



HAL
open science

Diffusion acoustique dans les lieux de travail

Hugo Dujourdy

► **To cite this version:**

Hugo Dujourdy. Diffusion acoustique dans les lieux de travail. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066115 . tel-01392577

HAL Id: tel-01392577

<https://theses.hal.science/tel-01392577v1>

Submitted on 7 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie

Spécialité :

Acoustique

Présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Pierre et Marie Curie

Diffusion acoustique dans les lieux de travail

Hugo DUJOURDY

email : hugo.dujourdy@gmail.com

Directeur de thèse : M. Jean-Dominique POLACK, Professeur (UPMC)

Co-encadrant : Thomas TOULEMONDE

Institut Jean Le Rond d'Alembert - équipe Lutherie, Acoustique, Musique

Entreprise d'accueil : Impédance

Thèse présentée devant un jury composé de

M. Alain Le Bot	Rapporteur
M. Jean-Jacques Embrechts	Rapporteur
M. Olivier Adam	Examineur
M. Djimédo Kondo	Examineur
M. Brian Katz	Examineur
M. Patrick Chevret	Examineur
M. Thomas Toulemonde	Invité

Résumé

Il y a plus d'un siècle, les conditions de travail ont fortement évolué sous l'influence de l'industrialisation et notamment à partir de nouvelles méthodes de travail du type Tayloriennes. Des bureaux ouverts à l'*Action Office* des années 50, c'est plus de 60% de la population active qui est concernée aujourd'hui en Europe. L'évolution des réglementations, liée à la prise de conscience collective des effets psychosomatiques des nuisances sonores, entraîne l'implication par les maîtrises d'ouvrages de bureaux d'études acoustiques pour la préconisation et la mise en œuvre dans la construction et la réhabilitation des espaces tertiaires. La rencontre d'acteurs scientifiques et industriels a donné lieu à ce travail de thèse, étudiant la propagation de l'énergie acoustique pour des espaces dont une des dimensions est différente des autres.

La méthode se réduit à la conservation du tenseur énergie-impulsion puis à un système d'équations couplées sur l'intensité acoustique et sur la densité d'énergie. C'est un système hyperbolique d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Une méthode d'intégration sur une à deux dimensions de l'espace permet d'introduire les coefficients d'absorption et de diffusion moyens. Nous introduisons le potentiel d'intensité et nous écrivons le système sous la forme d'une équation hyperbolique linéaire aux dérivées partielles du second ordre impliquant la densité d'énergie, l'intensité acoustique ou le potentiel d'intensité sur une ou deux dimensions. Nous proposons une méthode analytique approchée permettant de vérifier les résultats à une dimension.

Pour la conception acoustique des plateaux de bureaux, la modélisation informatique est un outil remarquable souffrant pourtant de limitations restreignant ses applications. Nous résolvons le formalisme introduit dans ce travail par la méthode des différences finies dans le domaine temporel sur une et deux dimensions. Les schémas utilisés sont stables et explicites et peu coûteux en mémoires informatiques. Le fait que nous nous intéressions à une variable énergétique permet de considérer un pas de modélisation spatial important - de l'ordre du mètre - et d'accélérer d'autant les calculs.

Le partenariat industriel nous a notamment permis d'accéder à des espaces de type plateaux de bureaux. Nous comparons les résultats des modélisations avec des mesures *in situ* conduites avec un microphone *SoundField* ST250 permettant l'estimation de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique.

Mots-clés : acoustique architecturale, plateaux de bureaux, tenseur énergie-impulsion, densité d'énergie, intensité acoustique, coefficient de diffusion, mesures *in situ*, microphone *SoundField*, Ambisonics.

Abstract

More than a century ago, working conditions have evolved under the influence of industrialization and especially of new management methods such as the Taylorism. From Open-Spaces to Action Offices in the 1950s, more than 60% of the European working population is concerned today. The evolution of regulations, linked to the collective awareness of the psychosomatic effects of noise, has led clients to request the involvement of acoustical consultants for giving recommendations and supervising their implementation in constructions and rehabilitations of office spaces. This is why scientific and industrial stakeholders joined forces for this thesis dedicated to the propagation of sound energy within rooms characterized by one dimension different from the others.

The method developed in this thesis reduces the conservation of the energy-stress tensor to a system of coupled equations for the sound intensity and the sound energy density. It is a hyperbolic system of linear, partial differential equations of first order. Integrating this system on one or two space dimensions leads to the introduction of the mean absorption and diffusion coefficients. We then introduce an intensity potential and write the system in the form of a linear hyperbolic equation involving partial derivatives of second order for the energy density, the sound intensity, or the intensity potential in one or two dimensions. We also propose an analytical approximated method to verify the results in one dimension.

For the acoustic design of open-space offices, computer modelling is an outstanding tool. Yet limitations restrict its applications. We solve the equations introduced in this work by the finite-difference time-domain method in the one- and two-dimensional cases. We use stable and explicit schemes that require little computer memory. Considering energy variables allows the use of large spatial steps - of the order of the metre - and accelerates the calculations.

The industrial partnership notably gave us access to open-space offices. We compare the results of the modelling with in situ measurements carried out with a SoundField ST250 microphone that makes it possible to estimate the sound energy density and the sound intensity.

Keywords : Architectural Acoustics, open-offices, energy density, sound intensity, diffusion coefficient, energy-stress tensor, in situ measurements, SoundField microphone, Ambisonics.

Rien n'est plus fort qu'une idée dont l'heure est venue.

Victor Hugo

A mes parents,
Et à Emeline

Remerciements

Je remercie mes encadrants de thèse Jean-Dominique Polack et Thomas Toulemonde. Je remercie les rapporteurs et les examinateurs pour la relecture de mon manuscrit et les questions soulevées lors de la soutenance. Je remercie également Alain Mayerowitz, Marc Louwers et Hamid Saiha, à la tête d'Impédance, d'avoir accepté de participer au financement de ce travail. J'espère une continuité des thèses chez Impédance, mais aussi dans toute structure aussi petite soit elle.

Je remercie chaleureusement mes collègues d'Impédance et du laboratoire. Je remercie notamment Pascal, Laurent et Catherine du labo, et Christelle, Nathalie et Sylvie d'Impédance, de m'avoir aidé du point de vue technique, informatique et administratif. Il est à noter que les doctorants n'ayant pas de statut, il est toujours difficile de gérer les Ovni. Vivement que cela change ! En attendant, merci à eux d'avoir su considérer mon expérience avec attachement. Au-delà des affres professionnel, c'est leur gentillesse qui m'a touché. Merci particulièrement à Laurent, une nouvelle fois, pour l'aide précieuse qu'il a su me donner tout au long de mon parcours. Je remercie enfin Hugo et Baptiste d'avoir contribué à la thèse, et de m'avoir de fait soutenu dans mes travaux. Je remercie aussi Michèle Castellango, Daniele Dubois, Bian Katz, Ning Xiang, Regis Marchiano, Joël Frelat, Cedric Foy, Angelo Farina et Patrick Cellar pour nos divers échanges m'ayant permis de prendre du recul sur mon travail. Il n'y en a jamais assez car ce sont des points d'étapes, permettant de synthétiser le travail et de le concrétiser. Je remercie enfin les permanents de l'équipe LAM, qui font un travail passionnant, et qui le font avec plaisir, cela va sans dire, communicatif.

Le travail c'est aussi les collègues. Et mes collègues, c'est surtout Camille, Augustin et Clara, surtout Ophélie, Noémie, Catherine, Antoine, Fabien, Maxime, Raphaël et Nicolas, et aussi Benoit, Sylvain, Camille, Henri, Cassandre, Arthur P., Arthur G., Renée, Juan-Pablo, Timothy, Louis M., Lionel, Samuel, Antoine, Laure, Alexandre, Cedric, Yosr et Louis, et aussi Renan, Camille, Serge, Sylvain, Ralph, Virginie, Thomas A., Bertrand, Gaetan, Claude, Amaury, Emilie, Caroline, Thomas S., Romain et Mathieu. Ils m'ont soutenu, ils m'ont supporté, le bout de chemin ensemble nous lie à jamais.

Et puis il n'y a pas que le travail. Je remercie du fond du cœur les protagonistes de ma vie qui m'ont de près ou de loin permis de faire ce travail enrichissant, qui m'ont soutenu. A commencer par mes parents, Pascale et Alain, et mes sœurs, Elsa et Rose, et sans Emeline, tout cela n'aurait pas été ! Je remercie particulièrement Philippe, pour son aide dans ma

recherche de financement. Je remercie aussi Aline, Marion, Jade, Laura et Anthony. Merci à Françoise pour ses conseils, à Estelle, Djola et Isai. Enfin, je pense à Catherine, Jed et Charles qui nous a quitté. A Monique et Miguel. Je pense également très fort à Jean, Marcel, Claude et Renée, mes grands parents. J'embrasse enfin toute la famille de Mimine, qui m'a si bien accueilli, et m'a aidé à de nombreuses reprises pour devenir doc.

Merci à tous mes amis, pour qui je ressens une grande affection et qui me soutiennent à chaque instant. Je pense notamment à Adrien, Noémie, Titi, Greg, Pich et Bubu. A mes colloc : Dave, Emilie, Titou, Charles, Nico, Vivi, Victoria, Damien et Amanda. A Isa, Ben, Alex, Pierro, Aika, Audrey, Leo, Nico et Wani. A Greenstuff, c'est à dire à Pierro, Charles, Antoine, Chicot, Thibault, mais aussi à Emeline, Clairette, Philou, Kiki, Gaetan, Popo et Julien. Enfin, merci à Dimon, mon volontaire, Fabio, mon mentor, Gilles, mon prof de Sax, et Julie G., ma meilleure copine par alliance.

A tous ceux que j'ai oublié, voici mon mail : je vous dois un coup.

Table des figures

1.1	Bureau des Services de Poste, Télégraphes et Téléphone, 1895-1899.	2
1.2	Bureau général de Armour & Co., Chicago, 1900.	3
1.3	Sales Department, General Office, Swift & Co., Chicago, 1910.	3
1.4	Curtis Publishing Co., Philadelphia, 1912.	3
1.5	Order Entry Department, Sears, Roebuck & Co., Chicago, 1913.	4
1.6	Bureau, U.K. Les dactylographes utilisent une machine à écrire Bar-Lock. . . .	4
1.7	Machines à écrire.	4
1.8	Outils de télécommunication.	5
1.9	Un bureau ouvert dans les années 50. <i>Underwood and UnderwoodCorbis</i>	5
1.10	Première utilisation de l'action office de Miller, 1960.	6
1.11	Cubicles : extrait de « Play Time » de Jacques Tati, 1967.	6
1.12	Durées limites d'exposition.	10
2.1	Amphithéâtre d'El Jem.	16
2.2	Modes axiaux entre parois planes parallèles rigides.	19
2.3	Recouvrement des modes.	19
2.4	Système à une entrée et une sortie.	21
2.5	Exemple de 3 réponses impulsionnelles.	22
2.6	Décomposition théorique de la réponse impulsionnelle en 3 phases.	24
2.7	Schéma des réflexions spéculaires et diffuses.	25
2.8	Mesure du coefficient de dispersion ISO.	26
2.9	Évolution temporelle de l'intensité sonore.	29
2.10	Représentation schématique du mouvement d'une particule sonore.	31
2.11	Densité d'énergie en fonction du temps.	33
2.12	Diagramme des différentes approches de modélisation en acoustique des salles. .	35

2.13	Montages tétraédriques.	38
2.14	Composantes directionnelles du B-format.	39
2.15	Représentation des harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre 3	41
3.1	Schéma d'un tronçon de câbles de lignes de transmission.	61
3.2	Circuit électrique schématisant un tronçon de ligne de transmission.	61
3.3	Tronçons élémentaires d'une ligne de transmission.	62
4.1	Microphone ST250 dans la chambre anéchoïque du LNE (2013).	72
4.2	Mesure de la réponse impulsionnelle dans le théâtre du Châtelet (Paris,2009).	73
4.3	Trois types de signaux d'excitations déterministes.	74
4.4	sinus glissant exponentiel, filtré et inverse.	76
4.5	Réponses impulsionnelles d'un bureau ouvert.	78
4.6	Dispositif d'émission.	79
4.7	Fonction de transfert de la source <i>Outline</i> GRS.	80
4.8	Directivité de la source <i>Outline</i> GRS dans le plan $\vec{x}\vec{y}$	81
4.9	Mesure de la directivité du canal X du microphone <i>SoundField</i> ST250.	83
4.10	Réponse fréquentielle du microphone <i>SoundField</i> ST250.	84
4.11	Réponse fréquentielle du microphone <i>SoundField</i> ST250.	85
4.12	Directivité du canal X du microphone <i>SoundField</i> ST250.	87
4.13	Directivité du canal Y du microphone <i>SoundField</i> ST250.	88
4.14	Directivité du canal Z du microphone <i>SoundField</i> ST250.	89
4.15	Directivité du canal X du microphone <i>SoundField</i> MK-V.	90
4.16	Directivité du canal Y du microphone <i>SoundField</i> MK-V.	91
4.17	Directivité du canal Z du microphone <i>SoundField</i> MK-V.	92
4.18	Rapport entre canaux du microphone ST250 : canal X.	93
4.19	Rapport entre canaux du microphone ST250 : canal Y.	94
4.20	Rapport entre canaux du microphone ST250 : canal Z.	95
5.1	Schéma numéro 1 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.	103
5.2	Schéma numéro 2 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.	106
5.3	Schéma numéro 3 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.	109
5.4	Schéma numéro 4 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.	111
5.5	Schéma numéro 5 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.	112

5.6	Schéma numéro 6 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.	113
5.7	Schéma numéro 3 avec conditions limites.	116
5.8	Schéma de la simulation FDTD de l'EG en une dimension.	121
5.9	Schéma de la simulation FDTD du système d'EC en deux dimensions.	129
5.10	Schéma de la simulation FDTD de l'EG en deux dimensions.	135
6.1	Plan de situation du laboratoire.	145
6.2	Coefficients α et β mesurés au centre du couloir du laboratoire.	146
6.3	Coefficients α et β mesurés proches de la paroi latérale du couloir du laboratoire.	146
6.4	Coefficients α et β mesurés proches du plafond du couloir du laboratoire.	147
6.5	Coefficients α et β en fonction de la fenêtre d'intégration (paroi latérale).	148
6.6	Coefficients α et β en fonction de la fenêtre d'intégration (plafond).	149
6.7	Coefficients α (en haut) et β (en bas) à <i>Ovalie</i>	150
6.8	Photo de l'espace de bureaux <i>Ovalie</i>	151
6.9	Treillis d'une modélisation 2D.	152
6.10	Exemple de géométrie : <i>Ovalie</i>	154
6.11	Comparaison du L_{eq} des modèles EC et EG.	155
6.12	Niveaux de décroissance temporelle des modèles EG et analytique.	156
6.13	Niveaux L_{eq} en fonction du pas de discrétisation	158
6.14	Dissipation numérique due aux dérivées paires dans l'erreur de troncature.	160
6.15	Dispersion numérique due aux dérivées impaires dans l'erreur de troncature.	160
6.16	Niveau de décroissance spatiale 1D.	161
6.17	Niveau de décroissance spatiale 2D.	162
6.18	Niveau de décroissance temporelle 1D à $4m$ de la source.	163
6.19	Niveau de décroissance temporelle 2D à $4m$ de la source.	164
6.20	Niveau de décroissance temporelle 1D à $16m$ de la source.	165
6.21	Niveau de décroissance temporelle 2D à $16m$ de la source.	166
6.22	Comparaison avec la mesure des décroissances 1D à $4m$ de la source.	168
6.23	Comparaison avec la mesure des décroissances 1D à $16m$ de la source.	169
6.24	Comparaison des décroissances temporelles et spatiales à <i>Ovalie</i>	170
6.25	Comparaison des décroissances temporelles et spatiales à <i>Kaleido</i>	171
6.26	Comparaison des décroissances temporelles et spatiales à <i>Nexity</i>	172
1	Plan des bureaux à <i>Kaleido</i>	190

2	Photographie du plateau de bureaux <i>Kaleido</i>	191
3	Plan des bureaux à <i>Ovalie</i>	192
4	Photographie du plateau de bureaux <i>Ovalie</i>	193
5	Plan des bureaux à <i>Nexity</i>	194
6	Photographie du plateau de bureaux <i>Nexity</i>	195
7	Plan du couloir du laboratoire.	196
8	Photographie du couloir du laboratoire.	196

Liste des tableaux

5.1	Valeurs minimum de Δt pour respecter la condition de stabilité de l'EG 1D. . .	125
5.2	Valeurs minimum de Δt pour respecter la condition de stabilité de l'EG 2D. . .	139
6.1	Comparaison des résultats de la méthode de recalage.	173

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	xi
Liste des figures	xiv
Liste des tableaux	xix
Table des matières	xxi
1 Introduction Générale	1
1.1 La problématique acoustique en plateau de bureaux	2
1.2 Objet de la thèse	11
1.3 Organisation du manuscrit	12
2 État des Connaissances	15
2.1 Introduction	15
2.2 Bref historique de l'acoustique	16
2.3 Les approches de l'acoustique des salles	17
2.3.1 Le son dans une salle	17
2.3.2 Approche ondulatoire	17
2.3.3 Approche géométrique	20
2.3.4 Approche statistique	27
2.3.5 Approche particulière	30
2.3.6 Approche énergétique	34

2.4	Modélisation d'acoustique architecturale	35
2.4.1	Les méthodes modales	35
2.4.2	Les méthodes géométriques	36
2.4.3	Bilan sur les techniques de modélisation	37
2.5	Métrologie : le microphone <i>SoundField</i>	37
2.6	Conclusion	42
3	Théorie	43
3.1	Introduction	43
3.2	Équation d'onde	44
3.3	Conservation de la densité d'énergie	44
3.4	Conservation de l'intensité acoustique	45
3.5	Équations couplées	45
3.6	Fonction de distribution de l'énergie en harmoniques sphériques	46
3.7	Tenseur énergie-impulsion	50
3.7.1	Cas trois dimensions	50
3.7.2	Cas deux dimensions	51
3.7.3	Cas une dimension	52
3.8	Réduction dimensionnelle par une méthode d'intégration	52
3.8.1	Intégration en une dimension	53
3.8.2	Intégration en deux dimensions	56
3.9	Équation générale	60
3.9.1	Équation générale des Télégraphistes	61
3.9.2	Équation générale sur la densité d'énergie et sur l'intensité acoustique	63
3.9.3	Introduction du potentiel d'intensité	64
3.10	Conditions limites	65
3.10.1	Conditions limites pour l'équation couplée	65
3.10.2	Conditions limites pour l'équation générale	65
3.11	Modèle analytique	66
3.11.1	Hypothèse sur les équations couplées	66
3.12	Conclusion	69
4	Mesures et Instrumentation	71
4.1	Introduction	71

4.2	Techniques de mesure	73
4.2.1	Signal d'excitation <i>in situ</i>	73
4.2.2	Post-traitement des mesures	76
4.3	Matériel de mesure <i>in situ</i>	78
4.3.1	Source d'émission <i>Outline</i> GRS	78
4.3.2	Microphone <i>SoundField</i> ST250	80
4.4	Campagnes de mesures <i>in situ</i>	96
4.5	Conclusion	97
5	Modélisation par la méthode des différences finies	99
5.1	Introduction	99
5.2	Modèle numérique en une dimension pour le système d'équations couplées . . .	100
5.2.1	Schéma numéro 1	101
5.2.2	Schéma numéro 2	104
5.2.3	Schéma numéro 3	107
5.2.4	Schéma numéro 4	109
5.2.5	Discussion et choix du schéma	111
5.2.6	Conditions limites	113
5.2.7	Étude de stabilité	116
5.3	Modèle numérique en une dimension pour l'équation générale	118
5.3.1	Schéma	118
5.3.2	Conditions limites	121
5.3.3	Étude de stabilité	122
5.4	Modèle numérique en deux dimensions pour le système d'équations couplées . .	126
5.4.1	Schémas	127
5.4.2	Conditions limites	129
5.4.3	Étude de stabilité	131
5.5	Modèle numérique en deux dimensions pour l'équation générale	132
5.5.1	Schémas	132
5.5.2	Conditions limites	135
5.5.3	Étude de stabilité	137
5.6	Conclusion	140

6	Implémentation et vérification des modèles	141
6.1	Introduction	141
6.2	Etude des coefficients d'absorption et de diffusion	142
6.2.1	Estimation des coefficients	142
6.3	Validation des modèles numériques	151
6.3.1	Conception des géométries	151
6.3.2	Comparaison des modèles - cas une dimension	154
6.3.3	Comparaison du modèle à une dimension avec le modèle analytique	156
6.3.4	Étude des variations des pas de discrétisation	157
6.3.5	Étude des modèles aux faibles valeurs des coefficients	158
6.4	Résultats des modèles numériques	160
6.4.1	Recalage	166
6.4.2	Recalage des modèles avec des mesures <i>in situ</i>	166
6.5	Conclusion	174
7	Conclusion Générale	175
7.1	Conclusion	175
7.2	Perspectives	177
7.2.1	Perspectives théoriques	177
7.2.2	Perspectives métrologiques	177
7.2.3	Perspectives numériques	177
7.2.4	Définition et mesure du coefficient de diffusion	178
7.2.5	Perspectives générales	178
	Bibliographie	181
	Annexes	189
A	Plan des salles mesurées	190
A.1	Kaleido	190
A.2	Ovalie	192
A.3	Nexity	194
A.4	Couloir du laboratoire	196
B	Calcul des termes quadripolaires	197

Chapitre 1

Introduction Générale

Ce travail de thèse porte sur la définition et la mesure de la diffusion acoustique de surface en espace clos. Il s'intitule « Diffusion acoustique dans les espaces de travail ». Nous proposons une description du flux d'énergie qui se réduit à la conservation du tenseur énergie-impulsion. Nous nous basons sur les travaux de Morse et Ingard [Morse and Ingard, 1968] introduisant les équations couplées de la conservation de l'énergie du champ acoustique. Ces équations permettent, par une méthode d'intégration sur les parois du domaine, de définir et de prendre en compte des caractéristiques acoustiques moyennes : le coefficient de diffusion, le coefficient d'absorption et le libre parcours moyen.

La méthode est adaptée aux espaces dont une dimension est très grande par rapport aux autres, comme les plateaux de bureaux. Les outils développés permettent la prise en compte de la diffusion moyenne pour la préconisation acoustique. Le partenariat industriel de la thèse nous a permis d'effectuer des campagnes de mesures *in situ* afin de valider les modèles informatiques. Nous montrons que la décroissance temporelle ne dépend pas du coefficient de diffusion, mais que ce dernier influe sur la décroissance spatiale. Les résultats présentés au Chap. 6 permettent de recalibrer les modèles informatiques développés au Chap. 5 et d'en déduire les coefficients de diffusion et d'absorption. D'autre part, nous estimons les coefficients par un calcul basé sur les rapports entre les termes énergétiques du tenseur énergie-impulsion développé au Chap. 3. Les termes du tenseur sont relevés *in situ* à partir des réponses impulsionnelles mesurées au format B Ambisonics dans des espaces de bureaux et avec des instruments et techniques présentés au Chap. 4.

1.1. LA PROBLÉMATIQUE ACOUSTIQUE EN PLATEAU DE BUREAUX

Le constat

En 2009, les actifs Français de plus de 15 ans consacrent par semaine 40:50 pour les hommes et 33:29 pour les femmes à des activités professionnelles [Ricroch and Roumier, 2011]. En 2014, 77% des actifs français déclarent se rendre tous les jours au bureau. En 2013, 55% déclarent travailler dans un bureau collectif. Cette proportion monte à 70% aux États-Unis et 73% au Royaume-Uni. A l'inverse, 33% déclarent travailler dans un bureau individuel : c'est 7% de moins que trois ans plus tôt [Actineo, 2014, Bedeau et al., 2011].

Cet état de fait montre l'évolution rapide des conditions de travail en ce début de XX^e siècle en Occident. Cette évolution est-elle généralisée à travers le monde? Combien de personnes sont concernées? Pourquoi de tels espaces et quel ressenti pour les utilisateurs?

Bref historique

L'histoire culturelle du développement du bureau comme lieu de travail commence par l'image de l'employé de bureau, introduite par Walt Whitman au milieu du XIX^e siècle.



FIGURE 1.1 – Bureau des Services de Poste, Télégraphes et Téléphone, 1895-1899.



FIGURE 1.2 – Bureau général de Armour & Co., Chicago, 1900.

Un peu plus tard, Taylor crée le rôle de manager *en séparant la connaissance des tâches basiques* [Saval, 2015]. Suivant l'exemple des usines, les entreprises commencent à aligner les bureaux en rangées de travailleurs (voir Fig. 1.1 à 1.5).



FIGURE 1.3 – Sales Department, General Office, Swift & Co., Chicago, 1910.



FIGURE 1.4 – Division des correspondances, Department de la circulation, Curtis Publishing Co., Philadelphia, 1912. Cyrus H. K. Curtis a démarré l'édition à Philadelphie en 1876 publia pour la première fois *The Ladies Home Journal* en 1883. Les travailleurs, des femmes, utilisent des machines à transcrire et des machines à écrire.

L'apparition des espaces collectifs au bureau est indissociable de l'émergence de la grande entreprise capitaliste à la fin du XIX^e siècle. En France, on passe de 800 000 employés en 1866 à plus de 3 millions en 1936 [Gardey, 2001].

1.1. La problématique acoustique en plateau de bureaux



FIGURE 1.5 – Order Entry Department, Sears, Roebuck & Co., Chicago, 1913. Les travailleurs utilisent une machine à écrire Oliver.

Ceci est lié à l'augmentation de la taille des entreprises et à la managérialisation [Chandler, 1989]. Le développement de nouvelles technologies (téléphones, télégraphes, machines à écrire etc. voir Fig. 1.6, 1.7 et 1.8) favorisant le travail de bureau et le contrôle à distance [Yates, 1989] en est aussi la cause.



FIGURE 1.6 – Bureau, U.K. Les dactylographes utilisent une machine à écrire Bar-Lock.



FIGURE 1.7 – Machines à écrire. De gauche à droite : George-Philips télégraphe imprimeur (1859), Hammond (USA,1890), Sholes & Glidden (USA,1975), The Noiseless (USA, 1921), Underwood n° 5 (USA, 1925), Ultratflat (France,1953), Underwood Electric (USA, 1953).



FIGURE 1.8 – Outils de télécommunication. De gauche à droite : Stromberg & Carlson Candlestick téléphone (1895-1896), Intercom Dictograph Products Company Inc, (USA, 1907-1913), Femme sur un Switchboard (1904).

Les espaces de bureaux ouverts sont nés dans les années 1890 aux États-Unis [Zunz, 1991] avec la construction de bâtiments spécifiques aux bureaux et dans une optique taylorienne [Labardin, 2011] : « *optimisation du rendement, standardisation des équipements, concentration du personnel dans un espace banalisé appelé généralement bureau ouvert* » [Fischer, 1990], avec une volonté de surveillance assumée [Ponthière, 1935]. Lorsqu'on parle des bureaux ouverts, c'est à tort le concept des frères Wolfgang et Eberhard Schnelle dont il est question, le « *Bürolandschaft* » en allemand, ou *bureau paysager*, inventé dans les années 50 (voir Fig. 1.9).



FIGURE 1.9 – Un bureau ouvert dans les années 50. *Underwood and UnderwoodCorbis*.

Cette invention est à mettre en parallèle avec celle de Robert Propst et du système *Action Office* (voir Fig. 1.10). Ce système devait libérer les travailleurs en mettant l'accent sur le mouvement, mais a conduit au *Cubicle* ou « bureau à cloison » (voir Fig. 1.11). Son inventeur

en parlait en termes peu flatteurs de « monolithic insanity ».



FIGURE 1.10 – Première utilisation de l’action office de Miller, 1960.



FIGURE 1.11 – Cubicles : M. Hulot observe un bureau à cloison dans « Play Time » de Jacques Tati, 1967.

En 2012, Frank Gehry, architecte de renommée mondiale, a dessiné les plans du campus de Facebook aux Etats-Unis. Celui-ci accueillera le plus grand bureau en open-space de la planète : 2800 travailleurs dans la même pièce.

Une définition des open-spaces

L’open-space peut être défini comme « *un vaste espace de travail ouvert, la plupart du temps fractionné par des meubles de rangement ou des panneaux plus ou moins hauts* » [Iribarne, 2012]. D’après Labardin [Labardin, 2011] il existe différentes définitions de bureaux en open-space :

- les bureaux ouverts, de conception taylorienne, améliorant la productivité, diminuant les coûts, années 1890
- les bureaux paysagers, décloisonnés afin de faciliter la communication, années 1960
- les bureaux semi-cloisonnés

Dans la pratique ces définitions génériques se mélangent dans un seul et même espace en fonction de son usage, devenu interchangeable depuis la fin du XX^e siècle.

Inconvénients des open-spaces

En 2015, 57% des actifs se déclarent gênés par des nuisances sonores dues à des personnes et 41% dues à des appareils [Bath et al., 2015]. Les autres inconvénients de l'open-space sont la température, la climatisation et l'éclairage [Iribarne, 2013]. La production scientifique montre que la priorité des occupants d'open space est le niveau de bruit tandis que la présence de zone de travail individuel est identifié comme le plus important indice de satisfaction des utilisateurs [Kim and de Dear, 2013]. Au travail, la qualité de vie est citée comme le deuxième élément le plus important. L'absence de bruit est le 3^e contributeur de cette qualité. Elle figure parmi les critères importants et peu satisfaisants de la qualité de vie au travail [Bedeau and Foulquier, 2013]. L'exposition au bruit en open-space est présentée comme une cause de maladie de longue durée pour les hommes [Kristiansen et al., 2008] et de forts taux d'hormones de stress [Evans and Johnson, 2000], tandis que l'exposition aux bruits en intérieur est responsable de handicap auditif, d'hypertension, d'irritation et de troubles du sommeil [Passchier-Vermeer and Passchier, 2000].

Source de perturbation et de fatigue, « *la trop grande proximité qu'implique la réduction de la surface par salarié entraîne des phénomènes de stress qui affectent là aussi la performance des salariés* » [Labardin, 2011]. Mise en concurrence, sentiment de surveillance. Des Isnard et Zuber [Des Isnards and Zuber, 2008] expliquent que chaque salarié surveille ses collègues. Ils intériorisent leurs souffrances et risquent par la suite de souffrir de stress, de surmenage et de burn-out.

Évolution des plateaux de bureaux

Le bureau en open-space semble engendrer une dégradation des conditions de travail. En quatre ans le nombre de bureaux collectifs de plus de 4 personnes a beaucoup augmenté, mais reste minoritaire (moins de 2 actifs sur 10 en 2015). Le nombre croissant de ce type

d'espace pose question. Les entreprises migrent vers les plateaux de bureaux ouverts mais réduisent le nombre de salariés travaillant dans un même espace décloisonné. L'importance de prendre en compte ces aspects lors de la programmation acoustique d'un bureau en open-space apparaît clairement. Si le bureau ouvert est un lieu de travail se généralisant, il existe un besoin pressant de réglementation concernant la prise en compte de l'acoustique lors de la conception [Actineo, 2015].

Évolution des réglementations

Depuis un quart de siècle, le bruit est devenu une des premières sources de pollution. Le développement des moyens de transport et notamment la circulation routière est citée par les enquêtes comme la première cause de nuisance sonore. Durant la décennie 1980, des rapports ou missions sur le bruit sont confiés à des experts par les politiques, conduisant le Conseil des ministres du 11 avril 1984 à décider d'un « plan de rattrapage des points noirs du bruit ». En 1998, une de ces missions recensait 3000 *points noirs du bruit* et évaluait à 300 000 le nombre de français qui souffrent de troubles du sommeil dus au bruit nocturne. Cette prise de conscience de la nuisance que représente le bruit a permis la mise en place de toute une gamme de textes réglementaires de plus en plus exigeants. Entre 1970 et 1996, la construction des logements est soumise à la réglementation acoustique de l'arrêté du 14 juin 1969. En 1972, le label « Confort Acoustique » est créé. L'arrêté du 6 octobre 1978 relatif à l'isolement acoustique des bâtiments d'habitation contre les bruits de l'espace extérieur vient compléter cette première réglementation en matière de bruits des transports aériens et terrestres. La première loi « Bruit » est édictée par les pouvoirs publics français le 31 décembre 1992. La nouvelle réglementation acoustique (NRA), instituée par l'arrêté du 28 octobre 1994, sera complétée par des arrêtés, normes et décrets couvrant des activités larges allant du résidentiel aux locaux d'enseignement, en passant par les lieux de travail.

La réglementation acoustique est en grande partie responsable de la prise en compte des contraintes liées à l'acoustique. En France, le maître d'ouvrage d'un immeuble d'habitation s'engage, dans son dossier de demande de permis de construire, à respecter les règles générales de construction contenues dans le Code de la Construction et de l'Habitation. Alors que l'amélioration de l'acoustique est plutôt considérée comme un confort et classée au second rang des priorités dans la construction, de nombreux textes présentent le bruit comme la principale cause de nuisance. On constate que la prise en compte de l'acoustique lors de la construction

d'un bâtiment ne se fait souvent que sous la contrainte d'une réglementation. Son évolution est une nécessité.

A partir de 2013, le décret du 30 mai 2011 [Legifrance, 2011] et l'arrêté du 27 novembre 2012 [Legifrance, 2012] rendent obligatoire une attestation de prise en compte de la réglementation acoustique à établir lors de l'achèvement des travaux de bâtiments d'habitation neufs, sauf maisons individuelles. Cette attestation peut être rédigée par un bureau d'étude ou un contrôleur technique.

L'évolution de la réglementation concerne les contrôles plus que les exigences et paraît faible comparée à l'importance des nuisances acoustiques.

Réglementation des lieux de travail

Dans le cas des locaux de travail, un décret du 20 septembre 1988 introduit dans le code du travail une obligation de limiter la réverbération et la transmission du bruit dans les locaux de travail où doivent être installés des machines à un niveau d'exposition sonore quotidienne supérieur à $85dB(A)$. Néanmoins, la réglementation ne précise ni méthode de mesurage ni valeur minimale de réduction de la propagation. Le texte stipule que l'employeur est tenu de réduire le bruit au niveau le plus bas raisonnablement possible compte tenu de l'état des techniques.

L'arrêté du 30 août 1990 relatif à la correction acoustique des locaux de travail et applicable à l'aménagement des locaux de travail fixe les caractéristiques minimales que doivent présenter les locaux de façon à réduire la réverbération du bruit sur les parois. L'article fixe des objectifs de décroissance du niveau sonore par doublement de distance en fonction de la surface du local.

Des groupes de travaux sont créés afin de travailler sur la normalisation des prévisions des niveaux sonores dans les locaux de travail. C'est le cas de la commission S 30 D, créée en 1990 puis étendue à tous les sujets traités au niveau international. S'en suit l'élaboration de la norme NF EN ISO 14257 [AFNOR, 2002a] sur la performance acoustique des locaux de travail, la révision de la norme NF S 31-084 [AFNOR, 2002b] sur la méthode de mesurage des niveaux sonores en milieu de travail. La Fig. 1.12 donne les durées limites d'exposition

prévues en fonction de la durée d'exposition sonore continue des travailleurs.

Bureaux d'études acoustiques

Les bureaux d'études acoustiques ont une mission de conseil auprès de l'équipe de maîtrise d'œuvre. Leur développement dans la décennie 1980 est étroitement liée aux réglementations. Ces textes imposent aux constructeurs d'intégrer dans leurs études des objectifs acoustiques. Depuis l'arrêté du 14 juin 1969 qui soumet la construction des logements à la réglementation acoustique, les exigences n'ont pas cessé de s'accroître et de s'étendre. L'évolution des textes en France va amener les bureaux d'études acoustiques sur de nouveaux marchés comme l'environnement et l'urbanisme, les transports et le bruit au travail. Dans un premier temps les objectifs étaient liés à la santé de manière directe car de nombreux travailleurs étaient exposés à des niveaux sonores intenses responsables de pertes auditives majeures. Plus tard les aspects de gêne au travail ont été pris en compte, amenant les bureaux d'études acoustiques à travailler sur les espaces de travail en open-space.

Niveau de pression acoustique continu équivalent L_{eq} mesuré en dB(A)	Durée journalière d'exposition conduisant à une dose sonore reçue équivalente à celle d'une exposition à un niveau de 85 dB(A)
85	8 h
88	4 h
91	2 h
94	1 h
97	30 mn
100	15 mn
103	7 mn 30 s
106	3 mn 45 s
109	1 mn 52 s
112	56,25 s
115	28,13 s
118	14,06 s
121	7,03 s
124	3,52 s
127	1,76 s
130	0,88 s

FIGURE 1.12 – Durées limites d'exposition pour une exposition sonore quotidienne continue équivalente de 85dB(A) (en application de la norme NF S 31-084).

1.2. OBJET DE LA THÈSE

L'objectif de la thèse intitulée *Diffusion acoustique dans les lieux de travail* est l'implémentation d'un algorithme de modélisation acoustique pour la conception d'espaces de type bureaux ouverts dans le but de l'évaluation de leur caractéristiques acoustiques pour la conception architecturale. Initialement, la thèse avait en partie l'objectif d'étudier l'intelligibilité dans les lieux de travail. Néanmoins, cette problématique a été en partie résolue par un projet doctoral parallèle [Ebissou, 2013] et n'a pas été traitée durant le projet.

Ce travail reprend les relations entre l'énergie sonore et l'intensité. Le formalisme introduit permet de prendre en compte de manière globale les phénomènes physiques impliqués lors de la propagation d'une onde dans un milieu fermé comportant des obstacles. La méthode développée fait appel au tenseur énergie-impulsion introduit par Morse et Feshbach [Morse and Feshbach, 1953] et inutilisée depuis, et réduit sa conservation à un système d'équations couplées. C'est un système hyperbolique différentiel linéaire du premier ordre. Par une méthode d'intégration sur les parois, nous introduisons les coefficients d'absorption et de diffusion et le libre parcours moyen.

Le coefficient de diffusion introduit fait l'objet d'intenses recherches en vue de normaliser sa mesure. Diverses propositions ont été faites dans la littérature pour la définir [Vorlander and Mommertz, 2000], la caractériser de manière objective [Rindel and Jeon, 2003], [Sakuma et al., 2009] ou subjective [Ryu and Jeon, 2008].

Le formalisme s'applique bien aux géométries où une des dimensions est très grande par rapport aux autres, comme les plateaux de bureaux, du fait de leur géométrie longue et rectangulaire.

La modélisation informatique en acoustique des salles est un outil remarquable souffrant pourtant de limitations restreignant ses applications. Nous résolvons le formalisme par la méthode des différences finies dans le domaine temporel. Les schémas utilisés sont stables et explicites, et peu coûteux en mémoires informatique.

Afin de valider les modèles informatiques, des campagnes de mesures *in situ* ont été conduites

avec un microphone *SoundField* ST250 dans différents espaces de plateaux de bureaux. L'utilisation de ce type de microphone permet l'estimation de l'énergie et de l'intensité acoustique. La considération de l'énergie, au sens des pression et vitesse traditionnelles, permet de décomposer la fonction de répartition à l'ordre 2, à partir d'un microphone d'ordre 1.

Les mesures sont comparées aux modélisations afin de caractériser les coefficients d'absorption et de diffusion, accessibles par le calcul. La comparaison est faite sur la base des décroissances spatiales et temporelles.

1.3. ORGANISATION DU MANUSCRIT

Dans le **Chapitre 2** nous proposons un état des connaissances des axes de recherche mis en œuvre dans cette thèse. A cet effet, nous présentons une analyse des théories existantes de l'acoustique des salles. Nous mettons en évidence la supériorité des approches dites géométriques et montrons la nécessité d'intégrer les statistiques dans l'approche géométrique. Nous présentons aussi les instruments et techniques de mesures et de traitement du signal liés à la technologie du *SoundField*.

Dans le **Chapitre 3**, nous présentons le formalisme du couplage de l'énergie et de l'intensité introduit par Morse et Ingard [Morse and Ingard, 1968] en application du théorème de Noether. La conservation de la fonction de répartition et sa projection sur les harmoniques sphériques nous permet de développer les termes énergétiques du tenseur énergie-impulsion développé par Morse. Le bilan d'énergie et de quantité de mouvement sur les parois nous permet ensuite de retrouver les coefficients d'absorption et de diffusion de manière globale et de les intégrer au formalisme sous la forme d'un système d'équations couplées différentielles linéaires du premier ordre. Ce système est transformé pour obtenir une équation généralisée du second ordre. Nous présentons les équations des conditions aux limites puis nous concluons le chapitre avec une méthode analytique.

Dans le **Chapitre 4**, nous détaillons les techniques et le matériel permettant de mener à bien les campagnes de mesures d'acoustique architecturale effectuées. Dans une première partie, nous présentons la caractérisation du matériel de mesure. Il s'agit d'un microphone *SoundField* ST250 et d'une source sonore omnidirectionnelle *Outline* GRS munie d'un caisson de graves *Tannoy* VS10. Le microphone est constitué d'un assemblage tétraédrique de capsules

semi-cardioïdes permettant d'accéder à la pression et à la vitesse particulaire. C'est un microphone d'ordre 1 permettant de décomposer la fonction de répartition à l'ordre 2. Les résultats sont présentés et analysés et nous en déduisons la plage d'utilisation du matériel et sa normalisation. Dans une deuxième partie, nous présentons les espaces mesurés. Le partenariat industriel a permis d'accéder à des espaces de type plateau de bureaux, aménagés ou non. Nous décrivons les projets nous ayant permis d'accéder à ces espaces.

Dans le **Chapitre 5**, nous présentons les modèles numériques basés sur une technique de différences finies dans le domaine temporel. Nous modélisons les équations couplées et l'équation générale en une et deux dimensions. Nous développons des schémas stables sous condition et présentons les approximations effectuées, les équations discrètes obtenues et effectuons de même pour les conditions aux limites.

Dans le **Chapitre 6**, nous présentons l'étude des coefficients d'absorption et de diffusion obtenus à partir d'une estimation basée sur les réponses impulsionnelles mesurées *in situ*. Nous implémentons les modèles sous MATLAB. Nous comparons nos modèles à une et deux dimensions et présentons la conception des espaces pour la modélisation en deux dimensions. Nous fixons les pas de discrétisation et enfin nous comparons les coefficients obtenus par estimation avec le recalage de nos modèles numériques sur les courbes de décroissance temporelle et spatiale des mesures.

Nous concluons ce document avec le **Chapitre 7** en détaillant les avancées faites au cours du projet puis nous proposons des voies d'approfondissement théoriques, métrologiques et informatiques. Nous détaillons notamment comment améliorer la mesure des termes énergétiques du tenseur énergie-impulsion permettant d'estimer les coefficients d'absorption et de diffusion.

Chapitre 2

État des Connaissances

2.1. INTRODUCTION

Dans ce travail nous développons un modèle de propagation de l'information acoustique et le vérifions par des mesures *in situ*. Ce chapitre présente donc l'état des connaissances en acoustique architecturale, en modélisation numérique et en métrologie. Ce dernier point développe spécifiquement le sujet du microphone *SoundField*.

Nous présentons l'évolution scientifique de l'acoustique architecturale : l'acoustique des salles et les différentes approches l'ayant fait évoluer au cours de la deuxième moitié du dernier siècle.

Ensuite, les différents modèles physiques de propagation du son en espace clos sont présentés. Les principes des théories ondulatoire, géométrique et statistique sont développés. Nous montrons qu'un modèle énergétique donne des résultats robustes et rapides mais que la prise en compte des réflexions diffuses est plus complexe. Nous développons alors l'approche particulière et reprenons la définition de la fonction de distribution, bien connue en théorie cinétique des gaz.

Enfin, le système de mesure est présenté et notamment le microphone *SoundField* ST250 permettant d'accéder à la densité d'énergie et au vecteur intensité sonore.

2.2. BREF HISTORIQUE DE L'ACOUSTIQUE

Les premières études sur les phénomènes acoustiques remontent au VI^{ième} siècle av. J.C. [Vinton Hunt, 1992] Les philosophes grecs et l'école pythagoricienne prônaient une « Harmonie Universelle » : tout l'univers est musique. Ils découvrent la relation existant entre la longueur d'une corde vibrante et la hauteur du son émis et construisent mathématiquement l'échelle musicale. Les anciens avaient également découvert que le son est dû aux chocs et aux mouvements vibratoires en résultant, et savaient comme l'atteste Heron (I^{er} siècle ap. J.C.) qu'il se produit dans l'air des vibrations longitudinales sous forme d'ondes sonores. Les principales lois de propagation et de réflexion étaient aussi comprises, en témoigne la qualité acoustique de certains amphithéâtres comme celui d'El Jem (Colisée de Thysdrus, Tunisie, premier tiers du III^{ième} siècle) de la Fig 2.1.



FIGURE 2.1 – Amphithéâtre d'El Jem.

C'est à partir du XVII^{ième} siècle que l'acoustique, en raison du développement de la mécanique, se détacha de l'art musical pour devenir une science du phénomène sonore. Mersenne (1588-1648) et Hooke (1635-1703) déterminèrent expérimentalement les rapports mathématiques unissant la fréquence, la longueur, la tension et la masse des cordes vibrantes. Boyle (1627-1691) en 1660 démontra par une expérience sous vide que l'air est un milieu nécessaire à la propagation du son. La question suivante étant alors de savoir à quelle vitesse celui-ci se propage. Mersenne et Kircher (1601-1680) se penchèrent tous deux sur cette question ainsi que les italiens Borelli (1608-1679) et Viviani (1622-1703). Les résultats trouvés allaient de $450m/s$ à $332m/s$ qui fut le plus précis (1738). C'est à Newton (1642-1727) que l'on doit la première tentative d'une théorie de l'onde sonore.

Parmi les grands mathématiciens du XVIII^{ème} siècle qui apportèrent leur contribution à la mécanique, citons Taylor (1685-1731), d'Alembert (1717-1783)(équations aux dérivées partielles), Bernouilli (1623-1708), Euler (1707-1783), Chladni (1756-1824). Ce dernier laissa son nom aux lignes nodales (figures de Chladni) matérialisées par du sable lorsque les plaques vibrent. Sophie Germain élabora la théorie mathématique de la vibration des plaques en 1815 ; Poisson (1781-1840) étudia également la transmission du son d'un milieu un autre. Ainsi, à partir du moment où l'homme avait ramené la nature du son à un état vibratoire, il pouvait partir de cette donnée pour l'étude des phénomènes d'interférence et l'analyse des sons complexes.

En rétablissant ainsi la liaison entre les recherches mathématiques portant, par exemple, sur les corps vibrants et notamment sur les méthodes de résolution des équations différentielles, et les recherches expérimentales portant sur l'étude physique de la nature du son, le 19^{ème} siècle vit la mise au point mathématique de l'analyse du son grâce aux séries de Fourier (1768-1830), aux travaux de Maxwell (1831-1879) et de Helmholtz (1821-1894). Les grands développements que connu l'acoustique sur le plan théorique et expérimental sont couronnés par l'ouvrage de Lord Rayleigh (1842-1919) : « A theory of sound », publié en 1877-1878 [Duhamel, 2013].

2.3. LES APPROCHES DE L'ACOUSTIQUE DES SALLES

2.3.1. Le son dans une salle

Dans une salle, le comportement des ondes sonores obéit à des lois qui dépendent principalement des caractéristiques du signal émis et de l'impédance des matériaux rencontrés. Les principaux facteurs qui interviennent dans la structure du champ rayonné sont :

- la source sonore
- le milieu de propagation
- la nature des parois et des obstacles

2.3.2. Approche ondulatoire

L'approche ondulatoire est une approche exacte : elle consiste à résoudre l'équation de propagation des ondes dans le volume V de la salle avec des conditions aux limites sur les

parois S délimitant V . Dans le domaine fréquentiel, cela s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta\Phi + k^2\Phi &= -Q(\vec{r}, \omega) && \text{dans } V \\ \partial_n\Phi + ik\beta(\vec{r}, \omega)\Phi &= 0 && \text{sur } S\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $Q(\vec{r}, \omega)$ est une source de débit volumique, \vec{r} est la coordonnée spatiale, $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde de pulsation ω , c est la célérité des ondes, ∂_n est la dérivée normale à la paroi, $\beta(\vec{r}, \omega)$ est l'admittance de paroi, Δ est l'opérateur Laplacien et Φ est le potentiel des vitesses.

Nous considérons le calcul des modes dans une salle rectangulaire à parois rigides. Nous nous plaçons en coordonnées cartésiennes et nous supposons que la salle a pour dimensions l_x , l_y et l_z suivant les trois directions. Les modes propres de la salle sont solutions de l'équation des ondes dans le volume Eq. 2.1, ils sont donc donnés par les fonctions [Bruneau, 1998]

$$P_n(x, y, z) = \cos \frac{n_x\pi x}{l_x} \cos \frac{n_y\pi y}{l_y} \cos \frac{n_z\pi z}{l_z}$$

avec la valeur propre

$$k_n^2 = \left(\frac{n_x\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{l_z}\right)^2$$

Nous distinguons ainsi les modes :

- axiaux : faisant intervenir une paire de parois (un n_j non nul), voir Fig. 2.2
- tangentiels : faisant intervenir deux paires de parois (2 n_j non nuls)
- obliques : faisant intervenir trois paires de parois (3 n_j non nuls)

Le nombre de modes dans la salle dont la pulsation propre est inférieure à une valeur ω donnée est :

$$\left(\frac{n_x\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{l_z}\right)^2 < \frac{\omega^2}{c^2}$$

Le nombre de triplets entiers (n_x, n_y, n_z) qui satisfont cette condition est obtenu en divisant le volume du huitième de sphère de rayon $\frac{\omega}{c}$ par le volume élémentaire associé à un triplet qui est $\frac{\pi^3}{l_x l_y l_z}$ d'où :

$$\begin{aligned}N(\omega) &= \frac{4\pi\omega^3}{24c^3} \\ &= \frac{V\omega^3}{6\pi^2c^3}\end{aligned}$$

avec $V = l_x \times l_y \times l_z$ le volume de la salle. La densité modale est la dérivée du nombre de modes par rapport à la pulsation, soit :

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3} \quad (2.2)$$

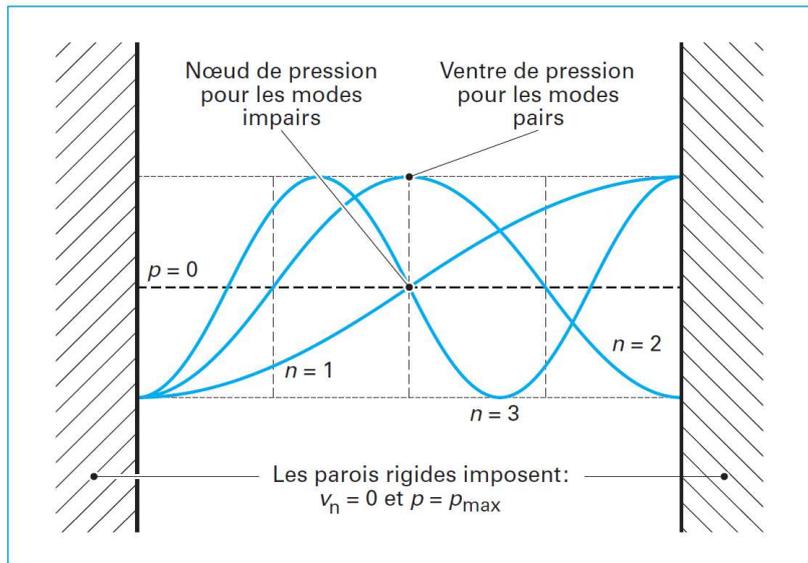


FIGURE 2.2 – D’après Vian [Vian, 2005]. Modes axiaux entre parois planes parallèles rigides.

Comme nous le constatons dans l’Eq. 2.2, la densité de modes croît avec le carré de la fréquence. Lorsque la fréquence est élevée, les modes se recouvrent comme nous pouvons l’observer sur la Fig. 2.3.

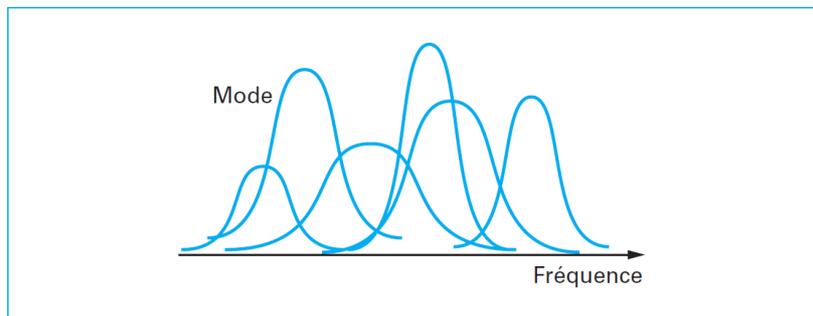


FIGURE 2.3 – D’après Vian [Vian, 2005]. Recouvrement des modes.

La largeur de bande des modes de la salle dépend des coefficients d'absorption α des parois de surface S . Nous définissons la fréquence de Schroeder comme la limite à partir de laquelle plusieurs modes seront excités par une seule fréquence. Nous notons M le recouvrement modal, M est d'autant plus important que la réverbération est importante. Nous montrons alors [Vian, 2005] qu'il est proportionnel à l'aire équivalente d'absorption $S\alpha$, et au carré de la fréquence :

$$M = \frac{\pi S\alpha f^2}{4c^2}$$

Soit si

$$f \gg \frac{2c}{\sqrt{\pi S\alpha}}$$

En moyenne, la réponse de la salle devient donc plus uniforme en hautes fréquences. Nous pouvons alors considérer les modes de façon statistique. L'expérience montre que le recouvrement est suffisamment important pour une description statistique à partir d'une fréquence limite f_c qui se situe à

$$f_c \simeq 2.4 \frac{c}{\sqrt{S\alpha}}$$

Soit simplement exprimée par

$$f_c = 2000 \sqrt{\frac{T_{60}}{V}}$$

avec T_{60} la durée de réverbération.

En acoustique architecturale, les fréquences utiles sont suffisamment élevées pour que la théorie modale ne convienne plus à décrire le champ sonore de manière précise en raison d'un nombre trop important de modes.

2.3.3. Approche géométrique

Introduction

L'approche géométrique est une approche temporelle. Elle est intuitive et ancienne, puisqu'elle était vraisemblablement déjà pratiquée par les Grecs et les Romains pour concevoir les théâtres antiques. Elle est basée sur le postulat de l'équivalence des lois de la réflexion des ondes sonores avec celles des rayons lumineux. Elle consiste à considérer que le son se propage en ligne droite et se réfléchit comme la lumière selon les lois de l'optique géométrique.

Une source sonore placée devant une paroi réfléchissante donne lieu à une source virtuelle

symétrique de la source réelle par rapport à la surface de réflexion. C'est la source image. À chaque réflexion sur une paroi, le rayon perd une fraction de son énergie, selon le coefficient de réflexion affecté aux différentes facettes. La séquence obtenue des réflexions parvenant au récepteur est appelée échogramme. Elle est proche du carré du module de la réponse impulsionnelle entre la source et le récepteur.

La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle $h(t)$ en acoustique des salles se définit par rapport à une position source et une position de réception. Une réponse impulsionnelle est associée à une fonction de transfert dont les propriétés statistiques se retrouvent dans la réponse. Un système à une entrée et une sortie relie un signal d'entrée $x(t)$ à un signal de sortie $y(t)$ comme sur la Fig. 2.4. Des exemples de tels couples sont pour $x(t)$ le signal envoyé à un haut-parleur et $y(t)$ le signal enregistré dans la salle.

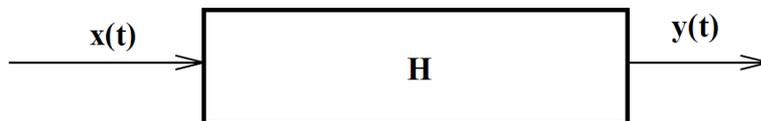


FIGURE 2.4 – Système à une entrée et une sortie.

La Fig. 2.5 permet de comparer les réponses impulsionnelles mesurées dans trois espaces différents. L'amphithéâtre d'El Jem est un espace ouvert et vaste. Nous observons des pics de réflexion importants puis une décroissance rapide. *Kaleido* est un plateau de bureau non aménagé, un espace fermé et restreint. Nous observons une décroissance rapide du niveau sonore avec quelques pics de réflexions tardifs. Enfin, la réponse impulsionnelle de l'église de Souvigny, tronquée à 4s, présente un espace dont la réverbération est importante et exponentielle.

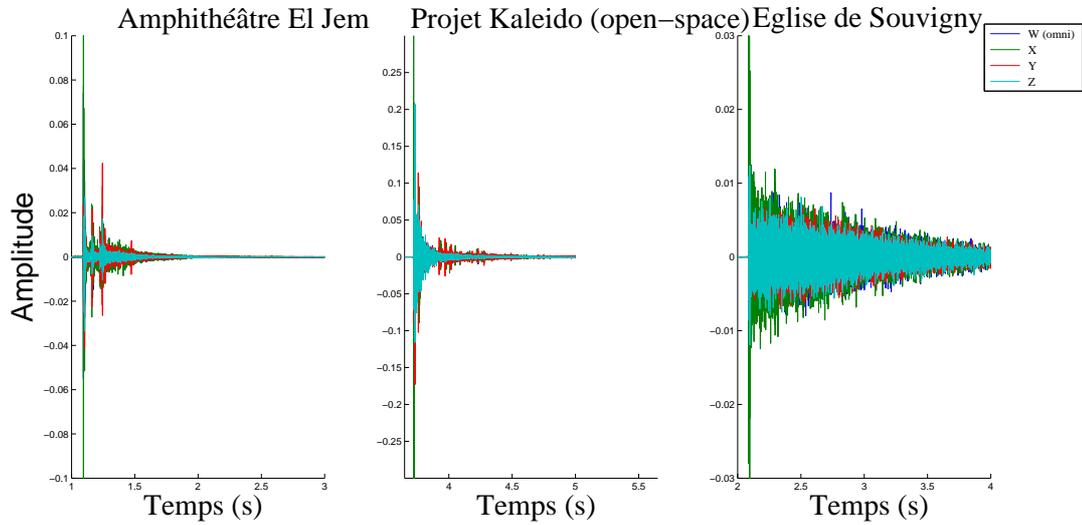


FIGURE 2.5 – Exemple de 3 réponses impulsionnelles. Canal de pression (W) en bleu foncé, canal de vitesse particulaire selon les trois directions en vert (X), rouge (Y) et bleu clair (Z).

La mesure de la réponse impulsionnelle d'un espace peut se faire par l'émission d'un son très bref à la position de la source, avec un pistolet d'alarme par exemple, et l'enregistrement du signal au point de réception. Nous utilisons plutôt une séquence sonore particulière $s(t)$ puis un traitement du signal permet de trouver $h(t)$ à partir de la mesure de $p(t)$. Nous pouvons aussi simuler par le calcul la réponse impulsionnelle d'une salle $h(t)$. La mesure en studio du signal d'un instrument de musique $s(t)$ permet de reproduire le signal $p(t)$ de l'instrument tel qu'il serait entendu dans la salle.

Théoriquement nous pouvons décomposer la réponse impulsionnelle en trois phases illustrées sur les Fig. 2.6. La première phase est la réception du son direct, correspondant à l'énergie parcourant le plus court trajet entre la source et le récepteur et n'étant pas influencée par la salle. Elle est la même que s'il n'y avait pas de paroi et se calcule par la formule

$$p(t) = \frac{s(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}$$

où r est la distance source récepteur et $s(t)$ le signal envoyé par la source. Les deux dernières phases constituent le champ réverbéré : la seconde phase est constituée par les premières réflexions sur les parois. La durée des premières réflexions dépend de la dimension caractéristique de la salle. En moyenne cette durée est de l'ordre de $100ms$. La dernière phase est

le champ diffus. Le champ diffus est produit par un grand nombre de réflexions sur les parois de la salle. Le temps de mise en place théorique du champ diffus est nommé temps de transition [Polack, 1992]. Le champ diffus a les caractéristiques suivantes : il se présente sous la forme d'un signal aléatoire et est statistiquement homogène dans la salle. La pression en un point résulte d'ondes planes décorréélées, provenant de toutes les directions de l'espace et ayant la même amplitude. L'hypothèse du champ diffus est viable dans un volume fermé dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde. En pratique, la mise en place du champ diffus est donnée par la densité de réflexions. Cette densité augmente avec le temps et lorsqu'elle est trop importante pour dissocier les réflexions, le champ est alors diffus.

Réflexions diffuses

Découverte en 1665 par Grimaldi, un prêtre jésuite italien, physicien et astronome, la diffraction est le comportement des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle non transparent dont les dimensions sont proches de la longueur d'onde de l'onde diffractée. Après la rencontre, l'onde n'est plus conservée, résultant d'une interférence entre l'objet et l'onde. Ce phénomène s'observe avec la lumière ou tout type d'onde propagative. La diffusion quant à elle, est le phénomène par lequel un rayonnement est dévié dans de multiples directions (également appelé dispersion) par une interaction avec d'autres objets. La diffusion peut être répartie dans toutes les directions (isotrope) ou obéir à une directivité de réémission particulière. Elle intervient lorsque la dimension caractéristique de l'objet diffusant est supérieure à la longueur d'onde de l'onde incidente. Les réflexions diffuses ont les effets suivants [Kleiner et al., 1993, Hodgson, 1991] :

- la diffusion par réflexion augmente le caractère linéaire de la courbe de réverbération et diminue (à absorption égale) le temps de réverbération
- la décroissance du niveau sonore en fonction de la distance à la source est plus rapide lorsque certaines surfaces diffusent, surtout dans les grandes salles disproportionnées
- des réflexions latérales diffuses permettent d'obtenir, dans les grandes salles, une bonne immersion dans le champ sonore sans créer d'échos francs ;
- de manière générale, les réflexions diffuses diminuent le risque d'échos très retardés et très énergétiques, à absorption égale, ainsi que le risque de filtrage en peigne qui accompagne les premières réflexions
- plusieurs auteurs soulignent en outre l'importance de prendre en compte les réflexions diffuses dans les simulations par auralisation [Kleiner et al., 1993].

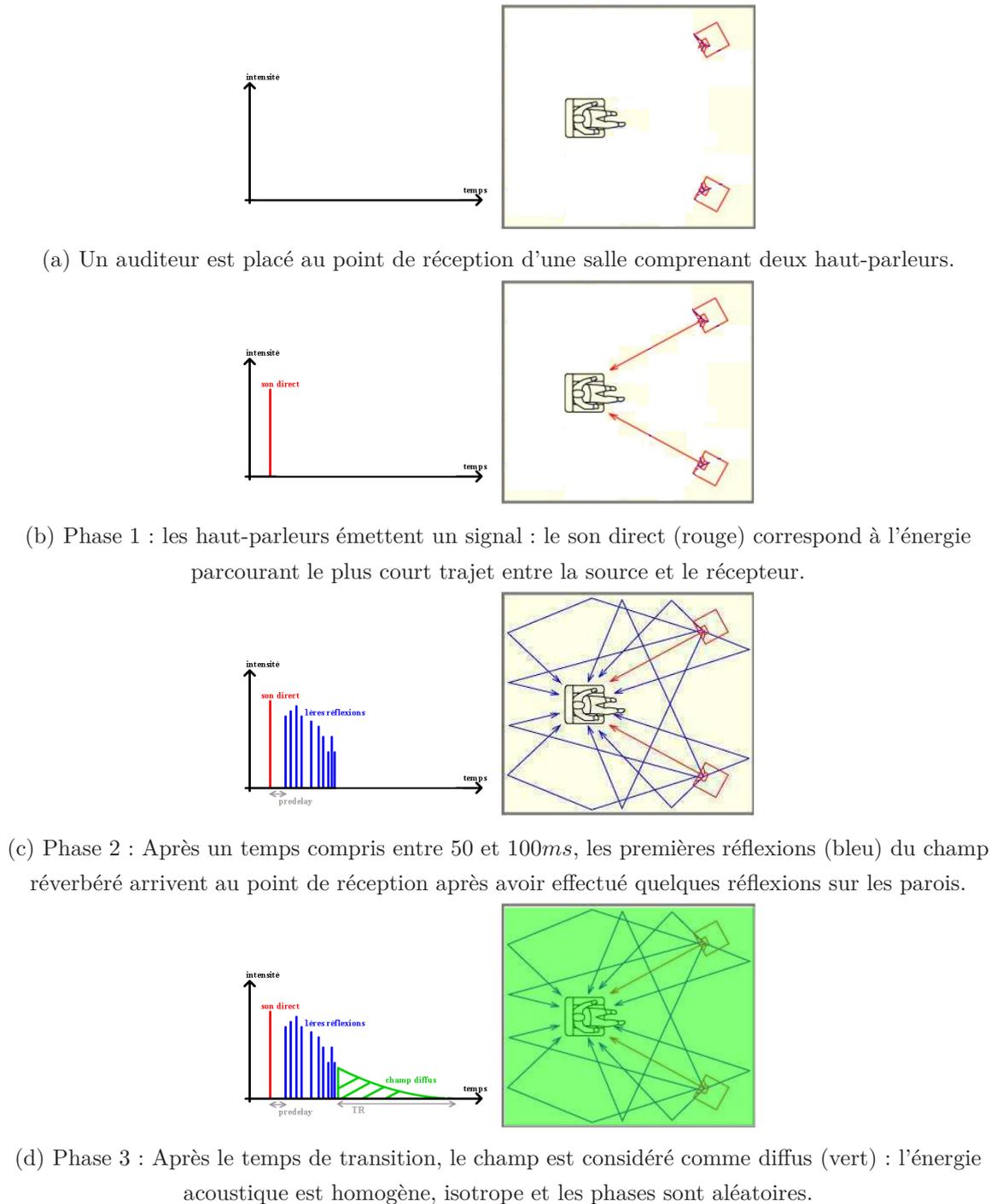


FIGURE 2.6 – Décomposition théorique de la réponse impulsionnelle en 3 phases.

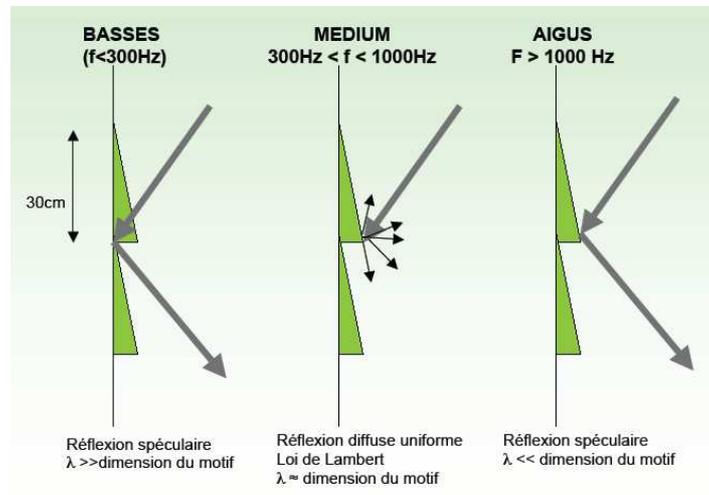


FIGURE 2.7 – D’après Atienza et Balez [Atienza and Balez, 2009]. Schéma des réflexions spéculaires et diffuses en fonction de la fréquence.

Le champ diffus provient en grande partie des réflexions sur les parois de la salle. La Fig. 2.7 caractérise ces réflexions en fonction de la fréquence. Les réflexions diffuses ont une influence significative sur la répartition du champ sonore et sur la réverbération dans une salle.

Le coefficient de diffusion a été introduit en acoustique en 2000 et mesure la différence relative entre l’énergie totale réfléchiée et l’énergie réfléchiée spéculairement [Vorlander and Mommertz, 2000].

Deux techniques de mesure permettent de le caractériser :

- L’AES-4id-2001 [AES, 2001] permet la mesure en chambre sourde de la répartition spatiale de l’énergie acoustique réfléchiée par un diffuseur : le coefficient de diffusion directionnel s_θ pour une onde d’angle d’incidence θ , et le coefficient de diffusion s_d pour une onde d’incidence diffuse. Ce coefficient correspond à une réponse polaire de la surface caractérisée.
- L’ISO 17497-1 [AFNOR, 2004] définit le coefficient de diffusion s appelé coefficient de dispersion en incidence aléatoire comme étant la proportion d’énergie réfléchiée de manière diffuse et propose une méthode de mesure. Elle prévoit l’utilisation d’une plaque tournante d’environ $10m^2$ placée en salle réverbérante, afin de pouvoir entreposer et faire tourner l’échantillon diffusant [Schmich, 2010]. La norme prévoit la mesure de quatre durées de réverbération avec et sans échantillon en configuration fixe ou plateau tournant. Les mesures doivent être effectuées pour différents emplacements de microphone

et de haut-parleur. Le coefficient résultant est :

$$s = \frac{E_d}{E_{réfl}}$$

avec E_d la densité d'énergie en champ diffus et $E_{réfl}$ l'énergie réfléchie spéculairement.

Schmich [Schmich, 2010] montre que, quand on augmente le nombre de positions angulaires de l'échantillon, les résultats deviennent reproductibles. Schmich montre également que les effets de bords sont à prendre en compte de telle sorte qu'une mesure ne peut être considérée comme fiable que lorsque l'épaisseur de l'échantillon est faible par rapport à son diamètre.

Le critère de Rayleigh [Embrecchts, 2002] renseigne sur le caractère plus ou moins diffusant d'une surface. D'après ce dernier, une surface diffuse de manière significative si :

$$kh \cos \theta_{inc} > \frac{\pi}{4}$$

où

$$f > \frac{42,5}{h \cos \theta_{inc}}$$

où h est une mesure caractéristique de la hauteur du profil de rugosité. Une mesure de "dispersion" selon la norme ISO a été effectuée par Embrecchts [Embrecchts, 2002] dont les résultats sont reproduits sur la Fig. 2.8. Nous constatons que la diffusion intervient à partir de $2000Hz$.

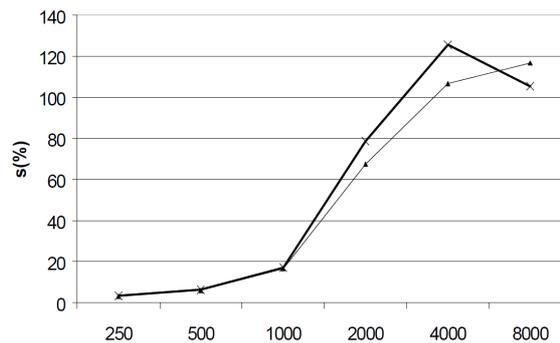


FIGURE 2.8 – D'après Embrecchts [Embrecchts, 2002]. Résultat de deux mesures du coefficient de dispersion ISO pour une même surface à profil sinusoïdal (hauteur quadratique moyenne : $2.03cm$).

2.3.4. Approche statistique

Traditionnellement en acoustique des salles, l'approche statistique est restreinte à l'approche géométrique, malgré quelques tentatives sans lendemain de la part de Morse et ses collaborateurs [Morse and Ingard, 1968].

Le champ diffus

Le champ peut être considéré comme diffus sous différentes conditions provenant toutes des mêmes hypothèses. Lorsque les dimensions de la salle sont grandes devant la longueur d'onde, dans une bande de fréquences contenant un grand nombre de modes de même amortissement, c'est à dire quand la densité modale est élevée et qu'il n'est plus possible de distinguer les modes individuellement, nous pouvons faire l'approximation que le champ de pression est diffus. Cela signifie que la densité instantanée d'énergie acoustique est la même dans toute salle, ou que la densité d'énergie est indépendante de la position, et que le vecteur intensité acoustique est le même dans toutes les directions, c'est à dire qu'à chaque position, l'énergie provient de toutes les directions avec une intensité égale.

Il n'existe aujourd'hui aucune technique normalisée de la mesure du champ diffus. Différentes techniques ont été mises au point au fil des ans [Jarret et al., 2012], par exemple, la cohérence spatiale entre une paire de microphones dans le but de qualifier les chambres réverbérantes, et plus précisément de connaître la quantité de diffuseurs nécessaires pour atteindre un champ sonore suffisamment uniforme pour pouvoir appliquer les formules de durées de réverbération de la théorie classique [Koyasu and Yamashita, 1972]. L'utilisation de structures incorporant plusieurs microphones permet l'analyse du champ sonore en trois dimensions [Meyer and Elko, 2002].

Récemment, l'indice de diffusivité a été introduit pour améliorer la précision de la localisation spatiale de sources sonores (DOA) en conditions de champ très réverbérant. Il est actuellement utilisé pour décrire le champ sonore [Pulkki, 2007]. L'indice considéré est la proportion d'intensité dans chaque direction par rapport à la densité totale d'énergie [Merimaa and Pulkki, 2004]. Nous avons mis au point une technique d'estimation de la diffusivité dans le but de faire de

l'auralisation [Espitia Hurtado et al., 2014]. La diffusivité d'un champ sonore est calculée à partir du rapport entre la magnitude de l'espérance du vecteur intensité acoustique active et l'espérance de la densité d'énergie acoustique :

$$\Psi = 1 - \frac{\|\mathcal{E}[I]\|}{c\mathcal{E}[E]}$$

où $\mathcal{E}[\cdot]$ représente l'espérance. Lorsque Ψ tend vers 0, le flux d'énergie est unidirectionnel. Au contraire quand la diffusivité s'approche de 1, cela indique que le champ sonore est diffus.

L'approche statistique

L'approche statistique consiste à considérer l'énergie instantanée portée par les différentes réflexions, ou rayons sonores.

Dans l'hypothèse d'un champ diffus, le champ sonore est composé de rayons allant dans toutes les directions. L'amplitude de l'intensité est donnée par [Blauert and Xiang, 2009] :

$$\bar{I}_d = \int \int_{4\pi} I(\Omega) d\Omega = Ec$$

où E est la densité d'énergie et Ω l'angle spatial.

Nous pouvons en déduire la densité d'énergie totale qui frappe le mur :

$$dE = \frac{E}{4\pi} d\Omega = \frac{E}{2} \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Or la quantité dI arrivant sur le mur est $dEc \cos(\theta)$.

Soit :

$$I_{mur} = \frac{Ec}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Ec}{4}$$

Nous observons que l'intensité totale qui frappe le mur correspond au quart de l'intensité diffuse totale.

La puissance totale qui frappe le mur est $P_{mur} = I_{mur}S$, soit :

$$P_{mur} = \frac{Ec}{4} S$$

La quantité d'énergie absorbée par le mur est :

$$P_{mur,abs} = \frac{Ec}{4} \alpha S$$

où α est le coefficient d'absorption en incidence diffuse. Remarques :

- L'hypothèse d'isotropie est optimiste lorsqu'on se place près des murs,
- Pour les ondes planes, nous avons $P = cES$. Ici, nous considérons le demi espace ce qui introduit un facteur $\frac{1}{2}$, mais le fait que les ondes ne sont pas toutes en incidence normale introduit un 2nd facteur $\frac{1}{2}$.

Dans un local de forme régulière et ayant une absorption uniforme, l'établissement de l'intensité sonore (A) comme sa décroissance après arrêt de la source (B) obéissent à des lois exponentielles :

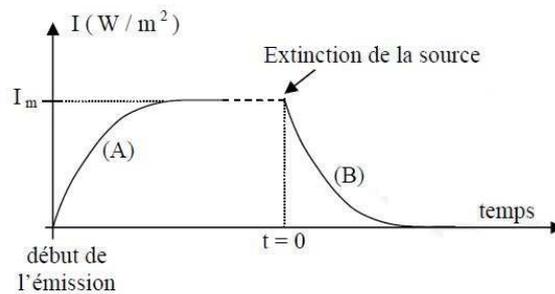


FIGURE 2.9 – Évolution temporelle de l'intensité sonore après démarrage et arrêt de la source.

Nous définissons le temps de réverbération, noté T_{60} , comme le temps au bout duquel l'énergie a diminué de 60 dB après extinction de la source. Le T_{60} se déduit de l'équation régissant la densité d'énergie en fonction du temps lorsque l'on coupe la source au temps $t=0$:

$$E(T_{60}) = 10^{-6} E(t = 0)$$

Ou encore (formule de Sabine), pour $\alpha \ll 1$:

$$T_{60} = 0.16 \times \frac{V}{\alpha S}$$

La théorie de la réverbération de C. F. Eyring (1889-1951) a donné la réverbération de Norris-Eyring qui modifie la théorie de Sabine en considérant que l'énergie dans la salle décroît de manière discrète. A chaque réflexion, l'énergie de chaque onde est absorbée en partie, et la somme de leur énergies décroît selon le facteur α .

En fonction du nombre moyen n de réflexions par secondes, nous avons :

$$E\left(\frac{t}{n}\right) = E(t = 0)(1 - \alpha)^n$$

Nous en déduisons, en approximant la courbe de décroissance à une exponentielle :

$$E(T_{60}) = E(t = 0) \exp(-tn \ln(1 - \alpha))$$

Ou encore (formule de d'Eyring) :

$$T_{60} = 0.16 \times \frac{V}{-\ln(1 - \alpha)S}$$

L'emploi du temps de réverbération de Sabine est répandu dans l'acoustique du bâtiment. L'approche statistique en est la base. Elle est largement utilisée pour estimer les niveaux sonores et les temps de réverbération, ainsi que dimensionner la quantité d'absorbant dans une salle. Pourtant, ces approximations sont restreintes aux faibles absorptions. L'approche statistique ne permet pas d'avoir accès à la partie précoce de la décroissance de l'énergie sonore. Or, cette partie est très importante d'un point de vue perceptif.

2.3.5. Approche particulière

L'approche particulière repose sur la théorie mathématique de la diffusion développée par Ollendorff et reprise par Picaut et ses collaborateurs [Ollendorff, 1969, Picaut, 1996, Foy et al., 2009]. Cette théorie est elle même basée sur l'étude d'un fluide en mouvement et sur les travaux de Morse et Feshbach [Morse and Feshbach, 1953].

En considérant le son comme des corpuscules sonores se déplaçant dans un milieu diffusant, l'évolution de l'énergie acoustique dans le temps et dans l'espace peut être prévue grâce à l'équation de diffusion : le champ sonore est décomposé en particules sans interaction entre elles et se propageant en ligne droite entre deux chocs successifs avec les parois ou des objets diffusant dans la salle, supposés plus massifs que les particules. La répartition de ces particules suit un processus de diffusion, et la répartition de l'énergie du champ sonore peut être assimilée à la répartition des particules sonores, schématisé sur la Fig. 2.10.

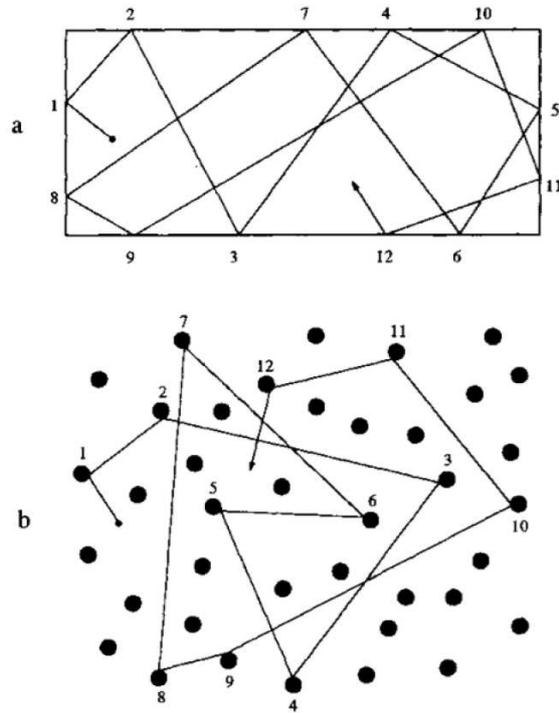


FIGURE 2.10 – D’après Picaut [Picaut et al., 1997]. Représentation schématique du mouvement d’une particule sonore dans une salle rectangulaire (a) et dans champ uniforme d’objets sonores diffusants (b).

Le libre parcours moyen est défini comme la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions. C’est une grandeur caractéristique d’un espace. Nous retrouvons son expression à partir de la probabilité de collision d’un particule $P(x)$. Dans un volume d’épaisseur dx se trouvent $n_t dx$ objets de section transversale diffusante totale $Q_t n_t dx$. La probabilité de ne pas avoir de collision entre x et $x + dx$ est $(1 - Q_t n_t dx)$. Ainsi $P(x)$ vérifie :

$$\frac{dP(x)}{dx} = -Q_t n_t P(x)$$

soit

$$P(x) = Q_t n_t e^{-Q_t n_t x}$$

Et finalement, le libre parcours moyen λ est donné par :

$$\lambda = \int_0^{+\infty} x P(x) dx = \frac{1}{Q_t n_t} = \frac{4V}{S}$$

où V est le volume et S la surface de la salle d’absorption moyenne $\bar{\alpha}$.

Après une collision sur une paroi, une particule est réfléchiée avec une probabilité $(1 - \bar{\alpha})$ et absorbée avec une probabilité $\bar{\alpha}$. La section transversale totale peut être écrite comme la somme de la section transversale diffusante et absorbante :

$$Q_t = Q_s + Q_a = (1 - \bar{\alpha})Q_t + \bar{\alpha}Q_t$$

Nous considérons maintenant le mouvement des particules dans le fluide. Morse et Feshbach définissent [Morse and Feshbach, 1953] un espace à 6 dimensions nommé espace des phases, et décrivant la position et la vitesse d'une particule dans les trois dimensions de l'espace au temps t . La fonction de répartition $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ est définie à partir d'un fluide constitué de particules en mouvement. A un instant t , le fluide peut être représenté comme un nuage constitué de N particules dans l'espace des phases $d^3\vec{r}d^3\vec{v}$. Pour un grand nombre de pas de temps et des conditions constantes, la fonction de distribution décrit la probabilité de densité de chaque point de l'espace des phases. La densité d'énergie E et le flux d'énergie \vec{I} sont donnés par l'intégration de la fonction de répartition sur l'espace des vitesses dV_v :

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) dV_v \\ \vec{I}(\vec{r}, t) &= \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) dV_v \end{aligned}$$

La variation de $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ pendant un temps dt est fonction du nombre de particules de vitesse \vec{v} quittant l'élément de volume dV_r pendant dt , $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}, \vec{v}, t) dt$, des particules diffusées ou absorbées quittant l'espace des vitesses, $n_t(Q_s + Q_a) \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, des particules de vitesse \vec{v}' intégrant l'espace des vitesses après avoir été diffusées, $\frac{n_t Q_s \vec{v}}{4\pi} f(\vec{r}, \vec{v}', t) dV_{v'}$. En sommant ces contributions, Morse et Feshbach obtiennent l'équation bilan :

$$\partial_t f(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}, \vec{v}, t) dt - n_t(Q_s + Q_a) \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{n_t Q_s \vec{v}}{4\pi} \int f(\vec{r}, \vec{v}', t) dV_{v'} \quad (2.3)$$

La première approximation de la fonction de répartition exprimée en puissance de \vec{v} est :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) \approx \frac{1}{4\pi} E(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi v^2} \vec{v} \cdot \vec{I}(\vec{r}, t) \quad (2.4)$$

Nous introduisons l'Eq. 2.3 dans l'Eq. 2.4, et nous obtenons, en séparant les termes qui changent de signe des termes qui ne changent pas de signe lorsque la direction de \vec{v} change :

$$\begin{aligned} \vec{I} &\approx -\frac{v}{3Q_t n_t} \vec{\nabla} E = \frac{\lambda c}{3} \vec{\nabla} E \\ \partial_t E &\approx -\frac{v}{3Q_t n_t} \Delta E - Q_a n_t \vec{v} E \end{aligned} \quad (2.5)$$

En remplaçant la première partie de l'Eq. 2.5 dans la deuxième partie, nous obtenons l'équation de diffusion :

$$\partial_t E \approx D \Delta E - \sigma E$$

où D est le coefficient de diffusion et σ prend en compte l'absorption :

$$D = \frac{\lambda c}{3} = \frac{4 V c}{3 S}$$

et

$$\sigma = \frac{c \bar{\alpha}}{\lambda} = \frac{c \bar{\alpha} S}{4 V}$$

σ est le taux de probabilité que la particule sonore soit absorbée pendant 1 seconde. La Fig. 2.11 présente la comparaison du modèle de Kutruuff et de l'équation de diffusion de l'arrivée du champ direct et du début de la décroissance temporelle de la densité d'énergie acoustique dans un espace rectangulaire pour trois positions de récepteur. Nous observons que l'équation de diffusion ne prend pas en compte le champ direct, tandis que la décroissance temporelle est proche de celle du modèle de Kutruuff.

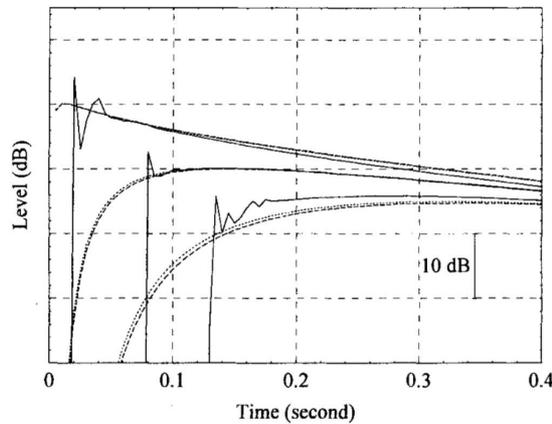


FIGURE 2.11 – D'après Picaut [Picaut et al., 1997]. Densité d'énergie en fonction du temps pour trois positions de récepteurs ($x = 5, 25$ et $45m$) dans un espace rectangulaire de $50 \times 10 \times 10m$ avec une absorption uniforme $\alpha = 0.1$. La source est située à $x = 1m$. '—' modèle de Kutruuff; '---' equation de diffusion pour différentes estimations de D .

Lien avec le champ diffus Rappelons que le concept de champ diffus repose sur deux hypothèses : un champ sonore uniforme et un flux d'énergie isotrope. En première approxi-

mation, ces hypothèses induisent un Laplacien nul pour la densité d'énergie, soit :

$$\partial_t E \approx -\sigma E$$

C'est l'équation de décroissance de l'énergie utilisée en acoustique architecturale. L'équation de diffusion peut donc être considérée comme une extension de la théorie de Sabine, en prenant en compte les flux locaux d'énergie comme l'on proposé Morse et Feshbach [Morse and Feshbach, 1953].

2.3.6. Approche énergétique

Par des considérations énergétiques, W.C. Sabine, à la fin du XIX^{ième} siècle, a étudié le phénomène de *réverbération*. Nous avons vu que le champ peut être considéré comme diffus dans une salle, selon deux hypothèses. Ces deux hypothèses permettent alors de relier directement intensité et densité d'énergie :

$$|\vec{I}| = \frac{E_m}{4\pi} c \quad (2.6)$$

où $E_m(t)$ est la densité moyenne instantanée d'énergie dans la salle. Par l'application du théorème de Noether à l'équation d'onde, pour obtenir le bilan d'énergie en tout point de la salle, J. Bosquet [Bosquet, 1967] a introduit la théorie synthétique de la réverbération. Cette théorie fournit le cadre nécessaire pour comprendre toute analyse énergétique des salles [Polack, 2011].

En multipliant par la quantité $\partial_t \Phi(\vec{r}, t)$ l'équation des ondes dans un volume V :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \Phi - \Delta \Phi = Q$$

En intégrant par parties nous obtenons le bilan énergétique local :

$$\frac{1}{2} \partial_t \left(\frac{1}{c} |\partial_t \Phi|^2 + |\vec{\nabla} \Phi|^2 \right) - \vec{\nabla} \cdot (\partial_t \Phi \vec{\nabla} \Phi) = Q \partial_t \Phi$$

soit

$$\partial_t E_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{I} = \Pi$$

où nous avons introduit la densité instantanée acoustique E_t et le travail Π des sources acoustiques. Dans le cadre de la théorie synthétique de la réverbération, toute analyse énergétique se ramène au problème suivant : trouver la relation qui lie \vec{I} et E_t [Polack, 2011].

2.4. MODÉLISATION D'ACOUSTIQUE ARCHITECTURALE

Les principales techniques utilisées pour la modélisation en acoustique des salles sont basées sur deux des approximations présentées ci dessus : l'approche ondulatoire et l'approche géométrique. La complexité des approches et leurs similitudes en font parfois des objets difficiles à cataloguer. La Fig. 2.12 est un exemple de présentation expliquant les affiliations entre les différentes approches et techniques de modélisations. Elle est non exhaustive et ne fait pas l'unanimité. Toutes les techniques ne sont pas présentées dans cette section.

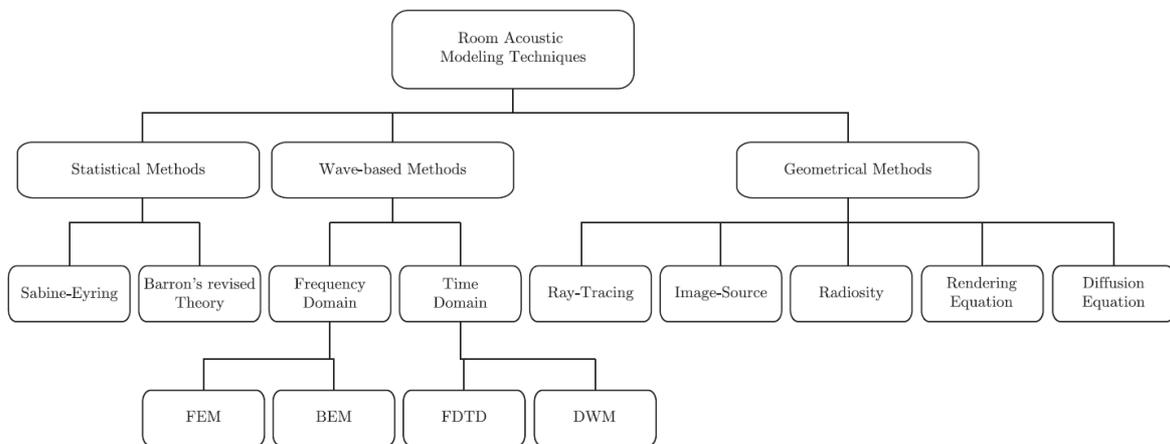


FIGURE 2.12 – D’après la thèse de Navarro Ruiz [Navarro Ruiz, 2011]. Diagramme des différentes approches de modélisation en acoustique des salles.

2.4.1. Les méthodes modales

Les méthodes modales en acoustique des salles ont été introduites par Van Den Dungen et reprises par Morse. Le problème général peut se décrire dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel. Les méthodes numériques principales permettant de résoudre la théorie ondulatoire par une méthode modale sont la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontières pour le domaine fréquentiel. Ces méthodes sont basées sur la discrétisation en fréquence et ne sont pas usuelles en acoustique des salles, bien que très utiles pour l’analyse modale dans un espace clos, car elles sont limitées aux premiers modes. La méthode des différences finies (FDTD) est la méthode principalement utilisée dans le domaine tempo-

rel. Elle consiste à discrétiser l'espace et le temps et à remplacer les équations par leur schéma de différence finie correspondant.

La FDTD est largement exploitée dans le but de résoudre des équations différentielles partielles. En 1966, Yee [Yee, 1966] publie un article précurseur décrivant pour la première fois cette méthode afin de résoudre les équations de Maxwell. La méthode FDTD est basée sur la résolution de l'équation d'onde mais rarement utilisée en acoustique des salles du fait de son coût en temps de calculs en hautes fréquences. Depuis que Savioja et Botteldooren [Savioja et al., 1994, Botteldooren, 1995] ont les premiers appliqué la méthode FDTD pour l'acoustique des salles, des recherches ont été faites pour améliorer les temps de calculs en hautes fréquences ou modéliser la diffusion de surface [Kowalczyk, 2008].

2.4.2. Les méthodes géométriques

L'approche géométrique repose sur l'analogie avec l'optique et se trouve à la base des principales techniques numériques du calcul de l'acoustique des salles. Il en découle les concepts de coefficient d'absorption et de puissance incidente.

L'approche géométrique est particulièrement utile aux hautes fréquences, elle est donc complémentaire de l'analyse modale. Nous considérons que les rayons sonores sont des droites perpendiculaires aux fronts d'ondes se déplaçant à vitesse constante assimilable à des particules sonores.

Sources images

La méthode source-image considère une image source par symétrie à travers chaque paroi. Les réflexions sont spéculaires et les effets de diffraction sont ignorés. Une technique parallèle consiste à considérer un faisceau de rayons afin de reconstituer le champ sonore, c'est la théorie géométrique de la diffraction [Pierce, 1989]. Cependant, la combinaison des deux techniques ne permet pas une prise en compte complète du champ diffracté ni de sources images en trop grand nombre : salles couplées, parois courbes, environnements complexes, visibilité des sources et ordre des réflexions sont autant de difficultés augmentant les temps de calculs et ne permettant pas de simuler la fin de la réponse impulsionnelle.

Tracé de rayons

Dans la méthode de tir de rayon pour la simulation numérique, issue du modèle géométrique, un grand nombre de rayons est émis de la source dans toutes les directions. Chaque rayon se réfléchit sur les parois et disparaît proportionnellement à son coefficient d'absorption. Cette méthode peut impliquer des réflexions diffuses, elle est répétée jusqu'au récepteur.

Méthode hybride

Basés principalement sur ces deux techniques, les logiciels de simulation d'acoustique des salles utilisent les tirs de rayons pour retrouver les sources images. Par exemple, nous pouvons citer les logiciels CATT-Acoustic et Odeon.

2.4.3. Bilan sur les techniques de modélisation

Les considérations ci dessus mettent en relief les différentes techniques de modélisations en acoustique des salles. Nous pouvons maintenant exprimer certaines remarques.

Qu'elles soient modales ou géométriques, ces techniques demande un fort coût de calcul : chiffré en nombre de modes ou en nombre de rayons. Des hypothèses simplificatrices posent problème, comme la prise en compte de la diffusion de parois. Enfin, la notion de champ diffus pose problème également.

2.5. MÉTROLOGIE : LE MICROPHONE *SoundField*

Préambule

Historiquement, le microphone type *SoundField* a été développé au cours des années 70 à partir des recherches de Gerzon. La National Research Development Corporation en Angleterre, a soutenu financièrement la mise au point du *SoundField*. La compagnie britannique Calrec a été responsable de la mise sur le marché initiale du *SoundField* en 1979. Quelques années après son acquisition, la technologie du *SoundField* a été revendue à Soundfield Research. Il y a différents modèles manufacturés, le *SoundField* Mk-V, introduits en 1992, le

SPS422, introduit en 1996 ou depuis 1993, AGM Digital fabrique un système de type *SoundField* entièrement numérique, le MR2. Aujourd'hui de nouveaux modèles, plus petits, sont disponibles : le Tetramic de Core Sound, le MK-012AM de Oktava. Deux montages tétraédriques sont visibles sur la Fig. 2.13. Comme nous pouvons le voir, le microphone de type *SoundField* est constitué de quatre capsules sous-cardioïdes ou cardioïdes disposées comme sur les faces d'un tétraèdre régulier.



FIGURE 2.13 – Photo tirées de la brochure publicitaire *SoundField* de TSL Professional Products (à gauche) et de Euphonia (à droite). Montages tétraédriques des quatre capsules du microphone *SoundField* Mk-V (à gauche) et DPA-4 (à droite).

La majorité des montages tétraédriques proposés à la fin des années 60 présentaient des distorsions spatiales. Le montage de Gerzon a permis de résoudre ce problème. L'analogie de position entre les capteurs à l'enregistrement et les émetteurs à la reproduction a aussi été résolue : c'est de là que vient le passage par l'intermédiaire d'un format de signal différent permettant d'adapter la prise de son tétraédrique à n'importe quelle disposition de haut-parleurs.

Technologie Ambisonics

Le système Ambisonics¹ se schématise en quatre sections appelées « format A, format B, format C et format D ». Le format de signal choisi pour la transmission ou l'inscription sur un support donné destiné à la consommation est le format C. Le signal combiné qui servira à alimenter une sonorisation acoustique sera le format D. Le format B permet de synthétiser

1. ou encore Ambisonic, avec ou sans majuscule et dont nous tirons l'adjectif francisé "ambisonique"

des microphones dont l'azimut, le site et les caractéristiques directionnelles correspondent au nombre et à la disposition des enceintes acoustiques utilisées.

À partir de quatre capsules microphoniques cardioïdes placées de façon quasi-coïncidentes au centre d'un tétraèdre régulier dont nous pouvons voir différents montages sur la Fig. 2.13, nous obtenons les signaux LF (left-front), LB (left-back), RF (right-front) et RB (right-back), correspondants aux sorties de chaque capsule.

A partir de la combinaison linéaire de ces signaux et avec une compensation d'amplitude et de phase afin de corriger les effets introduits par la non-coïncidence entre capsules, il est possible d'obtenir quatre nouveaux signaux de microphones virtuels correspondant à chaque canal Ambisonics B-Format. Ces signaux correspondant à une harmonique sphérique d'ordre zéro et aux trois harmoniques sphériques simples de premier ordre (voir Fig. 2.15), orientées à 90° les unes par rapport aux autres. Ces microphones virtuels ont tous le même centre de gravité et les signaux de premier ordre du format B sont désignés « X » pour celui qui pointe vers l'avant, « Y » pour celui qui pointe vers la gauche et « Z » pour celui qui pointe vers le haut. L'ordre 0 correspond au canal omnidirectionnel, il est désigné par « W », comme nous pouvons le voir sur la Fig. 2.14.

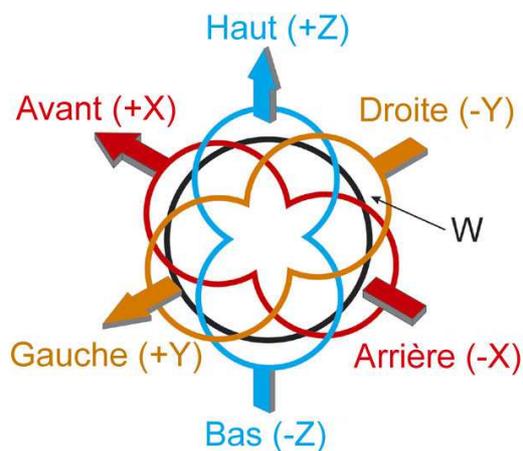


FIGURE 2.14 – D'après le manuel du *SoundField* ST450 et du contrôleur ST250 MKII édité par TSL. Composantes directionnelles du B-format : W, X, Y et Z.

Ce format intermédiaire, qui ne peut alimenter directement des haut-parleurs, s'appelle le

format B et correspond à une extension à trois dimensions d'une captation M-S consistant à enregistrer le centre de l'image sonore sur une piste et les informations latérales sur une autre piste. En attribuant aux capsules du tétraèdre d'origine les désignations C_1 , C_2 , C_3 et C_4 , la conversion du format A au format B se fait selon les combinaisons suivantes :

$$W = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$X = C_1 + C_2 - C_3 - C_4$$

$$Y = C_1 - C_2 + C_3 - C_4$$

$$Z = C_1 - C_2 - C_3 + C_4$$

Par ailleurs, le format B permet de créer n'importe quel microphone correspondant à une harmonique sphérique simple ou complexe de premier ordre et ce pointant dans n'importe quelle direction. C'est aussi le format dans lequel toutes les manipulations de pré-mixage de signal doivent intervenir.

Avec le *SoundField* Mk-V, ce signal est envoyé à une unité de contrôle comportant une entrée de type DIN 12 tiges. Une fois pré-amplifié, le signal du microphone est converti en format B et corrigé de ses irrégularités de fréquences.

La technologie Ambisonics repose mathématiquement sur la décomposition du champ acoustique en harmoniques sphériques autour d'un point, assimilable au point d'écoute de l'auditeur. L'ordre zéro des harmoniques sphériques équivaut au mode omnidirectionnel et le premier ordre aux trois modes en figure-huit correspondant aux trois axes orthogonaux. La prise de son des ordres supérieurs (HOA - High ordre Ambisonics en anglais) est possible avec des microphones spécifiques.

En tout point de l'espace, la pression acoustique peut être exprimée par une décomposition de Fourier-Bessel [Daniel, 2001], où les fonctions de directivité Y_l^m ou harmoniques sphériques apparaissent. Ces fonctions sont associées aux coefficients de pondération W_l^m . La pression s'écrit donc :

$$p(kr, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} i^l j_l(kr) W_l^m Y_l^m(\theta, \delta)$$

où k est le nombre d'onde, r est le rayon d'observation, θ et φ sont respectivement l'azimut et le site. En pratique, la décomposition de Fourier-Bessel est tronquée à un ordre fini M .

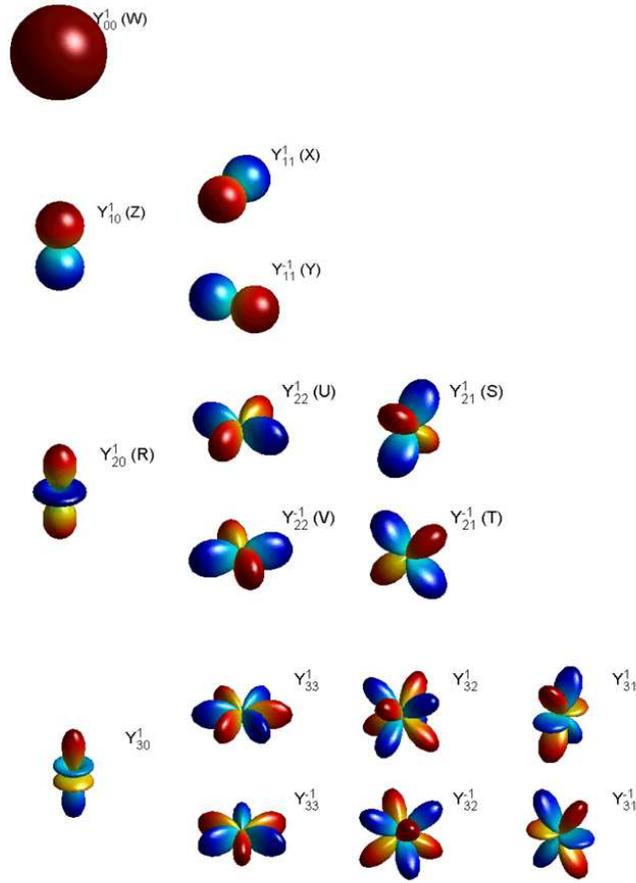


FIGURE 2.15 – D’après la thèse de Jérôme Daniel [Daniel, 2001]. Représentation des harmoniques sphériques jusqu’à l’ordre 3. Les parties rouges et bleues correspondent respectivement aux valeurs positives et négatives des fonctions d’harmoniques sphériques.

Le champ sonore est alors décrit par un nombre fini de coefficients W_l^m ($l = 0, 1, \dots, M$) aussi appelés composantes Ambisonics. Dans le cas particulier d’une onde plane d’amplitude S provenant de la direction (θ_s, φ_s) , ces composantes sont définis par [Daniel, 2001] :

$$W_l^m = Y_l^m(\theta_s, \varphi_s)S$$

Ainsi, le champ sonore est décomposé en harmoniques sphériques Y_l^m évaluées dans la direction de la source et multipliées par l’amplitude de l’onde S . Le nombre de composantes K pour un système Ambisonic à trois dimensions est calculé à partir de l’ordre M :

$$K = (M + 1)^2$$

Pour $M = 1$ il y a donc 4 composantes Ambisonics, qui correspondent aux 4 composantes du B-format [Gerzon, 1975] : W, X, Y et Z.

Outil de mesure

Le microphone de type *SoundField* d'ordre 1 permet d'accéder à la pression et à la vitesse particulaire. En reproduction stéréophonique la relation entre la pression acoustique et la vitesse des particules est faussée. Le système Ambisonics permet de rétablir cette relation. Cooper [Cooper and Shiga, 1972] souligne que Ambisonics est le seul système à pouvoir reproduire un espace acoustique tridimensionnel. Malham suggère fortement l'implantation d'un système Ambisonics de deuxième génération qui incorporerait dans le format B des microphones virtuels correspondants à l'harmonique sphérique de deuxième ordre.

Mesure de la diffusivité

Le microphone *SoundField* permet de mesurer la diffusivité présentée ci-dessus. La diffusivité a fait l'objet d'une présentation lors d'un congrès national [Espitia Hurtado et al., 2014].

2.6. CONCLUSION

Nous avons montré que lorsque le nombre de modes est grand, l'analyse modale devient lourde et un traitement statistique est alors plus convenable, traitement se basant sur les hypothèse de champ diffus.

Or la pratique nous montre que la théorie de Sabine fonctionne bien même dans les cas où le champ n'est pas diffus. La notion de champ diffus nécessite donc une définition plus correcte qui permette de généraliser la théorie de Sabine.

C'est le cas de l'approche particulaire, bien qu'il manque une méthode de simulation numérique permettant de l'appliquer. C'est le but de ce travail, et nous vérifions les résultats avec un microphone Ambisonics.

Chapitre 3

Théorie

3.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous introduisons le formalisme permettant de prendre en compte de manière globale les phénomènes physiques impliqués lors de la propagation d'une onde dans un milieu fermé comportant des obstacles. Ce formalisme se développe sous la forme d'un couplage de l'énergie et de l'intensité acoustique, obtenu à partir d'un bilan d'énergie. Dans un premier temps, nous partons de l'équation d'onde pour arriver au tenseur énergie-impulsion. Nous développons ensuite la fonction de distribution en harmoniques sphériques, et retrouvons les grandeurs du tenseur. La méthode se réduit à la conservation du tenseur énergie-impulsion. Nous présentons les équations couplées entre l'énergie et l'intensité acoustique qui en découlent. C'est un système hyperbolique d'équations différentielles linéaires du premier ordre qui, décrit la propagation de l'énergie. Nous présentons ensuite les coefficients d'absorption et de diffusion introduits par une méthode d'intégration des équations couplées sur une ou deux dimensions, ce qui, à l'aide du libre parcours moyen, nous permet de formuler le système en une et deux dimensions. Nous introduisons ensuite le potentiel d'intensité, et nous écrivons le système sous la forme d'une équation à une variable, soit en énergie, soit en intensité acoustique, soit en potentiel d'intensité. Enfin, ce dernier nous amène à proposer des conditions aux limites, avant de conclure ce chapitre par une méthode analytique approchée.

3.2. ÉQUATION D'ONDE

Nous considérons l'équation d'onde appliquée au potentiel des vitesses Ψ défini par $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Psi$ et $p = \rho\partial_t\Psi$ où \vec{v} est le vecteur vitesse particulaire, $\vec{\nabla}(\cdot)$ est l'opérateur gradient et p la pression sonore. Nous avons

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi = 0 \quad (3.1)$$

avec $\Delta(\cdot)$ et $\partial_{tt}(\cdot)$ l'opérateur Laplace et la dérivée seconde par rapport au temps respectivement. Nous avons noté c la célérité de l'onde dans le milieu de propagation et nous noterons $\partial_i(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ les dérivées partielles et $d_i(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx_i}$ les dérivées totales par rapport à la variable i dans la suite du document.

3.3. CONSERVATION DE LA DENSITÉ D'ÉNERGIE

En multipliant l'Eq. (3.1) et la première dérivée spatiale $\partial_t\Psi$ nous obtenons la conservation de la densité d'énergie à un facteur ρ près que nous négligerons par la suite :

$$\partial_t\Psi \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi - \partial_t\Psi\Delta\Psi = 0$$

En appliquant la formule de Leibnitz aux produits d'opérateurs linéaires différentiels, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \partial_t\Psi \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi &= \partial_t\left(\frac{1}{2c^2}|\partial_t\Psi|^2\right) \\ \partial_t\Psi\Delta\Psi &= \vec{\nabla} \cdot (\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi) - \vec{\nabla}\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi) - \partial_t\left(\frac{1}{2}|\vec{\nabla}\Psi|^2\right) \end{aligned}$$

où $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau})$ est l'opérateur divergence. Par soustraction, nous obtenons

$$-\vec{\nabla} \cdot (\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi) + \frac{1}{2}\partial_t(|\vec{\nabla}\Psi|^2 + \frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2) = 0 \quad (3.2)$$

Morse et Feshback [Morse and Feshbach, 1953] définissent la densité d'énergie E telle que

$$E = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2 + |\vec{\nabla}\Psi|^2\right) \quad (3.3)$$

et le vecteur d'intensité acoustique \vec{I} qui caractérise le flux d'énergie moyen :

$$\vec{I} = -\rho\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi = p\vec{v} \quad (3.4)$$

En notant $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{c}$, la conservation de la densité d'énergie donnée dans l'Eq. (3.2) avec les Eq. (3.3) et (3.4) s'écrit

$$\frac{1}{c}\partial_t E + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.5)$$

Par extension, nous appellerons \vec{J} l'intensité acoustique.

3.4. CONSERVATION DE L'INTENSITÉ ACOUSTIQUE

De la même manière, en multipliant l'Eq. (3.1) et la première dérivée spatiale $\vec{\nabla}\Psi$ nous obtenons l'équation de conservation du vecteur intensité acoustique :

$$\vec{\nabla}\Psi \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi - \vec{\nabla}\Psi \Delta\Psi = 0$$

En considérant le second membre de la partie gauche de l'équation, nous avons

$$-\vec{\nabla}\Psi \Delta\Psi = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Psi \otimes \vec{\nabla}\Psi) + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} |\vec{\nabla}\Psi|^2 \right)$$

où \otimes est le produit tensoriel. Le premier membre de la partie gauche donne

$$\vec{\nabla} \frac{1}{c^2}\Psi \partial_{tt}\Psi = \frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t\Psi \vec{\nabla}\Psi) - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} |\partial_t\Psi|^2 \right)$$

En additionnant les deux membres, nous avons

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t\Psi \vec{\nabla}\Psi) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Psi \otimes \vec{\nabla}\Psi) + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2c^2} |\partial_t\Psi|^2 - \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\Psi|^2 \right) = 0 \quad (3.6)$$

avec $\rho\partial_t\Psi \vec{\nabla}\Psi = -\vec{I} = -c\vec{J}$

La conservation du vecteur intensité acoustique est donnée par l'Eq. (3.6) avec les Eq. (3.3) et (3.4) :

$$\frac{1}{c}\partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \underline{\underline{E}} = 0 \quad (3.7)$$

où $\underline{\underline{E}}$ est le tenseur symétrique onde-contrainte, noté différemment de E , la densité d'énergie.

3.5. ÉQUATIONS COUPLÉES

En développant le tenseur onde-contrainte, les Eq. (3.5) et (3.7) peuvent s'écrire comme un système d'équations couplées (EC) :

$$\frac{1}{c}\partial_t E_{tt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.8)$$

3.6. Fonction de distribution de l'énergie en harmoniques sphériques

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{yx} & E_{zx} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{zy} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

Où les E_{ij} peuvent être exprimés en termes de potentiel des vitesses par

$$\begin{aligned} E_{tt} &= E = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 + |\vec{\nabla} \Psi|^2 \right) \\ E_{xx} &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 + |\partial_x \Psi|^2 - |\partial_y \Psi|^2 - |\partial_z \Psi|^2 \right) \\ E_{yy} &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 - |\partial_x \Psi|^2 + |\partial_y \Psi|^2 - |\partial_z \Psi|^2 \right) \\ E_{zz} &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 - |\partial_x \Psi|^2 - |\partial_y \Psi|^2 + |\partial_z \Psi|^2 \right) \\ E_{xy} &= \rho \partial_x \Psi \partial_y \Psi \\ E_{xz} &= \rho \partial_x \Psi \partial_z \Psi \\ E_{yz} &= \rho \partial_y \Psi \partial_z \Psi \end{aligned}$$

Nous notons que les Eq. (3.8) et (3.9) expriment le théorème de Noether [Noether, 1918], connectant la symétrie avec les lois de conservations.

De plus, nous pouvons remarquer que le vecteur intensité acoustique peut être exprimé sous la forme $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z) = (E_{tx}, E_{ty}, E_{tz})$ où J_x , J_y et J_z sont les intensités acoustiques selon les directions \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} respectivement. En effet, le vecteur intensité acoustique peut aussi être exprimé en termes de potentiel des vitesses :

$$\begin{aligned} E_{tx} &= -\frac{\rho}{c} \partial_t \Psi \partial_x \Psi \\ E_{ty} &= -\frac{\rho}{c} \partial_t \Psi \partial_y \Psi \\ E_{tz} &= -\frac{\rho}{c} \partial_t \Psi \partial_z \Psi \end{aligned}$$

3.6. FONCTION DE DISTRIBUTION DE L'ÉNERGIE EN HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Il y a 60 ans, Morse et Feshbach [Morse and Feshbach, 1953] ont proposé une interprétation de l'Eq. (3.7) en utilisant la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$. La fonction de distribution appliquée à un champ de N particules sonores est définie comme le nombre de particules à

l'instant t dans l'espace des phases, c'est à dire à la position \vec{r} avec la vitesse \vec{v} . Intégrée sur l'espace des vitesses, la fonction de distribution donne la concentration moyenne de particules par unité de volume en une position donnée. Pour un champ de particules sonore, nous obtenons la densité d'énergie :

$$E(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) dV_v$$

où dV_v est un élément de l'espace des vitesses. En décomposant le champ acoustique comme la somme de contributions de fonctions d'harmoniques sphériques pondérées et tronquées à l'ordre l , nous développons la fonction de distribution sous la forme des harmoniques sphériques :

$$f(x, \vec{v}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} W_l^m(x, t) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

où nous avons effectué le changement de variable $\vec{v} = (c \sin(\theta) \cos(\varphi), c \sin(\theta) \sin(\varphi), c \cos(\theta))$, où θ et φ sont les coordonnées angulaires du système de coordonnées sphériques, et où les harmoniques sphériques sont définies par

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) \cos(m\varphi) \\ Y_l^{-m}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{-m}(\cos(\theta)) \sin(m\varphi) \end{aligned} \quad m \geq 0$$

où $-l \leq m \leq +l$ et $P_l^m(x)$ sont les fonctions associées de Legendre :

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Pour calculer les W_l^m , nous projetons la fonction f sur les harmoniques sphériques. Les calculs sont détaillés en Annexe A. En se plaçant en coordonnées cartésiennes, la projection s'écrit en fonction des termes énergétiques :

$$\begin{aligned} E(x, t) &= 4\pi W_0^0(x, t) \\ J_x &= \frac{4\pi}{3} W_1^0 \\ J_y &= \frac{4\pi}{3} W_1^1 \\ J_z &= \frac{4\pi}{3} W_1^{-1} \end{aligned}$$

3.6. Fonction de distribution de l'énergie en harmoniques sphériques

Nous introduisons un terme quadripolaire Q , correspondant aux termes énergétiques pour les harmoniques sphériques d'ordre 2. De même, les calculs sont détaillés en Annexe A :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{16\pi}{5} W_2^0 \\ Q_1 &= \frac{4\pi}{15} W_2^1 \\ Q_{-1} &= \frac{4\pi}{15} W_2^{-1} \\ Q_2 &= \frac{16\pi}{15} W_2^2 \\ Q_{-2} &= \frac{16\pi}{15} W_2^{-2} \end{aligned}$$

La fonction de distribution peut maintenant s'écrire en fonction des termes énergétiques :

– l'ordre 0 s'écrit

$$f(x, \vec{v}, t) = \frac{1}{4\pi} E(x, t) Y_0^0(\theta, \varphi)$$

– l'ordre 1 s'écrit

$$f(x, \vec{v}, t) = \frac{3}{4\pi} J_x(x, t) Y_1^0(\theta, \varphi) + \frac{3}{4\pi} J_y(x, t) Y_1^1(\theta, \varphi) + \frac{3}{4\pi} J_z(x, t) Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$$

– l'ordre 2 s'écrit

$$\begin{aligned} f(x, \vec{v}, t) &= \frac{4\pi}{5} Q_0(x, t) Y_2^0(\theta, \varphi) + \frac{4\pi}{15} Q_1(x, t) Y_2^1(\theta, \varphi) \\ &+ \frac{4\pi}{15} Q_{-1}(x, t) Y_2^{-1}(\theta, \varphi) + \frac{4\pi}{15} Q_2(x, t) Y_2^2(\theta, \varphi) \\ &+ \frac{4\pi}{15} Q_{-2}(x, t) Y_2^{-2}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Nous remarquons que la conservation de la fonction de distribution est donnée par

$$d_t f(x, \vec{v}, t) = \partial_t f(x, \vec{v}, t) + \vec{\nabla}_x f(x, \vec{v}, t) \cdot d_t \vec{x} + \vec{\nabla}_v f(x, \vec{v}, t) \cdot d_t \vec{v} = 0$$

avec $d_t x = \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (c \cos(\theta), c \sin(\theta), c \sin(\theta) \sin(\varphi))$ et $d_t \vec{v} = 0$ (pas de force de gravité), ce qui signifie que la dérivée totale par rapport au temps de f disparaît. La conservation de f se réduit à

$$d_t f(x, \vec{v}, t) + \vec{\nabla}_x f(x, \vec{v}, t) c \cos(\theta) + \vec{\nabla}_y f(x, \vec{v}, t) c \sin(\theta) + \vec{\nabla}_z f(x, \vec{v}, t) c \sin(\theta) \sin(\varphi) = 0$$

Soit, en ne conservant que les termes contribuant aux rangs 0 et 1 :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{4\pi} \partial_t E + \frac{3}{4\pi} (\partial_t J_x \frac{v_x}{c} + \partial_t J_y \frac{v_y}{c} + \partial_t J_z \frac{v_z}{c}) \\
 &+ \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} E \cdot \vec{v} + \frac{3}{4\pi} (\vec{\nabla} J_x \frac{v_x}{c} + \vec{\nabla} J_y \frac{v_y}{c} + \vec{\nabla} J_z \frac{v_z}{c}) \cdot \vec{v} \\
 &+ \frac{5}{4\pi} (\frac{1}{4} \vec{\nabla} Q_0 (3 \cos^2(\theta) - 1)) \\
 &+ 3 \vec{\nabla} Q_1 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) + 3 \vec{\nabla} Q_{-1} \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi) \\
 &+ \frac{3}{4} \vec{\nabla} Q_2 \sin^2(\theta) \cos(2\varphi) + \frac{3}{4} \vec{\nabla} Q_{-2} \sin^2(\theta) \sin(2\varphi) \cdot \vec{v}
 \end{aligned}$$

La projection de $d_t f(x, \vec{v}, t)$ sur Y_0^0 s'écrit

$$\begin{aligned}
 &\int d_t f(x, \vec{v}, t) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{0,0}^{\pi,2\pi} [\partial_t E + 3(\vec{\nabla} J_x \frac{v_x}{c} + \vec{\nabla} J_y \frac{v_y}{c} + \vec{\nabla} J_z \frac{v_z}{c})] \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{0,0}^{\pi,2\pi} [\partial_t E + 3c(\partial_x J_x \cos^2(\theta) + \partial_y J_y \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \partial_z J_z \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi))] \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \partial_t E + 3c(\frac{1}{3} \partial_x J_x + \frac{1}{3} \partial_y J_y + \frac{1}{3} \partial_z J_z)
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien la conservation de l'énergie sous la forme $\frac{1}{c} \partial_t E + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

De même, la projection de $d_t f(x, \vec{v}, t)$ sur Y_1^0 s'écrit

$$\begin{aligned}
 &\int d_t f(x, \vec{v}, t) Y_1^0 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \int d_t f(x, \vec{v}, t) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{0,0}^{\pi,2\pi} \{[3\partial_t J_x \frac{v_x}{c} + \partial_x E v_x + \frac{5}{4} \partial_x Q_0 (3 \cos^2(\theta) - 1) v_x \\
 &+ 15[\partial_y Q_1 (\cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) v_y + \partial_z Q_{-1} (\cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi) v_z)]\} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{0,0}^{\pi,2\pi} \{[3\partial_t J_x \cos^2(\theta) + \partial_x E c \cos^2(\theta) + \frac{5}{4} \partial_x Q_0 (3 \cos^2(\theta) - 1) c \cos^2(\theta) \\
 &+ 15[\partial_y Q_1 c (\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \partial_z Q_{-1} c (\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi))]\} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= 3\partial_t J_x + \partial_x E \frac{c}{3} + \partial_x 54 \partial_x Q_0 + c \partial_x Q_1 + c \partial_x Q_{-1}
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien la conservation de l'intensité acoustique selon x sous la forme $\partial_t J_x + c \partial_x \frac{1}{3} (E + Q_0) + c \partial_y Q_1 + c \partial_z Q_{-1} = 0$.

La projection sur les deux autres harmoniques sphériques de rang 1 donne de même la conservation de l'intensité acoustique selon y et selon z .

Nous pouvons maintenant écrire la relation entre les termes quadripolaires et le tenseur onde-contrainte. Notamment, les EC présentées peuvent être écrites avec les termes quadripolaires du tenseur onde-contrainte. Le système d'EC des Eq. (3.5) et (3.7) devient

$$\frac{1}{c}\partial_t\vec{J} + \vec{\nabla} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(Q_0 + E) & Q_1 & Q_{-1} \\ Q_1 & \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}Q_0 + \frac{2}{3}E + Q_2) & \frac{1}{2}Q_{-2} \\ Q_{-1} & \frac{1}{2}Q_{-2} & \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}Q_0 + \frac{2}{3}E - Q_2) \end{pmatrix} = 0$$
(3.10)

où nous retrouvons par soustraction les termes quadripolaires en fonction du potentiel des vitesses Φ :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \rho(2|\partial_x\Psi|^2 - |\partial_y\Psi|^2 - |\partial_z\Psi|^2) \\ Q_1 &= \rho\partial_x\Psi \cdot \partial_y\Psi \\ Q_{-1} &= \rho\partial_x\Psi \cdot \partial_z\Psi \\ Q_2 &= \rho(|\partial_y\Psi|^2 - |\partial_z\Psi|^2) \\ Q_{-2} &= 2\rho\partial_y\Psi \cdot \partial_z\Psi \end{aligned}$$

3.7. TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION

3.7.1. Cas trois dimensions

Nous sommes maintenant capable de généraliser la conservation de l'énergie par la combinaison de toutes les quantités d'énergies E , \vec{J} et $\underline{\underline{E}}$ dans un tenseur unique, le tenseur énergie-impulsion :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & E_{tx} & E_{ty} & E_{tz} \\ E_{tx} & E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{ty} & E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{tz} & E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{pmatrix}$$

équivalent à

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & \vec{J}^T \\ \vec{J} & \underline{\underline{E}} \end{pmatrix}$$

avec $\underline{\underline{T}}$ le tenseur énergie-impulsion. Nous remarquons avec l'Eq. (3.10) que $E_{xx} + E_{yy} + E_{zz} = E$.

3.7.2. Cas deux dimensions

En deux dimensions, le tenseur onde-contrainte devient

$$\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{pmatrix}$$

Les EC sont alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t E_{tt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \frac{1}{c} \partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{yx} \\ E_{xy} & E_{yy} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\vec{\nabla}(\cdot) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} (\cdot)$$

avec $\vec{J} = (J_x, J_y) = (E_{tx}, E_{ty})$ et les E_{ij} s'exprimant en termes de potentiel des vitesses par

$$\begin{aligned} E_{tt} &= E = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 + |\vec{\nabla} \Psi|^2 \right) \\ E_{tx} &= -\frac{\rho}{c} \partial_t \Psi \partial_x \Psi \\ E_{ty} &= -\frac{\rho}{c} \partial_t \Psi \partial_y \Psi \\ E_{xx} &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 + |\partial_x \Psi|^2 - |\partial_y \Psi|^2 \right) \\ E_{yy} &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 - |\partial_x \Psi|^2 + |\partial_y \Psi|^2 \right) \\ E_{xy} &= \rho \partial_x \Psi \partial_y \Psi \end{aligned}$$

Comme en trois dimensions, nous en déduisons une généralisation sous la forme d'un tenseur énergie-impulsion :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & E_{tx} & E_{ty} \\ E_{tx} & E_{xx} & E_{xy} \\ E_{ty} & E_{xy} & E_{yy} \end{pmatrix}$$

Équivalent à

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & \vec{J}^T \\ \vec{J} & \underline{\underline{E}} \end{pmatrix}$$

Comme en trois dimensions, nous devons avoir $E_{xx} + E_{yy} = E$.

3.7.3. Cas une dimension

En une dimension, le tenseur onde-contrainte devient

$$\underline{\underline{E}} = E_{xx}$$

Les EC sont alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t E_{tt} + \partial_x J &= 0 \\ \frac{1}{c} \partial_t J + \partial_x E_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

avec $J = J_x = E_{tx}$ et les E_{ij} s'exprimant en termes de potentiel des vitesses par

$$\begin{aligned} E_{tt} &= E \\ E_{tx} &= -\frac{\rho}{c} \partial_t \Psi \partial_x \Psi = J \\ E_{xx} = E &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{c^2} |\partial_t \Psi|^2 + |\partial_x \Psi|^2 \right) \end{aligned}$$

Comme en trois dimensions, nous en déduisons une généralisation sous la forme d'un tenseur énergie-impulsion :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & E_{tx} \\ E_{tx} & E_{xx} \end{pmatrix}$$

Équivalent à

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & J \\ J & E \end{pmatrix}$$

3.8. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE PAR UNE MÉTHODE D'INTÉGRATION

Les relations de conservation de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique font intervenir des paramètres liés au comportement du son lors de la propagation dans le milieu. La diffraction et la diffusion de surface sont décrites dans la littérature sous la forme d'un

coefficient de diffusion β pris en compte aux conditions limites. Ces phénomènes ont été décrits pour la première fois par Ollendorff [Ollendorff, 1969] et plus tard par Picault *et al.* [Picault et al., 1997]. Or depuis longtemps, dans le cadre de la théorie de Sabine, les chercheurs ont tenté de définir les paramètres de diffusion [Mommertz, 2000], de les caractériser objectivement [Rindel and Jeon, 2003, Sakuma et al., 2009] ou subjectivement [Ryu and Jeon, 2008]. Ici, nous proposons une équation de diffusion définie au Chap. 2 qui, complétée par un bilan d'énergie sur les parois, introduit l'absorption et la diffusion de manière naturelle.

3.8.1. Intégration en une dimension

Bilan d'énergie sur les parois

Nous considérons l'Eq. (3.8) et la propagation du son dans un couloir parallèle à la direction \vec{x} avec pour dimensions $l_x \times l_y \times l_z$ où l_x est la longueur, l_y la largeur et l_z la hauteur du couloir. La section du couloir est donnée par $S = l_y l_z$. Nous considérons E et J_x constants sur la section, J_y est indépendant de z et J_z est indépendant de y . Nous effectuons une intégration sur la section $S = l_y l_z$:

$$\frac{1}{c} \int_S \partial_t E dS + \int_S \partial_x J_x dS + \int_S \partial_y J_y dS + \int_S \partial_z J_z dS = 0 \quad (3.11)$$

où $dS = dy dz$ est un élément de la section du couloir, dy et dz sont des éléments de la largeur et de la hauteur respectivement. En résolvant l'intégration de l'Eq. (3.11), nous obtenons une relation faisant intervenir l'absorption de paroi :

$$\frac{1}{c} \partial_t E S + \partial_x J_x S + (J_y^+ - J_y^-) l_z + (J_z^+ - J_z^-) l_y = 0 \quad (3.12)$$

où J_y^+ est l'intensité acoustique dans la direction \vec{y} proche de la paroi située du côté +. Ainsi, J_y^+ resp. J_y^- est le flux d'énergie à travers les parois latérales du couloir +, resp. - (selon la direction \vec{y}). Ce flux est proportionnel à l'énergie absorbée par la paroi :

$$J_y^+ = -J_y^- = J_{abs} \quad (3.13)$$

En effectuant un bilan d'énergie sur les parois, nous calculons l'intensité acoustique incidente J_{inc} et l'intensité acoustique réfléchie J_{ref} [Jing and Xiang, 2008] :

$$\begin{aligned} J_{inc} &= \frac{E}{4} + \frac{J}{2} \\ J_{ref} &= \frac{E}{4} - \frac{J}{2} \end{aligned}$$

Le bilan d'énergie peut s'écrire

$$J_{inc} - J_{ref} = J_{abs}$$

où $J_{abs} = \alpha J_{inc}$ est l'intensité acoustique absorbée par la paroi et α est le coefficient d'absorption de Sabine.

Nous avons

$$J_{abs} = J = \alpha \left(\frac{E}{4} + \frac{J}{2} \right)$$

Soit

$$J = \frac{\alpha}{2(2 - \alpha)} E \quad (3.14)$$

Nous introduisons le coefficient d'absorption modifié A :

$$A = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

et l'Eq. (3.13) devient

$$J_y^+ = -J_y^- = J = \frac{AE}{4}$$

De même pour J_z^+ et J_z^- :

$$J_z^+ = -J_z^- = J = \frac{AE}{4}$$

où le coefficient $\frac{1}{4}$ provient de la théorie du champ diffus [Valeau et al., 2006]. L'Eq. (3.12) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{c} \partial_t ES + \partial_x J_x S + AE \frac{l_y + l_z}{2} = 0 \quad (3.15)$$

La définition du libre parcours moyen est

$$\lambda = \frac{4V}{S_w} \quad (3.16)$$

avec S_w la surface totale des parois. La surface totale des parois d'un couloir de longueur l_x , largeur l_y et hauteur l_z peut être développée telle que $S_w = 2l_x(l_y + l_z) + 2l_y l_z$. En divisant le numérateur et le dénominateur de l'Eq. (3.16) par la longueur du couloir l_x , nous obtenons

$$\lambda = \frac{4S}{2(l_y + l_z) + 2\frac{l_y l_z}{l_x}} \quad (3.17)$$

Le couloir est considéré comme infiniment long, la largeur et la hauteur peuvent être négligées dans la seconde partie du dénominateur de l'Eq. (3.17), se transformant en

$$\lambda = \frac{2S}{l_y + l_z} \quad (3.18)$$

En remplaçant l'Eq. (3.18) dans l'Eq. (3.15), nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{c} \partial_t E + \partial_x J_x = -\frac{A}{\lambda} E \quad (3.19)$$

Bilan de la quantité de mouvement sur les parois

En appliquant cette méthode à l'Eq. (3.9), ses trois composantes deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_S \partial_t J_x dS + \int_S \partial_x E_{xx} dS + \int_S \partial_y E_{xy} dS + \int_S \partial_z E_{xz} dS &= 0 \\ \frac{1}{c} \int_S \partial_t J_y dS + \int_S \partial_x E_{yx} dS + \int_S \partial_y E_{yy} dS + \int_S \partial_z E_{yz} dS &= 0 \\ \frac{1}{c} \int_S \partial_t J_z dS + \int_S \partial_x E_{zx} dS + \int_S \partial_y E_{zy} dS + \int_S \partial_z E_{zz} dS &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous n'avons besoin que de la première équation. En intégrant, l'Eq. (3.20) devient

$$\frac{1}{c} \partial_t J_x S + \partial_x E_{xx} S + (E_{xy}^+ - E_{xy}^-) l_z + (E_{xz}^+ - E_{xz}^-) l_y = 0 \quad (3.21)$$

où E_{xy}^+ est la contrainte ondulatoire sur la paroi située du côté +. Ainsi E_{xy}^+ , resp. E_{xy}^- , est la contrainte sur les parois latérales +, resp. -, du couloir. De plus nous proposons d'écrire $J = J_x$, puisque J ne comporte qu'une seule composante.

Cette contrainte est proportionnelle à l'intensité acoustique diffusée par la paroi :

$$E_{xy}^+ = -E_{xy}^- = M_{dif} \quad (3.22)$$

où M_{dif} est le moment diffusé par la paroi. Comme pour le coefficient d'absorption modifié, un bilan d'intensité acoustique sur les parois peut être fait en considérant le moment entrant $M_{xy,ent}$ et le moment sortant $M_{xy,sor}$, et avec $J = J_x$, puisque J ne comporte qu'une seule composante :

$$\begin{aligned} M_{xy,ent} &= \frac{E_{xy}}{2} + \frac{J}{4} \\ M_{xy,sor} &= -\frac{E_{xy}}{2} + \frac{J}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, le bilan de moment ondulatoire est

$$M_{xy,ent} - M_{xy,sor} = M_{xy,dif}$$

où $M_{xy,dif} = \beta M_{xy,ent}$ est le moment dévié par la paroi et β est le coefficient de diffusion.

Nous avons

$$M_{xy,dif} = E_{xy} = \beta \left(\frac{E_{xy}}{2} + \frac{J}{4} \right)$$

Soit

$$E_{xy} = \frac{\beta}{2(2-\beta)} J$$

Nous introduisons le coefficient de diffusion modifié $D = \frac{\beta}{1-\frac{\beta}{2}}$, et l'Eq. (3.22) devient

$$E_{xy}^+ = -E_{xy}^- = \frac{DJ}{4}$$

De même pour E_{xz}^+ et E_{xz}^- :

$$E_{xz}^+ = -E_{xz}^- = \frac{DJ}{4}$$

L'Eq. (3.21) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{c} \partial_t JS + \partial_x E_{xx} S + DJ \frac{(l_y + l_z)}{2} = 0 \quad (3.23)$$

A partir de quoi nous introduisons le libre parcours moyen dans un couloir en remplaçant l'Eq. (3.18) dans l'Eq. (3.23) :

$$\frac{1}{c} \partial_t J + \partial_x E_{xx} = -\frac{D}{\lambda} J \quad (3.24)$$

Les Eq. (3.19) et (3.24) forment un système hyperbolique d'EC différentielles linéaires du premier ordre. Ces équations décrivent la conservation de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique à une dimension, avec prise en compte sur les parois des pertes dues à l'absorption et de la diffusion, sous la forme des coefficients d'absorption et de diffusion modifiés A et D . Ce dernier dévie la densité d'énergie vers différentes directions de propagation de l'intensité acoustique : vers l'avant ou vers l'arrière. En une dimension, les caractéristiques d'absorption et de diffusion des parois parallèles à la direction de propagation sont prises en compte dans les équations de volume, alors que les caractéristiques des parois perpendiculaires à la direction de propagation sont prises en compte par les conditions limites.

3.8.2. Intégration en deux dimensions

Bilan d'énergie sur les parois

Comme pour l'intégration en une dimension, nous considérons l'Eq. (3.8) pour la propagation du son dans un plateau parallèle au plan formé par les directions \vec{x} et \vec{y} , avec pour

dimensions $l_x \times l_y \times l_z$ où l_x est la longueur, l_y la largeur et l_z la hauteur du plateau. Nous considérons E , J_x et J_y constant sur la hauteur du plateau. Nous effectuons une intégration sur la hauteur l_z :

$$\frac{1}{c} \int_{l_z} \partial_t E dz + \int_{l_z} \partial_x J_x dz + \int_{l_z} \partial_y J_y dz + \int_{l_z} \partial_z J_z dz = 0 \quad (3.25)$$

L'intégration de l'Eq. (3.25) donne

$$\frac{1}{c} \partial_t E l_z + \partial_x J_x l_z + \partial_y J_y l_z + (J_z^+ - J_z^-) = 0 \quad (3.26)$$

où J_z^+ est l'intensité acoustique dans la direction \vec{z} proche de la paroi située du côté +. Ainsi J_z^+ , resp. J_z^- , est le flux d'intensité acoustique à travers les parois horizontales supérieures, resp. inférieures, du plateau. Ce flux est proportionnel à l'énergie absorbée par la paroi :

$$J_z^+ = -J_z^- = J_{abs} \quad (3.27)$$

En effectuant un bilan d'énergie sur les parois, nous calculons l'intensité acoustique incidente J_{inc} et l'intensité acoustique réfléchie J_{ref} [Jing and Xiang, 2008] :

$$\begin{aligned} J_{z,inc} &= \frac{E}{4} + \frac{J_z}{2} \\ J_{z,ref} &= \frac{E}{4} - \frac{J_z}{2} \end{aligned}$$

Le bilan d'énergie peut s'écrire

$$J_{z,inc} - J_{z,ref} = J_{z,abs}$$

où $J_{z,abs} = \alpha J_{z,inc}$ est l'intensité acoustique absorbée par la paroi et α est le coefficient d'absorption de Sabine.

Nous avons

$$J_{z,abs} = J_z = \alpha \left(\frac{E}{4} + \frac{J_z}{2} \right)$$

Soit

$$J_z = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} E \quad (3.28)$$

Nous introduisons à nouveau le coefficient d'absorption modifié A :

$$A = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

L'Eq. (3.27) devient

$$J_z^+ = -J_z^- = J = \frac{AE}{4}$$

L'Eq. (3.26) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{c}\partial_t E l_z + \partial_x J_x l_z + \partial_y J_y l_z + \frac{AE}{2} = 0 \quad (3.29)$$

Nous reprenons l'Eq. (3.16) concernant le libre parcours moyen et nous remarquons que la surface totale des parois d'un plateau de longueur l_x , de largeur l_y et de hauteur l_z peut être développée telle que $S_w = 2l_x l_y (1 + l_z(\frac{1}{l_x} + \frac{1}{l_y}))$. En divisant le numérateur et le dénominateur de l'Eq. (3.16) par le produit des longueur et largeur du plateau $l_x l_y$, nous obtenons

$$\lambda = \frac{4l_z}{2(1 + l_z[\frac{1}{l_x} + \frac{1}{l_y}])} \quad (3.30)$$

Le plateau ayant une longueur et une largeur très grande par rapport à sa hauteur, cette dernière peut être négligée dans la seconde partie du dénominateur de l'Eq. (3.30), se transformant en

$$\lambda = 2l_z \quad (3.31)$$

En remplaçant l'Eq. (3.31) dans l'Eq. (3.29), nous obtenons l'Eq. (3.32) :

$$\frac{1}{c}\partial_t E + \partial_x J_x + \partial_y J_y = -\frac{A}{\lambda}E \quad (3.32)$$

Bilan de la quantité de mouvement sur les parois

Comme en une dimension, nous appliquons cette méthode à l'Eq. (3.9). L'intégration des trois composantes sur la hauteur l_z s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{l_z} \partial_t J_x dz + \int_{l_z} \partial_x E_{xx} dz + \int_{l_z} \partial_y E_{xy} dz + \int_{l_z} \partial_z E_{xz} dz &= 0 \\ \frac{1}{c} \int_{l_z} \partial_t J_y dz + \int_{l_z} \partial_x E_{yx} dz + \int_{l_z} \partial_y E_{yy} dz + \int_{l_z} \partial_z E_{yz} dz &= 0 \\ \frac{1}{c} \int_{l_z} \partial_t J_z dz + \int_{l_z} \partial_x E_{zx} dz + \int_{l_z} \partial_y E_{zy} dz + \int_{l_z} \partial_z E_{zz} dz &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nous n'avons besoin que des deux premières lignes de l'Eq. (3.33). Le résultat de leur intégration est

$$\left(\begin{aligned} \frac{1}{c}\partial_t J_x l_z + \partial_x E_{xx} l_z + \partial_y E_{xy} l_z + (E_{xz}^+ - E_{xz}^-) &= 0 \\ \frac{1}{c}\partial_t J_y l_z + \partial_x E_{yx} l_z + \partial_y E_{yy} l_z + (E_{yz}^+ - E_{yz}^-) &= 0 \end{aligned} \right) \quad (3.34)$$

où, de la même manière qu'en une dimension, E_{xz}^+ est la contrainte ondulatoire sur la paroi horizontale supérieure. Ainsi E_{xz}^+ , resp. E_{xz}^- , est le flux d'intensité acoustique à travers la paroi horizontale supérieure, resp. inférieure, du plateau. Cette contrainte est proportionnelle au moment diffusé par la paroi :

$$\begin{aligned} E_{xz}^+ &= -E_{xz}^- = E_{xx,dif} \\ E_{yz}^+ &= -E_{yz}^- = E_{yy,dif} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Comme pour le coefficient d'absorption modifié, un bilan d'intensité acoustique sur les parois peut être fait en considérant le moment entrant M_{ent} et le moment sortant M_{sor} :

- Les moments entrant et sortant dus à la direction \vec{x} s'écrivent

$$\begin{aligned} M_{xz,ent} &= \frac{1}{2}E_{xz} + \frac{1}{4}J_x \\ M_{xz,sor} &= -\frac{1}{2}E_{xz} + \frac{1}{4}J_x \end{aligned}$$

Ainsi, le bilan de quantité de mouvement est

$$M_{xz,ent} - M_{xz,sor} = M_{xz,dif}$$

où $M_{xz,dif} = \beta M_{xz,ent}$ est le moment entrant dû à la direction \vec{x} diffusée par la paroi dont la normale est parallèle à la direction \vec{z} et β est le coefficient de diffusion.

Finalement, nous avons

$$M_{xz,dif} = E_{xz} = \beta \left(\frac{1}{2}E_{xz} + \frac{1}{4}J_x \right)$$

Soit

$$E_{xz} = \frac{\beta}{2(2-\beta)} J_x$$

- Les moments entrant et sortant dus à la direction \vec{y} s'écrivent

$$\begin{aligned} M_{yz,ent} &= \frac{1}{2}E_{yz} + \frac{1}{4}J_y \\ M_{yz,sor} &= -\frac{1}{2}E_{yz} + \frac{1}{4}J_y \end{aligned}$$

Ainsi, le bilan de quantité de mouvement est

$$M_{yz,ent} - M_{yz,sor} = M_{yz,dif}$$

où $M_{yz,dif} = \beta M_{yz,ent}$ est le moment entrant dû à la direction \vec{y} diffusé par la paroi dont la normale est parallèle à la direction \vec{z} et β est le coefficient de diffusion.

Finalement, nous avons

$$M_{yz,dif} = E_{yz} = \beta \left(\frac{1}{2} E_{yz} + \frac{1}{4} J_y \right)$$

Soit

$$E_{yz} = \frac{\beta}{2(2-\beta)} J_y$$

Nous réintroduisons le coefficient de diffusion modifié. L'Eq. (3.35) devient

$$\begin{aligned} E_{xz}^+ &= -E_{xz}^- = E_{xz} = \frac{D J_x}{4} \\ E_{yz}^+ &= -E_{yz}^- = E_{yz} = \frac{D J_y}{4} \end{aligned}$$

L'Eq. (3.34) devient

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{J} l_z + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{E}} l_z + \frac{\beta \vec{J}}{2} = 0 \quad (3.36)$$

où $\vec{\nabla}(\cdot)$ et $\underline{\underline{E}}$ ont été donnés à la Sec. 3.7.2 avec $E_{xx} + E_{yy} = E$. Pour la suite, nous nous restreignons au cas isotrope (régime établi). Dans le cas isotrope, $E_{xx} = E_{yy} = \frac{E}{2}$ et $E_{xy} = 0$.

A partir de quoi nous introduisons le libre parcours moyen de l'Eq. (3.31). L'Eq. (3.36) devient

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{E}} = -\frac{D}{\lambda} \vec{J} \quad (3.37)$$

Les équations (3.32) et (3.37) sont des EC différentielles linéaires du premier ordre. Comme en 1D, ces équations décrivent la conservation de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique avec prise en compte de l'absorption et de la diffusion sur les parois. A la différence de la dimension une, le coefficient de diffusion modifié D de l'équation en deux dimensions dévie la densité d'énergie vers deux directions.

3.9. ÉQUATION GÉNÉRALE

Les Eq. (3.19) et (3.24) sont semblables aux équations des lignes de transmission. Nous exploitons cette similitude afin de transformer le système d'EC en une équation d'onde généralisée à une variable semblable à l'équation générale des Télégraphistes et nous la résolvons sur la densité d'énergie, l'intensité acoustique et le potentiel d'intensité que nous introduisons.

3.9.1. Équation générale des Télégraphistes

Les équations des lignes ont été élaborées par Oliver Heaviside et développées dans les années 1880. Le modèle avec pertes décrit la tension $V(x, t)$ entre deux câbles parallèles dans lesquels circule un courant d'intensité $I(x, t)$. Deux câbles parallèles sont schématisés dans la Fig. 3.1. Les équations des lignes forment un système hyperbolique d'EC différentielles linéaires du premier ordre représentant la propagation d'un signal électrique le long d'une ligne de transmission électrique.

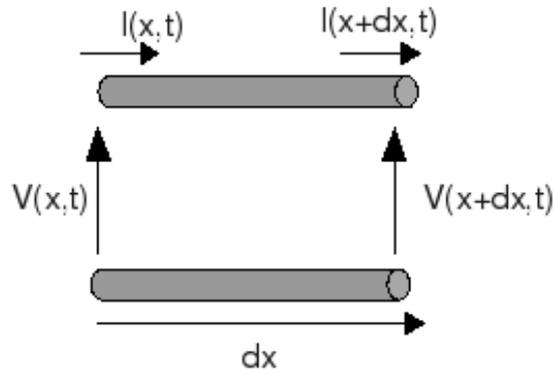


FIGURE 3.1 – Schéma d'un tronçon de câbles de lignes de transmission. Dans chaque tronçon, l'état électrique de la ligne dépend du courant $I(x, t)$ qui circule dans les câbles et la tension $V(x, t)$ qui existe entre eux.

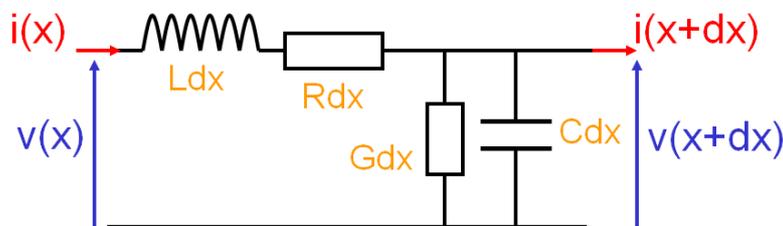


FIGURE 3.2 – Circuit électrique schématisant un tronçon de ligne de transmission.

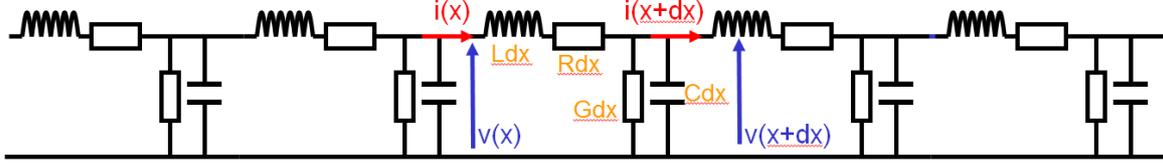


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de la propagation de proche en proche sur des tronçons élémentaires d'une ligne de transmission.

La propagation d'un signal sous forme de circuit électrique, pour un tronçon de ligne de transmission et dans le cas d'une chaîne de tronçon, est représenté schématiquement dans les Fig. 3.2 et 3.3 respectivement. Puisque le courant I à travers chacun des câbles de résistance linéique R introduit une inductance linéique L , le transfert d'énergie entre les deux conducteurs, conditionné par la conductance G de l'isolant entre les câbles et limité par leur capacité C , est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\partial_x I(x, t) &= -C \partial_t V(x, t) - GV(x, t) \\ \partial_x V(x, t) &= -L \partial_t I(x, t) - RI(x, t)\end{aligned}\tag{3.38}$$

En dérivant la deuxième ligne de l'Eq. (3.38) par rapport à x , nous obtenons

$$\partial_{xx} V(x, t) = -(L \partial_t + R) \partial_x I(x, t)$$

et finalement, en remplaçant dans cette deuxième équation l'expression de I donnée dans la première ligne de l'Eq. (3.38), nous obtenons l'équation générale des Télégraphistes :

$$\partial_{xx} V(x, t) = LC \partial_{tt} V(x, t) - (RC + GL) \partial_t V + GRV\tag{3.39}$$

Nous montrons aisément que nous obtenons la même équation pour $I(x, t)$. A partir des Eq. (3.38) nous trouvons donc une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre impliquant l'une ou l'autre des deux variables.

3.9.2. Équation générale sur la densité d'énergie et sur l'intensité acoustique

Les Eq. (3.19) et (3.24) sont semblables aux Eq. (3.38), ce qui nous permet de générer une équation similaire à l'Eq. (3.39) que nous résolvons sur la densité d'énergie ou sur l'intensité acoustique en transformant les Eq. (3.24) et (3.19) comme ci-dessous :

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{A}{\lambda}\right) E = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (3.40)$$

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right) \vec{J} = -\vec{\nabla} \frac{E}{d} \quad (3.41)$$

où d est la dimension de l'espace. En dérivant spatialement l'Eq. (3.41), nous obtenons

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\Delta \frac{E}{d} \quad (3.42)$$

En multipliant l'Eq. (3.40) par $\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right)$ et en la remplaçant dans l'Eq. (3.42), nous obtenons

$$-\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{A}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right) E = -\Delta \frac{E}{d} \quad (3.43)$$

L'Eq. (3.43) peut être développée en

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}E - \Delta \frac{E}{d} + \frac{A+D}{\lambda c}\partial_t E + \frac{AD}{\lambda^2}E = 0 \quad (3.44)$$

L'Eq. (3.44) est une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre. Elle est constituée d'une équation d'onde ordinaire à laquelle deux termes s'ajoutent combinant les effets d'absorption et de diffusion.

Nous avons obtenu l'Eq. (3.44) en nous basant sur l'équation générale des Télégraphistes. Cette équation s'appuie sur un phénomène à une dimension spatiale. Nous remarquons que l'équation obtenue s'applique néanmoins à deux dimensions spatiales.

Cette équation a été obtenue en multipliant l'Eq. (3.40) par $\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right)$ et en la remplaçant dans l'Eq. (3.42). Néanmoins en multipliant l'Eq. (3.41) par $\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{A}{\lambda}\right)$ et en la remplaçant dans l'Eq. (3.42) appliquée à l'intensité acoustique, nous obtenons une expression identique à l'Eq. (3.43) appliquée à l'intensité acoustique :

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{A}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right) \vec{J} = \Delta \frac{\vec{J}}{d} \quad (3.45)$$

3.9.3. Introduction du potentiel d'intensité

A partir des deux équations de conservation de la masse et d'Euler, nous avons introduit le potentiel des vitesses $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Psi$. L'expression de la pression en fonction de Ψ est donnée par l'équation d'Euler.

Nous proposons d'agir par analogie en introduisant le potentiel d'intensité acoustique :

$$\vec{J} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (3.46)$$

Si nous nous rappelons que nous avons fait l'hypothèse $\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \frac{E}{d} & 0 \\ 0 & \frac{E}{d} \end{pmatrix}$, il vient naturellement $\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{E}} = \vec{\nabla} \frac{E}{2}$. Ou de manière générale : $\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{E}} = \vec{\nabla} \frac{E}{d}$, avec d la dimension de l'espace.

Les deux équations de conservation sont légèrement modifiées. L'Eq. (3.37) s'écrit

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{J} + \frac{D}{\lambda} \vec{J} = -\vec{\nabla} \underline{\underline{E}} = -\vec{\nabla} \frac{E}{d}$$

En remplaçant par l'expression de \vec{J} de l'Eq. (3.46), l'Eq. précédente devient

$$\frac{1}{c} \partial_t (\vec{\nabla}\Phi) + \frac{D}{\lambda} \vec{\nabla}\Phi = -\vec{\nabla} \frac{E}{d}$$

Soit

$$\vec{\nabla} \frac{E}{d} = \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right) \vec{\nabla}\Phi$$

et finalement

$$E = d \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right) \Phi + \text{Constante} \quad (3.47)$$

De son côté, l'Eq. (3.32) s'écrit

$$\frac{1}{c} \partial_t E + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{A}{\lambda} E$$

En remplaçant \vec{J} par son expression dans l'Eq. (3.46) et en ne conservant que le terme longitudinal, nous obtenons

$$\frac{1}{c} \partial_t E - \Delta\Phi = -\frac{A}{\lambda} E$$

Soit

$$\left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{A}{\lambda} \right) E = \Delta\Phi$$

En remplaçant E par son expression dans l'Eq. (3.47), nous obtenons

$$d \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{A}{\lambda} \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right) \Phi - \Delta \Phi = 0$$

Soit

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \Phi - \Delta \frac{\Phi}{d} + \frac{A+D}{\lambda c} \partial_t \Phi + \frac{AD}{\lambda^2} \Phi = 0 \quad (3.48)$$

Nous remarquons que l'Eq. (3.48) est identique à l'Eq. (3.44), obtenue à la Sec. 3.9. C'est une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre. Elle se résout indifféremment sur la densité d'énergie, l'intensité acoustique ou le potentiel d'intensité. Ses conditions limites s'écrivent différemment en fonction de la variable étudiée.

3.10. CONDITIONS LIMITES

3.10.1. Conditions limites pour l'équation couplée

Les conditions limites pour l'EC s'écrivent à partir du bilan d'énergie effectué sur les extrémités à la Sec. 3.8. Le bilan permet d'écrire (voir Eq. (3.14)) :

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = A_r E \quad (3.49)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la paroi soit $n = \pm 1$ en une dimension et A_r est le coefficient d'absorption modifié appliqué aux extrémités du domaine et relié à l'absorption de Sabine par

$$A_r = \frac{\alpha}{2(2 - \alpha)}$$

Soit $A_r = \frac{A}{4}$.

C'est une condition limite de Neumann.

3.10.2. Conditions limites pour l'équation générale

Nous avons

$$\vec{J} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{1}{d} \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right)^{-1} \vec{\nabla} E$$

En remplaçant cette expression dans l'Eq. 3.49, nous obtenons

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{d} \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right)^{-1} \partial_n E = A_r E$$

Et finalement

$$\partial_n E + \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right) A_r E = 0 \quad (3.50)$$

C'est une condition aux limites mixte. Nous pouvons montrer que cette condition s'applique également à \vec{J} et Φ .

3.11. MODÈLE ANALYTIQUE

Morse et Feshbach [Morse and Feshbach, 1953] ont proposé la réduction des Eq. (3.19) et (3.24) appliquées à la propagation de la densité d'énergie vers une équation de diffusion. Nous étudions l'équation résultante et la comparons à l'EC. Nous la développons et remarquons qu'elle correspond à la loi de Fick établissant un lien entre le flux de la densité d'énergie et la concentration de particules dans un milieu. Cette relation est appliquée sur l'équation de diffusion [Picaut et al., 1997, Navarro Ruiz et al., 2010, Xiang et al., 2013]. Son étude par Visentina *et al.* [Visentina et al., 2012] a montré que le champ réverbéré peut être décrit par une telle loi, avec un coefficient de diffusion variable en fonction de la position. Néanmoins, le coefficient de diffusion décrit par la loi de Fick a la dimension d'une surface par unité de temps et prend en compte la géométrie de la salle à travers le libre parcours moyen. Il n'est pas comparable avec le coefficient de diffusion β décrit dans ce document.

3.11.1. Hypothèse sur les équations couplées

Morse et Feshbach [Morse and Feshbach, 1953] font l'hypothèse d'une variation temporelle de l'intensité acoustique, négligeable en comparaison avec le rapport $\frac{D}{\lambda}$. Cela conduit à supprimer le terme $\frac{\partial_t}{c}$ appliqué à \vec{J} contenue dans l'Eq. (3.24). Le système d'EC s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t E + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= -\frac{A}{\lambda} E \\ \vec{\nabla} E &= -\frac{D}{\lambda} \vec{J} \end{aligned} \quad (3.51)$$

où D a été modifié pour tenir compte de la dimension. L'Eq. (3.51) est similaire à la loi de Fick décrite dans la Sec. 3.11.

La dérivée spatiale de la deuxième ligne de l'Eq (3.51) est

$$\Delta E = -\frac{D}{\lambda} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

En substituant cette dérivée dans l'Eq (3.19), nous obtenons

$$\frac{1}{c}\partial_t E - \frac{\lambda}{D}\Delta E = -\frac{A}{\lambda}E \quad (3.52)$$

Cette équation à une variable provient de la dérivée spatiale de la loi Fick, dont la solution est obtenue par la technique de séparation des variables avec la transformé de Fourier. Nous appliquons cette technique à l'Eq. (3.52) :

$$\hat{E} = E_k^t = \int_{-\infty}^{\infty} E_x^t e^{ikx} dx \quad (3.53)$$

avec

$$\Delta \hat{E} = -k^2 \hat{E} \quad (3.54)$$

et

$$\partial_t \hat{E} = \partial_t E \quad (3.55)$$

En appliquant la transformée de Fourier de l'Eq. (3.53) à l'Eq. (3.52) avec l'Eq. (3.54) et (3.55), nous avons

$$\frac{1}{c}\partial_t \hat{E} + \frac{\lambda k^2}{D} \hat{E} = -\frac{A}{\lambda} \hat{E}$$

Cette équation peut être simplifiée par

$$\frac{1}{c}\partial_t \hat{E} = -\left(\frac{\lambda}{D}k^2 + \frac{A}{\lambda}\right)\hat{E}$$

C'est une équation différentielle dont la solution est donnée par

$$\hat{E} = \hat{E}_0 e^{-c\left(\frac{\lambda}{D}k^2 + \frac{A}{\lambda}\right)t}$$

Les conditions initiales sont $E_{x,0} = \delta(x)$. La transformée de Fourier d'un Dirac est la fonction constante égale à 1 :

$$\hat{E} = e^{-c\left(\frac{\lambda}{D}k^2 + \frac{A}{\lambda}\right)t}$$

Dans un deuxième temps nous calculons la transformée inverse de Fourier :

$$E = E_x^t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_k^t e^{-ikx} dk$$

Nous avons

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(\frac{\lambda}{D}k^2 + \frac{A}{\lambda}\right)t} e^{-ikx} dk$$

Nous considérons la partie exponentielle et nous posons $\gamma = c\frac{\lambda}{D}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\gamma k^2 t - \frac{cAt}{\lambda} - ikx &= -\frac{cAt}{\lambda} - \gamma t k^2 - ikx \\ &= -\frac{cAt}{\lambda} - \gamma t \left(k^2 - \frac{ikx}{\gamma t} \right) \\ &= -\frac{cAt}{\lambda} - \gamma t \left(k - \frac{ix}{2\gamma t} \right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma t}\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{cAt}{\lambda} - \gamma t \left(k - \frac{ix}{2\gamma t} \right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma t}} dk$$

Nous résolvons cette intégration par la formule de l'intégrale de la gaussienne. Nous avons

$$E = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 D}{4c\lambda t} - \frac{cAt}{\lambda}} \sqrt{\frac{\pi D}{c\lambda t}}$$

Ensuite, nous imposons une émission sonore à un niveau de $E_0 = 100dB$:

$$E = E_0 \sqrt{\frac{D}{4\pi c\lambda t}} e^{-\frac{x^2 D}{4c\lambda t} - \frac{cAt}{\lambda}} \quad (3.56)$$

Un expression similaire à l'Eq. (3.56) est proposée dans la littérature [Picaut et al., 1997] et résolue dans un couloir infini. La solution prend en compte l'absorption et la diffusion, cette dernière sous la forme d'un coefficient différent de celui que nous utilisons dans ce document, et définie dans la Sec. 3.8.

La première partie de l'Eq. (3.56) montre une dépendance avec le coefficient de diffusion modifié D et une dépendance inverse avec le libre parcours moyen λ . La partie exponentielle présente une dépendance avec le coefficient de diffusion modifié D et avec le carré de la position x , et une dépendance avec le coefficient d'absorption modifié et avec le temps t .

L'intégration sur le temps de l'Eq. (3.56) permet d'obtenir son asymptote temporelle, correspondant à la pente de la décroissance de l'énergie. La partie de l'exponentielle de l'Eq. (3.56) se réduit à

$$\begin{aligned}-\frac{x^2 D}{4c\lambda t} - \frac{cAt}{\lambda} &= -\frac{x^2 D + 4c^2 At^2}{4c\lambda t} \\ &= -\frac{(x\sqrt{D} + 2ct\sqrt{A})^2 - 4ctx\sqrt{AD}}{4c\lambda t} \\ &= -\left(\frac{x\sqrt{D} + 2ct\sqrt{A}}{\sqrt{4c\lambda t}} \right) + \frac{\sqrt{AD}}{\lambda} x\end{aligned}$$

L'intégration sur le temps de l'Eq. (3.56) donne

$$\int_0^\infty E dt = \int_0^\infty E_0 \sqrt{\frac{D}{4\pi c \lambda t}} e^{-\left(\frac{x\sqrt{D}+2ct\sqrt{A}}{\sqrt{4c\lambda t}}\right) + \frac{\sqrt{AD}}{\lambda}x} dt$$

Soit

$$E = \frac{1}{2} E_0 e^{-\frac{\sqrt{AD}}{\lambda}|x|} \quad (3.57)$$

Les Eq. (3.56) et (3.57) peuvent être implémentées dans MATLAB afin d'étudier numériquement le comportement de la densité d'énergie dans un couloir. Ce sujet est traité dans le Chap. 6.

3.12. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons introduit le formalisme du système d'équations couplées entre la densité d'énergie et l'intensité acoustique. Nous avons présenté le tenseur énergie-impulsion reprenant toutes les quantités énergétiques décrivant la propagation d'une onde sonore. Par une méthode d'intégration, nous avons ensuite introduit les coefficients d'absorption et de diffusion de parois et le libre parcours moyen du domaine. Enfin, nous avons formulé ce système en une et deux dimensions, et nous avons introduit le potentiel d'intensité afin de proposer les conditions aux limites. Pour conclure, nous reprenons la solution analytique proposée par Morse et Feshbach conduisant à une équation de diffusion.

Chapitre 4

Mesures et Instrumentation

4.1. INTRODUCTION

Le présent chapitre présente le matériel et les techniques de mesure utilisées dans ce travail. Nous avons introduit au Chap. 3 le formalisme du tenseur énergie-impulsion, reprenant toutes les quantités énergétiques décrivant la propagation d'une onde sonore et qui peuvent être estimées à partir de nos instruments.

Le projet est notamment porté par l'usage de la technologie Ambisonics à travers notre outil de mesures, le microphone *SoundField* ST250, mentionné au Chap. 2. L'intérêt du microphone *SoundField* est qu'il est constitué d'un assemblage tétraédrique de capsules semi-cardioides. Il permet d'avoir accès à la pression et à la vitesse particulaire, et donc d'estimer les composants du tenseur énergie-impulsion. Afin de pouvoir travailler avec cet outil, il a été nécessaire de le valider expérimentalement.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons la technique utilisée afin de relever les réponses impulsionnelles d'un espace. Le sinus glissant exponentiel est une technique rapide et efficace pour le post-traitement des données. Nous l'avons préféré à d'autres techniques et nous expliquons ce choix. Les programmes informatiques utilisés au cours de la thèse pour le post-traitement des mesures sont présentés. Il s'agit de programmes sous *MATLAB* pour l'obtention des réponses impulsionnelles à partir des signaux de mesure et du programme *OpenMIDAS* [Defrance, 2009, Polack et al., 1989, Polack et al., 1990].

Dans une deuxième partie, nous présentons la caractérisation du matériel de mesure. Nous rappelons d'abord le principe de la technologie Ambisonics et du microphone *SoundField*. Nous présentons ensuite les résultats des mesures de caractérisation du matériel qui ont eu lieu dans la grande chambre anéchoïque du Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), à Trappes. La salle a pour dimensions utiles $9 \times 8 \times 7m$ avec un volume total de $500m^3$ et une fréquence de coupure de $70Hz$, et dispose d'un mât rotatif permettant la mesure de figure de directivité.

Le matériel est constitué du microphone *SoundField* ST250 (voir Fig. 4.1) et de la source sonore omnidirectionnelle *Outline* GRS de la Fig. 4.2 munie de son caisson de graves *Tannoy* VS10. Il était nécessaire de calibrer le microphone. Nous avons vérifié expérimentalement la directivité des signaux B-Format du microphone en condition de champ libre et lointain. Nous comparons les mesures entre canaux du microphone et vérifions l'équipartition de l'énergie introduite au Chap. 3. La caractérisation du microphone a fait l'objet d'une présentation lors d'un congrès national [Espitia Hurtado et al., 2014]. Le dispositif source a lui aussi fait l'objet d'une caractérisation.



FIGURE 4.1 – Microphone ST250 dans la chambre anéchoïque du LNE (2013).



FIGURE 4.2 – Mesure de la réponse impulsionnelle dans le théâtre du Châtelet (Paris,2009).

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons en détail les espaces de bureaux ouverts dont nous avons relevé les réponses impulsionnelles. Nous détaillons les projets du bureau d'études acoustiques Impédance, partenaire industriel de la thèse, nous ayant permis d'accéder aux espaces de mesure, tandis que les plans et positions des couples émission/réception sont donnés en Annexe B.

4.2. TECHNIQUES DE MESURE

4.2.1. Signal d'excitation *in situ*

Les réponses impulsionnelles (RIs) permettent de caractériser totalement l'acoustique d'un espace pour un couple émission/réception (voir Chap. 2). La RI décrit complètement les propriétés acoustiques d'un système linéaire invariant dans le temps. La mesure de la RI et de la fonction de transfert qui lui est associée est basée sur l'émission de n'importe quel signal d'excitation dans un système temporellement invariant et linéaire, pourvu qu'elle contienne suffisamment d'énergie dans les fréquences désirées pour dominer le bruit de fond [Muller, 2001]. Les types d'excitations utilisées se regroupent en deux catégories fondamentales : les signaux indépendants asynchrones et les signaux déterministes. Ces derniers peuvent être de différents types, tous basés sur un spectre de magnitude plate mais qui diffèrent par leur phase.

Les types de signaux qui en découlent sont classiquement l'impulsionnel, le pseudo-aléatoire (e.g. MLS - de Maximum Length Sequences en anglais) et le sinus glissant, comme nous pouvons l'observer sur la Fig. 4.3. Le résultat doit être répétable, avoir un rapport signal sur bruit satisfaisant, peu de distorsion de la source (non-linéarités du transducteur) et une invariance temporelle du système.

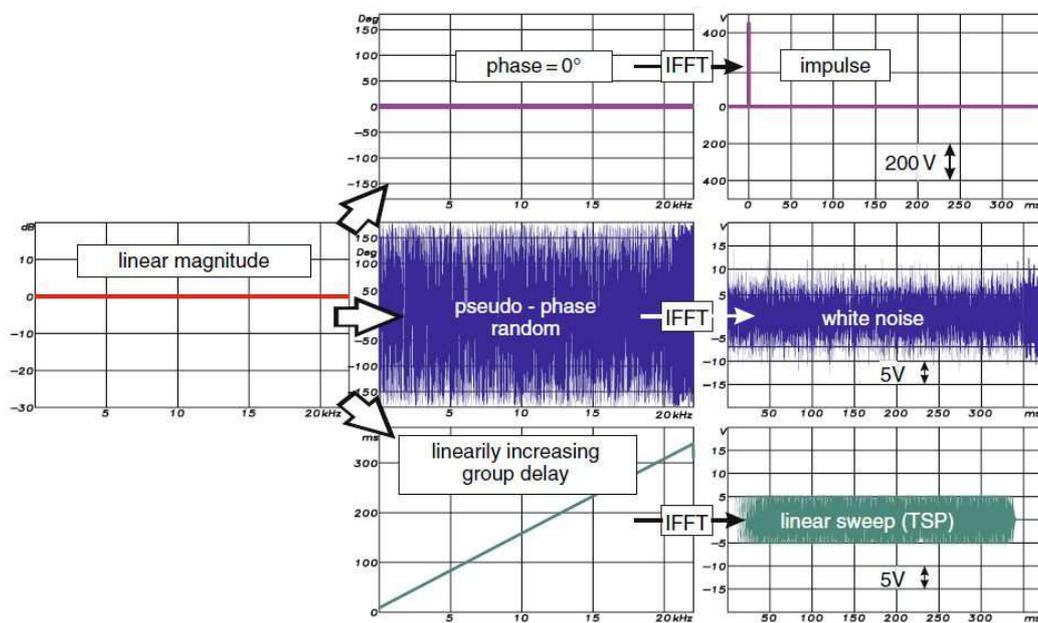


FIGURE 4.3 – Trois types de signaux d'excitations déterministes : impulsionnel, pseudo-aléatoire et sinus glissant [Muller, 2001].

La méthode de l'impulsion est aujourd'hui la plus utilisée en acoustique du bâtiment. Notamment, elle permet la mesure du temps de réverbération avec une précision suffisante selon les normes NF S 31-057 [AFNOR, 1982] encore appliquée aujourd'hui et ISO 3382-2 [AFNOR, 2008], autorisant ce type de méthode. La méthode consiste à émettre un son de manière brève, répétable et large bande. L'utilisation d'un pistolet d'alarme est courante pour les grands espaces et permet une répétabilité et un niveau signal sur bruit suffisant aux octaves 125Hz à 8000Hz [Lamothe and Bradley, 1985]. Un ballon de baudruche reste l'outil de base pour nombre de praticiens, et paraît répétable mais peu efficace concernant le rapport signal sur bruit et la directivité aux basses fréquences [Patynen et al., 2011]. Mais des études

présentent le ballon de baudruche et le pistolet d'alarme comme peu répétables, de directivité non omnidirectionnelle et de spectre non plat [Griesinger, 1996]. D'autres techniques d'excitation existent mais ne sont pas utilisées en industrie : claquement de main, pétard, claquette en bois, etc.

Seuls les signaux MLS et le sinus glissant ont des caractéristiques suffisantes pour garantir une mesure correcte selon notre cahier des charges. Les signaux MLS sont utilisés en acoustique des salles depuis les années 70 pour la mesure de RI [Schroeder, 1991]. La propriété principale d'une séquence MLS est de donner un Dirac lorsque l'on effectue son auto-corrélation, et de donner la RI d'un système lorsque l'on effectue la corrélation entre la séquence originale et la séquence passée au travers du système à dimensionner. En pratique, plusieurs études [Griesinger, 1996, Muller and Massarani, 2001] ont comparé le signal pseudo-aléatoire avec le sinus glissant et en concluent certains avantages pour le sinus glissant. On peut notamment citer la facilité pratique pour le mesurage, la plage dynamique importante et la possibilité de supprimer les distorsions harmoniques. Farina [Farina et al., 2000, Farina, 2007b, Farina, 2007a] a apporté d'importantes améliorations au post-traitement du sinus glissant. En parallèle, Jing et Xiang [Jing and Xiang, 2007] ont démontré les possibilités offertes par des signaux pseudo-aléatoires.

Le signal, avant d'être émis dans la salle, parcourt la chaîne du système source. Cette chaîne agit comme un filtre sur le signal original. Ce filtre est plus important au niveau de la source, où les haut-parleurs entraîneront des perturbations de type distorsions harmoniques et coloration. D'un côté, les distorsions harmoniques sont liées aux non linéarités des haut-parleurs lors de l'émission à niveaux importants. On observe alors la présence d'énergie à des fréquences absentes du signal. De l'autre, la coloration est plus complexe que les distorsion harmoniques, et modifiera la perception du signal par l'auditeur, en modifiant le contenu spectral du signal original. Dans les deux cas, ces filtres doivent être compensés dans la mesure du possible.

Le sinus glissant permet notamment de palier les problèmes de variations temporelles du système et, en post-traitement, de supprimer les non-linéarités. Bien que la technique utilisant un signal MLS reste potentiellement utilisable, le choix s'est porté sur le sinus glissant car il permet de séparer au mieux la réponse linéaire des distorsions harmoniques et reste la méthode la mieux indiquée pour un espace inoccupé et silencieux.

4.2.2. Post-traitement des mesures

L'enregistrement d'un sinus glissant permet d'avoir une RI. Pour l'obtenir, il est nécessaire de déconvoluer le signal enregistré lors de la mesure par le signal original émis par le dispositif source, ou de le convoluer avec son inverse. C'est cette deuxième solution qui a été utilisée. La Fig. 4.4 présente un sinus glissant typiquement émis lors des mesures *in situ* et son inverse.

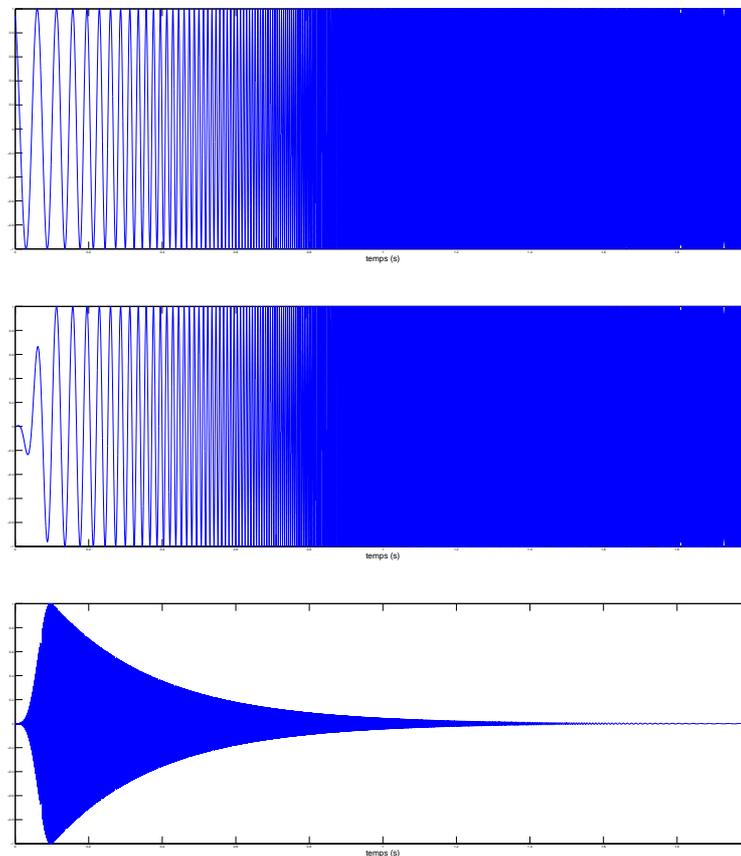


FIGURE 4.4 – De haut en bas : sinus glissant exponentiel (de $20Hz$ à $20000Hz$, $T = 2s$) ;
même sinus glissant filtré (Fade entrée et sortie de $0.1s$) ; Sinus glissant inverse.

Nous pouvons remarquer que le sinus glissant peut faire l'objet d'un filtrage en début et fin, pour empêcher le phénomène de Gibbs. Le sinus glissant est obtenu à partir de la formule

ci-dessous :

$$S = \sin\left(2\pi \frac{f_1}{K} (e^{Kt} - 1)\right)$$

avec $K = \frac{1}{T} \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$, t le temps, f_1 et f_2 les fréquences de début et de fin et $T = \frac{N}{F_s}$ la durée du signal avec N le nombre d'échantillons et F_s la fréquence d'échantillonnage. Le sinus glissant inverse S_i est obtenu à partir du sinus glissant par :

$$S_i = S' e^{-KT}$$

où S' est le signal S lu de droite à gauche.

Le résultat de la convolution du sinus glissant enregistré *in situ* S et de son inverse S_i est la RI de l'espace étudié et du système source. Il est possible, par le même type de traitement, de compenser le filtrage du dispositif source, en convoluant à nouveau le résultat du premier traitement avec sa RI. Le produit des transformées de Fourier de signaux étant égal au produit de convolution des signaux, la déconvolution s'effectue de la manière suivante :

$$\mathbf{S}_{\text{RI}} = \mathbf{S} \mathbf{S}_i$$

où \mathbf{S}_{RI} est la fonction de transfert résultant du produit de la transformée de Fourier du sinus glissant enregistré *in situ* \mathbf{S} avec son inverse \mathbf{S}_i .

Néanmoins, compenser le filtrage du système source n'est pas nécessaire dans notre cas. Son effet le plus important est perceptif, or nous n'avons pas prévu d'effectuer d'auralisation. Nous avons néanmoins pris soin de compenser les distorsions harmoniques. Celles-ci interviennent d'autant plus que la source est poussée à grande puissance. La Fig 4.5 présente le résultat de la convolution de l'enregistrement du signal émis lors de la mesure avec son inverse. On peut observer que l'utilisation d'un sinus glissant exponentiel permet, lors de la déconvolution avec son inverse, de rejeter les non-linéarités du système en amont de la RI. Ces non-linéarités peuvent ensuite être exclues par fenêtrage du signal, ce qui est un avantage par rapport à d'autres techniques de mesure de RI.

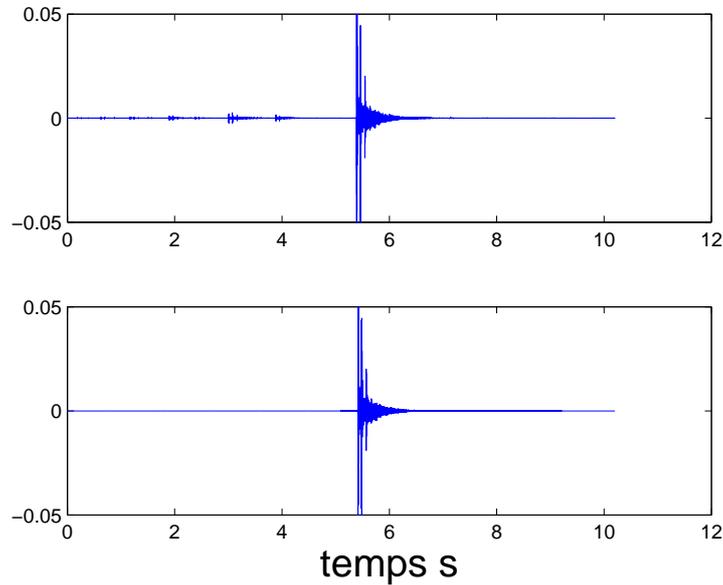


FIGURE 4.5 – De haut en bas : RI d’un bureau ouvert de $200m^2$ sans suppression des distorsions non-linéaires ; RI après suppression.

Une fois les RI enregistrées, les fichiers de mesure sont analysés à l’aide du logiciel *OpenMIDAS*, permettant le calcul des indices acoustique des salles selon la norme ISO 3382. *MIDAS* (de Mesure Informatisée pour Décrire l’Acoustique des Salles) est le fruit d’un partenariat commencé en 1985 entre l’université du Mans et l’université d’Auckland. Initialement codé en *Fortran 77*, il permet la mesure et l’analyse de RI dans un espace clôt ou en modèle réduit. *OpenMIDAS* est une version rénovée et une traduction vers *MATLAB* de *MIDAS* effectuée par Guillaume Defrance en 2008 [Defrance, 2009].

4.3. MATÉRIEL DE MESURE *in situ*

4.3.1. Source d’émission *Outline* GRS

Nous avons effectué des mesures de directivité du dispositif source dans la salle anéchoïque du LNE. Le dispositif d’émission visible sur la Fig. 4.6 est composé d’une source omnidirectionnelle *Outline* GRS et de son pré-amplificateur avec un caisson de graves *Tannoy* VS10 (cross-over à $110Hz$). Le système de mesure est un ordinateur et une carte son MOTU [®]Traveler.

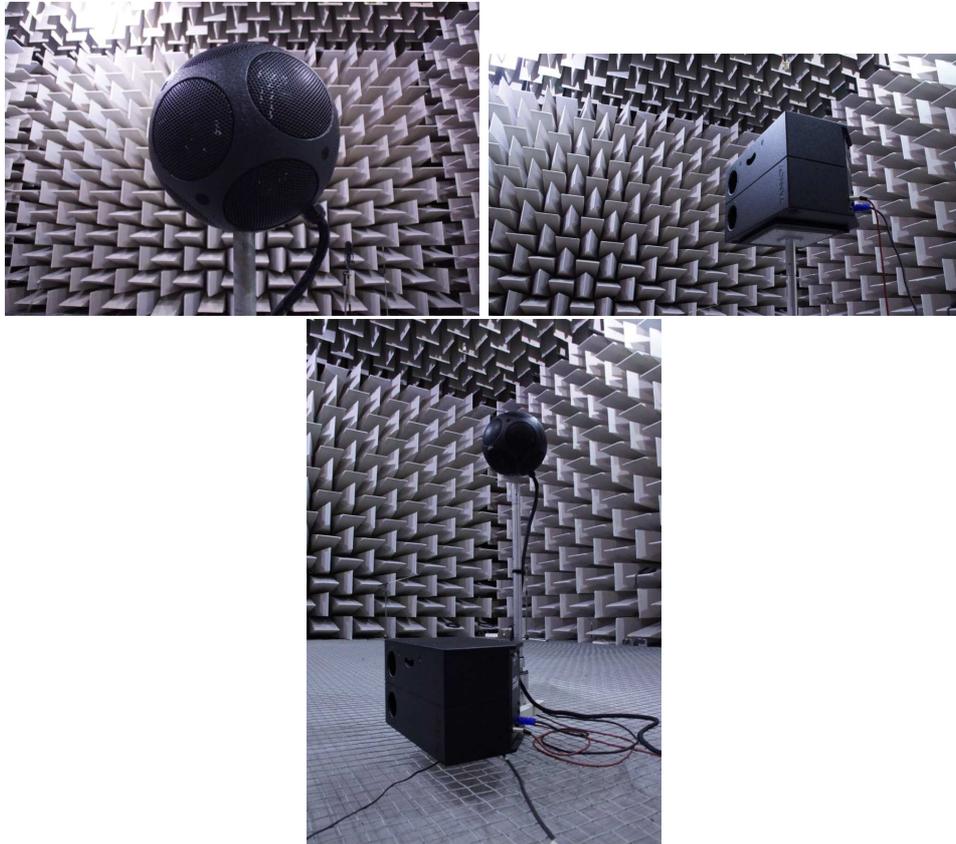
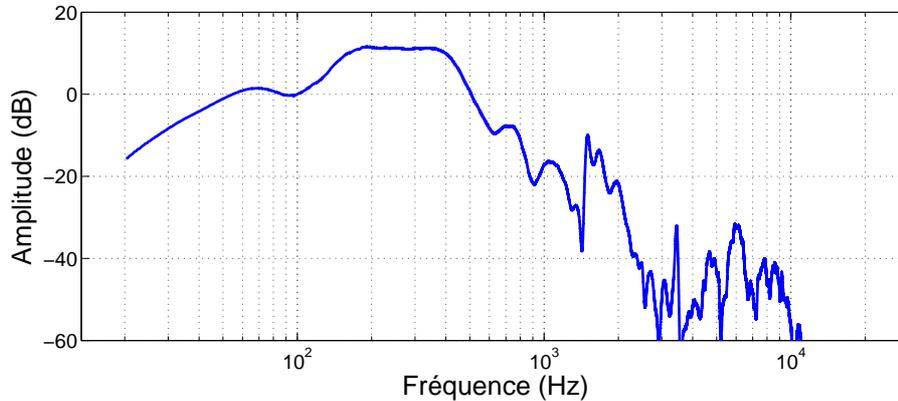


FIGURE 4.6 – Dispositif d’émission dans la chambre anéchoïque du LNE (2013). Le dispositif est constitué d’une source omnidirectionnelle *Outline* GRS et d’un caisson de grave *Tannoy* VS10.

Une mesure de directivité de la source a été effectuée avec un microphone *B&K* type 4189 afin de confirmer son utilisation pour des mesures selon la norme NF S 3382-1 [AFNOR, 2009]. Le sinus glissant exponentiel utilisé est un signal de 1s balayant le spectre de 50Hz à 22kHz avec une fréquence d’échantillonnage de 44100Hz . Chaque réponse impulsionnelle a été mesurée une fois avec une résolution angulaire de 5° . La directivité de la source a été mesurée dans son plan longitudinal tandis que le caisson de basse, posé au sol, ne tournait pas. La distance source-récepteur était de 2.6m .

FIGURE 4.7 – Fonction de transfert de la source *Outline* GRS.

Les 72 séquences obtenues sont ensuite traitées à l'aide du logiciel *MATLAB*. La Fig. 4.7 présente la fonction de transfert de la source mesurée dans la direction de référence (face à la marque *Outline*), correspondant à 0° sur les figures de directivités présentées dans la Fig. 4.8. Ces diagrammes sont normalisés par la valeur maximale, toutes bandes d'octave confondues, l'amplitude est en décibels.

Nous pouvons observer que la source conserve une directivité omnidirectionnelle jusqu'à 1000Hz . Nous notons également qu'il y a toujours un lobe dans la direction de la direction de référence (0°). Des interférences entre haut-parleurs apparaissent déjà à 2000Hz sans toutefois empêcher la source d'être considérée comme omnidirectionnelle. La norme préconise une déviation maximale de $\pm 5\text{dB}$ à 2000Hz [AFNOR, 2009]. Au delà de cette fréquence la source n'est plus omnidirectionnelle selon la norme.

4.3.2. Microphone *SoundField* ST250

Format B

Le microphone type *SoundField* a été développé au cours des années 70 à partir des recherches de Gerzon [Gerzon, 1973]. Ce microphone permet la prise de son au premier ordre d'Ambisonics, dont le principe est décrit au Chap 2.

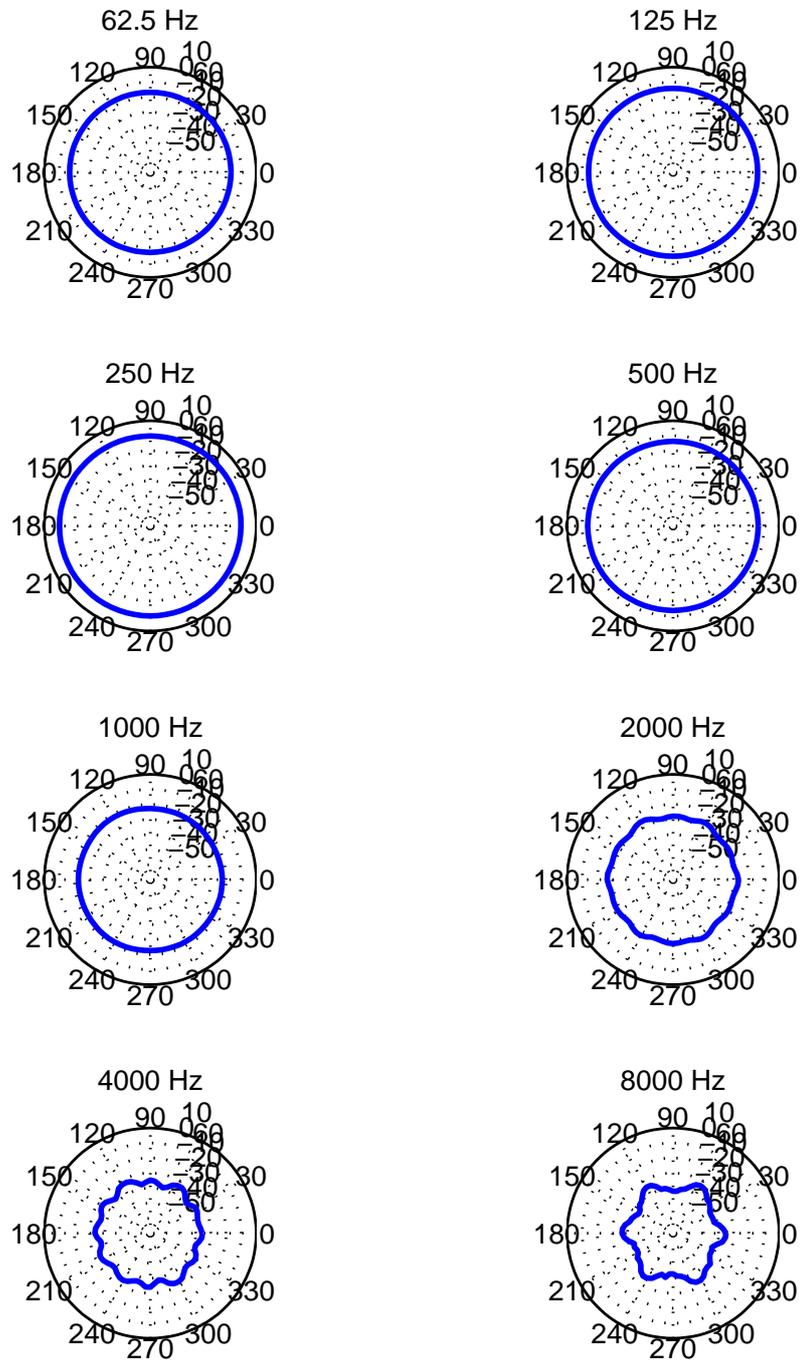


FIGURE 4.8 – Directivité de la source *Outline* GRS dans le plan $\vec{x}\vec{y}$.

Le Format B (ou B-Format) est un des formats de synthèse de microphones extrait de la prise de son Ambisonics. En B-format, la pression acoustique peut être dérivée du canal W et la vitesse particulière des canaux X, Y et Z [Merimaa and Pulkki, 2004]. La densité d'énergie E et l'intensité acoustique I d'un champ sonore peuvent alors être exprimées en fonction du vecteur vitesse \vec{v} et de la pression acoustique p par [Morse and Feshbach, 1953] :

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho \left(\vec{v}^2(t) + \left(\frac{p(t)}{\rho c} \right)^2 \right)$$

$$\vec{I}(t) = \overline{p(t)\vec{v}(t)}$$

où ρ est la masse volumique et c est la célérité des ondes. Le vecteur d'intensité instantanée peut être exprimé en amplitude et direction par :

$$|I| = \frac{\sqrt{\Re(XW^*)^2 + (\Re(YW^*))^2 + (\Re(ZW^*))^2}}{\rho c}$$

Où $(\cdot)^*$ est le complexe conjugué. De même, la densité d'énergie instantanée peut être exprimée par :

$$E = \frac{1}{2\rho c^2} |W|^2 + |X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2$$

Réponse du microphone

Nous avons effectué des mesures de caractérisation du microphone dans la salle anéchoïque du LNE. La caractérisation a pour objectif de valider l'utilisation du microphone dans les conditions de mesure *in situ* dans un espace fermé de type plateau de bureau. La vérification du microphone consiste en une mesure de directivité autour des trois axes du microphone ainsi qu'une vérification de la normalisation des canaux.

Nous nous intéressons d'abord à la mesure de la directivité. La technique d'obtention des réponses impulsionnelles est similaire à celle que nous avons utilisée pour mesurer la directivité de la source. Cependant, trois orientations de microphone ont été mesurées pour obtenir les diagrammes de directivité pour les trois canaux du microphone, selon les trois directions de l'espace :

1. canal X : le microphone est positionné de manière à ce que son axe \vec{z} soit perpendiculaire au plan $\vec{x}\vec{y}$ de l'espace et pointe vers le haut. Le microphone est en rotation autour de son axe \vec{z} . L'axe \vec{x} du microphone pointe vers la source. La Fig. 4.9 présente le microphone dans cette position.

2. canal Y : le microphone est positionné de manière à ce que son axe \vec{x} soit perpendiculaire au plan $\vec{x}\vec{y}$ et pointe vers le haut. Le microphone est en rotation autour de son axe \vec{x} . L'axe \vec{y} du microphone pointe vers la source.
3. canal Z : le microphone est positionné de manière à ce que son axe \vec{y} soit perpendiculaire au plan $\vec{x}\vec{y}$ et pointe vers le bas. Le microphone est en rotation autour de son axe \vec{y} . L'axe \vec{z} du microphone pointe vers la source.

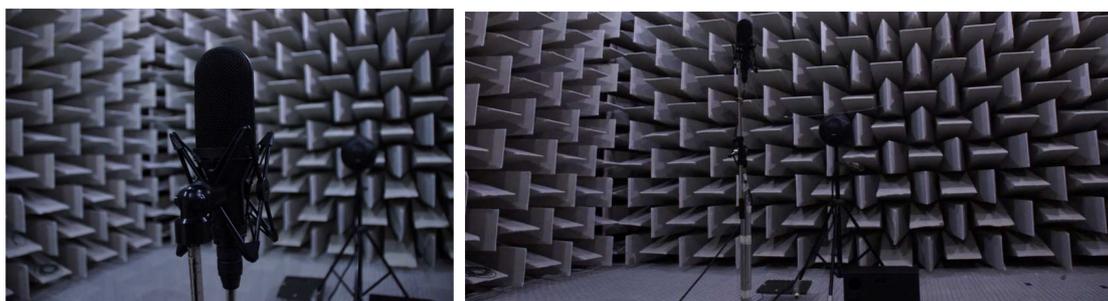


FIGURE 4.9 – Mesure de la directivité du canal X du microphone *SoundField* ST250 dans la grande salle anéchoïque du LNE.

Nous commençons par mesurer les fonctions de transfert pour la première position de chaque orientation. Le canal W de la première orientation ainsi que les canaux respectifs des trois orientations sont visibles aux Fig. 4.10, tandis que la Fig. 4.11 présente la réponse fréquentielle selon la notice du microphone. Les 72 séquences obtenues pour chaque orientation sont ensuite traitées numériquement et les directivités correspondantes sont présentées dans les Fig. 4.12, 4.13 et 4.14. Les graphiques superposent à ceux du canal de pression les diagrammes de directivité correspondant respectivement aux axes X, Y et Z. Ils sont normalisés par la valeur maximale de la pression, toutes bandes d'octave confondues. Le canal W a été multiplié par $\sqrt{2}$ afin de lui donner une amplitude comparable aux canaux X, Y et Z.

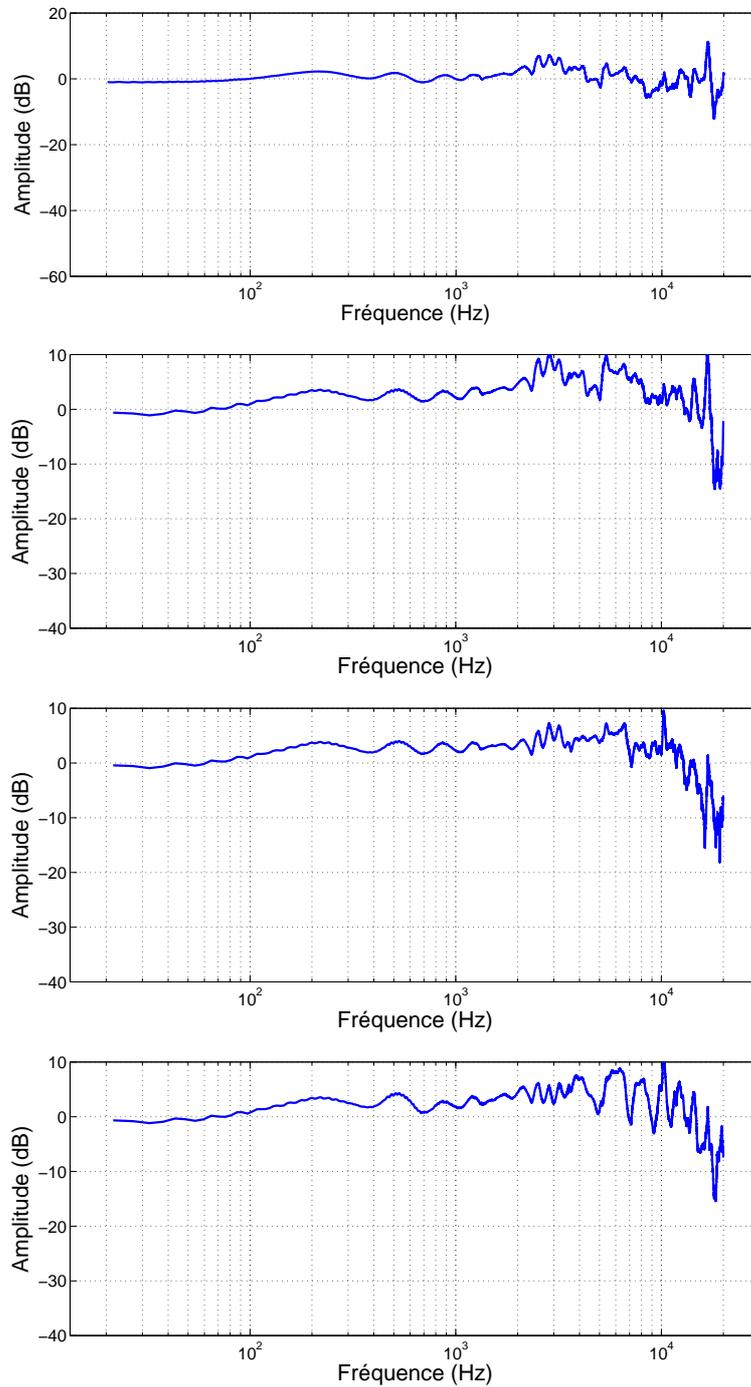


FIGURE 4.10 – Réponse fréquentielle du microphone *SoundField* ST250 mesurée dans la chambre anéchoïque du LNE pour les trois orientations du microphone. De haut en bas : orientation 1 et canal W, orientation 1 et canal X, orientation 2 et canal Y, orientation 3 et canal Z.

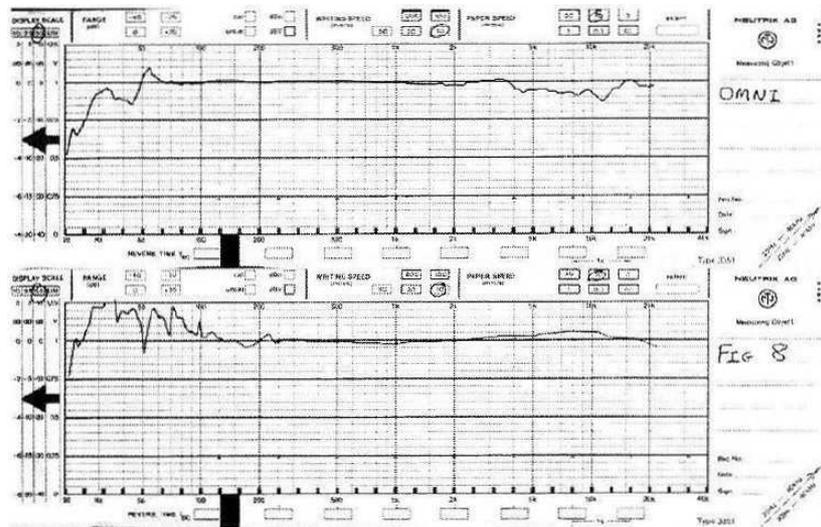


FIGURE 4.11 – Réponse fréquentielle du microphone *SoundField* ST250 selon la notice d'utilisation.

Des mesures de directivités d'un microphone MK-V très proche du microphone ST250 ont été effectuées par Farina. Les résultats sont disponibles dans la littérature [Farina, 2001] et sont reproduits aux Fig. 4.15 à 4.17. Nous observons que les directivités obtenues lors des deux mesures ont la même allure, mais les mesures de Farina sont difficilement comparables avec les nôtres, car les rotations ne se font pas autour des mêmes axes, et les mesures sont en linéaire.

La réjection observable sur les Fig. 4.12 à 4.14 est due à la résolution angulaire de la mesure. Lorsque l'orientation de la mesure est suffisamment en correspondance avec la perpendiculaire à l'axe frontal du microphone, elle atteint au moins $30dB$ (voir Fig. 4.13 à $500Hz$ et $2kHz$). Une vérification systématique en optimisant manuellement l'orientation du microphone a confirmé une annulation de $-30dB$ pour les fréquences moyennes. Par contre, aux basses et hautes fréquences, la réjection est moins bonne. Cela est due à la taille des capsules aux hautes fréquences, et aux déphasages réduits aux basses fréquences. La différence observée entre l'avant et l'arrière du microphone peut être due au matricieur générique, à des différences de sensibilités entre capsules, et/ou à des effets de réflexion/diffraction sur le support du microphone. Cette dernière possibilité aurait pu être vérifiée en positionnant le microphone à 180° dans son support, mais nous n'avons pas testé cette configuration.

La directivité face à l'axe \vec{x} et autour de l'axe \vec{y} permet d'avoir la directivité du canal Z du microphone. La mesure montre qu'à partir de $4000Hz$ les effets dues à la base du microphone deviennent important. Ces effets créés des figurent de directivité non compatibles avec celles d'un microphone bidirectionnel (voir Fig. 4.14). L'axe \vec{z} du microphone ST250 pose problème du fait de la base du microphone et du support, créant notamment de la diffraction.

les Fig. 4.12 à 4.14 montrent une plage utile du microphone située entre $125Hz$ et $2000Hz$.

Rapport entre canaux du microphone

Nous nous intéressons maintenant à la mesure du rapport entre canaux du microphone *SoundField*. Nous souhaitons en effet vérifier le rapport théorique qui existe entre les canaux B-Format en sortie du matricieur du microphone. En considérant les canaux du microphone, nous avons :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ X &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i (\cos \theta_i \sin \varphi_i) \\ Y &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i (\sin \theta_i \sin \varphi_i) \\ Z &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i (\sin \varphi_i) \end{aligned}$$

où s_i est le signal mono et (θ_i, φ_i) sont les coordonnées angulaires du système de coordonnées sphériques. Nous pouvons remarquer qu'il existe un rapport $\sqrt{2}$ entre le signal du canal W et les autres canaux, dont il faut tenir compte dans nos calculs. Lorsqu'un des canaux du microphone est disposé précisément face à une source dans un champ acoustique ouvert, nous avons, d'après les équations ci-dessus et après correction par $\sqrt{2}$:

$$\frac{|X|^2}{|W|^2} = \frac{|Y|^2}{|W|^2} = \frac{|Z|^2}{|W|^2} = 1 \quad (4.1)$$

Ce rapport, nous pouvons le vérifier d'après les mesures du LNE. Pour chaque orientation du microphone, les Fig. 4.18 à 4.20 présentent sur 360° le rapport selon l'Eq. (4.1) entre le canal concerné (X, Y ou Z) et le canal W pour la même position.

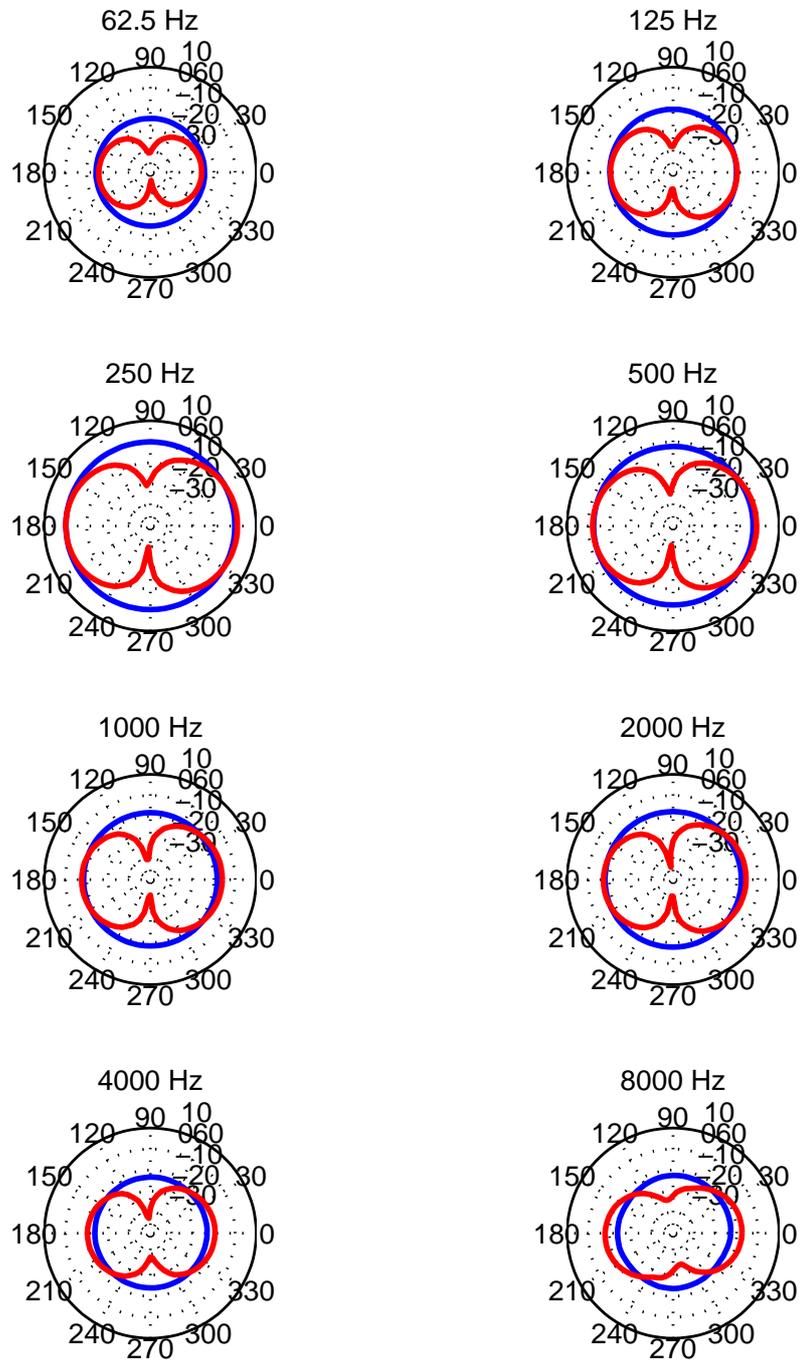


FIGURE 4.12 – Directivité du canal X du microphone *SoundField* ST250 en rotation autour de son axe \vec{z} . Canal W en bleu et canal X en rouge.

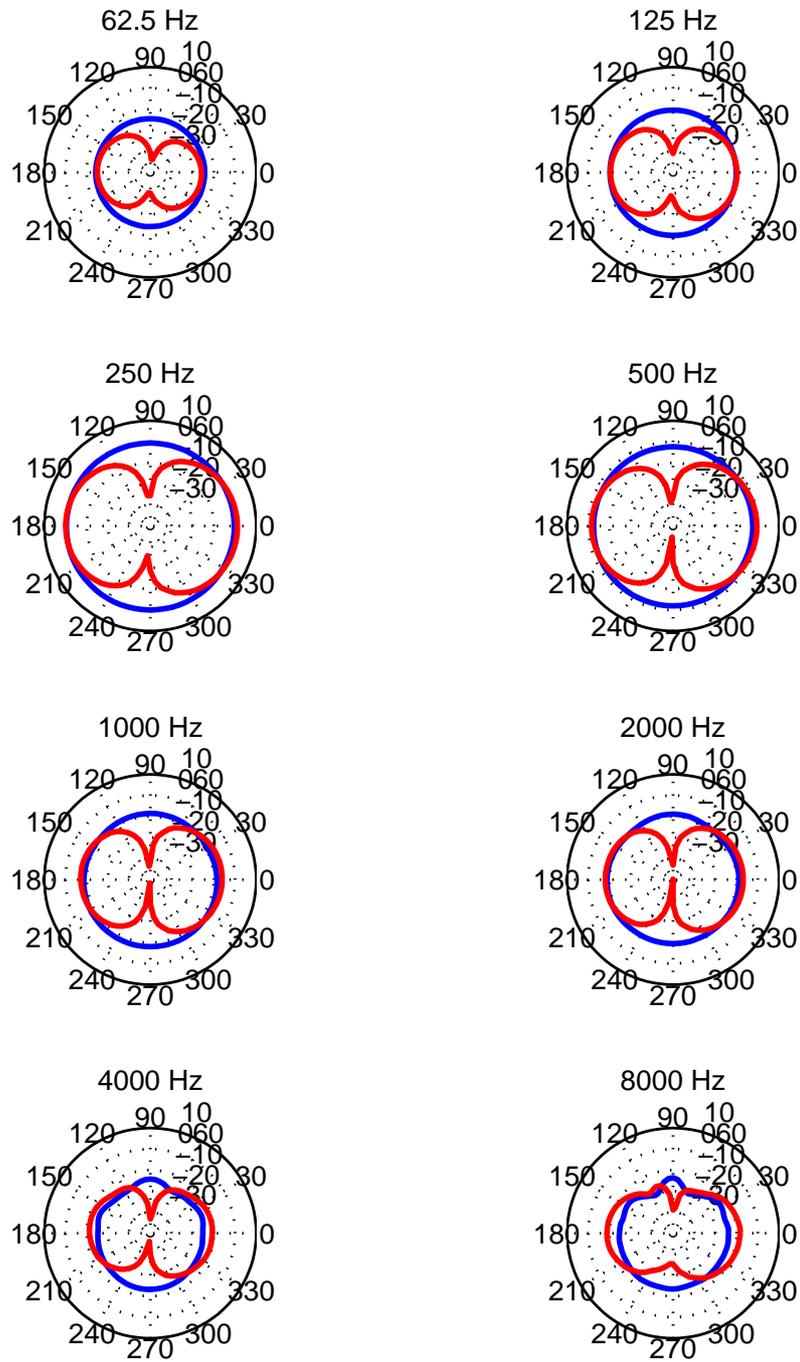


FIGURE 4.13 – Directivité du canal Y du microphone *SoundField* ST250 autour de son axe \vec{x} . Canal W en bleu et canal Y en rouge.

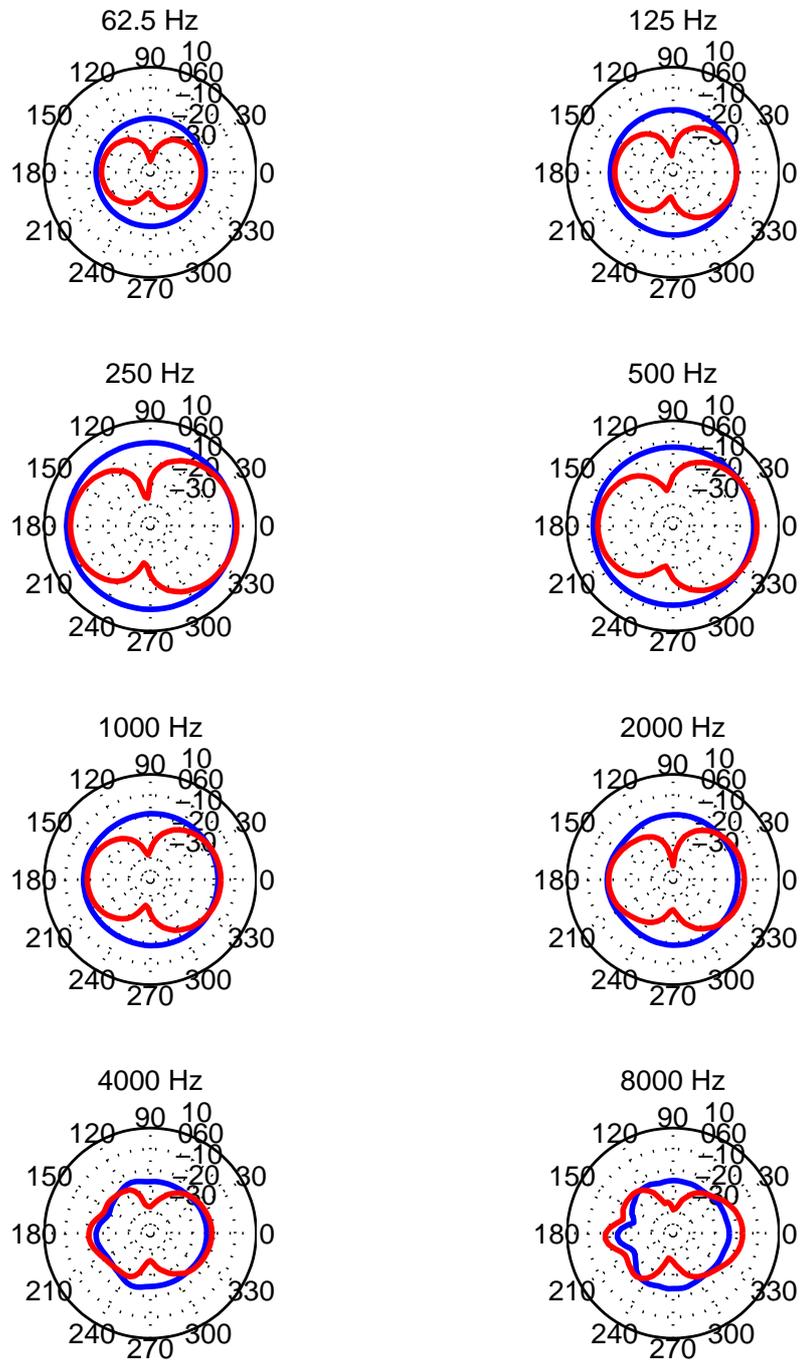


FIGURE 4.14 – Directivité du canal Z du microphone *SoundField* ST250 autour de son axe \vec{x} . Canal W en bleu et canal Z en rouge.

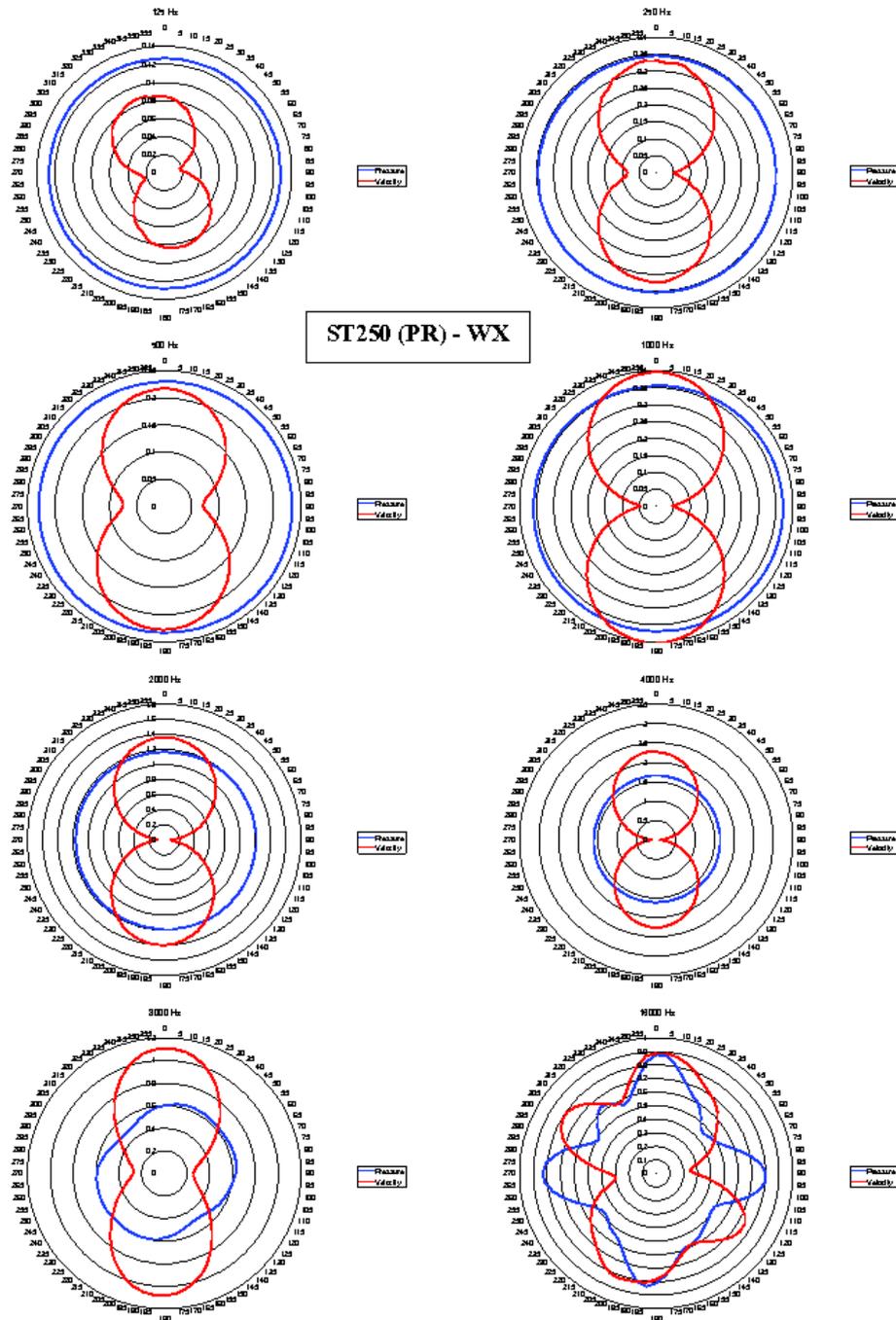


FIGURE 4.15 – Directivité du canal X du microphone *SoundField* MK-V mesuré par Farina [Farina, 2001]. Canal W en bleu et canal X en rouge.

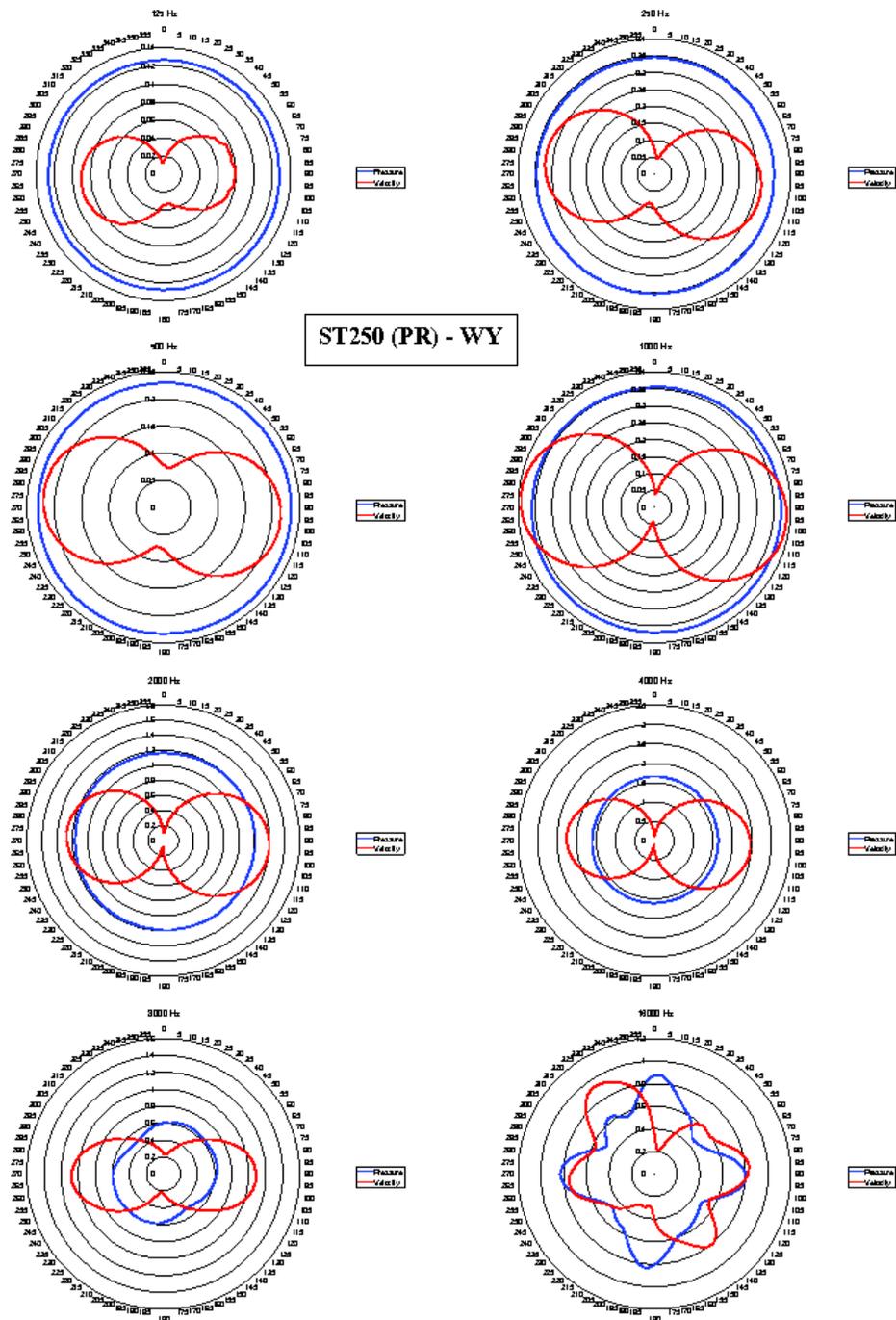


FIGURE 4.16 – Directivité du canal Y du microphone *SoundField* MK-V mesuré par Farina [Farina, 2001]. Canal W en bleu et canal Y en rouge.

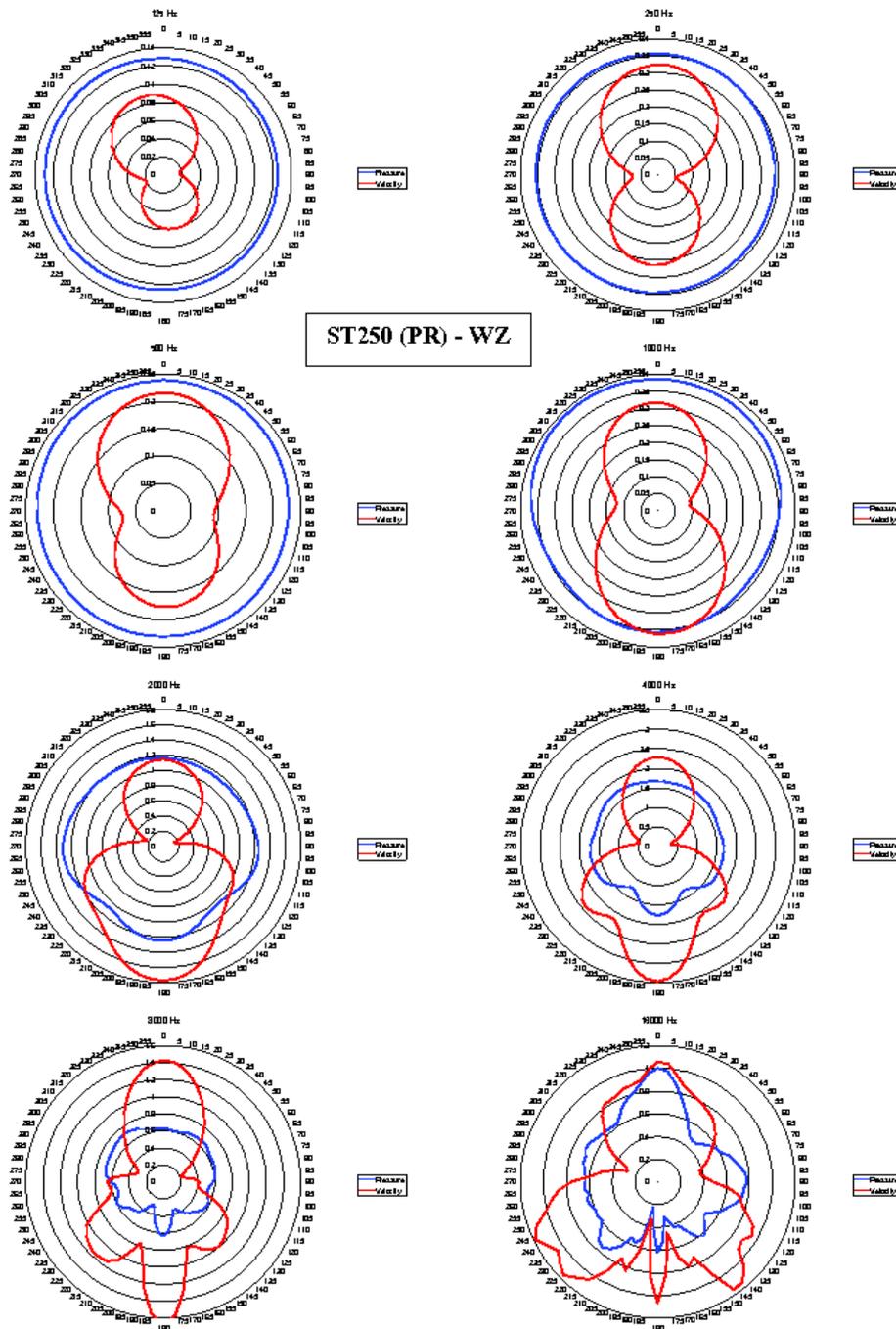


FIGURE 4.17 – Directivité du canal Z du microphone *SoundField* MK-V mesuré par Farina [Farina, 2001]. Canal W en bleu et canal Z en rouge.

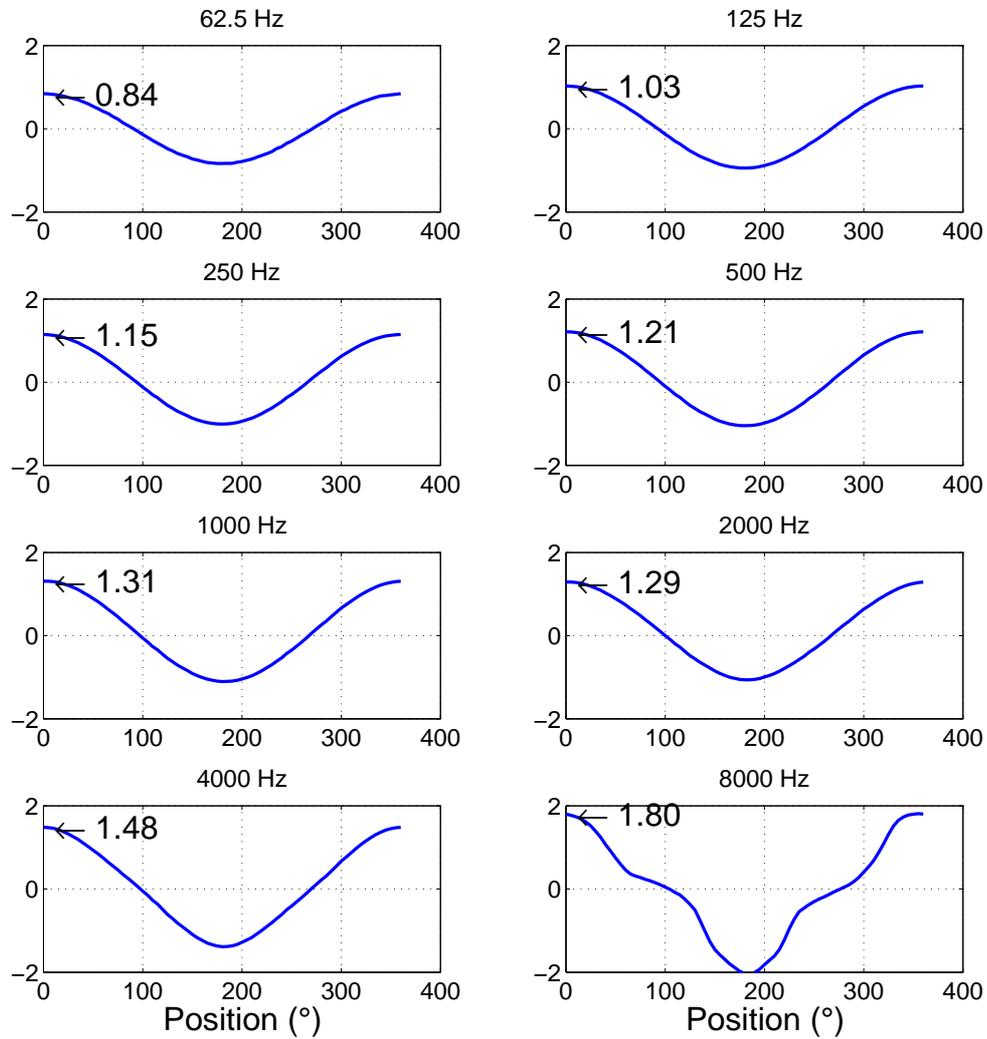


FIGURE 4.18 – Rapport selon l'Eq. (4.1) entre canaux du microphone ST250 mesurés face à la source au LNE. Le canal X est présenté ici pour chaque bande d'octave et sur 360°. La valeur face à la source (0°) est affichée sur la courbe.

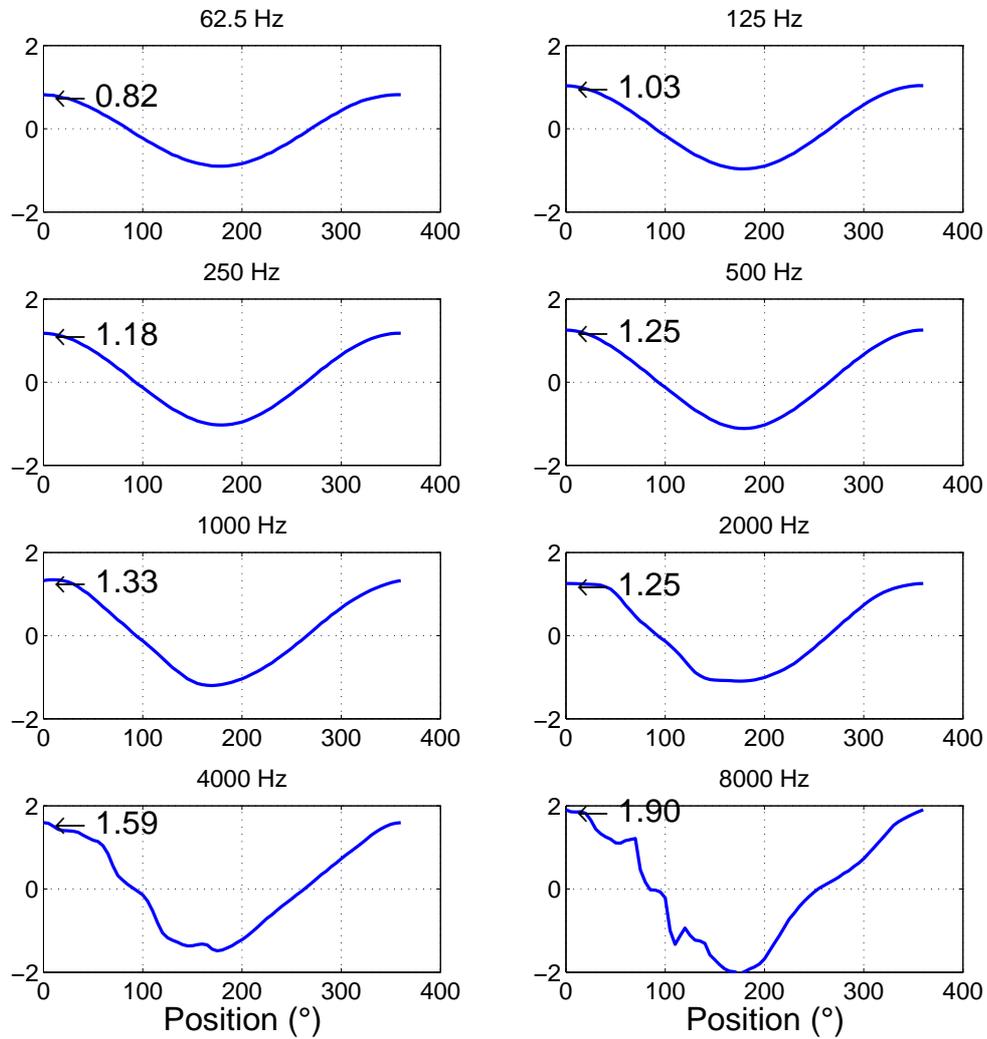


FIGURE 4.19 – Rapport selon l'Eq. (4.1) entre canaux du microphone ST250 mesurés face à la source au LNE. Le canal Y est présenté ici pour chaque bande d'octave et sur 360°. La valeur face à la source (0°) est affichée sur la courbe.

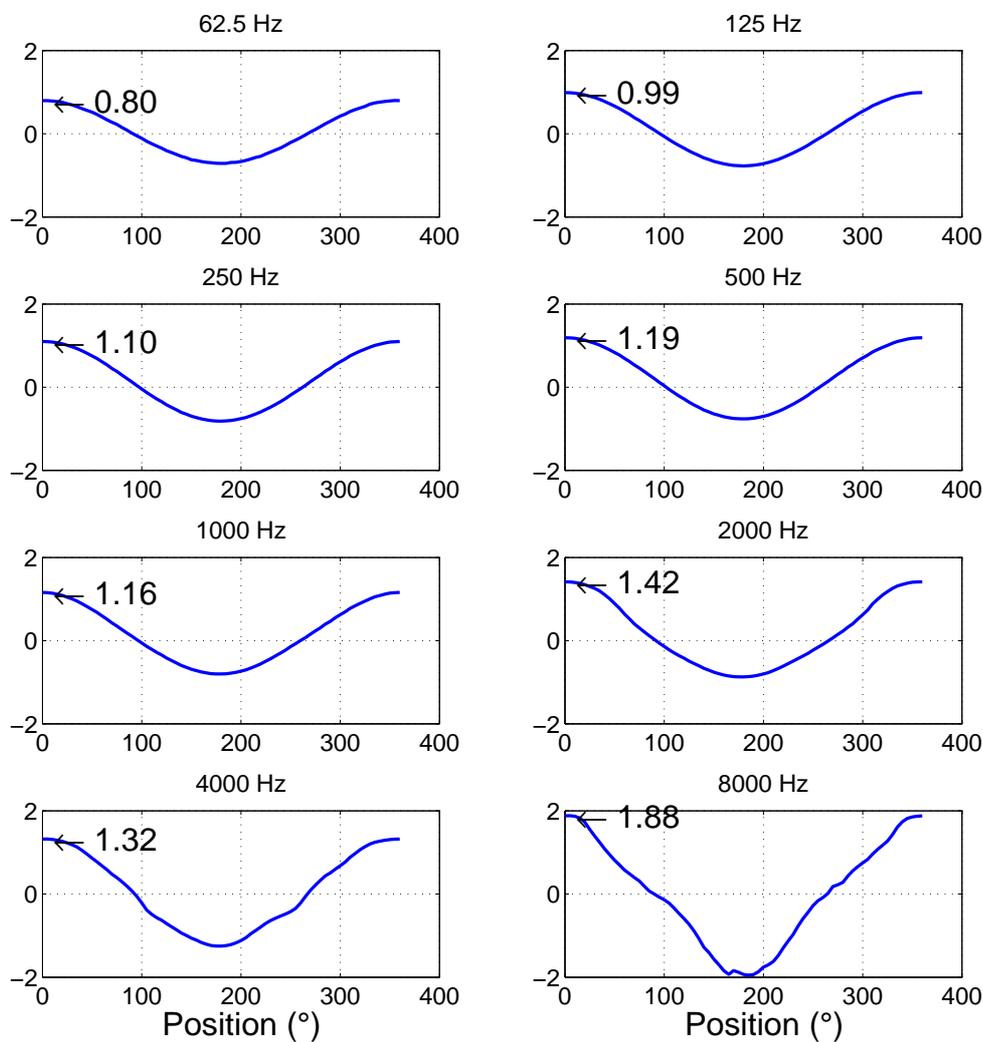


FIGURE 4.20 – Rapport selon l'Eq. (4.1) entre canaux du microphone ST250 mesurés face à la source au LNE. Le canal Z est présenté ici pour chaque bande d'octave et sur 360°. La valeur face à la source (0°) est affichée sur la courbe.

Les Fig. 4.18 à 4.20 présentent le rapport de l'Eq. (4.1) en fonction de la fréquence. Pour chaque canal du microphone, nous observons un maximum correspondant à l'avant du canal (0°, canal face à la source). Ce rapport n'est pas égal à 1, le microphone doit donc être calibré, et ce rapport pris en compte lors des mesures, en normalisant chaque canal par son coefficient

de calibration, pour chaque fréquence ou bande de fréquence considérée.

4.4. CAMPAGNES DE MESURES *in situ*

Au cours de la thèse, nous avons mené différentes campagnes de mesures bien que toutes ne figurent pas dans ce manuscrit. Des mesures de salles ont été effectuées dans le cadre de la thèse de Juan Pablo Espitia Hurtado [Espitia Hurtado, 2016], dans la suite de la thèse de Fabio Leao Figueiredo [Leao Figueiredo, 2011, Dujourdy, 2009], et dans le cadre de la thèse de Yosr Bouhali [Bouhali and Polack, 2015]. Les espaces disproportionnés - dont une des dimensions est très différente des autres - mesurés au cours du projet ont été accessibles grâce au partenariat industriel de la thèse. Nous avons eu plusieurs fois l'occasion d'effectuer des mesures *in situ* sur des plateaux de bureaux. Les bureaux mesurés décrits ci-après, et des plans sont fournis en Annexe B :

- **Kaleido** est un immeuble de bureau de 7 étages et d'une superficie de $6135m^2$ SHON¹ situé dans la ZAC Masséna dans le 13^{ième} arrondissement de Paris. Impédance prend part à l'équipe de Maîtrise d'Oeuvre en tant qu'acousticien, dès la phase APD². Le projet est mené par Thomas Toulemonde assisté de Thomas Smilec pour le compte de ECDM Architectes et fait l'objet d'une démarche certification HQE Tertiaire³. L'étude est complète du point de vue du bureau d'études acoustiques et a été menée de 2011 à 2014. Elle ne comporte pas de partie concernant l'aménagement final des bureaux.
- **Nexity** est un projet de deux immeubles BBC Effinergie⁴ de commerces et bureaux de 3 étages de $4500m^2$ en structure bois massif situé à Boissy-Saint-Léger (94). Impédance assiste la Maîtrise d'Ouvrage à la phase AOR⁵ pour la vérification des exigences du référentiel CERTIVEA en matière d'isolement aérien entre locaux, isolement de façade, bruits de chocs et durée de réverbération. Le projet est mené par Maxime Bernot assisté de Emilie Carayol et de Antoine Blanvillain pour le compte de *Nexity*. L'étude est simple du point de vue du bureau d'études acoustiques et consiste en une campagne de mesure

1. La surface hors œuvre nette (SHON) est égale à la somme des surfaces des planchers de chaque niveau moins tout ce qui n'est pas aménageable

2. Avant-Projet Définitif, étude d'avant projet d'une mission de Maîtrise d'Oeuvre pour les opérations de construction neuve de bâtiment

3. La certification NF Haute Qualité Environnementale Bâtiments Tertiaires - Neuf ou Rénovation

4. Bâtiment de basse consommation énergétique - Référentiel Performance Énergétique et Qualités Associées - PEQA - Neuf et rénovation

5. Assistance apportée au maître d'ouvrage lors des opérations de réception - éléments de mission de Maîtrise d'Oeuvre pour les opérations de construction neuve de bâtiment

d’essais *in situ* effectuée selon la norme NF S 31-057 [AFNOR, 1982]. Elle a été menée en 2014 et a donné lieu à un rapport de mesure, permettant de conclure quant à la conformité aux exigences du référentiel.

- **Ovalie** est une tour de bureau ovale de 8 étages certifiée HQE, BBC et BREAM⁶ construite par PG Architecture et d’une superficie de $14000m^2$ (dont $1700m^2$ de bureaux) située à Saint-Ouen (93). Suite à la plainte des usagers au sujet du bruit entre collaborateurs et proche des espaces détente et des salles de réunion, Impédance réalise un diagnostic acoustique sur trois niveaux de la tour. Le projet est mené par Maxime Bernot et Nicolas Legrand, assistés de Antoine Blanvillain pour le compte de Samsung Electronics France. Il a la particularité d’intervenir alors qu’aucune norme ou réglementation ne fixe d’objectif dans les plateaux de bureaux meublés et occupés. Néanmoins, la norme NF S 31-080 [AFNOR, 2006] s’applique dans ce type d’espace et fixe des *niveaux de performances* acoustiques. L’étude est complexe du point de vue du bureau d’études conseils, ne pouvant s’appuyer sur aucune réglementation, alors que les résultats montrent des indices acoustiques satisfaisants (niveau sonore, temps de réverbération et décroissance spatiale).

D’autre part, des mesures dans un couloir ont été effectuées au laboratoire. C’est un couloir de $32m$ desservant les bureaux. Il comporte de nombreux objets augmentant la diffusion. Les mesures ont été effectuées selon la norme ISO 3382-3 [AFNOR, 2013] par la méthode de la décroissance spatiale. Pour toutes les mesures, le microphone *SoundField* a été utilisé ainsi que la source omnidirectionnelle *Outline* GRS, et les dépouillements ont été effectués selon le protocole décrit ci-dessus.

4.5. CONCLUSION

Nous avons présenté le matériel et le protocole de mesure. Il s’agit de la mesure de réponses impulsionnelles par l’émission d’un sinus glissant de $20Hz$ à $20000Hz$, dont le post-traitement permet de fenêtrer les non-linéarités du système source. Le matériel est constitué d’une source omnidirectionnelle *Outline* GRS et d’un microphone *SoundField* ST250. Il a fait l’objet d’une caractérisation au LNE qui nous a permis de confirmer son utilisation pour nos mesures. Néanmoins, le microphone est restreint à la plage $125Hz$ à $2000Hz$ et des coefficients de nor-

6. Building Research Establishment Environmental Assessment Methodology, équivalent anglais du HQE

malisation doivent être pris en compte.

Nous avons aussi présenté les différents espaces qui ont fait l'objet de mesures pour ce travail. Il s'agit de 3 plateaux de bureaux et du couloir du laboratoire.

Chapitre 5

Modélisation par la méthode des différences finies

5.1. INTRODUCTION

Au Chap. 3, nous avons présenté le formalisme énergétique du couplage de la densité d'énergie et de l'intensité sonore. Nous présentons puis réduisons le tenseur énergie-impulsion et en déduisons un système hyperbolique d'équations linéaires aux dérivés partielles du premier ordre décrivant la propagation de l'énergie dans un local fermé. Une méthode d'intégration nous permet ensuite d'introduire les coefficients d'absorption et de diffusion. Nous en déduisons finalement une équation à une variable pouvant être résolue soit sur l'énergie, soit sur l'intensité sonore soit sur le potentiel d'intensité que nous avons introduit au préalable.

Nous présentons maintenant la méthode de modélisation numérique utilisée pour calculer les deux systèmes d'équations sur une et deux dimensions.

La méthode choisie est celle des différences finies dans le domaine temporel car cette méthode est plus simple et plus rapide à mettre en place. Les calculs s'effectuent dans le domaine temporel ce qui accélère le modèle. Un état de l'art des méthodes de modélisation par différences finies dans le domaine temporel est effectué au Chap. 2.

Ce travail a été mené avec l'aide de Baptiste Pialot dans le cadre d'un stage de niveau Master [Pialot, 2015]. Nous avons cherché pour chaque système et dimension un schéma explicite

et stable. Nous présentons tout d'abord la méthode des différences finies dans le domaine temporel appliquée en une dimension et nous l'utilisons pour résoudre le système d'équations couplées. Nous l'employons ensuite sur l'équation générale. Enfin, nous faisons de même pour la méthode des différences finies en deux dimensions. Pour chaque système et dimension, nous présentons les schémas utilisés et les équations discrètes obtenues, ainsi que les limitations engendrées par la discrétisation et les conditions de stabilité. Enfin, nous présentons les schémas et approximations des conditions aux limites.

La modélisation consiste à déterminer la variable à la position du maillage $i\Delta x$, $j\Delta y$ et $n\Delta t$, avec Δx et Δy le pas de discrétisation spatiale selon \vec{x} et \vec{y} respectivement et Δt le pas de discrétisation temporelle. Les indices (i, j) marquent les coordonnées discrètes des points spatiaux tandis que l'indice n marque les temps discrets.

5.2. MODÈLE NUMÉRIQUE EN UNE DIMENSION POUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS COUPLÉES

Nous débutons notre étude par le système d'équations couplées (EC) en une dimension. Ce système est composé des Eq. (3.19) et (3.24) rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\partial_t E + \partial_x J &= -\frac{A}{\lambda}E \\ \frac{1}{c}\partial_t J + \partial_x E &= -\frac{D}{\lambda}J\end{aligned}\tag{5.1}$$

Le système d'EC en une dimension est un système hyperbolique d'équations différentielles linéaires du premier ordre, impliquant la densité d'énergie (E) et l'intensité acoustique (\vec{J}). Dans cette section nous proposons un schéma de modélisation par différences finies (FDTD) consistant et stable. Nous développons les schémas proposés et leur précision : les approximations effectuées, les équations discrètes obtenus ainsi que l'étude des conditions de stabilité.

Différents schémas ont été évalués. Nous en présentons certains ainsi que leur précision. Nous sélectionnons celui qui servira de base pour les autres modélisations présentées aux Sec. 5.3, 5.4 et 5.5.

5.2.1. Schéma numéro 1

Approximations

Dans un premier temps, nous avons approché les opérateurs de dérivation par des opérateurs discrets simples, de manière à utiliser des schémas simples et connus. Nous avons comparé nos travaux avec des modèles publiés dans la littérature et détaillés au Chap. 2. Les approximations choisies pour le schéma numéro 1 sont donc constituées d'un schéma progressif en temps et en espace pour E et \vec{J} , aussi appelé schéma explicite d'Euler [Rissert, 2006]. Les schémas d'Euler sont appliqués dans le cas de l'équation de transport, ou équation d'onde d'ordre 1.

Le schéma d'Euler décentré progressif en temps et en espace et le schéma d'Euler centré en espace sont inconditionnellement instable dans le cas d'une équation sur une variable, nous le testons dans le cas du système d'EC en une dimension. Les approximations sur \vec{J} sont :

$$\begin{aligned}\partial_t J(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} (J_i^{n+1} - J_i^n) \\ \partial_x J(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} (J_{i+1}^n - J_i^n)\end{aligned}\tag{5.2}$$

et les approximations sur E :

$$\begin{aligned}\partial_t E(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) \\ \partial_x E(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n)\end{aligned}\tag{5.3}$$

Équation discrète

En combinant les Eq. (5.1) avec l'Eq. (5.2) pour \vec{J} et l'Eq. (5.3) pour E , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} + \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} &= -\frac{D}{\lambda} J_i^n \\ \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} + \frac{(J_{i+1}^n - J_i^n)}{\Delta x} &= -\frac{A}{\lambda} E_i^n\end{aligned}$$

5.2. Modèle numérique en une dimension pour le système d'équations couplées

Nous notons $C_r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ et $a = \frac{c\Delta t}{\lambda}$. L'équation discrète du schéma numéro 1 devient

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= (1 - Da)J_i^n + C_r(E_i^n - E_{i+1}^n) \\ E_i^{n+1} &= (1 - Aa)E_i^n + C_r(J_i^n - J_{i+1}^n) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Erreur de troncature

Nous notons ϵ l'erreur de troncature. Elle est définie comme la différence entre les équations discrètes Eq. (5.4) et les équations réelles Eq. (5.1) :

$$\begin{aligned} \epsilon_J &= \frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} + \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} J_i^n - \frac{1}{c} \partial_t J - \partial_x E - \frac{D}{\lambda} J \\ \epsilon_E &= \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} + \frac{(J_{i+1}^n - J_i^n)}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} E_i^n - \frac{1}{c} \partial_t E - \partial_x J - \frac{D}{\lambda} E \end{aligned}$$

Puis nous nous servons des développements de Taylor :

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= J_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ E_i^{n+1} &= E_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ J_{i+1}^n &= J_i^n + \Delta x \left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ E_{i+1}^n &= E_i^n + \Delta x \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{c} \partial_t J + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{c} \partial_t E + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{(J_{i+1}^n - J_i^n)}{\Delta x} &= \partial_x J + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} &= \partial_x E + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Et finalement

$$\epsilon_J = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$$

$$\epsilon_E = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$$

L'erreur de troncature est du premier ordre en temps et en espace :

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$$

Ce schéma est consistant car $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

Visualisation

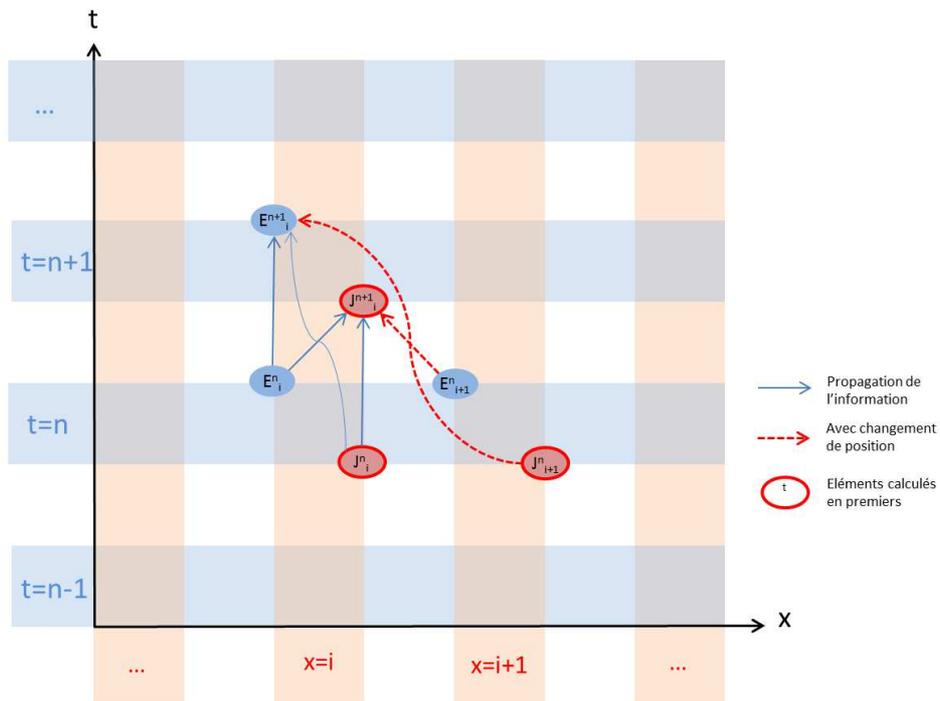


FIGURE 5.1 – Schéma numéro 1 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.

La Fig. 5.1 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 1 du système d'EC en une dimension. Nous y avons séparé les points de discrétisation de E et de \vec{J} afin de mettre en lumière le fait que ces variables sont toutes les deux calculées au même pas d'espace

et de temps (i, n) .

Les flèches rouges montrent le flux d'information se propageant entre deux positions discrètes. Nous visualisons sur ce schéma que l'information ne se propage que dans la direction des x négatifs. Ainsi il est nécessaire d'adapter un nouveau schéma permettant à l'information de se propager dans les deux directions.

5.2.2. Schéma numéro 2

Approximations

Le schéma numéro 2 est un schéma d'Euler explicite progressif sur E couplé à un schéma d'Euler explicite régressif sur \vec{J} . Cette modification par rapport au schéma numéro 1 permet à E de se propager vers les x positifs et les x négatifs.

Le schéma différences finies numéro 2 implique les approximations suivantes sur \vec{J} :

$$\begin{aligned}\partial_t J(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} (J_i^{n+1} - J_i^n) \\ \partial_x J(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} (J_i^n - J_{i-1}^n)\end{aligned}\tag{5.6}$$

Et les approximations suivantes sur E :

$$\begin{aligned}\partial_t E(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) \\ \partial_x E(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n)\end{aligned}\tag{5.7}$$

Équation discrète

En combinant les Eq. (5.1) avec l'Eq. (5.6) pour \vec{J} et l'Eq. (5.7) pour E , nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} + \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} &= -\frac{D}{\lambda} J_i^n \\ \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} + \frac{(J_i^n - J_{i-1}^n)}{\Delta x} &= -\frac{A}{\lambda} E_i^n\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'équation discrète appliquée au schéma numéro 2 du système d'EC en une dimension :

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= (1 - Da)J_i^n + C_r(E_i^n - E_{i+1}^n) \\ E_i^{n+1} &= (1 - Aa)E_i^n + C_r(J_{i-1}^n - J_i^n) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Erreur de troncature

L'erreur de troncature du schéma numéro 2 est donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon_J &= \frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} + \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} J_i^n - \frac{1}{c} \partial_t J - \partial_x E - \frac{D}{\lambda} J \\ \epsilon_E &= \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} + \frac{(J_i^n - J_{i-1}^n)}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} E_i^n - \frac{1}{c} \partial_t E - \partial_x J - \frac{D}{\lambda} E \end{aligned}$$

Puis nous nous servons des développements de Taylor de l'Eq. (5.5) ainsi que des développement de Taylor suivant :

$$J_{i-1}^n = J_i^n - \Delta t \left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (5.9)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{c} \partial_t J + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{c} \partial_t E + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{(J_i^n - J_{i-1}^n)}{\Delta x} &= \partial_x J + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} &= \partial_x E + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} \epsilon_J &= \mathcal{O}(\Delta t) \\ \epsilon_E &= \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

L'erreur de troncature est du premier ordre en temps et en espace :

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$$

Ce schéma est consistant car $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

Visualisation

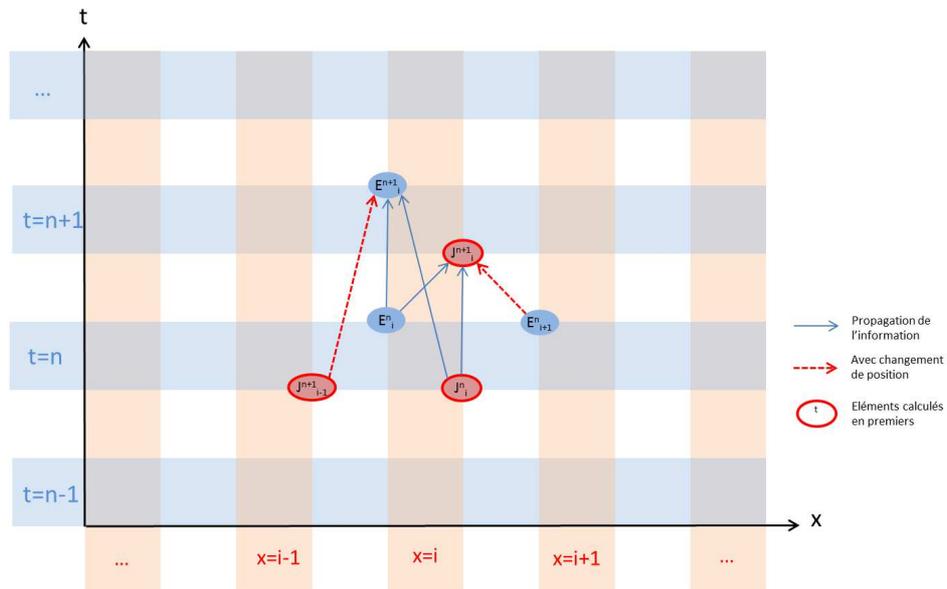


FIGURE 5.2 – Schéma numéro 2 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.

La Fig. 5.2 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 2 du système d'EC en une dimension. Contrairement au schéma numéro 1 les flèches rouges de la Fig. 5.2 montrent que le flux d'information se propagent entre deux positions discrètes. Nous pouvons observer une propagation de l'information vers les x positifs et vers les x négatifs. Néanmoins, la densité d'énergie en un point discret est calculée deux itérations après l'intensité acoustique discrète dont elle dépend. Ainsi il est nécessaire d'adapter un nouveau schéma permettant à l'information de se calculer à partir de l'itération directement précédente.

5.2.3. Schéma numéro 3

Approximations

Le schéma numéro 3 est un schéma d'Euler explicite progressif sur E couplé à un schéma d'Euler implicite régressif sur \vec{J} .

Le schéma différences finies numéro 3 implique une approximation explicite en temps et implicite en espace sur \vec{J} :

$$\begin{aligned}\partial_t J(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} (J_i^{n+1} - J_i^n) \\ \partial_x J(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} (J_i^{n+1} - J_{i-1}^{n+1})\end{aligned}\tag{5.10}$$

Et une approximation explicite en temps et en espace sur E :

$$\begin{aligned}\partial_t E(x, t) &= \frac{1}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) \\ \partial_x E(x, t) &= \frac{1}{\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n)\end{aligned}\tag{5.11}$$

Équation discrète

En combinant les Eq. (5.1) avec l'Eq. (5.10) pour \vec{J} et avec l'Eq. (5.11) pour E , nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} + \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} &= -\frac{D}{\lambda} J_i^n \\ \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} + \frac{(J_i^{n+1} - J_{i-1}^{n+1})}{\Delta x} &= -\frac{A}{\lambda} E_i^n\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'équation discrète du schéma numéro 3 :

$$\begin{aligned}J_i^{n+1} &= (1 - Da)J_i^n + C_r(E_i^n - E_{i+1}^n) \\ E_i^{n+1} &= (1 - Aa)E_i^n + C_r(J_{i-1}^{n+1} - J_i^{n+1})\end{aligned}\tag{5.12}$$

Nous remarquons que le schéma numéro 3 est un schéma semi-implicite en temps sur \vec{J} . La caractéristique des schémas implicites est qu'ils sont plus longs à calculer mais sont plus stables.

Erreur de troncature

L'erreur de troncature du schéma numéro 3 est donnée par

$$\begin{aligned}\epsilon_J &= \frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} + \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} J_i^n - \frac{1}{c} \partial_t J - \partial_x E - \frac{D}{\lambda} J \\ \epsilon_E &= \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} + \frac{(J_i^{n+1} - J_{i-1}^{n+1})}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} E_i^n - \frac{1}{c} \partial_t E - \partial_x J - \frac{D}{\lambda} E\end{aligned}$$

Puis nous nous servons des développements de Taylor des Eq. (5.5) et (5.9) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{(J_i^{n+1} - J_i^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{c} \partial_t J + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{1}{c} \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} &= \frac{1}{c} \partial_t E + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{(J_i^{n+1} - J_{i-1}^{n+1})}{\Delta x} &= \partial_x J + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \frac{(E_{i+1}^n - E_i^n)}{\Delta x} &= \partial_x E + \mathcal{O}(\Delta x)\end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned}\epsilon_J &= \mathcal{O}(\Delta t) \\ \epsilon_E &= \mathcal{O}(\Delta x)\end{aligned}$$

L'erreur de troncature est du premier ordre en temps et en espace :

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$$

Visualisation

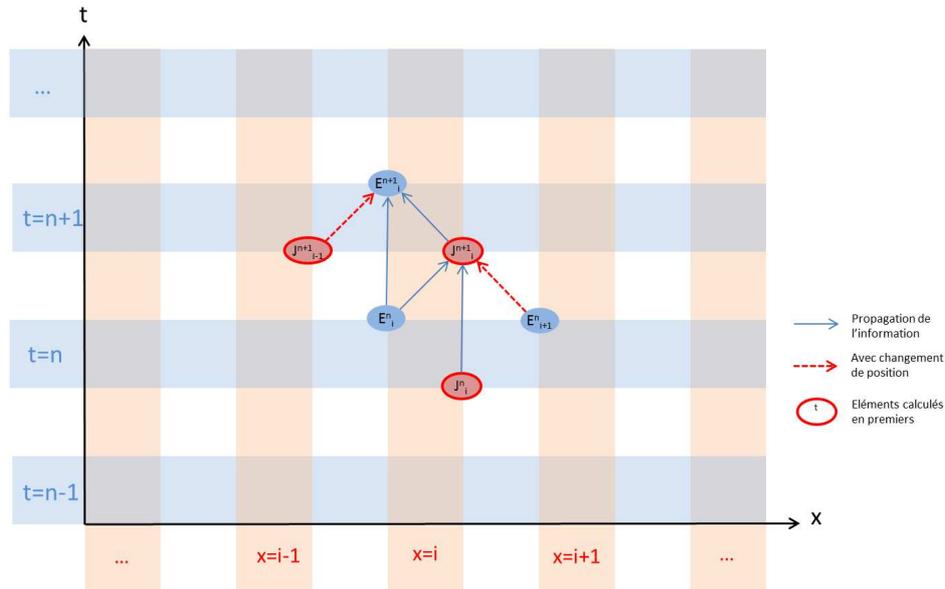


FIGURE 5.3 – Schéma numéro 3 de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.

La Fig. 5.3 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 3 du système d'EC en une dimension. Les flèches rouges montrent que le flux d'information se propage entre deux positions discrètes vers les x positifs et vers les x négatifs et que ce flux ne saute pas d'itération. Ainsi nous constatons visuellement sur la Fig. 5.3 que le schéma est plus simple, nous le préférons donc aux schémas précédents.

5.2.4. Schéma numéro 4

Équation discrète

Le schéma numéro 3 est adéquat pour la modélisation du système d'EC en une dimension, néanmoins il est semi-implicite et nous souhaitons implémenter un schéma totalement explicite plus facile à manipuler. Notamment, nous souhaitons programmer numériquement le calcul par une méthode matricielle, demandant moins de mémoire informatique et donc plus rapide.

Le schéma numéro 4 rend explicite le numéro 3 en remplaçant les termes en $n + 1$ des membres

de droite de la deuxième ligne de l'Eq. (5.12) par leur expression dans la première ligne. L'expression de \vec{J} devient

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= (1 - Da)J_i^n + C_r(E_i^n - E_{i+1}^n) \\ J_{i-1}^{n+1} &= (1 - Da)J_{i-1}^n + C_r(E_{i-1}^n - E_i^n) \end{aligned}$$

En réinjectant ce terme dans la deuxième ligne de l'Eq. (5.12), nous obtenons

$$E_i^{n+1} = (1 - Aa)E_i^n + C_r((1 - Da)(J_{i-1}^n - J_i^n) + C_r(E_{i-1}^n + E_{i+1}^n - 2E_i^n))$$

Et finalement

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= (1 - Da)J_i^n + C_r(E_i^n - E_{i+1}^n) \\ E_i^{n+1} &= (1 - Aa - 2C_r^2)E_i^n + C_r^2(E_{i-1}^n + E_{i+1}^n) + C_r(1 - Da)(J_{i-1}^n - J_i^n) \end{aligned} \tag{5.13}$$

L'Eq. (5.13) est un schéma d'Euler explicite progressif sur E couplé à un schéma d'Euler explicite régressif sur \vec{J} .

Visualisation

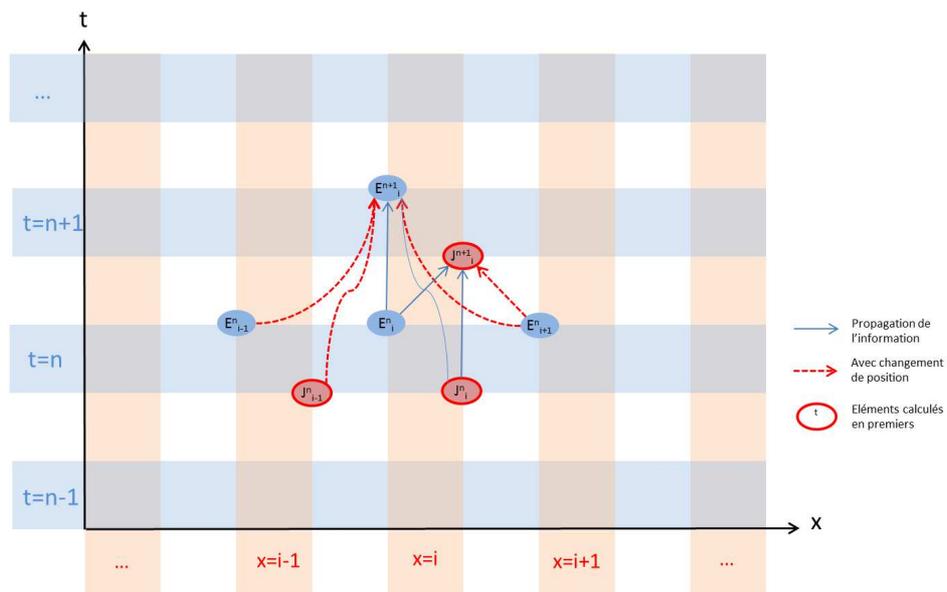


FIGURE 5.4 – Schéma numéro 4 de la simulation FDTD du système d’EC en une dimension.

La Fig. 5.4 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 4 du système d’EC en une dimension. Le flux d’information se propage toujours entre deux positions discrètes vers les x positifs et vers les x négatifs et ne saute pas d’itération. Néanmoins nous constatons visuellement une complexification du cheminement de l’information comparé au schéma numéro 3.

5.2.5. Discussion et choix du schéma

Nous avons étudié différents schémas afin de choisir le plus approprié. Les schémas ci-dessous ont aussi fait l’objet d’études afin de vérifier s’ils étaient plus appropriés, mais tous ont montré une forte instabilité.

Schéma numéro 5

Le schéma numéro 5 implique une approximation centrée en espace et en temps sur E et \vec{J} . L'équation discrète appliquée au schéma numéro 5 du système d'EC en une dimension est

$$\begin{aligned} J_i^{n+1} &= J_i^{n+1} - DaJ_i^n + C_r(E_{i-1}^n - E_{i+1}^n) \\ E_i^{n+1} &= E_i^{n+1} - AaE_i^n + C_r(J_{i-1}^n - J_{i+1}^n) \end{aligned}$$

La Fig. 5.5 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 5 du système d'EC en une dimension. C'est un schéma à 5 points inconditionnellement instable.

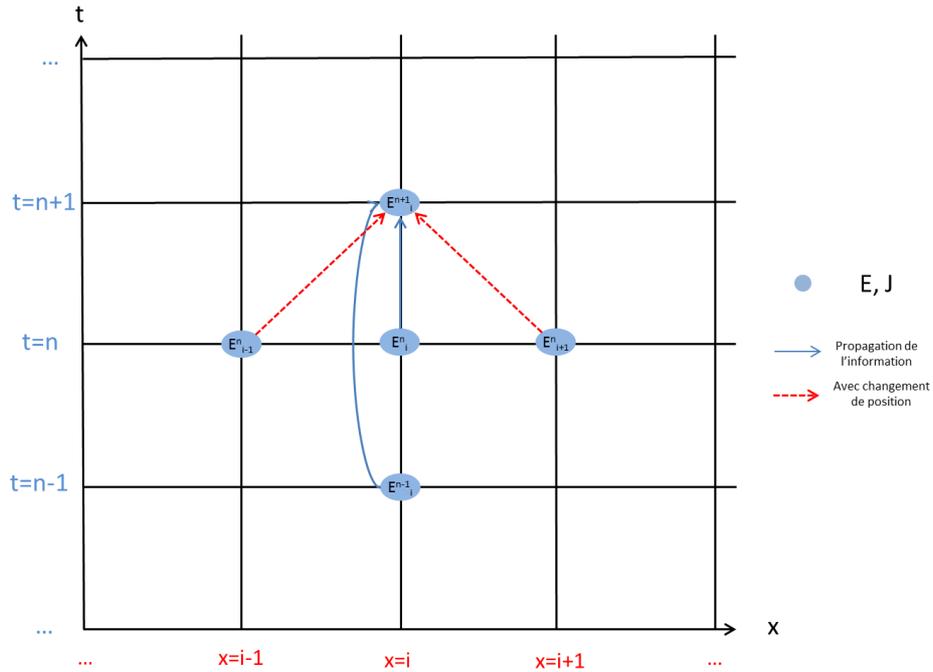


FIGURE 5.5 – Schéma numéro 5 (schéma à 5 points) de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.

Schéma numéro 6

Le schéma numéro 6 implique une approximation centrée en espace et avancée en temps sur E et \vec{J} . L'équation discrète appliquée au schéma numéro 6 du système d'EC en une dimension

est

$$J_i^{n+1} = (1 - Da)J_i^n + \frac{C_r}{2}(E_{i-1}^n - E_{i+1}^n)$$

$$E_i^{n+1} = (1 - Aa)E_i^n + \frac{C_r}{2}(J_{i-1}^n - J_{i+1}^n)$$

La Fig. 5.5 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 6 du système d'EC en une dimension. C'est un schéma à 4 points inconditionnellement instable.

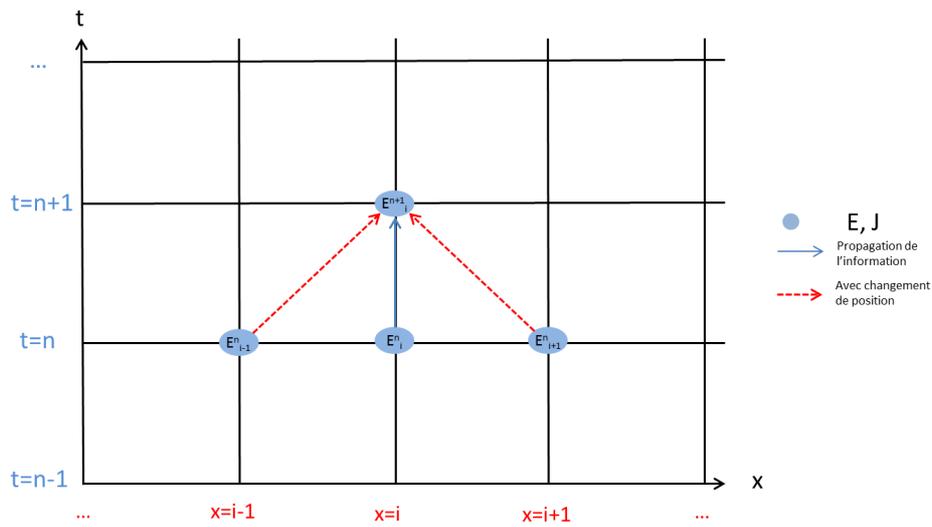


FIGURE 5.6 – Schéma numéro 6 (schéma à 4 points) de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.

Choix du schéma

Nous avons finalement sélectionné le schéma le plus simple, soit le numéro 3, et nous l'étendons à l'EC deux dimensions présentée à la Sec. 5.4.

5.2.6. Conditions limites

La condition limite pour le système d'EC en une dimension donnée aux Eq. (3.49) est rappelée ci-dessous :

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = A_r E \tag{5.14}$$

5.2. Modèle numérique en une dimension pour le système d'équations couplées

où $n = \pm 1$ à une dimension est le vecteur unitaire normal à la paroi sortant du domaine et $A_r = \frac{\alpha}{2(2-\frac{\alpha}{2})}$ est le coefficient d'absorption modifié et α le coefficient d'absorption de Sabine. Ce sont des conditions de Neumann.

Le calcul des conditions limites consiste à substituer les valeurs discrètes de E et \vec{J} par la condition lorsqu'elles sont au bord du domaine. En $x = 1$, les Eq. (5.12) devienne

$$J_1^{n+1} = (1 - Da)J_1^n + C_r(E_1^n - E_2^n) \quad (5.15)$$

$$E_1^{n+1} = (1 - Aa)E_1^n + C_r(J_0^{n+1} - J_1^{n+1}) \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

où J_0^{n+1} est situé sur le bord du domaine. En $x = nx$, nous avons

$$J_{nx}^{n+1} = (1 - Da)J_{nx}^n + C_r(E_{nx}^n - E_{nx+1}^n) \quad (5.18)$$

$$E_{nx}^{n+1} = (1 - Aa)E_{nx}^n + C_r(J_{nx-1}^{n+1} - J_{nx}^{n+1}) \quad (5.19)$$

$$(5.20)$$

où E_{nx+1}^n est situé sur le bord du domaine. L'utilisation d'une condition limite dissymétrique (en remplaçant une variable d'un côté et l'autre de l'autre) paraît naturelle au vu des directions opposées des pas d'espaces pour chacune des variable, mais cette technique entraîne un déséquilibre dans le modèle.

En remplaçant la variable \vec{J} des deux côtés, nous obtenons une condition de limite équilibrée. Cela permet d'utiliser la même condition aux deux extrémités du modèle et de simplifier le calcul. En $x = 1$ nous remplaçons J_0^{n+1} dans la première partie de l'Eq. (5.17). En $x = nx$ nous remplaçons J_{nx}^{n+1} dans la deuxième partie de l'Eq. (5.20).

Les conditions limites de l'Eq. (5.14) à gauche en $x = 1$ et à droite en $x = nx$ s'écrivent

$$J_g = J(1, t + 1) = -A_r E_g = -A_r E(1, t)$$

$$J_d = J(nx - 1, t + 1) = A_r E_d = A_r E(nx - 1, t + 1)$$

où J_g et E_g sont l'intensité et l'énergie à gauche et J_d et E_d sont l'intensité et l'énergie à droite. La condition limite est discrétisée par les schémas différences finies.

Approximations

Les conditions limites de l'Eq. (5.14) sont discrétisées par un schéma différences finies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 J(1, t + 1) &= \frac{J_1^{n+1} + J_0^{n+1}}{2} \\
 E(1, t) &= \frac{E_1^{n+1} + E_1^n}{2} \\
 J(nx - 1, t + 1) &= \frac{J_{nx-1}^{n+1} + J_{nx}^{n+1}}{2} \\
 E(nx - 1, t + 1) &= \frac{E_{nx-1}^{n+1} + E_{nx}^n}{2}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Équation discrète

Les approximations des conditions limites Eq. (5.21) conduisent à

$$J_0^{n+1} = -A_r(E_1^{n+1} + E_1^n) - J_1^{n+1}$$

à gauche, et

$$J_{nx}^{n+1} = A_r(E_{nx-1}^{n+1} + E_{nx-1}^n) - J_{nx-1}^{n+1}$$

à droite. En remplaçant les termes correspondant dans les Eq. (5.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 E_1^{n+1} &= \frac{1}{1 + A_r C_r} (1 - Aa - A_r C_r) E_1^n - 2C_r (J_1^{n+1}) \\
 E_{nx}^{n+1} &= \frac{1}{1 + A_r C_r} (1 - Aa - A_r C_r) E_{nx}^n + 2C_r (J_{nx-1}^{n+1})
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Visualisation

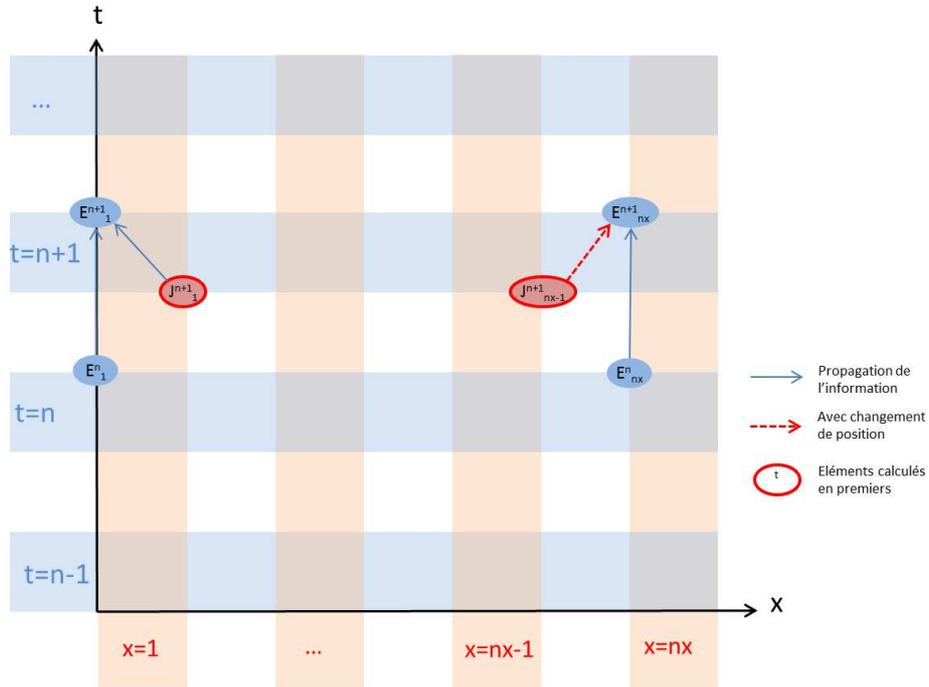


FIGURE 5.7 – Schéma numéro 3 avec conditions limites de la simulation FDTD du système d'EC en une dimension.

La Fig. 5.7 est une représentation simplifiée du maillage du schéma numéro 3 avec conditions limites du système d'EC en une dimension.

5.2.7. Étude de stabilité

Nous utilisons la méthode de Von Neumann afin de calculer la condition de stabilité du schéma numéro 3. La méthode utilise la matrice d'amplification. Les Eq. (5.12) peuvent en effet être implémentées sous la forme

$$U^n = M^n U^0$$

où $U^n = (J^n, E^n)^T$ est une matrice colonne de $2nx$ longueur contenant les valeurs de \vec{J} et de E au temps n , et

$$M = \begin{pmatrix} A_J & B_J \\ B_E & A_E \end{pmatrix}$$

est la matrice d'amplification, constituée de quatre matrices carrées de dimensions n_x . Les matrices A_j et A_E sont diagonales et les matrices B_J et B_E sont tridiagonales supérieure et inférieure respectivement. Nous avons

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 - Da & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 - Da \end{pmatrix}$$

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 - Aa & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 - Da \end{pmatrix}$$

$$B_J = \begin{pmatrix} C_r & -C_r & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -C_r \\ 0 & & & C_r \end{pmatrix}$$

$$B_E = \begin{pmatrix} C_r & & & 0 \\ -C_r & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -C_r & C_r \end{pmatrix}$$

La stabilité est donnée par une condition sur les valeurs propres Z de la matrice d'amplification telle que $|Z| < 1$. Le déterminant de la matrice $\det(M - ZId) = 0$ où Id est la matrice identité s'écrit

$$\det(M) = \det(A_j A_E - B_J B_E)$$

La matrice obtenue est complexe et le résultat n'a pas pu être vérifié. Afin de trouver une valeur approchée, nous admettons que la condition de stabilité $|Z| < 1$ est le produit des conditions de stabilité appliquées aux valeurs propres $|Z|$ des sous-matrices de M .

Pour A_J , nous cherchons $|Z| < 1$ tel que $\det(A_J - ZId) = 0$. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients de la diagonale, on obtient alors $Z = 1 - Da$ d'où la condition de stabilité sur A_J : $\frac{Da}{2} < 1$.

Pour A_E , la condition $|Z| < 1$ se calcule pareillement, d'où $\frac{Aa}{2} < 1$.

Pour B_J , nous cherchons $|Z| < 1$ tel que $\det(B_J - ZId) = 0$. Le déterminant d'une matrice tridiagonale supérieure est le produit des coefficients de la diagonale, on obtient alors $Z = C_r$ d'où la condition de stabilité sur B_J : $C_r < 1$.

Pour B_E , la condition $|Z| < 1$ se calcule pareillement, d'où $C_r < 1$.

Finalement, la condition de stabilité approchée du schéma numéro 3 est donnée par le produit des conditions établies sur chaque matrice A_J , A_E , B_J et B_E :

$$C_r^2 AD \left(\frac{c\Delta t}{2\lambda} \right)^2 < 1 \quad (5.23)$$

Cette condition n'est pas vérifiée numériquement. Nous observons des cas d'instabilité pour des valeurs légèrement supérieures à 1. Cette étude n'a donc pas permis de calculer la condition de stabilité du schéma de l'EC en une dimension. Numériquement, nous remarquons que les stabilités des schémas de l'EC une dimension et du schéma de l'EG une dimension présentée à la Sec. 5.3 sont proches.

5.3. MODÈLE NUMÉRIQUE EN UNE DIMENSION POUR L'ÉQUATION GÉNÉRALE

L'équation générale (EG) en une dimension appliquée à E à l'Eq. (3.44) est rappelée ci-dessous :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} E - \Delta E + \frac{A+D}{\lambda c} \partial_t E + \frac{AD}{\lambda^2} E = 0$$

C'est une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre. Nous présentons le schéma explicite, consistant et stable et les approximations numériques effectuées. Les prochaines sections décrivent le schéma proposé et sa précision : les approximations effectuées, les équation discrètes obtenus ainsi que l'étude des conditions de stabilité. Nous résolvons L'EG sur E mais le schéma peut indifféremment s'appliquer à \vec{J} ou à Φ et les conditions s'appliquent pour les trois variables.

5.3.1. Schéma

Approximations

Des schémas ont déjà été utilisés dans la littérature par Kowalczyk [Kowalczyk, 2008] et Booteldorren [Botteldooren, 1995]. Savioja [Savioja, 2010] s'est basé sur ces schémas pour ef-

fectuer des simulations d'acoustique des salles en temps réel et une méthode FDTD basée sur l'équation de diffusion a été utilisée Navarro Ruiz [Navarro Ruiz et al., 2012] pour la prédiction en acoustique des salles. D'autre part, Nagel [Nagel, 2010] a présenté un schéma modifié pour l'équation des Télégraphistes dans le cas d'une simulation d'onde électromagnétique en une dimension. Jianhui *et al.* [Jianhui et al., 2012] a appliqué une méthode FDTD à la mesure de longueur de câbles par réflectométrie dans le domaine temporel. Mohanty [Mohanty, 2005] quant à lui a proposé un schéma de différences finies inconditionnellement stable pour une équation hyperbolique du second ordre similaire aux Eq. (3.44).

Les approximations de l'Eq. (3.44) utilisées sont centrées pour toutes les dérivés :

$$\begin{aligned}
 \partial_{xx}E(x, t) &= \frac{1}{\Delta x^2}(E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n) \\
 \partial_t E(x, t) &= \frac{1}{2\Delta t}(E_i^{n+1} - E_i^{n-1}) \\
 \partial_{tt}E(x, t) &= \frac{1}{\Delta t^2}(E_i^{n+1} - 2E_i^n + E_i^{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

Équation discrète

En remplaçant l'Eq. (5.24) dans l'Eq. (3.44), nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2\Delta t^2}(E_i^{n+1} - 2E_i^n + E_i^{n-1}) - \frac{1}{\Delta x^2}(E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n) \\
 + \frac{A+D}{2c\Delta t\lambda}(E_i^{n+1} - E_i^{n-1}) + E_i^n \frac{DA}{\lambda^2} = 0
 \end{aligned}$$

Nous notons $C_r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ la condition de Courant-Friedrichs-Lewy, $a = (A+D)\frac{c\Delta t}{2\lambda}$ et $b = AD(\frac{c\Delta t}{\lambda})^2$, et nous en déduisons l'équation discrète du schéma de l'EG :

$$E_i^{n+1}(1+a) = E_i^n(2(1-C_r^2) - b) + C_r^2(E_{i+1}^n + E_{i-1}^n) + E_i^{n-1}(a-1)
 \tag{5.25}$$

Erreur de troncature

L'erreur de troncature est donnée par

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \frac{1}{c^2} \frac{E_i^{n+1} - 2E_i^n + E_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{A+D}{c\lambda} \frac{E_i^{n+1} - E_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{AD}{\lambda} E_i^n \\
 &- \frac{1}{c^2} \partial_{tt}E + \partial_{xx}E - \frac{A+D}{c\lambda} \partial_t E - \frac{AD}{\lambda^2} E
 \end{aligned}$$

Puis nous nous servons des développements de Taylor suivant :

$$\begin{aligned}
 E_i^{n+1} &= E_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
 E_i^{n-1} &= E_i^n - \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
 E_{i+1}^n &= E_i^n + \Delta x \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\
 E_{i-1}^n &= E_i^n - \Delta x \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_i^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^3)
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \frac{(E_i^{n+1} - 2E_i^n + E_i^{n-1}))}{\Delta t^2} &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
 \frac{A + D}{c\lambda} \frac{(E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n)}{2\Delta x} &= \frac{A + D}{c\lambda} \partial_x E + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\
 \frac{AD}{\lambda^2} \frac{(E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n)}{\Delta x^2} &= \frac{AD}{\lambda^2} \partial_{xx} E + \mathcal{O}(\Delta x^2)
 \end{aligned}$$

Et finalement

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

L'erreur de troncature est du second ordre en temps et en espace.

Ce schéma est consistant car $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

Visualisation

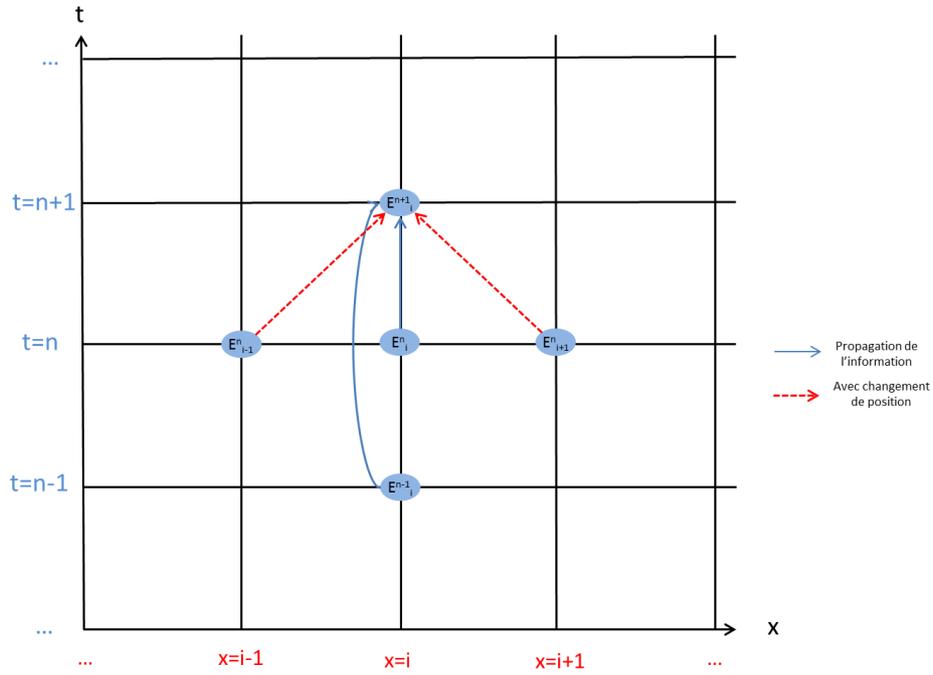


FIGURE 5.8 – Schéma de la simulation FDTD de l’EG en une dimension.

La Fig. 5.8 simplifie la représentation à une dimension du maillage. C’est un schéma à 5 points.

5.3.2. Conditions limites

Comme nous l’avons exprimé dans la Sec. 3.10, la condition limite de l’EG appliquée à E s’applique aussi pour les variables \vec{J} et Φ . Nous développons donc les équations discrètes uniquement pour E .

La condition limite pour l’EG est donnée en deux dimensions par l’Eq. (3.50) rappelée ci-dessous :

$$\partial_n E + \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right) A_r E = 0$$

où $n = \pm 1$ dans le cas une dimension, soit

$$\partial_x E + \left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{D}{\lambda} \right) A_r E = 0 \tag{5.27}$$

en une dimension. Comme dans le cas du système d'EC en une dimension développé Sec. 5.14, l'intégration des conditions limites consiste à substituer des valeurs discrètes de E par leur condition limite lorsqu'elles sont situées sur les bords du domaine.

Approximations Les conditions limites de l'Eq. (5.27) sont discrétisées par un schéma différences finies centré en temps et en espace :

$$\partial_x E(x, t) = \frac{E_{i+1}^n + E_{i-1}^n}{2\Delta_x} \quad (5.28)$$

sur les limites du domaine.

Équation discrète Les approximations de l'Eq. (5.28) sont combinées aux conditions limites de l'Eq. (5.27). Nous distinguons les limites du domaine en $x = 1$ et en $x = nx$. En combinant les Eq. (5.25) et (5.28), nous obtenons

$$\begin{aligned} E_1^{n+1}(1+a) &= E_1^n(2(1-C_r^2) - b - 2C_r^2 \frac{A_r D \Delta_x}{\lambda}) - 2C_r^2 E_2^n + E_1^{n-1}(a-1) \\ E_{nx}^{n+1}(1+a) &= E_{nx}^n(2(1-C_r^2) - b - 2C_r^2 \frac{A_r D \Delta_x}{\lambda}) - 2C_r^2 E_{nx-1}^n + E_{nx}^{n-1}(a-1) \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.3.3. Étude de stabilité

Une analyse de Von Neumann est effectuée afin de calculer la condition de stabilité du schéma de l'EG sur E . Pour cela, nous considérons la solution de l'Eq. (5.25) comme égale à

$$E_i^n = Z^n e^{j\theta i} \quad (5.30)$$

où Z peut être complexe et θ est réel. Nous définissons le facteur d'amplification $M = \frac{E_i^{n+1}}{E_i^n}$. La condition nécessaire et suffisante pour que le schéma converge est

$$|M| \leq 1 \quad (5.31)$$

En substituant l'Eq. (5.30) dans l'Eq. (5.25), nous obtenons

$$Z^{n+1} e^{j\theta i}(1+a) + Z^{n-1} e^{j\theta i}(1-a) + Z^n e^{j\theta i}(b + 2(C_r^2 - 1)) - C_r^2(Z^n e^{j\theta(i+1)} + Z^n e^{j\theta(i-1)}) = 0$$

Avec $Z^n(e^{j\theta(i+1)} + e^{j\theta(i-1)}) = Z^n \cos(\Theta) = Z^n(1 - 2\sin^2(\frac{\Theta}{2}))$ et en divisant par $Z^{n-1} e^{j\theta i}$, nous avons

$$Z^2(1+a) - Z\kappa + (1-a) = 0$$

où $\kappa = -b + 2 - 4C_r^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$.

Cette équation est du second degré et ses solutions dépendent du signe du discriminant $\Delta = \kappa^2 - 4(1+a)(1-a)$, soit

$$\Delta = \kappa^2 - 4(1 - a^2)$$

La condition de stabilité est différente selon le signe de Δ .

– Cas $\Delta > 0$

Les solutions sont données par

$$Z_{\Delta>0} = \frac{\kappa \pm \sqrt{\Delta}}{2(1+a)}$$

Nous souhaitons calculer le facteur d'amplification $M = Z$ selon la condition de stabilité de l'Eq. (5.31). Elle se réduit à :

$$\left| \frac{\kappa \pm \sqrt{\Delta}}{2(1+a)} \right| < 1$$

L'inégalité triangulaire permet de majorer $|\kappa \pm \sqrt{\Delta}|$ par $|\kappa| + |\sqrt{\Delta}|$. Avec $\Delta > 0$ et $2(1+a) > 0$, la condition de stabilité devient

$$\frac{|\kappa| + \sqrt{\Delta}}{2(1+a)} < 1$$

Soit

$$|\kappa| < 2$$

En remplaçant $\kappa = -b + 2 - 4C_r^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$ et $b = AD(\frac{c\Delta t}{\lambda})^2$, nous obtenons deux conditions :

$$\kappa < 2, \quad b + 4C_r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} > 0$$

et

$$\kappa > -2, \quad C_r^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) < 1 - \frac{b}{4}$$

La première condition est toujours satisfaite car $b = AD\left(\frac{c\Delta t}{\lambda}\right)^2 > 0$. La deuxième condition est obtenue en majorant $\sin^2(\frac{\theta}{2})$ par 1 :

$$C_r^2 + AD\left(\frac{c\Delta t}{2\lambda}\right)^2 < 1 \tag{5.32}$$

– Cas $\Delta < 0$

Les solutions sont données par

$$Z_{\Delta < 0} = \frac{\kappa \pm i\sqrt{-\Delta}}{2(1+a)}$$

où $i = \sqrt{-1}$

Comme précédemment, en appliquant la condition de l'Eq (5.31), nous cherchons les valeurs pour lesquelles il y a stabilité :

$$\left| \frac{\kappa \pm i\sqrt{-\Delta}}{2(1+a)} \right| < 1$$

Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est donné par $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ainsi nous obtenons

$$\frac{\kappa^2 - \Delta}{4(1+a)^2} < 1$$

En remplaçant Δ dans $\kappa^2 - 4(1 - a^2)$, nous avons

$$\frac{4(1 - a^2)}{4(1+a)^2} < 1$$

Soit

$$\frac{1 - a}{1 + a} < 1$$

Cette condition est toujours atteinte car $a = (A + D)\frac{c\Delta t}{\Delta x} > 0$.

Tant que $\Delta < 0$, le schéma est inconditionnellement stable. Cependant, si $\Delta > 0$, la condition de stabilité est celle de l'Eq. (5.32). La condition de stabilité implique les coefficients d'absorption et de diffusion modifiés A et D , le libre parcours moyen λ , la célérité des ondes c et les pas de discrétisation spatiale et temporelle Δx et Δt .

Nous étudions la stabilité de l'Eq. (3.44) discrétisée sous la forme de l'Eq. (5.25) afin de connaître le domaine de validité du modèle.

Le pas de discrétisation spatiale n'a pas besoin d'être petit car nous étudions une propagation énergétique. Nous le fixons à $\Delta x = 1m$. A l'inverse, plus le pas de discrétisation temporelle sera petit, plus les résultats seront précis. D'un autre côté, plus il sera grand et plus les calculs

seront rapides. Nous faisons varier le pas de discrétisation temporelle de $\Delta t \in [1.10^{-4}; 1.10^{-2}]s$. La célérité des ondes est de $c = 344m.s^{-1}$. La valeur du libre parcours moyen est de l'ordre de la plus petite longueur entre deux parois. Le libre parcours moyen λ pour un espace à une dimension comme un couloir est de l'ordre de $3m$. Enfin, nous choisissons une plage du coefficient d'absorption $\alpha \in [0.1; 0.9]$ et une plage du coefficient de diffusion $\beta \in [0.1; 1.9]$. Le Tableau 5.1 présente les valeurs minimales du pas de discrétisation temporelle pour que la condition de stabilité soit respectée.

TABLE 5.1 – Valeurs minimum de Δt pour respecter la condition de stabilité de l'Eq. (5.32) de l'EG discrétisée Eq. (5.46) en fonction des paramètres du modèle α et β , avec $\Delta x = 1m$, $c = 344m/s$ et $\lambda = 3m$.

α	β	$\Delta t(s)$
0.1	0.1	0.0029
	1.1	0.0029
	1.9	0.0028
0.5	0.1	0.0029
	1.1	0.0029
	1.9	0.0022
0.9	0.1	0.0029
	1.1	0.0029
	1.9	0.0018

La condition de stabilité n'est pas très sensible aux variations des coefficients α et β . La valeur minimale de Δt varie d'un facteur 1.6 lorsque l'on parcourt toute la plage des coefficients α et β et reste supérieure à $1.10^{-3}s$. Au contraire, la condition de stabilité est très sensible aux variations des pas de discrétisation spatiale Δx et temporelle Δt .

5.4. MODÈLE NUMÉRIQUE EN DEUX DIMENSIONS POUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS COUPLÉES

Le système d'EC en deux dimensions des Eq. (3.32) et (3.37) est rappelé ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \partial_t J_x + \partial_x E &= -\frac{D}{\lambda} J_x \\
 \frac{1}{c} \partial_t J_y + \partial_y E &= -\frac{D}{\lambda} J_y \\
 \frac{1}{c} \partial_t E + \partial_x J_x + \partial_y J_y &= -\frac{A}{\lambda} E
 \end{aligned}
 \tag{5.33}$$

C'est un système hyperbolique d'équations différentielles linéaires du premier ordre impliquant la E et \vec{J} . Il décrit la propagation de l'énergie dans un espace fermé.

Nous reprenons la méthode utilisée pour le système en une dimension. Nous présentons la modélisation par une méthode FDTD consistante et stable. Nous calculons à chaque itération et pour toutes les positions \vec{J} d'abord, puis E . Ce choix implique une orientation spatiale sur les schémas de différences finies : un schéma décentré arrière sur \vec{J} et avant sur E pour les deux directions de l'espace est utilisé. De plus, un schéma décentré avancé en temps est utilisé pour les deux variables. L'intensité est néanmoins calculée une itération en avance. Cette différenciation implique son calcul en première lors de la boucle de calcul du modèle numérique. Les prochaines sections décrivent en détails les schémas, les approximations effectuées, la précision et l'étude des conditions de stabilité. De plus, nous présentons les schémas et approximations des conditions aux limites.

5.4.1. Schémas

Approximations

Le schéma utilisé est un schéma d'Euler explicite progressif sur E couplé à un schéma d'Euler implicite régressif sur \vec{J} . Il implique les approximations suivantes sur \vec{J} :

$$\begin{aligned}
 \partial_x J_x &= \frac{Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \\
 \partial_y J_y &= \frac{Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \\
 \partial_t J_x &= \frac{Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i,j}^n}{\Delta t} \\
 \partial_t J_y &= \frac{Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j}^n}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Et les approximations suivantes sur E :

$$\begin{aligned}
 \partial_x E &= \frac{E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n}{\Delta x} \\
 \partial_y E &= \frac{E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n}{\Delta y} \\
 \partial_t E &= \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Équation discrète

En combinant les Eq. (5.34) pour \vec{J} et (5.35) pour E avec les Eq. (5.33), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n}{\Delta y} &= -\frac{D}{\lambda} J_y \\
 \frac{1}{c} \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} &= -\frac{A}{\lambda} E \\
 \frac{1}{c} \frac{Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n}{\Delta x} &= -\frac{D}{\lambda} J_x
 \end{aligned}$$

5.4. Modèle numérique en deux dimensions pour le système d'équations couplées

En posant $C_{r_x} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ et $C_{r_y} = \frac{c\Delta t}{\Delta y}$ les conditions de Courant-Friedrichs-Lewy selon les directions \vec{x} et \vec{y} et $a = \frac{c\Delta t}{\lambda}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 E_{i,j}^{n+1} &= (1 - aA)E_{i,j}^n - C_{r_x}(Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i-1,j}^{n+1}) - C_{r_y}(Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j-1}^{n+1}) \\
 Jx_{i,j}^{n+1} &= (1 - aD)Jx_{i,j}^n - C_{r_x}(E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n) \\
 Jy_{i,j}^{n+1} &= (1 - aD)Jy_{i,j}^n - C_{r_y}(E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Erreur de troncature

L'erreur de troncature ϵ du schéma de l'Eq. (5.33) est donnée par

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{J_x} &= \frac{1}{c} \frac{Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{D}{\lambda} J_x - \frac{1}{c} \partial_t J_x - \partial_x E - \frac{D}{\lambda} J_x \\
 \epsilon_{J_y} &= \frac{1}{c} \frac{Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{D}{\lambda} J_y - \frac{1}{c} \partial_t J_y + \partial_y E - \frac{D}{\lambda} J_y \\
 \epsilon_E &= \frac{1}{c} \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \\
 &\quad + \frac{Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{A}{\lambda} E - \frac{1}{c} \partial_t E - \partial_x J_x - \partial_y J_y - \frac{A}{\lambda} E
 \end{aligned}$$

Puis nous nous servons des développements de Taylor des Eq. (5.5) et (5.9) :

$$\begin{aligned}
 \frac{(Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i,j}^n)}{\Delta t} &= \partial_t J_x + \mathcal{O}(\Delta t) \\
 \frac{(Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j}^n)}{\Delta t} &= \partial_t J_y + \mathcal{O}(\Delta t) \\
 \frac{(Jx_{i,j}^{n+1} - Jx_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x} &= \partial_x J_x + \mathcal{O}(\Delta x) \\
 \frac{(Jy_{i,j}^{n+1} - Jy_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta x} &= \partial_y J_y + \mathcal{O}(\Delta y) \\
 \frac{(E_i^{n+1} - E_i^n)}{\Delta t} &= \partial_t E + \mathcal{O}(\Delta t) \\
 \frac{(E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n)}{\Delta x} &= \partial_x E + \mathcal{O}(\Delta x) \\
 \frac{(E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n)}{\Delta y} &= \partial_y E + \mathcal{O}(\Delta y)
 \end{aligned}$$

Et finalement

$$\epsilon_{J_x} = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x, \Delta y)$$

$$\epsilon_{J_y} = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x, \Delta y)$$

$$\epsilon_E = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x, \Delta y)$$

L'erreur de troncature est du premier ordre en temps et en espace :

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x, \Delta y)$$

Ce schéma est consistant car $\lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \epsilon(E, J_x, J_y) = 0$.

Visualisation

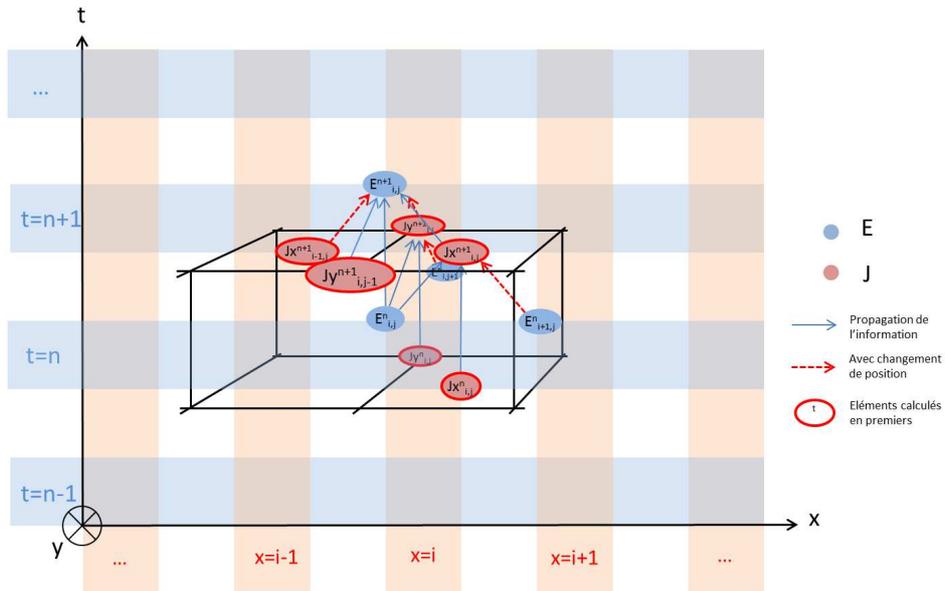


FIGURE 5.9 – Schéma de la simulation FDTD du système d'EC en deux dimensions.

5.4.2. Conditions limites

Les conditions limites pour le système d'EC en deux dimensions des Eq. (5.33) sont données par les Eq. (3.49) rappelées ci-dessous :

Pour une paroi perpendiculaire à \vec{x} ou perpendiculaire à \vec{y} , nous avons

$$\begin{aligned} J_x n &= E(x, y, t) A_r \\ J_y n &= E(x, y, t) A_r \end{aligned} \tag{5.37}$$

où $n = \pm 1$ est le vecteur unitaire normal à la paroi et A_r est le coefficient d'absorption modifié. Ce sont des conditions de Neumann.

Comme dans le cas du système d'EC en une dimension, l'intégration des conditions limites consiste à substituer des valeurs discrètes de \vec{J} par leur condition limite sur les bords du domaine. Les conditions limites s'écrivent à gauche en $x = 1$ et $y = 1$ et à droite en $x = nx$ et $y = ny$ comme en une dimension, Sec. 5.2. Le flux d'énergie le long des parois est nul. Les termes J_x situées en $y = 0$ ou $y = ny$ et les termes J_y situées en $x = 0$ ou $x = nx$ sont donc nulles.

Approximations

Les conditions limites de l'Eq. (5.37) sont discrétisées par un schéma différences finies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Jx_{0,j}^{n+1} &= -A_r(E_{1,j}^{n+1} + E_{1,j}^n) - Jx_{1,j}^{n+1} \\ Jy_{0,j}^{n+1} &= 0 \\ Jx_{i,0}^{n+1} &= 0 \\ Jy_{i,0}^{n+1} &= -A_r(E_{i,1}^{n+1} + E_{i,1}^n) - Jy_{i,1}^{n+1} \end{aligned} \tag{5.38}$$

en $x = 1$ et $y = 1$, et

$$\begin{aligned} Jx_{nx,j}^{n+1} &= A_r(E_{nx,j}^{n+1} + E_{nx,j}^n) - Jx_{nx-1,j}^{n+1} \\ Jy_{nx,j}^{n+1} &= 0 \\ Jx_{i,ny}^{n+1} &= 0 \\ Jy_{i,ny}^{n+1} &= A_r(E_{i,ny}^{n+1} + E_{i,ny}^n) - Jy_{i,ny-1}^{n+1} \end{aligned} \tag{5.39}$$

en $x = nx$ et $y = ny$.

Équation discrète

En remplaçant par les approximations des conditions limites Eq. (5.38) et (5.39) les termes dont les coordonnées discrètes sont situées sur les limites du domaine dans les Eq. (5.36), nous avons finalement

– En $x = 1$:

$$\begin{aligned} E_{1,j}^{n+1}(1 + Cr_x A_r) &= (1 - aA - Cr_x A_r)E_{1,j}^n - 2C_{r_x} Jx_{1,j}^{n+1} \\ &- C_{r_y}(Jy_{1,j}^{n+1} - Jy_{1,j-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

– En $y = 1$:

$$\begin{aligned} E_{i,1}^{n+1}(1 + Cr_y A_r) &= (1 - aA - Cr_y A_r)E_{i,1}^n - 2C_{r_y} Jy_{i,1}^{n+1} \\ &- C_{r_x}(Jx_{i,1}^{n+1} - Jx_{i-1,1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

– En $x = nx$:

$$E_{nx,j}^{n+1}(1 + Cr_x A_r) = (1 - aA - Cr_x A_r)E_{nx,j}^n + 2C_{r_x} Jx_{nx-1,j}^{n+1} \quad (5.42)$$

– En $y = ny$:

$$E_{i,ny}^{n+1}(1 + Cr_y A_r) = (1 - aA - Cr_y A_r)E_{i,ny}^n + 2C_{r_y} Jy_{i,ny-1}^{n+1} \quad (5.43)$$

5.4.3. Étude de stabilité

Nous pratiquons la même méthode que pour la stabilité de la modélisation FDTD du système d'EC en une dimension. Nous faisons une analyse de Von Neumann du schéma de l'Eq. (5.36) et passons par l'utilisation de la matrice d'amplification. Les Eq. (5.36) sont implémentées sous la forme :

$$U^n = M^n U^0$$

où $U^n = (J^n, E^n)$ est une matrice colonnes de nx^2 longueur contenant les valeurs de \vec{J} et de E au temps n , et

$$M = \begin{pmatrix} A_J & B_J \\ B_E & A_E \end{pmatrix}$$

est la matrice d'amplification, constituée de quatre matrices carrées de dimension n_x^2 . Les matrices A_j et A_E sont diagonales et les matrices B_J et B_E sont tridiagonales supérieure et inférieure respectivement. Comme en une dimension, la matrice obtenue est complexe. Elle est d'autant plus complexe que les valeurs des variables dans la dimension y s'imbriquent aux valeurs des variables sur la dimension x . Nous n'avons pas pu vérifier le résultat et contrairement à l'étude en une dimension nous n'avons pas cherché de valeur approchée. Nous admettons que la condition de stabilité est une combinaison des stabilités sur chacune des dimensions spatiales du modèle. Nous vérifions la stabilité numériquement et observons qu'elle est proche de celle du schéma de l'EG deux dimensions présentée à la Sec. 5.5.

5.5. MODÈLE NUMÉRIQUE EN DEUX DIMENSIONS POUR L'ÉQUATION GÉNÉRALE

L'EG en deux dimensions appliquée à la E à l'Eq. (3.44) est rappelée ci-dessous :

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} E - \Delta E + \frac{A+D}{\lambda c} \partial_t E + \frac{AD}{\lambda^2} E = 0 \quad (5.44)$$

C'est une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre. Nous présentons le schéma explicite, consistant et stable et les approximations numériques effectuées. Les prochaines sections décrivent en détails le schéma proposé, similaire de celui utilisé pour la modélisation de l'EG en une dimension présentée à la Sec. 5.3, et sa précision : les approximations effectuées, les équation discrètes obtenus ainsi que l'étude des conditions de stabilité.

5.5.1. Schémas

Approximations

Les approximations de l'Eq. (5.44) appliquée à E utilisées ici sont centrées pour toutes les dérivés :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} E(x, y, t) &= \frac{1}{\Delta x^2} (E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n) \\ \partial_{yy} E(x, y, t) &= \frac{1}{\Delta x^2} (E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n) \\ \partial_t E(x, y, t) &= \frac{1}{2\Delta t} (E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}) \\ \partial_{tt} E(x, y, t) &= \frac{1}{\Delta t^2} (E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Équation discrète

En remplaçant l'Eq. (5.45) dans l'Eq. (5.44), nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ & - \frac{E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + \frac{A+D}{2c\lambda} \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{DA}{\lambda^2} E_{i,j}^n = 0 \end{aligned}$$

Nous notons $C_{r_x} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ et $C_{r_y} = \frac{c\Delta t}{\Delta y}$ les condition de Courant-Friedrichs-Lewy pour les variables x et y respectivement, $a = (A+D)\frac{c\Delta t}{2\lambda}$ et $b = AD(\frac{c\Delta t}{\lambda})^2$. Nous en déduisons l'équation discrète du schéma de l'EG :

$$\begin{aligned} E_i^{n+1}(1+a) &= E_{i,j}^n(2(1-C_{r_x}-C_{r_y})-b) + C_{r_x}(E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n) \\ &+ C_{r_y}(E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n) + E_{i,j}^{n-1}(a-1) \end{aligned} \tag{5.46}$$

Erreur de troncature

L'erreur de troncature ϵ est donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{c^2} \frac{E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - \frac{E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ &+ \frac{A+D}{c\lambda} \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{AD}{\lambda} E_{i,j}^n - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} E + \partial_{xx} E + \partial_{yy} E - \frac{A+D}{c\lambda} \partial_t E - \frac{AD}{\lambda^2} E \end{aligned}$$

Puis nous nous servons des développements de Taylor suivants :

$$\begin{aligned}
 E_{i,j}^{n+1} &= E_{i,j}^n + \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{i,j}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
 E_{i,j}^{n-1} &= E_{i,j}^n - \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{i,j}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
 E_{i+1,j}^n &= E_{i,j}^n + \Delta x \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{i,j}^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\
 E_{i-1,j}^n &= E_{i,j}^n - \Delta x \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{i,j}^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\
 E_{i,j+1}^n &= E_{i,j}^n + \Delta y \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{i,j}^n + \frac{\Delta y^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta y^2) \\
 E_{i,j-1}^n &= E_{i,j}^n - \Delta y \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{i,j}^n + \frac{\Delta y^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta y^2)
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{(E_{i,j}^{n+1} - 2E_{i,j}^n + E_{i,j}^{n-1}))}{\Delta t^2} &= \partial_{tt} E + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
 \frac{(E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^{n-1}))}{2\Delta t} &= \partial_t E + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
 \frac{(E_{i+1,j}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i-1,j}^n)}{\Delta x^2} &= \partial_{xx} E + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\
 \frac{(E_{i,j+1}^n - 2E_{i,j}^n + E_{i,j-1}^n)}{\Delta y^2} &= \partial_{yy} E + \mathcal{O}(\Delta y^2)
 \end{aligned}$$

Et finalement

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$$

L'erreur de troncature est du second ordre en temps et en espace.

Ce schéma est consistant car $\lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

Visualisation

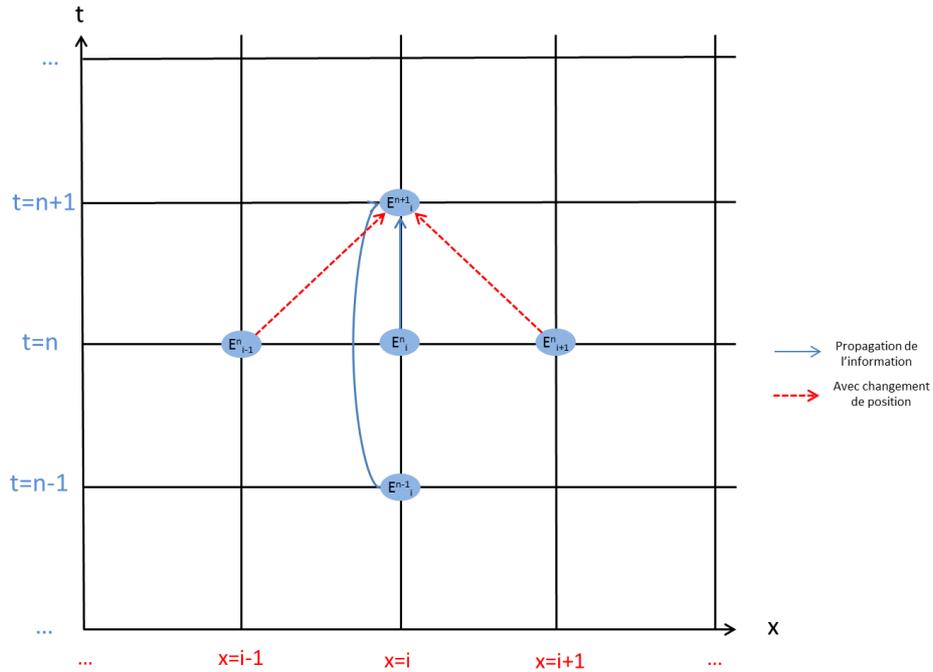


FIGURE 5.10 – Schéma de la simulation FDTD de l’EG en deux dimensions.

La Fig. 5.10 simplifie la représentation à une dimension du maillage. C’est un schéma à 5 points.

5.5.2. Conditions limites

Comme nous l’avons exprimé dans le cas une dimension, la condition limite de l’EG appliquée à E s’applique aussi pour les variables \vec{J} et Φ . Nous développerons donc les équations discrètes uniquement pour E .

La condition limite pour l’EG en deux dimensions est donnée par les Eq. (3.50) rappelée ci-dessous :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})\left(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda}\right)E + A_r E \vec{n} = 0 \tag{5.48}$$

où $A_r = \frac{\alpha}{2(2-\frac{\alpha}{2})}$, soit $A_r = \frac{A}{4}$, et n est le vecteur unitaire normal à la paroi. Ce sont des conditions mixtes. Nous remarquons que coefficient de diffusion est pris en compte dans la

condition limite.

Comme dans le cas du système d'EC en une dimension développé Sec. 5.2, l'intégration des conditions limites consiste à substituer des valeurs discrètes de E par leur condition limite lorsqu'elles sont situées sur les bords du domaine.

Approximations Les conditions limites de l'Eq. (5.48) sont discrétisées par un schéma différences finies centré en temps et en espace. Selon que l'on se place sur une parois perpendiculaire à x ou perpendiculaire à y , la dérivée par rapport à la normale à la paroi sera $\partial_n = \partial_x$ ou $\partial_n = \partial_y$:

$$\begin{aligned}\partial_x E(x, y, t) &= \frac{E_{i+1,j}^n + E_{i-1,j}^n}{2\Delta_x} \\ \partial_y E(x, y, t) &= \frac{E_{i,j+1}^n + E_{i,j-1}^n}{2\Delta_y} \\ \partial_t E(x, y, t) &= \frac{E_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}^{n-1}}{2\Delta_t}\end{aligned}\tag{5.49}$$

sur les limites du domaine.

Équation discrète Les approximations des conditions limites de l'Eq. (5.49) sont appliquées au schéma de l'EG en deux dimensions. Nous distinguons les limites du domaine en $x = 1$, $x = nx$, $y = 1$ et en $y = ny$:

– En $x = 1$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n}E = \partial_x E$$

– En $x = nx$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n}E = -\partial_x E$$

– En $y = 1$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n}E = \partial_y E$$

– En $y = ny$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n}E = -\partial_y E$$

En combinant les Eq. (5.46) et (5.49), nous obtenons les conditions limites :

– Cas $x=1$

$$\begin{aligned} E_{1,j}^{n+1}(1+a-A_r C_{r_x}^3) &= E_{1,j}^n(2(1-C_{r_x}^2-C_{r_y}^2)-b-2C_{r_x}^2 \frac{A_r D \Delta x}{\lambda}) \\ &\quad +2C_{r_x}^2 E_{2,j}^n + C_{r_y}^2 (E_{1,j+1}^n + E_{1,j-1}^n) + E_{1,j}^{n-1}(a-1-A-rC_{r_x}) \end{aligned} \quad (5.50)$$

– Cas $x = nx$

$$\begin{aligned} E_{nx,j}^{n+1}(1+a-A_r C_{r_x}^3) &= E_{nx,j}^n(2(1-C_{r_x}^2-C_{r_y}^2)-b-2C_{r_x}^2 \frac{A_r D \Delta x}{\lambda}) \\ &\quad +2C_{r_x}^2 E_{nx-1,j}^n + C_{r_y}^2 (E_{nx,j+1}^n + E_{nx,j-1}^n) \\ &\quad + E_{nx,j}^{n-1}(a-1-A-rC_{r_x}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

– Cas $y = 1$

$$\begin{aligned} E_{i,1}^{n+1}(1+a-A_r C_{r_y}^3) &= E_{i,1}^n(2(1-C_{r_x}^2-C_{r_y}^2)-b-2C_{r_y}^2 \frac{A_r D \Delta y}{\lambda}) \\ &\quad +C_{r_x}^2 (E_{i+1,1}^n + E_{i-1,1}^n) + 2C_{r_y}^2 E_{i,2}^n + E_{i,1}^{n-1}(a-1-A-rC_{r_x}) \end{aligned} \quad (5.52)$$

– Cas $y = ny$

$$\begin{aligned} E_{i,ny}^{n+1}(1+a-A_r C_{r_y}^3) &= E_{i,ny}^n(2(1-C_{r_x}^2-C_{r_y}^2)-b-2C_{r_y}^2 \frac{A_r D \Delta y}{\lambda}) \\ &\quad +C_{r_x}^2 (E_{i+1,ny}^n + E_{i-1,ny}^n) + 2C_{r_y}^2 E_{i,ny-1}^n \\ &\quad + E_{i,ny}^{n-1}(a-1-A-rC_{r_x}) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Les Eq. (5.50) à (5.53) ont la même forme en $x = 1$ et $x = nx$, ainsi qu'en $y = 1$ et $y = ny$.

5.5.3. Étude de stabilité

Une analyse de Von Neumann est effectuée afin de calculer la condition de stabilité du schéma de l'EG en deux dimensions. Nous procédons comme dans le cas une dimension décrit à la Sec. 5.3. Nous considérons la solution de l'Eq. (5.46) comme égale à

$$E_i^n = Z^n e^{j\theta i} \quad (5.54)$$

En substituant l'Eq. (5.54) dans l'Eq. (5.46), nous obtenons

$$\begin{aligned} Z^{n+1} e^{j\theta i_x} e^{j\theta i_y} (1+a) &+ Z^n e^{j\theta i_x} e^{j\theta i_y} (b + 2(C_{r_x}^2 + C_{r_y}^2 - 1)) - C_{r_x}^2 (Z^n e^{j\theta(i_x+1)} e^{j\theta(i_y)}) \\ &+ Z^n e^{j\theta(i_x-1)} e^{j\theta(i_y)} - C_{r_y}^2 (Z^n e^{j\theta(i_x)} e^{j\theta(i_y+1)}) \\ &+ Z^n e^{j\theta(i_x)} e^{j\theta(i_y-1)} + Z^{n-1} e^{j\theta i_x} e^{j\theta i_y} (1-a) = 0 \end{aligned}$$

où i_x est le pas de discrétisation temporelle selon x et i_y le pas de discrétisation temporelle selon y . Avec $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\Theta) = 1 - 2\sin^2(\frac{\Theta}{2})$ et en divisant par $Z^{n-1} e^{j\theta i_x} e^{j\theta i_y}$, nous arrivons à

$$Z^2(1+a) + Z\kappa + 1 - a = 0$$

où $\kappa = -b + 2 - 4(C_{r_x}^2 + C_{r_y}^2) \sin^2(\frac{\theta}{2})$.

Cette équation est du second degré et ses solutions dépendent du signe du discriminant Δ . Elle est de la même forme que dans le cas de l'EG en une dimension. Seul κ varie. Ainsi nous pouvons reprendre la solution développée Sec. 5.3.3 : le schéma a une condition de stabilité uniquement dans le cas où le discriminant de l'équation est positif. Nous avons alors

$$-2 < \kappa < 2$$

Soit

$$(C_{r_x}^2 + C_{r_y}^2) \sin^2(\frac{\theta}{2}) < 1 - \frac{b}{4}$$

En majorant $\sin^2(\frac{\theta}{2})$ par 1, nous obtenons

$$C_{r_x}^2 + C_{r_y}^2 + AD \left(\frac{c\Delta t}{2\lambda} \right)^2 < 1 \quad (5.55)$$

Tant que $\Delta < 0$, le schéma est inconditionnellement stable. Cependant, si $\Delta > 0$, la condition de stabilité est celle de l'Eq. (5.55). La condition de stabilité implique les coefficients d'absorption et de diffusion modifiés, le libre parcours moyen, la célérité des ondes c et les pas de discrétisation spatiale et temporelle Δx , Δy et Δt .

Nous étudions la stabilité de l'Eq. (5.44) discrétisée sous la forme de l'Eq. (5.46) afin de connaître le domaine de validité des paramètres du modèle.

Pour les mêmes raisons qu'en une dimension, les pas de discrétisation spatiale son fixés à $\Delta x =$

$\Delta y = 1m$. Nous faisons varier le pas de discrétisation temporel de $\Delta t \in [1.10^{-4}; 1.10^{-2}]s$. La célérité des ondes est de $c = 344m.s^{-1}$. Le libre parcours moyen λ pour un espace à deux dimensions est de deux fois la hauteur sous plafond (voir Chap. 3), soit pour un plafond standard de $2.7m$, $\lambda = 5.4m$. Enfin, nous choisissons une plage du coefficient d'absorption $\alpha \in [0.1; 0.9]$ et une plage du coefficient de diffusion $\beta \in [0.1; 1.9]$. Le Tableau 5.2 présente les valeurs minimales du pas de discrétisation temporel pour que la condition de stabilité soit respectée.

TABLE 5.2 – Valeurs minimum de Δt pour respecter la condition de stabilité Eq. (5.55) de l'EG discrétisée Eq. (5.46) en fonction des paramètres du modèle α et β , avec $\Delta x = 1m$, $c = 344m.s^{-1}$ et $\lambda = 3m$

α	β	$\Delta t(s)$
0.1	0.1	0.0021
	1.1	0.0021
	1.9	0.0020
0.5	0.1	0.0021
	1.1	0.0020
	1.9	0.0020
0.9	0.1	0.0021
	1.1	0.0020
	1.9	0.0018

Nous pouvons remarquer que la stabilité n'est pas très sensible aux variations des coefficients α et β . La valeur minimal de Δt varie d'un facteur 1.2 lorsque l'on parcourt toute la plage des coefficients α et β et reste supérieure à $1.10^{-3}s$. Au contraire, la condition de stabilité est très sensible aux variations des pas de discrétisation spatiale Δx et Δy et temporel Δt .

5.6. CONCLUSION

Nous présentons les schémas différences finies consistants et stables sous conditions, les approximations et leur précision pour l'EC et l'EG et leurs conditions limites en une et deux dimensions.

Pour l'EC en une dimension, nous choisissons le schéma numéro 3 pour sa simplicité. C'est un schéma décentré avant en espace sur E et arrière sur \vec{J} permettant à l'information de se propager dans les deux directions. De plus, Nous calculons à chaque itération \vec{J} d'abord puis E . C'est un schéma semi-implicite où l'intensité est calculée avec une itération d'avance, de précision d'ordre 1, dont les conditions limites sont calculées sur E aux deux extrémités du domaine. Nous n'avons pas pu calculer la condition de stabilité mais nous avons observé numériquement qu'elle se situe proche du modèle EG. Le modèle de l'EC en deux dimensions est similaire en tout point au modèle de l'EC en une dimension. La deuxième dimension spatiale est discrétisée par la même méthode que la première pour les deux variables.

Les schémas appliqués à l'EG sont centrés pour toutes les dimensions de l'espace et pour le temps et de précision d'ordre 2. La condition de stabilité en une dimension est donnée par l'Eq. (5.32) : $C_r^2 + AD \left(\frac{c\Delta t}{2\lambda} \right)^2 < 1$. La condition de stabilité en deux dimensions est donnée par l'Eq. (5.55) : $C_{r_x}^2 + C_{r_y}^2 + AD \left(\frac{c\Delta t}{2\lambda} \right)^2 < 1$.

Chapitre 6

Implémentation et vérification des modèles

6.1. INTRODUCTION

Au Chap. 5, nous avons présenté la méthode de modélisation numérique utilisée pour calculer le système d'équations couplées appliqué à la densité d'énergie et à l'intensité acoustique et l'équation générale appliquée à la densité d'énergie, à l'intensité acoustique ou au potentiel d'intensité.

La méthode choisie est celle des différences finies dans le domaine temporel. Nous avons sélectionné le schéma numéro 3 pour modéliser les équations couplées en une dimension, puis nous l'avons étendu en deux dimensions. Nous avons présenté les schémas de l'équation générale en une et deux dimensions.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode permettant de valider nos modèles théoriques et numériques. Dans une première partie, nous analysons la méthode permettant d'estimer les coefficients d'absorption et de diffusion à partir des mesures *in situ*. Les réponses impulsionnelles sont utilisées pour calculer les coefficients d'absorption et de diffusion à partir des équations présentées au Chap. 3. Nous comparons ensuite les résultats en recalant le modèle numérique avec les mesures *in situ*.

Dans une deuxième partie, nous présentons l'implémentation des modélisations en une et

deux dimensions présentées au Chap. 5. Les formes des salles modélisées en deux dimensions sont plus complexes et nous montrons comment nous prenons en compte leur géométrie. Notamment, il est possible d'utiliser les fichiers de géométrie de salles à partir de leur modèle réalisé sous Google SketchUp, un logiciel de conception assistée par ordinateur couramment utilisé dans les bureaux d'étude acoustique. Ensuite, nous montrons que les résultats sont équivalents pour les deux modèles et nous les comparons avec le modèle analytique. Nous montrons que les modèles se correspondent bien, aux hypothèses près. C'est à dire que le modèle analytique ne fonctionne qu'à partir du temps de transition. Enfin, nous fixons les pas de discrétisation et étudions les modèles pour des valeurs extrêmes de coefficients.

Dans une troisième partie, nous présentons les résultats de l'implémentation des modélisations. Nous évaluons l'influence des coefficients d'absorption et de diffusion sur le comportement des modèles puis nous recalons les modèles avec des mesures *in situ*. Enfin, nous comparons les résultats avec ceux des estimations avant de conclure.

6.2. ETUDE DES COEFFICIENTS D'ABSORPTION ET DE DIFFUSION

6.2.1. Estimation des coefficients

Au Chap. 3, nous avons démontré que l'estimation des coefficients d'absorption et de diffusion, appelés coefficients dans la suite du chapitre, peut être obtenue à partir de mesures *in situ*.

Nous nous basons pour cela sur les fichiers de mesure au format B (voir Chap. 4). Les 4 canaux W, X, Y et Z mesurés et post-traités sont conservés sous forme de réponses impulsionnelles (RIs). A chaque point de mesure, le fichier résultant est utilisé pour obtenir les coefficients E_{ij} du tenseur énergie-impulsion :

$$E_{tt} = \frac{\rho}{2}(|W|^2 + |X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2)$$

$$\begin{aligned}
 E_{xx} &= \frac{\rho}{2}(|W|^2 + |X|^2 - |Y|^2 - |Z|^2) \\
 E_{yy} &= \frac{\rho}{2}(|W|^2 - |X|^2 + |Y|^2 - |Z|^2) \\
 E_{zz} &= \frac{\rho}{2}(|W|^2 - |X|^2 - |Y|^2 + |Z|^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{tx} &= \rho(\mathcal{R}e(W)\mathcal{R}e(X) + \mathcal{I}m(W)\mathcal{I}m(X)) \\
 E_{ty} &= \rho(\mathcal{R}e(W)\mathcal{R}e(Y) + \mathcal{I}m(W)\mathcal{I}m(Y)) \\
 E_{tz} &= \rho(\mathcal{R}e(W)\mathcal{R}e(Z) + \mathcal{I}m(W)\mathcal{I}m(Z)) \\
 E_{xy} &= \rho(\mathcal{R}e(X)\mathcal{R}e(Y) + \mathcal{I}m(X)\mathcal{I}m(Y)) \\
 E_{xz} &= \rho(\mathcal{R}e(X)\mathcal{R}e(Z) + \mathcal{I}m(X)\mathcal{I}m(Z)) \\
 E_{yz} &= \rho(\mathcal{R}e(Y)\mathcal{R}e(Z) + \mathcal{I}m(Y)\mathcal{I}m(Z))
 \end{aligned}$$

Le bilan d'énergie et de quantité de mouvement effectué au Chap. 3 fait apparaître les coefficients modifiés telles que

$$\begin{aligned}
 A_i &= 4 \frac{J_i}{E} = 4 \frac{E_{ti}}{E_{tt}} \\
 D_i &= \frac{8 E_{ij}}{3 J_i} = \frac{8 E_{ij}}{3 E_{ti}}
 \end{aligned}$$

et nous en déduisons les coefficients :

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \frac{A_i}{1 + \frac{A_i}{2}} \\
 \beta_i &= \frac{D_i}{1 + \frac{D_i}{2}}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec $0 \leq A_i \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \alpha_i \leq 1$. L'Eq. (6.1) montre que les coefficients sont estimés pour une direction de l'espace i . L'intégration sur une et deux dimensions de l'espace effectuée au Chap. 3 permet en effet d'estimer leur valeur sur les parois et seules les directions perpendiculaires à la direction de propagation sont pertinentes. En deux dimensions, c'est la direction \vec{z} si la propagation est selon \vec{x} et \vec{y} . En une dimension, c'est la moyenne des coefficients estimés selon \vec{y} et \vec{z} pour une propagation selon \vec{x} .

De plus, les valeurs des coefficients peuvent être définies en tous points de l'espace. Ils sont alors pris en compte dans le modèle numérique en fonction de la position. Dans ce travail, nous avons considéré des valeurs globales dans tout l'espace. Seules les valeurs aux conditions limites sont locales.

Nous avons vu au Chap. 3 que la valeur des coefficients selon les directions perpendiculaires à la direction de propagation s'annule quelque part entre les parois. Les mesures permettant l'estimation des coefficients doivent donc se faire proche des parois.

Lors d'une mesure *in situ*, le microphone est habituellement placé au centre de l'espace, loin des parois, à un emplacement où il n'y aura pas de nœud ou de ventre de pression [AFNOR, 2009]. Dans le cas du microphone *SoundField*, des restrictions liées à la coïncidence des capsules interdisent les mesures proche des parois. En effet, c'est un microphone destiné à la mesure en champ libre et loin des sources [Gerzon, 1973]. Nous outrepassons ces restrictions et vérifions la faisabilité de l'estimation des coefficients *in situ* en une dimension en effectuant des relevés de RIs le long des parois d'un couloir à environ 10cm des parois. Afin de vérifier la théorie, nous comparons les coefficients obtenus le long des parois avec des mesures effectuées au centre du couloir. Les valeurs des coefficients sont présentées en valeur absolue et moyennées selon les directions \vec{y} et \vec{z} . La largeur des fenêtres d'intégration des RIs est fixée à 16ms à partir du champ direct. Cette valeur est discutée à la Sec. 6.2.1.

Au laboratoire, nous disposons d'un couloir de 32m de longueur se terminant en chicane. Sa largeur est de 1.7m et sa hauteur de 2.5m. D'après l'Eq. (3.18), le libre parcours moyen est $\lambda = 2m$. La Fig. 6.1 présente un plan de situation. Le sol est en moquette, le plafond est constitué de dalles de laine minérale et interrompu par 10 puits de jour de 2m de long et de 1m de profondeur. Les murs sont constitués de parois vitrées ou métalliques. Le couloir est rempli de meubles et d'objets couvrant environ un tiers de la surface murale.

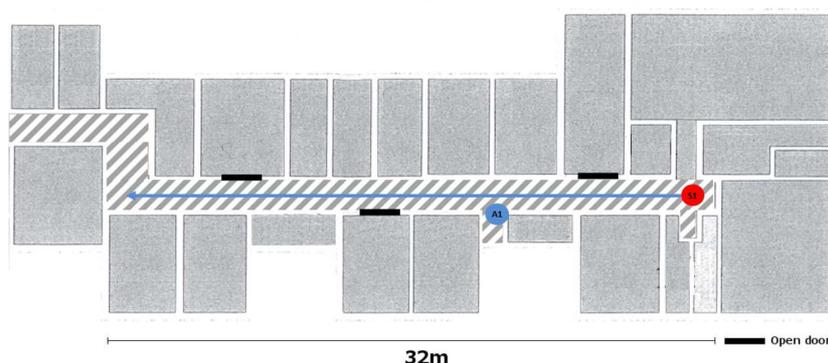


FIGURE 6.1 – Plan de situation du laboratoire. Le couloir correspond à la partie hachurée.

La source sonore $S1$ en rouge est positionnée au centre du couloir, à $1m$ d'une des extrémités. Les récepteurs sont placés tous les mètres dans l'axe du couloir $A1$ en bleu.

Les coefficients peuvent être calculés en bande fines, en octave et tiers d'octave ou en bande large. Dans la suite du document, nous présentons les résultats uniquement pour la bande d'octave centrée sur $1000Hz$.

Emplacement du microphone

Comme nous l'avons présenté ci-dessus, les coefficients sont mesurés proche des parois. Les Fig. 6.2 à 6.4 présentent l'estimation des coefficients selon les trois directions de l'espace et pour trois mesures dans l'axe du couloir : au centre, proche de la paroi latérale et proche du plafond.

Les Fig. 6.2 à 6.4 montrent qu'il n'y a pas de différence significative lorsque l'on relève les coefficients proche d'une paroi ou au centre du couloir. De plus, nous remarquons qu'il n'y a pas de différence significative lorsque l'on calcule les coefficients selon des directions privilégiées. Cela peut signifier que le champ acoustique est perturbé de manière homogène par la présence d'une paroi. Nous observons néanmoins un certain nombre de pics plus ou moins aléatoires qui pourraient correspondre aux puits de jour du couloir, sans que nous puissions en être certain.

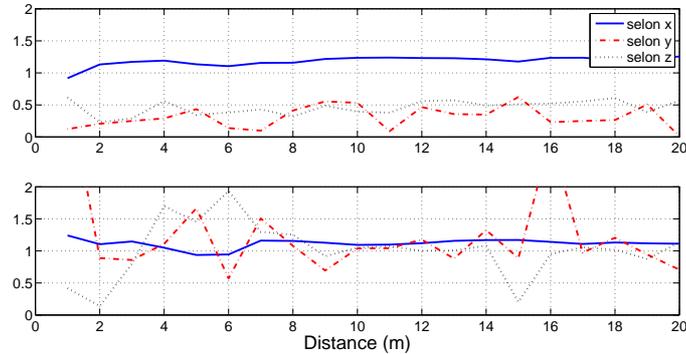


FIGURE 6.2 – Coefficients α (en haut) et β (en bas) mesurés dans le couloir du laboratoire pour chaque position de l'axe au centre dans les trois directions de l'espace.

Sur les Fig. 6.3 et 6.4, nous remarquons que les valeurs de α selon \vec{y} sont significativement plus petites à partir de $15m$.

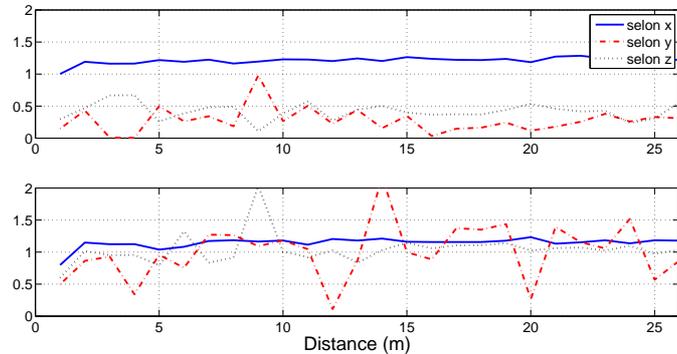


FIGURE 6.3 – Coefficients α (en haut) et β (en bas) mesurés dans le couloir du laboratoire pour chaque position de l'axe proche de la paroi latérale dans les trois directions de l'espace.

Les Fig. 6.2 à 6.4 montrent aussi que le coefficient α selon \vec{x} est supérieur à 1 pour les trois emplacements de mesure, ce qui signifie que nous ne mesurons pas l'absorption dans cette direction, comme précisé ci-dessus. Nous observons de plus que le coefficient β est lissé selon \vec{x} par rapport aux autres directions. Dans la suite du document, nous considérons les résultats uniquement dans les directions pertinentes, soit selon \vec{z} en deux dimensions et une moyenne des coefficients selon \vec{y} et \vec{z} en une dimension.

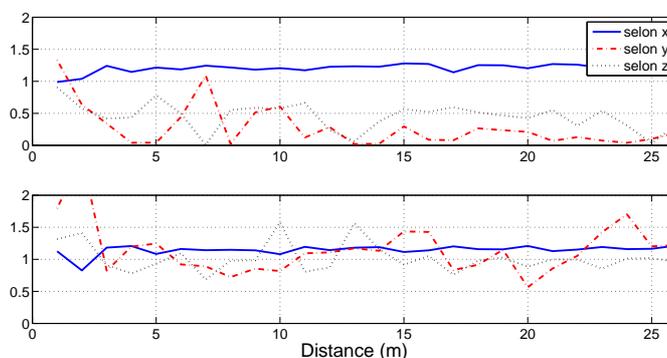


FIGURE 6.4 – Coefficients α (en haut) et β (en bas) mesurés dans le couloir du laboratoire pour chaque position de l’axe proche du plafond dans les trois directions de l’espace.

Fenêtre d’intégration

L’estimation des coefficients est effectuée pour une largeur de fenêtre d’intégration des RIs. La largeur permet de prendre en compte un certain nombre de réflexions, le temps que l’énergie provienne simultanément de plusieurs directions. Au Chap. 2, nous avons rappelé de quoi est constituée la RI. Entre le champ direct et les premières réflexions, nous avons cherché à savoir de quelle durée d’intégration nous avons besoin pour obtenir des coefficients homogènes. En prenant toute la durée de la RI, nous intégrons le champ direct, les premières réflexions et le champ diffus. Si nous considérons la partie tardive du champ acoustique, nous calculons les coefficients liés au champ diffus, quand le champ est homogène et la direction de propagation isotrope. Une étude nous permet de régler la taille de la fenêtre d’intégration afin d’obtenir des coefficients homogènes.

Les Fig. 6.5 et 6.6 présentent les coefficients le long de la paroi latérale et le long du plafond du couloir dans les trois directions de l’espace pour différentes largeurs de fenêtre d’intégration à partir du champ direct. Nous faisons remarquer que le long de la paroi latérale, ce sont les valeurs selon \vec{y} qui sont pertinentes, et \vec{z} pour le plafond. Les autres courbes sont données à titre indicatif.

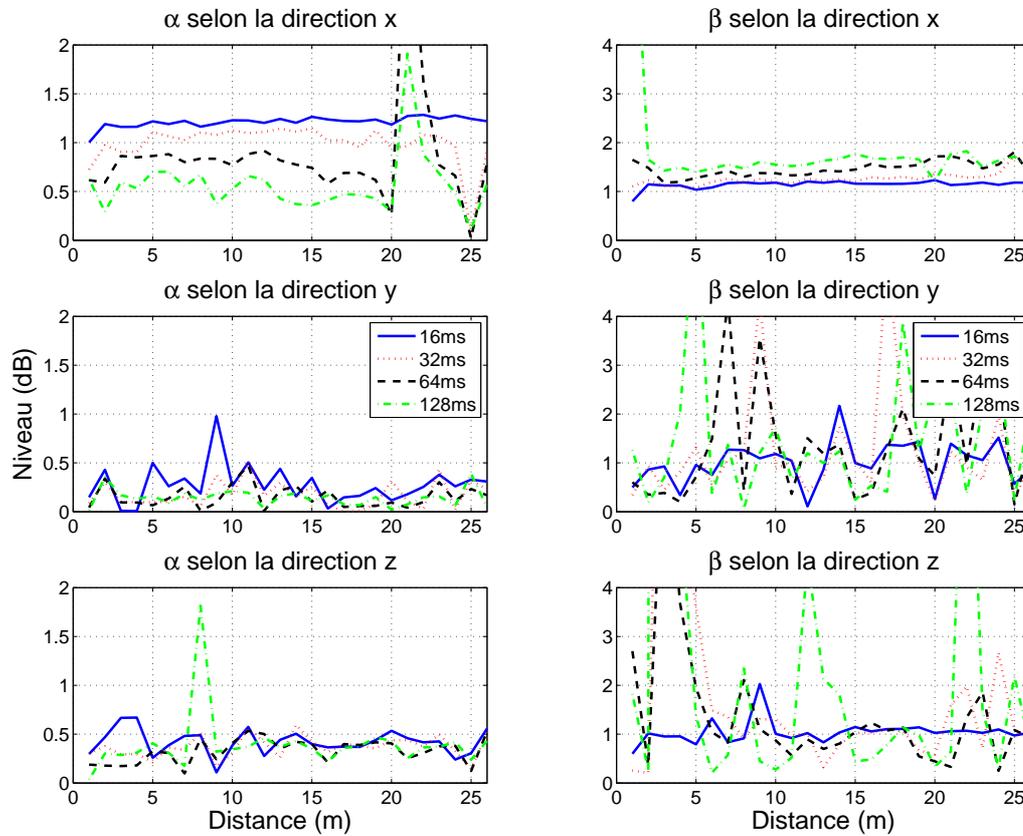


FIGURE 6.5 – Coefficients α (à gauche) et β (à droite) mesurés dans le couloir du laboratoire pour chaque position le long de l'axe de la paroi latérale du couloir, pour différentes largeurs de fenêtres d'intégration et dans les trois directions de l'espace.

D'après les Fig. 6.5, nous remarquons que les pics des courbes de β sont moins prononcés pour de courtes fenêtres d'intégration, quelque soit la direction des coefficients, ce qui nous fait préférer une taille de fenêtre de 16ms. La taille de la fenêtre n'influe pas significativement sur les valeurs moyennes, sauf pour la direction \vec{x} . Dans cette direction, nous observons une diminution resp. une augmentation significative de la valeur du coefficient α resp. β lorsque la largeur de la fenêtre d'intégration augmente.

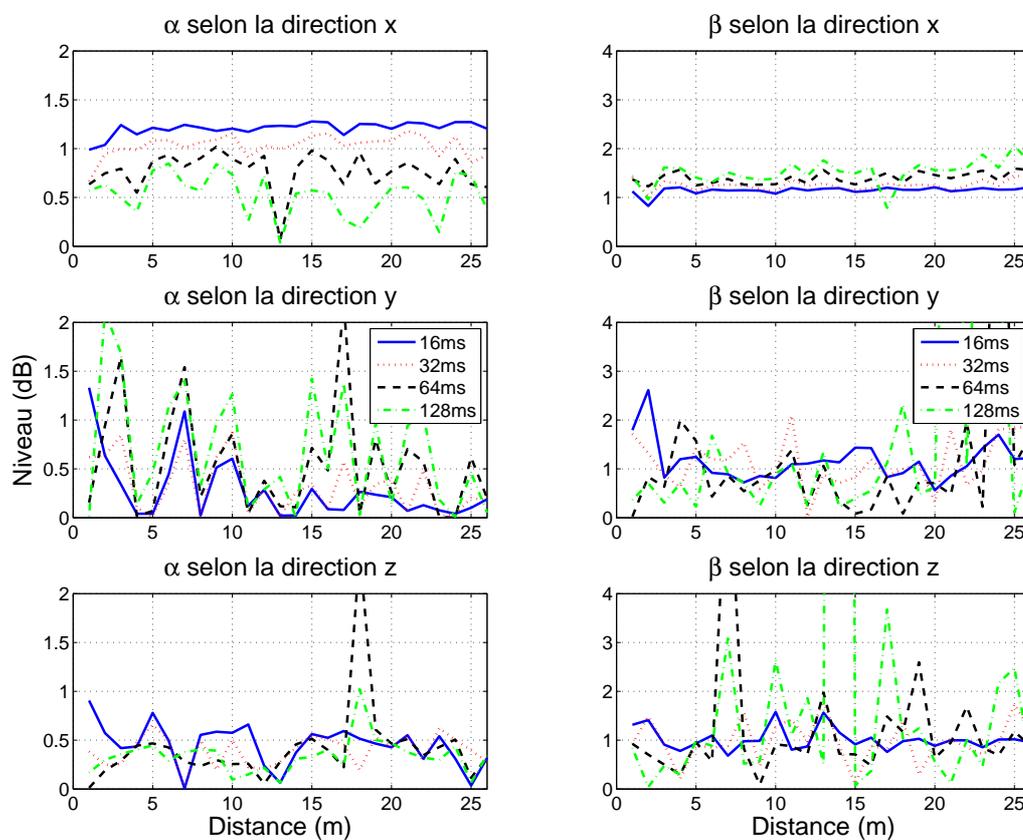


FIGURE 6.6 – Coefficients α (à gauche) et β (à droite) mesurés dans le couloir du laboratoire pour chaque position le long de l’axe du plafond du couloir, pour différentes largeurs de fenêtres d’intégration et dans les trois directions de l’espace.

Les Fig. 6.6 présentent le même comportement selon \vec{x} pour les deux parois et coefficients. De même, β est plus lissé pour une largeur de $16ms$ selon \vec{y} pour la paroi latérale et selon \vec{z} pour le plafond, ce qui confirme l’utilisation d’une fenêtre de $16ms$.

Nous remarquons qu’une largeur de fenêtre de $16ms$ permet de considérer des rayons sonores provenant d’une distance de $5.5m$, ce qui paraît suffisant pour caractériser les coefficients dans un tronçon de couloir.

Estimation des coefficients en deux dimensions

Nous avons jusqu'à maintenant présenté des coefficients estimés en une dimension le long de l'axe d'un couloir. Néanmoins, nous avons effectué des mesures *in situ* en plateau de bureau, correspondant à des géométries en deux dimensions, comme précisé au Chap. 4.

Nous présentons dans la Fig. 6.7 le calcul des coefficients α et β correspondant aux RIs relevées dans l'espace *Ovalie*, selon l'axe A1 (voir plan en Annexe B). L'espace *Ovalie* est un ovale de longueur $70m$, de largeur $35m$ et de $2.7m$ de hauteur sous plafond. Il est constitué d'un îlot central d'environ $40m$ par $20m$. Le libre parcours moyen est de $\lambda = 5.4m$ selon l'Eq. (3.31). L'espace est aménagé et sans utilisateur lors des mesures. Le sol est en moquette et le plafond en dalles minérales. Les parois sont constituées de vitrages et de plaques de plâtre. L'axe A1 est situé dans l'espace de bureaux pour les premiers deux-tiers puis dans un espace de détente (voir photo Fig. 6.8).

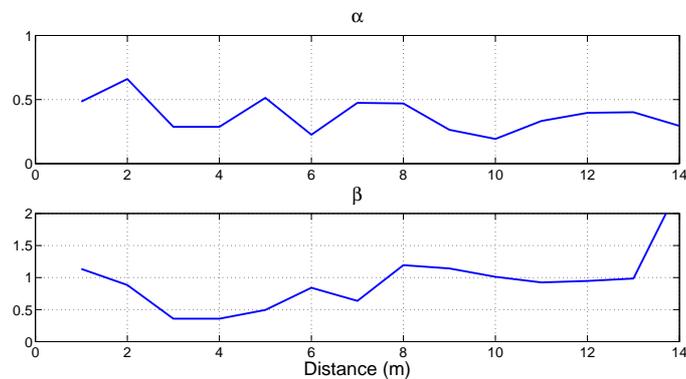


FIGURE 6.7 – Coefficients α (en haut) et β (en bas) mesurés dans l'espace *Ovalie* pour chaque position de l'axe A1.

Le Fig. 6.7 montre des coefficients homogènes sur deux parties distinctes le long de l'axe de mesure. Jusqu'à $8m$, la moyenne des coefficients est de $\alpha = 0.4$ et $\beta = 0.6$. Ensuite, les valeurs sont de $\alpha = 0.3$ et $\beta = 1$. La coupure à $8m$ correspond au passage entre les murs visibles sur la Fig. 6.8 et correspondant à la limite entre les espaces bureaux et détente.



FIGURE 6.8 – Photo de l’espace de bureaux *Ovalie* prise dans l’axe des mesures de A_1 depuis un point de réception au bout de l’axe, se terminant dans un espace de détente.

6.3. VALIDATION DES MODÈLES NUMÉRIQUES

Les résultats sont présentés sous la forme de décroissances spatiales et temporelles. Dans une première partie, nous comparons les résultats du système d’équations couplées (EC) et de l’équation générale (EG), ce qui nous permet de ne considérer plus qu’un seul modèle. Ensuite, nous comparons les résultats du modèle différences finies (FDTD) en une dimension avec le modèle analytique. Dans une seconde partie, nous évaluons tout d’abord l’influence des coefficients sur le comportement du modèle numérique FDTD de EG. Nous comparons enfin le modèle à des mesures *in situ* en une et deux dimensions.

6.3.1. Conception des géométries

Pour la modélisation FDTD, nous créons une géométrie permettant de considérer un espace en une et deux dimensions, où le champ acoustique est calculé à l’intérieur du domaine et les conditions limites sur les bords du domaine. Lors du développement théorique, nous avons montré que la méthode d’intégration permet de prendre en compte les caractéristiques acoustiques moyennes des parois le long des dimensions intégrées.

En une dimension, la méthode d'intégration supprime deux dimensions et la géométrie en est d'autant simplifiée. Les conditions limites sont calculées sur les extrémités du domaine et la géométrie est constituée de deux scalaires correspondant aux caractéristiques acoustiques des extrémités.

En deux dimensions, les conditions limites sont calculées sur des parois linéaires constituées de sections de taille minimale correspondant aux pas de discrétisation spatiale. Nous considérons pour cela un treillis de pas Δx et Δy . Les parois sont positionnées sur le treillis et les coins du modèle sont placés aux points de jonction des parois. Ainsi un coin est forcément positionné au niveau d'un nœud du treillis.

La matrice géométrie G est alors constituée de deux vecteurs géométrie G_x et G_y contenant les coordonnées des coins pour chaque dimension x et y respectivement. Le schéma de la Fig. 6.9 rend compte de la géométrie d'un espace rectangulaire de dimension $L_x = 10m$ et $L_y = 20m$ pour des pas de discrétisation spatiale $\Delta x = \Delta y = 1m$. Les vecteurs géométrie sont alors :

$$G = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_x & L_x & 1 \\ 1 & 1 & L_y & L_y \end{pmatrix}$$

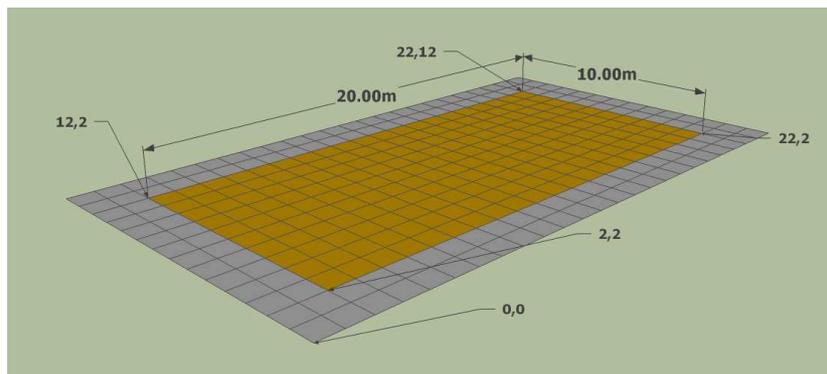


FIGURE 6.9 – Schéma conçu sous Google SketchUp du treillis d'une modélisation rectangulaire (en jaune) de $L_x = 10m$ et $L_y = 20m$. Les coordonnées (x, y) sont affichées pour chaque coin. Le treillis a pour dimension totale $24 \times 12m$.

Nous pouvons discrétiser les parois en n_x et n_y éléments selon les directions x et y respec-

tivement, où $n_x < \frac{L_x}{\Delta x}$ et $n_y < \frac{L_y}{\Delta y}$.

Comparé à un espace réel, les parois modélisées sont connexes. Nous n'avons testé que ce cas, nous ne pouvons donc pas faire d'îlot par exemple. De plus, les parois non parallèles aux directions \vec{x} et \vec{y} sont approchées par des marches d'escalier. La Fig. 6.10 montre le niveau d'énergie dans l'espace *Ovalie* modélisé en deux dimensions.

Les parois sont caractérisées par leur coefficient d'absorption acoustique. Nous créons un vecteur correspondant aux caractéristiques d'absorption de la paroi G_α tel que :

$$G_\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4)$$

où α_i est le coefficient d'absorption de la paroi i .

La matrice géométrie s'écrit finalement :

$$G = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_x & L_x & 1 \\ 1 & 1 & L_y & L_y \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Nous n'introduisons pas dans la matrice G le coefficient de diffusion des parois, car ce dernier est pris en compte dans le vecteur intensité.

A chaque pas de temps, l'énergie est d'abord calculée sur tout le treillis en se propageant de nœud en nœud puis sur les parois. Afin d'empêcher l'énergie de traverser les limites du domaine et de revenir à l'intérieur du domaine, les conditions limites ne sont calculées que d'un côté des parois et l'énergie est imposée nulle de l'autre. Nous définissons l'orientation de paroi en suivant leur parcours coin par coin. A chaque coin, la paroi tourne à droite ou à gauche ou continue, et impose ainsi la nouvelle orientation de la paroi en fonction de la paroi précédente. Seule la première paroi doit être précisée. C'est pourquoi l'orientation de la première paroi est imposée. La Fig. 6.10 présente un exemple de modélisation de l'espace *Ovalie* avec un pseudo-ilot que nous avons pris en compte en le rattachant au modèle par une paroi d'absorption totale (voir plan en Annexe B).

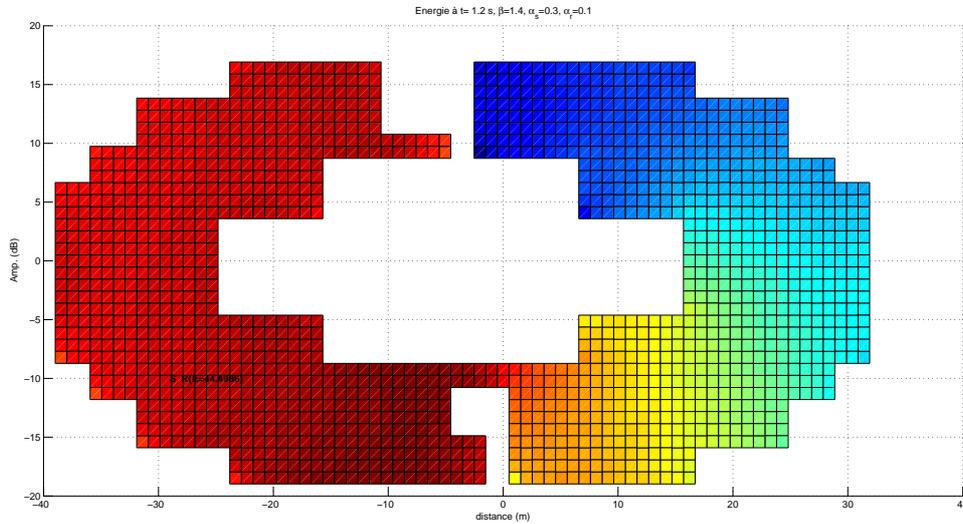


FIGURE 6.10 – Exemple de géométrie : *Ovalie*. Modélisation en deux dimensions après une décroissance de 1.2s pour une source située en $(-32, -10)$. Le code couleur est rouge-jaune-vert-bleu pour les niveaux décroissants, normalisés par les niveaux maximum et minimum

La géométrie se constitue à partir de la matrice géométrie. Une exportation depuis Google SketchUp est possible avec le plugin Sk2Geo¹.

6.3.2. Comparaison des modèles - cas une dimension

Au cours du projet, nous avons travaillé sur deux modèles en parallèle, le système d'EC et l'EG. Ces modèles diffèrent par les approximations différences finies utilisées. Nous les comparons en faisant varier les coefficients.

Les Fig. 6.11 présentent le niveau L_{eq} de la décroissance temporelle pour les deux modèles en fonction des coefficients α et β .

1. http://euphonia.fr/skp2geo_en.htm

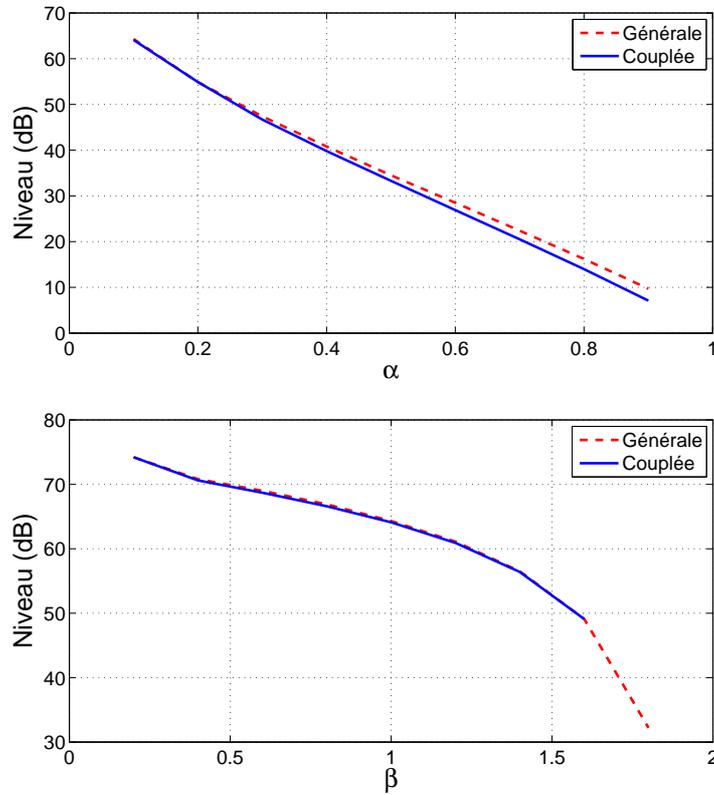


FIGURE 6.11 – Comparaison du L_{eq} des modèles EC et EG en une dimension en fonction des coefficients α (en haut) pour $\beta = 1$ et β (en bas) pour $\alpha = 0.1$. Le modèle a pour longueur $40m$, la source est positionnée à $32m$ et le récepteur à $14m$. Le coefficient d'absorption sur les bords du domaine est fixé à $\alpha_r = 0.1$ et les autres paramètres sont fixés à $\lambda = 2m$, $\Delta t = 1ms$ et $\Delta x = 1m$.

Les Fig. 6.11 montrent que les modèles se comportent de la même manière en fonction des coefficients. Nous remarquons que le modèle EC diverge à partir de $\beta = 1.6$.

Nous constatons que les deux modèles à une dimension sont très similaires. Nous pouvons donc utiliser l'un ou l'autre. Ce résultat est étendu aux modèle à deux dimensions.

6.3.3. Comparaison du modèle à une dimension avec le modèle analytique

Nous avons présenté un modèle analytique à une dimension dont l'Eq. (3.57) est rappelée ci dessous

$$E = \frac{1}{2} E_0 e^{-\frac{\sqrt{AD}}{\lambda} |x|}$$

Nous comparons les résultats entre le modèle analytique et le modèle EG. La Fig. 6.12 présente le niveau de décroissance temporelle pour les deux modèles en fonction des coefficients α et β .

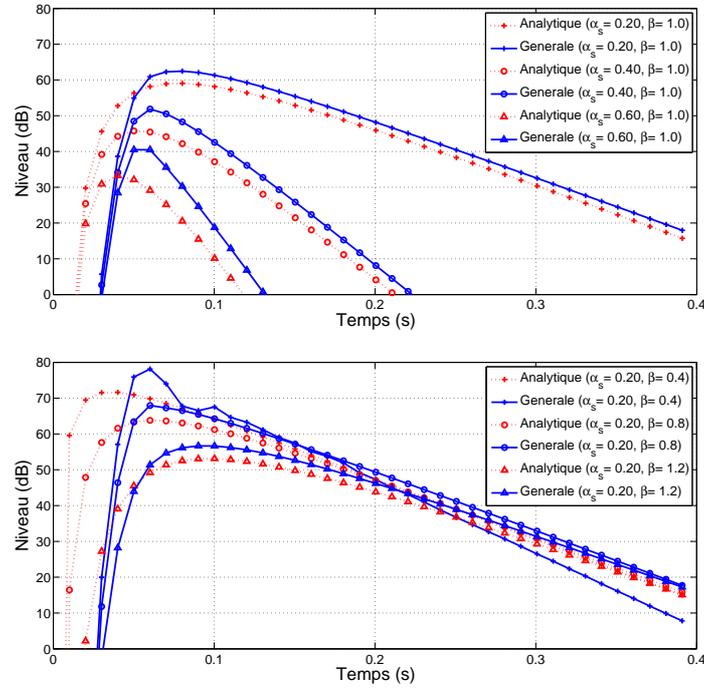


FIGURE 6.12 – Comparaison du niveau de décroissance temporelle des modèles EG et analytique en fonction des coefficients α (en haut) et β (en bas). Le modèle a pour longueur $40m$, la source est positionnée à $34m$ et le récepteur à $14m$. Les autres paramètres sont fixés à $\alpha_r = 0.1$, $\lambda = 2m$, $\Delta t = 1ms$ et $\Delta x = 1m$.

La Fig. 6.12 en haut montre que la pente des décroissances temporelles des modèles EG et analytique sont proches, ce qui permet de valider notre modèle théorique. On remarque que pour de faibles valeurs de β et pour de fortes valeurs de α , la pente du modèle EG est

légèrement plus importante que celle du modèle analytique, bien qu'elles soit très proche dans le cas de α . De plus, nous observons un temps d'arrivée du champ direct différent dans les deux cas. Le temps d'arrivée du champ direct du modèle analytique est immédiat, bien que le temps d'arrivée du signal, ou temps de groupe, correspondant au temps où le niveau du signal dépasse $0dB$, n'apparaît pas immédiatement. Nous pouvons calculer graphiquement un décalage de $15ms$ environ à l'arrivée de l'énergie à $0dB$ entre les modèles. Avec un temps d'arrivée de $30ms$ environ pour le modèle EG, nous sommes proche de la réalité puisque la source et le récepteur sont distants de $18m$, soit un temps de propagation de $52ms$.

Nous remarquons qu'une autre manière de considérer le temps d'arrivée de l'énergie et de regarder le point d'inflexion des courbes de niveau d'énergie. Cette technique n'a pas été utilisée ici.

Ces constatations confortent l'hypothèse prise par le modèle analytique qui considère que la dérivée temporelle de l'intensité est faible devant le rapport $\frac{cD}{\lambda}$. Nous observons en effet que les modèles sont semblables pour de grande valeurs de β et après une certaine durée, correspondant au temps de transition (voir Chap. 3).

6.3.4. Étude des variations des pas de discrétisation

Nous étudions les variations des pas de discrétisation sur les modèles afin de fixer leur valeur. Les Fig. 6.13 présentent la variation du niveau L_{eq} du modèle EG et de la différence entre les modèles EG et analytique pour Δx variant de $0.01m$ à $10m$. La variation du niveau par rapport à Δt n'est pas présentée car les valeurs sont stables jusqu'à la divergence du modèle située entre $1ms$ et $10ms$, ce qui nous permet de fixer le pas de discrétisation temporelle à $1ms$.

La Fig. 6.13 montre que les L_{eq} des modèles ont une progression linéaire avec Δx avec un rapport de 1. Cette remarque signifie que nous pouvons normaliser le niveau d'énergie par Δx , et d'une autre manière que nous avons intégré le pas de temps quelque part dans nos calculs.

Nous pouvons observer que la différence entre les modèles varie avec les coefficients, et que pour de faibles valeurs de α et pour $\beta = 1$, la différence minimale se trouve pour $\Delta x = 0.8m$. Néanmoins, en prenant le compte l'intégration du pas d'espace dans nos calculs et en consta-

tant que les modèles ne présentent qu'une différence de 1 à 2dB pour $\Delta x = 1m$, nous utilisons cette valeur pour la suite de l'étude.

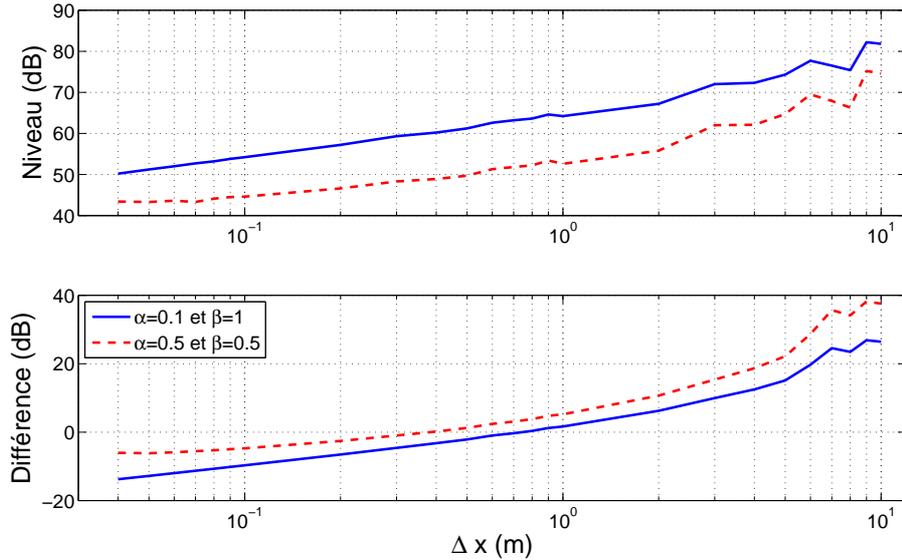


FIGURE 6.13 – Niveaux L_{eq} en fonction du pas de discrétisation Δx du modèle EG (en haut) et de sa différence avec le modèle analytique (en bas) pour deux couples de coefficients dans un modèle en une dimension de $L = 40m$. La source est à $32m$ et le récepteur à $14m$. Les paramètres sont $\lambda = 2m$ et $\alpha_r = 0.1$.

6.3.5. Étude des modèles aux faibles valeurs des coefficients

Lors du calcul pour de faibles valeurs des coefficients, pour l'EG et l'EC en une et deux dimensions, il apparaît des oscillations sur les courbes de décroissances de l'énergie, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, sans pouvoir toutefois préciser leur origine. Celles-ci peuvent provenir des approximations différences finies. Nous étudions les restes des approximations dans le cas de l'EG une dimension.

Si le terme dominant dans l'erreur de troncature contient une dérivée paire, nous observons des erreurs de *dissipation*, comme nous pouvons l'observer sur la Fig. 6.14. S'il contient une dérivée impair, nous observons des erreurs de *dispersion*, comme nous pouvons l'observer

sur la Fig. 6.15. L'effet combiné des deux étant la *diffusion numérique*. Nous notons qu'une erreur de troncature contenant des dérivées impaires peut introduire des oscillations dans les résultats, au travers d'effet de dispersion numérique. C'est ce que nous observons lorsque les coefficients d'absorption et de diffusion modifiés sont faibles. En effet, les oscillations sont importantes en début de simulation, et diminuent jusqu'à disparaître pratiquement au bout d'un temps proportionnel à la valeur des coefficients.

Lors du calcul de l'erreur de troncature effectuée à la Sec. 5.3, nous avons tronqué le développement de Taylor au second ordre. Ci-dessous, nous allons aller jusqu'à l'ordre quatre afin de faire ressortir les ordres des dérivées restantes. Les développements de Taylor au 4^{ème} ordre dont nous avons besoin sont :

$$\begin{aligned} E_i^{t+1} &= E_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n + \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} \right|_i^n + \frac{\Delta t^4}{24} \left. \frac{\partial^4 E}{\partial t^4} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ E_i^{t-1} &= E_i^n - \Delta t \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right|_i^n - \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} \right|_i^n + \frac{\Delta t^4}{24} \left. \frac{\partial^4 E}{\partial t^4} \right|_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{aligned}$$

La différence entre l'équation numérique Eq. (5.25) et l'équation réelle nous donne l'erreur de troncature ϵ , cette fois avec les termes des développements de Taylor tronqués à l'ordre quatre :

$$\epsilon = \frac{c^2 \Delta t^2}{12} \partial_{ttt} E - \frac{\Delta x^2}{12} \partial_{xxxx} E + \frac{(A + D) \Delta t^2}{6c\lambda} \partial_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t^3, \Delta x^3)$$

Nous voyons qu'il reste des termes aux dérivées impaires et des termes aux dérivées paires. Ce résultat ne nous permet pas de conclure sur la source des oscillations. Nous remarquons néanmoins que ces termes, et principalement ceux qui sont responsables de la dissipation numérique, sont vraisemblablement à l'origine de l'énergie qui arrive avant le son direct sur la Fig. 6.12.

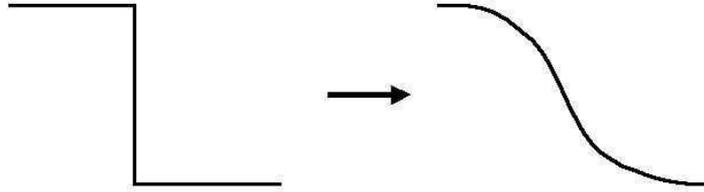


FIGURE 6.14 – Dissipation numérique due aux dérivées paires dans l’erreur de troncature d’un schéma de différences finies (d’après Laurent Rissert, 2006)

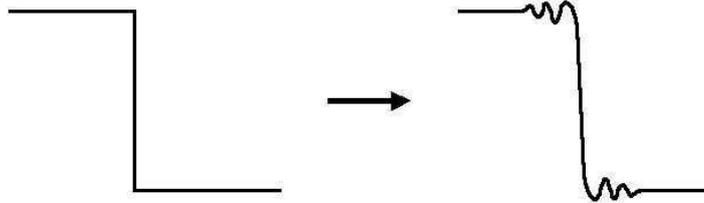


FIGURE 6.15 – Dispersion numérique due aux dérivées impaires dans l’erreur de troncature d’un schéma de différences finies (d’après Laurent Rissert, 2006)

6.4. RÉSULTATS DES MODÈLES NUMÉRIQUES

Nous évaluons tout d’abord l’influence des coefficients sur le comportement du modèle EG à une dimension et deux dimensions. Nous comparons ensuite le modèle à des mesures *in situ* à une et deux dimensions.

Le modèle une dimension est calculé pour une géométrie de $L = 32m$ et pour une source impulsionnelle située à $1m$ émettant à $100dB$. Le libre parcours moyen et le coefficient d’absorption des parois sont fixés à $\lambda = 2m$ et $\alpha_r = 0.1$.

Le modèle deux dimensions est calculé pour une géométrie de $L_x = 32m$ et $L_y = 16m$ et pour source impulsionnelle située en $x = 4m$ et $y = 4m$ émettant à $100dB$. La décroissance

spatiale est calculée le long de l'axe \vec{x} et les décroissances temporelles à $4m$ et $16m$ de la source le long de l'axe \vec{x} . Le libre parcours moyen et le coefficient d'absorption sur les bords du domaine sont fixés à $\lambda = 5.4m$ et $\alpha_r = 0.1$ pour toutes les parois.

Niveau de décroissance spatiale

Les Fig. 6.16 et 6.17 présentent le niveau de décroissance spatiale de l'énergie pour différentes valeurs de α et β en une et deux dimensions. L'augmentation de la pente est clairement visible lorsque α ou β augmentent.

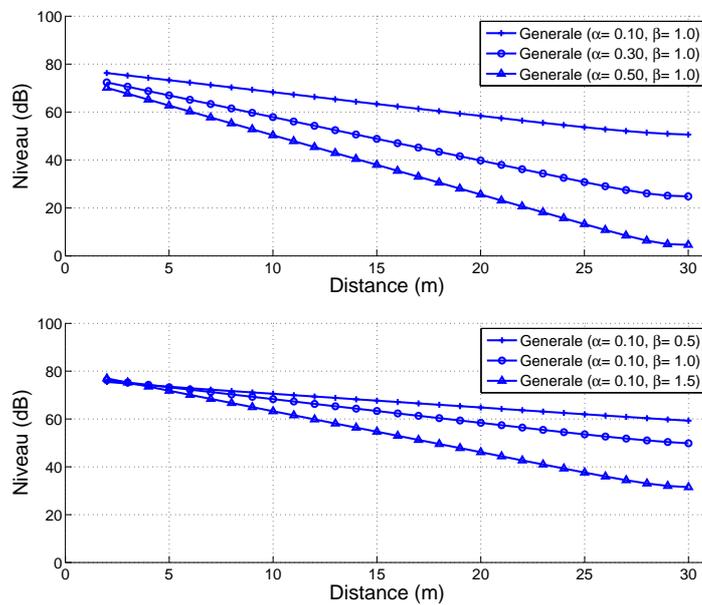


FIGURE 6.16 – Niveau de décroissance spatiale du modèle EG pour différentes valeurs de α (en haut) et β (en bas) dans un modèle une dimension de longueur $40m$ avec la source à $10m$. Les paramètres sont fixés à $\lambda = 2m$, $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1ms$, $\alpha_r = 0.1$.

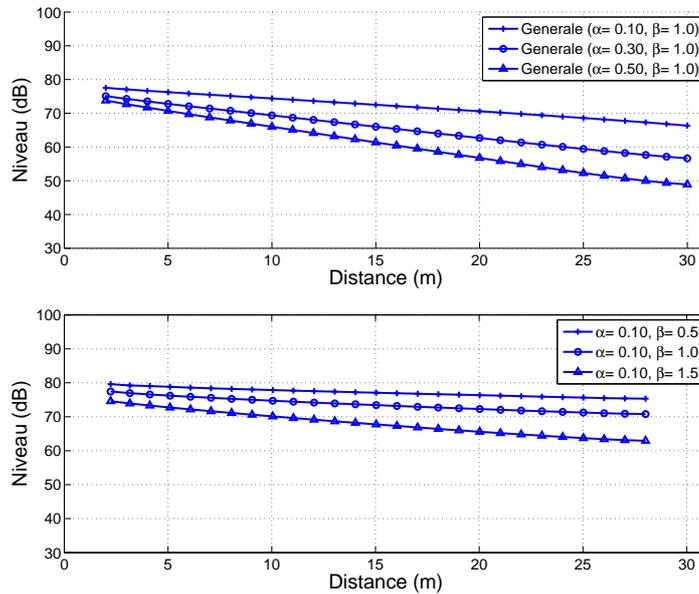


FIGURE 6.17 – Niveau de décroissance spatiale du modèle EG pour différentes valeurs de α (en haut) et β (en bas) dans un modèle deux dimensions de longueur $40m$ et de largeur $20m$ avec la source en $x = 10m$ et $y = 14m$. Les paramètres sont fixés à $\lambda = 5.4m$, $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1ms$, $\alpha_r = 0.1$.

Nous remarquons de plus que dans les Fig. 6.16, les courbes se croisent lorsque β varie (en bas) mais pas pour α (en haut), ce qui correspond au fait que l'énergie « se concentre » autour de la source quand la diffusion est forte ce qui peut paraître contre-intuitif.

Niveau de décroissance temporelle

Les Fig. 6.18 et 6.19 présentent le niveau de décroissance temporelle de l'énergie à $4m$ de la source pour différentes valeurs de α et β en une et deux dimensions. Ici, nous constatons que la variation de la pente de la décroissance est négligeable lorsque β augmente. L'augmentation de la pente est par contre bien visible quand α augmente. Les résultats montrent qu'il n'y a pas d'équivalence entre les coefficients. De plus nous pouvons observer sur la Fig. 6.19 la présence d'oscillations sur la courbe de décroissance lorsque les coefficients d'absorption et de diffusion sont faibles.

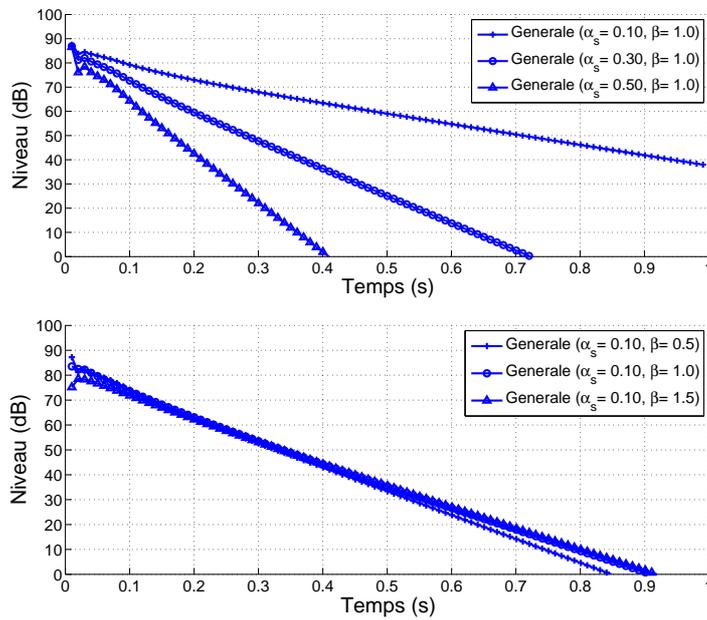


FIGURE 6.18 – Niveau de décroissance temporelle du modèle EG pour différentes valeurs de α (en haut) et β (en bas) dans un modèle une dimension de longueur $40m$ avec la source à $1m$ et le récepteur à $5m$. Les paramètres sont fixés à $\lambda = 2m$, $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1ms$, $\alpha_r = 0.1$.

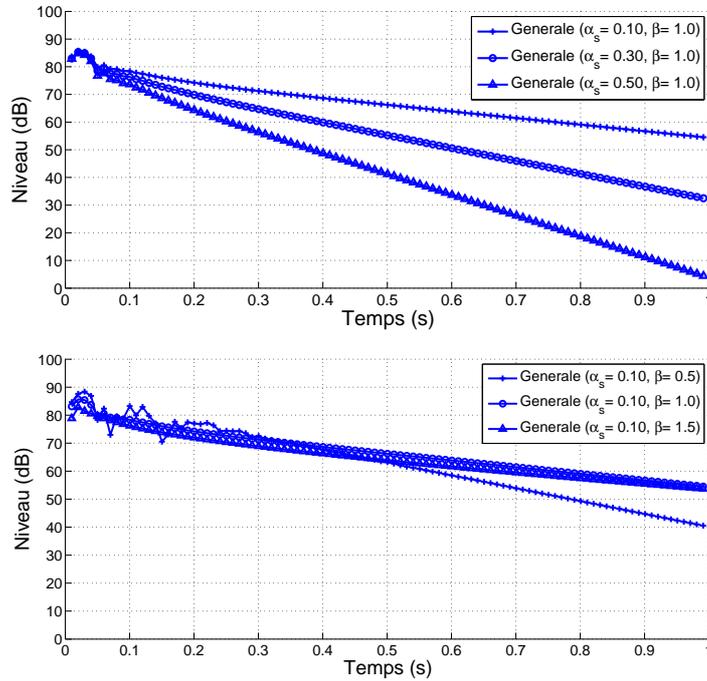


FIGURE 6.19 – Niveau de décroissance temporelle du modèle EG pour différentes valeurs de α (en haut) et β (en bas) dans un modèle deux dimensions de longueur $40m$ et de largeur $20m$ avec la source en $x = 2m$ et $y = 14m$ et le récepteur en $x = 6m$ et $y = 14m$. Les paramètres sont fixés à $\lambda = 5.4m$, $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1ms$, $\alpha_r = 0.1$.

Les Fig. 6.20 et 6.21 présentent le niveau de décroissance temporelle de l'énergie à $16m$ de la source pour différentes valeurs de α et β en une et deux dimensions. Nous ne constatons pas de variation de la pente de la décroissance lorsque β augmente, comme à $4m$ de la source. De plus le niveau maximum atteint décroît et arrive plus tardivement lorsque β augmente. La pente augmente quand α augmente. Comme sur la Fig. 6.19, nous pouvons observer sur la Fig. 6.21 la présence d'oscillations sur la courbe de décroissance lorsque les coefficients d'absorption et de diffusion sont faibles.

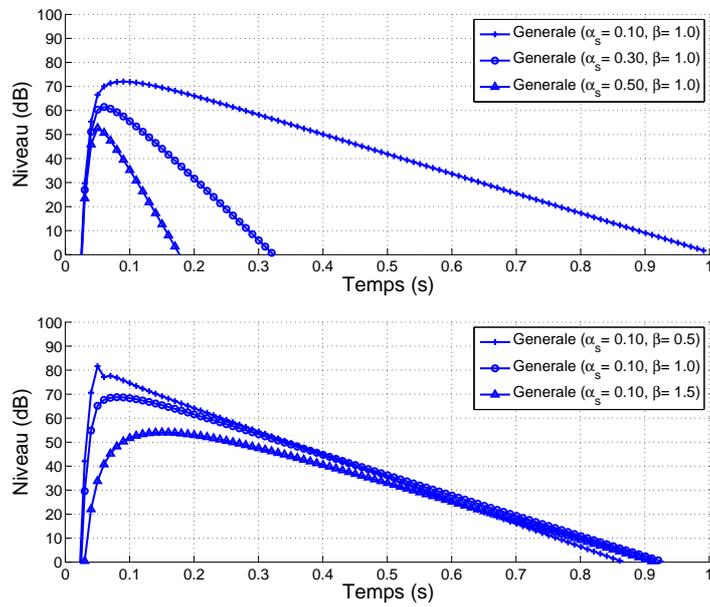


FIGURE 6.20 – Niveau de décroissance temporelle du modèle EG pour différentes valeurs de α (en haut) et β (en bas) dans un modèle une dimension de longueur $40m$ avec la source à $1m$ et le récepteur à $17m$. Les paramètres sont fixés à $\lambda = 2m$, $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1ms$, $\alpha_r = 0.1$.

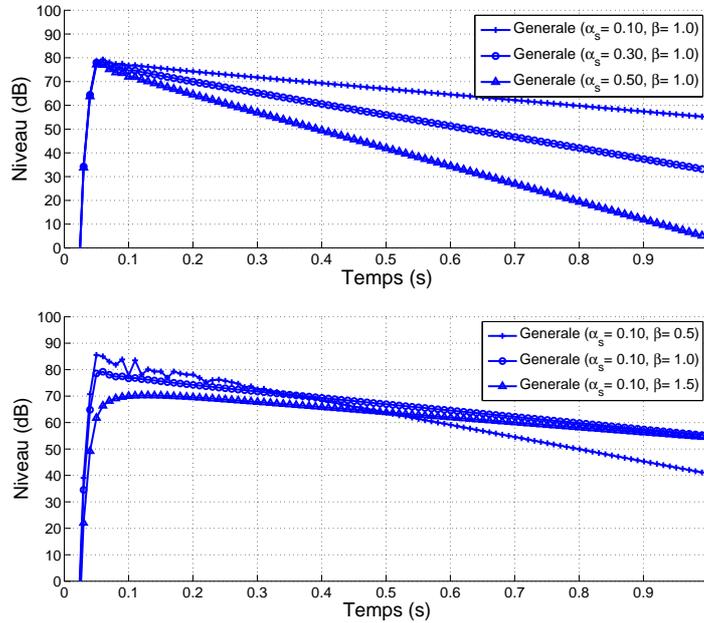


FIGURE 6.21 – Niveau de décroissance temporelle du modèle EG pour différentes valeurs de α (en haut) et β (en bas) dans un modèle deux dimensions de longueur $40m$ et de largeur $20m$ avec la source en $x = 2m$ et $y = 14m$ et le récepteur en $x = 18m$ et $y = 14m$. Les paramètres sont fixés à $\lambda = 5.4m$, $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1ms$, $\alpha_r = 0.1$.

6.4.1. Recalage

Le recalage permet d'obtenir les coefficients par comparaison avec les mesures. Nous avons vu ci-dessous que la pente de la décroissance temporelle de l'énergie ne dépend pas du coefficient de diffusion. Il nous est donc possible de calibrer le coefficient α en comparant les résultats de la décroissance temporelle des mesures *in situ* avec ceux du modèle. Une fois que nous avons fixé le coefficient α , nous pouvons ensuite comparer les décroissances spatiales mesurées et modélisées et de recalculer le coefficient β .

6.4.2. Recalage des modèles avec des mesures *in situ*

Nous comparons le modèle avec des mesures *in situ*, ce qui permet de fixer les coefficients α et β séparément par recalage. Ci-dessus, nous avons observé que la décroissance temporelle ne dépend pas du coefficient β . Nous proposons donc de fixer α par comparaison avec la décroissance temporelle de la mesure. Nous fixons ensuite β à l'aide de la décroissance spatiale.

Matériel et technique de mesure

Le matériel de mesure et les espaces mesurés sont décrits en détails au Chap. 4. Les mesures ont été effectuées avec une source sonore *Outline* GRS omnidirectionnelle positionnée à $1,5m$ du sol et un microphone *SoundField* ST250 positionnée à $1,5m$ du sol permettant la mesure au format B Ambisonic. Le microphone a été calibré au LNE en 2013 [Espitia Hurtado et al., 2014].

Le signal est un sinus glissant exponentiel de $20Hz$ à $20kHz$ de $10s$. L'enregistrement est ensuite post-traité afin d'obtenir les RIs par la convolution du signal avec le signal inverse.

Les décroissances temporelles sont présentées à $4m$ et à $16m$ de la source. Les décroissances spatiales sont mesurées soit tous les mètres soit par doublement de distance, le long d'axes selon deux directions perpendiculaires de l'espace et sur la diagonale en deux dimensions ou selon l'axe principal en une dimension.

Résultats

Les Fig. 6.22 et 6.23 présentent la comparaison des niveaux de décroissance temporelle et spatiale entre la mesure et la modélisation dans le couloir à $4m$ de la source. Le coefficient d'absorption du modèle est ajusté à $\alpha = 0.25$ à $4m$ et à $\alpha = 0.23$ à $16m$ en correspondance avec les courbes de décroissance temporelle, puis β est ajusté à $\beta = 0.52$ dans les deux cas de manière à ce que les pentes des courbes soient le plus proche possible.

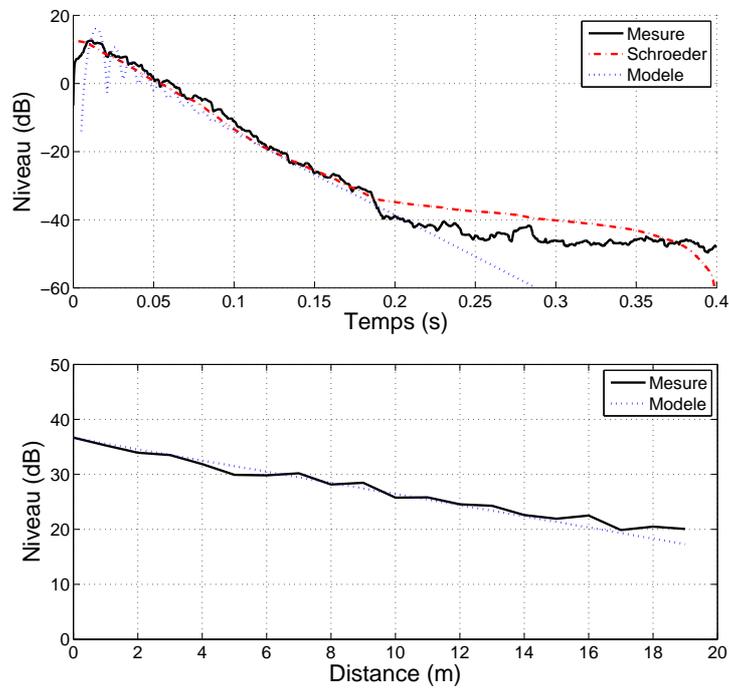


FIGURE 6.22 – Comparaison des niveaux de décroissance temporelle à 4m de la source (en haut) et spatiale (en bas) de l'énergie entre la mesure et la modélisation dans le couloir.

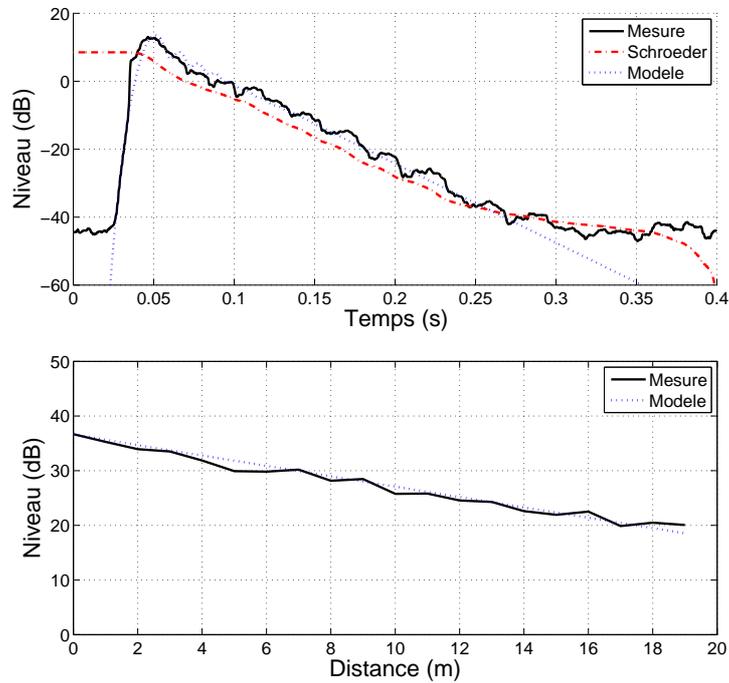


FIGURE 6.23 – Comparaison des niveaux de décroissance temporelle à 16m de la source (en haut) et spatiale (en bas) de l'énergie entre la mesure et la modélisation dans le couloir.

Nous effectuons de même pour les mesures en deux dimensions. Les espaces mesurés sont détaillés en Annexe B. Les résultats sont présentés pour la mesure de l'espace *Ovalie* dans la Fig. 6.24, pour l'espace *Kaleido* dans la Fig. 6.25 et pour l'espace *Nexity* dans la Fig. 6.26 et les résultats de la méthode de recalage sont comparés avec les coefficients estimés dans le Tableau 6.1. Nous remarquons différents régimes de diffusion avant et après 8m sur la décroissance spatiale de l'espace *Ovalie*, et dans une moindre mesure dans celle de l'espace *Nexity* à partir de 4m. Ces différents régimes rendent plus difficile le recalage.

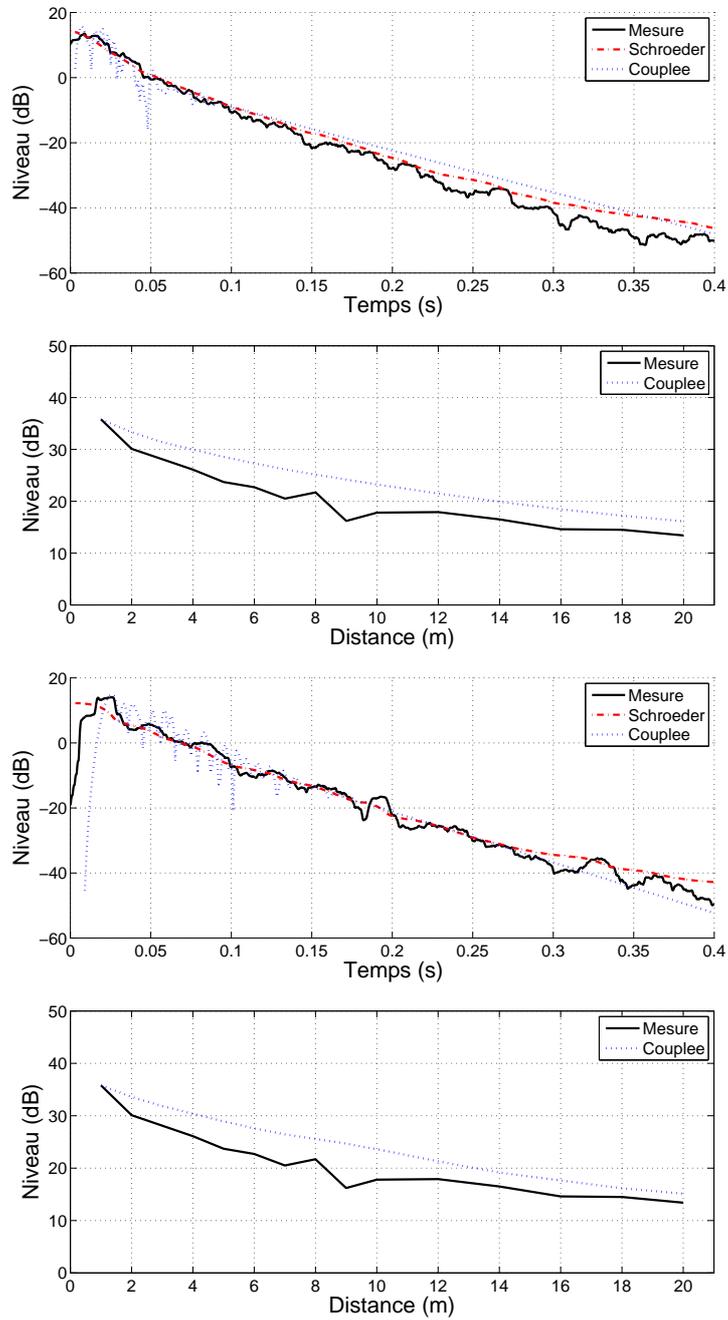


FIGURE 6.24 – Comparaison des niveaux de décroissance temporelle (en haut) et spatiale (en bas) de l'énergie entre la mesure et la modélisation dans l'espace *Ovalie* à $2m$ (à gauche) et à $8m$ (à droite) de la source.

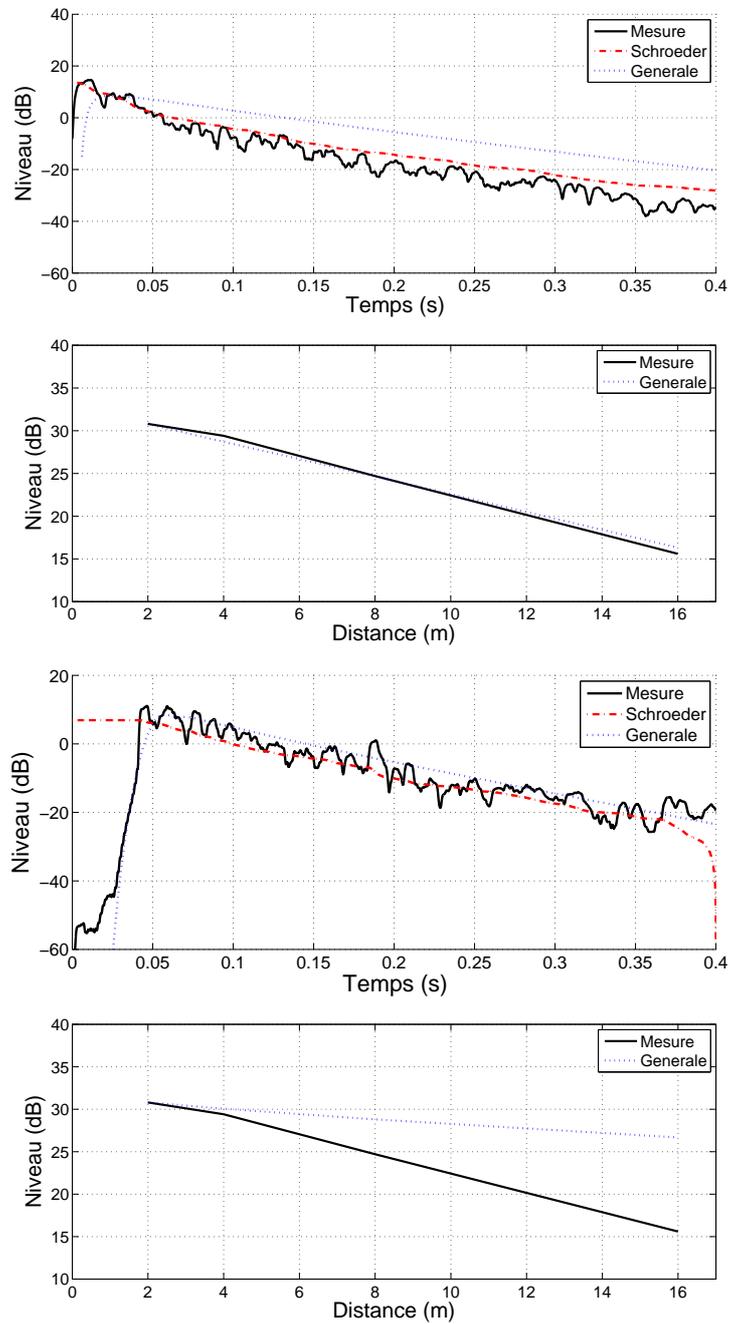


FIGURE 6.25 – Comparaison des niveaux de décroissance temporelle (en haut) et spatiale (en bas) de l'énergie entre la mesure et la modélisation dans l'espace *Kaleido* à $4m$ (à gauche) et à $16m$ (à droite) de la source.

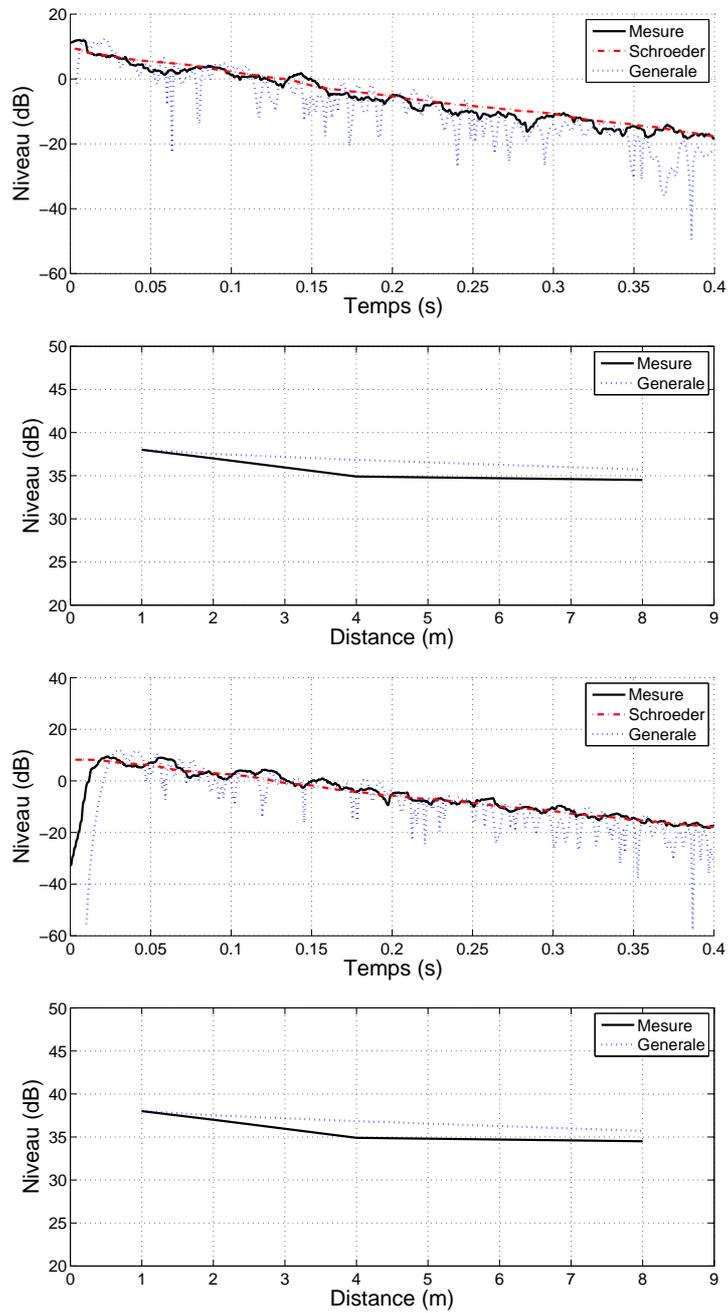


FIGURE 6.26 – Comparaison des niveaux de décroissance temporelle (en haut) et spatiale (en bas) de l'énergie entre la mesure et la modélisation dans l'espace *Nexity* à $2m$ (à gauche) et à $8m$ (à droite) de la source.

TABLE 6.1 – Comparaison des résultats de la méthode de recalage avec les coefficients estimés pour trois plateaux de bureaux le long des axes $A1$.

espace	Position	Coef.	Recalage	Estimé
<i>Ovalie</i>	$2m$	α	0.7	0.65
		α_r	0.2	
		β	1.1	0.88
	$8m$	α	0.8	0.47
		α_r	0.2	
		β	0.95	1.19
<i>Kaleido</i>	$4m$	α	0.1	0.35
		α_r	0.25	
		β	1.75	1.17
	$16m$	α	0.2	0.44
		α_r	0.1	
		β	0.7	0.99
<i>Nexity</i>	$2m$	α	0.05	0.24
		α_r	0.05	
		β	0.2	1.01
	$8m$	α	0.05	0.39
		α_r	0.05	
		β	0.2	0.98

Les résultats présentés dans les Fig. 6.24 à 6.26 montrent que la méthode de recalage fonctionne bien sauf dans certains cas où il est difficile de régler successivement les deux coefficients, comme à *Kaleido*. Dans ce dernier, nous pouvons remarquer une double pente dans la décroissance temporelle qui rend difficile le recalage. Sur place, nous avons remarqué une résonance importante confirmée lors de la mesure du temps de réverbération. L'espace *Kaleido* étant vide de tout mobilier, nous avons considéré cette résonance comme le résultat d'un « champ tournant », selon le vocabulaire du bureau d'étude. Nous avons ainsi estimé deux coefficients différents en fonction de la position, mais aucun ne correspond aux deux courbes

simultanément.

Le Tableau 6.1 montre que les coefficients obtenus par recalage et par estimation correspondent bien dans certains cas, comme à $2m$ à *Ovalie*, et moins dans d'autres, ce qui ne permet pas de valider la méthode, comme nous l'avons déjà remarqué Sec. 6.2. Notamment, nous remarquons que le recalage fonctionne mieux en une dimension qu'en deux dimensions, où les espaces présentés ici ont des courbes de décroissances spatiales et temporelles particulièrement complexes.

6.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté le résultat des estimations des coefficients d'absorption et de diffusion mesurés *in situ* et les avons comparés aux résultats de modélisation par recalage. Nous avons montré qu'il n'y avait pas équivalence entre les coefficients. Nous avons montré que la décroissance temporelle ne dépend pas du coefficient de diffusion, mais que ce dernier influe sur la décroissance spatiale. Nous avons présenté la méthode de mesure des coefficients le long des parois avec le microphone *SoundField* et le post-traitement permettant de calculer des coefficients pertinents et homogènes, soit selon \vec{z} pour une mesure en deux dimensions et moyenné selon \vec{y} et \vec{z} pour une mesure en une dimension, et pour une largeur de fenêtre d'intégration de $16ms$.

Nous avons montré que les modèles d'équations couplées et d'équation générale sont équivalents en une et deux dimensions. Le modèle en deux dimensions peut être calculé à partir d'une géométrie exportée depuis Google SketchUp. Nous avons vérifié les modèles numériques qui se comportent bien vis à vis du modèle analytique, ce qui nous a permis de les valider. Nous avons fixé les pas de discrétisation temporelle et spatiale à $\Delta t = 1ms$ et $\Delta x = 1m$.

Enfin, nous n'avons pas pu montrer de correspondance entre les coefficients recalés et les coefficients estimés à partir de la théorie. Notamment, les coefficients estimés le long de l'axe au centre et le long de l'axe proche d'une paroi sont proches, ce qui paraît paradoxal car nous nous attendions à des valeurs nulles au centre.

Chapitre 7

Conclusion Générale

7.1. CONCLUSION

Dans ce travail de thèse, nous avons implémenté un algorithme de modélisation acoustique pour la conception d'espaces de type bureaux ouverts dans le but de l'évaluation de leurs caractéristiques acoustiques pour la conception architecturale.

Le travail reprend les relations entre l'énergie sonore et l'intensité et prend en compte de manière globale les coefficients d'absorption et de diffusion. La méthode développée réduit la conservation du tenseur énergie-impulsion à un système d'équations couplées. C'est un système hyperbolique différentiel linéaire du premier ordre.

Nous proposons un état des connaissances sur les axes de recherche mis en œuvre dans cette thèse où nous montrons la nécessité d'approfondir le lien naturel entre mélange et diffusion pour introduire naturellement les statistiques dans l'approche géométrique, simplifier ainsi les calculs, et obtenir en supplément une définition de la diffusion accessible à la mesure expérimentale.

Ensuite, nous avons introduit le formalisme du système d'équations couplées. Nous avons présenté le tenseur énergie-impulsion reprenant toutes les quantités énergétiques décrivant la propagation d'une onde sonore. Par une méthode d'intégration, nous avons ensuite introduit les coefficients d'absorption et de diffusion de parois et le libre parcours moyen du domaine. Enfin, nous avons formulé ce système en une et deux dimensions et nous avons introduit le

potentiel d'intensité afin de proposer des conditions aux limites.

Au Chap. 4, nous avons présenté le matériel et le protocole de mesure. Il s'agit de la mesure de réponse impulsionnelle par l'émission d'un sinus glissant de $20Hz$ à $20000Hz$ dont le post-traitement permet de fenêtrer les non-linéarités du système source. Le matériel est constitué d'une source omnidirectionnelle *Outline* GRS et d'un microphone *SoundField* ST250. Le microphone a fait l'objet d'une caractérisation au LNE qui nous a permis de confirmer son utilisation, restreinte à la plage $125Hz$ à $2000Hz$. Nous avons aussi présenté les 3 plateaux de bureaux et le couloir du laboratoire qui ont fait l'objet de mesures pour ce travail *in situ*.

Nous avons ensuite présenté les schémas différences finies consistants et stables sous conditions, les approximations et leur précision et les conditions limites en une et deux dimensions pour les deux systèmes d'équations résultant du formalisme théorique.

Enfin, au Chap. 6, nous avons montré que les modèles d'équations couplées et d'équation générale sont équivalents en une et deux dimensions. Le modèle en deux dimensions peut être calculé à partir d'une géométrie exportée depuis Google SketchUp. Nous avons vérifié les modèles numériques qui se comportent bien vis à vis du modèle analytique, ce qui nous a permis de les valider. Nous avons fixé les pas de discrétisation temporelle et spatiale à $\Delta t = 1ms$ et $\Delta x = 1m$.

Notamment, l'implémentation des modèles a permis de montrer que la décroissance temporelle ne dépend pas du coefficient de diffusion, mais que ce dernier influe sur la décroissance spatiale. Nous avons ensuite présenté le résultat des estimations des coefficients d'absorption et de diffusion mesurés *in situ* et les avons comparés aux résultats de modélisation par recalage. Nous avons montré qu'il n'y avait pas équivalence entre les coefficients. Enfin, nous n'avons pas pu montrer de correspondance entre les coefficients recalés et les coefficients estimés à partir de la théorie. Notamment, les coefficients estimés le long de l'axe au centre et le long de l'axe proche d'une paroi sont proches, ce qui paraît paradoxal car nous nous attendions à des valeurs nulles au centre.

7.2. PERSPECTIVES

7.2.1. Perspectives théoriques

La théorie développée dans ce travail prend en compte l'absorption et la diffusion dans les équations volumiques grâce à l'intégration sur une ou deux dimensions des parois de l'espace de propagation. Le résultat est une propagation en une ou deux dimensions.

La première perspective du projet est de prendre en compte les coefficients non pas par l'intégration sur les parois mais en forçant la prise en compte statistique des collisions sur les parois. Le résultat est une propagation en trois dimensions prenant en compte les conditions limites de manière statistique et intégrant des coefficients de diffusion et d'absorption moyens par tronçon du local.

7.2.2. Perspectives métrologiques

Le dispositif de mesure est constitué d'un microphone *SoundField* ST250. La calibration du microphone a montré des défauts et le matricage effectué par le contrôleur reste incertain. De plus, nous outrepassons certaines limitations du microphone comme par exemple la mesure proche des parois. L'utilisation d'un autre type de microphone, comme le *TetraMic* de Core Sound, peut apporter beaucoup aux mesures. Notamment comme nous l'avons constaté au niveau de l'estimation des coefficients, qui montrent une faible corrélation avec le recalage et qui ne sont pas nuls au centre des parois, comme nous l'attendions.

7.2.3. Perspectives numériques

La deuxième perspective est l'évaluation des modélisations développées dans ce travail. Nous avons vu que normaliser le modèle par le pas d'espace permettrait d'améliorer la précision du modèle. L'étude du point d'inflexion des courbes de l'énergie lors de l'arrivée du champ direct permettrait de valider le modèle encore plus précisément.

Les résultats montrent une bonne similarité avec les mesures. Néanmoins lors de géométries complexes, le champ acoustique résultant n'est pas calculable dans l'état actuel du modèle. Nous pensons qu'en prenant simplement en compte les coefficients en fonction de la position, et non pas de manière globale, il est possible de rendre compte des doubles pentes observées pour les décroissances temporelles et spatiales. La matrice géométrie adaptée à la conception

sous Google SketchUp peut être améliorée afin de prendre en compte des parois non connexes et permettre d'accéder à des géométries plus complexes. Avec la possibilité par exemple de rendre compte des champs ou modes tournant comme à *Kaleido*, ou autour d'un îlot tel qu'à *Ovalie*.

D'autre par, nous avons choisi la technique des différences finies de manière arbitraire, et l'étude d'autres techniques peut amener à des résultats plus précis. Notamment, notre modèle souffre de certaines limitations en stabilité, il est d'une précision basse et nous n'avons pas pu aller jusqu'au bout du calcul par l'utilisation de matrices. De plus, nous avons vu que la littérature fournit un grand nombre de modélisations en différences finies concernant les équations des lignes de transmission. Reprendre le modèle numérique sur la base de ces équations fournirait un modèle inconditionnellement stable et d'ordre 4 [Mohanty, 1998, Mohanty, 2004, Mohanty, 2005].

7.2.4. Définition et mesure du coefficient de diffusion

La troisième perspective du projet est la définition et la mesure du coefficient de diffusion. Nous avons étudié les coefficients sur la plage fréquentielle centrée sur 1000Hz mais une étude plus fine est nécessaire.

Il a été effectué des campagnes de mesures *in situ* dans 3 espaces de type plateaux de bureaux dont deux n'étaient pas aménagés. Des campagnes de mesures répétées sont nécessaires à l'étude des coefficients pour différentes configurations et à la mise en place d'une banque de données de coefficients de diffusion comme celle que nous connaissons pour le coefficient d'absorption. La préconisation d'espaces architecturaux était un objectif industriel de la thèse, l'utilisation en projet de bureau d'étude est possible dès aujourd'hui et permettrait d'accéder à de nouveaux espaces. Pour ces nouvelles campagnes de mesures, relever les réponses impulsionnelles du plafond et du sol donnerait de nouvelles sources d'informations très riches pour l'estimation des coefficients.

7.2.5. Perspectives générales

Plus largement, nous pouvons généraliser à d'autres domaines les connaissances acquises dans ce travail, et en particulier à l'acoustique des salles. Le travail réalisé par des confrères chercheurs concernant l'écoute et la spatialisation de mesures d'acoustiques de salles de spec-

tacles parisiennes ou tunisiennes, réalisées en partenariat durant ce projet, sont des points de basculement potentiels vers le domaine de la perception. Ce dernier est un domaine d'étude central du laboratoire, se généralisant dans la prise en compte de l'acoustique en bureau ouvert et dans tous les domaines de l'étude du bruit et de la musique.

Bibliographie

- [Actineo, 2014] Actineo (2014). Enquête européenne Actineo/CSA : l'espace de travail en Europe ; quels espaces, quels impacts, quelles cultures ?
- [Actineo, 2015] Actineo (2015). Etude Actineo/CSA : a quoi ressemble la vie au bureau en 2015 ? Technical report.
- [AES, 2001] AES (2001). Norme - Characterization and measurement of surface scattering uniformity.
- [AFNOR, 1982] AFNOR (1982). Norme NF S 31-057 - Vérification de la qualité acoustique des batiments.
- [AFNOR, 2002a] AFNOR (2002a). Norme NF EN ISO 14257 : Acoustique - Mesurage et description paramétrique des courbes de décroissances sonore spatiale dans les locaux de travail en vue de l'évaluation de leur performance acoustique.
- [AFNOR, 2002b] AFNOR (2002b). Norme NF S 31-084 : Acoustique - Méthode de mesurage des niveaux d'exposition au bruit en milieu de travail.
- [AFNOR, 2004] AFNOR (2004). Norme NF EN ISO 12345-6 : Acoustique du bâtiment - Calcul de la performance acoustique des bâtiments à partir de la performance des éléments.
- [AFNOR, 2006] AFNOR (2006). Norme NF S 31-080 : Acoustique - Bureaux et espaces associés - Niveaux et critères de performances acoustiques par type d'espace.
- [AFNOR, 2008] AFNOR (2008). Norme NF EN ISO 3382-2 :2008 Acoustics "Measurement of room acoustic parameters" Part 2 : Reverberation time in ordinary rooms.
- [AFNOR, 2009] AFNOR (2009). Norme NF EN ISO 3382-1 :2009 Acoustics "Measurement of room acoustic parameters" Part 1 : Performance spaces.
- [AFNOR, 2013] AFNOR (2013). Norme NF EN ISO 3382-3 :2013 - Acoustique - Mesurage des paramètres acoustique des salles - Partie 3 : bureaux ouverts.

-
- [Atienza and Balez, 2009] Atienza, R. and Balez, S. (2009). *Acoustique des salles*. École Nationale Supérieure d'Architecture de Grenoble.
- [Bath et al., 2015] Bath, J.-P., de Ponfilly, I., Gaillot, J., and Iribarne, A. (2015). Enquête Actineo/CSA : quelle vie au bureau ?
- [Bedeau and Foulquier, 2013] Bedeau, L. and Foulquier, B. (2013). Baromètre Actineo/CSA sur la qualité de vie au bureau. Technical report.
- [Bedeau et al., 2011] Bedeau, L., Piquandet, J., and Loussouam, S. (2011). Enquête Actineo/TNS SOFRES : Observatoire de la qualité de vie au bureau.
- [Blauert and Xiang, 2009] Blauert, J. and Xiang, N. (2009). *Acoustics for Engineers*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Bosquet, 1967] Bosquet, J. (1967). La théorie synthétique de la réverbération. In *Bulletin du Laboratoire d'Acoustique de l'Université de Liège 11*, pages 51–67.
- [Botteldooren, 1995] Botteldooren, D. (1995). Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(6) :3302–3308.
- [Bouhali and Polack, 2015] Bouhali, Y. and Polack, J. D. (2015). The Tahk, requirements between tradition and popular diffusion : shifting venues. In *Proc. of the Institute of Acoustics*, volume 37, Paris.
- [Bruneau, 1998] Bruneau, m. (1998). *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes science publications edition.
- [Chandler, 1989] Chandler, A. (1989). *La main visible des managers*. Paris, economica edition.
- [Cooper and Shiga, 1972] Cooper, D. H. and Shiga, T. (1972). Discrete-Matrix Multichannel Stereo. *J. Audio Eng. Soc.*, 20 :346–360.
- [Daniel, 2001] Daniel, J. (2001). *Representation de champs acoustiques, application à la transmission et à la reproduction de scènes sonores complexes dans un contexte multimedia*. PhD thesis, UPMC.
- [Defrance, 2009] Defrance, G. (2009). *Caractérisation du mélange dans les réponses impulsionnelles de salles. Application à la détermination expérimentale du temps de mélange*. PhD thesis, UPMC.
- [Des Isnards and Zuber, 2008] Des Isnards, A. and Zuber, T. (2008). *L'open-space m'a tué*. Hachette littérature edition.
- [Duhamel, 2013] Duhamel, D. (2013). Notes du cours.

- [Dujourdy, 2009] Dujourdy, H. (2009). Mesures et modélisation de salles de spectacles parisiennes en vue de leur auralisation. Rapport de master 2, UPMC.
- [Ebissou, 2013] Ebissou, A. (2013). *Gêne sonore en bureaux ouverts : Impact de la présence de plusieurs voix intelligibles*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon.
- [Embrechts, 2002] Embrechts, J.-J. (2002). Modélisation des réflexions diffuses en acoustique des salles : état de la question. In *6ème Congrès Français d'Acoustique (CFA)*.
- [Espitia Hurtado, 2016] Espitia Hurtado, J. P. (2016). *Perception de la musique dans les salles et dispositif de diffusion*. PhD thesis, UPMC, France.
- [Espitia Hurtado et al., 2014] Espitia Hurtado, J. P., Dujourdy, H., and Polack, J. D. (2014). Caractérisation expérimentale du microphone SoundField ST250 pour la mesure de la diffusivité du champ sonore. In *12ème Congrès Français d'Acoustique (CFA)*, pages 795–801, Poitiers, France.
- [Evans and Johnson, 2000] Evans, G. and Johnson, D. (2000). Stress and open-office noise. *Journal of Applied Psychology*, 85(5) :779–783.
- [Farina, 2001] Farina, A. (2001). Anechoic measurement of the polar plot of B-format microphones. Technical report, Università degli studi di Parma, Parma, Italie.
- [Farina, 2007a] Farina, A. (2007a). Advancements in impulse response measurements by sine sweeps. In *Audio Engineering Society Convention 122*, Vienna, Austria.
- [Farina, 2007b] Farina, A. (2007b). Impulse Response Measurements. In *Nordic Sound Symposium 23rd*, Bolkesjö.
- [Farina et al., 2000] Farina, A., Zanolin, M., and Crema, E. (2000). Measurement of sound scattering properties of diffusing panels through the Wave Field Synthesis approach.
- [Fischer, 1990] Fischer, G.-N. (1990). *Espace, Identité et Organisation, L'individu Dans L'organisation : Les Dimensions Oubliées, Sous La Direction de Jean-François Chanlat*. Laval, presses universitaires de laval edition.
- [Foy et al., 2009] Foy, C., Valeau, V., Billon, A., Picaut, J., and Sakout, A. (2009). An Empirical Diffusion Model for Acoustic Prediction in Rooms with Mixed Diffuse and Specular Reflections. *Acta Acust united Ac*, 95(1) :97–105.
- [Gardey, 2001] Gardey, D. (2001). *La dactylographe et l'expéditionnaire. Histoire des employés de bureau (1890-1930)*. Paris, belin edition.
- [Gerzon, 1973] Gerzon, M. (1973). Periphony : with-height sound reproduction. *J. Audio Eng. Soc.*, 21(1).

-
- [Gerzon, 1975] Gerzon, M. (1975). Ambisonics part two : studio techniques. *Studio Sound*, 17(8) :24–30.
- [Griesinger, 1996] Griesinger, D. (1996). Beyond MLS - Occupied hall measurement with FFT techniques.
- [Hodgson, 1991] Hodgson, M. (1991). Evidence of diffuse surface reflections in rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2).
- [Iribarne, 2012] Iribarne, A. (2012). *Performances au travail : et si tout commençait par vos bureaux ?* Italiques edition.
- [Iribarne, 2013] Iribarne, A. (2013). L'aménagement des bureaux. Un outil de management de la conduite du changement. *La revue Cadres*, (457).
- [Jarret et al., 2012] Jarret, D. P., Thiegart, O., Habets, E. A. P., and Naylor, P. A. (2012). Coherence-Based Diffuseness Estimation in the Spherical Harmonic Domain. *Electrical and Electronics Engineers Convention 27-th*.
- [Jianhui et al., 2012] Jianhui, S., Yanju, L., and Yang, Y. (2012). Numerical analysis of transmission line telegraph equation based on FDTD method. *JCIT*, 7(20) :258–265.
- [Jing and Xiang, 2007] Jing, Y. and Xiang, N. (2007). Investigation on higher orders of spherical harmonics equations for efficient room-acoustic predictions. In *ICA 19th*, Madrid.
- [Jing and Xiang, 2008] Jing, Y. and Xiang, N. (2008). On boundary conditions for the diffusion equation in room acoustic prediction : theory, simulations, and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(1) :145–153.
- [Kim and de Dear, 2013] Kim, J. and de Dear, R. (2013). Workspace satisfaction : The privacy-communication trade-off in open-plan offices. *Journal of Environmental Psychology*, 36 :18–26.
- [Kleiner et al., 1993] Kleiner, M., Dalenbäck, B.-I., and Svensson, P. (1993). Auralization - an overview. *J. Audio Eng. Soc.*, 41(11) :861–875.
- [Kowalczyk, 2008] Kowalczyk, K. (2008). *Boundary and medium modelling using compact finite difference schemes in simulations of room acoustics for audio and architectural design applications*. PhD thesis, School of Electronics, Electrical Engineering and Computer Science, Belfast.
- [Koyasu and Yamashita, 1972] Koyasu, M. and Yamashita, M. (1972). Evaluation of the degree of diffuseness in reverberation chambers by spatial correlation techniques. Technical report, National Aeronautic ans Space Administration, WASHINGTON, D. C.

- [Kristiansen et al., 2008] Kristiansen, J., Clausen, T., Christensen, K. B., and Lund, T. (2008). Self-reported noise exposure as a risk factor for long-term sickness absence. In *9th International congress on noise as a public health problem (ICBEN)*, Foxwoods, CT, USA.
- [Labardin, 2011] Labardin, P. (2011). L'espace, un outil de contrôle ? Le cas Pont-à-Mousson (1921-1930).
- [Lamothe and Bradley, 1985] Lamothe, M. R. and Bradley, J. S. (1985). Acoustical characteristics of guns as impulse sources. *Canadian Acoustics*, 13(2) :16–24.
- [Leao Figueiredo, 2011] Leao Figueiredo, F. (2011). *Indices acoustiques et leurs rapports statistiques : verification objective et subjective pour un ensemble de salles de spectacles*. PhD thesis, UMPC.
- [Legifrance, 2011] Legifrance (2011). Décret numéro 2011-604 du 30 mai 2011 relatif à l'attestation de prise en compte de la réglementation acoustique à établir à l'achèvement des travaux de bâtiments d'habitation neufs.
- [Legifrance, 2012] Legifrance (2012). Arrêté du 27 novembre 2012 relatif à l'attestation de prise en compte de la réglementation acoustique applicable en France métropolitaine aux bâtiments d'habitation neufs.
- [Merimaa and Pulkki, 2004] Merimaa, J. and Pulkki, V. (2004). Spatial impulse rendering. In *Digital Audio Effects 7th (DAFx'04)*, Naples, Italy.
- [Meyer and Elko, 2002] Meyer, J. and Elko, G. (2002). A highly scalable spherical microphone array based on an orthonormal decomposition of the soundfield. In *IEEE ICASSP*, volume 2, pages 1781–1784, Orlando.
- [Mohanty, 1998] Mohanty, R. (1998). Fourth-order approximations at first time level, linear stability analysis and the numerical solution of multidimensional second-order nonlinear hyperbolic equations in polar coordinates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 93 :1–12.
- [Mohanty, 2004] Mohanty, R. (2004). An Unconditionally Stable Difference Scheme for the One-Space-Dimensional Linear Hyperbolic Equation. *Applied Mathematics Letters*, (17) :101–105.
- [Mohanty, 2005] Mohanty, R. (2005). An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients. *App. Math. Comput.*, 165(1) :229–236.

-
- [Mommertz, 2000] Mommertz, E. (2000). Determination of scattering coefficients from the reflection directivity of architectural surfaces. *Applied Acoustics*, 60 :201–203.
- [Morse and Feshbach, 1953] Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). *Method of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill Book Company.
- [Morse and Ingard, 1968] Morse, P. M. and Ingard, K. U. (1968). *Theoretical Acoustics*. Mc Graw-Hill Book Company.
- [Muller, 2001] Muller, S. (2001). Measuring Transfer-Functions and Impulse Responses.
- [Muller and Massarani, 2001] Muller, S. and Massarani, P. (2001). Transfer-function measurement with sweeps. *J. Audio Eng. Soc.*, 49(6) :443–471.
- [Nagel, 2010] Nagel, J. R. (2010). The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm. Technical report, Department of Electrical And Computer Engineering, University of Utah.
- [Navarro Ruiz, 2011] Navarro Ruiz, J. M. (2011). *Discrete-time modelling of diffuse processes for room acoustics simulation and analysis*. PhD thesis, Universidad Politecnica de Valencia Departamento de Comunicaciones, Valencia.
- [Navarro Ruiz et al., 2012] Navarro Ruiz, J. M., Escolano, J., and López, J. J. (2012). Implementation and evaluation of a diffusion equation model based on finite difference schemes for sound field prediction in rooms. *Applied Acoustics*, 73(6-7) :659–665.
- [Navarro Ruiz et al., 2010] Navarro Ruiz, J. M., Jacobsen, F., Escolano, J., and López, J. J. (2010). A Theoretical Approach to Room Acoustic Simulations Based on a Radiative Transfer Model. *Acta Acust united Ac*, 96(6) :1078–1089.
- [Noether, 1918] Noether, A. (1918). Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*,, pages 235–257.
- [Ollendorff, 1969] Ollendorff, F. (1969). Statistical room acoustics as a problem of diffusion, a proposal. *Acustica*, 21 :236–245.
- [Passchier-Vermeer and Passchier, 2000] Passchier-Vermeer, W. and Passchier, W. F. (2000). Noise exposure and public health. *Environ Health Perspect*, 108 (suppl 1) :123–131.
- [Patynen et al., 2011] Patynen, J., Katz, B. F., and Lokki, T. (2011). Investigations on the balloon as an impulse source. *J. Acoust. Soc. Am.* 129 (1), January 2011.
- [Pialot, 2015] Pialot, B. (2015). Modélisation en différences finies de la diffusion de l’énergie acoustique dans un open-space. Rapport de stage de Master 2, Université Pierre et Maris Curis, Paris.

- [Picaut, 1996] Picaut, J. (1996). *Propagation du son en milieu urbain*. PhD thesis.
- [Picaut et al., 1997] Picaut, J., Simon, L., and Polack, J. D. (1997). A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation. *Acta Acust united Ac*, 83(4) :614–621.
- [Pierce, 1989] Pierce, A. D. (1989). *Acoustics : an introduction to its physical principles as applications*. Acoustical Society of America.
- [Polack, 1992] Polack, J. D. (1992). Modifying Chambers to play Billiards : the Foundations of Reverberation Theory. *Acustica*, 76.
- [Polack, 2011] Polack, J. D. (2011). *Approximation semiclassique des modes propres application à l'acoustique des salles*.
- [Polack et al., 1989] Polack, J. D., Marshall, A. H., and Dodd, G. (1989). Digital evaluation of the acoustics of small models : The MIDAS package. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1).
- [Polack et al., 1990] Polack, J. D., Meynial, X., Marshall, A. H., and Dodd, G. (1990). Evaluation assistée par ordinateur de l'acoustique des salles dès le stade de la conception : le logiciel MIDAS. *Le Journal de Physique Colloques*, 51(C2) :C2–1105–C2–1108.
- [Ponthière, 1935] Ponthière, M. (1935). *Le bureau moteur*. Delmas, Paris.
- [Pulkki, 2007] Pulkki, V. (2007). Spatial Sound Reproduction with Directional Audio Coding. *J. Audio Eng. Soc.*, 55 :503–516.
- [Ricroch and Roumier, 2011] Ricroch, L. and Roumier, B. (2011). Depuis 11 ans, moins de tâches ménagères, plus d'Internet. Technical Report 1377, Insee.
- [Rindel and Jeon, 2003] Rindel, J. H. and Jeon, J. Y. (2003). The new field method for measurement of the scattering coefficient. *communication personnelle et notes*,.
- [Rissert, 2006] Rissert, L. (2006). Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides.
- [Ryu and Jeon, 2008] Ryu, J. K. and Jeon, J. Y. (2008). Subjective and objective evaluations of a scattered sound field in a scale model opera house. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(3) :1538–1549.
- [Sakuma et al., 2009] Sakuma, T., Kosaka, Y., Geetere, L., and Vorlander, M. (2009). Relationship between the scattering coefficients determined with coherent averaging and with directivity correlation. *Acta Acust united Ac*, 95(4) :669–677.
- [Saval, 2015] Saval, N. (2015). *Cubed. A secret history of the workplace*. Doubleday edition.

- [Savioja, 2010] Savioja, L. (2010). Real-time 3d finite-difference time-domain simulation of low-and mid-frequency room acoustics. In *13th Int. Conf on Digital Audio Effects (DAFx-10)*, Graz, Austria.
- [Savioja et al., 1994] Savioja, L., Takala, T., and Rinne (1994). Simulation of Room Acoustics with a 3-D Finite Difference Mesh. *ICMC*, 1994.
- [Schmich, 2010] Schmich, I. (2010). Retour d experience sur la mise en application de la norme ISO-17497-1. In *10ème CFA*, Lyon.
- [Schroeder, 1991] Schroeder, M. R. (1991). *Number theory in Science and Communication*. Springer-verlag edition.
- [Valeau et al., 2006] Valeau, V., Picaut, J., and Hodgson, M. (2006). On the use of a diffusion equation for room-acoustic prediction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(3) :1504–1513.
- [Vian, 2005] Vian, J.-P. (2005). Introduction à l’acoustique des auditoriums.
- [Vinton Hunt, 1992] Vinton Hunt, F. (1992). *Origins in Acoustics*. Ac. soc. of am. edition.
- [Visentina et al., 2012] Visentina, C., Prodi, N., Valeau, V., and Picaut, J. (2012). A numerical investigation of the Fick’s law of diffusion in room acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 132(5).
- [Vorlander and Mommertz, 2000] Vorlander, M. and Mommertz, E. (2000). Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients. *Applied Acoustics*, 60 :187–199.
- [Xiang et al., 2013] Xiang, N., Escolatno, J., Navarro, J. M., and Jing, Y. (2013). Investigation on the effect of aperture sizes and receiver positions in coupled rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 133(6).
- [Yates, 1989] Yates, J. (1989). *Control through communication : The rise of system in American Management*.. Baltimore, john hopkins university press edition.
- [Yee, 1966] Yee, K. S. (1966). Numerical solution of boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on antennas and propagation*.
- [Zunz, 1991] Zunz (1991). *L’Amérique en col blanc. L’invention du tertiaire : 1870-1920*. Paris, belin edition.

Annexes

A. PLAN DES SALLES MESURÉES

A.1. Kaleido

Kaleido est un plateau de bureaux d'environ $300m^2$ de $23 \times 20m$ et de $2.7m$ de hauteur sous plafond non aménagé lors des mesures. Le sol est en moquette et le plafond en dalles minérales. Les parois sont constituées de vitrages et de plaques de plâtre.

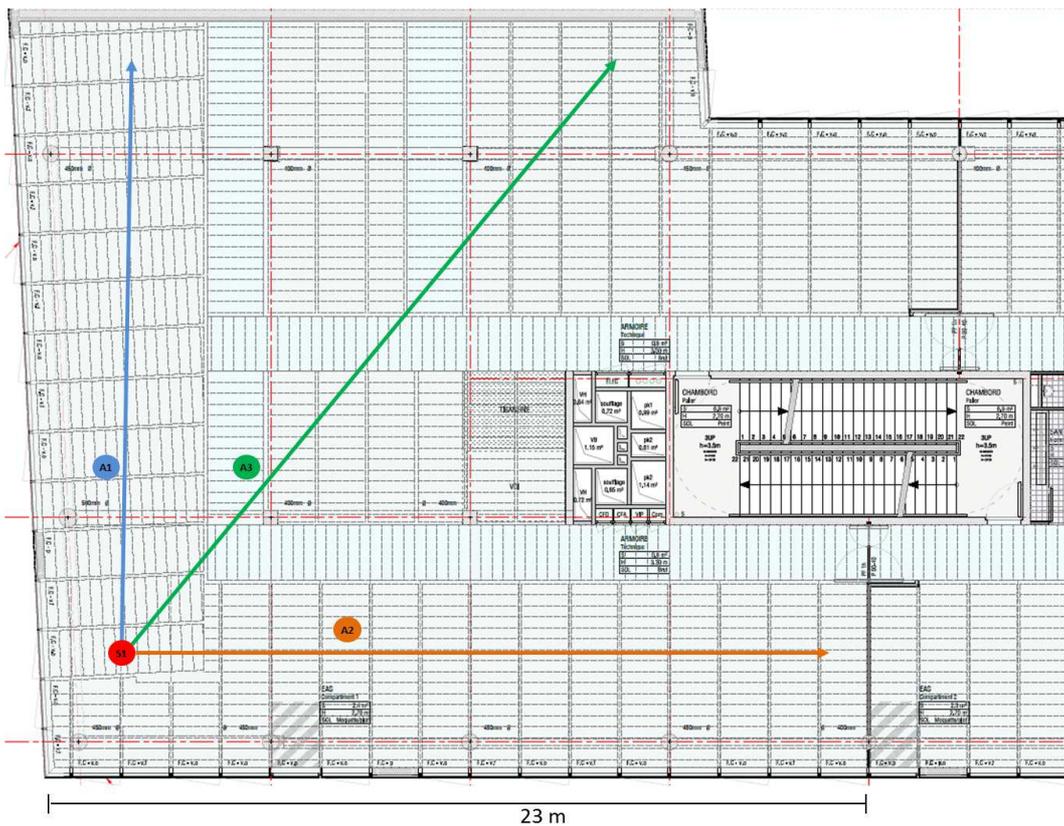


FIGURE 1 – Plan des bureaux à *Kaleido* (R+3). Les sources sont notées *S* et les décroissances spatiales représentées par une flèche sont notées *A*.



FIGURE 2 – Photographie du plateau de bureaux *Kaleido*.

A.2. Ovalie

L'espace *Ovalie* est un ovale de longueur $75m$, de largeur $35m$ et de $2.7m$ de hauteur sous plafond. Il est constitué d'un îlot central d'environ $40m$ par 20 . L'espace est aménagé et sans utilisateur lors des mesures. Le sol est en moquette et le plafond en dalles minérales. Les parois sont constituées de vitrages et de plaques de plâtre.

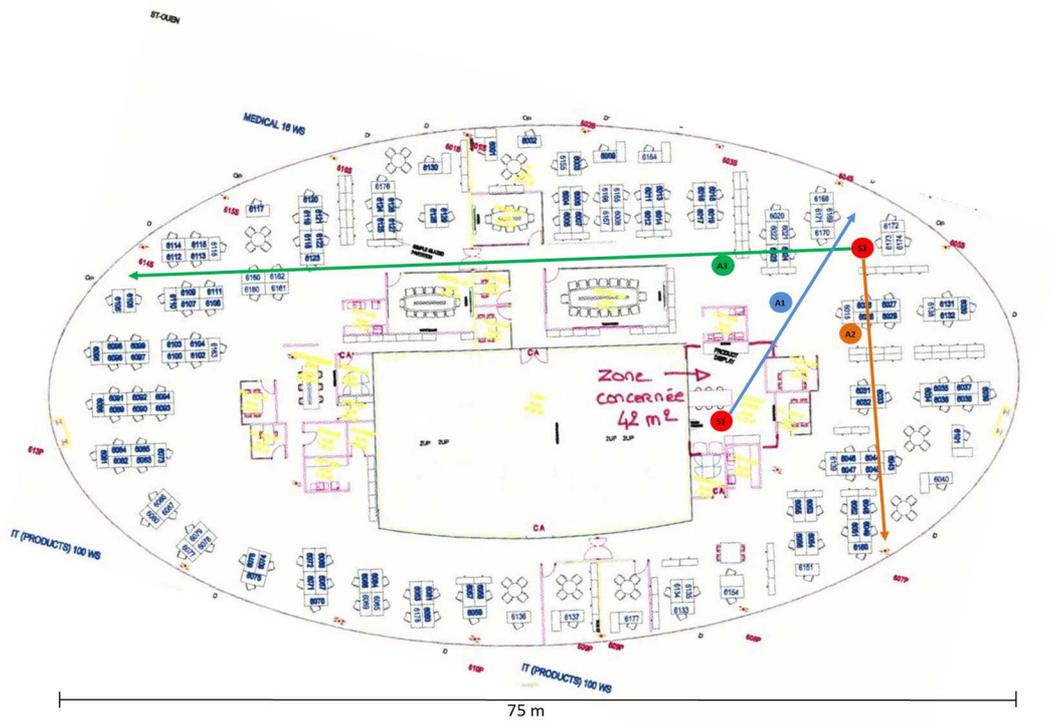


FIGURE 3 – Plan des bureaux à *Ovalie* (R+6). Les sources sont notées S et les décroissances spatiales représentées par une flèche sont notées A .



FIGURE 4 – Photographie du plateau de bureaux *Ovalie*.

A.3. Nexity

L'espace *Nexity* est un plateau de bureaux d'environ $200m^2$ de $16.5 \times 16.8m$ et de $2.7m$ de hauteur sous plafond non aménagé lors des mesures. Les surfaces murales sont constituées de plaques de plâtre et de bois. Le sol est en béton ciré et le plafond constitué de panneaux de plâtre perforés.

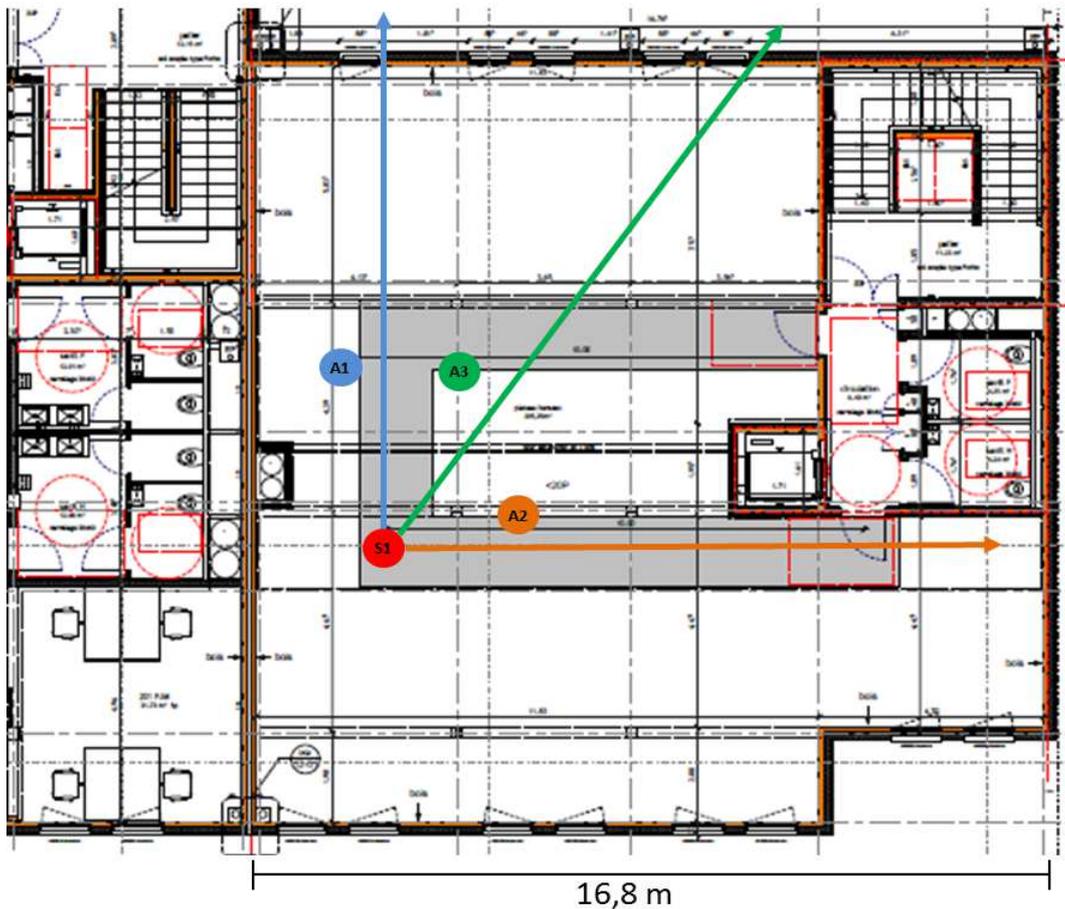


FIGURE 5 – Plan des bureaux à *Nexity* (R+2). Les sources sont notées S et les décroissances spatiales représentées par une flèche sont notées A .



FIGURE 6 – Photographie du plateau de bureaux *Nexity*.

A.4. Couloir du laboratoire

Le couloir du laboratoire a une longueur de $32m$ de longueur et se termine en chicane. Sa largeur est de $1.7m$ et sa hauteur de $2.5m$. Le sol est en moquette, le plafond est constitué de dalles de laine minérale et interrompu par 10 puits de jour de $2m$ de long et de $1m$ de profondeur. Les murs sont constitués de parois vitrées ou métalliques. Le couloir est rempli de meubles et d'objets couvrant environ un tiers de la surface murale. Le couloir dessert 17 bureaux et salles de manipulations.

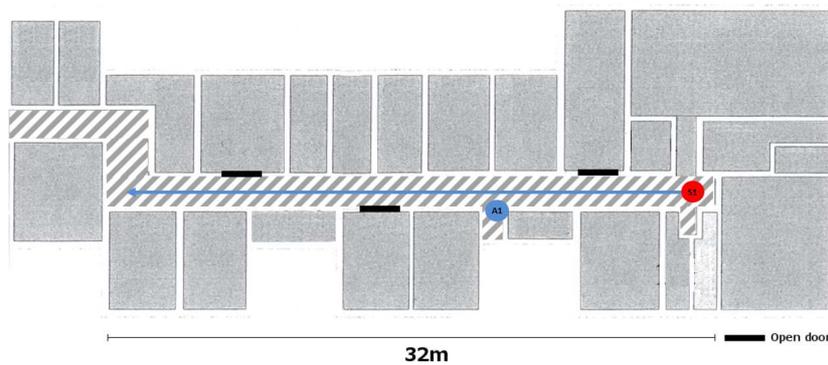


FIGURE 7 – Plan du couloir du laboratoire. La source est notée S et la décroissance spatiale représentée par une flèche est notée A .



FIGURE 8 – Photographie du couloir du laboratoire.

B. CALCUL DES TERMES QUADRIPOLAIRES

Pour calculer les W_l^m , nous projetons la fonction f sur les harmoniques sphériques. Avec $dV_v = \sin \theta d\theta d\varphi$, et en se plaçant en coordonnées cartésiennes, la projection s'écrit en fonction des termes énergétiques :

$$\begin{aligned}
 E(x, t) &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_0^0(\theta, \varphi) dV_v \\
 &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_0^0(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \int f(x, \vec{v}, t) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= 4\pi W_0^0(x, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_1^0(\theta, \varphi) dV_v \\
 &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_1^0(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \int f(x, \vec{v}, t) (\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= W_1^0 \int_{0,0}^{\pi, 2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \frac{4\pi}{3} W_1^0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_y &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_1^1(\theta, \varphi) dV_v \\
 &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_1^1(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= \int f(x, \vec{v}, t) (\sin(\theta) \cos(\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
 &= W_1^1 \int_{0,0}^{\pi, 2\pi} \sin^3(\theta) \cos^2(\varphi) d\theta d\varphi \\
 &= W_1^1 (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi \\
 &= W_1^1 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{2\pi}{2} \\
 &= \frac{4\pi}{3} W_1^1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_z &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_1^{-1}(\theta, \varphi) dV_v \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) Y_1^{-1}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) (\sin(\theta) \cos(\varphi) \sin(\theta)) d\theta d\varphi \\
&= W_1^{-1} \int_{0,0}^{\pi,2\pi} \sin^3(\theta) \sin^2(\varphi) d\theta d\varphi \\
&= W_1^{-1} \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi \\
&= W_1^{-1} 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{2\pi}{2} \\
&= \frac{4\pi}{3} W_1^{-1}
\end{aligned}$$

Au Chap. 3, nous introduisons un terme quadripolaire Q , correspondant aux termes énergétiques pour les harmoniques sphériques d'ordre 2. Les calculs sont détaillés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^0(\theta, \varphi) dV_v \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^0(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) (3 \cos^2(\theta) - 1) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^0 \int_{0,0}^{\pi,2\pi} (3 \cos^2(\theta) - 1)^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^0 \int_0^\pi (9 \cos^4(\theta) - 6 \cos^2(\theta) + 1) \sin(\theta) d\theta 2\pi \\
&= W_2^0 2 \left(\frac{9}{5} - \frac{6}{3} + 1\right) 2\pi \\
&= \frac{16\pi}{5} W_2^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^1(\theta, \varphi) dV_v \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^1(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) (\cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^1 \int_{0,0}^{\pi,2\pi} (\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^1 \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi \\
&= W_2^1 \int_0^\pi (\cos^2(\theta) - \cos^4(\theta)) \sin(\theta) d\theta 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\pi \\
&= \frac{4\pi}{15} W_2^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{-1} &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^{-1}(\theta, \varphi) dV_v \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^{-1}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) (\cos(\theta) \sin(\theta) \sin(\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^{-1} \int_{0,0}^{\pi,2\pi} (\cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^{-1} \int_0^\pi \cos^2(\theta) (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi \\
&= W_2^{-1} \int_0^\pi 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \frac{2\pi}{2} \\
&= \frac{4\pi}{15} W_2^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^2(\theta, \varphi) dV_v \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^2(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) (\sin^2(\theta) \cos(2\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^2 \int_{0,0}^{\pi,2\pi} (1 - \cos^2(\theta))^2 \cos^2(2\varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^2 \int_0^\pi (1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2(2\varphi) d\varphi \\
&= W_2^2 2 \left(2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \frac{2\pi}{2} = W_2^2 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \frac{2\pi}{2} \\
&= W_2^2 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \pi \\
&= \frac{16\pi}{15} W_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{-2} &= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^{-2}(\theta, \varphi) dV_v \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) Y_2^{-2}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \int f(x, \vec{v}, t) (\sin^2(\theta) \sin(2\varphi)) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= W_2^{-2} \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta)) \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi) d\varphi \\
&= \frac{16\pi}{15} W_2^{-2}
\end{aligned}$$