



HAL
open science

Pinceaux réels en courbes de genre 2

Samir Moulahi

► **To cite this version:**

Samir Moulahi. Pinceaux réels en courbes de genre 2. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers; Université de Carthage (Tunisie), 2015. Français. NNT : 2015ANGE0022 . tel-01387456

HAL Id: tel-01387456

<https://theses.hal.science/tel-01387456v1>

Submitted on 25 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat



Samir MOULAHI

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : *Sciences et Technologies de l'Information, Mathématiques*

Discipline : *Mathématiques et leurs interactions*

Spécialité :

Unité de recherche : **LAREMA**

Soutenue le 14-12-2015

Thèse N° :

Pinceaux réels en courbes de genre 2

JURY

Rapporteurs :	Saïd ZARATI , Professeur étranger, Faculté des sciences de Tunis Iliia ITENBERG , Professeur des universités, Institut de Mathématique de Jussieu-Paris
Examineurs :	Iliia ITENBERG , Professeur des universités, Institut de Mathématique de Jussieu-Paris Jean Philippe MONNIER , Maître de conférences, Université d'Angers Mouadh AKRICHE , Maître assistant, Université de Carthage
Directeur de Thèse :	Frédéric MANGOLTE , Professeur des universités, Université d'Angers
Co-directeur de Thèse :	Belgacem DRAOUIL , Professeur étranger, Faculté des Sciences de Bizerte

DÉDICACES

Afin d'être reconnaissant envers ceux qui m'ont appuyé et encouragé à effectuer ce travail de recherche, je dédie cette thèse :

À ma très chère mère et à mon très cher père qui n'ont cessé de me combler par leur amour et leur tendresse.

A ma chère femme à qui j'exprime toute ma reconnaissance et ma profonde gratitude pour son sacrifice au quotidien et son soutien et encouragement.

À tous les membres de ma famille sans aucune exception, particulièrement mon grand frère qui répond toujours présent dans les moments difficiles.

REMERCIEMENTS

Cette thèse de doctorat a été réalisée dans le cadre d'une convention de cotutelle entre l'université de Carthage et l'université d'Angers avec le soutien financier du ministère tunisien de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique et le soutien de *LAREMA* (Université d'Angers).

Je tiens à remercier mon premier directeur de thèse Pr *Frédéric MANGOLTE* d'avoir bien assuré la direction. Je te remercie pour le temps et la patience que tu m'as accordé tout au long de ces années. Je garderai dans mon cœur ton générosité, ta compréhension et ton efficacité. Pour tout ce que tu m'as donné, je te remercie très sincèrement.

Je tiens à remercier mon second directeur de thèse Pr *Belgacem DRAOUIL* Pour son aide. Il m'est agréable d'exprimer toute ma gratitude et mes remerciements les plus vifs Merci pour votre patience et vos précieux conseils. Veuillez trouver ici la témoignage de mes profonds respects et reconnaissance.

Je tiens à remercier mon co-encadreur de thèse *Mouadh AKRICHE*, à qui j'adresse mes remerciements les plus sincères pour sa disponibilité, ses conseils, ses encouragements et ses qualités humaines. Je garde toujours beaucoup de plaisir à discuter avec toi et à bénéficier de tes conseils.

Je remercie Pr *Said Zarati* et Pr *Ilia ITENBERG* d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Soyez assurés, chers professeurs, de mon estime et de ma profonde gratitude.

Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi à *Jean-Philippe MONNIER* pour avoir accepté de juger ce travail. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous mes amis et mes collègues de différentes spécialités, qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Table des matières

1	Généralités	1
1.1	Notions de variétés	1
1.2	Diviseurs et fibrés en droites	3
1.2.1	Diviseurs	4
1.2.1.1	Diviseurs de Weil	4
1.2.1.2	Diviseurs de Cartier	5
1.2.2	Fibrés en droites	6
1.2.3	Produit d'intersection	10
1.3	Variétés abéliennes réelles	13
1.4	Courbes hyperelliptiques réelles	17
1.5	Singularités simples des surfaces (A_n, D_n, E_n)	18
2	Résultats antérieurs	22
2.1	Surfaces elliptiques réelles	23
2.1.1	Classification des fibres singulières (cas avec section) . .	23
2.1.2	Classification des fibres singulières (cas sans section) . .	27
2.2	Pinceaux en courbes de genre 2	28
2.3	Invariants géométriques d'un pinceau en courbes de genre 2 . . .	32
2.3.1	Monodromie	33
2.3.2	Module de la fibre singulière d'un pinceau en courbes de genre 2	34
2.3.3	Degré d'un pinceau en courbes de genre 2	35
3	Classification réelle des fibres singulières : pinceau en courbes stables de genre 2	37
3.1	Pinceaux en courbes stables de genre 2	37

3.2	Description locale d'un pinceau réel en courbes stables de genre 2	38
4	Invariants réels d'un pinceau en courbes de genre 2	62
4.1	Corps de module et corps de définition	63
4.2	Condition (suite/scindée)	63
4.3	Racine carrée	64
4.4	Uniformisation de la racine carrée	68
4.4.1	Description formelle de surface de Riemann de \sqrt{z}	68
4.4.2	Surface étalée au dessus de \mathbf{C}^*	68
4.4.3	Structure réelle sur $\tilde{\Sigma}^*$	69
5	Pinceaux réels en courbes de genre 2 : Type elliptique	73
5.1	Fibres singulières de type elliptique 1	74
5.1.1	Construction des fibres singulières de type elliptique 1	74
5.1.2	Classification réelle des fibres singulières de type elliptique 1	74
5.2	Fibres singulière de type elliptique 2	87
5.2.1	Cas où P_0 admet une racine triple	88
5.2.2	Cas de racine de multiplicité 6	96
	Bibliographie	99

INTRODUCTION

L'objectif de cette thèse est d'apporter une contribution à la classification des surfaces algébriques réelles et plus particulièrement aux surfaces admettant une fibration en courbes de genre donné. Un *pinceau en courbes de genre g* est la donnée d'une application holomorphe surjective et propre $\pi: X \longrightarrow D$ d'une surface complexe non singulière vers un disque $D \subset \mathbf{C}$ dont la fibre générale est une courbe non singulière de genre g . Un tel pinceau est *réel* si X est munie d'une involution anti-holomorphe σ telle que $\forall P \in X, \pi \circ \sigma(P) = \overline{\pi(P)}$. Dans toute la suite, on supposera que la seule fibre singulière de π est la fibre X_0 au-dessus de 0.

Cette définition se généralise aisément au-dessus d'une courbe B non singulière : $\pi: X \longrightarrow B$. On dira dans ce cas que π est une *fibration* en courbes de genre g . Étant donné une telle fibration réelle, l'espace total X est une variété différentielle de dimension 4 et si la partie réelle $X(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire l'ensemble des points fixes de l'involution σ) est non vide, c'est une variété différentielle de dimension 2 [51, I.1.14]. L'étude de la topologie de ces deux variétés est une question naturelle qui fait l'objet de recherches actives. La question principale traitée dans cette thèse est la classification des fibres singulières et la détermination de la topologie des fibres voisines pour les pinceaux réels en courbes de genre 2 et les invariants réels de tels pinceaux (Théorème 3.7, Théorème 4.15 et Théorème 5.1).

Dans le cas où les singularités de la fibre X_0 sont seulement des points doubles ordinaires, X_0 est appelée courbe semi-stable. Si de plus toute composante irréductible rationnelle lisse de X_0 coupe le reste de la fibre en au moins deux points (équival. si C' est une composante rationnelle de X_0 et $n: C'' \longrightarrow C'$ sa normalisée alors $\sharp(n^{-1}(\text{Sing } X_0)) \geq 3$), alors le morphisme $\pi: X \longrightarrow D$ est appelé pinceau stable, la notion stable est introduite par Deligne et Mumford pour compactifier l'espace des modules des courbes lisses de genre $g > 1$ [17].

Lorsque $g = 0$ (resp. $g = 1$), X est une surface réglée (resp. une surface elliptique). En 1963, Kodaira a classifié les fibres singulières possibles d'une fibration elliptique complexe [28]. Pour le cas du genre 2 en complexe

de nombreux auteurs se sont intéressés au sujet. On cite les travaux qu'on connaît. Rappelons que l'une des approches proposées est de voir une fibration de genre 2 comme un revêtement double d'une surface réglée, ramifié le long d'une courbe sextigonale \mathcal{B} . Un des travaux les plus anciens adoptant ce point de vue est celui de Bolza [8], en 1888. En suivant cette approche, Horikawa [23] a classifié les singularités possibles de la courbe sextigonale de branchement \mathcal{B} et a déterminé les diagrammes de Dynkin possibles des fibres singulières selon le type des singularités de la courbe \mathcal{B} (voir aussi [61]). De leur côté, Ogg [40] et Itaka [26] ont proposé une classification numérique des fibres singulières des pinceaux en courbes de genre 2. Puis en 1973, Namikawa et Ueno ont défini un triplet d'invariants géométriques $(M, z, n) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$, (détaillé au paragraphe 1), qui détermine d'une manière unique le type de configuration complexe de la fibre singulière X_0 . De plus, ils ont donné la liste complète des fibres singulières incluant certains types manquant dans la liste de Ogg.

En 1976, Viehweg [57] a donné une version algébrique, sur un corps algébriquement clos, d'une partie des travaux de Namikawa et Ueno [38]. En se basant sur les travaux de Viehweg, Qing Liu [32, 34] a achevé la classification sur un corps algébriquement clos quelconque et a retrouvé la liste complète de Namikawa et Ueno. Dans une autre direction, Xio Gang et Persson ont étudié la question géographique pour de telles surfaces fibrées; c'est-à-dire l'existence d'une surface fibrée ayant des invariants numériques donnés, voir [61] et [41].

La classification locale des surfaces elliptiques réelles a été réalisée en 1984 par Robert Silhol [50]. Pour des avancées plus récentes à propos de la classification réelle globale, voir [2], [3], [7] et [16]. C'est dans la direction des travaux de Silhol que s'inscrit le présent travail pour le cas du genre 2.

Soit $\pi': X' \rightarrow D$ un pinceau réel en courbes de genre g , $X_0 = \sum_{i=1}^k n_i \mathcal{D}_i$ et

$X'_0 = \sum_{i=1}^{k'} m_i \mathcal{D}'_i$ les diviseurs associés respectivement aux deux fibres singulières de π et π' aux dessus de 0.

On dit que X_0 et X'_0 ont même *configuration complexe* si $k = k'$ et s'il existe une permutation τ de $\{1, \dots, k\}$ telle que :

1. $M' = {}^t N M N$ et $n_i = m_{\tau(i)}$.

où $M = (\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j)_{1 \leq i, j \leq k}$ et $M' = (\mathcal{D}'_i, \mathcal{D}'_j)_{1 \leq i, j \leq k}$ sont les matrices d'intersections des diviseurs X_0 et X'_0 et $N = (\delta_{i\tau(j)})_{1 \leq i, j \leq k}$.

2. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, \mathcal{D}_i et $\mathcal{D}'_{\tau(i)}$ ont le même genre arithmétique et le même nombre des points singuliers.
3. Pour tout $i, j \in \{1, \dots, k\}$, le nombre des points d'intersection de \mathcal{D}_i et \mathcal{D}_j est le même que pour $\mathcal{D}'_{\tau(i)}$ et $\mathcal{D}'_{\tau(j)}$.

On utilise la terminologie "configuration complexe" plutôt que "classification numérique", qui est en réalité la même, pour introduire dans le cas réel la terminologie "type de configuration réel".

On se restreint maintenant au cas où $g = 2$. Lorsque π est réel et $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. On appelle *type de configuration réel* de X_0 une décomposition

$$\sum_{i=1}^k n_i \mathcal{D}_i = \sum_I n_i \mathcal{D}_i + (1 + \sigma) \sum_J n_i \mathcal{D}_i.$$

tel que $\sigma(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_i \forall i \in I$, $\sigma(\mathcal{D}_i) \neq \mathcal{D}_i \forall i \in J$ et $k = \#I + 2\#J$.

On suppose que π et π' sont réels pour σ et σ' .

On dit que X_0 et X'_0 ont le même *type de configuration réel* s'ils ont la même configuration complexe et s'il existe une permutation τ de $\{1, \dots, k\}$ vérifiant 1., 2. et 3. telle que :

$$\sum_{i=1}^k m_i \mathcal{D}'_i = \sum_I m_{\tau(i)} \mathcal{D}'_{\tau(i)} + (1 + \sigma') \sum_J m_{\tau(i)} \mathcal{D}'_{\tau(i)}.$$

On dit que X_0 et X'_0 sont de même *type complexe* s'ils correspondent au même triplet d'invariants $(M, z, n) \in \text{Sp}(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$.

Remarquons que si les diviseurs X_0 et X'_0 sont de même type complexe alors ils ont la même configuration complexe. Mais la réciproque est fautive, par exemple les deux types $[2I_0\text{-}m]$ et $[\text{II}_{n-0}^*]$ (notation Namikawa et Ueno) possèdent la même configuration complexe mais ils correspondent à deux triplets d'invariants distincts.

On dit que X_0 et X'_0 sont de même *type réel* si de plus, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{D}_i(\mathbf{R})$ et $\mathcal{D}'_{\tau(i)}(\mathbf{R})$ sont homéomorphes.

On distingue ici entre "type de configuration réel" et "type réel" contrairement

au cas du genre 1 où les deux terminologies coïncident (équivalent à "structure géométrique de X_0 " selon la terminologie de Silhol [50]). Dans le cas de genre 1, les composantes irréductibles d'une fibre singulière sont seulement des courbes rationnelles contrairement au cas de genre 2 où une fibre peut avoir des courbes elliptiques comme composantes irréductibles. Par suite, deux fibres qui ont le même type de configuration réel peuvent avoir deux types réels différents.

Soit $\pi: X \rightarrow D$ un pinceau réel en courbes de genre 2 et $(M, z, n) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$ le triplet d'invariant associé à la fibre singulière. Si M est d'ordre fini alors la fibre singulière X_0 est dit de type elliptique. Dans ce cas le point z correspond, dans l'espace de modules des courbes stables de genre 2, à une courbe projective lisse de genre 2 ou deux courbes elliptiques lisses s'intersectant transversalement en un point. Et donc la fibre singulière du pinceau stable associé à π est soit une courbe projective lisse de genre 2, dans ce cas X_0 est dit de type elliptique 1, soit deux courbes elliptiques lisses s'intersectant transversalement en un point et dans ce cas X_0 est dit de type elliptique 2. Dans le cas où M est d'ordre infini la fibre singulière X_0 est dit de type parabolique

Résultats - Les variétés qu'on considère dans ce travail sont définies sur le corps \mathbf{R} et un pinceau $\pi: X \rightarrow D$ est toujours supposé réel.

Les principaux résultats de la thèse sont répartis sur trois chapitres (Ch 3, Ch 4 et Ch 5).

Dans le chapitre 3, je donne une classification complète des pinceaux réels (lisses ou singulières) en courbes stables de genre 2 ; je donne une liste complète des types réels avec des exemples et je détermine la topologie des fibres voisines de la fibre singulière, théorème 3.7.

Dans le chapitre 4, Je donne les invariants réels qui déterminent une classe d'un pinceau en courbes de genre 2, soit le théorème 4.15. Deux pinceaux réels en courbes de genre 2 sont dites dans la même classe s'il existe un isomorphisme réel qui envoie l'un sur l'autre. Ce théorème utilise en partie la théorie de corps de modules et corps de définition [59]. Généralement un corps de module n'est pas un corps de définition comme le montre le contre-exemple de Shimura [48], pour $K = \mathbf{R}$ et X une courbe hyperelliptique, de genre pair $g = m - 1$,

définie par :

$$y^2 = a_0x^m + \sum_{i=1}^m (a_r x^{m+r} + (-1)^r \overline{a_r} x^{m-r})$$

Autrement, la question qui se pose est l'obstruction à ce que le corps de module soit un corps de définition. voir Dèbes et Emsalem [15] pour le cas des revêtements des courbes algébriques.

Dans le chapitre 5, je donne une liste des différents types de configuration réels des fibres singulières de types elliptiques (1) et (2). La topologie des fibres voisines se déduit des théorèmes 3.7, 4.15. Le cas parabolique est laissé pour un travail ultérieur. la liste des fibres singulières est déjà volumineuse pour le cas elliptique 1 et 2, en plus les techniques utilisés ne sont pas les mêmes que le cas parabolique.

Les résultats des chapitres 3 et 5 sont regroupés dans un même article [1] accepté pour publication.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Notions de variétés

Definition 1.1. Soient U un ouvert de \mathbf{C}^n et $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction définie par :

$$z = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \mapsto f(z) = u + iv$$

et $F: (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (u, v)$.

Alors f est dite holomorphe si F est différentiable et ses dérivées partielles vérifient la condition de Cauchy-Riemann suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j} \\ \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j} \end{cases}$$

Une application $g: U \rightarrow \mathbf{C}^m$ définie par :

$$z = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \mapsto f(z) = (f_1 = u_1 + iv_1, \dots, f_m = u_m + iv_m)$$

est holomorphe si les f_i sont holomorphes.

Definition 1.2. Une variété complexe lisse de dimension n est la donnée d'un espace topologique séparé X , d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et d'une famille d'homéomorphismes $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbf{C}^n$ où V_i un ouvert de \mathbf{C}^n , tels que la composée $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ soit holomorphe pour tout $i, j \in I$.

Soit X et Y deux variétés complexes lisses, de dimensions n et m , définies par (U_i, φ_i) et (V_i, ψ_i) respectivement. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite holomorphe si pour tout i, j l'application $\psi_i \circ f \circ \varphi_j^{-1}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ est holomorphe. Une variété complexe lisse X de dimension n est dite projective s'il existe un plongement holomorphe $X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$.

On appelle surface projective lisse une variété complexe projective lisse de dimension complexe 2.

On appelle surface de Riemann C une variété complexe connexe de dimension $n = 1$. Si de plus C est compacte alors elle admet un plongement dans l'espace projectif [42, A.3.3].

Rappelons que si X est une variété complexe projective lisse alors (d'après le théorème de Chow [20, Ch. I, §3]) X est algébrique (i.e. ensemble des racines, dans \mathbf{P}^N , d'une collection des polynômes homogènes).

Definition 1.3. Une variété projective équivariante est la donnée d'un couple (X, σ) où X est une variété complexe projective lisse de dimension n et σ est une involution antiholomorphe sur X , on l'appelle aussi structure réelle sur X . L'ensemble des points de X fixés par σ s'appelle le lieu réel de X et noté par $X(\mathbf{R})$ ou X^σ . Le couple (X, σ) est appelé aussi variété projective algébrique réelle.

La dimension de la variété (X, σ) est $n = \dim_{\mathbf{C}} X$. Si $X(\mathbf{R})$ est non vide alors $X(\mathbf{R})$ est une variété analytique réelle et on a $\dim_{\mathbf{C}} X = \dim_{\mathbf{R}} X(\mathbf{R})$ voir [51, I(1.14)].

Soit (X, σ) une variété projective équivariante de dimension n , Ω_X^1 le faisceau des 1-formes alternées sur X et \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Pour un ouvert U de X l'involution σ induit un morphisme :

$$\begin{aligned} \sigma^*: \Gamma(U, \mathcal{O}_X) &\longrightarrow \Gamma(\sigma(U), \mathcal{O}_X) \\ f &\longmapsto \overline{f \circ \sigma} \end{aligned}$$

L'involution σ induit aussi un morphisme noté σ^* sur Ω_X^1 . On dit que $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^1)$ est σ -réel si $\sigma^*\omega = \omega$. La structure réelle σ induit aussi une involution sur $H_1(X, \mathbf{Z})$ et on a, par définition de σ^* , pour $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^1)$ et $c \in H_1(X, \mathbf{Z})$:

$$\int_{\sigma(c)} \sigma^*\omega = \overline{\int_c \omega}$$

En particulier si ω est réelle et c aussi alors $\int_c \omega \in \mathbf{R}$.

Lemme 1.4. (Comessatti) Soient A un \mathbf{Z} -module libre de dimension n et σ une involution sur A alors il existe une base $\{a_1, \dots, a_\gamma, b_1, \dots, b_\lambda, c_{\lambda+1}, \dots, c_{n-\gamma}\}$ de A telle que :

$$\begin{cases} \sigma(a_i) = a_i \text{ pour } 1 \leq i \leq \gamma, \\ \sigma(b_i) = a_i - b_i \text{ pour } 1 \leq i \leq \lambda, \\ \sigma(c_i) = -c_i \text{ pour } \lambda + 1 \leq i \leq n - \gamma. \end{cases}$$

Une telle base est appelée base σ -semi réelle.

On note que les deux entiers γ et λ définis dans le lemme précédent sont deux invariants dépendant de l'action de σ sur A . L'invariant λ est appelé caractéristique de Comessatti et γ est le rang de A^σ .

Remarque 1.5. Soit (X, σ) une variété projective équivariante. On pose $A = H_1(X, \mathbf{Z})_f = (H_1(X, \mathbf{Z}) \text{ modulo la torsion})$. Dans ce cas $\text{rg}(A^\sigma) = \dim H^0(X, \Omega_X^1)$ et la caractéristique de Comessatti associé à l'action de S sur le \mathbf{Z} -module A est $\lambda = \text{rg}((1 + \sigma)H_1(X, \mathbf{Z})_f)$ voir [51, Ch. IV, § 1].

En dimension 1 : On désigne par (C, σ) une courbe équivariante de genre g et $n_0 = \#\Pi_0(C(\mathbf{R}))$ le nombre des composantes connexes de $C(\mathbf{R})$. On définit aussi $a(C) = 1$ si $C \setminus C(\mathbf{R})$ est connexe et 0 sinon. D'après le théorème de Harnack $0 \leq n_0 \leq g + 1$ et on a :

- i) Si $n_0 = 0$ alors $a(C) = 1$.
- ii) Si $n_0 = g + 1$ alors $a(C) = 0$.
- iii) Si $a(C) = 0$ alors $n_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$.

Proposition 1.6. ([52, prop. 10] Soit (C, σ) une courbe réelle de genre g . La caractéristique de Comessatti associée à σ est égale :

- i) $g - n_0 + 1$ si $n_0 \neq 0$.
- ii) g (resp. $g - 1$) si $n_0 = 0$ et g pair (resp. impair).

1.2 Diviseurs et fibrés en droites

Soit X une variété projective algébrique lisse. Une hypersurface irréductible $Y \subset X$ est une sous-variété analytique de codimension 1. Donc si $p \in Y$,

alors il existe un ouvert U contenant p et une fonction f holomorphe sur U unique à multiplication par une fonction holomorphe ne s'annulant pas tels que $U \cap Y$ est exactement l'ensemble des points de U où s'annule f (i.e. si g est holomorphe définie en p et s'annule sur Y alors f divise g au voisinage de p).

Si Y est irréductible et donnée localement au point p par une fonction holomorphe f , g est une fonction holomorphe qui est définie sur un voisinage U de p dans X alors il existe $a \in \mathbf{Z}$ et une fonction holomorphe h tels que localement $g = f^a h$ et $h(p) \neq 0$. Notons que a ne dépend pas de p et sera noté $\text{ord}_Y(g)$. Si g et h sont deux fonctions holomorphes sur X alors $\text{ord}_Y(gh) = \text{ord}_Y(g) + \text{ord}_Y(h)$.

1.2.1 Diviseurs

1.2.1.1 Diviseurs de Weil

Definition 1.7. Soit X une variété projective algébrique lisse. On appelle diviseur de Weil \mathcal{D} sur X une somme formelle finie $\sum n_i \mathcal{D}_i$ où $n_i \in \mathbf{Z}$ et \mathcal{D}_i est une hypersurface irréductible de X pour tout i . L'ensemble des diviseurs sur X est un groupe abélien noté par $\text{Div}(X)$. On note par $-\mathcal{D}$ le diviseur $\sum -n_i \mathcal{D}_i$.

Un diviseur $\mathcal{D} = \sum n_i \mathcal{D}_i$ est dit effectif si $n_i \in \mathbf{N}$ pour tout i et on écrit dans ce cas $\mathcal{D} \geq 0$. La réunion $\bigcup \mathcal{D}_i$ est appelée support de \mathcal{D} .

Soit f une fonction méromorphe sur X , il existe un recouvrement $\{U_i\}$ de X tel que $f|_{U_i} = \frac{g_i}{h_i}$ où g_i et h_i sont deux fonctions holomorphes sur U_i et $g_i h_j = g_j h_i$ sur $U_i \cap U_j$, même si on considère l'infini comme une valeur, f possède un lieu d'indétermination, c'est l'ensemble des points où $g_i = h_i = 0$. Soit Y une hypersurface irréductible de X tel que $Y \cap U_i \neq \emptyset$. On définit $\text{ord}_Y(f) = \text{ord}_Y(g_i) - \text{ord}_Y(h_i)$, on dit que f admet un zéro d'ordre a le long de Y si $\text{ord}_Y(f) = a > 0$ et que f admet un pôle d'ordre b le long de Y si $\text{ord}_Y(f) = -b < 0$.

On définit le diviseur d'une fonction méromorphe f sur X , qu'on note par (f) , la différence $(f)_0 - (f)_\infty$ où $(f)_0$ (resp. $(f)_\infty$) est le diviseur des zéros (resp. pôles) de f .

On dit que deux diviseurs \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont linéairement équivalents s'il existe une

fonction méromorphe f sur X telle que $D - \mathcal{D}' = (f)$.

On note par $\text{Cl}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalences des diviseurs de Weil. On se donne un prolongement $X \subset \mathbf{P}^N$ alors si $\mathcal{D} = \sum n_i \mathcal{D}_i$ est un diviseur de Weil sur X alors l'entier $d = \sum n_i \cdot \text{deg}(\mathcal{D}_i)$ est appelé degré de \mathcal{D} . Le degré de \mathcal{D}_i est au sens de degré d'une sous-variété de \mathbf{P}^N (Voir [22, p.48] ou [20, p.171])

Si X une variété projective lisse, la notion de première classe de Chern d'un fibré en droites associé à un diviseur \mathcal{D} sur X , qu'on va définir dans la suite, généralise la notion de degré du diviseur \mathcal{D} .

1.2.1.2 Diviseurs de Cartier

Definition 1.8. Soit X une variété complexe projective lisse. On appelle diviseur de Cartier sur X une famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$, où $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de X et les f_i sont des fonctions méromorphes non identiquement nulles sur U_i telles que les fonctions $f_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ soient holomorphes et ne s'annulent pas sur $U_i \cap U_j$. Un diviseur de Cartier est dit effectif si les f_i sont holomorphes.

Si \mathcal{D} et \mathcal{E} sont deux diviseurs de Cartier sur X , on peut trouver un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X tel que \mathcal{D} et \mathcal{E} sont donnés par (U_i, f_i) et (U_i, g_i) respectivement. On vérifie que les deux familles $(U_i, \frac{1}{g_i})$ et $(U_i, g_i \cdot f_i)$ définissent deux diviseurs sur X qu'on note par $-\mathcal{E}$ et $\mathcal{D} + \mathcal{E}$ respectivement.

Donc l'ensemble des diviseurs de Cartier est muni d'une structure de groupe abélien noté $\text{Ca}(X)$.

Definition 1.9. Un diviseur défini par (X, f) , où f est une fonction méromorphe sur X , est dit principal. L'ensemble des diviseurs principaux sur X est un sous-groupe de $\text{Ca}(X)$. On note alors par $\text{ClCa}(X)$ le groupe quotient de $\text{Ca}(X)$ par le sous-groupe des diviseurs principaux.

Soit \mathfrak{M}^* (resp. \mathcal{O}^*) le faisceau des fonctions méromorphes sur X non identiquement nulles (resp. le faisceau des fonctions holomorphes sur X qui ne s'annulent pas). Une section globale f du faisceau quotient $\mathfrak{M}^*/\mathcal{O}^*$ est donnée par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et des fonctions méromorphes f_i non identiquement nulles sur U_i telles que pour tout i, j la fonction $\frac{f_i}{f_j}$ soit holomorphe (et ne s'annule pas) sur $U_i \cap U_j$. Finalement tout diviseur de Cartier

sur X est donnée par une section globale du faisceau quotient $\mathfrak{M}^*/\mathcal{O}^*$ donc $\text{Div}(X) \simeq H^0(X, \mathfrak{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.

Proposition 1.10. *Si X une variété complexe projective lisse, alors les deux notions des diviseurs coïncident.*

Démonstration. Soit \mathcal{D} un diviseur de Cartier sur X donné par $(U_i, f_i)_{i \in I}$. Si Y est une sous-variété analytique irréductible de X de codimension 1 alors $\text{ord}_Y(f_i) = \text{ord}_Y(f_j)$. On associe à \mathcal{D} un diviseur de Weil

$$\sum_Y \text{ord}_Y(f_i) Y$$

où $U_i \cap Y \neq \emptyset$.

Inversement, on se donne un diviseur de Weil $\sum n_i \mathcal{D}_i$. On considère un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de X tel que pour tout i la composante \mathcal{D}_i est défini sur chaque ouvert $\{U_\alpha\}$ par une fonction holomorphe $g_{i\alpha}$. On pose :

$$f_\alpha = \prod_i g_{i\alpha}^{n_i} \in \mathfrak{M}^*(U_\alpha)$$

Ainsi on associe à \mathcal{D} un diviseur de cartier $(U_\alpha, f_\alpha)_\alpha$.

On déduit un isomorphisme $\text{ClCa}(X) \longrightarrow \text{Cl}(X)$. □

Soit X une variété complexe projective algébrique lisse et σ une structure réelle sur X . La structure réelle σ induit une involution sur $\text{Div}(X)$ et si $\mathcal{D} = \sum n_i \mathcal{D}_i$ un diviseur sur X on définit $\sigma(\mathcal{D}) = \sum n_i \sigma(\mathcal{D}_i)$ ou on note tout simplement par \mathcal{D}^σ . On dit que \mathcal{D} est σ -invariant si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\sigma$.

Proposition 1.11. *[51, Ch. I, §4] Soit X une variété complexe projective algébrique lisse et σ une structure réelle sur X telle que $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Si $\mathcal{D} \in \text{Div}(X)$ tel que $\mathcal{D}^\sigma \sim \mathcal{D}$ alors il existe un diviseur \mathcal{D}' σ -invariant tel que $\mathcal{D}' \sim \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'^\sigma$.*

1.2.2 Fibrés en droites

On désigne par X une variété complexe projective algébrique lisse de dimension n .

Definition 1.12. On appelle fibré en droites sur X la donnée d'une variété complexe L et d'une application holomorphe $p: L \rightarrow X$ telles qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et des isomorphismes $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbf{C}$ tels que pour tout i, j la composée $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbf{C} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbf{C}$ soit donnée par :

$$(x, t) \mapsto (x, g_{ij}(x)t)$$

où g_{ij} est une fonction holomorphe sur $U_i \cap U_j$ qui ne s'annule pas.

On appelle section de ce fibré toute application $s: X \rightarrow L$ telle que :

$$p \circ s = Id_X.$$

Exemple 1.13. La projection $X \times \mathbf{C} \rightarrow X$ est un fibré en droites dont les sections sont l'ensemble des fonctions sur X .

Exemple 1.14. On définit le fibré en droites sur X dont la fibre au dessus d'un point x de X est l'espace vectoriel des n -formes \mathbf{C} -multilinéaire alternées sur l'espace tangent à X en x . On l'appelle le fibré canonique de X et on le note ω_X .

Exemple 1.15. On définit le fibré en droites $L \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ dont la fibre au dessus d'un point x de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ est la droite l_x passant par x i.e. :

$$L = \{(x, v) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{C}^{n+1}; v \in l_x\}$$

Au dessus de l'ouvert standard $U_i = \{x_i \neq 0\}$ de \mathbf{P}^n L est défini dans $U_i \times \mathbf{C}^{n+1}$ par les équations $v_j = v_i x_j$, pour tout $j \neq i$. L'isomorphisme φ_i de la définition est donnée par $\varphi_i(x; v) = (x; v_i)$; et donc $\varphi_j^{-1}(x, t) = (x, t \frac{x}{x_j})$.

On déduit que $g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j}$, pour $x \in U_i \cap U_j$. Une section globale de L a un pôle le long de $\{x_i = 0\}$. On note alors ce fibré par $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)$.

Proposition 1.16. On peut reconstruire un fibré en droites sur X à partir d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et de fonctions de transitions $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*$ vérifiant la condition de cocycle $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = 1$, en identifiant $\{z\} \times \mathbf{C}$ dans $U_i \times \mathbf{C}$ et $U_j \times \mathbf{C}$ via la multiplication $g_{ij}(z)$.

Definition 1.17. Soient L et L_1 deux fibrés en droites sur X définis par (U_i, g_{ij}) et (V_k, h_{kl}) . On dit que L et L_1 sont équivalentes s'il existe deux familles de fonctions holomorphes $\{f_i\}$ et $\{h_k\}$ qui ne s'annulent pas sur U_i et V_k respectivement telles que $g_{ij} \frac{h_k}{h_l} = h_{kl} \frac{g_i}{g_j}$.

L'ensemble des classes d'équivalences des fibrés en droites est muni d'une structure de groupe abélien, noté $\text{Pic}(X)$, définie comme suit :

Soient L et L_1 deux fibrés en droite sur X définis par (U_i, g_{ij}) et (U_i, h_{ij}) . Alors la famille $(U_i, g_{ij} \cdot h_{ij})$ définit un fibré en droites (fibré produit) noté $L \otimes L_1$. Et la famille (U_i, g_{ij}^{-1}) définit un fibré en droite appelé dual de L .

Soit \mathcal{D} un diviseur de Cartier donné par une famille (U_i, f_i) , on lui associe un fibré en droites noté $\mathcal{O}_X(\mathcal{D})$ défini par les fonctions des transitions $g_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ holomorphes et ne s'annulent pas sur $U_i \cap U_j$ et qui vérifient bien la relation $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = 1$ pour tout i, j, k .

Si $\mathcal{D} = (f)$ où f est une fonction méromorphe sur X alors le fibré en droite associé $\mathcal{O}_X(\mathcal{D})$ est trivial et inversement.

Si $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}) = \mathcal{O}_X(\mathcal{D}')$ alors \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont linéairement équivalents.

Inversement, soit $p: L \rightarrow X$ un fibré en droites donné par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et de fonctions de transitions g_{ij} . Une section globale méromorphe s de L sur X est donnée par une collection des fonctions méromorphes s_i sur U_i tel que $s_i = g_{ij} \cdot s_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Puisque $\frac{s_i}{s_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ alors si Y est une hypersurface irréductible de X on a $\text{ord}_Y(s_i) = \text{ord}_Y(s_j)$ et on pose $\text{ord}_Y(s) = \text{ord}_Y(s_i)$. On note par (s) le diviseur $\sum_Y \text{ord}_Y(s) \cdot Y$.

On dit que s est holomorphe si (s) est effectif.

Corollaire 1.18. Un fibré en droites est associé à un diviseur \mathcal{D} si et seulement si il admet une section globale méromorphe s , ce qui est le cas si L est une variété projective.

Soit \mathcal{D} un diviseur sur X , on définit les espaces vectoriels suivants :

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f \text{ méromorphe}; (f) + \mathcal{D} \geq 0\}$$

$$|\mathcal{D}| = \{\mathcal{D}'; \mathcal{D}' \geq 0 \text{ et } \mathcal{D}' \sim \mathcal{D}\}$$

On note aussi $|L|$ si $L = \mathcal{O}_X(\mathcal{D})$. On suppose que $\mathcal{D} = (s)$ où s est une section globale méromorphe de L . Pour une section globale holomorphe s_1 le quotient $f_s = \frac{s_1}{s}$ est une fonction méromorphe sur X et donc $(f_s) \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ et $(s_1) \in |\mathcal{D}|$. Inversement si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ alors $s.f$ est une section holomorphe. On en déduit une identification entre $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ et $H^0(X, \mathcal{O}(L))$.

Comme X est compact alors si $\mathcal{D}' \in |\mathcal{D}|$ et $f, f' \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ telles que $\mathcal{D}' = (f) + \mathcal{D} = \mathcal{D} + (f')$ alors $\frac{f}{f'}$ est constante. On a donc :

$$|\mathcal{D}| \cong \mathbf{P}(\mathcal{L}(\mathcal{D})) \cong \mathbf{P}(H^0(X, \mathcal{O}(L))).$$

L'espace $|\mathcal{D}|$ est appelé système linéaire complet associé à D , il est de dimension $\dim(H^0(X, \mathcal{O}(L))) - 1$. Soit $\{s_0, \dots, s_N\}$ une base de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ et $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{L}(\mathcal{D}))$ qui envoie x en $(s_0(x), \dots, s_N(x))$. On dit que \mathcal{D} est très ample si φ est un plongement holomorphe. S'il existe un entier k tel que $k\mathcal{D}$ est très ample on dit que \mathcal{D} est ample.

Si $\dim(X) = 2$, Ω_X l'ensemble des 1-formes alternées sur X et $\bigwedge^2 \Omega_X$ le faisceau des 2-formes alternées sur X (c'est le faisceau des sections de fibré en droites ω_X). Un diviseur dans la classe d'équivalence linéaire des diviseurs correspondant à ω_X est appelé diviseur canonique sur X . Un tel diviseur est noté par K_X .

Théorème 1.19. (Riemann-Roch) Soit C une surface de Riemann de genre g , \mathcal{D} un diviseur sur C et $h^i(\mathcal{D}) = \dim H^i(C, \mathcal{O}_C(\mathcal{D}))$ alors :

$$h^0(\mathcal{D}) - h^1(\mathcal{D}) = 1 - g + \deg(\mathcal{D})$$

Proposition 1.20. [12, Ch. V] Soit X une variété projective complexe. Alors $\text{Pic}(X)$ est isomorphe au premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Si \mathcal{D} est un diviseur de Cartier défini par (U_i, f_i) alors on note par \mathcal{D}^σ le diviseur défini par (U_i, f_i^σ) où $f_i^\sigma = \overline{f_i} \cdot \sigma$. Si $\mathcal{O}_X(\mathcal{D})$ le fibré en droites associé à \mathcal{D} alors on définit le fibré $(\mathcal{O}_X(\mathcal{D}))^\sigma = \mathcal{O}_X(\mathcal{D}^\sigma)$. L'action de σ sur $\text{Div}(X)$ induit une involution σ^* sur $\text{Pic}(X)$. On note le lieu réel de $\text{Pic}(X)$ par $\text{Pic}(X)(\mathbf{R})$ ou $\text{Pic}(X)^S$. On désigne par $\text{Pic}(X)(\mathbf{R})^+$ le sous groupe de $\text{Pic}(X)(\mathbf{R})$ constitué par les classes des diviseurs σ -invariants (si $L \in \text{Pic}(X)(\mathbf{R})^+$ alors il existe un diviseur σ -invariant \mathcal{D} tel que $L = \mathcal{O}_X(\mathcal{D})$). Un élément de $\text{Pic}(X)(\mathbf{R})^+$ correspond à un fibré en droites algébrique défini sur \mathbf{R} .

Proposition 1.21. [21, prop. 2.2] Si (C, σ) une surface de Riemann réelle alors $\text{Pic}(C)(\mathbf{R})^+ = \text{Pic}(C)(\mathbf{R})$ si $C(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ et $\text{Pic}(C)(\mathbf{R})^+$ est d'indice 2 dans $\text{Pic}(C)(\mathbf{R})$ sinon.

1.2.3 Produit d'intersection

Dans ce paragraphe on désigne par X une surface projective algébrique lisse.

On considère la suite exponentielle exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

Qui nous donne un homomorphisme de groupe

$$c_1: \text{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{Z}).$$

Soient L un fibré en droite sur X , l'image de L par le morphisme de groupe $c_1: \text{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$ est la première classe de Chern $c_1(L)$. Il existe une application bilinéaire symétrique $H^2(X, \mathbf{Z}) \times H^2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$; voir [42, Ch. III] pour plus de détails. On se donne deux diviseurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sur X , on définit le produit d'intersection $(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2)$ comme étant l'image de $(c_1(\mathcal{O}_X(\mathcal{D}_1)), c_1(\mathcal{O}_X(\mathcal{D}_2)))$ via cette application. En particulier on note par \mathcal{D}_1^2 le produit $(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_1)$ et on l'appelle auto-intersection de \mathcal{D}_1 .

Rappelons une description en géométrie algébrique du produit d'intersection : Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux diviseurs sur X . On dit que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont en position générale si leurs supports n'ont pas de composantes irréductibles communes. On se donne un point $p \in X$ et soit \mathcal{O}_p l'anneau local en p (Un élément de \mathcal{O}_p est la donnée d'un ouvert U de p et une fonction holomorphe sur U , l'ensemble des fonctions qui s'annulent en p forme le seul idéal maximal de \mathcal{O}_p). Soient f_1 et f_2 les équations locales des deux diviseurs effectifs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 dans un voisinage de p . On note par $(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2)_p$ la dimension du \mathbf{C} -espace vectoriel $\mathcal{O}_p/(f_1, f_2)$ et on l'appelle le nombre d'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en p .

Le nombre d'intersection $(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2)$ des deux diviseurs effectifs en position générale est défini par :

$$(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2) = \sum_{p \in \text{supp}(\mathcal{D}_1) \cap \text{supp}(\mathcal{D}_2)} (\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2)_p$$

Cette définition se prolonge pour \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 non nécessairement effectifs. Il existe $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}''_1, \mathcal{D}'_2$ et \mathcal{D}''_2 effectifs tels que :

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'_1 - \mathcal{D}''_1, \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'_2 - \mathcal{D}''_2.$$

On définit alors $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ par :

$$(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2) = (\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{D}'_2) - (\mathcal{D}''_1 \cdot \mathcal{D}'_2) - (\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{D}''_2) + (\mathcal{D}''_1 \cdot \mathcal{D}''_2).$$

On suppose que tous les diviseurs sont en position générale. Le nombre d'intersection ainsi défini est positif et vérifie :

Symétrie :

$$(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2) = (\mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}_1).$$

Bilinéarité :

$$(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{D}_2) = (\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2) + (\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{D}_2).$$

Invariance par équivalence linéaire : Si \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}''_1 sont linéairement équivalents alors

$$(\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{D}_2) = (\mathcal{D}''_1 \cdot \mathcal{D}_2).$$

Grâce à la dernière propriété du nombre d'intersection ainsi définie on peut prolonger cette définition même si deux diviseurs ne sont pas en position générale. On se donne deux diviseurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , si \mathcal{D}'_1 un diviseur linéairement équivalent à \mathcal{D}_1 tel que \mathcal{D}'_1 est en position générale avec \mathcal{D}_2 alors $(\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2) = (\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{D}_2) \geq 0$.

Exemple 1.22. Soit $X = \mathbf{P}^2$. Nous avons $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Soit l un générateur de $\text{Pic}(X)$. Comme deux droites distinctes se coupent en un seul point alors $l^2 = 1$. Soient \mathcal{D} et \mathcal{C} deux diviseurs sur X alors $\mathcal{D} \sim \deg(\mathcal{D})l$ et $\mathcal{C} \sim \deg(\mathcal{C})l$ et $\mathcal{D} \cdot \mathcal{C} = \deg(\mathcal{D}) \deg(\mathcal{C})$.

Exemple 1.23. Soit X un quadrique lisse dans \mathbf{P}^3 . Nous avons $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Soient l et m deux générateurs de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement alors $l^2 = 0$, $m^2 = 0$ et $l \cdot m = 1$. Si \mathcal{C} de type (a, b) et \mathcal{D} de type (c, d) alors $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = ad + bc$.

Le diviseur canonique K_X est de type $(-2, -2)$ d'où $K_X^2 = 8$.

Soit X une surface projective lisse et \mathcal{D} un diviseur sur X alors le nombre \mathcal{D}^2 peut être négatif pour un diviseur effectif \mathcal{D} comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.24. On note dans cet exemple par $(\cdot)_S$ le produit d'intersection des deux diviseurs dans une surface S de \mathbf{P}^3 .

Soient $X \subset \mathbf{P}^3$ une surface lisse de degré n et $L \subset X$ une droite. On se propose de calculer le d'auto-intersection L^2 dans X . On se donne un plan \mathbf{P}_L^2 contenant L et soit $H = X \cap \mathbf{P}_L^2$. On a alors H est de degré n dans \mathbf{P}_L^2 , il s'écrit donc $H = L + C$ où C est un diviseur de degré $n - 1$.

On a dans \mathbf{P}_L^2 :

$$(H \cdot L)_{\mathbf{P}_L^2} = L^2 + (C \cdot L)_{\mathbf{P}_L^2}$$

D'après le théorème de Bezout $(C \cdot L)_{\mathbf{P}_L^2} = n - 1$, et $L^2 = 1$ d'après l'exemple 1.22. D'où $(L \cdot H)_{\mathbf{P}_L^2} = n$.

On calcule maintenant L^2 dans X . Il existe une section hyperplane H' équivalente à H , d'où

$$(H \cdot L)_X = (H' \cdot L)_X = L^2 + (C \cdot L)_X = 1$$

Comme C est une courbe plane alors $(C \cdot L)_X = (C \cdot L)_{\mathbf{P}_L^2} = n - 1$, on alors $(L \cdot L)_X = L^2 = 2 - n < 0$ pour $n > 2$.

Particulièrement, d'après ce qui précède une courbe C d'auto-intersection négatif n'a pas d'autre courbe qui lui est linéairement équivalente. Elle est appelée courbe exceptionnelle.

Proposition 1.25. (Formule d'adjonction) Soient X une surface projective lisse et $C \subset X$ une courbe projective irréductible lisse de genre g alors :

$$g(C) = 1 + \frac{K_X \cdot C + C^2}{2}$$

Revenons à l'exemple 1.22, Si C est une courbe irréductible de degré n alors $C = nl$ et $K_X = -3l$. Alors on a d'après la formule d'adjonction $g_C = \frac{K_X \cdot C + C^2}{2} + 1 = \frac{-3n + n^2}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. En particulier une courbe projective lisse de genre 2 ne peut pas être plane. On a dans le cas général :

Proposition 1.26. [6, Ch. 2, § 11] Si $\mathcal{D} = \sum \mathcal{D}_i$ un diviseur sur une surface projective lisse X alors le genre arithmétique de \mathcal{D} est

$$p_a(\mathcal{D}) = 1 + \frac{K_X \cdot \mathcal{D} + \mathcal{D}^2}{2}$$

1.3 Variétés abéliennes réelles

Considérons l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_g = \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) / {}^t\tau = \tau \text{ et } \text{Im } \tau > 0\}$ et le groupe symplectique $Sp(g, \mathbb{Z})$ défini par :

$$\left\{ N \in GL_{2g} \text{ tel que } {}^tN \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Le groupe $Sp(g, \mathbb{Z})$ opère discontinument sur \mathfrak{S}_g , et cette action est donnée par :

$$N(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \text{ pour } (Z, N) \in \mathfrak{S}_g \times Sp(g, \mathbb{Z}). (*)$$

$$\text{où } N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Definition 1.27. Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe de dimension g . On appelle polarisation sur X la première classe de Chern d'un diviseur ample \mathcal{D} de X . Une variété abélienne de dimension g est un tore complexe de dimension g sur lequel il existe une polarisation.

Remarque 1.28. Soient X une variété complexe projective et $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ la première classe de Chern. L'image de c_1 est un sous groupe de $H^2(X, \mathbb{Z})$ appelé groupe de Néron-Severi et noté par $NS(X)$. D'après le théorème de Lefschetz [20, Ch. 1, §3] $NS(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$.

Si X est une variété abélienne alors $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^2 H_1(X, \mathbb{Z})$ [35]. Donc à la première classe de Chern d'un diviseur ample D de X correspond une 2-forme alternée P sur $H_1(X, \mathbb{Z})$ vérifiant :

i) $P(ix, iy) = P(x, y)$ sur \mathbb{C}^g .

ii) La forme hermitienne (\mathbb{C} -linéaire par rapport à la deuxième variable) :

$$H(x, y) = P(x, iy) + iP(x, y)$$

est définie positive sur \mathbb{C}^g , voir [12, Ch.3].

En combinant la définition 1.27 et la remarque 1.28, on peut redéfinir une polarisation sur un tore complexe X comme étant une 2-forme alternée P sur $H_1(X, \mathbb{Z})$ vérifiant les conditions i) et ii) de la remarque précédente.

Soit (X, P) une variété abélienne, d'après [12, Ch. VI, Prop. 1.1] il existe une base de $H_1(X, \mathbb{Z})$ dans laquelle la matrice de P est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix}$$

et telle que d_i/d_{i+1} pour $i \in \{1, \dots, g-1\}$.

Si $\Delta = I_g$, alors la polarisation est dite principale et on dit que (X, P) est une variété abélienne principalement polarisée et dans ce cas une telle base est appelée base symplectique.

Definition 1.29. Soient X une variété abélienne complexe de dimension g , $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g\}$ une base de $H^0(X, \Omega_X^1)$ et $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}\}$ une base de $H_1(X, \mathbb{Z})$. On note par $\Omega = (\Omega_{ij})_{ij} = \left(\int_{\gamma_i} \omega_j \right)_{ij}$. La matrice Ω est appelée matrice des périodes de X .

Lemme 1.30. Une variété abélienne complexe de dimension g est principalement polarisée si et seulement s'il existe une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2g}\}$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$ telle que $\Omega = (I_g, \tau)$ où I_g est la matrice identité et $\tau \in \mathfrak{S}_g$.

Démonstration. C'est une conséquence de [12, Ch. VI, Th. 1.3] □

Definition 1.31. Une variété abélienne réelle est la donnée d'un couple (X, σ) où X est une variété abélienne et σ une involution antiholomorphe sur X qui fixe l'origine de X en tant que groupe.

Remarque 1.32. Par rapport à la définition 1.3. on suppose de plus que que $X(\mathbf{R})$ est non vide afin que la loi de groupe soit définie sur \mathbf{R} .

On sait d'après le théorème de Chow qu'un tore complexe plongé dans un espace projectif est associé à une variété complexe projective algébrique lisse. Une variété abélienne X est donc équivariante si elle est équivariante en tant que variété complexe.

Soient (X, σ) une variété abélienne réelle et P une polarisation sur X . On dit que P est réelle ou σ -réelle si elle vérifie la condition :

$$P(\sigma_*(a), \sigma_*(b)) = -P(a, b) \quad (*)$$

Théorème 1.33. [51, Th. 4.1] Si (X, P) est une variété abélienne principalement polarisée de dimension g alors il existe une structure réelle σ sur X telle que (X, σ) soit une variété abélienne réelle et P soit σ -réelle si et seulement si sa matrice des périodes est de la forme :

$$\Omega = (I_g, \frac{1}{2}M + iT)$$

où la matrice T est symétrique définie positive et la matrice M est de la forme :

$$(i) \begin{pmatrix} I_\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (ii) \begin{pmatrix} J_\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } J_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \cdot 1 \\ & \cdot \\ 1 \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

On dit dans ce cas que $\tau = \frac{1}{2}M + iT$ représente (X, P, σ) .

Soit $\Omega = (I_g, \tau)$ une matrice vérifiant les conditions du théorème précédent, il lui est associé une variété abélienne complexe principalement polarisée X de dimension g . Plus précisément $X = \mathbb{C}^g / [\Omega]$ où $[\Omega]$ est le réseau maximal de \mathbb{C}^g engendré par les vecteurs colonnes de Ω .

Soient X et X' deux variétés principalement polarisées de matrices de périodes $\Omega = (I_g, \tau)$ et $\Omega' = (I_g, \tau')$ respectivement, où $\tau = \frac{1}{2}M + iT$ et $\tau' = \frac{1}{2}M' + iT'$. Alors X et X' sont isomorphes sur \mathbf{C} si et seulement s'il

existe $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbf{Z})$ tel que $\tau = (a\tau' + b)(c\tau' + d)^{-1}$.

L'isomorphisme $\tilde{\varphi}$ entre $X = \mathbb{C}^g / [\Omega]$ et $X' = \mathbb{C}^g / [\Omega']$ est induit par l'isomorphisme φ de \mathbb{C}^g défini par $z \mapsto {}^t(c\tau' + d)z$.

Soient $\tau = \frac{1}{2}M + iT$ et $\tau' = \frac{1}{2}M' + iT'$ deux matrices représentant deux triplets (X, P, σ) et (X', P', σ') . L'isomorphisme $\tilde{\varphi}$ est réel si et seulement si φ commute avec la conjugaison complexe. Il s'ensuit que $\tilde{\varphi}$ est réelle si et seule-

ment si $c\tau + d \in GL_g(\mathbf{R})$, ainsi $c = 0$. Donc N est de la forme $N = \begin{pmatrix} {}^t a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

où $a \in GL_g(\mathbf{Z})$, $b \in M_g(\mathbf{Z})$ et ${}^t a^{-1} b$ est symétrique. On en déduit que deux matrices $\tau = \frac{1}{2}M + iT$ et $\tau' = \frac{1}{2}M' + iT'$ représentent deux triplets (X, P, σ) et (X', P', σ') isomorphes si et seulement s'il existe $a \in GL_g(\mathbf{Z})$ telle que ${}^t a M a \equiv M' \pmod{2}$ et $T' = {}^t a T a$.

Corollaire 1.34. *Si $\tau = \frac{1}{2}M + iT$ et $\tau' = \frac{1}{2}M' + iT'$ représentent deux triplets (X, P, σ) et (X', P', σ') isomorphes sur \mathbf{R} alors M et M' ont le même rang. Si le rang de M est pair alors $M = M'$.*

Remarque 1.35. *Si (X, σ) est une variété abélienne réelle de dimension g et $(I, \tau = \frac{1}{2}M + iT)$ une matrice des périodes de X vérifiant les conditions du théorème précédent alors l'invariant $\lambda = \text{rg}(M)$ est la caractéristique de Comessatti.*

Soient (X, σ) est une variété abélienne réelle de dimension g et M une matrice définie telle que dans la remarque 1.14. Alors si $\text{rg}(M)$ est impair et M est de la forme (i) (resp. de la forme (ii)) alors il existe $A \in GL_g(\mathbf{Z})$ telle que ${}^t A M A$ est de la forme (ii) (resp. de la forme (i)).

Nous pouvons toujours choisir dans le cas impair une variété isomorphe sur \mathbf{R} à X tel que M est de la forme (i). On admet donc ce choix dans la suite.

Théorème 1.36. *([51, Ch. IV, § 4]) Soit (X, σ) une variété abélienne réelle de dimension g et λ la caractéristique associée associée à σ . Le lieu réel $X(\mathbf{R})$ de X est isomorphe à $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^g \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{g-\lambda}$. Le nombre des composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ est $2^{g-\lambda}$.*

Soit $\pi(M) = \prod_i (1 - m_{ii})$. Si M est de type (i) (resp. de type (ii) et $\text{rg}(M)$ est pair) alors $\pi(M) = 0$ (resp. $\pi(M) = 1$). L'entier π est un invariant de la polarisation. En particulier si (X, E) est la jacobienne polarisée $(J(C), \Theta_C)$ d'une courbe projective lisse réelle de genre 2 et de nombre de composantes connexes $n(C) = \#\Pi_0(C(\mathbf{R}))$ alors d'après [21, prop. 1.4] l'invariant π s'interprète géométriquement comme suit :

Si $\pi = 1$ alors $C(\mathbf{R})$ sépare C en deux composantes connexes (i.e. $a(C)=0$) ou $n(C) = 0$) et si $\pi = 0$ alors $a(C)=1$.

Autre caractérisation de la caractéristique de Comessatti :

Soit (X, σ) une variété projective algébrique lisse réelle de dimension n . On pose :

$$b^*(X) = \sum_{k=0}^{2n} \dim H^k(X, \mathbf{Z}/2)$$

$$b^*(X(\mathbf{R})) = \sum_{k=0}^n \dim H^k(X(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2)$$

On rappelle que :

$$b^*(X) - b^*(X(\mathbf{R})) \equiv 0 \pmod{2}$$

On pose :

$$2\lambda = b^*(X) - b^*(X(\mathbf{R}))$$

Si $\lambda = 0$ on dit que (X, σ) est *Maximale*.

Si $\dim X = 1$: X est une courbe projective lisse réelle de genre g alors :

$$X(\mathbf{R}) = \bigcup_{i=1}^r X_i$$

où les X_i sont homéomorphes au cercle S^1 .

On a (dualité de Poincaré) $\dim H^0(X(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2) = \dim H^1(X(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2)$. Et $\dim H^0(X(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2)$ désigne le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.

Donc $b^*(X(\mathbf{R})) = 2r$.

Comme X est connexe alors $\dim H^0(X, \mathbf{Z}) = \dim H^2(X, \mathbf{Z}) = 1$ et $\dim H^1(X, \mathbf{Z}) = 2g$. D'où $b^*(X) = 2g + 2$ et $\lambda = g + 1 - r$. On retrouve donc la proposition 1.6.

1.4 Courbes hyperelliptiques réelles

Definition 1.37. Une courbe hyperelliptique complexe C est un revêtement double $\pi: C \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ ramifié le long de $2g + 2$ points. Une courbe hyperelliptique complexe, munie d'une involution ant-iholomorphe σ , est dite hyperelliptique réelle si π est réelle. Dans ce cas si $\{p_1, \dots, p_{2g+2}\}$ est le lieu de ramification alors C est donnée par l'équation :

$$y^2 = \prod_{i=1}^{\varepsilon(g)} (x - p_i)$$

où un point p_i est soit réel, soit complexe conjuguée à un point p_j et $\varepsilon(g)$ est égale à $2g + 2$ ou $2g + 1$.

En d'autre terme une courbe C est hyperelliptique s'il existe un diviseur effectif \mathcal{D} de C de degré 2 et $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) \geq 2$.

Proposition 1.38. [18, Ch. VII, §7] *Toute courbe complexe projective lisse de genre $g < 3$ est hyperelliptique.*

Soit C une courbe hyperelliptique complexe de genre g et S une involution antiholomorphe sur C alors on a :

Proposition 1.39. *Si $C(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ ou g est pair alors C est un revêtement double $\pi: C \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ ramifié le long de $2g + 2$ points et défini sur \mathbf{R} .*

Démonstration. [21, prop : 6.1] □

En particulier toute courbe réelle de genre 2 est donnée par une équation $y^2 = \prod_{i=1}^{\varepsilon(2)} (x - a_i)$ à coefficients réels.

1.5 Singularités simples des surfaces (A_n, D_n, E_n)

Dans ce paragraphe, une courbe sur une surface est un diviseur effectif réduite.

Definition 1.40. *Soient X une surface projective algébrique, p un point lisse de X et (x, y) les coordonnées locales en p . On considère la surface $Y \subset \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \times X$ définie par :*

$$\left\{ ((u, v), (x, y)); xu - yv = 0 \right\}$$

La projection $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1 \times X \rightarrow X$ induit une application $\sigma: Y \rightarrow X$ appelée éclatement (ou σ -process) de X en p . Soit $L = \sigma^{-1}(p) = p \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, si $x = y = 0$ alors tout couple (u, v) de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ vérifie l'équation $xu - yv = 0$ donc $L \subset Y$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors le couple (u, v) est uniquement déterminé par l'équation $xu - yv = 0$, donc l'application σ définit un isomorphisme entre $X \setminus p$ et $Y \setminus L$. On dit que σ contracte L en p . L est une courbe rationnelle lisse (L isomorphe à $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$) d'auto-intersection $L^2 = -1$, qu'on appelle courbe exceptionnelle [22, Ch. V, Th. 3.1].

Proposition 1.41. [51, Ch. II, prop. 6.1] Soit (X, σ) une surface projective algébrique réelle. Si x (resp. x_1, x_2) $\in X$ tel que $\sigma(x) = x$ (resp. $\sigma(x_1) = x_2$) et Y est l'éclaté de X en x (ou en x_1 et x_2) alors σ induit une structure réelle sur Y . Et l'éclatement $\sigma: Y \rightarrow X$ est réel.

Théorème 1.42. [51, Ch. II, prop. 6.2] Soient (X, σ) une surface projective algébrique réelle lisse et $C \subset X$ une courbe rationnelle lisse telle que $C = \sigma(C)$ et $C^2 = -1$ (ou $C = F + \sigma(F)$ et $F^2 = -1$) alors il existe une surface projective algébrique réelle lisse Y et une application birationnelle réelle $g: X \rightarrow Y$ telles que $g(C)$ soit un point de Y .

Définition 1.43. Soient X une surface projective algébrique lisse et $\mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i$ un diviseur réduit, connexe et compact de X . On dit que \mathcal{C} est exceptionnel s'il existe un biméromorphisme $\pi: X \rightarrow Y$, un ouvert U contenant \mathcal{C} , un point y de Y et un ouvert V de y tels que $y = \pi(\mathcal{C})$ et $U \setminus \mathcal{C} \cong V \setminus y$.

Théorème 1.44. (Grauert) Un diviseur réduit, connexe et compact $\mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i$ sur une surface projective algébrique lisse X est exceptionnel si et seulement si la matrice $(\mathcal{C}_i \cdot \mathcal{C}_j)_{ij}$ est définie négative.

Exemple 1.45. a) Soit C une courbe (irréductible) rationnelle lisse d'auto-intersection $-d$. La courbe C est exceptionnelle par définition et est appelée $(-d)$ -courbe.

b) Un exemple très important de diviseur exceptionnel est donné par une réunion C des courbes rationnelle lisse C_i vérifiant :

$$C_i^2 \leq -2 \text{ pour tout } i$$

$$C_i \cdot C_j = 1 \text{ pour } |i - j| = 1$$

$$C_i \cdot C_j = 0 \text{ pour } |i - j| > 1.$$

et est appelé chaîne de Hirzebruch-Jung.

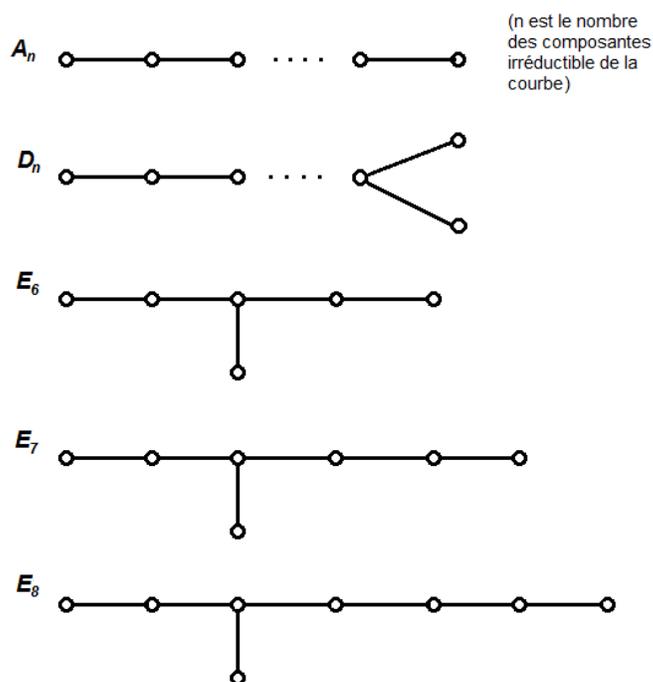
c) On note par A-D-E l'ensemble des diviseurs exceptionnels $\mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i$ où les composantes irréductibles \mathcal{C}_i sont des (-2) -courbe.

Définition 1.46. Soit X une surface algébrique réelle. Un point x de X est dite singularité Du Val (ou singularité double rationnelle) s'il existe une surface algébrique projective réelle lisse Y et un morphisme $\varphi: Y \rightarrow X$ qui contracte

un diviseur $\mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i$ et un seul telle que $K_X \cdot \mathcal{C}_i = 0$ pour tout i . Le morphisme φ est appelé la résolution minimale du point singulier x . Ce qui est équivalent à dire que X est une surface Du Val si $\varphi^* K_X = K_Y$ (voir [30]).

La matrice $(\mathcal{C}_i \cdot \mathcal{C}_j)_{ij}$ est définie négative. En particulier $\mathcal{C}_i^2 \leq 0$, et comme $K_X \cdot \mathcal{C}_i = 0$ il s'ensuit que les \mathcal{C}_i sont des courbes rationnelles lisses et $\mathcal{C}_i^2 = -2$. Comme $2(\mathcal{C}_i \cdot \mathcal{C}_j - 2) = (\mathcal{C}_i + \mathcal{C}_j)^2 \leq 0$ alors $\mathcal{C}_i \cdot \mathcal{C}_j \leq 1$. Donc deux composantes irréductible de \mathcal{C} sont ou bien disjointes ou bien s'intersectent transversalement en un seul point.

Ces types des courbes notées par *A-D-E*-courbes sont classifiés dans Bourbaki en 5 classes complexes, à isomorphisme près, données par leurs diagrammes de Dynkin comme suit :



Les symboles (\circ) désignent des (-2) -courbes. Deux (-2) -courbes s'intersectent transversalement en un point si elles sont liés par un segment.

Dans le cas réel ([30] et [10]), on a plus de types de singularités Du Val donnés

localement par les équations :

$$A_n^+ : x^2 + y^2 - z^{n+1} = 0, \quad n \geq 2$$

$$A_n^- : x^2 - y^2 - z^{n+1} = 0, \quad n \geq 0$$

$$A_n^{++} : x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0, \quad n \text{ impair}$$

$$D_n^+ : x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0, \quad n \geq 4$$

$$D_n^- : x^2 + y^2 z - z^{n-1} = 0, \quad n \geq 4$$

$$E_6^+ : x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

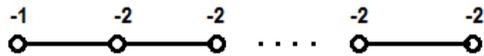
$$E_6^- : x^2 + y^3 - z^5 = 0$$

$$E_7 : x^2 + y^3 + yz^3 = 0$$

$$E_8 : x^2 + y^3 + z^7 = 0.$$

Definition 1.47. Soit (X, S) une surface algébrique réelle et p un point réel lisse de X paramétré localement par (x, y) . La surface $X' \subset X \times P_{\mathbb{C}}^1$ définie par $ux - vy^m = 0$ est appelée $(1, m)$ - σ -process de X en p . Un $(1, m)$ - σ -process a un point singulier unique de type A_{m-1}^- en $(0, 0, 0, 1)$ [30, §2]. Si $m = 1$ on retrouve la définition de l'éclatement ordinaire. Si $m \geq 2$ un $(1, m)$ - σ -process dépend du choix de paramètres locales .

Exemple 1.48. [10, exp. 1.3] Soit (X, S) une surface algébrique réelle et p un point réel lisse de X et $m > 0$. Soit $\sigma_0 : X_0 \rightarrow X$ l'éclatement de X en p et $E_0 = \sigma_0^{-1}(p)$ le diviseur exceptionnel associé. Soit $\sigma_1 : X_1 \rightarrow X_0$ l'éclatement de X_0 en un point général de E_0 . On répète cette procédure et on note par $\sigma_{l+1} : X_{l+1} \rightarrow X_l$ l'éclatement de X_l en un point général de la courbe exceptionnelle E_l pour $l = 0, 1, \dots, m-1$. Alors le diviseur exceptionnel de la composition $X_m \rightarrow X_{m-1} \dots X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X$ est une chaîne des courbes rationnelles, donnée par le diagramme de Dynkin suivant :



Contractons les (-2) -courbes, nous obtenons une surface Y avec singularité de type A_m^- .

Chapitre 2

Résultats antérieurs

Soit $\pi: X \longrightarrow B$ une fibration en courbes de genre g (surface fibrée en courbes de genre g). Un point au dessus duquel la fibre est une courbe projective lisse de genre g est dit point général sinon (i.e. les fibres sont des courbes singulières) il est dit point spécial.

Si $g = 1$ alors le morphisme π est appelé fibration elliptique et X est dite surface elliptique.

On appelle section d'une surface fibrée $\pi: X \longrightarrow B$ une application holomorphe $s: B \longrightarrow X$ telle que $\pi \circ s = id_B$.

On s'intéresse dans ce chapitre à la classification des fibres singulières de certains surfaces fibrées. On rappelle que la classification complexe des fibres singulières d'une surface fibrée en genre 1 est due à K. Kodaira (voir[28] et [39]). On s'intéresse dans le premier paragraphe à présenter la classification réelle des fibres singulières d'une surface elliptique qui est réalisée par Silhol [51, Ch. VII]. Dans le deuxième paragraphe, on rappelle la classification des fibres singulières d'une fibration en genre 2 due à Ogg [40], basée sur des arguments combinatoires. En fait la classification de Ogg, manquant quelques types, est complétés par Namikawa et Ueno dans [38], où ils ont classifiés tout les types possibles des fibres des pinceaux en courbes de genre 2. Dans la troisième paragraphe, On va présenter les invariant qui déterminent le type complexe des fibres singulières des pinceaux en courbes de genre 2 due à Namikawa et Ueno ([37] et [38]). Et on va donner les différents types de configurations réels possibles pour ces fibres singulières dans le chapitre 5.

2.1 Surfaces elliptiques réelles

On désigne dans la suite par (X, σ_X) (resp. (B, σ_B)) une surface projective équivariante lisse (resp. une surface de Riemann équivariante) et $\pi: X \longrightarrow B$ une fibration elliptique réelle relativement minimale (i.e aucune (-1) -courbe n'est contenue dans une fibre de π).

Soit b un point général. On note par X_b la fibre générale au dessus de b . C'est une courbe lisse de genre 1.

On fait correspondre à la fibration $\pi: X \longrightarrow B$ une fibration elliptique avec section réelle $\tilde{\pi}: \tilde{X} \longrightarrow B$ qu'on appelle fibration jacobienne associée à π voir [50]. La fibre générale au dessus d'un point réel b est une courbe elliptique définie sur \mathbf{R} . les fibres singulières de $\tilde{\pi}$ sont de même types que la fibration initiale. Si la fibration $\pi: X \longrightarrow B$ admet une section alors elle est isomorphe à la fibration jacobienne associée.

Si X_b n'est pas une fibre multiple alors X_b est isomorphe à \tilde{X}_b .

On s'intéresse à la classification des fibres singulières au dessus des points réels $b \in B(\mathbf{R})$ et d'étudier les fibres voisines de chaque type de fibre singulière [50].

2.1.1 Classification des fibres singulières (cas avec section)

Soit $\pi: X \longrightarrow B$ une surface elliptique réelle qui admet une section réelle $s: B \longrightarrow X$, (i.e. $s \circ \sigma_B = \sigma_X \circ s$).

Alors toute fibre générale réelle F admet un point rationnel et donc possède un modèle de Weierstrass $y^2 = x^3 + axz^2 + bz^3$ [39, p. 92].

Si on contracte toutes les composantes irréductibles ne rencontrant pas la section, on obtient une surface elliptique (pourrait être singulière) dont les fibres sont irréductibles. Ce sont mêmes des cubiques planes. Donc localement, il y a une description algébrique de $\pi: X \longrightarrow B$, dite modèle de Weierstrass local. Ce modèle est une surface dans le fibré trivial $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2 \times B$. Soit b_0 un point special et b un paramètre local de B en b_0 . Soit D un disque paramétré par b ne contenant qu'un seul point special b_0 . Alors l'équation de $\pi^{-1}(D \setminus \{b_0\})$ s'écrit :

$$y^2 = x^3 + p(b)xz^2 + q(b)z^3$$

où p et q dans $\mathbf{R}(b)$.

Lemme 2.1. [51, Ch. VII] Soit E une courbe elliptique réelle et $y^2 = x^3 + pxz^2 + qz^3$ (p, q deux réels) l'équation de Weierstrass associée. Alors le discriminant $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ est un invariant réel non nul de E . Si $\Delta < 0$, $E(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes. Si $\Delta > 0$, $E(\mathbf{R})$ possède une seule composante connexe.

Si le discriminant Δ d'une courbe C donné par $y^2 = x^3 + pxz^2 + qz^3$ est non nul, on définit également l'invariant modulaire j de C par $j(C) = \frac{p^3}{\Delta}$ paramétrant l'espace des modules des courbes elliptique.

Pour un point b_0 de $B(\mathbf{R})$ on note par v la valuation du corps $\mathbf{R}(B)$ en b_0 .

Corollaire 2.2. Le nombre de composantes connexes des fibres réelles varie au voisinage de b_0 si et seulement si le discriminant Δ change de signe en b_0 . Autrement dit $v(\Delta) \equiv 1 \pmod{2}$.

Théorème 2.3. [51] Soit $\pi: X \rightarrow B$ une fibration elliptique réelle avec section réelle $s: B \rightarrow X$ tel que $B(\mathbf{R})$ soit non vide. Soit b_0 un point spécial dans $B(\mathbf{R})$. On note par X_b la fibre au dessus d'un point réel $b \in U = D \cap B(\mathbf{R})$. Alors le comportement réel des fibres voisines de la fibre singulière, leur caractéristique d'Euler topologique et sa structure géométrique sont donnés par le tableau suivant :

Notation de Kodaira	$\#\Pi_0(X_b(\mathbf{R}))$		types réels réalisables	$\chi(X_{b_0}(\mathbf{R}))$
	ne varie pas et est égal	vari		
$I_m : m$ pair	2		2	$-m$ ou 0
$\begin{cases} v(j) = -m \\ v(q) \text{ pair} \end{cases}$	1		2	$-m$ ou 0

$I_m : m \text{ impair}$ $\begin{cases} v(j) = -m \\ v(q) \text{ pair} \end{cases}$		*	2	$-m \text{ ou } 1$
II $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 2 \pmod{.12} \end{cases}$	1		1	0
III $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 3 \pmod{.12} \end{cases}$		*	1	-1
IV $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 4 \pmod{.12} \end{cases}$	1		2	$-2 \text{ ou } 0$
I_0^* $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 6 \pmod{.12} \end{cases}$	1		1	-2
	2		1	-4

$I_m^* : m \text{ pair}$ $\begin{cases} v(j) = -m \\ v(q) \text{ impair} \end{cases}$	1		1	-m-2
	2		1	-m-4
$I_m^* : m \text{ impair}$ $\begin{cases} v(j) = -m \\ v(q) \text{ impair} \end{cases}$		*	2	-m-2 ou -m-4
IV^* $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 8 \pmod{.12} \end{cases}$	1		2	-2 ou -6
III^* $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 9 \pmod{.12} \end{cases}$		*	1	-7
II^* $\begin{cases} v(j) \geq 0 \\ v(\Delta) \equiv 10 \\ \pmod{.12} \end{cases}$	1		1	-8

TAB. 2.1 –

2.1.2 Classification des fibres singulières (cas sans section)

On se donne une fibration elliptique réelle $\pi: X \longrightarrow B$ relativement minimale et sans section. Un premier phénomène qui apparait est la possibilité d'existence d'un point réel $b \in B(\mathbf{R})$ tel que $X_b(\mathbf{R})$ soit vide. Le deuxième phénomène possible est l'apparition des fibres multiples de la forme μE (où E est une courbe lisse de genre 1) ou de la forme μI_m .

Soient F une fibre singulière de π et \tilde{F} la fibre singulière qui lui correspond dans la fibration jacobienne associée. \tilde{F} est de type α ($\alpha = I_m, III, IV \dots$).

Si le nombre des composantes connexes de la partie réelle des fibres voisines dans la fibration jacobienne est constante et est égale à 1 (resp. 2) alors Γ est dit de type $\alpha^{(1)}$ (resp. $\alpha^{(2)}$). Sinon Γ est dit de type α . Soient b_0 un point spécial et D un disque centré en b_0 paramétré par t . On note $\tau = t \circ \pi$.

Théorème 2.4. *Soit $\pi: X \longrightarrow B$ une fibration elliptique réelle sans section. Avec les notations précédentes on suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\tau^{-1}(t) \cap X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ pour tout $t \in [0, \epsilon[$ et $\tau^{-1}(t) \cap X(\mathbf{R}) = \emptyset$ pour tout $t \in]-\epsilon, 0]$. Alors $F = \tau^{-1}(0)$ est de type :*

1. *III et $F = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ avec $\sigma_X(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ et $F(\mathbf{R})$ est un point isolée.*

2. *$I_0^{*(2)}$ et $F = 2\mathcal{D}_0 + \sum_{i=1}^4 \mathcal{D}_i$ avec \mathcal{D}_0 réelle et $\sigma_X(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_{i+2}$ pour $1 \leq i \leq 2$.*

3. *$I_m^{*(2)}$ et $F = \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i + \sum_{i=0}^{2n} 2\mathcal{D}_i$ est l'une de deux forme :*

$$- \sigma_X(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_i, \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{D}_0 = \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{D}_0, \sigma_X(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2 \text{ et } \sigma_X(\mathcal{E}_3) = \mathcal{E}_4.$$

$$- \sigma_X(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_{2n-i}, \mathcal{D}_n(\mathbf{R}) \neq \emptyset \text{ et } \sigma_X(\mathcal{E}_i) = \mathcal{E}_{i+2} \text{ pour } 1 \leq i \leq 2$$

4. *I_{2n+1}^* et $F = \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i + \sum_{i=0}^{2n+1} 2\mathcal{D}_i$ est l'une de deux forme :*

$$- \sigma_X(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_{2n+1-i}, \mathcal{D}_i(\mathbf{R}) \neq \emptyset, \sigma_X(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_3 \text{ et } \sigma_X(\mathcal{E}_2) = \mathcal{E}_4.$$

- $\sigma_X(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_i$, $\sigma_X(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_2$ et $\sigma_X(\mathcal{E}_3) = \mathcal{E}_4$.

5. III^* et $F = 4\mathcal{D}_0 + 2\mathcal{D}_1 + \sum_{i=2}^3 \mathcal{D}_i + \sum_{i=4}^5 2\mathcal{D}_i + \sum_{i=6}^7 3\mathcal{D}_i$ et seulement \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 sont réelles.

6. μE , μ pair et la partie réelle de $\tau^{-1}(0)$ possède deux composantes connexes pour $t \in]0, \epsilon[$.

7. μI_m , μ pair et la partie réelle de la fibre est l'une des deux décrite dans le théorème précédent.

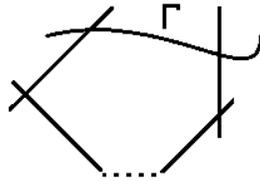
8. μI_m , μ pair ou impair et la partie réelle de la fibre singulière est réduite à un ou deux points isolés.

Démonstration. Voir la démonstration détaillée de Silhol [51, Ch. VII, Th. 2.1].

□

2.2 Pinceaux en courbes de genre 2

On se base dans ce paragraphe sur la classification des fibres singulières d'une surface fibrée en genre 2 due à Ogg [40]. Nous rappelons que la classification complexe complète des fibres singulières d'une fibration elliptique est réalisée par Kodaira (10 types complexes dont trois irréductibles et les types restants sont des diviseurs constitués par des (-2) -courbes). On se donne une courbe Γ , $\text{Kod}(\Gamma)$ désigne une fibre singulière réductible d'une fibration elliptique dont on a remplacé une des composantes irréductibles de multiplicités 1 par Γ . Par exemple si une fibre singulière est de type b_n (I_n notation de Kodaira) alors $\text{Kod}(\Gamma)$ est :



Les diviseurs de types $\text{Kod}(\Gamma)$ interviennent dans la classification des fibres singulières d'une surface fibrée en genre 2.

Dans la suite on s'intéresse à l'étude locale des surfaces fibrée en genre 2. On prend au lieu d'une surface de Riemann B comme courbe de base un disque $D = \{s \in \mathbb{C}/|s| < \varepsilon\}$ tel que toutes les fibres sont des courbes lisses de genre 2 sauf au dessus de l'origine.

Soit $\pi: X \longrightarrow D$ un pinceau en courbes de genre 2. On suppose que π est relativement minimale. Et si C et C' deux diviseurs sur X , on note tout simplement par $C \cdot C'$ le produit d'intersection des deux diviseurs sur X .

Lemme 2.5. (Zariski)[6, p. 90] Soit $\pi: X \longrightarrow B$ une surface fibrée. On désigne par X_s une fibre au dessus d'un point s et $\sum_i n_i C_i$ sa décomposition en composantes irréductibles. Alors on a $C_i \cdot X_s = 0$ pour tout i .

Le genre arithmétique d'une fibre L d'une surface fibrée en genre g est $g = p(L) = 1 + \frac{1}{2}(L^2 + L \cdot K)$ où K est le diviseur canonique (Proposition 1.26).

Un pinceau en courbes de genre 2 n'admet pas des fibres multiples. En effet si $L = n\mathcal{D}$ alors $\mathcal{D}^2 = 0$ d'après le lemme précédent et $\mathcal{D} \cdot K = \frac{2}{n}$. Donc $p(\mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{n}$, il s'ensuit que $n = 1$ car $p(\mathcal{D})$ est un entier positif.

Proposition 2.6. Si L est une fibre réductible et Γ une composantes irréductibles de L alors Γ appartient l'un des types suivants :

$$\begin{array}{lll} A : & \Gamma \cdot K = 1, & \Gamma^2 = -1, & p(\Gamma) = 1 \\ B : & \Gamma \cdot K = 1, & \Gamma^2 = -3, & p(\Gamma) = 0 \\ C : & \Gamma \cdot K = 2, & \Gamma^2 = -2, & p(\Gamma) = 1 \\ D : & \Gamma \cdot K = 2, & \Gamma^2 = -4, & p(\Gamma) = 0 \\ E : & \Gamma \cdot K = 0, & \Gamma^2 = -2, & p(\Gamma) = 0 \end{array}$$

Démonstration. En effet si $L = n\Gamma + \mathcal{D}$ et $\Gamma \notin \{\text{composantes irréductibles de } \mathcal{D}\}$. Alors $\Gamma \cdot \mathcal{D} \geq 0$ puisque L est connexe et $\Gamma \cdot L = 0$. Il s'ensuit que $\Gamma^2 < 0$. Aussi $\Gamma \cdot K \geq 0$ car sinon $\Gamma \cdot K = \Gamma^2 = -1$ et donc L contient une (-1) -courbes ce qui contredit le fait que π est relativement minimale.

Si $L = \sum n_i \Gamma_i$ où les Γ_i sont des composantes irréductible distincts. Alors, puisque $\Gamma_i \cdot K \geq 0$ et $L \cdot K = \sum n_i \Gamma_i \cdot K = 2$, il s'ensuit que $\Gamma_i \cdot K \in \{0, 1, 2\}$.

Comme $p(\Gamma_i)$ est un entier positif alors $\Gamma_i \cdot K$ et Γ_i^2 sont de mêmes parités, $\Gamma_i \cdot K + \Gamma_i^2 \geq -2$ et $\Gamma_i^2 \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

Finalement on a $(\Gamma_i \cdot K, \Gamma_i^2) \in \{(0, -2), (1, -1), (1, -3), (2, -2), (2, -4)\}$. \square

Soit $L = \sum_i n_i \Gamma_i$ une fibre réductible. Alors comme $\sum_i n_i \Gamma_i \cdot K = 2$, il s'ensuit que L contient une composante de multiplicité 1 de type C ou D et le reste sont de type E , ou deux composantes de multiplicités 1 de type A ou B et le reste sont de type E , ou une composantes de multiplicité 2 de type A ou B et le reste sont des composantes de type E .

A. P. Ogg à donné la liste complète des fibres singulières d'une fibration en genre 2 modulo quelques exemples complétés par Namikawa et Ueno [38]. Nous donnons une méthode combinatoire pour presenter la liste de Ogg [40].

Si la Fibre L contient une composantes Γ de type C alors Γ est de multiplicité 1, les autres composantes sont de types E et $\Gamma \cdot (L \setminus \Gamma) = 2$ donc d'après Kodaira [28], L est de (type 1) notation de Ogg.

Si la fibre contient une composante Γ de type D alors Γ est de multiplicité 1, le reste des composantes sont de type E et $\Gamma \cdot (L \setminus \Gamma) = 4$ donc Γ coupe le reste de la fibre 4 fois. Soit Γ_1 une composante de multiplicité n qui coupe Γ . On a alors :

$$\begin{cases} \Gamma \cdot (\Gamma + n\Gamma_1 + R = \Gamma^2 + n\Gamma \cdot \Gamma_1 + \Gamma \cdot R = 0 \\ \Gamma_1 \cdot (\Gamma + n\Gamma_1 + R = \Gamma_1 \cdot \Gamma + n\Gamma^2 + \Gamma \cdot R = 0 \end{cases}$$

où R est le reste de la fibre. D'où

$$(*) \begin{cases} n\Gamma_1 \cdot \Gamma \leq 4 \\ \Gamma_1 \cdot \Gamma \leq 2n \end{cases}$$

Donc $(*)$ implique $\Gamma_1 \cdot \Gamma \leq 2$.

Si $n\Gamma_1 \cdot \Gamma = 4$ alors Γ_1 est la seule composante qui coupe Γ et on a ou bien $\Gamma_1 \cdot \Gamma = n = 2$ ou bien $n = 4$ et $\Gamma_1 \cdot \Gamma = 1$. Dans le premier cas Γ_1 a un double contact avec Γ et $\Gamma \cdot (\Gamma + 2\Gamma_1 + R) = -2 + \Gamma \cdot R = 0$ donc Γ_1 coupe le reste de la fibre 2 fois. On trouve le (type 3). Dans le deuxième cas Γ_1 coupe Γ transversalement et le reste de la fibre 7 fois de plus. Si Γ_2 une composante de la fibre de multiplicité m qui coupe Γ_1 alors $m \geq 2$ (car

$\Gamma_2 \cdot (\Gamma + 2\Gamma_1 + m\Gamma_2 + R) = 4 - 2m + \Gamma_2 \cdot R = 0 \text{ d'où } 2m \geq 4$ donc on a 4 possibilités ou bien $m = 7$ (type 7) ou $7=5+2$ (type 6) ou $7=4+3$ (type 5) ou $7=2+2+4$ (type 4).

Si $n\Gamma_1 \cdot \Gamma < 4$ alors il existe une autre composante Γ'_1 de multiplicité m telle que $\Gamma'_1 \cdot \Gamma > 0$. Et on a :

$$(**) \begin{cases} n\Gamma_1 \cdot \Gamma < 4 \text{ et } \Gamma_1 \cdot \Gamma \leq 2n \\ m\Gamma'_1 \cdot \Gamma < 4 \text{ et } \Gamma'_1 \cdot \Gamma \leq 2m \end{cases}$$

Donc $(**)$ implique $\Gamma_1 \cdot \Gamma \leq 2$.

Si $\Gamma_1 \cdot \Gamma = 2$ alors $n = 1$ et la fibre est complète en Γ_1 , on a alors un cas de (type 2).

Traitons le cas où $\Gamma_1 \cdot \Gamma = 1$:

Si $n = 3$ alors Γ_1 coupe le reste de la fibre 5 fois de plus, On écrit alors $5 = 3 + 2$ ou Γ_1 coupe une composante de multiplicité 5. On trouve dans ce cas deux chaînes infinies, de composantes de degré 3 ou $\dots + 5\Gamma_2 + 7\Gamma_3 + 9\Gamma_4 + \dots$. Donc ce cas n'intervient pas.

On peut faire le même raisonnement sur Γ'_1 . Par suite il nous reste seulement le cas où $\Gamma_1 \cdot \Gamma = \Gamma \cdot \Gamma'_1 = 1$ et $m = n = 2$ (désormais tout le raisonnement pour Γ_1 se fait parallèlement pour Γ'_1 , donc c'est un jeu symétrique). Dans ce cas Γ_1 coupe le reste de la fibre 3 fois. Si Γ_1 passe par $\Gamma \cap \Gamma'_1$ alors. Sinon, Γ_1 coupe le reste de la fibre en dehors de Γ et on a alors ou bien $3=2+1$ d'où le (type 9) ou un cas de (type 2), ou bien Γ_1 coupe une composante Γ_2 de multiplicité 3 et Γ_2 coupe le reste de la fibre 4 fois de plus, et on écrit $4=2+2$ d'où le (type 10) ou Γ_2 coupe une composante Γ_3 de multiplicité 4 d'où le (type 11).

Pour les types restants lorsque les types C et D n'interviennent pas, le raisonnement se fait de la même manière (méthode combinatoire basée sur le nombre d'intersection).

2.3 Invariants géométriques d'un pinceau en courbes de genre 2

Soit $\pi: X \longrightarrow D$ un pinceau en courbes de genre 2. On suppose que π est minimale; c'est-à-dire qu'aucune fibre de π ne contient de (-1) -courbe.

Pour tout $t \in D$, X_t désigne la fibre $\pi^{-1}(t)$.

On note par $D' = D - \{0\}$, $\pi' : X' \longrightarrow D'$ la restriction de π à D' et $\Omega_{X'/D'}$ le faisceau des germes des 1-formes holomorphes relatives sur X' le long de π' .

Lemme 2.7. , [56, lem. 1], *Pour tout $t \in D'$, il existe un voisinage U de t , deux sections ω_1 et ω_2 dans $H^0(\pi'^{-1}(U), \Omega_{X'/D'})$ et quatre 1-cycles $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 dans $\pi'^{-1}(U)$ tels que pour tout $t' \in U$:*

- 1) *Les restrictions $(\omega_1)_{t'}$ et $(\omega_2)_{t'}$ des ω_1 et ω_2 à la fibre $X_{t'}$ forment une base de $H^0(X_{t'}, \Omega_{X_{t'}})$.*
- 2) *Les restrictions $(\alpha_1)_{t'}$, $(\alpha_2)_{t'}$, $(\beta_1)_{t'}$ et $(\beta_2)_{t'}$ de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 à la fibre $X_{t'}$ forment une base de $H_1(X_{t'}, \mathbb{Z})$.*

On suppose que les nombres d'intersections dans $X_{t'}$ sont donnés comme suit :

3i) $((\alpha_i)_{t'}, (\beta_j)_{t'})$ est égal à 1 si $i = j$ et est égal à 0 sinon.

3ii) $((\alpha_i)_{t'}, (\alpha_j)_{t'}) = ((\beta_i)_{t'}, (\beta_j)_{t'}) = 0$ pour tout i, j .

Considérons l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_2 = \{\tau \in M_2(\mathbb{C}) / {}^t\tau = \tau \text{ et } \text{Im } \tau > 0\}$ et le groupe symplectique $Sp(4, \mathbb{Z})$ défini par :

$$\left\{ N \in GL_4 \text{ tel que } {}^tN \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On rappelle que le groupe $Sp(4, \mathbb{Z})$ opère discontinument sur \mathfrak{S}_2 , et cette action est donnée par :

$$N(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \text{ pour } (Z, N) \in \mathfrak{S}_2 \times Sp(4, \mathbb{Z}). (*)$$

$$\text{où } N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

On vient alors de définir une application multivaluée $T: D' \longrightarrow \mathfrak{S}_2$. En effet,

pour tout $t \in D'$ on utilise les objets définis en 1), 2), 3i) et 3ii) pour définir T au voisinage de t par :

$$T(t') = \left(\int_{(\alpha_i)_{t'}} (\omega_j)_{t'} \right) \left(\int_{(\beta_k)_{t'}} (\omega_l)_{t'} \right)^{-1}$$

pour $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. L'application T est multivaluée à cause du choix des 1-cycles.

Deux applications $T_1, T_2: D' \longrightarrow \mathfrak{S}_2$ holomorphes sont dites équivalentes s'il existe une matrice $M \in Sp(4, \mathbb{Z})$ telle que $T_1(t) = M(T_2(t))$ pour tout $t \in D'$ (la matrice $M(T_2(t))$ est celle obtenue par l'action de $Sp(4, \mathbb{Z})$ sur l'espace de Siegel \mathfrak{S}_2). Une valeur de T désigne une classe d'isomorphisme complexe de X_t . En fait toutes les branches de T sont équivalentes, on en choisit une et on la note T_π .

Definition 2.8. *L'application holomorphe T_π est appelée application caractéristique du morphisme π .*

2.3.1 Monodromie

On se donne un lacet γ dans D' entourant l'origine et à point base $t \in D'$. Alors γ induit un automorphisme de $H_1(X_t, \mathbb{Z})$, donc d'après la définition de T_π il existe une matrice M_π dans $Sp(4, \mathbb{Z})$ vérifiant $T_\pi(\gamma t) = M_\pi(T_\pi(t))$. La classe de conjugaison de M_π dans $Sp(4, \mathbb{Z})$ ne dépend que de π et est appelée monodromie de π (voir [37, §2]).

Definition 2.9. *Soit $X_0 = \pi^{-1}(0)$. On dit que X_0 est de type elliptique si la monodromie M_π est d'ordre fini. Dans le cas infini est dit de type parabolique.*

On note par \mathfrak{S}_2^* l'espace quotient $\mathfrak{S}_2/Sp(4, \mathbb{Z})$ et $p: \mathfrak{S}_2 \longrightarrow \mathfrak{S}_2^*$ la surjection canonique.

Le quotient \mathfrak{S}_2^* est un espace analytique complexe de dimension 3 et correspond à l'espace complexe des modules des variétés abéliennes principalement polarisées [37, Th. 1.1].

Une surface abélienne principalement polarisée complexe est, soit un produit de deux courbes elliptiques, soit la jacobienne d'une courbe projective lisse de genre 2 ([37, §I]. On note alors :

1) \mathcal{M}^* l'ensemble des points de \mathfrak{S}_2^* correspondant aux jacobiniennes de courbes

de genre 2 et $\mathcal{M} = p^{-1}(\mathcal{M}^*)$.

2) \mathcal{N}^* le complémentaire de \mathcal{M}^* dans \mathfrak{S}_2^* et $\mathcal{N} = p^{-1}(\mathcal{N}^*)$. Un point de \mathcal{N}^* correspond donc au produit de deux courbes elliptiques E_1 et E_2 .

2.3.2 Module de la fibre singulière d'un pinceau en courbes de genre 2

Soit $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$ le compactifié de $\mathfrak{S}_2^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$. Alors $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$ n'est autre que l'espace des modules des courbes stable de genre 2. C'est une variété algébrique projective de dimension 3 [58, Th. 6.8].

L'ensemble des points de $\overline{\mathfrak{S}_2^*} \setminus \mathfrak{S}_2^*$ est stratifié comme suit :

- L'espace \mathcal{B}_a^* , dont les points correspondent aux classes des isomorphismes des courbes de type 3a (Notation des types complexes du deuxième paragraphe).
- L'espace \mathcal{B}_b^* correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 3b.
- L'espace \mathcal{C}_a^* correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 4a.
- L'espace \mathcal{C}_b^* correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 4b.
- L'espace \mathcal{D}^* correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 5.

Proposition 2.10. [38] *Les sous espaces $\overline{\mathcal{N}^*} = \mathcal{N}^* \cup \mathcal{B}_b^* \cup \mathcal{C}_b^*$ et $Y = \mathcal{D}^* \cup \mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}^*$ sont deux diviseurs irréductibles de $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$.*

Où $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_a^* \cup \mathcal{B}_b^*$ et $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}_a^* \cup \mathcal{C}_b^*$.

Soit $\overline{T}_\pi: D' \longrightarrow \overline{\mathfrak{S}_2^*}$ la composée de T_π avec l'application naturelle $\mathfrak{S}_2 \longrightarrow \overline{\mathfrak{S}_2^*}$. L'application \overline{T}_π se prolonge en une fonction holomorphe sur D qu'on note aussi \overline{T}_π [27].

Definition 2.11. *Le point $z_\pi = \overline{T}_\pi(0) \in \overline{\mathfrak{S}_2^*}$ est appelé module de la fibre singulière de π .*

Definition 2.12. *Soient $\pi: X \longrightarrow D$ un pinceau en courbes de genre 2 et z_π le module de la fibre singulière de π . alors :*

- X_0 est dit de type elliptique 1 si $z_\pi \in \mathcal{M}^*$.

- X_0 est dit de type elliptique 2 si $z_\pi \in \mathcal{N}^*$.
- X_0 est dit de type parabolique 3 si $z_\pi \in \mathcal{B}^*$.
- X_0 est dit de type parabolique 4 si $z_\pi \in \mathcal{C}^*$.
- X_0 est dit de type parabolique 5 si $z_\pi \in \mathcal{D}^*$.

2.3.3 Degré d'un pinceau en courbes de genre 2

D'après [37, Rem. 3.3] \mathfrak{S}_2^* est une partie de l'espace $\overline{\mathfrak{S}}_2^*$ et $z_\pi \in \mathfrak{S}_2^*$ si et seulement si M_π est d'ordre fini.

On suppose dans ce sous-paragraphe que la monodromie M_π est d'ordre n fini. Soit $E = \{s \in \mathbb{C}; |s| < \epsilon^{\frac{1}{n}}\}$ et Soit $\delta_n: E \rightarrow D$ envoyant s sur s^n . L'application holomorphe $S'_\pi = T_\pi \circ \delta_n$ définie sur $E' = E - \{0\}$ se prolonge en une application holomorphe unique S_π sur E ([37, §3]). Soit $p: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_2^*$ la surjection canonique. On définit le degré de π de la manière suivante :

Il vaut 0 si $z_\pi \in \mathcal{M}^*$. Si $z_\pi \in \mathcal{N}^*$ on considère un représentant τ de z_π et on pose pour tout $s \in E$:

$$S_\pi(s) = \begin{pmatrix} S_1(s) & S_3(s) \\ S_3(s) & S_2(s) \end{pmatrix} \text{ tel que } S_\pi(0) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} = \tau$$

dans ce cas on définit $\deg \pi$ comme étant l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de $S_3(s)$.

Remarque 2.13. *On peut généraliser la définition de degré de π même pour le cas où la monodromie M_π n'est pas d'ordre fini.*

Soient $\pi: X \rightarrow D$ un pinceau en courbes de genre 2 et z_π le module de la fibre singulière X_0 de π au dessus de 0.

Alors z_π est dans l'un des diviseurs de Cartier $\overline{\mathcal{N}}^*$ et Y . Donc au voisinage de z_π ce diviseur est défini par une équation $f = 0$.

Soit maintenant $\overline{T}_\pi^* f: V \rightarrow \mathbb{C}$ le tiré en arrière (pull back) de f par \overline{T}_π sur un voisinage V de centre du disque.

On définit alors le degré de π comme étant l'ordre de multiplicité de zéro comme racine de $\overline{T}_\pi^* f$.

Proposition 2.14. [38, Th 3] *La fibre singulière au dessus de $s = 0$ est déterminée uniquement par trois invariants :*

La monodromie M_π , le module z_π et $\deg \pi$.

Remarque 2.15. *Les courbes singulières les plus simples dans la stratification de l'espace des modules des courbes de genre 2 réelles sont les courbes stables. On commence alors par l'étude des pincesaux réels en courbes stables de genre 2.*

Chapitre 3

Classification réelle des fibres singulières : pinceau en courbes stables de genre 2

Dans ce chapitre je m'intéresse aux pinceaux réels en courbes stables de genre 2. Je rappelle la liste des fibres singulières possibles de tels pinceaux, dans le cas complexe. Pour chaque type complexe, de fibre singulière, je donne les types de configuration réels possible et je détermine le nombre des composantes connexes de la partie réelle des fibres voisines, en donnant des exemples.

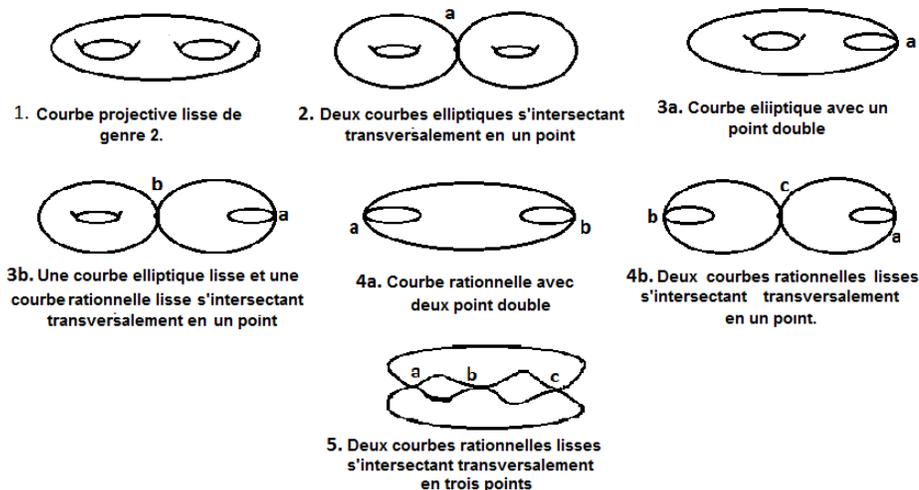
3.1 Pinceaux en courbes stables de genre 2

Definition 3.1. *On appelle pinceau en courbes stables de genre $g \geq 2$ la donnée d'une surface complexe X (éventuellement singulière) et d'un morphisme $\pi: X \rightarrow E$ au dessus d'un disque vérifiant :*

1. π est surjective et propre de fibres réduites et connexes.
2. Les seules singularités de $X_0 = \pi^{-1}(0)$ sont des points doubles ordinaires.
3. Si Γ est une composante irréductible rationnelle lisse de X_0 , alors Γ rencontre le reste de la fibre en au moins deux points.
4. $\dim H^1(X_s, O_{X_s}) = g$, pour toute fibre non singulière X_s .

Une courbe stable est une courbe réduite et connexe qui vérifie 2 et 3.

Pour $g = 2$, nous suivons les notations de [37]. Les types complexes de courbes stables sont donnés par la liste suivante :



3.2 Description locale d'un pinceau réel en courbes stables de genre 2

Le langage utilisé dans [32] est celui de la géométrie algébrique sur un corps abstrait et en particulier la topologie est la topologie de Zariski. Lorsque le corps de base est le corps des nombres réels, nous rappelons brièvement comment interpréter les résultats de [32] en géométrie analytique complexe avec structure réelle. Soit $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{A}$ une surface algébrique projective fibrée en courbes de genre 2 définie sur \mathbf{R} . Soient $B = \mathcal{A} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, $\rho_{\mathbf{C}} := \rho \times id_{\mathbf{C}}: \mathcal{Y} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \rightarrow B$ et P un point spécial lisse de $\mathcal{A}(\mathbf{R})$. On note par \mathcal{R} l'anneau local de B au point P (c'est un anneau de valuation discrète). Le corps des fractions K de \mathcal{R} n'est que le corps des fonctions de la courbe B .

Comme P est un point lisse alors il existe une fonction régulière t , définie sur un voisinage affine \mathcal{U} , qui s'annule en P telle que toute fonction rationnelle v , qui s'annule en p , s'écrit $v = t^m w$ où $w(P) \neq 0$, i.e. la fonction t est un paramètre local de B au point P .

D'après le théorème d'inversion locale analytique, il existe un voisinage U de P pour la topologie analytique sur B , invariant par la structure réelle sur $B(\mathbf{C})$, sur lequel la restriction de t vue comme fonction sur U est une coordonnée holomorphe qu'on note aussi t .

Comme P est lisse la fonction t peut être choisie réelle (i.e. $\forall P \in U, t \circ \sigma(P) = \overline{t(P)}$) où σ est la structure réelle induite sur $B(\mathbf{C})$.

On peut choisir U de manière que la restriction de t soit un isomorphisme de U sur un disque E centré en 0 et on note $X = \rho_{\mathbf{C}}^{-1}(U)$ et $\pi = \rho_{\mathbf{C}}|_{\rho_{\mathbf{C}}^{-1}(U)}$.

On est donc ramené au cas où $\pi: X \rightarrow E$ est un pinceau réel en courbes de genre 2 au dessus d'un disque E et dont $X_0 = \pi^{-1}(0)$ est la seule fibre singulière.

En suivant la démarche de la preuve de [32, Théorème 1, partie A] on obtient les résultats suivants sur les pinceaux stables avec une seule fibre singulière :

Soit $\pi: X \rightarrow E$ un pinceau réel en courbes de genre 2 dont la seule fibre singulière X_0 est stable.

Proposition 3.2. *Si X_0 est de type complexe 1, 3a, 4a ou 5, alors il existe un voisinage saturé de X_0 dans X qui est analytiquement isomorphe à la surface affine définie dans $\mathbf{C}^2 \times E$ par l'équation :*

$$y^2 = a_5(t)x^5 + \dots + a_0(t), \quad (x, y, t) \in \mathbf{C}^2 \times E$$

où les a_i sont des fonctions réelles telles que $a_5(0) \neq 0$.

Proposition 3.3. *Si X_0 est de type complexe 2, 3b ou 4b alors :*

1. X est un revêtement double d'un fibré en coniques $\Pi: \mathcal{F} \rightarrow E$, au dessus d'un disque E , défini dans $\mathbf{C}^2 \times E$ par l'équation $xv = t^{2m}$ et ramifié le long d'une courbe sextigonale \mathcal{B} plus un point $\{a\}$ (le point d'intersection des deux droites $D_1 = \{x = 0\}$ et $D_2 = \{v = 0\}$ de la fibre au dessus de 0).
2. les composantes irréductibles de la fibre X_0 sont les complétés projectifs respectifs de deux courbes affines définies par :

$$y^2 = x^3 + ax^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + bv^2 + v.$$

Démonstration. Soit $\Pi: \mathcal{F} \rightarrow E$ un pinceau en coniques, au dessus d'un disque E , définie par l'équation $xv = t^{2m}$ dans $\mathbf{C}^2 \times E$.

On désigne par \mathcal{B} une courbe plongée dans \mathcal{F} définie par l'équation affine :

$$x^4 + a(t)x^3 + x^2 + b(t)t^{2m}x + t^{4m} = 0$$

Vue qu'elle est plongée dans \mathcal{F} , la courbe \mathcal{B} peut aussi être définie par l'équation affine $x^2 + a(t)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$.

Soient Γ_1 et Γ_2 deux sections de $\mathcal{F} \rightarrow E$ contenues dans le lieu non singulier de $\mathcal{F} \rightarrow E$ telles que $\mathcal{B} \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \emptyset$, $\Gamma_1 \cap D_1 = \{v_1\}$, $\Gamma_2 \cap D_2 = \{x_1\}$ et $\Gamma_1 \cap D_2 = \Gamma_2 \cap D_1 = \{\emptyset\}$, où $D_1 = \{x = 0\}$ et $D_2 = \{v = 0\}$ désignent les deux composantes de la fibre \mathcal{F}_0 au dessus de 0.

Si $t = 0$, l'intersection de la courbe \mathcal{B} avec la fibre \mathcal{F}_0 est donnée par l'équation :

$$x^2(x^2 + a(0)x + 1) = 0$$

On peut aussi la définir par l'équation $v^2(v^2 + b(0)v + 1) = 0$. On déduit alors que \mathcal{B} coupe D_1 (resp. D_2) en deux points v_2 et v_3 (resp. x_2 et x_3).

Soit X le revêtement double de \mathcal{F} ramifié le long de la courbe \mathcal{B} , les deux sections Γ_1 et Γ_2 et le point $\{a\}$.

Le morphisme $\pi: X \rightarrow E$ est un pinceau en courbes stables de genre 2 dont la fibre X_0 possède deux composantes irréductibles qui sont les complétés projectifs respectifs des deux courbes affines définies par :

$$y^2 = x^3 + a(0)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + b(0)v^2 + v.$$

Voir Figure 3.1

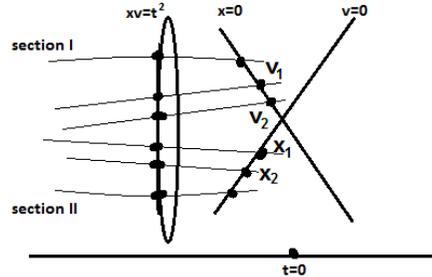


FIG. 3.1 –

Si $v_2 \neq v_3$ et $x_2 \neq x_3$ alors X_0 est de type 2.

Si $v_2 \neq v_3$ et $x_2 = x_3$ alors X_0 est de type 3b.

Si $v_2 = v_3$ et $x_2 = x_3$ alors X_0 est de type 4b.

□

Lemme 3.4. *Les notations sont celles de la preuve précédente. Soit $\Delta_t = a(t)^2 - 4$, si $\Delta_0 \neq 0$ (i.e. $x_1 \neq x_2$) alors les deux branches de \mathcal{B} passant par x_1 et x_2 sont réelles (resp. conjugués) si $\Delta_0 > 0$ (resp. $\Delta_0 < 0$).*

Proposition 3.5. *Si $\Delta_0 = 0$ alors pour t assez proche de 0 les deux points d'intersection des deux branches de \mathcal{B} , passant par $x_1 = x_2$, avec la fibre \mathcal{F}_t sont réels (resp. conjugués) si $\Delta_t > 0$ (resp. $\Delta_t < 0$).*

Démonstration. On considère le pinceau

$$\mathcal{B}_u: x^2 + a(t, u)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$$

tel que \mathcal{B}_u soit une perturbation de la courbe $\mathcal{B}: x^2 + a(t)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$ sur $] -\epsilon, 0[$, $a(t, 0) = a(t)$ pour $t < 0$ et $\Delta_{0, u} = a(0, u)^2 - 4 \neq 0$.

Alors, pour u fixé, les deux branches de la courbe \mathcal{B}_u coupent D_2 en deux points distincts. Donc d'après le lemme précédent, la topologie des ces deux branches suit le signe de discriminant de l'équation

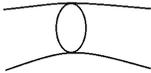
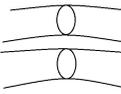
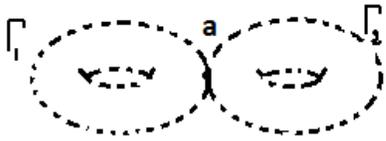
$$x^2 + a(t, u)x + 1 = 0$$

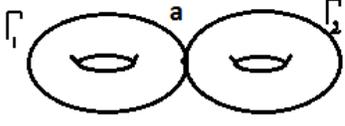
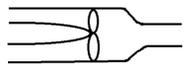
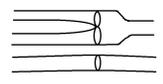
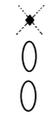
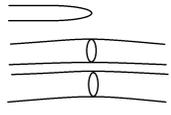
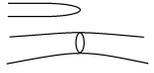
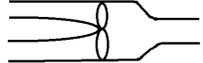
Comme B_u est une déformation de \mathcal{B} sur $] -\epsilon, 0[$, donc pour u fixé \mathcal{B}_u et \mathcal{B} ont même topologie sur $] -\epsilon, 0[$.

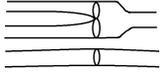
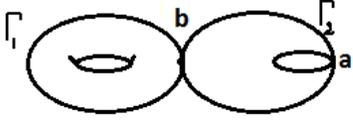
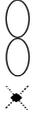
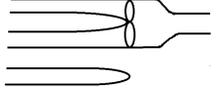
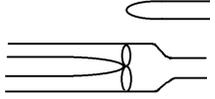
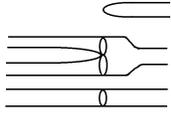
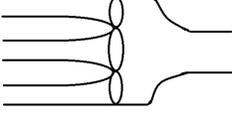
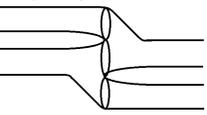
On conclut que les deux branches de la courbe $\mathcal{B}: x^2 + a(t)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$ passant par le point x_1 ont même topologie que celles de la courbes définie par l'équation $x^2 + a(t)x + 1 = 0$ sur $] -\epsilon, 0[$ et donc suivent le signe du discriminant Δ_t . Même raisonnement sur $]0, \epsilon[$. \square

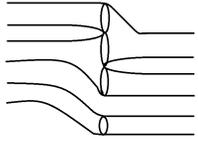
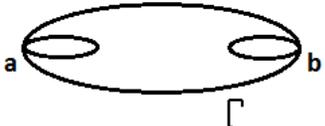
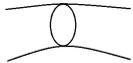
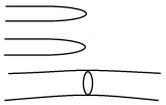
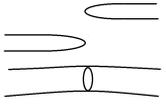
Definition 3.6. *On appelle chaîne de n ovales la réunion non disjointe des n ovales \mathcal{O}_i telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ \mathcal{O}_i et \mathcal{O}_{i+1} s'intersectent en un seul point et $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_{i+1} = \emptyset$ si $|i - j| > 1$.*

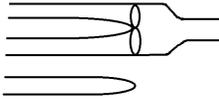
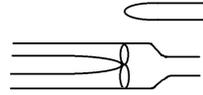
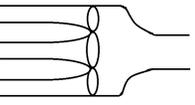
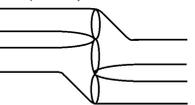
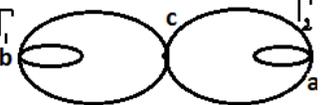
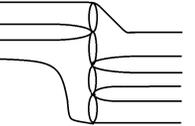
Théorème 3.7. *Soient X une surface non singulière et $\pi: X \longrightarrow E$ un pinceau réel en courbes stables de genre 2. Alors la structure géométrique, la topologie de la fibre X_0 au dessus de 0 et la partie réelle des fibres voisines de X_0 sont données par le tableau suivant :*

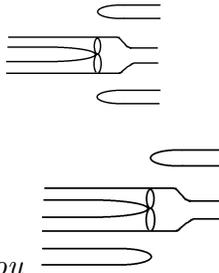
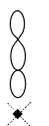
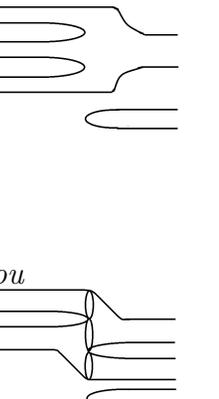
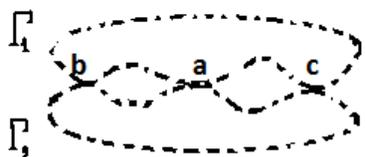
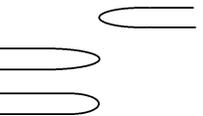
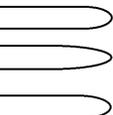
Type complexe Nam- Ue[37]	type de configuration réel	$X_0(\mathbf{R})$	fibres voisines
1	Γ réelle 	\emptyset	\emptyset
		<i>un ovale</i> 	<i>(1,1)</i> 
		<i>deux ovales</i> 	<i>(2,2)</i> 
		<i>trois ovales</i> 	<i>(3,3)</i> 
2	Γ_1 et Γ_2 sont complexes <i>conjugués</i> 	<i>point isolé</i> 	<i>(1,0)</i> 

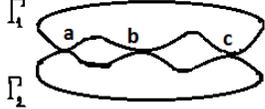
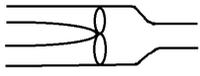
	<p>Γ_1 et Γ_2 sont réelles</p> 	<p>deux ovals s'intersectent en un point</p> 	<p>(2,1)</p> 
		<p>point double avec deux tangentes réelles et un ovale</p> 	<p>(3,2)</p> 
<p>3a</p>	<p>Γ est réelle</p> 	<p>point isolé</p> 	<p>(1,0)</p> 
		<p>point isolé et deux ovals</p> 	<p>(3,2)</p> 
		<p>point isolé et un ovale</p> 	<p>(1,2)</p> 
		<p>point double avec deux tangentes réelles</p> 	<p>(2,1)</p> 

		<p>point double avec deux tangentes réelles et un ovale</p> 	<p>(3,2)</p> 
3b	<p>Γ_1 et Γ_2 sont réelles</p> 	<p>un point isolé et un point double avec deux tangentes réelles</p> 	<p>(3,1)</p>  <p>ou(2,2)</p> 
		<p>point isolé et un ovale et un point double avec deux tangentes réelles</p> 	<p>(3,3)</p> 
		<p>point double avec deux tangentes réelles s'intersecte avec un ovale</p> 	<p>(3,1)</p>  <p>ou(2,2)</p> 

		<p>un ovale et un point double avec deux tangentes réelles s'intersecte avec un ovale</p> 	<p>(3,3)</p> 
4a	<p>Γ est réelle</p> 	<p>\emptyset</p>	<p>\emptyset</p>
		<p>un ovale</p> 	<p>(1,1)</p> 
		<p>deux points isolés</p> 	<p>(2,0)</p>  <p>ou (1,1)</p> 
		<p>deux points isolés et un ovale</p> 	<p>(3,1)</p>  <p>ou (2,2)</p> 

		<p>un point double avec deux tangentes réelles et un point isolé</p> 	<p>(3,1)</p>  <p>ou (2,2)</p> 
		<p>une courbe avec deux points doubles</p> 	<p>(3,1)</p>  <p>ou (2,2)</p> 
4b	<p>Γ_1 et Γ_2 sont complexes conjugués</p> 	<p>un point isolé</p> 	<p>(1,0)</p> 
	<p>Γ_1 et Γ_2 sont réelles</p> 	<p>deux points doubles avec deux tangentes réelles</p> 	<p>(3,2)</p> 

		<p>un point double avec deux tangentes réelles et deux points isolés</p> 	<p>$(3,2)$</p>  <p>ou</p>
		<p>un point isolé et un point double avec deux tangentes réelles s'intersecte avec un ovale</p> 	<p>$(3,2)$</p>  <p>ou</p>
<p>5</p>	<p>Γ_1 et Γ_2 sont complexes conjuguées</p> 	<p>un point isolé</p> 	<p>$(1,0)$</p> 
		<p>trois points isolés</p> 	<p>$(3,0)$</p>  <p>ou $(2,1)$</p> 

Γ_1 et Γ_2 sont réelles	deux courbes rationnelle	
	un point double avec deux tangentes réelles 	(2,1) 

TAB. 3.1 –

On désigne, dans la colonne 4, par un couple de type (p, q) le nombre des composantes connexes des fibres voisines à droite et à gauche de X_0 .

Avant de passer à la preuve, nous rappelons le lemme suivant :

Lemme 3.8. [51, Ch. VII, p. 147] Soit (C, σ) une courbe réelle et a un point réel lisse de C . Alors il existe une composante connexe de $C(\mathbf{R})$ non réduite à un point et contenant le point a .

Démonstration du théorème 3.7. On admet sur X et E deux involutions anti-holomorphes σ_X et σ_E respectivement, tel que le morphisme π soit réel : i.e $\pi \circ \sigma_X = \sigma_E \circ \pi$.

Si $s \in E$ est un point réel alors la fibre au dessus de s est réelle. Et l'involution σ_X transforme une composante irréductible d'une fibre réelle en une autre de même type.

Pour chaque type complexe de pinceau stable en genre 2 (Voir liste au début du paragraphe), nous allons traiter les différents cas possibles pour le type réel de la fibre singulière (dans la troisième colonne) en se basant particulièrement sur des raisons topologiques (topologie de Zariski). Puis, pour la réalisation, nous allons construire des exemples en se basant sur les proposition 3.2 et 3.3. Soit Γ une composante irréductible d'une fibre singulière réelle. Si la condition

suivante est vérifiée

$$\begin{cases} a \text{ est un point réel lisse dans } \Gamma_1 \\ \Gamma_1 \text{ est réelle} \end{cases} \quad (3.1)$$

Alors il existe une composante connexe R de $\Gamma(\mathbf{R})$ contenue dans le lieu réel de Γ_1 et contient le point a .

Commençons tout d'abord par les types complexes numérotés dans la Proposition 3.2, où chacune de ces courbes stables est donnée par une équation hyperelliptique.

Type complexe 1 : La fibre singulière est une courbe projective lisse de genre 2.

On utilise le fait que si C est une courbe réelle lisse de genre g alors (Théorème de Harnack)

$$0 \leq \#\Pi_0(C(\mathbf{R})) \leq g + 1$$

Type complexe 3a : La fibre singulière est une courbe elliptique Γ avec un point double a .

La courbe Γ est la seule composante irréductible de la fibre, donc elle est réelle. Le point a est le seul point singulier donc réel.

Si a est un point isolé dans la partie réelle de Γ alors en appliquant le théorème de Harnack aux fibres voisines, nous montrons qu'il existe au plus deux composantes connexes lisses contenues dans le lieu réel de Γ et ne contenant pas a . Donc $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\}$, $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1$ ou $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1 \cup R_2$, où les R_i sont des ovales.

Si a est un point double avec deux tangentes réelles alors en appliquant le théorème de Harnack aux fibres voisines, nous montrons qu'il existe au plus une composante connexe lisse contenue dans le lieu réel de Γ et ne contenant pas a . Nous avons donc seulement deux types.

Les exemples ci-dessous réalisent les 5 cas possibles pour le type complexe 3a.

Exemples :

1) $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\}$:

$$y^2 = -(x^2 + t)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

Si $t = 0$ on a bien $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\}$.

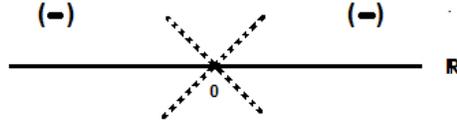


FIG. 3.2 -

Pour $t > 0$ (resp. $t < 0$) , la partie réelle de la fibre au dessus de t est vide (resp. est une composante lisse) d'où le type $(1, 0)$.

2) $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1$:

$$y^2 = -(x^2 + t)(x - 2)(x - 1)(x^2 + 2)$$

Si $t = 0$ on a bien $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1$.

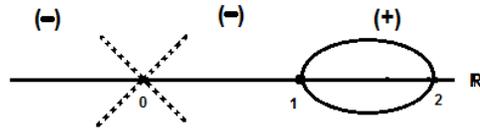


FIG. 3.3 -

Pour $t > 0$ (resp. $t < 0$), la partie réelle de la fibre au dessus de t est une seule ovale (resp. est la réunion disjointe des deux ovales) d'où le type $(2, 1)$.

3) $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1 \cup R_2$:

$$y^2 = (x^2 + t)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Si $t = 0$ on a bien $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1 \cup R_2$

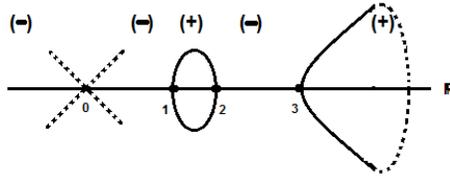


FIG. 3.4 –

Pour $t > 0$ (resp. $t < 0$), la partie réelle est la réunion disjointe des deux ovales (resp. trois ovales d'où le type $(3, 2)$).

4)

$$y^2 = (x^2 + t)(x^2 + 1)(x + 1)$$

Si $t = 0$ alors la partie réelle de la fibre singulière est une chaîne de deux ovales. Si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est une seule ovale (resp. deux ovales) d'où le type $(2, 1)$.

5)

$$y^2 = (x^2 + t)(x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

Si $t = 0$ alors la partie réelle de la fibre singulière est la réunion disjointe d'une ovale et d'une chaîne de deux ovales.

Si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est la réunion disjointe de deux ovales (resp. trois ovales) d'où le type $(3, 2)$.

Type complexe $4a$: La fibre singulière est une courbe rationnelle Γ avec deux points doubles a et b .

La courbe Γ est la seule composante irréductible, donc elle est réelle.

Et l'ensemble des points réels

$$\Gamma(\mathbf{R}) = \{x \in \Gamma(\mathbf{R}) / x \text{ lisse}\} \cup \{x \in \Gamma(\mathbf{R}) / x \text{ singulier}\}$$

donc :

Si a et b sont conjugués, alors $\{x \in \Gamma(\mathbf{R}) / x \text{ singulier}\} = \emptyset$ et donc il existe au plus une composante connexe R contenue dans le lieu réel de Γ , ainsi $\Gamma(\mathbf{R}) = \emptyset$ ou $\Gamma(\mathbf{R}) = R$.

Si a et b sont deux points réels isolés, alors il existe au plus une composante

connexe lisse contenue dans le lieu réel de Γ .

Si a est réel isolé et b est un point double avec deux tangentes réelles alors $\Gamma(\mathbf{R}) = R \cup \{a\}$ où R est une composante connexe contenant le point b .

Si a et b sont deux points doubles avec deux tangentes réelles, alors $\Gamma(\mathbf{R})$ est formé par une seule composante connexe contenant a et b .

Exemples :

1)

$$y^2 = -[(x^2 + 1)^2 - t^2](x^2 + 2)$$

La partie réelle de la fibre singulière est vide ainsi que celles de ses fibres voisines.

2)

$$y^2 = [(x^2 + 1)^2 - t^2](x^2 + 2)$$

La partie réelle de la fibre singulière est une seule composante lisse ainsi que celles de ses fibres voisines d'où le type $(1, 1)$.

3)

$$y^2 = -[(x + 1)^2 - t][(x - 1)^2 - t](x^2 + 2)$$

Dans cet exemple la partie réelle de la fibre singulière est constituée par deux points isolés. Et si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est la réunion disjointe de deux ovales (resp. est vide) d'où le type $(0, 2)$.

4)

$$y^2 = -[(x + 1)^2 + t][(x - 1)^2 - t](x^2 + 2)$$

Dans cet exemple la partie réelle de la fibre singulière est aussi constituée par deux points isolés. Mais nous avons le type $(1, 1)$.

5)

$$y^2 = -[(x + 1)^2 - t][(x - 1)^2 - t](x^2 + 2)$$

La partie réelle de la fibre voisine est la réunion d'une ovale et deux points isolés et au voisinage nous avons le type $(1, 3)$.

6)

$$y^2 = -[(x+1)^2 - t][(x-1)^2 - t](x+2)$$

La fibre singulière est de même type que l'exemple précédent, et au voisinage on a le type $(2, 2)$.

7)

$$y^2 = [x^2 + t][(x-2)^2 + t](x-1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un point isolé. Et au voisinage nous avons le type $(3, 1)$.

8)

$$y^2 = [x^2 - t][(x-2)^2 + t](x-1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est la réunion d'une chaîne de deux ovales et d'un point isolé. Et au voisinage nous avons le type $(2, 2)$.

9)

$$y^2 = [(x-1)^2 + t][(x-2)^2 + t](x+1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est une chaîne de deux ovales et au voisinage nous avons le type $(3, 1)$.

10)

$$y^2 = [(x-1)^2 - t][(x-2)^2 + t](x+1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est une chaîne de deux ovales et au voisinage nous avons un type $(2, 2)$.

Comme ça nous avons réalisé tout les cas possibles pour le type complexe $4a$.

Type complexe 5 : Deux courbes rationnelles lisses Γ_1 et Γ_2 s'intersectent transversalement en trois points a , b et c .

Si Γ_1 et Γ_2 sont conjuguées alors la partie réelle est soit les trois points singuliers a , b et c , soit l'un des points singuliers a , b et c .

Si Γ_1 et Γ_2 sont réelles, alors on a ou bien a , b et c sont des points réels, et dans ce cas il existe une composante connexe R_1 (resp. R_2) contenue dans le lieu réel de Γ_1 (resp. de Γ_2) qui contient les points a , b et c , ou bien l'un des

trois points singuliers est réel et les deux autres sont conjugués et dans ce cas il existe une composante connexe R_1 (resp. R_2) contenue dans le lieu réel de Γ_1 (resp. de Γ_2) qui contient le seul point singulier réel de la fibre, et dans les deux cas, la partie réelle de la fibre est $R_1 \cup R_2$.

Dans le cas où la partie réelle est constituée de deux ovales s'intersectant en trois points la surface X ne peut pas être lisse. Voir Table 3.4 pour ce cas.

Exemples :

1) $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = \{a, b, c\}$:

$$y^2 = -(x^2 + t)((x - 1)^2 + t)((x - 2)^2 + t)$$

Si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est vide (resp. trois ovales) d'où le type $(3, 0)$.

2) $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = \{a, b, c\}$:

$$y^2 = -(x^2 + t)((x - 1)^2 - t)((x - 2)^2 - t)$$

Si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est la réunion disjointe des deux ovales (resp. un ovale) d'où le type $(1, 2)$.

3) $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = \{a, \}$:

$$y^2 = -(x^2 + t)((x^2 + 1)^2 + t)$$

Si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est vide (resp. un ovale) d'où le type $(1, 0)$.

4) $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = R_1 \cup R_2$:

$$y^2 = (x^2 - t)((x + i)^2 + t)((x - i)^2 + t)$$

Si $t > 0$ (resp. $t < 0$) alors la partie réelle de la fibre au dessus de t est un ovale (resp. deux ovales) d'où le type $(1, 2)$.

Type complexe 2 : La fibre singulière est la réunion de deux courbes elliptiques lisses Γ_1 et Γ_2 s'intersectant transversalement en un point a .

La fibre stable est constituée par deux composantes irréductibles Γ_1 et Γ_2 qui

s'intersectent au point réel a ($a \in \sigma_X(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \{a\}$). Si $\sigma_X(\Gamma_1) = \Gamma_2$ alors a est le seul point réel de la fibre.

Si $\sigma_X(\Gamma_1) = \Gamma_1$ alors Γ_2 est aussi réelle et on a d'après (3.1), p. 49, il existe une composante connexe lisse R_1 de $\Gamma_1(\mathbf{R})$ contenue dans le lieu réel de Γ_1 et contenant le point a .

En utilisant l'argument (3.1), p. 49, il existe une composante connexe lisse R_2 de $\Gamma_2(\mathbf{R})$ contenue dans le lieu réel de Γ_2 et contenant le point a . S'il existe un point réel $b \notin R_1 \cup R_2$ alors b est contenue dans une composante connexe R_3 contenu dans le lieu réel de la fibre, donc la partie réelle de la fibre est $R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Si non $R_1 \cup R_2$ est la partie réelle. Et ce sont les seuls cas possibles d'après le Théorème de Harnack appliqué au fibre voisine de la fibre singulière.

Exemples :

Dans la suite les deux composantes irréductibles de la fibres singulières sont les complétés projectifs des deux courbes affines :

$$y^2 = x^3 + a(0)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + b(0)v^2 + v.$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions holomorphes.

1) $\sigma_X(\Gamma_1) = \Gamma_2$ et $\mathbf{R}(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \{a\}$.

$$y^2 = x^3 + itx^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 - itv^2 + v.$$

la partie réelle est un points isolé et au voisinage on a le type $(1, 0)$.

2)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (1-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est une chaîne de deux ovales et au voisinage on a le type $(2, 1)$.

3)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (3+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un ovale, et au voisinage on a le type $(3, 2)$.

Type complexe $3b$: Une courbe elliptique lisse Γ_1 et une courbe rationnelle Γ_2 avec un point double a , s'intersectant en un point b transversalement.

Les courbes Γ_1 et Γ_2 sont réelles, aussi a et b sont deux points réels.

En utilisant l'argument (3.1), p. 49, il existe une composante connexe R_1 (resp. R_2) contenue dans le lieu réel de Γ_1 (resp. Γ_2) et contenant le point b . Si a est un point isolé, alors R_2 est la seule composante connexe de $\Gamma_2(\mathbf{R})$ autre que a . Sinon le point a appartient à R_2 et $\Gamma_1(\mathbf{R})$ contient au plus une composante connexe autre que R_1 , et ne contenant pas b .

Exemples :

1)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un point isolé, et au voisinage on a le type (3, 1).

2)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un point isolé, et au voisinage on a le type (2, 2).

3)

$$y^2 = x^3 + (3+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales, un ovale et un point isolé, et au voisinage on a le type (3, 3).

4)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (-2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est une chaîne de trois ovales, et au voisinage on a le type (2, 2).

5)

$$y^2 = x^3 + (3+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de trois ovals et un oval, et au voisinage on a le type $(3, 3)$.

Type complexe $4b$: Deux courbes rationnelles Γ_1 et Γ_2 (avec un point double) s'intersectant transversalement en un point c

Les courbes Γ_1 et Γ_2 sont les seules composantes irréductibles de la fibre. Le point c est réel.

Si Γ_1 et Γ_2 sont conjugués alors le seul point réel est c .

Si Γ_1 et Γ_2 sont réels, alors a et b sont réels et d'après (3.1), p. 49, il existe une composante connexe R_1 (resp. R_2) formés par des point réels contenue dans Γ_1 (resp. dans Γ_2) et qui contient le point c . Si a et b sont isolés alors la partie réelle de la fibre est $R_1 \cup R_2 \cup \{a, b\}$. Si a est réel isolé et b est un point double avec deux tangentes réelles alors $b \in R_2$ et la partie réelle de la fibre est $R_1 \cup R_2 \cup \{a\}$. Si a et b sont deux points doubles avec deux tangentes réelles alors $a \in R_1$ et $b \in R_2$ et la partie réelle de la fibre est $R_1 \cup R_2$.

Exemples :

1)

$$y^2 = x^3 + (2 + it)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2 - it)v^2 + v.$$

la partie réelle est un point isolé, et au voisinage on a le type $(0, 1)$.

2)

$$y^2 = x^3 + (2 + t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2 - t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovals et deux points isolés, et au voisinage on a le type $(2, 2)$.

3)

$$y^2 = x^3 + (2 - t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2 + t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovals et deux points isolés, et au voisinage on a le type $(3, 2)$.

4)

$$y^2 = x^3 + (-2 + t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2 - t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de trois ovaes et un point isolé, et au voisinage on a le type $(2, 3)$.

5)

$$y^2 = x^3 + (-2 + t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (-2 - t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de quatre ovaes, et au voisinage on a le type $(3, 2)$.

□

Proposition 3.9. *Soit $\pi: X \rightarrow E$ un pinceau réel en courbes stables de genre 2 avec une unique fibre singulière au dessus de 0. Alors l'espace total X peut avoir seulement des singularités aux points doubles de l'unique fibre singulière au dessus de 0. Et ces singularités sont de type A_n .*

Démonstration. Voir [37, § 4]

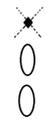
□

Remarque 3.10. *Dans le théorème précédent nous avons traité le cas des pinceaux en courbes stables de genre 2 dont l'espace total X est une surface lisse. Mais en général la surface X peut être singulière.*

Dans le cas général d'une fibration stable de genre 2, on obtient la même liste pour les 3 premières colonnes du tableau, en revanche on a de nouvelles possibilités pour la colonne 4 concernant le type des fibres voisines.

Remarque 3.11. *Une fibration stable de type 1 est toujours lisse.*

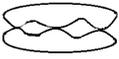
Nous donnons dans les tables 3.2, 3.3 et 3.4 les types supplémentaires.

Partie réelle	Fibres Voisines	Exemples
un point isolé 	(1,1) (0,0)	$y^2 = -(x^2 - t^2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ $y^2 = -(x^2 + t^2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$
un point isolé et un ovale 	(1,1) (2,2)	$y^2 = -(x^2 - t^2)(x - 2)(x^2 + 2)$ $y^2 = -(x^2 + t^2)(x - 2)(x^2 + 2)$
un point isolé et deux ovales 	(3,3) (2,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ $y^2 = (x^2 + t^2)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
une chaîne de 2 ovales 	(2,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)(x^2 + 1)(x + 1)$
une chaîne de 2 ovales et un ovale 	(3,3)	$y^2 = (x^2 - t^2)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

TAB. 3.2 – Type complexe 3a

Partie réelle	Fibres Vois	Exemples
deux points isolés 	(2,2) ou(2,1)	$y^2 = -[(x+1)^2 - t^2][(x-1)^2 - t^2](x^2 + 2)$ $y^2 = -[(x+1)^2 - t^2][(x-1)^2 - t](x^2 + 2)$
deux points isolés et un ovale 	(3,3) ou(3,2)	$y^2 = -[(x+1)^2 - t^2][(x-1)^2 - t^2](x+2)$ $y^2 = -[(x+1)^2 - t^2][(x-1)^2 - t](x+2)$
une chaîne de 2 ovales et un point isolé 	(3,3) ou(3,2)	$y^2 = [x^2 - t^2][(x-2)^2 - t^2](x-1)$ $y^2 = [x^2 - t^2][(x-2)^2 - t](x-1)$
une chaîne de 3 ovales 	(3,3)	$y^2 = [(x-1)^2 - t^2][(x-2)^2 - t^2](x+1)$

TAB. 3.3 – Type complexe 4a

<p>un point isolé</p> 	(1,1)	$y^2 = -(x^2 - t^2)((x^2 + 1)^2 + t)$
<p>trois points isolés</p> 	(3,3) ou(3,2)	$y^2 = -(x^2 - t^2)((x - 1)^2 - t^2)((x - 2)^2 - t^2)$ $y^2 = -(x^2 - t^2)((x - 1)^2 - t^2)((x - 2)^2 - t)$
<p>Deux ovales s'intersectent en 3 points</p> 	(3, 3) (2, 2) (3, 2)	$y^2 = (x^2 - t^2)((x - 1)^2 - t^2)((x - 2)^2 - t^2)$ $y^2 = (x^2 + t^2)((x - 1)^2 - t^2)((x - 2)^2 - t^2)$ $y^2 = (x^2 + t)((x - 1)^2 - t^2)((x - 2)^2 - t^2)$
<p>une chaîne de 2 ovales</p> 	(2,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)((x + i)^2 + t)((x - i)^2 + t)$

TAB. 3.4 – Type complexe 5

Chapitre 4

Invariants réels d'un pinceau en courbes de genre 2

On désigne par $D = \{s \in \mathbf{C}; |s| < \epsilon\}$ et $E = \{s \in \mathbf{C}; |s| < \epsilon^{\frac{1}{n}}\}$ les deux disques centrés en 0 et des rayons ϵ et $\epsilon^{\frac{1}{n}}$ respectivement .

Soient $\pi: X \rightarrow D$ un pinceau en courbes de genre 2 et $\delta: E \rightarrow D$ qui à tout s on associe s^n . Alors il existe un pinceau en courbes stables $\pi_{st}: X_{st} \rightarrow E$ isomorphe à $X \times_D E$ en dehors de 0 ([17, Cor. 2.7] et [58, Th. 6.3]).

On sait que le pinceau $\pi: X \rightarrow D$ est uniquement déterminée par les trois invariants complexe de Namikawa et Ueno (le pinceau stable $\pi_{st}: X_{st} \rightarrow E$, degré et monodromie) détaillés en deuxième Chapitre.

On cherche à déterminer les invariants réels d'un pinceau réel en courbes de genre 2.

Si $t \in D$ alors $\delta^{-1}(t)$ est de cardinal n . On obtient une fonction multivaluée $\sqrt[n]{z}: D \rightsquigarrow E$ dont on a besoin de la relever en une fonction bien définie.

On traite dans la suite le cas $n = 2$. Le cas $n > 2$ se fait de la même manière.

Le théorème principale de ce chapitre utilise en partie la notion de corps des modules et corps de définition et la notion d'uniformisation de la racine carré. Donc, avant de définir les invariants réels d'un pinceau réel en courbes de genre 2, qui est la question principale, je commence par rappeler ces deux notions.

4.1 Corps de module et corps de définition

On se donne un corps K , on note par K_s une clôture séparable de K et \bar{K} sa clôture algébrique. Soient F/K une extension Galoisienne et $G = \text{Gal}(F/K)$. Soit X une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$ définie sur F . On note par $M(X)$ le sous groupe de G constitué par les éléments $\tau \in G$ tel que X et X^τ soient isomorphes sur F .

Definition 4.1. *On appelle corps de module de la courbe X relativement à l'extension F/K les sous-corps $F^{M(X)}$ de F , et on note par K_m . Le corps de module relative à K_s/K est appelé corps de module absolue relative à K .*

Remarque 4.2. *Le corps de module de la courbe X relativement à F/K est contenu dans tout les corps de définition intermédiaire entre K et F . En particulier si le corps de module est un corps de définition alors c'est le plus petit corps de définition intermédiaires entre F et K . Le corps de module de X relative à F/K_m est K_m .*

Question : L'extension Galoisienne F/K étant fixée, on se donne une courbe définie sur F . La question est sous quelle condition, le corps de module relative à l'extension F/K soit un corps de définition.

On suppose que la courbe projective lisse X définie sur F est de genre $g \geq 2$ et $K_m = K$. On sait que l'ordre du groupe d'automorphismes de X définie sur F est égale à n fini ($n \leq 84(g-1)$). On suppose que $(n, \text{car}(K)) = 1$.

Théorème 4.3. *Sous les hypothèses ci-dessus, Il existe un modèle B_K (appelé modèle canonique de B sur le corps de module K de X) de $B = X/\text{Aut}(X)$ défini sur K tel que le revêtement $X \rightarrow B$ à K -base B_K à pour corps de module K . De plus un corps E intermédiaire entre K et F est un corps de définition de la courbe X si et seulement s'il est un corps de définition du revêtement $f: X \rightarrow B$ à K -base B_K .*

Démonstration. [15, Th. 3.1] □

4.2 Condition (suite/scindée)

Soit F/K une extension Galoisienne. On se donne une courbe projective lisse géométriquement irréductible B_K définie sur K . Soit $B = B_K \times_K F$ et A

un diviseur fixé sur $B \times_K K_s$ défini sur K , dont les composantes irréductibles sont de multiplicités 1. Soit la courbe affine, $B_K^* = B_K - \text{supp}(A)$, définie sur K et $B^* = B_K^* \times_K F$.

Definition 4.4. *On dit que la condition ouverte (suite/scindée) est vérifiée pour le triplet $(F/K, B_K, A)$ si la suite exacte, des groupes fondamentaux algébriques, suivante :*

$$1 \longrightarrow \pi_1(B^*) \longrightarrow \pi_1(B_K^*) \longrightarrow G(F/K) \longrightarrow 1$$

est scindée. Autrement dit s'il existe une section $s: G(F/K) \longrightarrow \pi_1(B_K^)$.*

Remarque 4.5. *Dans la littérature, souvent le corps F considéré dans la suite exacte est une clôture séparable K_s de K . Dans ce cas, si la courbe B admet une section sur K (i.e. $B_K(K) \neq \emptyset$) alors la condition ouverte (suite/scindée) est vérifiée [15]. Mais pour F/K une extension Galoisienne quelconque, la condition ouverte (suite/scindée) peut ne pas être vérifiée même si $B_K(K) \neq \emptyset$ [14].*

On considère une courbe projective lisse X de genre $g \geq 2$ définie sur F et de corps de module K relativement à l'extension F/K . Alors on a le théorème suivant :

Théorème 4.6. *On suppose que $(o(\text{Aut}(X)), \text{car}(K)) = 1$ et que la condition ouverte (suite/scindée) est vérifiée, avec $B = X/\text{Aut}(X)$ et A le diviseur de ramification réduit du revêtement $f: X \longrightarrow X/\text{Aut}(X)$. Alors K est un corps de définition de X*

Démonstration. [15, Cor. 5.3] □

4.3 Racine carrée

On se propose de prolonger, sur \mathbf{C} , la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ qui est définie sur \mathbf{R}_+ et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* .

Soit $z \in \mathbf{C}^*$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$. On sera tenté de poser $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\theta} := \sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2}}$.

Malheureusement cela donne lieu à une fonction multivaluée ;

Si $z = r e^{i\theta}$ alors $z = r e^{i(\theta+2\pi)}$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= \sqrt{r e^{i\theta}} = \sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2}} \\ \sqrt{z} &= \sqrt{r e^{i(\theta+2\pi)}} = -\sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2}}\end{aligned}$$

Si on restreint l'argument θ de z sur un domaine de type $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ avec θ_0 fixé, on peut éviter le problème et on obtient une fonction appelée détermination de la racine carrée. Mais cette dernière n'est pas continue sur \mathbf{C} ; en effet \sqrt{z} tend vers $\sqrt{r} e^{\frac{i\theta_0}{2}}$ ou $-\sqrt{r} e^{\frac{i\theta_0}{2}}$ si z tend vers $r e^{i\theta_0}$, selon que θ tend vers θ_0^+ ou $(\theta_0 + 2\pi)^-$.

Ainsi la fonction définie est continue sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^* e^{i\theta_0}$.

Definition 4.7. *L'unique détermination de la racine carrée continue sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et tel que $\sqrt{1} = 1$ est appelée détermination principale.*

Théorème 4.8. *Soit $H = \left\{ f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ tel que } \forall z \in \mathbf{C}, (f(z))^2 = z \right\}$ alors :*

- (1) $\left\{ f \in H \text{ et continue} \right\} = \emptyset$
- (2) $\left\{ f \in H \text{ tel que } \forall a, b \in \mathbf{C}, f(ab) = f(a)f(b) \right\} = \emptyset$

Démonstration. (1) Soit $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ continue tel que $\forall z \in \mathbf{C}, (f(z))^2 = z$. Soit $g(z) = f(e^{it}) e^{-\frac{it}{2}}, \forall t \in \mathbf{R}$. La fonction g est continue et de carré 1, donc elle est constante et vaut 1 ou -1 d'où $f(e^{it}) = a e^{\frac{it}{2}}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ où $a = \pm 1$. En particulier $f(1) = 1$ pour $t = 0$ et $f(1) = -1$ pour $t = 2\pi$, contradiction.

(2) Soit $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ tel que $\forall z \in \mathbf{C}, (f(z))^2 = z$ et $f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbf{C}$. Donc $f(1) = \pm 1$ et $f(1) = f(1.1) = (f(1))^2$ d'où $f(1) = 1$. Cela implique $(f(-1))^2 = f((-1)^2) = f(1) = 1$ ce qui contredit le fait que $f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbf{C}$. \square

Soit U un ouvert de \mathbf{C} , on pose :

$$\mathcal{F}(U) = \{ f: U \longrightarrow \mathbf{C} \text{ continue, tel que } \forall z \in U, (f(z))^2 = z \}$$

Remarque 4.9. *On peut vérifier que si $0 \in U$ ou U contient un cercle centré en 0, alors $\mathcal{F}(U) = \{\emptyset\}$.*

Soit donc U un ouvert non vide et connexe de \mathbf{C}^* . Si f et g deux éléments de $\mathcal{F}(U)$ alors $f^2 = g^2$ et donc $f = \pm g$ puisque U est connexe. Donc $\mathcal{F}(U)$, s'il n'est pas vide, a exactement deux éléments opposés. Soit $z_0 \in U$ et $w_0 \in \mathbf{C}$ tel que $w_0^2 = z_0$, alors chacune des deux déterminations de la racine carrée est uniquement déterminée par la condition $f(z_0) = w_0$ ou $f(z_0) = -w_0$. Prenons $z_0 = 1$ et $w_0 = 1$ et on cherche à résoudre le système :

$$(S) : \begin{cases} f(1) = 1 \\ (f(z))^2 = z \end{cases}$$

Commençons par les solutions sous forme des séries entières au voisinage de 1 :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-1)^n \implies f(1+u) = g(u) = \sum_{n \geq 0} a_n u^n$$

On montre que (S) est équivalent au système différentiel :

$$(E) : \begin{cases} g(0) = 1 \\ 2(1+u)g' = g \end{cases}$$

Finalement on trouve :

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-k + \frac{1}{2}}{k+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

On a obtenue donc une solution holomorphe sur le disque ouvert $U = D(1, 1)$. La restriction de la détermination principale de la racine carrée à $U = D(1, 1)$ est égale à la série entière trouvée ou son opposée (puisque elles ont la même valeur en 1).

On choisit maintenant, arbitrairement, $z_0 \in \mathbf{C}^*$ et $w_0 \in \mathbf{C}$ tel que $w_0^2 = z_0$. On a le système, au voisinage de 0, suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} f(z_0) = w_0 \\ (f(z))^2 = z \end{cases}$$

On peut se ramener facilement au système (S) au voisinage de 1 en posant $f(z) = w_0 h\left(\frac{z}{z_0}\right)$, le système (S_1) est équivalent à $h(1) = 1$ et $(h(z))^2 = z$ que

l'on a résolu et on trouve :

$$f(z) = w_0 \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right)^n$$

qui est en fait, (ou son opposée), la restriction à $D(z_0, |z_0|)$ de la détermination de la racine carré continue sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R} e^{i\theta_0}$, où θ_0 vérifie $D(z_0, |z_0|) \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} e^{i\theta_0}$.

Remarque 4.10. *On sait maintenant définir localement des déterminations de la racine carrée continues, même holomorphes. On a vu d'après le théorème 4.8 que c'est impossible d'en construire globalement. On comprendra à quel étape on ne peut plus prolonger.*

On fait un tour, dans le sens positif, autour de 0 le long du cercle unité $\mathcal{C}(0, 1) \subset \bigcup U_k$ où $U_k = D(e^{\frac{ik\pi}{2}}, 1) \subset \mathbf{C}^*$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Soit f_0 la restriction de la détermination principale de la racine carrée à U_0 . On note par $f_{01} \in \mathcal{F}(U_{01})$ la restriction de f_0 à l'ouvert $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Comme U_{01} est non vide et connexe, il y'a exactement deux déterminations $\pm f_{01}$ de la racine carrée sur U_{01} . On a vu aussi qu'il y a exactement deux déterminations de la racine carrée sur U_1 , qui sont les fonctions $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} f_0\left(\frac{z}{i}\right)$, et dont l'une des deux admet pour restriction à U_{01} la fonction f_{01} , notons f_1 cette fonction.

Les applications $\mathcal{F}(U_0) \longrightarrow \mathcal{F}(U_{01})$ et $\mathcal{F}(U_1) \longrightarrow \mathcal{F}(U_{01})$ sont bijectives.

On obtient ainsi une bijection $\mathcal{F}(U_0) \longrightarrow \mathcal{F}(U_1)$ qui envoie f_0 à f_1 . On continue la procédure le long de U_2, U_3 et finir par $U_4 = U_0$. A la fin on a $f_4 = \pm f_1$.

On conclut l'impossibilité d'un prolongement analytique global.

Une question qui se pose, peut-on prolonger une détermination locale de la racine carré; On se donne $x \in \mathbf{C}^*$ et une fonction f de carrée l'identité continue au voisinage de x , comment propage-t-on l'information au voisinage d'un point y en lequel f n'est pas définie au départ.

La réponse est basée sur le prolongement analytique le long d'un chemin $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}^*$ d'origine x et d'extrémité y . Et la procédure est la suivante :

1. On recouvre $\text{Im } \gamma$ par un nombre fini de disques ouverts $U_i = D(z_i, r_i)$ dans \mathbf{C}^* où $z_i = \gamma(t_i)$, $r_i > 0$, $i = 0, \dots, k$, tel que $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, $z_0 = x$, $z_k = y$ et $\forall i = 1, \dots, k$, $U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset$
2. On note f_0 l'unique élément de $\mathcal{F}(U_0)$ qui coïncide avec f au voisinage de x .

3. On note f_1, \dots, f_k les images successives de f_0 dans $\mathcal{F}(U_1), \dots, \mathcal{F}(U_k)$ par les bijections comme ci-dessus.
4. Le resultat de prolongement analytique de f le long de γ est la fonction f_k .

Remarque 4.11. *Le resultat de prolongement dépend uniquement de la classe d'homotopie du chemin dans \mathbf{C}^* .*

Si $a = b = 1$ alors le chemin γ est appelé lacet de base 1. On sait que tout lacet dans \mathbf{C}^* est homotope à un lacet de la forme $t \mapsto e^{2ik\pi t}$, l'entier k est appelé l'indice de 0 par rapport à γ et l'on note $I(0, \gamma)$.

Proposition 4.12. *Soit f une détermination de la racine carrée au voisinage de 1 et soit γ un lacet de base 1. Alors le resultat de prolongement analytique de f le long de γ est $(-1)^{I(0, \gamma)} f$.*

4.4 Uniformisation de la racine carrée

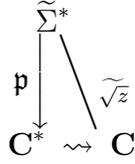
4.4.1 Description formelle de surface de Riemann de \sqrt{z}

Soient f la détermination principale de la racine carrée sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et $U = \mathbf{R}_+^* + i\mathbf{R}$. Soit f_0 la restriction de f à $U_0 = U$. Le prolongement le long du lacet $\lambda(t) = e^{2i\pi t}$ de f_0 se fait en quatre étapes correspond au quatre quarts du tour $U_k = i^k U$.

On note par les f_k les prolongement successives de f_0 , on sait, d'après la proposition 4.12, que $f_4 = -f_0$. Les deux éléments de surface (U_0, f_0) et (U_4, f_4) sont au dessus de U mais il sont disjoints; en faisant un autre tour on revient au premier étage, on trouve alors un parking hélicoïdal à deux étages.

4.4.2 Surface étalée au dessus de \mathbf{C}^*

On note par $\tilde{\Sigma}^*$ la surface de Riemann obtenue ci-dessus. Sa projection sur \mathbf{C}^* est un revêtement double de degré 2. On note par $\mathbf{p}: \tilde{\Sigma}^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ cette projection : l'image réciproque d'un ouvert U suffisamment petit est la réunion disjointe de deux ouverts V_1 et V_2 de $\tilde{\Sigma}^*$ tels que les restrictions $\mathbf{p}|_{V_1}$ et $\mathbf{p}|_{V_2}$ soient des homéomorphismes de V_1, V_2 sur U . La racine carrée s'uniformise sur sa surface de Riemann par le diagramme commutatif suivant :



La fonction multivaluée \sqrt{z} se relève en une fonction (uniforme) holomorphe $\widetilde{\sqrt{z}}$ définie géométriquement comme suit :

Soit U un ouvert de \mathbf{C}^* contenant 1, alors $\mathbf{p}^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des deux ouverts V_1 et V_2 où chaque ouvert V_i correspond à l'une des déterminations ϕ_i de la racine carrée sur U . Soit $\{p_0\} = V_1 \cap \mathbf{p}^{-1}\{1\}$. La valeur de $\widetilde{\sqrt{z}}$ en p_0 est alors $\phi_1(1)$. Maintenant, soient p un point de $\tilde{\Sigma}^*$ et $\tilde{\gamma}$ un chemin de p_0 à p dans $\tilde{\Sigma}^*$. La projection de $\tilde{\gamma}$ par \mathbf{p} est un chemin γ , de $\mathbf{p}(p_0) = 1$ à $\mathbf{p}(p) = z$, dans \mathbf{C}^* . Le prolongement analytique de ϕ_1 le long du chemin γ définit une détermination ϕ de la racine carrée au voisinage de z . Donc la valeur de $\widetilde{\sqrt{z}}$ en p est par définition $\phi(z)$.

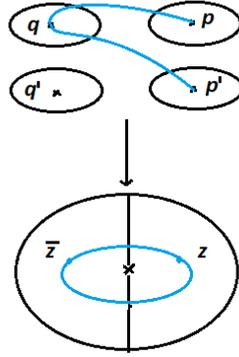
Remarque 4.13. Soit $p, p' \in \tilde{\Sigma}^*$ qui se projettent sur $z, z' \in \mathbf{C}^*$. Alors tout chemin γ de z à z' dans \mathbf{C}^* se relève en un chemin $\tilde{\gamma}$ de p à p' ou bien de p à q' où q' est l'autre point de $\mathbf{p}^{-1}(z')$.

En particulier, si λ est un lacet autour de 0 est à point base 1 et $\tilde{\lambda}$ son relèvement dans $\tilde{\Sigma}^*$, alors :

$$\tilde{\lambda} \text{ est un lacet} \iff I(0, \lambda) \text{ est pair.}$$

4.4.3 Structure réelle sur $\tilde{\Sigma}^*$

Soit $p \in \tilde{\Sigma}^*$. On note $z = \mathbf{p}(p) = r e^{i\theta}$, on considère le lacet $\gamma: t \mapsto r e^{2i\pi t}$ à point base z . Un relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ est un chemin de p à p' où p' est l'autre point appartenant à $\mathbf{p}^{-1}\{z\}$. Un tel relèvement doit passer par l'un des deux points q et q' de $\mathbf{p}^{-1}\{\bar{z}\}$. On choisit un relèvement qui passe par l'un des deux points situé sur le même étage que p et on note ce point par $\sigma(p)$. On a ainsi définie une involution antiholomorphe σ sur $\tilde{\Sigma}^*$.



Maintenant, on note par \tilde{E}^* la surface de Riemann de la racine carrée restreinte à $D^* = D \setminus \{0\}$. La projection \mathbf{p}' de \tilde{E}^* sur D^* est un revêtement étale de degré 2.

La structure réelle définie çà-dessus sur $\tilde{\Sigma}^*$ induit une structure réelle sur \tilde{E}^* noté encore σ .

Remarque 4.14. Dans le cas général où $n > 2$, on peut aussi définir, de la même manière, la surface de Riemann de la racine n 'ième \tilde{E}^* et la fonction holomorphe $\sqrt[n]{z}: \tilde{E}^* \rightarrow E$.

On suppose maintenant que $\pi: X \rightarrow D$ est réelle.

Soit $\pi_{st}: X_{st} \rightarrow E$ le pinceau en courbes stables associé à $\pi: X \rightarrow D$. Comme la fonction $\sqrt{z}: \tilde{E}^* \rightarrow E$ est holomorphe, alors d'après [33, CH. 10, Prop. 3.15], le pinceau $\tilde{\pi}: \tilde{X}_{st} := X_{st} \times_E \tilde{E}^* \rightarrow \tilde{E}^*$ est stable.

On suppose que $\tilde{\pi}: (\tilde{X}_{st}, \sigma_1) \rightarrow (\tilde{E}^*, \sigma_2)$ est réelle. On note par \tilde{X}_η la fibre générique de $\tilde{\pi}$, c'est une courbe projective lisse de genre 2, définie sur $\mathbf{R}(\eta)$. On pose $F = \mathbf{R}(\eta)$, $K = \mathbf{R}(t)$ (où t est un paramètre local du disque D). Soit $\xi \in \text{Gal}(F/K)$. Alors ξ induit un automorphisme sur \tilde{E}^* qu'on note aussi par ξ . L'involution $\xi \circ \sigma_1 \circ \xi^{-1}$ définit une structure réelle sur \tilde{E}^* pour laquelle $\xi \circ \tilde{\pi}$ est réelle. Et les deux pinceaux $\tilde{\pi}$ et $\xi \circ \tilde{\pi}$ sont isomorphes sur \mathbf{R} .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Id}: (\tilde{X}, \sigma_1) & \longrightarrow & (\tilde{X}^\xi, \sigma_1) \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \xi \circ \tilde{\pi} \\
 \xi: (\tilde{E}^*, \sigma_2) & \longrightarrow & (\tilde{E}^*, \sigma')
 \end{array}$$

En particulier \tilde{X}_η et \tilde{X}_η^ξ sont isomorphes sur F , d'où K est le corps de module de \tilde{X}_η relativement à F/K .

Soit $B = \widetilde{X}_\eta / \text{Aut}(\widetilde{X}_\eta)$ et A est le diviseur de ramification du revêtement $f: \widetilde{X}_\eta \longrightarrow B$. D'après théorème 4.3 B admet un modèle B_K définie sur K .

Théorème 4.15. *On suppose que la condition ouverte (suite/scindée) est vérifiée pour le triplet $(F/K, B_K, A)$. Alors La classe du pinceau $\pi: X \longrightarrow D$ est uniquement déterminé par :*

Les deux invariants complexe :

- Le pinceau stable associé $\pi_{st}: X_{st} \longrightarrow E$
- Monodromie.

Et les trois invariants :

- Le pinceau en courbes stable $\widetilde{X}_{st} \longrightarrow \widetilde{E}^*$
- Une structure réelle σ sur \widetilde{X}_{st}
- L'homomorphisme $G(F/K) \longrightarrow \text{Aut}(\widetilde{X}_\eta)$.

Démonstration. La classe complexe de π est uniquement déterminé par les deux premiers invariants. En effet, d'après Namikawa et Ueno [37], pour obtenir le pinceau en courbes $\pi: X \longrightarrow D$ à partir de $\pi_{st}: X_{st} \longrightarrow E$ il nous faut deux étapes. La première consiste à obtenir le modèle minimale lisse de $\pi_{st}: X_{st} \longrightarrow E$ et la seconde consiste à considérer le modèle relativement minimal du quotient de ce dernier par la monodromie. Ce modèle relativement minimale est unique à isomorphisme près [34].

Soit $F = \mathbf{R}(\eta)$ (resp. $K = \mathbf{R}(t)$) le corps de fonctions de \widetilde{E}^* (resp. de D), alors F/K est une extension galoisienne de degré n .

La fibre générale \widetilde{X}_η de \widetilde{X}_{st} est une courbe projective lisse de genre 2, définie sur F , et K est le corps de module de \widetilde{X}_{st} relativement à l'extension F/K .

La condition ouverte (suite/scinde) implique l'existence d'une section de l'application $\pi_1(B_K^*) \longrightarrow G(F/K)$ notée $s: G(F/K) \longrightarrow \pi_1(B_K^*)$, on conclut, d'après le théorème 4.6, que le revêtement $f: \widetilde{X}_\eta \longrightarrow \widetilde{X}_\eta / \text{Aut}(\widetilde{X}_\eta)$ est définie sur K , par suite la courbe \widetilde{X}_η descend sur K .

Soit $\phi_K: \pi_1(B_K^*) \longrightarrow \text{Aut}(\widetilde{X}_\eta)$ le morphisme correspond au revêtement f [14, § 2.4], alors le modèle f_K de f sur K est déterminé par le revêtement $f \otimes_K F$ et le morphisme $\phi_K \circ s: G(F/K) \longrightarrow \text{Aut}(\widetilde{X}_\eta)$ [14, §2.9]. Finalement l'homomorphisme $G(F/K) \longrightarrow \text{Aut}(\widetilde{X}_\eta)$ nous permet de choisir une forme de \widetilde{X}_η sur K . □

Conséquence 4.16. *(du théorème 4.15) Dans [1] nous avons déterminé le nombre des composantes connexes des fibres voisines de $\pi^{-1}(0)$ pour les pin-*

ceaux réels en courbes stables. Le théorème 4.15 nous permet de calculer le nombre des composantes connexes des fibres voisines dans le cas d'un pinceau réel en courbes de genre 2 en utilisant celles du pinceau stable associé.

Remarque 4.17. *Le premier invariant dans le théorème 4.15 (le pinceau stable $\pi_{st}: X_{st} \rightarrow E$) permet de déterminer l'invariant complexe $\deg \pi$, ce qui affirme que deux pinceaux de même classe complexe ont le même triplet d'invariants (M, z, n) et par suite leurs fibres singulières sont de même type complexe.*

Chapitre 5

Pincesaux réels en courbes de genre 2 : Type elliptique

Soient $\pi: X \rightarrow D$ un pinceau en courbes de genre 2 et $(M, z, n) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$ le triplet d'invariants, introduit par Namikawa et Ueno, déterminant d'une manière unique le type complexe de la fibre singulière $X_0 = \pi^{-1}(0)$ de π .

On admet dans la suite la notation de Namikawa et Ueno pour les types complexes des fibres singulières.

On rappelle que X_0 est dit de type elliptique si M est d'ordre fini. Et dans ce cas z correspond, comme étant un point de l'espace des modules des courbes stables de genre 2, à une courbe projective lisse de genre 2 (i.e. $z \in \mathcal{M}^*$) ou deux courbes elliptiques s'intersectent transversalement en un point (i.e. $z \in \mathcal{N}^*$) voir [Ch. II, §3]. Dans le premier cas X_0 est dit de type elliptique 1 quand à la deuxième il est dit de type elliptique 2.

Dans ce chapitre on se propose d'étudier les pincesaux réels en courbes de genre 2 dont les fibres singulières sont de type elliptique. Dans le cas complexe, Namikawa et Ueno [37] ont donné une méthode analytique permet de construire les fibres singulières de type elliptique. Nous allons suivre leur construction pour traiter le cas réel pour le type elliptique 1, par contre pour le cas elliptique 2 nous utilisons le travail de Q. Liu [34] en s'inspirant du travail de Silhol dans le cas des fibrations elliptiques [51, Ch. 7].

5.1 Fibres singulières de type elliptique 1

5.1.1 Construction des fibres singulières de type elliptique 1

On suppose dans la suite que X est minimale.

On a rappelé dans [Ch. II, §3] la construction du triplet d'invariants (M, z, n) introduite par Namikawa et Ueno et que si M est d'ordre fini, $n = 0$ et $z \in \mathcal{M}^*$ la fibre singulière est dit de type elliptique 1.

Inversement, on se donne un couple $(M, Z) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \mathcal{M}^*$. Soient $\tau \in \mathcal{M}$ un représentant de Z et C une courbe projective lisse de genre 2 associée à τ alors M est la représentation d'un automorphisme holomorphe g_0 de C (décrit explicitement dans [37]).

Soit $E = \{s \in \mathbb{C}; |s| < \epsilon^{\frac{1}{n}}\}$ avec $n = \text{ord}(M)$.

On pose $\mathfrak{D} = E \times C$, et on note par \mathfrak{G} le groupe cyclique d'ordre n engendré par l'automorphisme $g : (s, p) \mapsto (e_n(s), g_0(p))$ de \mathfrak{D} , où $e_n = \exp(\frac{2i\pi}{n})$.

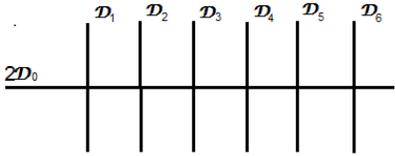
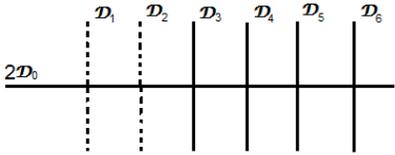
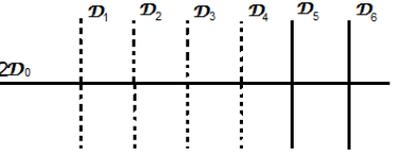
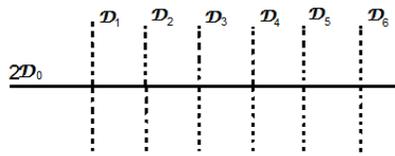
Soit $\tilde{\mathfrak{D}}$, le modèle minimal lisse du quotient $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$, alors $\tilde{\mathfrak{D}} \rightarrow D$ est un pinceau en courbes de genre 2. La fibre singulière au dessus de $s = 0$ est la fibre désirée.

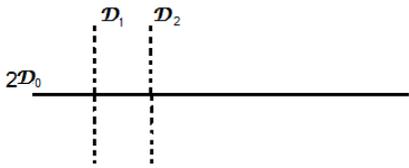
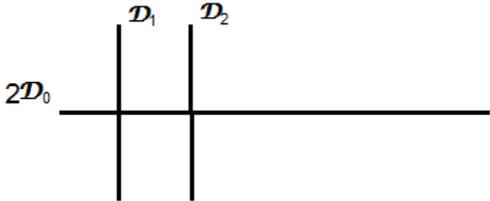
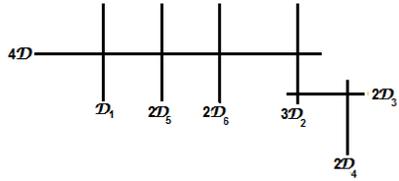
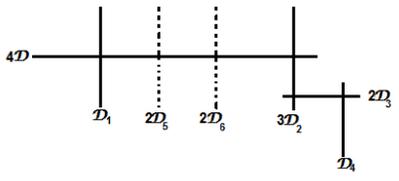
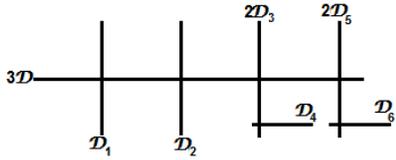
5.1.2 Classification réelle des fibres singulières de type elliptique 1

On suppose maintenant que $\pi : X \rightarrow D$ est un pinceau réel en courbes de genre 2, dont la fibre singulière est de type elliptique 1. On désigne par $X_0 = \sum_{i=1}^k n_i D_i$ le diviseur associé à la fibre singulière de π au dessus de 0.

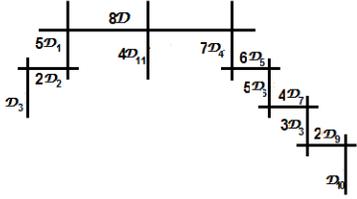
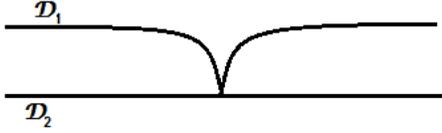
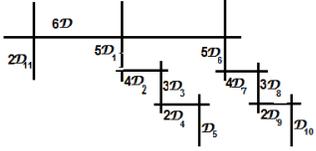
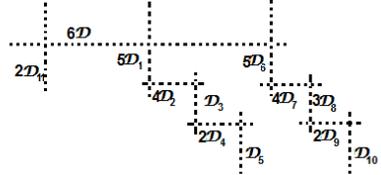
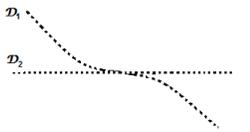
Le but de ce paragraphe est de donner les types de configuration réels possibles de X_0 . De façon schématique on peut représenter le type de configuration réel de X_0 comme dans le tableau du théorème suivant où on a noté par ——— les composantes irréductibles réelles et par ----- les composantes irréductibles non réelles.

Théorème 5.1. *Soit $X \rightarrow D$ un pinceau réel en courbes de genre 2 dont la fibre singulière est de type elliptique 1. Le tableau ci-dessous donne pour chaque type complexe les types de configuration réels possibles. (voir [37] pour le cas complexe) :*

Type complexe	com-	Monodromie	Type de configuration réel
I_{0-0-0}		$I\ 1$	 <p style="text-align: center;">régulière</p>
I_{0-0-0}^*		$I\ 2$	
			
			
			

<p><i>II</i></p>	<p><i>II 1b</i></p>	
<p><i>VI</i></p>	<p><i>II 2d</i></p>	
<p><i>III</i></p>	<p><i>II 3c</i></p>	
<p><i>III</i></p>	<p><i>II 3c</i></p>	
<p><i>III</i></p>	<p><i>II 3c</i></p>	

<p><i>IV</i></p>	<p><i>II 4c</i></p>	

VII*	IV 1c	
VII	IV 1d	
V*	IV 2a	 
V	IV 2b	 

TAB. 5.1 –

Dans les colonnes 1 et 2 nous utilisons les notations de Namikawa et Ueno [38] et Ueno [56] respectivement.

Démonstration. Nous nous donnons dans chaque type un couple $(M, Z) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \mathcal{M}^*$. On note par C une courbe projective lisse de genre 2 de matrice des périodes (I, τ) où τ est un représentant de Z et par g l'automorphisme sur \mathfrak{D} défini dans le paragraphe précédent. Soient $\{p_1 \dots p_k\}$ l'ensemble des points de \mathfrak{D} fixés par g . Les points singuliers de $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ sont les points \mathfrak{p}_i classes des points p_i . Donc le modèle lisse X du quotient $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ est obtenu par résolution canonique des singularités de ce dernier et le type complexe de la fibre singulière au dessus de $s = 0$ est donnée par ([37, § 7]).

Type [I_{0-0-0}] :

La fibre à l'origine est une courbe projective lisse de genre 2 qui est réelle car c'est l'unique composante irréductible de la fibre.

Type [I_{0-0-0}^*] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (-s, x, -y)$, et possède six points fixes $\{p_i = (0, a_i, 0)\}$. Les points singuliers de $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ sont les points \mathfrak{p}_i classes des points p_i .

La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 2\mathcal{D} + \sum_{i=1}^6 \mathcal{D}_i$$

où \mathcal{D} (courbe rationnelle lisse) est la transformée stricte de $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ et pour tout i , la composante \mathcal{D}_i est la droite projective correspondant au point \mathfrak{p}_i dans la résolution des singularités.

Soit σ la structure réelle usuelle sur \mathfrak{D} définie par $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$. On a $\sigma \circ g = g \circ \sigma$, donc l'involution σ induit une structure réelle sur $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ et comme

σ laisse globalement invariant l'ensemble des points singuliers de $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$, alors on a ou bien $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_i$ et dans ce cas \mathcal{D}_i est réelle comme composante irréductible de X , ou bien $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_j$ où $i \neq j$, et dans ce cas $\sigma(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_j$. On a alors 4 possibilités pour le choix des a_i (deux à deux conjugués, deux réels et les autres complexes conjugués deux à deux, quatre réels et deux complexes conjugués ou les six sont réels) et donc finalement nous avons quatre types réels.

Type [II] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (-s, -x, y)$, et possède deux points fixes $p_1 = (0, 0, 1)$ et $p_2 = (0, 0, -1)$. Ainsi $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ a deux points singuliers \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 correspondant respectivement aux deux points fixes p_1 et p_2 . La fibre singulière au dessus de 0 est :

$$X_0 = 2\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

où la courbe elliptique lisse \mathcal{D} est la transformée stricte de $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont deux courbes rationnelles lisses correspondant aux résolutions des points singuliers \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 .

On considère la structure réelle usuelle σ sur \mathfrak{D} définie par $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$. On a $\sigma \circ g = g \circ \sigma$, donc l'involution σ induit une structure réelle sur $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ et $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_i$. Par suite \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont réelles.

La structure réelle définie par $\sigma_1(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, -\bar{y})$, envoie \mathcal{D}_1 sur \mathcal{D}_2 .

D'où les deux possibilités décrites dans le tableau.

Type [VI] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x(x^4 + \alpha x^2 + 1)$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (is, -x, iy)$, et possède deux points fixes $p_1 = (0, 0, 0)$ et $p_2 = (0, p_\infty)$.

L'automorphisme $g^2 : (s, x, y) \mapsto (-s, x, -y)$ possède deux points fixes autres

que p_1 et p_2 donnés par $p_3 = (0, \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}}, 0)$ et $p_4 = (0, \sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}}, 0)$. Ainsi $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ possède quatre points singuliers $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ et \mathfrak{p}_4 classes des points p_1, p_2, p_3 et p_4 respectivement. La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 4\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + 3\mathcal{D}_2 + 2\mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4 + 2\mathcal{D}_5 + 2\mathcal{D}_6$$

où \mathcal{D} est la transformée stricte de $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ et \mathcal{D}_1 correspondant au point singulier \mathfrak{p}_1 . Les droites projectives $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ et \mathcal{D}_4 correspondant au point singulier \mathfrak{p}_2 . Et $\mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6$ correspondant respectivement aux points \mathfrak{p}_3 et \mathfrak{p}_4 . On considère l'action de Galois induite par une structure réelle sur les composantes irréductibles de la fibre singulière. Une composante irréductible de X_0 est réelle ou la conjuguée d'une autre composante de même type et même multiplicité, on a donc $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ et \mathcal{D}_4 sont réelles, ainsi on a exactement deux types réelles. Considérons la structure réelle usuelle σ qui envoie \mathcal{D}_5 sur \mathcal{D}_6 pour $\alpha = 0$. Et qui laisse fixe globalement \mathcal{D}_5 et \mathcal{D}_6 si $\alpha \neq 0$.

Type [III] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (e_3s, e_3x, y)$, et possède quatre points fixes $p_1 = (0, 0, 1), p_2 = (0, 0, -1), p_3 = (0, p_\infty)$ et $p_4 = (0, q_\infty)$ dont les deux derniers correspondant au point à l'infini après résolution de singularité. Ainsi $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ a quatre points singuliers $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ et \mathfrak{p}_4 correspondant respectivement aux points p_1, p_2, p_3 et p_4 . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 3\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + 2\mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4 + 2\mathcal{D}_5 + \mathcal{D}_6$$

où \mathcal{D} est une courbe rationnelle et c'est le modèle lisse d'une courbe $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$. Et les deux courbes lisses \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 correspondant aux deux points singuliers \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 . Les courbes rationnelles lisses \mathcal{D}_3 et \mathcal{D}_4 (resp. \mathcal{D}_5 et \mathcal{D}_6) correspondant au point singulier \mathfrak{p}_3 (resp. \mathfrak{p}_4).

Soit \tilde{C} la courbe projective singulière plane donnée par l'équation affine :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$$

En coordonnées homogènes : on pose $x = \frac{z_1}{z_0}$, $y = \frac{z_2}{z_0}$ et on a :

$$z_0^4 z_2^2 = z_1^6 + \alpha z_0^3 z_1^3 + z_0^6$$

La courbe \tilde{C} a comme point singulier l'unique point à l'infini $p = (0 : 0 : 1) \in \{z_2 \neq 0\}$. On pose $X = \frac{z_0}{z_2}$, $Y = \frac{z_1}{z_2}$, l'équation affine dans $\{z_2 \neq 0\}$ est :

$$X^4 = X^6 + \alpha X^3 Y^3 + Y^6$$

La courbe affine \tilde{S} donnée par cette équation possède un seul point singulier $(0, 0)$.

On considère le bimeromorphisme F de \mathbb{C}^2 défini par :

$$F(X, Y) = (u, v) = \left(\frac{X}{Y}, \frac{Y^3}{X^2} \right)$$

l'application F induit une application holomorphe de $\mathbb{C}^2 - \{XY = 0\}$ dans $\mathbb{C}^2 - \{uv = 0\}$. Et la clotûre de Zariski de $F(\tilde{S} - (0, 0))$ est une courbe affine S donnée par l'équation :

$$u = v^2(1 + \alpha u^2 + u^4)$$

On en déduit que S est un modèle lisse de \tilde{S} et les deux points $p_\infty = (0, 1)$ et $q_\infty = (0, -1)$ correspondent au point $(0, 0)$.

Et enfin $C = \tilde{C} - p \cup S$ est un modèle non singulier de \tilde{C} .

Si on considère la structure réelle usuelle σ sur \mathfrak{S} définie par $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ alors p_1 et p_2 sont deux points réels. L'involution σ induit sur la carte $\{z_2 \neq 0\}$ l'involution $(X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y})$, qui induit encore la structure réelle sur S définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$$

et on a alors p_3 et p_4 sont deux points réels et dans ce cas toutes les composantes irréductibles de la fibre singulière sont réelles.

Soit σ_1 la structure réelle définie sur \mathfrak{D} par $\sigma_1(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, -\bar{y})$, on a $\sigma_1(p_1) = p_2$, donc \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont conjuguées. L'involution σ_1 induit sur la carte $\{z_2 \neq 0\}$ l'involution $(X, Y) \mapsto (-\bar{X}, -\bar{Y})$, qui induit encore la structure réelle sur D définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, -\bar{v})$$

et on a alors que p_3 et p_4 sont deux points conjugués et dans ce cas on a le type de configuration réel suivant :

$$X_0 = 3\mathcal{D} + (1 + \sigma_1)\mathcal{D}_1 + 2(1 + \sigma_1)\mathcal{D}_3 + (1 + \sigma_1)\mathcal{D}_4$$

Type [IV] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (e_6 s, e_3 x, -y)$, et ne possède aucun point fixe. L'automorphisme $g^2(s, x, y) = (e_6^2 s, e_3^2 x, y)$ possède quatre points fixes équivalents à $p_1 = (0, 0, 1)$, $p_2 = (0, p_\infty)$. Et $g^3(s, x, y) = (e_6^3 s, x, -y)$ possède six points fixes équivalents à $p_3 = (0, (\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$ et $p_4 = (0, (\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$.

Ainsi $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ a quatre points singuliers \mathfrak{p}_1 , \mathfrak{p}_2 , \mathfrak{p}_3 et \mathfrak{p}_4 correspondant respectivement aux p_1 , p_2 , p_3 et p_4 . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + 4\mathcal{D}_1 + 2\mathcal{D}_2 + 2\mathcal{D}_3 + 3\mathcal{D}_4 + 3\mathcal{D}_5$$

où \mathcal{D} est la transformée stricte de $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$. Les deux droites projectives \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 correspondant au point singulier \mathfrak{p}_1 . Et \mathcal{D}_3 , \mathcal{D}_4 et \mathcal{D}_5 correspondant respectivement aux points \mathfrak{p}_2 , \mathfrak{p}_3 et \mathfrak{p}_4 .

Les composantes \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont réelles. Les deux composantes \mathcal{D}_4 et \mathcal{D}_5 sont conjuguées par la structure réelle usuelle si $\alpha = 0$. Et elles sont réelles sinon. On a donc deux types de configuration réels.

Type [VII*] :

C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (e_8 s, ix, e_8^5 y)$, et possède deux points fixes $p_1 = (0, 0, 0)$, $p_2 = (0, p_\infty)$ ainsi que g^2 et g^3 . Et $g^4(s, x, y) = (-s, x, -y)$ possède quatre points fixes équivalents à $p_3 = (0, e^{\frac{i\pi}{4}}, 0)$, $p_4 =$

$(0, e^{\frac{5i\pi}{4}}, 0)$. Ainsi $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ possède quatre points singuliers $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ et \mathfrak{p}_4 correspondent respectivement aux points p_1, p_2, p_3 et p_4 . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 8\mathcal{D} + 5\mathcal{D}_1 + 2\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 + 7\mathcal{D}_4 + 6\mathcal{D}_5 + 5\mathcal{D}_6 + 4\mathcal{D}_7 + 3\mathcal{D}_8 + 2\mathcal{D}_9 + \mathcal{D}_{10} + 4\mathcal{D}_{11}$$

Une involution sur X_0 transforme une composante irréductible de la fibre en une autre de même multiplicité et de même type. Et deux composantes irréductibles conjuguées coupent une même composante réelle ou deux composantes conjuguées. Donc toutes les composantes irréductibles de la fibre sont réelles . Ainsi on a un seul type de configuration réel.

Type [VII*] :

La courbe C est un modèle projective lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

La fibre singulière à l'origine est formée d'une courbe cuspidale et d'une courbe rationnelle lisse donc on a seulement un type de configuration réel.

Type [V*] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + 1$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (e_6s, e_6, -y)$, et possède deux points fixes $p_1 = (0, q_\infty), p_2 = (0, p_\infty)$ correspondant au point à l'infini après résolution de singularités, ainsi que g^3 . L'automorphisme g^2 a aussi deux points fixes équivalent à $(0,0,1)$. Ainsi $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ possède trois points singuliers $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, et \mathfrak{p}_3 correspondant respectivement aux points p_1, p_2 et p_3 . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + 5\mathcal{D}_1 + 4\mathcal{D}_2 + 3\mathcal{D}_3 + 2\mathcal{D}_4 + \mathcal{D}_5 + 5\mathcal{D}_6 + 4\mathcal{D}_7 + 3\mathcal{D}_8 + 2\mathcal{D}_9 + \mathcal{D}_{10} + 2\mathcal{D}_{11}$$

où \mathcal{D} est la transformée stricte de $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$. les composantes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ et \mathcal{D}_5 correspondent au point singulier \mathfrak{p}_1 . Et les composantes $\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_8, \mathcal{D}_9$ et \mathcal{D}_{10} correspondant au point singulier \mathfrak{p}_2 . \mathcal{D}_{11} correspondant au point \mathfrak{p}_3 . Soit \tilde{C} la courbe projective singulière plane donnée par l'équation affine :

$$y^2 = x^6 + 1$$

En coordonnées homogènes : on pose $x = \frac{z_1}{z_0}$, $y = \frac{z_2}{z_0}$ et on a :

$$z_0^4 z_2^2 = z_1^6 + z_0^6$$

La courbe \tilde{C} a uniquement comme point singulier le point à l'infini $p = (0 : 0 : 1) \in \{z_2 \neq 0\}$. On pose $X = \frac{z_0}{z_2}$, $Y = \frac{z_1}{z_2}$, l'équation affine dans $\{z_2 \neq 0\}$ est :

$$X^4 = X^6 + Y^6$$

La courbe affine \tilde{S} donnée par cette équation a un seul point singulier $(0, 0)$.

On considère le biméromorphisme F de \mathbb{C}^2 défini par :

$$F(X, Y) = (u, v) = \left(\frac{X}{Y}, \frac{Y^3}{X^2} \right)$$

l'application F induit une application holomorphe de $\mathbb{C}^2 - \{XY = 0\}$ dans $\mathbb{C}^2 - \{uv = 0\}$. Et la clôture de Zariski de $F(\tilde{S} - (0, 0))$ est une courbe affine S donnée par l'équation :

$$u = v^2(1 + u^4)$$

On a alors S est un modèle lisse de \tilde{S} et les deux points $p_\infty = (0, 1)$ et $q_\infty = (0, -1)$ correspond au point $(0, 0)$.

Et enfin $C = \tilde{C} - p \cup S$ est un modèle non singulier de \tilde{C} .

On considère la structure réelle usuelle σ sur \mathfrak{S} définie par $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$. L'involution σ induit sur la carte $\{z_2 \neq 0\}$ l'involution $(X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y})$, qui induit encore la structure réelle sur S définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$$

et on alors p_1 et p_1 sont deux points réels et dans ce cas tout les composantes irréductible de la fibre singulière sont réelles.

Soit σ_1 la structure réelle définie sur \mathfrak{D} par $\sigma_1(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, -\bar{y})$. L'involution σ_1 induit sur la carte $\{z_2 \neq 0\}$ l'involution $(X, Y) \mapsto (-\bar{X}, -\bar{Y})$, qui induit encore la structure réelle sur S définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, -\bar{v})$$

et on alors p_1 et p_2 sont deux points conjuguées et dans ce cas on le type de configuration réel suivant :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + \mathcal{D}_{11} + (1 + \sigma_1) \sum_{i=1}^5 \mathcal{D}_i$$

Type [V] :

La courbe C est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + 1$$

L'automorphisme g est donné par $g(s, x, y) = (e_6 s, e_6 x, y)$, et possède deux points fixes $p_1 = (0, 0, 1)$ et $p_2 = (0, 0, -1)$. L'automorphisme g^2 possède deux points fixes, autres que p_1 et p_2 , équivalents à $p_3 = (0, p_\infty)$ où p_∞ est le point à l'infini de la courbe C . Et enfin g^3 ne possède pas de points fixes autres que $p_1 = (0, 0, 1)$ et $p_2 = (0, 0, -1)$. Donc le quotient $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ possède trois points singuliers \mathfrak{p}_1 , \mathfrak{p}_2 , et \mathfrak{p}_3 correspondant respectivement aux points p_1 , p_2 et p_3 . Soit X_3 la surface obtenue après la résolution canonique des singularités. La fibre singulière de X_3 au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + 4\mathcal{D}_3 + 2\mathcal{D}_4$$

où \mathcal{D} est une courbe rationnelle lisse. C' est la transformée stricte de $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$. Les courbes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_4 correspondent aux points singuliers \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 respectivement. Les droites projectives \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_3 correspondent au point singulier \mathfrak{p}_2 . Les composantes irréductible \mathcal{D} , \mathcal{D}_3 et \mathcal{D}_4 sont réelles, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont complexes conjuguées ou toutes les deux réelles.

Mais on a $\mathcal{D}^2 = -1$, c'est donc une (-1) -courbe, alors il existe une surface lisse X_2 et une application holomorphe $\mu : X_3 \rightarrow X_2$ tel que $\mu(\mathcal{D})$ est un point lisse q [37, §7]. On pose $\mathcal{D}'_i = \mu(\mathcal{D}_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a \mathcal{D}'_3 est une (-1) -courbe donc il existe une surface lisse X_1 et une application holomorphe $\mu' : X_2 \rightarrow X_1$ tel que $\mu'(\mathcal{D}'_3)$ est un point lisse q' . On pose $\mathcal{D}''_i = \mu'(\mathcal{D}'_i)$ pour $i \in \{1, 2, 4\}$, on contracte de nouveau la (-1) -courbe \mathcal{D}''_4 et enfin on obtient le modèle minimal non singulier X de $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ dont la fibre singulière à l'origine est la réunion de deux courbes rationnelles lisses qui s'intersectent en un point double ordinaire. On a donc deux types réels. \square

Remarque 5.2. Les Types [IV - i] et [VIII - i], $i = 1, \dots, 3, 4$, se traitent de la même manière.

5.2 Fibres singulière de type elliptique 2

Les notations sont celles du paragraphe 3.2.

Proposition 5.3. *Il existe un voisinage saturé V de X_0 dans X tel que $\pi^{-1}(\pi(V) \setminus \{0\})$ est analytiquement isomorphe à la surface affine définie dans $\mathbf{C}^2 \times D \setminus \{0\}$ par l'équation :*

$$y = a(t)(a_0(t)x^6 + a_1(t)x^5 + \dots + a_6(t)) = a(t)P_t(x)$$

où a est une fonction méromorphe réelle et les a_i sont des fonctions holomorphes réelles.

Proposition 5.4. *Si la fibre singulière X_0 du pinceau $\pi: X \rightarrow D$ est de type elliptique 2, alors il existe un pinceau en courbes de genre 2, $\hat{\pi}: Y \rightarrow D$ définie par une équation :*

$$y^2 = a(t)P_t(x)$$

tel que la fibre singulière, du modèle minimal \tilde{Y} de Y est de même type complexe que X_0 , et $P_0(x)$ a une racine de multiplicité 3 ou 6.

notation 5.5. (1) *Soit a une fonction méromorphe au voisinage de 0, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{Z}$ et une unique fonction holomorphe b tels que $a = t^\alpha b$ et $b(0) \neq 0$. L'entier α est noté $v(a)$, on vient alors de définir une valuation discrète v sur le corps des fonctions méromorphes au voisinage de 0.*

(2) *Soit $Q(x) = a_0(t)x^6 + a_1(t)x^5 + \dots + a_6(t)$.*

Pour $0 \leq j \leq 3$, on note

$$\theta_j(Q) = \min \left\{ \frac{v(a_i)}{i-j} \text{ tel que } j+1 \leq i \leq 6 \right\}$$

Pour toute fonction méromorphe a , on note

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2|v(a) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 5.6. *Avec les notations de la proposition précédente, si $P_0(x)$ a une racine de multiplicité 3 alors \tilde{Y}_0 est de type $[K_1 - K_2 - m]$ où K_1 et K_2 sont des symboles de Kodaira. Et si $P_0(x)$ a une racine de multiplicité 6 alors \tilde{Y}_0 est de type $[2K_1 - m]$ [33].*

5.2.1 Cas où P_0 admet une racine triple

Lemme 5.7. *Si P_0 admet une racine triple alors Y admet une équation de type $z^2 = at^{3r}S_t(u)$ relative à cette racine telle que $S_t(u) \in \mathbf{C}[u]$, $\deg(S_0(u)) = 3$, $0 \leq \theta_3(S_t) < 1$ et $S_0(u)$ n'est pas un cube si $\theta_3(S_t) = 0$.*

Démonstration. Supposons que P_0 admet une racine triple e . Il existe $r \in \mathbf{N}$ relatifs à e tel que si on pose $x = t^r u + e$, alors on trouve une équation $z^2 = at^r S_t(u)$ satisfaisant les conditions du lemme. L'entier r est déterminé comme suit :

Soit $Q_t(x) = P_t(x + e)$.

Si $\theta_3(Q_t) < 1$ on prend $r = 0$.

Sinon on pose $r_1 = [\theta_3(Q_t)]$ et $Q_t^1(x_1) = Q_t(t^{r_1} x_1)$, on a une équation :

$$z^2 = at^r Q_t^1(x_1)$$

avec $\deg(Q_t^1) = 3$ et $0 \leq \theta_3(Q_t^1) < 1$.

Si $\theta_3(Q_t^1) \neq 0$ ou Q_0^1 n'est pas un cube, on prend $r = r_1$.

Si $\theta_3(Q_t^1) = 0$ et Q_0^1 est un cube, on note e_1 la racine triple de Q_0^1 et on pose $Q_t^2(x_2) = Q_t^1(x_2 + e_1)$ et on continue avec l'équation $z^2 = at^r Q_t^1(x_1)$, ce processus s'arrête après un nombre fini de fois. On trouve alors une suite finie r_1, r_2, \dots, r_k . Finalement on pose $r = r_1 + \dots + r_k$. \square

Definition 5.8. *On suppose donnés S_t et r . On définit T_t et s de la façon suivante*

- Si P_0 a une autre racine triple, on détermine s et T_t comme r et S_t relativement à l'autre racine triple.
- Si $\deg(P_0(x)) = 3$ on remplace x par x^{-1} et z par $x^{-3}z$. Alors 0 sera racine triple de S_0 . On cherche r et T_t relativement à cette racine comme précédemment.
- Si S_0 a une seule racine triple $x_1(0)$ et $\deg(S_0(u)) > 3$ on prend $s = 0$ et $T = x^6 P_t(u^{-1} + x_1(t))$

On peut alors reconnaître le type de la fibre singulière \tilde{Y}_0 en utilisant l'algorithme suivant [33] :

- Si S_0 est à racines simples alors $K_1 = I_0$ si $2|v(at^r)$ et sinon $K_1 = I_0^*$.
- Si $\theta_3(S_t) = \frac{1}{2}$ alors $K_1 = III$ si $2|v(at^r)$ et sinon $K_1 = III^*$.

- Si $\theta_3(S_t) = \frac{1}{3}$ alors $K_1 = \text{II}$ si $2|v(at^r)$ sinon $K_1 = \text{IV}^*$.
- Si $\theta_3(S_t) = \frac{2}{3}$ alors $K_1 = \text{IV}$ si $2|v(at^r)$ sinon $K_1 = \text{II}^*$.

De même, relativement à s et T_t , on détermine K_2 . Et l'entier m est égale à $(r - \delta(at^r) + s - \delta(at^s))/2$.

Remarque 5.9. *Le cas où S_0 admet une racine double est exclu car il nous donne $K_1 = I_k$ ou $K_1 = I_k^*$ avec $k > 0$, et donc la fibre singulière \tilde{Y}_0 n'est jamais de type elliptique 2.*

On se donne une courbe Γ , alors on note par $K(\Gamma)$ une courbe de type K (symbole de Kodaira pour les modèles minimaux de courbes elliptiques) dont on a remplacé une de ses composantes irréductibles de multiplicité 1 par Γ . La configuration d'une fibre de type $[K_1-K_2-m]$ est comme suit :

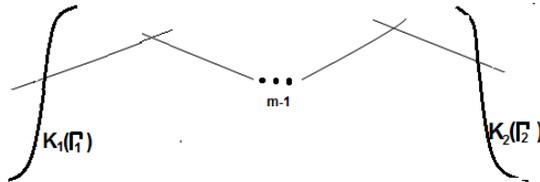


FIG. 5.1 -

On suppose maintenant que π est réelle. Donc la fibre singulière X_0 au dessus de 0 est globalement réelle. On s'intéresse tout d'abord au cas où X_0 est de type $[K_1-K_1-m]$. Dans ce cas si Γ_1 et Γ_2 sont de même type (au sens que $(\Gamma_1 \cdot K_X) = (\Gamma_2 \cdot K_X)$, $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2$ et $p(\Gamma_1) = p(\Gamma_2)$ où K_X désigne le diviseur canonique de X et p le genre arithmétique), alors par action de Galois sur X_0 on a ou bien $K_1(\Gamma_1)$ et $K_1(\Gamma_2)$ sont conjuguées ou bien elles sont globalement réelles.

$K_1(\Gamma_1)$ et $K_1(\Gamma_2)$ sont conjuguées : On commence par construire des exemples où $K_1(\Gamma_1)$ et $K_1(\Gamma_2)$ sont conjuguées, avec $K_1 \in \{I_0, I_0^*, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{II}^*, \text{III}^*, \text{IV}^*\}$. Dans ce cas P_0 admet deux racines triples conjuguées et si E_1 et E_2 désignent les deux composantes irréductibles de la fibre singulière du pinceau stable associé à π alors E_1 et E_2 sont deux courbe elliptiques conjuguées. Et plus que ça, si on note (T_t, s) et (S_t, r) les couples définis précédemment rela-

tivement aux deux racines triples de P_0 alors

$$\begin{cases} r = s \\ \overline{S_t(u)} = T_{\bar{t}}(\bar{u}) \end{cases}$$

Proposition 5.10. *Si le pinceau $Y \rightarrow D$ est défini par une équation de l'un des types suivants :*

$$1. y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 + \alpha t^{2m}(x-i) - it^{3m})((x+i)^3 + \bar{\alpha} t^{2m}(x+i) + it^{3m})$$

$$2. y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 - it^{2m+1}(x-i))((x+i)^3 + it^{2m+1}(x+i))$$

$$3. y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 - it^{3m+1})((x+i)^3 + it^{3m+1})$$

$$4. y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 - it^{3m+2})((x+i)^3 + it^{3m+2})$$

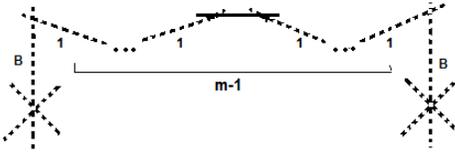
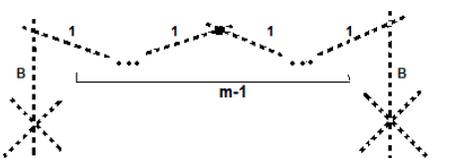
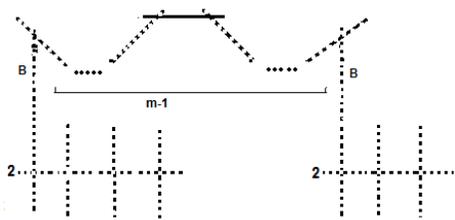
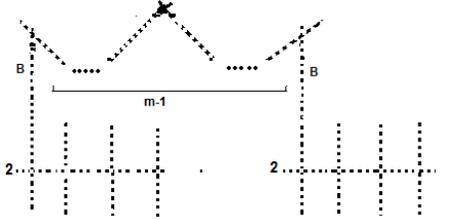
où $\epsilon \in \{0, 1\}$. Alors \tilde{Y}_0 a une configuration de type décrit par la figure 5.1 dont $K_1(\Gamma_1)$ et $K_1(\Gamma_2)$ sont conjuguées.

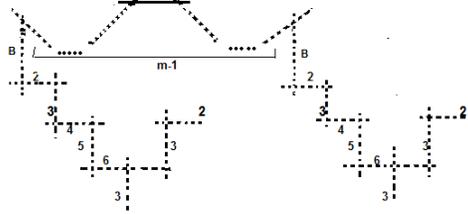
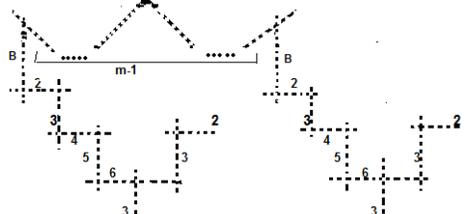
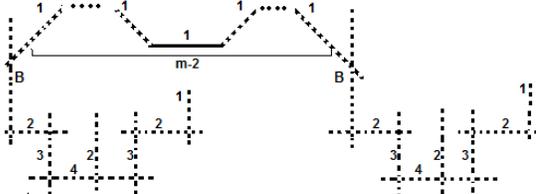
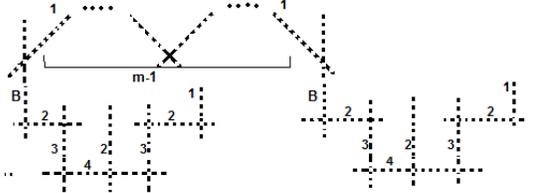
Dans les tableaux ci-dessous je donne les différents types de configuration réels possibles avec des exemples définis par des équations hyperelliptiques

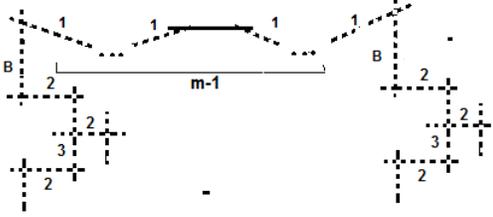
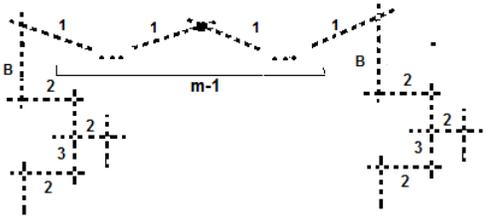
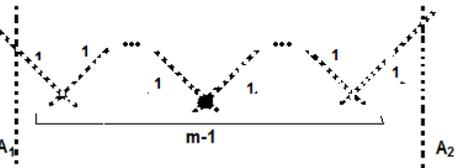
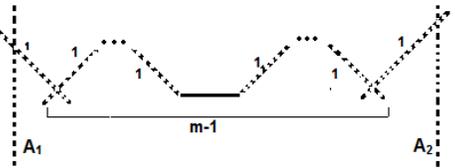
$$y^2 = t^\epsilon R_t(x)Q_t(x)$$

et sous la forme de l'un des types donnés dans la proposition précédente.

Type de config. complexe	type de configuration réel	exemple
[II-II- m], m pair		$R_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+1}$ et $Q_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+1}$ $\epsilon = 1$
[II-II- m], m impair		$R_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+1}$ et $Q_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+1}$ $\epsilon = 1$
[III-III- m], m pair		$R_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m+1}(x - i)$ $Q_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m+1}(x + i)$ $\epsilon = 0$
[III-III- m], m impair		$R_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m+1}(x - i)$ $Q_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m+1}(x + i)$ $\epsilon = 1$

<p>[IV-IV-m], m pair</p>		<p>$R_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+2}$ et $Q_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+2}$</p> <p>$\epsilon = 0$</p>
<p>[IV-IV-m], m impair</p>		<p>$R_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+2}$ et $Q_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+2}$</p> <p>$\epsilon = 1$</p>
<p>[I$_0^*$-I$_0^*$-m], m pair</p>		<p>$R_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m}(x + i) + it^{3m}$ $Q_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m}(x - i) - it^{3m}$</p> <p>$\epsilon = 1$</p>
<p>[I$_0^*$-I$_0^*$-m], m impair</p>		<p>$R_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m}(x - i) - it^{3m}$ $Q_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m}(x + i) + it^{3m}$</p> <p>$\epsilon = 0$</p>

$[\text{II}^*-\text{II}^*-m]$, m pair		$R_t(x) = (x+i)^3 + it^{3m+2}$ et $Q_t(x) = (x-i)^3 - it^{3m+2}$ $\epsilon = 1$
$[\text{II}^*-\text{II}^*-m]$, m impair		$R_t(x) = (x-i)^3 - it^{3m+2}$ et $Q_t(x) = (x+i)^3 + it^{3m+2}$ $\epsilon = 0$
$[\text{III}^*-\text{III}^*-m]$, m pair		$R_t(x) = (x-i)^3 + it^{2m+1}(x-i)$ $Q_t(x) = (x+i)^3 - it^{2m+1}(x+i)$ $\epsilon = 1$
$[\text{III}^*-\text{III}^*-m]$, m impair		$R_t(x) = (x-i)^3 + it^{2m+1}(x-i)$ $Q_t(x) = (x+i)^3 - it^{2m+1}(x+i)$ $\epsilon = 0$

$[IV^*-IV^*-m]$, m pair		$R_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+2}$ $Q_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+2}$ $\epsilon = 1$
$[IV^*-IV^*-m]$, m impair		$R_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+1}$ $Q_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+1}$ $\epsilon = 0$
$[I_0-I_0-m]$, m pair		$R_t(x) = (x+i)^3 - it^{2m}(x+i) + it^{3m}$ $Q_t(x) = (x-i)^3 + it^{2m}(x-i) - it^{3m}$ $\epsilon = 0$
$[I_0-I_0-m]$, m impair		$R_t(x) = (x-i)^3 + it^{2m}(x-i) - it^{3m}$ $Q_t(x) = (x+i)^3 - it^{2m}(x+i) + it^{3m}$ $\epsilon = 1$

TAB. 5.2 -

$K_1(\Gamma_1)$ et $K_2(\Gamma_2)$ sont globalement réelles : On garde toujours les mêmes notations. Si P_0 admet une racine triple réelle alors $K_1(\Gamma_1)$ et $K_2(\Gamma_2)$ sont globalement réelles. Il reste à déterminer l'action de Galois sur les composantes irréductibles de $K_1(\Gamma_1)$ et celles de $K_2(\Gamma_2)$.

Lemme 5.11. *Si K_1 (resp. K_2) est de type I_0 , II , III , II^* ou III^* alors les composantes irréductibles de $K_1(\Gamma_1)$ (resp. $K_2(\Gamma_2)$) sont réelles par action de Galois.*

Si P_0 admet une racine triple réelle et si la fibre singulières est l'une des types figurés dans le tableau suivant alors toutes ses composantes irréductibles sont réelles.

$[I_0-I_0-m]$	$[II-II-m]$	$[III-III-m]$	$[II^*-II^*-m]$	$[III^*-III^*-m]$
$[I_0-II-m]$	$[I_0-III-m]$	$[I_0-II^*-m]$	$[I_0-III^*-m]$	$[II-III-m]$
$[II-II^*-m]$	$[II-III^*-m]$	$[III-II^*-m]$	$[III-III^*-m]$	$[II^*-III^*-m]$

Lemme 5.12. *Si K_1 (resp. K_2) est de type I_0^* , IV ou VI^* alors on a exactement deux types de configuration réel réalisables de $K_1(\Gamma_1)$ (resp. $K_2(\Gamma_2)$).*

Démonstration. Cas où $K = I_0^*$:

On considère l'équation $y^2 = (x^3 + \alpha t^{4m+2}x + t^{6m+3})R_t(x) = P_t(x)$ où R_t est unitaire, de degré 1, 2 ou 3 et $R_0(0) \neq 0$. Si K est le symbole de Kodaira relative à 0 comme racine triple de P_t . Alors $K = I_0^*$ et si $\alpha = 1$ alors le discriminant Δ de l'équation $x^3 + \alpha t^2x + t^3 = 0$ est négatif donc les composantes irréductibles de $K(\Gamma)$ sont réels. Si $\alpha = -2$ alors $\Delta > 0$ et $K(\Gamma)$ a deux composantes conjuguées et les autres sont réelles.

Cas où $K = IV$:

On considère l'équation $y^2 = (x^3 + \alpha t^{6m+2})R_t(x) = P_t(x)$ où R_t est unitaire, de degré 1, 2 ou 3 et $R_0(0) \neq 0$. Soit K le symbole de Kodaira relative à 0 comme racine triple de P_t et $\alpha = \pm 1$. Alors $K = IV$ et si $\alpha = -1$, les composantes irréductibles de $K(\Gamma)$ sont réelles. Si $\alpha = 1$ alors $K(\Gamma)$ a deux composantes conjuguées et une composantes réelle qui est Γ .

Cas où $K = VI^*$:

l'équation $y^2 = (x^3 + \alpha t^4)R_t(x) = P_t(x)$ où R_t est unitaire, de degré 1, 2 ou

3 et $R_0(0) \neq 0$. Soit K est le symbole de Kodaira relative à 0 comme racine triple de P_t . Alors $K = VI^*$ et on a, par action de galois sur les composantes irréductibles de $K(\Gamma)$, deux formes possibles de configuration réel. Et tous les deux sont réalisable et dépendent de la nature des solutions de l'équation $X^2 + \alpha = 0$ (réelles ou complexes conjuguées). \square

5.2.2 Cas de racine de multiplicité 6

L'équation $y^2 = aP_t(x)$ est celle définie dans la proposition 5.4.

Lemme 5.13. *Si P_0 admet une racine de multiplicité 6 alors Y admet une équation de type $z^2 = at^{6r}S_t(u)$ relative à cette racine telle que $S_t(u) \in \mathbf{C}[u]$, $\deg(S_0(u)) = 6$ et $\theta_0(S_t) = \frac{1}{2}$.*

On pose $z = t^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^3z_1$ et $u = t^{\frac{1}{2}}u_1$. On obtient une équation

$$z^2 = H_t(u)$$

tel que $H_t \in \mathbf{C}[t^{\frac{1}{2}}]$ et $H_0(u_1)$ est le cube d'un polynôme séparable de degré 2. On désigne par \mathcal{X}' le modèle minimal du pinceau défini par l'équation $z^2 = H_t(u)$. On refait la même démarche du paragraphe précédent. Finalement la fibre singulière de \mathcal{X}' est de type $[K_1-K_1-2m]$ et ayant la configuration suivante :

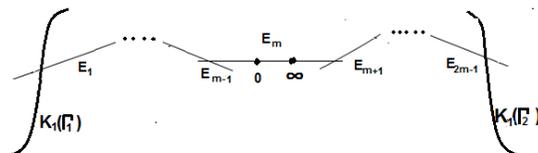


FIG. 5.2 –

On a par construction, une involution sur la fibre singulière laissant globalement invariant la (-2) -courbe E_m et échange les reste des composantes irréductibles de la fibre. Cette involution fixe les deux points 0 et ∞ de la composante rationnelle E_m . Le quotient par cette involution a deux points singuliers de type A_1 qui donne après résolution deux courbes rationnelles d'auto-intersection (-2) , [55, p. 80].

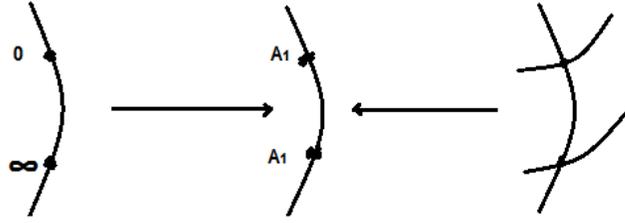


FIG. 5.3 –

On considère le corps de fraction $\mathbf{C}(t^{\frac{1}{2}})$ de $\mathbf{C}[t^{\frac{1}{2}}]$. Il lui correspond une surface de Riemann qui n'est autre que l'uniformisation de la racine carrée.

Descente sur \mathbf{R} :

On a besoin de considérer deux cartes pour l'uniformisation de la racine carrée, il y en a deux possibilités à isomorphisme près de descente sur \mathbf{R} . Une d'eux est telle que sa partie réelle est non vide. On utilise cette dernière comme une structure réelle de la base de la fibration.

Rappelons que si $\pi: X \rightarrow \Delta$ est un pinceau en courbes de genre 2, alors il existe un \mathbf{P}^1 -fibré \mathbf{P} et une application rationnelle $\phi: X \rightarrow \mathbf{P}$ au dessus de Δ , qui est un revêtement double ramifié le long d'une courbe sextigonale \mathcal{B} ayant seulement des singularités de types $((0), (I_k), (II_k), (III_k), (IV_k), (V))$ [23].

Si $\psi: \tilde{P} \rightarrow P$ est l'éclatement des points singuliers du B , alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{\mathbf{P}} \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \psi \\
 X & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}
 \end{array}$$

Tel que $\tilde{\phi}$ soit un revêtement double sur $\tilde{\mathbf{P}}$, \tilde{X} une surface lisse et ρ est un morphisme birationnel.

Dans le cas où la courbe \mathcal{B} admet une singularité de type (II_k) ou (III_k) dans une fibre F (qui est notre cas) et si \tilde{F} est la transformé stricte de F par ψ , alors la composante E_m dans la figure 5.2 est l'image réciproque de \tilde{F} par le revêtement double $\tilde{\phi}$ car on a un nombre impair de (-2) courbes, pour plus de

détails voir [61].

\mathbf{P} est muni d'une structure réelle, et cette dernière induit, à isomorphisme près, deux structures réelle sur E_m . L'une des deux fixe 0 et ∞ et l'autre envoie 0 à ∞ . Les deux structures passent aux quotients, et les deux (-2) -courbes qui apparaissent après résolutions des deux points singuliers du quotients sont réelles ou conjuguées. Finalement, on obtient les deux possibilités de type de configuration réel, de la fibre singulières de \mathcal{X} , suivantes :

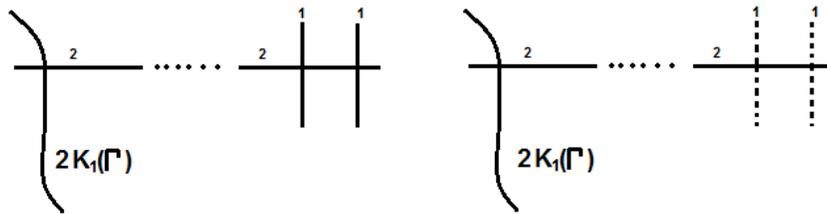


FIG. 5.4 –

La partie $K_1(\Gamma)$ de la fibre est globalement invariante, et l'action de Galois sur cette partie se déduit du paragraphe 5.2.1.

Remarque 5.14. [9, §.4.3.1] Si on désigne par S^2 la sphère de Riemann et $\hat{\sigma}: S^2 \rightarrow S^2$, $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$. Alors si $C \rightarrow S^2$ est un revêtement double ramifié en $2g + 2$ points, $\hat{\sigma}$ ne se relève pas en une involution sur C pour g pair.

Bibliographie

- [1] Akriche, M. , Moulahi, S. : *Fibre singulière d'un pinceau réel en courbes de genre 2*, à paraître dans les annales de la faculté des sciences de Toulouse, 44 pages.
- [2] Akriche, M. , Smirani M. : *Real elliptic surfaces with double section and real tetragonal curves* Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin 19, No. 3, 445-460 (2012). ISSN 1370-1444
- [3] Akriche, M. , Mangolte, F. : *Nombres de Betti des surfaces elliptiques réelles*. Beiträge Zur algebra and geometrie, vol 49, n°1, pp 153-164(2008).
- [4] Arnold, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, Alexander N. : *Singularities of differentiable maps*, Volume 1 et 2, Birkhäuser Mathematics (1985-1988).
- [5] Auroux, D. *Fiber sums of genus 2 Lefschetz fibrations*, Turkish J. Math. 27 , pp. 1-10, (2003).
- [6] Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A. : *Compact complex surfaces*, Springer, (1984).
- [7] Bihan, F., Mangolte, F. : *Topological types of real regular elliptic surfaces*, Geometriae Dedicata 127 (2007), 57-73.
- [8] Bolza, O. : *On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves*, American Journal of Mathematics, Vol. 10, No. 1 , pp. 47-70, (1887).
- [9] Bujalance, E., Cirre F. J., Gamboa J. M., Gromadzki, G. : *Symmetries of compact Riemann surfaces*, Springer, (2007).
- [10] Catanese, F., Mangolte, F. : *Real singular Del Pezzo surfaces and 3-folds fibred by rational curves, I*, Michigan Math. J. 56, pp. 357-373, (2008).

- [11] Catanese, F., Mangolte, F. : *Real singular Del Pezzo surfaces and 3-folds fibred by rational curves, II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup 42, pp.531-557, (2009).
- [12] Debarre, O. : *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours Spécialisés 6, Société Mathématique de France, EDP Sciences, (1999).
- [13] Debarre, O. : *introduction to mori theory*, Cours de M2, Université Paris Diderot (2010-2011).
- [14] Dèbes, P., Douai, J. C. : *Algebraic covers : field of moduli versus field definition*, Annales Sci. E.N.S., 4ème série, 30, pp. 303-338, (1997).
- [15] Dèbes, P., Emsalem, M. : *On fields of moduli of curves*, Journal of Algebra 211, 42-56 (1999).
- [16] Degtyarev, A., Itenberg, I., Kharlamov, V. : *On deformation types of real elliptic surfaces*, Amer. J. Math. 130 (2008), no. 6, 1561-1627.
- [17] Deligne, P., Mumford, D. : *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 36, pp. 75-110 (1969).
- [18] Farkas, H.M., Kra, I. : *Riemann surfaces*, Springer-Verlag New York Inc, (1980).
- [19] Giraud, J. : *Cohomologie non abélienne* Grundlehren Math. Wiss. 179, Springer-Verlag (1971).
- [20] Griffiths, P., Harris, J. : *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons, New York Chichester Brisbane Toronto, (1978).
- [21] Gross, B., Harris, J. : *Real algebraic curves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 14, pp. 157-182 (1981).
- [22] Hartshorne, R. : *Algebraic geometry*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1977).
- [23] Horikawa, E. : *On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2*, In Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to Kodaira, pp. 79-90, Cambridge (1977).
- [24] Horikawa, E. : *Local Deformation of Pencil of Curves of Genus Two*, Proc. Japan Acad., 64, Ser. A pp. 241-244 (1988).
- [25] Hironaka, H. : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. pp. 109-203 (1964).

- [26] Itaka, S. : *On the degenerates of normally polarized abelian variety of dimension 2 and an algebraic curve of genus two*, Master degree thesis, University of Tokyo, (1967).
- [27] Kobayashi, S. : *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, New York, Marcel Dekker, Inc., (1970).
- [28] Kodaira, K. : *On compact complex analytic surfaces*, I, Ann. Math. 71, pp. 111-162 (1960). II, Ann. Math. 77, pp. 563-626 (1963). III, Ann. Math. 78, pp. 295-626 (1963).
- [29] Kollár, J. : *Real algebraic threefolds. I. Terminal singularities. Dedicated to the memory of Fernando Serrano*, Collect. Math. 49, pp. 335-360 (1998).
- [30] Kollár, J. : *Real algebraic threefolds. IV. Del Pezzo fibrations*, Complex analysis and algebraic geometry, pp. 317-346, de Gruyter, Berlin, (2000).
- [31] Lê Dũng T., Meral T. : *Simple singularities and simple Lie algebras*, TWMS Jour. Pure Appl. Math. V.2, N.1, pp. 97-111 (2011).
- [32] Liu, Q. : *Courbes stables de genre 2 et leur schéma de modules*, Math. Ann. 295, pp. 201-222 (1993).
- [33] Liu, Q. : *Algebraic Geometry and Arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics (2006).
- [34] Liu, Q. : *Modèles minimaux des courbes de genre 2*, für die reine und angewandte Mathematik, 453 (1994), 137-164.
- [35] Mumford, D. : *Abelian varieties*, Oxford : Oxford university Press (1970).
- [36] Mumford, D., Fogarty, J. and Kirwan, F. : *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2)* Springer-Verlag, Berlin, third edition, (1994).
- [37] Namikawa, Y., Ueno, K. : *On fibers in families of curves of genus two I, singular fibers of elliptic type*, in *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of Y. Akizuki (Y. Kusunoki, S. Mizohata, M. Nagata, H. Toda, M. Yamaguchi, H. Yoshizawa, eds.) pp. 297-371, (1973).
- [38] Namikawa, Y., Ueno, K. : *The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two*, Springer Verlag, pp. 143-186 (1973).
- [39] Néron, A. : *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. Math. I.H.E.S. 21, pp. 361-483 (1964).

- [40] Ogg, A, P. : *On pencils of curves of genus two*, Topology, 5 pp. 355-362, (1966).
- [41] Persson, U. : *Chern invariants of surfaces of general type*, Ann. J. Math.,28 : pp. 377-404, 1906.Compositio Mathematica, tome 43, N1, P. 3-58 (1981).
- [42] Peters, C. : *An introduction to complex algebraic geometry*, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit Leiden and Institut Fourier Grenoble (2004).
- [43] Rebelo, J., Santoro, B. : *Fibrations of Genus Two on Complex Surfaces*, Lect. Notes Math. Vol. 1392. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1989).
- [44] Serre, J. P. : *Corps locaux*, 2 ème éd. Paris : Hermann (1968).
- [45] Serre, J. P. : *Cohomologie galoisienne*, Springer, (5) (ISBN 978- 3-540-58002-7) (1994).
- [46] SGA 1 : *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960/1961, dirigé par A. Grothendieck, SLN 224, Springer-Verlag, 1971, et Documents mathématiques 3, SMF, 2003.
- [47] SGA 4 1/2. *Cohomologie étale*, par P. Deligne, SLN 569, Springer- Verlag, 1977.
- [48] Shimura, G. : *On the field of rationality for an abelian variety*, Nagoya Math., J. 45, 167-178, (1971).
- [49] Siebert, B. , Tian, G. *On the holomorphicity of genus two Lefschetz fibrations*, Ann. of Math. (2) 161 , no. 2, 959-1020, (2005).
- [50] Silhol, R. : *Real algebraic surfaces with rational or elliptic fiberings*, Math. Z. 186, 465-499 (1984).
- [51] Silhol, R. : *Real algebraic surfaces*, Lect. Notes Math. Vol. 1392. Springer Verlag , Berlin Heidelberg New York, (1989).
- [52] Silhol, R. : *Real abelian varieties and the theory of Comessatti*, Math. Z. 181, pp. 345-364 (1982).
- [53] Silhol, R. : *Compactifications of moduli spaces in real algebraic geometry*, Invent. math. 107, pp. 151-202 (1992).

- [54] Skorobogatov, A. : *Torsors and Rational Points*, Cambridge Univ. Press, (2001).
- [55] Slodowy, P. : *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Springer Lecture Notes in Math., (1980).
- [56] Ueno, K. : *On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension two, II. Singular fibres of the first kind*, J. Fac. Sci. Tokyo 19, pp. 163-199 (1972).
- [57] Viehweg, E. : *Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven*, J. Reine Angew. Math. 293 , 284-308 (1977).
- [58] Voisin, C. : *Espaces de modules et construction d'invariants en géométrie*, CNRS et IHÉS.
- [59] Weil, A. : *The field of definition of a variety*, American Journal of Mathematics, Vol. 78, No. 3, pp. 509-524 (Jul., 1956)
- [60] Winters, G. : *On the existence of certain families of curves*, Amer. J. Math., 96, 215-228, (1974).
- [61] Xiao, G. : *Surfaces fibrées en courbes de genre deux*, Berlin : Springer-Verlag, (1985).

Thèse de Doctorat

Samir MOULAH

Pinceaux réels en courbes de genre 2

Real Pencils of curves of genus two

Résumé

Soit $\pi : X \rightarrow D$ un pinceau réel en courbes de genre 2. L'objectif de cette thèse est de donner une classification partielle des fibres singulières possibles ; je donne les types de configurations réelles des fibres singulières et je détermine la topologie des fibres voisines. Je donne aussi les invariants déterminant d'une manière unique la classe réelle de tels pinceaux.

Mots clés

Surfaces algébriques réelles, Fibrations réelles en courbes de genre 2, Espaces de modules des courbes algébriques réelles, Pinceaux réels en courbes stables de genre 2, Fibres singulières des pinceaux réels en courbes, Corps des modules et corps de définition

Abstract

Let $\pi : X \rightarrow D$ be a real pencil of curves of genus two. The goal of this thesis is to give a partial classification of possible singular fibers; we give the types of real configurations of singular fibers and we determine the topology of neighbors fibers. Also we give the invariants determining in a unique way the real class of such pencils

Key Words

Real algebraic surfaces, Real fibrations on curves of genus two, Real pencils of curves of genus two; Fields of moduli and fields of definition; Moduli space of real algebraic curves, Singular fiber of Real pencils of curves