



**HAL**  
open science

# Sur le calcul d'invariants et l'engendrement des noeuds transverses dans les variétés de contact de dimension trois

Thomas Guyard

► **To cite this version:**

Thomas Guyard. Sur le calcul d'invariants et l'engendrement des noeuds transverses dans les variétés de contact de dimension trois . Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Nantes, 2015. Français. NNT: . tel-01387461

**HAL Id: tel-01387461**

**<https://theses.hal.science/tel-01387461>**

Submitted on 25 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Thomas GUYARD**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
**grade de Docteur de l'Université de Nantes**  
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

**École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques**

**Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25**

**Unité de recherche : Laboratoire de mathématiques Jean Leray (LMJL)**

**Soutenue le 9 octobre 2015**

## Sur le calcul d'invariants et l'engendrement des nœuds transverses dans les variétés de contact de dimension trois

### JURY

Président : **M. Frédéric BOURGEOIS**, Professeur, Université Paris-Sud  
Examineurs : **M. Christian BLANCHET**, Professeur, Université Paris Diderot  
**M. Paolo GHIGGINI**, Chargé de recherche, Université de Nantes  
**M. Patrick MASSOT**, Maître de conférences, École Polytechnique  
Directeur de thèse : **M. Vincent COLIN**, Professeur, Université de Nantes  
\*\*\*  
Rapporteurs : **M. John ETNYRE**, Professeur, Georgia Institute of Technology  
**M. Klaus NIEDERKRÜGER**, Maître de conférences, Université Paul Sabatier – Toulouse III



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Géométrie de contact</b>	<b>17</b>
1.1 Théorie des nœuds . . . . .	17
1.2 Géométrie de contact . . . . .	18
1.2.1 Structures de contact . . . . .	18
1.2.2 Exemple fondamental . . . . .	19
1.2.3 Classification des structures de contact . . . . .	20
1.3 Surface dans une variété de contact . . . . .	21
1.4 Nœuds legendriens et transverses . . . . .	24
1.4.1 Nœuds dans une variété de contact . . . . .	24
1.4.2 Réalisation de nœuds legendriens . . . . .	25
1.4.3 Voisinage legendrien standard . . . . .	27
1.4.4 Invariants classiques . . . . .	28
1.4.5 Stabilisations legendriennes et transverses . . . . .	31
1.4.6 Rocades legendriennes . . . . .	32
1.4.7 Relations entre nœuds legendriens et nœuds transverses . . . . .	35
1.5 Livres ouverts . . . . .	37
1.5.1 Définitions . . . . .	37
1.5.2 Classifications . . . . .	38
1.5.3 Construction de livres ouverts . . . . .	39
1.5.4 Inclusion de nœuds . . . . .	43
1.6 Surfaces branchées et domaines fibrés . . . . .	45
<b>2 Relation entre les conjectures de finitude</b>	<b>49</b>
2.1 Finitude des nœuds transverses . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Triangulations et Domaines fibrés</b>	<b>55</b>
3.1	Triangulations de contact . . . . .	56
3.1.1	Définitions . . . . .	56
3.2	Triangulations de contact sur les variétés à bord . . . . .	61
3.2.1	Un cas particulier de variété à bord . . . . .	61
3.2.2	Triangulation lisse sur $\partial\tilde{V}$ . . . . .	62
3.2.3	Rendre les 1-simplexes legendriens . . . . .	63
3.2.4	Convexité des 2-simplexes . . . . .	67
3.2.5	Extension à $\tilde{V}$ . . . . .	68
3.3	Minimalité de la triangulation de contact . . . . .	69
3.4	Maniabilité de la triangulation de contact . . . . .	70
3.5	Extension des triangulations de contact . . . . .	72
3.5.1	Triangulation de contact sur $V$ . . . . .	72
3.5.2	Généralisation aux variétés à bord . . . . .	72
3.5.3	Propriétés des triangulations de contact . . . . .	73
3.6	Prismes et domaines fibrés . . . . .	75
3.6.1	Prismes fibrés . . . . .	75
3.6.2	Une première normalisation . . . . .	77
3.6.3	Holonomie . . . . .	78
3.6.4	Une propriété fondamentale sur les prismes fibrés . . . . .	80
3.6.5	Construction des domaines fibrés . . . . .	80
3.7	Ajustement des structures de contact . . . . .	84
3.7.1	Poids des structures . . . . .	84
3.7.2	Lemme d'élagage . . . . .	85
3.7.3	Domaine fibré sur $\tilde{V}$ . . . . .	85
3.7.4	Retour sur $V$ . . . . .	88
3.8	Méthode alternative . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Transformations et stabilisation</b>	<b>91</b>
4.1	Définitions . . . . .	92
4.1.1	Modification de Lutz . . . . .	92
4.1.2	Vrille . . . . .	92
4.1.3	Composante de Reeb . . . . .	93
4.2	Calcul d'invariants après modification de Lutz . . . . .	94
4.3	Division des domaines fibrés en tores . . . . .	95
4.4	Cas modèle . . . . .	98
4.5	Retour à la conjecture de finitude . . . . .	98
4.6	Disjonction des modifications de Lutz . . . . .	99
4.6.1	Étude locale de l'embranchement . . . . .	99

4.6.2	Diminution du coefficient . . . . .	100
4.6.3	Disjonction locale . . . . .	101
4.6.4	Problèmes pour la disjonction globale . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Invariants avancés</b>	<b>105</b>
5.1	Homologie de contact . . . . .	105
5.1.1	Structures presque complexes et courbes holomorphes . . . . .	105
5.1.2	Homologie de contact totale . . . . .	106
5.1.3	Homologie de contact cylindrique . . . . .	107
5.1.4	Homologie de contact linéarisée . . . . .	108
5.2	Croissance de l'homologie de contact . . . . .	109
5.2.1	Taux de croissance . . . . .	109
5.2.2	Croissance de systèmes inductifs . . . . .	109
5.2.3	Croissance d'homologies . . . . .	111
5.3	Homologie de contact suturée . . . . .	111
5.3.1	Invariant avancé pour les nœuds transverses . . . . .	112
5.4	Un calcul d'invariant avancé . . . . .	113
5.4.1	Coefficients de twist de Dehn fractionnaire . . . . .	113
5.4.2	Utilisation de livres ouverts . . . . .	115



# Table des figures

1.1	Mouvements de Reidemeister . . . . .	18
1.2	Structure standard de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
1.3	Exemple de feuilletage caractéristique sur $\mathbb{S}^2$ . . . . .	22
1.4	Approximation legendrienne par zigzags . . . . .	26
1.5	Approximation legendrienne . . . . .	26
1.6	Mouvements de Reidemeister legendriens . . . . .	27
1.7	Signe des croisements . . . . .	29
1.8	Signe des points de rebroussement . . . . .	30
1.9	Stabilisations legendriennes . . . . .	31
1.10	Déplacement d'une stabilisation à travers un point de rebroussement .	32
1.11	Stabilisation transverse . . . . .	33
1.12	Feuilletage caractéristique d'une rocade . . . . .	33
1.13	Modification de la courbe de découpage par la rocade . . . . .	34
1.14	Rocade triviale . . . . .	34
1.15	Feuilletage caractéristique de $A$ . . . . .	35
1.16	Translation transverse . . . . .	36
1.17	Construction de $\Sigma$ loin des sommets . . . . .	44
1.18	Cas simple de Construction de $\Sigma$ près d'un sommet . . . . .	44
1.19	Modifications de $\Delta$ et $\Sigma$ . . . . .	45
1.20	Modèles locaux de surface branchée . . . . .	46
1.21	Un exemple de modèle local d'un domaine fibré . . . . .	47
3.1	Première triangulation sur le bord . . . . .	64
3.2	Feuilletage sur le bord de $\tilde{V}$ . . . . .	65
3.3	Nouveau feuilletage sur les trois types de morceaux . . . . .	65
3.4	Nouveau feuilletage sur le triangle . . . . .	66
3.5	Nouveau feuilletage près d'un sommet . . . . .	67
3.6	Exemple d'hexagone legendrien . . . . .	71
3.7	Intersection de prismes . . . . .	76

3.8	Une famille de cinq prismes . . . . .	77
3.9	Courbe d'holonomie . . . . .	79
3.10	Les différents placements de paquets . . . . .	81
3.11	Emplacements admissibles pour les prismes sur le bord . . . . .	86
3.12	Une voie ferrée générale sur le bord . . . . .	87
3.13	Méthode alternative . . . . .	89
4.1	Composante de Reeb . . . . .	93
4.2	Modèle locale de l'embranchement avec 3 secteurs réguliers . . . . .	100
4.3	Disjonction locale de l'embranchement . . . . .	101
4.4	Embranchement pour l'exemple 4.12 . . . . .	102
4.5	Problème de disjonction globale . . . . .	103
5.1	Dynamique du champ de Reeb avant et après la perturbation . . . . .	113
5.2	Extraction . . . . .	114

# Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude d'invariants classiques et avancés pour les nœuds transverses dans les variétés de contact de dimension 3.

Dans une variété de dimension 3, une *structure de contact*  $\xi$  est un champ de plans qui est localement donné par l'équation

$$dz - ydx = 0.$$

Si ce champ de plans est coorienté, on peut alors le décrire comme le noyau d'une 1-forme différentielle, appelée *forme de contact*.

Dans une variété de contact  $(V, \xi)$ , on s'intéresse à des types de nœuds particuliers. Un nœud  $L$  de  $V$  est *legendrien* (respectivement *transverse*) s'il est en tout point tangent (respectivement transverse) aux plans de  $\xi$ . Deux nœuds legendriens (respectivement transverses)  $L_1$  et  $L_2$  sont équivalents s'ils sont reliés une isotopie legendrienne (respectivement transverse), c'est-à-dire une isotopie entre  $L_1$  et  $L_2$  et qui envoie  $L_1$  sur un nœud legendrien (respectivement transverse) en tout temps. Par une application du théorème de Darboux et de l'astuce de Moser, une isotopie legendrienne (ou transverse) peut toujours être étendue en une isotopie de contact de la variété ambiante. Dans la suite, une isotopie de nœuds (quelconques) est également appelée isotopie lisse.

Les invariants de nœuds legendriens et transverses se classent en deux catégories : les invariants classiques, comme le nombre de Thurston-Bennequin (pour les nœuds legendriens) ou l'autoenlacement (pour les nœuds transverses) et les invariants avancés comme l'homologie de contact suturée ou l'homologie de contact plongée suturée. Il est intéressant de comprendre les différences entre les nœuds legendriens et les nœuds classiques. Tout d'abord grâce au théorème de Darboux, on sait que tout nœud peut être rendu legendrien par une isotopie  $C^0$ -petite. Cette construction sera détaillée dans le chapitre 1 mais il est important de préciser qu'elle permet, à partir d'une classe d'isotopie de nœuds, d'obtenir une infinité de classes d'isotopie legendrienne distinguées par leur invariant de Thurston-Bennequin.

Les travaux de Chekanov ont montré que les invariants avancés permettent de

distinguer des nœuds qui ne le sont pas par les invariants classiques. Les invariants classiques ne sont donc pas complets. En fixant une classe d'isotopie lisse et une valeur pour un invariant classique, on obtient à priori une multitude de classes d'isotopie legendrienne. Dans le cas de  $\mathbb{S}^3$ , Colin, Giroux et Honda ont cependant montré que le nombre de classes d'isotopie legendrienne non distinguées par l'invariant de Thurston-Bennequin est en nombre fini dans chaque classe d'isotopie lisse.

**Théorème 0.1.** *[CGH09] Dans la sphère de contact standard de dimension 3, les nœuds legendriens ayant une classe d'isotopie lisse et un invariant de Thurston-Bennequin arbitrairement imposés forment un nombre fini de classes d'isotopie legendrienne.*

Ce résultat s'appuie sur des résultats de finitude pour les structures de contact dans le complémentaire du nœud. Si par définition la configuration locale des plans de contact est fixé, l'aspect global de la structure de contact fait l'objet de nombreuses études. Une dichotomie importante a été introduite par Eliashberg [Eli89] suite aux travaux de Bennequin. Une variété de contact est dite *vrillée* si elle contient un disque plongé tangent à la structure de contact le long de son bord. Dans le cas contraire, la structure de contact est dite *tendue*. Pour plus de détails sur les résultats de classification des structures de contact tendues ou vrillées, on pourra se référer à [Gir92]. La plupart des résultats développés ici se restreignent au cas des variétés tendues. Dans cette thèse, on étudie la conjecture suivante qui est le pendant transverse de la finitude des nœuds legendriens.

**Conjecture 0.2.** *Dans la sphère de contact standard de dimension 3, les nœuds transverses ayant une classe d'isotopie lisse et un nombre d'autoenlacement arbitrairement imposés forment un nombre fini de classes d'isotopie transverse.*

La finitude des nœuds transverses dans les variétés de contact vrillées a été réfutée par Etnyre dans [Etn10]. Il montre en effet que dans les variétés de contact vrillées, il existe des classes de nœuds qui possèdent une infinité de représentants transverses distincts avec le même autoenlacement.

Dans un premier temps, on étudiera les relations connues entre les nœuds legendriens et les nœuds transverses. On verra comment par des isotopies  $C^0$ -petites, appelées *translations legendriennes et transverses*, on peut passer d'un nœud legendrien à un nœud transverse et inversement. Le principal problème posé par ces translations est la non-symétrie des versions legendriennes et transverses. Plus précisément, avec les translations legendriennes, on peut associer à chaque classe d'isotopie legendrienne une unique classe d'isotopie transverse. Mais les translations transverses associent à chaque classe d'isotopie transverse une infinité de classes

d'isotopie legendrienne. Ces deux constructions impliquent plusieurs relations entre les invariants legendriens et transverses. On pourra consulter [Gei08] et [Etn05] pour plus de détails.

Dans le chapitre 2, on utilise les translations pour ramener la conjecture de finitude transverse, à un cas particulier de finitude legendrienne.

**Théorème 0.3.** *Dans une variété de contact de dimension 3, les nœuds transverses ayant une classe d'isotopie lisse et un nombre d'autoenlacement arbitrairement imposés forment un nombre fini de classes d'isotopie transverse si dans l'ensemble des classes d'isotopie legendrienne obtenues par translations legendriennes à partir de ces nœuds transverses, on ne trouve qu'un nombre fini de nœuds legendriens non déstabilisables.*

La notion de stabilisation est très importante pour la suite. Il s'agit d'une opération locale, notée  $\mathcal{S}$ , sur les nœuds legendriens qui permet de rendre l'invariant de Thurston-Bennequin arbitrairement petit sans modifier la classe d'isotopie lisse. Plus exactement pour un nœud legendrien  $L$ , on a

$$\text{tb}(\mathcal{S}(L)) = \text{tb}(L) - 1.$$

Dans la suite on dira qu'un nœud est *maximal* ou *non déstabilisable* s'il n'est pas la stabilisation d'un nœud legendrien. En utilisant des stabilisations, on peut créer une infinité de nœuds legendriens dans une même classe d'isotopie lisse. Mais ces nœuds legendriens sont distingués par leur invariant de Thurston-Bennequin, ce qui explique pourquoi l'invariant de Thurston-Bennequin est fixé dans le théorème 0.1. Le théorème 0.3 ramène ainsi la conjecture de finitude transverse à la conjecture suivante.

**Conjecture 0.4.** *Dans la sphère de contact standard de dimension 3, dans une classe d'isotopie lisse arbitrairement fixée, il existe un nombre fini de nœuds legendriens non déstabilisables.*

L'idée sous-jacente à cette conjecture est que, dans une classe d'isotopie lisse fixée, pour obtenir un invariant de Thurston-Bennequin arbitrairement petit, on doit forcément passer par une stabilisation.

Pour étudier la conjecture 0.4, on revient aux méthodes développées par Colin, Giroux et Honda dans [CGH09] pour démontrer la finitude des nœuds legendriens ainsi que la finitude isotopique des structures de contact tendues.

**Théorème 0.5.** [CGH09] *Sur toute variété close  $V$  de dimension 3, il existe un nombre fini de structures de contact  $\xi_1, \dots, \xi_n$  et pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, n\}$  un*

nombre fini de tores  $T_1^i \dots T_{k_i}^i$  transverses à la structure  $\xi_i$  tels que toute structure de contact tendue  $\xi$ , à isotopie près, sur  $V$  s'obtienne à partir d'une des structures  $\xi_i$  par une modification de Lutz de coefficient  $n_j^i \in \mathbb{N}$  le long des tores  $T_j^i$ .

Dans le chapitre 3 on prouve une version relative de ce résultat qui montre comment engendrer les nœuds legendriens non déstabilisables par des modifications de Lutz à partir d'un nombre fini d'entre eux.

**Théorème 0.6.** *Soit  $V$  une variété close de dimension 3 contenant un nœud  $L$ . Il existe un nombre fini de structures de contact tendues  $\xi_1, \dots, \xi_n$  pour lesquelles  $L$  est legendrien et non déstabilisable et pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ , un nombre fini de tores  $T_1^i \dots T_{k_i}^i$  transverses à la structure  $\xi_i$  et à  $L$  (quand ils ne sont pas disjoints de  $L$ ) tels que toute structure de contact tendue  $\xi$  pour laquelle  $L$  est legendrien et non déstabilisable s'obtienne, à isotopie près relativement à  $L$ , à partir d'une des structures  $\xi_i$  par une modification de Lutz de coefficient  $n_j^i \in \mathbb{N}$  le long des tores  $T_j^i$ .*

Au lieu de fixer un nœud et d'engendrer des structures de contact qui rendent ce nœud legendrien non déstabilisable, on peut fixer une structure de contact et une classe d'isotopie lisse de nœud puis appliquer ce théorème pour engendrer tous les nœuds legendriens non déstabilisables.

La preuve de ce résultat passe par la normalisation des structures de contact en dehors d'un *domaine fibré*, à l'intérieur duquel elles sont tangentes aux fibres. Dans [CGH09], les auteurs montrent qu'une telle normalisation est possible dans le cas de variétés sans bord et dans le cas de variétés avec un germe de contact fixé au bord. On veut étendre cette stratégie à des variétés à bord mais sans fixer de germe de contact au bord.

Dans le chapitre 3, on commencera par démontrer un résultat dans le cas particulier d'un complémentaire de nœud. Pour  $V$  une variété de dimension 3,  $K$  un nœud dans  $V$  et  $\mathcal{X}$  un ensemble de structures de contact tendues sur  $V$  pour lesquelles  $K$  est legendrien et non déstabilisable, on définit un voisinage tubulaire "standard"  $\mathcal{N}(K)$  et on construit des domaines fibrés sur  $\tilde{V} = V \setminus \mathcal{N}(K)$ , le complémentaire "standard" de  $K$ . Le fait que le nœud n'est pas déstabilisable est le point important. C'est cela qui permet de construire un "bon" domaine fibré sur le complémentaire du nœud sans avoir besoin de fixer le germe de la structure de contact au bord.

**Théorème 0.7.** *Il existe sur  $\tilde{V}$  un nombre fini de domaines fibrés  $(D_1, \tau_1), \dots, (D_n, \tau_n)$  chacun muni d'une structure de contact  $\zeta_i$  sur  $\tilde{V}$  tels que :*

- pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le bord de  $D_i$  est inclus dans le bord de  $\tilde{V}$  et  $\partial D_i$  est une union d'anneaux qui suivent les méridiens de  $\mathcal{N}(K)$  ;
- toute structure  $\xi$  de  $\mathcal{X}$ , à isotopie près, est ajustée à l'un des  $(D_i, \tau_i, \zeta_i)$ .

La preuve s'appuie sur la construction de triangulations de contact maniables et minimales. La construction utilise la théorie des surfaces convexes développée par Giroux et plus particulièrement son lemme de réalisation de feuilletage [Gir91] que l'on peut appliquer explicitement dans ce cas particulier. On peut ainsi construire une triangulation de contact sur  $\tilde{V}$  qui est explicite sur  $\partial\tilde{V}$ . Le fait de supposer que  $L$  est non déstabilisable, que l'on trouve dans les théorèmes 0.6 et 0.7, est utilisé pour obtenir la minimalité de cette triangulation de contact. Une fois que l'on a construit ces domaines fibrés sur le complémentaire "standard" du nœud, on peut facilement remplir la variété à bord pour obtenir le théorème 0.6.

On étend ensuite cette construction au cas général des variétés à bord. Si on ne fixe pas la structure de contact au bord, il faut imposer une condition supplémentaire au bord de la variété. Dans le théorème 0.7, on utilise le fait que  $L$  est non déstabilisable. Dans le cas général, cette condition est l'absence de rocade legendrienne s'appuyant sur le bord.

**Théorème 0.8.** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 à bord. Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de structures de contact tendues sur  $V$  pour lesquelles  $\partial V$  est convexe. Si pour toute structure de contact de  $\mathcal{X}$  il n'existe pas de rocade legendrienne  $H$  s'appuyant sur  $\partial V$  le long de  $\partial_\cap H$  alors il existe sur  $V$  un nombre fini de domaines fibrés  $(D_1, \tau_1), \dots, (D_n, \tau_n)$  chacun muni d'une structure de contact  $\zeta_i$  sur  $V$  tels que :*

- pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le bord de  $D_i$  est inclus dans le bord de  $V$  et  $\partial D_i$  est une voie ferrée ;
- toute structure  $\xi$  de  $\mathcal{X}$ , à isotopie près, est ajustée à l'un des  $(D_i, \tau_i, \zeta_i)$ .

Une rocade legendrienne, introduite par Honda dans [Hon00] pour étudier et classifier les structures de contact sur des tores pleins et les espaces lenticulaires, est un demi-disque  $H$  plongé dans une variété de contact  $(V, \xi)$  avec les propriétés suivantes :

- $H$  est  $\xi$ -convexe ;
- le bord de  $H$  est legendrien et constitué de deux arcs lisses, notés  $\partial_\cap H$  et  $\partial_- H$  ;
- l'enroulement de  $\xi$  autour de  $TH$  vaut -1 le long de  $\partial_\cap H$  et 0 le long de  $\partial_- H$ .

La rocade matérialise ainsi une isotopie lisse entre un arc legendrien et sa stabilisation. Les rocade sont très utiles dans l'étude des déformations de surfaces, plus particulièrement pour analyser les changements que subit la courbe de découpage d'une surface convexe. Dans le cas où  $V$  est une variété à bord et si l'arc d'enroulement -1 du bord de  $H$  est inclus dans le bord de  $V$ , on peut alors épaissir le

demi-disque  $H$  et ajouter une extension particulière de la structure de contact  $\xi$  pour obtenir une nouvelle variété de contact  $(V', \xi')$ .

L'hypothèse d'absence de rocade non triviale apparaît aussi dans [Hon02]. Honda étudie le recollement de variétés de contact tendues, et les rocades legendriennes s'appuyant sur le bord jouent également un rôle important. Son étude nous donne une condition équivalente à l'absence de rocade non-triviale s'appuyant sur le bord.

**Théorème 0.9.** [Hon02] *Soit  $V$  une variété à bord de dimension 3. Il n'existe aucune rocade non triviale  $H$  telle que  $H \cap \partial V = \partial_- H$  si et seulement si toute surface  $S$  parallèle au bord  $\partial V$  est incluse dans un produit  $\partial V \times I$  où la structure de contact est  $I$ -invariante.*

L'intérêt de cette reformulation d'hypothèse est que la notion de rocade n'est pas bien définie en dimension supérieure au contraire des notions de produit  $I$ -invariant et de parallèle au bord. Pour d'autres résultats sur le recollement de variétés de contact, on pourra se référer à [Col97] et [ML97].

Dans le chapitre 4, on étudie les modifications de Lutz qui apparaissent dans le théorème 0.5. Sur le voisinage tubulaire  $\mathcal{N}(T) = \{(x, t) | x \in T, t \in [-1, 1]\}$  d'un tore  $T$  transverse à  $\xi$ , l'équation de contact d'une structure de contact est de la forme

$$\cos(\theta(x, t))dx_1 - \sin(\theta(x, t))dx_2 = 0$$

où  $\partial_t \theta > 0$  en tout point. Une modification de Lutz de coefficient  $\frac{n}{2}$  consiste alors à remplacer  $\theta$  par  $\theta + \rho$  dans l'équation de contact où la fonction  $\rho : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante, vaut 0 près de -1 et  $n\pi$  près de 1.

On veut ensuite rapporter les modifications de Lutz, qui sont des modifications sur les structures de contact, à des modifications de la variété ambiante. Pour cela, on introduit la notion de vrille. Une *vrille*, ou *twist de Dehn fibré*, de coefficient  $\frac{n}{2}$ , pour  $n$  pair, sur un tore  $T$  est l'opération suivante

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{N}(T) &\rightarrow \mathcal{N}(T) \\ (x_1, x_2, t) &\mapsto (x_1 + \nu_n(t), x_2, t) \end{aligned}$$

où  $\nu' : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante, vaut 0 près de -1 et vaut  $n\pi$  près de 1. On verra dans le chapitre 4 comment dans des cas simples, l'application d'une vrille sur un nœud donne un nœud déstabilisable.

La dernière étape est de trouver une équivalence entre les modifications de Lutz et les vrilles. Dans le cas de  $\mathbb{S}^3$ , on montre le résultat suivant.

**Lemme 0.10.** *Soit  $T$  un tore transverse dans une variété de contact  $(V, \xi)$  dont le feuilletage caractéristique est constitué de  $2k$  composantes de Reeb pointant dans le*

même sens, pour  $k > 0$ . Soit  $\mu$  une modification de Lutz de coefficient  $n_1$  le long de  $T$  et  $\nu$  une vrille de coefficient  $n_2$  le long de  $T$ . Si  $n_1 = kn_2$ , alors  $(V, \nu_*\xi)$  est contactomorphe à  $(V, \mu(\xi))$ . En particulier si le tore est compressible,  $\mu(\xi)$  et  $\xi$  sont isotopes.

Le problème est donc de ne pas avoir trop de composantes de Reeb pointant dans le même sens sur chacun des tores transverses faisant intervenir une modification de Lutz. Il apparaît alors une difficulté supplémentaire. Par construction, ces tores transverses forment une surface branchée et sont à priori non disjoints. Ainsi une modification de Lutz sur un des tores peut ajouter des composantes de Reeb sur un autre tore et empêcher alors d’obtenir l’équivalence désirée entre vrille et modification de Lutz. Dans le chapitre 4, on présentera quelques pistes pour disjointre ces tores.

Dans une seconde partie, on s’intéresse à l’homologie de contact suturée. Pour étudier cet invariant avancé, on utilise la notion de livre ouvert. De manière simplifiée, une décomposition en livre ouvert d’une variété  $V$  de dimension 3 est un triplet  $(L, S, \varphi)$ , où  $L$  est un entrelacs dans  $V$ ,  $S$  est une surface compacte orientée avec bord et  $\varphi : S \rightarrow S$  est un difféomorphisme préservant l’orientation, tel que si  $\mathcal{N}(L)$  est un petit voisinage tubulaire de  $L$ , alors  $Y \setminus \mathcal{N}(L)$  est homéomorphe à  $S \times [0, 1]/(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$ . Alors  $L$ ,  $S$  et  $\varphi$  sont respectivement la reliure, la page et la monodromie du livre ouvert. Une structure de contact est dite *portée* par un livre ouvert si elle est le noyau d’une forme de contact qui donne une forme de contact positive sur la reliure et un champ de Reeb positivement transverse aux pages.

Les livres ouverts servent d’abord à construire de nouvelles structures de contact. Dans [TW75], Thurston et Winkelnkemper construisent une structure de contact portée un livre ouvert donné. Ensuite Giroux dans [Gir03] a montré comment trouver une décomposition en livre ouvert pour porter une structure de contact donnée. Du point de vue des nœuds, Giroux montre également comment adapter un livre ouvert à un nœud legendrien donné. Pour la preuve de ces résultats, on pourra se référer à [Col08].

**Théorème 0.11** (Giroux). *Sur une variété de contact close, pour tout nœud legendrien, il existe un livre ouvert qui porte  $\xi$  et qui contient le nœud legendrien dans une de ses pages.*

La preuve implique la construction de cellulations en position adaptée par rapport à la structure de contact. En construisant une bonne cellulation par rapport à un nœud transverse, on prouve dans le chapitre 1 un résultat analogue pour les nœuds transverses. Ce résultat déjà connu de certains experts du domaine possède

une preuve dans [BEVHM<sup>+</sup>12]. On propose ici une preuve un peu différente, écrite sans connaissance de [BEVHM<sup>+</sup>12].

**Théorème 0.12.** *[BEVHM<sup>+</sup>12] Sur une variété de contact close, pour tout nœud transverse, il existe un livre ouvert qui porte  $\xi$  et qui contient le nœud transverse dans sa reliure.*

Cette construction de livre ouvert contenant un nœud transverse fixé dans sa reliure s'affine en utilisant des résultats de Colin et Honda [CH05] [CH08] [CH13].

**Théorème 0.13.** *Pour tout nœud transverse  $L$ , il existe un livre ouvert  $(K, S, \varphi)$  tel que*

- *la monodromie est homotope à un pseudo-Anosov ;*
- *la reliure  $K$  possède deux composantes connexes  $L$  et  $K_1$  ;*
- *le coefficient fractionnaire de twist de Dehn de  $K_1$  vaut  $\frac{k}{n}$  avec  $k \geq 1$ .*

Dans le chapitre 3, on utilise cette construction pour calculer certains invariants avancés pour un nœud transverse que l'on a placé dans la reliure d'un livre ouvert.

**Théorème 0.14.** *En reprenant les notations du théorème 0.13, si  $k \geq 2$ , l'homologie de contact cylindrique du nœud est bien définie.*

*Si, de plus,  $k \geq 3$  alors le taux de croissance de l'homologie de contact cylindrique du nœud est exponentiel.*



# Géométrie de contact

## 1.1 Théorie des nœuds

Soit  $V$  une variété de dimension 3. Un *nœud* est un plongement  $\phi$  de  $\mathbb{S}^1$  dans  $V$ . Un *diagramme* d'un nœud est une projection sur un plan qui est une immersion et sur laquelle tous les points multiples sont doubles, transverses et isolés. On peut alors facilement représenter sur le diagramme d'un nœud quel brin passe dessus ou dessous lors d'un croisement. Par abus de langage, on appelle indistinctement nœud un plongement de  $\mathbb{S}^1$ , son image ou son diagramme. Le *nœud trivial* est alors le nœud dont un diagramme ne possède aucun croisement.

On définit maintenant une classe d'équivalence sur les nœuds. Deux nœuds  $K_1$  et  $K_2$  de  $V$  seront dits équivalents s'il existe une *isotopie ambiante lisse* les reliant, c'est-à-dire une isotopie  $(f_t)_{t \in I}$  sur  $V$  de classe  $C^\infty$  telle que  $f_0$  est l'identité,  $f_1(K_1) = K_2$  et  $f_t$  est un difféomorphisme pour tout  $t$ . Si de plus, les nœuds sont orientés, on demande que  $f_1$  respecte l'orientation. Un abus de langage courant consiste à omettre les termes *ambiant* et *lisse* quand on parle d'isotopie de nœuds.

Maintenant que l'on a une notion d'équivalence, on peut s'intéresser à la classification des nœuds à isotopie (lisse) près. Établir une telle classification passe par la recherche d'*invariants*. Un invariant est la donnée d'une valeur (réelle, polynomiale, ...) pour chaque nœud, telle que cette valeur reste constante sur chaque classe d'isotopie lisse.

Pour trouver de tels invariants, il est intéressant de comprendre comment les

isotopies lisses agissent sur les diagrammes de nœuds. Sur un diagramme de nœuds, il y a trois opérations élémentaires, appelées *mouvements de Reidemeister*, décrites sur la figure 1.1.

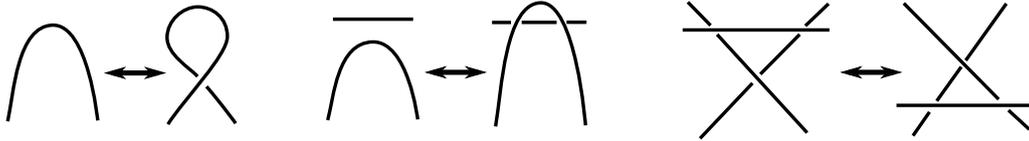


FIGURE 1.1 – Mouvements de Reidemeister

Ces mouvements sont des modifications locales de diagrammes. Ils nous permettent de coder l'action des isotopies lisses sur les diagrammes.

**Théorème 1.1.** [Rei27][AB26] *Deux nœuds sont équivalents si et seulement si leurs diagrammes sont reliés par une suite finie de mouvements de Reidemeister et d'isotopies planaires.*

Il est maintenant plus facile de créer des invariants qui se calculent sur les diagrammes de nœuds. En effet, pour vérifier qu'un tel invariant est bien constant sur les classes d'isotopie lisse de nœuds, il suffit de vérifier qu'il reste invariant par les mouvements de Reidemeister et par les isotopies planaires. Des exemples de tels invariants sont nombreux : tricolorabilité, polynôme d'Alexander, polynôme de Jones ...

## 1.2 Géométrie de contact

### 1.2.1 Structures de contact

**Définition 1.2.** Soit  $V$  une variété de dimension 3. Une *structure de contact*  $\xi$  sur  $V$  est un champ  $C^\infty$  de plans tangents défini localement comme le noyau d'une 1-forme différentielle  $\alpha$  telle que

$$\alpha \wedge d\alpha \neq 0 \tag{1.1}$$

en tout point de  $V$ . On dit alors que  $(V, \xi)$  est une *variété de contact*, que  $\alpha$  est une *forme de contact* et que les plans définis par  $\xi$  sont appelés *plans de contact*.

Pour mieux visualiser cette condition de contact, il suffit de comprendre qu'elle implique que les sous-variétés intégrables (i.e. tangentes aux plans de contact en

tout point) sont de dimension au plus 1. Ce qui implique que  $\alpha \wedge d\alpha$  est une forme volume sur  $V$ .

On peut choisir de prendre des structures de contact orientées. Cela signifie que les plans sont orientés : chaque plan sépare l'espace en deux parties, on peut donc en choisir une partie positive et l'autre négative. Dans le cas des structures de contact, on demande que  $\alpha \wedge d\alpha$  soit une forme volume strictement positive sur  $V$  c'est-à-dire  $\alpha \wedge d\alpha > 0$ .

*Remarque 1.3.* : La forme de contact décrivant une structure de contact n'est pas unique. Il suffit par exemple de la multiplier par n'importe quelle fonction jamais nulle pour obtenir une autre forme de contact décrivant la même structure de contact. En effet si  $\alpha$  est une forme de contact décrivant  $\xi$  et  $f$  une fonction jamais nulle, alors

$$f \cdot \alpha \wedge d(f \cdot \alpha) = f^2 \cdot \alpha \wedge d\alpha \neq 0$$

et donc  $f \cdot \alpha$  est une forme de contact décrivant également  $\xi$ .

Un champ de vecteurs dont le flot préserve la structure de contact est appelé *champ de contact*. On peut aussi regarder les champs de vecteurs conservant la forme de contact.

**Définition 1.4.** Le *champ de Reeb* associé à  $\alpha$  est  $\mathcal{R}_\alpha$  un champ de vecteurs sur  $V$  tel que

$$\alpha(\mathcal{R}_\alpha) = 1 \text{ et } d\alpha(\mathcal{R}_\alpha, \cdot) = 0.$$

Le champ de Reeb est un champ de contact car son flot préserve la forme de contact. Le flot du champ de Reeb est appelé *flot de Reeb* et ses orbites sont appelées *orbites de Reeb*.

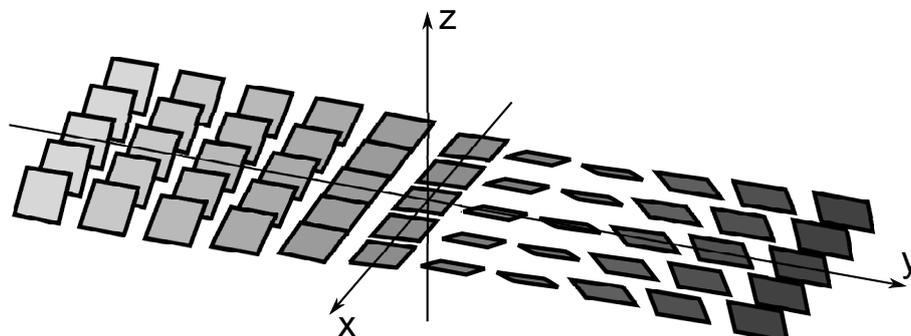
## 1.2.2 Exemple fondamental

Dans le cas de  $\mathbb{R}^3$ , on a une structure de contact que l'on nommera *structure standard* (ou *canonique* en référence au théorème 1.7 que l'on verra après). On reviendra régulièrement à l'étude de ce cas particulier.

On appelle structure standard sur  $\mathbb{R}^3$ , notée ici par  $\xi_{std}$ , la structure de contact définie par

$$\alpha_{std} = dz - ydx = 0. \tag{1.2}$$

On reviendra plus en détails sur la compréhension de la structure standard de  $\mathbb{R}^3$  dans la section 1.4.2.

FIGURE 1.2 – Structure standard de  $\mathbb{R}^3$ 

### 1.2.3 Classification des structures de contact

Pour classifier les structures de contact, il faut tout d'abord donner une notion d'équivalence.

**Définition 1.5.** Soient deux variétés de contact  $(V_0, \xi_0)$  et  $(V_1, \xi_1)$ . On dira que ces variétés sont *contactomorphes* s'il existe un difféomorphisme  $\phi : V_0 \rightarrow V_1$  tel que  $\phi^*\xi_0 = \xi_1$ . Ce difféomorphisme est alors appelé *contactomorphisme*. On dit aussi que les structures de contact sont conjuguées par  $\phi$ .

Si deux structures de contact sur  $V_0$  sont conjuguées par un contactomorphisme isotope à l'identité, on dit alors que les structures de contact sont isotopes. On parle d'isotopie de contact.

Il ne s'agit à priori pas uniquement d'homotopie dans l'ensemble des structures de contact, mais bien d'une isotopie ambiante, portant sur toute la variété de contact. Si deux structures de contact  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont isotopes par  $(\phi_t)$ , on peut aisément trouver un chemin de structures de contact en posant  $\xi_t = \phi_t^*\xi_0$ . Ainsi deux structures de contact isotopes sont homotopes dans l'espace des structures de contact. L'inverse n'est pas toujours vrai.

**Théorème 1.6.** [Gra59] Pour tout chemin de structures de contact  $(\xi_t)_{t \in I}$  sur une variété  $V$  compacte sans bord, il existe une isotopie  $\phi_t$  telle que  $\phi_1^*\xi_0 = \xi_1$ .

Ainsi dans le cas des variétés compactes sans bord, la classification des structures de contact à isotopie près est la même que celle à homotopie près. On va voir maintenant que la classification des structures de contact n'a qu'un intérêt global. En effet, localement toutes les structures de contact sont les mêmes.

**Théorème 1.7** (Théorème de Darboux). [Gei08] Soit  $(V, \xi = \ker \alpha)$  une variété de contact. Alors en tout point de  $V$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  muni d'un système de coordonnées locales  $(x, y, z)$  tel que

$$\alpha|_{\mathcal{U}} = dz - ydx$$

Un tel voisinage est appelé *voisinage de Darboux* ou *carte de Darboux*.

Ce théorème nous indique bien que localement toutes les structures de contact sont les mêmes. La conséquence est donc qu'il n'existe pas d'invariant local sur les structures de contact. De plus quand on étudiera un phénomène local, on pourra toujours se retreindre à l'étude de la structure standard.

Suite aux travaux de Bennequin, on introduit une notion fondamentale, développée par Eliashberg [Eli89] : la notion de structures tendues et vrillées.

**Définition 1.8.** Une structure de contact est dite *vrillée* si elle contient un disque plongé tangent à la structure de contact le long de son bord. Une structure qui n'est pas vrillée est dite *tendue*.

**Proposition 1.9.** La structure standard sur  $\mathbb{R}^3$  est tendue.

Cette dichotomie entre les structures de contact permet de répondre déjà partiellement à la question de la classification.

**Théorème 1.10.** [Eli89] Sur une variété fermée, deux structures de contact vrillées sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes comme champs de plans.

Le problème de classification des structures de contact se résume alors au cas des structures tendues. Dans le cas des variétés à bord, on a déjà un premier élément de réponse.

**Théorème 1.11.** [Eli92] Des structures de contact tendues sur la boule qui impriment sur le bord le même champ de droites singulier sont isotopes relativement au bord.

## 1.3 Surface dans une variété de contact

On a vu que les surfaces ne pouvaient être partout tangentes aux plans de contact. Le feuilletage caractéristique permet de visualiser ce phénomène.

**Définition 1.12.** Sur tout surface  $S$  contenue dans  $V$ ,  $\xi$  trace un champ de droites singulier. Ce feuilletage est appelé *feuilletage caractéristique*. Les points singuliers correspondent aux points où la surface est tangente au plan de contact.

La condition de non-intégrabilité implique que les points singuliers sont de divergence non-nulle. Si la structure de contact et la surface sont orientées, on peut orienter le feuilletage caractéristique. La convention veut qu'un point singulier soit positif (ou négatif) si l'orientation de la surface et du plan de contact coïncident (ou non). Dans le cas générique, il y a trois types topologiques de points singuliers : les foyers ou nœuds (source si leur signe est positif, puits s'il est négatif), les points-selles et les nœuds-selles. D'un point de vue analytique complexe, ces types de points (complexes) sont respectivement appelés elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Les points singuliers du feuilletage apportent beaucoup d'informations sur une surface comme on le verra plus loin.

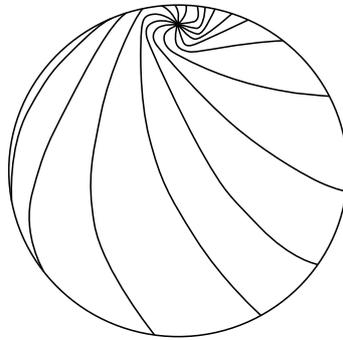


FIGURE 1.3 – Exemple de feuilletage caractéristique sur  $\mathbb{S}^2$

Le feuilletage caractéristique caractérise la structure de contact près de la surface dans le sens où il donne entièrement un germe de la structure de la contact sur la surface.

**Théorème 1.13.** *Soit  $S$  une surface compacte plongée dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . Deux germes de structures de contact qui induisent le même feuilletage caractéristique sur  $S$  sont conjugués par un germe de difféomorphisme isotope à l'identité parmi les difféomorphismes préservant le feuilletage.*

Pour étudier les surfaces dans les variétés de contact, la prochaine étape est la notion de convexité, introduite par Eliashberg et Gromov [EG91], puis développé par Giroux [Gir91].

**Définition 1.14.** Une surface  $S$  dans  $(V, \xi)$  est dite *convexe* (ou  $\xi$ -convexe) s'il existe un champ de contact, c'est-à-dire un champ de vecteurs transverse à  $S$  dont le flot préserve la structure de contact.

Le feuilletage caractéristique est très utile pour déterminer si une surface est convexe. En effet, la notion de convexité est équivalente à une notion de découpage de la surface et de son feuilletage caractéristique par une multi-courbe, c'est-à-dire une union disjointe de courbes fermées simples (et d'arcs proprement plongés dans le cas à bord).

**Proposition 1.15.** [Gir91] *Soit  $S$  une surface fermée plongée orientable de  $(V, \xi)$  et  $\mathcal{F}$  son feuilletage caractéristique. Alors  $S$  est  $\xi$ -convexe si et seulement si il existe sur  $S$  une multi-courbe  $\Gamma$  transverse à  $\mathcal{F}$  qui découpe  $S$  en sous-surfaces où  $\mathcal{F}$  est dirigé par un champ dilatant sortant sur le bord ou contractant rentrant par le bord. On dit alors que  $\Gamma$  est la courbe de découpage de  $S$ .*

Il existe plusieurs multi-courbes qui vérifient ces propriétés mais elles sont toutes isotopes parmi les multi-courbes vérifiant ces propriétés, ce qui permet de considérer la courbe de découpage comme étant unique. Giroux [Gir91] montre que la notion de convexité est assez flexible ce qui la rend intéressante. En effet, il montre que toute surface compacte peut être rendue convexe par une isotopie  $\mathcal{C}^\infty$ -petite. De plus, on a une certaine souplesse dans le choix du feuilletage caractéristique (quitte à perturber un peu la surface).

**Définition 1.16.** Soit  $S$  une surface fermée convexe de  $(V, \xi)$ ,  $\Gamma$  sa courbe de découpage et  $S_\Gamma$  la surface obtenue en découpant  $S$  le long de  $\Gamma$ . Soit  $X$  un champ de contact transverse à  $S$ .

- (a) On appelle *isotopie admissible* de  $S$  toute isotopie de  $S$  dans  $V$  à travers des surfaces transverses à  $X$ .
- (b) On dit qu'un feuilletage singulier de  $S$  est *adapté* à  $\Gamma$  (ou *découpé* par  $\Gamma$ ) si le feuilletage induit sur  $S_\Gamma$  est dirigé par un champ dilatant/contractant une certaine aire et sortant/entrant sur le bord.

**Lemme 1.17** (Réalisation de feuilletage [Gir91]). *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $S$  adapté à  $\Gamma$ . Alors il existe une isotopie admissible  $\delta_s : S \rightarrow V$ ,  $s \in [0, 1]$  telle que le feuilletage caractéristique sur  $\delta_1 S$  soit  $\delta_1 \mathcal{F}$ . De plus à tout instant  $s$ , la courbe de découpage de  $\delta_s S$  est  $\delta_s \Gamma$ .*

Dans le cas de surfaces à bord, le résultat suivant de Giroux permet également de déformer le feuilletage caractéristique.

**Théorème 1.18** (Réalisation de feuilletage à bord [Gir91]). *Soit  $S$  une surface  $\xi$ -convexe,  $U$  un épaissement homogène de  $S$  et  $\Gamma$  la courbe de découpage de  $S$  associé. Les feuilletages singuliers de  $S$  tangents à  $\partial S$  et découpés par  $\Gamma$  constitue un espace contractile. De plus, pour tout feuilletage  $\mathcal{F}$  dans cet espace, il existe un plongement  $\phi : S \rightarrow U$  ayant les propriétés suivants :*

1.  $\phi$  coïncide avec l'inclusion sur  $\partial S$  ;
2.  $\phi(S) \subset U = S \times \mathbb{R}$  est une surface transversale au champ de vecteurs  $\partial_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ;
3.  $\phi_*\mathcal{F}$  est le feuilletage caractéristique de  $\phi(S)$ .

## 1.4 Nœuds legendriens et transverses

### 1.4.1 Nœuds dans une variété de contact

On a déjà vu qu'il n'y avait aucune surface qui soit partout tangente à une structure de contact en dimension 3. Ce n'est pas le cas des sous-variétés de dimension 1 comme les nœuds.

**Définition 1.19.** Un nœud  $K$  de  $(V, \xi)$  est dit *legendrien* s'il est tangent au plan de contact en tout point. Un nœud  $K$  de  $(V, \xi)$  est dit *transverse* s'il est transverse au plan de contact en tout point.

On va s'intéresser uniquement à ces deux types de nœuds. On verra par la suite que le fait d'être legendrien est facile à réaliser dans le sens où tout nœud peut être déformé en un nœud legendrien  $\mathcal{C}^0$ -proche.

Pour s'intéresser à la classification des nœuds legendriens, il faut tout d'abord une notion d'équivalence. Comme pour les nœuds lisses, il faut se poser la question de l'isotopie ambiante. On peut définir deux types d'isotopie :

**Définition 1.20.** Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact.

- (a) Une *isotopie legendrienne* entre deux nœuds legendriens  $L_0$  et  $L_1$  est un chemin continu  $L_t$ ,  $t \in [0, 1]$  de nœuds legendriens allant de  $L_0$  à  $L_1$ .
- (b) Une *isotopie de contact ambiante* entre deux nœuds legendriens  $L_0$  et  $L_1$  est une famille à un paramètre de contactomorphismes  $\phi_t : V \rightarrow V$  telle que  $\phi_0 = Id_V$  et  $\phi_1(L_0) = L_1$ .

Un résultat classique montre que ces deux isotopies donnent la même classification. On peut par exemple en trouver une preuve dans [Etn05].

**Proposition 1.21.** *La classification des nœuds legendriens à isotopie legendrienne près est la même que la classification à isotopie de contact ambiante près.*

Dans le cas de  $\mathbb{R}^3$  (ou de  $\mathbb{S}^3$ ), muni de la structure de contact standard, on peut également trouver une autre classification équivalente à celles de la définition précédente.

**Théorème 1.22.** [Etn05] Dans  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$  ou  $(\mathbb{S}^3, \xi_{std})$ , deux nœuds legendriens sont isotopes legendriens si et seulement si leurs complémentaires sont contactomorphes.

Ce théorème n'est pas forcément vrai dans d'autres variétés de contact. Dans la suite, on va toujours se placer dans le cas  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ . D'après le théorème de Darboux, toutes les variétés de contact peuvent localement être ramenées à  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ .

### 1.4.2 Réalisation de nœuds legendriens

On explique ici comment tout nœud peut être déformé en un nœud legendrien  $C^0$ -proche. Pour cela, il faut comprendre la structure de contact standard sur  $\mathbb{R}^3$ . On rappelle l'équation de la forme de contact standard  $\alpha_{std}$  :

$$\alpha_{std} = dz - ydx. \quad (1.3)$$

Cette équation nous donne deux informations importantes. Tout d'abord le champ de plan est invariant selon les directions  $x$  et  $z$ . Autrement dit, l'inclinaison du plan de contact en un point ne dépend que de sa coordonnée  $y$ . De plus, la normale au plan de contact sera toujours orthogonale à la direction  $y$ . Pour bien voir cela, on peut réécrire l'équation de contact de la forme suivante :

$$y = \frac{dz}{dx} \quad (1.4)$$

Soit  $L$  un nœud legendrien de  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ . On définit maintenant un diagramme de nœud adapté aux nœuds legendriens. Pour cela, on projette sur le plan  $(x, z)$  le long de l'axe  $O_y$ . Cette projection porte le nom de *projection frontale* et on la note  $\Pi$ .

Sur le diagramme ainsi obtenu, on peut remarquer qu'en n'importe quel point la pente de la tangente au nœud (dans le plan) redonne la coordonnée originelle  $y$  (perdue par la projection frontale). Cette relation donnée par l'équation de contact impose deux conditions sur le diagramme. Premièrement, il ne peut pas y avoir de tangente verticale car cela signifierait que le point du nœud est à l'infini. Deuxièmement, lors d'un croisement, le brin au dessus doit avoir une pente strictement plus grande que la pente du brin du dessous.

**Théorème 1.23.** Soit un nœud  $K$  de  $V^3$ . Alors il existe un nœud legendrien de  $(V, \xi)$  qui est  $C^0$ -proche de  $K$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, on utilise le théorème 1.7 pour se restreindre au cas de  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ . En effet on va modifier le nœud localement, ce qui permet d'utiliser les

voisins de Darboux. Pour qu'un nœud soit legendrien, il faut en tout point que la pente de sa projection frontale soit égale à sa coordonnée  $y$ . On va donc modifier la projection frontale du nœud lisse afin que sa pente corresponde à la coordonnée  $y$  le long de l'axe de projection.

Pour cela, il suffit de rajouter des zigzags (c'est-à-dire une succession de points de rebroussement de première espèce) tout le long du nœud comme sur la figure 1.4. On peut les faire aussi petits qu'on le veut pour être  $C^0$ -proche. Et on peut leur donner une pente proche de la valeur de la coordonnée  $y$ .  $\square$

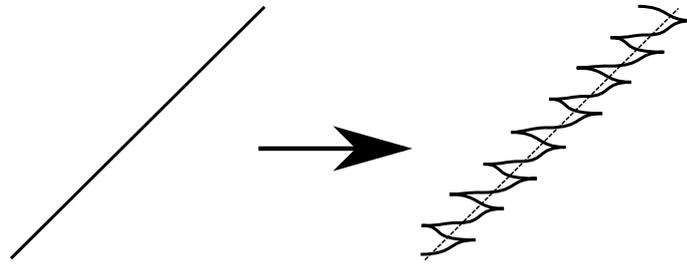


FIGURE 1.4 – Approximation legendrienne par zigzags : la pente des zigzags est égale à la coordonnée  $y$  cachée lors de la projection

Mais en pratique, l'approximation legendrienne par zigzags n'est pas satisfaisante. On utilisera plutôt les transformations de la figure 1.5 qui donnent une réalisation legendrienne d'un nœud lisse mais ne sont pas  $C^0$ -proches.

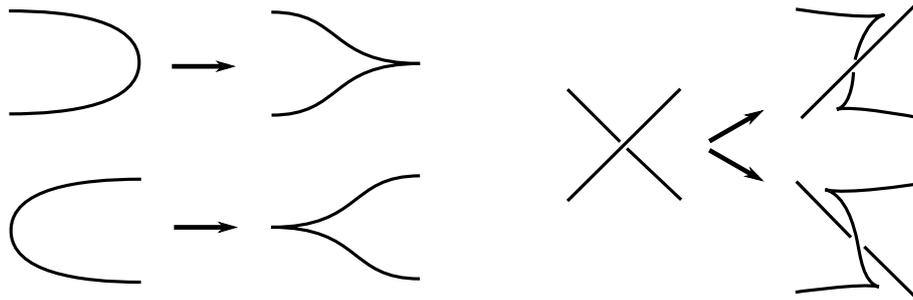


FIGURE 1.5 – Approximation legendrienne

Pour continuer à travailler sur les diagrammes de nœuds legendriens, on a le théorème de Reidemeister qui s'adapte au cas legendrien.

**Théorème 1.24.** *Deux diagrammes frontaux (c'est-à-dire issus de la projection frontale) représentent deux nœuds isotopes legendriens si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une succession de mouvements de Reidemeister legendriens présentés sur la figure (et d'homotopie régulière).*

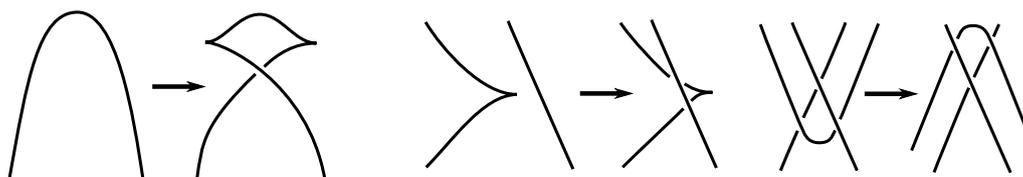


FIGURE 1.6 – Mouvements de Reidemeister legendriens

Ces arguments sont reproductibles pour la projection  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  appelée *projection lagrangienne*. Dans la suite, on n'utilisera que la projection frontale c'est pourquoi on ne détaille pas la version projection lagrangienne des diagrammes et des mouvements de Reidemeister.

### 1.4.3 Voisinage legendrien standard

On a vu que selon le théorème de Darboux, localement toutes les structures de contact ont le même modèle ce qui permet de construire des voisinages standards des points. De la même façon, on peut construire un voisinage tubulaire standard pour un nœud legendrien.

**Théorème 1.25.** *Soit  $K$  un nœud legendrien dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . Alors  $K$  possède un voisinage tubulaire  $\mathcal{N}(K)$  contactomorphe à  $(N_0, \xi_0)$  où*

$$N_0 = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \text{ et } \xi_0 = \ker(\cos(z)dx - \sin(z)dy)$$

pour  $(x, y, z) \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ . De plus  $K$  est envoyé sur  $K_0 = \{0\} \times \mathbb{S}^1 \subset N_0$ .

On peut avoir l'impression que sur ce modèle de voisinage les plans de contact tournent peu le long du nœud. En effet, dans  $N_0$ , les plans de contact tournent une fois autour de  $K_0$  relativement au plan  $xz$ . Cette notion doit être précisée et va permettre d'établir quelques invariants.

### 1.4.4 Invariants classiques

En pratique le théorème 1.24 des mouvements de Reidemeister legendriens est difficile à utiliser. De la même façon que pour le cas des nœuds lisses, la suite de mouvements de Reidemeister permettant une isotopie legendrienne ne peut être obtenue de façon combinatoire. On va donc définir quelques invariants classiques, plus faciles à calculer et à manipuler.

Le premier invariant est l'*invariant de Thurston-Bennequin*. Sa définition fait intervenir le fibré normal du nœud  $K$  que l'on note  $\nu$  (et identifié par  $K \times \mathbb{R}^2$ ). Le plan de contact  $\xi_x$  et le fibré normal s'intersectent de façon transverse, on peut donc définir  $l_x = \xi_x \cap \nu_x$ . Ce qui nous donne un fibré en droite qui constitue une trivialisatation de  $\nu$ .

Si le fibré normal possède déjà une trivialisatation pré-assignée  $\mathcal{F}$ , on peut assigner une valeur à la trivialisatation donnée par  $l$  en calculant l'enlacement de  $l$  par rapport à  $\mathcal{F}$ . Si  $K$  possède une surface de Seifert (par exemple si  $K$  est nul-homologue) alors cette surface de Seifert donne une trivialisatation du fibré normal et l'enlacement de  $f$  avec cette trivialisatation est appelé *invariant de Thurston-Bennequin* et est noté  $tb(K)$ .

Une autre définition équivalente est la suivante. On choisit un champ de vecteurs non-nuls  $v$  le long de  $K$  dans  $\nu \cap \xi$ . Soit  $K'$  une copie de  $K$  obtenue en poussant légèrement  $K$  dans la direction de  $v$ . L'invariant de Thurston-Bennequin est alors défini par l'enlacement entre  $K$  et  $K'$ .

De façon plus générale, on définit le *nombre de Thurston-Bennequin* d'une courbe legendrienne  $L$  relatif à un champ de plans tangents  $\eta$  le long de  $L$ . Il décompte le nombre algébrique de points où  $\eta = \xi$  le long de  $L$ . Il prend donc ses valeurs dans  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  (et dans  $\mathbb{Z}$  si  $L$  est une courbe fermée). On parle également de nombre de Thurston-Bennequin d'une courbe legendrienne  $L$  relatif à une surface  $S$  contenant  $L$ . Dans ce cas, il suffit de prendre  $\eta = TS$ . Compter les points où  $TS = \xi$  revient alors à compter le nombre algébrique de singularités du feuilletage caractéristique de  $S$  le long de  $L$ . On retrouve ainsi l'invariant de Thurston-Bennequin.

Pour calculer facilement cet invariant, on a une formule combinatoire sur la projection frontale de  $K$ . On commence par donner un signe à chaque croisement. On définit l'entortillement de  $K$  comme la somme des signes des croisements de sa projection frontale.

**Théorème 1.26.** *Pour  $K$  un nœud legendrien, on a :*

$$tb(K) = \text{entortillement}(\Pi(K)) - \frac{1}{2}(\text{nombre de points de rebroussement}) \quad (1.5)$$

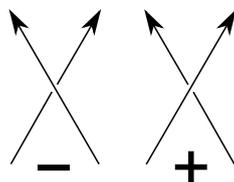


FIGURE 1.7 – Signe des croisements

*Remarque 1.27.* Ici il faut faire une remarque importante. Lors de l'approximation legendrienne, on a vu que pour un nœud lisse fixé  $K$ , on pouvait obtenir un nœud legendrien  $L$   $\mathcal{C}^0$ -proche. On utilise pour cela la méthode d'approximation legendrienne vue dans la section 1.4.2 qui consiste à rajouter un nombre arbitraire de points de rebroussement comme sur la figure 1.4. Il est évident que  $K$  et  $L$  sont dans la même classe d'isotopie lisse. Si on décide de créer un autre nœud legendrien à partir de  $K$  avec la même méthode mais avec un nombre différent de points de rebroussement, on obtient alors un nœud  $L'$  qui est toujours dans la même classe d'isotopie lisse. Mais  $L$  et  $L'$  ne sont pas legendriens isotopes. En effet, celui avec le plus de zigzags aura un invariant de Thurston-Bennequin strictement plus petit.

On voit ici que pour une classe d'isotopie lisse  $\mathcal{K}$  de nœud, on peut trouver une infinité de représentations legendriennes de  $\mathcal{K}$  qui sont deux à deux non isotopes legendriens uniquement en ajoutant de plus en plus de points de rebroussement. On détaillera ce phénomène dans la section 1.4.5.

Le second invariant est le *nombre de rotations*. Comme l'invariant de Thurston-Bennequin, le nombre de rotations n'est défini que pour des nœuds nul-homologues. Soit  $\Sigma$  une surface orientable plongée dont le bord est  $K$ . Les plans de contact quand ils sont restreints à  $\Sigma$  donnent un fibré trivial en plans. Cette trivialisaton de  $\xi|_{\Sigma}$  induit une trivialisaton de  $\xi|_K = L \times \mathbb{R}^2$ . On prend maintenant  $v$  un champ de vecteurs tangents le long de  $K$  pointant dans le même sens que l'orientation de  $K$ . On peut voir ce champ de vecteurs comme une chemin de vecteurs non-nuls dans la trivialisaton précédente, donnée par  $\Sigma$ . Ce chemin a donc un indice, et cet indice est le *nombre de rotations* de  $K$  note  $r(K)$ . Attention, le nombre de rotations de  $K$  dépend de son orientation. Si on change l'orientation de  $K$ , le signe de son nombre de rotations est inversé.

Comme pour l'invariant de Thurston-Bennequin, on a une formule combinatoire pour calculer facilement la rotation. On donne un signe aux points de rebroussement de la projection frontale.

**Théorème 1.28.** *Pour  $K$  un nœud legendrien, en notant  $U$  (respectivement  $D$ ) le nombre de points de rebroussement positifs (respectivement négatifs) de sa projection*

frontale, on a :

$$r(K) = \frac{1}{2}(U - D) \quad (1.6)$$

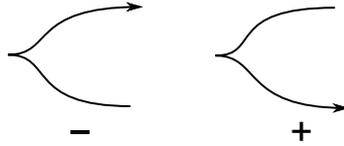


FIGURE 1.8 – Signe des points de rebroussement

Pour finir on définit un invariant, appelé *auto-enlacement*, pour les nœuds transverses. Soit  $T$  un nœud transverse que l'on suppose nul-homologue et on note  $\Sigma$  une surface de Seifert. Soit  $v$  un champ de vecteurs non-nuls sur  $\Sigma$  dans  $\xi$  que l'on peut trouver en utilisant les mêmes arguments que précédemment. Soit  $T'$  une copie de  $T$  obtenue en poussant légèrement  $T$  le long de  $v$ . L'enlacement de  $T$  et  $T'$  est alors l'auto-enlacement de  $T$  noté  $sl(T)$ . On aurait pu définir une version relative de l'auto-enlacement pour se passer de l'hypothèse nul-homologue mais cela ne nous servira pas par la suite.

On a également un moyen de calculer facilement l'auto-enlacement sur la projection frontale.

**Théorème 1.29.** *Pour  $T$  un nœud transverse, on a :*

$$sl(T) = \text{entortillement}(\Pi(T)) \quad (1.7)$$

On voit dans ces calculs combinatoires que les invariants sont liés à la surface de Seifert du nœud. Ce lien fort est exprimé par l'inégalité de Bennequin.

**Théorème 1.30** (Inégalité de Bennequin). *[Eli92] Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact tendue,  $L$  un nœud legendrien avec une surface de Seifert  $\Sigma_L$  et  $T$  un nœud transverse avec une surface de Seifert  $\Sigma_T$ . Alors*

$$sl(T) \leq -\mathcal{X}(\Sigma_T) \quad (1.8)$$

et

$$tb(T) + |r(L)| \leq -\mathcal{X}(\Sigma_L). \quad (1.9)$$

### 1.4.5 Stabilisations legendriennes et transverses

On a vu dans la remarque 1.27 qu'on pouvait obtenir une infinité de nœuds legendriens dans la même classe d'isotopie lisse en ajoutant des points de rebroussement. Cette opération est appelée *stabilisation*. Cette opération étant locale, on la définit dans  $\mathbb{R}^3$  (et plus précisément sur la projection frontale) même si la construction s'applique ensuite dans toutes les variétés. Il s'agit juste d'ajouter deux points de rebroussement successifs sur le nœud comme indiquée sur la figure suivante.

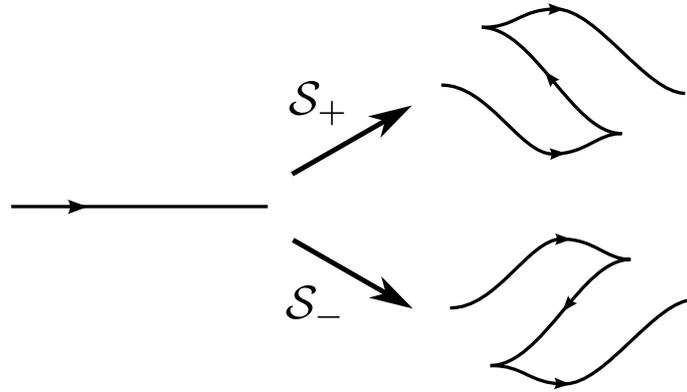


FIGURE 1.9 – Stabilisations legendriennes en projection frontale

Quand on ajoute deux points de rebroussement descendants à un nœud  $L$ , on dit que la stabilisation est *positive* et on note le nœud obtenu  $\mathcal{S}_+(L)$ . Dans le cas de points de rebroussement montants on parle de stabilisation *negative* et on note le résultat  $\mathcal{S}_-(L)$ . En inversant l'orientation d'un nœud, on change le signe de ses stabilisations. Il est important de noter que la stabilisation est une opération bien définie. Elle ne dépend pas de l'endroit où les points de rebroussement sont ajoutés. En effet, un point de rebroussement peut être déplacé le long du nœud y compris au dessus des croisements et à travers les autres points de rebroussement (figure 1.10). Cela peut être vu facilement dans  $\mathbb{R}^3$  en utilisant les mouvements de Reidemeister legendriens.

En utilisant les formules combinatoires des invariants classiques, on trouve facilement l'effet de la stabilisation sur l'invariant de Thurston-Bennequin

$$tb(\mathcal{S}_\pm(L)) = tb(L) - 1 \quad (1.10)$$

et son effet sur le nombre de rotations

$$r(\mathcal{S}_\pm(L)) = r(L) \pm 1. \quad (1.11)$$

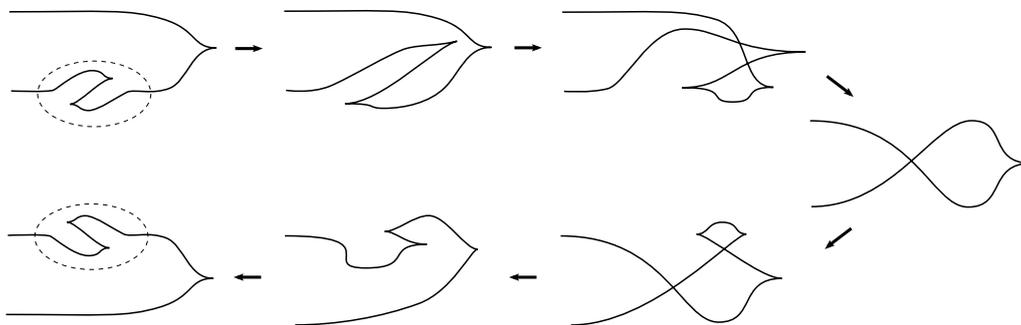


FIGURE 1.10 – Déplacement d'une stabilisation à travers un point de rebroussement

Ainsi on voit bien comment grâce à la stabilisation, on peut obtenir des nœuds legendriens avec un invariant de Thurston-Bennequin arbitrairement petit. L'opération inverse est appelé *déstabilisation*. Mais contrairement à la stabilisation, une déstabilisation n'est pas toujours réalisable (car il faut deux points de rebroussement à supprimer). Un intérêt de la stabilisation est le résultat suivant.

**Théorème 1.31.** [FT97] *Soient deux nœuds legendriens  $L_1$  et  $L_2$  dans  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ . Si  $L_1$  et  $L_2$  sont isotopes lisses alors après avoir été stabilisés un certain nombre de fois ils deviennent isotopes legendriens.*

*Démonstration.* Dans le cas  $\mathbb{R}^3$ , il suffit simplement de montrer que les mouvements de Reidemeister legendriens peuvent être obtenus à partir des mouvements de Reidemeister classiques en rajoutant des stabilisations.  $\square$

On a aussi une version de stabilisation pour les nœuds transverses définie sur la figure 1.11. Dans le cas transverse, il n'y a pas de signe de la stabilisation. On obtient aussi une relation sur l'invariant classique transverse.

$$sl(\mathcal{S}_{\pm}(L)) = sl(L) - 2 \quad (1.12)$$

### 1.4.6 Rocades legendriennes

La notion de stabilisation peut être rapprochée de la notion de rocade, introduite par Honda [Hon00]. Il s'agit de comprendre et d'analyser des chirurgies élémentaires sur les surfaces et plus particulièrement comment réagissent le feuilletage caractéristique et la courbe de découpage.

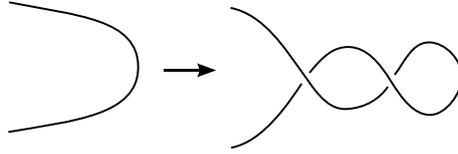


FIGURE 1.11 – Stabilisation transverse en projection frontale

**Définition 1.32.** Une *rocade legendrienne* est un demi-disque  $H$  plongé dans une variété de contact  $(V, \xi)$  avec les propriétés suivantes :

- le bord de  $H$  est legendrien et  $H$  est  $\xi$ -convexe, en particulier, les plans  $T_p H$  et  $\xi_p$  coïncident en chaque coin  $p$  de  $H$  ;
- l’enroulement de  $\xi$  autour de  $TH$  vaut  $-1$  le long d’un des deux arcs de  $\partial H$ , noté  $\partial_- H$ , et il vaut  $0$  le long de l’autre arc, noté  $\partial_\cap H$ .

L’invariant de Thurston-Bennequin de  $\partial H$  vaut donc  $-1$ , et la courbe de découpage de  $H$  est réduite à un seul arc dont les deux extrémités se trouvent sur  $\partial_\cap H$ . L’arc  $\partial_\cap H$  est appelé *arc d’attachement*

La rocade représente ainsi une isotopie entre deux arcs legendriens, l’un ayant un invariant de Thurston-Bennequin moindre par rapport à l’autre. On peut caractériser une rocade legendrienne par son feuilletage caractéristique. En effet,  $H$  a pour singularités une singularité elliptique négative à l’intérieur de  $\partial_- H$ , deux singularités elliptiques positives aux extrémités de  $\partial_- H$  et des singularités positives le long de  $\partial_\cap H$  alternant singularités elliptiques et hyperboliques (voir figure 1.12).

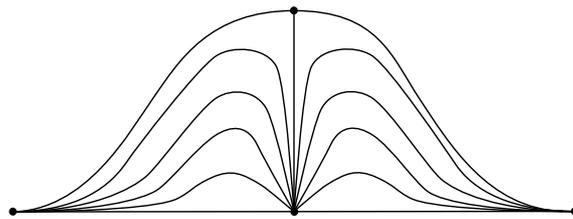


FIGURE 1.12 – Feuilletage caractéristique d’une rocade

**Proposition 1.33.** [Hon00] Si  $H$  est une rocade legendrienne appuyée sur une surface  $S$  convexe, c’est-à-dire que  $S \cap H = \partial_- H$  alors il existe un voisinage de  $S \cup H$  diffeomorphe à  $S \times [0, 1]$  tel que  $S = S \times \{\varepsilon\}$ , la structure  $\xi$  soit invariante

dans la direction transverse à  $S$  sur  $S \times [0, \varepsilon]$ , les surfaces  $S \times \{0\}$  et  $S \times \{1\}$  soient convexes de courbes de découpage  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . De plus  $\Gamma'$  ne diffère de  $\Gamma$  qu'au voisinage de l'arc d'attachement et est obtenue par la modification décrite sur la figure 1.13.

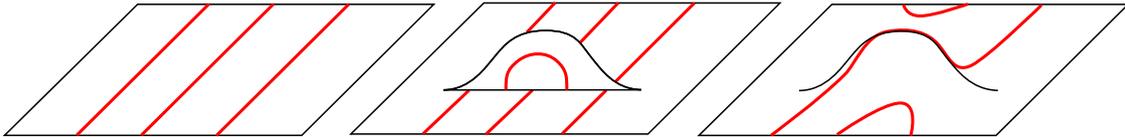


FIGURE 1.13 – Modification de la courbe de découpage par la rocade

*Remarque 1.34.* Dans la suite, on utilisera souvent une rocade legendrienne pour déstabiliser un nœud legendrien. En effet, si  $L$  est un nœud legendrien et  $H$  une rocade legendrienne telle  $L \cap H = \partial_{\cap} H$  alors  $(L \setminus \partial_{\cap} H) \cup \partial_{-} H$  est une stabilisation de  $L$ .

L'attachement de rocade représenté sur la figure 1.14 ne modifie pas la structure de contact. On dit que cette rocade est *triviale*. Il est toujours possible de trouver une rocade triviale dans le voisinage d'une surface. Dans la suite quand on parle d'existence ou d'absence de rocade, on exclut les rocales triviales.

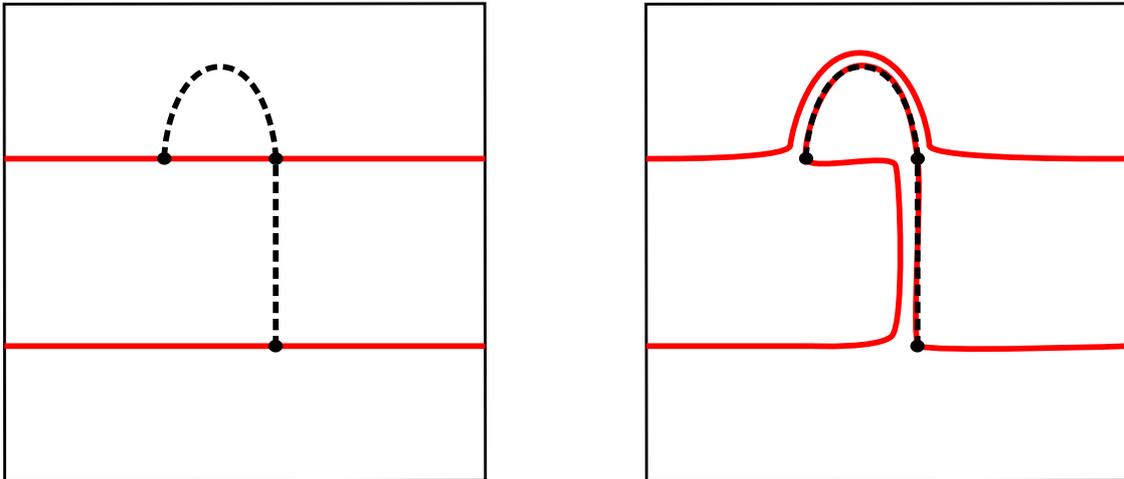


FIGURE 1.14 – Rocade triviale

### 1.4.7 Relations entre nœuds legendriens et nœuds trans- verses

De la même façon qu'on peut déformer un nœud lisse en nœud legendrien  $\mathcal{C}^0$ -proche, on va voir ici comment associer à un nœud legendrien un nœud transverse  $\mathcal{C}^0$ -proche de façon canonique. Soit un nœud legendrien  $K$  dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . Soit  $A = \mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  un anneau plongé dans  $V$  transverse à  $\xi$  et  $K = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, le feuilletage caractéristique de  $A$  est donné par la figure 1.15. Pour un tel anneau  $A$ , le lacet  $K_+ = \mathbb{S}^1 \times \{\frac{\varepsilon}{2}\}$  est un nœud transverse positif. On le nomme *translaté transverse positif* de  $K$ . De la même manière,  $K_- = \mathbb{S}^1 \times \{-\frac{\varepsilon}{2}\}$  est le *translaté transverse négatif* de  $K$ .

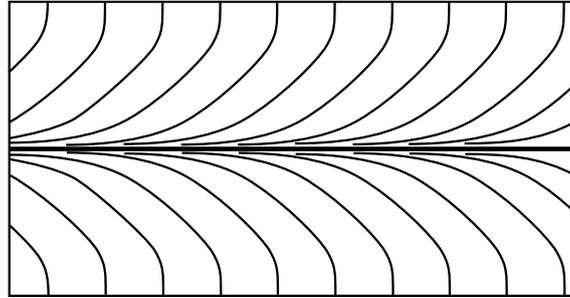


FIGURE 1.15 – Feuilletage caractéristique de  $A$

Il est assez facile de vérifier que deux translatés transverses de même signe ainsi obtenus sont isotopes transverses. De plus le fait de choisir  $\frac{\varepsilon}{2}$  n'est pas important. N'importe quelle poussée de  $K$  dans  $A$  donne la même classe d'isotopie transverse (positive ou négative). Dans la suite, on notera  $T_+(K)$  le translaté transverse positif de  $K$  et  $T_-(K)$  son translaté transverse négatif. Notons qu'un nœud legendrien et son translaté transverse représente la même classe d'isotopie lisse de nœud.

Cette construction canonique de nœud transverse à partir d'un nœud legendrien implique une relation sur leurs invariants. Cette relation est donnée par le lemme suivant, dont une preuve peut être trouvée dans [Etn05] par exemple.

**Lemme 1.35.** *Pour tout nœud legendrien  $K$ , on a*

$$sl(T_{\pm}(K)) = tb(K) \mp r(K) \quad (1.13)$$

*Démonstration.* Une première méthode de preuve est de regarder l'action de la translation transverse sur les diagrammes en projection frontale. Les points de rebroussement montants sont lissés et ceux descendants rajoutent une boucle comme indiqué

sur la figure 1.16. Il suffit ensuite d'utiliser les formules combinatoires de calcul des invariants classiques.

Une preuve plus générale est obtenue en regardant les champs de vecteurs utilisés pour la définition des invariants legendriens. L'invariant de Thurston-Bennequin et le nombre de rotations sont tout deux définis comme l'enlacement de deux champs de vecteurs. Il suffit de regarder ce que deviennent ces champs de vecteurs lors de la translation transverse, et on peut voir facilement que ces champs de vecteurs correspondent à ceux utilisés pour définir l'auto-enlacement.  $\square$

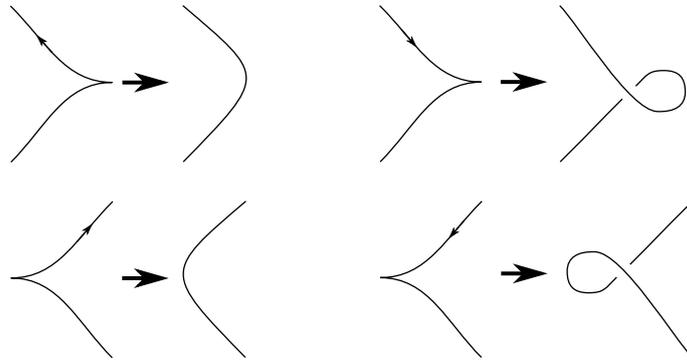


FIGURE 1.16 – Action de la translation transverse positive sur le diagramme en projection frontale

On désire maintenant obtenir un nœud legendrien en partant d'un nœud transverse. Soit  $T$  un nœud transverse de  $(V, \xi)$ . La première étape est de construire un modèle simple pour un voisinage tubulaire de  $T$ .

Pour cela on considère  $(\mathbb{R}^3, \xi_{sym})$  avec  $\xi_{sym} = \ker(dz + r^2 d\theta)$  dans les coordonnées cylindriques de  $\mathbb{R}^3$ . On prend  $V$  la variété obtenue à partir de  $\mathbb{R}^3$  sous l'action  $z \rightarrow z + 1$ . Donc  $V$  est de la forme  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ . On a également une structure de contact induite par  $\xi_{sym}$  sur  $V$  (et on note aussi cette structure  $\xi_{sym}$ ). Pour  $a > 0$ , on note  $T_a = \{r = a\} \subset V$  qui est un tore et qui borde un tore solide notée  $S_a = \{r \leq a\}$ . On peut montrer facilement que pour  $a$  assez petit, tout nœud transverse possède un voisinage tubulaire  $\mathcal{N}$  contactomorphe à  $S_a$ . On peut remarquer que le feuilletage caractéristique de  $T_a$  est constitué de droites de pente  $a^2$ .

À l'intérieur de  $T_a$ , on peut trouver un tore  $T_b$  tel que  $b < a$  et  $b^2 = \frac{1}{n}$  pour  $n$  entier. De la même façon,  $T_b$  est feuilleté par des droites de pente  $b^2 = \frac{1}{n}$ . Si on prend  $L_b$  une feuille du feuilletage caractéristique de  $T_b$  on peut montrer facilement que  $L_b$  est legendrien et isotopie lisse à  $T$ . On dit que  $L_b$  est un *translaté legendrien* de  $T$ .

Inversement en prenant l'anneau entre  $T$  et  $L_b$  on peut voir que  $T$  est le translaté transverse de  $L_b$ .

Il faut noter qu'il n'y a pas unicité dans le translaté legendrien et c'est pour cela qu'on dit *un* translaté legendrien et non pas *le* translaté legendrien. En effet si on prend un autre tore  $T_c$  tel que  $c < b$  et  $c^2 = \frac{1}{n+1}$ , et  $L_c$  une feuille du feuilletage caractéristique de  $T_c$ , on obtient que  $L_c$  est aussi un translaté legendrien de  $T$ . Pourtant  $L_b$  et  $L_c$  ne sont pas isotopes legendriens. Plus exactement  $L_c$  est une stabilisation négative de  $L_b$ . En suivant cette méthode, on peut donc obtenir une infinité de translatés legendriens qui sont tous des stabilisations successives.

Mais on peut remarquer que ces translatés legendriens ne diffèrent que par des stabilisations négatives. Plus exactement on a le théorème suivant, démontré dans [EFM01] pour le cas  $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$  et dans [EH<sup>+</sup>01] pour le cas général, qui illustre ce lien entre nœuds legendriens et nœuds transverses.

**Théorème 1.36.** [Etn05] *Deux nœuds legendriens sont isotopes legendriens à stabilisations négatives près si et seulement si leurs translatés transverses sont isotopes transverses.*

## 1.5 Livres ouverts

### 1.5.1 Définitions

Les livres ouverts ont été introduits en géométrie de contact par Giroux [Gir03]. On considère dans la suite une variété  $(V, \xi)$  close et orientée.

**Définition 1.37.** Un *livre ouvert* dans  $V$  est la donnée d'un couple  $(K, \theta)$  avec les objets suivants :

- une sous-variété  $K \subset V$  de codimension 2 à fibré normal trivial ;
- une fibration  $\theta : V \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$  qui dans un voisinage  $K \times \mathbb{D}^2$  de  $K = K \times \{0\}$  coïncide avec la coordonnée angulaire normale.

On peut voir ce livre ouvert comme une décomposition de  $V$  en surfaces. Pour cela on prend  $F$  une surface compacte à bord  $K = \partial F$ , et  $\varphi : F \rightarrow F$  un difféomorphisme sur  $F$  égale à l'identité près du bord . On construit ensuite la suspension :

$$\Sigma(F, \varphi) = (F \times [0, 1]) / (p, 1) \sim (\varphi(p), 0).$$

Cette suspension donne une variété compacte dont le bord est  $K \times \mathbb{S}^1$  car  $\varphi|_K = id_K$ . On prend la clôture de cette suspension.

$$\bar{\Sigma}(F, \varphi) = \Sigma(F, \varphi) \cup_{\partial} (K \times \mathbb{D}^2)$$

en identifiant les bords de  $\Sigma(F, \varphi)$  et  $(K \times \mathbb{D}^2)$  (qui est  $K \times \mathbb{S}^1$ ).

Ainsi  $\bar{\Sigma}(F, \varphi)$  possède un livre ouvert évident. De plus, tout livre ouvert  $(K, \theta)$  identifie  $V$  avec  $\bar{\Sigma}(F, \varphi)$  en prenant  $F$  une fibre de  $\theta$  et  $\varphi$  est l'application de premier retour sur  $F$  d'un flot transversal aux fibres de  $\theta$  et constitué de rotations autour de  $K$  près de  $K$ . On parle alors de *décomposition en livre ouvert* de  $V$ . On dit que  $K$  est la *reliure*,  $F$  est la *page* et  $\varphi$  est la *monodromie*. En dimension 3, la reliure est un entrelacs et la page est une surface compacte à bord (dont le bord est la reliure).

Giroux relie cet objet topologique aux structures de contact.

**Définition 1.38.** On dit qu'une structure de contact  $\xi$  sur  $V$  est *portée* par un livre ouvert  $(K, \theta)$  si elle admet une forme de contact  $\alpha$  avec les propriétés suivantes :

- $\alpha$  induit une forme de contact sur  $K$  ;
- $d\alpha$  induit sur chaque fibre de  $\theta$  une forme symplectique ;
- l'orientation de  $K$  définie par la forme de contact  $\alpha$  coïncide avec son orientation comme bord de la variété symplectique  $(F, d\alpha)$ .

Une telle forme de contact est dite *adaptée* au livre ouvert.

## 1.5.2 Classifications

On va voir ici que les livres ouverts et les structures de contact possèdent des liens forts. Tout d'abord un résultat de Thurston et Wilkemper indique que la condition de porter une structure de contact n'est pas restrictive sur les livres ouverts.

**Théorème 1.39.** [TW75] *Sur une variété de dimension 3, tout livre ouvert porte une structure de contact.*

En fait, on peut même voir qu'un livre ouvert porte une unique structure de contact, à isotopie près.

**Proposition 1.40.** [Gir03] *Sur une variété close de dimension 3, toutes les structures de contact portées par un même livre ouvert sont isotopes.*

Réciproquement, un théorème de Giroux montre que la condition d'être portée par un livre ouvert n'est pas restrictive sur les structures de contact.

**Théorème 1.41.** [Gir03] *Pour toute structure de contact sur une variété close de dimension 3, il existe un livre ouvert qui porte cette structure de contact.*

Cependant ce livre ouvert n'est pas unique. Une structure de contact peut être portée par différents livres ouverts. Pour construire des livres ouverts qui portent une même structure de contact, on introduit la notion de *stabilisation* et de *plombage*.

**Définition 1.42.** Soit  $F \subset V$  une surface compacte à bord et  $C \subset F$  un arc simple et propre. On dit qu'une surface  $F'$  s'obtient à partir de  $F$  par un *plombage positif* (respectivement *négatif*) d'un anneau le long de  $C$  si  $F' = F \cup A$  où  $A \subset V$  est un anneau avec les propriétés suivantes :

- $A \cap F$  est un voisinage régulier de  $C$  dans  $F$  ;
- $A$  est inclus dans une boule fermée  $B$  dont l'intersection avec  $F$  est réduite à  $A \cap F$  et l'enlacement des deux composantes de  $\partial A$  dans  $B$  vaut 1 (respectivement -1).

Le plombage est donc une opération qui modifie des surfaces. Un résultat de J. Stallings [Sta78] explique que pour obtenir des modifications de livres ouverts, il suffit de plomber la page du livre ouvert. Plus précisément, si  $(K, \theta)$  est un livre ouvert et si  $F$  est une page (c'est-à-dire l'adhérence d'une fibre de  $\theta$ ) alors pour toute surface  $F'$  obtenue par plombage d'un anneau à partir de  $F$ , il existe un livre ouvert  $(K', \theta')$  tel que  $K'$  est le bord de  $F'$  et  $F'$  est l'adhérence d'une fibre de  $\theta'$ . Il reste à modifier la monodromie. En reprenant les notations précédentes, on a  $\varphi$  le difféomorphisme de  $F$  égal à l'identité près du bord. On prolonge  $\varphi$  par l'identité sur  $A$  de façon à obtenir un difféomorphisme de  $F' = F \cup A$  qui reste égal à l'identité près du bord. Pour finir on compose ce difféomorphisme avec un twist de Dehn positif le long d'une courbe fermée simple plongé dans  $F'$  et qui traverse  $A$  une seule fois. Ce qui donne un nouveau livre ouvert de page  $F'$ .

Dans la suite on dira que le livre ouvert  $(K', \theta')$  (et l'entrelacs  $K'$ ) est obtenu par un plombage (positif ou négatif) à partir de  $(K, \theta)$  (et  $K$ ). On dit qu'un livre ouvert est obtenu par *stabilisation* s'il s'obtient par une suite de plombages positifs.

**Théorème 1.43.** [Gir03] *Dans une variété close de dimension 3, deux livres ouverts qui portent la même structure de contact ont des stabilisations isotopes.*

Ainsi la classification des structures de contact est la même que la classification des livres ouverts à stabilisation près.

### 1.5.3 Construction de livres ouverts

La preuve des théorème 1.41 et 1.43 suit la preuve du théorème de Reidemeister-Singer [Sie80]. Elle fait appel à une décomposition de la variété ambiante en polyèdre. On appelle *cellule polyédrale* dans  $V$  l'image d'un polyèdre convexe compact euclidien par un plongement topologique. On a sur un tel objet une structure affine donnée par son paramétrage. Son intérieur est l'image de l'intérieur intrinsèque du

polyèdre, autrement dit l'intérieur topologique à l'intérieur de l'enveloppe affine. Une *cellulation polyédrale* de  $V$  est un recouvrement fini de  $V$  par des cellules polyédrales de dimension 0, 1, 2, 3 avec les propriétés suivantes :

- les intérieurs des cellules forment une partition de  $V$  ;
- le bord de chaque cellule  $D$  est une union de cellule  $D_j$  de dimension strictement inférieure et les inclusions  $D_j \hookrightarrow D$  sont des affines ;
- les cellules de dimension au plus 2 sont lisses, c'est-à-dire les images de plongements lisses.

Les cellules de dimension 1 sont aussi appelées *arêtes* et les cellules de dimension 2 sont appelés *faces*.

Ici on ne demande pas à la cellulation d'être simpliciale (contrairement à une triangulation). L'avantage est que les cellulations sont plus simples à subdiviser que les triangulations.

Si  $V$  est munie d'une structure de contact  $\xi$ , on peut demander à la cellulation de respecter la structure de contact. Une cellulation  $\Delta$  est dite *de contact* si elle possède les propriétés suivantes :

1. chaque arête est un arc legendrien ;
2. chaque face est  $\xi$ -convexe ;
3. l'invariant de Thurston-Bennequin du bord de chaque face vaut -1 ;
4. chaque cellule de dimension 3 est contenue dans le domaine d'une carte de Darboux ;
5. les faces sont  $\xi$ -bien positionnés, c'est-à-dire que aucune arête ne possède un arc qui va d'une singularité négative à une singularité positive (en considérant l'orientation d'une face différente pour chaque singularité).

*Schéma de preuve pour le théorème 1.41 :* Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact close.

**Étape 1 :** On construit tout d'abord une cellulation de contact sur  $(V, \xi)$ .

On part d'une cellulation polyédrale quelconque  $\Delta_0$  sur  $V$ . Par exemple on peut prendre une triangulation avec des 3-simplexes suffisamment petits pour être inclus dans des cartes de Darboux. Tout d'abord on déforme le 1-squelette par une isotopie  $C^0$ -petite de façon à ce que les arêtes deviennent legendriennes. Quitte à rajouter des spirales et à baisser l'invariant de Thurston-Bennequin, on peut ainsi obtenir des faces  $\xi$ -bien positionnées. Il reste à obtenir la propriété (3). Soit  $F$  une face de  $\Delta_0$  et

$\Gamma_F$  sa courbe de découpage. Comme  $F$  est incluse dans un voisinage de Darboux,  $\xi$  est tendue au voisinage de  $F$ . En particulier, les composantes de  $\Gamma_F$  vont d'un bord de  $F$  à un bord de  $F$ . Si  $tb(\partial F) < -1$ ,  $\Gamma_F$  possède au moins deux composantes. On peut alors trouver un arc legendrien  $\gamma$  dans  $F \setminus \Gamma_F$  tel que  $\gamma$  divise  $F$  en deux nouvelles cellules avec des invariants de Thurston-Bennequin (au bord) strictement plus grand. Et on recommence jusqu'à obtenir la condition (3).

Le résultat est une cellulation de contact (et non plus une triangulation) que l'on note  $\Delta$ . C'est là que se justifie l'utilisation de cellulation au lieu de triangulations, car la subdivision des faces d'une triangulation ne donne pas toujours une triangulation.

**Étape 2 :** On construit maintenant le livre ouvert.

Ensuite on épaissit le 1-squelette  $\Delta^1$  de  $\Delta$  en une surface compacte  $\tilde{F}$  tangente à  $\xi$  le long de  $\Delta^1$  (sauf sur les sommet où elle est seulement "presque" tangente). On choisit  $N$  un voisinage tubulaire de  $\Delta^1$  dans  $V$ . Si  $N$  est suffisamment petit, alors

- $F = \tilde{F} \cap N$  est une surface compacte proprement plongée dans  $N$ ;
- $K = \partial F$  est inclus dans  $\partial N$ ;
- $K$  est transverse à  $\xi$ ;
- $d\alpha$  est non-dégénéré sur  $F$ ;
- $\partial N$  est une surface convexe dont la courbe de découpage est  $K$ .

Pour toute cellule  $D$  de dimension 2, le bord de  $D \cap (V \setminus \text{Int } N)$  intersecte  $K$  en deux points (à isotopie près). On peut ainsi créer une fibration  $\theta : V \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$  avec  $\text{Int}(F)$  pour fibre. On peut supposer que  $N$  est une union de fibres de  $\theta$  (en les rognant un peu si nécessaire) sur lesquelles  $d\alpha$  induit une forme d'aire. On construit ainsi un livre ouvert  $(K, \theta)$  et sa page est  $F$ .

**Étape 3 :** On finit avec la forme de contact.

La construction de la cellulation de contact donne le fait que  $K$  est transverse pour  $\xi$ . Il reste donc à étendre  $\alpha$  en une forme de contact sur  $H = V \setminus N$  dont la différentielle donne une forme d'aire sur les fibre de  $\theta$ . On va montrer que  $\xi$  est isotope (relativement à  $N$ ) à une structure de contact portée par  $(K, \theta)$  pour laquelle on aura une bonne forme de contact.

Tout d'abord on peut montrer que deux structures de contact tendues sur  $H$  et coïncidant sur  $\partial H$  sont isotopes relativement à  $\partial H$ . Pour cela il faut découper  $H$  en suivant la cellulation le long de disques de compression convexe avec les bonnes propriétés. On décompose alors  $H$  en une union de boules et on utilise le théorème de classification d'Eliashberg [Eli89] : l'espace des structures de contact tendue sur

la boule avec le germe fixé au bord est faiblement contractile. Le théorème de Gray transforme ce résultat en isotopie entre les structures de contact.

On construit maintenant la forme de contact modèle. On prend  $\beta$  la primitive d'une forme d'aire sur  $F$ , positive sur  $\partial F$ . La forme  $\alpha_0 = dt + \beta$  donne une structure  $\xi_0$  sur  $F \times \mathbb{R}$ . Le but est de réaliser  $H$  dans un voisinage de  $F \times \{0\}$ . On commence donc par prendre un tel voisinage  $F \times [-1, 1]$  et on arrondit ses coins pour obtenir un autre corps en anses  $H'$ . On peut déjà remarquer que  $\xi_0$  aura les bonnes propriétés (forme d'aire sur les fibres, bonne orientation du bord de la page ...). On veut montrer que  $H'$  est difféomorphe à  $H$  et que  $\xi_0$  et  $\xi$  coïncident sur  $\partial H$ .

On lisse  $H'$  pour que  $H' \setminus (\partial F \times \{0\})$  possède un feuilletage  $\mathcal{F}$  par des copies  $\text{int}(F)$  et que chaque feuille soit un graphe au dessus de  $F \times \{0\}$ . Alors  $\partial H'$  est convexe et sa courbe de découpage est  $\Gamma = \partial F \times \{0\}$ . On utilise alors le lemme de réalisation de feuilletage de Giroux pour modifier chaque composante de  $\partial H' \setminus (\partial F \times \{0\})$  relativement à  $\partial F \times \{0\}$ . On choisit de cette modification de façon à ce que le germe de  $\xi_0$  près de  $\partial H'$  devienne conjugué au germe de  $\xi$  près de  $\partial H$  et que cette conjugaison envoie  $\partial F \times \{0\}$  sur  $K$  et s'étende en un difféomorphisme de  $H'$  sur  $H$ . On fait cette modification parmi les surfaces transversales au champ de contact  $\frac{\partial}{\partial t}$  ainsi l'image du feuilletage  $\mathcal{F}$  par ce difféomorphisme est un feuilletage toujours transversal à  $\frac{\partial}{\partial t}$ . On obtient donc que  $(H', \xi_0)$  est contactomorphe à  $(H, \xi)$ . Et on étend la fibration  $\theta$  sur  $H$  en suivant l'image du feuilletage  $\mathcal{F}$ . On prend la forme de contact  $\alpha_1$  sur  $H$  image de la forme  $\alpha_1$  de  $H'$  qui possède les propriétés désirées.

Pour finir il faut recoller les formes de contact  $\alpha$  et  $\alpha_1$  obtenues respectivement sur  $N$  et  $H$ . On prend des coordonnées cylindriques sur  $\mathcal{N}(K)$  un voisinage de  $K$  :  $(r, t, z) \in [0, \epsilon[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  pour lesquelles  $\xi$  s'écrit de façon standard  $dz + r^2 dt = 0$ . Loin de  $K$ , c'est-à-dire sur  $\{r > \epsilon/2\}$  on peut interpoler une forme de contact notée également  $\alpha$  entre  $\alpha$  et  $\alpha_1$  qui garde la propriété d'aire sur les fibres de  $\theta$ . Pour finir on étend la nouvelle forme  $\alpha$  sur  $\mathcal{N}(K)$  par  $(1 - \psi(r))C(dz + r^2 dt) + \psi(r)\alpha$  où  $C$  est une constante assez grande, et  $\psi$  est une fonction lisse valant 0 pour  $r \leq \epsilon/2$  et 1 pour  $r \geq \epsilon$ . Cette forme est adaptée au livre ouvert  $(K, \theta)$ .

*Esquisse de preuve pour le théorème 1.43 :* Soit  $\Delta$  une cellulation de contact dans  $(V, \xi)$ . On dit qu'un livre ouvert  $(K, \theta)$  est *associé* à une cellulation  $\Delta$  si, comme dans la démonstration précédente, l'une des fibres de  $\theta$  contient le 1-squelette de  $\Delta$  et se rétracte dessus par une isotopie de contact. D'après [Sie80], on peut montrer que tout livre ouvert porteur d'une structure de contact admet une cellulation de contact. On a donc deux livre ouverts porteurs associés aux cellulations  $\Delta_0$  et  $\Delta_1$ . On utilise [Sie80] pour trouver une subdivision  $\Delta_2$  commune à  $\Delta_0$  et  $\Delta_1$  qui s'obtient

par des bisections à partir de  $\Delta_0$  et de  $\Delta_1$ .

On déforme ensuite  $\Delta_2$  relativement au 1-squelette de  $\Delta_0$  et  $\Delta_1$  pour obtenir une cellulation  $\tilde{\Delta}_2$  qui vérifie les propriétés (1) et (3) des cellulations de contact et avec des 2-simplexes convexes. Pour obtenir une cellulation de contact, il ne reste qu'à normaliser l'invariant de Thurston-Bennequin du bord des cellules de dimension 2. Pour cela, on subdivise le 2-squelette de  $\tilde{\Delta}_2$  et on obtient  $\Delta$  une cellulation de contact. Pour finir on peut montrer que  $\Delta$  possède un livre associé, et que ce livre ouvert est obtenu par stabilisation des livres ouverts associés à  $\Delta_0$  et  $\Delta_1$ .

#### 1.5.4 Inclusion de nœuds

**Théorème 1.44** (Giroux). *Sur une variété de contact close, pour tout nœud legendrien, il existe un livre ouvert qui porte  $\xi$  et qui contient le nœud legendrien dans une de ses pages.*

*Démonstration.* Soit  $L$  un nœud legendrien dans  $(V, \xi)$ . On reprend la méthode de construction de livre ouvert expliquée dans la preuve du théorème 1.41. Mais on choisit la cellulation  $\Delta$  afin que  $L$  soit inclus dans le 1-squelette  $\Delta^1$ . Cela est possible car la seule condition sur les arêtes est leur caractère legendrien. La page du livre ouvert est construite à l'étape 2 en prenant un épaississement du 1-squelette. En particulier,  $L$  est bien inclus dans la page du livre ouvert ainsi construit.  $\square$

**Théorème 1.45.** *Sur une variété de contact close, pour tout nœud transverse, il existe un livre ouvert qui porte  $\xi$  et qui contient le nœud transverse dans sa reliure.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un nœud transverse dans  $(V, \xi)$ . Soit  $L$  un translaté legendrien de  $T$ . On reprend la méthode de construction de livre ouvert expliquée dans la preuve du théorème 1.41. De la même façon, on inclut  $L$  dans le 1-squelette.

L'objectif est de construire une surface compacte  $\Sigma$  qui contienne  $\Delta^1$  (et en particulier  $L$ ) dans son intérieur et telle que  $L$  soit inclus dans l'intersection de  $\Sigma$  avec un voisinage tubulaire  $\mathcal{N}(\Delta^1)$  de  $\Delta^1$ . De plus pour la construction du livre ouvert, on demande à ce que  $\Sigma$  soit tangent à  $\xi$  le long de  $\Delta^1 \setminus \mathcal{N}(\Delta^0)$  et presque tangent à  $\xi$  sur  $\mathcal{N}(\Delta^0)$ .

Par définition,  $T$  est un translaté transverse de  $L$ . Par la construction des translatés vue dans la section 1.4.7, on a un anneau  $\mathcal{A}$  de la forme  $L \times [-1, 1]$  tel que  $L = L \times \{0\}$  et  $T = L \times \{1\}$  (voir figure 1.15). De plus on a choisi cet anneau transverse à  $\xi$ . On ne peut donc pas utiliser directement  $\mathcal{A}$  pour  $\Sigma$ .

On commence par se placer sur  $\mathcal{N}(L) \setminus \mathcal{N}(\Delta^0)$ . On y construit  $\Sigma$  en déformant  $\mathcal{A}$  de façon à le rendre tangent à  $\xi$  le long de  $\Delta^1$ . On obtient ainsi des bandes  $[-1, 1] \times [0, 1]$  où  $\{1\} \times [0, 1] \subset T$  et  $\{0\} \times [0, 1] \subset L$  qui sont tangentes à  $\xi$  le long

de  $\Delta^1$ . Plus exactement, on n'a besoin de déformer que la moitié de l'anneau qui possède  $T$  dans son bord.

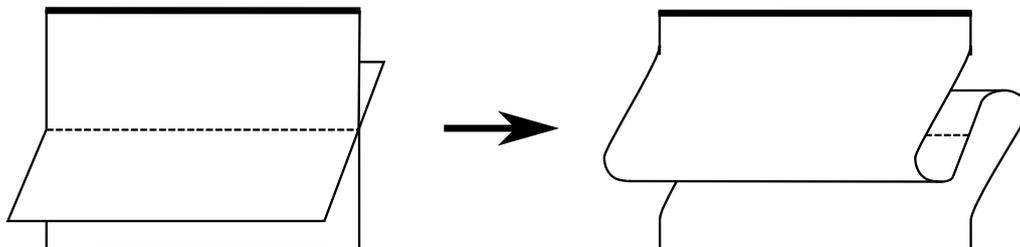


FIGURE 1.17 – Construction de  $\Sigma$  loin des sommets ( $\xi$  est représenté à plat)

Il faut maintenant recoller les différentes bandes au niveau des sommets. On se place sur une composante connexe  $B$  de  $\mathcal{N}(\Delta^0)$ . On note  $T_1$  et  $T_2$  les deux points de  $T \cap B$ . On suppose qu'on a déjà une surface  $\tilde{\Sigma}$  dans  $B$  qui contient  $L$  et qui est tangente à  $\xi$  le long de  $\Delta^1$ . L'objectif est de déformer  $\tilde{\Sigma}$  dans  $B$  pour inclure  $T$  dans son bord.

*Cas simple* : Si  $T_1$  et  $T_2$  sont sur la même composante de bord de  $\tilde{\Sigma}$ . On peut alors déformer la partie de  $\tilde{\Sigma}$  proche de  $T$  de la même façon que loin des sommets.

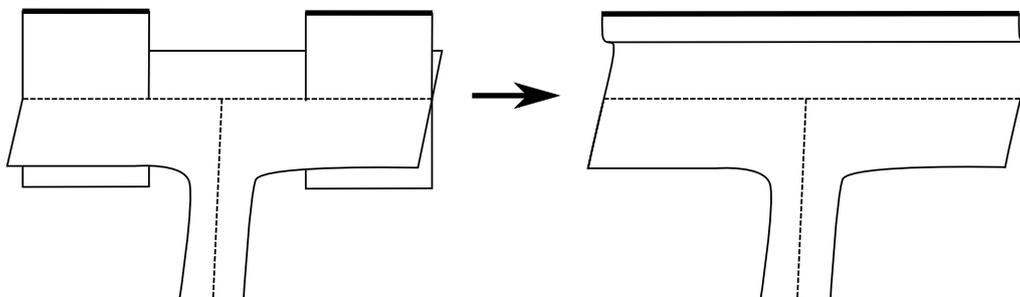


FIGURE 1.18 – Cas simple de Construction de  $\Sigma$  près d'un sommet

*Cas général* : Si  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas dans la même composante de bord de  $\tilde{\Sigma}$ , on va modifier le 1-squelette de façon à retrouver le cas simple. Pour cela, on va placer une rocade legendrienne de façon à stabiliser  $L$ . Soit  $\mathcal{D}$  le demi-disque représentant la rocade legendrienne. On note  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  les deux points "anguleux" de son bord. On place  $\mathcal{D}$  dans  $B$  afin de stabiliser (positivement)  $L$ . On obtient ainsi un nouveau nœud legendrien  $L'$ . On modifie ensuite  $\Delta$  de la façon suivante :  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deviennent des 0-simplexes et  $L' \setminus \text{int}(L)$  devient un 1-simplexe (et on modifie les 2-simplexes

pour raccorder ces nouveaux éléments). Pour finir on obtient  $\Sigma$  à partir de  $\tilde{\Sigma}$  en rajoutant une anse qui suit le nouveau 1-simplexe. Cette anse relie les composantes de bords de  $\tilde{\Sigma}$  qui contiennent  $T$ .

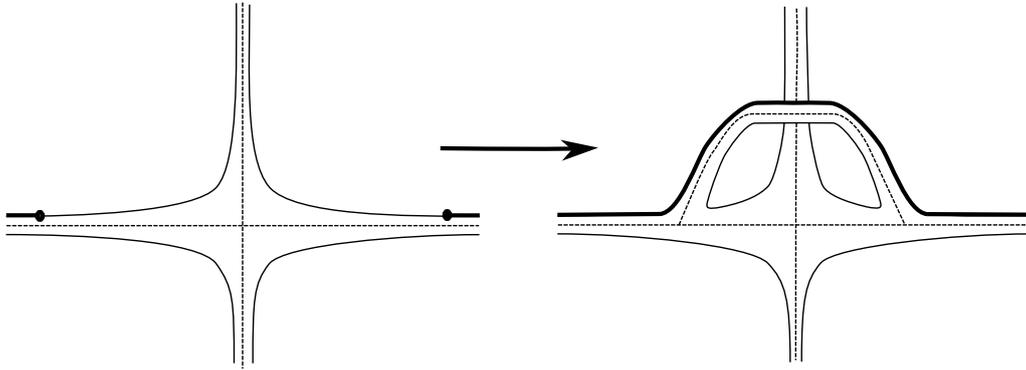


FIGURE 1.19 – Modifications de  $\Delta$  et  $\Sigma$

Maintenant on se retrouve dans  $B$  avec trois 0-simplexes et le 0-simplexe original ne rencontre plus  $K$  dans son voisinage. On relie  $T_1$  et  $T_2$  en suivant le 1-simplexe (et l'anse) nouvellement créé. Sur les deux nouveaux 0-simplexes, on se retrouve à déformer  $\tilde{\Sigma}$  comme dans le cas simple en remarquant que  $L'$  est un translaté legendrien de  $T'$ . On obtient ainsi un nouveau nœud transverse  $K'$  dans le bord de  $\Sigma'$ . On peut alors utiliser  $\tilde{\Sigma}$  pour construire un livre ouvert qui contient  $K'$  dans sa reliure.

Mais comme  $L$  et  $L'$  sont isotopes à stabilisation positive près, on a que  $T$  et  $T'$  sont isotopes transverses. Finalement cela revient à choisir le translaté legendrien de  $T$  le “mieux” adapté à la triangulation préalablement choisie.  $\square$

## 1.6 Surfaces branchées et domaines fibrés

Une *surface branchée*  $B$  est une union de surfaces lisses localement modelée sur l'une des trois figures de la figure 1.20.

La *partie régulière*  $R$  est l'ensemble des points de  $B$  où le modèle locale est donné par la première figure. L'adhérence d'une composante connexe de la partie régulière est appelée *secteur*. Le *lieu singulier*  $S$  est  $B \setminus R$ .

Un *domaine fibré*  $\mathcal{D}$  est une variété compacte orientable de dimension 3 à bords anguleux (avec des arêtes lisses mais pas de coins) munie d'un feuilletage  $\tau$  en intervalles compacts dont le bord  $\partial\mathcal{D}$  est l'union de deux surfaces compactes lisses  $\partial_v\mathcal{D}$ , dite verticale, et  $\partial_h\mathcal{D}$ , dite horizontale, vérifiant les conditions suivantes :

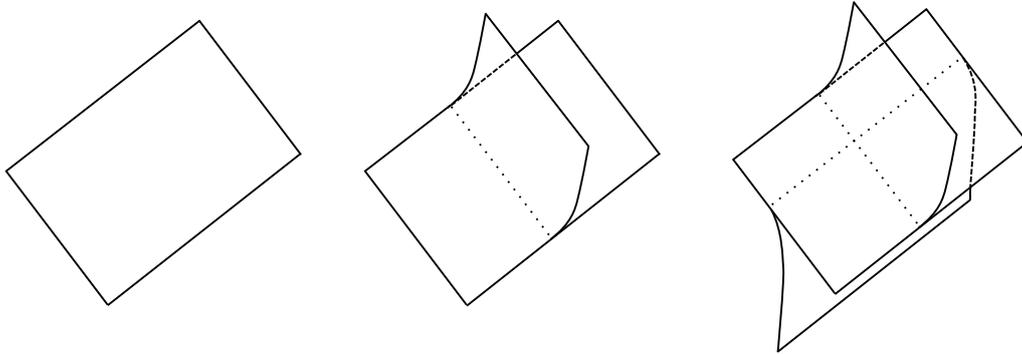


FIGURE 1.20 – Modèles locaux de surface branchée

- $\partial_h \mathcal{D}$  est transversale à  $\tau$  et  $\partial_v \mathcal{D}$  est tangente à  $\tau$  ;
- chaque feuille de  $\tau$  traverse au plus deux fois  $\partial_v \mathcal{D}$  ;
- les surfaces  $\partial_v \mathcal{D}$  et  $\partial_h \mathcal{D}$  ont même bord qui est la partie anguleuse de  $\mathcal{D}$  ;
- chaque composante de  $\partial_v \mathcal{D}$  a sur son bord des points où  $\mathcal{D}$  est concave, c'est-à-dire modelé sur trois quarts d'espace.

**Proposition 1.46.** [CGH09] *Le quotient  $\mathcal{D}/\tau$  est une surface branchée sans bord dont le lieu singulier est l'image des composantes  $C$  de  $\partial_v \mathcal{D}$  telles que  $\mathcal{D}$  soit concave près de chaque point de  $\partial C$ .*

Sur la figure 1.21, on reconnaît un épaississement du troisième modèle local de surface branchée de la figure 1.20.

Une surface incluse dans  $(M, \tau)$  est dite *portée* par  $(M, \tau)$  si elle est transversale à  $\tau$ . On dit de plus qu'elle est *pleinement portée* par  $(M, \tau)$  si elle rencontre toutes les fibres de  $\tau$ .

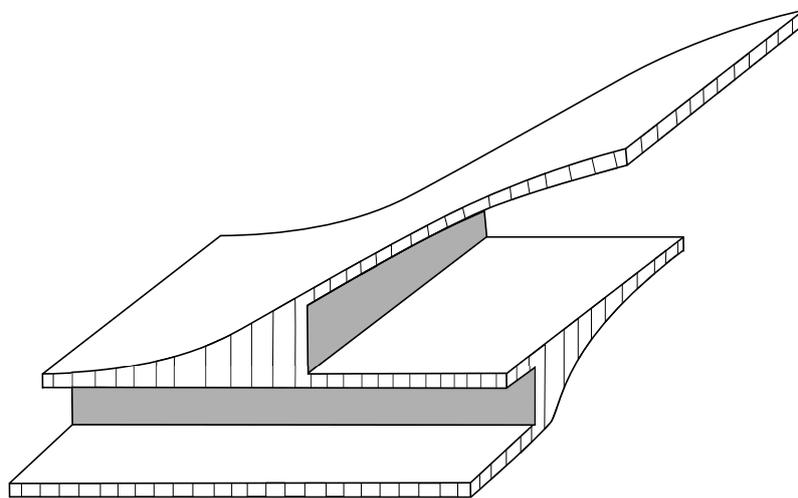


FIGURE 1.21 – Un exemple de modèle local d'un domaine fibré (le bord vertical est en gris, le bord horizontale est en blanc)



## Relation entre les conjectures de finitude

Dans ce chapitre, on étudie la finitude pour les nœuds transverses. On démontre ici le théorème 0.3 qui fait le lien entre les conjectures 0.2 et 0.4.

Pour une suite de nœuds legendriens  $(L_i)$  dans la même classe d'isotopie lisse mais dans des classes d'isotopie legendriennes différentes, on a  $\text{tb}(L_i) \rightarrow -\infty$ . En effet, par le théorème 0.1, si on fixe une classe d'isotopie lisse et un invariant de Thurston-Bennequin, il n'existe qu'un nombre fini de classe d'isotopie legendrienne. De plus, l'invariant de Thurston-Bennequin d'un nœud est majoré la caractéristique d'Euler d'une surface de Seifert de ce nœud, et cette borne ne dépend que de la classe d'isotopie lisse du nœud. Ce qui donne une majoration de l'ensemble des  $\text{tb}(L_i)$  et donc  $\text{tb}(L_i) \rightarrow -\infty$ .

### 2.1 Finitude des nœuds transverses

On utilise la notion de *translation legendrienne/transverse* définie dans le chapitre 1 entre nœuds legendriens et transverses pour faire le lien entre la finitude des nœuds transverses et la finitude des nœuds legendriens non déstabilisables :

**Théorème 0.3.** *Dans une variété de contact de dimension 3, les nœuds transverses ayant une classe d'isotopie lisse et un nombre d'autoenlacement arbitrairement im-*

posés forment un nombre fini de classes d'isotopie transverse si dans l'ensemble des classes d'isotopie legendrienne obtenues par translations legendriennes à partir de ces nœuds transverses, on ne trouve qu'un nombre fini de nœuds legendriens non déstabilisables.

*Démonstration.* Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3. On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de nœuds transverses  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  représentant tous des classes d'isotopie transverse différentes mais tous dans la même classe d'isotopie lisse  $\mathcal{K}$  et avec le même auto-enlacement  $N_T$  et que l'on ne trouve qu'un nombre fini de nœuds legendriens non déstabilisables parmi leurs translatés legendriens. Pour chaque nœud transverse  $T_i$ , on peut prendre un translaté legendrien que l'on note  $L_i$ . Ainsi  $T_i$  est le translaté transverse positif de  $L_i$ . Leurs invariants classiques sont donc reliés par la formule :

$$N_T = \text{sl}(T_i) = \text{tb}(L_i) - \text{rot}(L_i)$$

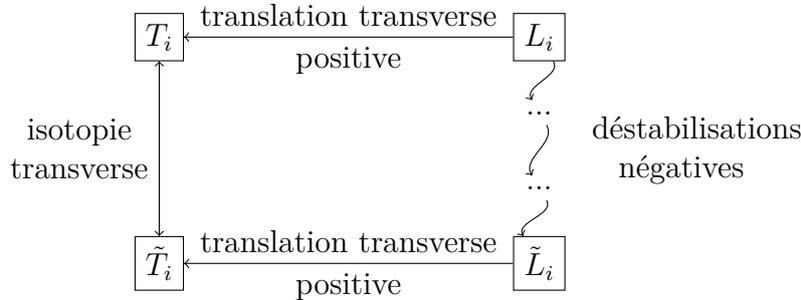
On va ensuite déstabiliser négativement chacun de ces  $L_i$  jusqu'à obtenir des nœuds legendriens qui ne soient plus déstabilisables négativement et on note les nœuds ainsi obtenus  $\tilde{L}_i$ . On note  $\tilde{T}_i$  le translaté transverse positif de  $\tilde{L}_i$ . On a la même relation entre les invariants :

$$\text{sl}(\tilde{T}_i) = \text{tb}(\tilde{L}_i) - \text{rot}(\tilde{L}_i)$$

On applique ensuite le théorème 1.36. Par construction,  $L_i$  et  $\tilde{L}_i$  sont isotopes legendriens à stabilisations négatives près, donc  $T_i$  et  $\tilde{T}_i$  sont isotopes transverses. De plus, les  $T_i$  n'étant pas isotopes transverses, les  $\tilde{L}_i$  sont tous dans des classes d'isotopie legendrienne différentes. On obtient donc la relation :

$$N_T = \text{sl}(T_i) = \text{sl}(\tilde{T}_i) = \text{tb}(\tilde{L}_i) - \text{rot}(\tilde{L}_i).$$

Enfin, les opérations de translations et de stabilisations ne changent pas la classe d'isotopie lisse. Les  $T_i$ , les  $\tilde{T}_i$ , les  $L_i$  et les  $\tilde{L}_i$  représentent tous la même classe d'isotopie lisse  $\mathcal{K}$ .



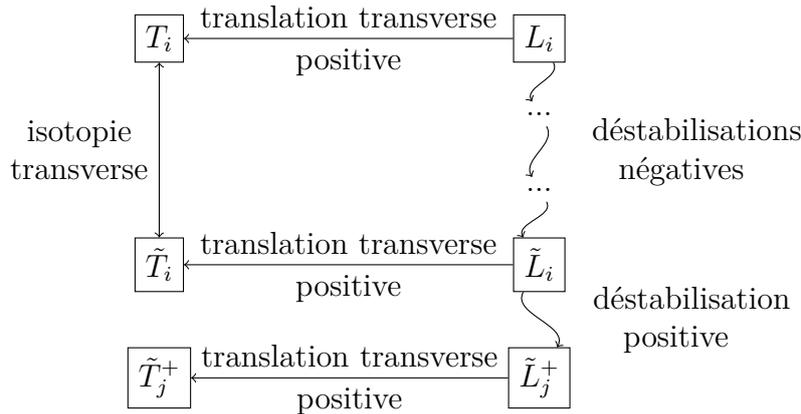
On a supposé que, parmi les translatsés legendriens des  $T_i$ , les nœuds non déstabilisables sont en nombre fini. Les  $\tilde{L}_i$  sont également des translatsés legendriens des  $T_i$ . Il existe donc un  $N$  tel que  $\tilde{L}_N$  est déstabilisable. Par construction, les  $\tilde{L}_i$  sont non déstabilisables négativement donc  $\tilde{L}_N$  est déstabilisable positivement. On note  $\tilde{L}_N^+$  la déstabilisation positive de  $\tilde{L}_N$  et  $\tilde{T}_N^+$  son translatsé transverse positif. On va maintenant regarder l'effet de ces transformations sur les invariants classiques. Tout d'abord la stabilisation positive agit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{tb}(\tilde{L}_N^+) &= \text{tb}(\tilde{L}_N) + 1 \\ \text{rot}(\tilde{L}_N^+) &= \text{rot}(\tilde{L}_N) - 1 \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer la formule qui relie les invariants d'un nœud legendrien et celui de son translatsé transverse :

$$\begin{aligned} \text{sl}(\tilde{T}_N^+) &= \text{tb}(\tilde{L}_N^+) - \text{rot}(\tilde{L}_N^+) \\ &= \text{tb}(\tilde{L}_N) - \text{rot}(\tilde{L}_N) + 2 \\ &= \text{sl}(\tilde{T}_N) + 2 \\ &= N_T + 2 \end{aligned}$$

On peut recommencer et trouver un autre nœud déstabilisable positivement parmi les  $(\tilde{L}_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{N\}}$ . Et on peut réitérer de façon à trouver une sous-suite  $(\tilde{L}_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  de nœuds déstabilisables positivement. On note  $(\tilde{L}_j^+)_{j \in \mathbb{N}}$  la suite de nœuds ainsi obtenue après déstabilisation positive.

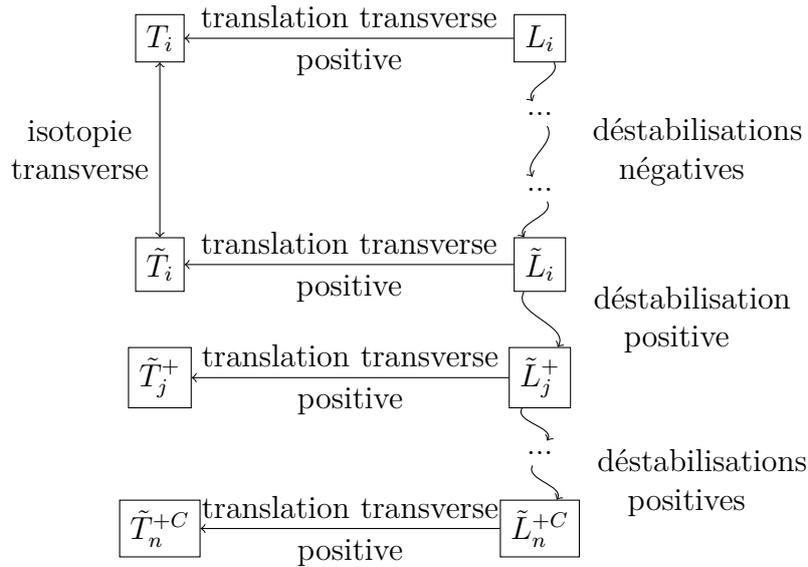


Maintenant on peut encore recommencer sur la suite  $(\tilde{L}_j^+)_{j \in \mathbb{N}}$ . En effet, une stabilisation positive ne change pas la classe d'isotopie lisse donc les  $\tilde{L}_j^+$  restent dans la même classe d'isotopie lisse. Et comme les  $\tilde{L}_j$  ne sont pas isotopes legendriens, ils

restent non isotopes legendriens après avoir effectué une déstabilisation positive sur chacun d'entre eux.

On peut donc trouver une nouvelle sous-suite de nœuds legendriens déstabilisables. Cette déstabilisation ne peut pas être négative. En effet, si un  $L_N^+$  est déstabilisable négativement, on aurait  $\tilde{L}_N^+ = \mathcal{S}^-(L)$  où  $\mathcal{S}^-$  est une stabilisation négative. Or on a  $\mathcal{S}^+(\tilde{L}_N^+) = \tilde{L}_N$ . On a donc  $\tilde{L}_N = \mathcal{S}^+(\mathcal{S}^-(L))$ . Mais comme les stabilisations négatives et positives commutent, cela signifierait que  $\tilde{L}_N$  est déstabilisable négativement, ce qui n'est pas possible par construction. Donc  $\tilde{L}_N^+$  est déstabilisable positivement. Et on peut réitérer les arguments précédents pour trouver une sous-suite  $(\tilde{L}_{j_k}^+)_{k \in \mathbb{N}}$  de nœuds déstabilisables positivement. On note  $(\tilde{L}_k^{+2})_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de nœuds ainsi obtenue après déstabilisation positive.

Plus généralement, en réitérant ces arguments, pour tout  $C > 0$  arbitrairement grand, on peut trouver une sous-suite  $(\tilde{L}_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$  qui soit  $C$  fois déstabilisable positivement. On note  $(\tilde{L}_n^{+C})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nœuds ainsi obtenue après  $C$  déstabilisations positives. Et on note  $\tilde{T}_n^{+C}$  le translaté positif de  $\tilde{L}_n^{+C}$ .



Il est important de remarquer ici qu'à chaque déstabilisation, l'invariant de Thurston-Bennequin de chacun des nœuds legendriens augmente de 1.

$$\text{tb}(\tilde{L}_n^{+C}) = \text{tb}(\tilde{L}_{i_n}) + C$$

$$\text{rot}(\tilde{L}_n^{+C}) = \text{rot}(\tilde{L}_{i_n}) - C$$

Et on a vu que l'invariant de Thurston-Bennequin est majorée par  $-\chi(\Sigma)$  une borne qui ne varie pas avec les déstabilisations. Pourtant, on vient de montrer que l'on peut

effectuer un nombre arbitrairement grand de déstabilisations. Cela est possible car l'invariant de Thurston-Bennequin de  $\tilde{L}_{i_n}$  tend vers  $-\infty$  par le théorème de finitude des nœuds legendriens.

Mais ce n'est pas le cas pour les nœuds transverses. À chaque déstabilisation, l'auto-enlacement du translaté transverse positif associé augmente de 2. On a donc

$$\text{sl}(\tilde{T}_n^{+C}) = N_T + 2C$$

Or on sait que l'auto-enlacement d'un nœud transverse est aussi majoré par la caractéristique d'Euler d'une surface de Seifert :

$$\text{sl}(\tilde{T}_n^{+C}) \leq -\chi(\Sigma)$$

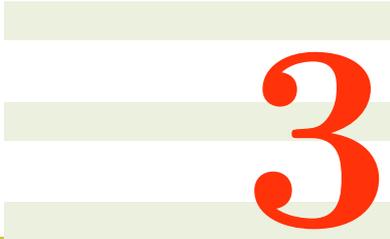
où  $\Sigma$  est une surface de Seifert pour le nœud. Cette borne n'est pas modifiée par les translations, ni par les stabilisations, on a donc

$$\forall C \in \mathbb{N}, N_T + 2C \leq -\chi(\Sigma)$$

ce qui n'est pas possible. On arrive donc à une contradiction ce qui conclut la preuve.  $\square$

*Remarque 2.1.* Par ce théorème, la conjecture 0.4 implique la conjecture 0.2.





# 3

---

## Triangulations et Domaines fibrés

Dans ce chapitre, on démontre le théorème 0.8.

La première étape est la construction de triangulations de contact. On peut rapprocher l'utilisation des triangulations de contact avec celle de la décomposition cellulaire qu'utilise Giroux dans [Gir03] pour la preuve de l'existence de livre ouvert adapté à toute structure de contact. Dans une deuxième étape, on normalise progressivement les structures de contact par rapport à un nombre fini de structures de contact. Par cette normalisation, on trouve un nombre fini de modèles de structures de contact en dehors des domaines fibrés.

Les domaines fibrés construits contiennent alors toute l'information infinie des structures de contact. Après normalisation, ils seront adaptés à un ensemble de structures de contact et serviront à engendrer les structures de contact.

Cette stratégie est utilisée par Colin, Giroux et Honda dans [CGH09] pour montrer la finitude (homotopique puis isotopique) des structures de contact tendues. On aura ici des contraintes supplémentaires par rapport à la position de nœuds legendriens. Pour résoudre ces contraintes supplémentaires, on va adapter cette méthode au cas des variétés à bord.

## 3.1 Triangulations de contact

### 3.1.1 Définitions

On commence par quelques définitions et propriétés.

**Définition 3.1.** Soit  $V$  une variété de dimension 3. Une *triangulation* de  $V$  est une décomposition de  $V$  en simplexes telle que :

- chaque simplexe de dimension 2 (ou moins) est lisse ;
- chaque simplexe de dimension 3 a un angle d'ouverture strictement compris entre 0 et  $\pi$  le long de ses arêtes (mais en dehors de ses sommets).

Pour une triangulation  $\Delta$  de  $V$ , on note  $\Delta^i$  son squelette de dimension  $i$ , c'est-à-dire l'ensemble de ses simplexes de dimension  $i$ . Une isotopie de triangulations est un chemin dans l'espace des triangulations. Une isotopie de triangulation se prolonge en une isotopie ambiante de  $V$  qui n'est pas lisse en général, mais dont la restriction à chaque 2-simplexe est lisse.

**Définition 3.2.** Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3. Une *triangulation de contact* de  $(V, \xi)$  est une triangulation  $\Delta$  de  $V$  qui vérifié les conditions suivantes :

- les 1-simplexes sont des arcs legendriens ;
- les 2-simplexes sont  $\xi$ -convexes et relativement  $\xi$ -convexes ;
- les 3-simplexes sont contenus dans des cartes de Darboux.

On rappelle la définition de convexité relative :

**Définition 3.3.** Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact et  $\Delta$  une triangulation de  $V$  dont le 1-squelette est legendrien. Soit  $G$  un 3-simplexe,  $F_0, F_1$  deux faces de  $G$  et  $a$  leur arête commune. On oriente  $F_1$  comme partie de  $\partial G$  et  $a$  comme partie de  $\partial F_1$ . On dira que  $F_0$  et  $F_1$  sont  $\xi$ -indisciplinées le long d'un arc (orienté)  $[p, q] \subset a$  si  $\xi$  est tangent à  $F_0$  en  $p$ , à  $F_1$  en  $q$  et n'est un hyperplan d'appui de  $G$  en aucun point de  $]p, q[$ .

On dit que les 2-simplexes de  $\Delta$  sont *relativement  $\xi$ -convexes* si aucun 3-simplexe ne possède de faces  $\xi$ -indisciplinées le long d'un arc de leur arête commune.

**Définition 3.4.** On dit qu'une structure de contact  $\xi$  est un *plan d'appui* d'un 3-simplexe  $G$  en un point  $p$  de  $G$  si localement autour de  $x$ , le simplexe  $G$  se situe dans un des demi-espaces délimités par  $\xi(x)$ .

Une telle triangulation n'est pas lisse. En effet, comme les arêtes sont legendriennes, toutes les arêtes issues d'un même sommet sont tangentes à un même plan, le plan de contact.

*Remarque 3.5.* La troisième condition est automatiquement remplie si la structure de contact  $\xi$  est tendue car selon [Eli92] toute boule munie d'une structure de contact tendue se plonge dans l'espace de contact standard.

On applique certaines définitions de théorie des nœuds legendriens aux arêtes d'une triangulation de contact.

**Définition 3.6.** Pour  $\Delta$  une triangulation de contact de  $(V, \xi)$ , on appelle *nombre de Thurston-Bennequin* de  $\Delta$  l'entier

$$TB(\Delta) = TB(\Delta, \xi) = - \sum_F tb(\partial F),$$

la somme se faisant sur tous les 2-simplexes  $F$ . Comme  $tb(\partial F) \leq -1$  pour tout  $F$ , l'entier  $TB(\Delta)$  est positif et au moins égal au nombre de 2-simplexes.

Une triangulation de contact est dite *minimale* si elle a le plus petit nombre de Thurston-Bennequin parmi les triangulations de contact obtenues en la déformant par une isotopie à support compact et relative à un voisinage de ses sommets.

Dans le cas d'une structure de contact tendue, il est facile d'obtenir une triangulation de contact :

**Lemme 3.7** ([CGH09]). *Soit  $(V, \xi)$  une structure de contact tendue de dimension 3, toute triangulation lisse de  $V$  est isotope à une triangulation de contact de  $(V, \xi)$ .*

*Démonstration.* L'idée principale de cette preuve est que l'on peut déformer chaque arête d'une triangulation lisse pour la rendre legendrienne par une isotopie relative à ses sommets et arbitrairement  $C^0$ -petite. Si on veut prolonger la différentiabilité du plongement, il faut un peu plus de soin aux sommets. Pour cela on va commencer par détailler la déformation autour des sommets.

Soit  $\Delta_0$  une triangulation lisse. On veut déformer  $\Delta_0$  par isotopie en une triangulation de contact  $\Delta_1$ . En chaque sommet  $s$ , on se donne une projection  $d_s\pi : T_sV \rightarrow \xi_s$  dont le noyau est transversal aux plans tangents des 2-simplexes en  $s$  et qui envoie les tangentes aux arêtes sur des droites distinctes. Sur un voisinage compact convenable  $\mathcal{N}(s)$ , il existe des coordonnées  $(x, y, z) \in \mathcal{D}^2 \times [-1, 1]$  centrées en  $s$  dans lesquelles  $d_s\pi$  est la dérivée de la projection  $\pi_s : (x, y, z) \mapsto (x, y)$  et  $\xi$  a pour équation  $dz + xdy - ydx = 0$ . Par ailleurs, pour  $\mathcal{N}(s)$  assez petit,  $\pi_s$  induit un plongement sur le 1-squelette et sur chaque 2-simplexe de  $\Delta_0$ . On déforme  $\Delta_0$  dans  $\mathcal{N}(s)$  comme suit :

- les arêtes de  $\Delta_1$  sont les arcs legendriens sur lesquels les arêtes de  $\Delta_0$  se projettent ;
- les faces de  $\Delta_1$  sont des graphes au-dessus ou en-dessous de celles de  $\Delta_0$  ;
- les arêtes et les faces des triangulations intermédiaires  $\Delta_t$  , pour tout  $t \in [0, 1]$ , sont obtenues en prenant l'isotopie barycentrique verticale au temps  $t$  entre les arêtes et les faces de  $\Delta_0$  et celles de  $\Delta_1$ .

Moyennant quelques petites précautions dans la mise en place des 2-simplexes de  $\Delta_1$ , les angles diédraux de ses 3-simplexes dans  $\mathcal{N}(s)$  sont compris strictement entre 0 et  $\pi$  en dehors de  $s$  et il en va alors de même pour les angles diédraux des 3-simplexes de chaque  $\Delta_t$ ,  $t \in [0, 1]$ . On a ainsi fabriqué les triangulations  $\Delta_t$  voulues près des sommets. Maintenant que les problèmes sont réglés aux sommets, on peut facilement déformer les arêtes. On choisit ensuite une isotopie  $\Delta_t^1$  du 1-squelette de  $\Delta_0$  qui prolonge celle construite dans les cartes  $\mathcal{N}(s)$ , est lisse en dehors et aboutit à un graphe legendrien  $\Delta_1^1$  .

En dehors du voisinage des sommets  $\mathcal{N}(s) = \mathbb{D}^2 \times [-1, 1]$ , cette isotopie s'étend en une isotopie ambiante lisse  $\psi_t$  engendrés sur les bords latéraux des voisinages  $\partial_1 \mathcal{N}(s) = \partial \mathbb{D}^2 \times [-1, 1]$  par le champ  $\partial z$ . Les images par  $\psi_t$  du 2-squelette en dehors des  $\mathcal{N}(s)$  ne se recollent pas a priori aux 2-simplexes bâtis dans  $\mathcal{N}(s)$  mais par construction de  $\pi_s$  les arcs qu'ils tracent sur les anneaux  $\partial_1 \mathcal{N}(s)$  sont des graphes au-dessus de ceux tracés par les 2-simplexes dans  $\mathcal{N}(s)$ . On peut donc modifier les 2-simplexes sur  $\partial_1 \mathcal{N}(s)$  pour les recoller en laissant fixe le 1-squelette. Ainsi l'isotopie construite transforme  $\Delta_0$  en  $\Delta_1$  dont les arcs sont legendriens. De plus, comme  $\xi$  est tendue, les 3-simplexes sont tous inclus dans des cartes de Darboux.

Maintenant il reste le problème de convexité. Quitte à décroître le nombre de Thurston-Bennequin du bord des 2-simplexes de  $\Delta_1$  (par stabilisation), on peut, dans la construction précédente, choisir l'isotopie de graphes  $\Delta_t^1$  de sorte que, le long de chaque arête de  $\Delta_1$  , l'enroulement de  $\xi$  autour d'une face quelconque soit négatif ou nul. Par le même principe, on élimine tous les arcs d'arêtes le long desquels deux faces adjacentes sont  $\xi$ -indisciplinées. Les 2-simplexes sont alors relativement  $\xi$ -convexes et on les rend  $\xi$ -convexes par une ultime petite perturbation de  $\Delta_1$  toujours stationnaire sur le 1-squelette et un voisinage des sommets. On obtient ainsi une triangulation de contact  $\Delta_2$  de  $(V, \xi)$  isotope à  $\Delta_0$  . Enfin, puisque les triangulations de contact de  $(V, \xi)$  qui sont isotopes à  $\Delta_2$  relativement à un voisinage des sommets ont un nombre de Thurston-Bennequin minoré, l'une d'elles est minimale.  $\square$

Le lemme 3.7 montre l'existence d'une triangulation de contact pour une structure de contact donnée. Le résultat suivant donne l'existence d'une triangulation qui est de contact pour toute structure de contact à isotopie près. On dit qu'un

ensemble de structures de contact sur  $V$  est *complet* s'il possède un représentant de chaque classe d'isotopie de structure de contact sur  $V$ .

**Proposition 3.8** ([CGH09]). *Sur toute variété  $V$  de dimension 3, close et orientée, il existe un ensemble complet de structures de contact  $\mathcal{X}$  et une triangulation  $\Delta$  avec les propriétés suivantes :*

- toutes les structures de contact de  $\mathcal{X}$  coïncident comme champs de plans non orientés sur un voisinage des sommets de  $\Delta$  ;
- $\Delta$  est une triangulation de contact minimale de  $(V, \xi)$  pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$ .

De plus on peut choisir  $\Delta$  isotope à n'importe quelle triangulation lisse fixée de  $V$ .

*Démonstration.* Soit  $\xi_0$  une structure de contact tendue sur  $V$ . Par le lemme 3.7, on peut trouver  $\Delta_0$  une triangulation de contact minimale de  $(V, \xi_0)$ . Soit  $\mathcal{N}$  un voisinage compact du 0-squelette de  $\Delta_0$  tel que chaque composante connexe  $\mathcal{N}(s)$  soit une carte de Darboux assez petite autour du sommet  $s$ . Toute structure de contact de  $V$  est isotope à une structure  $\xi$  qui coïncide avec  $\xi_0$  sur  $\mathcal{N}$ .

Ensuite on réutilise la preuve du lemme 3.7 pour trouver une triangulation de contact  $\Delta$  de  $(V, \xi)$  isotope à  $\Delta_0$  relativement à  $\mathcal{N}$ . Sans toucher à  $\mathcal{N}$ , on déforme ensuite  $\Delta_0$  par une isotopie lisse  $\psi_1$  en  $\Delta_1$  qui a le même 1-squelette que  $\Delta$  et des 2-simplexes  $\xi$ -convexes et relativement  $\xi$ -convexes. Alors  $\Delta_1$  est une triangulation minimale de  $(V, \xi)$ . Par conséquent, en faisant porter la déformation sur la structure,  $\Delta_0$  est une triangulation de contact minimale de  $(V, \psi_1^*\xi)$ .  $\square$

On peut voir dans la preuve du lemme 3.7 et celle de la proposition 3.8 que les sommets de la triangulation jouent un rôle primordial. Mais ces sommets posent des problèmes quand on manipule des triangulations de contact, notamment quand on veut appliquer le lemme de réalisation de feuilletage aux 2-simplexes. Pour cela on introduit un autre type de triangulation plus simple à manipuler.

**Définition 3.9.** Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3. Une triangulation de contact  $\Delta$  de  $(V, \xi)$  est dite *maniable* si chaque simplexe  $F$  de dimension 2 écorné de trois triangles aux sommets est un hexagone  $H_F$  à bord legendrien et  $\xi$ -convexe, et si, pour toute arête  $a$ , l'enroulement de  $\xi$  autour de  $F$  le long de l'arc  $r(a) = a \setminus \text{Int}(\Lambda)$ ,  $\Lambda = \bigcup_F \overline{(F \setminus H_F)}$ , est strictement négatif. (Noter que cet arc n'est, en général, qu'un morceau d'arête de  $H_F$  mais pas une arête entière.)

Dans le 2-squelette de  $\Delta$ , l'ensemble  $\Lambda = \bigcup_F \overline{(F \setminus H_F)}$  est un voisinage des sommets qu'on nomme *voisinage de sécurité*. On dit que  $\Delta$  est  $\Lambda$ -minimale si elle a le plus petit nombre de Thurston-Bennequin parmi toutes les triangulations de contact maniables de  $(V, \xi)$  ayant  $\Lambda$  pour voisinage de sécurité. Dit autrement en

faisant porter la déformation sur  $\xi$ , la triangulation  $\Delta$  est  $\Lambda$ -minimale si pour toute structure  $\xi'$  isotope à  $\xi$  relativement à  $\Lambda$  et pour laquelle  $\Delta$  est une triangulation de contact maniable,  $TB(\Delta, \xi') \geq TB(\Delta, \xi)$ . On note  $\Lambda_F(s)$  le triangle de  $\Lambda$  inclus dans la face  $F$  et contenant le sommet  $s$ , et  $\Lambda(s)$  la réunion des triangles de  $\Lambda$  contenant  $s$ .

On obtient le même résultat que la proposition 3.8 mais pour les triangulations maniabiles :

**Proposition 3.10** ([CGH09]). *Sur toute variété  $V$  close, orientée et de dimension 3, il existe un ensemble complet de structures de contact tendues  $\mathcal{X}$  et une triangulation  $\Delta$  avec les propriétés suivantes :*

- toutes les structures de contact de  $\mathcal{X}$  coïncident comme champs de plans non orientés sur un voisinage  $U$  des sommets de  $\Delta$  ;
- $\Delta$  est une triangulation de contact maniable de  $(V, \xi)$  pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$  dont le voisinage de sécurité  $\Lambda$  est fixe et contenu dans  $U$ . De plus  $\Delta$  est  $\Lambda$ -minimale.

De plus on peut choisir  $\Delta$  isotope à n'importe quelle triangulation lisse fixée de  $V$ .

*Démonstration.* On reprend les notations du lemme 3.7. Soit  $\xi_0$  une structure de contact tendue et  $\Delta$  une triangulation de contact de  $(V, \xi_0)$ . Dans chaque boule  $\mathcal{N}(s)$  centrée sur un sommet  $s$ , on décroît le nombre de Thurston-Bennequin de chaque arête  $a$  issue de  $s$  par stabilisation afin que dans  $\mathcal{N}(s)$  il soit strictement négatif et que  $\xi_0$  imprime dans  $\mathcal{N}(s)$  un point singulier  $a$  sur toute face  $F$  adjacente à  $a$ .

On peut alors tracer sur chaque face  $F$  de sommet  $s$  un arc  $\gamma_{F,s}$  dans  $F \cap \mathcal{N}(s)$  tangent à  $\xi$  à ses extrémités. Cet arc délimite un triangle  $\Delta_F(s)$ . Par une isotopie de  $\xi_0$  à support dans un voisinage de  $\gamma_{F,s}$  et relative au 1-squelette, on peut rendre  $\gamma_{F,s}$  legendrien d'invariant de Thurston-Bennequin inférieur à -1. La réunion de ces arcs  $\gamma_{F,s}$  découpe le 1-squelette en un certain nombre d'arcs legendriens. On peut stabiliser ces arcs pour se ramener au cas où tous ces arcs ont un invariant de Thurston-Bennequin inférieur à -1. Pour finir, on applique une isotopie à support dans un voisinage du 1-squelette pour éviter tout demi-tour inversé le long des arêtes et le long des arcs  $\gamma_{F,s}$ . Ainsi la triangulation de contact  $\Delta$  est maniable pour  $(V, \xi_0)$  relativement au voisinage de sécurité  $\Lambda = \bigcup_{F,s} \Lambda_F(s)$ .

Il faut maintenant rendre cela minimal. En utilisant la proposition 3.8, on peut isotoper toute structure de contact  $\xi$  en une structure  $\xi'$  qui coïncide avec  $\xi_0$  le long de  $\Lambda$  et qui a  $\Delta$  pour triangulation de contact. Par des isotopies de stabilisation relative à  $\Lambda$  on peut décroître l'invariant de Thurston-Bennequin des côtés de l'hexagone  $H_F$  inclus dans  $F$  pour rendre  $\Delta$  maniable pour  $\xi'$  de voisinage sûr  $\Lambda$ . Comme dans

le lemme 3.7, on peut la supposer  $\Lambda$ -minimale. On construit ainsi  $\mathcal{X}$  constitué du choix d'une structure  $\Lambda$ -minimale pour  $\Delta$  dans chaque classe d'isotopie de structures tendues.  $\square$

On voit donc ici qu'il est assez facile d'obtenir des triangulations de contact sur des variétés fermées, même en imposant des conditions supplémentaires de maniabilité et de minimalité.

## 3.2 Triangulations de contact sur les variétés à bord

Dans cette section, on veut étendre les propositions 3.8 et 3.10 au cas des variétés à bord. La minimalité demande des hypothèses supplémentaires. Dans un premier temps, on veut démontrer le théorème suivant.

**Théorème 3.11.** *Soit  $V$  une variété à bord et  $\mathcal{X}$  un ensemble de structures de contact tendues pour lesquelles  $\partial V$  est convexe. Alors il existe une triangulation  $\Delta$  de  $V$  et un voisinage  $\Lambda$  de ses sommets tels que  $\Delta$  est de contact et  $\Lambda$ -maniabale pour toute structure de contact  $\xi$  de  $\mathcal{X}$ . De plus toutes les structures de  $\mathcal{X}$ , à isotopie près, coïncident comme champs de plans sur les sommets de  $\Delta$ .*

### 3.2.1 Un cas particulier de variété à bord

Avant de démontrer le théorème 3.11, on s'intéresse à un cas particulier de variété à bord. Cet exemple permettra d'exposer les différentes techniques utilisées par des constructions explicites sur le bord. On pourra ensuite les étendre aux variétés à bord en général. De plus, ce cas particulier est important pour les chapitres 4 et 2.

Soit  $\tilde{V}$  une variété à bord telle que  $\partial\tilde{V}$  est un tore. On peut voir  $\tilde{V}$  comme étant  $V \setminus \mathcal{N}(L)$  où  $V$  est une variété fermée et  $\mathcal{N}(L) = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  est le voisinage tubulaire ouvert d'un nœud  $L$ .

Soit  $\mathcal{X}_0 = \{\tilde{\xi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble de structures de contact sur  $\tilde{V}$ . On demande tout d'abord à ce que les  $\tilde{\xi}_n$  soient tendues. On suppose également que  $\tilde{\xi}_n$  s'étend à  $V$  en  $\xi_n$  et que  $\tilde{\xi}_n|_{\mathcal{N}(L)}$  est donnée par

$$\cos(n\theta)dx - \sin(n\theta)dy = 0, \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{D}^2 \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^1. \quad (3.1)$$

Cela revient à demander que  $L$  soit legendrien pour toutes les structures de contact  $\tilde{\xi}_n$ . L'équation ci-dessus vient alors du théorème de voisinage legendrien standard.

L'objectif est de construire une triangulation de contact sur  $\tilde{V}$  de contact pour les  $\tilde{\xi}_n$ .

**Proposition 3.12.** *Il existe sur  $\tilde{V}$  une triangulation  $\tilde{\Delta}$  avec les propriétés suivantes pour  $n$  suffisamment grand :*

1. toutes les structures de contact  $\tilde{\xi}_n$ , à isotopie près, coïncident comme champs de plans sur les sommets de  $\tilde{\Delta}$  ;
2. si  $n$  est assez grand, alors  $\tilde{\Delta}$  est une triangulation de contact pour  $\tilde{\xi}_n$  ;
3. si de plus  $L$  n'est pas déstabilisable pour  $\xi_n$ , alors  $\tilde{\Delta}$  est maniable et  $\Lambda$ -minimale où le voisinage de sécurité  $\Lambda$  ne dépend pas de  $n$ .

Dans notre cas, la variété  $\tilde{V}$  n'est pas close. On ne peut donc pas utiliser directement la proposition 3.10.

On va construire la triangulation en deux étapes. Tout d'abord, on va construire explicitement la triangulation sur  $\partial\tilde{V}$ . Ensuite on étendra cette construction à  $\tilde{V}$ .

Ici, on construit explicitement une triangulation de contact sur le bord de  $\tilde{V}$ . Plus exactement, comme le bord de  $\tilde{V}$  est convexe pour tout  $\xi_n$ , on se place dans un épaississement homogène du bord. Dans la suite, quand on parle d'isotopie, on choisit de déformer  $\partial\tilde{V}$  dans ce voisinage homogène (au lieu de déformer les structures de contact).

**Lemme 3.13.** *Il existe une triangulation  $\Delta_{\partial}$  sur  $\partial\tilde{V}$  qui est de contact pour les structures de contact  $(\tilde{\xi}_n)_{n \geq N}$  à isotopie près.*

La preuve de ce lemme commence par la construction d'une triangulation lisse sur le bord que l'on va déformer dans les sections suivantes pour obtenir une triangulation de contact.

### 3.2.2 Triangulation lisse sur $\partial\tilde{V}$

On choisit  $\Delta_{\partial}$  une triangulation de  $\partial\tilde{V}$  de la façon suivante :

1. On trace tout d'abord sur  $\partial\tilde{V}$  un nombre pair de longitudes.
2. On divise une des bande ainsi tracée par des triangles tracés en dents-de-scie (de façon régulière). Ainsi on n'a que deux types de triangles différents (ceux qui ont la point en haut et ceux qui ont la pointe en bas).
3. On fait la symétrie de ces triangles par rapport à une des longitude de la bande.
4. On recommence la symétrie jusqu'à recouvrir toutes les bandes.

Ainsi on a des bandes de triangles le long des longitudes. Les symétries par rapport aux longitudes nous donnent des sommets alignés sur des méridiens.

**Lemme 3.14.** *En suivant cette construction, il est possible d'obtenir une triangulation  $\Delta_\partial$  sur  $\partial\tilde{V}$  avec les propriétés suivantes pour tout  $n$  assez grand :*

1. *les triangles de  $\Delta_\partial$  sont inclus dans des cartes de Darboux de  $(\tilde{V}, \tilde{\xi}_n)$  ;*
2. *chaque côté d'un triangle intersecte au moins deux fois la courbe de découpage  $\Gamma$  de  $(\tilde{V}, \tilde{\xi}_n)$  ;*
3. *aucun sommet d'un triangle n'appartient à  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Ces conditions sont facilement réalisables. En effet, pour la première condition, comme la structure de contact est tendue sur  $\mathcal{N}(L)$ , toute boule est inclus dans une carte de Darboux.

Pour la deuxième, l'équation de contact de  $\tilde{\xi}_n$  indique que les courbes de découpages auront de plus en plus d'intersections avec les longitudes et donc avec les côtés des triangles. Il suffit donc se restreindre aux  $\tilde{\xi}_n$  tels que  $n \geq N$ . Il faut noter que comme notre objectif est d'obtenir des résultats de finitude, oublier un nombre fini de structures n'est pas gênant. Ainsi la deuxième condition est automatiquement remplie à partir d'un certain rang  $N$  fixé.

Pour la troisième condition, il suffit de placer les sommets sur des points dont une (et une seule) des coordonnées est irrationnelle (en voyant le bord de  $\tilde{V}$  comme le carré  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ).  $\square$

Ces conditions sont donc remplies pour les structures de contact  $(\tilde{\xi}_n)_{n \geq N}$ . On note  $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}_0$  l'ensemble des structures de contact pour lesquelles on peut effectivement obtenir ces propriétés sur  $\Delta_\partial$ .

Maintenant il faut rendre cette triangulation de contact. Tout d'abord la condition sur les 3-simplexes est déjà remplie, toujours grâce à la remarque 3.5. Selon la définition 3.2, il reste donc plus qu'à rendre les 1-simplexes legendriens, puis les 2-simplexes convexes (et relativement convexes).

### 3.2.3 Rendre les 1-simplexes legendriens

Afin de rendre les 1-simplexes legendriens, on va modifier le feuilletage caractéristique de  $\partial\tilde{V}$  en utilisant le théorème de réalisation de feuilletage. On sait que  $\partial\tilde{V}$  est feuilleté par les longitudes. La courbe de découpage (en rouge sur la figure 3.2) a deux composantes, diamétralement opposées le long du tore.

On construit maintenant le nouveau feuilletage sur  $\partial\tilde{V}$ . Prenons un 2-simplexe de  $\Delta_\partial$ . La courbe de découpage divise ce simplexe en trois types de morceaux :

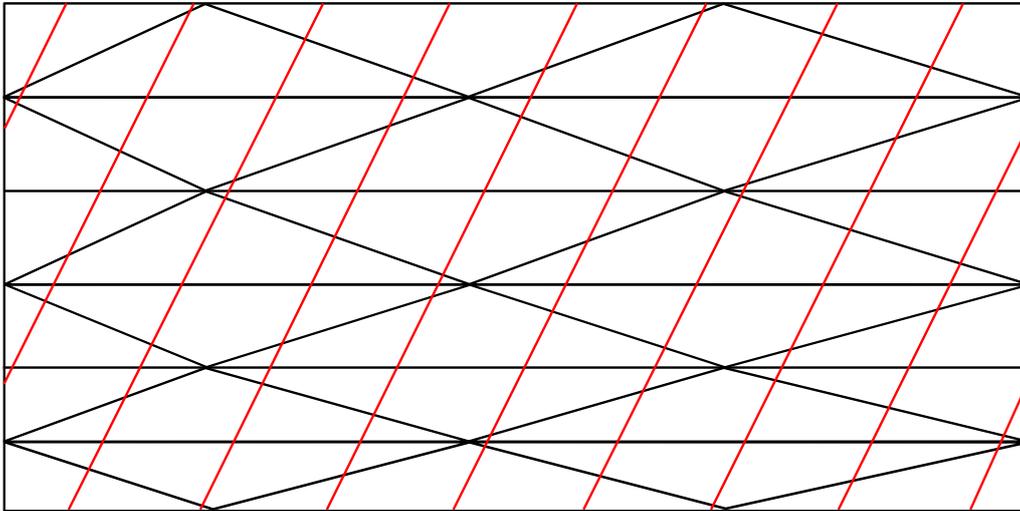


FIGURE 3.1 – Première triangulation sur le bord (en rouge la courbe de découpage)

## 1. Des triangles :

Prenons un tel morceau. Un de ses sommets est un sommet de la triangulation. On place un point singulier de type source/puits sur ce sommet. De plus, deux côtés de ce morceau sont inclus dans les côtés du triangle. On place un point singulier de type selle sur chacun de ces côtés. Pour finir on place un point singulier de type source/puits à l'intérieur du morceau.

## 2. Des quadrilatères :

Prenons un tel morceau. Deux de ses côtés sont inclus dans les arêtes de la triangulation. On place un point singulier de type selle sur chacun de ces côtés. Pour finir on place un point singulier de type source/puits à l'intérieur du morceau.

## 3. Des pentagones :

Prenons un tel morceau. Un de ses sommets est un sommet de la triangulation. On place un point singulier de type source/puits sur ce sommet. De plus, trois côtés de ce morceau sont inclus dans les arêtes de la triangulation. On place un point singulier de type selle sur chacun de ces côtés. Pour finir on place un point singulier de type source/puits à l'intérieur du morceau.

Pour résumer, chaque sommet de la triangulation devient un point singulier de type source/puits. Chaque composante des arêtes découpées gagne un point singulier de type selle. Et on place un point singulier de type source/puits à l'intérieur de

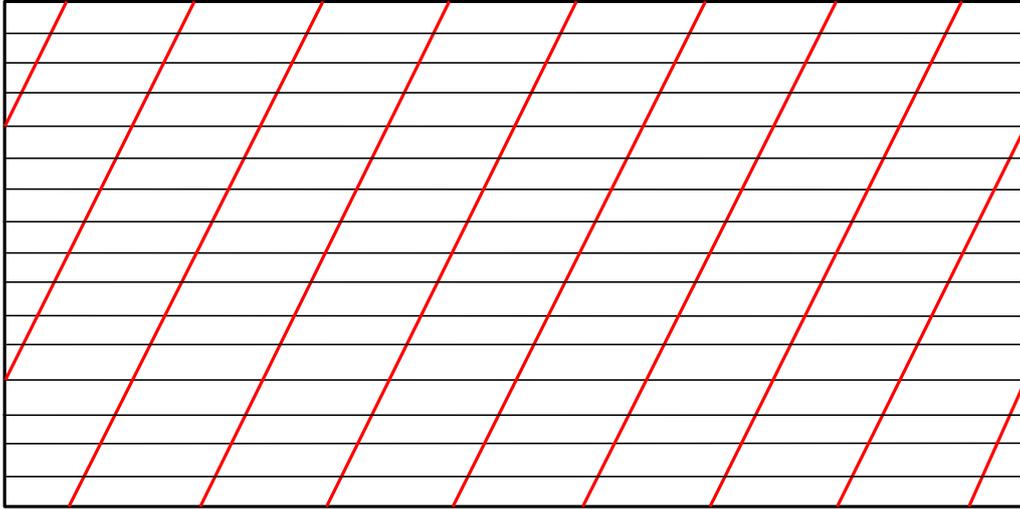


FIGURE 3.2 – Feuilletage sur le bord de  $\tilde{V}$

chaque morceau.

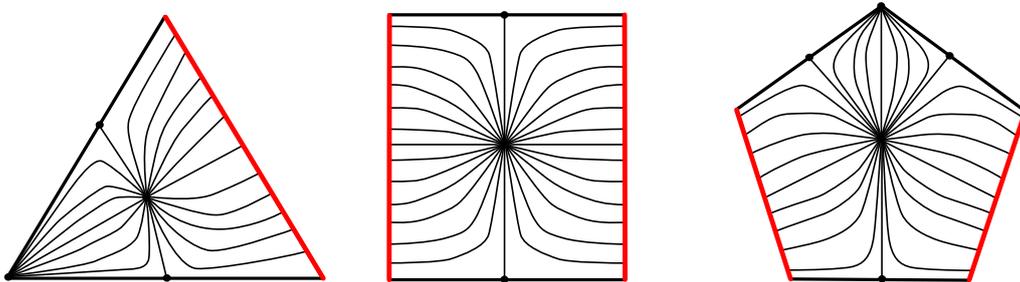


FIGURE 3.3 – Nouveau feuilletage sur les trois types de morceaux

On obtient donc une série de nouveaux feuilletages, notés  $\mathcal{F}_n$  sur  $\partial\tilde{V}$ . Ces nouveaux feuilletages sont adaptés à  $\Gamma_n$ . En effet, pour tout  $n$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_n$  n'est pas tangent à la courbe de découpage et il dilate l'aire sur  $\partial\tilde{V} \setminus \Gamma_n$ . Donc selon le théorème 1.18, pour chaque  $n$ , il existe une isotopie  $\varphi_n^t, t \in [0, 1]$  admissible (au sens où elle évite les singularités) qui fait de  $\mathcal{F}_n$  le feuilletage caractéristique de  $\varphi_n^1 \partial\tilde{V}$ .

*Remarques 3.15.* On peut remarquer deux choses concernant ce nouveau feuilletage caractéristique. Tout d'abord il n'a pas été modifié au voisinage de la courbe de découpage. Ceci sera important pour les conditions de convexité d'une triangulation

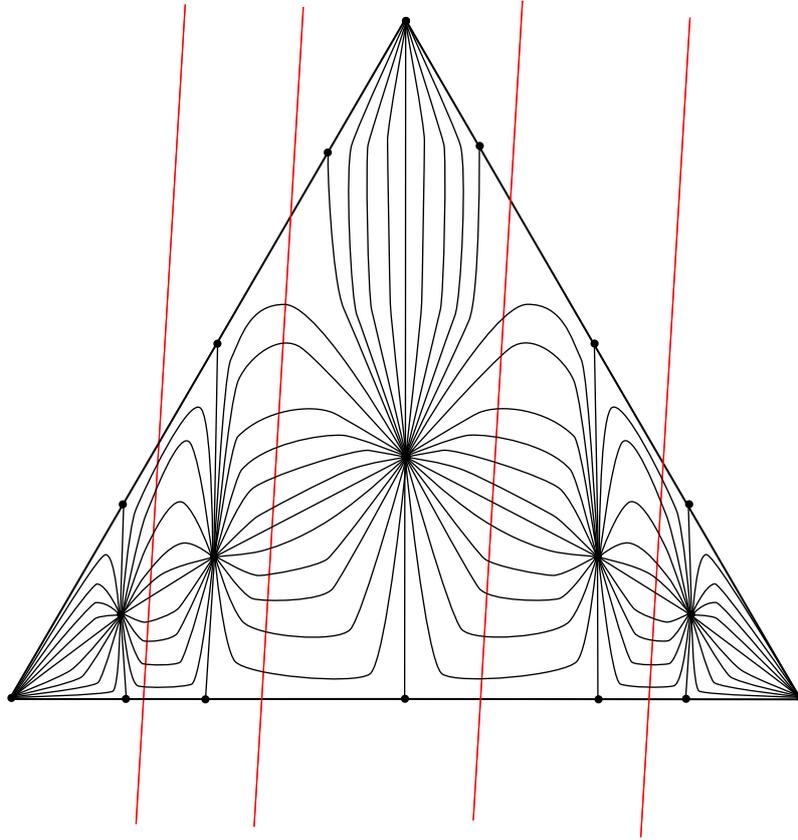


FIGURE 3.4 – Nouveau feuilletage sur le triangle

de contact.

De plus, au voisinage des sommets des triangles, le feuilletage caractéristique est le même pour toutes les structures  $\tilde{\xi}_n$  ce qui servira pour les voisinage de sûreté.

**Lemme 3.16.** *L'isotopie  $\varphi_n^t$  rend les 1-simplexes legendriens dans  $(\tilde{V}, \tilde{\xi}_n)$ .*

*Démonstration.* Cela vient simplement du fait que les 1-simplexes deviennent des feuilles du feuilletage caractéristique par l'isotopie  $\varphi_n^t$  et par définition du feuilletage caractéristique, ses feuilles sont legendriennes.  $\square$

Plutôt que d'utiliser ces isotopies pour déplacer le bord, on peut choisir de bouger les structures de contact  $\tilde{\xi}_n$ , afin de rendre les 1-simplexes legendriens. Cela permet de garder une seule variété à bord et de porter toutes les modifications sur

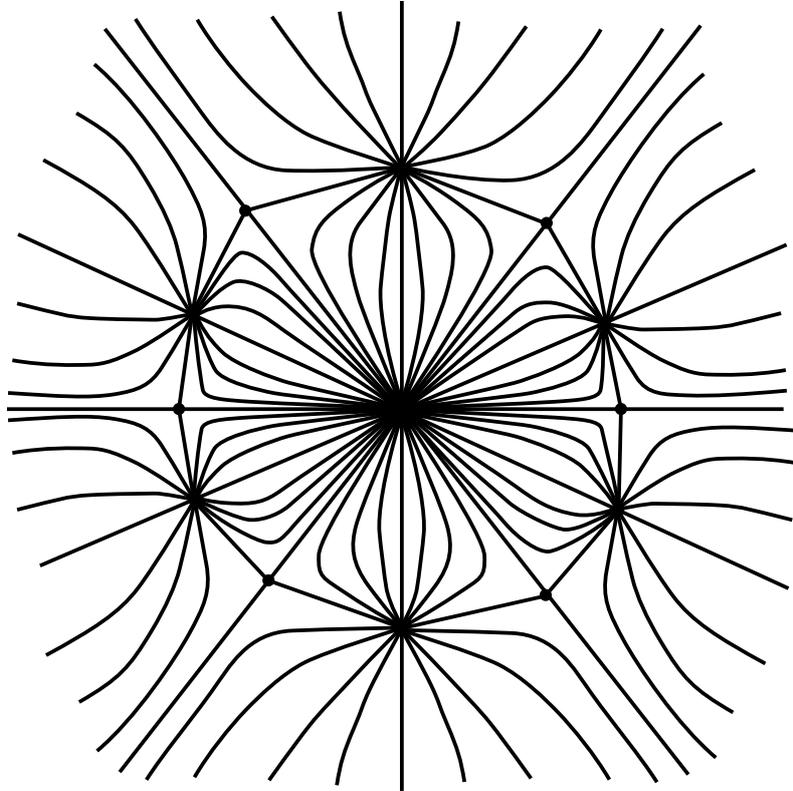


FIGURE 3.5 – Nouveau feuilletage près d'un sommet

les structures de contact. Comme le feuilletage n'a pas changé au voisinage des sommets, l'isotopie de contact se fait relativement à des voisinages des sommets de la triangulation. On note ces nouvelles structures de contact  $\check{\xi}_n$ .

On a donc maintenant une triangulation de  $\partial\tilde{V}$  dont les 1-simplexes sont legendriens pour les structures  $(\check{\xi}_n)_{n \geq N}$ .

### 3.2.4 Convexité des 2-simplexes

Il s'agit maintenant de vérifier les hypothèses de convexité de notre triangulation avec son nouveau feuilletage.

**Lemme 3.17.** *Les 2-simplexes de  $\tilde{V}$  sont  $\check{\xi}_n$ -convexes pour tout  $n \geq N$ .*

*Démonstration.* On sait que le bord du voisinage tubulaire d'un nœud legendrien est convexe et on connaît sa courbe de découpage. Et on a vu que les transformations

effectuées pour rendre les 1-simplexes legendriens n'ont pas modifié la courbe de découpage de  $\partial\tilde{V}$ . Par conséquent, les 2-simplexes sont bien  $\check{\xi}_n$ -convexes pour tout  $n \geq N$ .  $\square$

Mais on demande aussi à ce que les 2-simplexes soient relativement  $\check{\xi}_n$ -convexes.

**Lemme 3.18.** *Les 2-simplexes de  $\tilde{V}$  sont relativement  $\check{\xi}_n$ -convexes pour tout  $n \geq N$ .*

*Démonstration.* Un arc qui rend deux 2-simplexes indisciplinés est un arc qui va d'une singularité négative à une singularité positive sur les 1-simplexes. On doit donc vérifier qu'il n'y a aucun tel arc sur les 1-simplexes. Les deux singularités doivent être hyperboliques (car aucun arc ne part d'une singularité elliptique négative, ni n'arrive à une singularité elliptique positive).

Mais sur  $\tilde{\Delta}$ , par construction, les seuls arcs qui partent de points singuliers hyperboliques négatifs se dirigent vers les points elliptiques négatifs (les puits) qui se situent à l'intérieur des 2-simplexes. On ne peut donc pas avoir de 1-simplexe qui rend deux 2-simplexes indisciplinés. Par conséquent, tous les 2-simplexes sont bien relativement  $\check{\xi}_n$ -convexes pour tout  $n$ .  $\square$

*Démonstration du lemme 3.13.* Par le lemme de réalisation de feuilletage de Giroux, les 1-simplexes ont été rendus legendriens. Le nouveau feuilletage ainsi obtenu conserve les propriétés de convexité et convexité relative de  $\partial\tilde{V}$  pour les 2-simplexes. Et les 3-simplexes sont automatiquement contenus dans des cartes de Darboux. Donc  $\tilde{\Delta}$  est bien une triangulation de contact.  $\square$

On a donc bien construit une triangulation de contact explicite sur le bord de  $\tilde{V}$ . Certains choix effectués sur le feuilletage peuvent paraître anodins pour le moment mais ils serviront par la suite à montrer des propriétés de maniabilité, de minimalité et de placement de domaines fibrés.

### 3.2.5 Extension à $\tilde{V}$

On étend maintenant  $\Delta_\partial$  en une triangulation sur  $\tilde{V}$  qui est de contact pour tout  $\check{\xi}_n \in \mathcal{X}_N$ .

**Proposition 3.19.** *Il existe une triangulation  $\tilde{\Delta}$  sur  $\tilde{V}$  avec les propriétés suivantes pour toutes les structures de contact  $\check{\xi}_n$  de  $\mathcal{X}_N$  :*

1. toutes les structures de contact coïncident comme champs de plans non orientés sur un voisinage des sommets de  $\tilde{\Delta}$  ;
2. la triangulation  $\tilde{\Delta}$  est de contact dans  $(\tilde{V}, \check{\xi}_n)$  ;

3. la restriction de  $\tilde{\Delta}$  à  $\partial\tilde{V}$  est  $\Delta_\partial$ , et son feuilletage caractéristique pour  $\check{\xi}_n$  est  $\mathcal{F}_n$ .

*Démonstration.* On commence par remarquer que les propriétés sont vraies sur le bord de  $\tilde{V}$  pour notre triangulation  $\Delta_\partial$  et le feuilletage  $\mathcal{F}_n$ . En effet, on a construit les feuilletages  $\mathcal{F}_n$  pour que la triangulation  $\Delta_\partial$  soit bien de contact sur le bord. Ce qui vérifie la propriété (2) sur le bord. De plus par définition,  $\mathcal{F}_n$  est le même au voisinage des sommets pour tout  $n$  et donc les  $\check{\xi}_n$  coïncident comme champs de plans non orientés sur un voisinage des sommets sur le bord. Ce qui vérifie la propriété (1) sur le bord

Il faut maintenant étendre cette triangulation à  $\tilde{V}$  tout entier. On prend une triangulation lisse sur  $\tilde{V}$  égale à  $\Delta_\partial$  sur  $\partial\tilde{V}$  que l'on note  $\tilde{\Delta}_0$ . L'idée est que l'on peut déformer chaque arête de  $\Delta_0$  en un arc legendrien par une isotopie relative aux sommets de  $\Delta_0$  et  $\mathcal{C}^0$ -petite. Comme les arêtes de  $\Delta_0 \cap \partial\tilde{V}$  sont déjà legendriennes, on peut prendre cette isotopie relative à  $\partial\tilde{V}$ .

Il faut néanmoins faire attention aux sommets si on veut prolonger cette déformation aux faces de la triangulation. Pour cela on suit la construction de [CGH09] qui sert à démontrer la proposition 3.10 (sans se soucier de minimalité ou de maniabilité pour le moment). On peut faire porter toutes les modifications sur l'intérieur de  $\tilde{V}$  car la triangulation sur le bord possède déjà les propriétés requises. On peut ainsi construire une triangulation de contact sur l'intérieur de  $\tilde{V}$  telle que toutes les structures de contact  $\xi_n$  coïncident comme champs de plans au voisinage des sommets.

Ce qui donne donc une triangulation sur  $\tilde{V}$  en entier avec les bonnes propriétés.  $\square$

Ceci démontre déjà les points 1 et 2 de la proposition 3.12. Dans les sections suivantes on étudie les propriétés de minimalité et de maniabilité de ces triangulations.

### 3.3 Minimalité de la triangulation de contact

On regarde ici ce que la minimalité de la triangulation de contact impose sur la variété. Par définition, demander la minimalité de la triangulation revient à demander qu'aucune rocade legendrienne ne s'appuie sur un 1-simplexe de façon à le déstabiliser. Pour construire une triangulation de contact minimale, on doit faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.20.** *Aucune rocade legendrienne (non triviale) ne s'appuie sur un 1-simplexe de  $\Delta_\partial$  de façon à le déstabiliser.*

Dans le cas particulier de  $\tilde{V}$ , le bord est un tore vu comme le voisinage tubulaire d'un nœud  $L$ . Le lemme suivant donne alors une réinterprétation du lemme 3.20 en terme de condition sur le nœud.

**Lemme 3.21.** *Toute rocade legendrienne de  $(\tilde{V}, \check{\xi}_n)$  s'appuyant sur un 1-simplexe de  $\partial\tilde{V}$  pour le déstabiliser peut être prolongée en une rocade legendrienne de  $(V, \xi_n)$  s'appuyant sur  $L$  pour le déstabiliser.*

Dans la suite, pour le cas particulier de  $\tilde{V}$ , on fait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.22.** *Pour tout  $n$  plus grand que  $N$ ,  $L$  n'est pas déstabilisable dans  $(V, \xi_n)$ .*

On revient au cas général. Le lemme 0.9, tiré des travaux de Honda [Hon02] sur le recollement de variétés tendues, donne une hypothèse équivalente à l'absence de rocade sur le bord.

**Hypothèse 3.23.** *Toute surface  $S$  parallèle au bord de  $V$  est incluse dans un produit de contact  $\partial V \times I$  où la structure de contact est  $I$ -invariante.*

### 3.4 Maniabilité de la triangulation de contact

On s'intéresse maintenant à la maniabilité de notre triangulation.

On regarde le cas particulier de notre triangulation sur le bord de  $\tilde{V}$  sans oublier les remarques déjà faites sur la minimalité des triangulations de contact pour les variétés à bord.

**Lemme 3.24.** *Pour tout  $\check{\xi}_n \in \mathcal{X}_N$ ,  $\Delta_\partial$  est  $\check{\xi}_n$ -maniable, de même voisinage de sécurité  $\Lambda$ , et  $\Lambda$ -minimale parmi les triangulations de  $\partial\tilde{V}$ .*

*Démonstration.* Pour la triangulation  $\Delta_\partial$ , les feuilletages  $\mathcal{F}_n$  construits permettent l'existence des ces hexagones legendriens dans chaque 2-simplexe. On remarque que, comme les  $\mathcal{F}_n$  sont identiques sur un voisinage des sommets, les hexagones sont tous les mêmes et ainsi le voisinage de sécurité  $\Lambda$  est fixe. De plus les arêtes sont toutes d'enroulement strictement négatif. Notre triangulation  $\Delta_\partial$  est donc bien maniable.

Pour la minimalité, on utilise le lemme 3.21 qui empêche la déstabilisation de notre triangulation.  $\square$

On peut maintenant compléter la proposition 3.19 en y ajoutant la minimalité et la maniabilité.

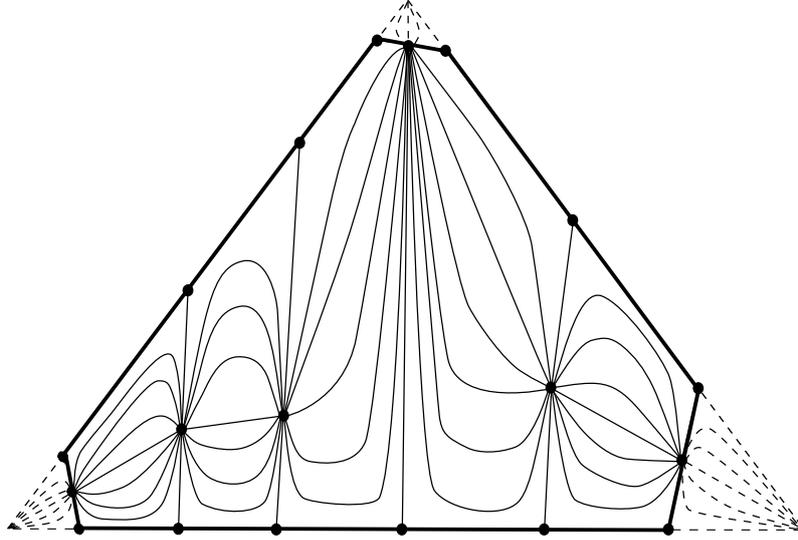


FIGURE 3.6 – Exemple d'hexagone legendrien

**Proposition 3.25.** *Il existe une triangulation  $\tilde{\Delta}$  sur  $\tilde{V}$  avec les propriétés suivantes :*

1. *toutes les structures de contact de  $\mathcal{X}_N$  coïncident comme champs de plans non orientés sur un voisinage  $U$  des sommets de  $\tilde{\Delta}$  ;*
2.  *$\tilde{\Delta}$  est pour tout  $\check{\xi} \in \mathcal{X}_N$ , une triangulation de contact maniable de  $(\tilde{V}, \check{\xi})$  dont le voisinage de sécurité  $\Lambda$  est fixe et contenu dans  $U$  et qui est  $\Lambda$ -minimale ;*
3.  *$\tilde{\Delta}$  est égale à  $\Delta_{\partial}$  sur  $\partial\tilde{V}$ .*

*Démonstration.* On procède de la même façon que pour la proposition 3.19. La triangulation  $\Delta_{\partial}$  sur le bord de  $\tilde{V}$  possède les propriétés requises de maniabilité et minimalité via les lemmes 3.21 et 3.24. On choisit une triangulation lisse sur  $\tilde{V}$  qui prolonge  $\Delta_{\partial}$  puis on la modifie en suivant les méthodes de la preuve de la proposition 3.10 par [CGH09]. Et on peut faire ces modifications relativement à  $\partial\tilde{V}$  car  $\Delta_{\partial}$  possède déjà les propriétés de maniabilité requises.  $\square$

Cela complète la preuve de la proposition 3.12. On obtient ici un résultat dans le cas très particulier d'une variété à bord qui est une variété close à laquelle on a extrudé le voisinage d'un nœud legendrien non déstabilisable. Ce résultat peut s'étendre à des variétés à bord plus générales en imposant certaines conditions aux bord.

## 3.5 Extension des triangulations de contact

### 3.5.1 Triangulation de contact sur $V$

Ici on étend cette construction à  $V$  tout entier. Pour cela on a plus qu'à reboucher  $\tilde{V}$ .

**Proposition 3.26.** *Soient  $V$  une variété close,  $\mathcal{X}_N$  notre suite de structures de contact (tronquée) et  $L$  un nœud legendrien pour tout  $\xi_n$ . Alors il existe une triangulation  $\Delta$  sur  $V$  telle que :*

1. toutes les structures  $\xi_n$  de  $\mathcal{X}_N$  coïncident comme champs de plans non orientés sur un voisinage  $U$  des sommets de  $\Delta$  ;
2. pour tout  $\xi_n \in \mathcal{X}_N$ ,  $\Delta$  est une triangulation de contact  $\Lambda$ -maniable de  $(V, \xi_n)$  dont le voisinage de sécurité  $\Lambda$  est contenu dans  $U$  ;
3. il existe un voisinage de  $L$  noté  $\mathcal{N}(L)$  tel que la triangulation et le feuilletage caractéristique sur  $\partial\mathcal{N}(L)$  soient ceux décrits dans la partie précédente.

*Démonstration.* La proposition 3.10 nous donne l'existence d'une telle triangulation qui vérifie les points (1) et (3). Si on choisit la triangulation donnée par la proposition 3.10 comme étant isotope à un prolongement (quelconque) de la triangulation construite précédemment sur  $\partial\tilde{V}$ , on vérifie alors aussi le point (3). De plus cette triangulation sur le bord du voisinage ne changera pas car elle même répond déjà à toutes les conditions nécessaires.  $\square$

### 3.5.2 Généralisation aux variétés à bord

Jusque là, on a construit une triangulation de contact maniable sur une variété à bord bien particulière dont le bord est un tore et ses structures de contact sont données sur le bord par la structure canonique au voisinage d'un nœud legendrien. La construction a été faite de façon explicite sur le bord de la variété en utilisant son feuilletage caractéristique et sa courbe de découpage déjà connus.

Mais cette construction peut s'étendre facilement à d'autres variétés de contact à bord pour démontrer le théorème 3.11.

*Démonstration du théorème 3.11.* La méthode de preuve est la même que toute la construction faite jusque là. On commence par construire une triangulation lisse sur  $V$ . À l'intérieur de  $V$ , on applique la preuve de la proposition 3.10 : déformer les 1-simplexes pour les rendre legendriens, puis rendre les 2-simplexes relativement convexes. Comme les structures de contact sont tendues, les 3-simplexes sont dans

tous les cas inclus dans des voisinages de Darboux. Sur le bord, la stratégie est un peu différente. Les 2-simplexes sont déjà convexes et relativement convexes. Il suffit donc de déformer les 1-simplexes pour les rendre legendriens sans perdre la convexité. Cela se fait grâce au lemme de réalisation de feuilletage de Giroux. On peut modifier le feuilletage pour inclure chaque 1-simplexe dans une feuille du feuilletage caractéristique ce qui le rend legendrien. Et cette modification ne touche pas à la courbe de découpage et conserve donc les propriétés de convexité.  $\square$

Il faut remarquer ici que la propriété de minimalité ou de  $\Lambda$ -minimalité ne se prolonge pas aussi facilement aux variétés à bord en général. Même dans notre cas particulier, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire pour obtenir la minimalité de la triangulation construite.

### 3.5.3 Propriétés des triangulations de contact

Dans notre construction, on sait exactement à quoi ressemble la courbe de découpage sur les faces de notre triangulation au bord. Les résultats suivants vont nous donner des informations sur le reste de la triangulation.

**Lemme 3.27.** [CGH09] *Si  $\Delta$  est une triangulation de contact pour  $(V, \xi)$ , pour toute face  $F \in \Delta^2$ , aucune composante de la courbe de découpage de  $\Gamma_F(\xi)$  n'est un cercle.*

*Démonstration.* Chaque 3-simplexe étant inclus dans une carte de Darboux,  $\xi$  est tendue au voisinage de  $F$ . De plus, comme  $F$  est  $\xi$ -convexe (et que  $F$  n'est pas une sphère) alors  $F$  ne possède de courbe fermée dans son découpage.  $\square$

*Remarque 3.28.* On peut voir explicitement que c'est bien le cas dans notre construction sur le bord de  $\tilde{V}$ .

La suite vaut pour les triangulations de contact maniabiles. On rappelle que pour une triangulation  $\Delta$  de  $V$  maniable, on note  $\Lambda$  son voisinage de sécurité. Pour une arête  $a$ , on note  $r(a) = \overline{a \setminus \Lambda}$  et  $H_F$  est l'hexagone obtenu en enlevant de  $F$  le voisinage de sécurité  $\Lambda$ .

Soit  $F$  une face de  $\Delta$ . On dira qu'une composante  $\Gamma$  de  $\Gamma_{H_F}(\xi)$  est *extrémale* si  $p$  un des deux points de  $\partial\Gamma$  appartient à un arc  $r(a)$  et ne peut être repoussé en dehors de  $r(a)$  parmi une isotopie de  $\Gamma$  parmi les courbes transversales à  $\xi F$ . Autrement dit il y a des singularités de  $\xi F$  entre  $p$  et les extrémités de  $r(a)$ . De plus  $p$  est le point le plus proche d'une des extrémités de  $r(a)$  parmi les points ayant cette propriété.

Comme il y a trois arêtes, il y a donc trois  $r(a)$  possédant chacun deux extrémités. Ce qui donne au plus six points répondant à tous les critères précédents. La multicourbe  $\Gamma_{H_F}(\xi)$  contient donc au plus six composantes extrémales.

*Remarque 3.29.* Dans notre construction sur le bord de  $\tilde{V}$ , on trouve alors explicitement au plus quatre composantes extrémales.

**Lemme 3.30.** [CGH09] *Si  $\xi$  est une structure de contact tendue sur  $V$  et si  $\Delta$  est une triangulation de contact maniable et  $\Lambda$ -minimale de  $(V, \xi)$ , alors toute composante du découpage  $\Gamma_{H_F}(\xi)$  parallèle à  $r(a)$  est extrémale.*

*Démonstration.* Par l'absurde, on suppose qu'une composante de  $\Gamma_{H_F}(\xi)$  parallèle à  $r(a)$  n'est pas extrémale. En particulier, cela implique que l'enroulement de  $\xi$  le long de  $r(a)$  relativement à  $F$  est inférieur à  $-2$ . Dans ce cas en appliquant le lemme de réalisation legendrienne, on peut déformer  $H_F$  par une isotopie relative à un voisinage de  $\partial H_F \setminus r(a)$  et de support inclus dans un voisinage de  $H_F$ , en une surface  $H'_F$  qui contient une rocade  $D$  s'appuyant sur  $r(a)$ . Si utilise la rocade  $D$  pour stabiliser  $r(a)$ , on obtient la surface  $\overline{H'_F \setminus D}$  qui une fois les coins lissés est un hexagone  $H''_F$  à bord legendrien,  $\xi$ -convexe et isotope à  $H_F$ . Par construction  $tb(H''_F) = tb(H_F) + 1$ . L'isotopie entre les deux hexagones peut se prolonger en une isotopie de  $V$  stationnaire sur  $\Lambda$ . Cette isotopie permet d'obtenir une nouvelle triangulation de contact maniable (quitte à refaire une isotopie relative au 1-squelette) avec un invariant de Thurston-Bennequin plus petit. Ce qui contredit la  $\Lambda$ -minimalité de  $\Delta$ .  $\square$

Soit  $F$  un 2-simplexe de  $\Delta$ . Un *quadrilatère fibré* dans  $F$  est un quadrilatère  $[0, 1] \times [0, 1] \in F$  dont l'intersection avec  $\partial F$  est l'union des deux arêtes verticales  $\{0, 1\} \times [0, 1]$ , celles-ci se trouvant à l'intérieur de deux arêtes distinctes de  $F$ .

Soient  $(V, \xi)$  une variété de contact tendue de dimension 3 et  $\Delta$  une triangulation de contact de  $(V, \xi)$ . On note  $\Gamma_F$  la courbe de découpage d'une face  $F$  associée à un épaississement homogène quelconque de  $F$ . On appelle *pièce* de  $F$  l'adhérence de toute composante connexe de  $F \setminus \Gamma_F$ . On dit qu'une pièce est *ordinaire* si c'est un quadrilatère fibré. Dans le cas contraire, on parle de pièce *extraordinaire*.

*Remarque 3.31.* Dans notre construction, on a, dans chaque face, trois pièces extraordinaires. Ce sont toutes les pièces contenant les sommets du triangle. Les autres pièces sont toutes ordinaires.

**Corollaire 3.32.** [CGH09] *Soit  $\Delta$  une triangulation sur  $V$ , maniable et  $\Lambda$ -minimale pour toutes les structures de contact d'un ensemble complet de structures de contact avec un voisinage de sécurité  $\Lambda$  fixe le long duquel toutes ces structures de contact coïncident. Il existe  $C_0 > 0$  tel que pour toute structure de contact, chaque face  $F$  contienne trois quadrilatères fibrés  $Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  disjoints de  $\Lambda$ , deux à deux disjoints et s'appuyant sur des paires d'arêtes de  $F$  distinctes avec les propriétés suivantes :*

- chaque  $Q_i$  est l'union de pièces ordinaires ;

— au plus  $C_0$  pièces du découpage de  $F$  ne sont pas incluses dans  $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ .

*Démonstration.* Le lemme précédent impose que les pièces ordinaires disjointes de  $\Lambda$  forment trois quadrilatères fibrés non parallèles. Comme aucune composante de la courbe de découpage n'est un cercle, il reste comme pièces : six demi-disques extrémaux, une pièce au milieu et les pièces qui rencontrent  $\Lambda$  (dont le nombre est borné indépendamment de  $\xi$ ).  $\square$

*Remarque 3.33.* Dans notre construction sur le bord de  $\tilde{V}$ , il suffit de deux quadrilatères fibrés. De plus ils suivent les méridiens du tore.

## 3.6 Prismes et domaines fibrés

Ici on va utiliser les triangulations construites précédemment dans les théorèmes 3.11 et 3.19. Ceci nous permettra, en suivant des techniques de [CGH09] de démontrer le théorème 0.7.

Dans le cas où le théorème 3.11 donne une triangulation  $\Lambda$ -minimale, le théorème 0.7 peut s'étendre aux variétés à bord en général pour donner le théorème 0.8.

### 3.6.1 Prismes fibrés

Pour construire les domaines fibrés, la première étape est le choix des prismes fibrés. Ces prismes seront ensuite normalisés pour obtenir les domaines fibrés voulus.

Soit  $Y$  un triangle ou un quadrilatère. Un *prisme fibré* est un polyèdre  $P = Y \times [0, 1]$  dont on ne retient de la structure produit que la projection sur  $Y$ . Les faces de  $P$  sont dites *verticales* (respectivement *horizontales*) si elles se trouvent dans  $\partial Y \times [0, 1]$  (respectivement dans  $Y \times \{0, 1\}$ ).

Soit  $\Delta$  une triangulation de  $V$ . Un prisme fibré dans  $(V, \Delta)$  est un plongement d'un prisme fibré  $P$  dans  $V$  tel que :

- $P$  est contenu dans un 3-simplexe  $G$  de  $\Delta$  et son intersection avec  $\partial G$  est l'union de ses faces verticales ;
- chaque face verticale de  $P$  est un quadrilatère fibré d'une face de  $G$ .

Un 3-simplexe donné contient au plus cinq prismes fibrés deux à deux disjoints et non isotopes parmi les prismes fibrés. On trouve, à isotopie près parmi les prismes fibrés, trois telles familles de cinq prismes fibrés : chacune contient quatre prismes fibrés à base triangulaire et un prisme fibré à base quadrilatérale.

Une *configuration de prismes fibrés* dans  $(V, \Delta)$  est la donnée d'une famille de prismes fibrés  $P = (P_i)_{1 \leq i \leq k}$  de  $(V, \Delta)$  qui intersecte chaque 3-simplexe de  $\Delta$  en une

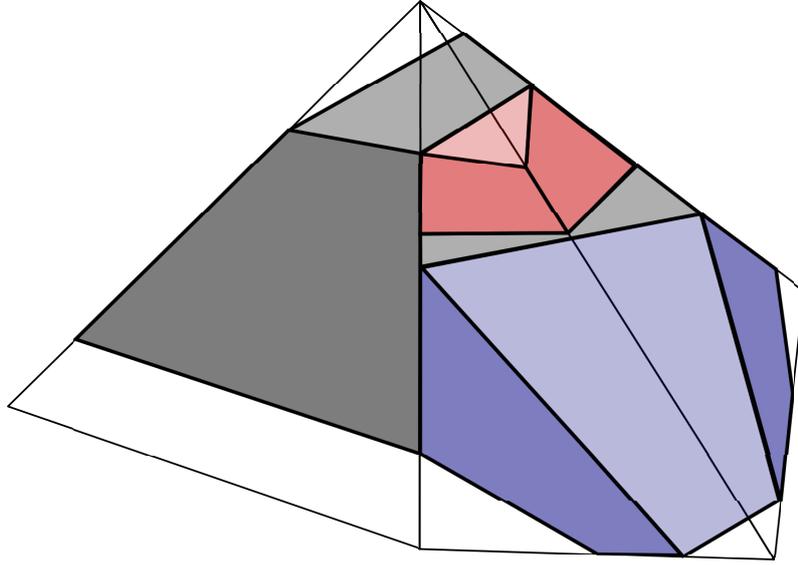


FIGURE 3.7 – Intersection de prismes

sous-famille de l'une des trois familles maximales décrites précédemment et telle que l'intersection entre deux prismes distincts donne soit un quadrilatère fibré (avec concordance des fibrations), soit un arc d'intérieur non vide inclus dans une arête de  $\Delta$ , soit l'ensemble vide. Autrement dit, les prismes sont contenus dans des 3-simplexes avec une face commune (premier cas) ou une arête commune (deuxième cas).

**Lemme 3.34.** [CGH09] *Toute variété triangulée possède un nombre fini de configurations de prismes fibrés, à isotopie près parmi les configurations de prismes fibrés.*

*Démonstration.* La variété est recouverte par un nombre fini de 3-simplexes. Chaque 3-simplexe possède trois familles de cinq prismes fibrés parmi lesquels on peut piocher pour construire une configuration de prismes fibrés. Ce qui donne, à isotopie près parmi les prismes fibrés, un nombre fini de façons de construire une configuration de prismes fibrés.  $\square$

Une configuration de prismes fibrés  $P$  est dite *admissible* pour une structure de contact  $\xi$  si les faces verticales des prismes de  $P$  sont des unions de pièces ordinaires qui ne rencontrent pas le voisinage de sécurité  $\Lambda$  des sommets. Pour  $\xi \in \mathcal{X}$ , on note  $P_{\Delta, \xi}$  l'ensemble des configurations de prismes fibrés admissibles pour  $\xi$ . On munit les classes d'isotopie de prismes fibrés dans  $P_{\Delta, \xi}$  d'une relation d'ordre partiel : si  $[P], [Q] \in P_{\Delta, \xi}$ , on dit que  $[P] \preceq [Q]$  s'il existe une isotopie de  $P$  dans  $P_{\Delta, \xi}$  en  $P' \subset Q$ .

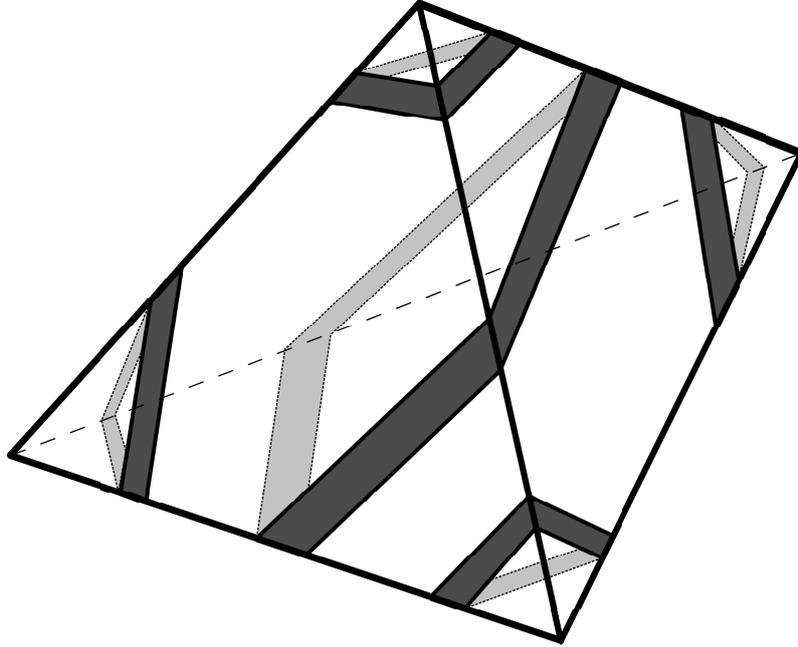


FIGURE 3.8 – Une famille de cinq prismes

*Remarque 3.35.* Si on regarde les 3-simplexes qui ont une de leurs faces dans la triangulation  $\Delta_\partial$  précédemment construite, on remarque que les prismes admissibles sont beaucoup moins nombreux, car il n'y a que deux paquets de pièces ordinaires.

**Lemme 3.36.** [CGH09] *Pour  $\xi$  fixée, les classes d'isotopie de  $P_{\Delta,\xi}$  sont en nombre fini.*

*Démonstration.* Il suffit d'observer qu'une classe d'isotopie de configuration admissible de prismes fibrés est déterminé par le choix des pièces ordinaires dans chaque triangle. Comme il y a un nombre fini de pièces ordinaires dans chaque triangle,  $P_{\Delta,\xi}$  possède donc un nombre fini de classes d'isotopie.  $\square$

### 3.6.2 Une première normalisation

Pour toute arête  $a$  de la triangulation  $\Delta$ , on note  $s(a) = \bigcup_{F \supset a} (a \cap H_F)$ .

**Lemme 3.37.** [CGH09] *Quitte, pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$ , à effectuer une isotopie de  $\xi$ , on peut supposer que si  $\xi \in \mathcal{X}$ , on a :*

1.  $\Delta$  est une triangulation de contact maniable et  $\Lambda$ -minimale pour  $\xi$  ;

2. pour toute arête  $a \subset \Delta^1$ , il existe un germe de feuilletage  $\mathcal{F}_a$  au voisinage de  $s(a)$  par des arcs parallèles à  $s(a)$  qui est tangent au germe des faces adjacentes et legendrien pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$  ;
3. pour toute face  $F$  et pour toute pièce ordinaire  $R$  incluse dans  $F \setminus \Lambda$ ,

$$\xi|_R = \{\sin\theta dx + \cos\theta dy = 0\}$$

où  $R \simeq \{y = 0\}$ . En particulier, le feuilletage caractéristique de  $R$  possède une courbe de singularité  $\{y = 0, \theta = 0\}$  portée par  $R$ .

*Schéma de preuve.* Pour cette preuve, on suit la preuve des lemmes 3.24 et 3.25 en imposant une condition supplémentaire sur la structure de contact afin de réaliser la condition 2. Le point important pour obtenir un germe de feuilletage legendrien indépendant de  $\xi$  est le fait que le nombre de Thurston-Bennequin relatif à toute face  $F$  adjacente est inférieur à  $-\frac{1}{2}$ . On peut ensuite déformer le feuilletage legendrien dirigé par  $\partial_\theta$  (donné par le lemme de Darboux) dans un voisinage de  $s(a)$  pour lui donner les bonnes propriétés. On fait cela sans sous toucher  $\Lambda$  ni au 1-squelette. On convertit ensuite ces modifications en isotopie de  $V$  stationnaire sur  $(V \setminus K) \cup \Delta^1$  grâce au théorème de Gray.  $\square$

Dans la suite, on supposera que les structures de  $\mathcal{X}$  possèdent les propriétés obtenues dans ce lemme.

### 3.6.3 Holonomie

Soit  $G$  un 3-simplexe dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . Un arc legendrien de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux :  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \partial G$  qui évite les sommets de  $G$  est dit *étal* si le champ de plans  $\xi$  est un plan d'appui à  $\partial G$  long de  $\gamma_1$ . Autrement dit,  $\gamma_1$  intersecte l'intérieur de chaque face le long d'une ligne singulière de son feuilletage caractéristique, et le long d'une arête,  $\xi$  est à l'« extérieur » de  $G$ .

Une *courbe d'holonomie* est une courbe legendrienne  $\gamma$  dans  $\partial G$  constituée de la concaténation de deux arcs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , où  $\gamma_1$  est étal et  $\gamma_2$  inclus dans une arête de  $G$ . On appelle champ de plans *médians* de  $G$  le long de  $\gamma_2$ , tout champ de plans qui n'est un plan d'appui en aucun point de  $\gamma_2$ .

L'*holonomie* d'une courbe d'holonomie  $\gamma$ , notée  $\text{Hol}(\gamma)$ , est un entier dont la valeur absolue est égale à celle du nombre de Thurston-Bennequin de  $\xi$  le long de  $\gamma_2$ . La valeur absolue de l'holonomie est donc la moitié du nombre de points de  $\gamma_2$ , comptés sans signe, où  $\xi$  est égal au plan médian. Pour le signe, il est positif si  $\gamma_2$  est orienté comme le bord de la face qui contient  $\gamma_1$  près de  $\gamma_1(0)$  et négatif sinon.

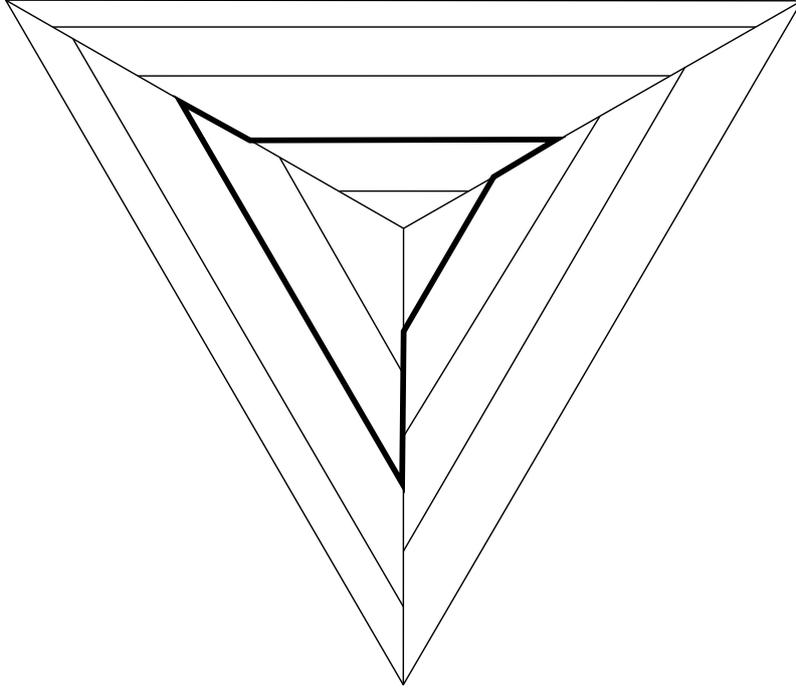


FIGURE 3.9 – Courbe d’holonomie

Si  $\gamma_1(\epsilon)$  et  $\gamma_1(1 - \epsilon)$  sont sur la même face, alors si on change le sens de parcours de  $\gamma$ , on change aussi le signe de l’holonomie. Par contre, si  $\gamma_1(\epsilon)$  et  $\gamma_1(1 - \epsilon)$  sont sur des faces différentes, alors le changement de sens de parcours ne change pas le signe de l’holonomie, car on change également la face qui sert à déterminer le signe de l’holonomie.

**Lemme 3.38.** [CGH09] *Soit  $\xi \in \mathcal{X}$  et  $G$  un 3-simplexe de  $\Delta$ . Toute courbe d’holonomie  $\gamma$  pour  $\xi$  incluse dans  $\partial G \setminus \Lambda$  a une holonomie égale à  $-1$ .*

*Démonstration.* Tout d’abord comme  $\xi$  est tendue, en utilisant l’inégalité de Bennequin donne  $\text{Hol}(\gamma) \neq 0$ . Ensuite on raisonne par l’absurde en supposant que  $\text{Hol}(\gamma) \neq 1$ . En reprenant les notations de la définition, comme  $\gamma_1$  est étal, on peut le pousser sur un arc legendrien lisse  $\gamma'_1$  à l’intérieur de  $G$  et s’appuyant sur  $\partial\gamma_2$  via une famille d’arcs legendriens. En particulier  $\gamma'_1 \cup \gamma_2$  borde une disque  $D$ . On va chercher à construire une rocade à partir de  $D$  pour cela on étudie les nombres de Thurston-Bennequin relativement à  $D$ . Le nombre de Thurston-Bennequin de  $\gamma_2$  relatif à  $D$  vaut  $-|\text{Hol}(\gamma)|$  ou  $-|\text{Hol}(\gamma)| \pm \frac{1}{2}$  selon le signe de  $\text{Hol}(\gamma)$  et la façon dont  $\gamma_1$  rejoint les bouts de  $\gamma_2$ . De la même façon,  $tb(\gamma'_1)$  vaut respectivement 0 ou  $\pm \frac{1}{2}$ .

On trouve ainsi que  $tb(\gamma'_1) - tb(\gamma_2) = |\text{Hol}(\gamma)|$  et donc  $tb(\gamma'_1) \geq tb(\gamma_2) + 1$ . On peut donc stabiliser  $\gamma'_1$  en  $\gamma''_1$  tel que  $tb(\gamma'_1, D') = tb(\gamma_2, D') + 1$  où  $D'$  est l'image de  $D$  par la stabilisation.

On va maintenant utiliser  $D'$  comme rocade. On peut pousser  $\gamma_2$  sur  $\gamma''_1$  le long de  $D'$  et cette opération peut être réalisée relativement à  $\Lambda$ . Comme dans les preuve précédente, on fait porter cette opération sur  $\xi$  et, quitte à effectuer les déformations nécessaires, on obtient une triangulation avec un invariant de Thurston-Bennequin plus petit et donc une contradiction avec la  $\Lambda$ -minimalité de  $\Delta$ .  $\square$

### 3.6.4 Une propriété fondamentale sur les prismes fibrés

Le lemme suivant est fondamental pour la suite. il va nous assurer les premiers éléments de finitude.

**Lemme 3.39.** [CGH09] *Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble complet de structures de contact tendues sur  $V$  et  $\Delta$  une triangulation de  $V$  qui est maniable et  $\Lambda$ -minimale pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$ , avec un voisinage de sécurité  $\Lambda$  le long duquel toutes les structures de  $\mathcal{X}$  coïncident. il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$ , et pour toute configuration maximale  $P$  de  $P_{\Delta, \xi}$ , au plus  $C_1$  pièces des faces de  $\Delta$  ne sont pas incluses dans l'intérieur de l'union des prismes de  $P$ .*

*Schéma de démonstration.* Soit  $G$  un 3-simplexe. Soit  $\xi \in \mathcal{X}$  et  $P = (P_i)_{1 \leq i \leq n} \in P_{\Delta, \xi}$  une configuration de prismes admissible et maximale. Un *paquet* est une union de pièces ordinaires qui forme un quadrilatère fibré connexe. Son *épaisseur* est le nombre de pièces qui le constituent.

On raisonne par l'absurde. On suppose que  $N \gg 1$  pièces ne sont pas incluses dans  $\text{Int}(\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i)$ . Parmi ces pièces, un nombre  $N_1$  se trouvent dans la même face  $F$  de  $\Delta$ . On se sert ensuite du lemme 3.32 pour construire un nouveau prisme fibré qui contredit la maximalité de  $P$ . Pour cela il faut regarder un 3-simplexe, et discuter des cas selon le placement des paquets sur les faces.

Dans chacun des cas, on peut construire un nouveau prisme fibré qui contredit la maximalité de  $P$ .  $\square$

### 3.6.5 Construction des domaines fibrés

On va maintenant normaliser et affiner nos structures de contact par des isotopies successives.

**Lemme 3.40.** [CGH09] *Il existe une constante  $C \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et un nombre fini de configurations de prismes fibrés  $P^1, \dots, P^k$  tels que pour toute structure  $\xi \in \mathcal{X}_N$ ,*

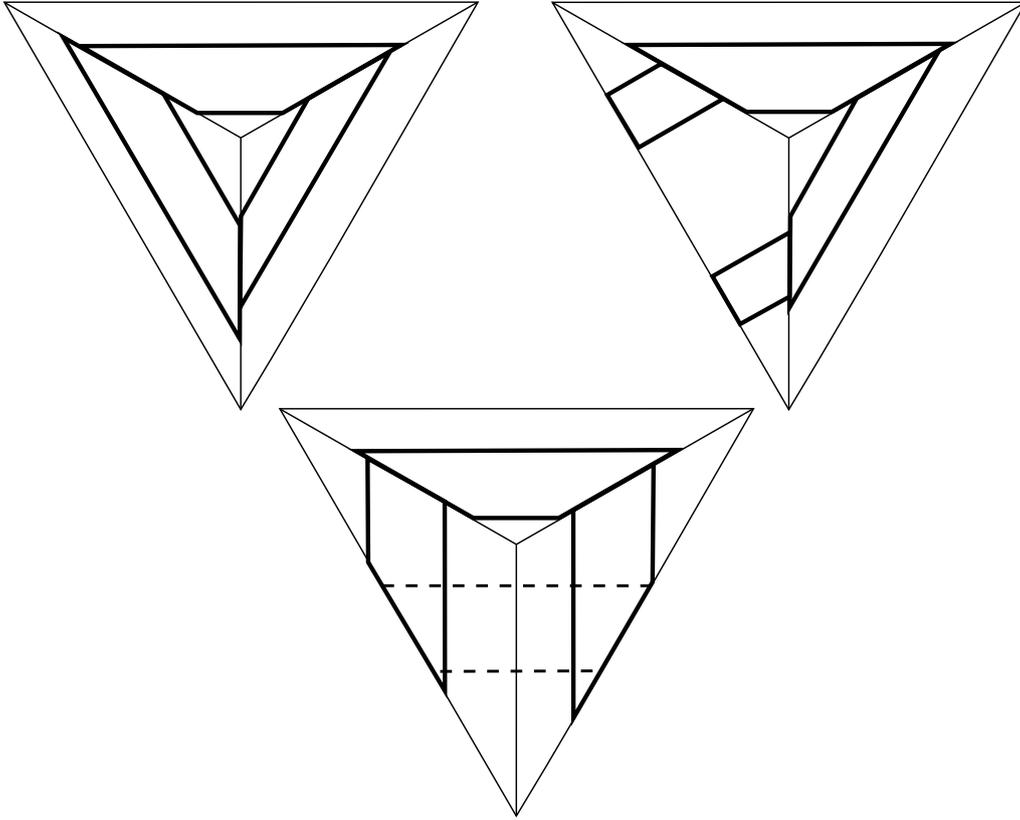


FIGURE 3.10 – Les différents placements de paquets

on puisse isotoper  $\xi$ , par une isotopie de  $V$  stationnaire sur  $\Lambda$  et préservant  $\Delta$ , en  $\xi'$  admettant un des  $P^j$  pour configuration admissible et pour laquelle au plus  $C$  composantes de  $\Gamma_{\Delta^2}(\xi')$  ne soient pas incluses dans l'intérieur des prismes de  $P^j$ .

*Démonstration.* On choisit une structure  $\xi \in \mathcal{X}_N$ . On peut lui associer un élément maximal dans  $P_{\Delta, \xi}$  que l'on note  $P(\xi)$ . Cet élément n'est pas forcément unique. Par le lemme 3.34, il y a un nombre fini de configurations de prismes fibrés, à isotopie près. Les isotopies de  $V$  permettent d'envoyer  $P(\xi)$  sur une des configurations  $P^1, \dots, P^k$ , en préservant  $\Delta$  et stationnairement sur  $\Lambda$ . Cette isotopie transporte  $\xi$  en  $\xi'$ .  $\square$

La suite de la construction de Colin-Giroux-Honda ([CGH09]) consiste à normaliser les faces verticales des prismes, puis les faces horizontales pour ajuster les structures de contact aux prismes fibrés.

**Lemme 3.41** (Normalisation des faces verticales [CGH09]). *Soit  $\mathcal{X}^j$  l'ensemble des*

structures de contact admettant  $P^j$  comme configuration admissible (selon le lemme 3.40). Quitte à déformer chaque structure de  $\mathcal{X}^j$  par une isotopie relative à  $\Lambda$  qui préserve  $\Delta$ , il existe une partition de  $\mathcal{X}^j$  en un nombre fini de sous-ensembles  $\mathcal{X}_1^j \dots \mathcal{X}_{k'}^j$  tels que pour tout  $l$ , toute structure de  $\mathcal{X}_l^j$  est isotope à une structure maniable pour  $\Delta$ ,  $\Lambda$ -minimale, qui garde le même germe de contact le long de  $\Delta^2 \setminus \text{Int}(\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i)$  et tangente aux fibres le long des faces verticales des polyèdres de  $P^j$ .

*Démonstration.* On fixe  $\zeta$  dans  $\mathcal{X}_l^j$ . Soit  $\xi$  dans  $\mathcal{X}_l^j$ . Soit  $R$  une composante de  $H_F \setminus \Gamma_{H_F}$  disjointe de l'intérieur des prismes. Les structures  $\xi$  et  $\zeta$  sont égales sur un voisinage  $K$  de  $\partial R \cap \partial F$  dans  $R$ . De plus  $K$  est feuilleté par des arcs legendriens. On rétrécit  $R$  en  $R_0$  en poussant chaque arc de  $\partial R \cap \partial F$  sur un arc legendrien qui lui est parallèle dans  $K$ . En utilisant le lemme de réalisation de feuilletage sur  $R_0$ , on peut construire une isotopie à support dans un voisinage de  $R_0$  qui envoie  $\xi$  sur  $\zeta$ . De plus cette isotopie ne rencontre pas  $\Delta$ , ni les autres faces, donc  $\Delta$  conserve sa maniabilité et sa  $\Lambda$ -minimalité pour l'image de  $\xi$ .  $\square$

Ainsi on partitionne  $\mathcal{X}_N$  en  $\mathcal{X}_l^j$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $1 \leq l \leq k'$ . Dans chaque partie  $\mathcal{X}_l^j$  les structures de contact admettent la même configuration de prismes admissible  $P^j$  et sont égales au même germe de contact sur les faces de la triangulation en dehors des prismes de  $P^j$ .

**Lemme 3.42** (Normalisation des faces horizontales [CGH09]). *Il existe une retraction compacte*

$$K = \bigcup_{i=1}^{i=n} P_i \setminus \mathcal{N} \left( \partial \left( \bigcup_{i=1}^{i=n} P_i \right) \right)$$

de  $\bigcup_{i=1}^{i=n} P_i$ , une structure de contact  $\zeta_0$  sur  $V \setminus \text{Int}(K)$  et pour tout  $\xi \in \mathcal{X}_l^j$  une isotopie de  $\xi$  en  $\xi'$  qui vérifie

- $\xi' = \zeta_0$  sur  $V \setminus \text{Int}(K)$  ;
- $\xi'$  est tangente aux fibres verticales de chaque  $P_i$ .

*Démonstration.* On a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.43.** [CGH09] *Soit  $f : Y \times [-2, 2] \rightarrow (V, \xi)$  dans une variété de contact tendue. On suppose que :*

- chaque arc  $\{x\} \times [-2, 2]$  pour  $x$  dans un voisinage de  $\partial Y$  est legendrien pour  $f^*\xi$  ;
- sur chaque face verticale, les courbes de découpage vont d'une arête verticale à l'autre ;

- l'holonomie de toute courbe d'holonomie tournant autour du bord vertical vaut  $-1$  ;
- les arêtes de  $f(\partial Y \times \{\pm 1\})$  sont transversales à  $\xi$  ;
- il y a au moins quatre courbes de singularités sur chaque face verticale aux altitudes supérieures à  $1$  et inférieures à  $-1$  ;
- les arêtes horizontales de  $Y \times [-2, 2]$  sont transversales  $f^*\xi$ .

Pour tout feuilletage non-singulier  $\mathcal{F}$  tracé sur les faces horizontales de  $Y \times [-1, 1]$  qui est tangent à  $f^*\xi$  au bord et transversal à une direction donnée de  $Y$ , il existe une isotopie de  $\xi$  relative au bord de l'image de  $f$  en une structure  $\xi'$  telle que  $f^*\xi'$  trace le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\partial Y \times \{\pm 1\}$  et chaque arc  $\{x\} \times [-1, 1]$  soit legendrien.

On applique ce lemme à chaque structure  $\xi$  de  $\mathcal{X}^j$  et au germe de structure de contact  $\eta_0$  le long des faces horizontales. Il existe donc une isotopie relative à la triangulation qui rend  $\xi$  tangente aux fibres de  $P$  et égale au germe  $\eta_0$  sur les faces horizontales. À partir de maintenant, on suppose que les structures de  $\mathcal{X}$  vérifient ces propriétés.

Le long d'une fibre  $I$  de  $P_i$ , une structure tangente  $\xi$  tangente aux fibres est déterminée par une fonction angle  $\theta_I$  dont la dérivée est strictement positive. On choisit une structure  $\zeta_0$  de  $\mathcal{X}^j$ . Dans un petit voisinage de  $\partial(\cup P_i)$  dans  $\cup P_i$ , on peut, après isotopie, rendre toutes ces fonctions angles égales à celle de  $\zeta_0$ .

Les prismes  $P_i$  découpent chaque simplexe en polyèdres, homéomorphes à la boule. Sur le bord de chacun de ces polyèdres, les structures de  $\mathcal{X}^j$  coïncident (par la précédente isotopie). Comme, de plus ces structures sont tendues, le théorème 1.11 d'unicité d'Eliashberg donne, sur chaque polyèdre, une isotopie stationnaire sur le bord entre toute structure de  $\mathcal{X}^j$  et  $\zeta_0$ .  $\square$

Les prismes ainsi construits vont maintenant servir à placer des domaines fibrés. Et on va utiliser les propriétés des prismes du lemme 3.42 pour les structures de contact bien placées par rapport aux domaines fibrés. Plus précisément pour  $(D, \tau)$  un domaine fibré et  $\zeta$  une structure de contact sur  $V \setminus \text{Int}(D)$ , on dit qu'une structure est *ajustée* à  $(D, \tau, \zeta)$  si elle est égale à  $\zeta$  en dehors de  $\text{Int}(D)$  et tangente à  $\tau$  dans  $D$ .

**Corollaire 3.44.** [CGH09] *Il existe un domaine fibré à bord  $(D, \tau)$  avec  $K \subset D \subset \cup_{1 \leq i \leq n} P_i$ , dont la fibration en intervalles  $\tau$  est la restriction de la fibration des prismes fibrés  $P_i$ . En particulier toutes les structures sont ajustées à  $(D, \tau, \zeta)$ .*

*Démonstration.* On retire à  $\cup_{1 \leq i \leq n} P_i$  un petit voisinage fibré  $U$  des portions d'arêtes qui ne sont pas dans  $\text{Int}(\cup_{1 \leq i \leq n} P_i)$ . On prend ce voisinage disjoint de  $K$ . On note  $\tau'$

la fibration en intervalles de  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i$ . On obtient une surface branchée en prenant l'espace quotient  $\Sigma = (\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i \setminus U) / \tau'$ . Mais son lieu singulier est non-générique. Il ne reste plus qu'à lisser le bord de  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i \setminus U$  et ce lissage correspond à une petite perturbation générique de  $\Sigma$  qui rend son lieu de branchement générique. Et  $\Sigma$  permet d'obtenir le domaine fibré recherché.  $\square$

Ainsi, Colin, Giroux et Honda construisent un domaine fibré adapté aux structures de contact à partir d'une configuration de prismes fibrés admissibles. Il reste encore un problème ici, le domaine fibré est à bord. Dans notre cas de variété à bord, on autorise le domaine fibré à avoir un bord mais ce bord doit être inclus dans le bord de la variété. Dans le cas des variétés fermées, on ne veut pas avoir de domaine fibré à bord. Pour cela, on va utiliser une technique d'élagage.

## 3.7 Ajustement des structures de contact

### 3.7.1 Poids des structures

Avant d'éliminer le bord de notre domaine fibré, on va comprendre ici l'intérêt de nos domaines fibrés. Un domaine fibré ajusté à un ensemble de structures de contact va nous permettre de "coder" les différences entre ces structures.

**Lemme 3.45.** [CGH09] *Toute structure de contact ajustée à  $(D, \tau, \zeta)$  est déterminée à isotopie près parmi les structures ajustées par la fonction*

$$a_\xi : \partial_h D \rightarrow ]0, \infty[$$

*qui est continue sur chaque secteur et qui associe à chaque point  $p$  l'angle de rotation total de  $\xi$  le long de la feuille de  $\tau$  partant de  $p$ .*

On peut faire mieux et coder plutôt les informations sur les secteurs de notre domaine fibré. Les branchements entre secteurs vont nous donner des relations entre ces informations.

**Lemme 3.46.** [CGH09] *Les classes d'isotopie de structures de contact  $\xi$  ajustées au domaine fibré  $(D, \tau, \zeta)$  sont en bijection avec les fonctions*

$$\omega_\xi : \pi_0(\text{Reg}(M/\tau)) \rightarrow \mathbb{Z}$$

*dites fonctions poids vérifiant la condition*

$$\omega_\xi(R) \geq -\frac{1}{2\pi} \inf_{p \in R} (a_{\xi_0}(p))$$

et les relations d'adjacence pour des feuilletts  $R_1$  et  $R_2$  qui se joignent pour donner  $R_3$

$$\omega_\xi(R_1) + \omega_\xi(R_2) = \omega_\xi(R_3).$$

### 3.7.2 Lemme d'élagage

On va maintenant voir comment supprimer le bord des domaines fibrés dans le vas des variétés fermées.

**Lemme 3.47.** (Lemme d'élagage)[CGH09] Soit  $(D, \tau, \zeta)$  un domaine fibré et  $\mathcal{X}$  un ensemble de structures de contact ajustées à  $(D, \tau, \zeta)$ . On suppose qu'il existe un réel  $C$  et un point  $p \in \partial_h D$  tels que  $a_\xi(p) < C$  pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$ . On note  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$  les adhérences des strates régulières  $X_1 \dots X_k$  de  $X = D/\tau$  qui contienne  $\pi(p)$ . On peut alors trouver des structures de contact  $\zeta_1 \dots \zeta_l$  sur le complémentaire du domaine fibré

$$(D', \tau') = \left( D \setminus \text{Int} \left( \bigcup_{j=1}^k \pi^{-1}(\bar{X}_j) \right), \tau|_{D'} \right)$$

telles que toute structure  $\xi \in \mathcal{X}$  soit isotope à une structure ajustée à l'un des  $(D', \tau', \zeta_i)$ .

*Démonstration.* La borne sur  $a_\xi$  donne une borne sur tous les poids  $\omega_\xi(X_i)$ . Ils ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs. On peut donc partitionner  $\mathcal{X}$  de façon à ce que sur chaque partie  $\mathcal{X}_i$  toutes les structures donnent le même poids. Si on prend  $\zeta_i \in \mathcal{X}_i$  on utilise ensuite le lemme précédent pour obtenir une isotopie entre toute structure  $\xi \in \mathcal{X}_i$  et une structure  $\xi'$  égale à  $\zeta_i$  sur  $\pi^{-1}(\bigcup \bar{X}_j)$ .  $\square$

Cette opération d'élagage diminue strictement le nombre de secteurs du domaine fibré. On peut ainsi supprimer les parties du domaines fibrés à bord. En répétant cette opération suffisamment de fois (mais en nombre fini) on obtient l'ensemble vide. On obtient donc ce résultat.

**Corollaire 3.48.** Si  $\mathcal{X}$  est un ensemble de structures de contact ajustées à  $(D, \tau, \zeta)$  alors il existe des domaines fibrés  $(D_1, \tau_1, \zeta_1) \dots (D_l, \tau_l, \zeta_l)$  obtenus par élagage à partir de  $(D, \tau, \zeta)$  tels que  $X_i = M_i/\tau_i$  soit une surface branchée sans bord et que toute structure  $\xi \in \mathcal{X}$  soit isotope à une structure  $\xi'$  ajustée à l'un des  $(D_i, \tau_i, \zeta_i)$ .

### 3.7.3 Domaine fibré sur $\tilde{V}$

L'objectif est maintenant de comprendre comment se place les domaines fibrés par rapport à la construction de notre triangulation  $\tilde{\Delta}$ . On reprend les notations

des sections précédentes,  $\tilde{V}$  est une variété à bord torique,  $(\check{\xi}_n)_{n \geq N}$  des structures de contact tendues particulière sur  $\tilde{V}$  et  $\tilde{\Delta}$  une triangulation de contact maniable pour les  $\check{\xi}_n$ .

La première étape est de localiser les quadrilatères fibrés dans les 2-simplexes. On a déjà remarqué que les 2-simplexes de  $\tilde{\Delta}$  ne possèdent que deux quadrilatères fibrés (sur les trois possibles). Ces quadrilatères sont les emplacements des prismes admissibles sur  $\partial\tilde{V}$ . Sur la figure 3.11, on peut voir la position des quadrilatères fibrés pour notre exemple.

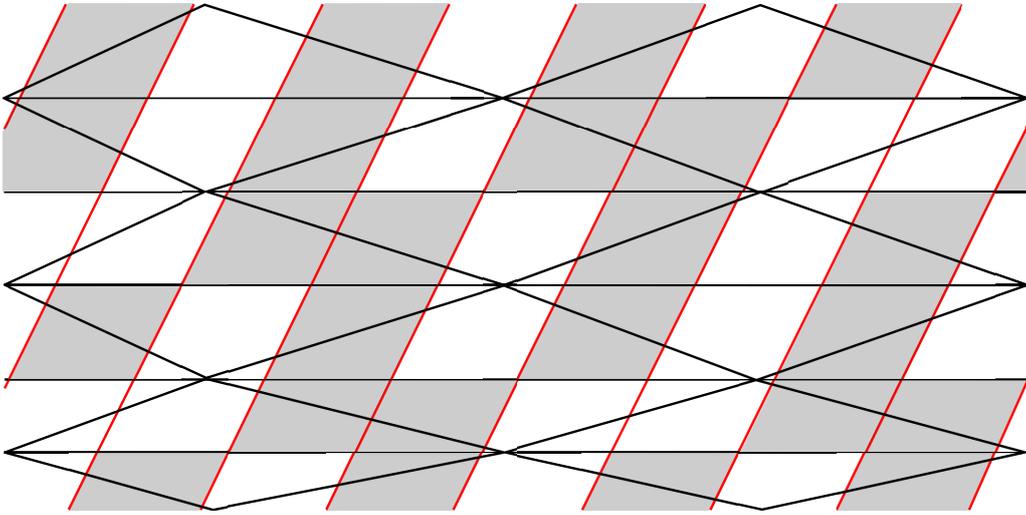


FIGURE 3.11 – Emplacements admissibles pour les prismes sur le bord

Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Lemme 3.49.** *Pour tout  $n \geq N$ , les quadrilatères fibrés de  $\Delta_\partial$  sur le bord de  $(\tilde{V}, \check{\xi}_n)$  sont inclus dans un nombre fini d'anneaux disjoints de la forme  $\nu \times I$  où  $\nu$  est un méridien de  $\partial\tilde{V}$  et  $I$  un intervalle.*

*Démonstration.* Il suffit de voir que en suivant les méridiens qui passent par les sommets des 2-simplexes on ne traverse que des pièces extraordinaires du découpage des 2-simplexes. Par définition, ces pièces extraordinaires ne peuvent pas faire partie des quadrilatères fibrés. Par conséquent les quadrilatères sont inclus dans le complémentaire des ces méridiens interdits, donc dans des anneaux qui suivent les méridiens.  $\square$

Maintenant on peut appliquer les constructions du corollaire 3.44 pour obtenir un domaine fibré (à bord)  $(D, \tau)$  sur  $\tilde{V}$  tel que toutes nos structures  $\check{\xi}_n$  soient ajustées à  $(D, \tau, \zeta)$ .

**Lemme 3.50.** *Sur le bord de  $\tilde{V}$ , il existe des méridiens de  $\tilde{V}$  qui n'intersectent pas  $D$ .*

*Démonstration.* Cela vient uniquement du placement des quadrilatères fibrés et des pièces extraordinaires. C'est ici qu'intervient la majorité des contraintes que l'on a choisi pour notre triangulation  $\Delta_\partial$ . Tout d'abord le feuilletage choisi empêche l'apparition de pièces ordinaires qui viendraient se placer le long des longitudes. Et l'alignement des sommets le long de méridiens permet de placer des paquets extraordinaires qui contraignent les quadrilatères fibrés autour des méridiens.  $\square$

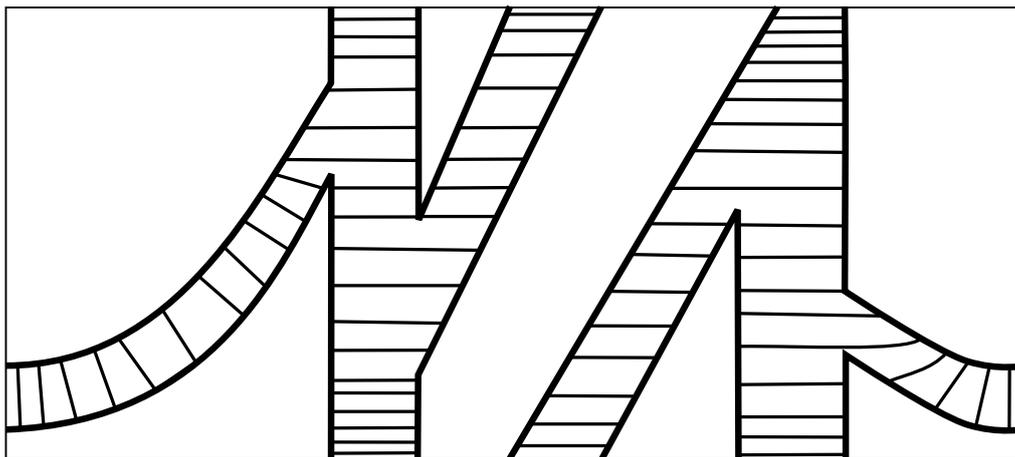


FIGURE 3.12 – Une voie ferrée générale sur le bord

Il reste un problème, le domaine fibré  $D$  ainsi obtenu possède un bord. Plus exactement, il possède une partie de son bord qui est inclus dans le bord de  $\tilde{V}$ , et une partie dans son intérieur. Pour la suite, on veut supprimer les composantes du bord qui sont pas incluses dans  $\partial\tilde{V}$ . Pour cela, on applique le lemme d'élagage sur  $(D, \tau)$  pour supprimer les secteurs du bord de la surface branchée qui ne remplissent pas les conditions du théorème. Ceci prouve le théorème 0.7.

Les mêmes méthodes permettent de démontrer le théorème 0.8 dans le cas général.

### 3.7.4 Retour sur $V$

On rappelle que  $\tilde{V}$  peut être vu comme le résultat de l'extrusion d'un voisinage tubulaire d'un nœud  $L$  sur une variété fermée  $V$ . De plus les conditions sur les variétés de contact étudiées jusqu'ici correspondent au fait que  $L$  est legendrien pour toutes les structures  $\xi_n$  où  $\xi_n$  est la restriction de  $\xi_n$  à  $\tilde{V}$ .

Maintenant on voudrait compléter les domaines fibrés obtenus sur  $\tilde{V}$  pour obtenir des domaines fibrés sans bord sur  $V$ .

**Lemme 3.51.** *Il existe des domaines fibrés  $(D'_1, \tau'_1, \zeta'_1), \dots, (D'_l, \tau'_l, \zeta'_l)$  sur  $V$  tels que :*

- Pour tout  $i$ ,  $(D'_i, \tau'_i, \zeta'_i)|_{V \setminus \mathcal{N}(L)} = (D_i, \tau_i, \zeta_i)$
- Le nœud  $L$  est tangent aux fibres des  $D'_i$
- Toute structure de contact  $(\xi_n)$  pour  $n \geq N$  est ajustée à l'un des  $(D'_i, \tau'_i, \zeta'_i)$ .

*Démonstration.* Il suffit de compléter les domaines fibrés obtenus précédemment. Comme la construction des  $D_i$  a été faite sur n'importe quel voisinage tubulaire de  $L$ , on peut facilement prolonger les domaines fibrés à l'intérieur du tore que représente le voisinage de  $L$  sans créer de nouveaux embranchements.

Pour finir le fait d'avoir le nœud tangent aux fibres des domaines vient du fait que sur  $\tilde{V}$  les fibres des prismes fibrés (et par conséquence des quadrilatères fibrés et des domaines fibrés) suivent les longitudes de  $\partial\tilde{V}$  c'est-à-dire les longitudes de  $\partial\mathcal{N}(L)$ . En prolongeant les domaines fibrés, on trouve que sa fibration est parallèle à l'âme du tore et donc que le nœud suit les fibres.  $\square$

De façon plus général cela prouve le résultat suivant.

**Théorème 3.52.** *Soient  $V$  une variété fermée,  $L$  un nœud lisse dans  $V$  et  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des structures de contact tendues pour lesquelles  $L$  est legendrien et non déstabilisable. Alors il existe sur  $V$  un nombre fini de domaines fibrés  $(D_i, \tau_i)$  chacun muni d'une structure de contact  $\zeta_i$  tel que*

- Pour tout  $i$ ,  $L$  est transverse à  $D_i$  et tangent à  $\tau_i$  ;
- Pour toute structure  $\xi_n$  il existe un  $i$  tel que  $\xi_n$  est tangent à  $\tau_i$  dans  $D_i$  et égale à  $\zeta_i$  à l'extérieur de  $D_i$ .

*Démonstration.* Pour passer du lemme 3.51 au théorème 3.52, il reste à dire un mot sur les structures  $\xi_n$  pour  $n < N$  sur  $V \setminus \mathcal{N}(L)$ . Ces structures viennent des cas où l'invariant de Thurston-Bennequin du nœud  $L$  est supérieur à  $-N$ . L'invariant de Thurston-Bennequin étant majoré par l'inégalité de Bennequin, il reste donc un

nombre fini de cas. Ces cas fixent un nombre fini de structures de contact au bord de  $\tilde{V}$  (un germe par valeur prise par  $(tb(L))$ ). On peut alors utiliser les résultats de [CGH09] qui montrent la finitude des structures de contact sur les variétés à bord en imposant un germe de structure de contact au bord.  $\square$

### 3.8 Méthode alternative

Afin d'obtenir le théorème 3.52, il existe une méthode alternative. En effet, sans passer par  $\tilde{V}$ , on peut choisir une triangulation lisse sur  $V$  telle que  $L$  soit inclus dans des 1-simplexes. On peut rendre ensuite cette triangulation de contact (maniable, minimale) par des modifications relatives à  $L$ , notamment car  $L$  est déjà legendrien.

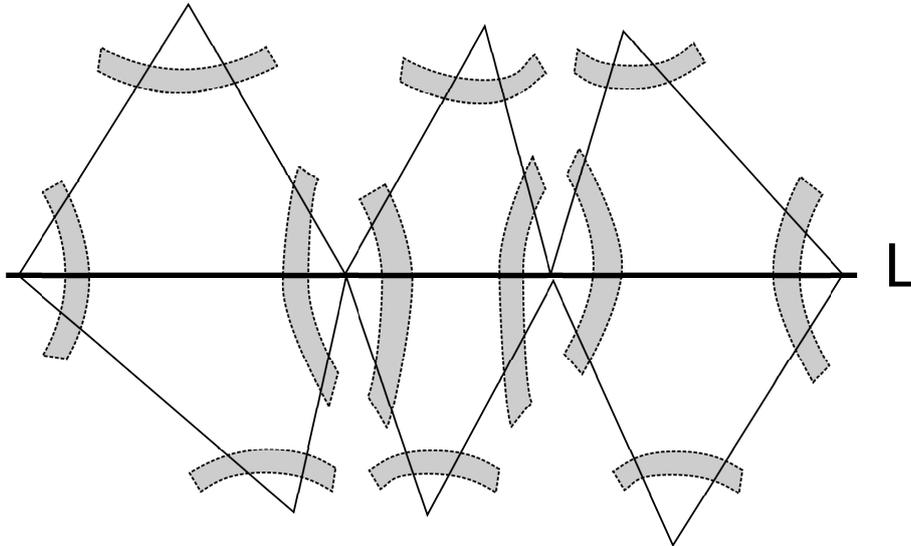
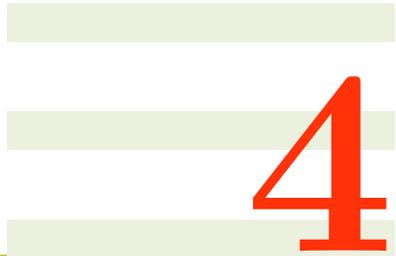


FIGURE 3.13 – Méthode alternative (en gris les paquets admissibles)

Ensuite quelque soit le feuilletage des 2-simplexes, par construction, les quadrilatères fibrés intersectent alors  $L$  le long d'arêtes verticales. Ce qui signifie que les fibres des quadrilatères fibrés sont parallèles à  $L$ . Il en est alors de même pour les fibres des prismes fibrés et des domaines fibrés. On obtient donc les mêmes relations de transversalité entre le nœud et le domaine fibré (voire figure 3.8).

Néanmoins le fait de passer par le complémentaire du nœud permet de mettre en avant les difficultés à construire de tels domaines fibrés sur les variétés à bord, ainsi que les conditions nécessaires sur le bord pour y arriver.





# 4

---

## Transformations et stabilisation

Dans ce chapitre, on étudie une transformation de la variété de contact appelée modification de Lutz, et une transformation de nœud appelé vrille. Tout d'abord en étudiant les modifications de Lutz, on finit de démontrer le théorème 0.6. En effet, le théorème 3.52 démontré dans le chapitre précédent montre que les structures de contact sont engendrées par des modifications de Lutz sur des domaines fibrés. Ici on explique comment passer à des modifications de Lutz sur un nombre fini de tores en suivant des techniques de [CGH09].

Ensuite, on va appliquer ce résultat d'engendrement à une suite de nœuds legendriens non déstabilisables pour étudier la conjecture 0.4.

Soit  $\xi$  une structure de contact tendue sur  $\mathbb{S}^3$ . Soient  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des nœuds legendriens de  $(\mathbb{S}^3, \xi)$  tous dans la même classe d'isotopie lisse mais tous dans des classes d'isotopie legendrienne différentes. On note  $\phi_n$  l'isotopie ambiante de  $\mathbb{S}^3$  qui envoie  $L_n$  sur  $L_0$  et  $\xi_n = \phi_n^* \xi$ . On obtient donc que  $L_0$  est legendrien pour toutes les structures  $\xi_i$  et les structures  $\xi_i$  sont tendues et deux à deux non contactomorphes. On fera le lien entre les modifications de Lutz sur  $\xi_n$  et ses implications sur  $L_n$ .

## 4.1 Définitions

### 4.1.1 Modification de Lutz

La première modification qui va nous intéresser est la modification de Lutz. Elle consiste à changer une structure de contact au voisinage d'un tore transverse.

**Définition 4.1.** Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact. Soit  $T$  un tore transverse à  $\xi$ . On note  $W = T \times [-1, 1]$  un épaississement du tore, en notant les coordonnées  $x = (x_1, x_2) \in T$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Sur  $W$ ,  $\xi$  peut être représentée par le noyau de :

$$\alpha = \cos(\theta(x, t))dx_1 - \sin(\theta(x, t))dx_2$$

où  $\theta : W \rightarrow \mathbb{S}^1$  avec  $\partial_t \theta > 0$  en tout point.

Une modification de Lutz de coefficient  $\frac{n}{2}$  le long de  $T$  consiste à remplacer  $\xi$  dans  $W$  par  $\xi_n$  qui est le noyau de :

$$\alpha_n = \cos(\theta(x, t) + \rho_n(t))dx_1 - \sin(\theta(x, t) + \rho_n(t))dx_2$$

où  $\rho_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  est la projection d'une fonction réelle croissante qui vaut 0 près de -1 et  $n\pi$  près de 1.

La nouvelle structure de contact coïncide avec  $\xi$  près de  $T \times \{-1\}$  et avec  $(-1)^n \xi$  près de  $T \times \{1\}$ . Dans le cas où  $n$  est impair,  $\xi_n$  n'est pas toujours orientable. Dans ce cas, pour qu'elle soit orientable il faut que  $T$  sépare  $V$  en deux composantes.

On remarque aisément que la classe d'isotopie de  $\xi_n$  ne dépend que de  $n$  et pas du choix de  $W$  ou  $\rho_n$ . Sa classe d'homotopie dans l'espace des champ de plans tangents ne dépend que de la parité de  $n$  et si  $n$  est pair, elle est égale à celle de  $\xi$ .

On peut également étendre cette définition aux surfaces branchées transverses à la structure de contact, en remplaçant le voisinage tubulaire du tore par un domaine fibré. On a alors un  $\rho$  sur chaque secteur du domaine fibré avec des conditions de recollement sur le lieu singulier que l'on détaillera dans la sous-section 4.6.1.

### 4.1.2 Vrille

La deuxième modification que l'on va étudier consiste à modifier la variété au voisinage d'un tore.

**Définition 4.2.** Soit  $V$  une variété. Soit  $T$  un tore. On note  $W = T \times [-1, 1]$  un épaississement du tore avec  $x = (x_1, x_2) \in T$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Une vrille  $\nu$  de coefficient  $\frac{n}{2}$  avec  $n$  est pair sur  $T$  est l'identité sur  $V \setminus W$  et

$$\begin{aligned} \nu|_W : \quad W &\rightarrow W \\ (x_1, x_2, t) &\mapsto (x_1 + \nu_n(t), x_2, t) \end{aligned}$$

où  $\nu_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  est la projection d'une fonction réelle croissante qui vaut 0 près de -1 et  $n\pi$  près de 1.

De la même façon que la modification de Lutz, la nouvelle structure de contact coïncide avec l'originale près de  $T \times \{-1, 1\}$ . Mais il n'y a pas de problème d'orientation car on choisit de ne définir cette transformation que dans le cas  $n$  pair.

### 4.1.3 Composante de Reeb

Le feuilletage caractéristique d'un tore  $T$  (avec les coordonnées  $(x_1, x_2)$ ) possède une composante de Reeb sur  $I \times \mathbb{S}^1 \subset T$  si les feuilles sont paramétrées par  $\{(1 - x_1^2)e^{x_2}\}_{c>0}$  en renormalisant  $I = [-1, 1]$ . On démontre maintenant le lemme 0.10 précédemment énoncé qui fait le lien entre modification de Lutz et vrille.

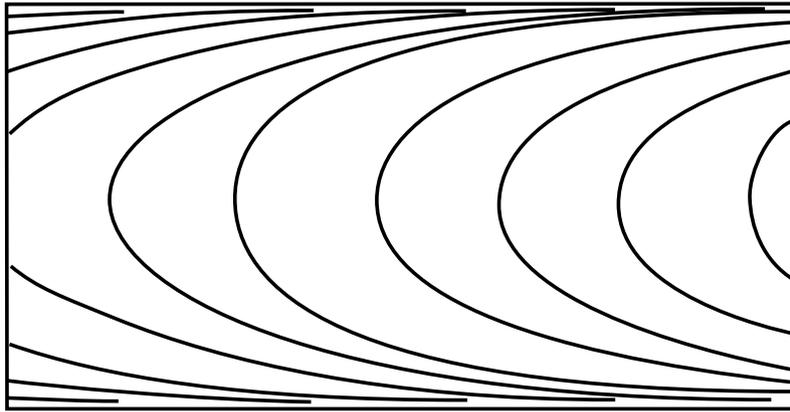


FIGURE 4.1 – Composante de Reeb

**Théorème 0.10.** *Soit  $T$  un tore transverse dans une variété de contact  $(V, \xi)$  dont le feuilletage caractéristique est constitué de  $2k$  composantes de Reeb pointant dans le même sens, pour  $k > 0$ . Soit  $\mu$  une modification de Lutz de coefficient  $n_1$  le long de  $T$  et  $\nu$  une vrille de coefficient  $n_2$  le long de  $T$ . Si  $n_1 = kn_2$ , alors  $(V, \nu^*\xi)$  est contactomorphe à  $(V, \mu(\xi))$ . En particulier si le tore est compressible,  $\mu(\xi)$ ,  $\nu_n^*\xi$  et  $\xi$  sont isotopes.*

*Démonstration.* En reprenant les notations de la définition de la composante de Reeb, on peut remarquer que sur les droites  $\{x_1 = \text{constante}\}$  la pente du feuilletage caractéristique est constante, et qu'elle varie continûment en prenant toutes

les valeurs de  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  quand on fait varier  $x_1$  dans  $[-1, 1]$ . Ainsi appliquer une rotation d'angle constant des pentes du feuilletage sur tous les points d'une composante de Reeb revient à appliquer une translation de la composante de Reeb dans la direction  $x_1$ .

Ainsi quand le feuilletage caractéristique du tore  $T$  est constitué uniquement de composantes de Reeb pointant dans le même sens, la rotation des pentes du feuilletage revient à traduire chaque composante du feuilletage caractéristique suivant  $x_1$ . Il faut que les différentes composantes pointent dans le même sens pour que chaque composante se translate dans le même sens et avoir une translation du feuilletage. Une modification de Lutz de coefficient  $\frac{1}{2}$  translate ainsi chaque composante de Reeb sur la composante suivante. Pour faire un tour complet, il faut donc un coefficient de modification de Lutz égale à la moitié du nombre de composante de Reeb.

Dans ce cas, le film constitué des feuilletages caractéristiques est le même pour  $(V, \nu^*\xi)$  et  $(V, \mu(\xi))$ . Il détermine entière la structure contact au voisinage de  $T$ . Comme la vrille et la modification de Lutz n'agissent que sur un voisinage du  $T$ , on a bien le contactomorphisme voulu.  $\square$

## 4.2 Calcul d'invariants après modification de Lutz

On calcule l'effet de la modification de Lutz sur le nombre de rotation d'un nœud et son invariant de Thurston-Bennequin.

**Lemme 4.3.** *Soit  $\mu$  une modification de Lutz de coefficient  $n \in \mathbb{N}$  sur un tore  $T \subset (V^3, \xi)$  et  $L$  un nœud legendrien pour  $\xi$  qui intersecte  $T$  transversalement en deux points. Alors*

1.  $tb(L, \mu(\xi)) = tb(L, \xi) - 2n$ ,
2.  $rot(L, \mu(\xi)) = rot(L, \xi)$ .

*Démonstration.* On note  $W = T \times [-1, 1]$  l'épaississement du tore  $T$ . On peut alors séparer  $\mathbb{S}^3$  en trois composantes connexes :

$$\mathbb{S}^3 \setminus \partial W = P_1 \sqcup (T \times ]-1, 1[) \sqcup P_2.$$

On suppose que  $L$  est découpé en quatre composantes connexes : deux sont tangentes à  $\tau$  et deux sont en dehors du  $W$ . On peut faire les mêmes calculs si  $L$  est découpé en un plus grand nombre de composantes, en répétant les calculs suivants pour chaque composantes de  $L$  à l'intérieur de  $W$ . On choisit une orientation pour  $L$  et on note

- $L \cap P_i = L_i$  pour  $i=1, 2$ ;

—  $L \cap W = L_{12} \sqcup L_{21}$  où  $L_{ij}$  va de  $P_i$  vers  $P_j$

Par définition,  $L_1$  et  $L_2$  ne compte pour le calcul du changement d'invariants par la modification de Lutz.

On peut ensuite calculer l'influence de la modification de Lutz de coefficient 1 sur  $L_{12}$  et  $L_{21}$ . Il suffit juste d'appliquer les définitions :

- $\text{tb}(L_{12}, \mu(\xi)) = \text{tb}(L_{12}, \xi) - 1$  ;
- $\text{tb}(L_{21}, \mu(\xi)) = \text{tb}(L_{21}, \xi) - 1$  ;
- $\text{rot}(L_{12}, \mu(\xi)) = \text{rot}(L_{12}, \xi) \pm 1$  (selon l'orientation) ;
- $\text{rot}(L_{21}, \mu(\xi)) = \text{rot}(L_{21}, \xi) \mp 1$  (selon l'orientation).

En faisant la somme, et en itérant avec le lemme 4.11 pour passer à une modification de Lutz de coefficient  $n$ , on trouve bien les résultats énoncés.  $\square$

*Remarque 4.4.* On peut remarquer qu'une modification de Lutz a le même effet sur les invariants classiques que l'action de deux stabilisations de signe opposé.

### 4.3 Division des domaines fibrés en tores

On conclut ici la preuve du théorème 0.6.

Dans le chapitre précédent, on a vu comment trouver un nombre fini de domaines fibrés sur lesquels chaque structure de contact tendue de  $V$  peut être ajustée. Si on prend deux structures de contact  $\xi_i$  et  $\xi_j$  ajustées à un même domaine fibré  $(D, \tau)$  et égales à  $\zeta$  en dehors, cela signifie que  $\xi_i$  et  $\xi_j$  ne diffèrent que du nombre de tours que font les plans de contact le long des fibres de  $(D, \tau)$ . On peut donc passer de  $\xi_i$  à  $\xi_j$  par une modification de Lutz sur  $D$ .

L'objectif ici est d'interpréter cette modification de Lutz comme une suite de modifications de Lutz sur un nombre fini de tores transverses aux structures de contact.

On va utiliser la notion de poids définie dans le lemme 3.46 par Colin, Giroux et Honda. On rappelle que le poids,  $\omega_\xi$ , pour une structure de contact  $\xi$ , est défini par un entier relatif sur chaque composante connexe de la partie régulière de  $D$ . Cet entier compte le nombre de tours que font les plans de contact le long des fibres relativement à une structure de contact fixée dans l'ensemble des structures de contact ajustées à  $(D, \tau)$ . Et on a la relation d'embranchement suivante

$$\omega_\xi(R_1) + \omega_\xi(R_2) = \omega_\xi(R_3) \quad (4.1)$$

quand deux secteurs réguliers  $R_1$  et  $R_2$  se rejoignent pour former un autre secteur régulier  $R_3$ .

Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des classes d'isotopies de structures de contact tendues ajustées à  $(D, \tau)$ , à isotopie parmi les structures de contact tendues ajustées à  $(D, \tau)$ . Toute structure de contact  $\xi$  de  $\mathcal{X}$  est donc déterminée par les valeurs prises par sa fonction poids. En notant  $d$  le nombre de secteurs réguliers de  $D$ , on a donc une bijection entre les classes d'isotopie de structures de contact de  $\mathcal{X}$  et les  $d$ -uplets d'entiers relatifs qui vérifient toutes les relations d'embranchement de  $D$ . Plus précisément, quitte à partitionner  $\mathcal{X}$  et à appliquer le lemme d'élagage, on peut supposer que les poids ne prennent que des valeurs positives. Et on note  $\mathcal{E}$  le système d'équations de  $\mathbb{N}^d = \{(x_1, \dots, x_d)\}$  formées par les équations  $x_i + x_j = x_k$  pour  $R_i$  et  $R_j$  des secteurs réguliers de  $D$  se rejoignant pour former  $R_k$ . Ainsi  $\mathcal{X}$  est en bijection avec les solutions de  $\mathcal{E}$ . On note  $X$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$  formé par les solutions de  $\mathcal{E}$ .

On définit sur  $N^d$  une relation d'ordre partiel par

$$(x_1, \dots, x_d) \preceq (y_1, \dots, y_d) \text{ si } x_i \leq y_i \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

L'idée est que pour voir les modifications de Lutz sur  $D$  comme une suite de modifications de Lutz sur des tores, il faut commencer par trouver les modifications de Lutz minimales qui pourront être vu comme une modification de Lutz sur une tore.

**Lemme 4.5.** [CGH09] *Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$ . Les éléments minimaux de  $W \cap \mathbb{N}^d$  pour l'ordre partiel  $\preceq$  sont en nombre fini et engendrent  $W \cap \mathbb{N}^d$ .*

*Démonstration.* Pour montrer la finitude des éléments minimaux de  $W \cap \mathbb{N}^d$ , on raisonne par récurrence sur  $d$ . Si  $d = 1$ , la relation d'ordre  $\preceq$  est totale, et il y a un unique élément minimal. Maintenant on suppose la finitude des éléments minimaux pour tout espace de  $\mathbb{R}^{d-1}$ , pour  $d \geq 2$ . Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^d$ . On raisonne par l'absurde, en supposant que  $W \cap \mathbb{N}^d$  possède une infinité d'éléments minimaux pour  $\preceq$ . On a donc une suite d'éléments minimaux de  $W \cap \mathbb{N}^d$   $(w^i)_{i \in \mathcal{N}} = (w_1^i, \dots, w_d^i)$ . Quitte à perturber l'ordre des coordonnées on peut supposer que la suite des dernières coordonnées  $(w_d^i)_{i \in \mathcal{N}}$  tend vers l'infini. On note  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  la projection sur les  $d - 1$  premières coordonnées. Par définition, l'image de tout élément minimal de  $W \cap \mathbb{N}^d$  par  $p$  donne un élément minimal de  $p(W) \cap \mathbb{N}^{d-1}$ . Par l'hypothèse de récurrence appliquée à  $p(W)$ , les éléments minimaux de  $p(W) \cap \mathbb{N}^{d-1}$  sont en nombre fini. On en déduit donc  $u^1 \dots u^{d-1}$  un nombre fini d'éléments de  $N^d$  dont l'image par  $p$  est un élément minimal de  $p(W) \cap \mathbb{N}^{d-1}$ . Or si  $i$  est assez grand,  $v_d^i$  est supérieur à chaque  $u_1^1 \dots u_{d-1}^n$ . En particulier, comme les  $u^j$  sont des éléments minimaux pour les  $d - 1$  premières coordonnées, on a que  $u^k \preceq v^i$  pour un certain  $k$ , ce qui contredit la minimalité de  $v^i$ .

On montre maintenant que les éléments minimaux engendrent  $W \cap \mathbb{N}^d$ . Soit  $u$  un élément de  $W \cap \mathbb{N}^d$  qui n'est pas minimal. Il est donc supérieur à  $u^k$  l'un des éléments

minimaux. On a alors l'élément  $u - u^k \in W \cap \mathbb{N}^d$ . Soit cet élément est minimal, soit on peut lui retrancher de la même façon un élément minimal  $u^{k'}$ . En répétant cette opération un nombre fini de fois, on écrit  $u$  comme la somme d'éléments minimaux de  $W \cap \mathbb{N}^d$ .  $\square$

Dans la suite, on notera  $u^1 \dots u^k$  les éléments minimaux de  $X \cap \mathbb{N}^d$  pour  $\preceq$  donnés par le lemme 4.5.

*Remarque 4.6.* Les modifications de Lutz sur  $(D, \tau)$  sont également en bijection avec les éléments de  $X \cap \mathbb{N}^d$ . Dans ce cas, chaque entier représente le nombre de demi-tours ajoutés par la modification de Lutz sur chaque secteur régulier.

*Remarque 4.7.* Les classes d'isotopie de surfaces compactes plongées sans bord dans  $V$  transversalement à  $\tau$  sont également en bijection avec les éléments non-nuls de  $X \cap \mathbb{N}^d$ . Dans ce cas, pour une surface  $S$ , l'entier associé au secteur régulier  $R_0$  est le nombre de composantes connexes de  $S \cap (R_0 \times [0, 1]_\tau)$ . On dit alors que  $S$  est portée par  $(D, \tau)$  et on note  $\omega_S$  le poids de  $S$ .

**Lemme 4.8.** *Dans une variété de contact tendue  $(V, \xi)$  avec un domaine fibré  $(D, \tau)$  compact sans bord et ajusté à  $\xi$ , les surfaces compactes portées par  $(D, \tau)$  sont transverses à  $\xi$  et leurs composantes connexes sont des tores et/ou des bouteilles de Klein.*

*Démonstration.* Les surfaces portées par  $(D, \tau)$  sont transverses aux fibres du domaine fibré. Par définition, les plans de contact sont tangents aux fibres. La surface est donc transverse. Le feuilletage caractéristique de la surface ne possède donc aucun point singulier, ce qui implique que sa caractéristique d'Euler est nulle et par conséquent que chaque composante connexe de la surface est un tore ou une bouteille de Klein.  $\square$

Les modifications de Lutz sur  $D$  sont donc engendrées par les éléments minimaux  $u^1 \dots u^k$  où  $u^1 \dots u^j$  sont des modifications de Lutz sur des tores  $T_1 \dots T_j$  et  $u^{j+1} \dots u^k$  sur des bouteilles de Klein. Quand  $u^i$  est portée par une bouteille de Klein, on prend  $T'_i$  le tore qui borde un petit voisinage tubulaire de la bouteille de Klein. Ce tore est toujours porté par  $(D, \tau)$ . Dans ce cas, on note  $u^i$  le poids de  $T_i$  qui est égal à deux fois le poids de la modification  $u_i$ .

**Lemme 4.9.** *[CGH09] Les structures de contact ajustées à  $(D, \tau)$  sont toutes obtenues à partir de  $\zeta_0$  par des modifications de Lutz sur les tores  $T_1 \dots T_k$ .*

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \mathcal{X}$ . Par le lemme 4.5, on a  $\omega_\xi = \sum_{i=1}^k n_i(\xi) u^i$  avec  $n_i(\xi) \in \mathbb{N}$ . Soit  $\xi'$  la structure de contact obtenue à partir de  $\zeta_0$  par modification de Lutz de coefficient  $n_i(\xi)$  sur  $T_i$  pour  $1 \leq i \leq j$  et de coefficient  $\frac{1}{2}n_i(\xi)$  sur  $T'_i$  pour  $j < i \leq k$ . Par construction,  $\xi'$  et  $\xi$  ont le même poids et sont donc isotopes.  $\square$

On a donc ainsi divisé les modifications de Lutz sur le domaine fibré  $(D, \tau)$  en modifications de Lutz sur un nombre fini de tores transverses  $T_1 \dots T_k$  portés par  $D$ . Il faut noter que le cas des bouteilles de Klein dans le lemme 4.8 ne peut pas se produire dans  $\mathbb{S}^3$ , mais dans des cas plus généraux, le lemme 4.9 permet de toujours se ramener au cas des tores. Ceci conclut la preuve du théorème 0.6.

## 4.4 Cas modèle

On revient maintenant à l'étude de la conjecture 0.4. On décrit ici un cas modèle où l'on peut trouver une déstabilisation.

**Lemme 4.10.** *Soit un nœud legendrien  $L \subset (\mathbb{S}^3, \xi)$ . Soit  $\nu$  une vrille de coefficient 1 sur un tore  $T$  qui intersecte  $L$  transversalement en deux points. Si l'une des deux composantes connexes de  $L \cap (V \setminus T)$  est un segment alors  $\nu(L)$  est déstabilisable.*

*Démonstration.* On note  $W = T \times [-1, 1]$ , un épaississement de  $T$ . On note  $L \cap (V \setminus W) = L_1 \sqcup L_2$  et  $W \cap L = L_{12} \sqcup L_{21}$ . Soit  $\nu$  une vrille sur  $T$  de coefficient 1. En reprenant les notations précédentes, on pose  $D$  le disque de bord  $L_{12} \cup \nu(L_{12})$ . Le bord de  $D$  est donc legendrien d'invariant de Thurston-Bennequin  $-1$ . On veut trouver dans ce disque une rocade permettant de déstabiliser  $\nu(L)$ . Le disque  $D$  porte bien une rocade qui s'appuie sur son bord. Or  $L_1$  (ou  $L_2$ ) est un segment, on peut donc le déplacer (sans intersecter à nouveau  $W$ ) pour éviter toute intersection avec la rocade. Cette rocade donne alors une déstabilisation de  $\nu(L)$ .  $\square$

## 4.5 Retour à la conjecture de finitude

Supposons que la conjecture 0.4 est fautive. On aurait donc une suite de nœuds legendriens non déstabilisables, tous isotopes lisses, mais non legendrien isotopes. Par les constructions expliquées précédemment, on associe une suite de structures de contact à cette suite de nœuds. Par le théorème 0.6, on a montré que ces structures sont engendrés par des modifications de Lutz sur un nombre fini de tores.

Pour montrer cette conjecture, il faudrait trouver une déstabilisation parmi la suite infinie de nœuds. Pour cela, on utilise le fait que les nœuds sont engendrés par des modifications de Lutz sur des tores. Ainsi deux nœuds de cette suite ne diffèrent que par des modifications de Lutz sur un nombre fini de tores.

Pour appliquer le lemme 4.10, il faut que :

1. le feuilletage caractéristique des tores sur lesquels portent les modifications de Lutz sont constitués du bon nombre de composantes de Reeb pointant dans le même sens ;

2. ces tores ne s'intersectent pas ;
3. une des composantes connexes du nœud dans le complémentaire du tore est suffisamment "simple".

Ces conditions sont très spécifiques et on ne sait pas si elles sont toujours réalisées. Dans les sections suivants, on apporte des pistes permettant parfois de remplir ces conditions.

## 4.6 Disjonction des modifications de Lutz

Soit  $(\mathbb{S}^3, \xi)$  une variété de contact tendue. Si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux tores transverses à  $\xi$  tels que  $T_1 \cup T_2$  forme une surface branchée. Soit  $\mu_1$  (respectivement  $\mu_2$ ) une modification de Lutz de coefficient  $n_1$  (respectivement  $n_2$ ) sur  $T_1$  (respectivement  $T_2$ ). On réfléchit ici à comment trouver des tores transverses à  $\xi$ , disjoints tels que la composée de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  soit équivalente à une suite finie de modification de Lutz sur ces nouveaux tores (condition (2) du cas modèle).

Après avoir proposé un modèle de disjonction locale, on verra quelques exemples qui empêchent d'obtenir ces tores disjoints en général.

### 4.6.1 Étude locale de l'embranchement

On note  $W_1 = T_1 \times [-1, 1]$  et  $W_2 = T_2 \times [-1, 1]$  les tores épaissis. Dans la suite, quand on parlera de fibration sur le tore, il s'agira toujours des fibres de la forme  $\{x\} \times [-1, 1]$ . Par définition, les plans de contact de  $\xi$  sont tangents aux fibres des tores. Plus exactement,  $\xi$  peut être vue comme le noyau de  $\alpha$  où :

$$\begin{aligned}\alpha|_{W_1} &= \cos(\theta_1(x, t))dx_1 - \sin(\theta_1(x, t))dx_2, \\ \alpha|_{W_2} &= \cos(\theta_2(y, t))dy_1 - \sin(\theta_2(y, t))dy_2,\end{aligned}$$

avec  $t \in [-1, 1]$ ,  $x = (x_1, x_2) \in T_1$ ,  $y = (y_1, y_2) \in T_2$  et  $\theta_i : W_i \rightarrow \mathbb{S}^1$  avec  $\partial_t \theta_i > 0$  pour  $i = 1, 2$  et pour tout  $t$ .

On regarde ce qu'il se passe à un lieu d'embranchement. On note  $R_3$  le secteur régulier formé par l'embranchement de  $R_1$  et  $R_2$ , secteurs réguliers de respectivement  $T_1$  et  $T_2$ . On remarque que  $R_3$  est un secteur régulier de  $T_1 \cap T_2$ . De plus,  $x = y$  et  $\theta_1 = \theta_2$  sur  $R_3$ .

Soit  $\mu_i$  une modification de Lutz de coefficient  $n_i$  sur  $T_i$ . On rappelle que cette modification consiste à remplacer  $\theta_i(x, t)$  par  $\theta_i(x, t) + \rho_i(t)$  où  $\rho_i : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  est la projection d'une fonction réelle croissante qui vaut 0 près de  $-1$  et qui vaut  $2n_i\pi$  près de 1.

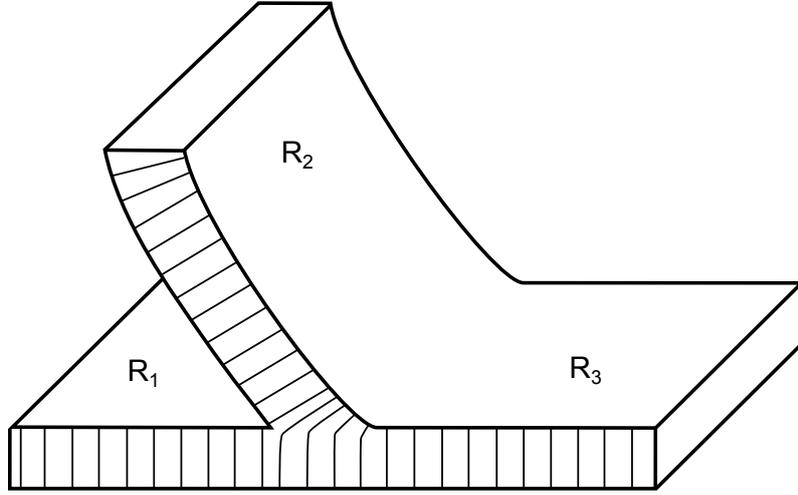


FIGURE 4.2 – Modèle locale de l'embranchement avec 3 secteurs réguliers

Après l'action de ces deux modifications de Lutz, la structure de contact  $\xi'$  obtenue peut être vue comme le noyau de  $\alpha'$  où :

$$\begin{aligned}\alpha'|_{R_1 \times [-1,1]} &= \cos(\theta_1(x,t) + \rho_1(t))dx_1 - \sin(\theta_1(x,t) + \rho_1(t))dx_2, \\ \alpha'|_{R_2 \times [-1,1]} &= \cos(\theta_2(y,t) + \rho_2(t))dy_1 - \sin(\theta_2(y,t) + \rho_2(t))dy_2, \\ \alpha'|_{R_3 \times [-1,1]} &= \cos(\theta_1(x,t) + \rho_1(t) + \rho_2(t))dx_1 - \sin(\theta_1(x,t) + \rho_1(t) + \rho_2(t))dx_2, \\ &= \cos(\theta_2(y,t) + \rho_1(t) + \rho_2(t))dy_1 - \sin(\theta_2(y,t) + \rho_1(t) + \rho_2(t))dy_2,\end{aligned}$$

#### 4.6.2 Diminution du coefficient

Ici on explique comment se ramener au cas des modifications de Lutz de coefficient 1.

**Lemme 4.11.** *Soit  $\mu$  une modification de Lutz de coefficient  $n$  sur un tore  $T \subset (V^3, \xi)$  transverse. Alors il existe  $n$  tores disjoints  $T_1 \dots T_n$  tels que  $\mu$  est égale à la composée des modifications de Lutz de coefficient 1 sur les  $T_i$ .*

*Démonstration.* On choisit les tores  $T_i = T \times \{\frac{i-1}{n}\} \subset W = T \times [-1,1]$  pour  $1 \leq i \leq n$ . On définit le voisinage de  $T_i$  par  $W_i = T \times [\frac{i-1}{n} - \varepsilon, \frac{i-1}{n} + \varepsilon]$  pour  $\varepsilon < \frac{1}{3n}$ .

En reparamétrant  $\rho$  à la source, on peut faire que  $\rho(\frac{i-1}{n} + \varepsilon) - \rho(\frac{i-1}{n} - \varepsilon) = 2\pi$  et  $\rho(t) = 0$  en dehors des  $[\frac{i-1}{n} - \varepsilon, \frac{i-1}{n} + \varepsilon]$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Ainsi  $\rho$  est équivalent à la composée des modifications de Lutz de coefficient 1 sur les  $T_i$ .  $\square$

### 4.6.3 Disjonction locale

Maintenant on essaie construire ici des tores  $T'_1$  et  $T'_2$  disjoints ainsi que les modifications de Lutz associées afin d'obtenir  $\xi'$  à partir de  $\xi$  par des modifications de Lutz sur ces tores.

On note  $\rho'_1 : [-1, 1] \rightarrow S^1$  la fonction définie par

$$\begin{aligned} \rho'_1(t) &= \rho_1(8t + 7) && \text{pour } t \leq -\frac{3}{4} \\ &= \rho_1(1) && \text{pour } t \geq -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cela revient à pousser toute l'action de  $\rho_1$  sur l'intervalle  $[-1, -\frac{3}{4}]$  puis à compléter en gardant la fonction constante. De la même façon, en repoussant l'action de  $\rho_2$  sur l'intervalle  $[\frac{3}{4}, 1]$  on définit  $\rho'_2 : [-1, 1] \rightarrow S^1$  par

$$\begin{aligned} \rho'_2(t) &= \rho_2(-1) && \text{pour } t \leq \frac{3}{4} \\ &= \rho_2(8t - 7) && \text{pour } t \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On construit maintenant les tores. On définit  $W'_1 = T_1 \times [-1, -\frac{2}{3}]$ .  $W'_1$  est un voisinage tubulaire de  $T'_1 = T_1 \times \{-\frac{5}{6}\}$ . De la même façon  $W'_2 = T_2 \times [\frac{2}{3}, 1]$ , voisinage tubulaire de  $T'_2 = T_2 \times \{\frac{5}{6}\}$ . Ainsi on obtient deux tores épaissis  $W'_1$  et  $W'_2$  disjoints.

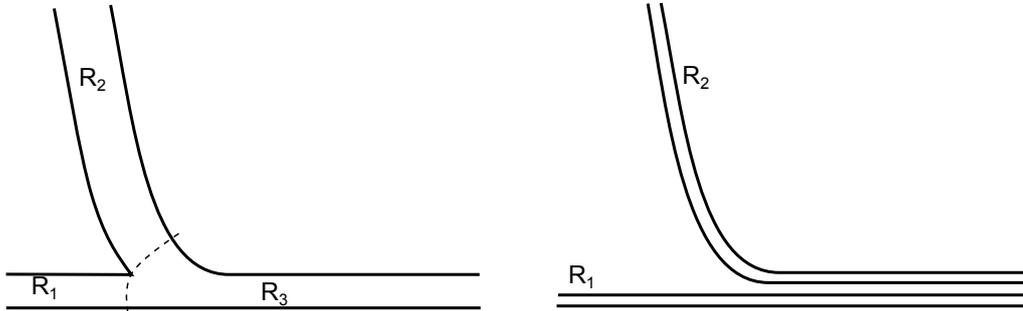


FIGURE 4.3 – Disjonction locale de l'embranchement

On définit maintenant  $\xi''$  par le noyau de  $\alpha''$  où :

$$\alpha''|_{R_1 \times [-1, 1]} = \cos(\theta_1(x, t) + \rho'_1(t))dx_1 - \sin(\theta_1(x, t) + \rho'_1(t))dx_2,$$

$$\alpha''|_{R_2 \times [-1, 1]} = \cos(\theta_2(y, t) + \rho'_2(t))dy_1 - \sin(\theta_2(y, t) + \rho'_2(t))dy_2,$$

$$\alpha''|_{R_3 \times [-1, 1]} = \cos(\theta_1(x, t) + \rho'_1(t) + \rho'_2(t))dx_1 - \sin(\theta_1(x, t) + \rho'_1(t) + \rho'_2(t))dx_2,$$

On voit facilement que  $\xi''$  est obtenue par une modification de Lutz sur  $W'_1$  de coefficient  $n_1$  associé  $\rho'_1$  et par une modification de Lutz sur  $W'_2$  de coefficient  $n_2$

associé à  $\rho'_2$ . Par construction, le poids de  $\xi''$  est le même que le poids de  $\xi'$  sur  $D$ . Plus précisément le poids de  $\xi''$  et de  $\xi'$  est celui de  $\xi$  plus  $n_1$  sur  $R_1$ ,  $n_2$  sur  $R_2$  et  $n_1 + n_2$  sur  $R_3$ . Les deux structures de contact  $\xi'$  et  $\xi''$  sont donc isotopes.

#### 4.6.4 Problèmes pour la disjonction globale

Le problème est que ces disjonctions locales ne se recollent pas toujours très bien. On illustre ces problèmes de recollement par deux exemples.

*Exemple 4.12.* Soit deux tores branchés comme représenté sur la figure 4.4. Si on applique la méthode précédente, sur les deux branchements, on se rend compte que les secteurs obtenus ne se recollent pas car les coefficients de modifications de Lutz seraient alors discontinus sur les secteurs réguliers obtenus.

Pour résoudre ce problème, il suffit d'utiliser le lemme 4.11 sur chacun des secteurs obtenus et de recoller les modifications de Lutz (de coefficient 1) obtenues. On fait alors apparaître un troisième secteur régulier.

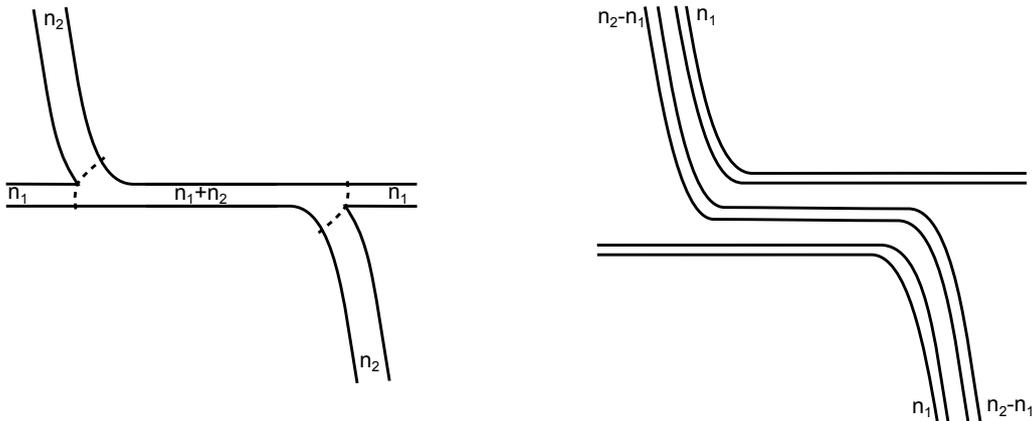


FIGURE 4.4 – Embranchement pour l'exemple 4.12

*Exemple 4.13.* Maintenant on se pose la question du recollement global des secteurs réguliers obtenus par disjonction locale. Il faut que le recollement des secteurs réguliers obtenus donne une nouvelle famille de tores. Or on peut voir sur la figure 4.5 que ce n'est pas toujours le cas.

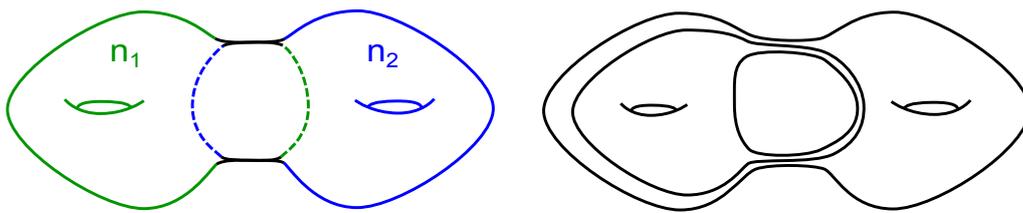


FIGURE 4.5 – La méthode de disjonction locale donne trois surfaces mais aucune n'est un tore



## Invariants avancés

Dans ce chapitre, on définit des invariants avancés pour les nœuds legendriens et transverses, puis on utilise le théorème 0.12 démontré dans le chapitre 1, combiné aux travaux de Colin et Honda, pour prouver les théorèmes 0.13 et 0.14.

### 5.1 Homologie de contact

#### 5.1.1 Structures presque complexes et courbes holomorphes

Soit  $V$  une variété de dimension paire. Une *structure presque complexe* sur  $V$  est une application  $J : TV \rightarrow TV$  préservant les fibres telle que  $J^2 = -Id$ . Une application  $u : (V_1, J_1) \rightarrow (V_2, J_2)$  est dite pseudo-holomorphe si

$$du \circ J_1 = J_2 \circ du \tag{5.1}$$

Cette équation est appelée *équation de Cauchy-Riemann*. Dans ce chapitre, on s'intéressera aux applications pseudo-holomorphes entre une surface de Riemann et la symplectisation d'une variété de contact.

Soit  $(V, \xi = \ker \alpha)$  une variété de contact. La *symplectisation* de  $(V, \alpha)$  est la variété  $\mathbb{R} \times V$  munie de la forme symplectique  $\omega = d(e^t \alpha)$  où  $t$  est la coordonnée sur  $\mathbb{R}$ . Une structure presque complexe  $J$  sur la symplectisation de  $(V, \alpha)$  est dite *adaptée à  $\alpha$*  si :

1.  $J$  est  $t$ -invariante ;
2.  $J \frac{\partial}{\partial t} = \mathcal{R}_\alpha$  ;
3.  $J\xi = \xi$  ;
4.  $\omega(\cdot, J\cdot)$  est une métrique riemannienne.

Pour définir la différentielle du complexe de l'homologie de contact, on va regarder les applications pseudo-holomorphes d'une surface de Riemann  $(\Sigma, j)$  dans la symplectisation  $(V \times \mathbb{R}, \omega)$  munie d'une structure presque complexe adaptée  $J$ .

### 5.1.2 Homologie de contact totale

Soient  $V$  une variété de contact munie d'une forme de contact  $\alpha$  non-dégénérée et  $J$  une structure presque complexe adaptée à  $\alpha$ . On définit ici le complexe de l'homologie de contact totale  $(A_*(V, \alpha), \partial_J)$  introduit par Eliashberg, Givental et Hofer dans [EGH10].

Le complexe de chaînes  $A_*(V, \alpha)$  est la  $\mathbb{Q}$ -algèbre super-commutative engendrée par les bonnes orbites périodiques du champ de Reeb  $\mathcal{R}_\alpha$ . Les orbites périodiques sont relativement graduées par l'indice de Conley-Zehnder. Une orbite est dite bonne si elle ne couvre pas un nombre pair de fois une orbite hyperbolique impair de valeurs propres négatives.

Pour définir  $\partial$ , on regarde l'ensemble des classes d'équivalence (relativement aux reparamétrisations à la source) d'applications pseudo-holomorphes pour  $J$  qui sont positivement asymptotes à  $\gamma^+$ , négativement asymptotes à  $\gamma_1^- \dots \gamma_n^-$  et dans la classe d'homologie relative  $[Z]$ . On note cet ensemble

$$\mathcal{M}_{[Z]}(J, \gamma^+, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-).$$

On quotiente cet ensemble par l'action de  $\mathbb{R}$  par translation pour obtenir :

$$\overline{\mathcal{M}}_{[Z]}(J, \gamma^+, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-) = \mathcal{M}_{[Z]}(J, \gamma^+, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-) / \mathbb{R}.$$

Pour que la suite, on a besoin de l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.1.** *il existe un modèle de perturbation abstraite de l'équation de Cauchy-Riemann tel que  $\overline{\mathcal{M}}_{[Z]}(J, \gamma^+, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-)$  soit une union de variétés branchées à coins de poids rationnels et de dimensions données par  $[Z]$  et les indices de Conley-Zehnder des courbes asymptotes.*

On peut maintenant définir la différentielle. On note  $n_{\gamma^+, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-}$  la somme pondérée et signée des éléments de dimension 0 de  $\overline{\mathcal{M}}_{[Z]}(J, \gamma^+, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-)$  pour toutes les

classes d'homologie relative [Z]. La différentielle d'une orbite périodique  $\gamma$  est alors donnée par

$$\partial\gamma = \sum_{\gamma_1^- \dots \gamma_n^-} \frac{n_{\gamma, \gamma_1^- \dots \gamma_n^-}}{i_1! \dots i_l! k(\gamma_1^-) \dots k(\gamma_n^-)} \gamma_1^- \dots \gamma_n^-$$

où  $i_1! \dots i_l!$  sont les multiplicités de l'ensemble  $\{\gamma_1^- \dots \gamma_n^-\}$  et  $k(\gamma_i^-)$  est la multiplicité de l'orbite  $\gamma_i^-$ . Avec cette définition et sous l'hypothèse 5.1 on peut définir l'homologie de contact :

**Théorème 5.2** (Eliashberg-Givental-Hofer). *Sous l'hypothèse 5.1,*

- $\partial^2 = 0$ ;
- l'homologie associée  $HC_*(V, \xi)$  est bien définie et indépendante des choix d'équation de contact de  $\xi$ , de structure presque complexe  $J$  et de perturbation abstraite.

Précisons que si pour une forme de contact  $\alpha$  on obtient  $\partial^2 = 0$  sans l'hypothèse 5.1, alors on peut définir l'homologie de contact associée à  $\alpha$  et on la note  $HC_*(V, \alpha)$ .

### 5.1.3 Homologie de contact cylindrique

Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact munie d'une équation de contact  $\alpha$  non dégénérée et hypertendue (c'est-à-dire sans orbite de Reeb périodique contractile). Le complexe de l'homologie de contact cylindrique est le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les "bonnes" orbites périodiques (au même sens que pour l'homologie de contact totale) du champ de Reeb  $\mathcal{R}_\alpha$ . On le note  $C_*^{cyl}(V, \alpha), J$ . La différentielle d'une orbite périodique  $\gamma$  est

$$\partial\gamma = \sum_{\gamma^-} \frac{n_{\gamma, \gamma^-}}{k(\gamma^-)} \gamma^-.$$

Avec l'hypothèse 5.1, on obtient l'homologie de contact cylindrique  $HC_*^{cyl}(V, \xi)$  :

**Théorème 5.3** (Eliashberg-Givental-Hofer). *Sous l'hypothèse 5.1,*

- $\partial^2 = 0$ ;
- l'homologie associée  $HC_*^{cyl}(V, \xi)$  est bien définie et indépendante des choix d'équation de contact hypertendue de  $\xi$ , de structure presque complexe  $J$  et de perturbation abstraite.

### 5.1.4 Homologie de contact linéarisée

L'homologie de contact cylindrique est une version particulière d'homologie de contact linéarisée. Cette théorie est introduite par Chekanov dans [Che00] pour étudier l'homologie legendrienne des nœuds de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 5.4.** Une *augmentation* est un homomorphisme de  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $(A, \partial) \rightarrow (\mathbb{Q}, 0)$  qui est aussi un morphisme de chaîne.

En particulier, s'il existe une augmentation  $\varepsilon$  de  $(A, \partial)$ , on peut effectuer le changement de coordonnées  $a \mapsto \bar{a} = a - \varepsilon(a)$  afin d'obtenir un nouveau complexe  $(A^\varepsilon, \partial^\varepsilon)$ . On décompose  $\partial^\varepsilon = \partial_1^\varepsilon + \partial_2^\varepsilon + \dots$  en filtrant par la longueur des mots.

**Proposition 5.5** (Bourgeois-Ekholm-Eliashberg). *Pour toute augmentation  $\varepsilon$ , on a  $(\partial_1^\varepsilon)^2 = 0$ .*

Cela nous permet de définir l'homologie de contact linéarisée.

**Définition 5.6.** L'homologie de contact linéarisée, notée  $HC_*^\varepsilon(V, \alpha, J)$  associée à l'augmentation  $\varepsilon$  est l'homologie du complexe engendré par les  $\bar{\gamma}$  avec la différentielle  $\partial_1^\varepsilon$ .

Et on retrouve l'homologie de contact cylindrique.

**Proposition 5.7.** *Sous l'hypothèse 5.1, si  $\alpha$  est non-dégénérée et hypertendue, le morphisme trivial est une augmentation et l'homologie de contact linéarisée associée est l'homologie de contact cylindrique.*

L'intérêt de cette homologie de contact linéarisée est de fournir un invariant de  $\xi$ .

**Théorème 5.8** (Bourgeois-Ekholm-Eliashberg, [CH13]).

— Si  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des augmentations homotopes de  $(A(V, \alpha, J), \partial)$  alors

$$HC^{\varepsilon_1} \approx HC^{\varepsilon_2}.$$

— L'ensemble des homologies de contact linéarisées

$$\{HC^\varepsilon(V, \alpha, J) \text{ pour } \varepsilon \text{ augmentation de } (A(V, \alpha, J), \partial)\}$$

est un invariant de la classe d'isotopie de la structure de contact  $\xi$ .

## 5.2 Croissance de l'homologie de contact

La croissance de l'homologie de contact fournit un invariant qualitatif plus facile à calculer que l'homologie de contact. En effet pour déterminer la croissance, il peut suffire de déterminer le nombre d'orbites de Reeb périodiques et il n'est pas toujours nécessaire de résoudre les équations de Cauchy-Riemann associées. On verra par la suite des conditions qui garantissent une croissance exponentielle de l'homologie de contact.

Ces concepts ont été introduits par Bourgeois et Colin [BC05]. Il existe des analogues en homologie symplectique développés par Seidel et McLean.

### 5.2.1 Taux de croissance

On commence par définir les taux de croissance qui seront utilisés dans la suite.

**Définition 5.9.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On dit que la croissance de  $f$  est *polynomiale de degré  $n$*  s'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $x$  on ait  $f(x) \leq ax^n$ . On dit que la croissance de  $f$  est *exponentielle* s'il existe  $a, b > 0$  tels que pour tout  $x$  on ait  $f(x) \leq ae^{bx}$ .

**Définition 5.10.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Le taux de croissance de  $f$  est

$$\Gamma(f) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\max(f(x), 1))}{\log(x)}.$$

On considère ici une croissance polynomiale. On peut également définir un taux de croissance exponentielle par

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\max(f(x), 1))}{x}.$$

*Remarque 5.11.* Si  $f$  est à croissance exponentielle, on a  $\Gamma(f) = +\infty$ . Si  $f$  est à croissance polynomiale de degré  $n$ , on a  $\Gamma(f) \leq n$ .

### 5.2.2 Croissance de systèmes inductifs

On commence par quelques définitions algébriques.

**Définition 5.12.** Un *système inductif* est une famille d'espaces vectoriels  $(E_x)_{x \in [0, \infty[}$  telle que pour tout  $x_1 \leq x_2$  il existe une application linéaire  $\phi_{x_1, x_2} : E_{x_1} \rightarrow E_{x_2}$  telle que  $\phi_{x_1, x_1} = \text{id}$  et  $\phi_{x_1, x_3} = \phi_{x_2, x_3} \circ \phi_{x_1, x_2}$  pour tout  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

Un système inductif possède une limite inductive notée  $E = \lim_{x \rightarrow \infty} E_x$ . Il existe alors pour tout  $x$  des applications  $\phi_x : E_x \rightarrow E$  telles que  $\phi_{x_1} = \phi_{x_2} \circ \phi_{x_1, x_2}$ .

**Définition 5.13.** En supposant que tous les espaces  $E_x$  sont de dimension finie, le taux de croissance de  $(E_x)$  est

$$\Gamma((E_x)_{x \in [0, \infty[}) = \Gamma(x \mapsto \text{rg}(\phi_x)).$$

De plus on dit que la famille est à croissance polynomiale (respectivement exponentielle) si la fonction  $x \mapsto \text{rg}(\phi_x)$  est à croissance polynomiale (respectivement exponentielle).

*Remarque 5.14.* Pour toute constante strictement positive  $C$ , les systèmes inductifs  $E_x$  et  $E_{Cx}$  ont le même taux de croissance. Un tel résultat serait faux si on avait choisi d'utiliser le taux de croissance exponentielle.

Plus généralement, on peut définir un morphisme entre des espaces inductifs  $(E_x)$  et  $(F_x)$  par la donnée d'une constante  $C > 0$  et d'applications linéaires  $\psi_x : E_x \rightarrow F_{Cx}$  telles que le diagramme suivant commute pour tout  $0 \leq x_1 \leq x_2$  :

$$\begin{array}{ccc} E_{x_1} & \xrightarrow{\psi_{x_1}} & F_{Cx_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{x_2} & \xrightarrow{\psi_{x_2}} & F_{Cx_2} \end{array}$$

De plus deux systèmes inductifs  $(E_x)$  et  $(F_x)$  sont dits isomorphes s'il existe un morphisme  $(C, \psi)$  de  $(E_x)$  dans  $(F_x)$  et un morphisme  $(C', \psi')$  de  $(F_x)$  dans  $(E_x)$  tels que les deux diagrammes suivants commutent pour tout  $x \geq 0$ .

$$\begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{\quad} & E_{CC'x} \\ \searrow \psi_x & & \nearrow \psi'_{C'x} \\ & F_{Cx} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_x & \xrightarrow{\quad} & F_{CC'x} \\ \searrow \psi'_x & & \nearrow \psi_{C'x} \\ & E_{C'x} & \end{array}$$

**Lemme 5.15.** *Deux systèmes inductifs isomorphes ont même taux de croissance.*

### 5.2.3 Croissance d'homologies

Soit  $V$  une variété compacte munie d'une forme de contact  $\alpha$  sans orbite de Reeb contractile. On va construire un système inductif dont la limite sera l'homologie de contact. Pour  $L > 0$ , on définit  $C_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha, J)$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les bonnes orbites périodiques de Reeb de période au plus  $L$ . Comme la différentielle diminue l'action, on obtient une famille de complexes  $(C_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha, J), \partial_{\leq L})_{L>0}$ . On note leur homologie  $HC_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha, J)$ . Les espaces vectoriels obtenus sont de dimension finie. L'inclusion  $i : C_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha, J) \rightarrow C_{\leq L'}^{cyl}(V, \alpha, J)$  pour tout  $L \leq L'$  induit une application linéaire en homologie. La famille  $(HC_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha, J))_{L>0}$  est donc un système inductif et sa limite inductive est  $(HC_*^{cyl}(V, \alpha, J))$ .

On peut faire la même chose pour l'homologie linéarisée. Soit  $V$  une variété compacte munie d'une forme de contact  $\alpha$  non dégénérée telle que  $(C_*(V, \alpha, J))$  admette une augmentation  $\varepsilon$ . Comme la différentielle  $\partial_1^\varepsilon$  diminue l'action sur  $A^\varepsilon(V, \alpha)$ , on définit le système inductif associé de la même façon.

**Définition 5.16.** Les taux de croissance de l'homologie de contact cylindrique et de l'homologie de contact linéarisée sont les taux de croissance des systèmes inductifs associés.

**Proposition 5.17.** Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux formes de contact homotopes et hyper-tendues sur une variété compacte. Alors les systèmes inductifs  $HC_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha_1, J)$  et  $HC_{\leq L}^{cyl}(V, \alpha_2, J)$  sont isomorphes et les homologies de contact cylindriques associées ont le même taux de croissance.

## 5.3 Homologie de contact suturée

L'homologie de contact suturée est une version de l'homologie de contact pour les variétés à bord, introduite par Colin, Ghiggini, Honda et Hutchings [CGHH11].

**Définition 5.18.** Soit  $V$  une variété de dimension 3 de bord  $S$ . On dit que  $V$  est *suturée* s'il existe une *suture*  $\Gamma$  sur  $S$ , c'est-à-dire un ensemble de courbes orientées telle que  $S \setminus \Gamma$  soit la réunion des intérieurs de deux surfaces de bord  $\Gamma$ . Les deux surfaces sont notées  $R_-(\Gamma)$  et  $R_+(\Gamma)$  et telles que les orientations de  $\partial R_+(\Gamma)$  et  $\Gamma$  coïncident tandis que les orientations de  $\partial R_-(\Gamma)$  et  $\Gamma$  sont opposées.

*Remarque 5.19.* Pour  $(V, \xi)$  une variété de contact à bord, si le bord est  $\xi$ -convexe, alors sa courbe de découpage est une suture de  $V$ .

Comme précédemment, le complexe de chaînes de l'homologie est engendré par les bonnes orbites périodiques du champ de Reeb. La différentielle  $\partial$  compte les courbes holomorphes dans la symplectisation avec une structure presque complexe adaptée  $J$ . Une autre façon de définir l'homologie de contact suturée est de *compléter* la variété de contact suturée pour obtenir une variété non compacte sans bord. Avec une structure presque complexe adaptée, l'homologie de contact suturée d'une variété suturée est l'homologie de contact de sa complétion. Pour plus de détails, on peut se référer à [CGHH11].

**Théorème 5.20.** [CGHH11] *Sous l'hypothèse 5.1,*

- $\partial^2 = 0$  ;
- *l'homologie obtenue est indépendante des choix d'équation de contact  $\alpha$ , de structure presque complexe  $J$  et de perturbation abstraite.*

On peut de la même façon définir, toujours sous l'hypothèse 5.1, une homologie de contact suturée cylindrique.

### 5.3.1 Invariant avancé pour les nœuds transverses

Soit une variété  $(V, \xi)$  fermée, de contact, de dimension 3 et un nœud transverse  $T \subset (V, \xi)$ . On peut choisir une forme de contact  $\alpha$  sur  $V$  telle que  $\xi = \ker \alpha$  et  $T$  est une orbite fermée du champ de Reeb  $\mathcal{R}_\alpha$ . Par le théorème de Darboux, on peut choisir  $\alpha$  sur un voisinage tubulaire  $\mathcal{N}(T)$  de  $T$  de la façon suivante : on décrit le voisinage par  $\mathcal{N}(T) = [0, 2] \times \mathbb{S}^1 \times \frac{[0,1]}{0 \sim 1}$  avec les coordonnées  $(r, \theta, t)$  où  $T = \{r = 0\}$ . Dans ce voisinage, on peut choisir  $\alpha$  pour que chaque tore  $\mathcal{T}_s = \{r = s\}$ ,  $s \in ]0, 2]$ , soit feuilleté par des orbites de pente  $p_s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  telle que

- pour  $s < 0,5$ ,  $p_s = k$  où  $k$  est une constante irrationnelle positive ;
- pour  $0,5 < s < 1$ ,  $p_s$  est strictement croissant et fini ;
- $p_1 = \infty$  ;
- pour  $1 < s < 1,5$ ,  $p_s$  est strictement croissant et fini (en partant de  $-\infty$ ) ;
- pour  $1,5 < s < 2$ ,  $p_s$  est strictement décroissant et fini ;
- $p_2 = \infty$ .

Le tore  $\mathcal{T}_1$  est feuilleté par des orbites de pente  $+\infty$ , autrement dit, il est feuilleté par ses méridiens. On peut déformer cette famille d'orbites en seulement deux orbites  $(e_+, h_+)$  où  $e_+$  est une orbite elliptique et  $h_+$  est une orbite hyperbolique positive. De même pour le tore  $\mathcal{T}_2$ , on obtient deux orbites  $(e, h)$ . Pour plus de détails sur cette déformation, on peut consulter [Bou03].

Soit une décomposition en livre ouvert  $(\mathcal{S}, K, \varphi)$  de  $(V, \xi = \ker \alpha)$ . On note  $K = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_n$ . Par le théorème 0.12, on peut supposer que  $K_n = T$ . On suppose que la construction du flot de Reeb au voisinage  $\mathcal{N}(K_i)$  des  $K_i$  est la même que celle précédemment faite pour  $T$ . Sur la figure 5.1, on représente ce qu'il se passe sur la page du livre ouvert proche de la reliure. Les lignes désignent les parties de  $\mathcal{S}$  invariantes par le flot de Reeb.

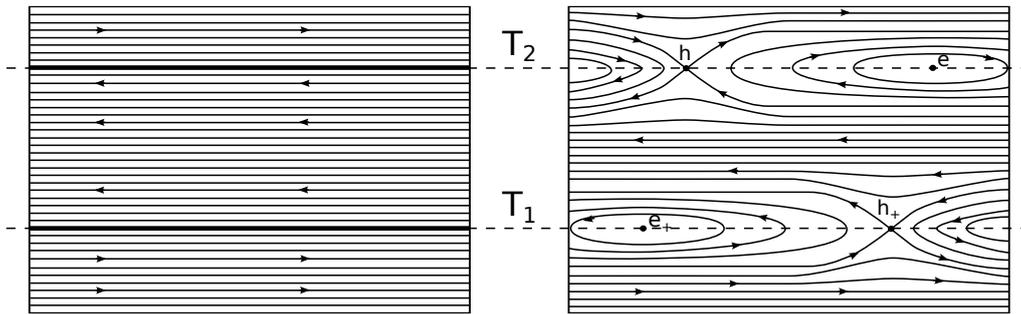


FIGURE 5.1 – Dynamique du champ de Reeb avant et après la perturbation

Pour définir l'homologie de contact cylindrique de  $T$ , on retire le voisinage tubulaire  $\{r < 0, 5\}$  de  $T$  ainsi qu'un disque épaissi contenant l'orbite elliptique  $e_+$ , comme représenté sur la figure 5.2. En effectuant cette extraction, on retire deux orbites de Reeb périodiques : l'orbite elliptique et le nœud transverse.

On obtient ainsi une variété suturée que l'on note  $\tilde{V}$  avec deux sutures. On définit l'homologie de contact cylindrique de  $T$  comme étant l'homologie de contact cylindrique suturée de  $\tilde{V}$ . Pour plus de détails sur la construction d'homologie de contact, on pourra se référer à [Spa14] ou [CGHH11].

## 5.4 Un calcul d'invariant avancé

On démontre ici les théorèmes 0.14 et 0.13.

### 5.4.1 Coefficients de twist de Dehn fractionnaire

Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée compacte à bord  $\partial\mathcal{S}$ . On choisit une métrique hyperbolique sur  $\mathcal{S}$  telle que  $\partial\mathcal{S}$  soit une géodésique (on exclue alors les cas où  $\mathcal{S}$  est un disque ou un anneau). Si  $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  est un difféomorphisme non réductible égale à l'identité sur le bord alors  $h$  est librement homotope à un homéomorphisme  $\psi$  qui

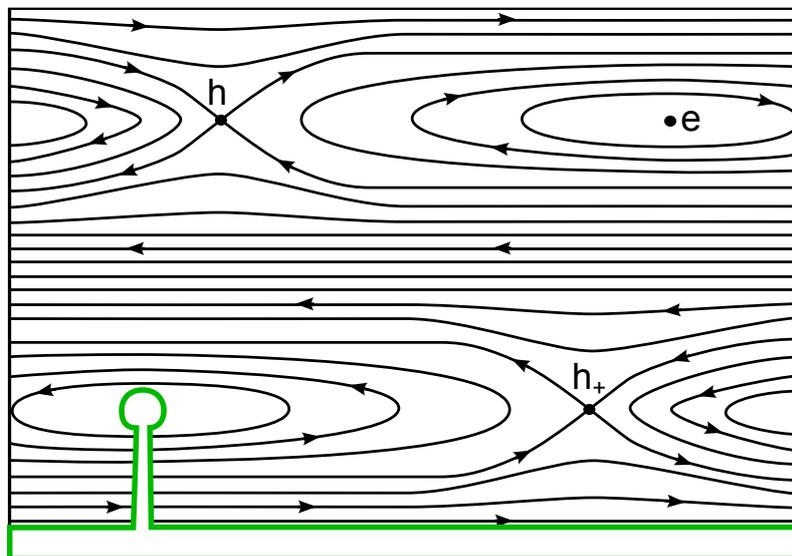


FIGURE 5.2 – Extraction

est soit périodique (c'est-à-dire qu'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $\psi^n = id$ ), soit pseudo-Anosov. On note  $H : \mathcal{S} \times [0, 1]$  cette isotopie libre entre  $h(x) = H(x, 0)$  et  $\psi(x) = H(x, 1)$ . On définit  $\beta : \partial\mathcal{S} \times [0, 1] \rightarrow \partial\mathcal{S} \times [0, 1]$  par  $\beta(x, t) = (H(x, t), t)$ . Maintenant on colle  $\mathcal{S}$  et  $\partial\mathcal{S} \times [0, 1]$  en identifiant  $\partial\mathcal{S}$  et  $\partial\mathcal{S} \times \{1\}$ . On identifie cette union avec  $\mathcal{S}$ , ce qui permet de définir l'homéomorphisme  $\psi \cup \beta$  qui est isotope à  $h$  relativement à  $\partial\mathcal{S}$ . On supposera dans la suite que  $h = \psi \cup \beta$ .

Si on choisit une identification orientée de  $\partial\mathcal{S}$  avec  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on peut définir un homéomorphisme  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui préserve l'orientation de la façon suivante : on relève  $\beta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$  en  $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$  et on pose  $f(x) = \tilde{\beta}(x, 1) - \tilde{\beta}(x, 0) + x$ . On définit  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x) - x)/n$  le *nombre de rotation* de  $f$ . On dit que  $\beta$  est un *twist de Dehn fractionnaire* de coefficient  $c$ . Notons que dans le cas où  $\psi$  est périodique  $c$  est juste  $f(x) - x$  pour  $x$  quelconque.

On décrit maintenant  $c$  dans le cas où  $\psi$  est pseudo-Anosov. On rappelle qu'un homéomorphisme  $\psi$  est pseudo-Anosov s'il existe deux laminations singulières  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  ainsi que deux mesures  $\mu^s$  et  $\mu^u$  vérifiant  $\psi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \tau\mu^s)$  et  $\psi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \tau^{-1}\mu^u)$  pour un réel  $\tau > 1$ . La lamination  $\mathcal{F}^s$  (respectivement  $\mathcal{F}^u$ ) est dite stable (respectivement instable). Chacune de ces deux laminations est minimale (c'est-à-dire qu'elle ne contient pas de sous-lamination), disjointe de  $\partial\mathcal{S}$ , ne possède pas de feuille fermée, ni isolée, et chaque composante de  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}$  est soit un disque (ouvert), soit un anneau (semi-ouvert) contenant une composante de  $\partial\mathcal{S}$ .

Avec cette construction, la composante de  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}^s$  contenant  $\partial\mathcal{S}$  est un anneau  $A$  semi-ouvert. Le bord de sa complétion est constituée de  $n$  géodésiques (infinies)  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ . On suppose qu'on numérote de façon à ce  $i$  augmente (modulo  $n$ ) dans la direction donnée par l'orientation de  $\partial\mathcal{S}$ . Soit  $P_i \subset A$  un géodésique (semi-infinie) qui part de  $\partial\mathcal{S}$ , est perpendiculaire à  $\partial\mathcal{S}$  et est parallèle à  $\lambda_i$  et  $\lambda_{i+1}$  le long de la "pointe bordée" par  $\lambda_i$  et  $\lambda_{i+1}$ . On note  $x_i = P_i \cap \partial\mathcal{S}$ . On peut alors supposer que  $\psi$  agit en permutant les  $P_i$ . En particulier, il existe un entier  $k$  tel que  $\psi : x_i \mapsto x_{i+k}$ . Alors  $c$  est un relèvement de  $k/n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Q}$ .

Dans le cas où le bord de  $\mathcal{S}$  n'est pas connexe, on peut définir de la même façon un coefficient de twist de Dehn fractionnaire pour chaque composante de  $\partial\mathcal{S}$ .

### 5.4.2 Utilisation de livres ouverts

Soit une variété de contact  $(V, \xi)$  donnée par une décomposition en livre ouvert  $(\mathcal{S}, h)$ . Par définition du livre ouvert,  $\mathcal{S}$  est une surface compacte, orientée, de bord non vide et  $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  est un difféomorphisme qui préserve l'orientation et égale à l'identité sur le bord de  $\mathcal{S}$ .

On va maintenant construire le livre ouvert du théorème 0.13.

Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact de dimension 3 et un nœud transverse  $T \subset (V, \xi)$ . Soit  $(K, \mathcal{S}, h)$  la décomposition en livre ouvert donnée par le théorème 0.12. On note  $\partial\mathcal{S} = K = T \cup K_1 \dots \cup K_n$  la reliure du livre ouvert.

Soit  $V'$  la variété à bord suturée obtenue par l'extraction de  $\mathcal{N}(T)$  décrite par la figure 5.2. La décomposition en livre ouvert de  $V'$  devient alors  $(\bigcup_{i=1}^{i=n} K_i, \mathcal{S}', \varphi')$  où  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus (\mathcal{S} \cap \mathcal{N}(T))$  et  $\varphi' = \varphi|_{\mathcal{S}'}$ . On utilise ensuite le théorème 5.21.

**Théorème 5.21.** [CH08] *Soit  $\mathcal{S}$  une surface compacte orientée de bord non vide et  $h$  un difféomorphisme de  $\mathcal{S}$  égal à l'identité sur le bord de  $\mathcal{S}$ . Alors il existe une stabilisation  $(\mathcal{S}', h')$  où  $\partial\mathcal{S}'$  est connexe et  $h'$  est dextrogyre et librement homotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov.*

En appliquant cette stabilisation au livre ouvert  $(\bigcup K_i, \mathcal{S}', \varphi')$ , on obtient une nouvelle décomposition en livre ouvert  $(K'', \mathcal{S}'', \varphi'')$  de  $(V', \xi|_{V'})$  où la reliure  $K''$  est connexe et  $\varphi''$  est librement homotope à un pseudo-Anosov. Ce qui prouve le théorème 0.13.

La notion de twist de Dehn fractionnaire est utilisée par Colin et Honda [CH13] pour étudier l'homologie de contact linéarisé de variétés décomposées en livres ouverts.

**Théorème 5.22.** [CH13] *On suppose que  $\partial\mathcal{S}$  est connexe et  $c = k/n$  est le coefficient de twist de Dehn fractionnaire.*

1. Si  $k \geq 2$  alors tout groupe de chaîne de l'homologie de contact admet une augmentation  $\varepsilon$ . En particulier, l'homologie de contact linéarisée  $HC^\varepsilon(V, \alpha, J)$  est bien définie.
2. Si  $k \geq 3$  alors l'homologie de contact linéarisée  $HC^\varepsilon(V, \alpha, J)$  a une croissance exponentielle. En particulier, elle n'est pas triviale.

On applique maintenant ce théorème à  $V'$  et sa décomposition en livre ouvert  $(K'', \mathcal{S}'', \varphi'')$ . En prenant l'augmentation triviale, on revient à l'homologie de contact cylindrique et on prouve le théorème 0.14.

# Bibliographie

- [AB26] James W Alexander and GB Briggs. On types of knotted curves. *Annals of Mathematics*, pages 562–586, 1926.
- [BC05] Frédéric Bourgeois and Vincent Colin. Homologie de contact des variétés toroïdales. *Geometry & Topology*, pages 299–313, 2005.
- [BEVHM<sup>+</sup>12] Kenneth L Baker, John B Etnyre, Jeremy Van Horn-Morris, et al. Cabling, contact structures and mapping class monoids. *Journal of Differential Geometry*, 90(1) :1–80, 2012.
- [Bou03] Frédéric Bourgeois. A morse-bott approach to contact homology. *Symplectic and contact topology : interactions and perspectives*, pages 55–77, 2003.
- [CGH09] Vincent Colin, Emmanuel Giroux, and Ko Honda. Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, pages 245–293, 2009.
- [CGHH11] Vincent Colin, Paolo Ghiggini, Ko Honda, and Michael Hutchings. Sutures and contact homology i. *Geometry & Topology*, pages 1749–1842, 2011.
- [CH05] Vincent Colin and Ko Honda. Constructions contrôlées de champs de reeb et applications. *Geometry & Topology*, pages 2193–2226, 2005.
- [CH08] Vincent Colin and Ko Honda. Stabilizing the monodromy of an open book decomposition. *Geometriae Dedicata*, pages 95–103, 2008.
- [CH13] Vincent Colin and Ko Honda. Reeb vector fields and open book decompositions. *Journal of the European Mathematical Society*, pages 443–507, 2013.
- [Col97] Vincent Colin. Chirurgies d’indice un et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, pages 659–663, 1997.

- [Col08] Vincent Colin. Livres ouverts en géométrie de contact (d'après emmanuel giroux). *Astérisque*, 311, 2008.
- [EFM01] Judith Epstein, Dmitry Fuchs, and Maike Meyer. Chekanov–eliashberg invariants and transverse approximations of legendrian knots. *Pacific J. Math*, 201(1) :89–106, 2001.
- [EG91] Yakov Eliashberg and Mikhael Gromov. Convex symplectic manifolds. *Several complex variables and complex geometry, Part, 2* :135–162, 1991.
- [EGH10] Yakov Eliashberg, A Givental, and Helmut Hofer. Introduction to symplectic field theory. In *Visions in Mathematics*, pages 560–673. Springer, 2010.
- [EH<sup>+</sup>01] John B Etnyre, Ko Honda, et al. Knots and contact geometry i : torus knots and the figure eight knot. *Journal of Symplectic Geometry*, 1(1) :63–120, 2001.
- [Eli89] Yakov Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Inventiones mathematicae*, 98(3) :623–637, 1989.
- [Eli92] Yakov Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since j. martinet's work. *Annales de l'institut Fourier*, 42(1-2) :165–192, 1992.
- [Etn05] John B Etnyre. Legendrian and transversal knots. *Handbook of knot theory*, pages 105–185, 2005.
- [Etn10] John B Etnyre. On knots in overtwisted contact structures. *arXiv preprint arXiv :1012.3745*, 2010.
- [FT97] Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. Invariants of legendrian and transverse knots in the standard contact space. *Topology*, 36(5) :1025–1053, 1997.
- [Gei08] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [Gir91] Emmanuel Giroux. Convexité en topologie de contact. *Comment. Math. Helv.*, 66(4) :637–677, 1991.
- [Gir92] Emmanuel Giroux. Topologie de contact en dimension 3. *Séminaire Bourbaki*, pages 7–33, 1992.
- [Gir03] Emmanuel Giroux. Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures. *arXiv preprint math 0305129*, 2003.
- [Gra59] John W Gray. Some global properties of contact structures. *Annals of Mathematics*, pages 421–450, 1959.

- [Hon00] Ko Honda. On the classification of tight contact structures i : Lens spaces, solid tori. *and  $T^2 \times I$* , *Geom. Topol*, pages 309–368, 2000.
- [Hon02] Ko Honda. Gluing tight contact structures. *Duke Mathematical Journal*, pages 435–478, 2002.
- [ML97] Sergei Makar-Limanov. Morse surgeries of index 0 on tight manifolds. *preprint*, 436 :455, 1997.
- [Rei27] Kurt Reidemeister. Elementare begründung der knotentheorie. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 5, pages 24–32. Springer, 1927.
- [Sie80] Laurent Siebenmann. *Les bisections expliquent le theoreme de Reidemeister-Singer*. Prepublications mathematiques d’Orsay. Département de mathématiques, 1980.
- [Spa14] Gilberto Spano. *Knot invariants in embedded contact homology*. PhD thesis, Université de Nantes, 2014.
- [Sta78] John Stallings. Constructions of fibred knots and links. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part*, volume 2, pages 55–60, 1978.
- [TW75] William P Thurston and Horst E Winkelnkemper. On the existence of contact forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 345–347, 1975.





# Thèse de Doctorat

**Thomas GUYARD**

**Sur le calcul d'invariants et l'engendrement des nœuds transverses dans les variétés de contact de dimension trois**

**On the calculation of invariants and generation of transverse knots on three-dimensional contact manifolds**

## Résumé

Le sujet de cette thèse est l'étude et le calcul d'invariants classiques et avancés pour les nœuds transverses dans les variétés de contact de dimension trois. Dans une classe d'isotopie lisse de nœuds, on peut construire une infinité de classes d'isotopie legendrienne de nœuds différentes. Colin, Giroux et Honda ont cependant montré que dans la sphère de contact standard de dimension trois, si on fixe la classe d'isotopie lisse et l'invariant de Thurston-Bennequin, ces classes d'isotopie legendrienne sont alors en nombre fini. On étudie dans cette thèse l'équivalent transverse de ce résultat. Dans un premier temps, on montre que la conjecture de finitude transverse se ramène à la finitude des nœuds legendriens non déstabilisables par l'utilisation de translations legendriennes/transverses. Dans un deuxième temps, on démontre que dans une classe d'isotopie lisse de nœuds, on peut obtenir toutes les classes d'isotopies legendriennes de nœuds non déstabilisables, à partir d'un nombre fini d'entre eux et de modifications de Lutz sur un nombre fini de tores. Dans des cas modèles, on fait le lien entre modification de Lutz et présence de rocade. Dans une dernière partie, on étudie l'homologie de contact cylindrique d'un nœud transverse que l'on aura placé dans la reliure d'un livre ouvert avec une monodromie pseudo-Anosov. On prouve alors que pour un coefficient de twist de Dehn fractionnaire suffisamment grand, le taux de croissance de cette homologie est exponentiel.

## Mots clés

Géométrie de contact, Théorie des nœuds, Livre ouvert, Triangulation, Surface branchée, Rocade, Homologie de contact.

## Abstract

We study the properties of classical and advanced invariants for transverse knots in three-dimensional contact manifolds. In a given isotopy class, we can construct infinitely many different Legendrian knots. Colin, Giroux and Honda have proved however that, in the standard contact three-dimensional sphere, if we fix the Thurston-Bennequin-invariant and the knot isotopy class, the Legendrian knots are finite. We investigate a transverse version of this result. In a first part, we show that the transverse finiteness conjecture can be reduced by push-off to the study of the finiteness of Legendrian knots which can't be destabilized. In a second part, we prove that all the Legendrian knot classes in a knot isotopy class can be obtained from a finite set of Legendrian knots with Lutz modifications on a finite number of torus. Then we explain how this generation result can be used to build a bypass in specific simple cases. In the last part, we study the cylindrical contact homology of a transverse knot by putting it in the binding of an open book decomposition with pseudo-Anosov monodromy. Then we prove that in case where the fractional Dehn twist coefficient is large enough, this contact homology has exponential growth.

## Key Words

Contact geometry, Knot theory, Open book, Triangulation, Branched surface, Bypass, Contact homology.