



Université Blaise Pascal



N° d'Ordre : D.U. 2646

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N° 848

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : Mathématiques appliquées

Par : **Jordane Mathé**

TITRE DE LA THÈSE :

**Modélisation d'écoulements gravitaires fluidisés et
application à la volcanologie**

soutenue publiquement le 11 décembre 2015, devant la commission d'examen.

M. Pierre Saramito,	Directeur de Recherche CNRS, Université de Grenoble	Président
Mme Anne Mangeney,	Professeur en géophysique, IPGP	Rapporteur
M. Vincent Langlois,	Maître de Conférence en géophysique, UCBL	Examineur
M. Paul Vigneaux,	Maître de Conférence en mathématiques, ENS Lyon	Examineur
M. Laurent Chupin,	Professeur en mathématiques, UBP	Directeur de thèse
M. Karim Kelfoun,	Maître de conférence en volcanologie, UBP	Directeur de thèse

Université Blaise Pascal - Laboratoire de Mathématiques, UMR 6620 - CNRS
3 place Vasarely, TSA 60026, CS 60026
63178 Aubière cedex, France

Comme ce travail n'est pas l'œuvre d'une seule personne, je tiens à remercier l'ensemble des acteurs, qui ont pu jouer un rôle dans son aboutissement.

En tout premier lieu, je voudrais citer mes directeurs de thèses et collègues les plus proches, Laurent Chupin, Thierry Dubois, Karim Kelfoun et Olivier Roche. Ils m'ont aidé à mener ce travail à son terme dans de très bonnes conditions grâce à leur disponibilité, leurs avis et leurs conseils et je les en remercie grandement.

Je voudrais également remercier Anne Mangeney et Pierre Saramito, qui ont accepté d'être les rapporteurs de la thèse, ainsi que Paul Vigneaux et Vincent Langlois, qui ont accepté de participer au jury de soutenance.

Je remercie également l'ensemble du personnel des laboratoires impliqués dans cette aventure, c'est-à-dire le laboratoire de mathématiques et le Laboratoire Magmas et Volcans, ainsi que les collègues du LabEx ClerVolc, et notamment Tim Druitt et Pierre Schiano pour leur confiance et leurs encouragements. Merci à l'ensemble du personnel technique et administratif, qui a fait un très bon travail d'accompagnement et d'aide à des moments importants de la découverte du monde universitaire.

Je ne peux me permettre d'oublier les discussions constructives avec les étudiants en géologie : Corentin, Angélie et les autres. Merci également aux doctorants du laboratoire de mathématiques, Christèle, Colin, Jonathan, Mahdi, Manon, Papa, Romuald, Victor et tous les autres, pour leur bonne humeur, leur implication dans la vie du laboratoire et les discussions diverses.

À l'extérieur du monde universitaire, d'autres personnes ont joué un rôle important de soutien scientifique, logistique ou moral. Il s'agit des amis de Clermont-Ferrand et de ma famille, que je remercie infiniment.

Je dédie ce travail à Clémence, qui m'a soutenu, supporté et aidé sur tous les plans.

Titre

Modélisation d'écoulements gravitaires fluidisés et application à la volcanologie

Résumé

Durant les trois années de la thèse, j'ai eu le plaisir de travailler en collaboration avec à la fois des volcanologues, des physiciens de laboratoire et des mathématiciens. Ce mémoire est l'occasion de présenter la démarche et les résultats de mes recherches dans le domaine de la modélisation d'écoulements granulaires denses fluidisés. Ces derniers consistent à développer un nouveau modèle mathématique et son étude théorique et numérique.

Sur la base d'observations faites lors d'expériences de laboratoire, nous proposons une façon de modéliser le changement comportemental d'un écoulement granulaire initialement fluidisé au travers de la définition de sa rhéologie viscoplastique à seuil variable. Plus précisément, le seuil de plasticité est défini par la différence entre la pression lithostatique et la pression du fluide interstitiel. La nouveauté apportée par ce modèle ouvre de nouvelles perspectives à la fois pour le champ de recherche en mathématiques et pour la compréhension des lits granulaires fluidisés et leur application à la volcanologie.

Du point de vue mathématique, une étude théorique du modèle a été menée. En proposant une preuve de l'existence de solutions faibles à un problème lié à la version homogène du modèle, nous apportons une extension au champ de connaissances autour des écoulements des fluides non-newtoniens.

D'autre part, dans le but de reproduire numériquement des expériences de laboratoire de chute de colonne granulaire fluidisée, nous avons développé un code de simulation numérique incluant une nouvelle méthode de résolution des équations d'écoulement de fluides à seuil. Dans ce manuscrit, je décris et justifie les différents choix stratégiques pour le développement de ce code. Par ailleurs, je présente quelques tests académiques permettant de valider le code. Enfin, je donne les résultats de simulation de chute de colonne granulaire, qu'elle soit fluidisée ou non. Une comparaison avec les données de laboratoire est effectuée afin d'évaluer les points forts et les défauts du modèle par rapport à la réalité des expériences. En conclusion, dans la continuité du travail mené dans ce projet, des perspectives d'amélioration sont proposées.

Mots-clés : *modélisation ; simulation numérique ; rhéologie ; fluide à seuil variable ; Bingham ; Drucker-Prager ; existence de solution faible ; écoulements pyroclastiques ; densité variable.*

Title

Modelling of fluidised gravity flows and application to volcanology

Abstract

During these three years, I enjoyed to work with collaborators from volcanology, laboratory physics and mathematics. This document presents the steps and results of my research in the field of modelling of fluidised granular flows. The last consists in the development of a new mathematical model and its theoretical and numerical study.

Based on observations made on experimental studies, the model focuses on the change in the behaviour of an initially fluidised granular flow through the definition of its viscoplastic rheology with variable threshold. More precisely, the threshold (also called yield stress) is defined *via* the difference between the lithostatic pressure and the pressure of the interstitial fluid. The innovation of this model opens perspectives for the mathematical research as well as for the study of fluidised granular flows and their application to volcanology.

From a mathematical point of view, a theoretical study has been conducted. Proving the existence of weak solution for the homogeneous version of the model, we offer an extension in the field of knowledges of non-newtonian fluid flows.

Also, we have developed a numerical code to simulate dambreak experiments with fluidised granular media. This one includes a new method to solve the flow equations of viscoplastic fluids. In this thesis, I describe and justify the numerical strategy chosen. Moreover, I present some academic tests to validate the code. At the end, I give the numerical results in the case of the dambreak simulation for dry and fluidised fluids. By comparing with experimental data, we evaluate the validity of the model and its resolution, and highlight the advantages and inconvenients. To conclude the project, I propose some perspectives of improvement for later work.

Key words : *modelling; numerical simulation; rheology; variable yield stress; Bingham; Drucker-Prager; weak solution existence; pyroclastic flows; variable density.*

Notations

Acronymes et abréviations

AB	Adams-Bashforth
ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
BDF	Backward Differentiation Formula
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
ENO	Essentially Non Oscillatory
FEM	Finite Element Method
FVM	Finite Volume Method
GdR	Groupement de Recherche
IPGP	Institut de Physique du Globe de Paris
KSP	Krylov Subspace
LMV	Laboratoire Magmas et Volcans
MAC	Marker And Cell
MPI	Message Passing Interface
MUSCL	Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws
p.p.	presque partout
PETSc	Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation
PPM	Piecewise Parabolic Method
rhs	right-hand side
RK	Runge-Kutta
SPH	Smoothed-Particle Hydrodynamics
TVD	Total Variation Diminishing
UBP	Université Blaise Pascal
VOF	Volume Of Fluid
WENO	Weighted Essentially Non Oscillatory

Nombres et quantités physiques

Bi	nombre de Bingham
Fr	nombre de Froude
Pe	nombre de Péclet
Ra	nombre de Rayleigh
Re	nombre de Reynolds
I	nombre inertiel (ou éventuellement un intervalle réel)
T	temps maximum de l'intervalle considéré
\mathbf{f}	vecteur de force extérieure
\mathbf{g}	vecteur d'accélération gravitationnelle égal à $(0, -g)^t$
p, p_f, p_s	pression totale, pression du fluide interstitiel, pression solide
t	variable de temps
\mathbf{v}	vecteur vitesse de composantes u et v
x, y	variables d'espace
Ω	domaine spatial physique, numérique ou théorique d'étude
α	angle de frottement interne (en degré)
β	dilatation thermique (en K^{-1})
γ	petit coefficient dans le schéma WENO
δt	pas de temps d'un schéma numérique (en s)
ϵ_∞	erreur d'approximation entre les profils de Poiseuille exact et numérique
ε	paramètre d'approximation dans le schéma de preuve de l'existence d'une solution faible
ζ	paramètre de convergence géométrique du schéma de projection pour Bingham
θ	température
ϑ	coefficient d'interpolation entre espaces L^p
κ	coefficient de diffusion (en m^2/s)
λ	gradient longitudinal de pression dans un canal (en Pa/m)
μ	viscosité dynamique (en $Pa.s$)
ν	viscosité cinématique (en m^2/s)
ξ	paramètre d'intégration
ρ, ρ_f, ρ_s	masse volumique du mélange, du fluide interstitiel, de la phase granulaire (en kg/m^3)
σ	partie à seuil du tenseur de contrainte
τ_0	seuil de plasticité (en Pa)
ϕ	proportion volumique de la phase granulaire du mélange
φ	fonction quelconque essentiellement bornée
χ	désignation de la limite faible dans L^2L^2 de $\sigma^*(\tau_0, D_i)$ quand i tend vers l'infini
ψ	fonction-test

Opérateurs fonctionnels et fonctions spéciales

*	opérateur de convolution
$\partial_{t,x,y}$	opérateur de dérivation partielle par rapport à t, x ou y (souvent noté $\frac{\partial}{\partial_{t,x,y}}$)
∂_x^a	opérateur de dérivation partielle d'ordre a par rapport à x
$dt, dx, dy, (\cdot)'$	opérateurs de dérivation
$\text{div}(\cdot)$	opérateur de divergence
∇	opérateur de gradient
D	partie symétrique du gradient définie par $D\cdot = \frac{\nabla\cdot + \nabla\cdot^t}{2}$
Δ	opérateur laplacien
\otimes	produit dyadique de deux vecteurs défini par $(u_1, u_2) \otimes (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{v} \cdot \nabla$	opérateur d'advection défini par $(u, v) \cdot \nabla = u\partial_x + v\partial_y$
:	produit scalaire entre tenseurs défini par $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$
\rightarrow	convergence forte
\rightharpoonup	convergence faible
\rightharpoonup^*	convergence faible \star
\cdot^t	opérateur de transposition des matrices
$[\cdot]^+$	partie positive définie par $\max\{\cdot, 0\}$
$[\cdot]^-$	partie négative définie par $\min\{\cdot, 0\}$
η	noyau de régularisation temporelle
\mathbb{P}_{τ_0}	opérateur de projection sur la boule de rayon τ_0
$\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k$	opérateurs de projection sur les sous-espaces définis engendrés par les k premiers vecteurs de la base
$\text{signe}(\cdot)$	fonction signe définie sur \mathbb{R}
\mathcal{T}	opérateur de troncature
\tanh	fonction tangente hyperbolique définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Sommaire

I	Introduction	9
I.1	Les motivations	10
I.2	L'état de l'art	12
I.3	Contributions et plan de la thèse	17
	Partie I Étapes de la modélisation - Étude théorique des modèles	19
II	Modélisation	21
II.1	Introduction à l'exercice de modélisation	22
II.2	Les lits granulaires fluidisés : une histoire de couplage	22
II.2.1	Les expériences de laboratoire : le comportement du gaz	23
II.2.2	Le modèle en équations : le couplage	25
II.3	Adimensionnement	32
II.4	Conclusion	36
III	Existence de solution	37
III.1	Solutions stationnaires	38
III.1.1	Introduction	38
III.1.2	Fluide de Bingham dans une canalisation infinie 2D	38
III.2	Solutions non stationnaires	42
III.2.1	Cadre mathématique et principaux résultats	43
III.2.2	Modèle homogène à seuil diffusé	49
III.3	Conclusions	63
	Partie II Étude numérique du modèle	65
IV	Stratégie numérique	67
IV.1	Introduction	68
IV.2	Exemple de discrétisation par la méthode des volumes finis : le laplacien	68
IV.3	Les schémas de discrétisation déjà connus	71
IV.3.1	Advection-diffusion : schéma volumes finis d'ordre 2	72
IV.3.2	Navier-Stokes : schéma de projection	74
IV.3.3	Transport : schéma essentiellement non oscillant	78
IV.4	Double projection pour Bingham	82
IV.5	Schéma complet du couplage	85
IV.6	Méthode de résolution des systèmes linéaires et traitement du parallélisme	86
IV.6.1	Librairie PETSc	86

IV.6.2	Parallélisation des calculs	87
IV.7	Les tests de validation	88
IV.7.1	Fluide de Bingham dans un canal	88
IV.7.2	Navier-Stokes-Boussinesq	91
IV.7.3	Fluide à seuil variable dans un canal	97
V	Simulations de chute de colonne granulaire	101
V.1	Introduction	102
V.2	Angle de repos d'un lit non fluidisé	107
V.2.1	Introduction	107
V.2.2	Résultats et commentaires	108
V.3	Simulations d'écroulement de colonne granulaire non fluidisée	111
V.3.1	Introduction	111
V.3.2	Résultats et commentaires	112
V.4	Simulations d'écroulement de colonne granulaire fluidisée	120
V.4.1	Introduction	120
V.4.2	Résultats et commentaires	121
V.5	Conclusions sur les simulations numériques	127
VI	Bilan et perspectives	129
VI.1	Bilan de la thèse	129
VI.2	Perspectives	131

Chapitre I

Introduction

Sommaire

I.1	Les motivations	10
I.2	L'état de l'art	12
I.3	Contributions et plan de la thèse	17

Cette thèse est avant tout pluridisciplinaire. Le mémoire s’adresse donc à plusieurs publics, notamment les mathématiciens et les physiciens des écoulements, mais aussi les volcanologues, ou toute autre personne souhaitant comprendre un point de vue de mathématiciens sur la physique des matériaux granulaires fluidisés. Dans ces conditions, j’ai écrit ce mémoire pour qu’il soit accessible à toutes ces personnes. C’est pourquoi vous verrez plusieurs paragraphes relatifs à l’interaction entre les mathématiques et d’autres sciences. Parfois j’y expose mon point de vue, parfois je rappelle quelques notions fondamentales permettant de comprendre ce qui se cache derrière les formules.

I.1 Les motivations

Le but de la volcanologie est de comprendre l’activité complexe des volcans et la physique des processus qui leur sont associés. Les volcans sont des sujets passionnants de par leur dangerosité et leur caractère complexe. Les éruptions, qui parfois sont extrêmement destructrices dans les zones habitées proches, peuvent être de différentes natures selon le volcan, voire pour un même volcan. Pour simplifier, disons qu’il y a deux types d’éruptions. Le plus connu est sans doute le type *effusif*, qui inclut les coulées de laves au sens large, l’autre étant le type *explosif*, englobant les explosions, les colonnes pliniennes et les écoulements pyroclastiques. C’est le second qui nous intéresse dans ce mémoire, car beaucoup moins prévisible et plus destructif que le premier.

Les scientifiques doivent alors faire face à la dangerosité et l’inaccessibilité des lieux lors des événements volcaniques, que ce soit pour l’homme ou même pour les instruments de mesure. C’est dans ces conditions que les physiciens et les mathématiciens sont amenés à travailler ensemble, étudiant des modèles qui visent à reproduire la réalité pour mieux comprendre et prévoir la puissance et l’étendue d’éventuelles nouvelles éruptions.

Un écoulement pyroclastique, encore appelé *nuée ardente*, est principalement composé de deux parties : à la base, un écoulement dense de roches et au-dessus, un nuage de cendre appelé *déferlante pyroclastique* [DRIITT, 1998; VALENTINE et FISHER, 2000]. La partie qui est étudiée ici est l’écoulement basal. Il s’agit de matériau rocheux comprenant des blocs de tailles très variées (de quelques millimètres cubes à plusieurs mètres cubes) dévalant les pentes des volcans à plusieurs centaines de kilomètres par heure, atteignant les 800 °C et parcourant des kilomètres avant de s’arrêter. Nées de l’effondrement d’un dôme ou d’une aiguille de lave ou encore de l’explosion d’une partie de l’édifice, ces roches mêlées à des gaz volcaniques s’écoulent sur le sol en suivant la topographie et peuvent tout détruire sur leur passage, comme ce fut le cas lors de l’épisode volcanique de la Montagne Pelée en 1902 (voir Figure I.2).

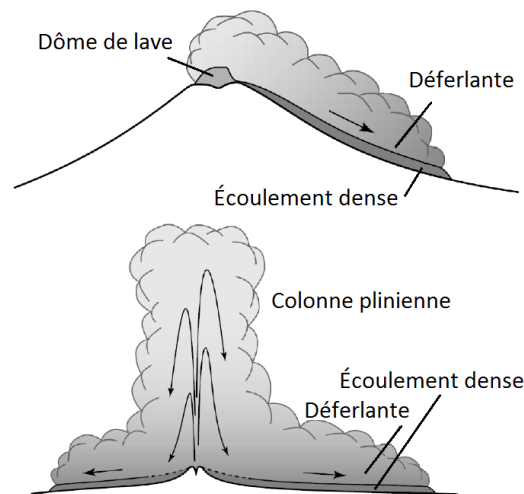


FIGURE I.1 – Schéma d’éruptions pyroclastiques. Deux mécanismes d’origine : effondrement de dôme volcanique (en haut) ou d’une colonne éruptive (en bas).



FIGURE I.2 – Photos de la ville de Saint-Pierre avant (à gauche) et après (à droite) l'éruption de la montagne Pelée du 8 mai 1902 en Martinique. *Source : www.ipgp.fr*

On veut donc savoir quel est le processus qui rend ces écoulements pyroclastiques aussi fluides et mobiles. La nature de ces éruptions étant clairement biphasee, on veut en fait mieux connaître le rôle joué par le gaz interstitiel dans la dynamique d'écoulement. Bien entendu, on comprend qu'un gaz, même s'il porte des poussières ou des petits morceaux de roches, puisse parcourir des kilomètres sans s'arrêter, surtout s'il est émis à une très grande vitesse. La difficulté réside dans la compréhension de ce qu'il se passe lorsque la proportion volumique de roche atteint des valeurs grandes, proches de la proportion maximale d'un empilement de grains. Dans ces conditions, qu'on qualifie de *granulaires denses*, le gaz n'a que très peu de place dans le lit granulaire. Pourtant, c'est bien ce type de conditions qu'on peut trouver à la base des nuées ardentes. L'objectif est donc de comprendre le rôle joué par le gaz dans les écoulements granulaires denses. Les questions auxquelles les chercheurs en volcanologie souhaiteraient répondre sont les suivantes :

- De l'air dans un lit granulaire dense peut-il faciliter l'écoulement ?
- Si oui, dans quelles conditions de pression ?
- Dans ce cas, est-il possible de retrouver ces conditions sur le terrain ?

Comme je le disais plus haut, les conditions environnementales des volcans ne permettent pas toujours la mise en place d'un instrument de mesure. Il est donc très difficile de répondre à ces questions par des études de terrain. C'est essentiellement pour cette raison que la communauté scientifique développe d'autres techniques d'étude, notamment des expériences de laboratoire et des modèles pour la simulation numérique. Dans le second cas, la méthode consiste d'abord à développer un modèle et le mettre en équations. On effectue ensuite des simulations numériques pour étudier le degré de validité du modèle en comparant les résultats numériques à des résultats expérimentaux dans les conditions de laboratoire d'abord et, si possible, avec des relevés de terrain.

La démarche que j'entreprends ici consiste à proposer un nouveau modèle orienté vers la simulation numérique d'écroulement de colonne granulaire fluidisée. À partir de ce modèle, différentes études sont possibles pour les mathématiciens. Toujours dans le souci de concilier les mathématiques et la volcanologie autour de ce sujet, j'ai été amené à m'intéresser aux deux principales facettes du modèle avec :

- son étude théorique, plus précisément l'étude de l'existence de solutions faibles,
- son étude numérique par le développement et l'utilisation d'un code de simulations d'écoulements.

Dans le paragraphe suivant, je présente un état de l'art non seulement sur la modélisation mais aussi sur chacun de ces deux points. Ce sera notamment l'occasion de mieux comprendre où se situent

les principales difficultés liées au sujet d'étude pour ensuite présenter plus précisément mon travail et les contributions que j'apporte dans ce contexte.

I.2 L'état de l'art

Dans le domaine d'étude des écoulements granulaires, il existe plusieurs branches. Celle qui nous intéresse concerne les écoulements denses, c'est-à-dire avec une densité de la phase granulaire proche de la densité maximale, qui correspond à une proportion volumique de grain autour de 68 %. Ce type d'écoulement est très étudié, notamment en géologie, mais aussi dans l'industrie quand il s'agit de stocker, manipuler ou transporter des matériaux tels que le sable, le ciment, les gravats en général ou encore des céréales.

Ce qui diffère dans le cas des écoulements pyroclastiques, ce sont les échelles de vitesse et de masse, qui sont bien plus importantes que dans la plupart des exemples industriels cités ci-dessus. Et pour comprendre cette différence, il est intéressant de se pencher sur le cas des lits granulaires denses *fluidisés*. Il s'agit d'un mélange constitué de deux phases, une granulaire et une fluide, qui s'écoulent ensemble. L'interaction entre les deux phases pourrait en effet expliquer certains comportements de lits granulaires denses, notamment lors d'éruptions de type explosif.

Comme je me suis intéressé à différents aspects du sujet d'étude, je présente maintenant un état de l'art de chacun d'entre eux :

- la modélisation,
- l'étude théorique des équations du modèle,
- la simulation numérique d'écoulements.

J'en profiterai pour exposer et justifier les choix que j'ai faits dans ce domaine en collaboration avec Karim Kelfoun, Laurent Chupin, Thierry Dubois et Olivier Roche tout au long de mon travail de recherche.

La modélisation.

Nous nous intéressons donc à la modélisation d'écoulements granulaires denses fluidisés, et en particulier aux nuées ardentes. Dans ce domaine, il y a deux écoles. Le point de vue des volcanologues est très focalisé sur la modélisation et la simulation des nuées ardentes, donc avec de très grandes échelles d'espace (celle du volcan), de vitesse ($50 - 200 \text{ m/s}$) et de masse ($10^7 - 10^{11} \text{ kg}$ environ). La seconde école s'appuie sur un point de vue physique, et en particulier expérimental. Il s'agit alors d'effectuer des essais en laboratoire sur des modèles réduits et de développer des théories permettant ensuite de faire des simulations informatiques. Le regroupement de ces deux pans de la recherche a donné naissance aux quatre grandes classes de modèles suivantes :

- les modèles cinétiques,
- les modèles particuliers,
- les modèles continus moyennés en hauteur,
- les modèles continus multiphasés.

Les premières simulations numériques d'écoulements pyroclastiques ont été effectuées grâce à des *modèles cinétiques*, qui se limitent à la détermination de la trajectoire du front en le considérant comme un seul bloc de masse fixe, glissant sur la pente du volcan sous l'action de la pesanteur et ralentissant sous l'action d'une force de résistance liée au contact avec le sol. Différents auteurs ont adopté cette approche en précisant les lois de résistance selon les cas. Il peut s'agir d'une loi basale de Coulomb, d'une loi de type frottement visqueux proportionnel à la vitesse, ou encore d'une loi de turbulence proportionnelle au carré de la vitesse (voir par exemple [SHERIDAN et MALIN, 1983; McEWEN et MALIN, 1989; SAUCEDO et collab., 1983]). Dans tous les cas, ces modèles simplifient

radicalement la physique de l'écoulement, ne pouvant prendre en compte ni les effets sur la hauteur ni les variations de masse en mouvement, qui peuvent être dues à la sédimentation ou à l'ingestion de matière par exemple. En revanche, ils permettent d'évaluer très rapidement le chemin qu'emprunterait une coulée, ce qui représente un avantage non négligeable.

Une autre façon de voir les choses consiste à appliquer le principe de Newton à chacune des particules de l'écoulement et résoudre le système. C'est ce qu'on appelle un *modèle particulaire* (ou modèle discret). Il permet de prendre en compte la plupart des interactions entre particules, qu'il s'agisse des collisions, des frottements ou des roulements entre elles, voire des forces électrostatiques. Le problème de ce type de modèle réside dans la lourdeur des simulations, puisqu'il y a autant de points que de particules, et que dans un volume d'un litre on dénombre déjà entre un million et un milliard de grains de sable. Les capacités de calcul des machines, même les plus récentes, sont alors dépassées. La plupart des simulations effectuées avec ces modèles contiennent donc quelques milliers ou dizaines de milliers de particules (voir par exemple [STARON, 2008]) mais permettent une étude précise sur certains comportements des grains lors d'écoulements particuliers. Prenons quelques exemples d'études qui ont été menées dans cette optique. Dans le cas des écoulements granulaires secs, BREWSTER et collab. [2008] ont par exemple développé grâce à ce type de modèle une rhéologie de Bagnold généralisée prenant en compte tous les paramètres d'interaction entre particules, dont les dissipations inélastiques et la cohésion inter-particulaire. Pour ce qui est de la modélisation de chute de colonnes, on peut citer LANGLOIS et collab. [2015], qui étudient plus particulièrement les fissurations d'un lit granulaire initialement cohésif pour un matériau friable. Tout ce pan de la recherche sur les matériaux granulaires donne lieu à de nombreuses avancées dans l'étude comportementale et rhéologique des matériaux granulaires dans différentes configurations. Enfin, on peut trouver une application directe de ces techniques au cas des écoulements pyroclastiques par MITANI et collab. [2004].

Cependant, lorsqu'on souhaite prendre en compte une plus grande quantité de particules dans les simulations numériques, on opte souvent pour un autre point de vue, qui prend de plus en plus d'importance dans ce domaine. Il s'agit des *modèles continus*, qui s'appuient sur les équations de la mécanique des fluides.

La première classe de modèles continus est constituée des modèles *moyennés sur la hauteur*. Si elle est si importante, c'est essentiellement pour des raisons de rapidité de calcul. Plus précisément, lorsque la longueur de l'écoulement est très grande devant son épaisseur caractéristique, on peut raisonnablement négliger les effets verticaux. Cela permet de réduire le problème 3D à un problème 2D et donc considérablement diminuer les temps de calcul. Les applications sont alors assez variées, que ce soit pour la simulation d'écoulements granulaires de laboratoire, par exemple dans [SAVAGE et HUTTER, 1989] ou celle de terrain par différents auteurs [IVERSON, 1997; IVERSON et DENLINGER, 2001; HEINRICH et collab., 2001; PITMAN et collab., 2003; KELFOUN et DRUITT, 2005; SHERIDAN et collab., 2005; LUCAS et MANGENEY, 2007]. La difficulté majeure réside alors dans la détermination de la rhéologie du matériau, la dissipation étant prise en compte dans la condition de bord à la base de l'écoulement. La physique complexe est souvent approchée par une loi de premier ordre qui n'est pas toujours appropriée. L'une des plus couramment utilisées est la loi de frottement de Coulomb [SAVAGE et HUTTER, 1989; PATRA et collab., 2008], mais KELFOUN et collab. [2009] ont démontré que cette loi ne convient pas à la simulation d'écoulements pyroclastiques et ont proposé une loi de type plastique. D'autres approches semblent plus précises en utilisant des lois variables au cours de l'écoulement. C'est le cas dans l'article de MANGENEY et collab. [2007a] où une loi empirique de frottement à coefficient variable est proposée pour des simulations sur plan incliné avec approvisionnement constant. Lorsqu'on se limite à une seule couche, les modèles moyennés sur la hauteur ne peuvent prendre en compte les effets verticaux tels que la sédimentation ou la variation de rhéologie selon la profondeur. En particulier, lorsqu'il s'agit de simuler un mélange granulaire

fluidisé, la méthode à une couche devient peu pertinente, car elle oublie l'importance du rôle joué par la différence de fluidisation entre la base et la surface de l'écoulement. On observe en effet dans les expériences que le niveau de fluidisation est plus grand à l'intérieur du lit qu'en surface, ce qui peut expliquer la grande mobilité du lit granulaire. De même, en se ramenant à l'étude d'une seule couche, on ne peut pas prendre en compte l'écoulement d'une partie fluidisée sur une partie statique, autre phénomène important observé dans ce type de dynamique. C'est la raison pour laquelle j'ai choisi *un modèle non moyenné*. Il faut tout de même citer une méthode récemment développée dans le contexte qui nous intéresse ici et qui repose sur un modèle multi-couches (voir par exemple [FERNÁNDEZ-NIETO et collab. \[2014, soumis\]](#)). Cette dernière pallie le manque de précision dans la direction de l'épaisseur en superposant plusieurs écoulements les uns sur les autres.

La dernière classe de modèles dont je vais parler ici est celle des modèles multiphasés. Ces modèles sont le plus souvent utilisés pour simuler le comportement de la phase diluée dans la déferlante pyroclastique, qui est plus proche d'un comportement gazeux [[WOHLETZ, 2002](#)]. Dans ce cas, une façon de simplifier l'étude est de voir l'écoulement pyroclastique comme celui d'un gaz de poussière homogène. Gaz et particules solides circulent alors à la même vitesse et sont en équilibre thermique [[ISHIMINE, 2005](#)]. Mais si on veut être plus précis, il faut traiter séparément les deux phases tout en tenant compte de l'influence qu'elles ont l'une sur l'autre grâce à la présence d'un terme d'interaction. Les premiers modèles de cette nature sont apparus dans l'article de [WOHLETZ et collab. \[1984\]](#). Ensuite, d'autres modèles de plus en plus complexes ont été proposés [[DARTEVELLE et collab., 2004](#)] en même temps que les capacités de calcul évoluaient. Cependant la plupart de ces modèles sont valables uniquement pour des mélanges peu denses, donc plutôt pour la déferlante que pour la base dense de l'écoulement pyroclastique. Quelques études récentes sont tout de même appliquées à l'écoulement de lits granulaires denses [[MERUANE et collab., 2010](#)]. Dans cet article, le modèle est constitué d'un système d'équations sur chacune des deux phases (granulaire et gazeuse) et d'un terme d'interaction spécifique qui est proportionnel à la différence de vitesse entre les phases. Cependant les tests effectués avec ce modèle sont uniquement non fluidisés quand l'air est pris comme fluide ambiant, ou alors avec un mélange grain-eau.

Mais dans l'étude qu'on mène ici, le sujet principal est le mouvement du lit granulaire. On ne s'intéresse pas à proprement parler au mouvement du gaz, mais seulement à son impact sur la dynamique granulaire. Dans ce cas, on peut parfois ramener le mélange de deux phases à l'étude d'un fluide à densité variable. C'est ce qui est fait par [IVERSON \[1997\]](#) dans le cas d'un mélange grain-eau. Il a démontré que lors de l'écoulement, la différence de vitesse entre la phase granulaire et la phase liquide est faible devant la vitesse des particules du lit granulaire. Sous cette hypothèse, on en déduit un système plus simple faisant intervenir une seule vitesse, *i.e.* celle du mélange. En se plaçant de plus sous l'hypothèse d'incompressibilité, on trouve finalement un compromis entre la complexité liée à la présence de différentes phases et la simplicité du mélange homogène. Il s'agit des modèles d'écoulements *incompressibles à densité variable*.

Si dans le cas d'un fluide ambiant gazeux l'hypothèse de faible différence de vitesse discutée ci-dessus n'est *a priori* plus valable, le système d'équation nous confère un cadre qui semble tout de même approprié à l'étude qu'on mène, en se focalisant sur le mouvement du lit granulaire et pas sur le mouvement du gaz lui-même. Il a d'ailleurs été établi par [LAGRÉE et collab. \[2011\]](#) que pour un tel modèle, dans le cas d'un écoulement non fluidisé, la dynamique rapide de la phase granulaire est très peu influencée par la phase gazeuse à partir du moment où cette dernière possède une densité et une viscosité suffisamment faibles par rapport à la phase granulaire. Comme c'est effectivement le cas de l'air, pour l'étude des écoulements granulaires denses non fluidisés on retrouve souvent ce type de modèle, que ce soit dans un silo [[STARON et collab., 2014](#)] ou sur un plan horizontal ou incliné [[LAGRÉE et collab., 2011](#); [IONESCU et collab., 2015](#)]. Les systèmes d'équations sont alors ceux du modèle d'écoulement incompressible à densité variable, ou bien très similaires à ceux-ci en couplant

les équations de Navier-Stokes incompressibles à une équation de transport sur la densité (ou de façon équivalente sur la fraction volumique granulaire). Dans ce contexte mathématique, les recherches sont alors principalement orientées vers l'étude de la rhéologie du lit granulaire. Tout comme le cas des modèles moyennés en hauteur, les modèles biphasés continus incompressibles à densité variable n'échappent donc pas à la question de la rhéologie. L'avantage de ces derniers réside dans le fait qu'on traite le problème dans toutes les directions de l'espace, ce qui permet de mieux comprendre les mécanismes lorsqu'on a fait un choix rhéologique. Dans un modèle multiphasé, chaque phase doit avoir sa propre rhéologie. Comment peut-on alors avoir différentes rhéologies dans un seul système contrôlant à la fois la dynamique d'une phase granulaire et d'une phase gazeuse? Une façon d'y répondre consiste à faire varier les paramètres rhéologiques en fonction d'une quantité caractéristique (densité, température, épaisseur du lit...). En effet, comme la densité est beaucoup plus forte dans la phase granulaire que dans l'air, une loi donnant la viscosité en fonction de la densité peut pallier le problème, comme proposé par [LAGRÉE et collab. \[2011\]](#). On peut faire le parallèle avec les lois d'Arrhenius pour la viscosité d'un magma chaud [[DRAGONI, 1989](#)]. Celle-ci définit la viscosité et éventuellement le seuil de plasticité en fonction de la température du magma, avec une valeur plus élevée dans les zones les plus froides. Dans tous les cas, il faut déjà connaître le comportement rhéologique de chacune des phases. Revenons à notre sujet : pour l'air ambiant un modèle visqueux donne une bonne approximation du comportement, mais pour la phase granulaire la question semble beaucoup plus complexe. Depuis les travaux importants de [BAGNOLD \[1954\]](#), il est admis qu'un matériau granulaire dense se comporte comme un fluide visco-plastique. Les deux propriétés importantes qui permettent de placer ce matériau dans cette famille de fluides sont :

- premièrement, lorsqu'il est en écoulement, ce matériau montre des caractéristiques de type visqueux,
- deuxièmement, on observe que ce matériau possède un seuil de contrainte sous lequel il a un comportement rigide.

Il faut cependant noter dans la seconde remarque que le seuil de contrainte s'exprime naturellement ici en terme de friction. Lorsqu'on parle de friction, on pense souvent à la loi de Coulomb qui s'applique au contact entre deux solides qui glissent l'un contre l'autre. Dans le cas de la description d'un fluide visco-plastique par un modèle continu, c'est plutôt le critère de plasticité de Mohr-Coulomb qui s'applique. Une version simplifiée de ce critère considère que le seuil de plasticité est une fonction affine de la pression du fluide : c'est le critère de Drucker-Prager [[DRUCKER et PRAGER, 1953](#); [BOUCHUT et collab., 2015](#); [IONESCU et collab., 2015](#); [LUSSO et collab., 2015](#)]. En notant τ_0 le seuil de plasticité, ce critère s'écrit

$$\tau_0(p) = \tau_c + \tan(\alpha)p, \quad (\text{I.1})$$

où τ_c est la cohésion et $\tan(\alpha)$ est le coefficient de friction donné en fonction de l'angle de frottement interne α . Avec les avancées du GdR Midi [[MIDI, 2004](#)], une rhéologie à viscosité et seuil variant tous les deux en fonction du nombre inertiel I s'est développée dans la littérature. On peut exprimer cette loi visco-plastique grâce au critère de plasticité de Drucker-Prager en choisissant une cohésion nulle, ainsi qu'une loi de friction (notée $\mu(I)$ dans la littérature) et une viscosité dépendant non seulement de l'angle de frottement interne, mais aussi de la pression et d'autres paramètres du matériau [[JOP et collab., 2006](#); [IONESCU et collab., 2015](#)]. Un grand nombre d'expériences et de simulations ont été faites pour confronter ce dernier modèle à des expériences de laboratoire [[MIDI, 2004](#); [POULIQUEN et FORTERRE, 2009](#)], mais il n'a jamais été testé avec des données de terrain. En fait, il est apparu que ce modèle est très pertinent pour les mélanges denses faiblement fluidisés ou en dynamique lente, mais très peu pour les mélanges totalement fluidisés en dynamique rapide (voir [[DESMONT et collab., 2013](#)]). De plus, les travaux récents de [BARKER et collab. \[2015\]](#) ont montré que ce modèle conduit à un problème mal posé lorsque le nombre inertiel I prend des valeurs en dehors d'un intervalle de valeurs intermédiaires. De même, le critère de Drucker-Prager (I.1) pour la plasticité associé à

une viscosité constante donne un modèle mal posé (voir [SCHAEFFER, 1987]), sauf si la viscosité est supérieure à une certaine grandeur proportionnelle à la pression et inversement proportionnelle à la norme du gradient de vitesse.

C'est essentiellement pour cette raison que le modèle que nous proposons utilise un critère similaire à celui de Drucker-Prager dans lequel la pression (du fluide) est remplacée par une pression lithostatique (ou hydrostatique). Le modèle est complété avec une viscosité constante et sera appelé dans ce mémoire "modèle de Drucker-Prager avec pression lithostatique".

Tout ceci concerne le cas d'un écoulement granulaire dense non fluidisé. Or, je rappelle que dans notre étude l'objectif principal est de proposer un modèle pour les écoulements granulaires denses fluidisés. Pour ce faire, nous allons donc adapter le modèle précédent en faisant varier le seuil de plasticité en fonction de l'état du gaz qui fluidise le milieu granulaire. Plus précisément, l'impact du gaz sur la dynamique est contrôlé par la donnée de la pression de celui-ci dans le lit granulaire et non par sa vitesse comme c'est le cas dans le modèle de MERUANE et collab. [2010].

Ce modèle s'appuyant sur une rhéologie viscoplastique présente des intérêts aussi bien du point de vue mathématique que physique. Les recherches que j'ai effectuées pendant ma thèse se sont donc naturellement faites tant du point de vue théorique que numérique. Pour l'étude des écoulements granulaires non fluidisés, une étude numérique comparative des différents modèles à plasticité dépendant de la pression (dont le critère de Drucker-Prager (I.1)) est présentée par IONESCU et collab. [2015]. L'un des objectifs du travail engagé dans cette thèse est d'étendre ce type d'étude au cas des écoulements denses fluidisés. Avant de passer à la suite, il faut mentionner un dernier type de modèle, qui n'entre pas dans les catégories listées plus haut mais qui est important dans le domaine de l'étude des écoulements granulaires partiellement fluidisés. Il s'agit des modèles à paramètre d'ordre [ARANSON et TSIMRING, 2002; MANGENEY et collab., 2007b; VOLFSON et collab., 2003]. Ces derniers reposent sur la théorie de la transition de phase de Landau et ont été principalement développés pour l'étude du dépôt basal dans les expériences d'écoulement granulaire. Si les équations de ces modèles sont très semblables à celles qu'on étudie dans la suite de ce mémoire, la démarche repose sur l'étude physique des changements d'état d'un matériau, qui est assez différente de celle abordée ici.

Je vais maintenant faire un état de l'art de l'étude théorique des modèles d'écoulement de fluide viscoplastique à seuil variable.

Étude théorique.

En termes mathématiques, le modèle que j'ai choisi est de type Drucker-Prager incompressible à densité variable couplé à une équation de convection-diffusion *via* la définition du seuil de plasticité du fluide-mélange. Dans ce cadre, les questions mathématiques qui se posent sont des problèmes d'existence de solution, d'unicité, d'étude des états stationnaires, etc... Proche du modèle de Drucker-Prager incompressible, le modèle de Bingham incompressible à densité variable a déjà été étudié. Il s'agit du même problème, mais pour lequel le seuil de plasticité est constant au lieu d'être variable. Pour ce cas plus académique, on trouve des preuves d'existence de solutions *faibles* par différentes méthodes (approximation et point fixe [BASOV et SHELUKIN, 2006], inégalités variationnelles [BÖHM, 1985; AMIRAT et SHELUKIN, 2013]). Dans ce cadre, il reste à étendre ces résultats au couplage avec l'équation d'advection-diffusion *via* la rhéologie viscoplastique, en traitant donc un cas plus complexe où le paramètre rhéologique varie en fonction des inconnues du système. Dans les cas où c'est la pression totale p qui intervient dans la loi de plasticité, comme pour les modèles de Drucker-Prager ou de $\mu(I)$, le manque de régularité sur p fait que les techniques classiques de preuve d'existence de solution sont mises en défaut. En fait, on prouve même que ces modèles peuvent donner des problèmes mal posés [BARKER et collab., 2015]. Cependant, notons que pour traiter le problème lié à la rhéologie variable d'une façon générale, BULÍČEK et collab. [2012] ont prouvé l'existence de solutions faibles pour une classe d'équations de Navier-Stokes avec rhéologie dépendant des variables

spatiales et temporelles. Cependant, le cadre théorique qui y est proposé n'inclut pas le cas d'un couplage avec une équation d'advection-diffusion. Laurent Chupin et moi nous sommes inspirés des différentes techniques existantes pour établir l'existence de solutions faibles pour le problème homogène couplé. Dans notre cas, c'est en remplaçant la pression totale p par la pression lithostatique que nous gagnons suffisamment en régularité sur la loi de plasticité pour conclure à l'existence de solutions faibles.

Simulations numériques.

La résolution des équations de la mécanique des fluides par des schémas numériques efficaces est un grand défi pour les chercheurs. Plusieurs méthodes et plusieurs stratégies existent. Je ne parlerai que des méthodes par éléments finis (FEM) et volumes finis (FVM) ici, bien qu'il en existe bien d'autres (notamment probabilistes et SPH¹ [GINGOLD et MONAGHAN, 1977]). Comme la plupart de ces méthodes sont déjà bien connues pour la résolution des équations de Navier-Stokes, je vais me concentrer sur le traitement de la viscoplasticité. Il s'agit en effet de gérer la singularité immanente à la définition du tenseur des contraintes internes lorsqu'on a affaire à un fluide viscoplastique.

Penchons-nous d'abord sur quelques méthodes assez répandues dans le domaine. Pour plus de détails, je conseille la lecture de l'article de DEAN et collab. [2007], qui passe en revue les différentes méthodes au sujet du traitement numérique de la viscoplasticité jusqu'aux années 2000.

Une première idée, développée notamment par BERCOVIER et ENGELMAN [1979] et PAPANASTASIOU [1987] et très répandue dans la littérature (voir par exemple [LUSSO et collab., 2015]), est d'approcher la singularité par une fonction régulière d'aussi près que possible. Ces méthodes ont pour avantage d'être assez facile à mettre en œuvre, mais elles sont en fait peu adaptées au problème, puisqu'elles ne permettent pas d'approcher l'arrêt d'un fluide viscoplastique en temps fini [CHATZIMINA et collab., 2005]. Elles sont donc adaptées à certaines situations, mais *a priori* pas dans notre cas puisqu'on souhaite entre autres capter précisément l'arrêt de l'écoulement. La seconde idée, qui résout ce problème, s'appuie sur la théorie des inégalités variationnelles introduite notamment par DUVAUT et LIONS [1976]. On se ramène alors à la résolution de problèmes de points-selle, qui sont généralement traités par des méthodes de lagrangien augmenté [FORTIN et GLOWINSKI, 1983] ou d'Uzawa [GLOWINSKI et collab., 1981]. Adoptant la même philosophie, la méthode la plus récente dans ce contexte est celle que j'utilise pour l'ensemble des simulations de ce mémoire. C'est une méthode de projection (classique pour les équations de Navier-Stokes) couplée à une méthode de point fixe pour la plasticité. On trouve deux versions de cette méthode par MURAVLEVA [2014] et par CHUPIN et DUBOIS [2015]. Cette astuce permet de résoudre le point-selle d'une manière détournant les techniques de minimisation intrinsèques à la méthode de lagrangien augmenté et, comme on le verra, est particulièrement bien adaptée au couplage avec la résolution de Navier-Stokes par projection.

I.3 Contributions et plan de la thèse

Pour le travail effectué durant les trois années de ce contrat doctoral, les efforts ont donc été portés sur la compréhension du processus physique d'écoulement d'un lit granulaire dense fluidisé afin d'éclaircir certaines idées qu'on peut avoir en observant des éruptions ou des écroulements de dômes volcaniques dans la nature. Mon travail fait suite aux études expérimentales faites en laboratoire par Olivier Roche et ses collaborateurs au Laboratoire Magmas et Volcans (LMV). Les expériences qui ont été menées consistent en des modèles réduits de ruptures de barrage simulées par l'ouverture rapide d'une porte laissant couler un matériau granulaire dense préalablement fluidisé dans un chenal [ROCHE, 2012; ROCHE et collab., 2010]. Je les décris plus précisément au paragraphe II.2.1.

1. Smoothed-Particle Hydrodynamics

Je vais présenter maintenant mes contributions dans le domaine d'étude des écoulements granulaires denses fluidisés.

Contributions. Afin de répondre à la fois aux questionnements des volcanologues et aux besoins mathématiques et numériques, mes recherches ont été menées dans trois domaines. Je présente donc mes contributions en trois parties :

- Mon travail a d'abord consisté à développer un nouveau modèle prenant en compte spécifiquement la présence d'air sous pression dans le lit granulaire. Le choix de ce modèle s'est fait sur la base d'un état des lieux des modèles existant dans le domaine (cf. paragraphe I.2 ci-dessus) et d'observations expérimentales [ROCHE, 2012].
- Ensuite, compte tenu de ce choix, j'ai entrepris une étude mathématique théorique pour prouver l'existence de solutions au système que j'ai obtenu. Le cadre de résolution du problème d'existence est celui des solutions faibles au sens du théorème de Leray pour les équations de Navier-Stokes. Le résultat que nous avons obtenu constitue une extension dans le domaine des problèmes d'existence de solution faible pour les fluides à rhéologie variable. De plus, alors que les modèles de type Drucker-Prager pouvaient mener à des problèmes mal posés, celui que nous proposons semble pallier ce problème.
- Enfin, j'ai développé en collaboration avec Thierry Dubois un code de simulations numériques d'écoulements de fluides granulaires denses basé sur une nouvelle technique de résolution du problème de plasticité et prenant en compte la fluidisation par variation de pression interstitielle.

Ces étapes sont à mon avis des préliminaires incontournables à l'étude de ces écoulements si complexes de par leur nature. Elles ont été abordées dans cet ordre-là durant la période de recherche et sont présentées dans cet ordre dans ce mémoire comme décrit dans le plan ci-après.

Plan de la thèse. Plus précisément, la première partie est composée des chapitres II et III, le Chapitre II étant dédié à la présentation du modèle et sa justification. Dans le Chapitre III, on peut trouver le cadre mathématique et la preuve d'un théorème d'existence pour la version homogène (*i.e.* à densité constante) du modèle. La deuxième partie contient quant à elle les détails de l'étude numérique. En particulier, le Chapitre IV s'articule autour des différents choix stratégiques pour la résolution de chacune des équations du système et la validation par des tests académiques si nécessaire. On peut donc y trouver les schémas numériques écrits pour le développement du code de résolution. Dans le Chapitre V, je présente les résultats relatifs à l'objectif numérique de cette thèse. Il s'agit de reproduire numériquement les expériences de laboratoire pour tester la validité du modèle dans les conditions de l'éroulement d'une colonne granulaire dans un chenal.

Toutes ces étapes s'inscrivent à la base d'un travail de plus longue haleine qui se poursuit au sein de la collaboration entre des équipes du laboratoire de mathématiques et du LMV de l'UBP dans le LabEx ClerVolc. Une équipe formée autour de Karim Kelfoun et Tim Druitt a développé le code *Volcflow*² de simulation d'écoulements moyennés en hauteur [KELFOUN et DRUITT, 2005; KELFOUN et collab., 2010; KELFOUN, 2011]. Sur la base de ces travaux nés au sein du LMV de Clermont-Ferrand, la collaboration avec le laboratoire de mathématiques vise un objectif plus important et plus ambitieux, qui est de reproduire plus fidèlement sur ordinateur les éruptions grandeur nature pour comprendre et ensuite prévoir les conséquences lors d'événements de plus grande ampleur. J'évoquerai plus précisément ce point dans le Chapitre VI dans lequel j'expose les conclusions générales liées au travail de recherche mené dans le cadre de cette thèse, ainsi que les perspectives pour les travaux à venir au sein de la collaboration entre les laboratoires dans le LabEx ClerVolc.

2. <http://lmv.univ-bpclermont.fr/volcflow/>

Première partie

Étapes de la modélisation - Étude théorique des modèles

Chapitre II

Modélisation

Sommaire

II.1	Introduction à l'exercice de modélisation	22
II.2	Les lits granulaires fluidisés : une histoire de couplage	22
II.2.1	Les expériences de laboratoire : le comportement du gaz	23
II.2.2	Le modèle en équations : le couplage	25
II.3	Adimensionnement	32
II.4	Conclusion	36

II.1 Introduction à l'exercice de modélisation

Dans cette partie, je présente le modèle qui décrit le comportement du fluide que je considère, *i.e.* un matériau granulaire dense fluidisé. Avant de préciser les particularités de ce modèle dans la section suivante, je tiens à expliquer ce que j'entends par modélisation. Dans la démarche scientifique que j'ai entreprise, le modèle peut être considéré comme un point de vue particulier sur l'objet d'étude, à savoir l'écoulement d'un matériau granulaire dense fluidisé. En effet, quand on regarde les spécificités d'un tel écoulement, il paraît clairement impossible d'en donner une retranscription exacte, grain par grain, molécule d'air par molécule d'air, etc. . . dans un modèle physique raisonnable. Que ce soit sur le terrain ou en laboratoire, il est rare qu'on puisse avoir accès à toute la physique par de simples mesures. Les instruments servent souvent à rendre compte d'un aspect seulement de l'écoulement. C'est le rôle du modélisateur de trouver une façon d'unifier toutes les mesures dans un seul objet mathématique. Par exemple, on peut mesurer la vitesse d'un grain ou de quelques-uns, mais pas la vitesse de chacun des grains. Dans ce cas, on propose une équation régissant l'écoulement en tout point et tout temps. De même, on ne peut pas mesurer la pression de l'air partout dans l'écoulement à tout instant. On peut donner une loi comportementale rendant compte de l'évolution globale, mais pas forcément de l'exacte réalité.

Aussi, il appartient au modélisateur de faire des choix parmi les divers points de vue plus ou moins simplificateurs, choix qui devront être justifiés selon l'utilisation qu'on fait du modèle et qui devront ensuite être assumés. Dans l'état de l'art [I.2](#), j'ai donné quelques-uns de ces points de vue avec leurs atouts et leurs limites. Concernant celui que je propose, je rappelle que j'ai fait le choix du modèle continu et non particulière puisqu'on souhaite simuler des écoulements en laboratoire qui comptent déjà plus d'un milliard de particules et que les capacités de calcul informatique seraient insuffisantes pour traiter les interactions entre tous ces éléments. Ceci m'a conduit à travailler avec les équations de la mécanique des fluides, pour lesquelles je spécifie les caractéristiques essentielles du matériau dans la suite (masse volumique, viscosité, comportement viscoplastique, seuil de plasticité, etc. . .).

II.2 Les lits granulaires fluidisés : une histoire de couplage

Le modèle que je propose ressort des discussions que j'ai eues avec l'équipe de recherche en volcanologie du LMV spécialisée dans l'étude des écoulements volcaniques. L'objectif principal est la compréhension de la physique interne des écoulements de matériaux granulaires denses fluidisés et plus précisément le rôle qu'y joue le gaz interstitiel.

Comme souvent dans ce type d'étude, on a plus facilement accès au comportement de chacun des acteurs de l'écoulement qu'à l'interaction entre les deux. Ainsi, une loi sur la diffusion du gaz interstitiel a été proposée et justifiée par [ROCHE \[2012\]](#) à partir de mesures de pression dans une colonne fluidisée statique. D'autre part, le matériau granulaire semble se comporter comme un fluide complexe, si bien que sa dynamique est donnée par les équations de la mécanique des fluides. Il reste à comprendre comment la pression du gaz interstitiel peut intervenir dans ces dernières pour donner les résultats qu'on observe en laboratoire ou sur le terrain. Ce que nous souhaitons faire est donc un couplage des deux équations pour retranscrire le plus fidèlement possible l'interaction entre le gaz et le milieu granulaire.

Ensuite, j'expose plus précisément les expériences de laboratoire qui ont été menées pour aboutir à la mise en place de la loi de diffusion du gaz interstitiel, puis je donne les différentes équations du modèle ainsi que les détails de la rhéologie qui permet de prendre en compte la pression du gaz dans la dynamique globale.

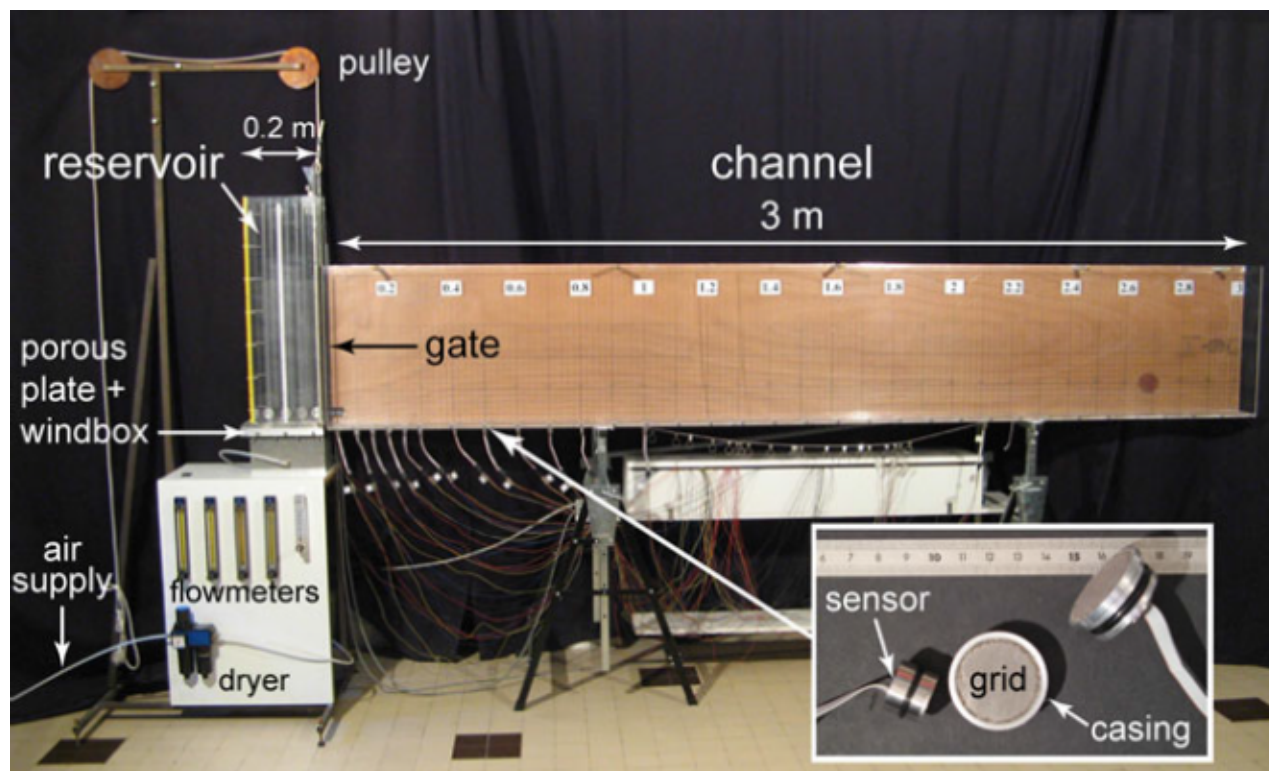


FIGURE II.1 – Photo du dispositif expérimental pour l'écroulement de colonne granulaire dans un chenal, extrait de [ROCHE, 2012].

II.2.1 Les expériences de laboratoire : le comportement du gaz

La première étape de recherche dans l'étude des écoulements granulaires denses volcaniques est expérimentale. Au LMV, l'équipe d'Olivier Roche développe des expériences de laboratoire avec des lits granulaires denses fluidisés. Pour reproduire expérimentalement le comportement observé dans la nature, ce lit granulaire est composé de fines billes de verre de taille homogène ou hétérogène dont le diamètre varie de quelques dizaines à quelques centaines de micromètres. Le dispositif expérimental est représenté par la figure II.1. Il permet de simuler des ruptures de barrage par l'ouverture subite d'une porte séparant le matériau granulaire du chenal. À l'ouverture de la porte, les grains en position instable vont tomber pour créer une dynamique menant le tout en quelques secondes à une nouvelle position de repos final (cf. figure II.2). C'est cette dynamique et la forme de cet état final qui nous intéressent dans le cas de l'écroulement d'une colonne granulaire fluidisée.

Pour comprendre un peu mieux l'influence qu'a le gaz dans ce type d'écoulements, nous allons déjà donner quelques résultats d'expériences statiques sur l'état initial du système. Dans cet état, les grains sont au repos, *i.e.* leur vitesse est nulle. La fluidisation consiste alors à injecter un gaz (de l'air, dans notre situation) à travers le lit granulaire. Pour ce faire, le fond du réservoir est constitué d'une plaque poreuse qui permet le passage de l'air tout en empêchant les grains de tomber. Afin de connaître le comportement du gaz dans le lit granulaire, des expériences statiques ont été menées. Il s'agit d'observer ce qu'il se passe dans le réservoir (porte fermée) lorsqu'on injecte le gaz à différentes vitesses, puis lorsqu'on coupe l'arrivée de gaz. Les résultats de ces expériences sont présentés dans [ROCHE, 2012; GUEUGNEAU, 2015]. J'en résume ici les principaux aspects nécessaires à la compréhension du phénomène (voir aussi figure II.3) :

- la vitesse d'injection du gaz détermine la pression du fluide dans les pores du lit granulaire et

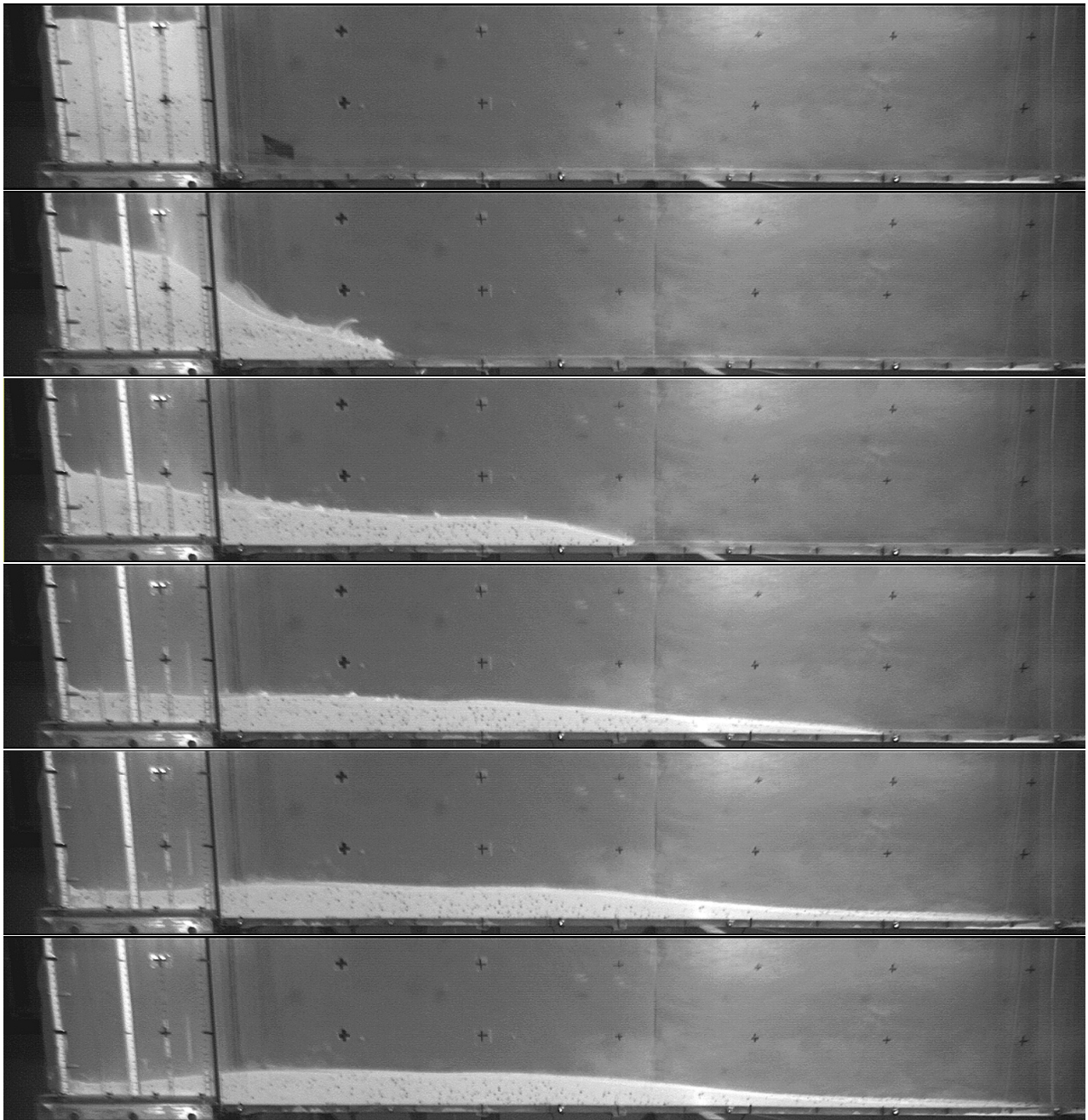


FIGURE II.2 – Écroulement d'une colonne granulaire initialement fluidisée - 1 image / 0.2 s - par Olivier Roche

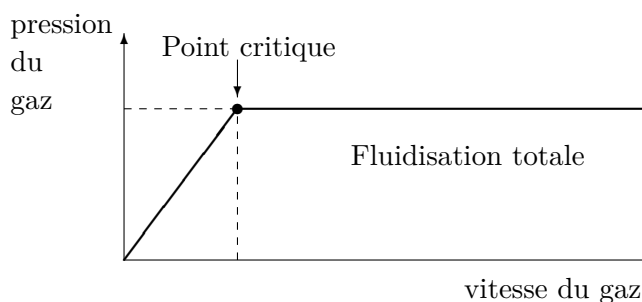


FIGURE II.3 – Évolution de la pression interstitielle en fonction de la vitesse moyenne du gaz dans une colonne granulaire.

donc le niveau de fluidisation.

- Lorsque la pression compense totalement la pression lithostatique liée au poids des grains, on atteint l'état critique de *fluidisation totale*. Il est critique au sens où si l'on augmente encore la vitesse d'injection, des bulles commencent à se former.
- À la coupure de l'injection, on observe une décroissance non linéaire de la pression avec le temps suivant une loi de type diffusion.

Pour des raisons de stabilité des expériences, nous nous intéressons uniquement aux fluidisations inférieures à ce seuil.

Afin de mieux comprendre les écoulements pyroclastiques, et notamment leur très longue distance de parcours, on va donc étudier un modèle dans lequel la pression de fluide interstitiel joue le rôle de paramètre de fluidisation du lit granulaire dense. Pour évaluer la pertinence du modèle, nous le testons *via* des simulations numériques visant à reproduire les expériences de laboratoire. Les résultats sont présentés dans le chapitre V.

II.2.2 Le modèle en équations : le couplage

Les équations de la mécanique des fluides

Avant de parler de fluidisation, voyons déjà les équations qui régissent l'écoulement lui-même. Je rappelle qu'on regarde l'interaction entre deux phases (granulaire dense et gazeuse) et que nous considérons les deux matériaux comme fluides et vérifiant des équations de la mécanique des milieux continus. Dans ce contexte, une manière naturelle de modéliser le mélange entre les deux phases est de coupler les équations d'écoulement de chacune des phases. L'interaction entre les deux s'exprime alors *via* un terme source dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. Cette méthode a déjà été explorée par MERUANE et collab. [2010] et est en train d'être développée par El-Hadji Koné en collaboration avec Anne Mangeney et François Bouchut à l'IPGP¹. La difficulté réside alors dans la définition du terme d'interaction entre les matériaux.

Afin de simplifier le modèle, je me base sur des considérations phénoménologiques qui permettent de voir le mélange comme étant un seul fluide dont les caractéristiques physiques varient au cours de l'écoulement, notamment en fonction de la valeur de la pression du fluide ambiant. En particulier, la densité du fluide-mélange est variable en fonction du temps et de l'espace et son évolution nous permet de suivre la surface de la phase granulaire au cours de l'écoulement. Cela implique que dans le mélange, le champ de vitesse s'applique indifféremment à une particule granulaire ou à du gaz. Bien entendu, cela ne permet pas de décrire complètement la physique du mélange. Par exemple, ce

1. Institut de Physique du Globe de Paris

modèle ne voit pas la variation de la pression du fluide en fonction de la vitesse d'injection du gaz dans la phase de fluidisation d'une colonne granulaire statique. Mais ce point de vue suffit à décrire la dynamique d'écroulement et de défluidisation, ce qui convient parfaitement à notre étude. Il comporte d'ailleurs les mêmes équations (mais avec une rhéologie et des conditions aux bords différentes) que le problème à surface libre proposé pour l'étude de l'écroulement de colonne granulaire non fluidisée dans [IONESCU et collab., 2015].

On s'intéresse donc à un fluide à densité variable constitué du mélange grains-air. De plus, on suppose que l'écoulement est en régime incompressible. Cette hypothèse n'est pas contradictoire avec la compressibilité du gaz, simplement elle suppose que les vitesses sont suffisamment faibles pour qu'on néglige les effets de compressibilité dans la dynamique d'écoulement. Le problème relatif à ce type d'écoulement est bien connu. Ses équations sont celles du modèle de Navier-Stokes incompressible à densité² variable, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \operatorname{div}(2\mu D\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}) = \rho \mathbf{g}. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Il s'agit en fait de relations de conservations de la masse d'une part (équation (II.1)₁) et de quantité de mouvement d'autre part (équation (II.1)₃), complétées de la contrainte d'incompressibilité (II.1)₂. La lettre \mathbf{g} désigne le vecteur d'accélération de pesanteur :

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

C'est la force de pesanteur qui intervient dans l'équation, car on s'intéresse effectivement aux écoulements gravitaires.

Les inconnues du système sont la vitesse \mathbf{v} du mélange, sa masse volumique ρ et la pression totale p . La lettre $\boldsymbol{\sigma}$ désigne la partie à seuil du tenseur des contraintes internes. Cette quantité n'est pas une inconnue car elle dépend de la vitesse \mathbf{v} , ou plus précisément du tenseur de déformation $D\mathbf{v}$ qui est la partie symétrique du gradient de la vitesse du mélange, *i.e.*

$$D\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t).$$

C'est elle qui détermine comment le fluide se comporte sous l'action d'une contrainte. En fonction du fluide qu'on décrit, plus précisément en fonction de sa rhéologie, cette quantité n'a pas toujours la même expression. Dans le paragraphe suivant, je détaille comment le mélange change de rhéologie en fonction de la pression du gaz interstitiel dans le modèle.

Les fluides à seuil

Les fluides à seuil sont des fluides non newtoniens qui peuvent prendre l'aspect d'un solide lorsqu'ils sont soumis à des contraintes suffisamment faibles. Les exemples typiques sont la mayonnaise ou le dentifrice. Si on dépose une certaine quantité de ces matériaux sur un plan, qu'on incline de plus en plus (tout en restant en dessous d'un angle maximum dépendant du matériau), alors au lieu de couler comme un liquide, ils vont rester en bloc. Par contre, dès qu'on exerce une contrainte suffisamment grande, ils se comportent comme un fluide visqueux, dont la viscosité dépend de la nature du matériau. Le seuil est donc la contrainte limite séparant ces deux comportements rhéologiques différents. Je renvoie également aux simulations numériques du paragraphe IV.7.1 pour plus

2. Le mot *densité* désigne la masse volumique normalisée par la masse volumique de l'eau en conditions standard.

de détails sur ce type de matériau.

Lorsque le seuil est constant, alors le fluide est aussi appelé *fluide de Bingham*. Et si on note τ_0 la contrainte seuil, alors le tenseur de contrainte s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq |\tau_0| & \text{si } D\mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Remarque II.1. La relation (II.2) ci-dessus est équivalente à la version plus classique, dans laquelle le seuil de plasticité est une borne sur la contrainte $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu D\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}$ et non sur $\boldsymbol{\sigma}$ seule, *i.e.* :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu D\mathbf{v} + \tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0, \\ |\tilde{\boldsymbol{\sigma}}| \leq |\tau_0| & \text{si } D\mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Dans l'étude des matériaux granulaires fluidisés, nous allons exploiter cette idée afin d'expliquer la grande variation de comportement du lit granulaire au cours de l'écoulement.

Mais avant cela, faisons un point sur la notation $|\cdot|$. Lorsqu'elle est appliquée à un réel, cette notation désigne la valeur absolue. Mais s'il s'agit d'un tenseur (*i.e.* une matrice), c'est alors la norme définie par

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{\frac{\mathbf{D} : \mathbf{D}}{2}}, \text{ pour n'importe quel tenseur } \mathbf{D}.$$

Il s'agit donc de la norme de Frobenius divisée par le coefficient $\sqrt{2}$. On justifie cette définition par le fait qu'on applique cette norme à des tenseurs symétriques.

Remarque II.2. En mathématiques, la norme ci-dessus n'est pas très courante. On lui préfère la norme de Frobenius définie par

$$|\mathbf{D}|_F = \sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}} = \sqrt{2} |\mathbf{D}|, \text{ pour n'importe quel tenseur } \mathbf{D}.$$

Dans ce cas, la relation (II.2) s'écrit

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{2}\tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}|_F \leq \sqrt{2}|\tau_0| & \text{si } D\mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Pour plus de commodité, lorsqu'on utilise cette norme de tenseur plutôt que la précédente, on note $\tau_0^F = \sqrt{2}\tau_0$ le coefficient désignant le seuil de contrainte par rapport à la norme de Frobenius.

Rhéologie fluidisée

Avant de me lancer dans la description technique du choix de rhéologie que nous avons fait, j'explique brièvement ce qu'est la rhéologie en général et du point de vue des mesures de laboratoire en particulier.

Comme je disais plus haut, la rhéologie consiste à décrire le comportement d'un fluide sous l'action d'une contrainte. En général, on peut mesurer cet effet par la mise en œuvre d'une expérience en laboratoire dans laquelle toutes les conditions sont bien contrôlées et qui permet de déduire une loi ne dépendant que du fluide lui-même. Dans ce sens, plusieurs types de *rhéomètres* existent. Je ne vais pas m'étendre sur le sujet, mais simplement donner l'exemple le plus courant et à mon avis le plus

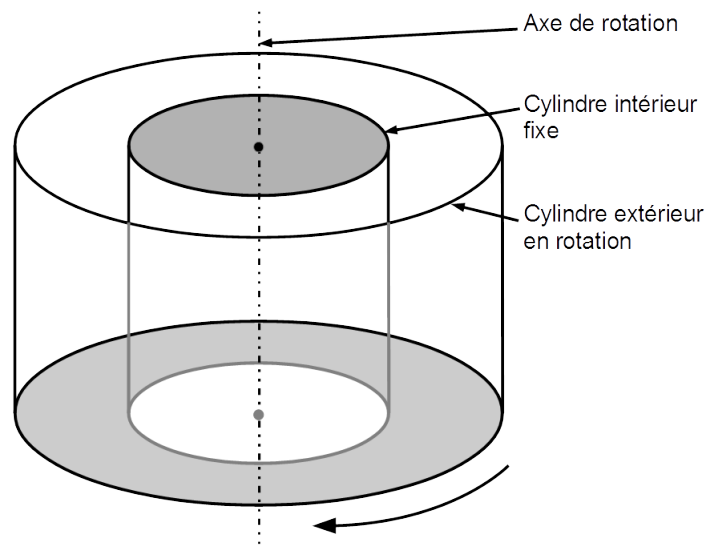


FIGURE II.4 – Schéma d'un rhéomètre rotatif cylindrique.

parlant. Il s'agit du rhéomètre rotatif. Il est composé de deux cylindres coaxiaux formant une cuve, qu'on remplit du fluide étudié (voir Figure II.4). En imposant un couple entre les deux cylindres (l'un statique, l'autre mobile), et en mesurant la vitesse de rotation induite par la présence du fluide entre les deux, on en déduit la valeur des paramètres rhéologiques du fluide.

La grande difficulté liée à l'étude de la rhéologie des milieux granulaires denses fluidisés est la dispersion des mesures rhéologiques. Quand on observe la colonne granulaire fluidisée, on peut affirmer qu'elle se comporte globalement comme un fluide comparable à de l'eau. Mais contrairement au cas d'un liquide newtonien comme l'eau, les mesures de viscosité dépendent significativement du type de rhéomètre utilisé et des conditions de l'expérience. On ne peut donc pas affirmer que la viscosité est une propriété du matériau, cependant on peut toujours voir la viscosité comme paramètre caractérisant le comportement de cisaillement du fluide dans la situation expérimentale.

Dans ces conditions, il est très difficile de trouver une loi englobant l'ensemble des résultats expérimentaux, qui peuvent être issus de protocoles et de conditions assez variés. Si dans le cas des écoulements granulaires denses non fluidisés (ou faiblement fluidisés), un consensus semble avoir été trouvé notamment grâce au travail du GdR Midi [MIDI, 2004], il n'en est rien pour les écoulements fluidisés qu'on souhaite étudier ici. Pour compléter les études expérimentales, il devient alors utile de faire appel à un modèle mathématique pour approcher le comportement par des modèles théoriques. En effectuant des simulations numériques reproduisant les expériences de laboratoire, on peut regarder l'influence de certains paramètres physiques et de certaines lois pour améliorer la compréhension du fluide étudié. C'est cette démarche que nous avons entreprise en proposant une façon différente de modéliser le comportement du fluide dans la configuration de l'écroulement de colonne dans un chenal.

Dans notre conception des écoulements granulaires denses fluidisés, la présence du gaz sous pression compense les effets de la gravité en soulevant très légèrement les grains et en cassant toutes les liaisons physiques (friction, roulement, glissement, choc) entre eux, ce qui rend justement le lit

granulaire plus fluide. Cependant, le gaz interstitiel ne reste pas emprisonné dans le lit granulaire : il peut s'échapper par porosité tout au long de l'écoulement. Son effet de fluidisation n'est donc pas constant tout au long du processus.

Afin de comprendre les caractéristiques macroscopiques des écroulements de colonnes granulaires denses initialement fluidisées, notamment leur distance de parcours et leur comportement au moment du freinage, on fait donc varier les paramètres rhéologiques du fluide-mélange en fonction de la pression du gaz interstitiel. Dans notre modèle, le mélange étant considéré viscoplastique, il possède une viscosité et un seuil de plasticité. Sa viscosité est considérée constante et son seuil dépendant de la pression granulaire (ou solide) p_s définie par la relation (II.6) donnée plus loin. En ce sens, le modèle est proche du modèle de Drucker-Prager [HJIAJ et collab., 2003; IONESCU et collab., 2015; LUSSO et collab., 2015], ce dernier définissant le seuil en fonction de la pression totale du fluide au lieu de la pression granulaire. La rhéologie de $\mu(I)$ développée par le MIDI [2004] peut quant à elle être vue comme une version à viscosité variable du modèle de Drucker-Prager, pour laquelle la viscosité dépend entre autres aussi de la pression totale (voir [IONESCU et collab., 2015]). Mais je rappelle que ces modèles peuvent conduire à des problèmes mal posés (voir page 15) et c'est principalement pour cette raison qu'on limite la définition du seuil de plasticité à la pression granulaire, qui est en fait une pression hydrostatique. De plus, lorsqu'on considère un lit granulaire fluidisé comme décrit plus haut, le seuil varie non seulement en fonction de la pression granulaire p_s mais également en fonction de la pression du fluide interstitiel p_f suivant la relation (II.4) ci-dessous.

En se basant sur la rhéologie viscoplastique, on écrit le tenseur de contraintes internes sous la forme $\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}(\tau_0, D\mathbf{v})$ où τ_0 est le seuil de plasticité du fluide. Dans le cas d'un matériau granulaire dense sec (non fluidisé), le seuil est lié à l'angle de frottement interne α par la relation : $\tau_0 = p_s \tan(\alpha)$, où p_s représente la pression granulaire (qu'on appellera aussi *pression solide*). Pour modéliser la fluidisation et la prendre en compte dans l'écoulement, on fait aussi dépendre le seuil τ_0 de la pression du fluide interstitiel. Partant du constat que le mélange est complètement fluide lorsque la pression du gaz interstitiel compense totalement la pression lithostatique granulaire dans la colonne (*i.e.* à l'état initial fluidisé), il est naturel d'annuler τ_0 à l'état fluidisé. Mais lorsque le gaz s'échappe par porosité du milieu granulaire, la pression diminue entre les grains et le mélange se comporte très différemment : les forces de frottement entre grains sont beaucoup plus importantes. Ainsi, nous avons choisi une loi qui passe d'un état à l'autre de façon linéaire :

$$\tau_0 = \tan(\alpha)[p_s - p_f]^+, \quad (\text{II.4})$$

où $[p_s - p_f]^+ = \max\{p_s - p_f, 0\}$ est la partie positive de la différence entre la pression solide granulaire et la pression du fluide interstitiel. Elle interdit ainsi les valeurs négatives pour τ_0 . Il reste donc à donner la définition de la pression solide p_s ainsi qu'une équation sur l'évolution de la pression fluide p_f pour fermer le système.

Commençons par cette dernière. Des études expérimentales de colonne granulaire fluidisée statique ont été menées en laboratoire (voir [MONTERRAT et collab., 2012; ROCHE, 2012]) montrant qu'à travers le lit granulaire initialement fluidisé, le gaz interstitiel s'échappe par les pores du milieu granulaire, laissant sa pression décroître. La loi de décroissance est donnée par l'équation de diffusion :

$$\partial_t p_f - \kappa \Delta p_f = 0,$$

où κ est le coefficient de diffusion dépendant des caractéristiques physiques du milieu granulaire. La transcription de cette loi au cas dynamique se fait en ajoutant un terme de transport par la vitesse du mélange \mathbf{v} . Cela conduit à une équation d'advection-diffusion du gaz, dans laquelle le terme de diffusion reste celui lié à l'étude statique, donc à la porosité du lit granulaire, et le terme de dérivée temporelle $\partial_t p_f$ est remplacé par un terme de dérivée totale $\partial_t p_f + \text{div}(p_f \mathbf{v})$ correspondant

au transport (ou advection) de la pression à la vitesse \mathbf{v} . La relation (II.5) qui en découle est donc une relation phénoménologique de transport diffusif :

$$\partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0. \quad (\text{II.5})$$

On pourra trouver des données relatives à la valeur du coefficient de diffusion κ de la pression interstitielle dans [ROCHE, 2012].

A priori on pourrait dire que la pression p_s correspond en fait à la pression liée à la contrainte d'incompressibilité du mélange, *i.e.* $p_s = p$. C'est ce qui est d'ailleurs proposé dans le modèle de type Drucker-Prager. Si on faisait ce même choix, notre modèle se réduirait à celui d'un fluide de Drucker-Prager sans cohésion (au sens de la définition donnée par IONESCU et collab. [2015]) lorsque le taux de fluidisation est nul. Cependant, pour des raisons mathématiques, on ne sait pas montrer que dans ce cas le système est bien posé, *i.e.* qu'il admet une et une seule solution (l'existence et l'unicité posent problème). C'est pourquoi dans cette étude nous prendrons pour p_s la définition de la pression dite *lithostatique* (ou *hydrostatique*), à savoir la pression liée à la pesanteur :

$$p_s(x, y, t) = \int_y^{y_{ref}} \rho(x, \xi, t) g d\xi. \quad (\text{II.6})$$

Autrement dit, la masse volumique ρ étant dépendante de la fraction volumique granulaire, il s'agit de la pression qu'exerce une colonne de grain et de gaz à la profondeur $y_{ref} - y$ sous l'action de la pesanteur, prenant comme référence la pression à l'altitude $y = y_{ref}$, et ceci dans une configuration statique. En particulier, si la pression de référence se trouve en dehors du lit granulaire, celle-ci correspond à la pression atmosphérique, si bien qu'au-dessus du lit granulaire, la pression solide p_f est bien nulle.

Remarque II.3. Dire que la pression n'importe où dans l'air est constante et égale à la pression atmosphérique est en réalité une approximation. Elle n'est valable que pour des différences de hauteurs suffisamment faibles, ce qui est notre cas dans ce mémoire, puisque les cas traités numériquement seront au plus d'une hauteur de 30 cm. Cependant, pour s'assurer que le fluide ambiant soit bien à seuil nul dans les simulations, nous mettrons en place un test en fonction de la valeur de la masse volumique (voir (V.1), où on prend comme altitude de référence le haut du domaine).

Modèle complet

On peut écrire les équations du modèle ensemble pour obtenir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \operatorname{div}(2\mu D\mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \tan(\alpha) \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}([p_s - p_f]^+, D\mathbf{v})) \\ \partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.7})$$

où

- α est l'angle de frottement interne du matériau granulaire, supposé constant et connu,
- μ est la viscosité apparente du mélange,
- $\rho = \phi \rho_s + (1 - \phi) \rho_f$ est la masse volumique du mélange, ϕ étant la fraction volumique de solide,
- $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie pour toute fonction τ_0 à valeurs réelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\tau_0, D\mathbf{v}) = \tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} \quad \text{si } D\mathbf{v} \neq 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}(\tau_0, D\mathbf{v})| \leq |\tau_0| \quad \text{si } D\mathbf{v} = 0. \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\tau_0, D\mathbf{v}) : D\mathbf{v} = \tau_0^F |D\mathbf{v}|_F, \\ |\boldsymbol{\sigma}(\tau_0, D\mathbf{v})|_F \leq |\tau_0^F|, \end{array} \right. \quad (\text{II.8})$$

où, rappelons-le, $\tau_0^F = \sqrt{2} \tau_0$.

- La pression solide p_s est définie par (II.6).

Le modèle complet est ainsi constitué du système (II.7) couplé aux relations (II.6) et (II.8).

Remarque II.4. Nous verrons que selon les cas (étude théorique ou numérique), il sera plus commode de prendre la définition explicite (II.8)₁ ou la définition implicite (II.8)₂ pour σ .

Liens avec d'autres modèles de la littérature

Comme mentionné plus haut, dans le cas où il n'y a pas de fluidisation du lit granulaire par injection de gaz, le modèle que nous proposons se réduit à une version sans cohésion de fluide de Drucker-Prager défini par la relation (I.1), version dans laquelle la pression totale p est remplacée par la pression hydrostatique p_s . C'est une approximation qui consiste donc à ne considérer que les aspects statiques de pression dans la variation du seuil de plasticité du fluide. Comme nous le verrons dans le Chapitre III, cette approximation permet d'accéder à un théorème d'existence de solution pour ce type de modèle qui souffre sinon généralement d'un caractère mal posé (voir page 15). De plus, à ma connaissance, le modèle de fluide de Drucker-Prager n'a pas encore été étendu au cas d'un lit granulaire initialement fluidisé.

Pour l'étude de l'influence du fluide ambiant sur la dynamique de l'écoulement d'un lit granulaire, des modèles à deux phases ont été proposés (voir par exemple [MERUANE et collab., 2010]). Pour ceux-ci, le fluide ambiant est traité avec la même importance que la phase granulaire, ce qui devrait pouvoir permettre une meilleure prise en compte de la fluidisation par injection de gaz dans le lit granulaire. Cependant, ces modèles n'ont pas non plus encore été testés dans le cas particulier d'un lit granulaire dense initialement fluidisé.

Dans notre étude, comme dans celles citées juste avant, le comportement du lit granulaire est intimement lié à la présence du gaz car on s'intéresse effectivement à l'influence de ce dernier sur la dynamique globale. Le modèle qui en découle montre de fortes analogies avec d'autres types de modèles développés en volcanologie et s'appliquant plutôt à l'étude des coulées de lave : les modèles thermodépendants. Ceux-ci proposent généralement de modéliser une coulée de lave par un écoulement de fluide viscoplastique dont les paramètres (viscosité, seuil de plasticité) dépendent de sa température (voir par exemple [SPERA et collab., 1982; DRAGONI, 1989]). Dans ce cas, pour compléter les équations de la mécanique des fluides viscoplastiques incompressibles, on peut considérer l'équation de la chaleur (résultant de la conservation de l'énergie) sur la température vue comme une inconnue du problème [BERNABEU et collab., 2015]. Le système d'équations qui en résulte est alors comparable à celui du modèle présenté ici, dans lequel la pression hydrostatique p_s est remplacée par la température du fluide. Bien entendu, les lois de thermodépendance des paramètres sont différentes de celles qu'on propose ici pour représenter la variation du seuil de plasticité en fonction de la pression hydrostatique. Mais comme on peut le voir, l'étude de ces deux types d'écoulements volcaniques physiquement très différents peuvent mener à des modèles comparables et donc à des problématiques semblables. En particulier, la résolution numérique de ces équations est soumise à des contraintes assez proches. Dans ce contexte, nous allons principalement nous référer à un cas très particulier d'écoulement thermodépendant : il s'agit du modèle de Navier-Stokes-Boussinesq, qui traite le cas d'un fluide newtonien soumis à une source de chaleur et qui est valide lorsque la variation de densité est négligeable devant les effets de la gravité.

Un cas de référence : Navier-Stokes-Boussinesq

Dans la partie numérique de ce mémoire, je présente quelques résultats de tests de validation effectués sur le code que Thierry Dubois et moi avons développé. Une partie de ces tests (voir chapitre IV.7.2) n'ont pas été effectués directement sur le modèle dont je parle dans ce chapitre, mais

sur un modèle qui présente des équations semblables à celles de notre modèle, à savoir équations de Navier-Stokes-Boussinesq.

La base du modèle de Boussinesq est donc bien la mécanique des fluides, comme dans le cas qui nous intéresse. Une ressemblance supplémentaire réside dans le couplage des équations de Navier-Stokes incompressibles avec une équation d'advection-diffusion sur la température du fluide. La différence se situe au niveau de la nature du couplage. Dans le modèle de Boussinesq, la température agit sur l'écoulement *via* un terme source de force qui contraint les parties les plus chaudes à s'élever et investir les couches les plus hautes de l'écoulement. Il s'agit donc d'une approximation au premier ordre de la variation de la masse volumique en fonction de la température dans un modèle incompressible. On suppose que la densité est la somme d'une partie constante et d'une partie proportionnelle au gradient de température :

$$\rho = \rho_0 + \beta\rho_0\Delta\theta,$$

avec un coefficient de proportionnalité β appelé *dilatation thermique*. Cette hypothèse est par exemple valable dans un milieu quasi-homogène. Le terme d'interaction vitesse-température résultant est alors lui aussi proportionnel à la différence de température selon la direction du poids (et en sens opposé). La température, quant à elle, suit une loi de transport diffusif dont le coefficient de diffusion est encore noté κ (même s'il est différent du coefficient de diffusion de la pression fluide). Dans le cas d'un fluide newtonien, les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \\ \rho(\partial_t\mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) + \nabla p - \operatorname{div}(2\mu D\mathbf{v}) = \rho(1 - \beta(\theta - \theta_{ref}))\mathbf{g}, \\ \partial_t\theta + \operatorname{div}(\theta\mathbf{v}) - \kappa\Delta\theta = 0, \end{cases}$$

où θ désigne la température du fluide en tout point de l'écoulement et θ_{ref} une température de référence. Dans le cadre de l'étude des écoulements pour la volcanologie, ce type de modèle a déjà été employé pour comprendre les coulées de laves volcaniques (cf. [BERNABEU, 2015]). Dans ce cas, le terme source est négligeable (approximation $\beta = 0$) devant les autres paramètres mis en jeu et la viscosité dépend de la température suivant une loi d'Arrhenius [BERNABEU et collab., 2015]. Mais son utilisation est surtout répandue dans le monde des écoulements des gaz en régime incompressible, pour lesquels de nombreuses études ont été effectuées du point de vue numérique. Ce socle, bien qu'assez éloigné de la physique du phénomène étudié, nous servira pour la validation des schémas numériques mis en œuvre pour notre étude à la section IV.7.

II.3 Adimensionnement

Dans cette section, nous allons donner la version sans dimension des équations (II.7)-(II.8). Mais penchons-nous d'abord sur la signification et l'utilité de la démarche.

Passer d'un système dimensionné à un système équivalent sur des variables sans dimension permet d'abord de synthétiser les caractéristiques du système physique en réduisant le nombre de paramètres. Ainsi on peut par exemple aisément comparer deux systèmes physiques n'ayant pas forcément les mêmes échelles. En particulier, cela est indispensable dans la conception de maquettes visant à reproduire les conditions du phénomène observé dans la nature, mais dans des conditions plus propices à la prise de mesure. L'adimensionnement permet également de faire des analyses asymptotiques lorsqu'un phénomène est négligeable par rapport aux autres et ainsi de justifier certaines approximations. Que ce soit pour des raisons scientifiques ou simplement par commodité d'écriture, il est donc souvent préférable de procéder à l'adimensionnement des équations d'un système.

La première étape de la démarche consiste à identifier l'ensemble des variables du système physique.

On normalise ensuite chacune des variables en identifiant des quantités de référence (taille caractéristique L_{ref} , vitesse d'écoulement V_{ref} , masse volumique de référence ρ_{ref} , etc...). Bien entendu, lorsque c'est possible, on réduit le nombre de quantités de référence en utilisant les éventuelles relations liant certaines d'entre elles. Par exemple, lorsqu'on a une longueur et une vitesse de référence, on en déduit un temps de référence égal au rapport de la longueur (en m) sur la vitesse (en m/s). En divisant ensuite par une certaine quantité à déterminer en fonction du système, on fait apparaître des 1 devant les termes prépondérants et de manière naturelle des nombres sans dimension devant les autres termes. Ces nombres sans dimension sont généralement bien connus. Voici ceux qui nous concernent et leur définition. Les trois premiers sont liés aux paramètres d'écoulement du fluide. Le nombre de Reynolds :

- $Re = \frac{\rho_{ref} L_{ref} V_{ref}}{\mu}$,

le nombre de Froude :

- $Fr = \frac{V_{ref}}{\sqrt{gL_{ref}}}$

et le nombre de Bingham (Bi), qui provient du terme de plasticité du fluide et s'exprime par la formule :

- $Bi = \frac{\tau_{ref} L_{ref}}{\mu V_{ref}}$.

Pour l'équation d'advection-diffusion, c'est le nombre de Péclet (Pe) qui apparaît, avec :

- $Pe = \frac{L_{ref} V_{ref}}{\kappa}$.

Remarque II.5. Pour l'étude des écoulements chauffés, le nombre de Rayleigh (Ra) intervient naturellement au second membre dans l'approximation de Boussinesq. Il est défini par :

- $Ra = \frac{\rho_{ref} g \beta \theta_{ref} L_{ref}^3}{\mu \kappa}$.

Attention, nous verrons dans le paragraphe IV.7.2 que pour cette définition la température de référence pertinente est en fait une différence entre deux températures extrêmes $\theta_{ref} = \theta_{max} - \theta_{min}$.

Pour terminer, nous allons noter Pr le nombre de Prandtl. Il est égal au rapport de la viscosité cinématique ν par la diffusivité κ de l'équation d'advection-diffusion :

- $Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\mu}{\rho_{ref} \kappa} = \frac{Pe}{Re}$.

Tous ces nombres sont sans dimension et sont donc des rapports de quantités de même dimension. Par exemple le nombre de Reynolds (Re) peut être vu comme le rapport de la viscosité dynamique du matériau et de la viscosité de référence liée à la vitesse, la longueur et la masse volumique de référence. Selon si sa valeur est grande ou petite par rapport à 1, l'écoulement n'est pas de même nature et cela peut être valable pour un même fluide. Prenons l'exemple de l'air. On peut mesurer sa viscosité dynamique grâce à un rhéomètre. Elle est de l'ordre de $\mu = 10^{-5} Pa.s$. Sa masse volumique est de l'ordre de $\rho = 1 kg/m^3$. Donnons-nous un cylindre à section circulaire d'un mètre de diamètre et laissons s'écouler l'air à l'extérieur à différentes vitesses. Si l'air va à une vitesse inférieure à $10^{-5} m/s$, alors le nombre de Reynolds correspondant est inférieur à 1 et l'écoulement est laminaire (non turbulent). Cela ne signifie pas forcément qu'aucun tourbillon ne se forme, mais que l'écoulement suit bien la forme de l'obstacle (le cylindre) sans créer d'instabilité irrégulière.

Donc si ce modèle est une maquette à échelle réduite au centième, comme on réduit la taille de référence d'un facteur 100, contrairement à ce qu'on pourrait penser, il faut augmenter (et non diminuer) la vitesse du vent du même coefficient (multiplicatif) pour garder le même nombre de Reynolds, car c'est lui qui détermine le régime de l'écoulement.

Donner le modèle sans dimension sert donc à savoir exactement quel type de condition on reproduit, quelles que soient les dimensions ou les vitesses ou les caractéristiques du fluide qu'on utilise,

l'important étant toujours de comparer des jeux de données provenant de situations avec les mêmes valeurs de nombre de Reynolds, de Froude, etc. . .

Modèle granulaire fluidisé sans dimension

Quantités de référence

Compte tenu des remarques faites dans le paragraphe précédent, il me paraît judicieux de consacrer une petite partie au choix des quantités de référence. Commençons par préciser quelques données physiques des expériences numériques. En premier lieu, prenons une longueur de référence, qu'on note :

- L_{ref} .

Celle-ci dépend de la situation qu'on étudie et sera précisée si nécessaire.

Dans le cas de l'éroulement d'une colonne granulaire, on n'a pas de valeur *a priori* sur la vitesse, puisqu'à l'état initial et à l'état final elle doit être nulle. Dans ce cas, le choix qui s'impose est le suivant : $V_{ref} = \sqrt{gL_{ref}}$, g étant l'accélération de pesanteur.

- $V_{ref} = \sqrt{gL_{ref}}$

Remarquons que cette vitesse correspond à un nombre de Froude égal à 1. Et comme on a une vitesse (en $m.s^{-1}$) et une longueur (en m), on en déduit automatiquement le temps de référence en seconde :

- $T_{ref} = \frac{L_{ref}}{V_{ref}}$.

Pour la masse volumique, quand on modélise un écoulement à deux phases de densités différentes, le plus naturel est de se ramener à la fraction volumique granulaire $\phi = \frac{\rho - \rho_f}{\rho_s - \rho_f}$ dans l'équation de transport. Les masses volumiques ρ_s et ρ_f étant supposées constantes (et $\rho_s > \rho_f$), il suffit de prendre :

- $\rho_{ref} = \rho_s - \rho_f$.

Il reste maintenant à discuter de la valeur à prendre pour les pressions. En fait, comme l'équation de conservation de quantité de mouvement contient déjà intrinsèquement une pression (celle liée à l'incompressibilité), le choix naturel est de prendre la pression liée aux paramètres déjà sélectionnés :

- $p_{ref} = \rho_{ref} V_{ref}^2 (= \rho g L_{ref})$.

Ceci étant fait, on pourrait prendre également $\tau_{ref} = p_{ref}$ puisque ces deux quantités sont de même dimension. Mais dans ce cas, le tenseur de contrainte lié à la plasticité du fluide défini par (II.8) n'est pas normalisé à 1 mais à $\tan(\alpha)$. Pour le normaliser à 1, on définit alors naturellement le seuil de plasticité de référence par

- $\tau_{ref} = \rho_{ref} V_{ref}^2 \tan(\alpha) (= \rho g L_{ref} \tan(\alpha))$.

Les autres paramètres (viscosité et diffusivité) sont liés aux caractéristiques du matériau et sont supposés constants. Il n'y a donc pas d'ambiguïté quant au choix des valeurs de référence.

Les calculs et le résultat

Dans cette partie, j'effectue les calculs consistant à ramener toutes les équations de (II.7) à un nouveau système dans lequel toutes les quantités sont sans dimension. Pour cela, j'adopte la notation suivante : la lettre est surmontée d'un tilde ($\tilde{\cdot}$) quand la quantité ou l'opérateur est adimensionnée. Par exemple, la vitesse normalisée se note

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{V_{ref}}$$

et la divergence en deux dimensions d'espace par rapport aux variables sans dimension donne :

$$\tilde{\text{div}}(\cdot) = \partial_{\tilde{x}}(\cdot) + \partial_{\tilde{y}}(\cdot) .$$

Toutes les autres variables et tous les autres opérateurs suivent la même notation. Je détaille maintenant le calcul pour exprimer le terme dimensionné en fonction des quantités de références et des fonctions adimensionnées. Pour ne pas alourdir la lecture, voyons simplement le fonctionnement sur le premier terme de la conservation de quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}).$$

Par la règle de dérivation des fonctions composées, on peut écrire :

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) \left(= \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} \right) = \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial\tilde{t}} = \frac{1}{T_{ref}} \frac{\partial(\rho_{ref}\tilde{\rho} V_{ref}\tilde{\mathbf{v}})}{\partial\tilde{t}}.$$

Il suffit alors de se rappeler la définition du temps de référence T_{ref} pour obtenir simplement

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) = \frac{\rho_{ref}V_{ref}^2}{L_{ref}} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}).$$

On procède de la même manière pour tous les autres termes :

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \frac{\rho_{ref}V_{ref}^2}{L_{ref}} \tilde{\operatorname{div}}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}), \quad -\mu\Delta u = -\mu \frac{V_{ref}}{L_{ref}^2} \tilde{\Delta}\tilde{u}, \quad \partial_t p_f = \frac{p_{ref}V_{ref}}{L_{ref}} \partial_{\tilde{t}}\tilde{p}_f, \quad \text{etc...}$$

On peut remarquer que la quantité $\frac{\rho_{ref}V_{ref}^2}{L_{ref}}$ revient à plusieurs reprises. Elle a la dimension d'une force volumique et apparaît dans les premiers termes de l'équation de conservation de quantité de mouvement. Il est donc naturel de diviser tous les termes de l'équation par cette quantité afin de diminuer le nombre de coefficients dans l'équation. On peut faire de même pour l'équation d'advection-diffusion avec $\frac{p_{ref}V_{ref}}{L_{ref}}$. Ainsi, en enlevant les tildes pour alléger la notation, on obtient les équations adimensionnées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \frac{\mu}{\rho_{ref}L_{ref}V_{ref}} \Delta \mathbf{v} = \frac{\tau_{ref}}{\rho_{ref}V_{ref}^2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{e}_y \\ \partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \frac{\kappa}{L_{ref}V_{ref}} \Delta p_f = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.9})$$

Il reste maintenant à reconnaître les nombres sans dimension définis plus haut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{Pe}} \Delta \mathbf{v} = \frac{\operatorname{BiPr}}{\operatorname{Pe}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{e}_y \\ \partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \frac{1}{\operatorname{Pe}} \Delta p_f = 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

Remarque II.6. Dans le cas que nous étudions, le seuil de plasticité du lit granulaire fluidisé, vu comme un fluide-mélange, n'est pas constant. Je rappelle en effet que τ_0 dépend de la pression solide (définie par (II.6)) et de la pression fluide par la relation

$$\tau_0 = \tan(\alpha)[p_s - p_f]^+.$$

Dans ces conditions, nous avons choisi d'exprimer une contrainte de référence grâce aux masse volumique et vitesse de référence par

$$\tau_{ref} = \rho_{ref} V_{ref}^2 \tan(\alpha).$$

Le tenseur de contrainte sans dimension s'écrit donc

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\tau_0}{\tau_{ref}} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} \text{ si } D\mathbf{v} \neq 0, \text{ ou } |\boldsymbol{\sigma}| \leq \frac{\tau_0}{\tau_{ref}} \text{ si } D\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

De plus, on peut préciser que dans le cas non fluidisé, le rapport τ_0/τ_{ref} est égal à 1.

II.4 Conclusion

Compte tenu des particularités statiques et dynamiques des matériaux granulaires denses fluidisés, je propose ainsi un nouveau modèle mathématique dans lequel la pression du gaz interstitiel doit jouer un rôle prépondérant. En intervenant dans la définition du seuil de plasticité du fluide, celle-ci doit en effet contrôler l'équilibre entre le caractère fluide et le caractère plastique du mélange grain-air. Les équations qui régissent l'écoulement sont assez bien connues, mais n'ont jamais été étudiées telles quelles dans la littérature. Une étude approfondie tant d'un point de vue théorique que numérique doit donc être menée pour d'une part enrichir le degré de connaissance dans ce domaine et d'autre part vérifier si le modèle est pertinent dans notre cadre d'applications. C'est ce que j'ai entrepris durant ma thèse et que je présente dans la suite de ce mémoire. Le chapitre III est dédié à la preuve de l'existence de solution. Dans les chapitres IV et V, je décris toute la démarche numérique qui a été mise en place en collaboration avec Thierry Dubois pour simuler à la fin l'écroulement d'une colonne granulaire.

Chapitre III

Existence de solution

Sommaire

III.1 Solutions stationnaires	38
III.1.1 Introduction	38
III.1.2 Fluide de Bingham dans une canalisation infinie 2D	38
III.2 Solutions non stationnaires	42
III.2.1 Cadre mathématique et principaux résultats	43
III.2.2 Modèle homogène à seuil diffusé	49
III.3 Conclusions	63

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, les mathématiques appliquées ne sont pas la frontière entre les mathématiques et les autres sciences, mais bien un moyen permettant de passer cette frontière. Je veux dire par là qu'elles ne sont pas une matière à part entière, mais qu'elles ont pour essence de s'inspirer des questionnements physiques, chimiques, etc... pour développer les théories mathématiques et pour ensuite apporter des réponses à la question initiale. Il faut donc sans cesse faire la navette entre les problématiques propres à l'objet d'étude et celles liées à leur traitement mathématique pour finir par trouver une réponse satisfaisant les deux communautés. C'est pour satisfaire cet équilibre que je consacre tout ce chapitre à la démonstration théorique de l'existence de solution au problème d'écoulement vérifiant les équations du modèle que je propose pour les lits granulaires denses fluidisés. Ce chapitre est organisé autour de deux grandes parties : l'étude de solutions stationnaires et l'existence de solutions non stationnaires.

III.1 Solutions stationnaires

III.1.1 Introduction

Une solution stationnaire représente un état du système qui ne dépend pas du temps. En général, s'il n'y a pas d'apport d'énergie, un système n'a une solution stationnaire que s'il est à l'état de repos dès l'instant initial. Dès lors qu'une source d'énergie actionne le système, une solution stationnaire peut être un état en mouvement constant. Prenons l'exemple du rhéomètre rotatif circulaire (voir Figure II.4). Le rhéomètre étant rempli initialement d'un fluide au repos, on fait tourner le cylindre extérieur à une vitesse angulaire donnée. Le fluide au contact de cette paroi se met également en mouvement. Cependant, si le fluide adhère à la paroi, la partie au contact du cylindre fixe intérieur est immobile. La vitesse du fluide dépend donc de la distance qui le sépare du cylindre extérieur. Cela dessine ainsi un profil de vitesse qui dépend des caractéristiques du fluide et de la vitesse de rotation imposée au rhéomètre. Partant d'un état initial au repos, si on laisse tourner le système suffisamment longtemps, on remarque que le profil de vitesse n'évolue plus. L'état stationnaire est alors atteint.

L'étude mathématique des états stationnaires est généralement plus aisée que celle des dynamiques. Mais parfois elle est source de nouveaux problèmes pour les mathématiciens. Dans tous les cas, lorsqu'on a un modèle, il convient d'en trouver ses états stationnaires et de les comparer à ceux qu'on peut observer en laboratoire afin d'évaluer la validité du modèle au moins à ce niveau-là. D'autre part, lorsqu'on souhaite effectuer des simulations numériques à partir du modèle mathématique, il est également utile de connaître les états stationnaires théoriques pour tester le code de simulation dans ces configurations.

Dans le paragraphe suivant, je développe l'étude des états stationnaires atteints par un fluide de Bingham en 2D. Le résultat nous servira essentiellement à valider le code 2D dans la sous-section IV.7.2.

III.1.2 Fluide de Bingham dans une canalisation infinie 2D

On s'intéresse ici à l'écoulement stationnaire d'un fluide homogène de Bingham entre deux parois infinies parallèles distantes d'une longueur L_y . Les calculs qui suivent sont très classiques et on peut trouver une analyse plus complète incluant le cas axisymétrique par GRINCHIK et KIM [1972]. Dans ce paragraphe, nous détaillons plus précisément les étapes de la démarche menant à l'obtention de la solution stationnaire de Poiseuille-Bingham pour un fluide viscoplastique à seuil et viscosité constants dans cette configuration 2D.

Pour commencer, on place l'origine des ordonnées au centre du canal 2D, si bien que le domaine est

$$\Omega = \mathbb{R} \times [-L_y/2, L_y/2].$$

Les conditions aux parois sont des conditions de Dirichlet homogène, autrement dit on suppose que le fluide adhère à la paroi :

$$\mathbf{v}(y = -L_y/2) = \mathbf{v}(y = L_y/2) = \mathbf{0}. \quad (\text{III.1})$$

Pour compléter le système, comme donnée initiale on se donne une différence de pression entre deux section du canal $\{x = x_1\}$ et $\{x = x_2\}$ et on note λ la quantité

$$\lambda = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Comme le fluide est homogène, l'équation de conservation de la masse est trivialement vérifiée.

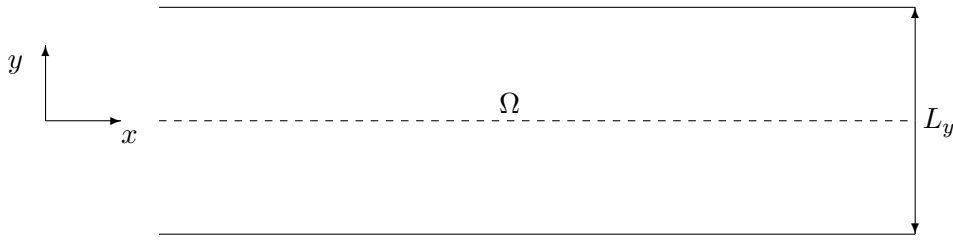


FIGURE III.1 – Canalisation bidimensionnelle.

On cherche donc une solution stationnaire vérifiant les équations (II.1)₂ et (II.1)₃ complétées par la définition (II.2). Pour simplifier quelque peu l'étude, nous considérons le système sans les forces de pesanteur. En fait cela revient à orienter l'axe des x dans la direction du poids et intégrer la force de gravité dans le terme de pression.

Comme la solution est par définition indépendante de la variable temporelle t , on sait déjà que

$$\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

De plus, on suppose que le champ de vitesse est longitudinal, *i.e.*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sous cette hypothèse, dans l'équation (II.1)₂ il reste

$$\partial_x u(x, y) = 0.$$

On en déduit que la composante u de la vitesse ne dépend que de la variable y . Ce faisant, le terme d'inertie est nul. En effet, puisque la densité est constante, on a

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \begin{pmatrix} \partial_x(uu) + \partial_y(uv) \\ \partial_x(vu) + \partial_y(vv) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

D'autre part, comme la partie à seuil σ du tenseur de contrainte est une fonction de la vitesse, elle ne dépend également que de y dans le domaine où $u'(y) \neq 0$. Pour l'instant, on suppose qu'il en va de même dans le cas où $u'(y) = 0$. Enfin, sous ces hypothèses, la deuxième composante de l'équation (II.1)₃ s'écrit

$$\partial_y p = 0,$$

et on en déduit que la pression est une fonction de la seule variable x . En particulier, on sait que

$$p'(x) = \lambda,$$

où λ est la donnée initiale de l'écoulement. En prenant en compte toutes ces remarques et en notant σ_{ij} les composantes du tenseur σ , du système initial il reste les équations :

$$\begin{cases} -\mu u''(y) + \lambda = \sigma'_{12}(y) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{12}(y) = \tau_0 \frac{u'(y)}{|u'(y)|} & \text{si } u' \neq 0 \\ |\sigma_{12}|(y) \leq \tau_0 & \text{si } u' = 0, \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où τ_0 est le seuil de plasticité du fluide. Je rappelle que dans ce mémoire, la norme d'un tenseur, notée $|\cdot|$, est la norme définie par

$$|D| = \sqrt{\frac{D:D}{2}}, \text{ pour n'importe quel tenseur } D.$$

Comme on s'intéresse à un fluide viscoplastique, on sait *a priori* qu'il peut admettre une zone quasi-statique, *i.e.* un bloc qui bouge d'un seul tenant, ce qui se traduit par la relation tensorielle $D\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Nous allons noter cette zone Ω_1 et le complémentaire dans Ω est noté Ω_2 .

Dans le cas où le fluide est en mouvement, *i.e.* $\Omega_2 \neq \emptyset$, dans chaque composante connexe du domaine Ω_2 , σ_{12} est identiquement égale au seuil τ_0 ou à son opposé et donc de dérivée nulle. Dans l'équation (III.2), il reste donc

$$-\mu u''(y) + \lambda = 0 \text{ dans } \Omega_2 \quad (\text{III.3})$$

qui donne directement le profil de vitesse sous forme d'un polynôme de degré 2 (cf. figure III.3) dans chaque composant connexe de Ω_2 .

Par symétrie du problème par rapport à l'axe des abscisses, on cherche une vitesse $u(y)$ paire. Cela implique que sa dérivée seconde est également paire et donc, d'après l'équation (III.2)₁, que la dérivée σ'_{12} est paire, *i.e.* σ_{12} impaire. Ainsi, on sait que $\sigma_{12}(0) = 0$. Les critères physiques de régularité de la solution nous disent d'autre part que la vitesse et la contrainte totale doivent être continues dans tout le domaine. Compte tenu de la situation, cela s'écrit :

- $y \mapsto u(y)$ continue dans Ω ,
- $y \mapsto \mu u'(y) + \sigma_{12}(y)$ continue dans Ω et
- $x \mapsto p'(x)$ continue dans Ω .

Cela implique d'abord que la contrainte $\mu u' + \sigma_{12}$ est égale à la valeur seuil $\text{signe}(u')\tau_0$ à chaque frontière entre Ω_1 et Ω_2 . Pour le vérifier, il suffit de remarquer que dans la zone "fluide" Ω_2 , la composante σ_{12} est du signe de u' , donc

$$|\mu u' + \sigma_{12}| = \mu |u'| + \tau_0 \text{ dans } \Omega_2$$

et que dans la zone "rigide" Ω_1 , la dérivée de la vitesse est uniformément nulle donc

$$|\mu u' + \sigma_{12}| = |\sigma_{12}| \leq \tau_0 \text{ dans } \Omega_1.$$

Pour que la condition de continuité soit respectée, on doit donc avoir à la fois

$$u' = 0 \text{ et } |\sigma_{12}| = \tau_0 \text{ à la frontière,}$$

ce qui prouve bien ce qu'on veut démontrer en se rappelant que σ_{12} est du signe de u' dans la zone "fluide" Ω_2 .

En particulier, on en déduit que si une zone quasi-statique existe, alors elle est connexe, *i.e.* en un seul bloc. En effet, si une telle zone existe, elle est sous forme d'une bande infinie $\mathbb{R} \times (y_1, y_2)$ (par invariance par rapport à x). Admettons qu'il en existe deux disjointes. Alors entre les deux, la vitesse doit avoir un profil polynomial d'ordre 2. Mais comme on vient de le voir, ce profil doit être de dérivée nulle de chaque côté. La seule possibilité est donc que la vitesse est constante entre les deux blocs rigides. Par continuité de la vitesse, on en déduit finalement que les deux zones rigides ainsi que la zone intercalée sont en fait une seule et même zone quasi-statique.

Enfin, par argument de symétrie cette zone doit se situer au centre du canal, comme le montre la Figure III.2 ci-dessous.

De plus, par continuité de la vitesse, on sait maintenant que son profil est composé de deux branches

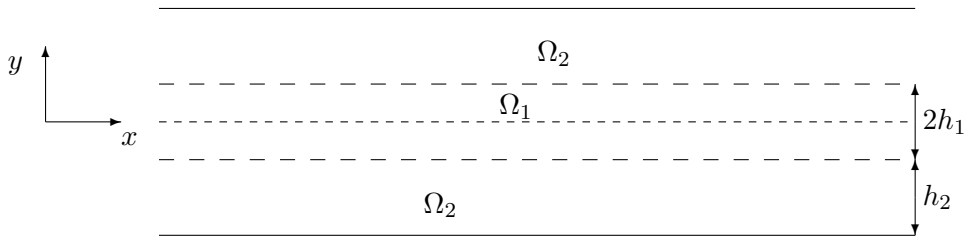


FIGURE III.2 – Répartition des zones fluides et quasi-statiques dans le canal.

de paraboles reliées par un plateau :

$$u(y) = \begin{cases} \frac{-\lambda}{2\mu} \left(\frac{L_y}{2} - y \right) \left(2h_2 - \left(\frac{L_y}{2} - y \right) \right) & \text{si } h_1 \leq y \leq \frac{L_y}{2} \\ \frac{-\lambda h_2^2}{2\mu} & \text{si } 0 \leq y \leq h_1 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

où h_2 est la hauteur de la zone "fluide" du demi-canal, *i.e.*

$$h_2 = \frac{L_y}{2} - h_1. \quad (\text{III.5})$$

On va maintenant terminer l'analyse en déterminant l'épaisseur $2h_1$ de la zone quasi-statique. Vu le profil (III.4), u' est identiquement nulle dans la zone Ω_1 et donc de dérivée nulle aussi. Il nous reste donc l'équation

$$p'(x) = \sigma'_{12}(y) \text{ dans } \Omega_1 \quad (\text{III.6})$$

dans laquelle toutes les fonctions sont identiquement égales à une même constante, qui n'est autre que la valeur λ qu'on s'est donnée au départ. En se rappelant que σ_{12} est une fonction impaire de y , on en déduit que

$$\sigma_{12}(y) = \lambda y \text{ dans } \Omega_1.$$

On va donc pouvoir déterminer l'épaisseur de la zone quasi-statique. On sait qu'en dehors de cette zone, *i.e.* dans Ω_2 , le seuil est forcément atteint exactement, donc $\sigma_{12} = \tau_0$ dans Ω_2 . Par continuité, on sait que la valeur au-dessus et en-dessous de la frontière entre Ω_1 et Ω_2 (dont la cote est notée h_1 dans la suite) sont égales, donc

$$\tau_0 = \lambda h_1.$$

On a donc déterminé l'épaisseur $2h_1 = \frac{2\tau_0}{\lambda}$ de la zone quasi-statique en fonction des valeurs du seuil et du gradient de pression.

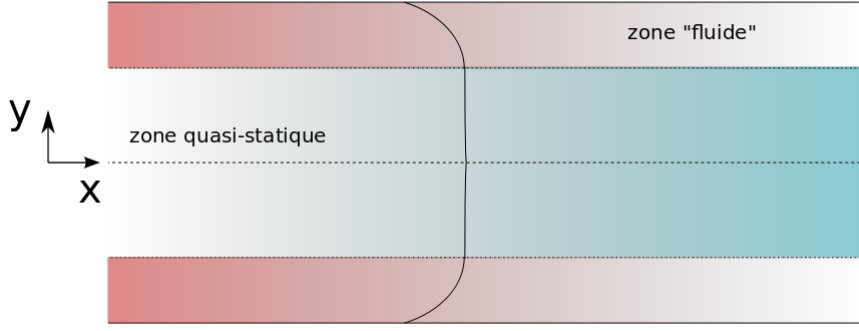


FIGURE III.3 – Écoulement d'un fluide de Bingham : profil de vitesse.

Remarque III.1. Dans le cas où on effectue cette analyse en utilisant la norme de Frobenius $|\cdot|_F$, l'épaisseur de la zone fluide est alors $2h_1 = \frac{\sqrt{2}\tau_0^F}{\lambda}$, résultat qu'on trouve dans certains articles (*e.g.* [ACARY-ROBERT et collab., 2012]).

III.2 Solutions non stationnaires

Une solution non stationnaire est une solution qui dépend du temps. Elle concerne donc tous les problèmes d'évolution. Dans le cas qui nous intéresse ici, on peut penser par exemple à l'éroulement d'une colonne dans un chenal. Partant d'un état initial instable, sous la seule action de la pesanteur le matériau se met en mouvement et finit par atteindre un état final.

Contrairement au cas stationnaire précédent, il est souvent difficile de trouver à la main une telle solution dépendant à la fois du temps et de l'espace. Si on veut connaître la solution, on en calcule alors une approximation par des méthodes numériques. Ceci fait l'objet de la deuxième partie de ce mémoire. Mais avant cela, on veut prouver de manière théorique l'existence, et si possible l'unicité, d'une telle solution.

Dans cette section, on prouve l'existence d'une solution du problème d'évolution régi par l'équation (II.7) complétée des relations (II.6) et (II.8) et partant d'une condition initiale

$$(\rho, \mathbf{v}, p_f)|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{v}_0, p_{f_0}).$$

Ce genre d'équation a déjà été étudié dans le cas de rhéologie constante, que ce soit pour des fluides de Bingham [BASOV et SHELUKIN, 2006] ou pour des fluides plus complexes [FERNÁNDEZ-CARA et collab., 1997]. Comme la réelle nouveauté du modèle réside dans le couplage rhéologie–diffusion de p_f , nous allons nous concentrer là-dessus en traitant la version homogène de notre modèle. La densité ρ est donc considérée comme uniforme, constante et strictement positive. On cherche alors une solution $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\sigma}, p_f)$ vérifiant le système suivant sur le domaine spatial Ω et entre les temps 0 et T :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \rho(\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) + \nabla p - \operatorname{div}(2\mu D\mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \tan(\alpha) \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}([p_s - p_f]^+, D\mathbf{v})) \\ \partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est défini par (II.8) et p_s par (II.6), avec les données initiales

$$(\mathbf{v}, p_f)|_{t=0} = (\mathbf{v}_0, p_{f_0}). \quad (\text{III.8})$$

Remarque III.2. Dans le cas des équations de la mécanique des fluides homogènes en régime incompressible, en utilisant la contrainte $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ on peut récrire le terme non linéaire $\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ comme suit :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (\text{III.9})$$

De même, les termes $\operatorname{div}(p_f \mathbf{v})$ et $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ sont respectivement égaux à $(\mathbf{v} \cdot \nabla) p_f$ et $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho$. Pour simplifier certaines opérations, nous utiliserons dans ce chapitre ces dernières expressions plutôt que les premières.

Dans le cadre de l'étude théorique, les conditions aux bords sont assez restrictives, puisqu'on étudie le comportement de solutions qui sont nulles à la frontière du domaine, *i.e.*

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ p_f = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Je précise avant toute chose que le développement de la preuve de l'existence que je présente dans ce mémoire est adapté au cas bidimensionnel, mais pas tridimensionnel, puisqu'on utilise une égalité d'énergie sur la vitesse, qu'on n'a pas lorsque le domaine Ω est dans \mathbb{R}^3 . On pourra remarquer que le cas de Bingham non-homogène à seuil constant traité dans [BASOV et SHELUKIN, 2006] est lui aussi limité à la 2D.

La preuve de l'existence de solution que je présente dans la suite repose sur une technique de type régularisation, qui permet d'approcher la rhéologie discontinue de Bingham par une rhéologie continue. Ensuite, c'est par la méthode de Galerkin qu'on se ramène à un problème en dimension finie pour atteindre une solution approchée. On passe enfin à la limite pour démontrer que la suite d'approximations ainsi définie tend bien vers une solution du problème initial. Cette preuve a fait l'objet d'un article [CHUPIN et MATHÉ, 2015], qui est actuellement soumis.

Comme le cadre mathématique utilisé dans ce travail est spécifique, je vais donner quelques-uns des éléments principaux utiles à la compréhension des techniques et des calculs effectués dans la preuve. Pour tout renseignement complémentaire, notamment les preuves des théorèmes, proposition et corollaires, je recommande la lecture de l'ouvrage [BOYER et FABRIE, 2006]¹, duquel sont d'ailleurs tirés la plupart des résultats présentés ci-dessous.

III.2.1 Cadre mathématique et principaux résultats

Il existe différentes manières de définir une solution d'une équation aux dérivées partielles. La définition dépend essentiellement du cadre fonctionnel dans lequel on recherche la solution. Certains cadres sont plus appropriés que d'autres pour la preuve d'un résultat d'existence et d'unicité, mais souvent on trouve ce qu'on appelle une solution faible, *i.e.* une solution dans un cadre moins restrictif que le cadre "naturel" d'origine du problème. Bien que cela ne soit pas toujours possible, une étape importante de l'analyse des solutions de problèmes d'origine physique consiste à démontrer que la solution faible est en fait la *solution forte* vue dans le cadre faible.

Dans la démarche d'analyse théorique du problème qui nous intéresse, nous démontrons l'existence d'une solution faible. Les problèmes d'unicités et d'identification à une éventuelle solution forte restent donc ouverts. Ce faisant, nous nous plaçons dans le cadre fonctionnel faible associé au problème. Celui-ci repose principalement sur la définition de certains espaces fonctionnels *ad-hoc*, qui sont présentés dans le paragraphe suivant.

1. Il existe une version en anglais : F. BOYER and P. FABRIE, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, Applied Mathematical Sciences, vol. 183, Springer (2013).

Espaces fonctionnels

Jusqu'à la fin de la preuve de l'existence d'une solution, le domaine occupé par le fluide est noté $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et est supposé être un ouvert connexe borné de bord régulier $\partial\Omega$. Je précise également que l'espace ambiant \mathbb{R}^2 est muni de la mesure de Lebesgue, notée $d\mathbf{x}$.

✓ Je me conforme à la nomenclature classique en notant $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, les espaces de Lebesgue sur Ω définis par

$$L^p(\Omega) = \{h \text{ mesurable sur } \Omega ; \int_{\Omega} |h|^p d\mathbf{x} < \infty\}$$

et $H^s(\Omega)$, $s > 0$, ou plus généralement $W^{s,p}(\Omega)$ ($p \geq 1$) les espaces de Sobolev sur Ω définis par

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$$

et

$$W^{s,p}(\Omega) = \{h \in L^p(\Omega) ; \forall a_1, a_2 \text{ tels que } 0 \leq a_1, a_2 \leq s \text{ et } a_1 + a_2 = s, \partial_x^{a_1} \partial_y^{a_2} h \in L^p(\Omega)\},$$

où ∂_x^a est l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x d'ordre a au sens des distributions.

✓ Dans la formulation faible du problème, on intègre le système (III.7) contre une fonction-test. Dans ces conditions, certaines informations sont invisibles dans l'équation qui en résulte. Ces informations ne sont pas perdues pour autant. On les retrouve dans la définition des espaces dans lesquels vivent les fonctions-test. Afin de prendre en compte les conditions de bords et d'incompressibilité, je considère les espaces fonctionnels naturels suivants :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{h \in H^1(\Omega) ; h|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ H &= \{h \in L^2(\Omega) ; \operatorname{div}(h) = 0 \text{ et } h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ V &= \{h \in H_0^1(\Omega) ; \operatorname{div}(h) = 0\}. \end{aligned}$$

Les espaces duaux respectifs de $H_0^1(\Omega)$ et V sont notés H^{-1} et V' .

✓ $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des applications infiniment différentiables à support compact dans Ω .

✓ Pour les fonctions dépendant du temps, soient $0 < T \leq +\infty$ et $m \in [1, +\infty]$. On note $L^m X$ l'ensemble, aussi parfois noté $L^m(0, T; X)$, défini par

$$L^m X = \{h \in X ; \|h\|_X \in L^m(0, T)\},$$

avec $\|\cdot\|_X$ une norme sur X , où X est n'importe quel espace fonctionnel sus-défini.

✓ Soit $(x_i)_i$ une base d'un espace fonctionnel X . On note X_k le sous-espace de dimension finie X de la forme

$$X_k = X \cap \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_k).$$

✓ Enfin, parce que nombre de tenseurs utilisés dans la suite sont symétriques, on adopte l'indexation adéquate suivante :

$$L_{sym}^m = \{A \in L^m(\Omega)^{2 \times 2} ; A \text{ est symétrique}\},$$

et l'ensemble des matrices réelles symétriques 2×2 sera noté $S_2(\mathbb{R})$.

Les espaces de Banach et leur dual

Comme vous avez pu le remarquer, j'ai donné les espaces duaux des espaces $H_0^1(\Omega)$ et V . Si j'ai fait cela, c'est que les espaces duaux jouent un rôle très important dans le cadre mathématique que nous allons emprunter pour la preuve de l'existence d'une solution. Avant donc d'aller plus loin dans l'étude des équations, je propose de donner quelques résultats théoriques sur les espaces de Banach et leur dual, à commencer par la définition des convergences faible et faible \star :

Définition III.3. Soit E un espace de Banach de dual E' .

- On dit qu'une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E converge faiblement vers $e \in E$, et on note $e_n \rightharpoonup e$, si

$$\forall f \in E', \quad f(e_n) = \langle f, e_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, e \rangle_{E', E} = f(e).$$

- On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E' converge faiblement \star vers $f \in E'$, et on note $f_n \rightharpoonup^\star f$, si

$$\forall e \in E, \quad f_n(e) = \langle f_n, e \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, e \rangle_{E', E} = f(e).$$

Ces définitions sont les concepts naturels de convergence dans les espaces qui nous intéressent. De plus, elles permettent d'obtenir de la compacité dans des espaces qui sont pourtant de dimension infinie. La compacité, sous sa forme séquentielle, est une propriété essentielle permettant d'obtenir une information sur la convergence d'une suite. Elle est beaucoup utilisée dans les espaces de dimension finie, puisqu'elle est équivalente au caractère fermé borné, ce qui n'est pas le cas en dimension infinie. Cependant le théorème suivant donne une propriété de compacité "faible" des fermés bornés d'un espace de Banach réflexif (*i.e.* si E est isomorphe à son bidual E'' par plongement naturel) ou séparable (*i.e.* admettant une partie dénombrable dense) :

Théorème III.4. • Si E est un espace de Banach réflexif, alors de toute suite bornée d'éléments de E , on peut extraire une sous-suite convergent faiblement dans E .

- Si E est un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée d'éléments de E' , on peut extraire une sous-suite convergent faiblement \star dans E' .

Un corollaire intéressant pour notre étude est le suivant :

Corollaire III.5. Soit E un espace de Banach et soit $(h_n)_{n \leq 1}$ une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers h dans E , alors cette suite est bornée dans E et

$$\|h\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|h_n\|_E.$$

Je donne enfin une proposition qui nous permettra de traiter les termes non linéaires de l'équation, mais aussi les produits de deux fonctions en général :

Proposition III.6. Soient E , F et G trois espaces de Banach. Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G . Si $(e_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de E qui converge fortement vers $e \in E$ et si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de F qui converge faiblement vers $f \in F$, alors la suite des images $(B(e_n, f_n))_{n \geq 1}$ converge faiblement vers l'image des limites $B(e, f)$ dans G .

Maintenant que nous avons vu ces résultats sur des espaces de Banach généraux, nous allons décrire un peu plus précisément les espaces fonctionnels définis dans le paragraphe précédent.

Les espaces $L^p(\Omega)$

Comme nous l'avons vu, les espaces $L^p(\Omega)$ sont les espaces de fonctions mesurables sur le domaine Ω à valeurs réelles et dont la puissance p -ième de la valeur absolue est intégrable pour la mesure de Lebesgue lorsque $p < +\infty$. La norme naturelle associée est alors définie par

$$\|\cdot\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |\cdot|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{III.11})$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω ; sa norme naturelle est

$$\|\cdot\|_{L^\infty} = \text{esssup}_{\Omega} |\cdot|. \quad (\text{III.12})$$

Sur ces espaces, nous connaissons les résultats suivants :

Proposition III.7. • *L'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.*
 • *L'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est faiblement \star dense dans $L^\infty(\Omega)$.*

Cette proposition nous dit qu'on peut approcher toute fonction de $L^p(\Omega)$ par une suite de fonctions régulières. Elle est très utile pour un bon nombre de preuves et nous servira occasionnellement vers la fin de la démonstration du théorème d'existence III.23. Nous allons maintenant étudier la dualité des espaces $L^p(\Omega)$.

Définition III.8. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'exposant conjugué p' de p par*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

En particulier, on convient que l'exposant conjugué de $+\infty$ est 1 et réciproquement.

Proposition III.9. • *Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif et séparable. De plus, son dual est isomorphe à l'espace $L^{p'}(\Omega)$.*

- $L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif. Son dual est isomorphe à $L^\infty(\Omega)$.
- $L^\infty(\Omega)$ est ni séparable ni réflexif et son dual est strictement plus gros que $L^1(\Omega)$.

En combinant cette proposition au Théorème III.4, on peut ramener l'étude de la convergence des suites de fonctions de $L^p(\Omega)$ à l'étude de son caractère borné, ce qui simplifie considérablement la tâche. Voyons maintenant un outil utile à l'établissement de l'estimation d'une telle borne : l'inégalité de Hölder.

Proposition III.10. *Soient p_1, \dots, p_m des réels positifs (éventuellement infinis) et $r \in [1, +\infty]$ tel que*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r},$$

alors pour toute famille de fonctions h_1, \dots, h_m , avec $h_i \in L^{p_i}(\Omega)$, le produit $h_1 \dots h_m$ est dans l'espace $L^r(\Omega)$ et

$$\|h_1 \dots h_m\|_{L^r} \leq \|h_1\|_{L^{p_1}} \dots \|h_m\|_{L^{p_m}}.$$

Grâce à cette inégalité, on dispose d'une façon de transmettre des résultats de convergence de certains espaces L^p vers des espaces intermédiaires par interpolation, notamment par l'utilisation du corollaire suivant :

Corollaire III.11. *Soit $h \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p, q \leq +\infty$. Alors pour tout réel r tel que*

$$\frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{p} + \frac{1-\vartheta}{q}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

la fonction h est dans l'espace intermédiaire $L^r(\Omega)$ et

$$\|h\|_{L^r} \leq \|h\|_{L^p}^{\vartheta} \|h\|_{L^q}^{1-\vartheta}.$$

Les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$

Les espaces de Sobolev étendent les propriétés des espaces L^p aux dérivées des fonctions, où la dérivée est prise au sens des distributions. Les caractéristiques de ces espaces sont donc assez proches de celles vues précédemment. L'espace de Sobolev le plus utilisé par la suite est l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ aussi noté $H^1(\Omega)$, qui peut être décrit par :

$$H^1(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega); \nabla h \in (L^2(\Omega))^2\}.$$

Sa norme naturelle est donnée par

$$\|h\|_{H^1} = \sqrt{\|h\|_{L^2}^2 + \|\partial_x h\|_{L^2}^2 + \|\partial_y h\|_{L^2}^2} \quad (\text{III.13})$$

et elle définit une norme hilbertienne.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $s > 0$, on note

$$W_0^{s,p}(\Omega) \text{ l'adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{s,p}(\Omega). \quad (\text{III.14})$$

En particulier, lorsque $p < +\infty$ on a $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ et lorsque $(s,p) = (1,2)$, on a

$$H_0^1 = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Cette dernière égalité est en fait une autre définition possible de l'espace H_0^1 , qui est équivalente à la première donnée dans ce mémoire par application du théorème de trace lorsque le bord $\partial\Omega$ du domaine est suffisamment régulier.

Le dual d'un espace de Sobolev peut parfois être isomorphe à un autre espace de Sobolev, mais c'est un tout petit peu plus compliqué que dans le cas des espaces L^p . Je donne donc ici seulement le résultat qui nous sert dans la preuve et qui concerne le cas particulier de H_0^1 .

Proposition III.12. • $W^{-1,2}(\Omega) = H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Banach.

- Le dual de l'espace H_0^1 est isomorphe à $H^{-1}(\Omega)$.
- Le dual de l'espace $H^{-1}(\Omega)$ est isomorphe à H_0^1 .

En particulier, on remarque que H_0^1 est un espace de Banach réflexif, donc on pourra lui appliquer le Théorème III.4. Il existe plusieurs normes sur l'espace dual $H^{-1}(\Omega)$. Sans rentrer dans les détails liés à l'équivalence des normes, voici la norme que je considère sur cet espace :

$$\|\cdot\|_{H^{-1}} = \sup_{\psi \in H_0^1, \psi \neq 0} \frac{\langle \cdot, \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|\psi\|_{H^1}} \quad (\text{III.15})$$

Le théorème d'injection de Sobolev suivant nous dit que dans le cas où on a des informations sur les dérivées d'une fonction de L^p , on peut gagner en régularité sur la fonction elle-même.

Théorème III.13. Soit $1 \leq r < +\infty$, et soit l'exposant critique r^* associé défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2} & \text{si } r < 2, \\ r^* \in [1, +\infty[\text{ quelconque} & \text{si } r = 2, \\ r^* = +\infty & \text{si } r > 2. \end{cases}$$

Si Ω est un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^2 , alors pour tout $1 \leq s \leq r^*$,

$$W^{1,r}(\Omega) \text{ s'injecte dans } L^s(\Omega)$$

avec une injection compacte si de plus $s < r^*$.

Les résultats suivants sont encore des inégalités. La première est l'inégalité de Poincaré, dont voici l'énoncé :

Théorème III.14. *Si Ω est un domaine borné connexe à bord lipschitzien de \mathbb{R}^d , alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall h \in H_0^1, \quad \|h\|_{L^2} \leq C \|\nabla h\|_{L^2}.$$

Elle nous dit que sur un domaine borné, la norme dans H_0^1 est totalement contrôlée par la norme L^2 du gradient.

La seconde permet de majorer la norme L^p ($p \geq 2$) d'une fonction de $H^1(\Omega)$ de la façon suivante :

Théorème III.15. *Si Ω est un ouvert lipschitzien de \mathbb{R}^2 , alors pour tout $p \geq 2$, il existe une constante $C_p > 0$ ne dépendant que du domaine Ω et de p telle que*

$$\forall h \in H^1(\Omega), \quad \|h\|_{L^p} \leq C_p \|h\|_{L^2}^{2/p} \|h\|_{H^1}^{1-2/p}.$$

Il faut noter que pour ce résultat, les exposants dans le majorant sont très liés au fait qu'on se place dans \mathbb{R}^2 . Il existe une autre version en dimension 3 qu'on peut trouver dans [BOYER et FABRIE, 2006].

Fonctions du temps et de l'espace

On se donne un intervalle de temps $I = [0, T]$ et on regarde les fonctions de I à valeurs dans un espace de Banach E . Dans le cas où E est séparable, pour tout $1 \leq p < +\infty$ (ou respectivement $p = +\infty$) on note $L^p(I; E)$, ou encore $L^p E$, l'ensemble des fonctions h de I dans E mesurables telles que $t \mapsto \|h(t)\|_E^p$ est intégrable sur I (ou respectivement $t \mapsto \|h(t)\|_E$ est essentiellement bornée sur I). Comme l'espace L^∞ n'est pas séparable, l'espace $L^\infty(I; L^\infty)$ demande certaines précautions supplémentaires, dont on ne se préoccupe pas ici. Pour plus de détails, je renvoie à la lecture du livre de BOYER et FABRIE [2006].

Il existe également un résultat d'interpolation similaire au Corollaire III.11 pour les espaces $L^p L^q$. Il s'agit du corollaire suivant, qui se démontre également avec l'inégalité de Hölder (voir Proposition III.10).

Corollaire III.16. *Soient I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Soient p_1, q_1, p_2, q_2 quatre réels dans $[1, +\infty]$. Si $h \in L^{p_1}(I; L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(I; L^{q_2}(\Omega))$, alors pour tout réel $0 < \vartheta < 1$, $h \in L^p(I; L^q(\Omega))$, où*

$$\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{p_1} + \frac{1-\vartheta}{p_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{q_1} + \frac{1-\vartheta}{q_2}.$$

De plus, on a la majoration suivante :

$$\|h\|_{L^p L^q} \leq \|h\|_{L^{p_1} L^{q_1}}^\vartheta \|h\|_{L^{p_2} L^{q_2}}^{1-\vartheta}.$$

L'autre résultat que je donne dans ce chapitre permet de récupérer de la convergence forte à partir de résultats de convergence faible sur la fonction et sa dérivée temporelle. Il est connu sous le nom de Lemme d'Aubin-Simon (ou Lemme d'Aubin-Lions-Simon) et peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème III.17. *Soient $E_0 \subset E_1 \subset E_2$ trois espaces de Banach tels que l'injection de E_0 dans E_1 soit compacte et que l'injection de E_1 dans E_2 soit continue. Pour deux réels $1 \leq p, q \leq +\infty$, on note*

$$E_{p,q} = \{h \in L^p E_0; \partial_t h \in L^q E_2.\}$$

- Si $p < +\infty$, alors l'injection de $E_{p,q}$ dans $L^p E_1$ est compacte.
- Si $p = +\infty$ et si $q > 1$, alors l'injection de $E_{p,q}$ dans $C^0([0, T], E_1)$ est compacte.

En particulier, ce théorème nous dit que si $(h_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions sur I telles que

$$\begin{aligned} (h_n)_{n \geq 1} &\text{ soit bornée dans } L^p E_0, \\ (\partial_t h_n)_{n \geq 1} &\text{ soit bornée dans } L^q E_2, \end{aligned}$$

alors $(h_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergeant **fortement** dans $L^p E_1$, à condition que $p < +\infty$ ou $q > 1$.

Définition d'une solution faible

Maintenant que nous avons vu tous ces résultats sur les espaces fonctionnels qui nous intéressent, revenons à nos équations. Plus précisément, j'aimerais préciser ce que j'entends par solution faible. Comme la définition pour notre système (III.7) est donnée dans le paragraphe suivant, je vais ici me restreindre aux équations de Navier-Stokes afin de faciliter la compréhension. Avant de définir ce qu'est une solution faible, je commence par la solution forte. Une solution forte du problème de Navier-Stokes est tout simplement une fonction définie sur un intervalle de temps et le domaine spatial Ω qui vérifie les équations aux dérivées partielles au sens des fonctions dérivables ainsi que les conditions initiales et aux bords au sens des fonctions continues. Contrairement à cette définition, une solution faible est une solution qui peut ne pas être continue sur tout le domaine. Prenons une solution forte vitesse/pression (\mathbf{v}, p) des équations de Navier-Stokes avec conditions aux bords de Dirichlet homogène. Prenons n'importe quelle fonction ψ dans un espace bien choisi. Alors on multiplie l'équation de conservation de quantité de mouvement par cette fonction et on intègre sur le domaine spatial Ω . En intégrant par parties le terme de dérivée seconde, *i.e.* le terme de viscosité, on a l'égalité suivante :

$$\begin{cases} \rho \left(\partial_t \mathbf{v} \cdot \psi + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \psi \right) + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \psi = \mathbf{f} \cdot \psi \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

La fonction ψ quelconque est appelée *fonction-test*.

Comme on peut le voir, l'un des intérêts de cette formulation est qu'elle fait apparaître des dérivées d'ordre moins élevé sur l'inconnue que la formulation forte. Une solution faible peut donc être simplement dérivable une fois, alors qu'une solution forte doit être dérivable au moins deux fois. L'autre avantage de cette formulation est invisible pour le moment. Il réside dans la définition des espaces fonctionnels dans lesquels on prend les fonctions-test et dans lesquels on cherche la solution. Ceux qui sont appropriés à ce problème sont les espaces de Sobolev décrits précédemment. En particulier, ils concernent des fonctions qui ne sont pas forcément continues, mais simplement intégrables. De même, les solutions qu'on cherche dans ces espaces sont dérivables au sens des distributions.

La donnée de ces espaces et de l'équation sous forme intégrée comme ci-dessus définit la *formulation variationnelle* du problème aux dérivées partielles initial.

III.2.2 Modèle homogène à seuil diffusé

On souhaite maintenant démontrer l'existence d'une solution pour le problème (III.7)-(III.8)-(III.10), dans lequel la rhéologie est de type Bingham avec un seuil qui dépend de la pression du gaz interstitiel et de la profondeur à laquelle on se trouve dans l'écoulement. On traite donc un problème similaire à celui de Navier-Stokes, mais avec une inconnue supplémentaire, à savoir le tenseur de contrainte à seuil σ qui vérifie la relation (II.8). Pour ce faire, nous allons ici utiliser la définition implicite (II.8)₂ de σ . Cet artifice nous permet de traiter à part la difficulté liée à la détermination de ce tenseur en passant par la définition d'un graphe $\mathcal{G}[\tau_0]$, où τ_0 est la fonction seuil dépendant des pressions p_s et p_f .

Formulation variationnelle du problème homogène

Comme je le disais en introduction, pour définir la solution faible dont nous allons prouver l'existence, nous considérons une définition implicite du tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction du champ de vitesse \mathbf{v} et de la fonction seuil τ_0 . Pour simplifier l'écriture de cette relation implicite et s'inspirer d'une théorie plus générale traitant les problèmes de rhéologie dépendant du temps et de l'espace développée notamment dans [BULÍČEK et collab., 2012], nous allons introduire la notation suivante :

Définition III.18. *Pour toute fonction essentiellement bornée τ_0^F dans Ω , on définit le graphe $\mathcal{G}[\tau_0^F]$ par*

$$\mathcal{G}[\tau_0^F] = \left\{ (\boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{v}) \in L^2 L_{sym}^2 \times (L^\infty H^{-1} \cap L^2 L^2) \quad \text{tel que } (\boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{v}, \tau_0^F) \text{ satisfait (II.8)}_2 \right\}. \quad (\text{III.17})$$

L'une des propriétés les plus intéressantes du graphe $\mathcal{G}[\tau_0^F]$ est sa monotonie. Plus précisément, on a le résultat suivant, qui a d'abord été introduit par BULÍČEK et collab. [2012] et qui est essentiel à la fin de la preuve pour passer à la limite dans le graphe $\mathcal{G}[\tau_0^F]$.

Lemme III.19. *Soit τ_0 une fonction essentiellement bornée sur Ω . Si $(\boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{D}_1)$ et $(\boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{D}_2)$ sont dans $\mathcal{G}[\tau_0^F]$, alors*

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \geq 0 \quad p.p.$$

Démonstration. Supposons que $(\boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{D}_1, \tau_0)$ et $(\boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{D}_2, \tau_0)$ satisfont (II.8)₂. Alors on a

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \boldsymbol{\sigma}_1 : \mathbf{D}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 : \mathbf{D}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1 : \mathbf{D}_2 - \boldsymbol{\sigma}_2 : \mathbf{D}_1 \\ &= \tau_0^F |\mathbf{D}_1|_F + \tau_0^F |\mathbf{D}_2|_F - \boldsymbol{\sigma}_1 : \mathbf{D}_2 - \boldsymbol{\sigma}_2 : \mathbf{D}_1. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit directement que

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \geq \tau_0^F |\mathbf{D}_1|_F + \tau_0^F |\mathbf{D}_2|_F - |\boldsymbol{\sigma}_1|_F |\mathbf{D}_2|_F - |\boldsymbol{\sigma}_2|_F |\mathbf{D}_1|_F \geq 0,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Notation III.20. On a vu à la Remarque II.2 que l'utilisation de la norme de Frobenius $|\cdot|_F$ modifie les expressions seulement d'un facteur multiplicatif. Et comme on peut le voir dans cette démonstration, l'utilisation de la norme de Frobenius est bien plus adaptée à l'étude mathématique que la norme équivalente $|\cdot|$. Pour ne pas alourdir les expressions, l'exposant \cdot^F et l'indice \cdot_F sont omis dans la suite de ce chapitre. Ainsi, lorsqu'on applique la notation $|\cdot|$ à un tenseur, il s'agit de la norme de Frobenius et la quantité τ_0 est le seuil associé à cette norme. D'autre part, pour la définition de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, nous nous restreignons à la version implicite de la relation (II.8) (*i.e.* (II.8)₂), ce qui permet lever toute ambiguïté de notation.

En particulier, pour ce chapitre on a

$$\tau_0 = \sqrt{2} \tan(\alpha) [p_s - p_f]^+$$

et

$$(\boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}[\tau_0] \text{ si et seulement si}$$

le couple se trouve dans les bons espaces et
$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} : D\mathbf{v} = \tau_0 |D\mathbf{v}|, \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq |\tau_0|. \end{cases}$$

Comme promis, je donne maintenant la définition d'une solution faible pour le problème (III.7)-(III.8)-(III.10).

Définition III.21. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+; V')$. Soit $(\mathbf{v}_0, p_{f_0}) \in \mathbf{H} \times L^\infty$ un couple de conditions initiales. Pour $T > 0$, on dit que $(\mathbf{v}, p_f, \boldsymbol{\sigma})$ est une solution faible de (III.7)-(III.8)-(III.10) sur $\Omega \times (0, T)$ si

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in L^\infty \mathbf{H} \cap L^2 V, & \partial_t \mathbf{v} &\in L^2 V', \\ p_f &\in L^\infty L^\infty \cap L^2 H_0^1, & \partial_t p_f &\in L^2 H^{-1}, \\ \boldsymbol{\sigma} &\in L^2 L_{sym}^2, \end{aligned}$$

et pour tout couple de fonctions-test $(\psi, r) \in V \times H_0^1(\Omega)$ il satisfait :

$$\begin{cases} \rho \left(\langle \partial_t \mathbf{v}, \psi \rangle_{V', V} + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \psi \right) + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \psi + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \psi = \langle f, \psi \rangle_{V', V}, \\ \langle \partial_t p_f, r \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \int_{\Omega} ((\mathbf{v} \cdot \nabla) p_f) r + \kappa \int_{\Omega} \nabla p_f \cdot \nabla r = 0, \\ (\boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}[\tau_0] \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \sqrt{2} \tan(\alpha) [p_s - p_f]^+, \\ (\mathbf{v}, p_f)|_{t=0} = (\mathbf{v}_0, p_{f_0}) \text{ presque partout dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Je rappelle que la définition de la pression solide p_s est donnée par (II.6). Mais comme ici la densité ρ est une constante, de cette définition il reste seulement :

$$p_s(y) = \rho g(y_{ref} - y). \quad (\text{III.19})$$

Définition III.22. Le problème associé à la Définition III.21 est appelé formulation variationnelle du problème initial (III.7)-(III.8)-(III.10).

Maintenant que nous connaissons le type de solution que nous cherchons, on peut donner le résultat d'existence, puis le prouver.

Théorème d'existence

Dans la suite de ce chapitre, je démontre l'existence d'une solution faible au problème (III.7)-(III.8)-(III.10) sous certaines conditions qui s'énoncent comme suit :

Théorème III.23. Si $f \in L^2(\mathbb{R}_+; V')$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}$ et $p_{f_0} \in L^\infty(\Omega)$ est positive, alors pour tout $T > 0$, il existe une solution faible $(\mathbf{v}, p_f, \boldsymbol{\sigma})$ de (III.7)-(III.8)-(III.10) sur $\Omega \times (0, T)$ au sens de la Définition III.21 avec $p_f \geq 0$ presque partout dans $\Omega \times (0, T)$.

Remarque III.24. Le modèle mathématique demande la positivité de la pression fluide p_f , donc on suppose cette hypothèse vraie à l'état initial. Comme il s'agit d'une pression, elle est toujours mesurée à une constante additive près. Cela revient donc à changer de référence pour la mesure de pression dans le système physique et n'est pas une restriction sur le modèle.

Preuve du théorème d'existence

La preuve du Théorème III.23 s'effectue en quatre étapes, dont les deux principales sont les suivantes :

- Tout d'abord, on introduit une approximation de la solution en utilisant une suite de problèmes bien posés. La première difficulté est usuelle : on cherche une solution $(\mathbf{v}, p_f, \boldsymbol{\sigma})$ à valeurs dans des espaces de dimension infinie (du type L^2) et on utilise un schéma de Galerkin pour l'approcher par des fonctions à valeurs dans des espaces de dimensions finie (de la forme L_k^2), puis on utilise le théorème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires. La seconde

difficulté est inhérente à la "condition de Bingham" $(\sigma, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}[\tau_0]$. Même en dimension finie, ce type de condition n'est pas trivial et on doit introduire une régularisation : on approche le graphe $\mathcal{G}[\tau_0]$ par le graphe d'une fonction régulière $D\mathbf{v} \mapsto \sigma$.

- Ensuite, on passe à la limite dans la solution approchée pour trouver une solution au problème initial. On utilise alors les estimations d'énergie du modèle pour parfaire la démonstration. La principale difficulté est l'obtention d'une limite dans la condition non linéaire $(\sigma, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}[\tau_0]$. Cela fait l'objet du dernier paragraphe de la preuve.

Le déroulement de la preuve s'articule quant à lui autour de quatre étapes qui sont notées avec les symboles ♠, ♥, ◇, ♣ et peuvent comprendre chacune plusieurs sous-parties. Dans l'ordre, les symboles correspondent aux grandes lignes suivantes :

- ♠ Définition du problème approché.
- ♥ Estimations *a priori*.
- ◇ Existence d'une limite pour la suite de solutions approchées.
- ♣ Passage à la limite.

Démonstration. Soit un entier $k > 0$. On cherche une approximation \mathbf{v}_k de la vitesse \mathbf{v} . Cela s'effectue à trois niveaux pour finalement donner un système approchant le système initial en fonction de l'indice k .

♠ **Approximation de Galerkin** De manière classique, on réduit le problème à des espaces de dimensions finies par la méthode de Galerkin. Soit $(\mathbf{w}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base de V constituée de fonctions propres de l'opérateur de Stokes. Soit $(r_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base de $H_0^1(\Omega)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$. Soit \mathcal{P}_k la projection orthogonale de V sur V_k , espace de dimension finie engendré par les k premières fonctions propres $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ de l'opérateur de Stokes. De la même façon, \mathcal{Q}_k est la projection orthogonale de H_0^1 sur $H_{0,k}^1 := \text{vect}(r_1, \dots, r_k)$. On définit la vitesse et la pression projetées par

$$\mathbf{v}_k = \mathcal{P}_k(\mathbf{v}) \quad \text{et} \quad p_{f,k} = \mathcal{Q}_k(p_f).$$

♠ **Régularisation du graphe** Si on introduit $\tau_{0k} = \sqrt{2} \tan(\alpha) (p_s - p_{f,k})^+$, alors on définit naturellement l'approximation du graphe $\mathcal{G}[\tau_0]$ suivante :

$$\mathcal{G}_k = \left\{ \left(\tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k}, D\mathbf{v} \right), \mathbf{v} \in L_k^2 \right\}.$$

Par conséquent, on a l'équivalence

$$(\sigma, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}_k \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k}, \quad (\text{III.20})$$

qui permet de se ramener dans un premier temps à une définition explicite du tenseur de Bingham, ce qui est plus commode dans cette première partie de la preuve.

♠ **Régularisation de la condition initiale** La vitesse initiale \mathbf{v}_0 est approchée *via* la projection \mathcal{P}_k

$$\mathbf{v}_0^k = \mathcal{P}_k(\mathbf{v}_0).$$

Comme la pression de fluide initiale p_{f_0} est positive, on l'approche par

$$p_{f_0}^k = \mathcal{T}(\mathcal{Q}_k(p_{f_0})),$$

où \mathcal{T} est la troncature entre 0 et $\|p_{f_0}\|_{L^\infty}$.

♠ **Le problème approché résultant** Maintenant le problème approché est le suivant :

Trouver $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \boldsymbol{\sigma}_k) \in (L^\infty \mathbf{H} \cap L^2 \mathbf{V}_k) \times (L^\infty L^\infty \cap L^2 \mathbf{H}_{0,k}^1) \times L^2 L_{sym}^2$ tel que pour tout $(\psi, r) \in \mathbf{V}_k \times \mathbf{H}_{0,k}^1$, on a

$$\begin{cases} \rho \left(\langle \partial_t \mathbf{v}_k, \psi \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k \cdot \psi \right) + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_k : \nabla \psi + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \psi = \langle f, \psi \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}, \\ \langle \partial_t p_{f,k}, r \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} + \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) p_{f,k}) r + \kappa \int_{\Omega} \nabla p_{f,k} \cdot \nabla r = 0, \\ (\boldsymbol{\sigma}_k, D\mathbf{v}_k) \in \mathcal{G}_k, \\ (\mathbf{v}_k, p_{f,k})|_{t=0} = (\mathbf{v}_0^k, \mathcal{T} p_{f_0}^k). \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Grâce à la relation (III.20) le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_k$ est donné explicitement comme fonction de τ_{0k} et \mathbf{v}_k , de sorte que l'on a séparé le problème en l'inconnue $\boldsymbol{\sigma}_k$ du problème en les autres inconnues \mathbf{v}_k et $p_{f,k}$. On peut alors résoudre le système (III.21) en utilisant la méthode des caractéristiques, le théorème de Schauder et des estimations qui sont précisées dans la suite. Ceci nous permet d'affirmer l'existence d'une solution approchée $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \boldsymbol{\sigma}_k)$ dépendant de l'indice k . Les estimations *a priori*, qui sont utilisées pour prouver l'existence de ce triplet, sont aussi utiles pour démontrer que la suite d'approximations $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \boldsymbol{\sigma}_k)_{k \geq 1}$ admet une limite en un sens à préciser, c'est pourquoi nous les donnons ci-dessous.

♡ **Estimations *a priori*** Dans ce paragraphe, on a pour but d'obtenir des estimations convenables sur la solution $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \boldsymbol{\sigma}_k)$ du problème approché (III.21), *i.e.* indépendantes du paramètre k .

Proposition III.25. *La solution du problème (III.21) vérifie les estimations suivantes (dans lesquelles c est une constante qui ne dépend pas de k) :*

1. *Bornes uniformes sur la pression fluide, le seuil de plasticité et le tenseur de contrainte*

$$0 \leq p_{f,k} \leq \|p_{f_0}\|_{L^\infty}, \quad \|\tau_{0k}\|_{L^\infty L^\infty} \leq c, \quad \|\boldsymbol{\sigma}_k\|_{L^\infty L^\infty} \leq c. \quad (\text{III.22})$$

2. *Estimation d'énergie sur le champ de vitesse*

$$\rho \|\mathbf{v}_k\|_{L^\infty L^2}^2 + \mu \|\nabla \mathbf{v}_k\|_{L^2 L^2}^2 + 2 \|\boldsymbol{\sigma}_k : D\mathbf{v}_k\|_{L^1 L^1} \leq c. \quad (\text{III.23})$$

3. *Estimation sur le moment*

$$\|\partial_t \mathbf{v}_k\|_{L^2 \mathbf{V}'} \leq c. \quad (\text{III.24})$$

4. *Estimation sur la pression de fluide et sa dérivée temporelle*

$$\|p_{f,k}\|_{L^2 \mathbf{H}^1} \leq c \quad \text{et} \quad \|\partial_t p_{f,k}\|_{L^2 \mathbf{H}^{-1}} \leq c. \quad (\text{III.25})$$

Remarque III.26. Avant de se lancer dans la preuve de ces estimations, remarquez que dans la suite on veut utiliser les vitesse et pression de fluide approchée \mathbf{v}_k et $p_{f,k}$ comme fonctions-test dans (III.21). Mais cela n'est en théorie pas possible à cause de la dépendance en temps de ces fonctions. Pour contourner ce problème, il suffit de remarquer qu'elles sont des combinaisons linéaires de fonctions propres ne dépendant que des variables d'espace, combinaisons dont les coefficients sont des fonctions du temps. Pour plus de clarté, prenons par exemple la vitesse \mathbf{v}_k , qui s'écrit

$$\mathbf{v}_k(x, t) = \sum_{i=1}^k c_i(t) \mathbf{w}_i(x).$$

Ainsi, il suffit de choisir les fonctions propres \mathbf{w}_i comme fonctions-test, de multiplier chaque équation par le coefficient adéquat et de faire la somme pour trouver la même équation qu'en prenant formellement \mathbf{v}_k comme fonction-test.

Démonstration. Soit une solution $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \boldsymbol{\sigma}_k)$ du problème approché (III.21).

1. Pour prouver la première estimation, utilisons la partie négative de $p_{f,k}$, $[p_{f,k}]^- = \min\{p_{f,k}, 0\}$, comme fonction-test dans (III.21)₂. Comme nous sommes dans l'espace $H_{0,k}^1$, les fonctions sont régulières, donc on peut écrire le résultat comme suit :

$$\int_{\Omega} \partial_t p_{f,k} [p_{f,k}]^- + \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) p_{f,k}) [p_{f,k}]^- + \kappa \int_{\Omega} \nabla p_{f,k} \cdot \nabla [p_{f,k}]^- = 0.$$

En séparant le domaine Ω en les sous-ensembles $\{p_{f,k} \leq 0\}$ et $\{p_{f,k} > 0\}$ et en réécrivant le premier terme, on obtient

$$\frac{1}{2} \text{d}_t \| [p_{f,k}]^- \|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) [p_{f,k}]^-) [p_{f,k}]^- + \kappa \| \nabla [p_{f,k}]^- \|_{L^2}^2 = 0.$$

Il suffit maintenant de se rappeler que la vitesse \mathbf{v}_k est à divergence nulle et nulle au bord pour s'assurer que le deuxième terme de la somme est nul.

Je détaille ces calculs ici car cet argument reviendra plusieurs fois par la suite.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) [p_{f,k}]^-) [p_{f,k}]^- &= \int_{\Omega} u_k \partial_x [p_{f,k}]^- [p_{f,k}]^- + v_k \partial_y [p_{f,k}]^- [p_{f,k}]^- \quad (\text{par définition}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_k \partial_x (([p_{f,k}]^-)^2) + v_k \partial_y (([p_{f,k}]^-)^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_x u_k + \partial_y v_k) ([p_{f,k}]^-)^2 \quad (\text{par intégration par parties}) \\ &= 0 \quad (\text{en reconnaissant } \text{div}(\mathbf{v}_k)). \end{aligned}$$

Finalement, il reste le résultat suivant :

$$\frac{1}{2} \text{d}_t \| [p_{f,k}]^- \|_{L^2}^2 + \kappa \| \nabla [p_{f,k}]^- \|_{L^2}^2 = 0.$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \| [p_{f,k}(t)]^- \|_{L^2}^2$ est décroissante. Or à l'instant initial, on a $p_{f_0}^k = \mathcal{T}(\mathcal{Q}_k(p_{f_0})) \geq 0$ p.p., donc $[p_{f,k}(0)]^- = 0$ p.p. dans Ω . En particulier, on sait que $\| [p_{f,k}(0)]^- \|_{L^2}^2 = 0$. Ainsi par positivité et décroissance, pour tout temps $t \in [0, T]$, $\| [p_{f,k}(t)]^- \|_{L^2}^2 = 0$. En sachant que la partie négative est de signe constant, on en déduit plus précisément que

$$\forall t \in [0, T], [p_{f,k}(t)]^- = 0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

ce qui signifie exactement que

$$\forall t \in [0, T], p_{f,k}(t) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Par linéarité en $p_{f,k}$, pour les mêmes raisons on a aussi

$$\forall t \in [0, T], p_{f,k}(t) \leq \| p_{f_0} \|_{L^\infty} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On a ainsi redémontré ce résultat, qui est connu sous le nom de *principe du maximum*. Pour la seconde estimation, rappelons que $\tau_{0k} = \sqrt{2} \tan(\alpha) [p_s - p_{f,k}]^+$. On se rappelle alors que $p_s = \rho g(y_{ref} - y)$ et on applique l'inégalité triangulaire pour majorer la valeur absolue comme suit :

$$|\tau_{0k}| \leq \left| \sqrt{2} \tan(\alpha) \right| (\rho g |y_{ref} - y| + |p_{f,k}|).$$

Comme enfin on travaille sur un domaine borné, de l'estimation précédente on déduit une borne supérieure uniforme en k pour la suite $(\tau_{0k})_{k \geq 1}$. Le dernier résultat découle alors du fait que $\boldsymbol{\sigma}_k$

vérifie (III.20) et de cette dernière estimation, puisque $\forall k \geq 1, 0 \leq \frac{|D\mathbf{v}_k|}{|D\mathbf{v}_k| + 1/k} \leq 1$.

2. Pour obtenir une estimation d'énergie sur la vitesse, on procède un peu comme pour démontrer la positivité presque partout de la pression $p_{f,k}$. Cette fois-ci on choisit $\psi = 2\mathbf{v}_k$ comme fonction-test (cf. Remarque III.26) dans la formulation faible (III.21). On intègre ensuite sur le domaine spatio-temporel $\Omega \times (0, t)$. Comme \mathbf{v}_k est à divergence nulle et $\mathbf{v}_k|_{\partial\Omega} = 0$, l'intégrale du terme $(\mathbf{v}_k \cdot \nabla)\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k$ est nulle et en intégrant par parties les termes de viscosité et de contrainte à seuil, il vient

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{v}_k^2(t) + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_k|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_k : D\mathbf{v}_k \leq \rho \int_{\Omega} \mathbf{v}_k^2(0) + 2c \|f\|_{L^2 V'}^2. \quad (\text{III.26})$$

En utilisant maintenant l'expression explicite de tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_k$ donnée par la relation (III.20) et le fait que τ_{0k} est positif, on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}_k : D\mathbf{v}_k = \tau_{0k} \frac{|D\mathbf{v}_k|^2}{|D\mathbf{v}_k| + 1/k} \geq 0. \quad (\text{III.27})$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le membre de droite de l'équation (III.26) est borné comme décrit ci-dessous pour trouver l'estimation (III.23).

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{v}_k(0)^2 + 2c \|f\|_{L^2 V'}^2 \leq \rho \|\mathcal{P}_k(\mathbf{v}_0)\|_{L^2}^2 + 2c \|f\|_{L^2 V'}^2 \leq \rho \|\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2 + 2c \|f\|_{L^2 V'}^2 \leq c.$$

3. Pour évaluer le terme $\partial_t \mathbf{v}_k$ dans V' , on commence avec une fonction-test quelconque $\psi \in V_k$ et on réécrit l'équation (III.21)₁ comme suit :

$$\rho \langle \partial_t \mathbf{v}_k, \psi \rangle_{V', V} = -\rho \int_{\Omega} (\mathbf{v}_k \cdot \nabla)\mathbf{v}_k \cdot \psi - \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_k : \nabla \psi - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_k : \nabla \psi + \langle f, \psi \rangle_{V', V}.$$

Ainsi, en intégrant par parties le premier terme du membre de droite et en utilisant la nullité des conditions de bord et la contrainte d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v}_k = 0$, il advient l'inégalité suivante :

$$\rho \left| \langle \partial_t \mathbf{v}_k, \psi \rangle_{V', V} \right| \leq \rho \int_{\Omega} |\mathbf{v}_k| |\nabla \psi| |\mathbf{v}_k| + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_k| |\nabla \psi| + \int_{\Omega} |\boldsymbol{\sigma}_k| |\nabla \psi| + \left| \langle f, \psi \rangle_{V', V} \right|.$$

Maintenant il suffit d'appliquer correctement les inégalités de Hölder (cf. Proposition III.10) et de Poincaré (cf. Proposition III.14) pour conclure que pour tout $\psi \in V_k$, $\psi \neq 0$, on a

$$\rho \frac{\left| \langle \partial_t \mathbf{v}_k, \psi \rangle_{V', V} \right|}{\|\psi\|_V} \leq \rho \|\mathbf{v}_k\|_{L^4} \|\mathbf{v}_k\|_{L^4} + \mu \|\mathbf{v}_k\|_{H^1} + \|\boldsymbol{\sigma}_k\|_{L^2} + \|f\|_{V'},$$

où la norme $\|\cdot\|_V$ n'est autre que la norme de l'espace H^1 . Et comme on travaille en dimension 2, \mathbf{v}_k étant dans l'espace H^1 , grâce à l'inégalité de Sobolev (cf. Théorème III.15) on a $\|\mathbf{v}_k\|_{L^4}^2 \leq c \|\mathbf{v}_k\|_{L^2} \|\mathbf{v}_k\|_{H^1}$. En prenant la borne supérieure sur tous les $\psi \neq 0$, on reconnaît dans le membre de gauche la définition de la norme duale sur V' . En intégrant le carré sur l'intervalle $(0, T)$, on obtient alors la première inégalité ci-dessous, qu'on précise grâce au résultat d'interpolation de la Proposition III.11 :

$$\begin{aligned} \rho \|\partial_t \mathbf{v}_k\|_{L^2 V'} &\leq c \left(\int_0^T (\|\mathbf{v}_k\|_{L^2} \|\mathbf{v}_k\|_{H^1} + \|\mathbf{v}_k\|_{H^1} + \|\boldsymbol{\sigma}_k\|_{L^2} + \|f\|_{V'})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c (\|\mathbf{v}_k\|_{L^\infty L^2} \|\mathbf{v}_k\|_{L^2 H^1} + \|\mathbf{v}_k\|_{L^2 H^1} + \|\boldsymbol{\sigma}_k\|_{L^2 L^2} + \|f\|_{L^2 V'}) \end{aligned}$$

et on conclut grâce aux estimations (III.22) et (III.23) précédemment démontrées.

4. La première estimation dans (III.25) est obtenue en utilisant $r = 2p_{f,k}$ comme fonction-test dans la formulation faible (III.21) :

$$\int_{\Omega} |p_{f,k}|^2(t) + 2\kappa \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla p_{f,k}|^2 = \int_{\Omega} |p_{f,k}|^2(0) \leq c.$$

Pour obtenir la seconde inégalité, on procède de la même manière que pour la dérivée temporelle de la vitesse. Soit une fonction-test $r \in H_{0,k}^1$, $r \neq 0$. On réécrit l'équation (III.21)₂ comme suit :

$$\langle \partial_t p_{f,k}, r \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = - \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) p_{f,k}) r - \kappa \int_{\Omega} \nabla p_{f,k} \cdot \nabla r.$$

On intègre par parties le premier terme du membre de droite en utilisant de nouveau les conditions de bord et d'incompressibilité sur \mathbf{v}_k pour obtenir l'estimation

$$\left| \int_{\Omega} ((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) p_{f,k}) r \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{v}_k| |\nabla r| |p_{f,k}|.$$

Ainsi, on peut affirmer que pour tout $r \in H_0^1$, $r \neq 0$,

$$\frac{\langle \partial_t p_{f,k}, r \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|r\|_{H^1}} \leq \|\mathbf{v}_k\|_{L^4} \|p_{f,k}\|_{L^4} + \|\nabla p_{f,k}\|_{L^2}.$$

En se rappelant qu'en dimension 2, pour \mathbf{v}_k et $p_{f,k}$ grâce à l'inégalité de Sobolev on peut borner le carré de la norme dans L^4 par le produit de celles dans L^2 et dans H^1 , on a finalement :

$$\frac{\langle \partial_t p_{f,k}, r \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|r\|_{H^1}} \leq c \sqrt{\|\mathbf{v}_k\|_{L^2} \|\mathbf{v}_k\|_{H^1} \|p_{f,k}\|_{L^2} \|p_{f,k}\|_{H^1}} + \|\nabla p_{f,k}\|_{L^2}.$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les fonctions-test $r \neq 0$, on reconnaît à gauche la norme du dual H^{-1} . Pour terminer, il reste à calculer la norme L^2 en temps pour avoir

$$\begin{aligned} \|\partial_t p_{f,k}\|_{L^2 H^{-1}} &\leq c \left(\int_0^T \|\mathbf{v}_k\|_{L^2} \|\mathbf{v}_k\|_{H^1} \|p_{f,k}\|_{L^2} \|p_{f,k}\|_{H^1} \right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla p_{f,k}\|_{L^2 L^2} \\ &\leq c \|\mathbf{v}_k\|_{L^\infty L^2}^{\frac{1}{2}} \|p_{f,k}\|_{L^\infty L^2}^{\frac{1}{2}} (\|\mathbf{v}_k\|_{L^2 H^1}^2 + \|p_{f,k}\|_{L^2 H^1}^2)^{\frac{1}{2}} + \|p_{f,k}\|_{L^2 H^1}^2, \end{aligned}$$

et on conclut grâce aux résultats précédents (III.22)₁, (III.23) et (III.25)₁.

■

Nous avons ainsi démontré que la solution approchée $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \boldsymbol{\sigma}_k)$ est bornée indépendamment de l'indice d'approximation k . Nous allons nous servir de ce résultat pour démontrer dans les paragraphes notés du symbole \diamond suivants qu'il existe alors une limite $(\mathbf{v}, p_f, \boldsymbol{\sigma})$ en un certain sens.

\diamond **Limite pour la vitesse** En invoquant le Théorème III.4 associé aux estimations (III.23) et (III.24), et en utilisant le lemme d'Aubin-Simon (cf. Théorème III.17), on en déduit l'existence d'une vitesse limite \mathbf{v} telle qu'à une sous-suite près on a les convergences faible, faible \star et forte suivantes :

$$(C1) \quad \mathbf{v}_k \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ dans } L^2 V,$$

$$(C1') \quad \mathbf{v}_k \rightharpoonup^* \mathbf{v} \text{ dans } L^\infty H,$$

$$(C2) \quad \mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{v} \text{ dans } L^2 H.$$

L'estimation (III.24) nous dit que la suite $(\partial_t v_k)_{k \geq 1}$ est bornée dans $L^2 V'$ qui est réflexif, donc quitte à extraire une sous-suite, elle admet une limite faible, qui ne peut être que $\partial_t v$ par continuité de l'opérateur de dérivation en temps. On a donc la convergence faible suivante :

$$(C3) \quad \partial_t \mathbf{v}_k \rightharpoonup \partial_t \mathbf{v} \text{ dans } L^2 V'.$$

◇ **Limite pour la pression de fluidisation** p_f Grâce d'une part au Théorème III.4 combiné à l'encadrement (III.22)₁ et à l'estimation (III.25), et d'autre part au lemme d'Aubin-Simon, on peut aussi extraire de $(p_{f,k})_{k \geq 1} \subset H_0^1$ une sous-suite qui converge vers une fonction p_f de la manière suivante

$$\begin{aligned} \text{(C4)} \quad & p_{f,k} \rightharpoonup p_f \text{ dans } L^2 H_0^1, \\ \text{(C4')} \quad & p_{f,k} \rightharpoonup^* p_f \text{ dans } L^\infty L^\infty, \\ \text{(C5)} \quad & p_{f,k} \rightarrow p_f \text{ dans } L^2 L^2. \end{aligned}$$

De même que pour la vitesse, on déduit de l'estimation (III.25)₂ que $(\partial_t p_{f,k})_{k \geq 1}$ admet une sous-suite convergeant faiblement vers la limite $\partial_t p_f$ dans $L^2 H^{-1}$ (également réflexif), *i.e.*

$$\text{(C6)} \quad \partial_t p_{f,k} \rightharpoonup \partial_t p_f \text{ dans } L^2 H^{-1}.$$

◇ **Limite relative au tenseur de Bingham** Comme le domaine spatio-temporel $\Omega \times (0, T)$ est borné, on sait que $L^\infty L^\infty \subset L^2 L^2$. Donc d'après les estimations (III.22), on peut voir la suite σ_k dans $L^2 L_{sym}^2$, qui est réflexif. En appliquant de nouveau le résultat du Théorème III.4, on en déduit qu'il existe une limite σ telle que

$$\text{(C7)} \quad \sigma_k \rightharpoonup \sigma \text{ dans } L^2 L_{sym}^2.$$

D'autre part, comme on a déjà trouvé une limite forte de $p_{f,k}$ dans $L^2 L^2$, d'après la définition de τ_{0k} avec la pression solide p_s donnée par (III.19), par continuité de la partie positive il existe une limite τ_0 au sens de la convergence forte, *i.e.*

$$\text{(C8)} \quad \tau_{0k} \rightarrow \tau_0 \text{ dans } L^2 L^2.$$

Il ne suffit pas de trouver une limite à la suite d'approximation $(\mathbf{v}_k, p_{f,k}, \sigma_k)_{k \geq 1}$ pour démontrer l'existence d'une solution au problème (III.18) initial. Pour cela, il faut encore prouver que la limite vit dans le bon espace et qu'elle vérifie les équations initiales.

On peut déjà remarquer que les convergences (C1') et (C4') prouvent que les limites \mathbf{v} et p_f sont respectivement dans les espaces $L^\infty H$ et $L^\infty L^\infty$. Ces convergences ne serviront pas dans la suite. De même, les convergences (C1) et (C4) nous disent que \mathbf{v} est aussi dans $L^2 V$ et que p_f est aussi dans $L^2 H_0^1$. Pour les dérivées temporelles, les résultats (C3) et (C6) nous disent respectivement que $\partial_t \mathbf{v} \in L^2 V'$ et $\partial_t p_f \in L^2 H^{-1}$. Enfin on peut affirmer que $\sigma \in L^2 L_{sym}^2$ grâce à (C7).

Il nous reste maintenant à démontrer que la limite $(\mathbf{v}, p_f, \sigma)$ est une solution du problème initial (III.18) par passage à la limite et que le tenseur de contrainte vérifie bien la propriété de graphe $(\sigma, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}[\tau_0]$. Les paragraphes suivants expliquent ces passages à la limite d'abord dans les équations, puis pour les conditions initiales et enfin dans le graphe \mathcal{G}_k .

♣ **Passage à la limite dans les équations** Pour passer à la limite dans la formulation variationnelle (III.18), on se donne un entier $j > 0$ et une fonction-test $\psi \in V_j$. Alors pour tout $k \geq j$, on a

$$\rho \left(\langle \partial_t \mathbf{v}_k, \psi_j \rangle_{V', V} + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k \cdot \psi_j \right) + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_k : \nabla \psi_j + \int_{\Omega} \sigma_k : \nabla \psi_j = \langle f, \psi_j \rangle_{V', V}.$$

L'entier j étant fixé, le but est de faire tendre k vers l'infini. Les convergences déjà établies dans le paragraphe précédent nous permettent alors de passer à la limite dans les termes linéaires. Il reste donc à trouver la limite dans le terme non linéaire $(\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k$.

Commençons par remarquer que lorsque Ω est un ouvert lipschitzien de \mathbb{R}^2 , le Théorème III.15 nous affirme que l'espace $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ s'injecte continûment dans n'importe quel $L^p(\Omega)$ pour $2 \leq p < +\infty$. Par exemple, on peut choisir $p = 6$. On peut donc voir la fonction-test ψ_j indépendante du temps dans l'espace $L^\infty L^6$. Dans ce cas, il suffit d'obtenir une convergence faible du terme d'inertie $(\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k$ dans l'espace dual $L^r L^{6/5}$ avec $r > 1$, $\frac{6}{5}$ étant l'exposant conjugué de 6.

De la majoration (III.23), on sait que $(\mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ est uniformément bornée dans $L^\infty L^2$, et donc dans $L^2 L^6$ d'après ce qu'on vient de voir. On sait aussi que $(\nabla \mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ est uniformément bornée dans $L^2 L^2$. En appliquant l'inégalité de Hölder au produit $(\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k$, on obtient alors des bornes indépendantes de l'indice k dans les espaces $L^1 L^{3/2}$ d'une part et $L^2 L^1$ d'autre part. Donc en choisissant $\vartheta = \frac{1}{2}$ dans le Corollaire III.16, on obtient une borne uniforme dans l'espace $L^{4/3} L^{6/5}$, donc par application du Théorème III.4, quitte à extraire une sous-suite, on sait que la suite $((\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ admet une limite faible dans cet espace. En utilisant maintenant la convergence forte de \mathbf{v}_k vers \mathbf{v} dans $L^2 L^2$ et la Proposition III.6, on en déduit que, par unicité de la limite au sens des distributions, la limite ne peut être que le produit $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$

$$\bullet (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k \rightharpoonup (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \in L^{\frac{4}{3}} L^{\frac{6}{5}}.$$

En prenant maintenant la limite quand k tend vers l'infini, on obtient l'égalité suivante sur \mathbf{v} et σ :

$$\rho \left(\langle \partial_t \mathbf{v}, \psi_j \rangle_{V',V} + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \psi_j \right) + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \psi_j + \int_{\Omega} \sigma : \nabla \psi_j = \langle f, \psi_j \rangle_{V',V}.$$

Comme $(\mathbf{w}_i)_i$ est une famille totale, si $\psi \in V$, alors avec $\psi_j = \mathcal{P}_j(\psi)$, la suite $(\psi_j)_{j \geq 1}$ converge vers ψ dans V . Ainsi on peut prendre la limite dans chaque terme quand j tend vers l'infini et prouver que (\mathbf{v}, σ) vérifie l'équation (III.18)₁ pour tout $\psi \in V$. De manière plus classique, on peut prouver que la pression de fluide p_f vérifie (III.18)₂ pour tout $r \in H_0^1(\Omega)$.

♣ **Passage à la limite pour les conditions initiales** On applique deux fois le théorème d'Aubin-Simon pour prouver que les limites \mathbf{v} et p_f sont continues sur l'intervalle $[0, T]$. Plus précisément, on a :

✓ pour la vitesse, grâce aux estimations (III.23) et (III.24) on déduit que $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^0([0, T], H(\Omega))$ et que

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \text{ p.p.}$$

✓ pour la pression du fluide interstitiel, de (III.25) on déduit que $p_f \in \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$, et

$$p_f|_{t=0} = p_{f_0} \text{ p.p.}$$

ce qui correspond à l'équation (III.18)₄.

Il ne reste donc que la relation (III.18)₃ à traiter, ce qui est fait dans le paragraphe suivant.

♣ **Passage à la limite dans le graphe \mathcal{G}_k** La dernière étape de la démonstration consiste à prouver que $(\sigma, D\mathbf{v})$ appartient au graphe $\mathcal{G}[\tau_0]$. Plus précisément, on prouve séparément les deux propriétés de la définition implicite (II.8)₂ du tenseur de contrainte :

$$|\sigma| \leq \tau_0 \quad \text{et} \quad \sigma : D\mathbf{v} = \tau_0 |D\mathbf{v}|. \quad (\text{III.28})$$

Étape 1 – Pour prouver la première relation de (III.28), on commence par remarquer que par définition de \mathcal{G}_k , pour tout $k \geq 1$ on a $\sigma_k = \tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}_k}{|D\mathbf{v}_k| + 1/k}$, de sorte que

$$|\sigma_k| \leq \tau_{0k} \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T).$$

On en déduit facilement que pour tout $(t, t+h) \subset (0, T)$ et tout sous-ensemble $\omega \subset \Omega$ on a

$$\int_t^{t+h} \int_{\omega} |\sigma_k| \leq \int_t^{t+h} \int_{\omega} \tau_{0k}.$$

Mais par (C8) et (C7) on sait que $\tau_{0k} \rightarrow \tau_0 \in L^2L^2$ et $\sigma_k \rightharpoonup \sigma \in L^2L^2_{sym}$. Comme le domaine Ω est borné, on peut prendre la limite quand k tend vers l'infini

$$\forall(t, t+h) \subset (0, T) \quad \forall \omega \subset \Omega \quad \|\sigma\|_{L^1(\omega \times (t, t+h))} \leq \|\tau_0\|_{L^1(\omega \times (t, t+h))}.$$

On en déduit finalement que $|\sigma| \leq \tau_0$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$.

Étape 2 – L'étape suivante consiste à vérifier la seconde relation de (III.28). Remarquons dans un premier temps que la différence entre $\tau_{0k}D\mathbf{v}_k$ et $\sigma : D\mathbf{v}_k$ converge vers 0 quand k tend vers l'infini. En effet, on peut écrire cette différence sous la forme

$$\tau_{0k}|D\mathbf{v}_k| - \sigma_k : D\mathbf{v}_k = \tau_{0k} \frac{1}{k} \frac{|D\mathbf{v}_k|}{|D\mathbf{v}_k| + 1/k},$$

dont le membre de droite est essentiellement borné par $c \frac{1}{k}$ d'après (III.22), donc converge vers 0 dans L^∞ . Il suffit donc de démontrer que

$$(a) \quad \tau_{0k}|D\mathbf{v}_k| \rightharpoonup \tau_0|D\mathbf{v}| \text{ dans } L^1L^1$$

et

$$(b) \quad \sigma_k : D\mathbf{v}_k \rightharpoonup \sigma : D\mathbf{v} \text{ dans } L^1L^1.$$

Étape 2 (a) – Par des résultats de convergence forte-faible (cf. Proposition III.6), plus précisément par convergence forte de $\tau_{0k} \rightarrow \tau_0 \in L^2L^2$ (voir (C8)) et faible de $D\mathbf{v}_k \rightharpoonup D\mathbf{v} \in L^2L^2$ (voir (C1)), on a

$$\tau_{0k}D\mathbf{v}_k \rightharpoonup \tau_0D\mathbf{v} \in L^1L^1.$$

Il reste alors à démontrer le point (b).

Étape 2 (b).1 – Choisissons $\psi = \mathbf{v}_k \in L_k^2$ comme fonction-test dans (III.21) et utilisons la contrainte d'incompressibilité pour avoir l'égalité

$$\int_{\Omega} \sigma_k : D\mathbf{v}_k = \langle f, \mathbf{v}_k \rangle_{V', V} - \frac{1}{2} \rho \mathrm{d}_t \int_{\Omega} |\mathbf{v}_k|^2 - \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_k|^2. \quad (\text{III.29})$$

L'intégrale de (III.29) entre 0 et $t \in (0, T)$ s'écrit

$$\int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k : D\mathbf{v}_k = \int_0^t \langle f, \mathbf{v}_k \rangle_{V', V} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}_k(0)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}_k(t)\|_{L^2}^2 - \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}_k\|_{L^2}^2.$$

En prenant la limite quand $k \rightarrow +\infty$ et en utilisant la semi-continuité inférieure de la norme pour la topologie faible sur le Banach $L^2(\Omega)$ (cf. Corollaire III.5), on en déduit que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k : D\mathbf{v}_k \leq \int_0^t \langle f, \mathbf{v} \rangle_{V', V} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2}^2 - \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}^2. \quad (\text{III.30})$$

Si maintenant on prend $\psi = \mathbf{v} \in V$ comme fonction-test dans (III.18)₁, en utilisant de nouveau la contrainte $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma : D\mathbf{v} = \langle f, \mathbf{v} \rangle_{V', V} - \frac{1}{2} \rho \mathrm{d}_t \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 - \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2. \quad (\text{III.31})$$

Remarque III.27. De même que pour la fonction-test $\psi = \mathbf{v}_k$, il n'est théoriquement pas possible de prendre $\psi = \mathbf{v}$ comme fonction-test dans (III.18)₁. Mais dans le cas bidimensionnel, on sait que

$$\partial_t \mathbf{v} \in L^2 V'.$$

Pour contourner de nouveau ce problème, l'astuce est donc cette fois-ci de régulariser \mathbf{v} par rapport à la variable temporelle grâce à la convolution avec un noyau régularisant $\eta_\varepsilon : \mathbf{v}_\varepsilon = \eta_\varepsilon(t) * \mathbf{v}$ tel que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{v}$ dans $L^2 V$. On peut alors utiliser cette régularisation à la place de \mathbf{v} comme fonction-test et passer à la limite quand ε tend vers 0. Le résultat est le même qu'en prenant formellement \mathbf{v} comme fonction-test.

Il faut tout de même noter que cette méthode ne fonctionne plus dès qu'on passe à un domaine de \mathbb{R}^3 , car alors on aurait simplement $\partial_t \mathbf{v} \in L^{\frac{4}{3}} V'$.

Ensuite on calcule l'intégrale de (III.31) entre 0 et t :

$$\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : D\mathbf{v} = \int_0^t \langle f, \mathbf{v} \rangle_{V', V} + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2}^2 - \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}^2. \quad (\text{III.32})$$

En combinant cette équation (III.32) avec l'inégalité (III.30), il découle l'estimation suivante

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_k : D\mathbf{v}_k \leq \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : D\mathbf{v}. \quad (\text{III.33})$$

Étape 2 (b).2 – Maintenant, on va utiliser le fait qu'on a une idée de ce que devrait être $\boldsymbol{\sigma}$. En effet, grâce à (II.8)₂, quand $D\mathbf{v}$ ne s'annule pas, $\boldsymbol{\sigma}$ est égal à $\tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|}$, mais quand $D\mathbf{v}$ s'annule, on n'a aucune idée de la valeur du quotient, donc de $\boldsymbol{\sigma}$. on sait seulement qu'elle est petite. L'idée est donc de dire qu'on peut prendre zéro dans un premier temps. Définissons donc deux fonctions explicites $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^*(q, A)$ et $\boldsymbol{\sigma}_k^* = \boldsymbol{\sigma}_k^*(q, A)$ sur $\mathbb{R} \times S_d(\mathbb{R})$ par

$$\boldsymbol{\sigma}^*(q, A) = \begin{cases} q \frac{A}{|A|} & \text{si } A \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour tout entier $k \geq 1$,

$$\boldsymbol{\sigma}_k^*(q, A) = \begin{cases} q \frac{A}{|A|^{1+1/k}} & \text{si } A \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors par densité de l'ensemble $\mathcal{D}((0, T) \times \Omega)$ dans $L^2 L^2$ (voir Proposition III.7), on peut considérer une suite $(D_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}((0, T) \times \Omega)$, qui vérifie

$$(C9) \quad D_i \xrightarrow{i} Dv \in L^2 L^2.$$

En remarquant que $(\boldsymbol{\sigma}^*(\tau_0, D_i))_{i \geq 1}$ est bornée dans $L^2 L^2$, on peut extraire une sous-suite (toujours indexée par $i \geq 1$) qui converge faiblement dans $L^2 L^2$. Notons la limite χ , de sorte que nous avons la convergence suivant :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\tau_0, D_i) \rightharpoonup \chi \in L^2 L^2. \quad (\text{III.34})$$

De plus, pour tout entier strictement positif i , la suite $(\boldsymbol{\sigma}_k^*(\tau_0, D_i))_{k \geq 1}$ converge et sa limite quand k tend vers l'infini est $\boldsymbol{\sigma}^*(\tau_0, D_i)$.

Dans le but de prouver une convergence dans $L^1 L^1$, fixons pour l'instant l'indice i et estimons la quantité suivante quand k tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}_k - \boldsymbol{\sigma}_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (D\mathbf{v}_k - D_i) &= \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_k : D\mathbf{v}_k - \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_k : D_i \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_k^*(\tau_{0k}, D_i) : D_i - \int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_k^*(\tau_{0k}, D_i) : D\mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

On regarde alors la convergence dans chaque terme du membre de droite, excepté le premier :

✓ Comme $\sigma_k \rightharpoonup \sigma \in L^2L^2$ (voir (C7)), on a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(- \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k : D_i \right) = - \int_0^t \int_{\Omega} \sigma : D_i.$$

✓ Grâce à la convergence forte de $(\tau_{0k})_{k \geq 1}$ dans L^2L^2 , on peut affirmer que $\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) \xrightarrow[k]{\rightharpoonup} \sigma^*(\tau_0, D_i) \in L^2L^2$ et en déduire que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) : D_i \right) = \int_0^t \int_{\Omega} \sigma^*(\tau_0, D_i) : D_i.$$

✓ De la convergence (C1) et considérant encore que $\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) \xrightarrow[k]{\rightharpoonup} \sigma^*(\tau_0, D_i) \in L^2L^2$, nous appliquons le théorème de convergence fort-faible pour en déduire que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) : Dv_k \right) = \int_0^t \int_{\Omega} \sigma^*(\tau_0, D_i) : Dv.$$

Ainsi pour tout entier i on a

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_{\Omega} (\sigma_k - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (Dv_k - D_i) \right) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k : Dv_k \right) - \int_0^t \int_{\Omega} \sigma : D_i \\ &\quad + \int_0^t \int_{\Omega} \sigma^*(\tau_0, D_i) : (D_i - Dv). \end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre i vers l'infini. Rappelons que la suite $(D_i)_{i \geq 1}$ converge fortement vers Dv dans L^2L^2 et utilisons (III.34) pour déduire que le dernier terme du membre de droite tend vers zéro. Finalement, grâce au résultat intermédiaire (III.33), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_{\Omega} (\sigma_k - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (Dv_k - D_i) \right) \\ = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \sigma_k : Dv_k \right) - \int_0^t \int_{\Omega} \sigma : Dv \leq 0. \end{aligned} \tag{III.35}$$

Étape 2 (b).3 – Comme les quantités $(\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i), D_i)$ et (σ_k, Dv_k) sont dans le même graphe \mathcal{G}_k , grâce au lemme III.19 nous avons

$$(\sigma_k - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (Dv_k - D_i) \geq 0.$$

Ainsi la \limsup_k est en fait une limite et les inégalités dans (III.35) sont des égalités, *i.e.*

$$\lim_{i, k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} |(\sigma_k - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (Dv_k - D_i)| = 0,$$

i.e. $(\sigma_k - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (Dv_k - D_i)$ converge vers 0 dans L^1L^1 quand k et i tendent vers l'infini, donc pour tout $\varphi \in L^\infty$, nous avons

$$\lim_{i, k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} ((\sigma_k - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)) : (Dv_k - D_i)) \varphi = 0. \tag{III.36}$$

Nous regardons maintenant la limite du terme $\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)$. Remarquons que pour tout $i \geq 1$ et $k \geq 1$, $\|\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i)\|_{L^2L^2} \leq \|\tau_0\|_{L^2L^2}$, donc on peut choisir n'importe quel indice en premier parmi i et k

pour calculer la limite. Il est plus pratique de commencer par i . Ainsi, on fixe l'indice $k \geq 1$ et on calcule la différence

$$\begin{aligned} \sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) - \sigma_k^*(\tau_{0k}, D\mathbf{v}) &= \tau_{0k} \frac{D_i}{|D_i| + 1/k} - \tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}}{|D_i| + 1/k} + \tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}}{|D_i| + 1/k} - \tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k} \\ &= \tau_{0k} \left(\frac{D_i - D\mathbf{v}}{|D_i| + 1/k} + D\mathbf{v} \frac{|D\mathbf{v}| - |D_i|}{(|D_i| + 1/k)(|D\mathbf{v}| + 1/k)} \right). \end{aligned}$$

Ce faisant, grâce à (C9) nous pouvons déduire la convergence suivante :

$$\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) \xrightarrow{i} \sigma_k^*(\tau_{0k}, D\mathbf{v}) \in L^2L^2.$$

Ensuite, on observe que

$$\frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k} \text{ converge presque sûrement dans } \Omega \times (0, T) \text{ vers } \begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \text{si } D\mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Comme la suite $\left(\frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k}\right)_{k \geq 1}$ est uniformément bornée par 1, faisons maintenant tendre k vers l'infini et appliquons le théorème de convergence dominée de Lebesgue de sorte qu'on obtient

$$\frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k} \xrightarrow{k} \begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \text{si } D\mathbf{v} = 0 \end{cases} \in L^2L^2.$$

Alors en utilisant le résultat de convergence (C8), le produit $\tau_{0k} \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}| + 1/k} = \sigma_k^*(\tau_{0k}, D\mathbf{v})$ converge fortement dans L^1L^1 :

$$\sigma_k^*(\tau_{0k}, D\mathbf{v}) \xrightarrow{k} \sigma^*(\tau_0, D\mathbf{v}) \in L^1L^1.$$

Mais on sait par ailleurs que $\sigma_k^*(\tau_{0k}, D\mathbf{v}) - \sigma^*(\tau_0, D\mathbf{v})$ est uniformément essentiellement bornée dans $\Omega \times (0, T)$ (voir (III.22)₂). Donc la différence converge vers 0 aussi dans L^2L^2 et on a

$$\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) \xrightarrow{i,k} \sigma^*(\tau_0, D\mathbf{v}) \in L^2L^2. \quad (\text{III.37})$$

En combinant (C1) et (III.37), on obtient

$$\sigma_k^*(\tau_{0k}, D_i) : (D\mathbf{v}_k - D_i) \xrightarrow{i,k} 0 \in L^1L^1.$$

Finalement, pour tout $\varphi \in L^\infty$, de (III.36) on déduit la convergence suivante

$$\lim_{i,k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_\Omega (\sigma_k : (D\mathbf{v}_k - D_i)) \varphi = 0,$$

i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_\Omega (\sigma_k : D\mathbf{v}_k) \varphi = \lim_{i,k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_\Omega (\sigma_k : D_i) \varphi.$$

Mais de (C7) et (C9) nous calculons la limite du terme de droite ci-dessus, qui est égale à $\int_0^t \int_\Omega (\sigma : D\mathbf{v}) \varphi$. Nous avons donc prouvé que

$$\sigma_k : D\mathbf{v}_k \rightharpoonup \sigma : D\mathbf{v} \in L^1L^1.$$

Du résultat des Étapes 2 (a) et (b), par unicité de la limite, on obtient l'égalité :

$$\sigma : D\mathbf{v} = \tau_0 |D\mathbf{v}| \text{ p.p.}$$

Cela prouve la validité de la seconde relation de (III.28) et donc que $(\sigma, D\mathbf{v}) \in \mathcal{G}[\tau_0]$, ce qui termine la preuve. ■

III.3 Conclusions

Afin d'apporter une réponse mathématique à la question de la validité du modèle donné dans le chapitre précédent, l'étude théorique développée dans ce chapitre s'est faite sur deux types de solutions.

- D'abord, nous avons vu le cas d'une solution stationnaire dans la géométrie particulière du canal 2D infini. La solution stationnaire trouvée nous permet essentiellement de tester le code numérique dans la sous-section [IV.7.1](#).
- Ensuite, nous avons prouvé l'existence d'une solution faible pour un problème d'écoulement 2D de fluide viscoplastique homogène avec seuil variable en fonction de la pression du fluide interstitiel et de la densité. Le résultat d'existence nous indique que la rhéologie variable basée sur un couplage proposée dans le modèle admet un bon comportement mathématique, contrairement à ce qui était proposé dans le modèle du même type jusqu'à présent.

De plus, ce dernier résultat constitue une extension dans le domaine des théorèmes d'existence pour les fluides à rhéologie complexe.

Pour compléter cette étude, il serait utile de traiter les cas non-homogène et tridimensionnel, mais nos tentatives se sont heurtées à des obstacles d'ordre technique liés à la régularité de la masse volumique ρ intervenant dans la définition de la fonction seuil de plasticité.

Ces résultats théoriques étant établis, nous allons maintenant passer à la deuxième partie du mémoire : l'étude numérique du modèle, dans laquelle nous souhaitons évaluer la validité physique de celui-ci.

Deuxième partie

Étude numérique du modèle

Chapitre IV

Stratégie numérique

Sommaire

IV.1	Introduction	68
IV.2	Exemple de discrétisation par la méthode des volumes finis : le laplacien	68
IV.3	Les schémas de discrétisation déjà connus	71
IV.3.1	Advection-diffusion : schéma volumes finis d'ordre 2	72
IV.3.2	Navier-Stokes : schéma de projection	74
IV.3.3	Transport : schéma essentiellement non oscillant	78
IV.4	Double projection pour Bingham	82
IV.5	Schéma complet du couplage	85
IV.6	Méthode de résolution des systèmes linéaires et traitement du parallélisme	86
IV.6.1	Librairie PETSc	86
IV.6.2	Parallélisation des calculs	87
IV.7	Les tests de validation	88
IV.7.1	Fluide de Bingham dans un canal	88
IV.7.2	Navier-Stokes-Boussinesq	91
IV.7.3	Fluide à seuil variable dans un canal	97

IV.1 Introduction

Pour parfaire l'étude des écoulements granulaires fluidisés, il paraît naturel d'effectuer des simulations numériques puis de les confronter aux expériences de laboratoire. Cette étape de la démarche de modélisation permet de valider ou d'invalidier le modèle dans le cadre de ces expériences. Pour ce faire, en collaboration avec Thierry Dubois, nous avons développé un code de simulation 2D basé sur les schémas de différences finies en temps d'ordre 2 (BDF2-AB2¹) et de volumes finis en espace pour des maillages cartésiens. Ce code écrit en Fortran 90/PETSc/MPI a été spécialement développé pour ce travail et constitue la base d'un projet de plus grande ampleur visant à spécialiser les équipes engagées dans cette thématique du LabEx ClerVolc en simulation d'écoulement pour la volcanologie. Dans ces conditions, je présente bien sûr les résultats directement liés à l'objet de notre étude (cf. chapitre V), mais avant cela nous verrons quelques résultats intermédiaires testant la correction et la robustesse du code dans ce chapitre à la section IV.7. Toutes ces simulations sont dans un domaine 2D. L'extension à la troisième dimension de l'espace est en cours de développement et ne sera évoquée qu'en perspective ici.

Mais tout d'abord, j'ouvre ce chapitre avec la description de la méthode qui permet de réduire une équation aux dérivées partielles à un système linéaire dans la section IV.2. Je donne ensuite les schémas en temps et en espace qu'on a choisis et codés. La section IV.3 comprend les méthodes numériques pour la résolution des équations d'advection-diffusion d'abord, puis de Navier-Stokes incompressible pour fluides newtoniens, et enfin de l'équation de transport pur. La section IV.4 est spécifiquement dédiée à la résolution des équations de la mécanique des fluides de viscoplastiques. Enfin je présente l'algorithme de résolution du système couplant toutes ces équations dans la section IV.5.

IV.2 Exemple de discrétisation par la méthode des volumes finis : le laplacien

Cette section a pour but d'expliquer simplement la procédure permettant de résoudre numériquement une équation du type de celles qu'on a dans le modèle (II.7). En deux mots, il s'agit de découper l'espace selon un maillage donné et d'approcher les dérivées par des formules d'accroissements entre les cellules du maillage. Ceci permet finalement d'approcher l'équation aux dérivées partielles par un système linéaire, dont les inconnues sont les valeurs discrètes de la fonction recherchée en chaque centre de cellule.

Pour mieux comprendre les étapes de cette procédure, je vais prendre un exemple élémentaire sur \mathbb{R}^2 qui nous servira plus tard :

$$\Delta q = f, \tag{IV.1}$$

où l'opérateur Δ , appelé *laplacien*, est la somme des dérivées secondes dans chaque direction, *i.e.* $\Delta q = \partial_{xx}q + \partial_{yy}q$, et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le terme source. Si on résout cette équation sur le domaine rectangulaire $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, alors on cherche une fonction inconnue q telle que pour presque tout couple (x, y) de coordonnées dans Ω , on a $\Delta q(x, y) = f(x, y)$. Pour compléter cette équation, nous avons besoin de connaître le comportement de l'inconnue sur le bord. Disons pour le moment qu'on cherche une fonction qui s'annule sur les bords du domaine.

Une fois le maillage défini, on utilise la méthode des volumes finis pour discrétiser le laplacien. Cette méthode consiste à intégrer l'équation sur une cellule du maillage et à appliquer le théorème de flux-divergence (ou plus généralement le théorème de Stokes), qui permet de ramener le calcul à l'évaluation des flux sur les bords des mailles. On approche ensuite l'inconnue q par sa moyenne sur chaque cellule pour obtenir une équation en l'inconnue discrète.

1. Backward Differentiation Formula of order 2 - Adams-Bashforth à 2 pas

Maillage du domaine

Évidemment, il existe plusieurs façons de découper le domaine en petites cellules. Dans notre cas, nous avons opté pour l'une des plus simples, à savoir le maillage cartésien uniforme. Il est constitué de cellules rectangulaires, qui forment une grille régulière comme décrit dans la Figure IV.1. Soient donc N_x et N_y le nombre de cellules dans les directions horizontale et verticale. On définit alors les suites de coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)h_x \text{ pour } i = 1, \dots, N_x + 1 \text{ et} \\ y_j &= (j-1)h_y \text{ pour } j = 1, \dots, N_y + 1, \end{aligned}$$

où $h_x = L_x/N_x$ et $h_y = L_y/N_y$, auxquelles on associe les points milieux

$$\begin{aligned} x_{i+1/2} &= \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) \text{ pour } i = 1, \dots, N_x \text{ et} \\ y_{j+1/2} &= \frac{1}{2}(y_{j+1} + y_j) \text{ pour } j = 1, \dots, N_y. \end{aligned}$$

Une cellule du maillage est notée

$$K_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1}).$$

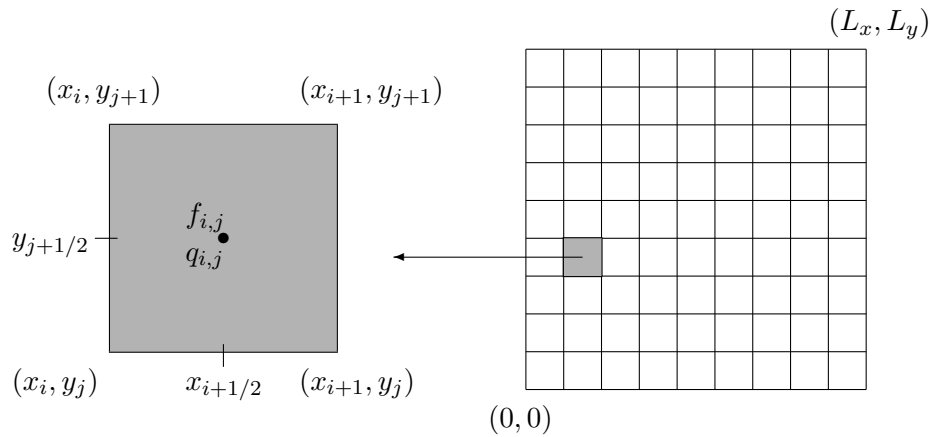


FIGURE IV.1 – Cellule $K_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ (à gauche) dans le maillage du domaine Ω (à droite).

Dans notre cas, on place ensuite au centre de la maille $K_{i,j}$ les valeurs approchées de q et f sur cette cellule, qu'on note respectivement $q_{i,j}$ et $f_{i,j}$, *i.e.*

$$q_{i,j} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_{i,j}} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad f_{i,j} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_{i,j}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Notons ici qu'on approche effectivement les fonctions par leur moyenne sur chaque maille.

Approximation des dérivées : méthode des volumes finis

Pour approcher l'équation (IV.1) par la méthode des volumes finis, on commence par l'intégrer sur la maille $K_{i,j}$. Puisqu'on utilise la méthode des volumes finis, la fonction f est approchée par sa

moyenne sur chaque maille. Le terme de droite est alors la moyenne de f sur la maille multipliée par la surface de celle-ci, soit $h_x h_y f_{i,j}$. Il ne reste donc qu'à regarder comment approcher le terme de gauche. La méthode est simple :

- appliquer le théorème de flux-divergence, sachant que $\Delta q = \text{div}(\nabla q)$,
- approcher les flux sur les arêtes,
- réarranger les termes.

Voici les calculs en détails :

$$\begin{aligned}
 \int_{K_{i,j}} \Delta q \, d\mathbf{x} &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\partial_{xx} q + \partial_{yy} q) \, dx dy = \int_{\partial K_{i,j}} \nabla q \cdot \mathbf{dn} \\
 &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} ((\partial_x q)(x_{i+1}, y) - (\partial_x q)(x_i, y)) \, dy + \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\partial_y q)(x, y_{j+1}) - (\partial_y q)(x, y_j)) \, dx \\
 &\approx h_y (\partial_x q(x_{i+1}, y_{j+1/2}) - \partial_x q(x_i, y_{j+1/2})) + h_x (\partial_y q(x_{i+1/2}, y_{j+1}) - \partial_y q(x_{i+1/2}, y_j)) \\
 &\approx h_y \left(\frac{q_{i+1,j} - q_{i,j}}{h_x} - \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{h_x} \right) + h_x \left(\frac{q_{i,j+1} - q_{i,j}}{h_y} - \frac{q_{i,j} - q_{i,j-1}}{h_y} \right) \\
 &\approx -2 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \right) q_{i,j} + \frac{h_y}{h_x} q_{i-1,j} + \frac{h_y}{h_x} q_{i+1,j} + \frac{h_x}{h_y} q_{i,j-1} + \frac{h_x}{h_y} q_{i,j+1}.
 \end{aligned}$$

Pour résumer, sur chaque cellule suffisamment éloignée du bord on obtient l'équation suivante en les inconnues $q_{i,j}$:

$$-2 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \right) q_{i,j} + \frac{h_y}{h_x} q_{i-1,j} + \frac{h_y}{h_x} q_{i+1,j} + \frac{h_x}{h_y} q_{i,j-1} + \frac{h_x}{h_y} q_{i,j+1} = h_x h_y f_{i,j}. \quad (\text{IV.2})$$

On voit ainsi que ce qu'il se passe au centre de la maille considérée est lié à ce qu'il se passe autour selon le stencil² grisé dans la Figure IV.2.

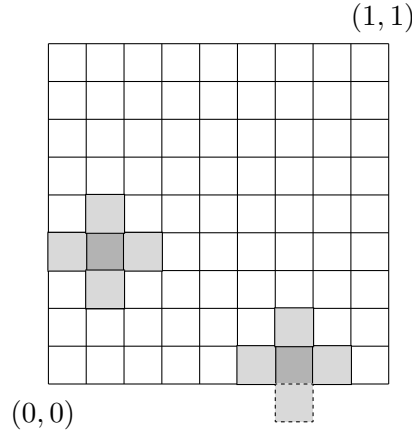


FIGURE IV.2 – Stencil d'une maille $K_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ au bord ou suffisamment loin du bord.

Dans le cas où la maille est contre le bord du domaine, on remarque qu'une partie du stencil se trouve à l'extérieur. Pour pallier le problème, on se sert des informations connues au bord. Pour cela, une méthode consiste à ajouter des cellules dites *fantômes* à l'extérieur du bord (comme celle qui se

2. terme emprunté à l'anglais signifiant littéralement "pochoir", désigne ici l'ensemble des cellules utilisées dans le calcul d'une quantité en la cellule centrale.

trouve grisée et entourée de pointillés dans la Figure IV.2). La valeur de q au centre de cette cellule fantôme est donnée par interpolation à partir de la donnée intérieure et de la valeur au bord toutes les deux connues. Dans notre cas, on a une condition de Dirichlet homogène qui stipule que q est nulle au bord, *i.e.* $q(x_{i+1/2}, 0) = 0$. Donc on en déduit la valeur $q_{i,0}$ au centre de la cellule fantôme par :

$$q_{i,0} = 2q(x_{i+1/2}, 0) - q_{i,1} = -q_{i,1}.$$

Cela entraîne une modification du coefficient devant les quantités impliquées (*i.e.* les $q_{1,j}$, $q_{N_x,j}$, $q_{i,1}$ et $q_{0,j}$) et dans le cas d'une condition de Dirichlet non-homogène l'ajout d'une valeur indépendante des $q_{i,j}$, cette dernière étant alors passée dans le second membre.

On peut très bien considérer d'autres conditions au bord. Par exemple, la condition de Neumann impose la valeur de la dérivée normale $\partial_n q$ au bord. Dans ce cas, c'est un peu plus facile puisqu'on n'a plus besoin d'utiliser une cellule fantôme : on insère directement la valeur dans l'approximation de $\int_{K_{i,j}} \Delta q dx$.

Écriture du système linéaire

Voyons maintenant la dernière étape de la méthode. Il s'agit de rassembler les équations (IV.2) sur tout le domaine et d'écrire le résultat sous la forme d'un système linéaire. Pour cela, on range les inconnues $q_{i,j}$ dans un vecteur colonne $\mathbf{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,N_y}, q_{2,1}, \dots, q_{2,N_y}, \dots, \dots, q_{N_x,N_y})^t$ et les coefficients correspondant dans une matrice \mathbf{A} . Le système s'écrit alors simplement

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{f} + \text{termes de bords éventuels},$$

où le vecteur \mathbf{f} contient les quantités $f_{i,j}$ rangées dans le même ordre que pour \mathbf{q} . La matrice \mathbf{A} étant inversible, le système admet une unique solution.

Pour sa résolution, la méthode que nous avons utilisée est décrite au paragraphe IV.6.1.

IV.3 Les schémas de discrétisation déjà connus

Dans cette section, je présente les méthodes numériques déjà connues pour la résolution de chacune des équations du système (II.7) découplées les unes des autres et sans tenir compte de la partie à seuil du tenseur de contraintes internes dans les équations de la mécanique des fluides. Il s'agit donc de traiter numériquement :

- l'équation d'advection-diffusion,
- les équations de Navier-Stokes incompressibles et
- l'équation de transport.

Les schémas mis en place pour la résolution de ces équations sont classiques. Je les décris dans les sous-sections suivantes, mais je ne donnerai pas de test de validation numérique. Pour la résolution des équations de la mécanique des fluides viscoplastiques, je renvoie à la section IV.4 suivante.

Comme on veut simuler des problèmes d'évolution, on doit donner une discrétisation spatiale et temporelle. Parmi les différentes possibilités, la partie spatiale est traitée par des schémas à volumes finis comme vu dans la section précédente et la partie temporelle par différences finies. Le maillage du domaine de résolution est cartésien uniforme et on conserve les notations introduites à la section IV.2. Alors, de même que pour le schéma classique MAC³ pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles, on place les vitesses discrètes au milieu des arêtes, *i.e.* $u_{i,j} \approx u(x_i, y_{j+1/2})$ et $v_{i,j} \approx v(x_{i+1/2}, y_j)$, tandis que les autres inconnues discrètes sont placées au centre $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ de la cellule (cf. Figure IV.3).

3. Marker And Cell

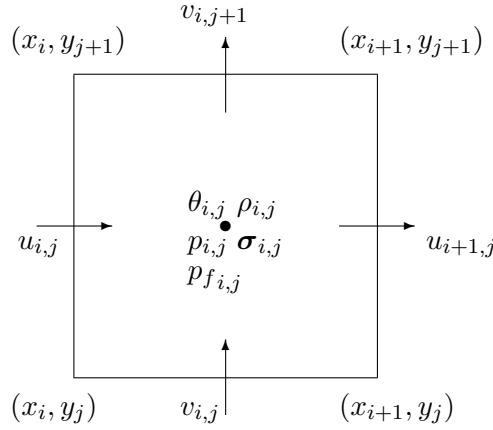


FIGURE IV.3 – Localisation des inconnues dans la cellule $K_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ du maillage.

Au-delà de la résolution des équations de la mécanique des fluides, le problème présente plusieurs difficultés. La première consiste à traiter le terme de plasticité et la solution qu'on propose fait l'objet de la section IV.4. La seconde réside dans le fait qu'on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide à densité variable admettant *a priori* une discontinuité de densité. De plus, cette discontinuité est très marquée, puisqu'au niveau de la surface du lit granulaire on passe directement de plus de 1400 kg.m^{-3} à 1 kg.m^{-3} . Ainsi, de part et d'autre de cette discontinuité la densité perd trois ordres de grandeurs. Dans ces conditions, la résolution de l'équation de transport (II.7)₂ est un vrai challenge. Une façon de procéder, utilisée notamment dans les codes Gerris et OpenFoam, consiste à utiliser une méthode de suivi d'interface de type VOF⁴. Comme cette technique donne l'interface à chaque pas de temps, elle permet de prendre en compte les éventuelles conditions d'échange ou de tension à la limite entre les deux phases. Dans le modèle que nous étudions, ces conditions sont inexistantes pour la pression du fluide interstitiel p_f car on ne suppose aucun comportement *a priori* du gaz à la surface du lit granulaire. La méthode que nous avons choisie dans ces conditions permet de résoudre l'équation de transport en combinant un schéma en temps de type Runge-Kutta et un schéma de résolution de la partie spatiale couplé à une méthode de reconstruction limitant les oscillations. Il s'agit de la reconstruction WENO⁵, qu'on applique avec un schéma *up-wind*, qui est conditionnellement stable. Les détails de cette méthode sont précisés dans la sous-section IV.3.3.

Les autres briques de base de la résolution des équations sont plus connues et sont présentées respectivement dans les sous-sections IV.3.1 et IV.3.2. L'assemblage de toutes ces méthodes donne enfin l'algorithme complet. Il est décrit dans la section IV.5.

IV.3.1 Advection-diffusion : schéma volumes finis d'ordre 2

Je commence par l'équation d'advection-diffusion car c'est de loin la plus facile à résoudre, car elle contient justement un terme diffusif qui facilite le traitement numérique. Je rappelle que cette équation s'écrit

$$\partial_t p_f + \text{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0.$$

Notons bien que pour cette équation traitée seule, l'unique inconnue est p_f . En particulier, le champ de vitesse \mathbf{v} est supposé connu.

4. Volume Of Fluids

5. Weighted Essentially Non Oscillatory

Pour des raisons d'efficacité de calcul et de simplicité, on a fait le choix d'un schéma en temps d'ordre 2 de type BDF-AB et d'un schéma en espace centré et d'ordre 2 également.

Schéma centré d'ordre 2 en espace

Comme la pression fluide p_f prend ses valeurs discrètes au centre des cellules du maillage, la discrétisation spatiale de l'équation d'advection-diffusion (II.5) passe par une intégration de cette dernière sur le volume de contrôle $K_{i,j}$. On applique ensuite un schéma volumes finis centré d'ordre 2 classique pour discrétiser les dérivées partielles par rapport à x et à y . On peut traiter les deux termes $\text{div}(p_f \mathbf{v})$ et Δp_f séparément, même si pour les deux la méthode est la même :

- intégrer le terme sur la cellule $K_{i,j}$,
- intégrer par parties pour se ramener aux valeurs sur le bord $\partial K_{i,j}$,
- approcher les moyennes sur les arêtes,
- réarranger les termes.

Nous avons déjà effectué ces calculs pour le terme de diffusion dans la section IV.2. Le résultat s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}} \Delta p_f d\mathbf{x} &= \int_{K_{i,j}} \text{div}(\nabla p_f) d\mathbf{x} \\ &\approx -2 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \right) p_{f,i,j} + \frac{h_y}{h_x} p_{f,i-1,j} + \frac{h_y}{h_x} p_{f,i+1,j} + \frac{h_x}{h_y} p_{f,i,j-1} + \frac{h_x}{h_y} p_{f,i,j+1}. \end{aligned}$$

Il nous reste donc le terme convectif :

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}} \text{div}(p_f \mathbf{v}) d\mathbf{x} &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\partial_x(p_f u) + \partial_y(p_f v)) dx dy \\ &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} ((p_f u)(x_{i+1}, y) - (p_f u)(x_i, y)) dy + \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((p_f v)(x, y_{j+1}) - (p_f v)(x, y_j)) dx \\ &\approx h_y \left((p_f u)|_{x_{i+1}, y_{j+1/2}} - (p_f u)|_{x_i, y_{j+1/2}} \right) + h_x \left((p_f v)|_{x_{i+1/2}, y_{j+1}} - (p_f v)|_{x_{i+1/2}, y_j} \right) \\ &\approx h_y \left(\frac{p_{f,i+1,j} + p_{f,i,j}}{2} u_{i+1,j} - \frac{p_{f,i,j} + p_{f,i-1,j}}{2} u_{i,j} \right) \\ &\quad + h_x \left(\frac{p_{f,i,j+1} + p_{f,i,j}}{2} v_{i,j+1} - \frac{p_{f,i,j} + p_{f,i,j-1}}{2} v_{i,j} \right) \\ &\approx \left(\frac{h_y}{2} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{h_x}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) \right) p_{f,i,j} \\ &\quad - \frac{h_y}{2} u_{i,j} p_{f,i-1,j} + \frac{h_y}{2} u_{i+1,j} p_{f,i+1,j} - \frac{h_x}{2} v_{i,j} p_{f,i,j-1} + \frac{h_x}{2} v_{i,j+1} p_{f,i,j+1}. \end{aligned}$$

BDF2-AB2 en temps

Il nous faut maintenant traiter le terme de dérivée temporelle. Pour cela, on applique les formules de différences finies d'ordre 2 de type BDF. De plus, on traite le terme convectif par une méthode d'Adams-Bashforth à deux pas (AB2). On obtient ainsi une méthode globale à deux pas, *i.e.* qu'à chaque étape du schéma, pour calculer l'inconnue à l'instant $n+1$, on prend en compte d'une certaine manière les valeurs aux instants n et $n-1$. Plus précisément, en notant δt le pas de temps, on calcule p_f^{n+1} par la formule :

$$\frac{3p_f^{n+1} - 4p_f^n + p_f^{n-1}}{2\delta t} - \kappa \Delta p_f^{n+1} = - \left(2\text{div}(p_f^n \mathbf{v}) - \text{div}(p_f^{n-1} \mathbf{v}) \right), \quad (\text{IV.3})$$

dans laquelle le membre de droite est une approximation à l'ordre 2 du terme $-\text{div}(p_f \mathbf{v})$ au temps t_{n+1} . En intégrant cette égalité sur le volume de contrôle $K_{i,j}$ puis en utilisant les discrétisations spatiales vues plus haut, on obtient la formule suivante permettant de calculer la pression fluide p_f^{n+1} à l'instant t_{n+1} :

$$\frac{3h_x h_y}{2\delta t} p_{f_{i,j}}^{n+1} + \kappa \left(2 \left(\frac{h_y}{h_x} + \frac{h_x}{h_y} \right) p_{f_{i,j}}^{n+1} - \frac{h_y}{h_x} p_{f_{i-1,j}}^{n+1} - \frac{h_y}{h_x} p_{f_{i+1,j}}^{n+1} - \frac{h_x}{h_y} p_{f_{i,j-1}}^{n+1} - \frac{h_x}{h_y} p_{f_{i,j+1}}^{n+1} \right) = rhs_{i,j}^{n,n-1},$$

où ⁶ $rhs_{i,j}^{n,n-1}$ est la quantité rassemblant tous les termes en p_f^n ou p_f^{n-1} et les termes de bords.

IV.3.2 Navier-Stokes : schéma de projection

Pour les équations de Navier-Stokes, nous avons codé un schéma de prédiction-corrrection (aussi appelé schéma de projection de Chorin-Temam [CHORIN, 1967]) sur un maillage décalé pour les vitesses. Il s'agit en fait de résoudre d'abord un problème de type advection-diffusion sur la viscosité sans contrainte d'incompressibilité, puis de corriger la vitesse et trouver la pression en tenant compte de la contrainte $\text{div } \mathbf{v} = 0$ dans un deuxième temps. Comme on ramène le problème global à des sous-problèmes de type laplacien, à chaque étape la discrétisation spatiale est traitée de la même manière que pour l'équation sur la pression fluide. Il est donc inutile d'en détailler les calculs ici. Nous verrons seulement comment on adapte la méthode dans le cas où les grilles en vitesses sont décalées de la grille principale et comment on traite les termes de bord.

Les équations qu'on cherche à résoudre sont donc les équations de Navier-Stokes incompressibles dans leur version homogène :

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \rho (\partial_t \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Il existe plusieurs versions du schéma de projection pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Je présente juste en-dessous la version d'ordre 2 que nous avons écrite dans le code de résolution.

Schéma de projection de type Chorin-Temam en temps

Il s'agit d'un schéma implicite d'ordre 2 en temps, qui procède en deux étapes pour passer de l'instant t_n à l'instant t_{n+1} :

1. prédiction,
2. correction.

Reproduisant le schéma BDF2-AB2 qu'on a écrit pour l'équation d'advection-diffusion (voir équation (IV.3)), à la première étape on *prédit* une vitesse intermédiaire notée \mathbf{v}^* solution de

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{v}^* - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\delta t} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}^* = -\nabla p^n - 2\text{div}(\mathbf{v}^n \otimes \mathbf{v}^n) + \text{div}(\mathbf{v}^{n-1} \otimes \mathbf{v}^{n-1}), \\ \mathbf{v}^* = \mathbf{b} \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

en oubliant qu'elle doit vérifier la condition d'incompressibilité.

À la seconde étape, on redresse le champ de vitesse en le projetant sur l'espace des fonctions à

6. *rhs* signifiant right-hand side.

divergence nulle. Autrement dit on *corrige* la vitesse intermédiaire pour trouver la vitesse \mathbf{v}^{n+1} au temps t_{n+1} en imposant la contrainte $\operatorname{div} \mathbf{v}^{n+1} = 0$, qui donne la pression p^{n+1} comme suit :

$$\begin{cases} \frac{3\rho}{2\delta t} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*) + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0 \text{ sur } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n+1}) = 0 \text{ sur } \Omega, \\ (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Remarque IV.1. La condition de bord (IV.6)₃ se traduit par une composante normale au bord nulle. Elle est donc vérifiée dans les cas où le bord est une paroi, ce qui sera notre cas dans la plupart des simulations que nous ferons.

Comme nous travaillons sur un maillage cartésien, cela revient à résoudre successivement

$$\Delta p^{n+1} = \Delta p^n + \frac{3\rho}{2\delta t} \operatorname{div} \mathbf{v}^* \quad (\text{IV.7})$$

puis

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{2\delta t}{3\rho} \nabla (p^{n+1} - p^n). \quad (\text{IV.8})$$

Comme je disais plus haut, on peut remarquer que pour résoudre numériquement les équations (IV.5) et (IV.7) il suffit de savoir résoudre un problème de type laplacien, qu'on a vu dans le cas de l'équation d'advection-diffusion au paragraphe IV.3.1. L'équation (IV.8) de correction est quant à elle explicite. Précisons ce qu'il se passe pour la résolution de l'étape de prédiction (IV.5). Compte tenu qu'on travaille sur des grilles décalées pour les composantes des vitesses, on pourrait avoir quelques difficultés à écrire les termes non-linéaires d'une part et à prendre en compte des conditions de bords d'autre part. Ce sont ces deux points qui sont traités dans les paragraphes ci-dessous.

Discrétisation spatiale sur grille décalée et termes non-linéaires

La discrétisation des dérivées spatiales est faite de la même manière que pour le traitement de l'équation d'advection-diffusion, *i.e.* par volumes finis. Mais comme on peut le voir sur la Figure IV.3, nous avons fait le choix d'une grille décalée en vitesse. Cela implique que les volumes de contrôle pour les composantes u et v de la vitesse sont des cellules différentes de celles qu'on a prises pour la pression fluide p_f . Plus précisément, pour le vecteur vitesse \mathbf{v} on traite séparément chacune des composantes et le volume de contrôle n'est plus une maille $K_{i,j}$, mais une maille $K_{i,j}^u = K_{i-1/2,j} = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_j, y_{j+1})$ pour la composante horizontale (voir Figure IV.4) et une maille $K_{i,j}^v = K_{i,j-1/2} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ pour la composante verticale.

Il faut alors bien faire attention au nombre de points d'approximation de u . On peut facilement voir qu'on a autant de cellules $K_{i,j}^u$ que de cellules $K_{i,j}$ sur une colonne, mais on en a une de plus sur chaque ligne (et inversement pour la composante verticale v). Les indices pour l'inconnue $u_{i,j}$ parcourent donc l'ensemble $\{1, \dots, N_x + 1\} \times \{1, \dots, N_y\}$.

Je rappelle que nous voulons approcher le terme non-linéaire $\operatorname{div}(\mathbf{v}^n \otimes \mathbf{v}^n)$. Pour cela, oublions l'exposant \cdot^n dans un premier temps et rappelons-nous que par la méthode des volumes finis, on cherche en fait à approcher les quantités

$$\int_{K_{i,j}^u} (\partial_x(u^2) + \partial_y(uv)) \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \int_{K_{i,j}^v} (\partial_x(uv) + \partial_y(v^2)) \, d\mathbf{x}.$$

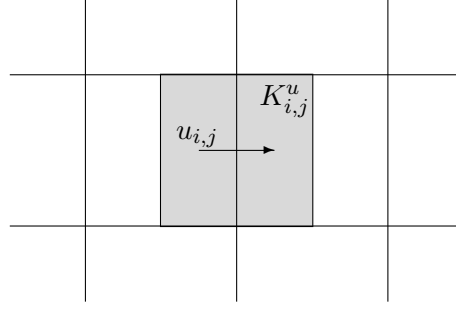


FIGURE IV.4 – Cellule $K_{i,j}^u = K_{i-1/2,j}$ de calcul pour la discrétisation volumes finis de la composante horizontale $u_{i,j}$ de la vitesse.

Comme le problème est symétrique en u et v , regardons seulement le traitement du premier terme. En suivant la même méthode que précédemment, on commence par appliquer le théorème de flux-divergence puis on approche les intégrales grâce aux valeurs moyennes $u_{i,j} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_{i,j}^u} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ sur chaque maille comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}^u} (\partial_x(u^2) + \partial_y(uv)) d\mathbf{x} &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} (u(x_{i+1/2})^2 - u(x_{i-1/2})^2) dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} ((uv)(y_{j+1}) - (uv)(y_j)) dx \\ &\approx h_y \left(\left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} \right)^2 - \left(\frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad + h_x \left(\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j}}{2} \frac{v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}}{2} - \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \frac{v_{i,j} + v_{i-1,j}}{2} \right). \end{aligned}$$

Autrement dit, le calcul des flux sur une arête de la maille décalée nous oblige à approcher les valeurs de u et de v en cet endroit, puis à approcher la moyenne du produit par le produit des moyennes. On peut donc remarquer que le calcul des termes non-linéaires nécessite l'utilisation de 5 points en u et de 4 en v , comme on peut le voir dans la Figure IV.5 Tant qu'on se trouve au milieu du domaine,

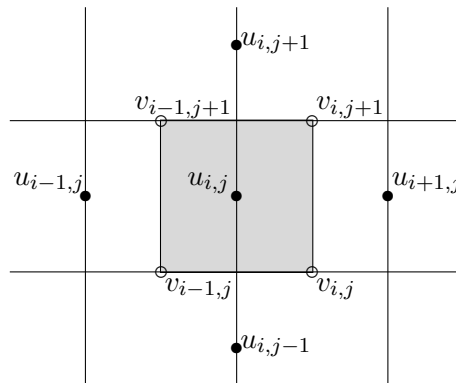


FIGURE IV.5 – Stencil pour le calcul des termes non-linéaires de Navier-Stokes avec des grilles décalées.

cela ne pose aucun problème, mais qu'en est-il lorsqu'on s'approche d'un bord ? C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

Discrétisation spatiale sur grille décalée et conditions de bord

Regardons maintenant comment prendre en compte les conditions de bords.

Sauf dans certains cas, les bords du domaine physique sont des parois. Cela implique que le matériau ne peut pas traverser un bord, autrement dit que la composante normale de la vitesse aux bords est nulle, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Prenons seulement l'exemple de la composante horizontale u de la vitesse, car tout ce qui suit s'applique de la même manière à l'autre composante, mais en échangeant les rôles des variables x et y et des indices i et j . Celle-ci vérifie donc :

$$\forall y \in [0, L_y], u(0, y) = 0 \text{ et } u(L_x, y) = 0.$$

Ceci se traduit par l'annulation des termes $u_{1,j}$ et $u_{N_x+1,j}$ pour tout j compris entre 1 et N_y .

Cette condition fixe donc l'une des deux composantes sur chaque bord, à savoir la composante normale. Mais elle ne suffit pas à elle seule. Pour la compléter, il faut spécifier une autre condition sur la composante tangentielle. C'est par cette dernière qu'on précise la nature du contact entre le fluide et le bord. Parmi les différentes possibilités, on peut évoquer la condition d'adhérence (ou de Dirichlet homogène), qui force également la composante tangentielle à s'annuler au bord. On peut aussi imposer une certaine vitesse tangentielle sur un bord du domaine, comme dans le cas d'une cavité entraînée. Dans ce cas, on parle de condition de Dirichlet non homogène. Même si cela pourrait correspondre en première approche à certains comportements (notamment pour des écoulements granulaires denses non fluidisés), il est clair qu'il ne s'agit pas d'une condition réaliste. À l'opposée de la condition d'adhérence, il est possible d'appliquer la condition de Neumann homogène, qui stipule que la paroi est infiniment lisse, au sens où aucun transfert d'énergie n'a lieu entre elle et le fluide. Là encore, on peut voir des compatibilités au premier ordre avec certains comportements (notamment pour des écoulement granulaires totalement fluidisés dans la phase d'accélération), mais ce n'est pas non plus très satisfaisant. La dernière option que l'on a proposée dans le code est la condition de Robin. Celle-ci est en fait une combinaison linéaire des deux précédentes et s'écrit pour u de la façon suivante :

$$\partial_n u + \mathfrak{R}u = 0 \text{ sur les bords horizontaux,} \quad (\text{IV.10})$$

où \mathfrak{R} est l'inverse d'une longueur. On peut remarquer que si $\mathfrak{R} = 0$, alors on a exactement une condition de Neumann homogène. À l'inverse, si $\mathfrak{R} = +\infty$, alors c'est la condition de Dirichlet homogène qu'on retrouve.

Sans parler du choix parmi ces conditions, voyons pour le moment comment celles-ci sont prises en compte dans le calcul. En effet, pour toutes ces conditions qui s'appliquent à la composante tangentielle au bord, pour pouvoir l'imposer comme on l'a vu pour la condition normale, il faudrait approcher cette composante tangentielle sur le bord. Or, du fait du choix des grilles décalées, on connaît cet élément à une demi-maille du bord. On ne peut donc pas procéder comme pour la condition (IV.9). Une option est alors d'utiliser des cellules fantômes comme celles introduites dans la Figure IV.2. Cela permet d'avoir une valeur approchée extérieure au domaine et d'imposer la condition au bord par interpolation en ajustant la valeur fantôme. Toujours dans le cas de la composante u , pour traiter une condition de Dirichlet quelconque, il s'agit donc d'effectuer une interpolation au niveau des bords horizontaux en calculant $u_{0,i}$ comme suit :

$$\forall i \in [1, N_x + 1], \frac{u_{i,0} + u_{i,1}}{2} = b_1(x_{i-1/2}), \quad (\text{IV.11})$$

où b_1 est la valeur imposée en bas du domaine. Le haut du domaine se traite de façon similaire avec éventuellement une autre valeur b_2 .

Et si on impose une condition de Neumann $\partial_n u(x, 0) = b_1(x)$ en bas par exemple, alors on ajuste la valeur fantôme en écrivant cette fois-ci

$$\forall i \in [1, N_x + 1], \frac{u_{i,0} - u_{i,1}}{h_y} = b_1(x_{i-1/2}). \quad (\text{IV.12})$$

Si dans le cas de l'équation d'advection-diffusion sur la pression fluide on n'avait pas besoin de cette valeur, le cas des équations de Navier-Stokes est bien différent, justement en raison de la présence des termes non-linéaires. Comme nous venons de le voir, pour approcher $\int_{K_{i,j}^u} (\partial_x(u^2) + \partial_y(uv)) \, dx$, nous devons approcher le flux de u sur les arêtes de la maille $K_{i,j}^u$. Dans le cas où cette dernière est placée le long d'un des bords horizontaux, avec notre méthode il est nécessaire de connaître la vitesse sur le bord. En ajustant la valeur fantôme, on peut utiliser la même formule qu'à l'intérieur du domaine. Pour traiter le cas de la condition de Robin, un petit calcul nous conduit à la relation :

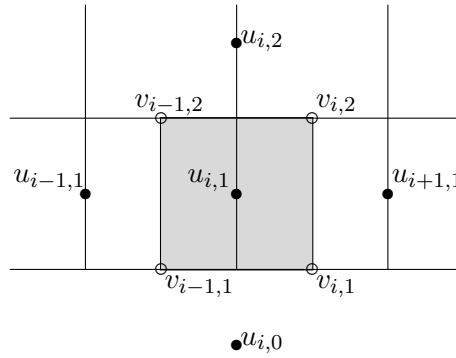


FIGURE IV.6 – Stencil pour le calcul des termes non-linéaires du bas du domaine.

$$\forall i \in [1, N_x + 1], u_{i,0} = \frac{2 - h_x \mathfrak{R}}{2 + h_x \mathfrak{R}} u_{i,1}. \quad (\text{IV.13})$$

IV.3.3 Transport : schéma essentiellement non oscillant

Le schéma implémenté pour le traitement de la discrétisation spatiale de l'équation de transport est l'un des plus efficaces en la matière. Il a été spécialement développé pour pallier le manque d'efficacité des autres schémas dans le cas du transport d'une discontinuité dans un profil par ailleurs régulier. La difficulté du traitement numérique d'une équation d'advection réside dans l'absence de diffusion physique. Les schémas de discrétisation de ce type d'équation sont alors souvent artificiellement diffusifs pour des questions de stabilité. D'autre part, il arrive souvent que des oscillations apparaissent au moment de capter certaines discontinuités de la solution. Or, dans notre cas, la quantité transportée comporte effectivement une discontinuité. Elle passe effectivement du millier de kilogrammes par mètre cube à mille fois moins de part et d'autre de la surface du lit granulaire. On peut donc dire qu'elle est constante par zones. Il est donc primordial de bien choisir le schéma pour capter la discontinuité, d'autant plus que c'est justement l'endroit de la discontinuité, à savoir la surface de l'écoulement granulaire, qui nous intéresse. Plusieurs types de schémas sont spécialement conçus pour capter les discontinuités pour les problèmes multi-dimensionnels, dont MUSCL ⁷ [TORO, 1997], PPM ⁸ [COLELLA et WOODWARD, 1984] et ENO ⁹ [HARTEN et collab., 1987; SHU et OSHER,

7. Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws

8. Piecewise Parabolic Method

9. Essentially Non Oscillatory

1988]. Ces méthodes prennent en compte la présence d'un choc pour y appliquer une dissipation numérique différente que dans les zones régulières. Ce faisant, elles transcrivent plus fidèlement la solution qu'un schéma classique. Notre choix s'est fixé sur les schémas ENO, qui peuvent être écrits à n'importe quel ordre. ENO est en fait une méthode d'interpolation non-linéaire qui, couplée à un schéma *up-wind*, permet de résoudre l'équation de transport sur un maillage cartésien uniforme de manière efficace. C'est donc tout à fait ce qu'il nous faut ici. En fait, nous avons choisi un schéma WENO, *i.e.* une version pondérée des schémas ENO, qui est d'ordre supérieur à ENO dans les régions régulières et qui imite ENO dans les zones irrégulières. Ceci constitue donc un bon compromis entre précision et temps de calcul pour nos besoins.

Dans la suite, je décris le schéma temps-espace RK3TVD-WENO5 que nous avons écrit dans notre code. Et pour plus de détails sur les schémas WENO, je renvoie à la lecture de l'article de SHU [2009], qui est très complet sur le sujet. Le choix d'un ordre plus élevé que pour les autres schémas est justifié par la raideur du problème lié à la discontinuité de la masse volumique ρ .

Avant de nous lancer dans les formules, je rappelle l'équation qu'on traite ici, à savoir le transport (ou l'advection) de la densité qui, sous forme conservative, s'écrit :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Discrétisation temporelle : RK3TVD

Parce qu'on souhaite suivre une discontinuité portée par le champ de vitesse \mathbf{v} , on doit choisir convenablement les schémas de discrétisation afin d'éviter l'apparition d'oscillation autour du choc. En particulier pour la discrétisation temporelle, plutôt que de faire appel aux schémas classiques de type Euler (explicite ou implicite), ou même BDF comme pour l'équation de convection-diffusion, on a choisi un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3) respectant la condition de diminution de variation totale (TVD¹⁰). Ce schéma procède en trois étapes pour passer de ρ^n à ρ^{n+1} comme suit :

$$\begin{cases} \rho^{*,1} = \rho^n - \delta t \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{v}), \\ \rho^{*,2} = \frac{3}{4}\rho^n + \frac{1}{4}\rho^{*,1} - \frac{1}{4}\delta t \operatorname{div}(\rho^{*,1} \mathbf{v}), \\ \rho^{n+1} = \frac{1}{3}\rho^n + \frac{2}{3}\rho^{*,2} - \frac{2}{3}\delta t \operatorname{div}(\rho^{*,2} \mathbf{v}), \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

où la notation $\rho^{*,\cdot}$ désigne les densités intermédiaires de chacune des étapes et $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ est la divergence du flux physique $\rho \mathbf{v}$. Ce schéma étant choisi, il nous faut donc désormais expliquer comment on approche le flux $\rho \mathbf{v}$. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

Discrétisation spatiale par reconstruction WENO5

Pour simplifier les explications, dans ce paragraphe je vais me contenter du cas 1D, sans que cela porte atteinte à la compréhension. Pour passer à la 2D, il suffit de répéter les mêmes opérations dans l'autre direction en remplaçant x par y , l'indice i par j et u par v pour la vitesse, puis de faire la somme des contributions dans chaque direction.

Le schéma volumes finis approche la loi de conservation sous sa forme intégrale, qui s'écrit en 1D de la façon suivante :

$$d_t \rho_i - \frac{(\rho u)|_{x_{i+1}} - (\rho u)|_{x_i}}{h_x} = 0,$$

où ρ_i est la moyenne spatiale de la densité sur la cellule $[x_i, x_{i+1}]$ et ρu est le flux horizontal. Le schéma de discrétisation temporelle ayant déjà été décrit dans le paragraphe précédent, il ne reste

10. Total Variation Diminishing

plus qu'à évaluer le flux ρu aux extrémités de la cellule. Pour cela, on a besoin d'approcher la valeur des $\rho(x_i)$ à partir des moyennes sur chaque cellule, donc on a besoin d'une méthode de reconstruction. Celle que nous utilisons est la méthode dite de reconstruction WENO, qui s'inspire de la méthode d'interpolation WENO.

Mais avant de nous lancer dans les calculs de cette reconstruction, commençons par régler un autre problème, à savoir la stabilité du schéma. On sait en effet que pour être stable, un schéma de discrétisation de l'équation de transport doit remonter les caractéristiques, ou en termes moins savants, aller chercher l'information d'où elle provient, c'est-à-dire vers l'amont de l'écoulement. On généralise donc les schémas *up-wind*, en récupérant l'information dans la direction opposée à la vitesse. Dans le cadre des schémas de type volumes finis, cela se fait en introduisant un flux numérique monotone $f(\rho^-, \rho^+)$ qui approche le flux physique ρu . Ainsi, on a

$$\frac{(\rho u)|_{x_{i+1}} - (\rho u)|_{x_i}}{h_x} \approx \frac{f(\rho_{i+1}^-, \rho_{i+1}^+) - f(\rho_i^-, \rho_i^+)}{h_x}$$

La fonction f est une fonction de deux variables (une pour les vitesses négatives, une pour les vitesses positives), lipschitzienne, croissante en la première variable, décroissante en la seconde et telle que

$$f(\rho, \rho) = \rho u.$$

Il existe plusieurs exemples de tels flux et quel que soit celui qu'on utilise, la méthodologie reste la même. Celui que nous avons choisi est simplement le flux *up-wind* et s'écrit en fonction du signe de la vitesse :

$$f(\rho^-, \rho^+) = \begin{cases} \rho^- u & \text{si } u \geq 0 \\ \rho^+ u & \text{si } u < 0 \end{cases} = \rho^- [u]^+ + \rho^+ [u]^-,$$

où $[\cdot]^+ = \max\{\cdot, 0\}$ est la partie positive et $[\cdot]^- = \min\{\cdot, 0\}$ est la partie négative.

Ce flux numérique étant choisi, il ne reste plus qu'à déterminer les quantités ρ^- et ρ^+ , ce qui ne dépend d'ailleurs pas du choix du flux. Les quantités ρ_i^- et ρ_i^+ sont en fait des approximations de $\rho(x_i)$ faites à partir de méthodes d'interpolation se servant de points principalement sur la gauche de $\rho(x_i)$ pour ρ_i^- et sur la droite de $\rho(x_i)$ pour ρ_i^+ , conformément aux schémas de type *up-wind*. Pour ce faire, on utilise les valeurs des moyennes de la densité sur les mailles voisines du point x_i . Pour atteindre un certain ordre de précision, il faut considérer un nombre adéquat de voisins. Dans notre cas, on utilise 5 points. Par exemple si la vitesse u_i est positive, on veut approcher $\rho(x_i)$ par la gauche, *i.e.* calculer ρ_i^- à l'aide des valeurs discrètes $\{\rho_{i-3}, \rho_{i-2}, \rho_{i-1}, \rho_i, \rho_{i+1}\}$ en la cellule correspondante, sa voisine de droite et les trois sur sa gauche comme on peut le voir sur la Figure IV.7. De là, on

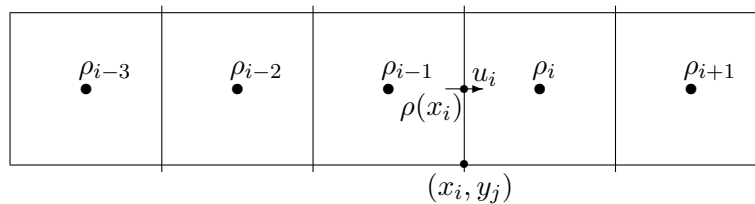


FIGURE IV.7 – Voisinage de calcul de $\rho(x_i)$ dans le cas où u_i est positive.

calcule trois approximations $\rho_{i,1,2,3}^-$ d'ordre 3 de $\rho(x_i)$, pour enfin calculer une combinaison linéaire

convexe de ces trois approximations pour obtenir une approximation d'ordre 5 lorsque la régularité le permet, tout en minimisant les oscillations aux abords de la discontinuité.

Après ces explications rapides, passons aux détails des calculs de l'étape de reconstruction. Pour passer de l'instant t_n à l'instant t_{n+1} , il nous faut donc calculer les quantités ρ_i^- et ρ_i^+ pour chaque indice i . C'est là qu'interviennent les différents points d'interpolation dont j'ai parlé plus haut.

Commençons par le calcul de ρ_i^- .

On se donne 5 quantités ¹¹

$$v_m = \rho_{i-4+m}^n \text{ pour } m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

et une matrice de coefficients

$$\mathbf{c} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -7 & 11 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer les trois approximations $\rho_{1,2,3}^-$ d'ordre 3 grâce à trois triplets différents :

$$\rho_{i;1}^- = \mathbf{c}_{1,1}v_1 + \mathbf{c}_{1,2}v_2 + \mathbf{c}_{1,3}v_3,$$

$$\rho_{i;2}^- = \mathbf{c}_{2,1}v_2 + \mathbf{c}_{2,2}v_3 + \mathbf{c}_{2,3}v_4,$$

$$\rho_{i;3}^- = \mathbf{c}_{3,1}v_3 + \mathbf{c}_{3,2}v_4 + \mathbf{c}_{3,3}v_5.$$

Ceci nous donne déjà un schéma ENO3. Pour cela, il suffirait de choisir la meilleure approximation en un certain sens. Pour passer au schéma WENO5, il suffit de définir des poids $\omega_{1,2,3}$ compris entre 0 et 1 et vérifiant $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ de sorte que la combinaison convexe $\omega_1\rho_{i;1}^- + \omega_2\rho_{i;2}^- + \omega_3\rho_{i;3}^-$ soit une approximation d'ordre 5 dans les zones régulières et d'ordre 3 aux discontinuités. Le meilleur choix possible vérifiant ces conditions se construit comme suit :

- Soient les quantités $S_{1,2,3}$ définies par

$$S_1 = \frac{13}{12}(v_1 - 2v_2 + v_3)^2 + \frac{1}{4}(v_1 - 4v_2 + 3v_3)^2,$$

$$S_2 = \frac{13}{12}(v_2 - 2v_3 + v_4)^2 + \frac{1}{4}(v_2 - v_4)^2,$$

$$S_3 = \frac{13}{12}(v_3 - 2v_4 + v_5)^2 + \frac{1}{4}(3v_3 - 4v_4 + v_5)^2.$$

- Soit $\gamma = 10^{-6}$.

On calcule les quantités $\alpha_{1,2,3}$ par

$$\alpha_1 = \frac{1}{(S_1 + \gamma)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{6}{(S_2 + \gamma)^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{(S_3 + \gamma)^2}.$$

- Alors les poids optimaux dépendant de la régularité locale de ρ sont définis par

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

$$\omega_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

11. La notation v_m peut prêter à confusion avec la composante verticale de la vitesse de l'écoulement. Pour des raisons culturelles je conserve néanmoins la lettre v pour désigner les valeurs utiles de densité pour le calcul de son approximation.

Ce qui nous donne l'approximation de la valeur $\rho(x_i)$ de la densité en l'abscisse x_i par

$$\rho_i^- \approx \omega_1 \rho_{i;1}^- + \omega_2 \rho_{i;2}^- + \omega_3 \rho_{i;3}^-.$$

Pour le calcul de ρ_i^+ , il suffit de décaler les points de référence d'une case vers la droite pour calculer les v_m et d'inverser l'ordre *i.e.*

$$v_m = \rho_{i+3-m}^n \text{ pour } m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Tout le reste est exactement identique.

Ayant ainsi décrit le schéma numérique de résolution de l'équation d'advection sur la masse volumique, nous passons maintenant au traitement du terme de plasticité.

IV.4 Double projection pour Bingham

Je présente ici le nouveau schéma numérique, qui a été proposé et étudié par [CHUPIN et DUBOIS \[2015\]](#) pour résoudre numériquement les équations d'écoulement de fluides viscoplastiques. Dans cet article, les auteurs ont prouvé la consistance, la stabilité et la convergence du schéma à l'ordre 1 et ont donné quelques simulations numériques de validation dans le cas de l'ordre 2. Toutes les simulations numériques présentées dans ce mémoire ont été effectuées avec la version d'ordre 2, que je présente dans la suite de ce chapitre.

Pour rappel, les équations qu'on souhaite résoudre sont celles du système (II.1) couplées aux équations (II.6) et (II.8). Pour simplifier, on considère dans ce chapitre que la densité est constante égale à 1 et que le seuil de plasticité est constant égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de sorte qu'il reste les équations de Navier-Stokes incompressibles avec rhéologie viscoplastique suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \operatorname{div}(2\mu D\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}, \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} : D\mathbf{v} = |D\mathbf{v}|_F, \\ |\boldsymbol{\sigma}|_F \leq 1, \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F} & \text{si } |D\mathbf{v}|_F \neq 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}|_F \leq 1 & \text{si } |D\mathbf{v}|_F = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Remarque IV.2. Dans ce chapitre et dans toute la suite, la norme d'un tenseur lorsqu'elle n'est pas indiquée par la lettre F est bien la norme $|\mathbf{D}| = \sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}}/2$. De même, le seuil de contrainte (relativement à cette norme) est bien noté τ_0 .

L'idée essentielle du schéma numérique repose sur une autre expression de la définition de $\boldsymbol{\sigma}$ équivalente à (IV.16). Notons d'abord \mathbb{P} le projecteur de l'espace des tenseurs symétriques sur sa boule unité pour la norme de Frobenius $|\cdot|_F$ et donnons-nous un réel r strictement positif. Alors la définition (IV.16) équivaut à

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}). \quad (\text{IV.17})$$

Démonstration. Si $|D\mathbf{v}|_F = 0$, alors l'équivalence est évidente, puisque $\boldsymbol{\sigma}$ est déjà dans la boule unité pour la norme de Frobenius.

Supposons maintenant que $|D\mathbf{v}|_F$ soit non nul. Rappelons que l'expression explicite de \mathbb{P} est donnée par

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} & \text{si } |\boldsymbol{\sigma}|_F \leq 1, \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{\sigma}|_F} & \text{si } |\boldsymbol{\sigma}|_F > 1. \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Ainsi, si $\boldsymbol{\sigma} = \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F}$, alors $\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v} = (1 + r|D\mathbf{v}|_F) \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F}$ vérifie l'égalité

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}) = \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F}.$$

On a donc bien l'égalité $\mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}$.

Réciproquement, si $\mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}$, étant dans le cas où $|D\mathbf{v}|_F \neq 0$, on montre par l'absurde que $|\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}|_F > 1$ et donc que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}) = \frac{\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}}{|\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}|_F}.$$

Donc en particulier, la norme $|\boldsymbol{\sigma}|_F$ est égale à 1 et $\boldsymbol{\sigma} = \frac{r}{|\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}|_F - 1} D\mathbf{v}$. Pour conclure, il suffit alors de voir que $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur colinéaire à $D\mathbf{v}$ et de norme de Frobenius égale à 1, *i.e.*

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F}.$$

■

Discrétisation temporelle

Pour résoudre le système (IV.15)-(IV.17), on reprend le schéma implicite de projection de Chorin-Temam (IV.5),(IV.7) et (IV.8) en ajoutant le terme de Bingham pour avoir

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{v}^* - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\delta t} - \mu\Delta\mathbf{v}^* = -\nabla p^n + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}) - 2\operatorname{div}(\mathbf{v}^n \otimes \mathbf{v}^n) + \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n-1} \otimes \mathbf{v}^{n-1}), \\ \boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + rD\mathbf{v}^{n+1}), \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{b} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Ce dernier système contient donc deux inconnues \mathbf{v}^* et $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$, les deux étant liées l'une à l'autre par nature. Une manière de résoudre le système consiste à effectuer un schéma de recherche de point fixe en les deux inconnues. À chaque pas de temps, connaissant p^n on effectue une boucle sur un indice $k \geq -1$ permettant de passer du couple $(\mathbf{v}^n, \boldsymbol{\sigma}^n) = (\mathbf{v}^{*,-1}, \boldsymbol{\sigma}^{n,0})$ au couple $(\mathbf{v}^*, \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) = (\mathbf{v}^{*,\infty}, \boldsymbol{\sigma}^{n,\infty})$ lorsque k tend vers l'infini en résolvant récursivement le système découplé suivant :

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{v}^{*,k} - 4\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^{n-1}}{2\delta t} - \mu\Delta\mathbf{v}^{*,k} = -\nabla p^n + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{n,k}) - 2\operatorname{div}(\mathbf{v}^n \otimes \mathbf{v}^n) + \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n-1} \otimes \mathbf{v}^{n-1}), \\ \mathbf{v}^{n,k} = \mathbf{b} \text{ sur } \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}^{n,k+1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{\sigma}^{n,k} + rD\mathbf{v}^{*,k} + \zeta(\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}^{n,k})). \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

Ce schéma de discrétisation temporel est consistant et stable sous condition sur les paramètres numériques δt et r . Le paramètre ζ est quant à lui à choisir dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$. Je ne rentre pas dans les détails présentés dans l'article [CHUPIN et DUBOIS, 2015], mais j'indique seulement que le paramètre r ne doit pas être trop grand pour que la recherche de point fixe converge quand k tend vers l'infini et que le schéma complet soit stable. Si de plus le pas de temps est suffisamment petit, alors le schéma converge aussi en vitesse quand n tend vers l'infini. Enfin, le paramètre ζ a une influence sur la vitesse de convergence du schéma en temps, et donc sur sa précision. Pour avoir une précision optimale, il faudrait prendre ζ de l'ordre du pas de temps δt , mais cela implique des temps de calcul très importants. Un juste milieu entre temps de calcul et précision peut être trouvé en augmentant la valeur de ce paramètre, tout en restant en-dessous de 1.

Discrétisation spatiale

Nous avons déjà vu comment discrétiser les dérivées spatiales par la méthode de volumes finis pour l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide newtonien au paragraphe IV.3.2. Nous allons voir maintenant ce qu'il advient du terme de plasticité de Bingham $\text{div}(\boldsymbol{\sigma})$. Pour cela, on applique la même méthode, en commençant par choisir le bon volume de contrôle, à savoir une maille $K_{i-1/2,j}$ si on regarde l'équation sur u et $K_{i,j-1/2}$ si on regarde l'équation sur v . Notons que nous allons désigner les composantes du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

et que leurs valeurs discrètes sont placées au centre des mailles principales $K_{i,j} = (x_i, y_j) \times (x_{i+1}, y_{j+1})$ (cf. Figure IV.3). Comme le problème est de nouveau symétrique en i et j , traitons uniquement l'équation sur la composante horizontale. Dans ce cas, le terme de plasticité intégré sur le volume de contrôle est

$$\begin{aligned} \int_{K_{i-1/2,j}} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{e}_x \, d\mathbf{x} &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} (\sigma_{11}(x_{i+1/2}, y) - \sigma_{11}(x_{i-1/2}, y)) \, dy \\ &\quad + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\sigma_{12}(x, y_{j+1}) - \sigma_{12}(x, y_j)) \, dx \\ &\approx h_y (\sigma_{11}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) - \sigma_{11}(x_{i-1/2}, y_{j+1/2})) \\ &\quad + h_x (\sigma_{12}(x_i, y_{j+1}) - \sigma_{12}(x_i, y_j)) \\ &\approx h_y (\sigma_{11}|_{i,j} - \sigma_{11}|_{i-1,j}) + h_x (\overline{\sigma_{12}}|_{i,j+1} - \overline{\sigma_{12}}|_{i,j}), \end{aligned}$$

où $\overline{\sigma_{12}}|_{i,j}$ désigne une approximation d'ordre 2 de σ_{12} au nœud de maillage (x_i, y_j) . Cette approximation est nécessaire puisqu'on ne connaît σ_{12} qu'au centre $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ des mailles. Pour notre part, nous choisissons :

$$\overline{\sigma_{12}}|_{i,j} = \frac{1}{4} \begin{cases} 3(\sigma_{12}|_{i-1,1} + \sigma_{12}|_{i,1}) - (\sigma_{12}|_{i-1,2} + \sigma_{12}|_{i,2}) & \text{pour } j = 1, \\ \sigma_{12}|_{i-1,j-1} + \sigma_{12}|_{i-1,j} + \sigma_{12}|_{i,j} + \sigma_{12}|_{i,j-1} & \text{pour } j = 2, \dots, N_y, \\ 3(\sigma_{12}|_{i-1,N_y} + \sigma_{12}|_{i,N_y}) - (\sigma_{12}|_{i,N_y-1} + \sigma_{12}|_{i-1,N_y-1}) & \text{pour } j = N_y + 1. \end{cases}$$

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de recherche de point fixe lié à la définition (IV.17) de la contribution à seuil par le projecteur \mathbb{P} , il faut résoudre le système (IV.20). Il ne reste plus qu'à traiter la troisième équation du système, ce qui nécessite le calcul du tenseur de déformation $D\mathbf{v}^{n,k}$ au milieu des mailles pour pouvoir projeter. Comme les valeurs discrètes des vitesses sont placées sur les arêtes, le calcul des composantes diagonales est direct : on applique des formules centrées d'ordre 2. Pour les composantes extra-diagonales impliquant des dérivées croisées, on doit procéder au calcul préalable d'approximation de la vitesse au milieu des arêtes horizontales, qu'on note $\bar{u}_{i+1/2,j+1/2}$, et donc donner des formules spécifiques, que ce soit au milieu du domaine ou sur les bords. Je donne le résultat de l'approximation pour la dérivée verticale de u :

Pour tout entier i entre 1 et N_x , on prend

$$\begin{aligned} &\partial_y u(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \\ &\approx \begin{cases} (3\bar{u}_{i+1/2,1/2} - 4\bar{u}_{i+1/2,0} - \bar{u}_{i+1/2,3/2}) / (3h_y) & \text{pour } j = 1, \\ (\bar{u}_{i+1/2,j+3/2} - \bar{u}_{i+1/2,j-1/2}) / (2h_y) & \text{pour } 2 \leq j \leq N_y - 1, \\ (-\bar{u}_{i+1/2,N_y-1/2} + 4\bar{u}_{i+1/2,N_y+1} - 3\bar{u}_{i+1/2,N_y+1/2}) / (3h_y) & \text{pour } j = N_y, \end{cases} \end{aligned}$$

où $\bar{u}_{i+1/2,j+1/2}$ est l'interpolation d'ordre 2 suivante :

$$\bar{u}_{i+1/2,j+1/2} = \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2},$$

complétée des conditions aux bords :

$$\bar{u}_{i+1/2,0} = u(x_{i+1/2}, 0) \quad \text{et} \quad \bar{u}_{i+1/2,N_y+1} = u(x_{i+1/2}, L_y).$$

Cas à seuil variable

Nous venons de voir le schéma dans le cas d'un fluide à seuil constant égal à 1. Notre objectif est cependant de résoudre des problèmes d'écoulement avec une rhéologie viscoplastique à seuil variable. Pour étendre la méthode précédente à un seuil quelconque, le raisonnement est assez simple.

La condition de Bingham pour un seuil τ_0 quelconque positif s'écrivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \tau_0^F \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|_F} & \text{si } |D\mathbf{v}|_F \neq 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}|_F \leq \tau_0^F & \text{si } |D\mathbf{v}|_F = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

elle se traduit par la relation de projection sur une boule de rayon τ_0^F

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{P}_{\tau_0^F}(\boldsymbol{\sigma} + rD\mathbf{v}), \quad (\text{IV.22})$$

pour n'importe quel paramètre r strictement positif. Ainsi, pour traiter un cas à seuil variable, il suffit d'appliquer le projecteur $\mathbb{P}_{\tau_0^F}$, défini partout par :

$$\mathbb{P}_{\tau_0^F}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} & \text{si } |\boldsymbol{\sigma}|_F \leq \tau_0^F, \\ \tau_0^F \frac{\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{\sigma}|_F} & \text{si } |\boldsymbol{\sigma}|_F > \tau_0^F. \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Cette description de la méthode de traitement numérique de la plasticité conclut la liste des schémas numériques codés pour chaque équation du système. Nous allons voir maintenant le schéma de résolution du système complet couplant l'ensemble des méthodes vues jusque-là.


IV.5 Schéma complet du couplage

On a vu comment traiter chacune des parties du système. Il reste donc à savoir comment résoudre l'ensemble. Pour cela on définit un ordre de résolution qui forme un schéma de discrétisation temporel, qui, à l'instar du schéma de projection de Chorin-Temam, résout explicitement un certain nombre de termes à chaque étape plutôt que de tout résoudre d'un coup.

Afin d'alléger la lecture, je donne la description globale de la discrétisation temporelle du schéma sous la forme suivante :

Initialisation : $\rho^0, \mathbf{v}^0, p^0, p_f^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^0$

Itération : pour tout entier positif n , connaissant $\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n, p_f^n$ et $\boldsymbol{\sigma}^n$, on calcule

 ρ^{n+1} solution de l'équation de transport *via* (IV.14), puis
 \mathbf{v}^* et $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ solutions de la prédiction *via* (IV.20) avec $\rho = \rho^{n+1}$, puis
 p^{n+1} et \mathbf{v}^{n+1} solutions respectives de (IV.7) et (IV.8), et enfin
 p_f^{n+1} solution de l'équation d'advection-diffusion *via* (IV.3).

Je précise tout de suite que lorsqu'on souhaite atteindre un état stationnaire, on s'arrête dès que les critères de convergence suivants sont satisfaits :

$$\frac{\|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n\|_{\ell^\infty}}{\delta t} \leq 10^{-8} \quad \text{et} \quad \frac{\|p_f^{n+1} - p_f^n\|_{\ell^\infty}}{\delta t} \leq 10^{-8}, \quad (\text{IV.24})$$

où

$$\|\mathbf{v}^n\|_{\ell^\infty} = \max_{1 \leq i \leq N_x+1} \max_{1 \leq j \leq N_y+1} \left\{ |u_{i,j}^n|, |v_{i,j}^n| \right\},$$

où par convention les quantités non définies u_{i,N_y+1}^n et $v_{N_x+1,j}^n$ sont égales à zéro. Sinon, on arrête à un temps donné *a priori*.

IV.6 Méthode de résolution des systèmes linéaires et traitement du parallélisme

Thierry Dubois et moi avons développé le code en Fortran90 et utilisé la librairie PETSc pour la résolution de systèmes linéaires, ainsi que la bibliothèque de programmation MPI pour la parallélisation. Comme le développement du code fait partie des objectifs du projet, je consacre cette section à la description des outils et des méthodes de développement qui ont été utilisés pour ce travail. Elle s'organise autour de deux axes, qui sont d'abord la résolution des systèmes linéaires puis le traitement du parallélisme.

IV.6.1 Librairie PETSc

L'acronyme PETSc signifie *Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*. C'est une librairie spécialement développée pour la résolution de problèmes scientifiques exprimés sous forme d'équations aux dérivées partielles. Plusieurs paquets spécifiques sont disponibles en application directe à certains domaines ou types de problème, par exemple autour de l'étude des plasmas ou du corps humain. Dans notre cas, PETSc nous procure un environnement de calcul parallèle complet compatible avec le langage Fortran permettant à la fois de traiter le maillage et la résolution des systèmes linéaires par méthode KSP.

Notre utilisation de cette librairie est adaptée au problème qu'on souhaite traiter. Il s'agit de résoudre le système (II.6)-(II.7)-(II.8) dans un domaine spatial rectangulaire bidimensionnel et sur un intervalle de temps fini $[0, T]$, avec des conditions de bords et initiales ad-hoc. Le traitement des équations aux dérivées partielles spatiales se fait par méthodes des volumes finis et les dérivées temporelles sont traitées par différences finies. Pour ce faire, nous nous donnons respectivement un pas d'espace et de temps afin de réduire le domaine spatial à un maillage cartésien uniforme et l'intervalle de temps à une suite d'instantanés. Comme les différentes inconnues ne sont pas situées aux mêmes endroits du maillage (voir Figure IV.4), les vecteurs associés ne sont pas de la même dimension. De plus, certaines quantités ont besoin de valeurs fantômes à l'extérieur du domaine. Tout cela fait que la détermination des tailles des vecteurs représentant chacune des inconnues n'est pas forcément évidente au premier abord. La gestion des dimensions est faite grâce aux outils PETSc *via* l'utilisation d'objets abstraits spécifiques qui permettent de prendre en compte tous ces éléments. Les vecteurs étant ainsi définis, il reste à déterminer les matrices de coefficients issues des méthodes de discrétisation ainsi que le second membre de l'équation. Cette partie a entièrement été traitée "à la main" en Fortran90 d'après le détail donné dans les sections précédentes.

Le système étant alors connu, il reste à le résoudre. Pour cette étape, nous faisons appel aux routines de résolution de systèmes linéaires de la librairie. Celles-ci sont de type *sous-espace de Krylov*. Plus précisément, nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué associée à un pré-conditionnement

de la matrice, qui sont tous deux pré-programmés dans la librairie PETSc. Observons maintenant plus précisément la méthode de parallélisation du code.

IV.6.2 Parallélisation des calculs

La parallélisation consiste à scinder le domaine de calcul en sous-domaines plus petits, les calculs sur chacun d’eux étant gérés par un processeur. Ainsi, plutôt que de faire les opérations une par une dans tout le domaine, on peut les faire *parallèlement* deux par deux, quatre par quatre, ou plus généralement np par np si on a np processeurs à disposition. Cependant, certains calculs nécessitent de connaître les valeurs voisines (voir stencil en Figure IV.2 par exemple). Dans le cas où on se trouve sur une frontière entre deux sous-domaines, toutes ces valeurs ne sont pas forcément connues par le processeur local. Il est alors nécessaire de procéder à des communications entre processeurs. Voici donc comment fonctionne la parallélisation que nous avons mise en place.

Les outils de gestion de parallélisation sont assez nombreux sur PETSc. Cependant, ils ne sont pas toujours très faciles à utiliser. Afin de contrôler exactement nos opérations, nous en avons utilisé certains et écrit le reste “à la main”. D’abord, toutes les opérations élémentaires sont traitées en parallèle. Pour ce faire, chaque vecteur et matrice a un représentant global et des représentants locaux. Un représentant global contient l’information sur tout le domaine, alors qu’un local est beaucoup plus petit et ne contient que les informations sur le sous-domaine de calcul et éventuellement les valeurs voisines. Avant de faire les calculs, il faut donc passer du global au local. Cela est fait par l’intermédiaire d’un outil PETSc compatible avec la structure de stockage des objets vectoriels ou matriciels. Qu’il s’agisse du calcul du second membre ou des coefficients des matrices, les différents processeurs agissent alors chacun de leur côté en parcourant le sous-domaine dédié point par point pour calculer les coefficients des vecteurs ou matrices locales. Pour passer du local au global, on utilise de nouveau un outil PETSc adéquat.

Ensuite, la résolution des systèmes linéaires est elle aussi traitée en parallèle. La méthode choisie est une méthode de gradient conjuguée qui est associée à un pré-conditionnement des matrices. Comme les matrices sont à diagonale dominante, on a choisi le pré-conditionnement de Jacobi. Cela permet de résoudre le système linéaire de manière itérative en limitant le nombre d’opérations, ce qui est indispensable quand on augmente la précision du maillage.

Les communications en processeurs. Pour relier les informations entre les différents sous-domaines, il est parfois nécessaire d’échanger des données entre processeurs. Bien que la librairie PETSc contiennent tout un tas d’outils permettant de gérer ces communications, notamment lors des passages entre le niveau global et le niveau local, nous avons préféré faire certaines communications “à la main” grâce aux outils MPI. Les communications concernées sont celles qui traversent plusieurs niveaux de cellules, voire plusieurs processeurs, avant d’arriver à destination. Typiquement, pour le calcul de la pression lithostatique, on intègre la masse volumique sur la hauteur :

$$p_s(x, y) = g \int_y^{L_y} \rho(x, \xi) d\xi,$$

ou numériquement

$$p_s(x_i, y_j) \approx p_{s_{i,j}} = g \sum_{k=j}^{j_{max}} h_y \rho_{i,k},$$

où j_{max} désigne le dernier indice du sous-domaine dans la direction de l’axe des ordonnées. Dans le cas où le domaine est découpé en plusieurs sous-domaines sur la hauteur, on doit calculer localement chaque intégrale et ajouter les résultats des processeurs situés au-dessus. C’est donc cette quantité qu’on va communiquer de processeur en processeur du haut vers le bas (voir Figure IV.8).

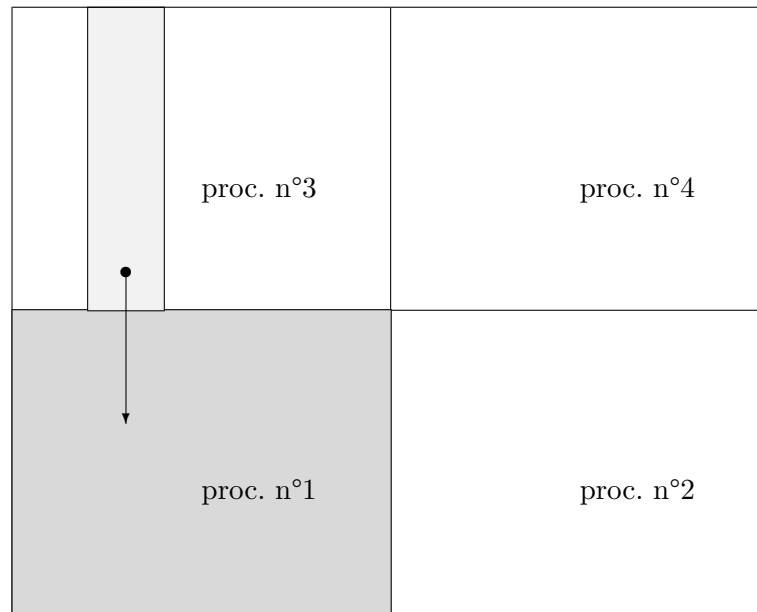


FIGURE IV.8 – Domaine de calcul du processeur n°1 et exemple de communication du processeur n°3 vers le n°1.

IV.7 Les tests de validation

Avant de nous lancer dans la simulation d'un écoulement de colonne granulaire 2D, nous avons procédé à la validation du schéma en nous basant sur des tests académiques. C'est ce que je présente dans cette section, en me focalisant sur la gestion du seuil de Bingham dans deux situations :

- l'écoulement de type Poiseuille dans un canal et
- la cavité carrée chauffée.

Dans la première, on regarde simplement si les équations de Bingham seules sont bien résolues par la nouvelle méthode présentée dans le paragraphe IV.4 et l'ordre de convergence du schéma. Dans la seconde, on s'intéresse à un couplage entre les équations de Bingham et une équation d'advection-diffusion à travers l'approximation de Boussinesq pour les fluides tempérés. Cela nous permet d'aller un peu plus loin dans la validation en traitant en fait un cas très proche de la version homogène des équations (II.7), qu'on souhaite résoudre par la suite.

IV.7.1 Fluide de Bingham dans un canal

Le premier test consiste à vérifier que le profil de vitesse d'un fluide de Bingham s'écoulant dans un canal 2D à un débit donné (ou de façon équivalente avec un gradient de pression donné) est bien celui prédit par la théorie (voir section III.1). Ce test est connu sous le nom d'écoulement de Poiseuille dans le cas d'un fluide newtonien et a fait l'objet de nombreuses recherches également dans le cas d'un fluide de Bingham (à seuil fixe), notamment dans les travaux récents de ACARY-ROBERT et collab. [2012]; MURAVLEVA [2014]. De plus, nous verrons que ce sera l'occasion de vérifier que le schéma converge bien à l'ordre 2 en espace.

La solution stationnaire d'un écoulement de Bingham dans un canal infini avec condition de Dirichlet homogène sur les bords est connue et donnée par la formule (III.4). Je précise cependant que pour éviter l'utilisation des ordonnées négatives $-1/2 \leq y \leq 0$, je décale le canal vers le haut, de sorte que l'axe des abscisses coïncide avec le bord inférieur. Nous considérons donc les équations sans dimension (II.10), dans lesquelles on enlève le terme de pesanteur (comme stipulé à la page 39) et nous choisissons les paramètres d'écoulement suivants pour simuler un cas académique (voir aussi [MURAVLEVA, 2014]) :

$$\lambda = \partial_x p = -1, \quad \text{Pe} = \text{Pr} = 1, \quad \text{Bi} = 0.2, \quad \tan(\alpha) = 1.$$

L'intérêt de ce cas particulier est la simplicité de la solution stationnaire théorique dans un canal infiniment long. Dans un canal de hauteur $L_y = 1$ défini par le domaine 2D $\mathbb{R} \times [0, 1]$, son profil de vitesse u_∞ est en effet donné par :

$$u_\infty(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y(0.6 - y) & \text{si } 0 \leq y \leq 0.3 \\ 0.045 & \text{si } 0.3 \leq y \leq 0.7 \\ \frac{1}{2} (1 - y)(0.6 + y - 1) & \text{si } 0.7 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Le débit adimensionné associé à cet écoulement est égal à $Q = 0.036$.

Pour effectuer les tests numériques, nous travaillons dans un canal de hauteur $L_y = 1$ et de longueur L_x finie, notée simplement L . Le domaine de calcul est donc le rectangle

$$\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, 1].$$

L'expérience numérique consiste à injecter par la gauche un fluide de Bingham avec les paramètres ci-dessus selon un profil de vitesse de Poiseuille (*i.e.* en forme de parabole centrée) de débit $Q = 0.036$ et de le laisser sortir sans contrainte par la droite (voir Figure IV.9), *i.e.*

$$\forall t \geq 0 \quad \begin{cases} u(t, 0, y) = 6Qy(1-y) & \text{en } x = 0, \\ \partial_t u + u_c \partial_x u = 0 & \text{en } x = L, \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

où u_c est un paramètre numérique, qu'on prend de l'ordre de la vitesse maximale du profil attendu en sortie. Partant d'un état initial dans lequel tout le fluide s'écoule comme en entrée, on s'attend à ce

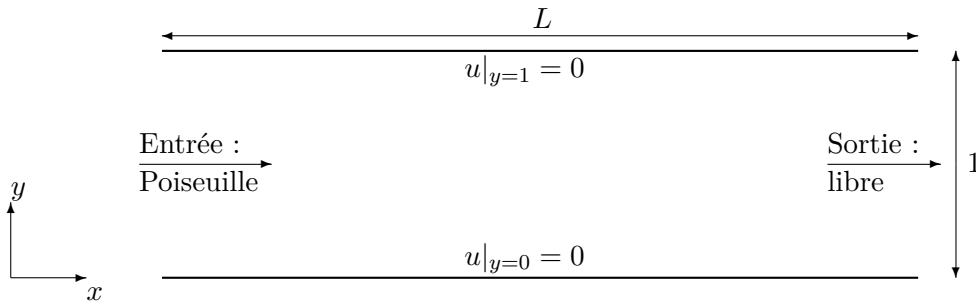


FIGURE IV.9 – Canal 2D horizontal et conditions aux bords.

qu'une zone quasi-statique se développe loin de l'entrée, pour finalement atteindre un état stationnaire dans lequel le profil sature en s'approchant de la sortie où il est égal au profil théorique (IV.25). Il faut remarquer que la valeur qu'on donne au paramètre u_c n'a pas d'influence sur le résultat de convergence, mais seulement sur la condition CFL¹² et sur la vitesse de convergence.

12. Courant-Friedrichs-Lewy

Dans la Figure IV.10, je montre le résultat numérique de simulation effectuée dans un canal de longueur $L = 4$. Les valeurs sont prises au temps normalisé $T = 0.05$ en entrée et au milieu du canal. La solution théorique u_∞ donnée par (IV.25) est également dessinée avec la même résolution spatiale. En comparant le profil de vitesse au milieu du canal et le profil de l'état stationnaire théorique du canal infini, on peut remarquer que la saturation du seuil de plasticité est très rapide et que le profil atteint dans ces conditions est proche du profil théorique.

Pour s'assurer que le code de simulation est correct, il faut étudier plus précisément la différence

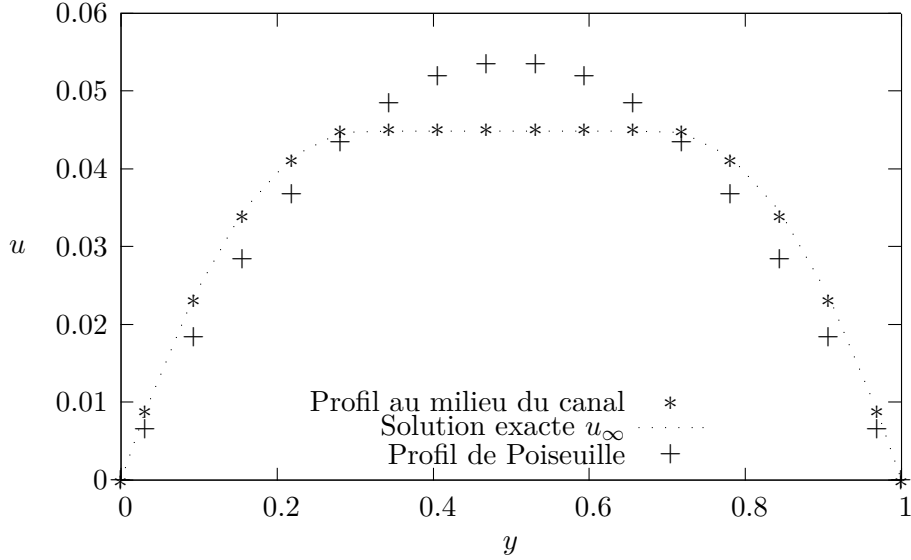


FIGURE IV.10 – Profils de vitesse u en fonction de y dans un canal de longueur $L = 4$. Valeurs prises au temps normalisé $T = 0.05$ au milieu du canal comparé aux profils théorique et d'entrée.

entre ces deux profils saturés quand la taille des mailles diminue. Cependant, comme nous travaillons dans un canal de longueur finie, il faut d'abord remarquer que la convergence dépend non seulement de la résolution spatiale, mais aussi de la longueur du canal. Pour fixer les idées, on se concentre maintenant sur le profil en sortie du canal. Pour mettre en évidence l'effet de la longueur du canal sur la convergence vers la solution théorique (IV.25), on répète la procédure de convergence vers un état stationnaire dans un domaine de plus en plus long. Je rappelle que le critère de convergence s'écrit ici :

$$\frac{\|u^{n+1} - u^n\|_{\ell^\infty}}{\delta t} \leq 10^{-8}.$$

On s'intéresse alors à la distance entre la solution stationnaire théorique dans un canal infini et l'état stationnaire atteint par la simulation numérique à la sortie d'un canal de longueur L . Pour cela, on considère la norme ℓ_y^∞ de la valeur absolue de la différence entre les profils à la sortie du canal, où

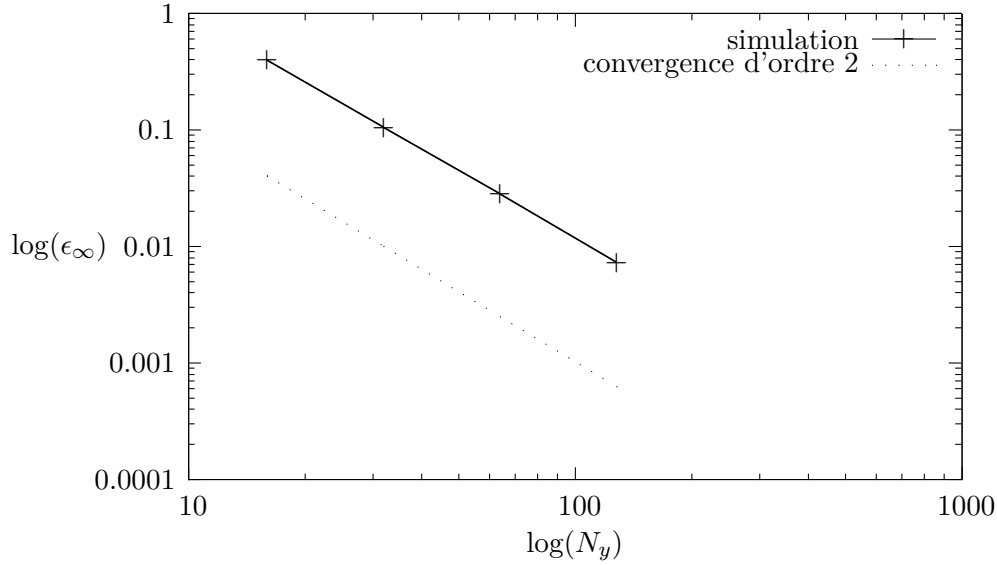
$$\|u - u_\infty\|_{\ell_y^\infty} = \max_{1 \leq j \leq N_y} |u_{N_x+1,j} - u_\infty|.$$

Alors pour une résolution donnée N_y (*i.e.* $h_x = h_y = 1/N_y$), quand la longueur L du canal augmente, cette distance converge vers une limite qu'on note $\epsilon_\infty(N_y)$; voir l'exemple à résolution $N_y = 128$ pour des longueurs de canal de 16 à 128 dans le tableau IV.1 ci-dessous.

On en déduit que $\epsilon_\infty(128) \approx 0.73 \cdot 10^{-5}$. On peut ensuite regarder la convergence de ϵ_∞ en fonction de N_y .

Dans la Figure IV.11, on trace la variation de ϵ_∞ en fonction de N_y . On peut remarquer que la distance

	$L = 16$	$L = 32$	$L = 64$	$L = 128$
$10^3 \ u - u_\infty\ _{\ell_y^\infty}$	0.1221	0.0594	0.0073	0.0073

TABLE IV.1 – Valeurs de $10^3 \|u - u_\infty\|_{\ell_y^\infty}$ à la sortie du canal en fonction de sa longueur L à $N_y = 128$.FIGURE IV.11 – Convergence de ϵ_∞ en fonction de la précision spatiale N_y .

diminue effectivement quand la résolution augmente. Plus précisément, en échelle logarithmique cette décroissance est linéaire de coefficient directeur -1.89 . On peut donc en conclure que le schéma converge à un ordre proche de 2, comme nous nous y attendions.

IV.7.2 Navier-Stokes-Boussinesq

Les équations de Navier-Stokes pour les fluides tempérés avec approximation de Boussinesq nous servent à valider le couplage numérique de la résolution des équations de mécanique des fluides (newtonien ou de Bingham) avec celle de l'équation d'advection-diffusion. À la différence du modèle qui nous intéresse, cette dernière équation ne s'applique pas à une pression fluide p_f mais à la température θ du fluide. Dans cette section, nous nous intéressons en fait au mouvement d'un fluide dans une pièce (vue de côté) sous l'influence d'une source de chaleur. L'entraînement du fluide est une conséquence de sa dilatation comme effet de l'augmentation de sa température (comme pour de l'air en conditions normales). Les équations qui régissent ce type d'écoulement ont été présentées à la page 31. Pour un fluide de Bingham à viscosité constante il s'agit du système :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \\ \rho(\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho(1 - \beta(\theta - \theta_{ref})) \mathbf{g}, \\ \partial_t \theta + \operatorname{div}(\theta \mathbf{v}) - \kappa \Delta \theta = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq \tau_0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

Le test classique associé à ce genre de fluide se passe dans une cavité carrée (ou rectangulaire) qui est chauffée sur un bord vertical et refroidie sur la paroi opposée (cf. [BACHELOR, 1954; DE VAHL DAVIS, 1983; LE QUÉRÉ, 1991]). On suppose que les autres bords sont adiabatiques (*i.e.* parfaitement isolants), ce qui se traduit par une condition de Neumann homogène sur la température aux bords horizontaux. La vitesse, quant à elle, est supposée nulle sur les bords, donc le fluide adhère parfaitement aux parois. Toutes ces conditions sont représentées sur la Figure IV.12. À l'état initial, on

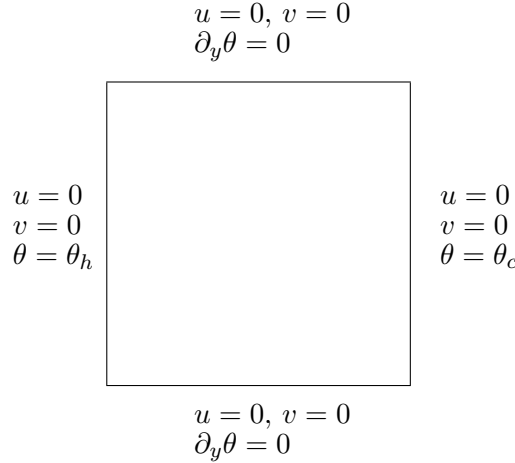


FIGURE IV.12 – Conditions de bord de la cavité chauffée.

donne une vitesse uniformément nulle et une température compatible avec les conditions aux bords et de gradient constant. La température initiale est donc invariante selon la hauteur et décroît linéairement selon l'axe horizontal. Si la différence de température $\theta_h - \theta_c$ entre les deux bords verticaux est suffisamment importante, alors elle entraîne le fluide, *via* le terme source d'approximation de Boussinesq, à s'enrouler sur lui-même par convection jusqu'à atteindre un état stationnaire.

Puisque nous allons tester le code dans cette configuration, nous allons comparer les résultats numériques à ceux déjà parus dans la littérature. Pour le cas d'un fluide newtonien, les articles de référence sont ceux de DE VAHL DAVIS [1983] et de LE QUÉRÉ [1991] et pour le cas d'un fluide de Bingham, on se base sur les résultats de VOLA et collab. [2003]. Tous ces résultats sont numériques. Pour que la comparaison soit valable, nous avons besoin de choisir les mêmes conditions de simulation numérique. Cela passe par l'adimensionnement décrit dans le paragraphe ci-dessous.

Modèle de Navier-Stokes-Boussinesq normalisé

Pour les équations du système (IV.27), le fonctionnement calculatoire est exactement le même que pour le cas du modèle granulaire fluidisé détaillé dans la section II.3. Seules les quantités de références peuvent changer.

La longueur de référence est donnée par la hauteur de la cavité :

- $L_{ref} = H$.

Comme ces écoulements sont tempérés, la température θ est une inconnue du système. Il faut donc choisir une température de référence. Notons déjà que la température maximale est celle qu'on impose à gauche θ_h et la température minimale est celle qu'on impose à droite θ_c . En effet, c'est bien le cas à l'état initial et comme nous l'avons vu pour la pression p_f en page 54, la température évolue selon une équation d'advection-diffusion qui satisfait le principe du maximum. On peut donc définir une température de référence en fonction des conditions imposées sur les bords. Mais comment choisir entre les différentes possibilités qui s'offrent à nous ? Imaginons qu'on veuille observer le

comportement de l'air dans une pièce sous l'action d'un radiateur. Dans ce cas, on peut prendre la température du radiateur comme référence, mais on comprend bien que selon la température ambiante initiale avant chauffage, le résultat ne sera pas le même, car c'est le gradient de température qui importe, plutôt que la valeur de la température elle-même. Il est donc plus judicieux de prendre en compte la différence entre la température la plus haute (imposée par le radiateur) et la plus basse (disons sur un mur opposé au radiateur). Autrement dit, dans notre cas on choisit :

- $\Theta_{ref} = \theta_h - \theta_c$.

Ce choix est en fait très lié à la forme du terme source intervenant dans l'équation de conservation de quantité de mouvement (IV.27)₂. Pour les mêmes raisons, la température est normalisée par

$$\tilde{\theta} = \frac{\theta - \bar{\theta}}{\Theta_{ref}},$$

où $\bar{\theta} = \frac{\theta_h + \theta_c}{2}$ est une température moyenne. Remarquons que dans ce modèle la masse volumique est constante donc on prend $\rho_{ref} = \rho$. Pour la vitesse, plutôt que de prendre en compte l'accélération de gravité et la longueur de référence, il est possible de faire un choix qui simplifie le système de Navier-Stokes-Boussinesq (IV.27) et qui tient compte plus naturellement des caractéristiques thermiques du fluide et des températures extrêmes. C'est le choix fait par LE QUÉRÉ [1991] pour traiter le cas d'une cavité entraînée par convection naturelle. La vitesse de référence est donnée par

- $V_{ref} = \frac{\kappa}{L_{ref}} \sqrt{\text{Ra}}$,

où, je le rappelle, le nombre de Rayleigh est défini par

$$\text{Ra} = \frac{\rho_{ref} g \beta \Theta_{ref} L_{ref}^3}{\mu \kappa}.$$

Cela permet entre autres d'exprimer le nombre de Péclet en fonction du nombre de Rayleigh par

$$\text{Pe} = \sqrt{\text{Ra}}.$$

En appliquant exactement la même méthode que pour le modèle granulaire fluidisé du paragraphe II.3, on obtient directement le système

$$\begin{cases} \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} \Delta \mathbf{v} = \frac{\text{BiPr}}{\text{Pe}} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \text{Pr} \theta \mathbf{e}_y \\ \partial_t \theta + \text{div}(\theta \mathbf{v}) - \frac{1}{\text{Pe}} \Delta \theta = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte sans dimension. Elle vérifie la relation suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}| \leq 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

Tests numériques dans une cavité chauffée

Les tests consistent à laisser la cavité chauffée atteindre l'état stationnaire selon le critère de convergence (IV.24) pour différentes valeurs de paramètres. Ce qui nous intéresse le plus dans cette situation est l'influence de la valeur du seuil de plasticité, *i.e.* la valeur du nombre de Bingham (Bi), sur la dynamique. Nous fixons donc les températures de bords à

$$\theta_h = 1 \quad \text{et} \quad \theta_c = 0,$$

et les autres paramètres avec :

$$\text{Ra} = \text{Pe}^2 = 10^4 \quad \text{et} \quad \text{Pr} = 0.71.$$

Je précise ici que ces valeurs sont celles prises dans les articles de référence et elles ont pour origine physique l'étude d'un gaz comparable à de l'air dans le cas newtonien. Le nombre de Bingham varie quant à lui entre 1 et 500 afin de passer en revue les différents régimes.

Les quantités pertinentes pour évaluer le résultat de simulation sont bien entendu la vitesse et la température, mais aussi le nombre de Nusselt. Celui-ci est lié au flux de chaleur et a plusieurs définitions, selon qu'on regarde localement ou globalement ce flux.

Le nombre de Nusselt local n'est autre que le flux horizontal de chaleur

$$\text{Nu}(x, y) = \sqrt{\text{Ra}} u \theta + \partial_x \theta.$$

De cette définition locale, on déduit le nombre de Nusselt moyen Nu_x en toute abscisse x par la formule

$$\text{Nu}_x = \int_0^1 (\sqrt{\text{Ra}} u \theta + \partial_x \theta)(x, y) dy.$$

De même que dans [VOLA et collab., 2003] et [DE VAHL DAVIS, 1983] nous regardons la valeur Nu_0 du nombre de Nusselt moyen à gauche, ainsi que les valeurs minimale et maximale du nombre de Nusselt local à gauche, qu'on note

$$\text{Nu}^{\min} = \min_{x \in [0,1]} \text{Nu}(x, 0) \quad \text{et} \quad \text{Nu}^{\max} = \max_{x \in [0,1]} \text{Nu}(x, 0).$$

Concernant la vitesse, nous nous intéressons au profil sur les axes médians et aux valeurs maximales atteintes le long de ces axes :

$$u^{\max} = \max_{y \in [0,1]} u(1/2, y) \quad \text{et} \quad v^{\max} = \max_{x \in [0,1]} v(x, 1/2).$$

La dernière quantité que nous observons est le maximum de la valeur absolue de la fonction de courant dans tout le domaine, *i.e.* la vitesse maximale de rotation de tourbillon :

$$\psi^{\max} = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} |\psi(x, y)|,$$

où ψ est la *fonction de courant* définie comme étant solution de l'équation

$$\Delta \psi = \partial_x v - \partial_y u \quad \text{dans le domaine.}$$

Ces valeurs ont été précisées par VOLA et collab. [2003] dans le cas d'un écoulement de Bingham uniquement pour la valeur $\text{Bi} = 300$. C'est pour cette raison qu'on se limite à ce cas également dans la Table IV.2, où l'on peut comparer les valeurs prises lors des simulations effectuées avec notre stratégie numérique et les valeurs données par Vola *et al.* dans [VOLA et collab., 2003]. Pour ce cas, nous utilisons un maillage 128×128 . Les valeurs des différents nombres de Nusselt sont très proches puisqu'on peut voir qu'il y a moins de 1 % de différence relative entre les deux simulations. Concernant les vitesses et la fonction de courant, les écarts sont sensiblement plus importants. Cela peut sans doute être dû à la différence de résolution spatiale, qui est plus grande dans notre travail. Ainsi, on peut remarquer que les valeurs maximales de vitesses ne sont pas captées au même endroit selon l'étude, ce qui explique la différence de valeur.

Pour mieux comprendre l'évolution du comportement de l'écoulement en fonction du nombre de Bingham, je donne les tracés des valeurs du nombre de Nusselt moyen au mur chauffé (Figure IV.13)

	Nos résultats (1)	Résultats de Vola et al. (2)	$ (1) - (2) / (1)$
Nu_0	1.0003	1.0056	0.5%
$Nu^{max}(y)$	1.019 (0.05)	1.022 (0.08)	0.3%
$Nu^{min}(y)$	0.981 (1.0)	0.989 (0.094)	0.8%
ψ^{max}	$4.27 \cdot 10^{-2}$	$3.76 \cdot 10^{-2}$	11.9%
$u^{max}(y)$	0.175 (0.996)	0.139 (0.98)	20.6%
$v^{max}(x)$	0.175 (0.004)	0.146 (0.01)	16.6%

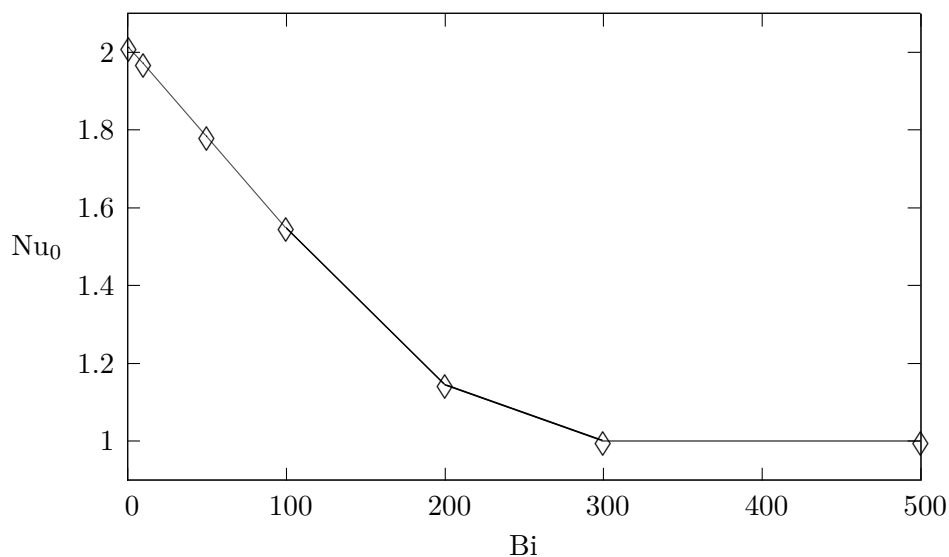
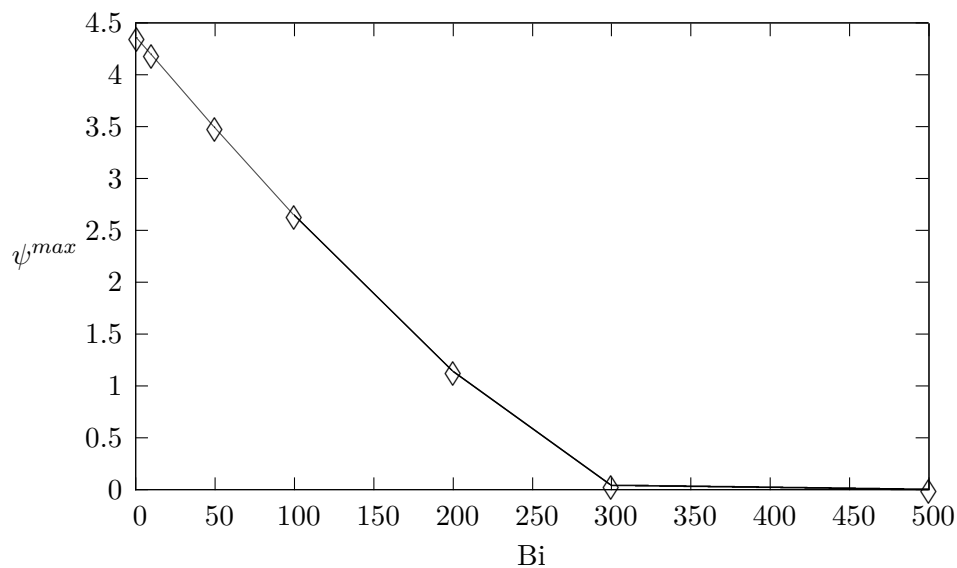
TABLE IV.2 – Caractéristiques de l'écoulement de Bingham dans une cavité chauffée pour $Bi = 300$.FIGURE IV.13 – Variation du nombre de Nusselt moyen en $x = 0$ en fonction du nombre de Bingham.

FIGURE IV.14 – Variation du maximum de la fonction de courant en fonction du nombre de Bingham.

et de ψ^{max} en fonction du nombre de Bingham Bi (Figure IV.14). Conformément à ce qui a été publié dans [VOLA et collab., 2003], les deux quantités diminuent fortement quand Bi augmente. Il faut noter tout de même que si les profils sont similaires, les valeurs que nous trouvons sont 10 % à 15 % plus faibles (en différence relative) que celles de VOLA et collab. [2003] pour les valeurs de Bi inférieures à 300. Les profils de la température et de la composante verticale de vitesse en $y = 1/2$

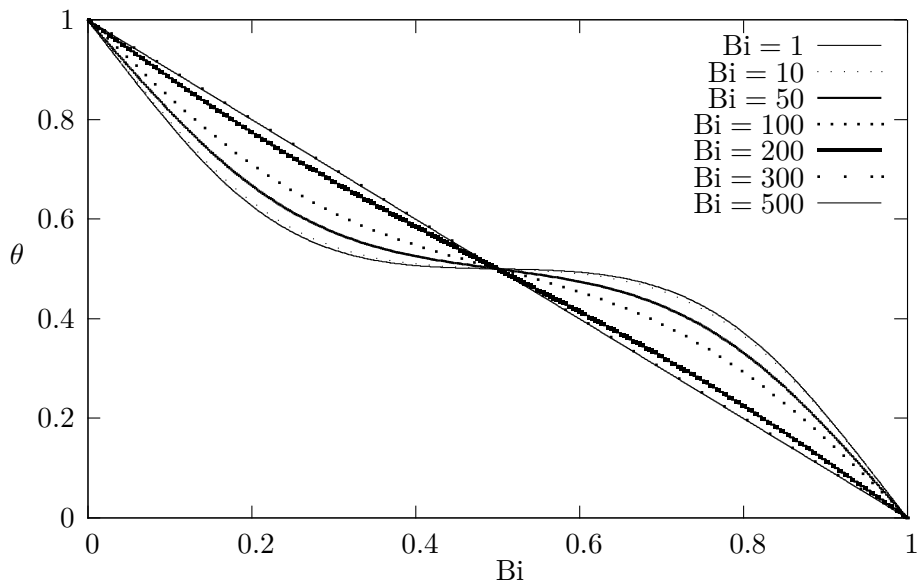


FIGURE IV.15 – Profils de température en $y = 1/2$ pour différentes valeurs de Bi .

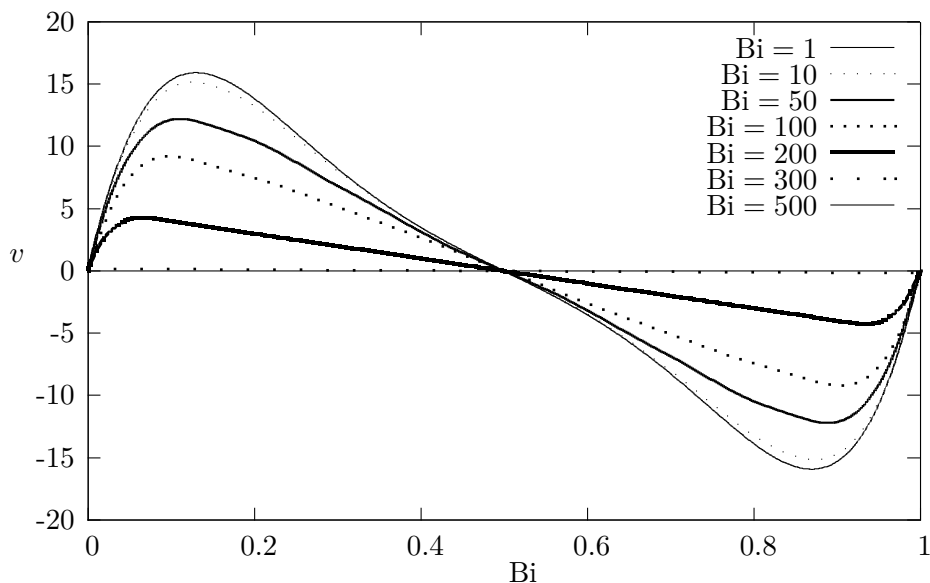


FIGURE IV.16 – Profils de la composante verticale de vitesse en $y = 1/2$ pour différentes valeurs de Bi .

sont donc eux aussi tout à fait en accord avec ceux exposés dans [VOLA et collab., 2003]. Pour la première, le profil est linéaire pour les grandes valeurs de Bingham, ce qui correspond au cas rigide, au sens où le gradient de température imposé n'est pas suffisant pour mettre en mouvement le fluide

viscoplastique. D'autre part, plus on baisse le seuil, plus le profil est incurvé, ce qui coïncide avec le fait que le matériau est beaucoup plus fluide et donc plus influencé par la convection naturelle. Cela est encore plus visible avec les profils de vitesse dans la Figure IV.16, où on voit très nettement que plus le seuil de plasticité est faible, plus la valeur maximale de vitesse est élevée et plus cette valeur est atteinte loin de la paroi. Et on retrouve l'aspect rigide de matériau pour les valeurs de Bi de 300 et 500, pour lesquelles la vitesse est quasiment nulle le long de l'axe médian horizontal.

Ainsi, nous avons pu valider le code sur la base de comparaisons à des résultats de référence donnés dans le traitement de cas académiques. Il est temps maintenant de voir ce qu'il en est dans le cas de l'écoulement plus complexe définissant notre matériau granulaire fluidisé.

IV.7.3 Fluide à seuil variable dans un canal

Si les tests précédents nous ont un peu éloignés du sujet initial, il est temps maintenant d'y revenir en adaptant le test du canal appliqué à un matériau granulaire fluidisé. Je précise que ce test n'est pas quantitatif, mais uniquement qualitatif. Il a pour vocation de tester le comportement du code lorsqu'on regarde l'écoulement d'un fluide viscoplastique dont le seuil varie selon le moment et l'endroit de l'écoulement.

Pour tester la robustesse du schéma de résolution du tenseur de Bingham à seuil variable, j'ai repris le test de Poiseuille vu au paragraphe IV.7.1, mais en considérant cette fois-ci un état initial fluidisé. Pour cela on se donne un fluide viscoplastique de seuil variable selon la loi de fluidisation donnée dans tout le canal par :

$$\tau(x, y) = 0.2(1 - q), \quad (\text{IV.31})$$

où q vérifie l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t q + \text{div}(\mathbf{v}q) - \frac{1}{\text{Pe}} \Delta q = 0 \quad (\text{IV.32})$$

et les conditions de bord suivantes :

$$q(0, \cdot) = 1, \quad \partial_x q(L, \cdot) = 0, \quad \partial_y q(\cdot, 0) = \partial_y q(\cdot, 1) = 0. \quad (\text{IV.33})$$

Initialement, on remplit le canal de ce matériau avec un niveau de fluidisation totale, *i.e.* avec $q(t = 0) \equiv 1$. Ensuite, on l'injecte totalement fluidisé (*i.e.* à seuil nul) dans le canal par la gauche, alors que par la droite, on le laisse sortir sans contrainte et en imposant une condition de Neumann homogène sur paramètre de fluidisation q , ce qui lui permet de se défluidiser légèrement de ce côté tout en circulant. Les équations de l'écoulement sont donc les équations du système (II.7) du modèle complet, qu'on va exploiter dans leur version homogène, *i.e.* à densité constante, et où la force motrice est donnée par un débit d'écoulement au lieu d'une force de gravitation. L'intérêt de cette expérience est de voir l'influence de la vitesse de défluidisation sur la dynamique, *i.e.* l'impact de la valeur du nombre de Péclet (Pe) sur la dynamique globale.

L'idée est donc de se fixer un temps au bout duquel on regarde l'état du fluide dans le canal et de comparer en fonction de la valeur de Pe. Dans ce qui suit, on s'est donné comme temps final (normalisé) $T = 10$. Afin de comparer différents comportements, on se donne un cas comme décrit plus haut avec pour coefficient $\text{Pe} = 10^2$, un autre avec pour coefficient $\text{Pe} = 10^3$.

Dans la Figure IV.17, je présente des profils de vitesse horizontale à différentes sections du canal ($x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$) en superposant les cas à $\text{Pe} = 10$ et à $\text{Pe} = 100$. En entrée se trouve le profil de Poiseuille qui est donné par l'équation (IV.25) et qui est aussi le profil de vitesse initiale partout dans le domaine. Pour plus de lisibilité des résultats, les valeurs des vitesses sont affichées à l'échelle 10 : 1 et le profil pour le cas à $\text{Pe} = 10$ est décalé de 0.05 vers la gauche. La vitesse étant

nulle sur les bords horizontaux, on peut en déduire la valeur de la vitesse en tout point de la section verticale prenant en compte cette échelle. Par exemple, on peut lire la vitesse maximale atteinte dans le cas à $Pe = 100$, qui est d'environ 0.055 sur la section verticale en $x = 2$. Pour mieux voir l'écart

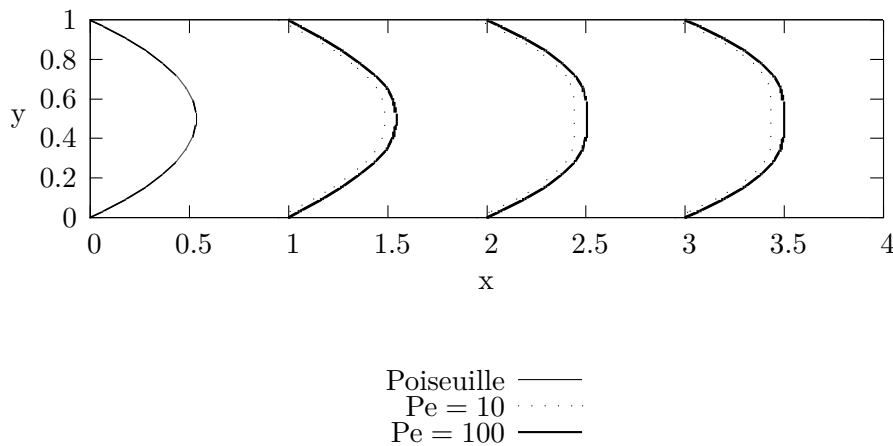


FIGURE IV.17 – État du canal au temps normalisé $T = 10$. Profils de vitesse en différentes sections (échelle des valeurs de vitesse 10:1) pour un écoulement de Bingham fluidisé, avec $Pe = 10$ et $Pe = 100$.

entre les deux simulations, j'ai tracé la différence des profils à la section verticale $\{x = 3\}$. Le résultat est donné en Figure IV.18 avec l'échelle réelle pour la différence entre les vitesses. On peut donc voir qu'à cet endroit du canal, même si la différence entre les deux cas est très faible, elle fait déjà apparaître la zone de seuil, puisque c'est dans l'ensemble $\{y \in [0.3, 0.7]\}$ que la différence est positive, alors qu'en dehors elle est négative. Cela s'explique simplement par le fait que le fluide ressent plus les effets du seuil de plasticité à $Pe = 10$ qu'à $Pe = 100$, puisque la diffusion du paramètre q est plus rapide.

Observons maintenant le cas $Pe = 100$ seul. On remarque que le profil de vitesse s'aplatit de plus en plus en s'éloignant de l'entrée. Cela correspond exactement à la dissipation du paramètre q , qui au départ est uniformément égal à 1. Dans la Figure IV.19, je présente les valeurs prises par ce paramètre dans tout le domaine au temps adimensionné $T = 10$. Ainsi, on peut voir que le profil de vitesse est clairement lié à la valeur locale du seuil, et ce dans tout le domaine. On en déduit que le comportement du code dans la configuration d'un matériau viscoplastique à seuil variable est qualitativement cohérent avec l'idée du modèle. Afin de mieux se rendre compte de son efficacité et d'évaluer quantitativement le modèle, nous allons maintenant passer aux simulations de type rupture de barrage.

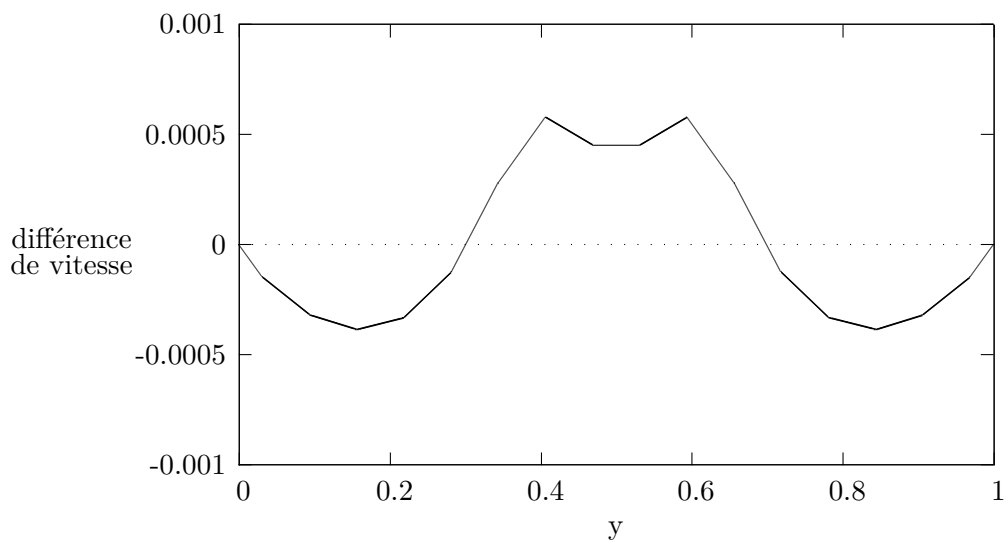


FIGURE IV.18 – Différence de vitesse entre le cas $Pe = 100$ et le cas $Pe = 10$ en $x = 3$ et à $T = 10$.

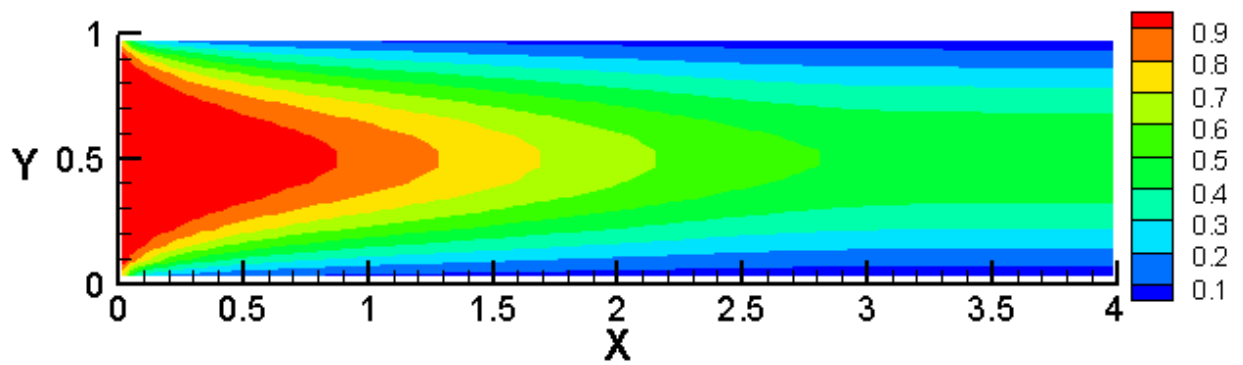


FIGURE IV.19 – Valeurs du paramètre de fluidisation q dans le domaine de canal.

Chapitre V

Simulations de chute de colonne granulaire

Sommaire

V.1	Introduction	102
V.2	Angle de repos d'un lit non fluidisé	107
	V.2.1 Introduction	107
	V.2.2 Résultats et commentaires	108
V.3	Simulations d'écroulement de colonne granulaire non fluidisée	111
	V.3.1 Introduction	111
	V.3.2 Résultats et commentaires	112
V.4	Simulations d'écroulement de colonne granulaire fluidisée	120
	V.4.1 Introduction	120
	V.4.2 Résultats et commentaires	121
V.5	Conclusions sur les simulations numériques	127

V.1 Introduction

Nous atteignons dans ce chapitre le but qu'on vise au départ, à savoir reproduire sur ordinateur l'expérience de simulation de rupture de barrage dans un canal. Pour ce faire, nous utilisons les équations (II.7) du modèle complet, associées aux équations (II.6) et (II.8). L'équation (II.7)₂ de conservation de la masse est une équation de transport sur la masse volumique, qui est une inconnue du système. C'est par elle qu'on peut effectuer un suivi visuel de l'écoulement au cours de la simulation en indiquant à chaque pas de temps où se trouvent les zones de basse masse volumique, *i.e.* le gaz ambiant, et les zones de haute masse volumique, *i.e.* le lit granulaire.

Expériences de laboratoire Dans cette introduction, je vais présenter les expériences de laboratoire qui nous servent de référence de comparaison pour évaluer nos résultats numériques. Celles-ci ont été menées par Valentin Gueugneau dans son stage de Master2 Recherche au LMV. Nous nous servons notamment des résultats qu'il a donnés dans son mémoire de Master [GUEUGNEAU, 2015]. Ses expériences étendent celles d'Olivier Roche présentées dans [ROCHE, 2012] en reproduisant plusieurs fois l'expérience de rupture de barrage selon un plan d'expérience décrit plus bas. Pour effectuer ces écroulements de colonne granulaire, le dispositif expérimental est celui qui est présenté dans le paragraphe II.2.1 (voir aussi la photo en Figure II.1). Je rappelle qu'il s'agit d'un chenal horizontal constitué de deux plaques transparentes en plexiglas sur les côtés et au début duquel est placé un réservoir vertical de 20 cm de large. Les plaques de plexiglas sont parallèles et distantes de 20 cm également. Une porte amovible sépare initialement le réservoir du chenal. Une caméra est installée sur le côté du dispositif pour observer les expériences à travers la plaque transparente. Les résultats sont donc des coupes transversales d'écroulement de colonne granulaire dans le chenal (voir Figure II.2). Bien qu'on ne regarde l'écoulement que par le côté pour en déduire une dynamique en 2 dimensions de l'espace seulement, il faut tout de même noter que la présence des plaques joue nécessairement un rôle dans la dynamique en 3D. Leur impact sur les observations est cependant suffisamment faible pour être négligé dans cette étude. Le matériau granulaire utilisé dans les expériences de GUEUGNEAU [2015] est constitué de billes de verre de diamètre de 80 μm et de densité 2500 kg/m^3 . Comme les billes forment un empilement aléatoire, la fraction volumique granulaire est inférieure à 60 %, ce qui donne finalement une densité globale autour de 1450 kg/m^3 . Ces billes sont préalablement séchées avant toute expérience. Ainsi, en les soumettant à un flux d'air important, on réduit la cohésion due à l'humidité.

Puisque la longueur du réservoir est fixée à 20 cm, pour un écroulement de colonne granulaire fluidisée l'état initial est simplement déterminé par la hauteur de la colonne dans le réservoir et par son niveau de fluidisation. Pour pouvoir effectuer cette fluidisation de la colonne initiale, une plaque poreuse est disposée au fond du réservoir. On peut alors injecter un gaz (de l'air dans les expériences) par la base de la colonne. En augmentant la vitesse d'injection, la pression du gaz augmente entre les billes et on fluidise de plus en plus le lit granulaire. Il existe une limite à ce phénomène, dépendant du matériau et des conditions expérimentales, au-delà de laquelle des bulles de gaz commencent à se former. La vitesse au niveau de cette limite est la vitesse critique de fluidisation, qui détermine le seuil de fluidisation totale (voir Figure II.3 pour plus de détails).

Le plan d'expérience adopté dans [GUEUGNEAU, 2015] comporte trois tailles de colonnes (10 cm, 20 cm, 30 cm) et trois niveaux de fluidisation (sec, semi-fluidisé et totalement fluidisé). Pour des raisons de fiabilité des résultats expérimentaux, nous nous limitons aux cas sec et totalement fluidisé. Dans ce dernier cas, la vitesse d'injection est en fait égale à 90 % de la vitesse maximale de fluidisation.

Simulations numériques Dans la suite, je présente deux types de simulations numériques selon l'état initial qu'on choisit. Dans les deux cas, on part avec une vitesse nulle et le début de la simulation correspond à l'ouverture de la porte dans l'expérience de laboratoire.

- Le premier type de simulation consiste à vérifier la stabilité d'un tas triangulaire. Pour cela on compare l'angle de repos avec l'angle de frottement interne du matériau.
- Le deuxième type de simulation est un écoulement de colonne granulaire. Pour celui-ci, nous adoptons le plan d'expérience décrit précédemment en commençant par le cas non fluidisé.

Avant de présenter chacun des résultats, je donne les notations et caractéristiques des simulations numériques. Le domaine de calcul est un rectangle de hauteur $L_y = H$ et de longueur $L_x = L$, qui représente le chenal de l'expérience vu de côté. Le maillage du domaine est cartésien et déterminé par le nombre de cellules sur la longueur N_x et sur la hauteur N_y . Comme nous nous limitons à des domaines plus longs que hauts et à des cellules carrées, la précision spatiale sera donnée par N_y . On ajuste ensuite N_x de sorte que les cellules soient bien carrées de côté $h_x = h_y = H/N_y$.

L'état initial est au repos (*i.e.* le champ de vitesse est partout nul) et avec un certain profil pour le lit granulaire (triangle ou rectangle) délimité par l'abscisse x_{max} à droite et y_{max} en haut (voir Figures V.4 et V.9). Le reste du domaine est alors rempli d'air. Plus précisément, comme nous avons effectué des simulations à viscosité constante, le fluide ambiant n'est pas de l'air, mais un fluide visqueux de masse volumique 1 kg/m^3 et de viscosité μ égale à la viscosité du mélange. Conformément aux résultats de IONESCU et collab. [2015] pour le lit granulaire, cette valeur est fixée à 0.8 Pa.s pour l'ensemble des simulations présentées ci-dessous. D'autre part, je rappelle que le fluide qu'on considère est un fluide viscoplastique avec un seuil de plasticité τ_0 complètement déterminé en fonction de la masse volumique et l'éventuelle pression du fluide interstitiel p_f de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in (0, L) \times (0, H), \begin{cases} \tau_0(x, y) = 0 & \text{si } \rho(x, y) \leq 1.5 \text{ kg/m}^3, \\ \tau_0(x, y) = \tan(\alpha) \left[g \int_y^H \rho(x, \xi) d\xi - p_f \right]^+ & \text{si } \rho(x, y) > 1.5 \text{ kg/m}^3. \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

De plus, afin d'améliorer la qualité des résultats, nous avons régularisé la frontière entre le lit granulaire dense et la phase gazeuse. Pour ce faire, nous définissons une fonction de masse volumique initiale de la façon suivante :

$$\forall y \leq y_{max}, \quad \rho(x, y) = \frac{\rho_{max} + \rho_{min}}{2} - \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{2} \tanh(M(x - x_{front}(y))), \quad (\text{V.2})$$

où $y \mapsto x_{front}(y)$ est la fonction qui détermine le profil de la frontière initiale et M est un paramètre de régularisation. Plus ce dernier est grand, plus la pente est raide au niveau de la discontinuité et plus on est proche de la frontière exacte (voir Figure V.1). Sauf mention contraire, dans l'ensemble des simulations présentées ce paramètre est fixé à $M = 150$, ce qui représente concrètement une distance d'environ un centimètre entre les deux valeurs extrêmes.

La dernière donnée initiale concerne le niveau de fluidisation. Selon qu'on regarde le cas fluidisé ou sec, on adapte la valeur initiale de la pression du fluide interstitiel p_f . Dans le cas sec, elle est nulle partout. Dans le cas totalement fluidisé, elle est égale à 90 % de la pression lithostatique initiale, ce qui doit correspondre aux expériences de laboratoire qui nous servent de référence.

Conditions aux bords. À la page 77, nous avons décrit de manière générale les conditions de bords que nous avons implémentées pour les composantes du champ de vitesse. Que ce soit la condition de Dirichlet ou celle de Neumann, leur interprétation physique n'est pas très satisfaisante par rapport

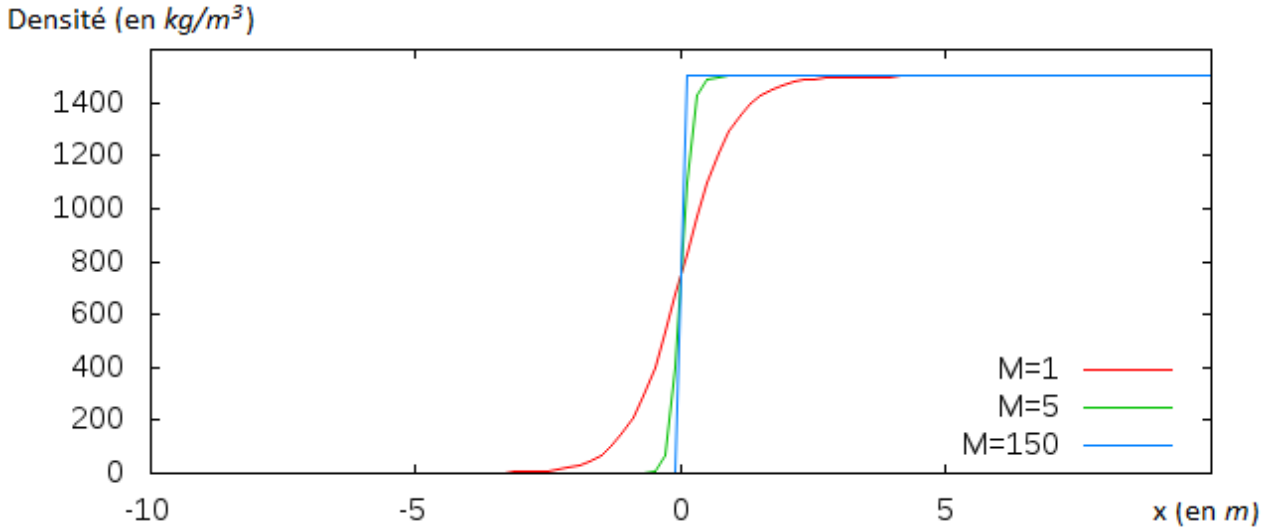


FIGURE V.1 – Tracé de la fonction définie en (V.2) pour différentes valeurs de M avec $\rho_{max} = 1500 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{min} = 1 \text{ kg/m}^3$ et $x_{front} = 0 \text{ m}$.

à la réalité des expériences. D'autre part, l'utilisation d'une condition de Robin présente plusieurs inconvénients dans le contexte de notre étude. Premièrement elle est soumise à la détermination du coefficient de Robin \mathfrak{R} , qui dépend *a priori* du type de matériau granulaire, de la nature du bord et, dans le cas fluidisé, de la pression du fluide interstitiel au bord. Or à notre connaissance, aucune loi n'existe pour donner un tel coefficient dans ces conditions. Deuxièmement, elle a en pratique une influence sur le schéma de sorte que par rapport à une condition de Dirichlet, on est obligé de réduire le pas d'espace pour obtenir la convergence numérique, ce qui devient très vite contraignant. De plus, du point de vue physique, on peut effectivement observer un contact entre les parois et le matériau granulaire, qui, s'il est sous forme de frottement, doit contribuer au ralentissement de la dynamique globale. En réalité le contact est beaucoup plus complexe, incluant également du roulement et des chocs, dont les effets sont plus difficile à quantifier. La prise en compte d'une telle complexité n'est pas le sujet de cette étude, c'est pourquoi nous nous contentons ici de conditions de bord de type Dirichlet homogène, qui nous suffiront pour évaluer le comportement du modèle en première approximation et des pistes d'amélioration sont présentées au Chapitre VI. Plus explicitement, cette condition, qu'on a aussi utilisée dans l'étude des solutions stationnaires, correspond à une adhérence du matériau au bord.

Pour ce qui est de la pression du fluide interstitiel p_f , dont l'évolution est régie par une équation d'advection-diffusion, elle est soumise à une condition de Dirichlet homogène sur le bord supérieur et à une condition de Neumann homogène sur les autres bords. Ce faisant, on fixe comme pression de référence la pression en haut du domaine. D'autre part, la condition de Neumann au sol permet de laisser évoluer la pression sans contrainte liée au contact. Cependant, cette condition est également appliquée au pied du réservoir, ce qui n'est pas tout à fait compatible avec les expériences. En effet, pour des raisons techniques liées au dispositif expérimental, les résultats d'écoulements fluidisés présentés par GUEUGNEAU [2015] ont été effectués avec une injection d'air constante par le sol du réservoir tout au long de l'écoulement. Il est à noter que l'article actuellement soumis par MONT-SERRAT et collab. [2015] présente des expériences effectuées avec coupure de l'injection de l'air à l'ouverture de la porte et que cela ne change pas significativement les distances de parcours.

Remarques générales sur les résultats numériques et le post-traitement

Les résultats numériques présentés dans les paragraphes suivants ont été recueillis après traitement des données brutes par un script en Fortran90. Cela consiste à rassembler les informations des différents processeurs et les mettre en forme dans des fichiers de données brutes ou sous un format particulier pour qu'ils soient lus par le logiciel Tecplot.

Mode de mesure des données pour les tests à densité variable. Les simulations présentées dans ce chapitre sont toutes à densité variable. Comme je le disais au début de cette introduction, c'est dans ces conditions qu'on peut effectuer le suivi visuel de l'écoulement en connaissant la valeur de la masse volumique en tout point du domaine et à tout instant. Ce que je voudrais expliquer ici est la méthode précise de mesure des différentes quantités qui nous intéressent. Dans les sections suivantes, nous souhaitons comparer les résultats avec ceux obtenus en laboratoire. Il s'agit de mesurer d'une part le profil du lit granulaire à l'état final ou au cours de la simulation et d'autre part de donner la courbe de déplacement du front en fonction du temps. Dans les deux cas nous nous intéressons à la frontière entre le lit granulaire, qui a une masse volumique supérieure à 1400 kg/m^3 , et l'environnement ambiant, qui est à densité beaucoup plus faible. Cependant les résultats numériques que nous obtenons ne permettent pas de définir très précisément cette frontière, à moins de réduire considérablement le pas d'espace, ce qui n'est pas envisagé pour le moment. Dans ces conditions, j'ai choisi de définir la frontière comme étant la ligne de niveau de masse volumique à 1400 kg/m^3 . Les différents points de mesure sont indiqués dans la Figure V.2. Pour tracer la courbe de déplacement du front, qu'on utilise pour comparer la vitesse de progression de la tête par rapport aux simulations dans le cas de la chute d'une colonne fluidisée ou non, on donne en fait le graphe de l'abscisse x du point d'ordonnée non nulle le plus à droite de la ligne de niveau en fonction du temps (position du front). Pour le profil du dépôt, la méthode est un peu moins évidente. Bien sûr, il s'agit de donner le graphe de la ligne de niveau de densité à 1400 kg/m^3 . Mais compte tenu de la condition d'adhérence sur le bord inférieur, le profil possède parfois une tête qui n'est pas directement posée au sol. C'est pourquoi dans les mesures que je donne, deux courbes peuvent être données. L'une représente l'ensemble des ordonnées des points de mesures situés sur le dessus de la tête et sera désignée dans la légende par le terme "hauteur" (point haut de mesure). L'autre représente l'épaisseur du lit granulaire, autrement dit la distance séparant le point le plus haut du point le plus bas pour chaque abscisse (distance séparant le point de mesure bas du point de mesure haut). On peut voir les différentes courbes résultant de cette méthode dans la Figure V.10 par exemple.

Incertitude des mesures. De même que lors des mesures de terrain ou de laboratoire, les valeurs sont sujettes à des incertitudes. Dans notre cas, ces dernières proviennent essentiellement de l'épaisseur de la frontière entre la partie dense du lit granulaire avec une masse volumique autour de 1450 kg/m^3 et la partie gazeuse à 1 kg/m^3 . On peut en effet remarquer qu'avec la précision choisie dans la simulation d'écoulement d'une colonne granulaire sèche de rapport d'aspect 0.5 (voir Figure V.2), sur un dépôt final, la distance entre les deux lignes de niveau de masses volumiques 200 kg/m^3 et 1400 kg/m^3 est d'environ 2 cm dans la direction de l'axe des ordonnées dans les zones non diffusées. Cela reste raisonnable par rapport à la précision du calcul, puisque cette distance est déjà de cet ordre à l'état initial du fait du choix de la régularisation de la condition initiale (voir équation (V.2)). Le principal problème se situe au front du lit granulaire, où la résolution de l'équation de transport pose le plus de soucis. Il est alors très difficile de prendre des mesures fiables d'épaisseur, ce qui pose quelques problèmes quand on veut justement évaluer le comportement à la tête. Bien entendu, quand on augmente la précision du maillage du domaine spatial, on réduit les incertitudes. En effet, cela nous permet d'augmenter le paramètre de régularisation au niveau de la

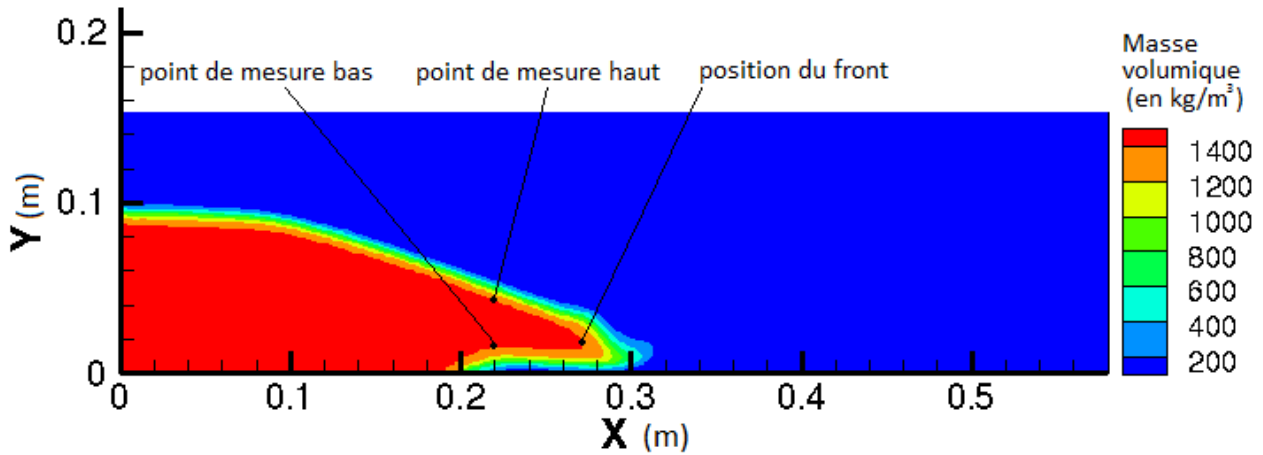


FIGURE V.2 – Position des points de mesure de la frontière entre les deux phases. Exemple de la simulation de rupture de barrage d’une colonne granulaire non fluidisée de hauteur 10 cm et de largeur 20 cm.

frontière entre les deux phases et donc de rendre le front initial plus raide. Pour mieux se rendre compte du gain, je présente la distribution de masse volumique après 0.5 s d’écoulement dans le cas de la chute d’une colonne granulaire non fluidisée en Figure V.3. En haut de cette figure, il s’agit du cas le plus précis pour lequel le nombre de cellules sur la hauteur est deux fois plus important, soit $N_y = 192$, ce qui permet d’imposer un paramètre de régularisation $M = 300$ dans l’équation (V.2) (au lieu de 150 pour l’autre cas). En comparant les frontières entre les phases, on peut noter une nette diminution de l’épaisseur, mais celle-ci reste beaucoup plus importante que dans les expériences, où on peut considérer qu’elle s’étale sur une épaisseur de quelques grains. Cependant cela a un coût en terme de temps de calcul, ce qui nous empêche d’appliquer ce niveau de précision dans la suite des simulations numériques. Comme les simulations présentées dans ce mémoire sont faites pour évaluer le comportement au premier ordre du modèle, nous avons gardé la précision la plus basse des deux présentées en Figure V.3.

Paramètres numériques pour le seuil de plasticité. Comme nous avons pu le voir lors de la description du schéma à double projection au paragraphe IV.4, lorsqu’on s’intéresse à un fluide viscoplastique, deux nouveaux paramètres numériques r et ζ interviennent dans notre méthode. Dans toutes les simulations présentées ci-après, sauf mention contraire, ces paramètres prennent pour valeurs respectives :

$$r = 0.001 \quad \text{et} \quad \zeta = 0.05. \quad (\text{V.3})$$

Ces deux coefficients sont sans dimension et ont un intérêt purement numérique. Ils permettent d’avoir une convergence suffisamment rapide de l’algorithme de projection pour le traitement du seuil de plasticité sous condition :

- Les valeurs de r et ζ doivent être choisies suffisamment petites pour que le schéma soit stable et convergent (voir [CHUPIN et DUBOIS, 2015]) et c’est le cas pour les valeurs que nous avons choisies ici.
- La validité du choix de la valeur de ζ sera discutée dans la section suivante, lors de l’évaluation du modèle dans le cas d’un tas initial triangulaire.

Maintenant que nous avons vu ces données communes, nous allons passer en revue les résultats de chacun des tests. Le premier est le test de stabilité par rapport à l’angle de frottement interne.

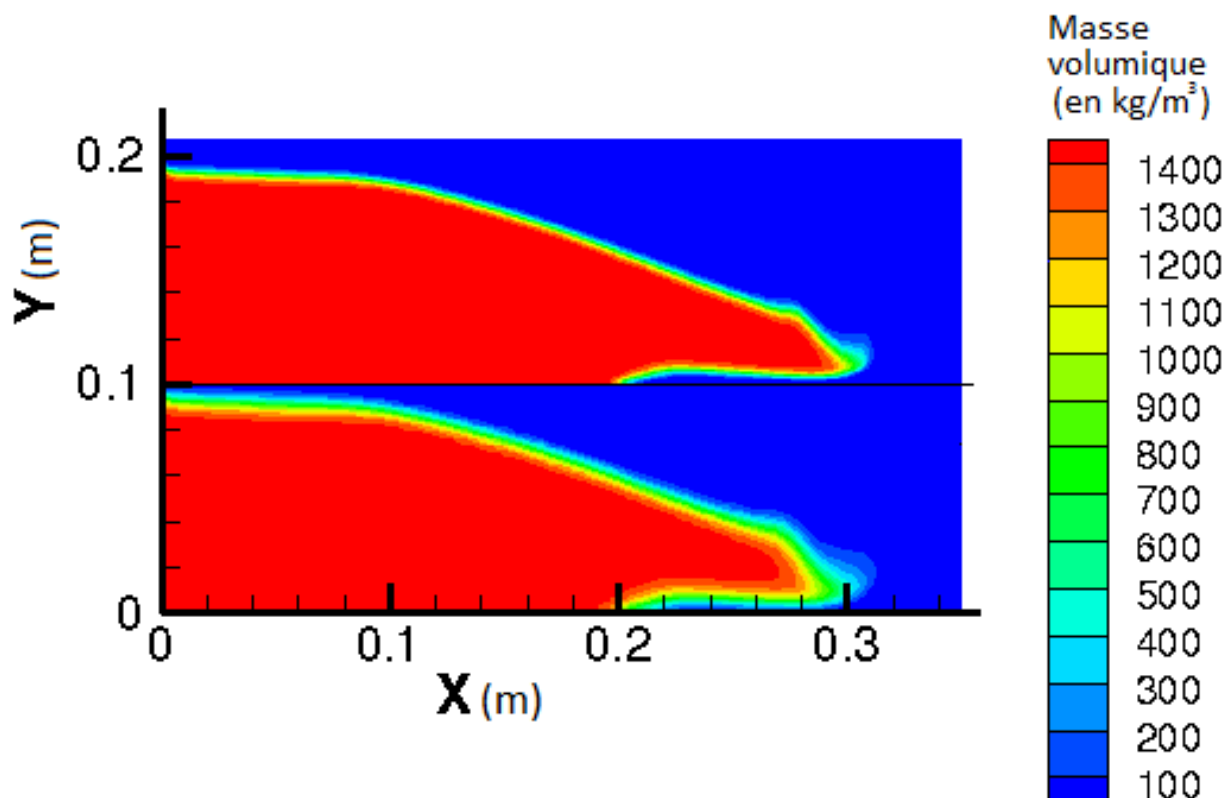


FIGURE V.3 – Distribution de la masse volumique après 0.5 s d'écoulement d'une colonne non fluidisée de hauteur 10 cm et de largeur 20 cm. Comparaison selon le pas d'espace et la raideur du front initial. En haut : $N_y = 192$ et $M = 300$. En bas : $N_y = 96$ et $M = 150$.

Ensuite nous regarderons le test de rupture de barrage dans le cas non fluidisé puis fluidisé.

V.2 Angle de repos d'un lit non fluidisé

V.2.1 Introduction

Cette première section est dédiée à l'évaluation de la capacité du modèle numérique à respecter une caractéristique physique essentielle des lits granulaires non fluidisés, à savoir l'angle de repos. Plus précisément, nous allons regarder selon la pente initiale si un tas triangulaire initialement au repos se met en mouvement. Expérimentalement, si l'angle α de la pente du lit granulaire est supérieur à l'angle α de frottement interne du matériau, on observe la mise en mouvement des couches supérieures du lit granulaire, jusqu'à obtenir une pente d'angle plus faible à l'état final.

On se donne donc un profil initial de densité sous forme d'un triangle appuyé à gauche contre la paroi du chenal et faisant un angle α avec l'horizontale (voir Figure V.4). La démarche que nous adoptons consiste à imposer un angle α de départ qui varie autour de l'angle de frottement interne du matériau, dépendant uniquement de la nature de ce dernier et éventuellement des conditions expérimentales. Je rappelle que le matériau granulaire ayant servi dans les expériences de GUEUGNEAU [2015] a un angle de frottement interne $\alpha = 24^\circ$. Comme l'angle α est déterminé dans notre code par les longueurs respectives x_{max} de la base et y_{max} de la hauteur, c'est en réalité $\tan(\alpha)$ qu'on connaît très précisément. Dans un premier temps, pour arrondir les valeurs nous avons pris un angle de frottement

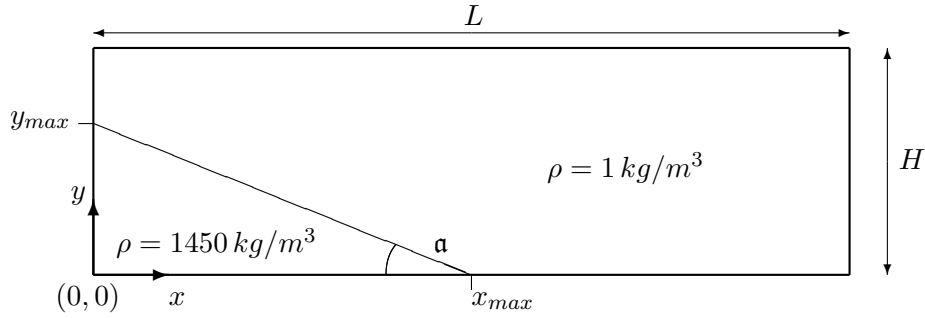


FIGURE V.4 – Condition initiale pour le test de stabilité d’une pente à la surface d’un lit granulaire non fluidisé.

interne dont la tangente est égale à 0.45. Cela donne donc un angle légèrement supérieur à celui du matériau des expériences avec $\alpha = \arctan(0.45) \approx 24.2^\circ$. Afin de voir l’effet de la pente initiale sur la mise en mouvement d’un tel état initial triangulaire, j’ai fait un test avec un angle $\alpha \approx 26.6^\circ$ supérieur à cette valeur et un autre avec un angle $\alpha \approx 21.8^\circ$ inférieur. Les dimensions correspondantes sont respectivement $(x_{max}, y_{max}) = (20\text{ cm}, 10\text{ cm})$ et $(x_{max}, y_{max}) = (25\text{ cm}, 10\text{ cm})$. On s’attend à ce que dans le premier cas le lit granulaire se mette en mouvement et qu’il reste immobile dans le second. Voyons précisément ce qu’il en est et dans quelles conditions.

V.2.2 Résultats et commentaires

Données numériques. Pour effectuer les deux simulations, le domaine est toujours un rectangle de dimensions respectives $H = 0.2\text{ m}$ et $L = 0.3\text{ m}$. Le maillage est déterminé par un pas d’espace $h_x = h_y = \frac{H}{96} \approx 2\text{ mm}$. Le pas de temps est $\delta t = 10^{-4}\text{ s}$. Afin de comprendre l’influence de la viscosité sur le comportement du fluide, plusieurs valeurs sont testées pour ce paramètre proche du *Pa.s* proposé dans [IONESCU et collab., 2015] : $\mu = 0.5, 0.8, \text{ ou } 1.0\text{ Pa.s}$. Je rappelle que l’angle de frottement interne utilisé dans ces simulations vérifie $\tan(\alpha) = 0.45$ et que les conditions limites sont les mêmes sur chacun des bords, à savoir une condition de Dirichlet homogène pour la vitesse.

Résultats et premières analyses. Les résultats sont présentés en Figures V.5 et V.6 par le profil de masse volumique au bout d’un temps d’écoulement égal à 1 s. Plus précisément, ces figures représentent la courbe de niveau de densité égale à 1400 kg/m^3 dans chacune des configurations d’angle et pour les trois valeurs de viscosité. À l’instant final du calcul, *i.e.* au bout d’une seconde d’écoulement, on peut constater que l’écoulement a atteint un état final stable, bien qu’il ne vérifie pas le critère de convergence (IV.24). En fait, dans la partie dense, le champ de vitesse est très faible et la position du front n’évolue plus du tout.

À viscosité $\mu = 0.5\text{ Pa.s}$ (points bleus), nous pouvons dire que quelle que soit la pente initiale, le comportement n’est pas celui attendu. Nous pouvons effectivement remarquer un fort changement de pente entre l’état initial et l’état final, ce qui n’est pas ce à quoi on s’attendait. À l’opposée, avec une viscosité égale à $\mu = 1\text{ Pa.s}$ (points noirs), les deux tas n’ont pas significativement bougé. En effet, malgré un léger affaissement au niveau du haut du tas, on peut voir que la tête du lit n’a presque pas avancé. C’est donc à viscosité $\mu = 0.8\text{ Pa.s}$ (points rouges) qu’on trouve le plus de ressemblance avec les expériences : le cas partant d’un angle supérieur à l’angle de frottement interne a évolué jusqu’à un état final faisant un angle autour de 20° avec l’horizontale, alors qu’en partant de 21.8° , la tête du lit granulaire n’avance que de quelques millimètres.

Ces premières remarques semblent nous montrer que le modèle peut se comporter d’une manière

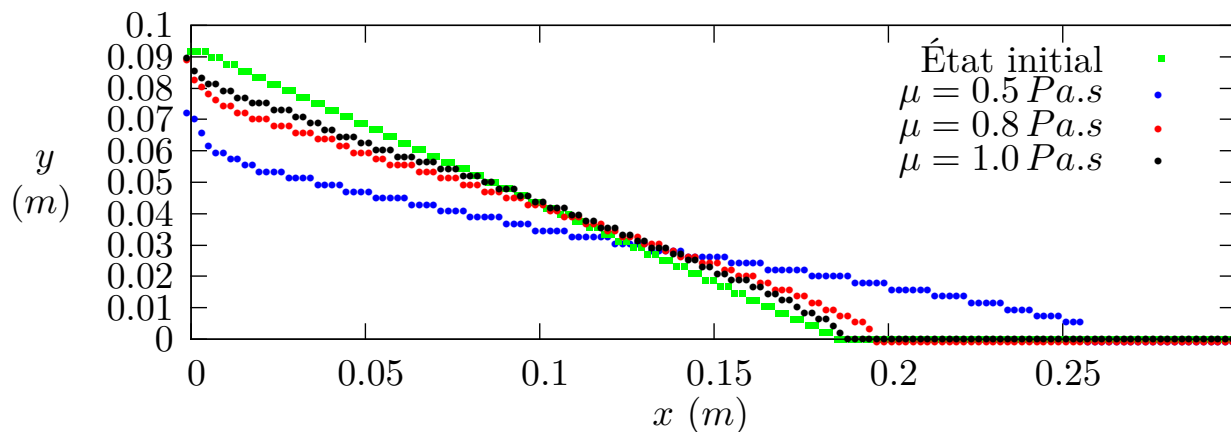


FIGURE V.5 – Forme de l'état final pour trois valeurs de viscosité après 1 s d'écoulement pour une pente initiale d'environ 26.6° , *i.e.* $(x_{max}, y_{max}) = (20\text{ cm}, 10\text{ cm})$.

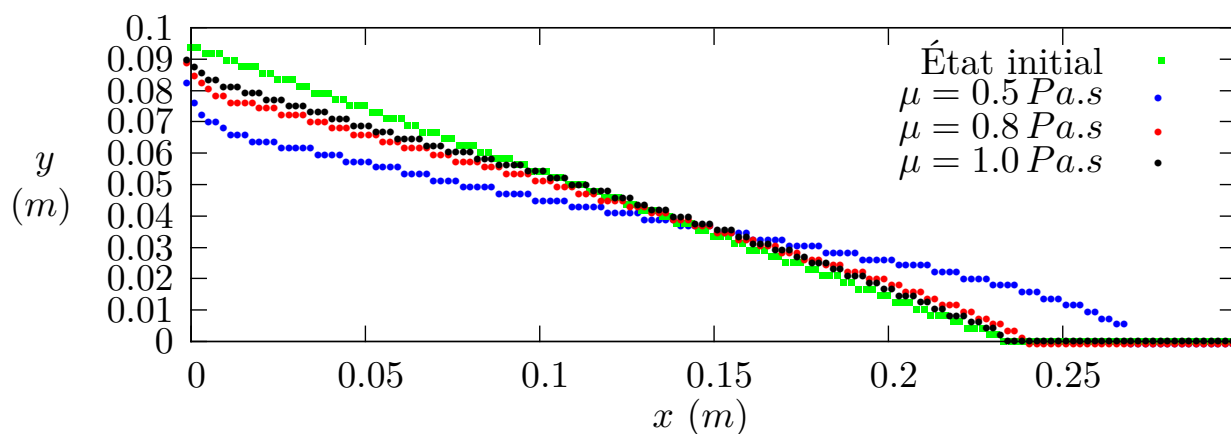


FIGURE V.6 – Forme de l'état final pour trois valeurs de viscosité après 1 s d'écoulement pour une pente initiale d'environ 21.8° , *i.e.* $(x_{max}, y_{max}) = (25\text{ cm}, 10\text{ cm})$.

semblable aux expériences. Cependant, on peut relever quelques imperfections. Outre la forte dépendance à la viscosité, on peut noter que la surface du lit granulaire comporte un point d'inflexion avec une pente plus importante le long de la paroi de gauche. Plusieurs éléments du modèles expliquent ce comportement. Il est d'abord évident qu'en respectant la condition d'adhérence qu'on a imposée aux bords, le fluide est contraint de manière artificielle. Mais il faut également noter que l'amplitude de l'inflexion dépend en fait du paramètre numérique ζ qu'on se donne pour résoudre le problème de point fixe lié à la présence du seuil de contrainte de plasticité (voir page 83).

Pour mieux se rendre compte de l'influence de la valeur de ce paramètre, prenons le cas d'une pente initiale à 26.6° avec une viscosité égale à 0.8 Pa.s , et faisons varier le paramètre ζ . La Figure V.7 nous montre les résultats au bout d'une seconde d'écoulement pour $\zeta = 0.1$, $\zeta = 0.05$ et $\zeta = 0.01$. Ce paramètre détermine la précision du schéma de résolution du problème à seuil. Dans le cas que nous traitons ici, à viscosité donnée on peut voir qu'il conduit à des résultats très différents : plus ζ est grand, plus l'amplitude de l'ondulation est grande. On est donc contraint de diminuer la valeur de ζ pour mieux résoudre le problème lié à la plasticité, ce qui a pour conséquence d'augmenter les temps de calcul. Mais dans ce cas, avec cette viscosité et $\zeta = 0.01$, on perd le comportement physique car aucun mouvement n'est significativement perceptible.

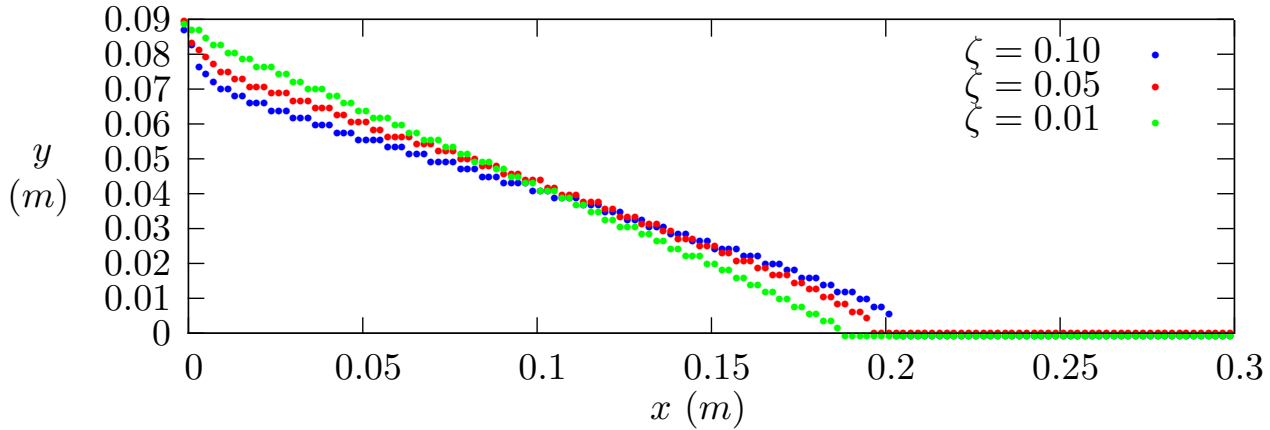


FIGURE V.7 – Profils du lit granulaire après 1 s d'écoulement pour différentes valeurs de ζ avec $\mu = 0.8 Pa.s$ pour un tas faisant un angle initial $\alpha \approx 26.6^\circ$ avec l'horizontal.

On peut alors se demander si la diminution de la valeur de ζ n'entraîne pas une perte de cohérence du modèle par rapport au comportement physique. Pour vérifier que ce n'est pas le cas, au lieu de faire varier ζ à viscosité constante, fixons ζ à la valeur basse 0.01 et regardons les résultats pour les viscosités $\mu = 0.5, 0.8$ et $1 Pa.s$ en Figure V.8. En constatant que le cas à viscosité $\mu = 0.5 Pa.s$

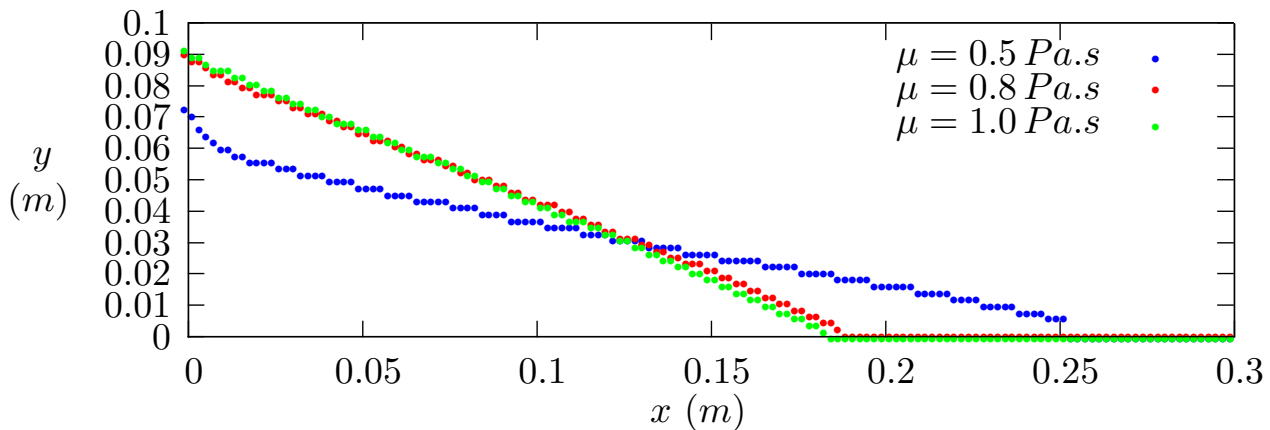


FIGURE V.8 – Profils du lit granulaire après 1 s d'écoulement pour différentes valeurs de viscosité μ avec $\zeta = 0.01$ pour un tas faisant un angle initial $\alpha = 26.6^\circ$.

s'écoule toujours de façon significative, on en déduit que le modèle possède bien un comportement cohérent par rapport aux observations autour de l'angle de frottement interne, mais que ce comportement dépend des valeurs conjointes du paramètre ζ et de la viscosité μ .

Maintenant que nous avons fait le point sur l'influence de ce paramètre numérique sur l'écoulement, regardons celle due à la condition de Dirichlet aux bords. Si dans le cas sans mouvement la surface reste plane, dans les cas où il y a un mouvement notable on peut observer que la surface est quasi-rectiligne avec une inflexion proche du bord vertical gauche. De la même façon, sur le bord horizontal inférieur, la condition d'adhérence donne lieu à l'écoulement d'une partie dense sur une partie faiblement dense et donc au décollement artificiel de la tête du lit granulaire. Dans les deux cas, il est clair que cette condition de bord agit sur l'écoulement de façon non négligeable.

Discussion. À la vue de ces résultats, le test de stabilité d'un tas incliné, dont l'angle de la pente est autour de l'angle de frottement interne, montre une certaine cohérence du modèle avec la réalité tout en mettant en avant les limites à la fois du schéma et du modèle :

- Pour ce qui est du schéma, le paramètre numérique ζ détermine la précision de la résolution du problème de plasticité, qui est prédominant ici. En fixant sa valeur à $\zeta = 0.05$, on obtient un bon compromis entre le temps de calcul et la précision.
- Pour ce qui est du modèle, on a pu voir que la viscosité joue un rôle important dans le comportement, en permettant ou non le déplacement en fonction de la configuration. La valeur intermédiaire de $0.8 Pa.s$ donne les résultats les plus cohérents. Si cette valeur est proche de ce qui est proposé par IONESCU et collab. [2015] dans le lit granulaire, elle est beaucoup trop importante dans la phase gazeuse ambiante. Dans ces conditions, l'air a en effet une viscosité proche de $2.10^{-5} Pa.s$. L'influence de cette différence n'est pas encore mesurée, mais un moyen d'y parvenir serait de modifier le modèle en imposant également une viscosité variable, qui pourrait dépendre de la densité. Ceci fait l'objet des perspectives de développement du code, qui sont précisées dans le Chapitre VI.

Bien que le comportement lors de ce test dépende des valeurs de viscosité μ et du paramètre numérique ζ , nous avons vu que le couple $(\mu, \zeta) = (0.8, 0.05)$ donne à la fois un résultat cohérent et une rapidité de calcul suffisante. Sur la base de ces premières observations, nous pouvons maintenant passer aux simulations de rupture de barrage. Dans la suite, nous prendrons donc ces valeurs pour évaluer le modèle dans un cas dynamique. Nous prendrons cependant en compte les conclusions de cette section lorsque nous analyserons ces nouvelles simulations.

V.3 Simulations d'écroulement de colonne granulaire non fluidisée

V.3.1 Introduction

Maintenant que nous avons regardé le comportement quasi-statique autour de l'angle de repos d'un lit granulaire non fluidisé, nous nous intéressons à son comportement dynamique lors de la chute d'une colonne dans un chenal. Le plan d'expérience est celui décrit en page 102. Il s'agit simplement de simuler l'écroulement d'une colonne de hauteur $y_{max} = 10, 20$ ou $30 cm$ et de largeur $20 cm$. Cela correspond donc à des rapports de forme respectivement de 0.5, 1 et 1.5. Nous partons avec un état initial constitué d'une colonne granulaire à vitesse nulle située à gauche dans le chenal, comme le montre la Figure V.9. L'ouverture de la porte n'est pas simulée, mais elle est supposée instantanée

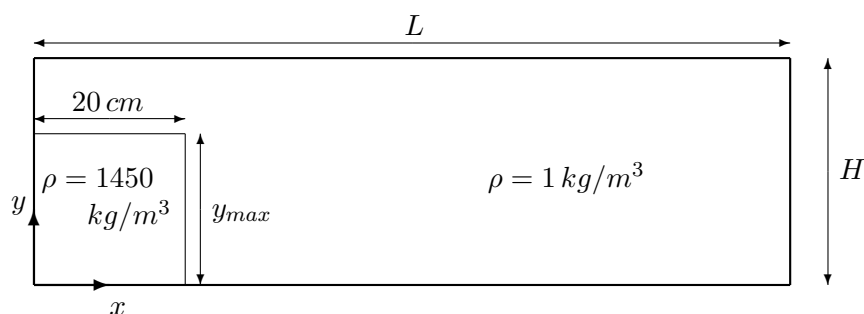


FIGURE V.9 – Condition initiale pour le test de chute d'une colonne granulaire non fluidisée.

et correspond à l'instant $t = 0$ de la simulation numérique.

Les conditions de bords choisies pour la vitesse sont :

- Dirichlet homogène sur le bord horizontal inférieur,

- Neumann homogène sur le bord horizontal supérieur,
- Dirichlet homogène sur la paroi du réservoir à gauche et
- la condition d'advection (IV.26)₂ au niveau de la paroi de droite avec comme paramètre $u_c = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$.

Pour l'ensemble des simulations de cette section, le pas de temps est égal à 10^{-4} s et le pas d'espace est d'environ 3 mm . Plus précisément, le maillage du domaine spatial est constitué de carrés de côté H/N_y , où H est pris égal à 29 cm pour le premier cas, 58 cm pour le second et 87 cm pour le dernier. Cette hauteur est choisie de manière à être suffisamment importante pour limiter les effets de la condition limite au bord horizontal supérieur sur l'écoulement tout en restant dans une gamme de taille raisonnable au sens du temps de calcul. Le nombre N_y de cellules sur la hauteur est ensuite un multiple (respectivement $\times 1$, $\times 2$, $\times 3$) de 96 de sorte qu'on a le même pas d'espace pour toutes les simulations. La longueur du domaine est fixée à $L = 2H$ (et donc le nombre de cellules sur la longueur est $N_x = 2N_y$) pour contenir l'ensemble de la dynamique jusqu'à l'arrêt tout en gardant une marge entre le front de l'écoulement dense et le bord droit, sur lequel on impose une condition de sortie qui pourrait éventuellement perturber les résultats. Enfin, je donne les valeurs physiques caractérisant le fluide-mélange. Pour la densité, on donne simplement les valeurs extrêmes de masse volumique :

$$\rho_{max} = 1450 \text{ kg/m}^3 \quad \text{et} \quad \rho_{min} = 1 \text{ kg/m}^3.$$

Le seuil de plasticité est alors déterminé par la valeur de l'angle de frottement interne α du matériau. Pour rester dans les conditions des simulations précédentes, nous avons gardé un angle donné par :

$$\tan(\alpha) = 0.45, \quad \text{c'est à dire } \alpha \approx 24.2 \text{ degrés.}$$

Il ne reste alors qu'à avoir la viscosité dynamique, qui, conformément aux résultats de simulation de la section précédente, est fixée à

$$\mu = 0.8 \text{ Pa.s.}$$

Pour rester dans les conditions numériques des résultats précédents, nous fixons le paramètre ζ à 0.05 de sorte qu'on trouve un bon compromis entre vitesse de calcul et précision de résolution du problème de plasticité. Dans chacune des configurations, pour présenter le résultat de l'écoulement, je me base sur deux données :

- le profil de dépôt en fin d'écoulement et
- la courbe distance/temps du front de l'écoulement.

On a ainsi à la fois la donnée statique qui nous intéresse et la vitesse du front, qui est une donnée dynamique. Pour chacune, nous procédons selon la méthode de mesure détaillée en page 105.

V.3.2 Résultats et commentaires

Rapport d'aspect 0.5

Pour cette simulation, dont la colonne initiale mesure 10 cm de hauteur, on choisit donc un domaine de calcul de hauteur $H = 29 \text{ cm}$ et de longueur $L = 2H = 58 \text{ cm}$. Les résultats présentés en Figure V.10 nous montrent que le dépôt a une morphologie assez proche de celle des résultats expérimentaux avec tout de même une différence nette au niveau de la tête, qui est arrivée moins loin dans les simulations numériques qu'en laboratoire. De plus sa hauteur (points bleus) est anormalement importante, avec un arrêt brutal 2 cm au-dessus du sol. En fait, cela est dû à la condition de bord à la base de l'écoulement. De même que pour le test de stabilité autour de l'angle de frottement interne, avec la condition de Dirichlet homogène, la phase de forte masse volumique ne s'écoule pas au niveau de la paroi mais juste au-dessus sur une couche beaucoup moins dense qui persiste malgré

la présence de l'action de pesanteur (voir Figure V.2). Or ce qu'on mesure pour tracer la hauteur de la courbe de dépôt final est l'ordonnée du point de la surface supérieure du lit granulaire (*i.e.* de la courbe de niveau à 1400 kg/m^3). Cela représente donc la somme de l'épaisseur du front et de l'épaisseur de la zone à densité faible emprisonnée en-dessous. Pour pallier le problème, j'ai également tracé l'épaisseur du lit granulaire, qui nous permet de mieux évaluer la forme de la pointe du dépôt. Le profil d'épaisseur (carrés rouges) montre effectivement une décroissance plus progressive à la fin, avec une pointe plus fine. On peut donc voir que la géométrie du dépôt est correcte, mais que les résultats (expérimental et numérique) ne sont pas quantitativement identiques. Cela pose d'ailleurs une autre question, relative à la conservation de la masse. En comparant les courbes de simulation et de laboratoire dans la Figure V.10, on a l'impression que la quantité de masse du lit granulaire est moins importante dans le cas des simulations. Or ces quantités sont bien égales à l'instant initial. Où

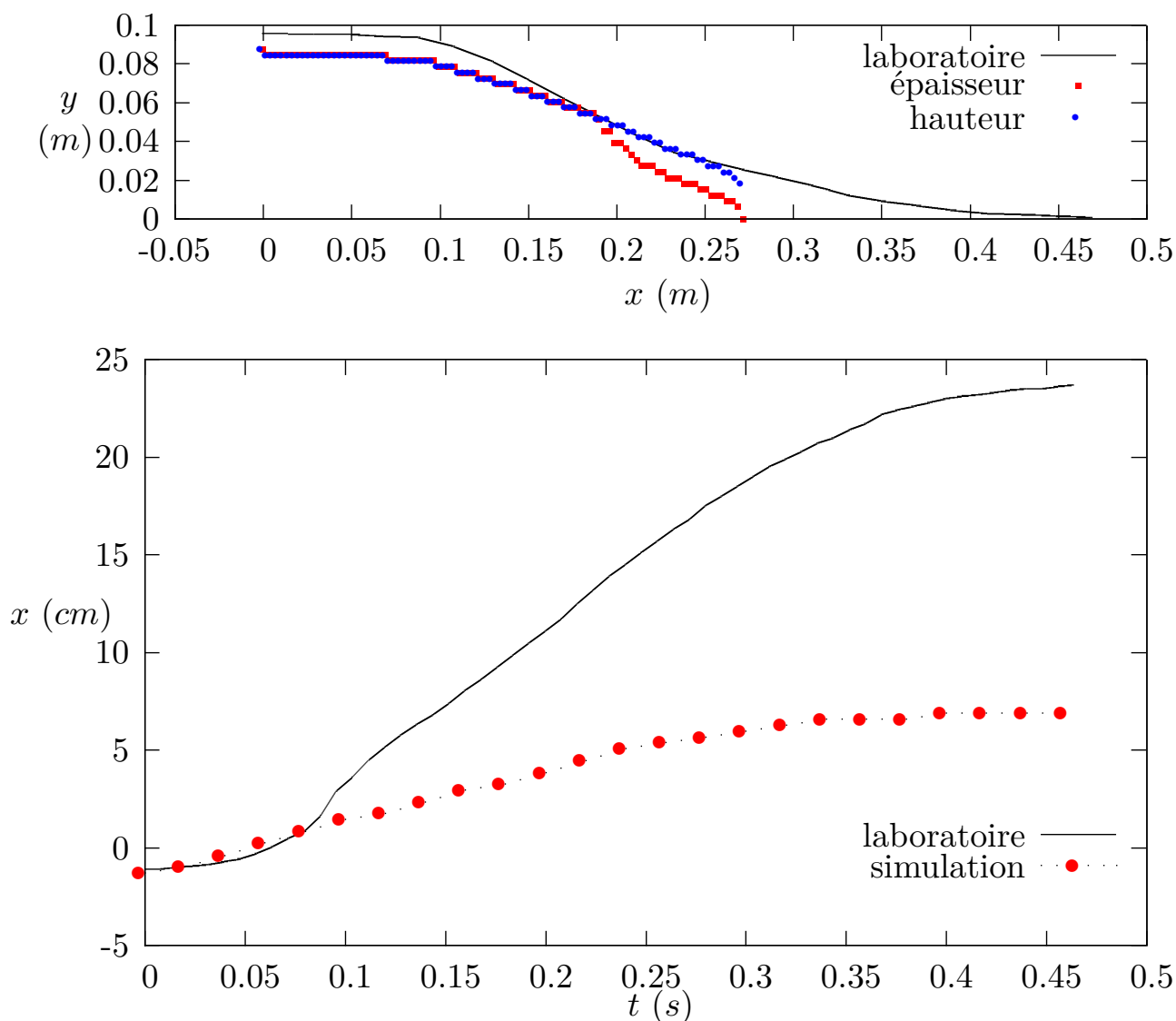


FIGURE V.10 – Éroulement d'une colonne granulaire sèche de 10 cm de haut. Résultats de simulation comparés aux expériences. En haut : profils de dépôt. En bas : Distance entre la porte et le front en fonction du temps.

est donc passée la différence? La réponse se trouve dans la zone diffusée tout au long de la frontière entre la ligne de niveau à 1400 kg/m^3 et celle à 1 kg/m^3 , qui n'est pas représentée. Nos mesures ne prennent pas en compte toute cette masse diffusée en surface du lit granulaire, mais la conservation de la masse est bien vérifiée à chaque pas de temps du calcul. Comme je l'ai expliqué dans la section d'introduction de ce chapitre à la page 105, pour ces premières évaluations du modèle nous n'avons pas envisagé de méthode de mesure tenant compte de la diffusion à l'interface. Sans que cela soit réellement un obstacle à l'évaluation du modèle, certaines idées d'amélioration sont tout de même présentées à ce sujet dans les perspectives à la fin de ce mémoire.

Intéressons-nous maintenant à la vitesse du front. La courbe distance/temps du front de l'écoulement présente elle aussi plusieurs points de ressemblance entre la simulation numérique et les mesures de laboratoire. Le premier est la correspondance du point de départ. Si celui-ci se trouve en-dessous du zéro, c'est dû à l'épaisseur de la porte dans les expériences de laboratoire. Dans la simulation, la raison est différente : c'est la régularisation au niveau de la frontière de changement de masse volumique qui décale la ligne de niveau à 1400 kg/m^3 vers l'arrière. Ensuite, malgré la nette différence de distance parcourue, on peut voir que le temps de parcours est lui très proche de celui des expériences. En effet la vitesse du front, qui n'est autre que la dérivée de la fonction tracée dans ce graphique, s'annule autour d'un temps de parcours de 0.4 s lors de la simulation numérique, alors que dans les expériences, le front s'arrête 0.46 s après ouverture de la porte. Si on regarde maintenant le début de l'écoulement, on peut observer dans les deux cas une phase d'accélération dans le premier dixième de seconde, bien que cette dernière soit plus prononcée et plus longue dans le cas des mesures de laboratoire.

Si le profil de dépôt et la courbe distance/temps sont qualitativement comparables à ceux des expériences, il apparaît que l'écoulement simulé est globalement moins rapide. Nous discuterons de l'origine de cette différence dans les commentaires après avoir regardé les résultats dans les autres configurations.

Rapport d'aspect 1

L'écroulement d'une colonne de dimension $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ est le test sans doute le plus important pour notre étude, puisqu'il est le mieux connu du point de vue des expériences de laboratoire (voir [GUEUGNEAU, 2015]). De même que pour le cas précédent, la Figure V.11 recueille les courbes de dépôt final (en haut) et de distance parcourue par le front à partir de la porte. Si on peut voir qu'à l'instar de la colonne de rapport de forme 0.5 la tête de l'écoulement s'arrête moins loin dans la simulation que dans les expériences, on note toutefois une bien meilleure correspondance au niveau du profil du dépôt final. Bien sûr, la tête et la queue sont sans aucun doute encore très influencées par la condition d'adhérence sur les parois. Cependant l'angle de la pente semble beaucoup plus proche de celle du résultat expérimental. De la même manière, la vitesse du front semble plus proche des mesures de laboratoire que dans le cas précédent. Outre la phase d'accélération du début (*i.e.* pour des temps inférieurs à 0.1 s), on commence à observer une zone dans laquelle le front progresse à vitesse constante. Dans cette zone d'accélération nulle, la vitesse est cependant plus faible dans le cas des simulations numériques. La fin de cette phase coïncide avec le début du freinage de la tête de l'écoulement. Si ce freinage est plus brusque dans le cas des simulations numériques, on peut tout de même remarquer qu'il commence à peu près au même moment que dans les expériences, *i.e.* autour de 0.4 s après l'ouverture de la porte.

Rapport d'aspect 1.5

La colonne initiale mesure ici 30 cm de hauteur. Le domaine de calcul est choisi de hauteur $H = 87 \text{ cm}$ et de longueur $L = 2H = 1.74 \text{ m}$. Les profils de dépôt et de déplacement du front sont en

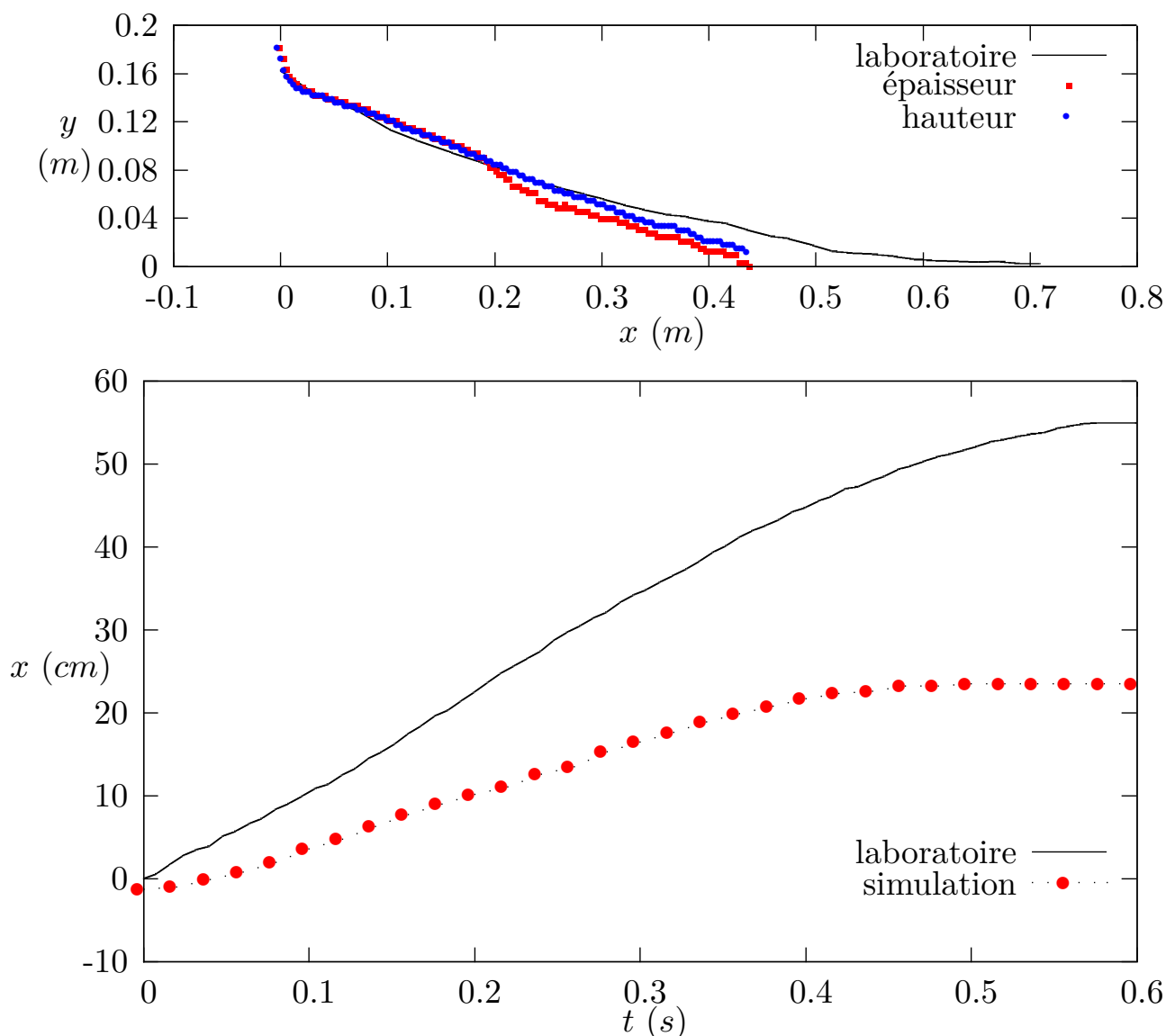


FIGURE V.11 – Écroulement d'une colonne granulaire sèche de 20 cm de haut. Résultats de simulation comparés aux expériences. En haut : profils de dépôt final. En bas : Distance entre la porte et le front en fonction du temps.

Figure V.12. Dans le premier, en comparant la courbe rouge (épaisseur du dépôt des simulations) et la courbe noire (résultat expérimental), on peut remarquer qu'à la sortie du réservoir les dépôts forment des surfaces qui se suivent à une distance d'environ 2 cm. En dehors du comportement aux bords, nous pouvons donc voir que la géométrie des dépôts est quantitativement très réaliste dans cette configuration. Cependant, la distance parcourue par la tête est toujours inférieure d'une vingtaine de centimètres. On peut voir plus précisément cette différence dans la courbe de distance parcourue par la tête en fonction du temps. La correspondance entre les mesures expérimentales et les mesures lors de la simulation est plus importante dans cette configuration que dans les deux précédentes. En effet, jusqu'à 0.3 s d'écoulement, les deux progressent quasiment à la même vitesse, avec une légère avance de la simulation sur l'expérience de laboratoire. Après, alors que dans le cas numérique la tête commence à ralentir, l'écoulement de laboratoire atteint sa vitesse maximale et ne s'arrête pas

avant 0.75 s d'écoulement.

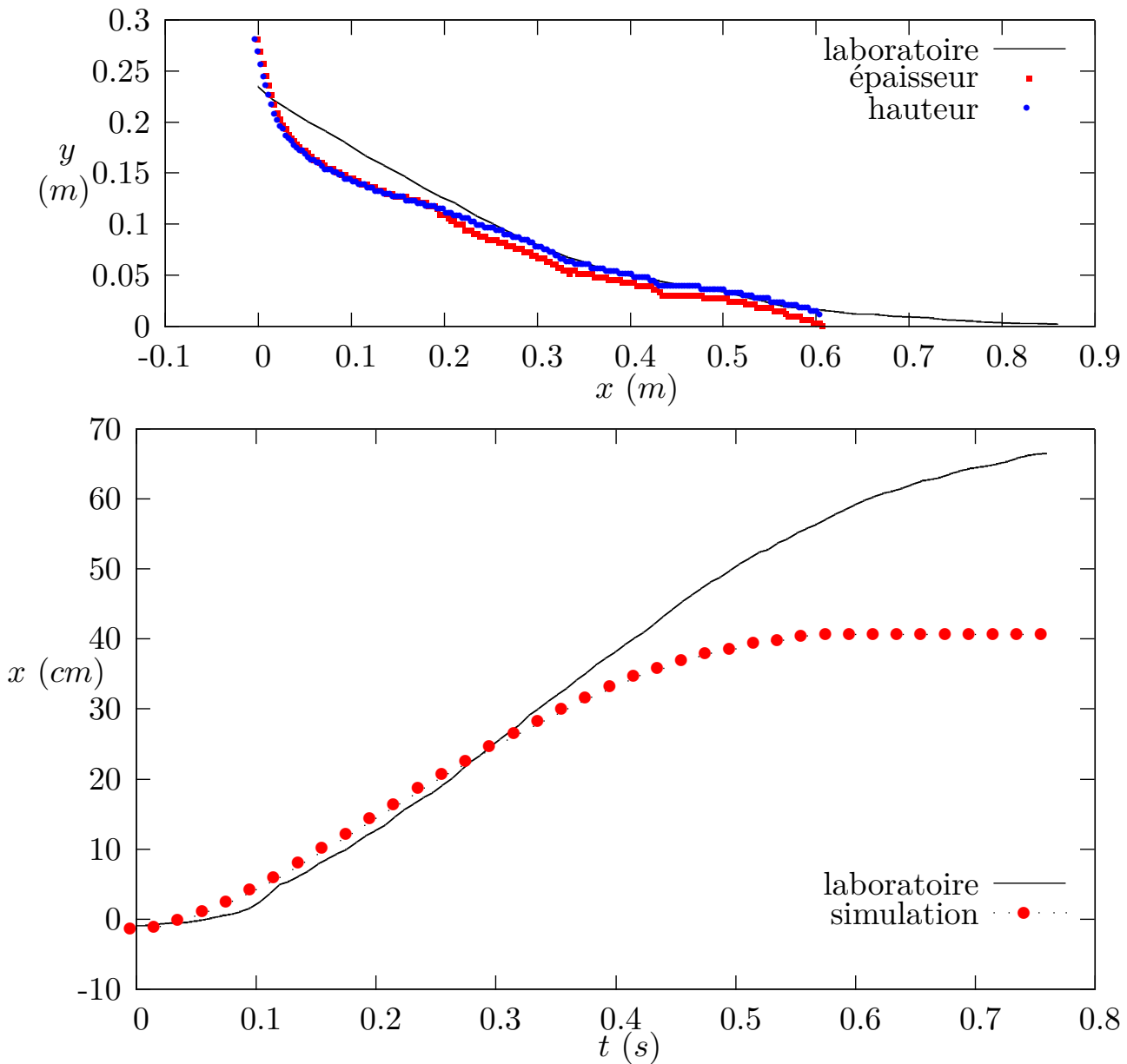


FIGURE V.12 – Écroulement d'une colonne granulaire sèche de 30 cm de haut. Résultats de simulation comparés aux expériences. En haut : profils de dépôt. En bas : Distance entre la porte et le front en fonction du temps.

Commentaires sur le test de rupture de barrage du modèle non fluidisé.

Quel que soit le cas traité, on peut mettre en avant deux défauts du modèle lorsqu'il est utilisé pour la simulation d'un écroulement de colonne granulaire dans le cas non fluidisé :

- × on note un décollement du lit granulaire par rapport au sol et
- × la distance de parcours est nettement plus faible que dans les expériences de laboratoire.

Le principal point positif dans ce contexte est :

- ✓ la bonne géométrie globale des profils. Plus précisément, on peut remarquer que dans les trois cas le profil est décroissant, que ce soit dans les résultats de simulation ou en laboratoire, et que les pentes des dépôts issus des simulations sont du même ordre de grandeur que dans les expériences, à part au niveau de la paroi de gauche à cause de la condition d'adhérence.

Ce type de test a également été réalisé par [IONESCU et collab. \[2015\]](#) dans le cas d'un état initial de hauteur 14 cm et de largeur 20 cm , donc de rapport d'aspect 0.7 . Les résultats de simulation numérique sont présentés par les profils du lit granulaire au cours de l'écoulement pour un fluide de Drucker-Prager (à viscosité constante) et pour un fluide à rhéologie $\mu(I)$ et comparés aux profils expérimentaux. L'adéquation entre les simulations et l'expérience de laboratoire y est bien meilleure que dans notre étude. Déjà, le profil du lit granulaire est bien plus réaliste et ne montre aucun décollement entre le sol et la tête de l'écoulement (ce qui est le cas également pour [LAGRÉE et collab. \[2011\]](#), notamment). D'autre part, la distance de parcours est elle aussi mieux respectée. Pour quantifier cet aspect, le tableau [V.1](#) recueille l'erreur relative

$$\frac{D_{num} - D_{exp}}{D_{exp}} = \frac{\text{Distance atteinte lors de la simulation} - \text{Distance atteinte lors de l'expérience}}{\text{Distance atteinte lors de l'expérience}}$$

sur la distance de parcours à l'état final dans chaque configuration.

On peut alors se poser la question de l'origine de ce comportement. Les différences qui peuvent

	Nos résultats	Iones. (1)	Iones. (2)	Iones. (3)
$\frac{D_{num} - D_{exp}}{D_{exp}}$	$\approx (-40\%)$	$\approx (-6\%)$	$\approx (+5\%)$	$\approx (-1\%)$

TABLE V.1 – Erreur relative sur la distance parcourue à l'état final dans différentes configurations par rapport à la distance mesurée dans l'expérience de laboratoire correspondante : Iones. (1) et (2) correspondent à des fluides de Drucker-Prager à viscosité constante respectivement de 1 Pa.s et 0.1 Pa.s ; Iones. (3) correspond à un fluide à rhéologie $\mu(I)$.

expliquer une telle variation sont diverses. Il peut s'agir d'une différence liée au modèle lui-même (rhéologie, conditions de bords), ou aux paramètres physiques et numériques choisis, ou encore à la méthode de résolution du problème.

Traisons à part la question du décollement du lit granulaire : ce détachement du lit granulaire à l'avant de l'écoulement par rapport au sol semble au premier abord provenir d'un problème lié à la condition imposée sur ce bord du domaine. En effet, en imposant une vitesse nulle (condition de Dirichlet homogène), on rend artificiellement collant le matériau sur le sol, ce qui pourrait expliquer la présence d'une phase moins dense persistante en-dessous d'une zone plus dense. Mais cela n'explique sans doute pas complètement pourquoi le fluide le plus dense ne finit pas par "retomber" sur le sol, forçant le fluide moins dense à s'écarter. Un autre élément de réponse pourrait venir de la valeur de la viscosité dans le fluide ambiant. Ici, elle est en effet beaucoup plus forte que dans la réalité des expériences (1 Pa.s au lieu de $2 \cdot 10^{-5}\text{ Pa.s}$). Pour étudier plus précisément cette question, il serait donc intéressant de voir non seulement l'influence d'un changement de condition au bord, mais aussi une modification de la viscosité dans l'air ambiant. Nous reviendrons sur ces deux notions après l'analyse de l'effet des autres paramètres sur la distance de parcours dans nos simulations. Ces derniers sont des paramètres physiques ou numériques. Concernant tout d'abord le couple (viscosité, ζ), l'étude de stabilité autour de l'angle de frottement interne nous a montré que le résultat est sensible à ces valeurs. Par exemple, en diminuant la valeur de ζ , on augmente la distance de parcours, mais alors on diminue la précision du schéma de résolution du problème de plasticité. C'est donc une piste à exclure. Pour la viscosité, l'une des particularités du modèle qu'on étudie ici est qu'il possède la même valeur dans tout le domaine. Or notre méthode numérique résout le système dans un domaine fixe comprenant le

lit granulaire et de l'air ambiant, contrairement à la méthode employée par IONESCU et collab. [2015] qui résout le système dans le domaine variable comprenant uniquement le lit granulaire lui-même. Dans l'étude menée par IONESCU et collab. [2015], la viscosité n'a que peu d'influence sur la distance de parcours (cf. Tableau V.1). Mais on peut tout de même remarquer que plus la viscosité du lit granulaire est faible, plus la distance parcourue est importante. Notamment, on a pu voir que pour une viscosité de $1 Pa.s$, cette distance est plus faible que dans l'expérience, alors que pour $0.1 Pa.s$, elle est plus élevée. Comme on a choisi une valeur de $0.8 Pa.s$, notre résultat, s'il était comparable à ceux de ces auteurs, devrait donner une distance de parcours simulée encore plus proche de la distance réalisée dans l'expérience de laboratoire. Le choix de cette valeur de viscosité dans le lit granulaire ne peut donc pas non plus être responsable d'une telle différence sur la distance de parcours. Comme évoqué plus haut, il reste alors à comprendre l'influence de l'erreur faite sur ce paramètre dans le reste du domaine, *i.e.* dans l'air ambiant. Cet aspect sera discuté à la fin de ce paragraphe, après l'analyse du rôle joué par les autres paramètres physiques et numériques. Les pas de temps et d'espace et la valeur du paramètre r étant suffisamment petits pour que l'ensemble des schémas convergent, il nous reste deux éléments à analyser :

- l'influence de l'angle de frottement interne α et
- le rôle de la précision spatiale sur la condition initiale.

Commençons par le premier : pour rester dans une gamme d'angle physiquement raisonnable, nous choisissons cette fois-ci un angle de frottement interne α fixé à 19° (au lieu de 24.2°). Ainsi, on prend comme angle de frottement interne l'angle de frottement mesuré en laboratoire entre le matériau granulaire et la plaque de plexiglas constituant le fond du chenal (voir [GUEUGNEAU, 2015]). La configuration choisie est celle du premier cas de cette section, avec une colonne initiale d'une hauteur de $10 cm$. Le résultat est donné en Figure V.13 au bout d'une seconde d'écoulement du test de rupture de barrage avec une colonne granulaire de rapport de forme 0.5. L'épaisseur des dépôts du test avec un angle de frottement interne de 19° est superposé à celle du test initial, qui a pour angle $\alpha = 24.2^\circ$. Cela permet de comparer directement l'étalement final du lit granulaire en fonction de l'angle de frottement interne et de remarquer que dans le cas avec l'angle le plus faible, l'écoulement a parcouru environ $3 cm$ de plus. Mais surtout, en comparant le profil d'épaisseur du lit granulaire au segment de droite de pente $\tan(\alpha)$, on peut remarquer que l'angle que fait le dépôt par rapport à l'horizontale est assez proche de l'angle de frottement interne α ou inférieur. On en conclut que le paramètre α a exactement le même rôle dans le modèle que dans les mesures physiques et que sa surestimation d'environ 1 % dans les simulations précédentes par rapport aux expériences de laboratoire doit légèrement exagérer les écarts mesurés précédemment. Cette remarque est tout à fait intéressante et permet d'écarter ce paramètre de la liste des sources d'erreur sur la distance de parcours.

La seconde piste étudiée concerne non pas les paramètres physiques du modèle, mais un paramètre numérique. Il s'agit de comprendre l'influence de la raideur du saut de densité qu'on impose sur la condition initiale. Comme on a pu le voir en introduction de ce chapitre, le paramètre M donné dans l'équation (V.2) détermine la distance séparant les valeurs extrêmes de densité. Plus sa valeur est grande, plus la distance est petite et plus le modèle est réaliste. Mais pour augmenter le réalisme de cette façon, il est nécessaire de diminuer le pas d'espace pour que le schéma puisse converger. Il y a donc là encore un prix à payer en terme de temps de calcul si l'on veut un résultat plus précis. En Figure V.14 on peut trouver le résultat d'effondrement d'une colonne de $10 cm$ de haut pour deux niveaux de précision et deux valeurs différentes du paramètre M . On peut comparer le cas le plus précis (points verts) au cas de référence que nous avons utilisé précédemment (points rouges). Dans le cas le plus précis, la courbe de niveau à $1400 kg/m^3$ est beaucoup plus proche de la vraie frontière séparant les deux phases de l'écoulement et on note que la tête se trouve environ $2 cm$ plus loin que dans le cas le moins précis.

On en conclut que dans les premiers tests effectués avec une résolution spatiale assez faible, la

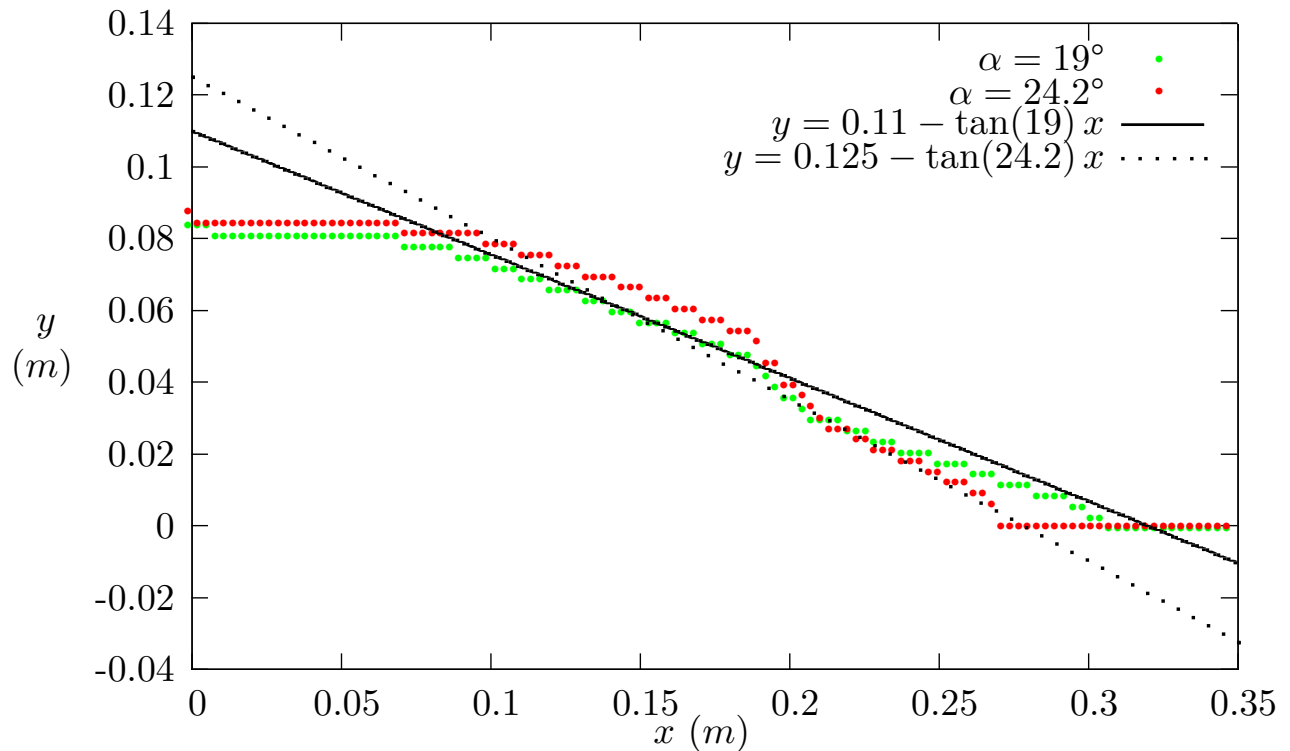


FIGURE V.13 – Épaisseur du dépôt en fonction de l'angle de frottement interne après 1 s d'écoulement d'une colonne initiale de 10 cm de hauteur.

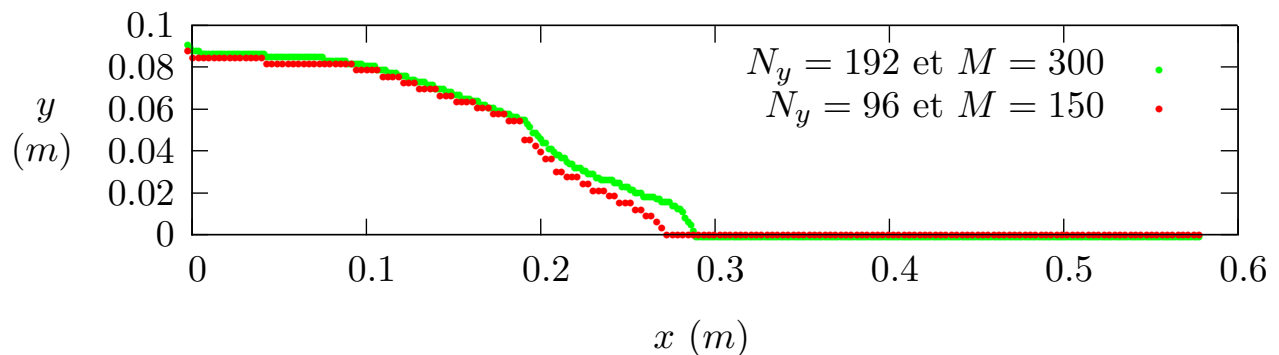


FIGURE V.14 – Épaisseur du dépôt en fonction de la précision spatiale et de la raideur initiale M au niveau du saut de densité. Résultat après 1 s d'écoulement d'une colonne initiale de 10 cm de hauteur.

distance de parcours est légèrement sous-estimée, ce qui accroît le défaut déjà repéré. Cependant l'augmentation de la précision du calcul *via* ce paramètre ne permettrait *a priori* pas à elle seule de rectifier totalement la différence entre les simulations numériques et les expériences de laboratoires dans ce cas-là.

Nous venons de voir que les différents paramètres physiques et numériques du problème peuvent avoir une influence sur le résultat de simulation, mais ne peuvent pas être à l'origine de la forte

différence observée par rapport aux expériences de laboratoire dans le cas de la chute d'une colonne granulaire non fluidisée. Les autres pistes à explorer demandent un développement du code plus conséquent et n'ont pas pu être mises en œuvre pour le moment. Il s'agit des conditions de bord et de la valeur de la viscosité de l'air. Pour corriger cette dernière, il faudrait soit opter pour un schéma de résolution dans un domaine variable restreint au lit granulaire, comme c'est fait par [IONESCU et collab. \[2015\]](#), soit permettre la prise en compte d'une viscosité variable en fonction de la densité. De ces deux possibilités, la seconde semble la plus appropriée à notre démarche et a fait l'objet d'une étude préalable, mais n'a pas encore été développée dans le code de simulation numérique.

Quant aux conditions de bord, nous avons pour le moment opté pour une condition de Dirichlet homogène qui contraint artificiellement le fluide à "coller" au bord, alors qu'on observe dans les expériences un comportement beaucoup plus mobile et plus complexe (avec des roulements, des rebonds, etc...). Quelques tests ont été effectués avec une condition de Neumann homogène et avec une condition de Robin avec différents paramètres \mathfrak{R} (voir (IV.13)), mais celles-ci n'ont pas donné de résultats satisfaisants. Il serait néanmoins utile de remplacer la condition de Dirichlet homogène par une condition plus réaliste, comme par exemple une condition de type frottement de Coulomb (voir [[IONESCU et collab., 2015](#)]).

Sur la base de ces constats dans le cas de la chute d'une colonne granulaire dense non fluidisée, nous allons maintenant nous focaliser sur le rôle de la pression du gaz interstitiel *via* la définition du seuil de plasticité du fluide-mélange dans le cas de la chute d'une colonne granulaire dense initialement fluidisée.

V.4 Simulations d'écroulement de colonne granulaire fluidisée

V.4.1 Introduction

Dans la section précédente, on a vu le comportement du modèle dans le cas d'une simulation de rupture de barrage dans le cas non fluidisé. La section présente étend ces tests au cas fluidisé. Plus précisément, on se concentre sur l'écroulement d'une colonne granulaire fluidisée à 90 %. C'est l'unique différence avec le cas précédent. Nous allons donc de nouveau regarder les résultats de simulation dans trois configurations avec les rapports de forme respectivement de 0.5, 1 et 1.5. Cependant la version fluidisée des équations contient une inconnue supplémentaire, à savoir la pression du fluide interstitiel p_f . Dans notre modèle, celle-ci représente le taux local de fluidisation du lit granulaire. Elle est initialisée à 90 % de la pression lithostatique dans le lit granulaire, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in [0, x_{max}] \times [0, y_{max}], p_f|_{t=0}(x, y) = 0.9 g \int_y^H \rho(x, \xi) d\xi.$$

La valeur en dehors du lit granulaire n'a pas d'importance puisque le seuil est alors fixé égal à zéro. Si les conditions de bords pour la vitesse sont les mêmes que précédemment, il faut tout de même dire ce qu'il en est pour cette nouvelle inconnue p_f . Comme il s'agit d'une pression, elle est connue à une constante additive près. Par la définition de la donnée initiale, nous avons implicitement choisi qu'elle s'annule à l'altitude $y = H$. Ce faisant, nous avons opté pour des conditions de bords compatibles avec ce choix, *i.e.*

- Dirichlet homogène sur le bord horizontal supérieur,
- Neumann homogène sur le bord horizontal inférieur et
- Neumann homogène sur les bords verticaux.

La hauteur du domaine de calcul en fonction de la hauteur initiale de la colonne est la même que dans le cas non fluidisé, mais la longueur est agrandie, puisque l'écoulement doit atteindre une plus longue distance de parcours. C'est pourquoi nous avons fixé cette fois-ci la longueur à $L = 3H$, au

lieu de $L = 2H$. De plus, comme la dynamique est plus rapide que dans la configuration précédente, il est nécessaire de réduire le pas d'espace pour capter l'écoulement sans avoir de divergence numérique. Ainsi, le nombre de cellules sur une hauteur de 0.29 m est donc multiplié par 1.5 pour passer de 96 à 144 dans le premier cas (colonne initiale de 10 cm de haut), et il est multiplié par 2 pour passer de 96 à 192 pour le second cas (colonne initiale de 20 cm de haut). Le comportement d'une colonne initiale de 30 cm de haut étant encore plus rapide, il serait nécessaire d'augmenter encore la précision spatiale. Mais comme on agrandit aussi le domaine pour pouvoir contenir toute la dynamique, il en résulte que le temps de calcul est très important. Dans un premier temps, pour limiter ce problème, un test est effectué dans le même domaine que dans le cas non fluidisé. Comme les résultats n'apportent pas d'éclairage particulier par rapport aux cas précédents, nous n'en parlerons pas dans ce mémoire. Dans tous les cas, pour garder des cellules carrées, le nombre de cellules sur la longueur est de nouveau calibré. Le pas de temps reste quant à lui égal à 10^{-4} s . Tout le reste est conservé par rapport au cas précédent, notamment la viscosité dynamique, qui est égale à $0.8\text{ Pa}\cdot\text{s}$, et le paramètre ζ égal à 0.05.

V.4.2 Résultats et commentaires

Dans le modèle que nous proposons, la quantité déterminant le niveau de fluidisation est la pression du fluide interstitiel p_f . Cette dernière vérifie l'équation d'advection-diffusion (II.5), qui a pour paramètre le coefficient de diffusion κ :

$$\partial_t p_f + \text{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0.$$

La valeur de ce coefficient doit donc jouer un rôle dans la dynamique de l'écoulement. Elle a été déterminée dans le cas statique par ROCHE [2012] en fonction de la hauteur y_{max} de la colonne fluidisée. Bien que nous soyons dans un cas dynamique, ce sont ces valeurs que nous allons prendre dans un premier temps. Pour le matériau utilisé dans les expériences, les valeurs sont données par la loi linéaire suivante :

$$\kappa = 0.1 y_{max} \text{ (en } m^2/s\text{)}. \quad (\text{V.4})$$

Rapport de forme 0.5.

La hauteur de la colonne initiale est $H = 10\text{ cm}$, donc le coefficient de diffusion correspondant est $\kappa = 0.01\text{ m}^2/s$. La première simulation a donc été effectuée avec ce paramètre de diffusion. Afin de rendre compte de l'importance de la valeur de ce coefficient, je présente le résultat du même écoulement effectué cette fois-ci avec $\kappa = 1/150\text{ m}^2/s$. Les distributions de masse volumique à l'état final sont présentées dans la Figure V.15 avec toujours la même échelle de masse volumique et au bout d'une seconde d'écoulement. On peut tout de suite remarquer une nette différence dans la distance de parcours entre les deux cas, ce qui nous donne une première indication sur l'importance du rôle joué par le coefficient de diffusion dans la dynamique : plus le coefficient de diffusion est faible, moins la défluidisation est rapide et donc plus l'écoulement va loin. De plus, on peut remarquer en tête de l'écoulement une partie moins dense (autour de $500\text{ kg}/\text{m}^3$), qui s'éjecte du lit granulaire dense et forme une pointe plus fine que ce dernier. Ce point sera précisé à la fin de ce paragraphe. Afin de comparer ces résultats avec ceux de laboratoire et d'évaluer plus précisément les différences entre les cas, comme précédemment nous avons aussi tracé les différents profils de dépôts sur un même graphique en Figure V.16 (partie haute), ainsi que les courbes distance/temps de l'extrémité de la tête de l'écoulement (partie basse de la même figure). Étant donné que l'écoulement est beaucoup plus fin que pour les cas non fluidisés, afin de faciliter la visualisation, l'échelle de représentation graphique des dépôts finaux n'est pas uniforme en x et en y . Les distances sont presque quatre fois plus importantes selon la direction de l'axe des ordonnées que selon l'axe des abscisses. Ceci a pour

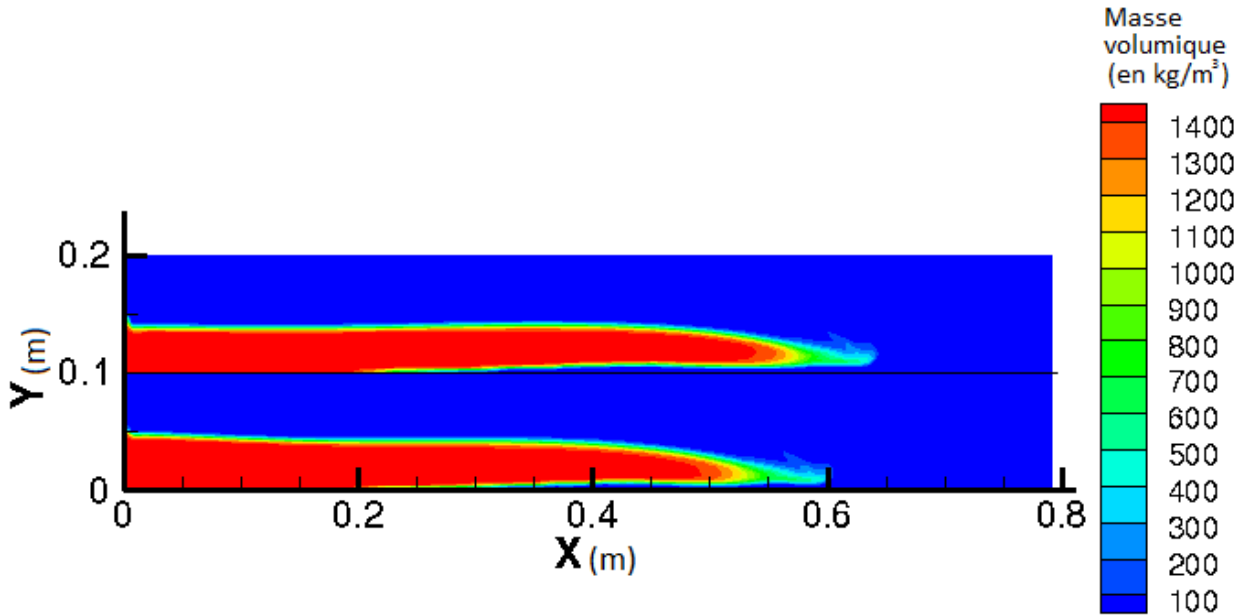


FIGURE V.15 – État final de l'éroulement d'une colonne granulaire fluidisée de rapport de forme initial de 0.5. Résultats de simulation pour différentes valeurs de κ . En haut : $\kappa = 1/150 \text{ m}^2/\text{s}$. En bas : $\kappa = 1/100 \text{ m}^2/\text{s}$.

effet direct d'exagérer les écarts sur la hauteur.

Dans le premier graphique de la Figure V.16, les points bleus (foncés ou clairs) représentent les courbes de surface de l'écoulement numérique selon la valeur du coefficient de diffusion, alors que les points rouges et oranges dessinent les courbes d'épaisseurs correspondantes. En comparant ces courbes à la courbe noire du dépôt obtenu en laboratoire, on constate deux différences majeures entre le résultat de laboratoire et les simulations. La première est sensiblement la même que dans le cas sec vu précédemment et se situe à la tête de l'écoulement : celle-ci est beaucoup moins pointue et s'arrête moins loin dans le cas numérique. La seconde différence est cependant nouvelle : le dépôt obtenu en laboratoire forme une bosse se trouvant à la sortie du réservoir (autour de l'abscisse $x = 0.3 \text{ m}$), qu'on ne retrouve pas dans les simulations numériques. La principale raison est probablement que, contrairement aux expériences de laboratoire, la fluidisation au niveau du sol du réservoir n'est pas maintenue après l'ouverture de la porte (cf. définition des conditions de bords des simulations à la page 77). Bien qu'il ait été observé que les distances de parcours ne sont pas fondamentalement modifiées par cette différence, il serait intéressant de mettre au point une condition de bord compatible avec le maintien de l'injection du gaz au cours de l'écoulement afin de voir si l'on retrouve alors une géométrie de dépôt semblable à celle qu'on observe en laboratoire.

Si on regarde maintenant la courbe de distance parcourue en fonction du temps (en bas de la Figure V.16), nous pouvons d'abord remarquer que le temps d'écoulement est bien plus réaliste avec le coefficient de diffusion donné par la formule (V.4) (*i.e.* $\kappa = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$), mais alors la distance parcourue est plus faible. En s'attardant sur l'évolution de la vitesse au cours de l'écoulement (dérivée de la courbe dessinée), on note que celle-ci atteint environ la même valeur maximale dans les trois cas, mais que cette valeur est maintenue beaucoup plus longtemps lors des expériences de laboratoire que pendant les simulations. On voit effectivement que la décélération est plus progressive et commence plus tôt dans les résultats numériques, quel que soit le coefficient de diffusion.

Pour mieux comprendre l'évolution du seuil de plasticité dans le domaine au cours de l'écoulement,

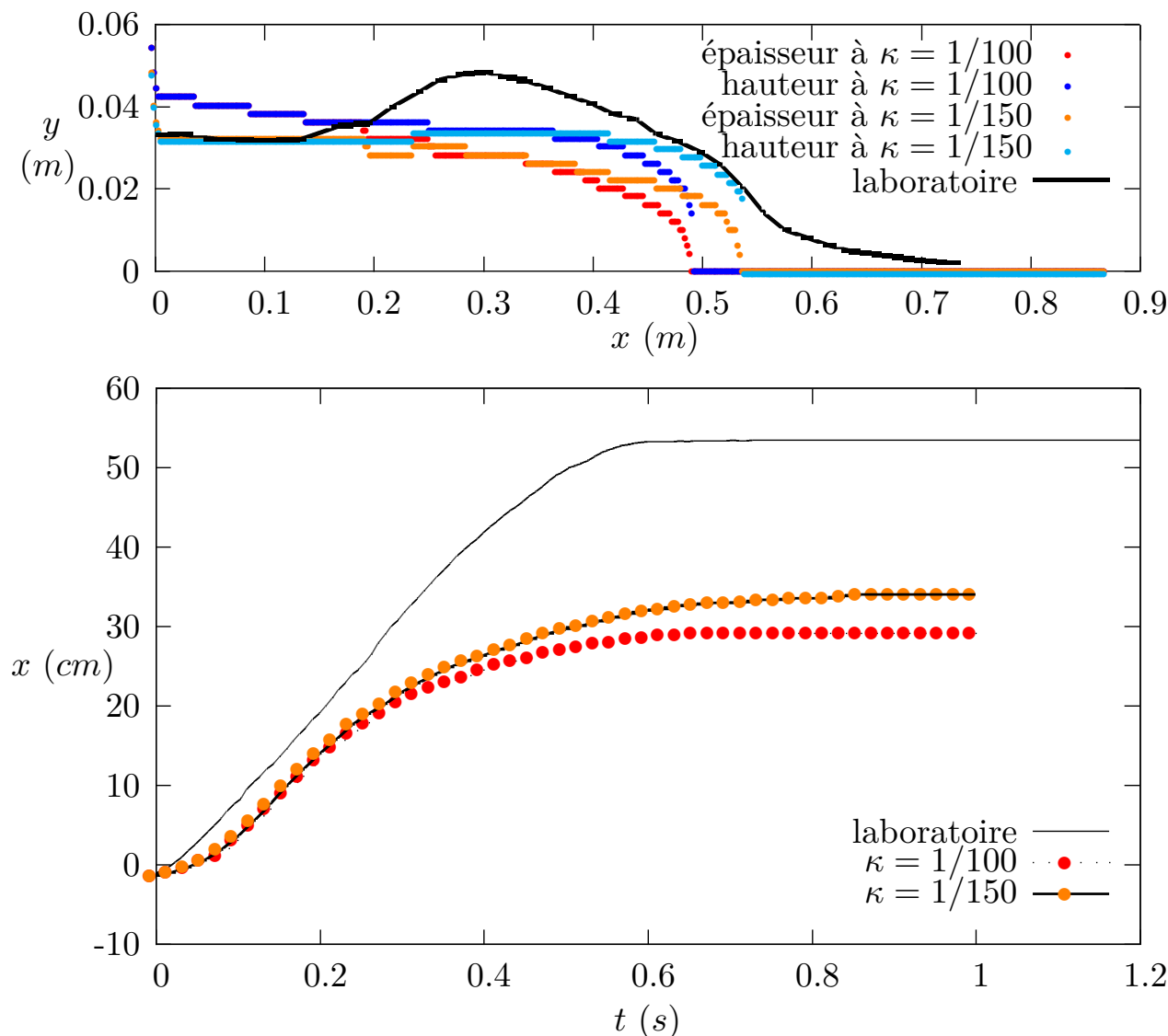


FIGURE V.16 – En haut : Profils du dépôt en fonction du coefficient de diffusion. Résultat comparé aux expériences après 1 s d'écoulement d'une colonne initiale de 10 cm de hauteur. En bas : Distance parcourue par le front à partir de la porte en fonction du temps pour deux valeurs de κ en comparaison aux mesures de laboratoire pour la même configuration.

focalisons-nous un instant sur la distribution de la différence entre la pression lithostatique et la pression du fluide interstitiel. Celle-ci est représentée dans la Figure V.17 aux temps 0.2 s, 0.6 s et 1.0 s. Attention, dans cette figure, ce qui est représenté n'est pas exactement le seuil de plasticité, car la différence ne tient pas compte de la valeur $\tan(\alpha) = 0.45$ due à l'angle de frottement interne (cf. relation (II.4)). De plus, les valeurs négatives sont représentées ici mais ne sont pas vues dans le modèle, car le seuil est défini grâce à la partie positive de cette différence.

Au début, la différence est faible, puisqu'elle représente 10 % de la pression lithostatique dans le lit granulaire et est nulle ailleurs. Mais dès que l'écoulement démarre, la pression de fluide commence à diffuser dans le domaine tout en étant transportée par l'écoulement, si bien que le seuil de plasticité

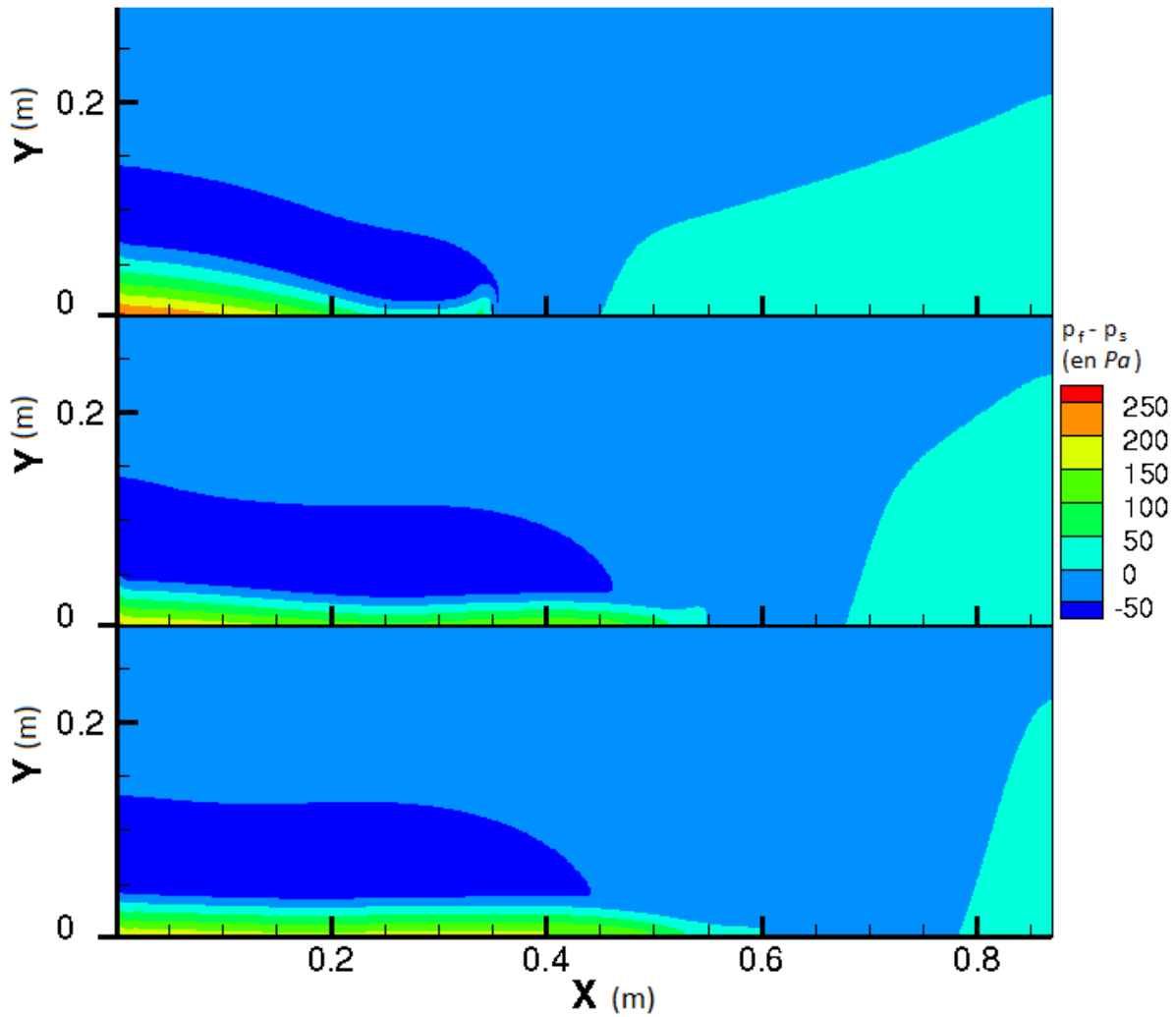


FIGURE V.17 – Évolution de la distribution du seuil de plasticité dans le domaine au cours du temps. De haut en bas, les temps de prise de mesure sont 0.2 s, 0.6 s et 1.0 s.

reste assez faible dans le lit granulaire, surtout dans la tête, ce qui est tout à fait cohérent avec ce qu'on peut voir en laboratoire. Ensuite, au fur et à mesure que le profil s'allonge et que la pression p_f diffuse dans le domaine, la différence augmente de plus en plus, surtout dans la pointe et au sol, et les effets de plasticité prennent le dessus sur la viscosité dans tout le lit granulaire, avec un seuil suffisamment élevé pour stopper l'écoulement dans son ensemble.

Sur la base des observations faites à la section précédente, comparons maintenant ces résultats à ceux obtenus dans le cas non fluidisé. Il est intéressant de constater que si la distance parcourue est plus courte d'une vingtaine de centimètres comme dans le cas sec, le temps de parcours est quant à lui plus long dans la simulation du cas fluidisé que dans l'expérience de laboratoire. De plus, cette quantité est très variable selon la valeur du coefficient de diffusion κ : plus ce coefficient est petit, plus le temps d'écoulement est long. Ainsi, on peut en conclure que pour cette configuration le comportement fluide est bien simulé par le modèle, ce qui correspond au premier quart de l'écoulement,

mais que la défluidisation et le freinage sont trop progressifs pour pouvoir restituer le comportement vu en laboratoire. Il apparaît donc que la méthode de fluidisation de notre modèle est efficace, mais qu'il faudrait améliorer le modèle d'advection-diffusion à coefficient constant pour la pression du fluide interstitiel. En effet, on peut imaginer que si le coefficient de diffusion dépendait de l'épaisseur de l'écoulement selon la loi donnée par la relation (V.4), alors en s'affinant, la tête de l'écoulement posséderait un coefficient de diffusion plus faible et donc garderait un caractère fluide plus longtemps. La distance parcourue par la tête de l'écoulement serait donc augmentée, mais la durée serait sans doute elle aussi augmentée, ce qui ne résoudrait qu'un des deux problèmes relevés ici. La force de freinage apparaît finalement plus faible dans les résultats numériques qu'en laboratoire et a des caractéristiques de freinage visqueux. Pour améliorer le modèle sur ce point, il serait intéressant de tester d'autres conditions de bords au sol du chenal pour savoir si la condition de Dirichlet en est à l'origine. Il serait également judicieux de mettre au point un code de simulation à viscosité variable en fonction de la densité $\mu = \mu(\rho)$ afin d'éliminer les effets de viscosité liés au fluide ambiant.

L'autre point important que j'ai soulevé au début de ce paragraphe est la forme de la tête de l'écoulement. Pour les mesures, nous avons pris pour référence la ligne de niveau de masse volumique à 1400 kg/m^3 . Ce choix a été justifié dans l'introduction de ce chapitre. Cependant, comme on peut le voir sur la Figure V.15, on oublie ainsi ce qu'il se passe au niveau du front. Le phénomène de diffusion de la frontière, qu'on peut constater tout au long de l'écoulement, fait apparaître un petit panache qui continue d'avancer alors que l'extrémité de la partie la plus dense est totalement figée. Ce phénomène fait penser au comportement typiquement granulaire qu'on peut observer dans les expériences à la fin de l'écoulement, à savoir le glissement rapide d'une couche supérieure sur un dépôt. Il est d'ailleurs beaucoup plus visible dans les expériences fluidisées que dans le cas sec. Il est donc intéressant de noter que le modèle contient en réalité plus de propriétés physiques que celles que nous évaluons ici. Cette dernière remarque sera discutée dans les conclusions et perspectives à la fin de ce mémoire. Voyons maintenant ce qu'il en est pour le cas suivant.

Rapport de forme 1.

Comme on vient de le voir, le choix du coefficient de diffusion κ joue effectivement un rôle important dans la dynamique. Maintenant que nous passons aux simulations sur colonne fluidisée de hauteur 20 cm , nous souhaitons simplement comparer le résultat de la simulation avec les mesures de laboratoire en donnant au coefficient sa valeur prévue par la relation (V.4), *i.e.* $\kappa = 0.02 \text{ m}^2/\text{s}$. En Figure V.18, je reprends les mêmes mesures que dans les cas non fluidisés, à savoir d'abord les profils des dépôts et en-dessous les courbes de distance parcourue par le front en partant de la porte (située à 20 cm du bord gauche) en fonction du temps.

La première information qu'on peut dégager de ces résultats est la bonne concordance au niveau de la distance de parcours de la tête de l'écoulement. Dans le cas de la simulation numérique, cette dernière s'arrête en effet seulement 5 cm plus tôt que dans le cas du laboratoire, ce qui représente une petite différence relativement à la distance totale parcourue. En regardant plus précisément la courbe de distance parcourue en fonction du temps, on s'aperçoit là aussi que la simulation est très proche de l'expérience, au moins pendant 0.4 secondes, *i.e.* pendant la moitié du temps de parcours de l'écoulement de laboratoire. La phase d'accélération au début de l'écoulement est légèrement plus longue et la vitesse maximum atteinte est très proche de ce qu'on obtient en laboratoire, si bien que la seule différence notable ici est la longueur bien trop importante de la phase de freinage. Cette dernière dure deux fois plus longtemps, ce qui fait que le temps de parcours est 50% supérieur. On retrouve ainsi un défaut vu dans le cas précédent.

L'autre similitude avec le cas précédent se trouve au niveau du profil de dépôt, qui nous montre une

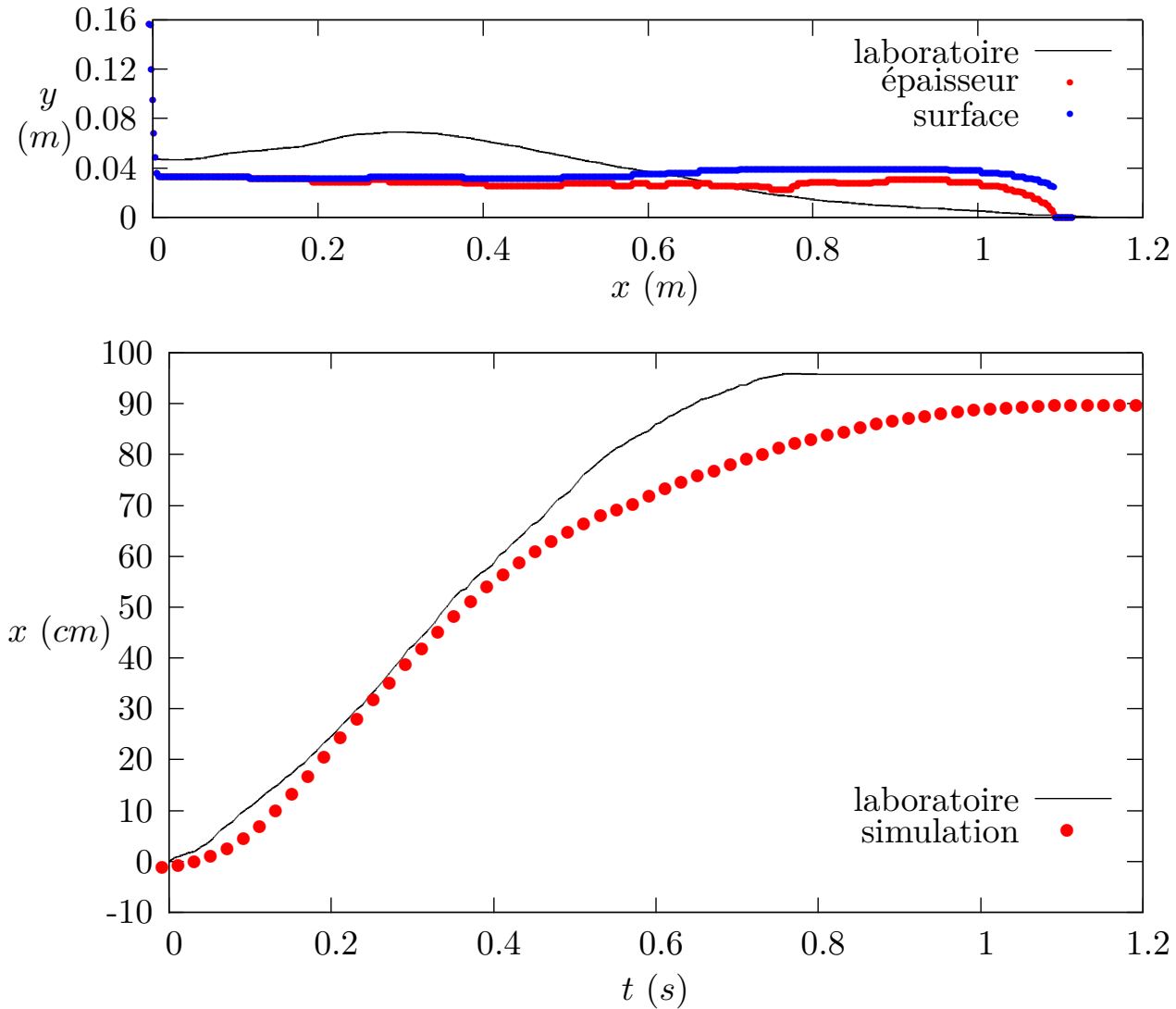


FIGURE V.18 – En haut : Profils du dépôt. Résultat comparé aux expériences après 1.2 s d’écoulement d’une colonne initiale de 20 cm de hauteur. En bas : Distance parcourue par le front à partir de la porte en fonction du temps en comparaison aux mesures de laboratoire pour la même configuration.

surface beaucoup plus plane que dans les expériences de laboratoire. Avec la simulation numérique, à part au niveau de la tête (*i.e.* dans les 10 derniers centimètres), l’épaisseur des dépôts ne varie quasiment pas, en restant autour de 3 cm, alors que dans le cas expérimental on observe une montée à presque 7 cm, puis une descente en pente douce jusqu’à la pointe, qui est beaucoup plus fine. Excepté pour la différence au niveau du front déjà observée dans le cas non fluidisé, ceci pourrait être principalement dû à la différence de condition de fluidisation au sol du réservoir, qui, je le rappelle, est maintenue tout au long de l’expérience de laboratoire, alors qu’elle est stoppée à début de la simulation numérique.

Les deux derniers défauts étant communs au cas d’une colonne initiale fluidisée de 10 cm de haut, on peut dire qu’il s’agit de caractéristiques du modèle, et pour chacun, une piste d’amélioration a déjà été proposée. Cependant, la nouveauté dans ce cas par rapport au précédent est que la distance par-

courue correspond beaucoup plus aux relevés expérimentaux, mais que le temps de parcours est plus long. Et ceci constitue une vraie différence avec le cas non fluidisé, pour lequel on pouvait remarquer une totale similitude de comportement d'un cas à l'autre. Comme on a pu voir que la valeur du coefficient de diffusion a une influence sur la distance et sur le temps de parcours, on en déduit que le modèle de fluidisation couplé à la loi définissant le coefficient de diffusion κ par la relation (V.4) donne une incohérence par rapport aux observations de laboratoire. Celle-ci pourrait cependant être gommée par les différentes améliorations déjà proposées.

Les résultats de simulation obtenus dans le cas d'une colonne initialement de 30 cm de haut n'apportant pas d'élément supplémentaire à l'analyse du modèle, nous allons passer au bilan global sur les simulations numériques, qui est présenté dans la section suivante.

V.5 Conclusions sur les simulations numériques

Pour conclure sur les différentes simulations numériques effectuées avec le modèle proposé dans cette thèse, notons d'abord que lors de l'étape de test de stabilité d'un tas pentu autour de l'angle de frottement interne, nous avons pu voir que le comportement dépend fortement de deux paramètres : la viscosité μ et le paramètre numérique ζ . Cependant, nous avons dégagé une cohérence du comportement général du modèle par rapport à la physique du matériau étudié, ainsi qu'un couple $(\mu, \zeta) = (0.8, 0.05)$ qui donne un résultat intéressant. Cette viscosité, pour ce qui est du lit granulaire, est dans l'intervalle validé par [IONESCU et collab. \[2015\]](#) pour des modèles similaires dans le cas non fluidisé et permet d'avoir un comportement physiquement cohérent dans cette configuration, alors que $\zeta = 0.05$ nous permet d'effectuer des calculs assez rapidement tout en ayant un niveau de précision assez bon lors de la résolution du problème de plasticité du fluide. C'est donc avec ces valeurs que les simulations suivantes ont été effectuées. Dans ces conditions, nous avons effectué des comparaisons dans le cas du test de rupture de barrage avec les résultats de laboratoire, que ce soit dans le cas sec ou dans le cas fluidisé à 90 %. Les distances de parcours sont plus faibles dans les simulations d'écoulements non fluidisés que dans les mêmes conditions en laboratoire, mais les durées d'écoulement sont quasiment les mêmes. D'autre part, l'angle de frottement interne α joue un rôle important dans la dynamique, en imposant un arrêt avec une pente qui est légèrement inférieure à $\tan(\alpha)$. Enfin, on a pu remarquer que la morphologie de la tête des dépôts n'est pas fidèle à ce qu'on observe en laboratoire. En effet, elle est beaucoup plus arrondie et une zone de fluide peu dense persiste au sol du domaine en-dessous de la tête du lit granulaire, qui est beaucoup plus dense. Pour expliquer les faibles distances de parcours ainsi que ces défauts d'ordre géométrique, on a exploré la piste de la précision spatiale associée à la raideur du front entre les valeurs extrêmes de densités (déterminée par la constante M). Cependant, l'amélioration des résultats n'est pas totalement satisfaisante et coûte très cher en terme de temps de calcul. C'est pourquoi elle n'a pas été étendue à tous les cas étudiés dans ce mémoire. Outre la modification de la valeur de ce paramètre, nous avons dégagé deux pistes d'amélioration du code de simulation permettant d'améliorer les résultats. La première concerne la condition de bord et consiste à imposer par exemple un frottement de Coulomb à la place de la condition de Dirichlet homogène. La seconde concerne la valeur de la viscosité dans le fluide ambiant (de l'air dans l'expérience) et nécessiterait la mise en place d'un modèle à viscosité variable ou d'une méthode de résolution dans un domaine variable semblable à celle utilisée par [IONESCU et collab. \[2015\]](#). Comme nous le verrons dans les perspectives au Chapitre VI, si cette dernière amélioration demande beaucoup de travail, le passage à une viscosité variable reste envisageable en terme de temps de développement du code.

L'étude du cas fluidisé a permis d'étudier le comportement du modèle à la fois par rapport aux expériences de laboratoire et par rapport aux simulations non fluidisées. Le bilan des observations fait apparaître que la fluidisation est cohérente avec les observations faites dans les expériences. En particulier, dans la première partie de l'écoulement, correspondant à un quart du temps total, la vitesse de propagation de la tête est quasiment la même que celle mesurée en laboratoire. Ensuite, on note que la phase de décélération est plus progressive et commence plus tôt, ce qui correspond au fait que la tête s'arrête moins loin, même si cet effet est beaucoup plus important dans le cas de la colonne initiale de 10 cm de haut, que dans le cas de la colonne initiale deux fois plus haute. Il est donc légitime de se demander si le modèle de défluidisation par l'équation d'advection-diffusion est correct, ou plus précisément, si on peut l'améliorer en proposant par exemple un coefficient de diffusion dépendant de l'épaisseur de l'écoulement. Cependant, comme on retrouve certains de ces défauts dans le cas non fluidisé, il est probable que cette piste ne résolve pas totalement le problème. De plus, nous avons remarqué qu'un tel choix risquerait d'augmenter encore le temps de parcours. Compte tenu de ces différentes remarques, on peut conclure sur le modèle de fluidisation qu'il a une certaine efficacité et qu'en l'état il répond qualitativement aux attentes. Mais pour approfondir l'analyse, les améliorations évoquées dans le cas non fluidisé doivent d'abord être faites.

Il s'agit de traiter les deux principaux inconvénients du modèle :

- la viscosité n'est pas conforme à la physique dans le fluide ambiant,
- les conditions de bords manquent de réalisme.

Pour le premier, une façon d'y remédier est de passer à un modèle à viscosité variable. Par exemple, il serait possible d'opter pour une viscosité de type $\mu = \mu(\rho)$, variant de 0.8 Pa.s dans le lit granulaire à 2.10^{-5} Pa.s dans l'air. Une démarche d'amélioration allant dans ce sens a été entamée, mais la mise en place du code n'est pas encore achevée.

Pour ce qui est des conditions de bords, nous avons vu deux difficultés. Premièrement, la condition d'adhérence pour la vitesse présente un certain nombre d'avantages du point de vue du calcul et de l'étude théorique, mais, comme on a pu le voir, n'est pas du tout réaliste. Ce point devrait faire l'objet d'une amélioration, notamment pour voir son influence sur la force de freinage en fin d'écoulement. Nous envisagerons des pistes à ce sujet dans les perspectives au Chapitre VI. Deuxièmement, la condition de Neumann sur la paroi inférieure pour la pression du fluide interstitiel ne prend pas en compte le maintien de la fluidisation par le sol du réservoir au cours des écoulements effectués en laboratoire. Nous avons mis en avant cet élément pour justifier la différence de morphologie dans le corps des dépôts finaux, mais pour améliorer l'analyse, une condition de bord plus complexe doit être mise en place dans le code, en imposant une pression donnée au sol du réservoir (*via* une condition de Dirichlet) et une condition de Neumann sur le reste de la paroi inférieure du domaine. Mais il serait également intéressant d'observer des résultats expérimentaux dans lesquels l'injection de l'air pour la fluidisation est arrêtée au moment de l'ouverture de la porte, ce qui correspondrait aux conditions des simulations numériques présentées ici.

Chapitre VI

Bilan et perspectives

VI.1 Bilan de la thèse

L'expérience que j'ai vécue pendant ces trois ans fut très enrichissante tant du point de vue scientifique qu'humain. Au carrefour des mathématiques, de la physique et de la volcanologie, j'ai pu rencontrer des personnes très différentes, me donnant ainsi une vue d'ensemble sur ce qu'est la recherche scientifique dans ces domaines. Que ce soit aux laboratoires de Clermont-Ferrand ou ailleurs, lors de conférences, de séminaires, de rencontres informelles, les discussions ont toujours été très intéressantes et souvent agréables. En suivant les activités des GdR ¹ Transnat et EGRIN, j'ai pu me rendre compte de l'étendue des recherches dans le domaine des écoulements naturels en général et en particulier des écoulements granulaires au-delà de mon sujet de thèse. Enfin, en participant à l'organisation de la première édition du colloque Inter'Actions de rencontre des doctorants en mathématiques en France et à la vie du laboratoire en étant représentant du personnel non permanent au conseil du laboratoire, j'ai eu un aperçu du dynamisme de la recherche académique en mathématiques, qu'elles soient pures ou appliquées, et des difficultés qu'elle rencontre, notamment en terme économique.

C'est dans ce contexte que j'ai eu le plaisir de mener des recherches librement dans les limites du sujet qui était proposé et du temps qui était imposé. Celles-ci ont été axées d'abord sur l'étude d'un modèle mathématique d'écoulements de fluides granulaires prenant en compte la fluidisation par compression d'un gaz interstitiel. Celui-ci a ouvert une perspective d'étude mathématique de problème d'existence de solution faible en temps arbitrairement long et de solutions stationnaires. Enfin, le développement d'un code de simulation numérique 2D pour des fluides non-newtoniens a été effectué en collaboration avec les membres de l'équipe engagés dans le projet. Dans les paragraphes ci-dessous, je résume l'essentiel de ce qui a été présenté pour chacun de ces trois points.

Modélisation Le modèle mathématique proposé pour l'étude d'écoulements granulaires denses fluidisés s'inspire des lois de Coulomb du frottement solide pour la définition d'une rhéologie viscoplastique dépendant d'une pression lithostatique et d'une pression interstitielle. En termes mathématiques, il s'écrit sous la forme du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \operatorname{div}(2\mu D\mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \tan(\alpha) \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}([p_s - p_f]^+, D\mathbf{v})) \\ \partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0 \end{array} \right.$$

1. Groupement de Recherche

où

- α est l'angle de frottement interne du matériau granulaire, supposé constant et connu,
- μ est la viscosité apparente du mélange,
- $\rho = \phi\rho_s + (1 - \phi)\rho_f$ est la masse volumique du mélange, ϕ étant la fraction volumique de solide,
- σ est définie pour toute fonction τ_0 à valeurs réelles par la relation :

$$\begin{cases} \sigma(\tau_0, D\mathbf{v}) = \tau_0 \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|} & \text{si } D\mathbf{v} \neq 0, \\ |\sigma(\tau_0, D\mathbf{v})| \leq |\tau_0| & \text{si } D\mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

- La pression solide p_s est la pression lithostatique définie par : $p_s(x, y, t) = \int_y^H \rho(x, \xi, t) g d\xi$, où H est l'altitude du haut du domaine.

Dans ce modèle, un lit granulaire non fluidisé a une rhéologie viscoplastique dont la viscosité est constante et le seuil dépend de la profondeur, puisque celui-ci est égal à la pression lithostatique locale. Lorsqu'il est fluidisé, le matériau a toujours la même viscosité mais un seuil qui est égal à la partie positive de la différence entre la pression lithostatique et la pression du fluide interstitiel. En dehors du lit granulaire, le fluide est seulement visqueux puisqu'on impose une valeur nulle du seuil de plasticité.

Étude théorique du modèle Après avoir calculé explicitement la solution stationnaire dans le cas de l'écoulement d'un fluide viscoplastique dans un canal infini, l'étude mathématique du modèle du point de vue théorique a donné lieu à la preuve d'un théorème d'existence de solution faible en temps arbitrairement long dans le cas homogène. Les équations s'écrivent alors

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ \rho(\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) + \nabla p - \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \tan \alpha \operatorname{div}(\sigma([p_s - p_f]^+, D\mathbf{v})) \\ \partial_t p_f + \operatorname{div}(p_f \mathbf{v}) - \kappa \Delta p_f = 0 \end{cases}$$

La démonstration se base sur une technique de régularisation de la contrainte de seuil couplée à une approche par schéma de Galerkin. Le passage à la limite sur les indices d'approximation repose sur des estimations d'énergie dans les espaces *ad-hoc* et sur une propriété de graphe pour gérer la présence du seuil de plasticité. Ces techniques sont appliquées uniquement dans le cas 2D (en espace), ce qui nous suffit pour l'utilisation qu'on en fait pour le moment. Je parlerai des améliorations à apporter dans la section suivante.

Simulations numériques La partie simulation de cette thèse s'articule autour de deux objectifs complémentaires, à savoir

- le développement d'un code de résolution numérique et sa validation,
- la reproduction numérique des expériences de laboratoire pour évaluer le modèle.

Le premier était en partie indépendant du choix du modèle, puisque nous avons développé un code qui peut résoudre les équations de la mécanique des fluides aussi bien newtoniens que viscoplastiques, en régime incompressible et dans leur version homogène ou à densité variable. De plus, le code permet de prendre en compte différentes conditions de bords de type Dirichlet, Neumann ou Robin pour la vitesse et la pression du fluide interstitiel, mais la condition est homogène sur chacun des bords. Enfin, il est possible d'effectuer des simulations en domaine périodique selon une direction pour l'étude des états stationnaires par exemple. Tout cela ayant été développé de bout en bout en collaboration avec Thierry Dubois, des tests académiques de validation ont été effectués sur différentes versions du code. Ce travail fait l'objet d'un article en cours de rédaction [DUBOIS et MATHÉ, 2015].

La seconde étape consiste à tester le modèle dans différentes configurations de laboratoire pour étudier son comportement par rapport à la réalité des expériences. Trois situations ont été testées, la première visant à étudier la stabilité d'un tas ayant initialement une pente dont l'angle par rapport à l'horizontale est autour de l'angle de frottement interne du matériau. Les résultats sont très prometteurs, mais ceux-ci ont mis en évidence une imperfection du modèle et du schéma de résolution numérique. Quel que soit l'angle qu'on a testé (entre 21 et 27 degrés environ), en fonction de la valeur de viscosité qu'on se donne, une instabilité peut apparaître ou être empêchée. Ainsi, avec une viscosité de $1 Pa.s$, le mouvement semble impossible même pour des pentes à un angle initial jusqu'à 2.4° au-dessus de l'angle de frottement interne α . À l'inverse, si $\mu = 0.5 Pa.s$, alors les simulations montrent une instabilité notable même avec des angles 2.4° en dessous de α . La dépendance à ce paramètre physique est tout de même à nuancer, puisqu'elle est également fonction de la valeur du paramètre numérique ζ , qui intervient dans le schéma de résolution du problème de plasticité. Celui-ci détermine la vitesse de résolution de cette partie du schéma et commande ainsi en partie la précision de calcul. Si l'idéal serait de prendre ce paramètre égal au pas de temps (*i.e.* $\zeta = \delta t$), il apparaît qu'un tel choix mènerait à un calcul beaucoup trop gourmand en temps. Un compromis a donc été trouvé entre précision et rapidité, en fixant le paramètre à $\zeta = 0.05$. Ce faisant, la valeur de viscosité qui donne les résultats les plus cohérents est $\mu = 0.8 Pa.s$. C'est donc avec ces valeurs qu'ont été effectuées les simulations suivantes.

Les deux autres situations qu'on a étudiées simulent toutes deux une rupture de barrage, la première se focalisant sur le cas non fluidisé et la seconde sur le cas fluidisé à 90%. Celles-ci permettent de regarder le comportement du modèle dans sa version dynamique, et notamment au moment du freinage. C'est en effet ce point qui est crucial dans la plupart des études et assez mal compris du point de vue physique. Les résultats ont été comparés aux mesures de laboratoire de [GUEUGNEAU \[2015\]](#). En prenant en compte les défauts liés aux conditions de bords et de précision du schéma, on a pu voir que là encore le modèle tient un certain nombre de promesses, dont sa capacité à freiner l'écoulement dans son élan. Cependant, nous avons noté que la phase de freinage dans les simulations dure plus longtemps qu'en laboratoire en montrant des caractéristiques de freinage visqueux, et ceci quel que soit le cas traité. De plus, nous avons noté un décollement artificiel du lit granulaire sur une partie peu dense à l'avant de l'écoulement. Les perspectives d'améliorations sont discutées dans la section suivante. Dans le cas fluidisé, nous avons de plus remarqué le bon comportement de la loi d'advection-diffusion, qui permet une défluidisation qualitativement cohérente du lit granulaire tout au long de son écoulement. L'analyse quantitative ne pourra quant à elle être pertinente que lorsque les perspectives d'amélioration proposées dans le cas non fluidisé auront abouti.

Grâce à ce modèle et au développement du code de simulation numérique de rupture de barrage, nous pouvons néanmoins affirmer qu'un élément déterminant dans la dynamique de ces écoulements fluidisés est le coefficient de diffusion de la pression du gaz interstitiel. La poursuite des recherches liées à ce modèles est désormais conditionnée à l'amélioration des résultats selon les perspectives que nous avons déjà évoquées et qui sont précisées dans le paragraphe suivant.

VI.2 Perspectives

En faisant le bilan des différents points abordés lors de ce travail, nous avons vu plusieurs aspects perfectibles, que ce soit dans la qualité des simulations par rapport aux expériences ou dans l'étude théorique du modèle. Voici quelques pistes de recherche et quelques perspectives d'amélioration, qui me semblent naturellement explorables dans la continuité du projet.

Étude théorique du modèle Concernant l'étude mathématique autour des équations du modèle, nous avons traité le cas homogène, *i.e.* à densité constante, pour des domaines de \mathbb{R}^2 . Pour parfaire l'étude et justifier totalement le caractère bien posé des équations que nous discrétisons dans les simulations de rupture de barrage, il faudrait étendre ce résultat au cas non-homogène. Nos premières tentatives se sont heurtées à des contraintes techniques liées à la régularité de la masse volumique, dont la dynamique est régie par l'équation de transport. Mais il serait intéressant de regarder s'il existe une loi définissant le seuil de plasticité τ_0 en fonction de la densité *via* la pression lithostatique qui soit à la fois physiquement raisonnable et mathématiquement concluante. D'autre part, il serait également utile de traiter le cas 3D, puisque le code de simulation est quant à lui déjà en train d'être développé en ce sens par Thierry Dubois (voir le paragraphe suivant).

Simulations numériques Le développement du code de simulation détaillé ici a été mené spécifiquement pour ce projet. Le temps attribué à cette étape du travail n'a malheureusement pas été suffisant pour aboutir à des résultats comparables à ceux obtenus par d'autres auteurs, au moins dans le cas des écoulements non fluidisés [MERUANE et collab., 2010; IONESCU et collab., 2015]. Cependant, le développement en cours permet d'affirmer que le modèle est prometteur du point de vue de la simulation d'écoulements granulaires denses fluidisés et quelques pistes d'améliorations ont été mises en avant.

L'une d'elle concerne les conditions de bord. Nous avons vu que les conditions d'adhérence (Dirichlet homogène) pour la vitesse sont très peu réalistes et influencent beaucoup les résultats. C'est pour cette raison que des tests ont également été effectués en remplaçant cette condition par une condition de Robin sur le fond et le bord horizontal gauche, devant permettre ainsi un certain glissement. L'inconvénient est qu'il est très difficile de calibrer les paramètres numériques pour obtenir la convergence du code avec ces conditions. Notamment, plus le glissement autorisé est grand, plus il faut diminuer le pas d'espace pour capter les variations proches du bord sans explosion, ce qui devient très vite trop gourmand en temps de calcul, même avec le code parallélisé. De plus, le coefficient de Robin devrait varier en fonction de l'état de l'écoulement et notamment en fonction de la pression du fluide interstitiel, mais à notre connaissance aucune loi empirique n'a été proposée pour le moment. Tout cela fait qu'aucun résultat avec les conditions de Robin ne constitue une amélioration suffisante pour être présenté dans ce mémoire. Cependant, d'autres pistes sont possibles, notamment la mise en place de condition de frottement de type Coulomb, comme proposé par MERUANE et collab. [2010] ou IONESCU et collab. [2015]. Celle-ci devra être ajoutée au code pour proposer une alternative aux conditions de bords en vitesse mises en place pour le moment.

D'autre part, il serait également important d'améliorer la condition au sol du domaine pour la pression de fluide interstitiel, afin que celle-ci puisse être imposée avec une condition de Dirichlet à la base du réservoir tout au long de l'écoulement et tout en restant de type Neumann homogène sur le reste du bord inférieur du domaine. Cela permettrait de comparer les morphologies de dépôts dans des conditions semblables à celles du laboratoire et pourrait apporter des éléments de compréhension sur le phénomène de fluidisation lui-même.

Une seconde piste d'amélioration du modèle consiste à corriger la valeur de viscosité dans le fluide ambiant. Pour le moment, cette valeur est en effet égale à celle donnée dans le lit granulaire et est donc largement sur-évaluée par rapport à la valeur physique. Pour gagner en cohérence sur ce point-là, l'objectif est de passer à une loi de viscosité dépendant de la masse volumique $\mu = \mu(\rho)$ permettant d'appliquer une viscosité de $0.8 Pa.s$ dans le lit granulaire et en donnant une viscosité plus proche de $2.10^{-5} Pa.s$ dans le reste du domaine. L'inconvénient de la résolution à viscosité variable est le coût de calcul, qui est bien plus important que dans le cas de la viscosité constante.

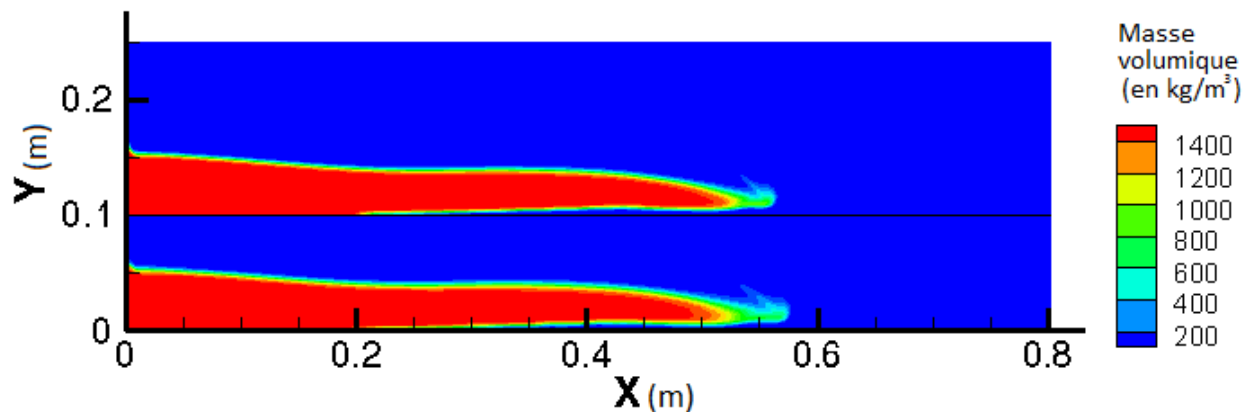


FIGURE VI.1 – Distribution de la masse volumique dans le domaine au bout de 0.74 s d'écoulement. En haut : $N_y = 192$ et $M = 300$. En bas : $N_y = 144$ et $M = 150$.

L'une des raisons vient du fait que dans ce cas le terme de viscosité $\mu\Delta\mathbf{v}$, qui est valable lorsque μ est constante, s'écrit forcément $\text{div}(\mu(\rho)D\mathbf{v})$, ce qui complique significativement le système linéaire à l'étape de discrétisation.

Si de tels tests sont effectués, il sera alors intéressant de comparer les résultats non seulement avec les données de laboratoire, mais aussi avec d'autres codes de simulation, notamment les codes biphasés [MERUANE et collab., 2010], pour voir si les performances de précision et de rapidité du calcul sont meilleures.

Enfin, pour une meilleure évaluation des dépôts finaux, particulièrement au niveau du front, et de la vitesse de propagation de l'écoulement, il faudrait diminuer significativement l'incertitude liée à l'épaisseur de la frontière entre le lit granulaire et le gaz ambiant. Nous avons vu qu'augmenter la résolution spatiale apporterait une amélioration significative (cf. Figure V.3), mais le coût de calcul devient alors une limite, surtout si l'on veut étendre les simulations à des cas plus complexes (colonne plus haute, 3D...). Cependant, le cas d'une colonne de 10 cm de haut initialement fluidisée a été traité de la même manière que dans le cas non fluidisé. Le calcul a été mené jusqu'à 0.74 s d'écoulement et avec un coefficient de diffusion $\kappa = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$. Nous comparons les distributions de masse volumique dans les mêmes conditions en Figure VI.1 en fonction de la raideur du saut déterminée par le paramètre M dans la relation (V.2). On peut remarquer la même chose que pour le cas non fluidisé vu précédemment, à savoir que l'augmentation du paramètre M permet, à condition de diminuer le pas d'espace, une meilleure captation de la frontière entre le lit granulaire et la phase de faible masse volumique. Ce faisant, on affine les mesures et l'écart sur la distance parcourue entre la simulation numérique et l'expérience de laboratoire est diminuée d'environ 2 cm. Cela ne représente cependant qu'environ 10% de l'écart obtenu avec une résolution plus faible, et il reste toujours un panache de densité plus faible dû à la diffusion numérique à la tête de l'écoulement. Le gain n'est donc pas à la hauteur du prix payé en terme de temps de calcul.

Une alternative moins coûteuse pour capter plus précisément les mouvements au front serait de proposer dans un premier temps une méthode de traitement *a posteriori*. Elle permettrait de déduire la position de la frontière à partir de l'étalement entre les différentes lignes de niveaux, par exemple en considérant la position de la ligne de niveau de masse volumique moyenne. Enfin, une autre possibilité serait d'améliorer le code de résolution de l'équation de transport développé ici, par exemple en

optant pour les méthodes de type *level set*, VOF² ou ALE. La dernière n'est pas envisageable pour le moment pour des raisons techniques de parallélisation du code, car elle nécessite de développer un code à maillage variable. Mais une méthode de type *level set* ou VOF serait une bonne alternative permettant d'améliorer significativement cet aspect de la résolution du problème.

Le dernier point d'imprécision constaté dans les résultats de simulations concerne la fluidisation. Ces résultats sont qualitativement cohérents, mais pas quantitativement, surtout dans la phase de décélération de l'écoulement. Je rappelle que pour les écoulements fluidisés, lorsque le temps de parcours est plus long, c'est seulement dans la phase de freinage que la différence se fait par rapport aux résultats expérimentaux. D'autre part, nous avons pu mettre en avant l'importance du rôle joué par le coefficient de diffusion κ dans la dynamique. Du point de vue physique, la connaissance de ce coefficient dans ce contexte est limitée pour le moment au cas de la défluidisation d'une colonne statique (voir [ROCHE, 2012]). Comme on sait que dans ce cas le coefficient de diffusion dépend de la hauteur de la colonne, il serait intéressant d'opter pour un coefficient de diffusion variable selon l'épaisseur locale du lit granulaire. Ainsi, on aurait un coefficient de diffusion qui serait défini localement et non globalement comme c'est le cas pour le moment, ce qui pourrait *a priori* apporter un certain nombre d'améliorations, comme l'allongement des distances de parcours.

Pour aller encore plus loin Le dernier point que j'aborde dans les perspectives concerne la 3D. Pour vraiment simuler la réalité des expériences et du terrain, il semble effectivement judicieux de prendre en compte toutes les directions de l'espace, même lorsque les géométries sont globalement dirigées. Reprenons l'exemple de la rupture de barrage dans un chenal : ce qu'il se passe dans la direction transversale au chenal influence forcément l'écoulement, ne serait-ce que par la présence du bord (la plaque de plexiglas). Or cet élément n'est pas pris en compte dans le code 2D. C'est donc pour ces raisons qu'un code de simulation en trois dimensions de l'espace est en train d'être développé sur la base du code 2D existant. Parallèlement à cela, il serait intéressant d'étudier le problème d'existence de solution dans un domaine de \mathbb{R}^3 .

Toutes ces perspectives sont autant de directions de développement du projet mené au sein du LabEx ClerVolc par la collaboration étroite entre mathématiciens, physiciens et volcanologues. Enfin, pour donner une réponse aux questions posées en introduction, je dirais que le modèle de fluide viscoplastique proposé dans ce travail constitue une bonne approximation d'un matériau granulaire dense fluidisé dans le cadre de l'étude des ruptures de barrages, mais avant de pouvoir en juger définitivement, des améliorations doivent être apportées à cette étude préliminaire afin de réduire les imprécisions du modèle et les incertitudes des mesures.

Bibliographie

- ACARY-ROBERT, C., E. FERNÁNDEZ-NIETO, G. NARBONNA-REINA et P. VIGNEAUX. 2012, «A well-balanced finite volume-augmented lagrangian method for an integrated Herschel-Bulkley model», *Journal of Scientific Computing*, vol. 53, p. 608–641.
- AMIRAT, Y. et V. SHELUKIN. 2013, «Nonhomogeneous incompressible Herschel-Bulkley fluid flows between two eccentric cylinders», *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, vol. 15, n° 4, p. 635–661.
- ARANSON, I. et L. TSIMRING. 2002, «Continuum theory of partially fluidized granular flows», *Physical Review E*, vol. 65, n° 061303.
- BAGNOLD, R. G. 1954, «Experiments of gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear», *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 255, n° 49.
- BARKER, T., D. SHAEFFER, P. BOHORQUEZ et J. GRAY. 2015, «Well-posed and ill-posed behaviour of the $\mu(i)$ -rheology for granular flow», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 779, p. 794–818.
- BASOV, I. et V. SHELUKIN. 2006, «Nonhomogeneous incompressible Bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids», *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 142, p. 95–103.
- BATCHELOR, G. 1954, «Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures», *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 12, p. 209–233.
- BERCOVIER, M. et M. ENGELMAN. 1979, «A finite element method for incompressible non-newtonian flows», *Journal of Computational Physics*, vol. 36, n° 313-326.
- BERNABEU, N. 2015, *Modélisation multi-physique des écoulements viscoplastiques. Application aux coulées de lave volcanique.*, thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- BERNABEU, N., P. SARAMITO et C. SMUTEK. 2015, «A new shallow approximation for tridimensional non-isothermal viscoplastic lava flows», *soumis*.
- BÖHM, M. 1985, «On a nonhomogeneous Bingham fluid», *Journal of Differential Equations*, vol. 60, p. 259–284.
- BOUCHUT, F., I. IONESCU et A. MANGENY. 2015, «A shallow model including static-flowing transition for viscoplastic Drucker-Prager materials», *Soumis dans Comm. Math. Sci.*
- BOYER, F. et P. FABRIE. 2006, *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, *Mathématiques et Applications*, vol. 52, Springer.
- BREWSTER, R., L. SILBERT, G. GREST et A. LEVINE. 2008, «Relationship between interparticle contact lifetimes and rheology in gravity-driven granular flows», *Physical Review E*, vol. 77, n° 6.

- BULÍČEK, M., P. GWIAZDA, J. MÁLEK et A. ŚWIERCZEWSKA-GWIAZDA. 2012, «On unsteady flows of implicitly constituted incompressible fluids», *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 44, n° 4, p. 2756–2801.
- CHATZIMINA, M., G. GEORGIU, I. ARGYROPAIDAS, E. MITSOULIS et R. HUILGOL. 2005, «Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping times», *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 129, p. 117–127.
- CHORIN, A. 1967, «The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid», *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, p. 928–931.
- CHUPIN, L. et T. DUBOIS. 2015, «A bi-projection method for Bingham type flows», *Preprint* <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01166406>.
- CHUPIN, L. et J. MATHÉ. 2015, «Existence theorem for homogeneous incompressible Navier-Stokes equation with variable rheology», *soumis*.
- COLELLA, P. et P. WOODWARD. 1984, «The piecewise parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations», *Journal of Computational Physics*, vol. 54, p. 174–201.
- DARTEVELLE, S., W. ROSE, J. STIX, K. KELFOUN et J. VALLANCE. 2004, «Numerical modeling of geophysical granular flows : 2. Computer simulation of plinian clouds and pyroclastic flows and surges», *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, vol. 5, n° Q08004.
- DE VAHL DAVIS, G. 1983, «Natural convection of air in a square cavity : a bench mark numerical solution», *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, p. 249–264.
- DEAN, E., R. GLOWINSKI et G. GUIDOBONI. 2007, «On the numerical simulation of Bingham viscoplastic flow : old and new results», *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 142, p. 39–62.
- DESMONT, K., U. VILLA, M. NEWEY et W. LOSERT. 2013, «Characterizing the rheology of fluidized granular matter», *Physical Review E*, vol. 88, n° 032202.
- DRAGONI, M. 1989, «A dynamical model of lava flows cooling by radiation», *Bulletin of Volcanology*, vol. 51.
- DRUCKER, D. et W. PRAGER. 1953, «Soil mechanics and plasticity analysis or limit design», *Quarterly Applied Mathematics*, vol. 10, n° 2, p. 157–165.
- DRUITT, T. H. 1998, «Pyroclastic density currents», dans *The Physics of Explosive Eruptions*, vol. 145, édité par J. Gilbert et R. Sparks, Geological Society of London Special Publication, p. 145–182.
- DUBOIS, T. et J. MATHÉ. 2015, «Natural convection of Bingham fluids with temperature-dependant viscosity and yield stress», *en préparation*.
- DUVAUT, G. et J.-L. LIONS. 1976, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer.
- FERNÁNDEZ-CARA, E., F. GUILLÉN et R. ORTEGA. 1997, «Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density», *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 28, n° 6, p. 1079–1100.
- FERNÁNDEZ-NIETO, E., J. GARRES-DÍAZ, A. MANGENEY et G. NARBONA-REINA. soumis, «A multilayer shallow model for dry granular flows with the $\mu(i)$ rheology : Application to granular collapse on erodible beds», *J. FLUID. MECH.*

- FERNÁNDEZ-NIETO, E., E. KONÉ et T. CHACÓN REBOLLO. 2014, «A multilayer method for the hydrostatic navier-stokes equations : A particular weak solution», *Journal of Scientific Computing*, vol. 60(2), p. 408–437.
- FORTIN, M. et R. GLOWINSKI. 1983, *Augmented Lagrangian Methods : Applications to the Numerical Solutions of Boundary-Value Problems*, Elsevier.
- GINGOLD, R. et J. MONAGHAN. 1977, «Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars», *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 181, p. 375–389.
- GLOWINSKI, R., J. LIONS et TRÉMOLIÈRES. 1981, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, Elsevier.
- GRINCHIK, I. et A. KIM. 1972, «Axial flow of a non-linear viscoplastic fluid through cylindrical pipes», *Journal of Engineering Physics*, vol. 23(2), p. 1039–1041.
- GUEUGNEAU, V. 2015, «La fluidisation des écoulements pyroclastiques : développement numérique, validation expérimentale et confrontation terrain», *Mémoire de Master2 Recherche, Laboratoire Magmas et Volcans, Université Blaise Pascal*.
- HARTEN, A., B. ENGQUIST, S. OSHER et S. CHAKRAVARTHY. 1987, «Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes», *Journal of Computational Physics*, vol. 71, p. 231–303.
- HEINRICH, P., G. BOUDON et J. KOMOROWSKI. 2001, «Numerical simulation of the December 1997 debris avalanche in Montserrat, Lesser Antilles», *Geophysical Research Letters*, vol. 28, p. 2529–2532.
- HJIAJ, M., J. FORTIN et G. DE SAXCÉ. 2003, «A complete stress update algorithm for the non-associated Drucker-Prager model including treatment of the apex», *International Journal of Engineering Science*, vol. 41, p. 1109–1143.
- IONESCU, I., A. MANGENEY, F. BOUCHUT et O. ROCHE. 2015, «Viscoplastic modeling of granular column collapse with pressure-dependent rheology», *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 219, p. 1–18.
- ISHIMINE, Y. 2005, «Numerical study of pyroclastic surges», *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 139, p. 33–57.
- IVERSON, R. 1997, «The physics of debris flows», *Reviews of Geophysics*, vol. 35, n° 3, p. 245–296.
- IVERSON, R. et R. DENLINGER. 2001, «Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain», *Journal of Geophysical Research*, vol. 106, n° B1, p. 537–552.
- JOP, P., Y. FORTERRE et O. POULIQUEN. 2006, «A constitutive law for dense granular flows», *Nature*, vol. 441, p. 727–730.
- KELFOUN, K. 2011, «Suitability of simple rheological laws for the numerical simulation of dense pyroclastic flows and long-runout volcanic avalanches», *Journal of Geophysical Research*, vol. 116, n° B08209.
- KELFOUN, K. et T. DRUITT. 2005, «Numerical modeling of the emplacement of the 7500 BP Socompa rock avalanche, Chile», *Journal of Geophysical Research*, vol. 110, n° B12202.

- KELFOUN, K., T. GIACHETTI et P. LABAZUY. 2010, «Landslide-generated tsunamis at Réunion Island», *Journal of Geophysical Research*, vol. 115, n° F04012.
- KELFOUN, K., P. SAMANIEGO, P. PALACIOS et D. BARBA. 2009, «Testing the suitability of frictional behaviour for pyroclastic flow simulation by comparison with a well-constrained eruption at Tungurahua volcano (Ecuador)», *Bulletin of Volcanology*, vol. 71, p. 1057–1075.
- LAGRÉE, P.-Y., L. STARON et S. POPINET. 2011, «The granular column collapse as a continuum : validity of a two-dimensional navier-stokes model with a $\mu(i)$ -rheology», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 686, p. 378–408.
- LANGLOIS, V., A. QUIQUEREZ et P. ALLEMAND. 2015, «Collapse of a two-dimensional brittle granular column : Implications for understanding dynamic rock fragmentation in a landslide», *Journal of Geophysical Research*, vol. 120, p. 1866–1880.
- LE QUÉRÉ, P. 1991, «Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high rayleigh number», *Computers Fluids*, vol. 20, n° 1, p. 29–41.
- LUCAS, A. et A. MANGENEY. 2007, «Mobility and topographic effects for large Valles Marineris landslides on Mars», *Geophysical Research Letters*, vol. 34, n° L10201.
- LUSSO, C., A. ERN, F. BOUCHUT, A. MANGENEY, M. FARIN et O. ROCHE. 2015, «Two-dimensional simulation by regularization of free surface viscoplastic flows with drucker-prager yield stress and application to granular collapse», *Archives ouvertes HAL*, , n° hal-01133786.
- MANGENEY, A., F. BOUCHUT, N. THOMAS, J.-P. VILOTTE et M. BRISTEAU. 2007a, «Numerical modeling of self-channeling granular flows and their levée-channel deposits», *Journal of Geophysical Research*, vol. 112, n° F02017.
- MANGENEY, A., L. TSIMRING, D. VOLFSON, I. ARANSON et F. BOUCHUT. 2007b, «Avalanche mobility induced by the presence of an erodible bed and associated entrainment», *Geophysical Research Letter*, vol. 34, n° L22401.
- MC EWEN, A. et M. MALIN. 1989, «Dynamics of Mount St. Helens' 1980 pyroclastic flows, rockslide-avalanches, lahars and blast», *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 37, p. 205–231.
- MERUANE, C., A. TAMBURRINO et O. ROCHE. 2010, «On the role of the ambient fluid on gravitational granular flows dynamics», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 648, p. 381–404.
- MIDI, G. 2004, «On dense granular flows», *European Physics Journal E*, vol. 14, p. 341–365.
- MITANI, N., H. MATUTTIS et T. KADONO. 2004, «Density and size segregation in deposit of pyroclastic flows», *Geophysical Research Letters*, vol. 31, n° L15606.
- MONTERRAT, S., A. TAMBURRINO, O. ROCHE et Y. NIÑO. 2012, «Pore fluid pressure diffusion in defluidizing granular columns», *Journal of Geophysical Research*, vol. 117, n° F02034.
- MONTERRAT, S., A. TAMBURRINO, O. ROCHE, Y. NIÑO et C. IHLE. 2015, «Enhanced run-out of dam-break granular flows caused by initial fluidization and initial material expansion», *soumis dans Granular Matter*.
- MURAVLEVA, L. 2014, «Uzawa-like methods for numerical modeling of unsteady viscoplastic Bingham medium flows», *Applied Numerical Mathematics*, vol. 93, p. 140–149.

- PAPANASTASIOU, T. 1987, «Flows of materials with yield», *Journal of Rheology*, vol. 31, n° 5, p. 385–404.
- PATRA, A., A. BAUER et C. NICHITA. 2008, «Parallel adaptive numerical simulation of dry avalanches over natural terrain», *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 42, p. 851–885.
- PITMAN, E., A. PATRA, A. BAUER, M. SHERIDAN et M. BURSIK. 2003, «Computing debris flows and landslides», *Physics of Fluids*, vol. 15, p. 3638–3646.
- POULIQUEN, O. et Y. FORTERRE. 2009, «A non-local rheology for dense granular flows», *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 367, p. 5091–5107.
- ROCHE, O. 2012, «Depositional processes and gas pore pressure in pyroclastic flows : an experimental perspective», *Bulletin of Volcanology*, vol. 74, n° 8, p. 1807–1820.
- ROCHE, O., S. MONTSERRAT, Y. NIÑO et A. TAMBURRINO. 2010, «Pore fluid pressure and internal kinematics of gravitational laboratory air-particles flows : Insights into the emplacement dynamics of pyroclastic flows», *Journal of Geophysical Research*, vol. 115, n° B09206.
- SAUCEDO, R., J. MACIAS, M. SHERIDAN, M. BURSIK et J. KOMOROWSKI. 1983, «Modeling of pyroclastic flows of Colima Volcano, Mexico : implications for hazard assessment», *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 139, p. 103–115.
- SAVAGE, S. et K. HUTTER. 1989, «The motion of a finite mass of granular material down a rough incline», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 199, p. 177–215.
- SCHAEFFER, D. 1987, «Instability in the evolution equations describing incompressible granular flow», *Journal of Differential Equations*, vol. 66, p. 19–50.
- SHERIDAN, M. et M. MALIN. 1983, «Application of computer-assisted mapping to volcanic hazard evaluation of surge eruption : Vulcano, Lipari and Vesuvius», *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 17, p. 187–202.
- SHERIDAN, M., A. STINTON et A. PATRA. 2005, «Evaluating Titan2D mass-flow model using the 1963 Little Tahoma Peak avalanches, Mount Rainier, Washington», *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 139, p. 89–102.
- SHU, C.-W. 2009, «High order weighted essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems», *SIAM Review*, vol. 51, p. 82–126.
- SHU, C.-W. et S. OSHER. 1988, «Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes», *Journal of Computational Physics*, vol. 77, p. 439–471.
- SPERA, F., D. YUEN et S. KIRSCHVINK. 1982, «Thermal boundary layer convection in silicic magma chambers : Effects of temperature dependent rheology and implications for thermogravitational chemical fractionation», *Journal of Geophysical Research, Solid Earth*, vol. 87, p. 8755–8767.
- STARON, L. 2008, «Mobility of long-runout rock flows : a discrete numerical investigation», *Geophysical Journal International*, vol. 172.
- STARON, L., P.-Y. LAGRÉE et S. POPINET. 2014, «Continuum simulation of the discharge of the granular silo», *European Physical Journal E*, vol. 37.

- TORO, E. 1997, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, a practical introduction*, Springer.
- VALENTINE, G. et R. FISHER. 2000, «Pyroclastic surges and blasts», dans *Encyclopedia of Volcanoes*, édité par H. Sigurdsson et al, Academic Press, p. 571–580.
- VOLA, D., L. BOSCARDIN et J. LATCHÉ. 2003, «Laminar unsteady flows of bingham fluids : a numerical strategy and some benchmark results», *Journal of Computaional Physics*, vol. 187, p. 441–456.
- VOLFSON, D., L. TSIMRING et I. ARANSON. 2003, «Order parameter description of stationary partially fluidized shear granular flows», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, n° 254301.
- WOHLETZ, K. 2002, «Pyroclastic surges and compressible two-phase flow», dans *From Magma to Tephra. Modelling Physical Processes of Explosive Volcanic Eruptions*, édité par A. Freundt et M. Rosi, Elsevier, p. 247–310.
- WOHLETZ, K., T. MCGETCHIN, M. SANDFORD et E. JONES. 1984, «Hydrodynamic aspects of caldera-forming eruptions : Numerical models», *Journal of Geophysical Research*, vol. 89, p. 8269–8285.