = R - S$  est une variable gaussienne de moyenne  $m_R - m_S$  et d'écart-type  $\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$  et la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \Phi\left(-\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$$

La quantité  $\frac{m_Z}{\sigma_Z}$ , inverse du coefficient de variation de Z, a été appelée indice de fiabilité par Rjanitzyne en 1949. C'est une quantité sans dimension qui traduit le nombre d'écart-types séparant la moyenne du domaine de défaillance (Figure 70). Cette définition, reprise par Cornell en 1969 et généralisée à tort, est souvent appelée indice de Cornell :

$$Z = R - S \Rightarrow \beta_c = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \Rightarrow P_f = \Phi(-\beta)$$

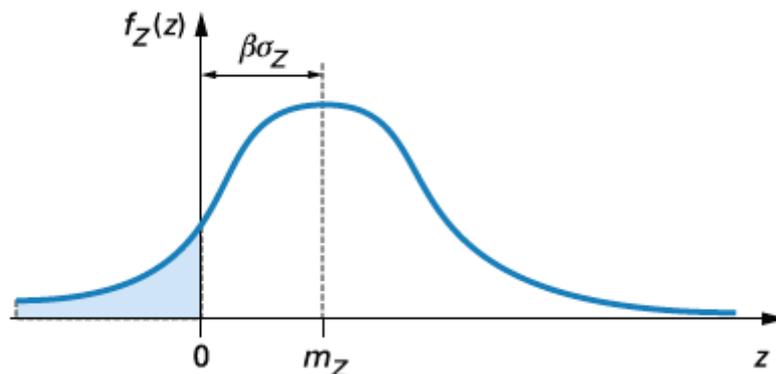


Figure 74 : Représentation d'une densité gaussienne Z et indice de fiabilité.

Source : (Lemaire 2014)

En effet, la généralisation à des variables quelconques et à des états-limites quelconques peut définir un indice mais celui-ci :

– N'est pas relié à  $P_f$  par  $\Phi(-\beta)$ .

– N'est pas invariant dans toute représentation équivalente de l'état-limite.  $R - S \geq 0$  ou  $\ln(R) - \ln(S) \geq 0$  ou  $R^2 - S^2 \geq 0$  représentent bien tous le même état-limite, mais les indices associés ne sont pas identiques.

L'indice de Rjanitzyne-Cornell ne s'applique qu'à un état-limite formé d'une combinaison linéaire de variables gaussiennes.

## Indice de Hasofer-Lind

### Changement de repère

La définition d'un indice invariant dans toute représentation de l'état-limite est due à Hasofer et Lind en 1974. Ces auteurs ont proposé de se placer dans un espace de variables gaussiennes statistiquement indépendantes, de moyennes nulles et d'écart-types unitaires :

$$R \Rightarrow U \quad N(0, 1) \quad S \Rightarrow V \quad N(0, 1) \quad \rho_{UV} = 0$$

La transformation de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) est immédiate dans le cas de variables gaussiennes indépendantes :

$$u = \frac{r - m_R}{\sigma_R} \quad v = \frac{S - m_S}{\sigma_S} \quad \dots (1)$$

et elle conserve la linéarité de l'état-limite. Pour des variables indépendantes de lois quelconques, le principe de la transformation consiste à écrire l'égalité des fonctions de répartition :

$$\Phi(u) = F_R(r) \Rightarrow r \rightarrow u = \Phi^{-1}(F_R(r)) \quad \dots (2)$$

$$\Phi(v) = F_S(s) \Rightarrow s \rightarrow v = \Phi^{-1}(F_S(s)) \quad \dots (3)$$

La transformation résultant des relations (2) et (3) est appelée transformation isoprobabiliste. Elle est appliquée ici pour une variable et elle suppose que  $F_X(x)$  soit continue et strictement croissante. Si les variables ne sont pas indépendantes, une forme générale de la transformation est donnée par Rosenblatt, elle est présentée dans le paragraphe 3.

Dans l'espace physique, aucune notion de distance ne peut être donnée si les variables ne sont pas des quantités physiques dimensionnellement homogènes. L'intérêt de l'espace normé est de travailler dans un espace adimensionnel dans lequel une mesure de distance est possible. De plus, le choix des variables gaussiennes normées centrées donne une forme simple à la densité conjointe de probabilité. La figure 71 illustre l'exemple R – S de variables gaussiennes.

Dans l'espace physique, les isodensités sont des ellipses. Dans l'espace normé, les isodensités sont des cercles centrés sur l'origine, image de la médiane des distributions physiques, confondue dans ce cas avec la moyenne. Les relations (1) donnent l'expression de l'état-limite en variables  $u, v$  :

$$Z = r - s = 0 \Rightarrow H(u, v) = \sigma_R u - \sigma_S v + m_R - m_S = 0$$

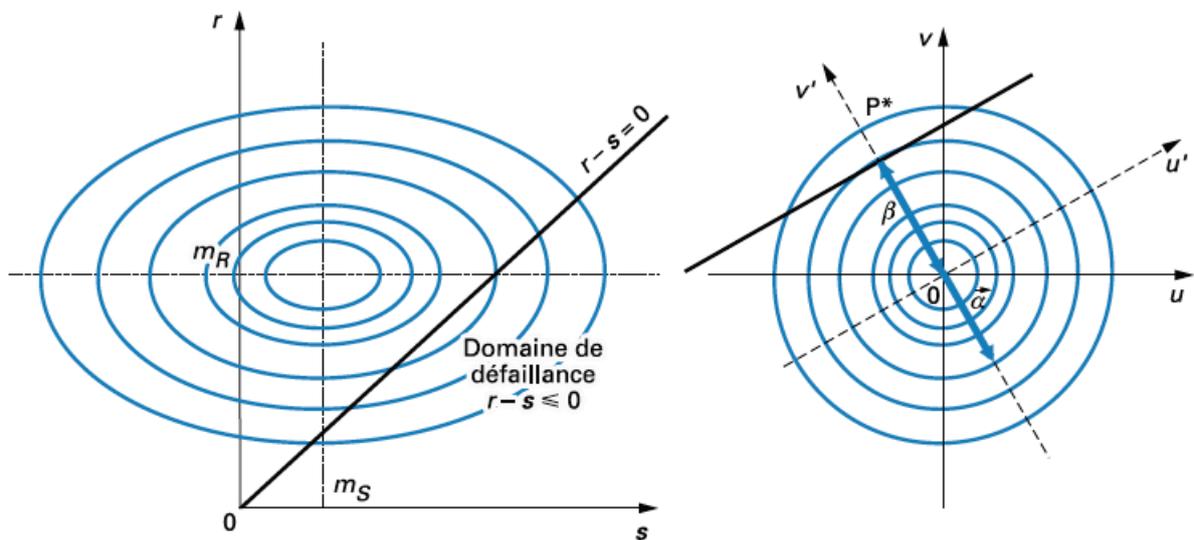


Figure 75 : Illustration de la définition de l'indice d'Hasofer et Lind.

Source : (Lemaire 2014)

### Définition de l'indice d'Hasofer et Lind

L'indice  $\beta$  est la distance entre l'origine et l'état-limite dans l'espace normé :

$$\beta = \min_{H(u,v) \leq 0} \sqrt{u^2 + v^2}$$

Géométriquement, la distance de l'origine à la droite  $H(u, v) = 0$  est donnée par :

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad R, S \text{ Gauss}$$

ce qui retrouve, compte tenu des hypothèses, l'indice de Rjanitzyne-Cornell.

Cette définition conduit à un indice invariant quelles que soient les lois des variables et l'expression de l'état-limite. Outre l'indice  $\beta$ , les variables d'intérêt sont la position du point  $P^*$ , point du maximum de la densité de probabilité, souvent nommé par abus de langage point de défaillance le plus probable ou mieux point de conception lorsqu'il est utilisé pour le dimensionnement. Le vecteur unitaire  $\vec{a} \parallel \overrightarrow{\text{grad}H}$  est un indicateur du poids des variables dans la fiabilité.

### Transformations isoprobabilistes

#### Transformations isoprobabilistes (variables indépendantes)

Lorsque les variables sont indépendantes, la forme générale de la transformation isoprobabiliste (2) et (3) est :

$$F_{X_i}(X_i) = \Phi(u_i)$$

Qui devient pour quelques cas particuliers  $X$  :

–  $X$  **gaussienne** de moyenne  $m_X$  et d'écart-type  $\sigma_X$  :

$$u = \frac{x - m_X}{\sigma_X}, x \in \mathbb{R}$$

–  $X$  **log-normale** de moyenne  $m_{\ln X} = \lambda_X$  et d'écart-type  $\sigma_{\ln X} = \xi_X$  :

$$u = \frac{\ln X - \lambda_X}{\xi_X}, x \in \mathbb{R}^+$$

–  $X$  **uniforme** sur  $(a, b)$  :

$$u = \Phi^{-1}\left(\frac{x - a}{b - a}\right), x \in [a, b]$$

## Variables indépendantes

Lorsque les variables sont dépendantes, la transformation de Rosenblatt donne une solution générale qui n'est développée ici que pour un couple de variables gaussiennes. Soit  $X_1$  et  $X_2$  de moyennes  $m_{X_1} = m_1$  et  $m_{X_2} = m_2$  et d'écart-types  $\sigma_{X_1} = \sigma_1$  et  $\sigma_{X_2} = \sigma_2$ . Le coefficient de variation est  $\rho_{X_1 X_2} = \rho$ ,  $|\rho| < 1$ , et la densité conjointe de probabilité alors :

$$f_{X_1, X_2}(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{X_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{X_1 - m_1}{\sigma_1}\frac{X_2 - m_2}{\sigma_2} + \left(\frac{X_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

Effectuons le changement de variable :

$$\hat{u}_1 = \frac{X_1 - m_1}{\sigma_1} \quad \text{et} \quad \hat{u}_2 = \frac{X_2 - m_2}{\sigma_2}$$

Où  $\hat{u}_i$  rappelle que les variables sont  $N(0, 1)$  mais corrélées. La transformation de Rosenblatt s'écrit :

$$\begin{cases} u_1 = \hat{u}_1 = \frac{X_1 - m_1}{\sigma_1} \\ \text{et} \\ u_2 = \frac{\hat{u}_2 - \rho\hat{u}_1}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{X_2 - m_2}{\sigma_2} - \rho\frac{X_1 - m_1}{\sigma_1}\right) \end{cases}$$

Ou bien sous la même forme en permutant les indices.

On remarque que la matrice de la transformation de Rosenblatt est la matrice inférieure de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation sous la forme :

$$\begin{aligned} [\rho] &= [L][L]^t \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= [L]^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}, \quad [L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cette relation peut être généralisée : si  $\{\hat{U}\}$  est un vecteur de variables gaussiennes centrées, réduites et corrélées, alors :

$$\text{Si } [\rho] = [L][L]^t, \quad \{U\} = [L]^{-1}\{\hat{U}\}$$

est un vecteur de variables gaussiennes centrées, réduites et non corrélées. C'est cette relation qui est à la base de la simulation d'un vecteur aléatoire.

#### IV- Annexe D– Caractéristiques des ouvrages ayant servie de comparaison

##### Le Shinafoot bridge

Le Shinafoot bridge (Figure 76) est un ouvrage qui a fait partie d'une série d'essais réels de charge à la rupture, effectuée, par le TRRLC (Transport and Road Research Laboratory – UK), sur des ponts voûtés en maçonnerie dans le cadre d'évaluer la validité de la méthode MEXE. Le tableau 29 donne les caractéristiques du pont prise en considération.

Tableau 29: Caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques du Shinafoot bridge.

Désignations	Unité	Valeur
Nombre de voussoirs	[ U ]	11
Largeur de la voûte	[ m ]	6,655
Epaisseur de la voûte	[ m ]	0,58
Ouverture de l'arc	[ m ]	6.16
Flèche	[ m ]	0.837
Hauteur du remplissage à la clé	[ m ]	0,805
Epaisseur de la voie de roulement	[ m ]	0,285
Poids volumique matériau de remplissage	[ kN/m <sup>3</sup> ]	18
Poids volumique matériau de la voie de roulement	[ kN/m <sup>3</sup> ]	21
Cohésion matériau de remplissage	[ kN/m <sup>2</sup> ]	0
Angle de frottement matériau de remplissage	[ rad ]	$\pi/6$
Angle de diffusion matériau de remplissage	[ rad ]	$\pi/6$
Poids volumique des voussoirs	[ kN/m <sup>3</sup> ]	24
Module de Yong des voussoirs	[ kN/m <sup>2</sup> ]	$48 \cdot 10^6$

L'essai consistait à charger le pont de façon incrémentale au quart de l'ouverture de la voûte. L'effondrement s'est produit suite à la formation d'un mécanisme à quatre rotules (Figure 77).



Figure 76 : Le Shinafoot Bridge avant l'essai.

Source : (Page 1988)

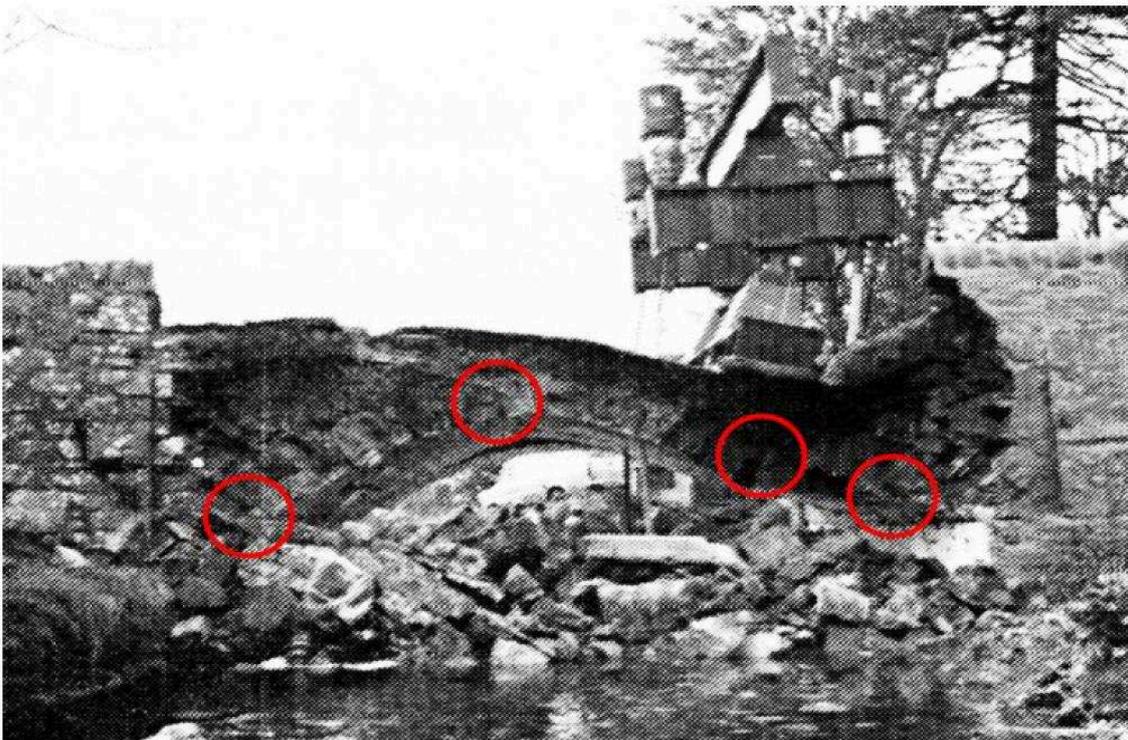


Figure 77 : Le Shinafoot Bridge juste avant l'effondrement totale.

Source : [(Page 1988)]

## Le Schwarzwasserbrücke



Figure 78 : Le Schwarzwasserbrücke.

Source : [Grandjean 2009]

Tableau 30: Caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques du Schwarzwasserbrücke.

Désignations	Unité	Valeur
Nombre de voussoirs	[ U ]	40
Largeur de la voûte	[ m ]	2,70
Epaisseur de la voûte	[ m ]	0,85
Ouverture de l'arc	[ m ]	16,75
Flèche	[ m ]	2,844
Hauteur du remplissage à la clé	[ m ]	0,55
Epaisseur de la voie de roulement	[ m ]	0,15
Poids volumique matériau de remplissage	[ kN/m <sup>3</sup> ]	18
Poids volumique matériau de la voie de roulement	[ kN/m <sup>3</sup> ]	20
Cohésion matériau de remplissage	[ kN/m <sup>2</sup> ]	0
Angle de frottement matériau de remplissage	[ rad ]	$\pi/6$
Angle de diffusion matériau de remplissage	[ rad ]	$\pi/6$
Poids volumique des voussoirs	[ kN/m <sup>3</sup> ]	24
Module de Yong des voussoirs	[ kN/m <sup>2</sup> ]	$25 \cdot 10^6$

## V- Annexe E– Etapes de calcul

### Calcul des charges permanentes affectées à chaque segment

La figure 79 représente les charges permanentes considérées dans le calcul. Pour calculer la charge permanente affectée à chaque voussoir par mètre linéaire de sa longueur, on divise la surface au-dessus de la voûte en traçant les verticales et les horizontales passant par les nœuds. On obtient alors pour un segment (i), les paramètres suivants :

$$h(i) = h(1) - \sum_2^n (L(i-1) \cdot \sin(\theta(i-1)))$$

$$\ell(i) = L(i) \cdot \cos(\theta(i))$$

$$ht(i) = \begin{cases} L(i) \cdot \sin(\theta(i)) & , \theta(i) \geq 0 \\ -L(i) \cdot \sin(\theta(i)) & , \theta(i) < 0 \end{cases}$$

$$hu(i) = \begin{cases} h(i) - ht(i) & , \theta(i) \geq 0 \\ h(i) & , \theta(i) < 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$qu(i) = (P_{vr} \cdot b(i) \cdot hu(i)) + (P_{vv} \cdot b(i) \cdot hv) + (P_{vp} \cdot b(i) \cdot h(i))$$

$$qt(i) = P_{vr} \cdot b(i) \cdot ht(i)$$

Où :

$qu(i)$  : Valeur de la charge permanente (partie uniforme) au nœud (i), [kN/ml] ;

$qt(i)$  : Valeur de la charge permanente (partie triangulaire) au nœud (i), [kN/ml] ;

$P_{vp}$  : Poids volumique du matériau pierres, [kN/m<sup>3</sup>] ;

$P_{vr}$  : Poids volumique du matériau de remplissage, [kN/m<sup>3</sup>] ;

$P_{vv}$  : Poids volumique du matériau de la voie de roulement, [kN/m<sup>3</sup>] ;

$hu(i)$  : Hauteur de la partie uniforme du remplissage par rapport au nœud (i), [m] ;

$ht(i)$  : Hauteur de la partie triangulaire du remplissage par rapport au nœud (i), [m] ;

$hv$  : Hauteur de la voie de roulement, [m] ;

$L(i)$  : Longueur du segment (i), [m] ;

$b(i)$  : Largeur du segment (i), [m] ;

$h(i)$  : Hauteur du segment (i), [m] ;

$h_0$  : Hauteur du remplissage à la clé de voûte, [m] ;

$\theta(i)$  : Angle du segment (i) par rapport à l'horizontale, [rad].

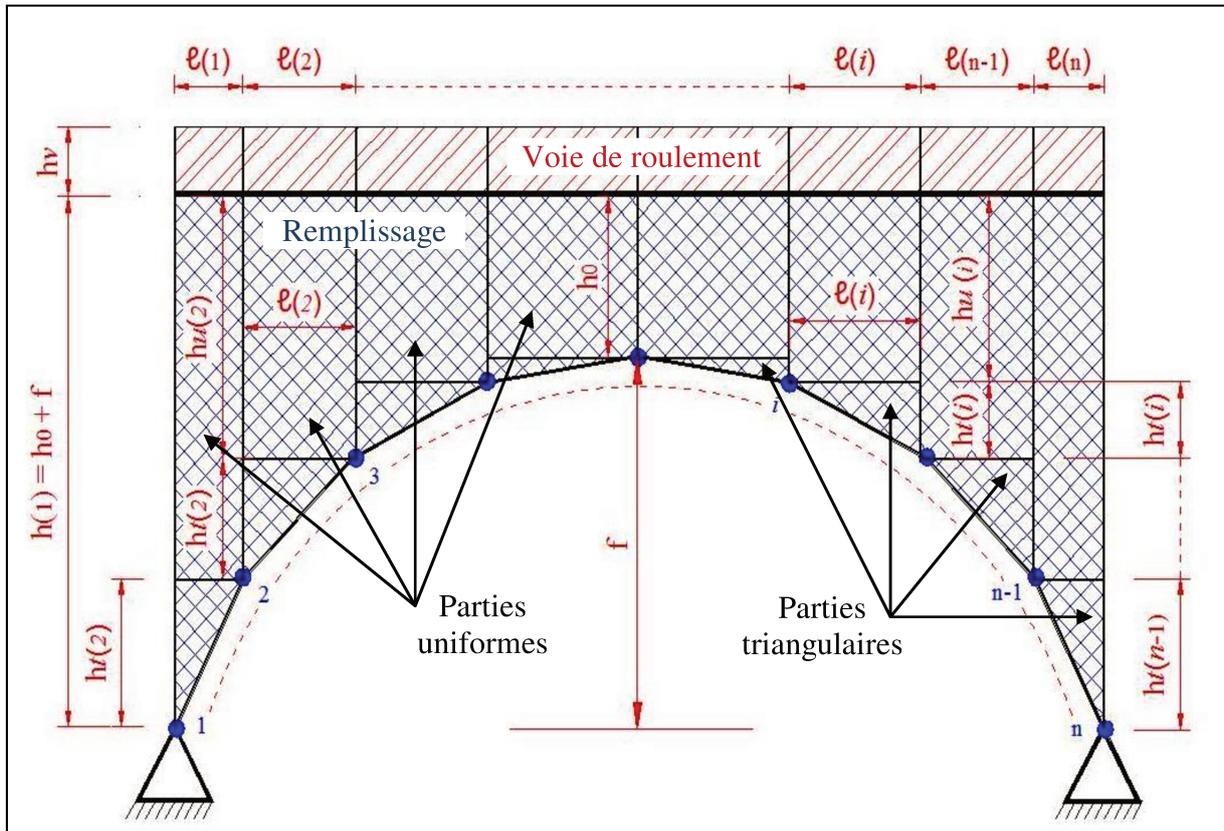


Figure 79 : Détermination de la charge permanente affectée à chaque segment.

## Calcul du vecteur charges nodales équivalentes pour chaque voussoir

### Charges verticales

Pour la détermination des charges nodales équivalentes aux charges permanentes verticales réellement appliquées à chaque segment, nous avons divisé ces dernières en deux parties : uniforme et triangulaire. La somme des deux charges est équivalente à la charge initiale en appliquant Le théorème de superposition des charges (Figure 80).

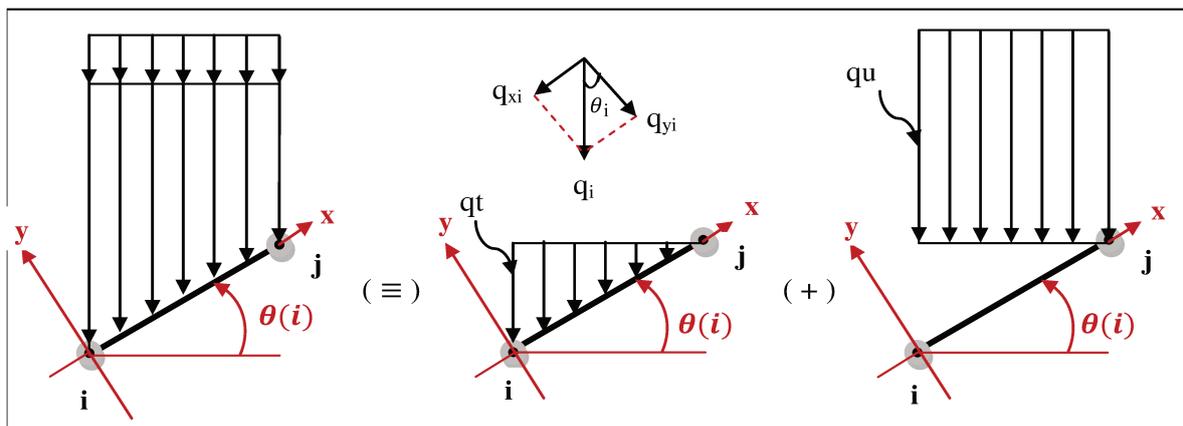


Figure 80 : Superposition des charges permanentes.

a) Repère local :  
a-1)  $\theta(i) \geq 0$  :

Nous avons :

$$q_i = \begin{cases} q_{xi} = q_i \cdot \sin(\theta(i)) \\ q_{yi} = q_i \cdot \cos(\theta(i)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} qt_{xi}(x) = qt_i(x) \cdot \sin(\theta(i)) \\ qt_{yi}(x) = qt_i(x) \cdot \cos(\theta(i)) \end{cases} \\ \begin{cases} qu_{xi}(x) = qu_i(x) \cdot \sin(\theta(i)) \\ qu_{yi}(x) = qu_i(x) \cdot \cos(\theta(i)) \end{cases} \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} qt_i(x) = qt(i) \cdot \left(\frac{x}{L(i)} - 1\right) \\ \text{et} \\ qu_i(x) = -qu(i) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} qt_i(x) = \begin{cases} qt_{xi}(x) = qt(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{x}{L(i)} - 1\right) \\ qt_{yi}(x) = qt(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left(\frac{x}{L(i)} - 1\right) \end{cases} \\ qu_i(x) = \begin{cases} qu_{xi}(x) = -qu(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ qu_{yi}(x) = -qu(i) \cdot \cos(\theta(i)) \end{cases} \end{cases} \quad \dots (1.6.13)$$

Maintenant, pour déterminer le vecteur charges nodales équivalentes à ce chargement, nous allons employer l'approximation nodale utilisée dans la plupart des logiciels de calcul d'éléments finis. Pour le champ de déplacement axial ( $U(x)$ ) en compression, nous avons un degré de liberté par nœud ( $U_i, U_j$ ) (Figure 81).

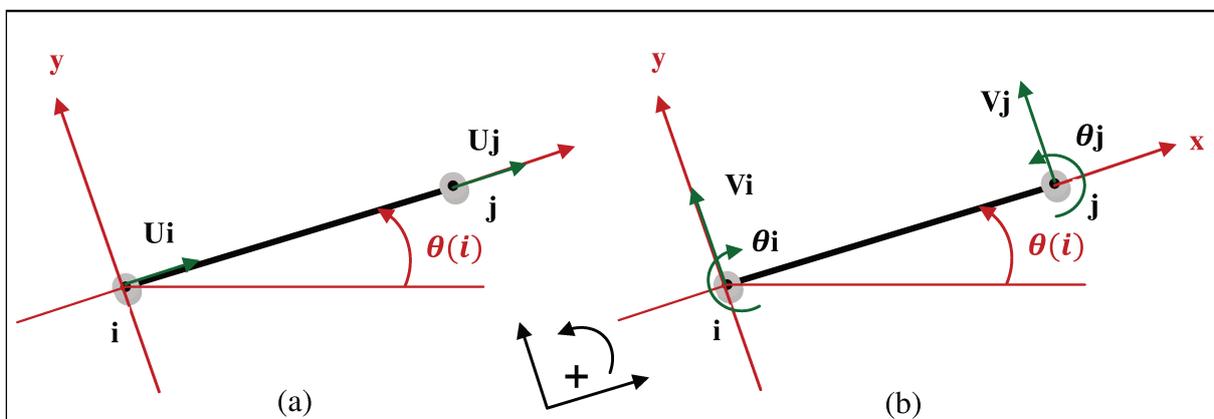


Figure 81 : Approximation nodale.

Le matériau pierre est supposé linéaire, la déformation est de fait constante sur la hauteur de section de l'élément considéré (déformation homogène). La fonction de déplacement ( $U(x)$ ) est par conséquent linéaire :

$$\begin{aligned} \text{On pose :} \quad U(x) &= a_1 \cdot x + a_0 = \begin{cases} u_i, & x = 0 \\ u_j, & x = L(i) \end{cases} \\ \Rightarrow U(x) &= \left\{ \left(1 - \frac{x}{L(i)}\right) \quad \frac{x}{L(i)} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad \dots (1.6.13) \end{aligned}$$

Pour le champ de déplacement transversal ( $V(x)$ ) en flexion, chacun des nœuds possède deux degrés de liberté, une translation suivant  $y$  ( $v$ ) et une rotation autour de  $z$  perpendiculaire au plan  $xy$ . Nous ne disposons donc que de quatre conditions aux limites ( $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$ ) pour déterminer sa fonction d'approximation ce qui impose le choix d'un polynôme de degré 3 (une cubique).

$$\begin{aligned} \text{On pose :} \quad V(x) &= b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 = \begin{cases} v_i, & x = 0 \\ v_j, & x = L(i) \end{cases} \\ \text{Avec :} \quad V'(x) &= b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot x + 3 \cdot b_3 \cdot x^2 = \begin{cases} \theta_i, & x = 0 \\ \theta_j, & x = L(i) \end{cases} \\ \Rightarrow V(x) &= \left\{ \left(1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3}\right) \quad \left(x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2}\right) \quad \left(\frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3}\right) \quad \left(-\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2}\right) \right\} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \dots (1.6.14) \end{aligned}$$

En superposant les résultats (1.6.13) et (1.6.14), le champ de déplacement global de l'élément considéré s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 & 0 & \frac{x}{L(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3}\right) & \left(x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2}\right) & 0 & \left(\frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3}\right) & \left(-\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2}\right) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1.6.15)$$

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{d\}$$

D'où finalement le vecteur charges nodales équivalentes :  $\{f_e\} = \iint [N]^T \cdot \{q\} ds$

$$\Rightarrow \{f_e\} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_0^{L(i)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} dx \quad \dots (1.6.16)$$

**a-1-1) Partie uniforme :**

$$(1.6.16) \Rightarrow \{f_{u_e}\} = \begin{Bmatrix} F_{uix} \\ F_{uiy} \\ M_{uiz} \\ F_{ujx} \\ F_{ujy} \\ M_{ujz} \end{Bmatrix} = \int_0^{L(i)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -q_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -q_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \end{Bmatrix} dx$$

$$\Rightarrow \{f_{u_e}\} = \begin{Bmatrix} F_{uix} \\ F_{uiy} \\ M_{uiz} \\ F_{ujx} \\ F_{ujy} \\ M_{ujz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-q_u(i) \cdot L(i)}{2} \cdot \sin(\theta(i)) \\ \frac{-q_u(i) \cdot L(i)}{2} \cdot \cos(\theta(i)) \\ \frac{-q_u(i) \cdot L(i)^2}{12} \cdot \cos(\theta(i)) \\ \frac{-q_u(i) \cdot L(i)}{2} \cdot \sin(\theta(i)) \\ \frac{-q_u(i) \cdot L(i)}{2} \cdot \cos(\theta(i)) \\ \frac{+q_u(i) \cdot L(i)^2}{12} \cdot \cos(\theta(i)) \end{Bmatrix} \quad \dots (1.6.17)$$

**a-1-2) Partie triangulaire :**

$$(1.6.16) \Rightarrow \{f_{t_e}\} = \int_0^{L(i)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{x}{L(i)} - 1\right) \\ q_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left(\frac{x}{L(i)} - 1\right) \end{Bmatrix} dx$$

$$\Rightarrow \{f_{t_e}\} = \begin{Bmatrix} F_{tix} \\ F_{t iy} \\ M_{tiz} \\ F_{tjx} \\ F_{tjy} \\ M_{tjz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-q_t(i).L(i)}{3} . \sin(\theta(i)) \\ \frac{-7q_t(i).L(i)}{20} . \cos(\theta(i)) \\ \frac{-q_t(i).L(i)^2}{20} . \cos(\theta(i)) \\ \frac{-q_t(i).L(i)}{6} . \sin(\theta(i)) \\ \frac{-3q_t(i).L(i)}{20} . \cos(\theta(i)) \\ \frac{+q_t(i).L(i)^2}{30} . \cos(\theta(i)) \end{Bmatrix} \quad \dots (1.6.18)$$

En superposant les résultats (1.6.17) et (1.6.18), le vecteur charges nodales équivalentes global de l'élément considéré s'écrit :

$$\{f_e\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{q_t(i)}{3}\right) . L(i) . \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20}\right) . L(i) . \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20}\right) . L(i)^2 . \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{q_t(i)}{6}\right) . L(i) . \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20}\right) . L(i) . \cos(\theta(i)) \\ +\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30}\right) . L(i)^2 . \cos(\theta(i)) \end{Bmatrix} \quad \dots (1.6.19)$$

**a-2)  $\theta(i) < 0$  :**

De la même manière on obtient le vecteur charges nodales correspondant à  $\theta$  négatif :

$$\{f_e\}_{\theta(i) < 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{q_t(i)}{6}\right) . L(i) . \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20}\right) . L(i) . \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30}\right) . L(i)^2 . \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{q_t(i)}{3}\right) . L(i) . \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20}\right) . L(i) . \cos(\theta(i)) \\ +\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20}\right) . L(i)^2 . \cos(\theta(i)) \end{Bmatrix} \quad \dots (1.6.20)$$

**b) Repère global :**

**b-1)  $\theta(i) \geq 0$  :**

D'après la figure 82, nous avons :

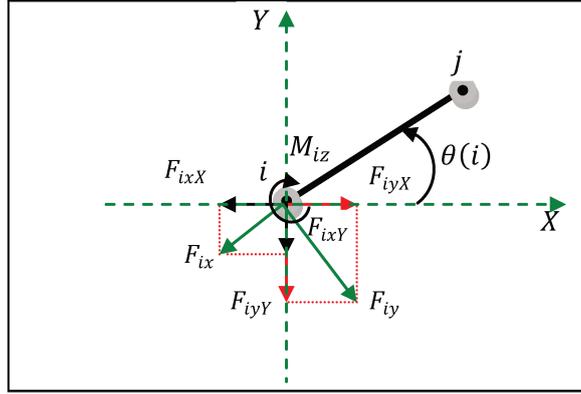


Figure 82 : Passage au repère global ( $\theta(i) \geq 0$ ).

$$\begin{cases} F_{iX} = F_{ixX} - F_{iyX} \\ F_{iY} = F_{ixY} + F_{iyY} \\ M_{iz} = M_{iz} \\ \text{et} \\ F_{jX} = F_{jxX} - F_{jyX} \\ F_{jY} = F_{jxY} + F_{jyY} \\ M_{jZ} = M_{jz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{iX} = F_{ix} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{iy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{iY} = F_{ix} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{iy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{iz} = M_{iz} \\ F_{jX} = F_{jx} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{jy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{jY} = F_{jx} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{jy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{jZ} = M_{jz} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{F_{v_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{pmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iz} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\frac{q_u(i)}{2} \cdot L(i) - \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot (\cos^2(\theta(i)) + 20) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i)^2 \cdot \cos(\theta(i)) \\ \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\frac{q_u(i)}{2} \cdot L(i) + \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot (\cos^2(\theta(i)) - 10) \\ +\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30}\right) \cdot L(i)^2 \cdot \cos(\theta(i)) \end{pmatrix}$$

**b-2)  $\theta(i) < 0$  :**

Selon la figure 83, nous avons :

$$\begin{cases} F_{iX} = F_{ixX} + F_{iyX} \\ F_{iY} = F_{ixY} - F_{iyY} \\ M_{iz} = M_{iz} \\ \text{et} \\ F_{jX} = F_{jxX} + F_{jyX} \\ F_{jY} = F_{jyY} - F_{jxY} \\ M_{jZ} = M_{jz} \end{cases}$$

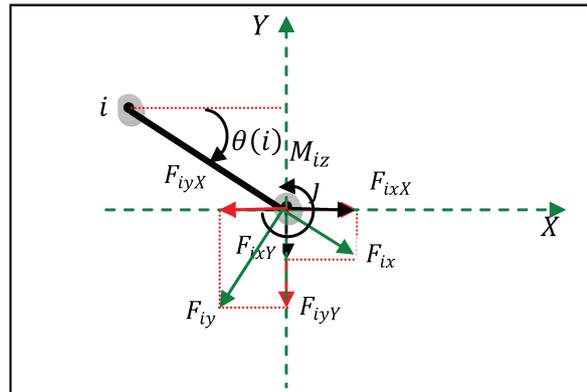


Figure 83 : Passage au repère global ( $\theta(i) < 0$ ).

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{iX} = F_{ix} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{iy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{iY} = F_{iy} \cdot \cos(\theta(i)) + F_{ix} \cdot \sin(\theta(i)) \\ M_{iZ} = M_{iz} \\ F_{jX} = F_{jx} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{jy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{jY} = F_{jy} \cdot \cos(\theta(i)) + F_{jx} \cdot \sin(\theta(i)) \\ M_{jZ} = M_{jz} \end{cases}$$

Le vecteur charges nodales équivalentes aux charges verticales s'écrit :

$$\{F_{v_e}\}_{\theta(i)<0} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\frac{q_u(i)}{2} \cdot L(i) + \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot (\cos^2(\theta(i)) - 10) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30}\right) \cdot L(i)^2 \cdot \cos(\theta(i)) \\ \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\frac{q_u(i)}{2} \cdot L(i) - \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot (\cos^2(\theta(i)) + 20) \\ +\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i)^2 \cdot \cos(\theta(i)) \end{Bmatrix}$$

### Charges horizontales (poussées des terres):

Partant de l'hypothèse d'un remplissage de même nature sur toute sa hauteur avec une cohésion (c) et un angle de frottement ( $\gamma$ ), on définit le coefficient de poussée actif :

$$K_a = \frac{1 - \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$$

On obtient :  $P_a(i) = K_a \cdot P_{vr} \cdot b(i) \cdot h(i)$

Où :

$P_a(i)$  : Valeur de la poussée des terres au nœud (i), [kN/ml].

La figure 84 représente l'ensemble des actions dont nous avons tenu compte dans la suite du calcul des poussées des terres.

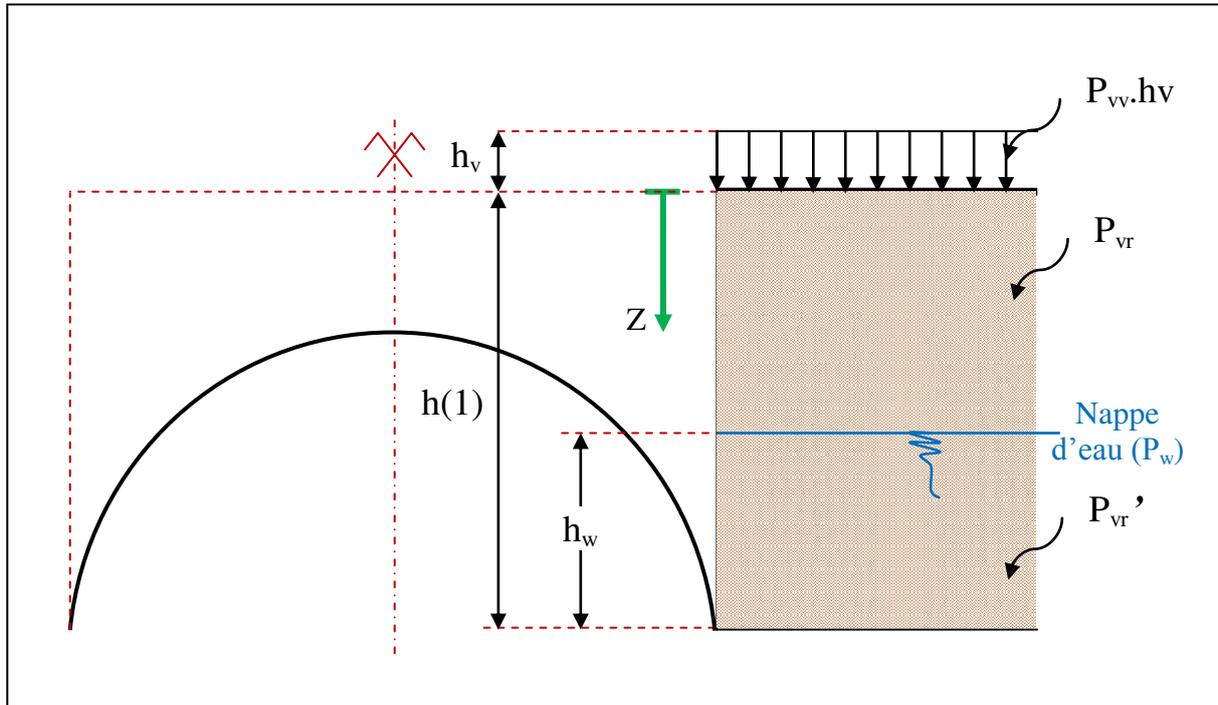


Figure 84 : Calcul des poussées des terres.

**a) Poussée due à la charge uniforme (voie de roulement) :**

La poussée engendrée par une charge uniformément répartie est constante sur toute la hauteur  $h(1)$  et qui vaut :

$$\sigma_{Cu} = P_{vv} \cdot h_v \cdot K_a$$

**b) Poussée due au poids des terres (remplissage) :**

La poussée procrée par le poids du remplissage varie linéairement en fonction de la profondeur  $Z$ . En tenant compte de la présence d'une nappe d'eau, la poussée est évaluée de la manière suivante :

**a)  $0 \leq Z \leq h(1) - h_w$**

$$\sigma_{Pr} = K_a (P_{vr} \cdot Z) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a}$$

$$\Rightarrow \sigma_{Pr} = \begin{cases} -2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} & , \quad Z = 0 \\ K_a (P_{vr} \cdot (h(1) - h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} & , \quad Z = h(1) - h_w \end{cases}$$

**b)  $h(1) - h_w \leq Z \leq h(1)$**

$$\sigma_{Pr} = K_a (P_{vr} \cdot (h(1) - h_w) + P'_{vr} \cdot (Z - (h(1) - h_w))) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a}$$

$$\Rightarrow \sigma_{Pr} = \begin{cases} K_a (P_{vr} \cdot (h(1) - h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} & , \quad Z = h(1) - h_w \\ K_a (P_{vr} \cdot (h(1) - h_w) + P'_{vr} \cdot (h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} & , \quad Z = h(1) \end{cases}$$

**c) Poussée due à la pression hydrostatatique (nappe d'eau) :**

La présence d'une nappe d'eau procrée une poussée hydrostatatique proportionnelle à sa profondeur. On a donc pour :

**c)  $0 \leq Z \leq h(1) - h_w$**

Absence de l'eau :  $\Rightarrow \sigma_{hy} = 0$

**d)  $h(1) - h_w \leq Z \leq h(1)$**

Présence de l'eau :  $\Rightarrow \sigma_{hy} = P_w \cdot (Z - (h(1) - h_w))$

$$\Rightarrow \sigma_{hy} = \begin{cases} 0 & , \quad Z = h(1) - h_w \\ P_w \cdot h_w & , \quad Z = h(1) \end{cases}$$

En cumulant les résultats précédents dans le même diagramme, on obtient :

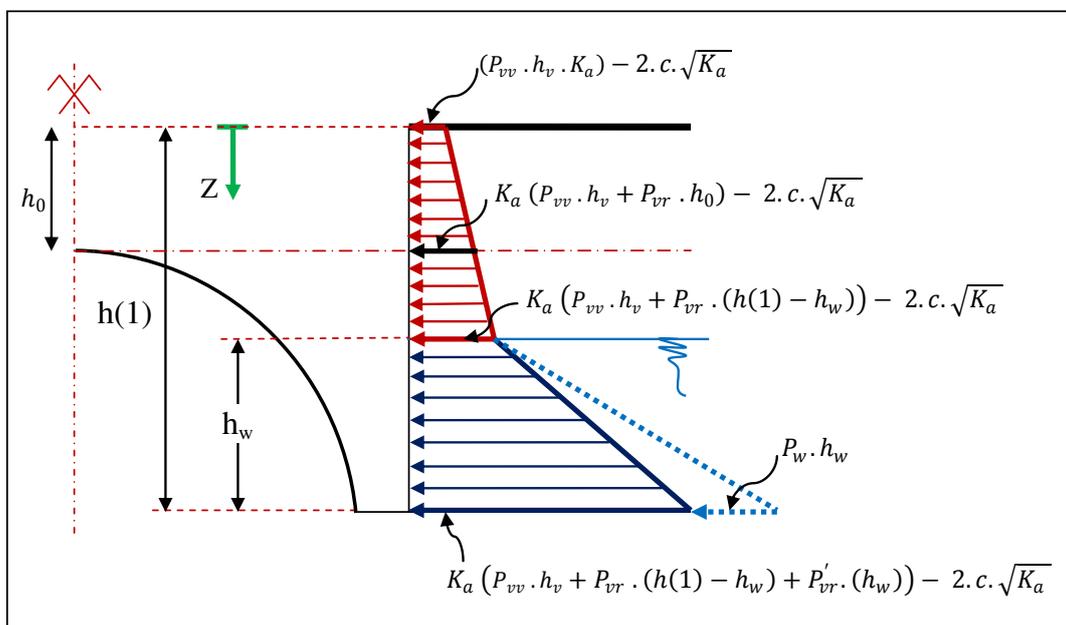


Figure 85 : Diagramme des poussées des terres.

Pour un voussoir donné, trois cas de charges possibles en découlent de ce diagramme. Le premier (Figure 86 (a)) est le cas où l'élément considéré se verrait au-dessus de la nappe d'eau. Le second (Figure 86 (b)) correspond au cas contraire, c'est-à-dire le voussoir en question serait complètement en dessous du niveau de la nappe. Le dernier (Figure 86 (c)) serait le cas intermédiaire c'est-à-dire l'élément considéré n'aurait que partiellement immergé dans l'eau.

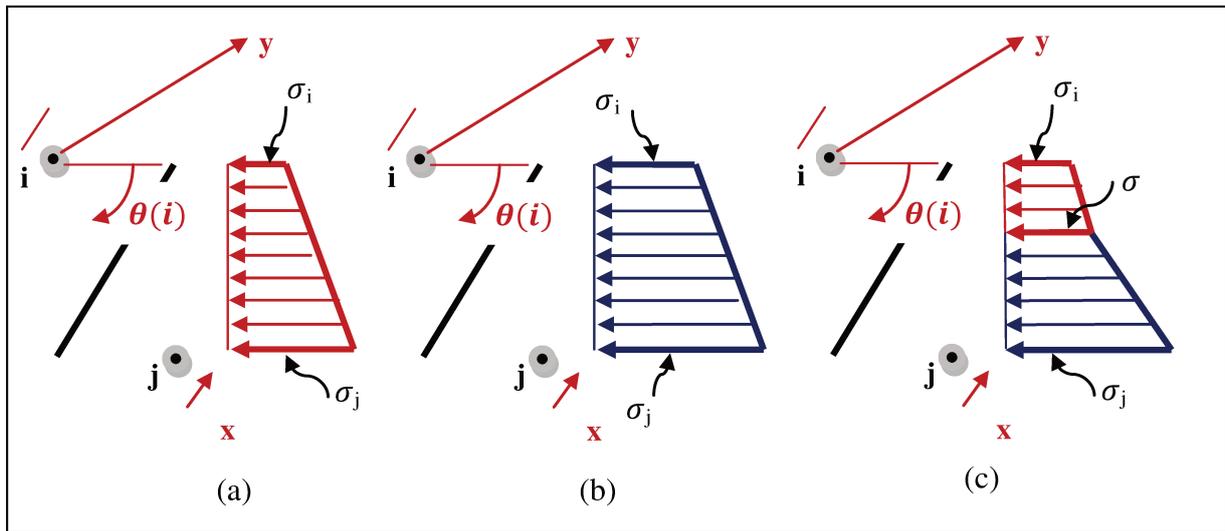


Figure 86 : Cas de charges (horizontales) possibles.

Pour un segment (i), nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_i = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot h(i)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \\ \sigma_j = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot h(j)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \end{cases} \quad , \text{cas de figure (a)}$$

$$\begin{cases} \sigma_i = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot (h(1) - h_w) + P'_{vr} \cdot (h(i) - h(1) + h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \\ \sigma_j = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot (h(1) - h_w) + P'_{vr} \cdot (h(j) - h(1) + h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \\ \sigma_{hyi} = P_w \cdot (h(i) - h(1) + h_w) \\ \sigma_{hyj} = P_w \cdot (h(j) - h(1) + h_w) \end{cases} \quad , \text{figure (b)}$$

$$\begin{cases} \sigma_i = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot h(i)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \\ \sigma = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot (h(1) - h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \\ \sigma_j = K_a (P_{vv} \cdot h_v + P_{vr} \cdot (h(1) - h_w) + P'_{vr} \cdot (h(j) - h(1) + h_w)) - 2 \cdot c \cdot \sqrt{K_a} \\ \sigma_{hyj} = P_w \cdot (h(j) - h(1) + h_w) \end{cases} \quad , \text{figure (c)}$$

$$1. \text{ Cas de figure (a) : Nous avons : } \begin{cases} h_i < h(1) - h_w & , \theta(i) \geq 0 \\ \text{et} \\ h_j < h(1) - h_w & , \theta(i) < 0 \end{cases}$$

Le vecteur charges nodales équivalentes est obtenu de la même manière que celui des charges verticales en divisant la charge répartie en partie uniforme et partie triangulaire. Il en résulte :

$$\{f_{he}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{\sigma_t(i)}{3}\right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{7\sigma_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{\sigma_u(i)}{12} + \frac{\sigma_t(i)}{20}\right) \cdot L(i)^2 \cdot \sin(\theta(i)) \\ \left(\frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{\sigma_t(i)}{6}\right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{3\sigma_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ +\left(\frac{\sigma_u(i)}{12} + \frac{\sigma_t(i)}{30}\right) \cdot L(i)^2 \cdot \sin(\theta(i)) \end{Bmatrix} \quad , \text{ par rapport au repère local}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \sigma_u(i) = \sigma_j \\ \sigma_t(i) = \sigma_i - \sigma_j \end{cases}$$

Par rapport au repère global (Figure 87)  
Nous avons pour  $\theta(i) \geq 0$ :

$$\begin{cases} F_{iX} = F_{ixx} - F_{iyx} \\ F_{iY} = F_{ixy} + F_{iyy} \\ M_{iz} = M_{iz} \\ \text{et} \\ F_{jX} = F_{jyx} - F_{jxx} \\ F_{jY} = F_{jxy} + F_{jyy} \\ M_{jz} = M_{jz} \end{cases}$$

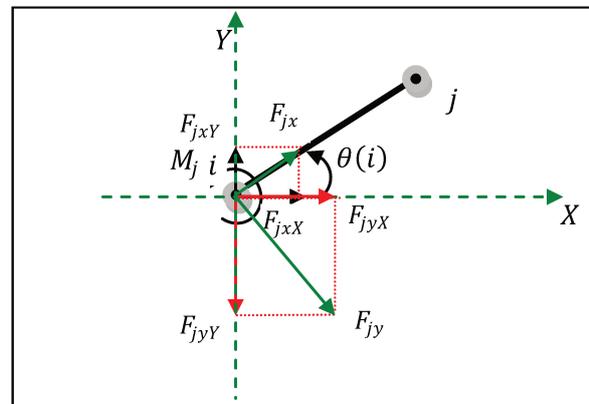


Figure 87 : Passage au repère global ( $\theta(i) \geq 0$ ).

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{iX} = F_{ix} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{iy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{iY} = F_{ix} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{iy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{iz} = M_{iz} \\ F_{jX} = F_{jx} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{jy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{jY} = F_{jx} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{jy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{jz} = M_{jz} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{F_{he}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} + \frac{\sigma_u(i)}{2} \cdot L(i) + \frac{\sigma_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot (\sin^2(\theta(i)) + 20) \\ - \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \cos(\theta(i)) \\ - \left( \frac{\sigma_u(i)}{12} + \frac{\sigma_t(i)}{20} \right) \cdot L(i)^2 \cdot \sin(\theta(i)) \\ + \frac{\sigma_u(i)}{2} \cdot L(i) - \frac{\sigma_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot (\sin^2(\theta(i)) - 10) \\ + \frac{q_t(i)}{60} \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \cos(\theta(i)) \\ + \left( \frac{\sigma_u(i)}{12} + \frac{\sigma_t(i)}{30} \right) \cdot L(i)^2 \cdot \sin(\theta(i)) \end{Bmatrix}$$

Pour  $\theta(i) < 0$ , (Figure 88) :

$$\{f_{he}\}_{\theta(i) < 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \left( \frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{\sigma_t(i)}{6} \right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ + \left( \frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{3\sigma_t(i)}{20} \right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ + \left( \frac{\sigma_u(i)}{12} + \frac{\sigma_t(i)}{30} \right) \cdot L(i)^2 \cdot \sin(\theta(i)) \\ - \left( \frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{\sigma_t(i)}{3} \right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ + \left( \frac{\sigma_u(i)}{2} + \frac{7\sigma_t(i)}{20} \right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ - \left( \frac{\sigma_u(i)}{12} + \frac{\sigma_t(i)}{20} \right) \cdot L(i)^2 \cdot \sin(\theta(i)) \end{Bmatrix} \quad , \text{ par rapport au repère local}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \sigma_u(i) = \sigma_i \\ \sigma_t(i) = \sigma_j - \sigma_i \end{cases}$$

La projection sur le repère global nous donne :

$$\begin{cases} F_{iX} = F_{ixX} + F_{iyX} \\ F_{iY} = -F_{ixY} + F_{iyY} \\ M_{iZ} = M_{iz} \\ \text{et} \\ F_{jX} = F_{jxX} + F_{jyX} \\ F_{jY} = -F_{jxY} + F_{jyY} \\ M_{jZ} = M_{jz} \end{cases}$$

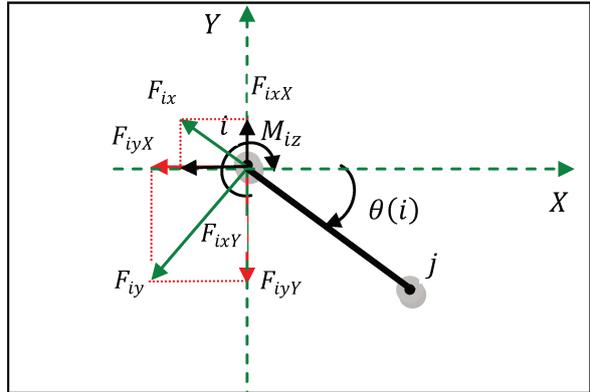


Figure 88 : Passage au repère global ( $\theta(i) < 0$ ).

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{iX} = F_{ix} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{iy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{iY} = F_{ix} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{iy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{iZ} = M_{iz} \\ F_{jX} = F_{jx} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{jy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{jY} = F_{jx} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{jy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{jZ} = M_{jz} \end{cases}$$



$$\begin{cases} h_i < h(1) - h_w \\ \text{et} \\ h_j > h(1) - h_w \end{cases}, \text{ pour } \theta(i) < 0$$

En appliquant le théorème de superposition des charges, on calcule le vecteur charges nodales équivalentes pour chaque partie (sèche et saturée). Le vecteur charges nodales équivalentes au cas de charge (c) serait la somme de ces deux vecteurs.

### 3-1. Partie saturée :

On pose  $L_w(i)$  la longueur de la partie du segment immergée dans l'eau. On obtient alors :

$$L_w(i) = \frac{h(i) - h(1) + h_w}{\sin(\theta(i))}$$

Et :

$$\begin{cases} \sigma_u(i) = \sigma_w \\ \sigma_t(i) = \sigma_i - \sigma_w \end{cases}$$

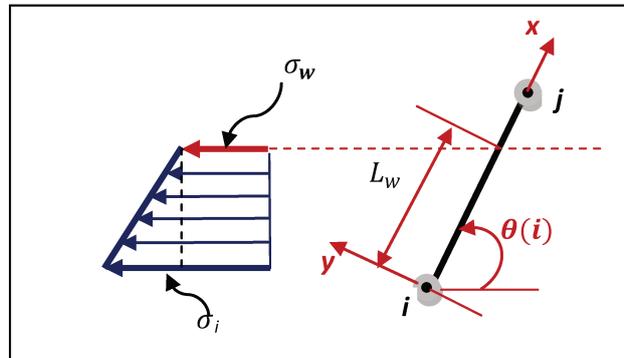


Figure 89 : Cas de charge (c-1) ( $\theta(i) < 0$ ).

La projection des charges sur le repère local nous donne :

$$\sigma_u(x) = \begin{cases} \sigma_{ux}(i) = \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ \sigma_{uy}(i) = -\sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \end{cases}, \text{ partie uniforme du chargement ;}$$

Et

$$\sigma_t(x) = \begin{cases} \sigma_{tx}(i) = \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left(1 - \frac{x}{L_w}\right) \\ \sigma_{ty}(i) = \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{x}{L_w} - 1\right) \end{cases}, \text{ partie triangulaire du chargement ;}$$

#### a) Partie uniforme :

$$(1.6.16) \Rightarrow \{f_{hu_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_0^{L_w} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \end{Bmatrix} dx$$

On obtient :

$$\Rightarrow \{f_{hu_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)\right) \\ - \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(1 - \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^3\right) \\ - \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2\right) \\ \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)\right) \\ - \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(\left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^3\right) \\ + \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2\right) \end{Bmatrix}$$

### b) Partie triangulaire :

De la même manière, le vecteur charges nodales équivalentes s'écrit :

$$\{f_{ht_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_0^{L_w} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left(1 - \frac{x}{L_w}\right) \\ \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{x}{L_w} - 1\right) \end{Bmatrix} dx$$

On obtient :

$$\{f_{ht_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)\right) \\ - \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^3\right) \\ - \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right) + \frac{1}{20} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2\right) \\ \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(\frac{1}{6} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)\right) \\ - \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left(\frac{1}{4} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2 - \frac{1}{10} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^3\right) \\ + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left(\frac{1}{12} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right) - \frac{1}{20} \left(\frac{L_w}{L(i)}\right)^2\right) \end{Bmatrix}$$

En cumulant les résultats (1.6.41) et (1.6.42), le vecteur charges nodales équivalentes à la poussée de la partie saturée par rapport au repère local s'écrit :

$$\{f_{h_e}\}_{\theta(i) \geq 0} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ - \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( 1 - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ - \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \\ \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ - \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ + \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \end{array} \right\}$$

D'où :

$$\{f_{h_e}\}_{\theta(i) < 0} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ + \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ + \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \\ - \cos(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ + \sin(\theta(i)) \cdot L_w \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( 1 - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ - \sin(\theta(i)) \cdot L_w^2 \cdot \left( \sigma_u(i) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \end{array} \right\}$$

D'après (1.6.34), La projection sur le repère global nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{iX} = F_{ixx} - F_{iyx} \\ F_{iY} = F_{ixy} + F_{iyy} \\ M_{iz} = M_{iz} \\ \text{et} \\ F_{jX} = F_{jyx} - F_{jxx} \\ F_{jY} = F_{jxy} + F_{jyy} \\ M_{jz} = M_{jz} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{iX} = F_{ix} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{iy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{iY} = F_{ix} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{iy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{iz} = M_{iz} \\ F_{jX} = F_{jx} \cdot \cos(\theta(i)) - F_{jy} \cdot \sin(\theta(i)) \\ F_{jY} = F_{jx} \cdot \sin(\theta(i)) + F_{jy} \cdot \cos(\theta(i)) \\ M_{jz} = M_{jz} \end{array} \right.$$

Le vecteur charges nodales équivalentes à la poussée de la partie saturée par rapport au repère global s'écrit :

$$\{\mathbf{F}h_e\}_{\theta(i) \geq 0} = \left( \begin{array}{l} \sigma_u(i).L_w. \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) - \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) + \sigma_t(i).L_w. \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) - \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) \\ \cos(\theta(i)).\sin(\theta(i)).L_w. \left( \sigma_u(i). \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i). \left( -\frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ - \sin(\theta(i)).L_w^2. \left( \sigma_u(i). \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i). \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \\ \sigma_u(i).L_w. \left( \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) + \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) + \sigma_t(i).L_w. \left( \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) + \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) \\ \cos(\theta(i)).\sin(\theta(i)).L_w. \left( \sigma_u(i). \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i). \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ + \sin(\theta(i)).L_w^2. \left( \sigma_u(i). \left( \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i). \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \end{array} \right)$$

D'où :

$$\{\mathbf{F}h_e\}_{\theta(i) < 0} = \left( \begin{array}{l} -\sigma_u(i).L_w. \left( \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) + \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) - \sigma_t(i).L_w. \left( \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) + \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) \\ - \cos(\theta(i)).\sin(\theta(i)).L_w. \left( \sigma_u(i). \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i). \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ \sin(\theta(i)).L_w^2. \left( \sigma_u(i). \left( \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i). \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \\ -\sigma_u(i).L_w. \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) - \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) - \sigma_t(i).L_w. \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \cos^2(\theta(i)) - \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \sin^2(\theta(i)) \right) \\ - \cos(\theta(i)).\sin(\theta(i)).L_w. \left( \sigma_u(i). \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) + \sigma_t(i). \left( -\frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ - \sin(\theta(i)).L_w^2. \left( \sigma_u(i). \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) + \sigma_t(i). \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \end{array} \right)$$

### 3-2. Partie sèche :

Nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_u(i) = \sigma_j \\ \sigma_t(i) = \sigma_w - \sigma_j \end{cases}$$

On pose :  $\ell_w = L(i) - L_w$

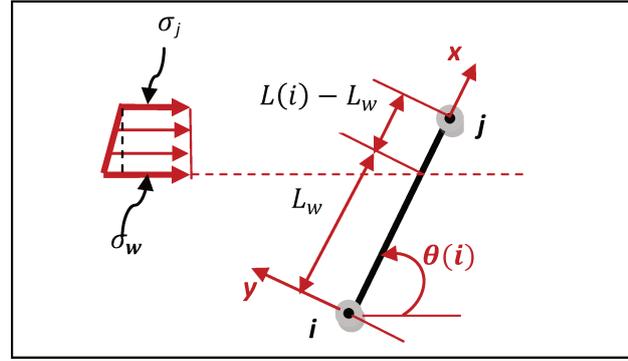


Figure 90 : Cas de charge (c-2) ( $\theta(i) > 0$ ).

La projection des charges sur le repère local nous donne :

$$\sigma_u(x) = \begin{cases} \sigma_{ux}(i) = \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ \sigma_{uy}(i) = -\sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \end{cases}, \text{ partie uniforme du chargement ;}$$

Et

$$\sigma_t(x) = \begin{cases} \sigma_{tx}(i) = \frac{1}{L_w - L(i)} \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot (x - L(i)) \\ \sigma_{ty}(i) = \frac{1}{L_w - L(i)} \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot (L(i) - x) \end{cases}, \text{ partie triangulaire du chargement ;}$$

#### a) Partie uniforme :

$$(1.6.16) \Rightarrow \{f_{hu_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_{L_w}^{L(i)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \end{Bmatrix} dx$$

On obtient :

$$\{f_{hu_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2} L(i) - L_w \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ - \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2} L(i) - L_w \left( 1 - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ - \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{12} L(i)^2 - L_w^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \\ \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2} L(i) - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) \right) \\ - \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2} L(i) - L_w \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) \\ + \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{12} L(i)^2 + L_w^2 \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \end{Bmatrix}$$

**c) Partie triangulaire :**

De la même manière, le vecteur charges nodales équivalentes s'écrit :

$$\{f_{ht_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \int_{L_w}^{L(i)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot (L(i) - x) \\ \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot (x - L(i)) \end{pmatrix} \right\} dx$$

On obtient :

$$\{f_{ht_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left(\frac{1}{3}L(i)^2 + L_w \cdot \left(L_w - L(i) - \frac{1}{3}\left(\frac{L_w}{L(i)}\right)\right)\right) \\ - \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{7}{20}L(i)^2 - L_w \cdot \left(L(i) - \frac{1}{2}L_w - \left(\frac{L_w^2}{L(i)}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{L_w^3}{L(i)^2}\right) - \frac{2}{5}\left(\frac{L_w^4}{L(i)^3}\right)\right)\right) \\ - \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{1}{20}L(i)^3 - L_w^2 \cdot \left(\frac{1}{2}L(i) - L_w + \frac{3}{4}\left(\frac{L_w^2}{L(i)}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{L_w^3}{L(i)^2}\right)\right)\right) \\ \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left(\frac{1}{6}L(i)^2 + L_w^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L_w}{L(i)}\right) - \frac{1}{2}\right)\right) \\ - \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{3}{20}L(i)^2 - L_w^2 \cdot \left(\left(\frac{L_w}{L(i)}\right) - \frac{5}{4}\left(\frac{L_w^2}{L(i)}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{L_w^3}{L(i)^2}\right)\right)\right) \\ \left(\frac{1}{\ell_w}\right) \cdot \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left(\frac{1}{30}L(i)^3 + L_w^3 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{L_w}{L(i)}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{L_w^2}{L(i)^2}\right)\right)\right) \end{array} \right\}$$

Les charges nodales équivalentes à la poussée engendrée par la partie sèche par rapport au repère local sont obtenues en cumulant les résultats (1.6.47) et (1.6.48). Après projection sur le repère globale pour  $(\theta(i) \geq 0)$  et par symétrie pour  $(\theta(i) < 0)$ , la somme du résultat obtenu avec (1.6.45) et (1.6.45) respectivement nous donne le vecteur charges nodales équivalentes au cas de charge (c).

Le vecteur charges nodales équivalentes par rapport au repère local s'écrit :

$$\{f_{h_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} + \frac{L_w}{\ell_w} \cdot \left( L_w - L(i) - \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ - \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w \left( 1 - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{7}{20} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} - \frac{L_w}{\ell_w} \cdot \left( L(i) - \frac{1}{2}L_w - \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{L_w^3}{L(i)^2} \right) - \frac{2}{5} \left( \frac{L_w^4}{L(i)^3} \right) \right) \right] \\ - \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{12}L(i)^2 - L_w^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{20} \cdot \frac{L(i)^3}{\ell_w} - \frac{L_w^2}{\ell_w} \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w + \frac{3}{4} \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) - \frac{1}{5} \left( \frac{L_w^3}{L(i)^2} \right) \right) \right] \\ \sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} + \frac{L_w^2}{\ell_w} \cdot \left( \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{2} \right) \right) \\ - \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{3}{20} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} - \frac{L_w^2}{\ell_w} \cdot \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{5}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{2}{5} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right] \\ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{12}L(i)^2 + L_w^2 \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{30} \cdot \frac{L(i)^3}{\ell_w} + \frac{L_w^3}{\ell_w} \cdot \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{5} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) \end{array} \right\}$$

D'où :

$$\{f_{h_e}\}_{\theta(i) < 0} = \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) - \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} + \frac{L_w}{\ell_w} \cdot \left( L_w - L(i) - \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) \right) \right) \\ + \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w \left( 1 - \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{7}{20} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} - \frac{L_w}{\ell_w} \cdot \left( L(i) - \frac{1}{2}L_w - \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) + \frac{5}{4} \left( \frac{L_w^3}{L(i)^2} \right) - \frac{2}{5} \left( \frac{L_w^4}{L(i)^3} \right) \right) \right] \\ + \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{12}L(i)^2 - L_w^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{20} \cdot \frac{L(i)^3}{\ell_w} - \frac{L_w^2}{\ell_w} \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w + \frac{3}{4} \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) - \frac{1}{5} \left( \frac{L_w^3}{L(i)^2} \right) \right) \right] \\ -\sigma_u(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w^2}{L(i)} \right) \right) - \sigma_t(i) \cdot \cos(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} + \frac{L_w^2}{\ell_w} \cdot \left( \frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{2} \right) \right) \\ + \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{2}L(i) - L_w \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{3}{20} \cdot \frac{L(i)^2}{\ell_w} - \frac{L_w^2}{\ell_w} \cdot \left( \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{5}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{2}{5} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \right] \\ - \left[ \sigma_u(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{12}L(i)^2 + L_w^2 \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right) + \sigma_t(i) \cdot \sin(\theta(i)) \cdot \left( \frac{1}{30} \cdot \frac{L(i)^3}{\ell_w} + \frac{L_w^3}{\ell_w} \cdot \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{5} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \right] \end{array} \right\}$$

#### 4. Pression hydrostatique :

La pression hydrostatique exerce une poussée continuellement perpendiculaire à l'élément considéré. Deux cas de charges sont possibles, le cas d'un élément complètement en-dessous du niveau de la nappe d'eau (Figure 91 (a)), ou partiellement immergé dans l'eau (Figure 91 (b)).

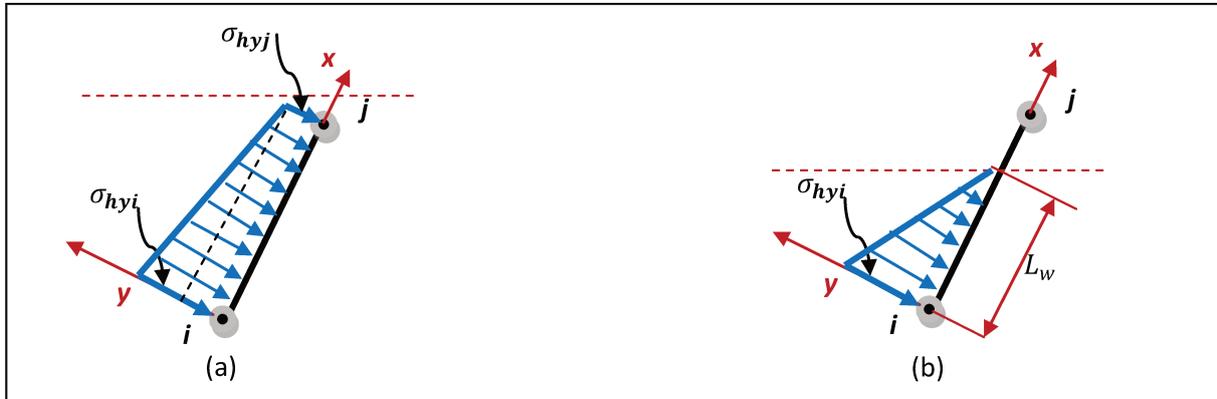


Figure 91 : Pression hydrostatique ( $\theta(i) > 0$ ).

4.1. Cas de figure (a) : Nous avons : 
$$\begin{cases} h_j > h(1) - h_w & , \theta(i) \geq 0 \\ \text{et} \\ h_i > h(1) - h_w & , \theta(i) < 0 \end{cases}$$

Nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_u(i) = \sigma_{hyj} \\ \sigma_t(i) = \sigma_{hyi} - \sigma_{hyj} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_u(x) &= \sigma_{uy}(i) = \sigma_u(i) \quad , \text{partie uniforme du chargement ;} \\ \sigma_t(x) &= \sigma_{ty}(i) = \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{x}{L(i)} - 1 \right) \quad , \text{partie triangulaire du chargement ;} \end{aligned}$$

a) Partie uniforme :

$$(1.6.16) \Rightarrow \left\{ f_{hyu_c} \right\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_0^{L(i)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \sigma_u(i) \end{matrix} \right\} dx$$

Il en résulte :

$$\{f_{hyu_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \sigma_u(i) \cdot L(i) \\ -\frac{1}{12} \cdot \sigma_u(i) \cdot L(i)^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \sigma_u(i) \cdot L(i) \\ \frac{1}{12} \cdot \sigma_u(i) \cdot L(i)^2 \end{Bmatrix}$$

**d) Partie triangulaire :**

De la même manière, le vecteur charges nodales équivalentes s'écrit :

$$\{f_{hyt_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \int_0^{L(i)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{x}{L(i)} - 1 \right) \right\} dx$$

On obtient :

$$\{f_{hyt_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{20} \cdot \sigma_t(i) \cdot L(i) \\ -\frac{1}{20} \cdot \sigma_t(i) \cdot L(i)^2 \\ 0 \\ -\frac{3}{20} \cdot \sigma_t(i) \cdot L(i) \\ \frac{1}{30} \cdot \sigma_t(i) \cdot L(i)^2 \end{Bmatrix}$$

En cumulant les résultats (1.6.51) et (1.6.52), le vecteur charges nodales équivalentes au cas de charge (a) par rapport au repère local de l'élément considéré s'écrit :

$$\{f_{hy_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\left( \frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20} \right) \cdot L(i) \\ -\left( \frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20} \right) \cdot L(i)^2 \\ 0 \\ -\left( \frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20} \right) \cdot L(i) \\ +\left( \frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30} \right) \cdot L(i)^2 \end{Bmatrix}$$

La projection sur le repère global nous donne :

$$\{F_{hy_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i)^2 \\ \left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ +\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30}\right) \cdot L(i)^2 \end{Bmatrix}$$

Par symétrie :

$$\{F_{hy_e}\}_{\theta(i) < 0} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{3q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{30}\right) \cdot L(i)^2 \\ \left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\left(\frac{q_u(i)}{2} + \frac{7q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i) \cdot \cos(\theta(i)) \\ +\left(\frac{q_u(i)}{12} + \frac{q_t(i)}{20}\right) \cdot L(i)^2 \end{Bmatrix}$$

**Cas de figure (b) :**

$$\begin{cases} h_i > h(1) - h_w \\ \text{et} \\ h_j < h(1) - h_w \end{cases}, \text{ pour } \theta(i) > 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_i < h(1) - h_w \\ \text{et} \\ h_j > h(1) - h_w \end{cases}, \text{ pour } \theta(i) < 0$$

Nous avons un chargement triangulaire:

$$\sigma_t(i) = \sigma_{hy_i}$$

On obtient :

$$\sigma_t(x) = \sigma_{ty}(i) = \sigma_t(i) \cdot \left(\frac{x}{L_w} - 1\right)$$

De la même manière, le vecteur charges nodales équivalentes s'écrit :

$$\{f_{hy_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \int_0^{L_w} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L(i)^2} + \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & x - \frac{2x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \\ \frac{x}{L(i)} & 0 \\ 0 & \frac{3x^2}{L(i)^2} - \frac{2x^3}{L(i)^3} \\ 0 & -\frac{x^2}{L(i)} + \frac{x^3}{L(i)^2} \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \sigma_t(i) \cdot \left( \frac{x}{L_w} - 1 \right) \right\} dx$$

On obtient :

$$\{f_{hy_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \\ -\sigma_t(i) \cdot L_w^2 \cdot \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \\ 0 \\ -\sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \\ +\sigma_t(i) \cdot L_w^2 \cdot \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \end{Bmatrix}$$

Le vecteur charges nodales équivalentes au cas de charge (b) par rapport au repère global s'écrit :

$$\{F_{hy_e}\}_{\theta(i) \geq 0} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \cos(\theta(i)) \\ -\sigma_t(i) \cdot L_w^2 \cdot \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \\ \sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \sin(\theta(i)) \\ -\sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \cos(\theta(i)) \\ +\sigma_t(i) \cdot L_w^2 \cdot \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\{F_{hy_e}\}_{\theta(i)<0} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ M_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ M_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \sin(\theta(i)) \\ - \sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 - \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \cos(\theta(i)) \\ - \sigma_t(i) \cdot L_w^2 \cdot \left( \frac{1}{12} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) - \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \\ \sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \sin(\theta(i)) \\ - \sigma_t(i) \cdot L_w \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^3 \right) \cdot \cos(\theta(i)) \\ + \sigma_t(i) \cdot L_w^2 \cdot \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{L_w}{L(i)} \right)^2 \right) \end{Bmatrix}$$

# Table des matières

Introduction .....	9
I. Etude bibliographique .....	14
1- Matériaux utilisés en maçonnerie .....	14
1-1. Matériaux solides.....	14
1-1.1. Variabilité des pierres naturelles.....	14
1-1.1.1. A l'échelle de la classe géologique de la roche.....	15
1-1.1.2. A l'échelle du type de roche.....	17
1-1.1.3. A l'échelle du site (carrière) d'extraction.....	19
1-1.2. Briques en terre cuite .....	21
1-2. Mortiers .....	23
2- Comportement de la maçonnerie .....	29
3- Principales altérations de la pierre .....	31
3-1. Désordres structuraux .....	32
3-1.1. Fissures et déformations .....	32
3-1.2. Détachement.....	33
3-2. Désordres des matériaux.....	33
3-2.1. Figures induites par une perte de matière .....	33
3-2.2. Processus chimique de dissolution de la calcite en présence de l'eau .....	34
3-2.3. Processus d'altération des roches magmatiques .....	35
3-2.4. Altération chromatique et dépôt.....	36
3-2.5. Colonisation biologique .....	36
4- Méthodes d'auscultations des ouvrages.....	37
4-1. Méthodes destructives (CD) .....	37
4-2. Méthodes de contrôle non destructif (CND) .....	38
4-3. Instrumentation de l'ouvrage.....	38
4-4. Quelle technique adopter pour quel défaut ? .....	39
5- Etat de l'art des méthodes de calcul des voûtes maçonnées.....	40
5-1. Méthodes dites empiriques .....	41
5-2. Méthode MEXE (Military Engineering eXperimental Establishment).....	42
5-3. Méthode REAM (Railway Empirical Assessment Method) .....	42
5-4. Méthode d'analyse limite .....	44
5-5. Méthode de calcul à la rupture.....	46
5-6. Méthode des éléments finis (MEF) .....	47
5-6.1. Micro-modélisation-détaillée .....	49
5-6.2. Micro-modélisation-simplifiée.....	49
5-7. Méthode des éléments distincts (MED).....	53
5-8. Couplage mécano-fiabiliste .....	55
5-8.1. Méthodes FORM/SORM .....	57
5-8.2. Simulations de Monte Carlo .....	60
6- Conclusion .....	61
II. Problème d'inspection et étude du cas.....	65
1- Introduction .....	65
2- Modèle de calcul.....	67
2-1. Application du modèle et validation.....	70
3- Perte d'épaisseur causée par des infiltrations d'eau .....	72
3-1. Modélisation du défaut .....	73

3-2.	Analyse de la voûte.....	76
3-2.1.	Influence de la profondeur du défaut .....	77
3-2.2.	Influence de la position du défaut .....	79
4-	Conclusion .....	86
III.	Variabilité naturelle du module d'Young.....	89
1-	Principe de l'analyse.....	90
2-	Influence de la variabilité du module d'Young sur la capacité portante .....	92
2-1.	Modélisation de la variabilité de la charge critique.....	97
2-2.	Analyse des résultats .....	99
3-	Influence de la variabilité du module d'Young sur le mécanisme de ruine .....	100
3-1.	Mécanisme de ruine avec CV = 5% .....	100
3-2.	Mécanisme de ruine avec CV = 10% .....	102
3-3.	Mécanisme de ruine avec CV = 20% .....	103
4-	Synthèse des résultats .....	105
5-	Conclusion .....	106
IV.	Fiabilité d'une voûte.....	109
1	Introduction .....	109
2	Principe de l'analyse fiabiliste .....	111
3-	Influence de la variabilité du module d'Young sur la fiabilité d'une voûte .....	114
4-	Fiabilité de la voûte dans le temps.....	118
4-1.	Loi de vieillissement.....	119
4-2.	Simulation de l'inspection .....	120
4-2.1.	Prise en compte de l'historique du trafic .....	128
4-2.2.	Actualisation de la probabilité de défaillance .....	132
4-2.3.	Introduction d'une augmentation du trafic.....	136
5-	Conclusion .....	138
	Conclusion générale et perspectives.....	140
	Bibliographie .....	143
	Annexes .....	149
I-	Annexe A– ArcProg_Z software .....	149
II-	Annexe B– Classification des pierres de construction et terminologie .....	156
III-	Annexe C– Notion d'indice de fiabilité (Lemaire 2014) .....	167
IV-	Annexe D– Caractéristiques des ouvrages ayant servi de comparaison .....	173
V-	Annexe E– Etapes de calcul.....	176

## Table des illustrations

Figure 1 : Abaque de la méthode REAM. ....	43
Figure 2 : Centres et Ligne de pression. ....	44
Figure 3 : Mécanismes de ruine. ....	45
Figure 4 : Domaine de stabilité potentielle pour une section dans le plan (N, M). ....	47
Figure 5 : Echelles de modélisation de la maçonnerie. ....	48
Figure 6 : Micro-modélisation-simplifiée de la maçonnerie. ....	50
Figure 7 : Quelques cellules de base proposées. ....	51
Figure 8 : Tailles et positions des test-windows sur le mur en maçonnerie. ....	53
Figure 9 : Disciplines en collaboration dans l'élaboration d'une étude fiabiliste. ....	55
Figure 10 : Domaine de défaillance, état limite et domaine de sûreté. ....	56
Figure 11 : Illustration de l'approximation FORM dans l'espace standard. ....	58
Figure 12 : Illustration de l'approximation SORM dans l'espace standard. ....	59
Figure 13 : Simulation de Monte Carlo standard (a.) et tirage d'importance (b.). ....	60
Figure 14 : (a) : Ligne de pression ; (b) : Mécanisme de ruine (ArcProg_Z). ....	67
Figure 15 : Modélisation de la réaction du terrain du remplissage. ....	68
Figure 16 : Algorithme de la procédure de calcul (ArcProg_Z). ....	69
Figure 17 : Comparaison des positions des rotules données par : (a) ArcProg_Z ; (b) Ring 2.0 (Le Schwarzwasserbrücke). ....	70
Figure 18 : Comparaison des positions des rotules données par : (a) ArcProg_Z ; (b) cas réel (Le Shinafoot Bridge). ....	71
Figure 19 : Configuration de la voûte considérée. ....	72
Figure 20 : Modélisation d'un défaut causé par des infiltrations des eaux (étape 1). ....	74
Figure 21 : Nombre de segments affectés par le défaut en fonction de la position du défaut. ....	74
Figure 22 : Modélisation du défaut (étape 2). ....	75
Figure 23 : Discrétisation du modèle du défaut (étape 3). ....	76
Figure 24 : Charge critique en fonction de la profondeur du défaut. ....	78
Figure 25 : Arbre de l'inspection. ....	79
Figure 26 : Position relative du défaut et du point de mesure. ....	80
Figure 27 : Positions possibles du défaut $X_d$ correspondant au même point de mesure $X_m$ . ....	81
Figure 28 : Charge critique en fonction de la position du défaut pour les segments testés. ....	82
Figure 29 : Valeurs extrêmes des fonctions de répartition obtenues ( $h_m = 0,02$ m). ....	84
Figure 30 : Variabilité naturelle du module d'Young. ....	91
Figure 31 : Densité de probabilité et fonction de répartition de la charge critique (CV =0,1). ....	92
Figure 32 : Test de normalité de la distribution de la charge critique (droite d'Henry). ....	95
Figure 33 : Ajustement de la distribution de la charge critique (distribution normale). ....	95
Figure 34 : Densité de probabilité et fonction de répartition de $P_{cr}$ (CV =5%, 10% et 20%). ....	96
Figure 35 : Probabilités d'apparition des rotules (CV =5%). ....	102
Figure 36 : Probabilité des positions d'apparition des rotules (CV=10%). ....	103
Figure 37 : Probabilités d'apparition des rotules (CV =5%). ....	104
Figure 38 : Probabilité d'occurrence des mécanismes en fonction du CV. ....	105
Figure 39 : Arbre de décision des inspections. ....	109
Figure 40 : Etape détaillée dans le cas d'ouvrages maçonnés. ....	110
Figure 41 : Indice de fiabilité et probabilité de défaillance. ....	113
Figure 42 : Densités de probabilité de la résistance (R) et du chargement (S). ....	115
Figure 43 : Point de calcul et zone de défaillance. ....	117
Figure 44 : Effet de la variabilité du module d'Young sur l'indice de fiabilité. ....	118

Figure 45 : Positionnement des modules des segments sur la courbe de base.....	120
Figure 46 : Positionnement des modules des segments sur la courbe de base adoptée. ....	122
Figure 47 : Indice de fiabilité et probabilité de défaillance (CV=5%). ....	125
Figure 48 : Indice de fiabilité et probabilité de défaillance (CV=5%, 10% et 20%). ....	126
Figure 49 : Probabilité de défaillance (CV= 20%). ....	127
Figure 50 : Prise en compte de l'historique du trafic (ArcProg_Z).....	129
Figure 51 : Résistance et probabilité de défaillance de la voûte dans le temps. ....	130
Figure 52 : Comparaison des deux méthodes de calcul. ....	131
Figure 53 : Coefficient de variation du module d'Young dans le temps. ....	131
Figure 54 : Actualisation bayésienne de la probabilité de défaillance ( $t_1 = 10$ ans, CV=20%). .....	136
Figure 55 : Actualisation de la probabilité de défaillance avec la prise en compte d'une augmentation du trafic (provisoire ou permanente) à partir de ( $t = 20$ ans).....	137
Figure 56 : Fenêtre d'accueil de la plateforme ArcProg_Z.....	149
Figure 57 : Choix du mode de calcul. ....	150
Figure 58 : Vérification de la stabilité (cas de structure potentiellement stable). ....	151
Figure 59 : Vérification de la stabilité (cas de formation de rotules).....	151
Figure 60 : Ligne de pression. ....	152
Figure 61 : Déformée. ....	152
Figure 62 : Options de calcul. ....	153
Figure 63 : Détermination de la capacité portante de la voûte et son mécanisme de ruine. ..	153
Figure 64 : Localisation des rotules formées.....	154
Figure 65 : Tracé de la déformée.....	155
Figure 66 : Cyclicité des processus de formation des roches.....	156
Figure 67 : Roches magmatiques, (a) : plutonique, (b) : volcanique. ....	157
Figure 68 : Processus de formation des roches sédimentaires. ....	158
Figure 69 : Métamorphisme, (a) : roches sédimentaires, (b) : magmatiques. ....	159
Figure 70 : Terminologie employée pour la description des Ponts en maçonnerie. ....	161
Figure 71 : Types de bandeaux.....	163
Figure 72 : Morphologie d'une voûte en maçonnerie. ....	164
Figure 73 : Types d'appareil. ....	166
Figure 74 : Représentation d'une densité gaussienne Z et indice de fiabilité. ....	167
Figure 75 : Illustration de la définition de l'indice d'Hasofer et Lind. ....	169
Figure 76 : Le Shinafoot Bridge avant l'essai.....	174
Figure 77 : Le Shinafoot Bridge juste avant l'effondrement totale.....	174
Figure 78 : Le Schwarzwasserbrücke.....	175
Figure 79 : Détermination de la charge permanente affectée à chaque segment. ....	177
Figure 80 : Superposition des charges permanentes. ....	177
Figure 81 : Approximation nodale. ....	178
Figure 82 : Passage au repère global ( $\theta_i \geq 0$ ). ....	182
Figure 83 : Passage au repère global ( $\theta_i < 0$ ). ....	182
Figure 84 : Calcul des poussées des terres. ....	184
Figure 85 : Diagramme des poussées des terres. ....	185
Figure 86 : Cas de charges (horizontales) possibles.....	186
Figure 87 : Passage au repère global ( $\theta_i \geq 0$ ). ....	187
Figure 88 : Passage au repère global ( $\theta_i < 0$ ). ....	188
Figure 89 : Cas de charge (c-1) ( $\theta_i < 0$ ). ....	190
Figure 90 : Cas de charge (c-2) ( $\theta_i > 0$ ). ....	194
Figure 91 : Pression hydrostatique ( $\theta_i > 0$ ). ....	197

## Table des tableaux

Tableau 1: Caractéristiques mécaniques des roches selon leur classe géologique.....	16
Tableau 2: Caractéristiques mécaniques des roches .....	18
Tableau 3: Caractéristiques mécaniques des roches. ....	19
Tableau 4: Résultats des essais effectués par les auteurs. ....	20
Tableau 5: Classification de la brique en terre cuite. ....	22
Tableau 6: Caractéristiques mécaniques de la brique selon les auteurs. ....	23
Tableau 7: Mortiers utilisés dans la construction des anciens ouvrages en maçonnerie.....	24
Tableau 8: Résistance à la flexion du mortier de chaux selon différents auteurs. ....	27
Tableau 9: Résistance à la compression du mortier de chaux selon différents auteurs.....	28
Tableau 10: Caractéristiques mécaniques du complexe maçonnerie selon les auteurs.....	30
Tableau 11: Vitesse de libération de la silice issue du minéral dans le milieu [Chamley 1987] .....	36
Tableau 12: Evaluation des méthodes de contrôle par rapport à leur applicabilité pour l'évaluation des ponts en voûtes maçonnées (Orbán and Gutermann 2009). ....	40
Tableau 13: Quelques règles empiriques de calcul. ....	41
Tableau 14: Caractéristiques physiques et mécaniques prises en compte (Zanaz et al. 2016)	77
Tableau 15: Paramètres du défaut (Zanaz et al. 2016).....	77
Tableau 16: Quantification de l'erreur sur les valeurs des pentes.....	78
Tableau 17: Valeurs caractéristiques des distributions [Zanaz et al. 2016] .....	85
Tableau 18: Caractéristiques physiques et mécaniques de la voûte étudiée [Zanaz et al. 2015] .....	91
Tableau 19: Valeurs caractéristiques.....	96
Tableau 20: Valeurs des $a_i$ en fonction de la position de la charge ponctuelle P. ....	100
Tableau 21: Valeurs caractéristiques (Cas déterministe, CV = 5%, 10% et 20%).....	105
Tableau 22: Valeurs des indices de fiabilité cibles $\beta_0$ .....	113
Tableau 23: Variables aléatoires et lois de probabilité associées pour le calcul de $\beta$ . ....	115
Tableau 24: Evaluation de l'indice de fiabilité $\beta$ .....	117
Tableau 25: Paramètres d'entrée ( $t = 0$ ). ....	122
Tableau 26: Valeurs moyennes des $\tau_i$ .....	122
Tableau 27: Paramètres d'entrée ( $t = 0$ ). ....	126
Tableau 28: Valeurs des nouvelles mesures du module d'Young.....	133
Tableau 29: Caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques du Shinafoot bridge.	173
Tableau 30: Caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques du Schwarzwasserbrücke.....	175

## Résumé:

Les structures en voûte sont présentes dans la plupart des anciens ouvrages maçonnés : tunnels, ponts, palais, cathédrales ou autres. Arches et voûtes sont avec les murs les structures porteuses utilisées en maçonnerie. Leur bon état est alors la clef du bon fonctionnement d'un ouvrage. Les ouvrages maçonnés constituent à présent une proportion importante du patrimoine culturel. Toutefois, la plupart de ces ouvrages sont centenaires et le processus de dégradation s'est déjà enclenché depuis des décennies. Aujourd'hui, leur maintenance et réparation présentent des problèmes importants à leurs gestionnaires. Parfois des réparations ont été entreprises sans pour autant assurer la durabilité souhaitée. La fréquence des interventions se trouve augmentée et les coûts induits deviennent rapidement insupportables. Une situation qui a poussé certains gestionnaires à abandonner complètement leurs ouvrages, malgré leur valeur et leur importance patrimoniales. En effet, l'une des causes majeures d'abandon d'ouvrage est le coût excessif des inspections et des réparations. La question qui se pose dans de telles circonstances est de savoir comment mettre au point une stratégie à la fois efficace et surtout économique de maintenance de ces ouvrages, capable de prolonger leurs durées de vie ?

Deux problèmes particuliers d'inspection sous incertitude sont traités : La présence localisée de perte de matière et la perte de matière généralisée. Pour traiter ces deux cas un programme a été développé. Le modèle, sur lequel il s'appuie, permet l'analyse globale de la voûte tout en minimisant au maximum le temps de calcul. Ce modèle constitue un compromis intéressant entre précision et temps de calcul. Les simulations de Monte Carlo ont été couplées à la méthode des éléments finis et implémentées dans un nouvel outil numérique, baptisé ArcProg\_Z, afin de proposer une méthodologie cohérente pour l'évaluation probabiliste de la capacité portante des voûtes et de prévision de son mécanisme de ruine.

Enfin, une étude de fiabilité de la voûte étudiée précédemment a été menée. La performance de la voûte a été évaluée à travers le calcul de sa probabilité de défaillance « instantanée et dépendante du temps » en fonction du coefficient de variation du module d'Young des différents segments.

Les résultats obtenus pour chaque cas sont présentés et discutés.

Mots clés : Voûte, maçonnerie, dégradation, inspection, incertitude, probabilité, fiabilité, défaillance

## **Probabilistic approach for masonry vault diagnosis**

Abstract :

The vault structures are present in most of the old masonry structures: tunnels, bridges, palaces, cathedrals or other civil infrastructures. Arches and vaults as well as walls are the supporting structures used in masonry. Their condition is then the key of the proper functioning of a structure. Masonry construction works are now a significant proportion of the cultural heritage. Most of them are century old and the degradation process is already running since several decades. Actually, the maintenance and repair continue to represent serious issues for their managers. Sometimes repairs have been undertaken without ensuring the aimed durability. The frequency of interventions is increased and the resulting costs are rapidly becoming unbearable. A situation has led some managers to completely abandon their buildings, despite their heritage value and national significance. Indeed, one of the major reasons for building abandonment is the excessive cost of inspections and repairs. The question that arises in such circumstances is how to develop a maintenance strategy that is both effective and most economical of these structures, capable to prolong their lifespan?

Two particular inspection issues under uncertainty are discussed: The localized presence of material loss and generalized loss of material. To deal both cases, a program was developed. The model on which it is based, provides the overall analysis of the vault while minimizing the computation time. This model presents an interesting compromise between accuracy and computation time. Monte Carlo simulations are coupled with the finite element method and implemented in a software package named ArcProg\_Z, in order to propose a consistent methodology for probabilistic assessment of the load bearing capacity of the vaults and predicting its failure mechanism.

Finally, reliability study of the vault is carried out. The performance of the vault is assessed by calculating the probability of failure “instantaneous and time-dependent” according to the coefficient of variation of the Young's modulus of several segments.

The obtained results for each case are presented and discussed.

Keywords: Vault, masonry, degradation, inspection, uncertainty, probability, reliability, failure