



**HAL**  
open science

# Adaptation dynamique et apprentissage dans des réseaux de neurones récurrents aléatoires

Emmanuel Daucé

► **To cite this version:**

Emmanuel Daucé. Adaptation dynamique et apprentissage dans des réseaux de neurones récurrents aléatoires. Réseau de neurones [cs.NE]. ISAE - Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2000. Français. NNT : 2000ESAE0001 . tel-01394004

**HAL Id: tel-01394004**

**<https://theses.hal.science/tel-01394004>**

Submitted on 8 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**  
de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE  
SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

par

**Emmanuel Daucé**

ADAPTATION DYNAMIQUE ET APPRENTISSAGE  
DANS DES RÉSEAUX DE NEURONES RÉCURRENTS ALÉATOIRES

Soutenue le 13 janvier 2000 devant la commission d'examen :

MM.	M.	SAMUELIDES	Président
	J.	DEMONGEOT	Rapporteur
	P.	GAUSSIER	Rapporteur
	J.-M.	ALLIOT	
	B.	CESSAC	
	B.	DOYON	Directeur de thèse
	F.	VARELA	

Thèse préparée au sein du Département Traitement de l'Information et  
Modélisation (DTIM) de l'ONERA-Centre de Toulouse



“Seulement... le tout venant a été piraté par les mêmes, alors qu’est ce qu’on se fait ?... On se risque sur le bizarre, ca va rajeunir personne!”

*G. Lautner (1966) “Les Tontons flingueurs”*



# Remerciements

*En cette période où les vents et les marées (noires) ont fait parler d'eux, je tiens à remercier en premier lieu Bernard Doyon, encadrant et directeur de thèse, chercheur à l'INSERM unité 450, qui a su me faire partager son enthousiasme pour le projet, et qui a toujours su être présent "contre vents et marées" dans les moments importants. Merci aussi pour l'attention et l'exigence pendant la période de rédaction du mémoire. Sans vouloir paraphraser un série célèbre, donc, merci Bernard!*

*J'exprime toute ma gratitude à mes deux rapporteurs Jacques Demongeot, professeur à l'université Joseph Fourier de Grenoble, pour avoir accepté d'évaluer mon travail, et Philippe Gaussier, professeur à l'ENSEA de Cergy Pontoise, dont les commentaires et remarques m'ont été précieux et lancent également des pistes pour des rapprochements et des voies d'exploration futures. Je remercie pour avoir accepté de participer à mon jury, et pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail, Jean-Marc Alliot, professeur à l'ENAC, et Francisco Varela, chercheur au LENA/CNRS à la Pitié Salpêtrière.*

*Fédérer dans un projet de recherche pluridisciplinaire n'est pas chose aisée, et je remercie Manuel Samuelides, professeur en mathématiques appliquées à SUPAERO, pour les efforts qu'il a toujours fournis dans le sens du rapprochement des idées, et pour son soutien constant à mon travail. Toute ma reconnaissance va à Bruno Cessac, maître de conférences à l'Université de Nice Sophia-Antipolis, et Mathias Quoy, maître de conférences à l'Université de Cergy-Pontoise, anciens thésards de l'équipe, pour leur soutien et leur amitié. Leur persévérance à poursuivre le projet a finalement permis de tisser des liens solides entre nos laboratoires respectifs. Je félicite Mathias, qui fut papa presque au moment de ma soutenance, et remercie Bruno pour avoir accepté de participer au jury, et pour sa relecture rigoureuse. Je tiens également à remercier la nouvelle génération, à savoir Olivier Moynot pour son amitié, pour son esprit constructif et sa persévérance pour tenter de m'expliquer certains développements mathématiques du modèle, et Olivier Pinaud pour ses contributions à la mise en place du modèle à deux populations, et surtout pour sa "chance du débutant". Merci également à Laurent pour sa relecture du manuscrit, à Alain et Juliette pour le déplacement.*

*Je tiens à remercier René Jacquart de m'avoir accueilli pendant toutes ces années au sein du DTIM (Département de Traitement de l'Information et mo-*

*délisation), laboratoire de l'ONERA, centre de Toulouse. Merci à Josette Brial, Noëlle Desblancs et Christiane Payrau pour leur dynamisme et leurs encouragements, à Paul Bourret pour l'intérêt qu'il a toujours manifesté pour nos travaux. Je remercie enfin tous les stagiaires au moyen et long cours, pour leur sympathie, leur amitié et leur chaleureuse présence au cours des soirées "bière en ville".*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Systèmes dynamiques et chaos . . . . .	5
1.1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	6
1.1.2 Le chaos déterministe . . . . .	8
1.1.3 Outils numériques . . . . .	13
1.2 Neurophysiologie . . . . .	17
1.2.1 Fonctionnement de la cellule nerveuse . . . . .	19
1.2.2 Structures anatomiques . . . . .	22
1.2.3 Adaptation dynamique . . . . .	24
1.3 Connexionnisme . . . . .	28
1.3.1 Historique . . . . .	29
1.3.2 Modèle de neurone . . . . .	30
1.3.3 Architectures . . . . .	31
1.3.4 Règles d'apprentissage . . . . .	33
1.3.5 Approche champ moyen . . . . .	38
1.3.6 Notre approche . . . . .	40
<b>2 Un modèle générique pour l'étude des dynamiques neuronales</b>	<b>43</b>
2.1 Équations d'évolution à taille finie . . . . .	44
2.1.1 Description du système . . . . .	44
2.1.2 Comportement statistique à taille finie . . . . .	47
2.1.3 Comportement dynamique . . . . .	53
2.2 Équations de champ moyen à la limite thermodynamique . . . . .	66
2.2.1 Propagation du chaos . . . . .	66
2.2.2 Limite thermodynamique . . . . .	68
2.2.3 Les équations de champ moyen (ECM) . . . . .	71
2.2.4 Distance entre deux trajectoires . . . . .	73
2.2.5 Variétés de bifurcation . . . . .	77
2.3 Synchronisation sur un modèle à deux populations . . . . .	78
2.3.1 Le système dynamique à deux populations . . . . .	79
2.3.2 Régimes oscillants synchronisés . . . . .	83



2.3.3	Régimes chaotiques sur le champ moyen . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Dynamique spontanée et dynamique contrainte</b>	<b>103</b>
3.1	Configuration spatiale . . . . .	105
3.1.1	Neurones actifs/neurones figés . . . . .	105
3.1.2	Mesures empiriques sur l'activité . . . . .	106
3.1.3	Neurones actifs et déstabilisation . . . . .	109
3.1.4	Influences internes et externes . . . . .	110
3.2	Propriétés de la dynamique spontanée . . . . .	116
3.2.1	Comportement dynamique global . . . . .	117
3.2.2	Caractéristiques profondes de la dynamique . . . . .	123
3.3	Sensibilité dynamique . . . . .	136
3.3.1	Effet d'un motif statique sur le régime dynamique . . . . .	137
3.3.2	Effet d'un motif statique sur la période . . . . .	142
3.3.3	Présentation de motifs dynamiques séquentiels . . . . .	145
<b>4</b>	<b>Apprentissage : une dynamique sur les poids</b>	<b>153</b>
4.1	Historique . . . . .	154
4.1.1	La règle initiale . . . . .	154
4.1.2	Différentiels d'activation . . . . .	158
4.2	Covariance des activations . . . . .	161
4.2.1	Règle de covariance . . . . .	161
4.2.2	Comportement statistique de la covariance . . . . .	164
4.2.3	Application de la règle sur la dynamique spontanée . . . . .	164
4.3	Apprentissage en dynamique contrainte . . . . .	173
4.3.1	Motifs statiques . . . . .	173
4.3.2	Motifs dynamiques : apprentissage en ligne d'une séquence . . . . .	177
4.3.3	Motifs conditionnants . . . . .	178
<b>5</b>	<b>Apprentissage sur le modèle étendu</b>	<b>185</b>
5.1	Une architecture pour l'apprentissage de signaux dynamiques . . . . .	186
5.1.1	Le système dynamique à $K$ populations . . . . .	186
5.1.2	Modèle pour l'apprentissage . . . . .	188
5.1.3	Réponse du système . . . . .	191
5.2	Banc de tests . . . . .	193
5.2.1	Apprentissage partiel . . . . .	195
5.2.2	Apprentissage de séquences . . . . .	202
5.2.3	Signaux incomplets et bruités . . . . .	215
5.3	Application à la robotique autonome . . . . .	222
5.3.1	Principe du traitement visuel . . . . .	224
5.3.2	Ordres moteurs . . . . .	225
5.3.3	Architecture . . . . .	225
5.3.4	Apprentissage . . . . .	226

---

5.3.5	Adaptation dynamique . . . . .	227
<b>Conclusion</b>		<b>235</b>



# Introduction

L'étude des dynamiques neuronales est un des développements les plus récents du connexionnisme (étude des propriétés des réseaux de neurones). Les premiers modèles mentionnant explicitement la correspondance entre les réseaux de neurones récurrents et les systèmes de particules en interaction datent des années soixante-dix. Il faut attendre les années quatre-vingt-dix pour voir apparaître des modèles capables d'entretenir une activité dynamique, c'est à dire de produire un signal de façon autonome. Ces nouveaux modèles puisent leur inspiration dans le développement important des techniques d'observation du cerveau, qui apportent une connaissance de plus en plus poussée des principes qui régissent la communication entre neurones et ensembles de neurones à l'intérieur du cerveau. Cette inspiration biologique permet à la fois de renouveler la manière de concevoir la cognition, en tant que processus constructif inscrit dans une interaction entre la dynamique interne et les signaux provenant de l'environnement, et de proposer de nouvelles solutions pour concevoir des machines adaptatives et autonomes.

À ce titre, cette thèse s'inspire de ces idées dans le cadre de l'étude d'un réseau de neurones récurrent aléatoire. Le choix de ce modèle remonte à un travail antérieur entamé il y a presque dix ans, qui avait pour but d'approfondir la connaissance sur l'occurrence de régimes complexes dans les réseaux de neurones. Il faut donc en préambule de cette thèse rendre hommage à tout le travail de fond accompli sur ce modèle sans lequel les développements présentés ici n'auraient pas été possibles.

Cette étude est donc issue d'un rapprochement entre une méthode rigoureuse et un phénomène turbulent. D'un côté, une approche statistique qui déduit la régularité du champ global à partir du chaos local des interactions. De l'autre, une approche fondée sur l'étude des systèmes dynamiques visant à mettre en évidence des routes génériques menant par bifurcations successives à une complexification croissante des signaux produits par le système.

Le modèle qui a permis de mêler ces deux approches est un modèle bien familier aux tenants du connexionnisme. Il utilise un formalisme classique, et son mode de fonctionnement semble bien éloigné du réalisme biologique. Et pourtant, le choix de le doter de connexions récurrentes aléatoires non symétriques en a fait un modèle neuf qui s'inscrivait dans les deux perspectives évoquées plus haut. C'est sa simplicité même qui a autorisé les développements mathématiques

les plus poussés. C'est cette même simplicité qui en fait un modèle pratique pour étudier les rapprochements possibles entre les comportements génériques de bifurcations et des hypothèses neurophysiologiques qui mettent en avant le rôle de ces bifurcations pour certains traitements cognitifs.

Un troisième élément est évidemment venu troubler le jeu : il s'agit de l'apprentissage et de la fameuse règle de Hebb. En s'ouvrant à l'apprentissage, le système est à même d'acquérir des propriétés nouvelles. D'indifférencié, il devient spécifique. D'auto-référent, il devient ouvert à son environnement. Et bien sûr, en intégrant cet apprentissage, il s'éloigne de ses fondements ; il les met en quelque sorte au défi.

Le décor est à présent posé. L'objectif de cette thèse est de décrire les propriétés nouvelles qui se manifestent sur un tel réseau lorsqu'il est soumis à une règle d'apprentissage, en présence d'un signal extérieur qui agit comme une contrainte sur la dynamique interne. Le document est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre propose un panorama des différents domaines auxquels cette étude fait appel. On y trouve des notions issues de la théorie des systèmes dynamiques, qui visent à aider à la compréhension et à l'analyse des dynamiques complexes rencontrées sur le modèle. Quelques développements y sont également proposés sur la neurobiologie, en particulier sur les hypothèses les plus récentes concernant le codage neuronal, envisagé bien sûr sous son aspect dynamique. Le chapitre se termine par une revue des modèles courants du connexionnisme, avec un développement particulier pour ceux qui ont servi de fondement à notre approche.

Le second chapitre propose une synthèse des différents résultats théoriques et expérimentaux obtenus sur le modèle étudié. Le comportement en dynamique spontanée, et en particulier la déstabilisation et l'entrée dans le chaos sont tout d'abord présentés. Les résultats mathématiques principaux, qui portent sur les observables macroscopiques du système à la limite des grandes tailles, sont présentés, et comparés aux comportements effectifs des réseaux de taille finie. Enfin, un modèle à populations excitatrices et inhibitrices est décrit, qui permet de mettre en évidence des régimes dynamiques nouveaux, et en particulier des phénomènes de synchronisation à grande échelle.

Le troisième chapitre concentre l'étude sur le modèle à une population, et montre les différentes structures dynamiques qui se mettent en place spontanément après la déstabilisation. La présentation de stimuli statiques ou séquentiels en entrée du réseau tend alors à produire une complète réorganisation de la dynamique. Le système semble capable de s'adapter spontanément à ses entrées.

Le quatrième chapitre décrit différentes règles d'apprentissage. L'une d'entre elles, fondée sur la covariance des activations, produit des changements profonds sur les régimes dynamiques. Elle permet d'associer à plusieurs motifs appris des comportements dynamiques réguliers spécifiques, et d'inscrire dans la dynamique des associations entre stimuli statiques et stimuli séquentiels.

Le cinquième chapitre présente un modèle à plusieurs populations capable

de reconstruire explicitement, grâce à sa dynamique interne, les caractéristiques spatiales et temporelles des signaux appris. Après une description de l'architecture, les possibilités de ce système sont testées pour différentes sortes de signaux d'entrée. Le modèle est pour finir appliqué à un problème concret de robotique mobile.



# Chapitre 1

## Notions préliminaires

### 1.1 Systèmes dynamiques et chaos

La prise en compte du temps dans les modèles physiques et mathématiques remonte à Galilée, qui, le premier, introduit le temps dans les modèles du mouvement. Cette introduction du temps dans les équations peut être vue comme le fondement de ce que l'on appellera plus tard l'étude des systèmes dynamiques. Jusqu'à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, une vision déterministe de l'univers prédomine. Les phénomènes décrits par la physique possèdent une réversibilité temporelle qui entre en contradiction avec l'irréversibilité de l'expérience courante [1]. Plusieurs avancées entre la fin du XIX<sup>ème</sup> et le début du XX<sup>ème</sup> siècle portent atteinte à ce modèle idéal. L'irréversibilité des processus physiques mettant en jeu un nombre élevé de particules indépendantes est mise en évidence par Boltzmann. Henri Poincaré montre l'imprédictibilité de la trajectoire d'un système déterministe à trois corps. Enfin, la mécanique quantique introduit cette imprédictibilité au cœur même de la matière, en prenant en compte l'interaction entre l'observateur et l'objet mesuré.

En quelque sorte, l'univers de la physique classique est un univers figé, pour lequel la connaissance de l'état présent (conditions initiales) permet de prédire l'état futur (la trajectoire). Les découvertes du début du siècle montrent que la flèche du temps est irréversible et que l'imprédictibilité liée à cette direction du temps est structurelle. On peut par métaphore dire que c'est le système lui-même qui effectue le *choix* de sa trajectoire. Ce terme prend une résonance particulière si le système auquel on s'intéresse est, par exemple, un être vivant. Le problème classique de la tension entre le libre arbitre du sujet et le déterminisme des modèles du monde est évoqué à de nombreuses reprises dans la littérature scientifique contemporaine [2, 3, 1].

Une nouvelle barrière tombe en 1930 avec le théorème de Gödel qui montre l'incomplétude de tout système formel axiomatique. Il existe au sein d'un système formel des propositions qui sont indécidables. La description exhaustive d'un



système axiomatique ne permet pas de le connaître entièrement [4], et celui-ci manifeste en ce sens une certaine autonomie par rapport aux prémisses qui le définissent.

L'apparition de la théorie du chaos, dans les années 60, s'inscrit dans la même perspective. Cette théorie trouve son origine dans les travaux de Poincaré, mais la véritable prise en compte du problème de l'imprédictibilité de certains systèmes déterministes date des années 60-70. Lorenz publie en 1963 un article fondateur au sein duquel il décrit le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré de modèles de l'atmosphère terrestre [5]. Selon la valeur de certains paramètres, un comportement dynamique nouveau est mis en évidence. Les trois variables d'état du système manifestent une activité erratique, imprévisible, tandis que la visualisation de la trajectoire du système dans l'espace des phases fait apparaître un attracteur dont la structure finement striée évoque les deux ailes d'un papillon. Outre l'aspect esthétique de cet attracteur, ses caractéristiques géométriques révèlent une structure nouvelle qui sera plus tard appelée fractale [6]. Ces résultats indiquent que même au sein de systèmes entièrement définis, dont on peut décrire les caractéristiques en quelques lignes, il demeure une imprévisibilité fondamentale. Les termes de "chaos" et d'"attracteur étrange" utilisés pour décrire ces phénomènes témoignent de l'étonnement de la communauté scientifique.

### 1.1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique permet la description de phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble de *variables d'état* (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. Elles permettent de définir une *fonction de transition* qui donne l'évolution des variables d'état sur un intervalle de temps  $\tau$  en fonction de l'état au temps  $t$ .

Ces variables servent le plus souvent à décrire des objets physiques, comme la position d'un point, la température d'une particule ou d'un gaz, un composé d'une réaction chimique. Par extension, elles peuvent aussi correspondre aux variables d'un algorithme dont les valeurs évoluent à chaque itération de la récursion.

Un système dynamique est défini par rapport à un environnement décrit par des variables qui n'appartiennent pas au système et dont les valeurs sont *a priori* indépendantes du système. En modélisation, on attend en général de la part de l'environnement un comportement stationnaire (source chaude, source froide, stimulation périodique, source de bruit, etc...). Si les interactions du système avec son environnement ne dépendent pas du temps, il est dit *autonome* (et dans le cas contraire non-autonome). Un système qui consomme de l'énergie (ou toute autre grandeur assimilable à une énergie) au cours du temps est dit *dissipatif*.

### Propriétés générales et définitions

Un système dynamique est défini par un triplet  $D = (X, T, \phi)$ , constitué de l'espace d'états  $X$ , du domaine temporel  $T$  et d'une fonction de transition d'état  $\phi : X \times T \rightarrow X$ , qui possède la propriété :

Pour tout  $x \in X$  et  $t, \tau \in T$ ,

$$\begin{cases} \phi(x, 0) = x \\ \phi(\phi(x, t), \tau) = \phi(x, t + \tau) \end{cases}$$

La fonction  $\phi$  décrit la façon dont le système évolue au cours du temps. Si cette fonction ne dépend pas du temps, le système est autonome. La taille de  $X$  (nombre de variables d'état) est  $N$ . On l'appelle aussi  $N$  l'ordre du système.

Le choix de l'espace temporel  $T$  est décisif, et dépend en général du phénomène que l'on souhaite modéliser. Si  $T = \mathbb{R}^+$ , le système est dit à temps continu, et si  $T = \mathbb{N}$ , le système est dit à temps discret.

- Les systèmes à temps continu servent en général à décrire l'évolution de grandeurs physiques. Une équation différentielle de type

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x(t) \in X \text{ inclus dans } \mathbb{R}^N. \quad (1.1)$$

permet de définir un système dynamique à temps continu  $D = (X, \mathbb{R}^+, \phi)$  où  $\phi$  est la solution de (1.1)

$$\phi(x, t) = \phi(x, 0) + \int_0^t F(x(s)) ds, \quad \phi(x, 0) = x. \quad (1.2)$$

- Le formalisme des systèmes à temps discret est utile, entre autres, pour décrire le comportement des systèmes de traitement de l'information comme les réseaux de neurones. Il est usuel de définir un système à temps discret à l'aide d'une application  $h : X \rightarrow X$  qui définit un système dynamique  $D = (X, \mathbb{N}, \phi)$  où  $\phi$  est donné par des itérations de  $h$

$$\phi(x, t) = h^t(x)$$

Pour la suite de ce travail, le système étudié sera un système à temps discret, c'est pourquoi nous privilégierons les notations de type temps discret pour décrire les propriétés des systèmes dynamiques.

Quelques définitions :

- Pour tout  $x \in X$ , la *trajectoire* qui a  $x$  pour origine est définie par l'application  $\phi_x : T \rightarrow X$  telle que  $\phi_x(t) = \phi(x, t)$ . Le terme *trajectoire* est issu de la physique classique dans le cas où les variables d'état sont les coordonnées d'un point matériel dans un espace à 3 dimensions. Lorsque les variables d'état représentent des grandeurs autres que des coordonnées spatiales, il est néanmoins possible de représenter les trajectoires au sein de l'espace d'état, également appelé *espace des phases*. Par ailleurs, on appelle *orbite* de  $x$  l'ensemble d'états  $\Gamma(x) = \{\phi_x(t) | t \in T\}$ .

- À l’instant  $t$ , on définit le *flot* du système par l’application  $\phi_t : X \rightarrow X$  telle que  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ . Pour les systèmes à temps discret, on a  $\phi_t = h$ .

### Attracteurs

Au sein d’un système dissipatif, tout ensemble de conditions initiales appartenant à un volume donné converge vers un ensemble de volume nul, appelé attracteur. Un *attracteur* est défini comme :

- Un ensemble  $A \subset X$  de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l’espace d’état qui appartient à un attracteur demeure à l’intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .
- Il existe un ensemble  $B \supset A$ , tel que pour tout voisinage de  $A$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se retrouve au bout d’un temps fini dans ce voisinage de  $A$ . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans  $B$  tend à converger vers l’attracteur. Cette “zone d’influence” est appelée *bassin d’attraction*.
- Un attracteur est indécomposable, c’est à dire que la réunion de deux attracteurs n’est pas un attracteur.

Il faut noter qu’en fonction du système, l’attracteur peut être un point, un cycle limite, un tore, ou avoir une structure encore plus complexe de type fractale, auquel cas on parle d’attracteur étrange. Lorsque l’attracteur est un point, on parle de *point fixe* : le système dynamique tend à se comporter de manière statique. Lorsque l’attracteur est un *cycle limite*, le système présente un comportement oscillatoire qui se maintient sur le long terme. Lorsque l’attracteur est étrange la trajectoire sur l’attracteur est complexe et manifeste la propriété de *sensibilité aux conditions initiales* (voir paragraphe suivant).

Si le système possède un seul attracteur, le bassin d’attraction est l’espace d’état tout entier  $X$ . Si plusieurs attracteurs existent au sein de l’espace d’états, les variétés qui marquent la frontière entre deux bassins sont les *séparatrices*.

#### 1.1.2 Le chaos déterministe

La notion de chaos déterministe, qui trouve ses fondements dans l’article de Lorenz [5], a connu un développement mathématique dans les années 70 [7] suivi d’un véritable essor scientifique et populaire dans les années 80. Le chaos marque un profond bouleversement dans la manière d’envisager les systèmes dynamiques. Le développement de l’informatique n’est pas étranger au succès rencontré, de par la facilité des simulations et la beauté de certains résultats obtenus.

On dit qu’un système dynamique est chaotique s’il présente la propriété de *sensibilité aux conditions initiales* (SCI). Plus précisément, pour presque tout couple de conditions initiales dont la distance à l’initialisation est  $d_1$ , il existe un temps fini au bout duquel les deux trajectoires seront éloignées d’une distance supérieure à  $d_2$ ,  $d_2$  étant de l’ordre du diamètre de l’attracteur étrange.

Dans le cas où le système est chaotique et déterministe (sans bruit), la propriété de SCI se traduit par le fait que la distance entre deux trajectoires tend à augmenter de manière exponentielle au cours du temps, pouvant atteindre une distance limite qui est de l'ordre du diamètre de l'attracteur (au delà d'un certain horizon temporel, le repliement des trajectoires imposé par le caractère borné de l'espace d'états stoppe la divergence exponentielle).

Dans le cas où le système dynamique vise à modéliser un phénomène physique, la propriété de SCI montre la difficulté à prédire le comportement de ce phénomène. En effet, toute mesure effectuée sur une grandeur physique contient un bruit de mesure qui fait que la trajectoire du système modélisé et celle du système réel divergeront au bout d'un temps fini. Aussi précise que soit la modélisation, il est impossible de prédire le comportement du système réel à long terme. On peut ajouter que l'observateur, en effectuant sa mesure, influence nécessairement le système qu'il souhaite modéliser, et modifie donc sa trajectoire : on retrouve un paradoxe du type quantique, mais pour des phénomènes macroscopiques.

Il est intéressant de noter que le chaos déterministe apparaît sur des systèmes à petit nombre de variables d'état (au moins trois). Une condition nécessaire à l'apparition du chaos est que le système soit *non linéaire*. C'est la complexité des dynamiques produites par des systèmes dont la définition tient en trois lignes qui a dans un premier temps étonné les chercheurs, et suscité l'essentiel des travaux entrepris sur la question. Pour des systèmes dont le nombre de variables d'état est élevé, l'étude s'est développée plus tardivement.

### Attracteurs étranges

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé *attracteur étrange*. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Un attracteur étrange manifeste les propriétés suivantes :

- Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).
- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement aperiodique.
- Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (SCI).

Toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur. Le système est contraint à évoluer de manière "imprévisible" dans une région bien définie de l'espace des phases.

## Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dits "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. Ces scénarios sont décrits, par exemple, dans [8]. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus appelés *bifurcations*. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. Avant de décrire les routes vers le chaos, on présente dans un premier temps quelques exemples de bifurcations correspondant à la déstabilisation d'un point fixe.

**Linéarisation au voisinage d'un point fixe** On considère un système dynamique à temps discret, pour lequel la fonction de transition est définie à l'aide de l'application  $h$ , supposée non linéaire. On considère un point fixe attracteur  $x^*$ , et on étudie le comportement du système au voisinage de ce point fixe lorsque l'on modifie continûment le paramètre de contrôle  $g$ .

À proximité d'un point fixe, on peut linéariser la récurrence en négligeant les termes du second ordre. L'application linéarisée  $D(x^*)$  s'appelle la *jacobienne* du point considéré. Elle décrit de façon satisfaisante le comportement du système au voisinage de ce point :  $x(t+1) \simeq D(x^*)x(t)$ .

L'évolution de la jacobienne au point fixe, lorsque l'on modifie continûment le paramètre de contrôle  $g$ , nous donne des indications précieuses sur les caractéristiques du flot au voisinage du point fixe : rotations et homothéties dans les différentes directions de l'espace. Lorsque l'on calcule les valeurs propres de la Jacobienne, on obtient pour chaque direction propre une transformation de type rotation/homothétie <sup>1</sup>.

Si, au voisinage du point fixe, toutes les valeurs propres de la jacobienne ont une norme inférieure à 1, alors toutes les directions sont contractantes : la distance entre deux points successifs de la récurrence tend à diminuer, au fur et à mesure qu'ils se rapprochent du point fixe.

Lorsque l'on modifie continûment le paramètre de contrôle  $g$ , on trouve dans de nombreux systèmes une valeur  $g_c$  critique au delà de laquelle il existe un couple de valeurs propres complexes conjuguées (ou une valeur propre réelle unique) dont la norme dépasse la valeur 1. Cette valeur  $g_c$  constitue un point de bifurcation. Au

<sup>1</sup>les valeurs propres étant des complexes, la norme de la v.p. donne la dilatation et l'angle de la v.p. par rapport à l'axe des réels donne la vitesse de rotation. Le système étant réel, les v.p. vont par paires : si une valeur propre est présente dans le spectre, sa conjuguée l'est également.

delà de ce point, le système tend à dilater la trajectoire : deux points successifs de la trajectoire tendent à s'éloigner. Dans le cas d'un système linéaire, l'application divergerait. Dans le cas d'un système non-linéaire, les termes de degré supérieur à 1 cessent d'être négligeables et contraignent la trajectoire à rester dans une région finie de l'espace d'états (repliement).

Dans le cas d'un système à temps discret générique, 3 cas peuvent se produire [9] :

- **Les deux valeurs propres sont complexes conjuguées.** On a alors une *bifurcation de Hopf*. La dynamique atteint un régime périodique (ou pseudo périodique) dont l'angle de rotation est donné par l'angle formé entre une de ces valeurs propres et l'axe des réels. L'orbite de la trajectoire décrit alors une courbe fermée dans l'espace des phases appelée *cycle limite*. C'est la bifurcation la plus fréquemment rencontrée dans ce genre de système.
- **La valeur propre est réelle et vaut 1 au point de bifurcation.** Selon le système, différentes bifurcations peuvent se produire : bifurcation nœud-col, bifurcation fourche, bifurcation transcritique. Ces bifurcations se caractérisent par la déstabilisation du point fixe initial et l'apparition d'un ou plusieurs autres points fixes stables.
- **La valeur propre est réelle et vaut -1 au point de bifurcation.** On a une bifurcation *flip*. Cette bifurcation se caractérise par un régime oscillant de période 2. Elle correspond en fait à une bifurcation de Hopf dont l'angle de rotation vaut exactement  $\pi$ .

Ainsi, les bifurcations de Hopf et flip mènent à un comportement dynamique et les bifurcations d'un autre type provoquent l'apparition de nouveaux points fixes stables.

**Route vers le chaos par quasi-périodicité** La route vers le chaos par quasi-périodicité est un des scénarios génériques marquant le passage du point fixe au chaos. Elle met en jeu une série de bifurcations menant à des dynamiques de plus en plus complexes. On peut, pour simplifier l'exposé, considérer que toutes les bifurcations sont des bifurcations de Hopf.

On a vu que lors d'une bifurcation de Hopf, l'angle  $\alpha$  formé entre deux points successifs de la trajectoire prend continûment ses valeurs entre 0 et  $\pi$ . Dans le cas où l'angle est une fraction rationnelle de  $\pi$ , la trajectoire passe par un nombre fini de points, et repasse au bout d'un temps fini par le même point. Cette trajectoire est strictement périodique. Dans le cas le plus général où l'angle n'est pas une fraction rationnelle de  $\pi$ , le cycle est densément couvert, et la trajectoire ne repasse jamais par le même point. La trajectoire est alors dite *pseudo-périodique*. C'est le type de trajectoire couramment rencontré après une première bifurcation de Hopf.

À chaque bifurcation, une nouvelle périodicité se superpose à celle qui est déjà en place. Selon le nombre de fréquences présentes dans le spectre, on parle en effet

de tore  $\mathcal{T}1$  (cycle limite), de tore  $\mathcal{T}2$  (2 cycles superposés), de tore  $\mathcal{T}3$  (3 cycles superposés), etc ... Partant d'un point fixe, deux bifurcations de Hopf successives mènent ainsi à une dynamique qualifiée de *tore*  $\mathcal{T}2$ . Ce tore correspond à une surface fermée dans l'espace des phases, densément couverte par les points de la dynamique. On voit donc se dessiner un scénario par bifurcations successives :

Point fixe  $\rightarrow$  Cycle limite  $\rightarrow$  Tore  $\mathcal{T}2$   $\rightarrow$  Tore  $\mathcal{T}3$   $\rightarrow$  etc...

Néanmoins, au fur et à mesure que la dynamique se complexifie, une tendance à l'*accrochage de fréquence* (ou résonance) se manifeste.

Lorsque la dynamique est un tore  $\mathcal{T}2$  engendré par deux cycles limites, les deux cycles en présence tendent à entrer dans un rapport rationnel, c'est à dire à se synchroniser. Cette tendance à l'accrochage devient de plus en plus forte au fur et à mesure que l'on fait évoluer le paramètre de contrôle dans le sens qui conduit à plus de complexité. Le passage du tore à l'accrochage de fréquence ne constitue pas à proprement parler une bifurcation, car la dynamique n'est pas qualitativement modifiée. Simplement, le rapport entre les deux fréquences principales de l'attracteur est un rapport rationnel, et le tore n'est plus densément parcouru. La probabilité pour que les deux fréquences se trouvent dans un rapport rationnel augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche de la frontière du chaos (et vaut 1 à la frontière du chaos). L'accrochage de fréquence est générique, bien décrit sur des applications simples telles l'application d'Arnold [10]. Il précède de peu une nouvelle bifurcation qui fait basculer la dynamique dans un régime chaotique.

Le scénario par cascade de bifurcations est ainsi court-circuité par l'accrochage de fréquence et l'irruption du chaos. On a alors le scénario générique :

Point fixe  $\rightarrow$  Cycle limite  $\rightarrow$  Tore  $\mathcal{T}2$   $\rightarrow$  Accrochage de fréquence  $\rightarrow$  Chaos

Ce modèle de route vers le chaos est celui auquel on fera référence plus loin. (route par quasipériodicité dite à la Ruelle-Takens [7]). Il en existe d'autres, comme par exemple la route vers le chaos par doublement de période et les intermittences [8].

### Généricité et fonctionnalité du chaos

Les systèmes chaotiques se distinguent des systèmes purement stochastiques par le fait qu'ils présentent certaines régularités, et n'explorent hors transitoires qu'une faible part de leur espace d'états. La structure fractale de l'attracteur manifeste, en dépit de sa complexité, une forme d'organisation. En ce sens le mot *chaos* est mal choisi.

Une des propriétés les plus remarquables des systèmes chaotiques est leur capacité à adapter leur comportement/trajectoire en fonction des perturbations ou stimulations extérieures. Dans le domaine de la biologie particulièrement, il

semble prouvé que la dynamique chaotique de certains organes, tels le cœur, leur assure une bonne adaptabilité à une brusque sollicitation. Pour ce qui concerne le cerveau, par analogie, une dynamique de nature chaotique serait propice à une adaptabilité rapide à de brusques changements sur les signaux sensoriels.

Il y a néanmoins un contresens à éviter lorsque l'on utilise la notion de chaos dans l'étude de systèmes complexes tels que le cerveau. On a vu en effet que des dynamiques chaotiques d'aspect complexe pouvaient être produites par des systèmes intrinsèquement simples. Le cerveau est quant à lui un système intrinsèquement complexe. La question de la transposition à ce type de systèmes de notions issues de l'étude de systèmes à nombre très restreint de degrés de liberté pose question. Par ailleurs, même s'il apparaît probable que le chaos intervient au sein de l'activité cérébrale, il n'en explique pas pour autant la complexité de la cognition elle-même. Néanmoins, cette intervention probable du chaos dans la cognition naturelle justifie qu'on le prenne en compte dans la modélisation de processus cognitifs.

### 1.1.3 Outils numériques

Les systèmes présentant des comportements chaotiques sont faciles à modéliser sur ordinateur. Leur implication dans des processus naturels a été mise en évidence à de nombreuses reprises, dans l'étude des populations animales et des écosystèmes, en météorologie, en économie, en chimie... Néanmoins, leur caractérisation sur la base de mesures telles que des séries temporelles est extrêmement délicate en pratique.

On décrit ci-dessous un certain nombre d'outils graphiques et numériques qui seront utilisées dans ce document pour caractériser des séries temporelles.

#### Application de premier retour

Pour voir certains films en relief, il est usuel d'utiliser des "lunettes" spéciales. Il en va de même avec les systèmes à dynamiques complexes. Plutôt que de représenter le signal sur l'axe temporel, on a coutume de visualiser la dynamique du système dans l'*espace des phases* qui associe un axe à chacune des variables d'état. Dans un système à temps continu, toute trajectoire dessine une courbe continue dans cet espace. Dans un système à temps discret, la trajectoire est constituée d'un ensemble de points. Si le système contient  $N$  variables d'état (soit  $N$  dimensions), cette représentation est hors de portée dès que  $N > 3$ . On peut bien sûr représenter des projections de cette trajectoire sur certains axes, mais en faisant cela on perd quelques propriétés géométriques (intersections).

Dans un système à temps continu, on a souvent recours à la section de Poincaré, ou application de premier retour, qui repose sur une discrétisation de la trajectoire. Si on considère une surface de l'espace de phases qui coupe la trajectoire, chaque point qui constitue l'intersection de la trajectoire avec cette surface



peut être associé au point d'intersection suivant. Dans les systèmes à temps discret, pour une variable d'état  $x$ , l'application de premier retour consiste plus simplement à associer  $x(t)$  à  $x(t-1)$  :

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x(t-1) \rightarrow A(x(t-1)) = x(t)$$

On a de la sorte une représentation en deux dimensions, qui permet de décrire la trajectoire "individuelle" de la variable  $x$  dans un pseudo-espace reflétant plus ou moins les propriétés topologiques de l'espace de phase.

### Transformation de Fourier

Considérons un échantillon pour  $t = 1..T$  d'un signal  $s(t)$ , mono dimensionnel discret. L'intervalle entre deux valeurs successives est pris comme unité de temps. On souhaite connaître les caractéristiques de périodicité les plus significatives de ce signal.

Au signal  $s$  correspond le spectre défini par :

$$\hat{s}(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=1}^T s(t) e^{-i \frac{2\pi f t}{T}}$$

Le coefficient  $\hat{s}(f)$  doit être associé à la fréquence  $f = \frac{k}{T}$ , à laquelle correspond la période ou pseudo période  $\tau = \frac{T}{k}$ .

Le spectre de puissance est donné, pour tout  $t$  par :

$$S(f) = |\hat{s}(f)|^2$$

où  $|\cdot|$  est la norme complexe. Le spectre de puissance donne pour toute valeur de la fréquence la puissance transportée par cette fréquence. Le terme "puissance" se rapporte à une énergie moyenne transportée par unité de temps, dans l'hypothèse où l'on peut associer un terme d'énergie au carré de l'amplitude du signal.

On a la propriété  $S(f) = S(1-f)$ . Sur un échantillon discret de taille  $T$ , le spectre nous donne les fréquences les plus saillantes du signal, comprises entre  $\frac{1}{T}$  (période  $T$ ) et  $\frac{1}{2}$  (période 2). Le spectre de Fourier nous fournit une valeur approchée (avec une précision de l'ordre de  $1/T$ ) de la fréquence principale et des fréquences secondaires du signal.

On représente souvent le spectre de puissance avec en abscisse la fréquence et en ordonnée la valeur de la puissance exprimée selon une échelle logarithmique (ce qui permet de mieux voir les continuités et discontinuités du spectre). La valeur de la puissance est divisée par la longueur de l'échantillon, et se ramène donc à l'énergie transportée en moyenne sur un pas de temps.

### Fonction d'auto-corrélation

Considérons un échantillon pour  $t = 1..T$  d'un signal  $s(t)$ , mono dimensionnel discret. Pour  $\tau = 1..T$ , et en posant  $s(t+T) = s(t)$ , la fonction d'auto-corrélation du signal  $s$  est donnée par :

$$\psi(\tau) = \frac{1}{T\sigma_s^2} \sum_{t=1}^T (s(t) - \bar{s})(s(t+\tau) - \bar{s})$$

où  $\bar{s}$  représente la moyenne empirique et  $\sigma_s$  l'écart-type du signal  $s$ .

La fonction d'auto-corrélation mesure les corrélations moyennes associées à des états séparés par un intervalle de temps  $\tau$ . On voit donc que pour un signal périodique, l'auto-corrélation vaut 1 pour toute valeur de  $\tau$  multiple de cette période. Dans le cas d'un signal pseudo-périodique, l'auto-corrélation est proche de 1 pour toute valeur de  $\tau$  (entière) se rapprochant d'un multiple de la période dominante (réelle).

Dans le cas de signaux apériodiques ou à périodicité résiduelle, la fonction d'auto-corrélation permet de savoir dans quelle mesure un état passé influence l'état présent. Pour un signal purement aléatoire, la fonction d'auto-corrélation attachée à tout état passé tend vers zéro avec la taille de l'échantillon : le système est "sans mémoire".

### Nombre de rotation

Étant donné un signal  $s(t)$ , on appelle *nombre de rotation*  $f$  la quantité  $f = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}$ , où  $\bar{\alpha}$  est l'angle moyen formé entre des triplets de points successifs de la dynamique, sur toute la trajectoire dans l'espace des phases. Si  $s(t)$  est mono dimensionnel, le nombre de rotation est également défini dans l'espace de premier retour, auquel cas les coordonnées des points des triplets sont  $(s(t), s(t+1))$ ,  $(s(t+1), s(t+2))$ ,  $(s(t+2), s(t+3))$ .

Pour une dynamique cyclique, 2 cas se présentent :

- Si  $f$  est rationnel, le cycle est accroché et la dynamique passe par un nombre fini de valeurs. Sa périodicité est une valeur entière, donnée par le dénominateur de  $f$ . Le numérateur de  $f$  donne le nombre de tours effectués sur l'attracteur avant de rejoindre le point de départ (voir figure 1.1).
- Si  $f$  est irrationnel, on parle de *pseudo-périodicité*. La période  $\tau$  est une valeur réelle irrationnelle. C'est ce type de dynamique cyclique que l'on obtient lorsque la première bifurcation est une bifurcation de Hopf. Si l'on regarde de quelle manière les points parcourent le cycle sur l'intervalle d'une pseudo-période, on voit qu'ils décrivent un tour presque complet, au terme duquel ils rejoignent un voisinage du premier point observé. Ce petit décalage se répercute sur le tour suivant de sorte qu'en fin de compte, si l'on prend suffisamment de points, on voit apparaître la forme du cycle complet (le cycle est densément couvert, voir figure 1.2).

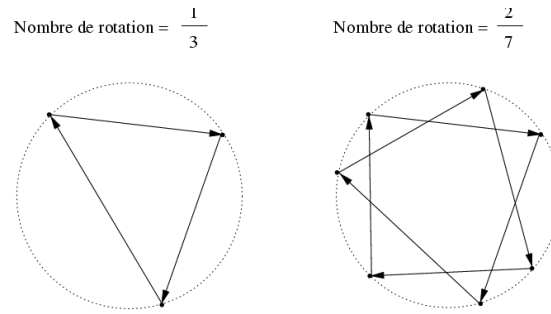


FIG. 1.1 – Exemples de valeurs du nombre de rotation, dans le cas de dynamiques périodiques. À gauche : période=3, nombre de tours=1. À droite : période=7, nombre de tours=2.

Enfin, la valeur de la période (cas rationnel) ou de la pseudo-période (cas irrationnel) est exactement l'inverse du nombre de rotation. La plus petite valeur entière supérieure à la pseudo-période nous donne le nombre de pas de temps nécessaires pour faire un tour complet de l'attracteur.

### Exposants de Lyapunov

La SCI peut être mesurée par les exposants dits de Lyapunov. Le principe de cette méthode est de mesurer à quelle vitesse deux trajectoires appartenant à l'attracteur vont diverger selon plusieurs directions de l'espace d'état. En supposant que l'on connaisse ces directions, il est possible d'associer pour chacune d'elles un exposant  $\lambda_i$  tel que dans la direction considérée, la distance entre les deux trajectoires évolue proportionnellement à  $e^{\lambda_i t}$ . Si l'exposant est négatif, les deux trajectoires tendent à se rapprocher à vitesse exponentielle dans cette direction. Si l'exposant est nul, l'évolution de la distance est gouvernée par des termes plus lents, de type polynomial. Si l'exposant est positif, les deux trajectoires tendent à s'éloigner à vitesse exponentielle dans cette direction.

Les points fixes stables ont uniquement des exposants strictement négatifs. Les cycles limites ont un exposant nul, et les autres sont négatifs. Les tores  $\mathcal{T}^2$  ont deux exposants nuls, et les autres sont négatifs. Si la dynamique possède au moins un exposant positif, alors il existe une direction pour laquelle deux conditions initiales produiront des trajectoires qui tendent à s'éloigner à une vitesse exponentielle. Un exposant positif marque ainsi la sensibilité aux conditions initiales, donc le caractère chaotique de la dynamique. On peut noter qu'une dynamique possédant plusieurs exposants de Lyapunov positifs est qualifiée d'*hyperchaotique* (ou de chaos profond).

Pour la mise en œuvre numérique, il est bon de noter que lorsque  $t$  augmente, l'exponentielle qui correspond à l'exposant le plus grand finit toujours par l'emporter sur tous les autres. Grâce à ce fait, on peut, sur un système chaotique, déterminer le plus grand exposant de Lyapunov sans forcément connaître tous les

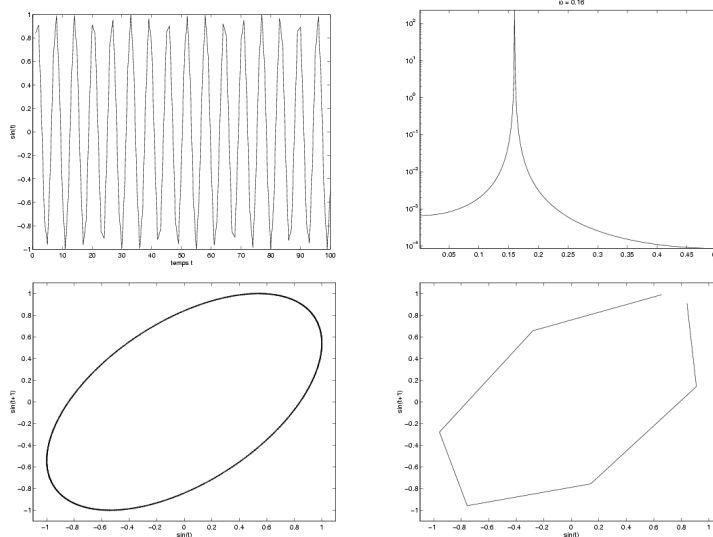


FIG. 1.2 – **Différentes représentations d'un même signal  $s(t)$ .** On a pris pour cet exemple un signal pseudo-périodique  $s(t) = \sin(t)$  (n'oublions pas que  $t$  est discret!). Le diagramme en haut à gauche donne le signal temporel sur 100 pas de temps. On a en haut à droite le spectre de puissance de ce signal, sur lequel la fréquence fondamentale est proche de  $\frac{1}{2\pi}$ , correspondant à une pseudo-période  $\tau = 2\pi \simeq 6.28$ . Le diagramme de premier retour du signal  $s(t)$  est donné en bas à gauche, tracé à partir de 1000 points de la dynamique. On voit en particulier que le cycle est densément couvert. En bas à droite, on a représenté 6 points successifs reliés par des lignes. On voit qu'après 6 pas de temps, le point de la trajectoire se retrouve à proximité du point initial.

autres, en mesurant le taux de croissance de la distance entre deux trajectoires initialement proches sur un intervalle de temps suffisamment long.

Ainsi, si on a deux trajectoires  $s_1$  et  $s_2$  appartenant au voisinage de l'attracteur telles que la distance  $d(s_1(t_0), s_2(t_0)) = \varepsilon$ , et que l'on itère la dynamique sur  $T$  pas de temps, le plus grand exposant de Lyapunov est estimé localement comme :

$$\lambda_{\max} \simeq \frac{1}{T} \ln \left( \frac{d(s_1(t_0 + T), s_2(t_0 + T))}{\varepsilon} \right)$$

Pour  $T, \varepsilon$  finis, on a donc une limitation sur les valeurs de  $\lambda_{\max}$  que l'on peut calculer.

## 1.2 Neurophysiologie

Le règne animal (par opposition aux végétaux, champignons, bactéries) est caractérisé par la capacité de mouvoir un organisme composé de quelques milliers à plusieurs centaines de milliards de cellules. Cette capacité repose sur la présence

d'un réseau complexe de cellules nerveuses qui permettent de coordonner tout le système moteur. Par ailleurs, différents capteurs sensoriels réagissent à certaines données physiques de l'environnement et transmettent cette réaction au réseau sous forme d'influx nerveux. On voit donc le double rôle du système nerveux, à la fois pour la transmission de l'information motrice (coordination des mouvements) et la transmission de l'information sensorielle.

Le maintien de l'intégrité physique de l'organisme et la recherche de nourriture et de partenaires sexuels nécessite de prendre en compte les données de l'environnement dans la mise en œuvre de l'action. Dans la mesure où l'environnement présente un certain degré de permanence, il existe des stratégies d'actions menant plus sûrement aux buts recherchés lorsque certaines entrées sensorielles sont présentes. Ainsi, selon un objectif de survie de l'individu, le système nerveux inclut des couplages entre des influx sensoriels et des actions. Certains stimuli entraînent préférentiellement certaines actions. La nature des actions engagées expriment les *choix* (ou prises de décision) de l'organisme.

Si les canaux sensoriels sont nombreux et précis, le réseau nerveux gagne en efficacité s'il possède un lieu qui centralise et intègre toutes ces données afin d'effectuer à la fois un tri sur ces données, entre celles qui sont intéressantes et celles qui sont indifférentes, et un choix d'action en fonction des données pertinentes. Ce noyau central constitue le cerveau. Il atteint chez certains organismes, en particulier l'homme, un degré de complexité extrême.

La complexité du cerveau de nombreux organismes évolués ne peut être codée exclusivement dans le génôme. L'évolution naturelle a favorisé l'apparition d'un système qui permet d'adapter les couplages aux données de l'expérience. Les couplages, qui déterminent le choix des actions à produire, ne sont pas figés à la conception. Selon la réussite ou l'échec des actions tentées, un système d'évaluation de ces actions conduit à les favoriser (ou à les défavoriser) en modifiant en conséquence la valeur des couplages. C'est dans le cadre de cette évolution que l'on peut parler de *mémorisation* (l'action passée influence l'action future).

Tout comportement cognitif s'inscrit ainsi dans un ensemble de choix, dans le cadre d'interactions avec l'environnement, et dans l'évolution qui conduit à affiner ces choix (on peut aussi parler de co-évolution de l'organisme et de son environnement [3]).

Les connaissances actuelles sur le système nerveux portent principalement sur le fonctionnement de la cellule nerveuse elle-même. La compréhension du fonctionnement du réseau reste pour l'essentiel l'objet de conjectures. L'affinement progressif des techniques d'observation du cerveau, ainsi que le développement de modèles mathématiques pour le traitement distribué de l'information, permettent néanmoins de lever quelques voiles sur la nature et la fonction des interactions entre neurones (et entre groupes de neurones). Les sections qui suivent proposent une revue rapide des acquis et des hypothèses concernant le fonctionnement du cerveau.

### 1.2.1 Fonctionnement de la cellule nerveuse

#### Transmission de l'influx nerveux

Le neurone est l'élément fonctionnel de base du système nerveux. Il peut être considéré à la fois comme un relais de transmission et une unité de traitement de l'information (capable de réagir sélectivement à ses entrées).

La cellule nerveuse est constituée de trois parties : le *soma* qui contient le noyau, les *dendrites* qui forment une arborisation autour du soma, et l'*axone* qui est un prolongement le plus souvent de grande taille au bout duquel on trouve une arborisation qui entre en contact avec les dendrites d'autres neurones via des *boutons synaptiques*. Sur un seul neurone, les terminaisons synaptiques afférentes peuvent être très nombreuses (jusqu'à 10000). L'ensemble de la cellule est chargé négativement sur sa paroi interne et positivement sur sa paroi externe.

La transmission d'un signal d'un neurone à l'autre implique à la fois des processus électriques et des processus chimiques. L'ensemble des phénomènes physiologiques mis en jeu est assez complexe.

Lorsqu'un potentiel d'action (*spike*) est émis par le neurone, il transite le long de l'axone sans perdre en intensité. Il peut ainsi avoir un effet à grande distance du neurone, d'un hémisphère à l'autre ou des centres moteurs aux muscles. La rapidité de l'influx nerveux dépend de la myélinisation de l'axone (un axone myélinisé transmet l'information environ 10 fois plus vite).

Il existe au niveau des synapses des canaux ioniques qui laissent transiter les ions, ce qui tend à dépolariiser naturellement la membrane. Plus ces canaux sont ouverts, plus la tendance à la dépolariisation est forte. La transmission de l'influx nerveux s'effectue au sein du complexe synaptique : le bouton synaptique libère des neurotransmetteurs qui viennent se fixer sur des récepteurs. Ces récepteurs activent des canaux qui s'ouvrent et laissent circuler un plus grand nombre d'ions dans le cas d'une *synapse excitatrice*, ce qui tend à produire une dépolariisation, où au contraire ferment totalement le passage dans le cas d'une *synapse inhibitrice*, ce qui tend à produire une hyperpolarisation. Chaque synapse produit une modification locale et quantifiée du potentiel de membrane du neurone récepteur.

Plus la synapse est éloignée du soma, moins la dépolariisation locale tend à influencer le potentiel du soma : il y a déperdition. On voit donc que la prise en compte de l'influx afférent est *pondéré* par la distance au soma (les différentes entrées sont différenciées).

Lorsque la dépolariisation interne à la cellule atteint une valeur *seuil*, il y a émission d'un potentiel d'action dont l'intensité est fixe. On a donc une réponse de type binaire : c'est une réponse *non-linéaire*. Si la dépolariisation se maintient, des trains de potentiels d'action sont émis, dont la fréquence dépend de l'intensité de la dépolariisation.

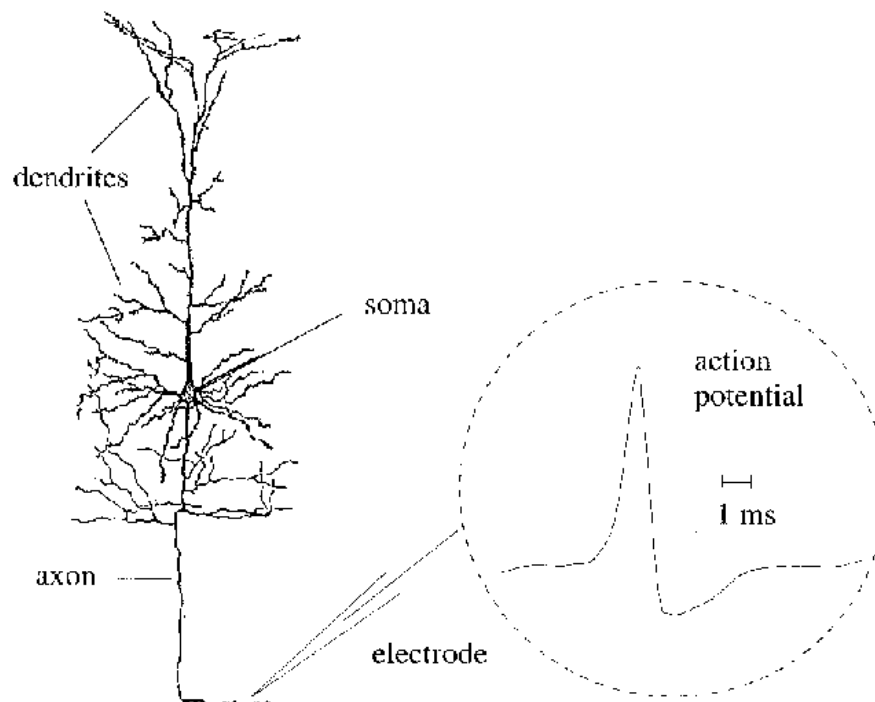


FIG. 1.3 – Neurone et potentiel d’action. (Extrait de [11])

### Adaptation synaptique

Pour que le système soit capable d’apprendre, il faut une modification durable du couplage entre les neurones. Ce couplage repose sur l’efficacité de la liaison synaptique, c’est à dire la facilité avec laquelle le neurone pré-synaptique peut influencer l’activation du neurone post-synaptique.

Les premières hypothèses sur l’adaptation synaptique ont été formulées par Hebb en 1949 [12]. Sur la bases de données comportementales, il propose une règle de renforcement synaptique fondée sur l’activité du neurone pré-synaptique et du neurone post-synaptique. Selon lui, l’influence de la synapse est augmentée lorsque les neurones pré-synaptique et post-synaptique sont actifs simultanément. Ceci pourrait expliquer pourquoi deux stimuli pré-synaptiques concomitants (mais non nécessairement liés causalement) tendent à être associés dans un même comportement (à l’exemple du chien de Pavlov, conditionné pour associer le son d’une cloche à la présentation d’un repas, qui se met à saliver lorsque l’on fait résonner la cloche seule).

*“Quand un axone de la cellule A est assez proche pour exciter une cellule B et quand, de façon répétée et persistante, il participe à son activation, un certain processus de croissance, ou un changement métabolique s’installe dans une cellule ou dans les deux tel que l’efficacité de A, en tant qu’elle est une des cellules qui active B, est augmentée.”*

– D. Hebb – traduit dans [13]

En 1973, l'intuition de Hebb est confirmée expérimentalement par la mise en évidence d'un processus de potentiation à long terme (*Long term potentiation*) dans l'hippocampe [14]. En excitant électriquement un chemin d'activation existant, ces auteurs constatent que celui-ci tend à se renforcer, c'est à dire que l'excitation ultérieure du même chemin tend à produire une réponse plus intense. Ce phénomène se maintient de plus sur une longue durée.

Le mécanisme sous-jacent met en jeu des récepteurs spéciaux : les récepteurs NMDA qui ouvrent les canaux ioniques (à calcium) lorsqu'il y a à la fois libération du neurotransmetteur et dépolarisation du récepteur. Cette ouverture de canaux ioniques tend par ailleurs à augmenter durablement la puissance des canaux ioniques associés à d'autres récepteurs : récepteurs AMPA. La synapse est donc renforcée à long terme.

On peut rajouter un point à la règle de Hebb : une activité pré-synaptique forte qui n'entraîne pas d'activité sur le neurone post-synaptique a pour effet de désactiver la synapse. Il existe de même des mécanismes de dépression à long terme (LTD) qui se mettent en place lorsqu'une stimulation synaptique n'est pas suivie par une dépolarisation du récepteur.

Ces mécanismes ne sont peut-être pas les seuls impliqués dans l'apprentissage, mais leur généralité et leur présence au niveau de la plupart des synapses du cerveau laissent à croire qu'ils y jouent un rôle décisif.

## Adaptation neuronale

Nous avons présenté le mécanisme de la potentiation à long terme pour montrer que le neurone, contrairement à un composant électronique par exemple, est capable de modifier les caractéristiques de sa réponse selon le contexte. La cellule nerveuse possède donc une capacité d'*adaptation*.

Il existe plusieurs mécanismes d'adaptation, que l'on peut classer selon leur permanence dans le temps :

- *Croissance synaptique et dégénérescence sélective des liens et des neurones* : lors de la genèse du système nerveux, au stade embryonnaire et pendant la petite enfance, les cellules nerveuses se multiplient par division cellulaire et les axones et les dendrites se développent à partir du corps cellulaire. Cette étape de croissance est suivie par une étape de dégénérescence sélective au cours de laquelle de nombreux neurones meurent et de nombreuses liaisons disparaissent. Cette disparition massive de liens et de neurones est nécessaire à la mise en place d'une organisation de haut niveau qui définit les chemins de communication entre groupes de neurones ainsi que la spécialisation de ces différents groupes de neurones. Il est important de noter que cette architecture de connexion n'est pas donnée par avance dans le détail, mais nécessite une interaction permanente avec l'environnement. Elle se construit sous la double contrainte des structures anatomiques et de la réussite ou de



l'échec des actions menées dans l'environnement. Une fois que les grandes structures de connexion sont mises en place, elles tendent à se figer, et à se maintenir pendant toute la vie de l'individu.

- *Adaptation à long terme* : ce type d'adaptation met en jeu une modification durable (de quelques jours à quelques années) de l'efficacité des terminaisons synaptiques. Il n'y a donc pas de modification de l'architecture de connexion. La potentiation à long terme est l'un de ces mécanismes, mais on peut supposer que ce n'est pas le seul. L'adaptation à long terme joue probablement un rôle central dans la mémorisation de l'expérience.
- *Adaptation à court terme* : l'adaptation à court terme doit permettre de mettre en place rapidement des comportements pertinents dans la situation présente. L'hypothèse qui nous guidera tout au long de cette thèse est que l'adaptation à court terme repose sur des processus dynamiques. On peut donc parler d'*adaptation dynamique*. Les neurones peuvent modifier fortement leur rôle et leur façon de communiquer selon les caractéristiques de l'environnement. Un même ensemble de neurones possède potentiellement plusieurs configurations dynamiques, et peut évoluer de l'une à l'autre selon le contexte.

### 1.2.2 Structures anatomiques

Cette section présente, sans recherche d'exhaustivité, quelques structures anatomiques qui seront évoquées à plusieurs reprises au cours de ce document.

#### Quelques données quantitatives

La complexité du réseau constitué par les neurones du cerveau humain est gigantesque et dépasse de très loin toute simulation informatique envisageable. Le cerveau est constitué d'environ 100 milliards de neurones connectés chacun en moyenne à 10.000 partenaires.

Il apparaît presque impossible d'estimer la quantité d'information contenue dans le cerveau, mais celle-ci semble de très loin supérieure à celle contenue dans le code génétique. Toute l'information sur les connexions n'est donc pas présente dans le code. Il est alors probable, comme discuté dans [15] et [16], que le schéma de connectivité fine dans le cerveau de l'embryon soit essentiellement aléatoire.

C'est donc l'ensemble des règles d'adaptation qui permet de construire petit à petit l'intelligence. Cette hypothèse nourrit bien sûr les espoirs de toute personne qui se penche sur la conception de réseaux de neurones artificiels, si l'on pense que l'intelligence se construit en grande partie par les interactions de l'individu avec son environnement. La difficulté consiste à trouver la bonne règle d'apprentissage, qui permette à la "machine à apprendre" de construire son intelligence à travers son expérience.

## Structures anatomiques globales

Chez les animaux évolués, comme les mammifères par exemple, le cerveau est composé des mêmes structures anatomiques. Les changements qui interviennent entre différentes espèces, dont l'homme, sont d'ordre quantitatif. Le cerveau possède deux hémisphères, et les différentes parties qui le composent sont emboîtées, avec les fonctions les plus primitives au centre et les fonctions les plus élaborées à la surface.

Au coeur de la structure, on trouve le tronc cérébral. C'est là que sont régulées les fonctions vitales essentielles, telles que la respiration, les battements cardiaques, les cycles du sommeil. De petites structures comme l'hypothalamus et l'hypophyse sont spécialisées dans la production d'hormones et de neurotransmetteurs qui règlent les états tels que la faim, la soif et le désir sexuel, ainsi que des humeurs telles que la colère, la peur, le plaisir.

Le cervelet possède une relative autonomie par rapport aux autres structures. Il règle en particulier les commandes musculaires et la coordination des mouvements.

Au-delà du tronc cérébral, on trouve de nombreuses structures fonctionnellement différenciées. On peut y distinguer entre autres :

- Le thalamus, qui est un relais de transmission entre les différents capteurs, le cortex et le cervelet. C'est à ce niveau que s'effectuent un pré-traitement des informations visuelles, auditives, tactiles, ainsi que des opérations plus élaborées comme le suivi de cible visuelle (coordination oculo-motrice).
- L'hippocampe, qui possède des connexions avec toutes les aires corticales, semble très impliqué dans les processus de mémorisation à long terme. On pense également qu'il pourrait avoir un rôle dans la reconnaissance de scènes et de lieux.
- Le bulbe olfactif, qui peut être considéré comme la "rétine" de l'olfaction.

Enfin, le cortex est la structure anatomique qui prend l'importance la plus grande chez les mammifères les plus évolués. À l'origine simple mémoire additionnelle, il tend au cours de l'évolution à prendre en charge une partie des fonctionnalités dédiées aux structures plus internes. Il permet aux animaux de se démarquer des comportements purement instinctifs, en apprenant des comportements nouveaux grâce à l'expérience, et de planifier des séquences d'action, en anticipant les mouvements d'une proie, en mémorisant des parcours et en élaborant des stratégies d'action par "simulation interne" [17]. Il atteint chez l'homme un développement non connu chez les autres espèces, qui lui permet en particulier de distinguer son état d'être agissant de l'environnement sur lequel il agit (conscience réflexive), et de mettre en place un langage articulé structuré et riche qui ouvre la voie à l'évolution culturelle.

## Structures du cortex

**configuration anatomique et fonctionnelle** Chaque hémisphère est divisé en quatre régions, séparées anatomiquement par des plis profonds. Le cortex occipital est situé à l'arrière du crâne. Il est impliqué entre autres dans le traitement visuel. Le cortex temporal est situé latéralement (au niveau des tempes et des oreilles). Il est impliqué chez l'homme dans le traitement du langage. Le cortex pariétal, situé au dessus du complexe temporo-occipital, est impliqué dans la sensibilité tactile. Enfin, le cortex frontal, qui correspond à la partie antérieure du cerveau, est responsable en particulier de la motricité. On attribue chez l'homme à la partie la plus antérieure les fonctions les plus évoluées, à savoir le raisonnement abstrait et la conscience réflexive.

Les deux hémisphères communiquent par plusieurs faisceaux de fibres myélinisées, dont le plus important est le corps calleux. La différenciation hémisphérique est maximale chez l'homme, chez qui il existe des fonctions spécifiques à chaque hémisphère, comme le langage (hémisphère gauche) ou la reconnaissance des visages (hémisphère droit).

**Colonnes corticales** Le cortex est constituée de modules fonctionnels appelés les colonnes corticales. Ces colonnes sont constituées d'environ  $10^5$  neurones. Les colonnes corticales sont parfois considérées comme des unités de calcul du cortex. Elles possèdent une connectivité de proximité, avec les colonnes voisines, et une connectivité à grande distance, d'aire à aire ou d'hémisphère à hémisphère, par le biais d'axones myélinisés. Cette organisation en modules est confirmée par des mesures qui montrent la forte prépondérance de la connectivité locale sur la connectivité distante [15].

On pense que les colonnes corticales sont capables d'effectuer des calculs très spécialisés. Leur niveau d'activité est variable selon le contexte. Une hypothèse récente dit que lorsqu'une colonne est active, les neurones tendent à tirer à la même fréquence, et à propager vers leurs voisins ainsi qu'aux aires plus éloignées auxquels ils sont reliés cette activité cohérente. Ce mode de fonctionnement semble en particulier intervenir au niveau des aires visuelles, facilitant la détection des contours [18].

### 1.2.3 Adaptation dynamique

Cette section se penche plus particulièrement sur la question de l'adaptation dynamique dans le cerveau. Ce point est central à notre exposé, c'est pourquoi l'on s'étendra un peu plus longuement sur les hypothèses en présence, et les observations neurophysiologiques.

Le terme d'adaptation dynamique (ou adaptation à court terme) signifie, comme on l'a vu plus haut, que la dynamique des neurones est capable de changer qualitativement au cours du temps, sans aucune modification physiologique

(ou à des échelles de temps trop courtes pour que des processus de modification synaptique interviennent de façon significative). Dans le langage des systèmes dynamiques, on peut dire que l'adaptation dynamique repose sur le caractère *non-stationnaire* des dynamiques neuronales.

### Activité électrique globale

Jusqu'à récemment, on envisageait le cerveau comme un organe possédant un grand nombre d'aires, associées chacune à des fonctionnalités spécifiques, ayant à peu près la même localisation d'un individu à l'autre. Il était donc possible de tracer une carte fonctionnelle qui associait une fonction à chaque aire du cerveau. Cette connaissance, essentiellement fondée sur l'étude des lésions, ne permettait pas de mettre en évidence les relations de coopération entre les différentes aires. Elle donnait du cerveau une vision statique et parcellaire.

Les moyens modernes d'observation (EEG, MEG) fournissent à présent une description dynamique de l'activité du cerveau. En mesurant l'évolution du champ électro-magnétique à la surface du crâne, on met en évidence de véritables chemins de communication qui relient et conditionnent l'activité de grands ensembles de neurones. Combinée avec une connaissance anatomique des aires fonctionnelles, connaissance apportée maintenant par les méthodes tomographiques (PET Scan, IRM fonctionnelle), il est possible d'élucider le comportement de communication à grande échelle entre ces différentes aires, par des mesures de propagation d'activités corrélées [19]. Il apparaît en particulier que le traitement d'une information sensorielle est rapidement distribué vers de nombreuses aires spécialisées qui prennent en charge les différentes modalités du signal.

Cette approche dynamique de l'activité cérébrale permet par ailleurs de mettre en évidence de nouvelles fonctionnalités qui reposent exclusivement sur l'activité dynamique. On peut en particulier citer les travaux de Kelso [20] qui montrent que la vitesse et la direction d'un mouvement peuvent être mises en relation avec le comportement du champ magnétique au niveau des aires pariétales.

Bien sûr, toutes ces approches ont un niveau de précision de l'ordre du centimètre, ou du millimètre dans le meilleur des cas, et ne permettent, loin s'en faut, d'accéder aux caractéristiques des petites unités neuronales. Toutes ces méthodes ne permettent qu'un aperçu lointain de ce qui se passe réellement lors de la réalisation d'une tâche cognitive. On ne connaît pour l'instant pas la nature du code, et encore moins la nature de ce qui est codé lorsque des ensembles de neurones échangent des informations.

### Synchronisation

On dit que des signaux sont synchronisés lorsqu'ils présentent des corrélations non nulles. En neurophysiologie, la notion de synchronisation est souvent associée à celle d'oscillation périodique. Le signal EEG présente par exemple des oscilla-

tions de fréquence comprise entre 8 et 12 Hz, appelées  $\alpha$ . Un champ de recherche actif concerne des oscillations de beaucoup plus faible amplitude dans la bande des 40 à 80 Hz ( $\gamma$ ).

Au niveau de l'ensemble de neurones, la présence d'une fréquence dominante identique pour tous correspond au fait que les neurones tendent à *tirer en phase*. Synchronisation et oscillations périodiques marquent le fait qu'un groupe de neurones (par exemple une colonne corticale) est en train de "travailler". Cette activité forte est souvent transitoire, et se maintient sur quelques dixièmes de secondes avant de se propager à d'autres régions.

De nombreuses hypothèses existent sur le rôle fonctionnel de la synchronisation. Ces hypothèses reposent à la fois sur des faits expérimentaux et sur des simulations numériques :

- **Codage temporel d'une stimulation sensorielle.** Beaucoup de phénomènes de synchronisation ont été mesurés au niveau des aires sensorielles (vision, olfaction). La synchronisation semble impliquée dans le filtrage et le codage de l'information sensorielle.
- Dans les aires visuelles primaires, la synchronisation de colonne à colonne participe à la détection du contour des objets du champ visuel [21]. Cette information sur le contour possède la même topologie que le signal initial. En ce sens, c'est une opération de filtrage.
- La synchronisation tend à produire des motifs d'activité cohérents dans le temps et dans l'espace, ce qui permet de penser qu'il existe des formes de codage qui incluent la dimension temporelle. Les travaux d'Abeles [22] mettent en évidence des figures de tir précises et reproductibles. Dans le lobe antennaire du criquet (l'équivalent du bulbe olfactif chez les mammifères), G. Laurent montre que la précision dans la reconnaissance d'une odeur dépend d'un *motif de tir spatio-temporel* complexe, qui apparaît de façon transitoire [23]. En particulier, la désactivation des influences inhibitrices abolit les oscillations synchrones, ce qui produit une baisse importante dans la précision de la reconnaissance des odeurs. Les inhibiteurs ont un rôle crucial dans la synchronisation du signal global et permettent d'obtenir un motif spatio-temporel nécessaire à la mise en œuvre des processus de traitement ultérieurs.

Quelques modèles théoriques mettant en jeu la synchronisation ont récemment été proposés [24, 25], et sont l'objet d'un intérêt grandissant dans le domaine des réseaux de neurones.

- **Liage de données.** L'hypothèse du liage de données est la suivante : lorsqu'un stimulus possédant plusieurs modalités sensorielles atteint les aires sensorielles réceptrices correspondantes, il provoque au sein de chacune une activité synchronisée. Pendant le court instant où les aires stimulées sont actives simultanément, le reste du réseau, qui ne possède pas cette activité cohérente, est en quelque sorte désactivé. L'activité cérébrale est donc réduite aux aires stimulées, qui se retrouvent liées dynamiquement, au cours d'un

traitement parallèle global. Elles participent ainsi à un processus unique. Cette conjecture sur le fonctionnement du cortex est celle du processeur "cocktail-party", où l'information importante est celle qui ressort du brouhaha [26]. Bien sûr, ce paradigme ne se limite pas aux aires sensorielles, et, dans une approche dynamique de l'activité cérébrale, les zones de synchronisation se déplacent, donnant accès à des traitements plus abstraits, à des associations d'idées ou à la reconstruction d'un souvenir (la madeleine de Proust reconstruit tout un univers oublié).

Certains travaux, qui reconnaissent l'importance du codage temporel, montrent néanmoins que l'hypothèse de la synchronisation n'est pas nécessaire pour expliquer certaines capacités cognitives. Par exemple, dans le cadre d'une tâche de classification des entrées visuelles, la vitesse du traitement effectué ne permet pas la mise en place d'une dynamique synchronisée. L'ordre d'arrivée des spikes semble d'une importance cruciale pour ce type de traitement [27].

### Un rôle cognitif pour le chaos ?

On vient de voir qu'un régime dynamique synchronisé et localisé possède un caractère saillant au sein de l'activité globale du cerveau. Ce régime synchronisé se définit par opposition à un autre régime dynamique, que l'on peut qualifier de régime désynchronisé ou de régime chaotique. Ces deux régimes sont bien sûr associés fonctionnellement, dans la mesure où le passage d'un régime synchronisé à un régime chaotique autorise précisément l'adaptation dynamique.

L'existence du chaos déterministe dans le cerveau est l'objet d'un débat chez les neurophysiologistes [28]. Des études sur l'EEG humain [29, 30] suggèrent qu'une activité chaotique correspond à l'état éveillé normal. Des dynamiques de plus faible complexité (sur l'ensemble de l'encéphale) indiquent des états pathologiques, de type épileptique. Au contraire, une mesure du chaos plus élevée que la normale pourrait être la signature d'états dépressifs [31]. On voit de façon générale que la simplification de la dynamique n'a pas du tout le même sens suivant qu'elle concerne la dynamique globale de l'encéphale (une régularisation globale de la dynamique semble indiquer une pathologie) ou un ensemble fonctionnel local (auquel cas une régularisation dynamique indique que cet ensemble reconnaît quelque chose, ou effectue un calcul).

Les arguments les plus convaincants en faveur du rôle du chaos pour la cognition se trouvent dans un article de Skarda et Freeman [32]. Cet article se fonde sur des observations physiologiques. En implantant une soixantaine d'électrodes sur le bulbe olfactif du lapin, Freeman cherche à mettre en évidence un *changement de régime* lorsque le lapin est en présence d'une odeur connue. En l'absence de stimulation, la dynamique est fortement chaotique. Lorsqu'une odeur connue est présentée, il y a une simplification significative de la dynamique : la dynamique se rapproche d'un régime cyclique.

Au niveau du bulbe olfactif, le régime chaotique semble donc associé à un

état d'attente active. En l'absence de motif connu, le système explore une grande région de son espace d'états. Dès qu'une odeur connue apparaît, il y a réduction de la trajectoire sur une région plus petite de l'espace d'états, qui conduit à une activité régulière associée à l'odeur reconnue. L'attracteur atteint correspondrait au niveau de chaque neurone à une activité dynamique plus régulière, qui serait alors prise en compte par les couches ultérieures de traitement. *Si l'odeur n'est pas connue, la dynamique reste chaotique*, et le système se maintient dans une attitude d'attente active. On a donc là une propriété supplémentaire par rapport au modèle classique de la synchronisation : *la capacité de synchronisation est dépendante d'une pré-représentation existante*. Pour que la dynamique converge vers un attracteur plus simple, il faut que celui-ci ait été auparavant inscrit par l'expérience <sup>2</sup>.

Ainsi, une activité de fond chaotique permet un comportement dynamique *différencié* selon l'entrée sensorielle. En étendant l'hypothèse de Skarda et Freeman à l'ensemble de l'activité corticale, on peut concevoir de petits modules, de type colonne corticale, dont la dynamique chaotique "cherche" constamment à se réduire. Cette réduction est possible si ses signaux afférents correspondent à quelque chose de connu. Le système converge alors vers un régime plus simple, périodique et synchronisée, et transmet cette régularité à ses efférents.

Plus généralement, chaque module cherche à se mettre en cohérence avec ses afférents. Lorsque cette cohérence n'est pas bonne, l'activité est fortement chaotique. Lorsque cette cohérence est bonne, le système produit un signal régulier qui traduit à la fois la *reconnaissance* et la capacité à effectuer un traitement sur l'information entrante. En réduisant sa dynamique, le module participe à une étape d'une fonction cognitive plus globale.

Dans cette perspective, l'exercice d'une fonction cognitive par le sujet correspond à la régularisation dynamique d'un ensemble de modules, qui tend à augmenter la cohérence entre le signal présent sur les entrées sensorielles et la dynamique interne. Le système choisit son état dynamique en fonction à la fois des contraintes internes et des sollicitations de l'environnement.

### 1.3 Connexionnisme

Les sciences cognitives ont pour sujet d'étude l'intelligence au sens large, c'est à dire l'ensemble des processus qui permettent à un organisme ou à un système de faire des choix/proposer des réponses en fonction d'informations en provenance de capteurs et/ou d'éléments mémorisés. Les sciences cognitives sont un carrefour inter-disciplinaire, et font appel à la fois aux données de la psychologie expérimentale, au traitement de l'information, à l'étude des systèmes dynamiques, à la linguistique, à la phénoménologie et enfin à la biologie. Le connexionnisme est une

<sup>2</sup>De façon très spéculative, on peut dire que les pré-représentations constituent l'inconscient du réseau, dont une des modalités émerge à la conscience lors d'une stimulation adéquate

des voies de recherche en sciences cognitives, à la charnière entre la modélisation biologique, les systèmes dynamiques et le traitement du signal.

Le connexionnisme se fixe pour objet un réseau constitué de neurones formels dont les états évoluent au cours du temps en fonction de leurs entrées. Le fonctionnement individuel des neurones est assez simple, analogue à un petit relais électrique. Les caractéristiques des neurones (fonction de transfert) et les valeurs des liaisons inter-neurones (liens synaptiques) définissent le système.

### 1.3.1 Historique

Les premières formalisations de type connexionniste datent des années quarante, et sont contemporaines de l'essor de la cybernétique. Mac Culloch et Pitts [33] proposent en 1943 un modèle de neurone formel qui constitue le fondement du connexionnisme. Ils montrent en particulier que de tels réseaux composés d'unités fonctionnelles simples sont à même de réaliser des opérations logiques et arithmétiques. En 1949, Hebb relie les comportements de conditionnement simple à une loi de renforcement synaptique lors de la co-occurrence d'activations [12]. Cette règle ouvre la voie à l'apprentissage fondé sur les régularités statistiques des activations (apprentissage non-supervisé).

Dans les années soixante, on voit apparaître les premiers modèles de perceptrons [34]. C'est dans ce cadre que se développent les algorithmes d'apprentissage supervisé, fondés sur le terme d'erreur entre sortie produite et sortie souhaitée, qui est à l'origine de la règle de rétropropagation (apprentissage supervisé).

Il faut attendre les années 80 pour voir se développer de nouveaux modèles. Le modèle de Hopfield [35] établit une passerelle entre les réseaux de neurones et la physique statistique. Les cartes auto-organisatrices de [36] mettent en place une règle d'apprentissage non-supervisée fondée sur la compétition. Enfin l'algorithme de rétropropagation pour le perceptron multi-couches apparaît en 1985, ouvrant la voie à de nombreuses applications dans le domaine de la classification et du traitement des données [37].

À l'heure actuelle, les voies de recherche tendent à séparer de plus en plus nettement les visées applicatives de la modélisation biologique :

- Dans le cadre du traitement de données, on assiste au retour en force de l'approche statistique pour l'optimisation, dans le cadre de l'approche bayésienne [38] (augmentation de la plausibilité (*likelihood*) de la réponse), ou dans le cadre des "machines à support vectoriel" [39] (minimisation du risque d'erreur, en sélectionnant un certain nombre de valeurs représentatives de l'espace d'entrée).
- Pour des applications qui prennent en compte l'aspect temporel, on voit apparaître des modèles de type perceptrons multi-couches à délais (*Time Delays neural networks*) [40], ou avec des liens récurrents, qui prennent en compte certains aspects de l'information passée pour déterminer la réponse, en particulier pour la prédiction de séries temporelles [41] et le contrôle



- adaptatif en temps réel [42].
- Dans le cadre de la modélisation biologique, impulsés par les travaux de Von Der Malsburg [26] et Singer [43], les modèles de type “integrate and fire” permettent de mettre en évidence des phénomènes de coopération et de synchronisation qui explicitent en partie les mécanismes de perception des formes et des contours [25].
  - Toujours dans le cadre de l’approche biologique, la modélisation du cerveau en tant que système dynamique de grande taille offre des perspectives pour expliciter les phénomènes de synchronisation [24] et la coordination des mouvements [20].

### 1.3.2 Modèle de neurone

Un neurone artificiel est une unité fonctionnelle, capable de produire une sortie différenciée en fonction de l’état de ses entrées et éventuellement d’une mémoire locale. Le terme *différenciée* traduit le fait que l’on doit pouvoir distinguer sur la sortie l’état actif de l’état inactif. Cela traduit en particulier le fait que la modélisation neuronale exclut a priori une sortie de type linéaire.

Le neurone est classiquement modélisé par 2 opérateurs :

- un opérateur de sommation, qui élabore le *potentiel*  $u$ . Cet opérateur effectue la somme pondérée des entrées. On soustrait parfois à cette somme la valeur du seuil d’activation  $\theta$ .
- un opérateur non-linéaire qui calcule la valeur de l’*activation*  $x$ . Cet opérateur s’appelle la *fonction de transfert*.

Dans le cadre d’une modélisation d’inspiration biologique, le choix de la fonction de transfert traduit un a priori sur la nature du codage que l’on souhaite modéliser. Les fonctions de type sigmoïde représentent des taux de décharge, tandis que des fonctions de type “integrate and fire” représentent exhaustivement les motifs de tir.

#### Taux de décharge

Dans ce type de modèle, on suppose implicitement que la fréquence de décharge code l’information. Une telle modélisation est par exemple présentée dans [44].

Les modèles à taux de décharge reposent sur des fonctions de transfert de type sigmoïdales, c’est à dire des fonctions bornées continues monotones croissantes, à valeurs sur  $[0,1]$  : une fonction de transfert couramment utilisée est  $f(u) = (1 + \tanh(u))/2$ . On a donc  $x_i(t) = f(u_i(t))$  où  $u_i(t)$  est le potentiel du neurone  $i$  à l’instant  $t$ .

Suivant la valeur du potentiel, le neurone est amené à décharger avec une fréquence plus ou moins élevée. Néanmoins, en dessous d’un certain seuil, le neurone est inerte et le taux de décharge devient quasiment nul. De même, au delà d’une

valeur limite du potentiel, le neurone est saturé et atteint son taux de décharge maximal [45]. Malgré l'aspect continu de la sortie, il est donc possible de distinguer différents états d'activation, avec une évolution continue depuis l'absence d'émission jusqu'à un taux de décharge maximal.

Il faut toutefois noter que dans le cadre d'une modélisation d'inspiration biologique, le taux de décharge est supposé faible en moyenne, et les paramètres (seuils d'activation) doivent être ajustés afin de prendre en compte la rareté relative des neurones actifs par rapport aux neurones inactifs. Les taux de décharge peuvent également être amoindris en incluant dans le modèle une population de neurones inhibiteurs.

### Modèle à spikes

Les modèles à spike simulent de manière plus précise le fonctionnement des neurones, c'est à dire qu'ils produisent des trains de potentiels d'action. On a en quelque sorte un niveau de définition plus élevé sur le comportement temporel des neurones.

Le but de ces modèles est de mettre en évidence le fait qu'il existe d'autres moyens de coder l'information qui prennent en compte de manière plus précise la structure spatiale et temporelle des motifs d'activation. Ces modèles permettent de simuler d'autres formes de codage, comme le codage par rang [46], le chaînage de tirs [47] ou la synchronisation [25]. Ils permettent d'explorer des potentialités supplémentaire en termes de traitement de l'information.

Ces modèles peuvent également être analysés, du point de vue de systèmes dynamiques, comme des systèmes critiques tels que les figures de tir se déclenchent selon le principe des avalanches [48]. Il existe également de modèles probabilistes qui prennent en compte le caractère stochastique du processus d'émission de spikes [49].

### 1.3.3 Architectures

Une fois définies les unités de base que sont les neurones, le choix d'une architecture de connexion définit à proprement parler le système que l'on souhaite étudier. En fixant l'architecture du réseau, on détermine la fonctionnalité attachée à des neurones ou à des groupes de neurones (couches d'entrée ou de sortie, couches d'associations). Ceci vaut aussi bien pour les systèmes à visée applicative que pour les systèmes qui modélisent des fonctionnalités biologiques.

Le fait de fixer le modèle introduit donc une certaine dose d'arbitraire, et nécessite l'intervention active du concepteur (au même titre, mais à un moindre degré, que les systèmes à base de connaissance). Il existe cependant des méthodes permettant de sélectionner les architectures par évolution à l'aide d'algorithmes génétiques [50].

On peut distinguer trois grands types d'architectures neuronales :

- **Réseaux à sens unique** (*feed forward*) : Les réseaux à couches regroupent le perceptron multi-couches, les fonctions à base radiale (*Radial Basis Functions*), les machines à support vectoriel (*Support Vector machines*). Ils reposent sur le principe du couplage entre une entrée et une sortie (mémoires adressables par le contenu, séparation de sources, classification, reconnaissance de caractères, approximation de fonctions implicites, modélisation d'un processus physique). Il y a une couche d'entrée, une couche de sortie, et une ou plusieurs couches intermédiaires qui constituent les couches de traitement ou d'association. Les liaisons sont à sens unique, d'une couche vers la suivante. À l'origine de ces modèles, on trouve le perceptron [34], dont le fonctionnement s'inspire de celui de la rétine et des premières couches de traitement de l'information visuelle.
- **Réseaux récurrents** : À l'opposé des réseaux à sens unique, on trouve les modèles dits récurrents. Dans un modèle récurrent, l'architecture de connexion autorise des couplages réciproques entre les neurones. Le modèle pionnier dans ce domaine est celui de Hopfield [35], dont le mode de calcul met en œuvre la convergence de la dynamique sur un attracteur. C'est la trajectoire dynamique du système dans son ensemble qui conduit à la solution. La matrice des poids synaptiques  $J_{ij}$  est *symétrique*, ce qui permet de définir une fonction d'énergie  $E = -\frac{1}{2}x^t J x$ , où  $x$  est le vecteur des activations. On démontre que la dynamique du réseau tend à minimiser cette fonction d'énergie. Le "paysage" d'énergie possède un certain nombre de bassins d'attraction qui correspondent aux points fixes vers lesquels le réseau va converger en fonction de l'initialisation. L'attracteur atteint est statique, et constitue la réponse à la stimulation.  
Ce type de modèle a ouvert de nouvelles perspectives en terme de modélisation neurobiologique, dans la mesure où il met en évidence un mode de calcul radicalement nouveau, avec une information répartie sur tous les couplages, et des neurones qui ne sont pas différenciés fonctionnellement : il n'y a pas de neurone d'entrée, ou de neurone de sortie. Les neurones sont impliqués collectivement dans la reconstruction ou l'interprétation de la configuration d'activations initiale.
- **Réseaux à plus proches voisins** : On définit une relation de voisinage sur les neurones. Le schéma de connexion se fonde alors sur ce voisinage : le voisinage conditionne la nature des liens synaptiques.  
Ce voisinage peut correspondre à une proximité physique de la stimulation, comme par exemple dans le cadre du traitement d'un champ visuel, et dans ce cas l'architecture est conforme par avance à la structure des données que l'on souhaite apprendre (par exemple repérer des contours sur une image). Dans le cadre des cartes auto-organisatrices [36], c'est au contraire la structure interne de grille qui conditionne la classification et l'interprétation des données de l'espace d'entrée.

Il existe une grande quantité d'architectures intermédiaires qui marient plusieurs des aspects présentés séparément. On peut citer en particulier l'architecture NARX [42], qui possède une architecture de type feed forward, avec une partie des sorties qui rebouclent sur les entrées.

Certains auteurs [51] ont montré l'intérêt de modèles décrivant le comportement dynamique des neurones. Dans le cadre d'applications connexionnistes, le contrôle de systèmes chaotiques pourrait s'avérer optimal en termes de codage d'information [52]. Plusieurs modèles de mémoire, qui exploitent les propriétés des dynamiques chaotiques, ont été proposées dans le cadre d'architectures récurrentes [53] ou à plus proches voisins [54].

### 1.3.4 Règles d'apprentissage

Un système de type connexionniste est caractérisé par son modèle de neurone, son architecture et sa *règle d'apprentissage*.

#### Règle d'apprentissage

La règle d'apprentissage est un processus grâce auquel le réseau *adapte* ses couplages internes aux caractéristiques d'une information mise en entrée.

Au sens le plus général, on dit qu'un système s'adapte à une entrée donnée lorsqu'il réduit l'incertitude sur ses actions (ou sorties) en présence de cette entrée. Une sortie spécifique est progressivement choisie par le système parmi l'ensemble des sorties possibles. Le système est donc amené à *évoluer*, en fonction d'une contrainte d'évolution qui constitue la règle d'apprentissage.

La règle d'apprentissage fonctionne selon un principe d'*évaluation/sélection*. Elle permet de faire le tri parmi les réponses tentées par le système, et de favoriser celles qui sont bénéfiques (ou d'en favoriser une parmi celles qui sont bénéfiques).

Dans le cadre des systèmes neuronaux artificiels, la règle d'apprentissage porte sur les poids synaptiques : la règle renforce les poids synaptiques dans les cas favorables, et les atténue dans les cas défavorables. Les nouveaux couplages modifient les configurations d'activation, et orientent la réponse du réseau. La réponse du réseau est ainsi contrainte par la règle d'apprentissage.

L'enjeu lors de la conception d'un système artificiel est de bien choisir la règle d'apprentissage afin que l'évolution de la sortie du système soit conforme à la tâche que l'on souhaite lui voir accomplir. Dans une perspective plus cognitive, l'enjeu est de déterminer dans quelle mesure l'apprentissage permet de produire un comportement intelligent.

#### Typologie

On peut distinguer deux grands types de règles d'apprentissage :

- **Règles locales** : La modification des poids synaptiques s’effectue selon la nature des interactions entre neurones deux à deux. La plus connue est la règle de Hebb [12] qui fonde le renforcement synaptique sur la co-occurrence de l’activation pré et post-synaptique. Formellement, la modification synaptique est une fonction du produit des activations pré et post-synaptiques  $x_i(t)x_j(t - \tau)$  où  $\tau$  représente le délai de transmission (ce délai est souvent omis dans la littérature). Une règle comparable, proposée par Sejnowski [55], repose non sur le produit des activations, mais sur la covariance. Cette règle introduit ainsi la possibilité d’une dépression synaptique en cas de covariance négative. La modification synaptique est alors une fonction du produit  $(x_i(t) - \bar{x}_i)(x_j(t - \tau) - \bar{x}_j)$ . Là encore, le délai  $\tau$  que j’introduis n’était pas présent dans la règle initiale. La règle de Hebb est souvent implémentée dans le cadre de modèles récurrents inspirés du modèle de Hopfield. Par ailleurs, du fait de sa plausibilité biologique (voir page 20), elle est souvent présente dans les modèles dont la vocation est de simuler les processus neurobiologiques [53].
- **Règles globales** : Ces règles ont prouvé leur efficacité dans les domaines d’applications des réseaux de neurones. Elles prennent en compte des caractéristiques globales de la configuration d’activation du réseau ; la modification des poids repose sur une information (comparaison des états des voisins, comparaison avec une sortie idéale) à laquelle le neurone n’a pas accès localement. De ce fait, les règles globales sont moins plausibles biologiquement parlant. Parmi ces règles, on peut distinguer
  - Apprentissage par compétition (*competitive learning*). La désignation d’un neurone gagnant impose les modifications synaptiques (*winner take all*). Cette règle peut trouver sa justification biologique dans un modèle à plus proche voisin possédant des connexions latérales inhibitrices, auquel cas le neurone activé en premier inhibe ses voisins les plus proches.
  - Apprentissage supervisé et rétropropagation. Cette règle d’apprentissage, utilisée essentiellement dans le cadre des modèles de type perceptron et RBF, consiste à comparer la sortie produite par le réseau à la sortie souhaitée, ce qui détermine le terme d’erreur. Le terme d’erreur est ensuite propagé dans le sens inverse de l’activation et sert à déterminer pour chaque couche intermédiaire l’orientation de la modification synaptique. Cette règle est très peu plausible biologiquement, mais a néanmoins permis d’obtenir un grand nombre de résultats dans les domaines d’application des réseaux de neurones.

Les conditions de convergence des algorithmes de rétropropagation et leurs dérivés vers la réponse optimale commencent à être bien connues, et de nombreux outils statistiques [39] existent pour assurer de bonnes conditions de convergence. Un des enjeux concernant l’apprentissage repose sur la possibilité d’associer dans un même processus la phase d’apprentissage et la phase d’utilisation, c’est à dire de mettre en place des systèmes qui apprennent tout en découvrant leur environ-

nement. Ces formes d'apprentissage "en prise directe" (*on line*) sont par exemple mis en œuvre dans le cadre d'algorithmes stochastiques inspirés de la programmation dynamique et des processus de Markov [56], et peuvent être étendus à des modèles neuronaux dans le cadre d'un apprentissage Hebbien [57]. Il existe également des modèles récurrents qui évaluent en temps réel l'erreur commise, ce qui permet de mettre en œuvre la méthode de rétropropagation [58], et de proposer une alternative aux algorithmes d'approximation stochastique de type filtre de Kalman.

### Un enjeu : l'apprentissage de signaux spatio-temporels.

On regroupe sous le terme de signaux spatio-temporels :

- Les séquences périodiques.
- Les signaux correspondant à l'évolution de certaines variables d'états d'un système dynamique déterministe.
- Les suites discrètes des signes issues de grammaires génératives, ou une suite d'états d'une chaîne de Markov.
- Les entrées d'un système automatique en interaction avec son environnement.

L'enjeu d'un tel apprentissage est d'*inscrire dans la dynamique* du réseau de neurones les caractéristiques de ces signaux. Les perspectives sont nombreuses, en termes de filtrage, de modélisation de systèmes, de prédiction de séries temporelles, de mémoire dynamique.

Lorsque l'on souhaite apprendre des motifs spatio-temporels, il est nécessaire d'utiliser des modèles comportant des *délais* de transmission [59]. La prise en compte du délai de transmission de l'activation d'un neurone à l'autre permet en effet d'effectuer des associations sur des événements situés à des instants différents, et ouvre donc la possibilité d'inscrire dans la dynamique à la fois les caractéristiques spatiales (activité distribuée) et temporelles (succession temporelle des motifs spatiaux) du motif.

Par ailleurs, la capacité à reproduire dans la dynamique les caractéristiques du signal nécessite une architecture comportant des liens récurrents, autorisant la mise en place de circuits d'activation capables d'entretenir un signal dynamique de façon autonome.

La difficulté de cette tâche dépend de la complexité inhérente au phénomène que l'on souhaite modéliser, et de la connaissance qu'on en a a priori.

**Stockage explicite de séquences** Le terme stockage explicite signifie simplement que les séquences sont inscrites dans le schéma de connexion de la matrice. Dans ce cas, la connaissance a priori est exhaustive et il n'y a pas de phase d'apprentissage. L'estimation théorique de la capacité de tels modèles récurrents, pour des motifs binaires aléatoires de densité  $f$  (*sparseness*), tend pour  $N$  grand

vers  $\alpha_c = \frac{\text{nombre de motifs}}{N} = -\frac{1}{2f \ln(f)}$  [47]. Néanmoins, la convergence vers cette capacité limite est très lente [60].

On retrouve par ailleurs sur ce type de modèles récurrents la possibilité de transition de phase, c'est à dire qu'il existe des gammes de paramètres critiques pour lesquels le réseau reste en point fixe, et d'autres pour lesquelles il développe des régimes de type périodique correspondant à une séquence spatio-temporelle apprise. À notre connaissance, les régimes chaotiques ne se développent pas sur ce type de modèle.

**Apprentissage en ligne de séquences spatio-temporelles** Le système effectue son apprentissage en interaction avec une entrée qui présente en boucle la (ou les) séquence(s) à apprendre. Le processus d'apprentissage repose alors sur une comparaison entre les motifs d'activation produits par le réseau et ceux présents en entrée, le but étant d'obtenir la meilleure adéquation possible. Ce type de système peut viser :

- Le *stockage* de séquences : après apprentissage, le système est capable d'évoquer la séquence apprise sans aucune stimulation.
- La *prédiction* : le système doit être capable de produire la séquence complète en fonction des premiers éléments de la séquence.
- Le *filtrage* : le système reste couplé au signal d'entrée, qui peut contenir une version dégradée de la séquence apprise, et évoque dans sa dynamique une séquence apprise associée. Le choix de la séquence restituée repose ainsi sur un phénomène de résonance [61] entre une des séquences apprises et la séquence présente.

Une séquence sera d'autant plus difficile à apprendre que son degré d'*ambiguïté* est élevé . Une séquence temporelle est ambiguë lorsque la connaissance d'un élément de la séquence est insuffisante pour déterminer l'élément suivant. Par exemple, la séquence de lettres ABAC est ambiguë dans la mesure où la lettre A peut être suivie soit par B, soit par C. Il est nécessaire dans ce cas de garder en mémoire deux éléments successifs pour lever l'ambiguïté. Le nombre d'éléments nécessaires à mémoriser pour lever toutes les ambiguïtés de la séquence constitue le degré de la séquence [62]. ABAC est une séquence de degré 1, ABCABD une séquence de degré 2, etc...

De telles ambiguïtés se rencontrent très fréquemment dans les signaux issus du monde réel. Peu de systèmes neuronaux sont à l'heure actuelle pleinement opérationnels pour traiter et apprendre les ambiguïtés de l'environnement. Il existe plusieurs modèles permettant de lever les ambiguïtés de degré 1. Un premier modèle est fondé sur les triades synaptiques [62], c'est à dire sur des neurones dont l'activation dépend de deux activations afférentes successives. Un autre modèle, proposé dans [63], repose sur un système à deux couches, la première étant une couche réceptrice, et la deuxième une couche d'associations possédant des liens latéraux. Dans les deux cas, la levée de l'ambiguïté de degré 1 repose sur la prise

en compte d'événements décalés temporellement, c'est à dire sur la présence, soit de délais de transmission non homogènes soit de relais à la transmission du signal. Ce principe semble également à l'œuvre dans une architecture plus complexe [64], dont le nombre de paramètres mis en jeu rend difficile l'analyse du processus d'apprentissage.

**Apprentissage en ligne de systèmes dynamiques et grammaires** Une autre grande classe de signaux spatio-temporels repose sur des processus génératifs. Dans ce cadre, les signaux spatio-temporels mis en entrée du système ne sont plus nécessairement périodiques. Le but est d'obtenir un système qui reproduise au mieux les caractéristiques du processus présenté.

- Systèmes dynamiques : le signal mis en entrée du réseau correspond à une ou plusieurs trajectoires issues d'un système dynamique déterministe connu (en général un système non-linéaire, afin d'avoir des trajectoires périodiques ou chaotiques). Il est fréquent dans ce cadre d'utiliser un réseau récurrent dont le nombre de neurones est de l'ordre du nombre de variables d'état du système (C'est à dire que l'on a une connaissance a priori sur les caractéristiques du signal à apprendre). L'algorithme d'apprentissage le plus fréquent dans ce cadre est la règle de *backpropagation through time* (BPTT) (rétropropagation à travers le temps) [58, 65].
- Grammaires génératives : une grammaire générative est un processus stochastique qui produit une suite de symboles conformément à un ensemble de règles de grammaire conditionnant la disposition de ces symboles. Un tel processus produit une suite aperiodique de symboles, qui possèdent néanmoins une certaine structure. Tani [66], en effectuant un apprentissage à l'aide d'un BPTT dans un réseau récurrent déterministe, montre que l'apprentissage tend à produire un régime dynamique chaotique dans le réseau, comme la meilleure approximation du processus stochastique en entrée par un système déterministe.

**Apprentissage dans les systèmes ouverts** Un système ouvert est un système dynamique (c'est à dire un ensemble d'opérateurs agissant sur des variables d'état) en couplage permanent avec son environnement. Au sens des systèmes dynamiques, c'est un système non-autonome (c'est à dire que le flot (voir page 8) dépend du temps).

On s'intéresse ici au cas d'un automate en interaction avec son environnement. On considère le système, constitué par le réseau d'opérateurs et placé sous influence de signaux sensoriels et sensori-moteurs. Ces signaux sont conditionnés par l'état de l'environnement. Dans un système ouvert, on doit prendre en considération les boucles de rétroaction entre le système et son environnement. Les actions produites modifient en retour la nature des signaux perçus. Dans ce cadre, la notion d'attracteur et de bassin d'attraction propre au système n'est



plus pertinente, et une description exhaustive de l'interaction entre le système et son environnement nécessiterait de modéliser le système global, constitué par le système ouvert et son environnement.

C'est essentiellement dans le domaine de la robotique dite "autonome" que cette approche se développe à l'heure actuelle. Dans ce cadre, le système, constitué d'opérateurs distribués d'inspiration neuronale, effectue son apprentissage en interaction avec son environnement.

- Une première approche, dite de "neural field", tire son inspiration d'un article d'Amari [67], où est décrit le comportement à la limite thermodynamique d'une chaîne de neurones à inhibitions latérales et soumises à un signal externe non stationnaire. Le neural field est principalement utilisé en robotique pour stabiliser les ordres moteurs [68, 69]. Un ordre moteur (direction et vitesse) correspond alors à un "attracteur" de type point fixe, qui reste stable sur une certaine durée. La transition d'un état moteur stable à un autre (pivotement) s'opère de manière continue, en fonction des évolutions intervenues dans les signaux de l'environnement.
- Une autre approche cherche à produire au sein du système des structures spatio-temporelles stables lorsque ce système expérimente de façon répétitive son environnement. Un comportement moteur stable tend à émerger face aux situations les plus courantes. Par ailleurs, le système tend, face à un stimulus donné, à produire par *résonance* le comportement correspondant à l'expérience inscrite la plus similaire [70, 71, 72]. En particulier, Tani met en évidence, sur un système constitué de plusieurs réseaux récurrents couplés des régimes dynamiques différents (cycle/chaos), dont la nature dépend de l'adéquation entre l'environnement dans lequel le système est plongé et l'environnement appris précédemment.
- Une troisième approche prend inspiration d'études effectuées sur le fonctionnement de l'hippocampe, en particulier de l'existence d'un réseau de "cellules de lieu" dont la structure de connexions représente la topologie des transitions d'un lieu à l'autre. Une telle approche permet d'implémenter une planification des actions en fonction du but recherché [73, 74]. Un autre modèle, également inspiré de la structure de l'hippocampe, permet d'apprendre des séquences temporelles par imitation [75].

### 1.3.5 Approche champ moyen

Le modèle de Hopfield a ouvert la voie à une quantité de travaux consacrant l'analogie entre les réseaux de neurones et des phénomènes physiques tels que les verres de spins. Les physiciens font l'analogie entre un réseau de neurone et un ensemble de particules en interaction. Ils cherchent alors à mettre en évidence des régularités qui portent sur le comportement global de ces ensembles. L'unité neuronale est en quelque sorte diluée au sein d'un processus plus vaste.

## Équations de champ moyen

On peut attribuer à Amari [76] l'origine du concept de *réseau neuronal récurrent aléatoire*. Dans ce modèle, la taille du réseau est  $N$  (supposé grand), et les couplages  $J_{ij}$  ainsi que les seuils  $\theta_i$  sont issus d'un tirage aléatoire. On parle dans ce cas d'*aléa gelé*, dans la mesure où le tirage initial définit un système complet (1.3) dont on peut itérer la dynamique au cours du temps sans faire intervenir d'autre forme de bruit.

$$x(t) = h_\omega(x(t-1)) \quad (1.3)$$

L'aléa gelé est désigné par  $\omega$  et l'application  $h_\omega$  dépend de cet aléa.  $x(t)$  est le vecteur des activations, de taille  $N$ . Les états  $x_i(t)$  sont appelés états microscopiques.

Amari définit alors la notion d'*état macroscopique*  $\xi_N(x)$ , qui associe une valeur à chaque état microscopique. Pour tout  $t$ , on peut donc estimer  $\xi_N(x(t))$ . Un état macroscopique couramment utilisé est la moyenne des activations

$$\xi_N(x(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

Il se pose alors la question de la convergence de  $\xi_N$  vers une valeur asymptotique  $\xi$  lorsque la taille  $N$  tend vers l'infini. Il cherche en particulier à mettre en évidence une *équation d'état macroscopique*, décrivant l'évolution au cours du temps des états macroscopiques, telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N(h_\omega^t(x)) = H^t(\xi_N(x))$$

Dans le cadre des réseaux récurrents aléatoires, la difficulté est de prouver l'existence de cette équation d'état macroscopique, encore appelée *équation de champ moyen*. La dynamique du réseau est alors déterminée par un système dynamique de petite dimension portant sur un petit nombre de variables macroscopiques plus faciles à analyser.

Amari se pose le problème pour des neurones de type Mac Culloch et Pitts (dans le cadre de cette première étude), et montre la convergence asymptotique vers les équations de champ moyen, avec des conditions de normalisation sur les poids synaptiques. Amari étend son étude à des modèles à temps continu, et obtient dans certaines conditions (modèles à deux population) un comportement d'oscillation sur l'état macroscopique.

## Chaos dans les systèmes de grande taille

Après avoir appliqué les méthodes de la physique statistique aux réseaux de Hopfield, Sompolinsky se penche sur des modèles plus proches de la biologie, en

particulier des modèles aléatoires à connexions *asymétriques* [77]. Le modèle qu'il propose est à temps continu, défini par les équations (1.4).

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = -u_i(t) + \sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t) \\ x_i(t) = f_g(u_i(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

La fonction de transfert  $f_g(u) = \tanh(gu)$  est une fonction symétrique, à valeurs sur  $] -1, 1[$ . Le système est de taille  $N$ , et le paramètre de contrôle est le gain  $g$ . Les poids synaptiques sont des variables aléatoires indépendantes, gaussiennes centrées d'écart-type  $\sigma_J/\sqrt{N}$ .

Les équations de champ moyen de ce système sont obtenues par la méthode dite du champ moyen dynamique. Les auteurs s'intéressent à la loi générique des  $u_i(t)$ , observée sur un grand nombre de réseaux différents. Ils montrent que cette loi tend vers une loi gaussienne pour  $N$  croissant. Par ailleurs, l'influence des termes de couplage  $J_{ij}$  tend à disparaître lorsque la taille croît et les neurones tendent à se comporter de façon indépendante. Deux régimes dynamiques sont mis en évidence pour les systèmes de grande taille :

- Si  $g\sigma_J < 1$ , le système est statique, et le point fixe est 0.
- Si  $g\sigma_J > 1$ , le système est chaotique, au sens où tous les neurones tendent à produire des signaux décorrélés. Ce comportement correspond à taille finie au chaos déterministe, avec une propriété de sensibilité aux conditions initiales.

### 1.3.6 Notre approche

Au terme de ce tour d'horizon, nous pouvons à présent préciser la démarche qui a guidé l'équipe du CERT dans l'élaboration de son travail de recherche. Le thème central est l'étude des dynamiques complexes dans les réseaux de neurones.

Le groupe s'est mis en place en 1990, sous l'impulsion de Bernard Doyon, médecin et chercheur à l'INSERM en neurophysiologie fonctionnelle, et de Manuel Samuelides, professeur de mathématiques à Supaéro. L'équipe était complétée par deux thésards, Bruno Cessac (modélisation dynamique et statistique) et Mathias Quoy (Simulation et apprentissage), dont les thèses ont été soutenues en 1994. Cette recherche se poursuit à l'heure actuelle avec le travail d'Olivier Moynot pour les développements mathématiques les plus récents, dont je présenterai juste les résultats principaux, et la contribution d'Olivier Pinaud pour l'analyse et la simulation des modèles à deux populations.

Le fil conducteur de ce travail est la recherche d'une analogie entre le comportement dynamique naturel du cerveau, supposé chaotique, et les modèles connexionnistes dynamiques. Cette recherche s'inscrit donc résolument dans la perspective de la modélisation neuronale d'inspiration biologique. Dans ce cadre, on a porté une attention particulière au comportement temporel des neurones.

Le modèle choisi dans ce cadre est l'un des plus simples capable de produire une dynamique chaotique. C'est un modèle à aléa gelé, à états continus et à temps discret, avec des connexions récurrentes denses. En s'affranchissant d'un modèle neuronal exhaustif, la recherche a pu se focaliser à la fois sur les développements mathématiques et la mise en relation des comportements dynamiques observés avec les données de la neurophysiologie.



# Chapitre 2

## Un modèle générique pour l'étude des dynamiques neuronales

Le modèle présenté dans ce chapitre constitue la brique de base de toutes nos études portant sur les dynamiques et l'organisation au sein de systèmes artificiels. Il a été choisi par l'équipe de Toulouse dès 1991, et s'est révélé extrêmement fructueux, tant du point de vue des développements mathématiques que du point de vue des comportements dynamiques. Les principaux travaux qu'il a suscités sont l'étude des comportements périodiques et chaotiques à taille finie [78], l'étude du comportement à la limite thermodynamique [79] [80] et l'étude d'algorithmes d'apprentissage [81] [82].

La section 2.1 donne les caractéristiques principales du modèle à taille finie. Après avoir présenté l'équation d'évolution et précisé le rôle de tous les paramètres (section 2.1.1), on étudie dans un premier temps la répartition statistique des variables d'état en régime stationnaire (section 2.1.2). On regarde en particulier l'influence du gain sur la répartition des activations. La section 2.1.3 montre la diversité des comportements dynamiques obtenus sur le modèle. On y décrit de manière détaillée le comportement générique de route vers le chaos par quasi-périodicité.

La section 2.2 présente l'autre face du modèle, c'est à dire le comportement théorique des grandeurs macroscopiques à la limite thermodynamique. La section 2.2.1 présente l'hypothèse de chaos local et l'hypothèse de propagation du chaos, qui sont un support indispensable à la mise en place des équations de champ moyen. La section 2.2.2 présente le concept de limite thermodynamique et l'illustre par des simulations. La section 2.2.3 décrit l'opérateur des équations de champ moyen. La section 2.2.4 décrit les conditions pour lesquelles deux trajectoires tendent à diverger à la limite thermodynamique (SCI). La section 2.2.5 donne l'aspect d'une surface de bifurcation dans l'espace des paramètres du réseau.

Enfin, la section 2.3 présente le comportement dynamique des équations de champ moyen dans le cadre d'un modèle à deux populations. Les propriétés du champ à la limite thermodynamique sont données dans la section 2.3.1. La section 2.3.2 présente un comportement d'oscillations synchronisées à grande échelle, et décrit les quatre régimes dynamiques observés à la limite thermodynamique. La section 2.3.3 présente un comportement de route vers le chaos par doublement de période sur les observables macroscopiques.

## 2.1 Équations d'évolution à taille finie

### 2.1.1 Description du système

On considère le système dynamique constitué par le jeu de  $N$  équations couplées (2.1) :

$$x_i(t) = f \left( \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j(t-1) - \theta_i \right) \quad (2.1)$$

C'est, on le voit, un modèle à temps discret. Des intervalles de temps unitaires séparent la mise à jour des états. Ces intervalles peuvent être considéré comme des délais de transmission synaptique, réduits à leur expression la plus simple. La mise à jour étant effectuée en parallèle, on a à chaque mise à jour une multiplication de la matrice des poids  $J = (J_{ij})_{i=1..N, j=1..N}$  par le vecteur d'états  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$  auquel on soustrait le vecteur des seuils  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ . Le système admet donc comme écriture matricielle :

$$x(t) = f(Jx(t-1) - \theta)$$

La fonction de transfert  $f$  est traditionnellement une fonction sigmoïdale, à valeurs sur  $] -1, 1[$  ou  $] 0, 1[$ . Une fonction de transfert à valeurs sur  $] -1, 1[$  est en général considérée comme moins plausible biologiquement dans la mesure où le signe du produit  $J_{ij} x_j(t-1)$  ne dépend pas uniquement du signe du lien synaptique, et ne permet pas de définir des liens excitateurs ou inhibiteurs. La plupart des études numériques porteront sur un système dont la fonction de transfert prend ses valeurs sur  $] 0, 1[$ . Le choix de cette fonction de transfert n'est pas fondamental. On choisit de la faire dépendre du paramètre  $g$ , qui conditionne la forme de la fonction de transfert (voir figure 2.1) et en particulier la valeur de la dérivée en zéro. Cette valeur de la dérivée en zéro constitue le *gain*. Intuitivement, le gain donne une approximation du taux d'amplification d'un signal centré. La fonction de transfert qui sera utilisée par la suite est la fonction

$$f_g(x) = \frac{1 + \tanh(gx)}{2}$$

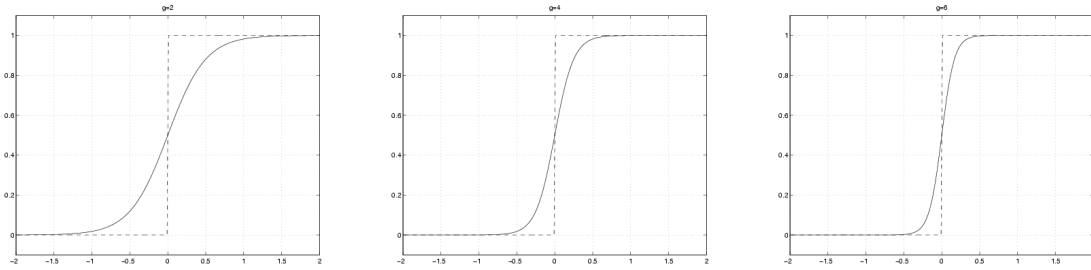


FIG. 2.1 – influence du paramètre de gain  $g$  sur la forme de la fonction de transfert  $f_g(x) = \frac{1 + \tanh(gx)}{2}$ . La fonction de transfert a été représentée pour des valeurs de  $g$  égales (de gauche à droite) à 2, 4 et 6. On a représenté en pointillé la fonction seuil  $\Theta(x > 0)$ .

de gain  $g/2$ . Plusieurs mesures exploratoires ont par ailleurs été effectuées sur les fonctions  $g_g(x) = \frac{1 + \operatorname{erf}(gx)}{2}$  et  $h_g(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(\frac{\pi}{2}gx)}{\pi}$  sans modification qualitative du comportement dynamique : les valeurs de bifurcation changent, mais tous les modes dynamiques sont représentés. Enfin, il faut noter que lorsque  $g$  tend vers l'infini, toutes ces fonctions tendent vers la fonction seuil  $\Theta(x > 0)$  qui provoque des sorties binaires. Dans la plage de valeurs que nous nous fixerons ( $g$  prenant ses valeurs entre 2 et 20), les caractéristiques du signal de sortie resteront celles d'un signal continu.

Chacune des  $N$  équations de (2.1) décrit la loi de mise à jour de l'état d'activation (ou l'activation)  $x_i(t)$  de l'unité neuronale indexée par l'indice  $i$ . À chaque instant, l'activation du neurone au temps  $t$  est conditionné par l'activation de tous les neurones à l'instant précédent.

On appelle *dimension spatiale* la dimension sur laquelle évolue l'indice  $i$  et *dimension temporelle* la dimension sur laquelle évolue l'indice  $t$ . La moyenne spatiale désigne la moyenne sur tous les neurones à un instant donné, et la moyenne temporelle désigne la valeur moyenne d'un signal émis par un seul neurone. Notons au passage qu'il existe une autre dimension nécessaire pour les approches plus théoriques, appelée la *dimension de l'aléa*. Cette dimension porte sur l'ensemble des tirages aléatoires possibles selon les paramètres du modèle.

On distingue habituellement deux grandeurs qui permettent de décrire de façon plus détaillée les caractéristiques du neurone à l'instant  $t$  :

- *Champ local* : c'est le terme de sommation des activations des autres neurones au temps  $t-1$  pondéré par le poids synaptique  $J_{ij}$ . Ce terme représente l'influence à laquelle est soumis le neurone à cet instant.

$$c_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j(t-1)$$

- *Potentiel de membrane* (ou potentiel) : c'est le champ local auquel on sous-



trait le seuil, qui correspond à une influence propre conditionnant l'activation .

$$u_i(t) = c_i(t) - \theta_i$$

En fin de compte, on décrit habituellement le système par le jeu d'équations couplées (2.2).

$$\begin{cases} u_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t-1) - \theta_i \\ x_i(t) = f(u_i(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

Du point de vue de l'interprétation biologique, on considère parfois que, dans le cas d'une fonction de transfert à valeurs sur  $]0, 1[$ , l'activation  $x_i(t)$  représente le taux de décharge du neurone sur l'intervalle  $]t-1, t[$ , la valeur 1 étant rapportée à la fréquence de décharge maximale. C'est l'interprétation traditionnelle des fonctions de transfert à états continus.

Une autre interprétation consiste à considérer la valeur de  $x_i(t)$  comme une probabilité de décharge sur l'intervalle  $]t-1, t[$ . Cette interprétation peut être mise en œuvre numériquement, auquel cas l'activation au temps  $t$  dépend d'une probabilité et prend des valeurs binaires (un spike/pas de spike). À grande taille, ce modèle est équivalent à un modèle à états continus dont le champ local est bruité par un bruit gaussien <sup>1</sup>. Un tel modèle est présenté page 67.

L'approche que nous adopterons dans le cadre de cette thèse est sensiblement différente et sera justifiée plus loin. On établira un critère d'*activité* du neurone fondé sur l'écart-type du signal d'activation. Dans ce cadre, les neurones dont l'écart-type est faible sont considérés comme inactifs. Cela vaut pour les neurones dont le signal est saturé par la fonction de transfert.

La taille du réseau (nombre d'unités) est  $N$ . La matrice  $J_{ij}$ , de taille  $N \times N$ , décrit les couplages du réseau. L'espace des paramètres est de grande dimension, et, de ce fait, des prédictions sur le comportement asymptotique sont très difficiles. On a donc fixé certaines règles pour réduire l'espace des paramètres. Les poids sont des variables gaussiennes indépendantes et de moyenne  $E(J_{ij}) = \bar{J}/N$  et de variance  $\text{var}(J_{ij}) = \sigma_J^2/N$ , où  $N$  est la taille du réseau et  $\sigma_J$  l'écart-type de référence. On notera que la loi qui définit les tirages des poids synaptiques a été choisie de telle sorte que l'espérance et la variance de la *somme* des poids afférents  $\sum_j J_{ij}$  ne dépendent pas de  $N$ , et valent respectivement  $\bar{J}$  et  $\sigma_J^2$ . On impose de plus  $J_{ii} = 0$  (les neurones ne rebouclent pas sur eux-mêmes). Les seuils sont gaussiens, de moyenne  $\bar{\theta}$  et de variance  $\sigma_\theta^2$ .

<sup>1</sup>En effet, si on note le spike  $s_i(t) \in \{-1, 1\}$ , avec  $\mathcal{P}(s_i(t) = 1) = x_i(t)$  (soit  $E(s_i(t)) = x_i(t)$ ), alors le champ local  $\sum_j J_{ij}s_j(t)$  prend à chaque instant une valeur selon une loi qui se rapproche d'une loi gaussienne lorsque  $N$  est grand, et dont l'espérance vaut  $\sum_j J_{ij}x_j(t)$ . L'écart par rapport à cette espérance se comporte comme un bruit gaussien centré additionné au champ local.

Les variables  $g, \bar{J}, \sigma_J, \bar{\theta}, \sigma_\theta$  constituent les *paramètres macroscopiques* du système. Les valeurs précises des  $J_{ij}$  et des  $\theta_i$  issues d'un tirage aléatoire constituent les paramètres microscopiques du système.

Plusieurs remarques en découlent :

- Le tirage des poids et des seuils permet de caractériser entièrement le système dynamique. En introduisant cet aléa sur les poids, on se donne les moyens de construire autant de réseaux différents qu'on le souhaite. On parle de systèmes à *aléa gelé* pour caractériser des systèmes dépendant d'un tirage particulier.
- Pour obtenir une certaine homogénéité des comportements dynamiques d'un réseau à l'autre, on est amené à s'intéresser à des systèmes de grande taille. En effet, plus la taille est grande, plus les neurones tendront à se comporter statistiquement de la même manière, moins la dynamique dépendra du tirage initial des poids, et plus il sera facile de faire des prévisions sur le comportement de tels réseaux.
- Du fait de la loi qui définit les poids, les connexions sont (presque sûrement) asymétriques. *Cette asymétrie des connexions synaptiques est une condition nécessaire pour obtenir des comportements dynamiques complexes.* En brisant la contrainte de symétrie du modèle de Hopfield, on perd l'assurance de converger vers un point fixe.
- Toujours par opposition au modèle de Hopfield, le système possède pour une large plage de paramètres *un bassin d'attraction unique*<sup>2</sup>. Pour les paramètres courants que nous utiliserons, toute condition initiale mène donc au même attracteur. Dans ces conditions, *l'apport d'information ne peut pas reposer sur la configuration des états initiaux*, mais il faudra agir directement sur les paramètres microscopiques du système (valeurs des poids, valeurs des seuils).
- Le réseau est densément connecté, les connexions étant presque sûrement différentes de zéro. *Il n'y a aucune géométrie* au préalable dans un tel système, et en particulier chaque neurone est voisin de tous les autres neurones. À chaque instant, chaque neurone traite un signal de champ (champ local) qui se fonde sur la totalité de l'activité du réseau au temps précédent.

### 2.1.2 Comportement statistique à taille finie

Les mesures que nous présentons ici ont pour but d'illustrer le rôle du paramètre de gain  $g$  et du seuil  $\bar{\theta}$  sur la répartition statistique des activations des neurones. On ne s'intéresse (pour l'instant) pas au régime dynamique. Nous présentons ici des répartitions empiriques fondées sur l'observation des activations et des potentiels sur les quelques pas de temps qui suivent l'initialisation.

---

<sup>2</sup>il est néanmoins possible de mettre en évidence des régions de l'espace des paramètres macroscopiques où l'on peut s'attendre à avoir deux bassins d'attraction, voir [79]

Les réseaux sont de taille  $N = 100$ . Cette taille assure une bonne homogénéité des comportements dynamiques d'un réseau à l'autre. Les paramètres invariants sont  $\bar{J} = 0$  (poids synaptiques centrés),  $\sigma_J = 1$  et  $\sigma_\theta = 0.1$ . On regarde donc l'évolution des répartitions des potentiels  $u_i$  et des activations  $x_i$  en modifiant les paramètres  $g$  et  $\bar{\theta}$ .

À  $t = 0$ , les activations  $x_i(0)$  de chaque réseau sont initialisées suivant une loi uniforme en  $]0, 1[$ . On itère ensuite la dynamique jusqu'au temps  $t_m > 0$ . On mesure alors le potentiel  $u_i(t_m)$  (ou l'activation  $x_i(t_m)$ ) d'une seule neurone du réseau, d'indice  $i$ . Le temps  $t_m$  et l'indice  $i$  étant fixés, cette mesure de répartition porte sur l'aléa des réseaux, c'est à dire sur un grand nombre de tirages des poids qui définissent les systèmes. Pour plusieurs jeux de paramètres  $g$  et  $\bar{\theta}$ , on répète cette mesure sur 10000 réseaux différents, ce qui permet d'obtenir des histogrammes de répartition assez précis.

On constate en premier lieu que la convergence vers une répartition stationnaire est très rapide. Sur la figure 2.2, on a représenté trois répartition des potentiels obtenues pour les valeurs  $t_m = 1$ ,  $t_m = 2$  et  $t_m = 100$ . On voit alors clairement que dès le deuxième pas de temps, on est très près d'avoir atteint la répartition stationnaire. En particulier, cette répartition stationnaire, qui correspond à une observation sur tous les réseaux de façon indifférenciée, est atteinte bien avant le régime stationnaire de la dynamique des réseaux individuels (voir page 54).

Les mesures suivantes sont toutes effectuées au temps  $t_m = 20$ , temps auquel on s'attend à obtenir une répartition stationnaire.

- Le premier jeu de figures (figure 2.3) a pour mission d'illustrer le rôle du paramètre de gain  $g$  sur la répartition des activations  $x_i(t)$ . On voit que cette répartition des activations a une forme particulière en "cuvette". Cette forme correspond au passage de la répartition gaussienne des  $u_i(t)$  dans la fonction de transfert  $f_g$ , qui répartit les valeurs non-linéairement sur l'intervalle  $]0, 1[$ . La loi des  $x_i(t)$  est plus précisément la loi image par la fonction de transfert de la loi des  $u_i(t)$ . Ainsi, en changeant la valeur de  $g$ , on modifie la forme de la fonction de transfert ce qui a un effet direct sur la loi des  $x_i(t)$ . Sachant que l'augmentation du gain fait tendre la fonction de transfert vers une fonction seuil  $\Theta(x > 0)$ , la même augmentation de gain fait tendre la répartition des  $x_i(t)$  vers une répartition binaire. Ainsi, la répartition en cuvette des activations tend à se creuser lorsque l'on augmente le gain. Par contraste, on constate que la modification du paramètre  $g$  a peu d'influence sur la répartition des  $u_i(t)$ .

Le tableau 2.1 donne les valeurs de la moyenne égale à l'espérance sur l'aléa  $\mathcal{M}_1(t_m) = E(x_i(t_m))$ , du moment d'ordre 2  $\mathcal{M}_2(t_m) = E(x_i^2(t_m))$ , du moment d'ordre 3  $\mathcal{M}_3(t_m) = E(x_i^3(t_m))$  et du moment d'ordre 4  $\mathcal{M}_4(t_m) = E(x_i^4(t_m))$ , à partir de la répartition des  $x_i(t_m)$  de la figure 2.3. L'évolution de ces grandeurs empiriques est donnée en fonction de  $g$ . Les indicateurs appelés "Gauchissement" et "Aplatissement" donnent des indications sur le

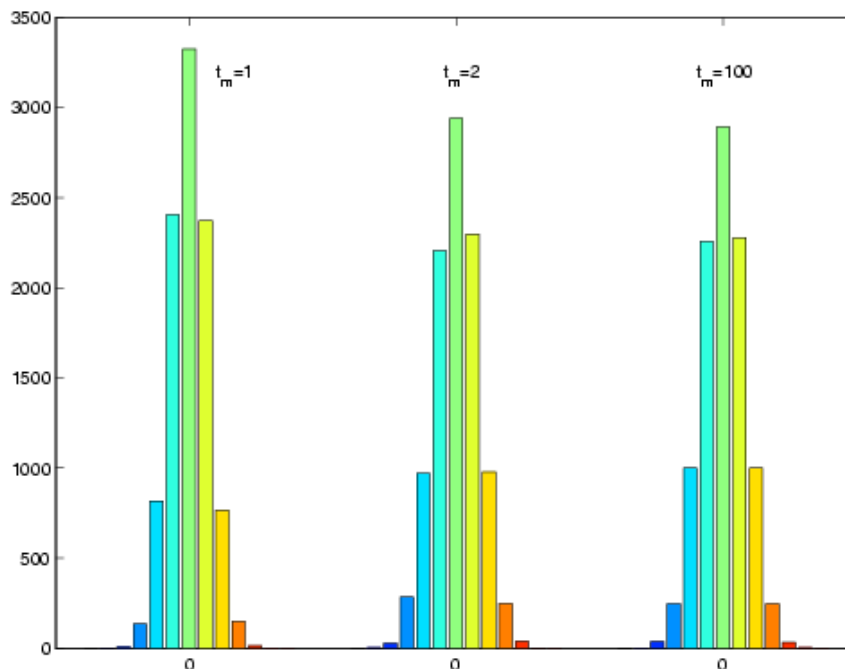


FIG. 2.2 – **Convergence vers la répartition stationnaire.** On a représenté sur cette figure la répartition empirique sur l'aléa des  $u_i(t_m)$ , pour (de gauche à droite)  $t_m = 1$ ,  $t_m = 2$  et  $t_m = 100$ . Les mesures ont été effectuées à chaque fois sur 10000 réseaux différents. Les histogrammes font apparaître des répartitions centrées dont l'écart-type est de l'ordre de 0,7. On constate que la convergence vers une répartition stationnaire est très rapide, puisqu'à  $t_m = 2$  on a une répartition très proche de celle obtenue pour  $t_m = 100$ . Les autres paramètres sont  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $g = 4$ .

caractère non gaussien de la distribution (cette loi est par ailleurs calculable analytiquement, voir [9]) :

- Le Gauchissement (*skewness*) vaut  $\frac{E((x-E(x))^3)}{\sigma_x^3}$ , où  $\sigma_x$  est l'écart-type  $\sqrt{E((x-E(x))^2)}$ . Il mesure le caractère asymétrique de la loi de part et d'autre de la valeur moyenne. Pour une loi gaussienne, le gauchissement doit se rapprocher de zéro.
- L'Aplatissement (*Kurtosis*) vaut  $\frac{E((x-E(x))^4)}{\sigma_x^4}$ . Il donne une indication sur le caractère non-connexe de la distribution (plus l'aplatissement est proche de 1, plus la loi tend à présenter deux zones de forte densité disjointes). L'Aplatissement d'une loi gaussienne vaut 3, celui d'une loi uniforme vaut 1.8, celui d'une loi binaire vaut 1.

g	2	4	6		2	4	6
$\mathcal{M}_1(t_m)$	0.4960	0.5010	0.5029				
$\mathcal{M}_2(t_m)$	0.3626	0.4298	0.4563	Variance	0.1166	0.1788	0.2033
$\mathcal{M}_3(t_m)$	0.2965	0.3939	0.4327	Gauchissement	0.0245	0.0245	-0.0143
$\mathcal{M}_4(t_m)$	0.2550	0.3702	0.4170	<b>Aplatissement</b>	<b>1.5085</b>	<b>1.2221</b>	<b>1.1386</b>

TAB. 2.1 – Valeur des moments de la répartition empirique sur l'aléa des  $x_i(t_m)$  en fonction de  $g$ , sur une base de 10000 mesures, avec  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $t_m = 20$ .

On constate à la lecture du tableau que l'aplatissement tend vers 1 lorsque  $g$  croît, ce qui illustre le fait que la distribution tend vers une distribution binaire pour  $g$  croissant. On a donc un passage progressif de l'analogique au digital.

- Rappelons que les seuils  $\theta_i$ , tout comme les poids, sont fixés à l'initialisation du réseau selon une loi gaussienne  $\mathcal{N}(\bar{\theta}, \sigma_\theta^2)$ . La deuxième série de figures 2.4, qui est à mettre en parallèle avec la précédente, montre, à  $g$  constant, l'influence du paramètre de moyenne sur les seuils  $\bar{\theta}$  sur la répartition des activations  $x_i(t)$ . Plus précisément, une valeur positive de  $\bar{\theta}$  décale la répartition des potentiels  $u_i(t)$  vers une gaussienne centrée en  $-\bar{\theta}$ . Cette non-symétrie se traduit sur la répartition des  $x_i(t)$ . On voit donc que des seuils positifs tendent en moyenne à atténuer l'activation des neurones (et a contrario des seuils négatifs tendent à renforcer l'activation des neurones). On donne dans le tableau 2.2 les valeurs de la moyenne  $\mathcal{M}_1(t_m)$ , du moment d'ordre 2  $\mathcal{M}_2(t_m)$ , du moment d'ordre 3  $\mathcal{M}_3(t_m)$  et du moment d'ordre 4  $\mathcal{M}_4(t_m)$  de la répartition des  $x_i(t_m)$  de la figure 2.4, en fonction de  $\bar{\theta}$ . On constate cette fois-ci que l'indicateur de gauchissement augmente avec  $\bar{\theta}$ , ce qui illustre l'asymétrie croissante de la distribution.

Ces premières mesures ont permis d'illustrer :

- l'homogénéité du comportements statistiques d'un grand ensemble de réseaux. Ce premier point permet de se familiariser avec les grandeurs mani-

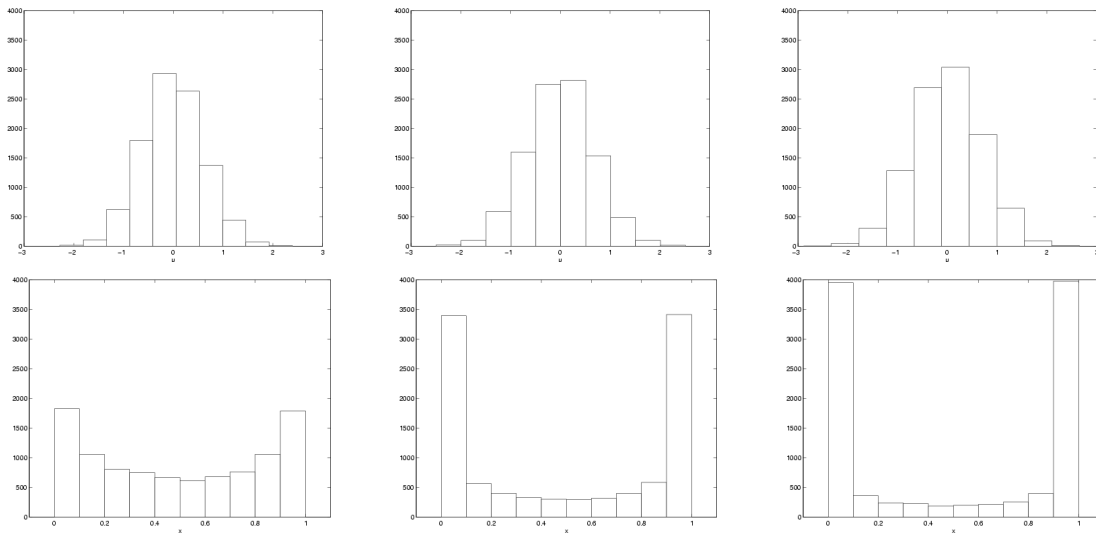


FIG. 2.3 – **Influence du gain sur la répartition des activations.** Les figures du haut donnent la répartition empirique sur l'aléa des  $u_i(t_m)$  et les figures du bas donnent la répartition empirique sur l'aléa des  $x_i(t_m)$ , toutes sur la base de 10000 réseaux. On a de gauche à droite  $g = 2$ ,  $g = 4$  et  $g = 6$ . On constate une influence forte du paramètre de gain sur la répartition des activations : une augmentation du gain tend à creuser la distribution et à rapprocher la distribution d'une distribution binaire. Les autres paramètres sont  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $t_m = 20$ .

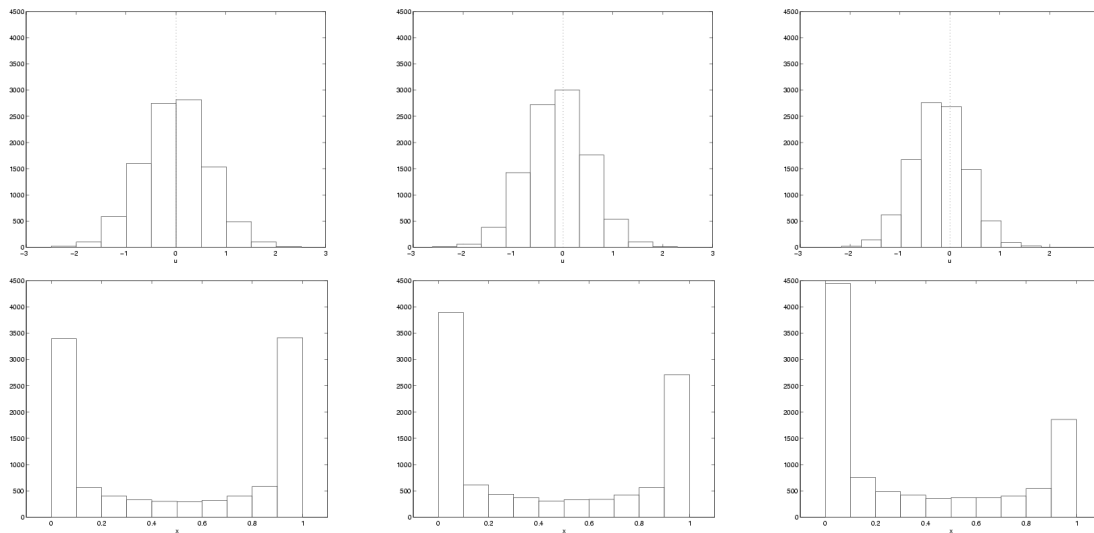


FIG. 2.4 – **Influence du seuil moyen  $\bar{\theta}$  sur la répartition des activations.** Les figures du haut donnent la répartition empirique sur l'aléa des  $u_i(t_m)$  et les figures du bas donnent la répartition empirique sur l'aléa des  $x_i(t_m)$ , toutes sur la base de 10000 réseaux. On a de gauche à droite  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$  et  $\bar{\theta} = 0.2$ . La présence de seuils non centrés tend à décaler vers des valeurs négatives la répartition des  $u_i(t_m)$ , ce qui se traduit par une asymétrie sur la distribution des  $x_i(t_m)$ . Les autres paramètres sont  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $g = 4$ ,  $t_m = 20$ .

$\theta$	0	0.1	0.2		0	0.1	0.2
$\mathcal{M}_1(t_m)$	0.5010	0.4398	0.3645				
$\mathcal{M}_2(t_m)$	0.4298	0.3639	0.2829	Variance	0.1788	0.1705	0.1500
$\mathcal{M}_3(t_m)$	0.3939	0.3269	0.2452	<b>Gauchissement</b>	<b>0.0245</b>	<b>0.2397</b>	<b>0.5641</b>
$\mathcal{M}_4(t_m)$	0.3702	0.3030	0.2218	Aplatissement	1.2221	1.3070	1.6376

TAB. 2.2 – Valeur des moments de la répartition empirique sur l'aléa des  $x_i(t_m)$  en fonction de  $\bar{\theta}$ , sur une base de 10000 mesures, avec  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $g = 4$ ,  $t_m = 20$ .

pulées dans le cadre des équations de champ moyen (voir page 66).

- le caractère changeant de la répartition des  $x_i$  lorsque l'on fait varier les paramètres  $g$  et  $\theta$ . La physionomie de la loi des activations a des effets importants sur le régime dynamique du réseau, et influence en particulier l'aspect du spectre de la jacobienne à la déstabilisation (voit page 56).

### 2.1.3 Comportement dynamique

Dans cette section, nous nous intéresserons aux dynamiques et aux trajectoires développées par quelques réseaux de taille finie (avec  $N \geq 50$ ). Chaque réseau produit un signal dynamique qui lui est propre. Il est possible, d'un réseau à l'autre, d'obtenir une grande variété de formes d'attracteurs.

Le paramètre de gain  $g$  est un paramètre critique permettant de mettre en évidence sur la plupart des systèmes une route vers le chaos par quasi-périodicité. Le caractère générique de cette route n'empêche pas une grande diversité dans la façon dont celle-ci se manifeste d'un réseau à l'autre, sans contradiction avec l'uniformité observée sur les répartitions statistiques dans la section précédente.

Il est à noter qu'hormis pour certaines gammes de paramètres connues [79], le système (2.2) possède un attracteur unique. Il se distingue en cela du modèle de Hopfield [35], qui possède un grand nombre de bassins d'attraction. Dans nos systèmes, c'est la nature de cet attracteur unique qui nous permet de déterminer le régime dynamique, ainsi que les valeurs critiques des paramètres correspondant à la transition entre différents régimes dynamiques.

#### Signal moyen.

Pour décrire exhaustivement la dynamique d'un réseau donné, il faut prendre en compte l'ensemble des variables d'état, l'activation  $x_i(t)$  (ou le potentiel  $u_i(t)$ , le passage de l'un à l'autre étant immédiat). Une trajectoire de notre système, entre l'instant 0 et l'instant  $T$ , est donc décrite par la matrice de la dynamique  $\{x_i(t)\}_{i=1..N, t=0..T}$ . Bien sûr, la représentation graphique d'un tel signal est impossible en pratique, et pour décrire le régime dynamique, on prendra souvent le signal constitué par la moyenne des activations à chaque instant



$m_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ . Cette valeur moyenne est parfois appelée le *champ moyen* du réseau à l'instant  $t$ , même si cette terminologie se réfère le plus souvent à la moyenne de la loi des activations pour la limite des grandes tailles. Pour la suite, nous désignerons ce signal sous le terme de *signal moyen*.

Le signal moyen a l'avantage d'être facile à représenter et à analyser. Son comportement dynamique donne un reflet fidèle du comportement dynamique des signaux d'activation individuels. Par exemple, si on constate que  $m_N(t)$  est périodique, on sait que la dynamique individuelle de tous les neurones est périodique. Du fait de la densité des connections, le réseau présente une parfaite homogénéité dynamique. C'est un système mono-phasique.

### Dynamique transitoire

La notion d'attracteur a été précisée dans la partie introductive sur les systèmes dynamiques page 8. Le temps qui sépare l'initialisation et le moment où la trajectoire atteint un voisinage fixé de l'attracteur constitue la *durée de relaxation*. Cette durée est variable d'un système à l'autre. La dynamique qui se déploie pendant la relaxation est appelée *dynamique transitoire*. La dynamique correspondant à un parcours sur l'attracteur constitue la *dynamique stationnaire*.

Dans la mesure où le système possède un attracteur unique, les caractéristiques de la dynamique stationnaire sont les mêmes pour toute condition initiale. Au contraire, la dynamique transitoire dépend des conditions initiales. Pour caractériser la dynamique du système, il est nécessaire de supprimer les transitoires. Le choix du nombre de transitoires à supprimer est, comme nous allons le voir, un problème délicat.

L'application de premier retour (voir page 13) du signal moyen  $m_N(t)$  fournit dans notre cas une représentation simple et pratique de l'attracteur du système. Un premier exemple est donné dans les figures 2.5 et 2.6 où la représentation temporelle classique du signal et l'application de premier retour sont mises côte à côte.

Ces deux figures nous permettent d'illustrer le comportement des transitoires, dans le cas où le système converge vers un point fixe. Dans les deux cas, le système converge vers un point fixe, mais la durée de cette convergence est courte dans le premier cas (figure 2.5) (environ 60 pas de temps) et très longue dans le second cas (figure 2.6) (plus de 10000 pas de temps).

Les temps de convergence très longs se rencontrent essentiellement lorsque le système est proche d'une valeur de bifurcation. Dans l'exemple de la figure 2.6, le système est très proche de la valeur d'entrée en régime cyclique. Hormis pour ces conditions critiques, le temps de convergence vers le régime stationnaire est de l'ordre de 40 à 100 pas de temps. Pour la suite, dans le cadre de l'étude de systèmes individuels, les transitoires seront supprimés par l'expérimentateur. Pour des simulations à grande échelle, en supposant que les comportements singuliers tendent à s'effacer face au nombre de systèmes mis en jeu, les transitoires

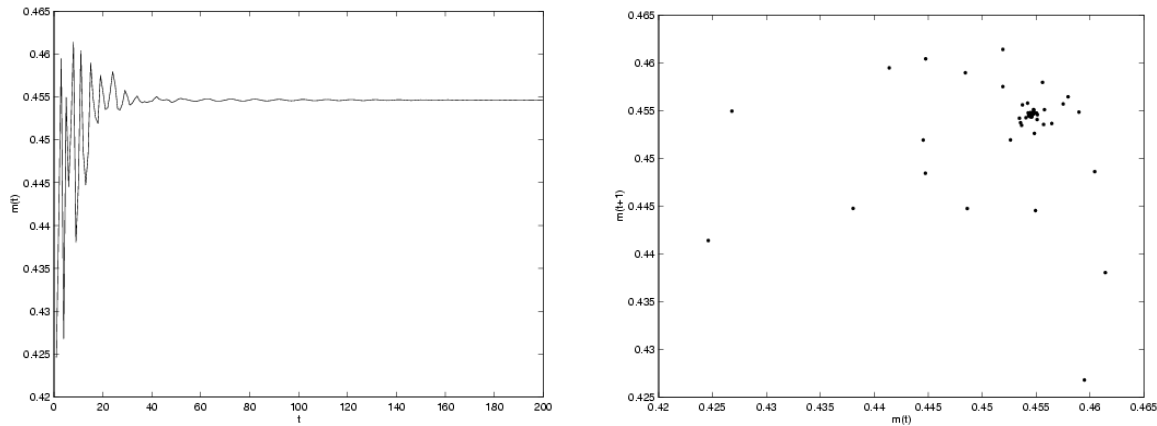


FIG. 2.5 – Deux représentations du même signal  $m_N(t)$ , pour  $t$  de 0 à 200. À gauche, on a la représentation temporelle du signal, à droite, on a l'application de premier retour. La dynamique converge vers un point fixe. Les autres paramètres sont  $N = 200$ ,  $g = 5.6$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

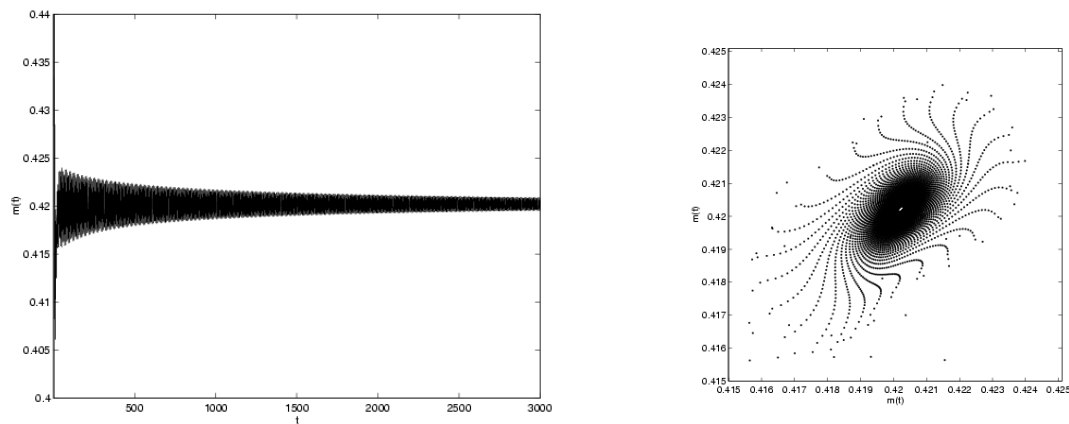


FIG. 2.6 – Deux représentations du même signal  $m_N(t)$ , pour  $t$  de 0 à 3000. À gauche, on a la représentation temporelle du signal, à droite, on a l'application de premier retour. La dynamique converge vers un point fixe. Les autres paramètres sont  $N = 200$ ,  $g = 4.65$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

supprimés seront fixés à l'avance, et compris entre 100 et 1000 pas de temps.

### Déstabilisation du réseau

La déstabilisation du système (2.2) intervient lorsque l'application linéarisée du système au point fixe  $x^*$  devient dilatante dans une direction (voir page 10). L'étude spectrale de la jacobienne permet de déterminer l'instant où une direction passe de la contraction à la dilatation. À  $g$  croissant, cette déstabilisation intervient lorsque le rayon spectral  $\rho$  de la jacobienne (la norme de la plus grande valeur propre) atteint la valeur 1. Dans un système dont le point fixe est  $x^*$ , l'expression de la Jacobienne est

$$D(x^*) = 2g\Lambda(x^*)J$$

où :

- $J$  est la matrice des poids.
- $\Lambda(x^*)$  est une matrice nulle partout sauf sur sa diagonale où  $\Lambda_{ii}(x^*) = x_i^* - x_i^{*2}$ .

Sachant que  $f'_g(u_i^*) = 2g(f_g(u_i^*) - f_g^2(u_i^*)) = 2g(x_i^* - x_i^{*2})$ , la Jacobienne est la matrice des poids pondérée pour chaque ligne par la valeur de la dérivée locale  $f'_g(u_i^*)$ . Pour plus de détails, voir [79].

En utilisant le théorème de Girko [83] sur les grandes matrices aléatoires, on prédit que la répartition limite des valeurs propres de la matrice des poids  $J$  est une répartition uniforme sur le disque complexe de rayon  $\sigma_J$ , et par conséquent sa plus grande valeur propre est  $\sigma_J$ . Ainsi, pour une matrice de taille  $N$  (grand) dont les valeurs sont tirées selon une loi gaussienne centrée d'écart-type  $\sigma_J/\sqrt{N}$ , la valeur du rayon spectral est approchée par  $\sigma_J$ . Des mesures numériques sur des matrices aléatoires de taille finie montrent néanmoins que cette répartition n'est pas exactement uniforme et tend à présenter une surdensité sur l'axe des réels [78].

La répartition des valeurs propres de la Jacobienne  $D(x^*)$  à la déstabilisation est quant à elle non-uniforme sur le disque unité, comme on peut le voir sur la figure 2.7. Outre la surdensité sur l'axe des réels que l'on retrouve, il y a une densité croissante de la périphérie vers le centre. Cette surdensité pour les valeurs propres très petites en norme repose sur le fait qu'il existe un grand nombre de neurones dont la valeur du potentiel  $u_i^*$  correspond à une zone saturante de la fonction de transfert, auquel cas la dérivée est proche de zéro. La pondération des lignes de la matrice des poids a pour effet de mettre un grand nombre de ces lignes à des valeurs proches de zéro, et donc de produire des valeurs propres petites. Ceci a pour conséquence de faire reposer la valeur du rayon spectral sur un nombre restreint de neurones.

La distribution des  $x_i(t)$  est fortement non gaussienne lorsqu'on effectue nos observations sur un grand nombre de réseaux (voir figures 2.3 et 2.4). Ceci reste vrai sur des réseaux particuliers, au sein desquels la distribution des  $x_i(t)$  suit la

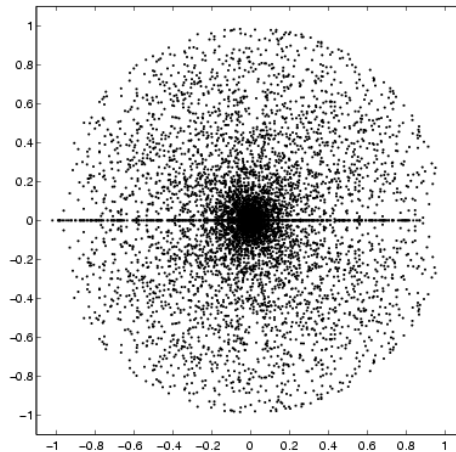


FIG. 2.7 – **Répartition du spectre de la jacobienne.** On a superposé sur la même figure les spectres de 50 réseaux de  $N = 200$  neurones à la déstabilisation. En abscisse : l'axe des réel, en ordonnée : l'axe des imaginaires. Paramètres :  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

même répartition en forme de cuvette. On voit sur ces répartitions que plus la valeur de  $g$  augmente, plus la proportion de neurones dont les valeurs sont proches du centre de la répartition (0.5) diminue. Par conséquent, un petit nombre de neurones a une influence forte sur la valeur de la jacobienne, et donc sur la valeur de déstabilisation, tandis que la majorité des neurones, situés aux deux extrémités de la distribution, ont une influence presque nulle. Ainsi, le nombre de ces valeurs centrales est variable d'un réseau à l'autre et peut avoir un effet importants sur la valeur de déstabilisation, ce qui peut expliquer la grande disparité observée sur les valeurs de déstabilisation d'un réseau à l'autre. Dans le prochain chapitre, on explorera plus en détail le rôle des neurones dont le potentiel est central en tant que moteurs de la dynamique du réseau. On verra également que cette propriété a son intérêt, dans la mesure où des changements imposés sur la configuration spatiale des potentiels d'un réseau donné ont une influence directe sur les caractéristiques de la jacobienne, et par extension sur la valeur de déstabilisation ainsi que sur la période du cycle atteint.

On constate par contre que l'uniformité radiale (sur l'angle) est préservée. Toutes les directions sont représentés de façon égales, à l'exception notable de la direction correspondant à l'axe des réels dont la surdensité a déjà été mentionnée.

Par ailleurs, en supposant que tous les neurones sont indépendants, l'espérance de  $x_i^* - x_i^{*2}$  vaut  $q - 2\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4$ . Le disque complexe a donc pour rayon  $2g\sigma_J E(x_i^* - x_i^{*2}) = 2g\sigma_J(q - 2\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4)$ . La valeur de  $\rho$  est approchée par cette grandeur. On a reporté sur la figure 2.8 l'évolution des deux valeurs de  $\rho$ , l'une exacte et l'autre approchée, en faisant varier  $g$  sur un système de taille  $N = 500$  jusqu'à la déstabilisation (depuis la valeur  $g = 1$  jusqu'à la valeur  $g_{dest} = 4.7$ ).

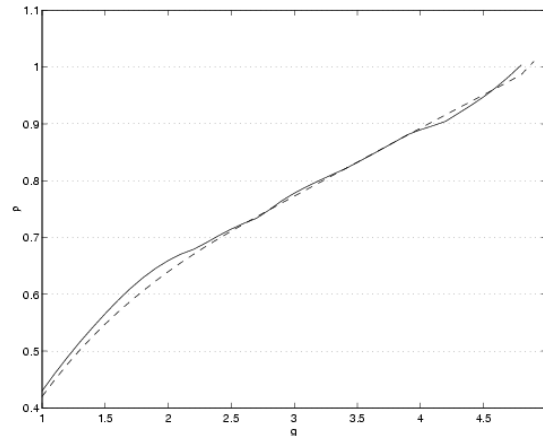


FIG. 2.8 – Évolution comparée de la valeur exacte (ligne pleine) et de la valeur approchée (ligne pointillée) du rayon spectral de la jacobienne d'un système tiré selon les paramètres  $N = 500$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta} = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ . On trouve ici  $g_{dest} = 4.7$ .

### Régimes cycliques

Dès lors que  $\rho$  dépasse la valeur 1, le système est dit déstabilisé. On a une bifurcation, et on entre dans un nouveau régime dynamique.

Le dépassement de la valeur 1 signifie qu'une des dimensions du système n'est plus contractante, et selon cette direction, la distance entre deux trajectoires tend à augmenter. Le système est dilatant selon cette direction. Le système étant non-linéaire, la distance atteint une valeur limite dictée par les termes de second ordre.

La nature de ce nouveau régime dynamique dépend des caractéristiques de la valeur propre maximale de la jacobienne. Du fait de la non-symétrie des connexions, ces valeurs propres prennent leurs valeurs sur l'espace complexe  $\mathbb{C}$ . On voit donc naturellement se dessiner trois cas :

- Si la valeur propre est réelle, égale à 1. On a alors une bifurcation de type *nœud-col*. Il y a apparition d'un nouveau point fixe stable, et le précédent point fixe devient instable. Dans ce cas, Il n'y a pas déstabilisation au sens d'apparition d'une oscillation. On constate néanmoins que ce type de bifurcation est extrêmement rare sur notre modèle. L'étude de la figure 2.7 montre d'ailleurs que le spectre est moins dense aux alentours de la valeur réelle 1. Il est difficile de proposer une explication à ce phénomène : purement numérique ou plus profond ?
- Si la norme maximale est atteinte par deux valeurs complexes conjuguées (cas le plus courant), on a une *bifurcation de Hopf*. C'est la bifurcation la plus commune. Le système atteint un régime périodique ou semi-périodique, dont la pseudo-période est donnée par  $2\pi/\alpha$  où  $\alpha$  est l'angle entre la demi-

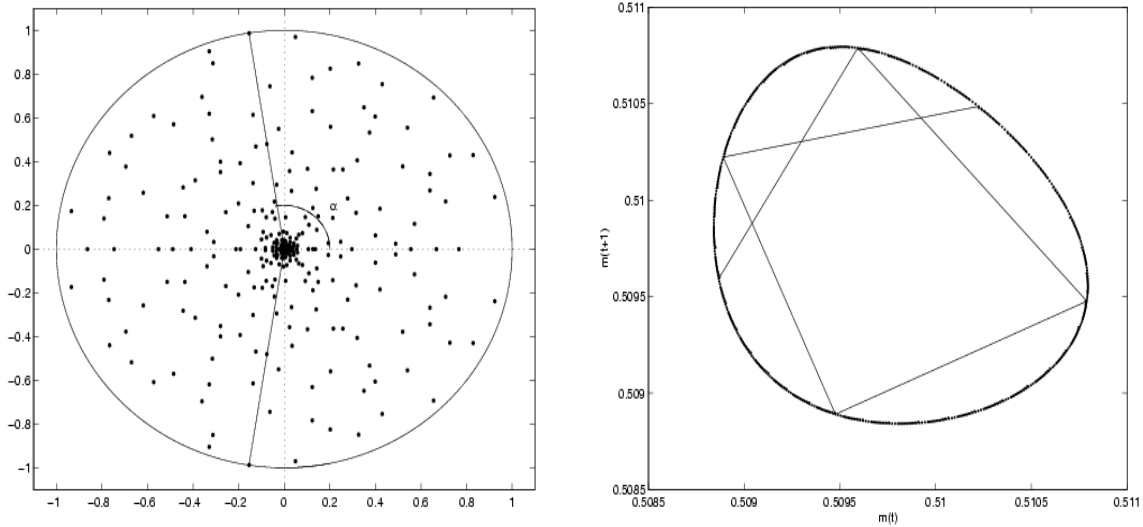


FIG. 2.9 – La figure de gauche représente le spectre de la jacobienne du système dans l'espace complexe (axe des réels, axe des imaginaires) à la valeur de déstabilisation  $g_{dest} = 4.9$ . Deux valeurs propres conjuguées franchissent la valeur 1, et forment avec l'axe des réels un angle  $\alpha = 1.73$  ce qui donne une pseudo-période de l'ordre de 3.63. La figure de droite donne la carte de premier retour de la dynamique stationnaire, pour un paramètre de gain légèrement supérieur  $g = 4.95$ . La dynamique est cyclique, avec une pseudo-période de l'ordre de 3.61. Six points successifs de la dynamique sont reliés par des lignes. On constate qu'il faut un peu plus de trois et un peu moins de quatre itérations pour "faire le tour" de l'attracteur. Le système a été défini avec les paramètres  $N = 400$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta} = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

droite centrée qui passe par cette valeur propre et l'axe des réels (voir figure 2.9).

- Si la valeur propre est réelle, égale à -1. On a une *bifurcation flip*. Le nouveau régime dynamique est périodique, de période 2.

La répartition radiale des valeurs propres approchant une répartition uniforme sur le disque complexe de rayon 1, on s'attend à a voir presque sûrement une bifurcation de Hopf (voir à ce titre [78]). Il s'avère que du fait de la surdensité sur l'axe des réels, les bifurcations flip, bien que moins courantes, ne sont cependant pas rares pour des valeurs de  $N$  de l'ordre de 100.

La figure 2.9 donne un exemple de spectre de jacobienne atteint à la déstabilisation sur un réseau de taille  $N = 400$ , ainsi que la dynamique cyclique atteinte après bifurcation.

Pour la suite on appellera *régimes cycliques* les régimes périodiques ou pseudo-périodiques. Dans ce cas, le terme *cyclique* s'oppose au terme *chaotique*.

### Routes vers le chaos

La déstabilisation du système nous fait entrer de plein pied dans le comportement à proprement parler *dynamique* du réseau. S'il était besoin de le préciser, le terme dynamique désigne un système capable de produire des signaux non constants *avec le temps*. La forme des trajectoires produites détermine le *régime dynamique* du système.

La plupart des réseaux ont qualitativement le même comportement dynamique lorsque l'on augmente le paramètre de gain  $g$ . Le système décrit une *route vers le chaos par quasi-périodicité* (voir page 10). La présence d'une telle route dans notre modèle illustre la généralité du phénomène de route vers le chaos [78]. Une succession de régimes dynamiques, dont la complexité augmente, mène le système du point fixe au chaos. La transition d'un régime dynamique à un autre passe par des paliers bien déterminés, appelés bifurcations, correspondant à une valeur critique du paramètre  $g$ , et marquant la frontière entre des dynamiques qualitativement différentes. En conformité avec le scénario classique [7], ces régimes dynamiques sont un cycle (une seule fréquence fondamentale dans le spectre de Fourier), un tore (deux fréquences fondamentales dans le spectre). Les deux fréquences tendent alors à entrer en résonance, et cet accrochage de fréquence précède de peu l'entrée dans le chaos.

Une remarque s'impose sur l'utilisation de l'outil informatique et la précision des nombres manipulés. Ces nombres étant d'une précision finie, ils sont nécessairement dans un rapport rationnel. On utilise des réels double précision, codés sur 8 octets ; un rapport rationnel courant entre deux réels (en supposant que les bits de poids faible sont différents) met en jeu des valeurs entières de l'ordre de  $10^{15}$  ( $2^{50}$ ). Dans ce cas, il faudrait environ  $10^{15}$  points pour fermer la suite de points qui parcourt le tore. En pratique, un accrochage du type de ceux décrits dans la route vers le chaos a une probabilité infime d'être purement lié à des phénomènes numériques.

Lors de l'entrée dans le régime chaotique, la dynamique perd sa structure périodique ou pseudo-périodique. Au sein de l'attracteur, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter exponentiellement au cours du temps. L'entrée dans le régime chaotique marque une rupture fondamentale, qui brise la capacité à prédire le comportement du système au delà d'un horizon temporel déterminé.

Tous les régimes dynamiques décrits ci-dessus peuvent être représentés à l'aide de l'application de premier retour sur le signal moyen  $m_N(t)$ . Lors d'une route vers le chaos, cette représentation met en évidence une grande variété de formes. Ainsi, sur une plage de valeurs de  $g$  correspondant à un même régime dynamique, on peut constater des déformations et des dilatations sur l'attracteur, en particulier pour les attracteurs cycliques. Les bifurcations sont également marquées par des changements visuels. La transition du cycle au tore  $\mathcal{T}2$  fait apparaître une structure finement striée correspondant à une couverture dense de la sur-

face torique. L'accrochage de fréquence fait apparaître un cycle très embrouillé, correspondant à une trajectoire refermée à la surface du tore. La transition de l'accrochage de fréquence au chaos se traduit par une dispersion des points de la trajectoire autour de la structure obtenue à l'accrochage. Lorsque  $g$  s'éloigne de la frontière du chaos, la dispersion des points augmente et l'attracteur apparaît de plus en plus "bruité". Un tel exemple de route vers le chaos est présenté sur la figure 2.10.

Il existe de nombreuses variantes à cette route générique, faisant intervenir des bifurcations flip. La figure 2.11 présente une route vers le chaos où la bifurcation flip initiale est suivie par deux bifurcations de Hopf (cycle double et tore double) avant de basculer dans le chaos.

### Structure fractale des attracteurs chaotiques

Les dynamiques chaotiques qui se déploient dans nos réseaux sont des dynamiques d'aspect très irrégulier. Lorsque cette dynamique correspond à une valeur de  $g$  élevée, éloignée de la frontière du chaos, le signal moyen a toutes les apparences d'un bruit gaussien. Notre système déterministe produit donc un signal qui a l'apparence du bruit.

Néanmoins, à la frontière du chaos, il est possible de trouver des attracteurs étranges dont la structure spatiale présente les caractéristiques d'une fractale. Un tel attracteur est présenté sur la figure 2.12. Les agrandissements montrent que des structures filamenteuses, résiduelles de l'accrochage de fréquence, sont décelables à différentes échelles.

### Exposants de Lyapunov

En régime chaotique, la distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Étant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence

La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Dans la mise en œuvre numérique, après initialisation, 5000 transitoires sont tout d'abord supprimés ( $t_0 = 5000$ ). Le potentiel  $u(t_0)$  sert de point d'initiation. On lui adjoint comme point voisin  $u'(t_0)$  tel que pour tout  $i$  dans  $1..N$ ,  $u'_i(t_0) = u_i(t_0 + \varepsilon)$ ; on a ainsi  $d(u(t_0), u'(t_0)) = N\varepsilon$ . On calcule les deux trajectoires partant



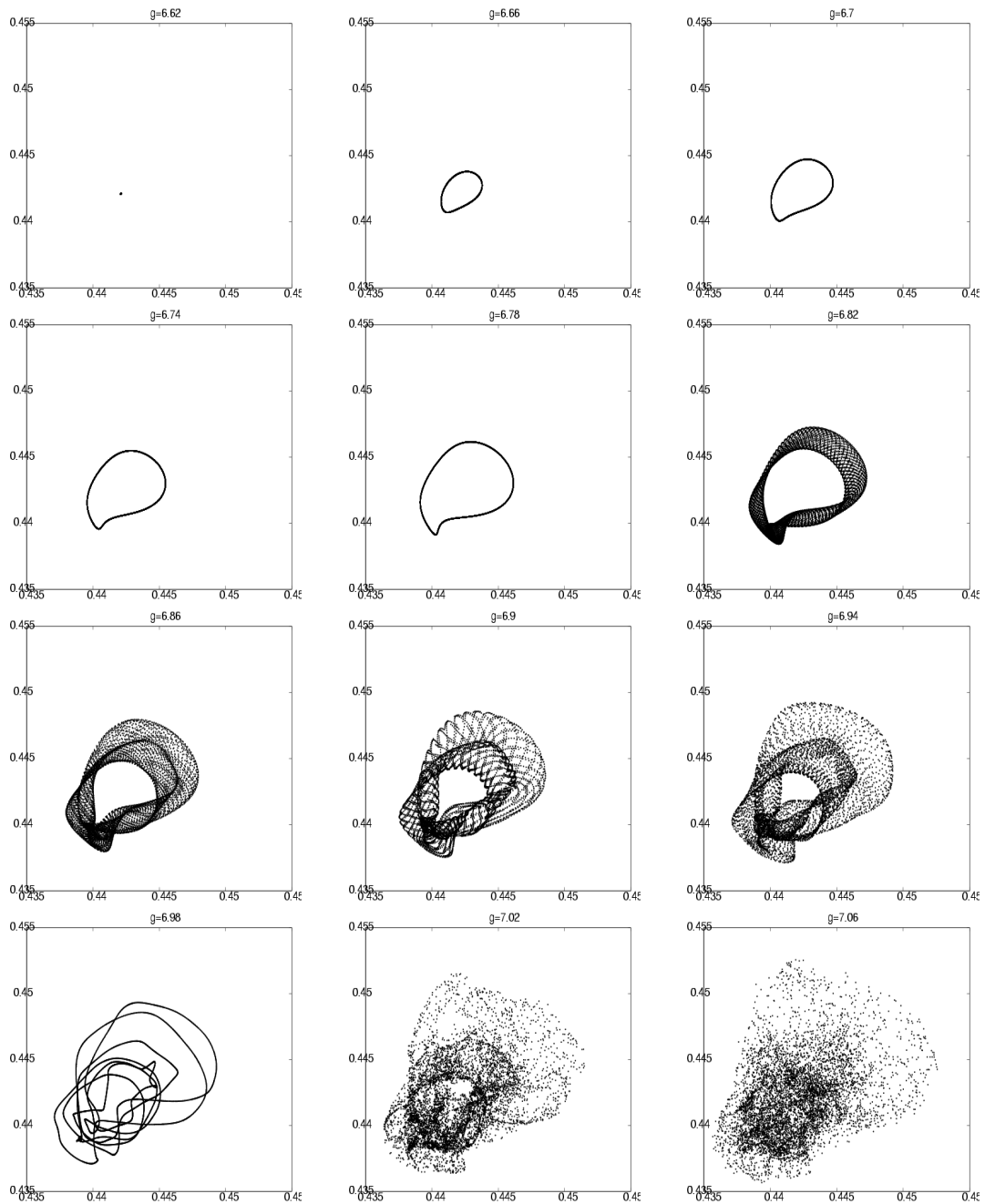


FIG. 2.10 – Un exemple de route vers le chaos avec deux bifurcations de Hopf. On a représenté le diagramme de premier retour du signal moyen  $m_N(t)$ , pour des valeurs de  $g$  comprises entre  $g = 6.62$  et  $g = 7.06$ , avec des pas de  $0.04$ . On trouve comme valeur de déstabilisation  $g_{dest} = 6.62$ . On a itéré la dynamique sur  $10000$  pas de temps et supprimé  $1000$  transitoires. Les paramètres sont  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

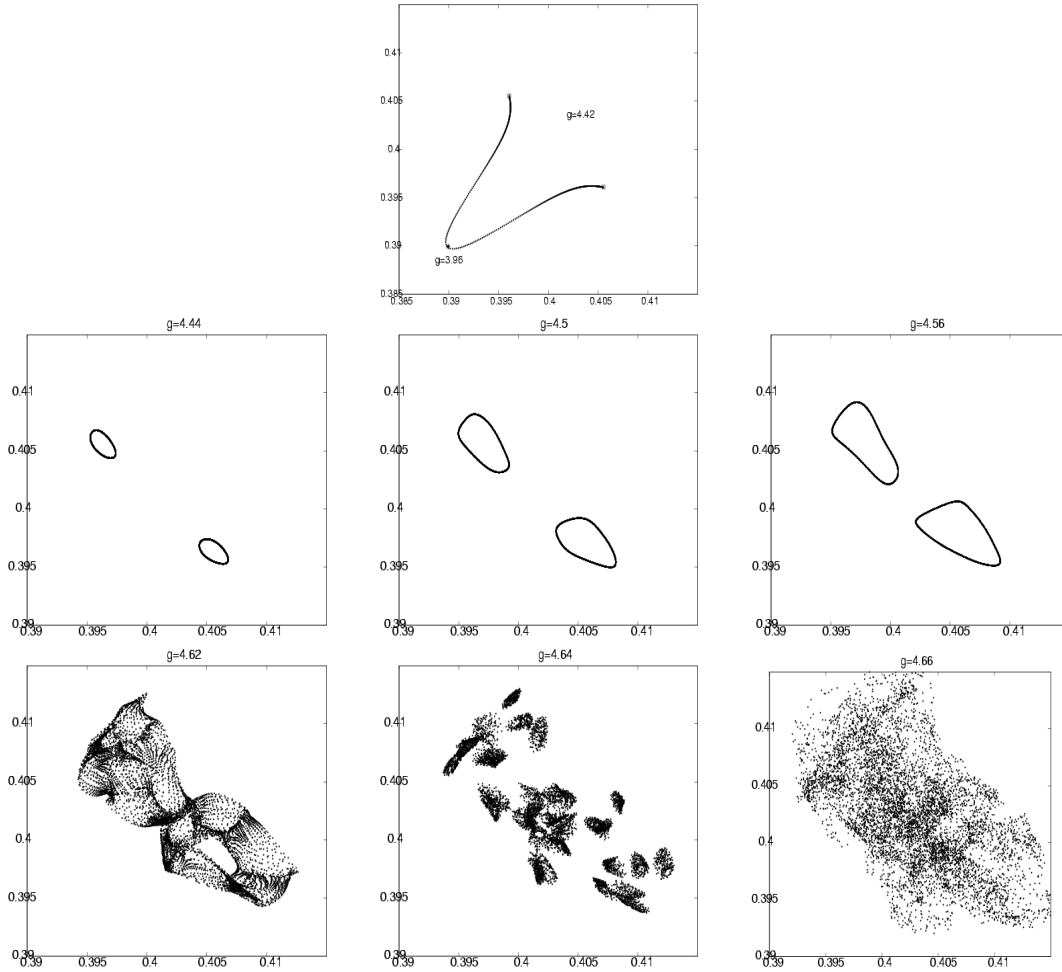


FIG. 2.11 – **Un exemple de route vers le chaos avec bifurcation Flip.** On a représenté le diagramme de premier retour du signal moyen  $m_N(t)$ , en régime stationnaire. La valeur de déstabilisation est  $g_{dest} = 3.96$ . La première bifurcation est une bifurcation Flip. Les valeurs atteintes entre  $g = 3.96$  et  $g = 4.42$  sont représentées sur la figure du haut. L'étoile représente la valeur du point fixe pour  $g = 3.96$ , les petits carrés les deux valeurs atteintes pour  $g = 4.42$ . Une seconde bifurcation apparaît pour  $g = 4.42$ , et conduit à un cycle double. On a représenté sur les 6 figures du bas les attracteurs qui marquent la transition du cycle double au chaos pour  $g = 4.44$ ,  $g = 4.50$ ,  $g = 4.56$ ,  $g = 4.62$ ,  $g = 4.64$  et  $g = 4.66$ . Les paramètres sont  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

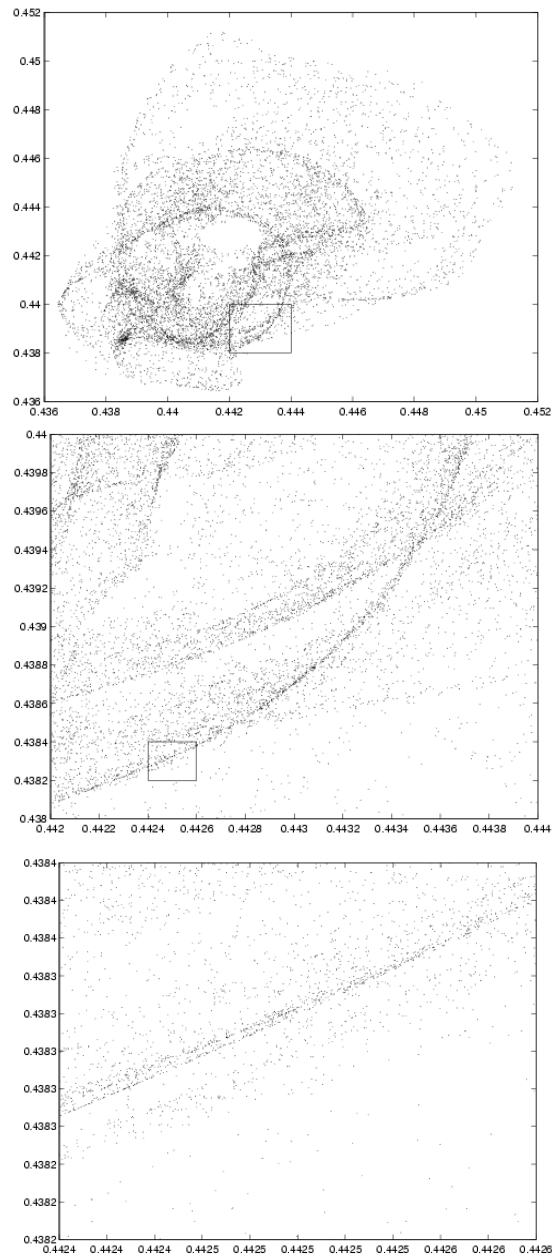


FIG. 2.12 – **Structure fractale de l'attracteur à la frontière du chaos.** L'attracteur global et deux niveaux d'agrandissement sont présentés, à partir de l'application de premier retour du signal moyen  $m_N(t)$ . Paramètres :  $g = 7.01$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

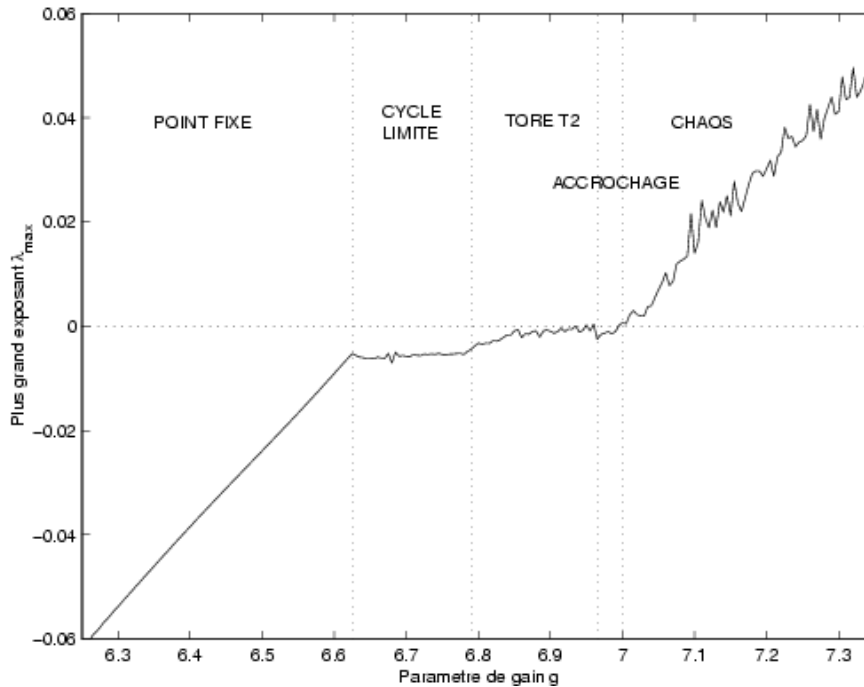


FIG. 2.13 – Estimation du plus grand exposant de lyapunov pour  $g$  croissant. Les paramètres sont  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta} = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

de ces 2 points, sur  $T$  pas de temps. La nouvelle distance est calculée comme  $d_1 = d(u(t_0 + T), u'(t_0 + T)) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i(t_0 + T) - u'_i(t_0 + T))^2}$ .

Cette opérations est répétée  $n$  fois, en prenant comme point d'initiation  $u(t_0 + kT)$ , pour  $k \in 1..n$ . On a ainsi  $n$  estimations de la distance :  $d_1, \dots, d_n$ . La distance moyenne est donnée par  $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k$ . Ce calcul de la distance moyenne après  $T$  itérations est nécessaire dans la mesure ou le taux de divergence n'est pas homogène sur l'attracteur. En prenant plusieurs points d'initiation, on améliore l'estimation de ce taux de divergence sans le faire dépendre d'une mesure particulière.

Pour la mesure présentée figure 2.13, on a pris  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $T = 260$  et  $n = 30$ . Le comportement de l'exposant de Lyapunov lors de la route vers le chaos est donné par cette Figure. Le réseau mesuré est celui dont on s'est déjà servi pour tracer l'évolution des attracteurs (figure 2.10).

Les différentes bifurcations de la route vers le chaos sont discernables sur la figure 2.13. La plage de transition apparaît comme un plateau, au cours duquel l'exposant maximal reste quasiment constant aux alentours de la valeur zéro. On sait que l'exposant maximal vaut exactement zéro sur toute la longueur de la plage de transition (voir page 16). Les limites de précision numérique font que la valeur de l'exposant est légèrement sous-estimé. On peut d'ailleurs constater que plus la valeur de  $T$  est élevée, plus la valeur estimée en régime de cycle limite se rapproche

de zéro. La transition entre le cycle et le tore  $\mathcal{T}^2$  fait apparaître une petite discontinuité sur la valeur de l'exposant, même si l'estimation donne toujours une valeur inférieure à zéro. L'accrochage marque encore une petite rupture, et la traversée de l'abscisse marque l'entrée dans un régime chaotique. L'augmentation rapide de la valeur de l'exposant accompagne une complexification progressive de la dynamique.

Par la suite, même si cela n'apparaît pas toujours dans le texte, le critère objectif que l'on utilise pour qualifier une dynamique de "chaotique" repose sur cette estimation.

## 2.2 Équations de champ moyen à la limite thermodynamique

Une grosse partie du travail portant sur ce modèle concerne l'étude du comportement dynamique des grandeurs de champ moyen à la limite thermodynamique. Cette étude a été mise en œuvre dans la thèse de Bruno Cessac et poursuit son développement théorique par le travail en cours d'Olivier Moynot, que l'on pourra trouver dans [84]. On se propose ici d'en présenter les principaux résultats ainsi que leur signification.

### 2.2.1 Propagation du chaos

Considérons deux neurones au sein d'un même réseau, d'index  $i$  et  $j$ . Les deux neurones sont couplés par les poids  $J_{ij}$  et  $J_{ji}$ . Du fait de ces couplages, la valeur du potentiel du neurone  $i$  dépend en partie de la valeur de l'activation du neurone  $j$  (et réciproquement). Les deux neurones ne sont donc pas indépendants. Néanmoins, plus le système que l'on considère est de grande taille, plus le nombre de couplages est élevé; dans le cas totalement interconnecté, chaque neurone calcule son potentiel au temps  $t$  en fonction de l'ensemble des activations des autres neurones du réseau au temps  $t - 1$ . Plus la taille est élevée, plus l'influence particulière du neurone  $j$  est noyée au sein de l'ensemble des influences en provenance de tous les autres neurones.

Ainsi, on peut penser que pour un système de grande taille, tout se passe comme si les neurones  $i$  et  $j$  étaient *indépendants*. Cette idée constitue l'intuition première de la conjecture dite de *chaos local*, proposée par Amari [85] dans le champ des réseaux de neurones. Le terme "chaos local" prête un peu à confusion au sein d'un document qui traite essentiellement du chaos déterministe. Le terme "chaos" se réfère ici à une acception plus ancienne, relative au caractère désorganisé des trajectoires individuelles de particules d'un milieu gazeux. L'hypothèse de chaos local peut ainsi être rapprochée de l'hypothèse de Boltzmann sur l'indépendance des trajectoires particulières conduisant à l'homogénéité statistique du gaz constitué d'un grand nombre de particules.

Les idées intuitives qui ont été présentées jusqu'ici correspondent à la version la plus “forte” de la conjecture de chaos local. Cette conjecture forte repose sur le caractère décorréolé des trajectoires individuelles. Or, au sein d'un système particulier, dont les poids ont été tirés une fois pour toutes, il se peut que la configuration des couplages conduise à un régime dynamique pour lequel les trajectoires individuelles présentent entre elles un certain degré de corrélation. Dès l'instant où certains neurones tendent à se comporter de la même façon au même moment, l'activation du neurone  $i$  n'est pas indépendante de l'activation du neurone  $j$ , et la conjecture forte ne s'applique pas.

Pour accéder à une notion de chaos local plus opérationnelle, il faut se détacher des contingences particulières que constituent les couplages d'un réseau donné, ainsi que des caractéristiques communes que peuvent présenter des trajectoires individuelles au sein d'un même réseau. Ainsi, pour décrire un comportement générique, il s'avère nécessaire de raisonner *sur un grand nombre de réseaux* dont les couplages, différents d'un réseau à l'autre, sont tirés selon la même loi. On s'intéresse alors à la répartition de la *variable aléatoire*  $U_N$  qui porte sur une trajectoire individuelle  $u_i(t)$  au sein d'un réseau donné, entre  $t = 0$  et  $t = T$ . De même, la variable aléatoire  $X_N$  porte sur une trajectoire du signal d'activation  $x_i(t)$ . On suppose que  $U_N$  obéit à la loi  $P_N$ , et  $X_N$  à la loi  $Q_N$ . La loi  $Q_N$  est l'image de la loi  $P_N$  par la fonction de transfert. La notation  $P_N(t)$  désigne la loi qui donne la répartition des potentiels  $u_i(t)$  à l'instant  $t$ .

Pour des raisons de lisibilité, on assimilera par la suite la variable aléatoire  $U_N$  à la trajectoire individuelle  $u_i(t)$ , et la variable aléatoire  $X_N$  à la trajectoire individuelle  $x_i(t)$ .

Selon ces définitions, la nouvelle hypothèse d'indépendance dit qu'à l'instant  $t$ , tout se passe comme si le potentiel  $u_i(t)$  du neurone  $i$  obéissait à un tirage indépendant selon la loi  $P_N(t)$ . Il s'agit de la conjecture de *propagation du chaos*. Le terme “propagation” se réfère au raisonnement suivant : si à l'instant initial  $t = 0$ , les potentiels  $u_i(0)$  sont tirés de manière indépendante, alors au temps suivant les potentiels garderont cette caractéristique d'indépendance, ceci restant vrai à chaque instant. De proche en proche, les potentiels maintiennent leur indépendance par un phénomène de propagation.

Cette conjecture est accessible à une démonstration mathématique sur notre modèle, à condition d'ajouter un bruit dans les équations d'évolution comme suit :

$$\begin{cases} u_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t-1) - \theta_i + W_i(t) \\ x_i(t) = f_g(u_i(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Le bruit  $W_i(t)$  est un bruit gaussien centré d'écart type  $\sigma_W$ .

Dans le cadre de ce modèle bruité, la conjecture de propagation du chaos a été démontrée [84]. Il apparaît que la loi  $P_N$  tend vers une loi gaussienne  $P$  à la *limite thermodynamique*.

## 2.2.2 Limite thermodynamique

La limite thermodynamique est la limite des grandes tailles ( $N$  tend vers l'infini). Dans un premier temps, on se propose d'illustrer cette notion à l'aide de mesures qui montrent que nos réseaux *tendent à converger vers un comportement limite, identique pour tous, lorsque l'on augmente la taille du système.*

### Le signal moyen

On considère le signal moyen  $m_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ . Ce signal nous a servi dans la section précédente pour tracer des représentations de l'attracteur du système. Dans le cas où le réseau a un comportement dynamique, les fluctuations du signal  $m_N(t)$  sont à chaque instant la moyenne des fluctuations individuelles des signaux d'activation. On constate empiriquement que ces fluctuations individuelles tendent à se compenser à chaque instant, c'est à dire que l'écart-type du signal moyen est plus faible que l'écart-type moyen des signaux individuels. Les signaux individuels semblent donc décorrélés.

Il existe par ailleurs dans le cadre du modèle bruité une description de la loi des activations  $Q(t)$  à la limite thermodynamique, comme nous le verrons plus loin. Cette loi limite a pour moyenne  $m(t)$ , et les équations de champ moyen décrivent le processus d'évolution de cette moyenne au cours du temps :

- Par la loi des grands nombres, la loi des activations des neurones d'un réseau particulier de taille  $N$  se rapproche de la loi limite  $Q(t)$  *pour les  $N$  croissants.*
- À  $N$  infini, la moyenne  $m(t)$  de la loi limite tend vers un point fixe  $m^*$  *pour  $t$  croissant.* Cette convergence vers le point fixe est rapide (quelques pas de temps).

Par extension, pour des  $t$  suffisamment grands, on attend d'un réseau bruité particulier de taille  $N$  que son signal moyen  $m_N(t)$  soit à tout instant proche de la valeur limite  $m^*$ , indépendamment du régime dynamique. Ceci implique entre autres que dans le cas par exemple d'un régime chaotique, toutes les fluctuations individuelles tendent à se compenser, c'est à dire qu'on ait des signaux d'activation *indépendants* sur un réseau donné, ce qui rejoint l'hypothèse (forte) de chaos local : deux neurones  $i$  et  $j$  pris au sein du même réseau développent des signaux d'activation indépendants.

Les simulations indiquent que le comportement limite décrit dans le cadre du modèle bruité semble pouvoir être étendu au modèle non-bruité. Il est à noter que les simulations effectuées sur ordinateur ne peuvent éviter un bruit numérique qui repose sur un codage discret des valeurs réelles. Si on trouve un même comportement sur le modèle non bruité, peut-être cela vient-il de l'ajout implicite de ce bruit.

Dans le cadre des simulations, on constate un mouvement de convergence qui met en jeu deux tendances :

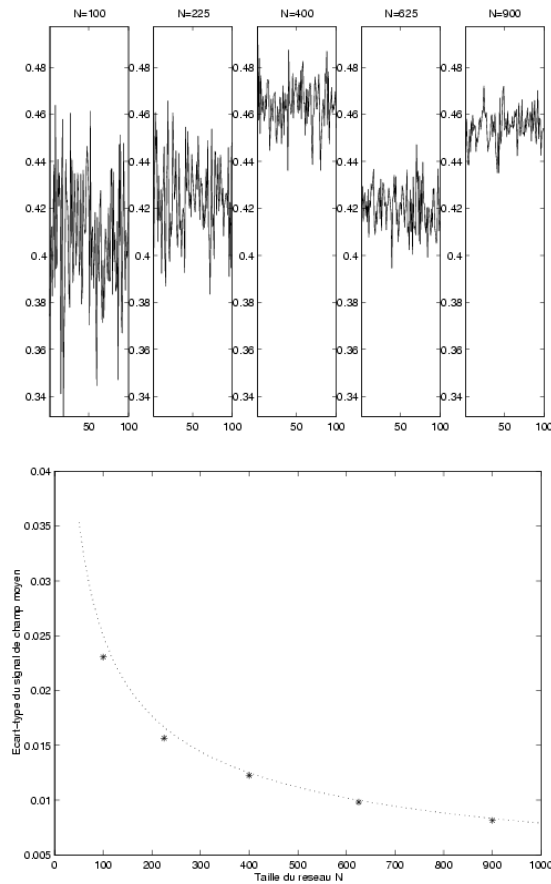


FIG. 2.14 – Sur la figure du haut, on a mis côte à côte à la même échelle 5 signaux moyens  $m_N(t)$  mesurés sur 5 réseaux différents de tailles respectives  $N = 100$ ,  $N = 225$ ,  $N = 400$ ,  $N = 625$  et  $N = 900$ . Sur la figure du bas, on a représenté l'écart-type moyen du signal  $m_N(t)$  sur la base de 100 réseaux différents pour chaque valeur de  $N$ . La fonction  $\frac{1}{4\sqrt{N}}$  sert de guide pour l'œil. Paramètres :  $g = 10$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

- la tendance à la compensation des fluctuations individuelles, qui fait que pour  $N$  croissant, les fluctuations du signal moyen  $m_N(t)$  autour de la valeur moyenne  $m_N^*$  diminuent en  $1/\sqrt{N}$ .
- la tendance à converger vers la loi limite, qui fait que pour  $N$  croissant, la moyenne  $m_N^*$  tend vers  $m^*$ .

Pour illustrer la première tendance, on a représenté figure 2.14 des signaux provenant de cinq réseaux différents dont on fait croître la taille, tous les paramètres étant égaux par ailleurs. En particulier, la valeur élevée du paramètre de gain  $g = 10$  assure que les réseaux développent des dynamiques de type chaotique. Les signaux sont représentés à la même échelle, et on constate d'un simple coup d'œil la décroissance de l'amplitude du signal  $m_N(t)$  avec la taille du réseau.



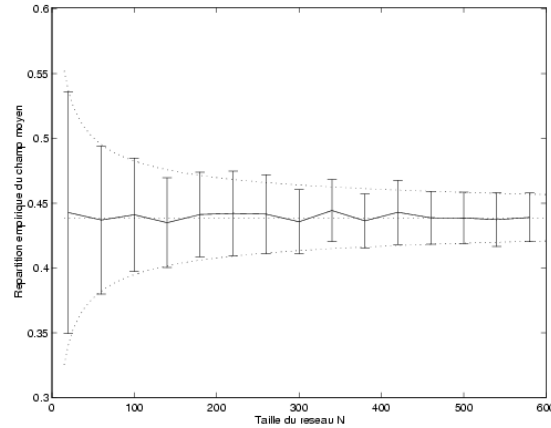


FIG. 2.15 – Cette figure donne la moyenne et la dispersion de la moyenne empirique  $m_N^*$  du signal moyen. Pour chaque valeur de  $N$ , on regarde la moyenne et l'écart-type de  $m_N^*$  sur un échantillon de 10 réseaux. On constate que la dispersion de  $m_N^*$  décroît en  $1/\sqrt{N}$ . On a mis en pointillé la valeur limite  $m^* = 0.44$ , et les fonctions  $m^* + \frac{m^*}{\sqrt{N}}$  et  $m^* - \frac{m^*}{\sqrt{N}}$  pour guider l'œil. la valeur de  $m^*$  est calculée à l'aide des équations de champ moyen. Paramètres :  $g = 6$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$

Pour illustrer la deuxième tendance, on mesure pour chaque réseau, en régime stationnaire, la moyenne empirique comme  $m_N^* = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^T m_N(t)$ , avec  $T$  grand. Sur la figure 2.15, on a représenté l'évolution de cette valeur, ainsi que sa dispersion, en fonction de  $N$ , sur la base de mesures effectuées sur 10 réseaux pour chaque valeur de  $N$ .

### Valeur de déstabilisation

On a vu que la valeur  $g_{dest}$  de déstabilisation est extrêmement variable d'un réseau à l'autre. Même pour  $N$  assez élevé (pour  $N = 200$ , par exemple), l'incertitude sur la valeur de  $g_{dest}$  pour un réseau donné reste très grande.

Il est possible de mesurer l'évolution de la répartition de ces valeurs de déstabilisation lorsque l'on augmente la taille du système. La figure 2.16 donne cette répartition empirique sur les valeurs de  $g_{dest}$  mesurées sur 500 réseaux de 50, 100 et 200 neurones. Pour effectuer une telle mesure, on a besoin de se placer en régime de point fixe afin de connaître la valeur de ce point fixe  $x^*$  qui permet de calculer la jacobienne. Pour chaque réseau, on part d'une valeur de  $g$  faible ( $g = 2$ ), et on augmente progressivement cette valeur (par pas de 0.05) jusqu'à ce que la plus grande valeur propre de la jacobienne dépasse la valeur 1. Pour chaque valeur de  $N$ , on réitère cette opération sur 500 systèmes différents définis selon les mêmes paramètres. Ces 500 valeurs sont ensuite réparties sur un histogramme.

On voit que la majorité des réseaux se déstabilise sur une plage de valeurs

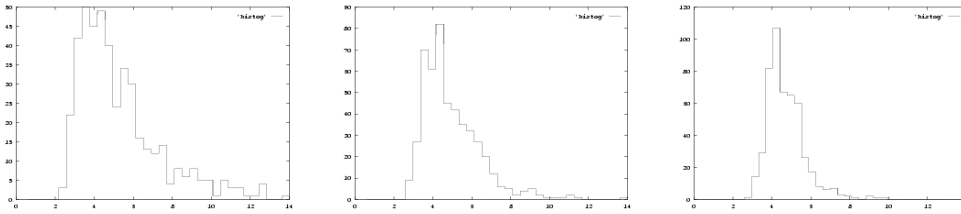


FIG. 2.16 – histogrammes des valeurs de  $g_{dest}$  pour  $N = 50$  (à gauche),  $N = 100$  (au centre) et  $N = 200$  (à droite), sur la base de 500 mesures par figure, avec des réseaux définis selon  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

comprise entre  $g = 2$  et  $g = 8$ . On a une courbe asymétrique, avec une “trainée”, correspondant à une minorité de réseaux se déstabilisant tardivement. La **médiane** d’entrée en déstabilisation (la valeur pour laquelle 50% des réseaux sont déstabilisés) vaut 4.92 pour  $N = 50$ , 4.58 pour  $N = 100$ , et 4.52 pour  $N = 200$ . On observe un resserrement de la répartition. Plus la taille augmente, plus les réseaux tendent à se déstabiliser sur une plage de valeurs étroite.

### Largeur de la plage de transition

La transition du point fixe au chaos met en jeu une succession de régimes dynamiques de complexité croissante. Cette transition prend place entre la valeur de déstabilisation  $g_{dest}$  et la valeur d’entrée dans le chaos  $g_{chaos}$ . Cet intervalle constitue la plage de déstabilisation. On constate que plus la taille  $N$  augmente, plus la plage de déstabilisation devient étroite. On peut conjecturer que lorsque  $N$  tend vers l’infini (à la limite thermodynamique), la zone de transition du point fixe au chaos se ramène à une valeur unique  $g_{dest}$ . Dans ce cas, il n’y a plus alors qu’une seule et unique bifurcation menant directement du point fixe au chaos. La valeur de déstabilisation  $g_{dest}$  coïncide alors exactement avec la valeur d’entrée dans le chaos.

Les points que nous venons de décrire illustrent le fait qu’il existe bien des grandeurs limites, telles que  $m^*$  ou  $g_{dest}$ , qui permettent d’approcher le comportement de tout réseau, avec un degré de confiance qui dépend de la taille du système. Ces grandeurs peuvent être calculées de manière explicite grâce aux équations de champ moyen, sur la base des paramètres macroscopiques qui définissent le système.

### 2.2.3 Les équations de champ moyen (ECM)

L’hypothèse de propagation du chaos nous a amenés à nous intéresser à la loi  $P_N$ , qui décrit à chaque instant la répartition des potentiels  $u_i(t)$  sur l’aléa pour tout réseau de taille  $N$ . La mise en œuvre des équations de champ moyen repose

sur le résultat mathématique suivant : la loi  $P_N$  tend vers une loi gaussienne  $P$  à la limite thermodynamique. Cette convergence est de plus extrêmement rapide, si bien que pour des tailles de l'ordre de  $N = 100$ , la répartition des potentiels obéit presque à une gaussienne. C'est d'ailleurs ce qui a pu être observé sur les figures 2.3 et 2.4.

La loi  $P(t)$  (restriction de  $P$  à l'instant  $t$ ) donne à l'instant  $t$  la répartition des potentiels. Du fait de son caractère gaussien, la loi  $P(t)$  est entièrement décrite par sa moyenne  $\mu(t)$  et sa variance  $\nu(t)$ . La loi  $Q(t)$ , qui porte sur les activations, a pour moyenne  $m(t)$  et pour moment d'ordre 2  $q(t)$ . Les équations de champ moyen donnent l'évolution de ces grandeurs au cours du temps. Elles fournissent donc une description dynamique de ces grandeurs statistiques "macroscopiques". Plus précisément, pour  $t$  de 1 à  $T$ , on a les équations couplées :

$$\begin{cases} \mu(t) = \bar{J}m(t-1) - \bar{\theta} \\ \nu(t) = \sigma_J^2 q(t-1) + \sigma_\theta^2 + \sigma_W^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $\bar{\theta}$  est la moyenne des seuils,  $\sigma_\theta$  l'écart-type des seuils et  $\sigma_W$  l'écart-type du bruit. La moyenne des activations  $m(t) = \int x_i(t) dQ(t)$  et le moment d'ordre 2  $q(t) = \int x_i(t)^2 dQ(t)$ . La loi  $Q(t)$  est la loi image de  $P(t)$  par la fonction de transfert  $f_g$ , et l'expression explicite de  $m(t)$  et  $q(t)$  est :

$$\begin{cases} m(t) = \int f_g \left( h\sqrt{\nu(t)} + \mu(t) \right) Dh \\ q(t) = \int f_g^2 \left( h\sqrt{\nu(t)} + \mu(t) \right) Dh \end{cases}$$

où le terme  $Dh$  désigne le terme d'intégration gaussien  $Dh = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-h^2/2)dh$ .

Ces équations ont été prouvées, pour  $t$  de 0 à  $T$ , dans le cas où le bruit  $W_i(t)$  est non nul [84]. Néanmoins, il n'y a aucune contrainte sur la valeur de ce bruit ; le terme de bruit  $\sigma_W$  peut être pris aussi petit qu'on le souhaite. Toutes les expériences numériques qui ont été faites sur le cas non bruité semblent confirmer la validité des équations de champ moyen dans ce cadre.

Les équations de champ moyen fournissent donc un processus itératif permettant, à partir de la distribution initiale des potentiels, de déduire la distribution des potentiels (et des activations) à tout instant. Toute loi  $P_N$  portant sur des réseaux de taille  $N$  tend à tout instant à se comporter comme la loi limite  $P$ . La ressemblance entre la loi  $P_N$  et la loi limite sera d'autant plus grande que la taille  $N$  est élevée.

Les mesures sur la répartition  $P_N$ , effectuées dans le cas  $N = 100$ , permettent de montrer l'excellente correspondance entre la loi  $P_N(t_m)$  et la loi  $P(t_m)$ , avec  $t_m = 20$ . On a représenté sur la figure 2.17 la répartition empirique provenant de simulations portant sur un nombre important de réseaux et la répartition théorique issue des équations de champ moyen. On constate une excellente concordance entre valeurs empiriques mesurées sur 10000 réseaux de taille  $N = 100$

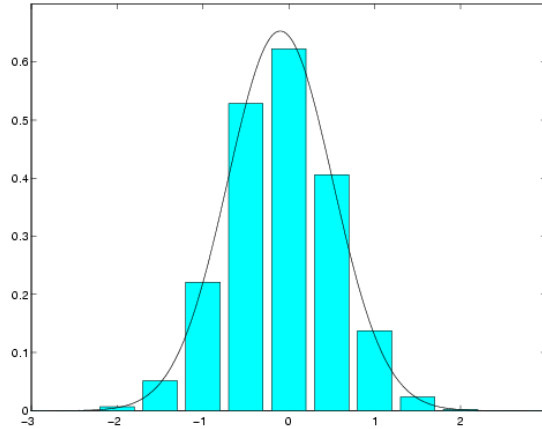


FIG. 2.17 – **Distribution empirique et distribution théorique.** L’histogramme donne la répartition empirique sur l’aléa des  $u_i(t_m)$ , sur la base de mesures effectuées sur 10000 réseaux définis selon des paramètres identiques. La courbe pleine donne le tracé de la répartition théorique de ces mêmes potentiels selon les équations de champ moyen. Les autres paramètres sont  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $g = 4$ ,  $t_m = 20$ .

( $\langle \mu_N \rangle(t_m) = -0.1002$ ,  $\langle \nu_N \rangle(t_m) = 0.370$ ) et valeurs théoriques ( $\mu(t_m) = -0.1$ ,  $\nu(t_m) = 0.373$ ) pour les paramètres  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$  et  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $t_m = 20$ . La notation  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne effectuée sur l’aléa.

Ainsi, pour toute valeur de  $t_m$ , il est possible de trouver une valeur de  $N$  telle que la loi  $P_N(t_m)$  soit aussi proche qu’on le souhaite de la loi  $P(t_m)$ . Cette assertion ne garantit cependant pas que  $P_N(t)$  restera “conforme” à  $P(t)$  pour des valeurs de  $t > t_m$ . En effet, les équations de champ moyen sont démontrées sur un intervalle de temps fini  $1..T$ . Il peut a priori exister un temps  $t > T$  au delà duquel les deux distributions se mettent à diverger. C’est là un problème délicat d’interversion des limites : le comportement pour les temps longs de la loi limite  $P(t)$  n’est pas nécessairement représentatif de celui de la loi  $P_N(t)$ ,  $N$  étant pris aussi grand qu’on le souhaite. Il se trouve cependant que dans le cas étudié où les couplages  $J_{ij}$  suivent tous la même loi centrée, les équations de champ moyen tendent à converger vers un point fixe  $(\mu^*, \nu^*)$ , et donc vers une loi limite asymptotique  $P^*$ , qui décrit convenablement la loi asymptotique  $P_N^*$  des systèmes de taille finie. On verra plus loin (voir page 100) qu’il existe des modèles où cette propriété n’est plus vérifiée.

### 2.2.4 Distance entre deux trajectoires

Les équations de champ moyen décrivent une distribution théorique à chaque instant, mais ne fournissent pas d’indication sur les relations entre les états successifs atteints le long d’une trajectoire. Pour raisonner en termes de trajectoires,

il faut partir d'un réseau référent, et décrire l'évolution des états au sein de ce réseau.

Si on considère un réseau de taille finie dont les poids et les seuils sont fixés une fois pour toutes, et que l'on tire indépendamment deux conditions initiales  $u(0)$  et  $u'(0)$ , l'expression de la distance quadratique entre les deux trajectoires  $u(t)$  et  $u'(t)$  est donnée par

$$(d(t))^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i(t) - u'_i(t))^2$$

Par exemple, pour un réseau en régime de point fixe, quelle que soit la condition initiale, toute trajectoire individuelle  $u(t)$  tend vers la valeur du point fixe  $u^*$ . Ainsi, si on considère deux conditions initiales différentes, et si on mesure à chaque instant la distance quadratique entre les deux trajectoires trajectoire, on constate qu'au cours du temps cette distance tend vers zéro.

Au contraire, pour un réseau en régime chaotique, les deux trajectoires tendent à s'éloigner au cours du temps jusqu'à approcher une valeur limite  $d_{max}$  qui peut être considérée comme le diamètre de l'attracteur. Dans ce cas, pour deux conditions initiales aussi proches qu'on le souhaite, il existe un temps fini au bout duquel la distance entre les deux trajectoires atteindra l'ordre de grandeur de  $d_{max}$ .

On a représenté sur la figure 2.18 l'évolution de deux trajectoires individuelles  $u_i(t)$  et  $u'_i(t)$  sur un réseau de taille finie, pour le cas d'un régime de point fixe et le cas d'un régime chaotique. Dans le premier cas, on voit cette trajectoire tendre vers la même valeur limite pour les deux conditions initiales. Dans le second cas, on voit les deux trajectoires diverger au cours du temps, et présenter un comportement décorrélé au bout d'un temps fini.

La distance quadratique peut être décrite selon des paramètres macroscopiques à la limite thermodynamique [84]. Cette description nécessite de calculer la distance quadratique non plus sur l'ensemble des trajectoires individuelles d'un réseau donné, mais sur des trajectoires individuelles prises sur un grand nombre de réseaux. Cette méthode a été introduite par Derrida et Pommeau [86]. La loi de taille finie  $P_N^2$  porte sur des trajectoires couplées  $(u_i(t), u'_i(t))$  issues d'un même réseau et de deux conditions initiales différentes.

À la limite thermodynamique, on peut prouver que la loi  $P_N^2$  tend vers la loi  $P^2$ , et l'expression de la distance quadratique est

$$(d(t))^2 = \int \int (u_i(t) - u'_i(t))^2 dP^2(t) = 2(\nu(t) - \Delta(t))$$

où  $\nu(t)$  est la variance des potentiels selon la loi  $P(t)$  et  $\Delta(t)$  est la covariance des potentiels :

$$\Delta(t) = \sigma_j^2 C(t-1) + \sigma_\theta^2$$

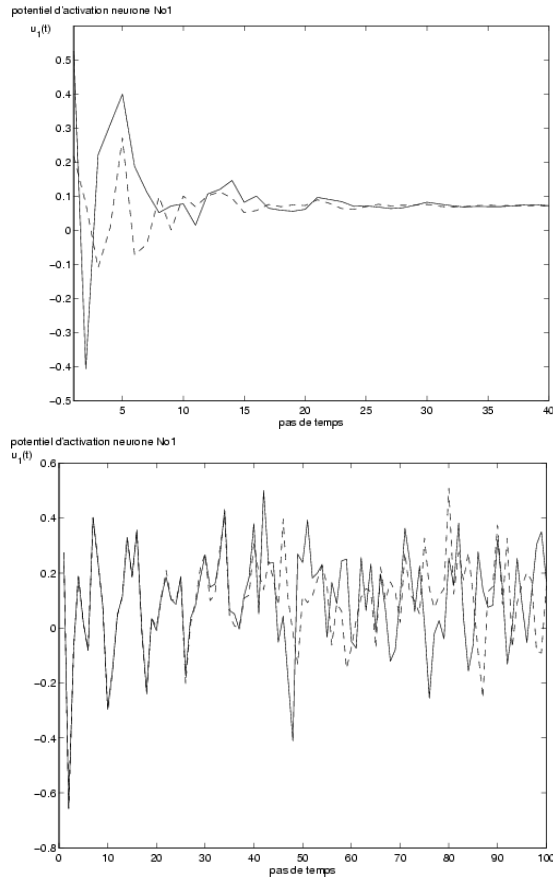


FIG. 2.18 – **Évolution de la distance entre trajectoires individuelles, en régime de point fixe et en régime chaotique.** Les deux figures représentent l'évolution au cours du temps de deux trajectoires sur un même réseau. La première trajectoire (trait plein)  $u_i(t)$  correspond à la condition initiale  $u(0)$ . La seconde trajectoire (trait pointillé)  $u'_i(t)$  correspond à la condition initiale  $u'(0) \neq u(0)$ . La figure du haut correspond à un régime de point fixe ( $g = 4$ ), et la distance initiale  $d(u(0), u'(0)) = 0,65$ . La figure du bas correspond à un régime chaotique ( $g = 7$ ), et la distance initiale  $d(u(0), u'(0)) = 10^{-3}$ . Paramètres :  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta} = 0,1$ ,  $\sigma_\theta = 0,1$ ,  $i = 1$ .

et  $C(t)$  est l'expression de la covariance sur les activations selon la loi  $Q^2$ , image de  $P^2$  par la fonction de transfert.

$$C(t) = \int \int Dh Dh' f_g \left( h \frac{\sqrt{\nu(t)^2 - \Delta(t)^2}}{\sqrt{\nu(t)}} + h' \frac{\Delta(t)}{\sqrt{\nu(t)}} + \mu(t) \right) f_g \left( h' \sqrt{\nu(t)} + \mu(t) \right)$$

Ainsi, on peut décrire de manière explicite le comportement de la distance quadratique au cours du temps à la limite thermodynamique. Pour chaque jeu de paramètres  $(\bar{J}, J, \bar{\theta}, \sigma_\theta, g)$ , on peut savoir si deux trajectoires tendent à se rapprocher ou au contraire à diverger sur le réseau générique.

On peut dès lors caractériser explicitement la dynamique pour les temps longs à la limite thermodynamique [80]. Soient  $\mu^*$ ,  $\nu^*$  et  $\Delta^*$  les expressions de la moyenne, de la variance et de la covariance des potentiels pour les temps longs. On a alors :

- Si  $\nu^* = \Delta^*$ , la distance quadratique est nulle à la limite thermodynamique. La dynamique pour les temps longs est alors un point fixe tel que pour tout  $t$ ,  $u_i(t) = u_i^*$ , où la valeur  $u_i^*$  est issue d'un tirage selon la loi gaussienne  $\mathcal{N}(\mu^*, \nu^{*2})$ .
- Si  $\nu^* > \Delta^*$ , alors la distance entre 2 trajectoires pour  $t$  grand a pour expression  $d^{*2} = E((u_i(t) - u'_i(t))^2) = 2(\nu^* - \Delta^*)$ . Cette valeur positive de la distance signifie que pour toute condition initiale, le signal  $u_i(t)$  mesuré sur un réseau particulier suit pour les temps longs le processus gaussien  $u_i(t) = u_i^* + b_i(t)$ , où la valeur  $u_i^*$  est issue d'un tirage selon la loi gaussienne  $\mathcal{N}(\mu^*, \nu^{*2})$ , et où  $b_i(t)$  est un bruit blanc de variance  $\nu^* - \Delta^*$ .

Il apparaît donc que le système peut présenter à la limite thermodynamique deux régimes dynamiques différents : un régime de point fixe ( $\nu^* = \Delta^*$ ), et un régime de type processus gaussien ( $\nu^* > \Delta^*$ ), qui peut être interprété comme la description d'un régime chaotique à la limite thermodynamique. Pour  $g$  croissant, la transition d'un régime à l'autre passe par une *bifurcation*, au cours de laquelle la valeur de  $\nu^*$  "dépasse" celle de  $\Delta^*$ . On voit ainsi le caractère brutal de la transition du point fixe au chaos à la limite thermodynamique. Comme il a été conjecturé page 71, la plage de transition du point fixe au chaos se réduit à un point unique.

À la limite thermodynamique, il apparaît que le régime de chaos déterministe est décrit comme un processus aléatoire gaussien. Or, une dynamique de type stochastique peut être considéré comme "plus désordonnée" qu'une dynamique de type chaotique. À titre d'indication, le taux de divergence d'un processus stochastique discret est infini, c'est à dire qu'on n'a aucune mémoire des états antérieurs. À taille finie, la dynamique ne décrit jamais exactement un processus stochastique. Néanmoins, plus on s'éloigne de la frontière du chaos, plus la dynamique présente un aspect désorganisé. On peut alors parler de "chaos profond", et dans ce cas le processus gaussien décrit à la limite thermodynamique en est une excellente approximation.

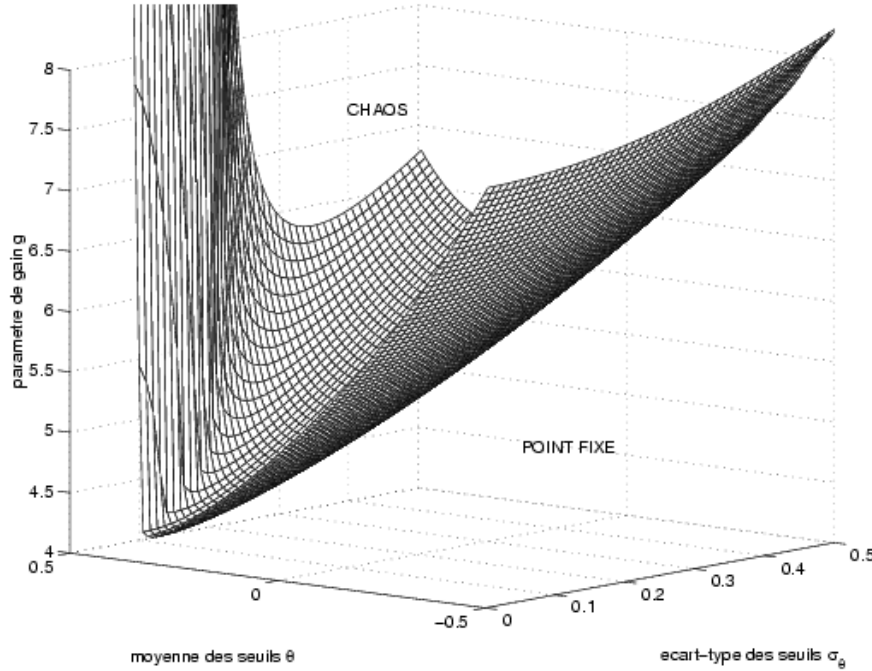


FIG. 2.19 – **Variété de bifurcation.** On a tracé sur cette figure la surface qui marque la séparation entre une dynamique de point fixe et une dynamique chaotique, à la limite thermodynamique, dans l'espace des paramètres  $\bar{\theta}$ ,  $\sigma_\theta$  et  $g$ . On a fixé les paramètres  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

### 2.2.5 Variétés de bifurcation

Le calcul de la distance quadratique nous permet de décrire de façon explicite le régime dynamique générique pour un jeu de paramètres donné. On peut donc décrire dans l'espace des paramètres macroscopiques ( $\bar{J}$ ,  $\sigma_J$ ,  $g$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\sigma_\theta$ ) des frontières correspondant aux valeurs critiques de bifurcation entre un régime de point fixe et un régime chaotique. On a représenté sur la figure 2.19 une telle variété de bifurcation, dans l'espace à 3 dimensions ( $g$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\sigma_\theta$ ).

Une telle figure nous permet de tirer quelques conclusions sur les influences respectives des paramètres  $g$ ,  $\bar{\theta}$  et  $\sigma_\theta$  sur la dynamique des réseaux de taille finie.

- L'augmentation du paramètre  $g$  fait tendre la dynamique vers le chaos. À taille finie, l'augmentation de  $g$  permet de mettre en évidence des routes vers le chaos par quasi-périodicité.
- La moyenne des seuils  $\bar{\theta}$  joue un rôle singulier. On remarque une première tendance, qui indique que l'augmentation de  $\bar{\theta}$  tend à favoriser le chaos. Les lignes de bifurcation qui suivent les  $\bar{\theta}$  croissants sont en effet décroissantes. Cependant, dans le cas où  $\sigma_\theta$  est faible, on trouve une valeur limite au delà de laquelle le chaos disparaît. Un tel phénomène a été décrit dans [80], et est



lié au fait que des seuils trop élevés, en tirant les potentiels vers des valeurs négatives, atteignent une valeur critique empêchant toute dynamique de se développer.

- Les lignes de bifurcation qui suivent les  $\sigma_\theta$  croissants sont croissantes. L'augmentation du paramètre  $\sigma_\theta$  défavorise le développement de dynamiques chaotique, sauf dans le cas critique où  $\bar{\theta}$  est élevé, auquel cas une augmentation de  $\sigma_\theta$  permet de produire une dynamique chaotique à condition que  $g$  soit suffisamment élevé.

Ainsi, on voit que les méthodes issues de la physique statistique permettent de fixer les idées sur les comportements standards des réseaux aléatoires de grande taille. Elles constituent un outil puissant pour une analyse et une compréhension approfondies de nos réseaux.

## 2.3 Synchronisation sur un modèle à deux populations

Le modèle simple à une population peut être étendu à des modèles comprenant plusieurs populations. Cette section présente un modèle à deux populations, et met en avant les nouveaux régimes décrits à la limite thermodynamique. Dans le cas où les deux populations sont différenciées comme population excitatrice et population inhibitrice, les équations de champ moyen permettent de mettre en évidence des comportements oscillants, et mêmes chaotiques, sur les grandeurs qui décrivent le champ. La typologie des différents régimes s'enrichit alors considérablement, et permet en particulier de décrire des phénomènes de synchronisation entre neurones. Ces constatations, appuyées par des propriétés de convergence rigoureuses, peuvent donner des indices pour une compréhension plus fondamentale des processus dynamiques qui prennent place dans le cerveau. L'étude des phénomènes de synchronisation dans des systèmes de grande taille comprenant des neurones inhibiteurs est un sujet fortement d'actualité. On trouvera dans [87] une étude sur les conditions d'apparition d'un régime chaotique désynchronisé sur un modèle déterministe, et dans [49] une étude de la synchronisation dans des réseaux à spike stochastiques. Nos résultats ont également fait l'objet de publications [88] [89].

*Les résultats décrits dans cette section constituent une étude à part entière. Ils n'interviennent pas dans les développements suivants de cette thèse qui se consacre essentiellement à l'étude des propriétés dynamiques du modèle à une population et à l'apprentissage sur ce modèle.*

### 2.3.1 Le système dynamique à deux populations

#### Équation d'évolution

Le modèle contient deux populations de neurones, dont le type est donné par  $p$ . Pour  $p \in \{1, 2\}$ , il y a  $N^{(p)}$  neurones dans la population  $p$ .  $N = N^{(1)} + N^{(2)}$  est le nombre total de neurones. Pour  $p, q \in \{1, 2\}^2$ , les  $(J_{ij}^{(pq)})$  représentent les poids de la population  $q$  vers la population  $p$ . Les  $\theta_i^{(p)}$  sont les seuils et  $W_i^{(p)}(t)$  est un bruit synaptique.

La dynamique devient : pour  $p \in \{1, 2\}$  et  $1 \leq i \leq N^{(p)}$ ,

$$\begin{cases} u_i^{(p)}(t) = \sum_{j=1}^{N^{(1)}} J_{ij}^{(p1)} x_j^{(1)}(t-1) + \sum_{j=1}^{N^{(2)}} J_{ij}^{(p2)} x_j^{(2)}(t-1) + W_i^{(p)}(t) - \theta_i^{(p)} \\ x_i^{(p)}(t) = f_g(u_i^{(p)}(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

$f_g$  est la fonction de transfert de  $\mathbb{R}$  vers  $]0, 1[$ , et vaut toujours  $f_g(x) = \frac{1 + \tanh(gx)}{2}$ , de gain  $g/2$ . Le réseau est complètement connecté. Les distributions des poids synaptiques et des seuils suivent respectivement les lois gaussiennes  $\mathcal{N}(\frac{\bar{J}^{(pq)}}{N^{(q)}}, \frac{(\sigma_J^{(pq)})^2}{N^{(q)}})$  et  $\mathcal{N}(\bar{\theta}^{(p)}, (\sigma_\theta^{(p)})^2)$ . Les valeurs sont tirées une fois pour toutes à la création de chaque réseau (aléa gelé). Le bruit synaptique obéit également à une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma_W^{(p)2})$ , et “nourrit” la dynamique (le tirage est renouvelé à chaque pas de temps). Toutes ces variables aléatoires sont supposées indépendantes.

Le statut de ce bruit est un peu particulier sur notre modèle. En effet, dès l'instant où le système est bruité, il n'est plus possible de parler de chaos déterministe. Ce bruit est, comme dans le modèle à une population, nécessaire pour démontrer la propagation du chaos, et les équations de champ moyen qui en découlent. Néanmoins, une fois que ces équations sont établies, il est possible de mettre le terme de bruit  $\sigma_W^{(p)}$  à zéro et de comparer le comportement du champ moyen à celui de modèles de taille finie déterministes.

Sur un modèle à deux populations, les paramètres macroscopiques qui définissent le système sont au nombre de 13 ( $\bar{J}^{(11)}, \sigma_J^{(11)}, \bar{J}^{(12)}, \sigma_J^{(12)}, \bar{J}^{(21)}, \sigma_J^{(21)}, \bar{J}^{(22)}, \sigma_J^{(22)}, \bar{\theta}^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}, \bar{\theta}^{(2)}, \sigma_\theta^{(2)}, g$ ).

Devant cette profusion, il s'avère nécessaire de définir un système macroscopique tel que les paramètres évoluent selon un nombre plus restreint de degrés de liberté. Les sections 2.3.2 et 2.3.3, qui définissent des populations excitatrices et inhibitrices, présentent deux exemples de telles restrictions.

#### Champ moyen à la limite thermodynamique

Comme dans le modèle à une population, il est possible de prédire le comportement dynamique des observables macroscopiques  $m^{(p)}(t)$  (espérance de l'activation  $x_i^{(p)}(t)$ ),  $q^{(p)}(t)$  (moment d'ordre 2 de l'activation),  $\mu^{(p)}(t)$  (espérance du

potentiel  $u_i^{(p)}(t)$ ) et  $\nu^{(p)}(t)$  (variance sur les potentiels) à la limite thermodynamique, c'est à dire de mettre en place des équations de champ moyen. Les méthodes mises en œuvre pour aboutir à ces équations sont assez semblables à celles qui ont été utilisées pour le modèle à une population.

En particulier, la propagation du chaos reste vraie dans le modèle à deux populations. De même, tous les neurones d'une population  $p$  donnée tendent à se comporter comme un neurone générique dont la loi du potentiel est  $P^{(p)}$  et dont la loi de l'activation est  $Q^{(p)}$ . Les équations de champ moyen donnent l'évolution des lois  $P^{(p)}(t)$  et  $Q^{(p)}(t)$  au cours du temps.

On considère également :

$$m^{(p)}(t) = \int x_i^{(p)}(t) dQ^{(p)}$$

$$q^{(p)}(t) = \int (x_i^{(p)}(t))^2 dQ^{(p)}$$

et on note  $Dh = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-h^2/2) dh$ .

Les équations de champ moyen deviennent :

Pour  $p \in \{1, 2\}$  et  $1 \leq t \leq T - 1$  :

$$\begin{cases} \mu^{(p)}(t+1) = -\bar{\theta}^{(p)} + \bar{J}^{(p1)} m^{(1)}(t) + \bar{J}^{(p2)} m^{(2)}(t) \\ \nu^{(p)}(t+1) = \sigma_W^2 + \sigma_\theta^{(p)2} + \sigma_J^{(p1)2} q^{(1)}(t) + \sigma_J^{(p2)2} q^{(2)}(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

avec

$$\begin{cases} m^{(p)}(t) = \int f_g(\sqrt{\nu^{(p)}(t)}h + \mu^{(p)}(t)) Dh \\ q^{(p)}(t) = \int f_g^2(\sqrt{\nu^{(p)}(t)}h + \mu^{(p)}(t)) Dh \end{cases}$$

Ces équations permettent comme précédemment d'anticiper le comportement des grands systèmes de taille finie, cette fois-ci pour des systèmes à deux populations.

## Synchronisation

L'étude du comportement dynamique des équations de champ moyen permet de mettre en évidence un comportement nouveau, qui n'était pas présent dans le modèle à une seule population. Il existe en effet des paramètres pour lesquels la loi  $P^{(p)}(t)$  ne tend pas vers un point fixe  $P^{(p)*}$ , mais au contraire entretient une dynamique, qui peut être oscillante (voir section 2.3.2), ou plus complexe (voir section 2.3.3). Les observables macroscopiques  $m^{(p)}(t)$ ,  $q^{(p)}(t)$ ,  $\mu^{(p)}(t)$  ou  $\nu^{(p)}(t)$  ont alors les caractéristiques d'un signal non-constant au cours du temps. En ce sens, le système global *n'est plus stationnaire*. Ramené à un système de taille finie, cette non-stationnarité signifie qu'une mesure statistique sur la loi des activations à deux instants  $t$  et  $t'$  ne donne plus nécessairement les mêmes

résultats. Ce comportement non stationnaire de la moyenne  $m^{(p)}(t)$  en particulier peut être relié à la notion de *synchronisation*.

Formellement, sur un système dynamique comportant un nombre  $N$  de variables d'état, on dit que tout ou partie de ces variables sont synchronisées si les signaux produits sont corrélés temporellement. Pour les neurones biologiques, cela signifie que les neurones tendent à tirer de manière simultanée. Sur les systèmes de grande taille ( $N$  grand), la mise en évidence de comportements individuels synchronisés se fonde sur l'écart-type du signal moyen  $m_N(t)$ . En effet, si les  $N$  signaux individuels sont indépendants, et si de plus ils obéissent à une même loi  $Q_N$  (de moyenne  $m_N$ ) à chaque instant  $t$ , alors d'après le théorème central limite, les fluctuations du signal moyen  $m_N(t)$  autour de la moyenne  $m_N$  tendent à décroître en  $1/\sqrt{N}$  quand  $N$  croît. Connaissant la loi des signaux individuels, il est possible d'estimer la valeur de l'écart-type attendu sur le signal  $m_N(t)$  si les neurones ne sont pas synchronisés. Si les oscillations du signal  $m_N(t)$  dépassent significativement cet écart-type, alors les signaux individuels peuvent être considérés comme synchronisés. Cette idée est exposée dans [90] [24]. Une illustration de ce phénomène est donnée sur la figure 2.20.

À la limite thermodynamique, une valeur constante de la loi limite  $P^{(p)}$  (soit  $P^{(p)}(t) = P^{(p)*}$  pour les temps longs) traduit un comportement non-synchronisé des neurones individuels. Au contraire, toute évolution non constante au cours du temps de la loi limite  $P^{(p)}(t)$  traduit un comportement synchronisé sur les neurones individuels.

Dans le système (2.6) qui définit l'opérateur de champ moyen, le régime dynamique est qualifié de *régime synchrone* lorsque les signaux  $\mu^{(p)}(t)$  (moyenne sur les potentiels) ou  $m^{(p)}(t)$  (moyenne sur les activations) sont non-statiques pour les temps longs. Il est qualifié de *régime asynchrone* dans le cas contraire.

Remarque : si l'on se réfère à l'hypothèse de chaos local telle qu'elle a été définie dans un premier temps page 66, on constate que dans le cas d'une dynamique synchronisée, les signaux individuels des neurones *ne sont plus indépendants* au sein d'un même système. Ceci n'est pas en contradiction avec la propriété d'indépendance démontrée dans le cadre de la propagation du chaos. En effet, la propagation du chaos décrit une indépendance *sur l'aléa* : si l'on considère un grand nombre de réseaux, et qu'à l'instant  $t_m$  on extrait de chaque réseau la valeur d'un potentiel  $u_i^{(p)}(t_m)$ , alors cette valeur obéit à un tirage *indépendant* selon la loi  $P^{(p)}(t_m)$ . À l'instant  $t_m$ , tous les neurones prennent leurs valeurs indépendamment autour de la moyenne  $\mu^{(p)}(t_m)$  et selon la variance  $\nu^{(p)}(t_m)$ .

## Déstabilisation

Dans les modèles à deux populations, l'étude de la divergence des trajectoires individuelles repose sur les mêmes principes que dans le modèle à une population. La distance quadratique entre deux trajectoires individuelles d'un même réseau,

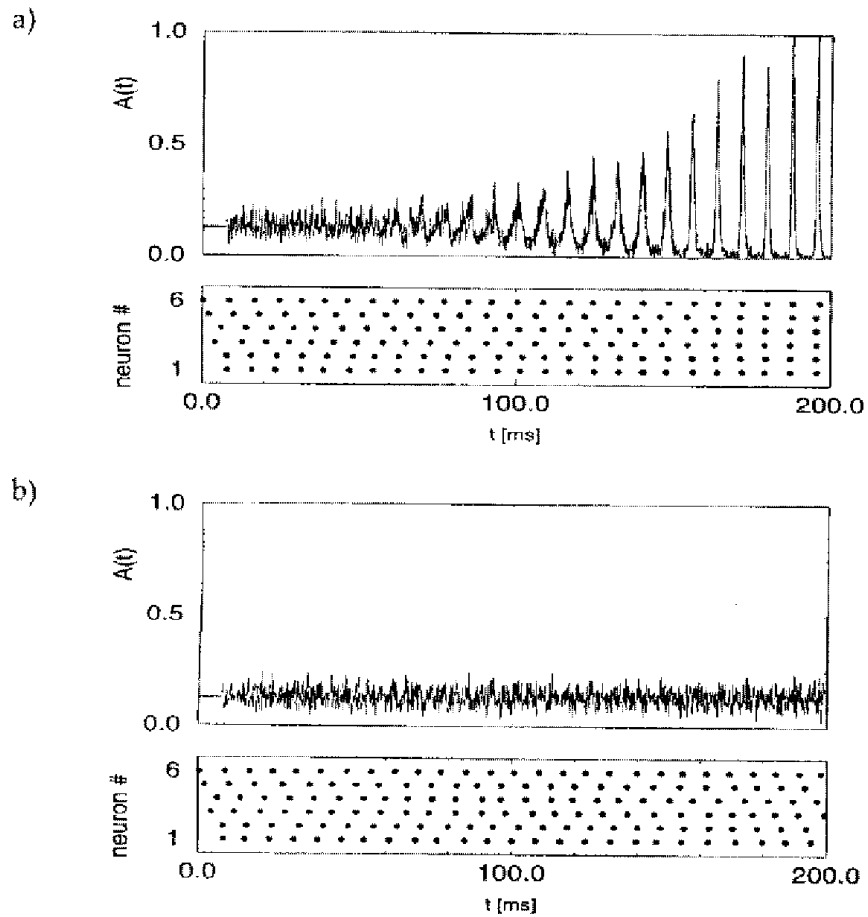


FIG. 2.20 – Effet de la synchronisation individuelle sur l'amplitude du signal moyen. – a – Les signaux individuels se synchronisent au cours du temps – b – Les signaux individuels restent décorrélés. Extrait de [11].

intégrée sur l'aléa, vaut à la limite thermodynamique :

$$(d^{(p)}(t))^2 = \int \int \left( u_i^{(p)}(t) - u_i^{(p)'}(t) \right)^2 dP_N^{(p)2}(t)$$

où  $u_i^{(p)}(t)$  et  $u_i^{(p)'}(t)$  sont deux trajectoires individuelles sur un même réseau issues de conditions initiales différentes.

Cependant, on a vu que les observables macroscopiques peuvent entretenir une dynamique pour les temps longs dans ce modèle, et en particulier la variance de potentiels  $\nu^{(p)}(t)$  ne converge pas nécessairement vers une valeur limite constante  $\nu^{(p)*}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Ainsi, la décomposition entre un processus constant et un bruit blanc gaussien n'est plus possible dans le modèle à deux populations. Néanmoins, la méthode de Derrida et Pomeau [86], fondée sur un calcul de la divergence entre deux trajectoires, reste valable.

On note  $\Delta^{(p)}(t)$  la covariance entre ces deux trajectoires. De la même façon que dans le modèle à une population, on obtient une expression générique de la distance quadratique à la limite thermodynamique :

Pour  $p \in \{1, 2\}$  et  $1 \leq t \leq T - 1$  :

$$d^{(p)}(t)^2 = 2(\nu^{(p)}(t) - \Delta^{(p)}(t)) \quad (2.7)$$

$$\Delta^{(p)}(t+1) = \sigma_J^{(p1)2} C^{(1)}(t) + \sigma_J^{(p2)2} C^{(2)}(t) + \sigma_\theta^{(p)2}$$

avec

$$C^{(p)}(t) = \int \int Dh Dh' f \left( \frac{\sqrt{\nu^{(p)}(t)^2 - \Delta^{(p)}(t)^2}}{\sqrt{\nu^{(p)}(t)}} h + \frac{\Delta^{(p)}(t)}{\sqrt{\nu^{(p)}(t)}} h' + \mu^{(p)}(t) \right) f(h' \sqrt{\nu^{(p)}(t)} + \mu^{(p)}(t))$$

Comme précédemment, le comportement de la distance quadratique nous permet de déterminer deux types de régimes à la limite thermodynamique, le passage de l'un à l'autre s'opérant par bifurcation. On dit que le régime dynamique est *stable* si la distance quadratique ( $d^{(p)}(t)$ ) tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. On parle de régime dynamique *déstabilisé* si  $d^{(p)}(t)$  tend à augmenter au cours du temps. Comme précédemment, cette dynamique déstabilisée est associée à taille finie aux régimes de type chaotique.

### 2.3.2 Régimes oscillants synchronisés

#### Paramètres pour l'étude

Les paramètres macroscopiques sont ici fixés afin de décrire des populations neuronales à caractère exciteur (population 1) ou inhibiteur (population 2).

Comme l'espérance  $\frac{\bar{J}^{(pq)}}{N^{(q)}}$  des poids converge vers zéro plus rapidement que leur écart-type  $\frac{\sigma_J^{(pq)}}{\sqrt{N^{(q)}}}$ , le caractère significativement excitateur ou inhibiteur repose sur l'influence globale d'une population entière sur ses récepteurs.

La définition du modèle à populations inhibitrice et excitatrice permet de réduire l'espace des paramètres macroscopiques. Les 8 paramètres portant sur les poids dépendent à présent de deux paramètres de référence :  $\sigma_J$  (écart-type de référence) et  $d$  (décalage moyen). Tous les paramètres  $J^{(pq)}$  et  $\sigma_J^{(pq)}$  peuvent être décrits à partir de ces deux valeurs, selon le jeu d'équations (2.8) :

$$\begin{cases} \bar{J}^{(11)} = \sigma_J d & \sigma_J^{(11)} = \sigma_J \\ \bar{J}^{(12)} = -2\sigma_J d & \sigma_J^{(12)} = \sqrt{2}\sigma_J \\ \bar{J}^{(21)} = \sigma_J d & \sigma_J^{(21)} = \sigma_J \\ \bar{J}^{(22)} = 0 & \sigma_J^{(22)} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Pour de tels paramètres, la population 1 est excitatrice et la population 2 est inhibitrice. La population inhibitrice envoie des liens vers la population excitatrice et n'a pas de liens vers la population inhibitrice. La population excitatrice envoie des liens à la fois vers la population excitatrice et vers la population inhibitrice. Pour compenser cette asymétrie, la population inhibitrice a un décalage négatif  $\bar{J}^{(12)}$  qui est le double en valeur absolue des décalages positifs  $\bar{J}^{(11)}$  et  $\bar{J}^{(21)}$  de la population excitatrice. On a de ce fait un équilibre global entre influence excitatrice et influence inhibitrice.

### Oscillations sur le champ moyen

La transition d'une dynamique statique vers une dynamique non-statique apparaît par une bifurcation de Hopf lorsque l'on augmente le paramètre de gain  $g$ . Il est important de noter que cette bifurcation intervient sur le système macroscopique (2.6). Cette bifurcation est fondamentalement différente de celle que l'on observe sur les réseaux de taille finie sur le modèle à une population. Avant la bifurcation, les signaux de champ moyen  $m^{(1)}(t)$  et  $m^{(2)}(t)$  tendent vers les points fixes respectifs  $m^{(1)*}$  et  $m^{(2)*}$ . Après la bifurcation, les signaux de champ moyen  $m^{(1)}(t)$  et  $m^{(2)}(t)$  décrivent pour les temps longs un cycle périodique ou pseudo-périodique (voir la figure 2.22). La valeur de critique de bifurcation peut être déterminée en observant le rayon spectral de la jacobienne du système (2.6) au point fixe, et en augmentant continûment la valeur de  $g$  jusqu'à ce que le rayon spectral dépasse la valeur 1. Pour les paramètres restreints donnés dans l'équation (2.8), tous les régimes synchrones correspondent à de tels cycles. En particulier, on n'observe pas de nouvelles bifurcation de Hopf lorsque l'on augmente  $g$ , et à plus forte raison on n'observe pas de régime chaotique sur les signaux de champ moyen.

L'apparition d'un régime synchronisé oscillant dépend essentiellement des paramètres  $g$  et  $d$ . On peut remarquer par ailleurs que le paramètre  $\sigma_J$  se comporte

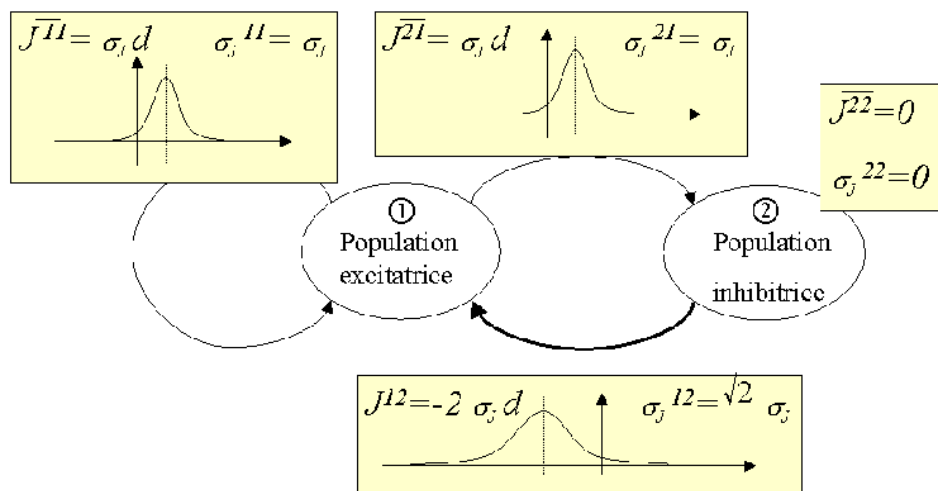


FIG. 2.21 – **Architecture du modèle à populations excitatrice et inhibitrice.** Les poids ont des valeurs gaussiennes aléatoires. La population inhibitrice n'a pas de liens récurrents. La moyenne  $\bar{J}^{(12)}$  des poids provenant de la couche inhibitrice est deux fois plus forte que la moyenne des poids provenant de la couche excitatrice.



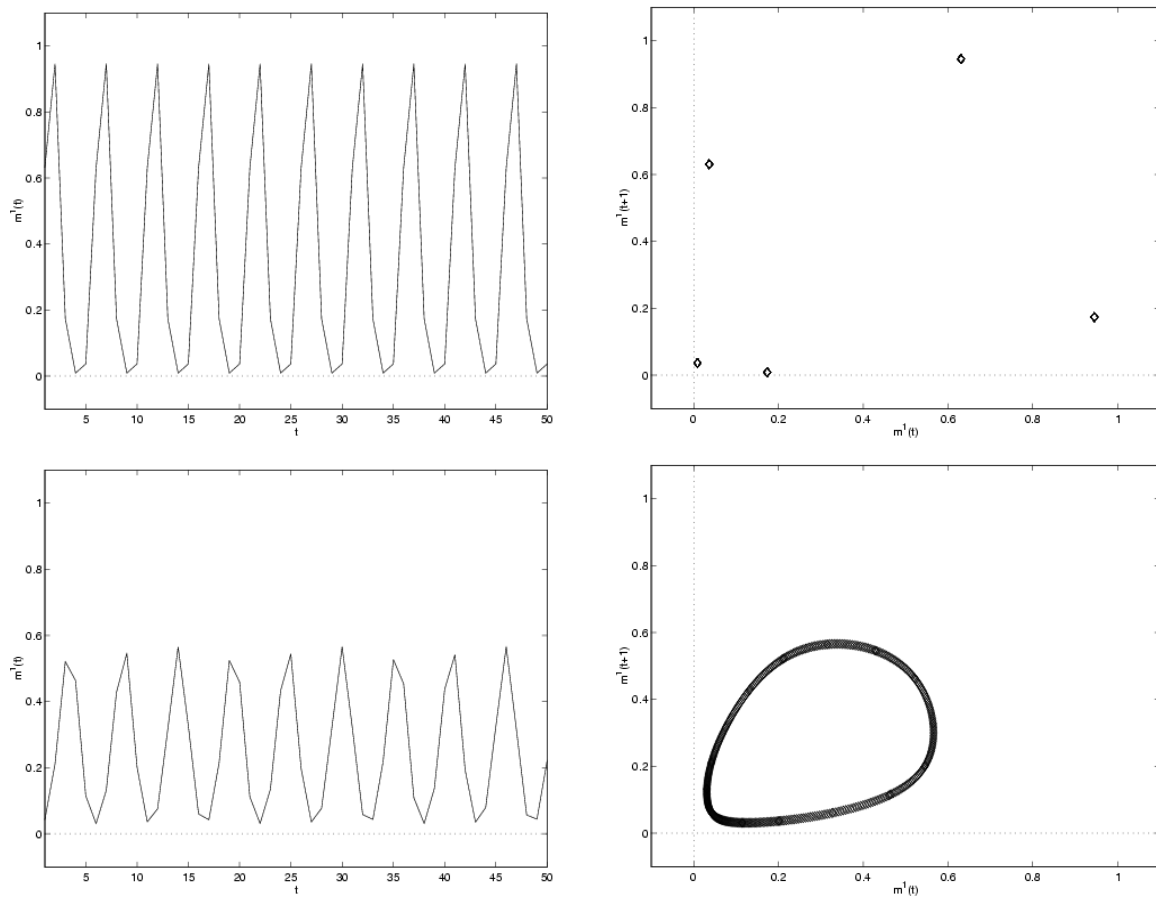


FIG. 2.22 – Deux exemples de dynamiques cycliques observées sur le signal  $m^{(1)}(t)$ . Les deux figures du haut montrent un signal périodique de période 5 (Le signal  $m^{(1)}(t)$  est sur la gauche, et l'application de premier retour sur la droite). Les paramètres sont  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2$ ,  $g = 8$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.5$ ,  $\sigma_{\theta}^{(2)} = 0$ . Les deux figures du bas montrent une dynamique pseudo-périodique, dont la période est proche de 5. Les paramètres sont  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2$ ,  $g = 8$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.8$ ,  $\sigma_{\theta}^{(2)} = 0.5$ .

qualitativement comme le paramètre  $g$ . En fixant  $\sigma_J$  à 1, et en faisant varier  $g$  et  $d$ , on dresse l'éventail des comportements dynamiques qui peuvent être rencontrés dans notre système.

Le rôle de  $g$  comme facteur favorisant la déstabilisation a déjà été étudié dans les sections précédentes, à taille finie et à la limite thermodynamique. On constate également sur ce modèle que des valeurs élevées de  $g$  favorisent l'apparition d'oscillations. Néanmoins, le paramètre  $d$  joue un rôle tout à fait fondamental dans l'apparition des oscillations. Contrairement à  $g$ , le paramètre  $d$  est caractéristique de ce modèle. Il tend à accentuer le "contraste" entre les deux populations. Plus  $d$  est élevé, plus les inhibiteurs sont fortement inhibiteurs et plus les excitateurs sont fortement excitateurs. Au contraire, une valeur de  $d$  nulle reproduit les paramètres des poids du modèle à une population.  $d$  marque donc la différenciation entre les deux populations. On constate sur ce modèle qu'il existe également une valeur de  $d$  minimale nécessaire à l'apparition d'oscillations. La présence d'un fort contraste entre les deux populations semble donc une condition nécessaire à l'apparition d'oscillations. Enfin, les paramètres qui portent sur les seuils jouent également un rôle. On a constaté en effet que des oscillations peuvent apparaître à condition que les potentiels de la population inhibitrice soient abaissés par un seuil  $\bar{\theta}^{(2)} > 0$ .

Il est possible de décomposer le mécanisme qui fait apparaître des oscillations dans le système. Dans le modèle (2.8), un fort niveau d'activation sur la population excitatrice conduit grâce aux liens  $J_{ij}^{(21)}$  à renforcer le niveau d'activation de la population inhibitrice. La population inhibitrice envoie alors en retour par les liens  $J_{ij}^{(12)}$  une influence négative qui tend à abaisser le niveau d'activation de la population excitatrice. Au temps suivant, le niveau d'activation faible sur la population excitatrice ne "nourrit" plus la population inhibitrice, qui à son tour voit son niveau d'activation baisser. La population inhibitrice étant désactivée, le niveau d'activation de la population excitatrice se renforce grâce à ses propres liens récurrents.

Ce mécanisme en boucle tend à produire périodiquement un pic d'activation sur la population excitatrice, qui est suivi au temps suivant d'un pic d'activation sur la population inhibitrice. Un décalage de phase peut en effet être observé entre le champ moyen  $m^{(1)}(t)$  de la population excitatrice et le champ moyen  $m^{(2)}(t)$  de la population inhibitrice ; la synchronisation repose sur un renforcement du niveau d'activation de la population inhibitrice par la population excitatrice (voir la figure 2.23).

On peut remarquer que l'entretien de ce mécanisme nécessite un réglage préalable. Ainsi, si l'influence inhibitrice est trop forte, de telles interactions conduisent à une complète extinction de l'activation de la population excitatrice. Dans le cas contraire, influences inhibitrice et excitatrice se compensent, si bien qu'elles produisent des signaux oscillants. La nécessité d'amoindrir le niveau d'activation de la population inhibitrice justifie la présence du seuil  $\bar{\theta}^{(2)} > 0$ .

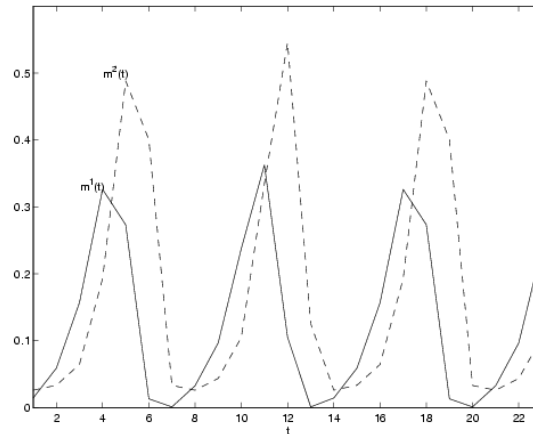


FIG. 2.23 – Décalage de phase entre le champ moyen  $m^{(1)}(t)$  de la population excitatrice et le champ moyen  $m^{(2)}(t)$  de la population inhibitrice. La ligne continue donne l'évolution du signal  $m^{(1)}(t)$ . La ligne pointillée donne l'évolution du signal  $m^{(2)}(t)$ . Les paramètres sont  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2$ ,  $g = 8$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.5$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ .

De manière plus générale, on peut dire qu'au sein d'une assemblée de neurones, la présence d'une différenciation marquée entre neurones inhibiteurs et neurones excitateurs est une condition nécessaire à l'apparition de régimes synchronisés. Ce point est généralisable à de nombreux types d'ensembles de neurones artificiels, et sans doute vrai la plupart du temps pour les neurones réels.

### Carte de bifurcations

Comme il a été vu, le régime dynamique à la limite thermodynamique peut être décrit à l'aide de deux indicateurs que sont le comportement dynamique du champ moyen (régime synchrone/asynchrone) et la divergence des trajectoires (régime stabilisé/déstabilisé). Ces indicateurs permettent de tracer deux variétés de bifurcation dans l'espace des paramètres, l'une marquant la frontière entre le régime synchrone et le régime asynchrone et l'autre marquant la frontière entre le régime stabilisé et le régime déstabilisé. Quatre types de régimes dynamiques peuvent en être déduits, à savoir :

- Régime asynchrone stable. Ce régime dynamique correspond au *point fixe*, déjà vu sur le modèle à une population.
- Régime synchrone stable. Tous les neurones au sein d'une même population oscillent en phase, de manière périodique ou pseudo-périodique. On parle alors d'*oscillations synchronisées*.
- Régime asynchrone déstabilisé. La dynamique est comparable à un processus gaussien stationnaire, comme sur le modèle à une population. On peut parler de *chaos stationnaire*.

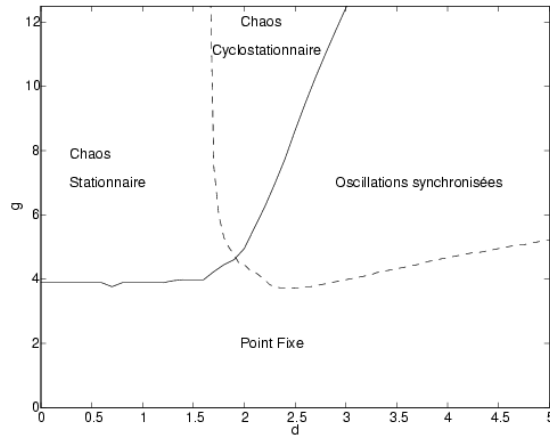


FIG. 2.24 – **Carte de bifurcation à la limite thermodynamique.** La carte décrit quatre régions dynamiques différentes selon  $d$  (décalage moyen) et  $g$  (gain), à savoir régime de point fixe, régime oscillant synchronisé, régime chaotique stationnaire et régime chaotique cyclostationnaire. Paramètres :  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.3$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ .

- Régime synchrone déstabilisé. La dynamique est comparable à un processus gaussien non stationnaire, à évolution périodique ou pseudo-périodique. On parle alors de processus aléatoire cyclostationnaire, ou encore de *chaos cyclostationnaire*.

Avec les paramètres ( $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.3$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ ), les équations de champ moyen (2.6) et celles qui définissent la distance quadratique (2.7) sont itérées pour différentes valeurs de  $g$  et de  $d$ . Les frontières de bifurcation obtenues sont présentées figure 2.24.

- La ligne continue donne la transition entre les régimes stables et déstabilisés. Pour tracer cette ligne, on fixe un  $\varepsilon$ , qui est petit ( $\varepsilon = 10^{-2}$ ), et un temps  $t_0$  suffisamment élevé pour atteindre le régime asymptotique ( $t_0 = 100$ ). Alors, pour chaque valeur de  $d$ , on fixe une valeur initiale pour  $g$  ( $g_{init} = 2$ ) et on fait croître  $g$  avec de petits pas ( $\delta g = 10^{-2}$ ) jusqu'à ce que  $\frac{1}{T+1} \sum_{t=t_0}^{t_0+T} (d^{(p)}(t))^2 > \varepsilon$ , où  $T$  est un temps fixé qui permet d'estimer l'évolution de la distance moyenne le long de la trajectoire ( $T = 20$ ).
- La ligne pointillée donne la transition entre la dynamique asynchrone ( $m^{(p)}(t)$  converge vers un point fixe  $m^{(p)*}$ ) et la dynamique synchrone ( $m^{(p)}(t)$  oscille pour les temps longs). Pour déterminer cette ligne, on regarde la déstabilisation du système (2.6). Pour chaque valeur de  $d$ , on fixe une valeur initiale pour  $g$  ( $g_{init} = 2$ ) et on fait croître  $g$  avec de petits pas ( $\delta g = 10^{-2}$ ) jusqu'à ce que la plus grande valeur propre de la jacobienne de (2.6) dépasse la valeur 1.

Ces quatre régions de l'espace des paramètres caractérisent les régimes dynamique du modèle à la limite thermodynamique. Elles étendent la gamme de régimes trouvés sur le modèle à une population. La table 2.3 résume la terminologie employée afin de permettre d'identifier précisément les régimes dynamiques variés observés à la limite thermodynamique.

	Asynchrone	Synchrone
Stable	<b>Point fixe</b>	<b>Oscillations synchronisées</b>
Déstabilisé	<b>Chaos stationnaire</b>	<b>Chaos cyclostationnaire</b>

TAB. 2.3 – Terminologie des régimes observés à la limite thermodynamique.

### Dynamique de taille finie

La simulation de réseaux de taille finie permet de représenter concrètement les régimes dynamiques trouvés à la limite thermodynamique. Toutes les simulations effectuées sur les systèmes de taille finie sont faites sur des systèmes non bruités (soit  $\sigma_W = 0$ ). L'absence de ce terme de bruit ne nuit pas au caractère prédictif des équations de champ moyen. On constate en effet que les quatre régimes décrits à la limite thermodynamique se retrouvent sur les réseaux de taille finie, pour les mêmes gammes de paramètres macroscopiques, à condition bien sûr que la taille soit choisie suffisamment grande ( $N = 100$  est suffisant).

Le régime chaotique cyclostationnaire est le régime dynamique le plus nouveau par rapport au modèle à une population ; c'est celui-ci que nous décrivons sur la figure 2.25 pour un réseau de taille  $N = 200$ .

On peut voir sur l'échantillon présenté que certains neurones de la population 1 tendent à avoir une activation forte au même moment (tous les 5 pas de temps), tandis que les autres signaux d'activations restent à une valeur proche de zéro. Cette valeur faible en moyenne des signaux d'activation est liée à l'influence inhibitrice forte de la population 2. Un signal fortement inhibiteur en provenance de la population 2 tend à produire des valeurs fortement négatives sur les potentiels de la population excitatrice. Pour les neurones dont le potentiel n'est cependant pas trop négatif en moyenne, les fluctuations du signal de potentiel permettent d'atteindre la partie linéaire de la fonction de transfert (la partie centrale de la fonction de transfert). Ces fluctuations apparaissent alors comme des impulsions sur le signal d'activation  $x_i^{(1)}(t)$  du diagramme de la figure 2.25.

Il est important de bien distinguer ce régime des régimes chaotiques observés sur le modèle à une population. En premier lieu, l'amplitude du signal moyen  $m_N^{(1)}(t)$  est bien supérieure à celle des signaux  $m_N(t)$  du modèle à une population. L'attracteur présenté sur la figure 2.25 a un diamètre 25 fois plus important

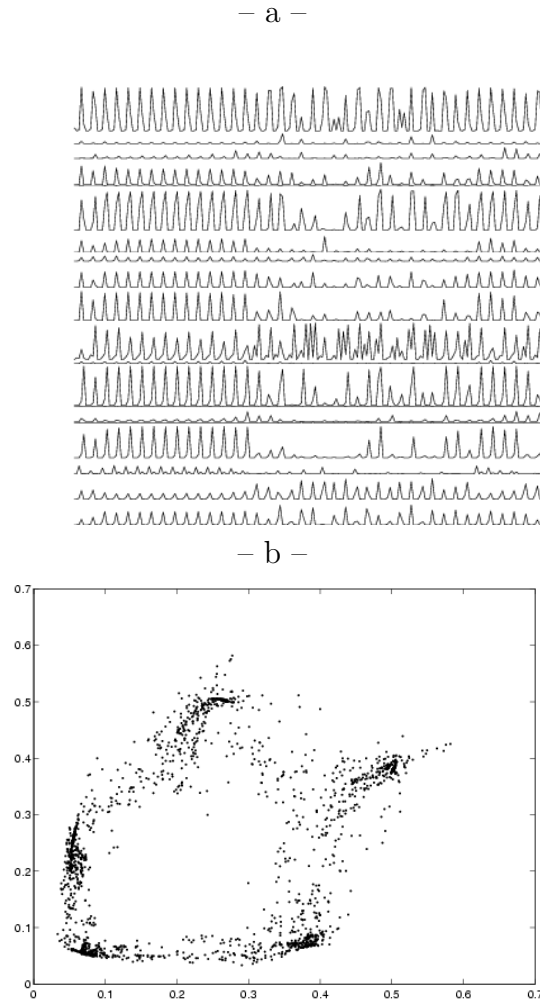


FIG. 2.25 – **Dynamique chaotique cyclostationnaire sur un réseau de taille finie.** -a- Dynamique asymptotique  $x_i^{(1)}(t)$  de 20 neurones de la population excitatrice, sur 200 pas de temps. La périodicité est de 5. -b- Application de premier retour du signal  $m_N^{(1)}(t)$  calculé sur 4000 itérations. Les paramètres sont  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 100$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2$ ,  $g = 6$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.3$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0.1$ .

que celui qui est présenté sur la figure 2.12. L'écart-type du signal moyen en régime synchronisé est donc très significativement supérieur à celui des régimes asynchrones, pour une même taille  $N$ . La seconde caractéristique spécifique de cet attracteur est la présence de cinq régions où la densité de points est plus importante. Ces régions de forte densité sont caractéristiques de la période 5 qui est la période dominante de ce système. Les neurones individuels tendent à atteindre leur valeur d'activation maximale tous les 5 pas de temps.

### Discussion biologique

Certaines hypothèses neurophysiologiques prêtent aux comportements rythmiques et synchronisés un rôle fondamental en termes de traitement de l'information dans le cerveau. Ces comportements semblent apparaître lorsqu'une région corticale à la fois reconnaît une configuration d'activation afférente, et produit du fait de cette reconnaissance une configuration d'activation qui peut se propager à d'autres régions corticales, proches ou éloignées. Par son *adaptation dynamique*, le système global est capable de traiter de façon différenciée différentes modalités de l'information entrante (voir page 25).

En particulier, si l'on accepte l'idée que les oscillations synchrones servent à augmenter la précision de la réponse du système, la capacité à reconnaître un motif pourrait reposer sur la capacité à passer d'un régime de type chaotique à un régime oscillant, dont la régularité est plus grande, comme cela a été suggéré par Freeman [32] (voir aussi page 27).

Il peut être intéressant d'estimer dans quelle mesure un comportement d'adaptation dynamique peut être observé de façon spontanée dans nos système (sans recours à l'apprentissage).

Quelques analogies peuvent en premier lieu être établies avec les structures biologiques :

- Notre système est un ensemble de neurones vaste et densément connecté. En ce sens, sa structure se rapproche de celle d'ensembles fonctionnels du cerveau, tels que les colonnes corticales ou le bulbe olfactif.
- La dynamique du système est capable d'atteindre différents régimes différenciés lorsque les paramètres macroscopiques changent. La variété des régimes dynamiques qui existent dans notre système peut être reliée à la variété des régimes mis en évidence dans le cerveau.

De nombreux modèles connexionnistes tendent à reproduire ces comportements de synchronisation [11]. Ce sont des modèles à spikes, qui reproduisent plus fidèlement le comportement des neurones réels. Le comportement de notre modèle montre que de tels phénomènes de synchronisation peuvent aussi apparaître sur des systèmes beaucoup plus simples, qui n'ont pas été spécifiquement conçus pour produire des dynamiques synchronisées.

Il est nécessaire, pour mettre en évidence des comportements d'adaptation à un motif d'entrée, de définir ce qu'est un tel motif. Dans notre système, on

considère que l'apparition d'un motif en entrée correspond à une modulation sur les seuils des neurones de la population excitatrice. Les motifs  $I^{(1)}$  utilisés sont des motifs aléatoires statiques comportant  $N^{(1)}$  valeurs tirés selon la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma_I^{(1)2})$ . Le vecteur  $I^{(2)}$  est un vecteur nul.

Un système sur lequel aucun motif n'est présenté est dit *spontané*, et évolue selon l'équation (2.5). Un système qui possède un motif  $I^{(1)}$  en entrée est dit *contraint*, et évolue selon l'équation (2.9). On peut noter que pour nos simulations, la valeur de  $\sigma_W$  est systématiquement mise à 0. Pour  $p \in \{1, 2\}$  et  $1 \leq i \leq N^{(p)}$ ,

$$\begin{cases} u_i^{(p)}(t) = \sum_{j=1}^{N^{(1)}} J_{ij}^{(p1)} x_j^{(1)}(t-1) + \sum_{j=1}^{N^{(2)}} J_{ij}^{(p2)} x_j^{(2)}(t-1) + W_i^{(p)}(t) - \theta_i^{(p)} + I_i^{(p)} \\ x_i^{(p)}(t) = f_g(u_i^{(p)}(t)) \end{cases} \quad (2.9)$$

Le motif d'entrée constitue donc un nouveau seuil sur la population excitatrice.

Pour les paramètres ( $g = 8$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2.5$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{\theta}^{(2)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta}^{(2)} = 0$ ), la dynamique spontanée est un point fixe. Sur la population excitatrice, chaque signal d'activation individuel tend vers une valeur fixe  $x_i^{(1)*}$ , proche de zéro. Lorsqu'on envoie un motif statique aléatoire  $I^{(1)}$  (avec  $\sigma_I^{(1)} = 0.3$ ) sur la population excitatrice, cela tend à donner naissance à un régime dynamique. La naissance de ce régime dynamique correspond exactement à l'apparition d'une sous population, au sein de la population excitatrice, dont le signal de potentiel atteint la partie linéaire de la fonction de transfert, ce qui se traduit par des pics sur le signal d'activation – voir la figure 2.26 –. Chaque neurone de cette sous-population tend à produire un signal d'activation de forte amplitude. On dit que le neurone est activé par le motif. Cette sous-population représente de 5 à 10% de la population excitatrice totale. L'ensemble de ces neurones activés constitue la *réponse spatiale* du réseau. Un autre motif  $I^{(1)'}$  indépendant de  $I^{(1)}$  tend à produire une réponse spatiale différente (les neurones activés par le deuxième motif ne sont pas les mêmes). Le système est apte à produire un signal spécifique pour chaque entrée différente. On peut noter par ailleurs que l'ensemble des neurones activés ne coïncide pas avec les valeurs maximales du motif d'entrée. Le réseau produit donc une forme de codage de son entrée.

Enfin, le régime dynamique n'est pas nécessairement le même d'un motif à l'autre : il s'opère une autre forme de discrimination sur les motifs d'entrée qui porte cette fois-ci sur la nature du régime dynamique produit. La nature du régime dynamique donne la *réponse dynamique* du réseau. Cette réponse dynamique s'avère très sensible aux valeurs précises du motif en entrée. De petits changements sur ce motif peuvent en effet conduire à des changements drastiques dans la réponse dynamique du système (alors que dans le même temps la réponse spatiale est à peine changée) Ainsi, une discrimination fine entre deux motifs voisins peut être effectuée par de tels changements dans la dynamique. C'est ce qu'on peut voir sur la figure 2.27, où deux motifs fortement corrélés ( $\text{cor}(I^{(1)}, I^{(1)'}) = 0.98$ )



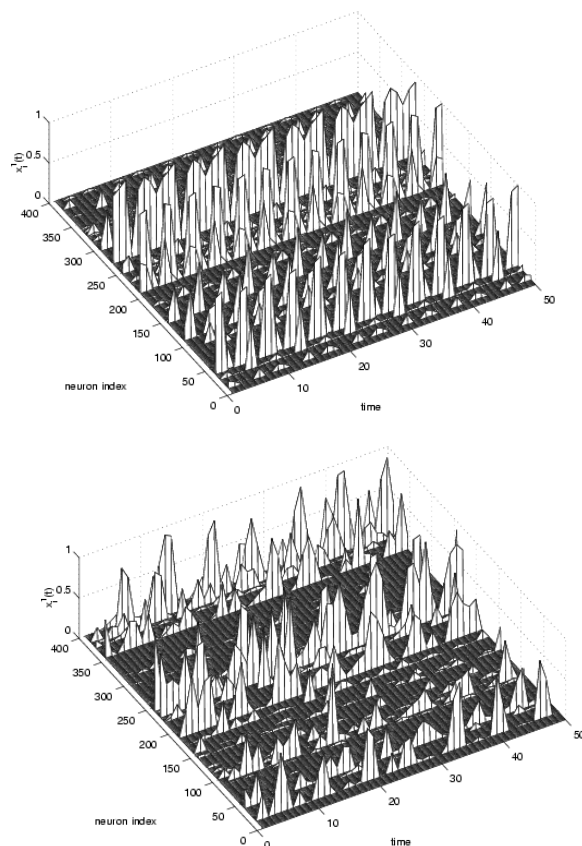


FIG. 2.26 – Diagrammes d’activation pour deux motifs d’entrée différents. Deux motifs d’entrée différents  $I^{(1)}$  et  $I^{(1)'}$ , dont les valeurs sont tirées indépendamment selon une loi gaussienne d’écart-type  $\sigma_I = 0.3$ , sont présentés en entrée d’un même réseau. La figure du haut donne le diagramme d’activation de la population excitatrice avec le premier motif (oscillations synchronisées). La figure du bas donne le diagramme d’activation de la population excitatrice avec le second motif (régime chaotique stationnaire). Le temps  $t$  est sur l’axe des  $x$ , l’index des neurones  $i$  sur l’axe des  $y$ , et l’activation des neurones  $x_i^{(1)}(t)$  sur l’axe des  $z$ . Les paramètres sont  $N^{(1)} = 400$ ,  $N^{(2)} = 400$ ,  $g = 8$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2.5$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ .

mènent à une réponse spatiale presque identique (les mêmes neurones sont activés) tandis que les régimes dynamiques produits sont différents, le premier étant un régime chaotique cyclostationnaire, et le second un régime d'oscillations synchronisées.

En étendant ces résultats aux systèmes neuronaux biologiques, on peut penser que la capacité à distinguer deux motifs voisins pourrait reposer sur un ajustement fin des régimes dynamiques. Par exemple, atteindre un régime synchronisé oscillant pourrait indiquer que le motif correspond bien à la forme mémorisée, tandis qu'un régime cyclostationnaire indiquerait seulement que l'on n'est pas trop loin de la forme mémorisée. Ainsi, au sein d'un système sensoriel, seule une bonne correspondance entre la forme mémorisée et la forme observée pourrait produire le signal régulier nécessaire un traitement ultérieur de cette information. Ce mécanisme pourrait être relié à des mécanismes naturels, comme ceux qui ont été décrits par [23] dans le cadre du système olfactif.

### 2.3.3 Régimes chaotiques sur le champ moyen

La section précédente met en avant des comportements oscillants sur les observables macroscopiques. Cependant, des dynamiques plus complexes, telles que des dynamiques chaotiques, peuvent également être observées sur le champ moyen, toujours dans le cadre d'un modèle mettant en jeu une population excitatrice et une population inhibitrice [91].

L'irruption d'un tel régime chaotique prend place sur un modèle légèrement différent de celui qui a été utilisé dans la section précédente. Ce modèle met toujours en œuvre une population inhibitrice et une population excitatrice, mais la population inhibitrice possède cette fois-ci, au même titre que la population excitatrice, des liens récurrents propres. Ainsi, contrairement au précédent, ce modèle possède un schéma de connexion symétrique.

Les paramètres  $d$  et  $\sigma_J$  servent de nouveau à décrire la distance à zéro et l'écart-type de référence de la loi des poids. Un nouveau paramètre est introduit : le paramètre  $a$  marque une nouvelle forme d'asymétrie sur la loi des poids : lorsque la valeur de  $a$  est différente de 1, la loi des poids en provenance de la couche inhibitrice vers la couche excitatrice a un *écart-type*  $\sigma_J^{(12)}$  différent de celui des autres lois, la moyenne restant la même. Autrement dit, l'inhibition moyenne reste la même, et l'influence de  $a$  joue sur la dispersion autour de cette valeur moyenne.

$$\begin{cases} \bar{J}^{(11)} = \sigma_J d & \sigma_J^{(11)} = \sigma_J \\ \bar{J}^{(12)} = -\sigma_J d & \sigma_J^{(12)} = a\sigma_J \\ \bar{J}^{(21)} = \sigma_J d & \sigma_J^{(21)} = \sigma_J \\ \bar{J}^{(22)} = -\sigma_J d & \sigma_J^{(22)} = \sigma_J \end{cases} \quad (2.10)$$

Lorsque le paramètre  $a$  vaut 1, donc, on constate de façon paradoxale que le

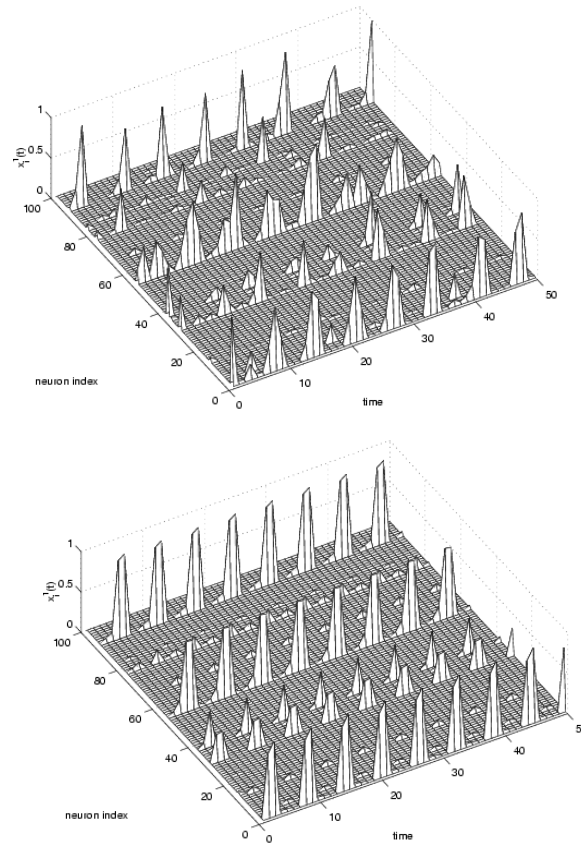


FIG. 2.27 – **Diagrammes d'activation pour des motifs voisins.** Deux motifs voisins,  $I^{(1)}$  et  $I^{(1)'}$ , sont présentés en entrée du même réseau. La figure du haut donne le diagramme d'activation de la population excitatrice lorsque le motif d'entrée est  $I^{(1)}$ . La figure du bas donne le diagramme d'activation de la population excitatrice lorsque le motif d'entrée est  $I^{(1)'}$ . Le temps  $t$  est sur l'axe des  $x$ , l'index des neurones  $i$  sur l'axe des  $y$ , et l'activation des neurones  $x_i^{(1)}(t)$  sur l'axe des  $z$ . Les paramètres sont  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 100$ ,  $g = 8$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $d = 2.5$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta}^{(2)} = 0$ .

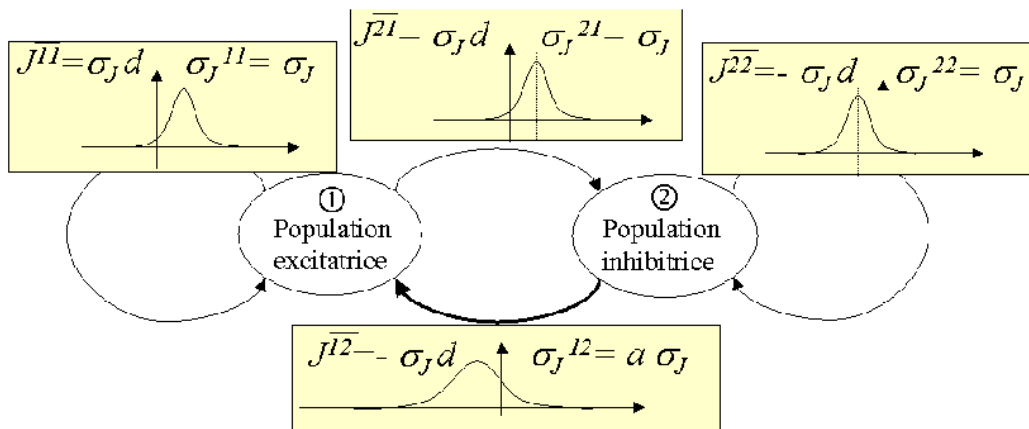


FIG. 2.28 – Architecture du deuxième modèle à populations excitatrice et inhibitrice. Les poids ont des valeurs gaussiennes aléatoires. La population inhibitrice possède cette fois-ci des liens récurrents. L'écart-type  $\sigma_J^{(12)}$  est réglé par le paramètre  $a$ .

modèle tend sur le champ moyen à se comporter exactement comme le modèle à une population. En particulier, la loi  $P(t)$  tend vers un point fixe  $P^*$  pour les temps longs, quelle que soit la valeur de la distance à zéro  $d$ . Même pour des valeurs de  $d$  très élevées (c'est à dire pour des lois au caractère excitateur et inhibiteur très marqué), on n'observe pas d'oscillations synchronisées. Du fait de la symétrie du schéma de connexion, et de la symétrie des lois, l'influence excitatrice et l'influence inhibitrice se compensent exactement.

Une modulation du paramètre  $a$  permet de briser de façon "douce" cette symétrie. C'est cette modulation qui permet de faire apparaître des comportements nouveaux sur le champ moyen. Pour obtenir ces comportements, il est par ailleurs nécessaire d'avoir un contraste fort entre la population excitatrice et la population inhibitrice, c'est à dire que  $d$  ait une valeur supérieure à 15.

Pour les valeurs  $d = 30$ ,  $a = 0.5$ ,  $\sigma_J = 1$ , il est possible de mettre en évidence une route vers le chaos sur le système macroscopique (2.6) pour des valeurs de  $g$  croissantes. Une telle route vers le chaos est présentée figure 2.29. Pour les paramètres choisis, cette route ne met pas en jeu de dynamiques toriques ni d'accrochage de fréquence : le système passe directement du cycle au chaos aux alentours de  $g = 1.55$  (la figure présente l'attracteur chaotique atteint pour  $g = 2.5$ , dans la mesure où la structure feuilletée de l'attracteur était peu visible pour des valeurs de  $g$  inférieures).

Pour les valeurs  $d = 30$ ,  $a = 2$ ,  $\sigma_J = 1$ , la transition du point fixe au chaos s'opère de manière différente. Il s'agit dans ce cas d'une route vers le chaos *par doublement de période*. Lorsque  $g$  croît, une première bifurcation fait apparaître un régime cyclique de période 2, suivi à la bifurcation suivante d'un régime de période 4, puis un peu plus loin d'un régime de période 8 etc... La distance entre deux bifurcations successives décroît, si bien que ces bifurcations de plus en plus rapprochées finissent par s'accumuler à l'approche d'une valeur critique  $g_c$  proche de 0.9, qui marque l'entrée dans un régime chaotique. Il existe, pour des valeurs de  $g$  supérieures, des fenêtres de périodicité. Cette route vers le chaos est également une route classique que l'on peut retrouver dans de nombreux systèmes. Sa présence dans le système du champ moyen marque son caractère générique. Cette route par doublement de période est présentée sur la figure 2.30.

Il est important d'insister sur la différence fondamentale entre les routes vers le chaos sur le système macroscopique et les routes vers le chaos que l'on peut observer sur les réseaux de taille finie à une population. Le comportement chaotique des grandeurs macroscopiques du champ moyen signifie que les observables macroscopiques des réseaux de taille finie, comme la moyenne, manifestent un comportement chaotique qui n'est pas réductible à une fluctuation aléatoire autour d'une valeur limite stationnaire. Sur ce régime, la dynamique est fortement non-stationnaire. Contrairement à la section précédente, il n'est pas possible de ramener cette non-stationnarité à une cyclo-stationnarité, dans la mesure où la moyenne suit une trajectoire chaotique de grande amplitude. Les neurones sont synchronisés sur un signal de nature chaotique, et l'on peut à ce titre parler de

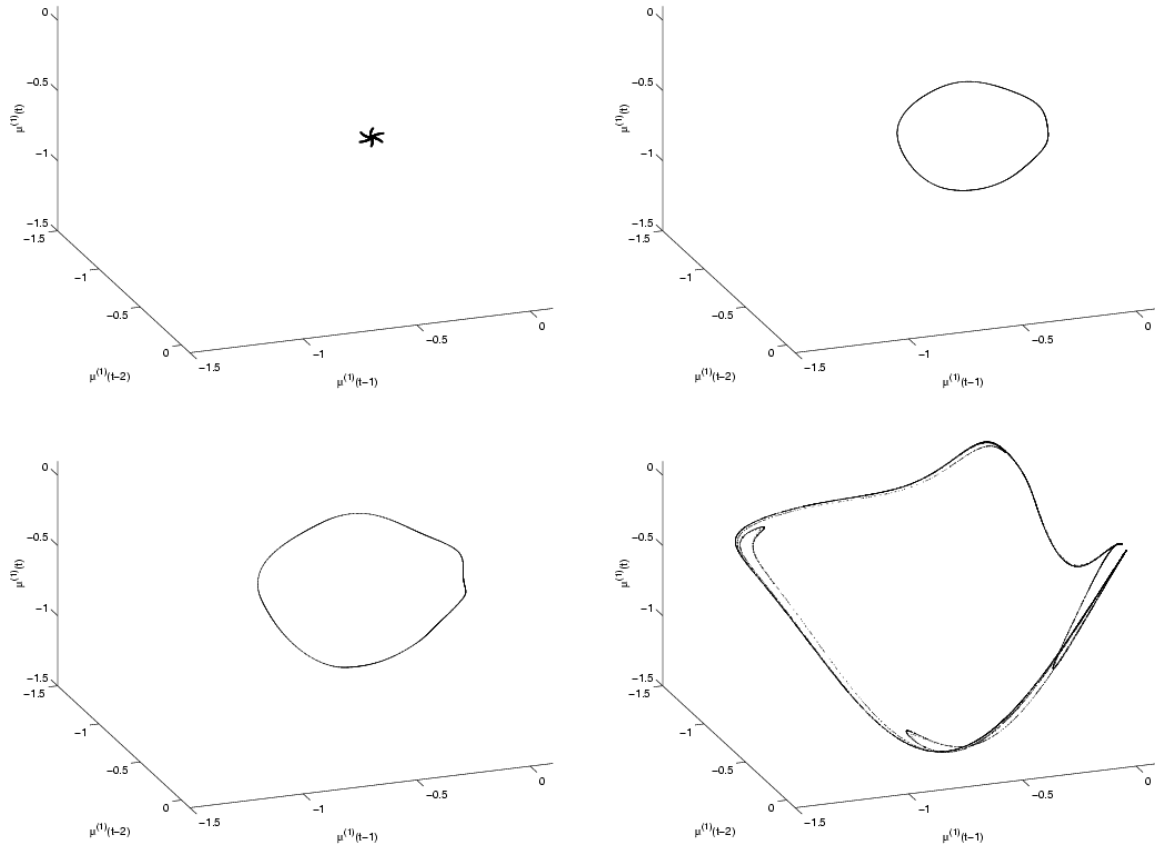


FIG. 2.29 – **Route vers le chaos par quasi-périodicité sur le signal de champ moyen.** Représentation en 3 dimensions du signal  $\mu^{(1)}(t)$ , pour un régime de point fixe ( $g = 1.3$ , en haut à gauche), un régime cyclique ( $g = 1.4$ , en haut à droite), un autre régime cyclique ( $g = 1.5$ , en bas à gauche) et un régime chaotique ( $g = 2.5$ , en bas à droite). La représentation est en 3D selon  $(t - 2, t - 1, t)$ . Paramètres :  $a = 0.5$ ,  $d = 30$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ .

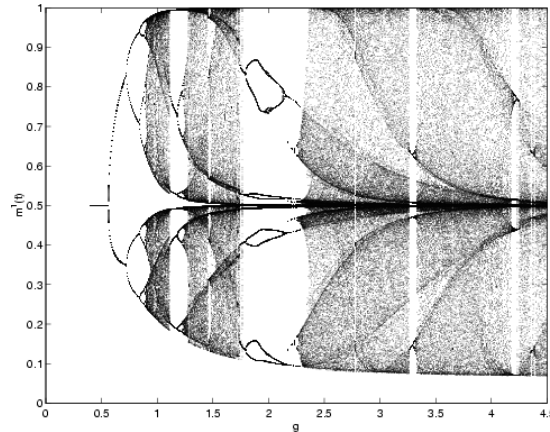


FIG. 2.30 – **Route vers le chaos par doublement de période sur le signal de champ moyen.** 400 valeurs du signal  $m^{(1)}(t)$  en dynamique stationnaire sont calculées pour différentes valeurs de  $g$  (par pas de 0.01, en abscisse). Paramètres :  $a = 2$ ,  $d = 30$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ .

régime de *chaos synchronisé*.

Ce régime de chaos synchronisé peut être mis en évidence sur le modèle de taille finie. Contrairement aux régimes de taille finie reposant sur des oscillations synchrones, pour lesquels les signaux individuels tendent à atteindre leur valeur maximale de manière périodique, le régime de chaos synchronisé se caractérise par le fait que les signaux individuels tendent à atteindre leur maximum en même temps, mais cette fois-ci de façon apériodique. La figure 2.31 montre le comportement des signaux de potentiel  $u_i^{(1)}(t)$  sur un réseau de taille finie en régime de chaos synchronisé. La similitude entre les différentes trajectoires est manifeste ; celles-ci présentent deux à deux une corrélation non nulle. Néanmoins, chacune prise individuellement produit un signal fortement apériodique.

Cette mise en évidence de régimes chaotiques sur le champ moyen illustre la difficulté à prouver la convergence des systèmes de taille finie vers le champ moyen pour les temps longs (voir page 73) . En effet, dans la mesure où la loi  $P^{(1)}(t)$ , décrite par le champ moyen est chaotique, celle-ci devient extrêmement sensible aux petites variations sur la loi qui fixe les conditions initiales. Toute dynamique sur un réseau de taille finie est issue d'un tirage aléatoire des valeurs initiales des activations. Or, quelle que soit la taille  $N$ , ce tirage particulier s'éloigne légèrement du tirage "idéal". Il existe donc nécessairement un temps au delà duquel la trajectoire du signal moyen  $m_N^{(1)}(t)$  sur ce réseau particulier et celle du signal de champ moyen  $m^{(1)}(t)$  divergeront. Le caractère prédictif des équations de champ moyen ne peut être prouvé que sur un intervalle de temps fixé  $1..T$ , auquel cas il est possible de trouver une taille  $N$  au delà de laquelle le système de taille finie et le champ moyen se comportent de la même façon sur l'intervalle  $1..T$ .

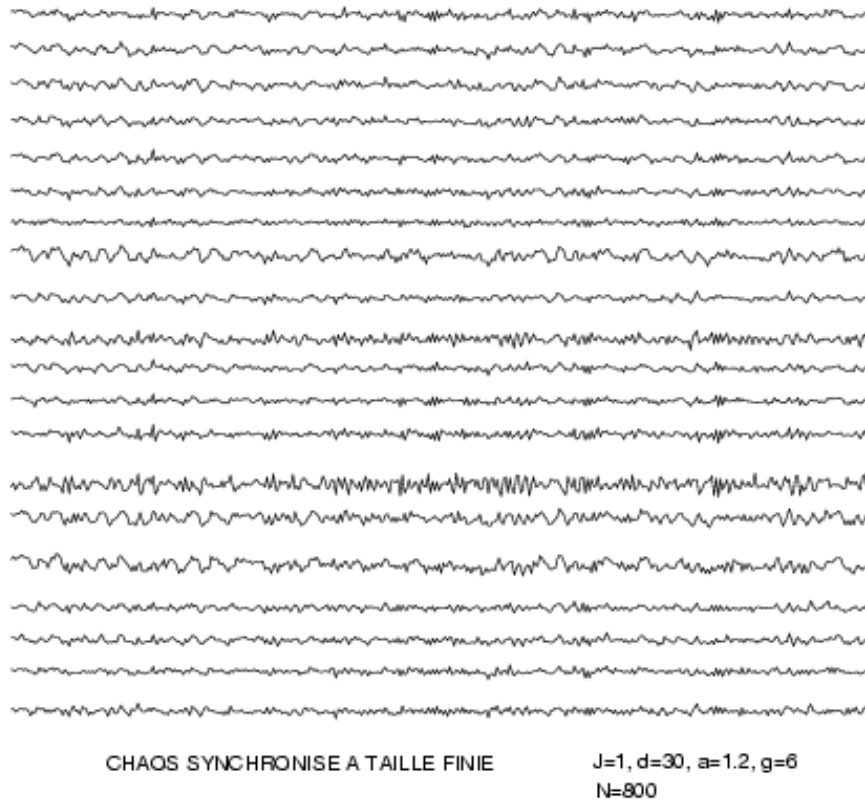


FIG. 2.31 – **Comportement chaotique synchronisé sur un réseau de taille finie.** On peut noter la forte ressemblance avec des signaux d'EEG. 20 signaux  $u_i^{(1)}(t)$  sont extraits du même réseau, en régime de chaos synchronisé, sur 200 pas de temps. Paramètres :  $g = 6$ ,  $N = 800$ ,  $a = 1.2$ ,  $d = 30$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0$ ,  $\bar{\theta}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_\theta^{(2)} = 0$ .



## CONCLUSION LOCALE

Ce chapitre nous a permis de présenter le modèle et ses propriétés principales. Une synthèse des différents travaux portant sur ce modèle a été accomplie, permettant d'en mesurer toute la richesse. En premier lieu, nous avons veillé à distinguer les paramètres microscopiques, qui correspondent aux couplages locaux des neurones, et les paramètres macroscopiques, qui définissent la loi de ces couplages et des seuils. Dans le cadre d'un modèle à une population, nous avons illustré le rôle des différents paramètres macroscopiques à la fois sur la distribution des activations et sur les régimes dynamiques. La route par quasi-périodicité menant à une dynamique chaotique est largement illustrée dans ce cadre. La propriété de propagation du chaos est exposée brièvement, et illustrée par des exemples sur des modèles de taille finie. Cette propriété permet la mise en place d'équations, appelées équations de champ moyen (ECM), et portant sur les observables macroscopiques (moyenne et écart-type des activations) à la limite thermodynamique (limite des grandes tailles). Il apparaît que sur le modèle à une population, les observables macroscopiques tendent vers des valeurs fixes pour les temps longs, ce qui correspond à taille finie à la description de régimes stationnaires où les signaux individuels au sein d'un même système sont décorrélés. Dans le cadre d'un modèle à deux populations, on a montré, toujours dans le cadre du champ moyen, que le comportement des systèmes de taille finie peut au contraire être non-stationnaire. Cette non-stationnarité se traduit par des oscillations de grande amplitude sur le signal moyen, correspondant à une synchronisation des signaux individuels. La présence de populations excitatrice et inhibitrice différenciées semble une condition nécessaire pour l'apparition de telles oscillations. Ce comportement pourrait par ailleurs être relié aux processus de synchronisation biologiques. Il est enfin montré que dans certaines conditions, un régime chaotique peut se développer dans les équations de champ moyen, correspondant à taille finie à une synchronisation aperiodique.

# Chapitre 3

## Dynamique spontanée et dynamique contrainte

*Pour ce chapitre et le suivant, on se place à nouveau dans le formalisme du modèle à une population sans ajout de bruit.*

Les équations de champ moyen, décrites dans le chapitre précédent, fournissent des renseignements précis sur les états macroscopiques du système. Ces équations permettent de mettre en évidence dans l'espace des paramètres des valeurs critiques correspondant à des changements dynamiques fondamentaux. Sur le modèle de taille finie, la transition entre le point fixe et le chaos correspond à une route vers le chaos par quasi-périodicité lorsque l'on augmente le paramètre de gain  $g$ .

Les résultats développés dans ce chapitre portent sur la dynamique des systèmes de taille finie. Les réseaux étudiés possèdent entre 100 et 200 neurones. Avec cet ordre de taille, les comportements prédits par les équations de champ moyen (décorrélation des signaux individuels, répartition gaussienne des potentiels, bassin d'attraction unique) sont suivis avec une bonne précision. Néanmoins, les réseaux de taille finie produisent à la déstabilisation un comportement cyclique (périodique ou pseudo-périodique) qui n'est pas décrit par les équations de champ moyen. Or, ce comportement cyclique initial influence profondément les régimes de plus grande complexité qui apparaissent aux bifurcations suivantes.

On va donc étudier dans ce chapitre :

- Les caractéristiques de la *configuration spatiale* des activations. Cette configuration repose sur une distinction entre les neurones “actifs”, qui entretiennent la dynamique, et les neurones “inactifs”, dont le signal est fortement saturé (section 3.1.1). On étudie en particulier les influences respectives du paramètre de gain  $g$  et d'un motif statique analogue à un seuil gaussien sur cette configuration spatiale (section 3.1.4).
- Les caractéristiques de l'activité dynamique, observée tout d'abord à l'aide de variables globales (section 3.2.1), puis à l'aide de mesures sur la covariance entre les signaux qui permettent de mettre en évidence

une nouvelle classification des neurones portant sur la phase des signaux d'activation. On parle alors de *configuration dynamique* et de circuit d'activation (section 3.2.2).

- L'ajout d'un signal (statique ou dynamique) qui contraint le système se traduit par des changements importants au niveau de la configuration spatiale et de la configuration dynamique. Dans le cas d'un motif statique, on constate une capacité à discriminer dynamiquement différentes entrées (section 3.3.1). Dans le cas d'une séquence périodique de motifs statiques, on constate une adaptation spontanée de la dynamique aux caractéristiques périodiques du signal (section 3.3.3).

### Dynamique contrainte

Le terme “dynamique contrainte” désigne un système sous la contrainte d'une influence extérieure, prenant la forme d'un signal  $I(t)$ . L'expression du système devient donc :

$$\begin{cases} u_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t-1) - \theta_i + I_i(t) \\ x_i(t) = f_g(u_i(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Le signal  $I(t)$  représente l'information apportée au réseau ; on ne fait aucune hypothèse sur ses caractéristiques. Le système contraint n'est plus un système autonome.

On distinguera deux types d'entrées : entrée statique si le signal est constant  $I(t) = I$ , entrée dynamique si le signal d'entrée est non constant. Dans le cas d'une entrée statique définie selon un tirage gaussien  $\mathcal{N}(\bar{I}, \sigma_I)$ ,  $I$  est comparable au seuil  $\theta$ , auquel il s'additionne linéairement. Dans ce cas, la dynamique contrainte peut être décrite dans le cadre des équations de champ moyen et l'ajout d'une entrée correspond à un déplacement dans l'espace des paramètres selon les directions  $-\bar{\theta}$  et  $\sigma_\theta$ .

Un *motif* d'entrée correspond, dans le cas d'une entrée statique, à un jeu de valeurs  $\{I_i\}_{i=1..N}$ . Un motif temporel correspond à une série de motifs,  $\{I_i(t)\}_{i=1..N, t=1..T}$  ; un motif temporel périodique se caractérise par sa période  $\tau$ .

Notre travail porte sur le régime stationnaire, ce qui signifie que toute étude sur les caractéristiques de la dynamique d'un réseau suppose l'élimination du régime transitoire. En régime stationnaire, on utilise la notation :

$$\begin{cases} u_i(t) = u_i^* + b_i(t) \\ x_i(t) = x_i^* + a_i(t) \end{cases}$$

où  $u_i^*$  est le potentiel moyen,  $b_i(t)$  le signal propre,  $x_i^*$  l'activation moyenne et  $a_i(t)$  l'activité dynamique.

Cette notation se réfère, bien sûr, à la notation utilisée pour la description du processus gaussien stationnaire à la limite thermodynamique sur le modèle (voir

page 76). Lorsque cette notation est étendue aux systèmes de taille finie, le signal  $b_i(t)$  ne correspond plus à un bruit blanc, mais possède les caractéristiques du régime dynamique qui se développe dans le réseau.

## 3.1 Configuration spatiale

Le terme *configuration spatiale* se réfère à la possibilité de séparer les neurones en différentes classes selon le niveau de leur activité dynamique, donné par l'écart-type du signal  $x_i(t)$ . Ce niveau d'activité dépend directement des potentiels moyens  $u_i^*$  et des activations moyennes  $x_i^*$ . Les caractéristiques de cette configuration spatiale sont étudiées en dynamique spontanée, puis en dynamique contrainte lorsqu'on impose au réseau un motif statique.

### 3.1.1 Neurones actifs/neurones figés

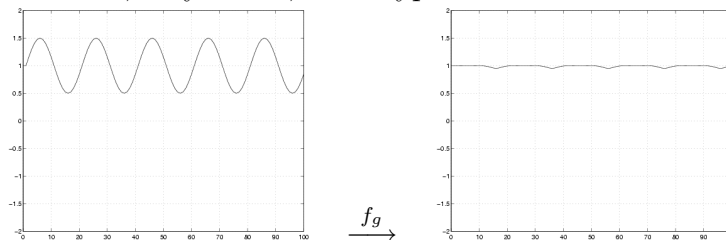
Lorsque l'on s'intéresse à la nature et à la complexité des dynamiques développées par les réseaux, l'indicateur le plus représentatif de cette activité *au niveau de chaque neurone* est le signal d'activité dynamique  $a_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ . Le choix de ce signal permet de s'affranchir de l'activation moyenne pour se concentrer exclusivement sur les caractéristiques dynamiques. En particulier, un neurone dont le niveau d'activation moyen  $x_i^*$  est fort, mais dont l'activité dynamique est de faible amplitude n'est pas considéré comme un neurone actif. Cette interprétation, qui rompt en particulier avec l'interprétation de l'activation  $x_i(t)$  en termes de probabilités de décharge, nous guidera dans la suite de ce document.

Dans ce paragraphe, on établit explicitement le lien entre le potentiel moyen du neurone  $u_i^*$  et l'amplitude de son activité dynamique  $a_i(t)$ .

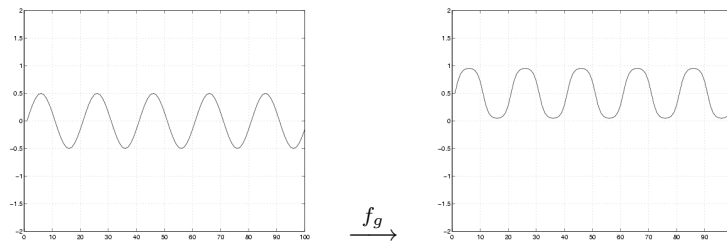
#### Fonction de transfert et signaux non-centrés

À titre d'exemple, les schémas ci-dessous indiquent les déformations subies par un signal sinusoïdal lorsqu'on le passe par la fonction de transfert  $f_g(x) = (1 + \tanh(gx))/2$ , avec  $g = 3$  :

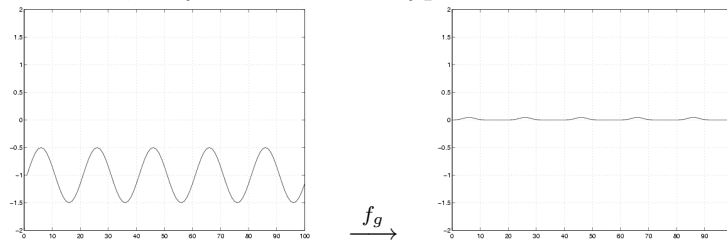
- Signal sinusoïdal, moyenne 1, écart-type 0.35 :



- Signal sinusoïdal, moyenne 0, écart-type 0.35 :



- Signal sinusoïdal, moyenne -1, écart-type 0.35 :



On constate immédiatement que les signaux non-centrés, dont les valeurs sont situées aux alentours de 1 ou de -1 pour cet exemple, se retrouvent “aplatis” par la fonction de transfert. Le signal de moyenne 1 produit un signal presque plat, prenant ses valeurs aux alentours de 1 (limite supérieure de la sortie de la fonction de transfert). Le signal de moyenne -1 produit un signal presque plat, prenant ses valeurs aux alentours de 0 (limite inférieure de la sortie de la fonction de transfert). Un signal dont les valeurs sont situées aux alentours de zéro subit une légère déformation, mais la sortie prend ses valeurs sur l’ensemble de l’intervalle  $]0,1[$ . En général, plus la moyenne du signal considéré est excentrée, plus la fonction de transfert tend à aplatiser le signal.

On peut ramener ces observations aux signaux produits par le réseau. Le signal de potentiel  $u_i(t)$  est un signal non-centré, dont la moyenne est  $u_i^*$  (potentiel moyen). Suivant la valeur du potentiel moyen, le signal  $x_i(t) = f_g(u_i(t))$  n’aura pas les mêmes caractéristiques.

- Si la valeur de  $u_i^*$  est proche de zéro, le neurone tend à propager son signal de potentiel. Ce neurone est dit *actif*.
- Si la valeur de  $u_i^*$  est excentrée, le signal  $x_i(t)$  est très écrasé, et son activité dynamique est faible. Ce neurone est dit *figé*.
  - Si l’activation reste proche de la valeur 0, le neurone est dit *muet*.
  - Si l’activation reste proche de la valeur 1, le neurone est dit *saturé*.

Ainsi, dans un réseau pour lequel les potentiels moyens peuvent prendre des valeurs excentrées, seul *un sous-ensemble* de neurones transmet le signal dynamique, et est réellement actif dans l’entretien de la dynamique qui se développe dans le réseau. La répartition des activations moyennes  $x_i^*$  et des potentiels moyen  $u_i^*$  peut nous renseigner sur ces proportions.

### 3.1.2 Mesures empiriques sur l’activité

L’activité dynamique peut désigner deux choses :

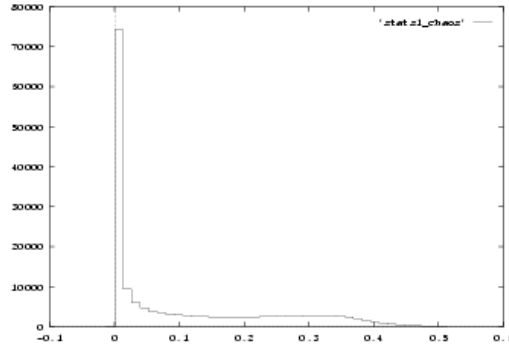


FIG. 3.1 – **Répartition empirique de l'activité locale**, mesurée par l'écart-type des signaux  $a_i(t)$ . Les mesures sont effectuées sur 3500 réseaux de taille  $N = 50$ , définis selon les paramètres  $g = 6$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$  et  $\sigma_J = 1$ . L'histogramme se fonde sur  $3500 \times 50$  valeurs.

- Au niveau global (ou macroscopique), la définition coule de source : on dira qu'un réseau développe une activité dynamique non nulle s'il n'est pas en point fixe.
- Au niveau local (ou microscopique), l'activité dynamique est donnée par le signal  $a_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ . L'écart-type de ce signal permet de quantifier cette activité. Plus l'écart-type est élevé, plus le neurone peut être considéré comme "actif" dynamiquement parlant.

Les deux jeux de mesure qui suivent visent à montrer, pour le premier que l'activité dynamique locale ne se répartit pas de façon uniforme, et pour le second que le développement d'une activité macroscopique peut être reliée aux caractéristiques de la répartition des potentiels moyens.

### Répartition de l'activité locale

Pour effectuer cette mesure, on se place au sein d'une population de réseaux dont l'activité dynamique est non nulle. À l'issue du tirage des réseaux, on effectue donc une sélection qui élimine les réseaux en point fixe.

La mesure porte sur la répartition de l'activité dynamique locale ; on regarde la répartition des écart-types  $\sigma_a$  de l'activité dynamique  $a_i(t)$ . L'histogramme de la figure 3.1 est issu de mesures faites sur 3500 réseaux de 50 neurones avec  $g = 6$ .

Remarque générale sur la forme de la répartition : La densité de probabilité que l'on peut attacher à cet échantillon pourrait évoquer une loi de Poisson, mais une étude plus approfondie montre que cette répartition est *non-monotone*. Cette répartition empirique atteint en effet un minimum local vers 0,17 une maximum local aux alentours de 0,32. Il est donc facile de séparer les activités dynamiques en deux catégories, une à activité faible, correspondant à un écart-type inférieur à 0.17, et une à activité forte, correspondant à un écart-type supérieur à 0.17.

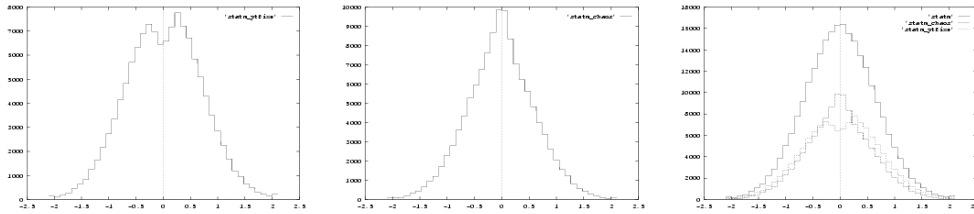


FIG. 3.2 – **Répartition des potentiels moyens.** La figure de gauche donne la répartition des  $u_i^*$  pour les réseaux figés. La figure au centre donne la répartition des  $u_i^*$  pour les réseaux dynamiques. La figure de droite donne la répartition globale, somme des deux répartition précédentes. Paramètres :  $g = 4.9$ ,  $N = 50$ ,  $\theta = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ . Taille de l'échantillon global :  $5000 \times 50$  neurones.

On remarque que les neurones dont l'activité dynamique est faible représentent près de 68% du total des neurones, tous réseaux confondus, sur ces valeurs de paramètres.

La conclusion provisoire que l'on peut en tirer, c'est que pour les paramètres que l'on s'est fixés, les neurones actifs représentent environ 1/3 du total des neurones.

### Activité dynamique et répartition des potentiels moyens

On a cherché ici à établir un lien entre la répartition spatiale des neurones et l'activité dynamique globale. On fixe une valeur  $g_{ref} = 4.9$ , on tire les poids pour obtenir 5000 réseaux de 50 neurones, on itère la dynamique et on classe les réseaux en deux catégories :

- catégorie 1 : ceux qui ne sont pas encore destabilisés pour  $g = g_{ref}$ , et présentent une activité dynamique nulle : réseaux figés.
- catégorie 2 : ceux qui sont déjà destabilisés pour  $g = g_{ref}$ , et présentent une activité dynamique non nulle : réseaux dynamiques.

On compare alors la répartition des potentiels moyens pour ces deux catégories.

Remarque : pour les paramètres choisis, la valeur  $g_{ref} = 4.9$  correspond à la valeur théorique de destabilisation ; on a ainsi environ autant de réseaux dans les deux catégories.

La différence entre les deux répartition, présentées sur la figure 3.2, saute aux yeux. On a ici une caractérisation très nette du lien entre la répartition des potentiels et l'activité dynamique. Ainsi :

- Les réseaux figés présentent une sous densité en valeurs centrées.
- Les réseaux dynamiques présentent à l'inverse une surdensité en valeurs centrées.

L'excès en valeurs centrées d'un côté, et le déficit de l'autre se compensent lorsque l'on superpose les deux répartition ; on obtient alors la courbe en cloche caractéristique de la répartition gaussienne, conforme aux prévisions des équations de champ moyen.

On constate donc que la prise en compte des caractéristiques de la dynamique introduit un biais fort sur la répartition des potentiels. On le voit, la surdensité en potentiels centrés est corrélée au développement précoce d’une activité dynamique (et inversement). Plus généralement, ces mesures confirment le lien entre potentiels centrés et neurones à forte activité dynamique.

### 3.1.3 Neurones actifs et déstabilisation

Les mesures qui précèdent ont montré de manière qualitative le lien que l’on pouvait établir entre des distributions de potentiels moyens et l’activité dynamique de nos réseaux. On propose ici une approche équivalente, fondée sur une approximation du rayon spectral de la jacobienne, qui permet de relier la distribution des  $u_i^*$  avec la valeur de déstabilisation  $g_c$ .

Pour les réseaux en point fixe, on a vu dans la section 2.1.3 que la valeur du rayon spectral  $\rho$  du système est approché par  $\rho \simeq 2g\sigma_J E(x_i^* - x_i^{*2}) = \sigma_J E(f'_g(u_i^*))$  (sachant que  $f'_g(u_i^*) = 2g(f_g(u_i^*) - f_g^2(u_i^*))$ ). La valeur de la dérivée de la fonction de transfert est maximale en zéro ; ainsi, une surdensité en valeurs centrées tend à augmenter l’espérance de  $\rho$ , ce qui tend à abaisser la valeur de déstabilisation  $g_c$ . On a donc un lien clair entre la distribution des  $u_i^*$  et la valeur de déstabilisation.

Essayons de comprendre ce qui se passe lors de la période transitoire. À l’initialisation, le réseau est loin de l’équilibre ; les valeurs de chaque neurone subissent d’importantes variations pour les premiers pas de temps qui suivent l’initialisation. Les neurones dont le potentiel se maintient autour de zéro auront tendance à propager le signal reçu. Au contraire, les neurones dont le potentiel s’éloigne de zéro tendent à amoindrir l’amplitude de ce signal. C’est la compétition entre ces deux tendances qui aboutit soit à la convergence vers un point fixe (la tendance stabilisatrice gagne), soit vers un régime dynamique (la tendance activatrice gagne).

En ce sens, la moyenne  $\tilde{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f'_g(u_i^*)$  nous renseigne sur ce rapport de forces. Ainsi, la déstabilisation du réseau prend place au moment où tendance stabilisatrice et tendance activatrice s’équilibrent, soit  $\tilde{\rho} \simeq 1$ .

Localement, la valeur de  $f'_g(u_i^*)$  permet de caractériser la nature des neurones, soit :

- Un neurone actif est un neurone tel que  $f'_g(u_i^*) > 1$ , qui tend à amplifier l’instabilité du réseau et donc à activer sa dynamique.
- Un neurone figé est un neurone tel que  $f'_g(u_i^*) < 1$ , avec une activité dynamique faible ou presque nulle, et qui tend à *faire diminuer l’instabilité*, donc à stabiliser la dynamique.

Cette définition permet d’étendre les termes “neurone actif” et “neurone figé” aux réseaux en point fixe.

Remarques :

- Ces deux catégories ne sont définies que si la tangente de la fonction de transfert en 0 est  $> 1$  (c’est à dire si  $g$  est plus grand que 2).



- Dans le cas où la variance est faible,  $f'_g(u_i^*)$  correspond à l'amplification du signal propre  $b_i(t)$  par la fonction de transfert, c'est à dire  $a_i(t) \simeq f'_g(u_i^*)b_i(t)$ .

### 3.1.4 Influences internes et externes

Le jeu de valeurs des  $u_i^*$  fournit une indication précise sur l'organisation spatiale du réseau. On peut voir ce jeu de valeurs comme un motif statique interne, qui caractérise le système. Il permet en particulier de classifier les neurones dans les catégories actif/saturé/silencieux. Cette catégorisation des neurones est définie, même si le réseau est en point fixe. On l'appelle la *configuration spatiale* du réseau.

En dynamique contrainte, la configuration spatiale est perturbée lorsque le motif est présenté. La configuration initiale subit un remodelage, dont l'intensité est fonction de l'intensité de la stimulation. Sous l'effet de l'entrée, certains neurones deviennent actifs, d'autres se figent. L'importance de ces transferts de populations traduit l'intensité de la "réaction" au motif présenté.

Dans les paragraphes qui suivent, on regardera en détail l'effet de la présentation d'un motif statique sur la configuration spatiale du réseau, et comment la configuration finale traduit le compromis entre influence interne et influence externe.

#### Rôle de l'aléa des poids sur la configuration spatiale

Nos systèmes sont des systèmes à aléa gelé. Les poids synaptiques et les seuils sont tirés une fois pour toutes. On cherche ici à estimer l'influence du tirage initial de la matrice des poids sur la configuration spatiale, en l'absence de motif d'entrée.

Il est possible d'estimer à partir de la simple matrice des poids  $J$  (sans itérer la dynamique) la valeur du point fixe  $\{u_i^*\}_{i=1..N}$  pour tout  $i$ . Les équations de champ moyen nous donnent à tout instant une estimation de l'activation moyenne  $m(t)$ , qui tend pour les temps longs vers la valeur  $m^*$ . À taille finie, les couplages sont définis par la matrice aléatoire  $J$ . En supposant l'indépendance des activations afférentes  $\{x_j(t-1)\}_{j=1..N}$ , et en supposant que  $m^*$  fournit une bonne approximation de l'espérance des activations  $m_N^*$ , l'estimation de l'espérance du potentiel  $u_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t-1) - \theta_i$  est donnée par :

$$E(u_i(t)) = u_i^* \simeq m^* \sum_{j=1}^N J_{ij} - \theta_i \quad (3.2)$$

Cette estimation est donc fondée à la fois sur la somme des lignes de la matrice des poids et sur la valeur locale du seuil.

La pertinence de cette estimation peut être évaluée en itérant la dynamique et en calculant les  $u_i^*$  effectifs. Pour des seuils nuls, on trouve une corrélation entre la valeur estimée et la valeur effective comprise entre 0.7 et 0.8. Ces valeurs de corrélation ne dépendent pas de la taille  $N$  (l'estimation n'est pas meilleure si on augmente la taille).

Étant donné la dépendance de la configuration spatiale par rapport aux valeurs  $u_i^*$ , la conclusion immédiate, prévisible, est que le tirage des poids “prédétermine” la configuration spatiale. La matrice des poids donne déjà une estimation de la catégorie des neurones. Il ne s'agit néanmoins que d'une estimation, et les écarts observés entre la valeur effective et la valeur estimée peuvent être fortement amplifiés par la fonction de transfert ; ces écarts s'avèrent suffisants pour induire des différences sensibles entre la configuration spatiale estimée et la configuration spatiale effective.

*On voit donc que certains neurones sont favorisés “dès la naissance”, mais fort heureusement il reste une marge d'incertitude, reposant sur la coopération entre neurones, qui permet à certains neurones défavorisés de sortir du lot. La morale est sauve !*

### Influence du régime dynamique sur la configuration spatiale

On montre ici que les valeurs des  $u_i^*$  dépendent peu du paramètre de gain  $g$ , ce qui signifie que la configuration spatiale dépend faiblement du régime dynamique.

Le tableau 3.1 donne, sur un réseau de 200 neurones, la corrélation entre  $u^{*(g)}$  et  $u^{*(\infty)}$ , où  $u^{*(g)}$  est le vecteur des potentiels moyens pour le gain  $g$  et  $u^{*(\infty)}$  donne le vecteur des potentiels moyens pour  $g = \infty$ , c'est à dire pour une fonction de transfert binaire.

g	0	1	2	3	4	5	10	15	20
$\text{cor}(u^{*(g)}, u^{*(\infty)})$	0.782	0.942	0.992	0.994	0.982	0.984	0.992	0.989	0.994

TAB. 3.1 – Corrélation entre  $u^{*(g)}$  et  $u^{*(\infty)}$ , pour différentes valeurs de  $g$ , calculées sur un réseau en  $[0, 1]$ ,  $N = 200$ .

On voit ainsi qu'au delà de  $g = 2$ , le vecteur des potentiels moyens  $u^*$  est stabilisé, et reste fortement autocorrélé aux alentours de 0,99. On peut par extension dire que pour  $g > 2$ , la configuration spatiale ne change pas, que le réseau soit en régime de point fixe, en régime cyclique ou en régime chaotique.

La configuration spatiale apparaît donc comme indépendante du régime dynamique. Elle caractérise l'organisation profonde du réseau. On peut la considérer comme un socle à partir duquel la dynamique se développe, sans l'affecter en retour.

À l'inverse, le paragraphe suivant montre qu'une modification des seuils a des conséquences très importantes sur la configuration spatiale.

### Influence d'un motif statique

L'estimation de  $u_i^*$  donnée en (3.2) fait également intervenir la valeur locale du seuil  $\theta_i$  dont on a peu parlé jusqu'à présent. Au signe près, le rôle du seuil  $\theta$  est en fait tout à fait similaire à celui d'une entrée statique gaussienne  $I$  (de moyenne  $\bar{I}$  et d'écart-type  $\sigma_I$ ). La différence entre  $\theta$  et  $I$  repose plutôt sur l'interprétation de ces deux grandeurs : le motif statique est une modulation externe du champ local, tandis que le seuil est une modulation considérée comme "interne". Les résultats qui suivent, qui portent sur l'influence de motifs statiques gaussiens sur la configuration spatiale, sont donc directement transposable aux seuils.

Si l'on considère la dynamique contrainte par un motif  $I$  gaussien, l'estimation d' $u^*$  à partir de  $J$  devient :

$$E(u_i(t)) \simeq \left( m^* \sum_{j=1}^N J_{ij} - \theta_i \right) + I_i$$

Selon cette estimation, on s'attend à ce que le vecteur des  $u_i^*$  de la dynamique contrainte soit une simple addition linéaire du vecteur des  $u_i^*$  de la dynamique spontanée et du motif.

Ce n'est pourtant pas exactement ce qui se passe. En effet, la présentation d'un motif crée une perturbation dans les interactions entre neurones qui ne se "résout" qu'à l'issue du temps de relaxation. La nouvelle configuration dépend aussi du nouvel équilibre qui s'instaure entre les neurones. Le système étant non-linéaire, on peut dans tous les cas s'attendre à un nouveau vecteur des potentiels qui s'éloigne dans une certaine mesure de la simple addition entre le vecteur initial et le motif.

On va ici chercher à évaluer un peu plus précisément la nature de cette re-configuration. Suivant le choix des paramètres  $\bar{I}$  et  $\sigma_I$ , l'"impact" du motif sur la dynamique du réseau sera plus ou moins important.

Soit un réseau défini par le tirage de ses poids synaptiques et de ses seuils. On cherche à mesurer deux choses :

- L'*influence interne*, que l'on mesure par la quantité :

$$C = 1 - \text{cor}(u^*, I)$$

où  $u^*$  est le vecteur des potentiels moyens de la dynamique contrainte, et  $I$  est le motif présenté. Plus  $C$  est proche de 1, plus les interactions propres au réseau sont prépondérantes par rapport au motif externe pour déterminer la configuration spatiale. Remarque : par complémentarité,  $mboxcor(u^*, I)$  donne l'influence externe.

- La *discrimination*, que l'on mesure par la quantité :

$$D = 1 - \text{cor}(u^*, u^{*'})$$

Où les potentiels moyens  $u^*$  et  $u^{*'}$  correspondent, sur un même réseau (mêmes couplages, mêmes seuils), aux dynamiques contraintes issues de motifs  $I$  et  $I'$  indépendants. Une discrimination  $D$  proche de 1 assure que des motifs différents conduisent bien à des configurations spatiales différentes :

On peut voir que si l'influence interne est forte et la discrimination faible, le réseau fournit une réponse qui dépend peu de son entrée. À l'inverse, si l'influence interne est faible et la discrimination forte, le réseau se contente de reproduire sur son vecteur des potentiels les caractéristiques de l'entrée. On peut dire dans ce cas que la configuration spatiale du réseau est "contrôlée" par le motif.

En observant le comportement des grandeurs  $C$  et  $D$  dans l'espace des paramètres, on cherche les valeurs de paramètres optimales telles que l'on maximise à la fois l'influence interne et la discrimination.

Pour estimer le comportement de ces grandeurs dans l'espace des paramètres, on a mesuré les quantités  $C$  et  $D$ , sur 10 réseaux pour chaque valeur des paramètres  $\bar{I}$  (moyenne du motif) et  $\sigma_I$  (écart-type du motif). La taille des réseaux est  $N = 200$  et  $g = 8$ . Les motifs étant tirés selon une loi gaussienne, ils sont comparables à des seuils additionnels. Les résultats de cette mesure sont présentés figure 3.3.

On voit clairement qu'influence interne et discrimination tendent à se comporter de manière complémentaire. Une influence interne élevée correspond généralement à une discrimination faible, et vice-versa. De façon prévisible, des motifs de faible écart-type ( $\sigma_I \simeq 0.1$ ) sont mal discriminés (les caractéristiques spatiales de la dynamique spontanée l'emportent), tandis que des motifs de fort écart-type sont bien discriminés (les caractéristiques spatiales du motif l'emportent). On constate que c'est pour des valeurs de l'ordre de  $\sigma_I = 0.5$  que l'on observe un croisement des deux tendances, et où influence interne et influence externe s'équilibrent.

La qualité du compromis entre influence interne et discrimination peut être mise en évidence par le produit  $C \times D$ . On voit sur la figure 3.3 que la valeur de ce produit n'est pas uniforme dans l'espace des paramètres. Si l'influence interne ou la discrimination sont très faibles, la valeur du produit sera proche de zéro. Une valeur élevée de ce produit correspond à un bon équilibre entre les deux tendances. On trouve, sur les données présentées, une valeur maximale du produit pour les paramètres ( $\bar{I} = -0.4$ ,  $\sigma_I = 0.3$ ), pour lesquels l'influence interne vaut 0.41 et la discrimination 0.71.

La figure 3.4 représente les potentiels pour un motif dont la répartition obéit à une loi gaussienne et dont on a disposé les valeurs spatialement en faisant ressortir la diagonale pour faciliter l'interprétation visuelle <sup>1</sup>. On constate que

<sup>1</sup>Le réseau est densément connecté, donc la représentation spatiale des neurones sur un carré  $10 \times 10$  ne sert qu'au confort visuel, et ne correspond pas à un schéma de connexion carré à plus proches voisins.

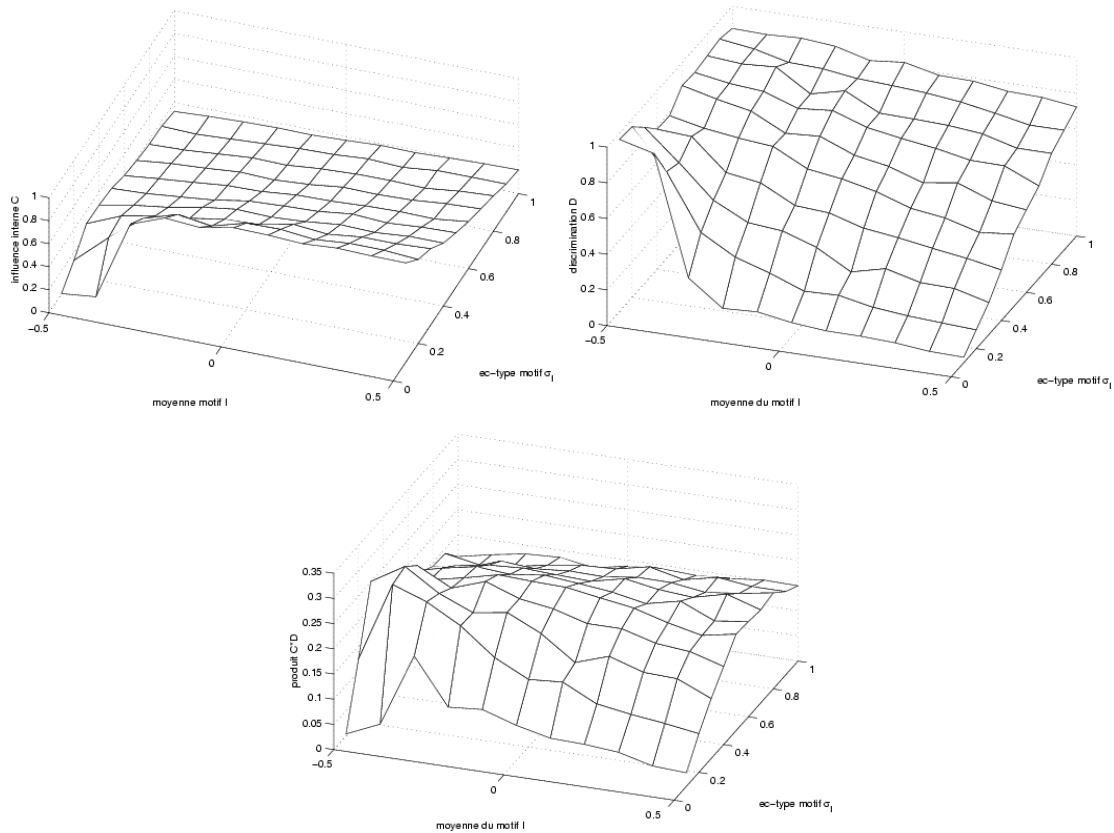


FIG. 3.3 – Mesure de l'influence interne et de la discrimination sur des réseaux de taille finie. Figure du haut, gauche : influence interne  $C$  en fonction de  $\bar{I}$  et  $\sigma_I$ . Figure du haut, droite : discrimination  $D$  en fonction de  $\bar{I}$  et  $\sigma_I$ . Figure du bas : produit  $C \times D$ . Paramètres :  $g = 8$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ . Pour chaque couple  $(\bar{I}, \sigma_I)$ , les valeurs de  $C$  et  $D$  sont moyennées sur 10 réseaux.

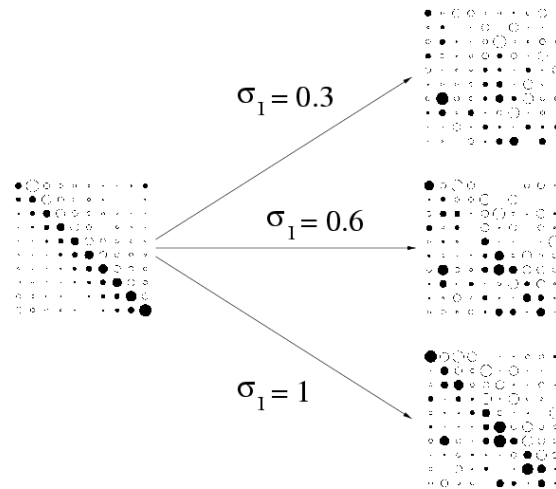


FIG. 3.4 – **Évolution des potentiels moyens avec l'écart-type  $\sigma_I$  du motif.** Le motif  $I$  présenté correspond à un tirage selon une loi normale centrée. Le vecteur des potentiels  $u^*$  est donnée pour  $\sigma_I = 0.3$ ,  $\sigma_I = 0.6$ ,  $\sigma_I = 1$ . La représentation est celle de Hinton (les points noirs correspondent aux valeurs positives, les points blancs aux valeurs négatives, et la valeur absolue donne le diamètre du cercle). On a vérifié dans les trois cas que la dynamique développée est de même nature (dynamique chaotique). Paramètres :  $\bar{I} = 0$ ,  $g = 8$ ,  $N = 100$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

l'augmentation du paramètre  $\sigma_I$  rend la diagonale plus visible sur les potentiels moyens, ce qui correspond à une augmentation de la corrélation entre  $I$  et  $u^*$ .

Donc, plus on augmente  $\sigma_I$ , plus le motif intervient fortement pour déterminer la configuration spatiale. Néanmoins, on peut remarquer comme dans le paragraphe précédent qu'une corrélation de l'ordre 0.6 entre le motif  $I$  et le vecteur des potentiels moyens  $u^*$  autorise des écarts importants entre les deux jeux de valeurs ; ces écarts, amplifiés par la non-linéarité de la fonction de transfert, aboutissent à des répartitions entre neurones actifs et neurones figés qui dépendent en fin de compte faiblement des valeurs précises du motif  $I$  et dépendent fortement des interactions qui prennent place entre les neurones au cours de la dynamique.

On a donc principalement deux résultats :

- La configuration spatiale, issue du vecteur des potentiels  $u^*$ , est une donnée fondamentale de l'organisation du système. En particulier, sur un réseau donné, cette configuration spatiale reste la même pour les différents régimes dynamiques qui se développent quand on fait varier la valeur du paramètre de gain  $g$ .
- Par contre, la présentation d'un motif statique tend à modifier profondément la configuration spatiale. On a en particulier trouvé des valeurs des paramètres ( $\bar{I} = -0.4$ ,  $\sigma_I = 0.3$ ) pour lesquels l'organisation résultante offre un bon compromis entre :

- la prise en compte de l'influence issue des interactions synaptiques (influence interne)
- la spécificité par rapport au motif (discrimination).

Sachant que la configuration spatiale a une influence importante sur les caractéristiques de la dynamique (valeur de déstabilisation), il reste à regarder dans quelle mesure la reconfiguration spatiale issue de la présentation d'un motif agit sur la dynamique du réseau.

Avant cela, on va tenter de préciser la nature de l'organisation dynamique.

## 3.2 Propriétés de la dynamique spontanée

Tout comme on a pu caractériser dans la section précédente la configuration spatiale des activations, on va ici se pencher sur la nature et les caractéristiques de l'organisation dynamique qui prend place spontanément dans nos réseaux. Pour étudier cette organisation, on regarde bien sûr le régime stationnaire. On enlève donc un nombre "raisonnable" de transitoires avant de caractériser la dynamique.

### La frontière du chaos

On définit la frontière du chaos comme le voisinage de la valeur de  $g_{chaos}$ , qui est la valeur de bifurcation entre accrochage de fréquence et chaos. On a, en amont de cette valeur, des dynamiques de type cycle limite, tore  $T^2$  et accrochage de fréquence, et en aval des dynamiques chaotiques de plus en plus complexes au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la valeur de bifurcation.

On constate, d'un réseau à l'autre, une grande diversité dans la forme des attracteurs obtenus à la frontière du chaos. Il semble que dans cette région, un bon compromis soit obtenu entre organisation dynamique et complexité. Une intuition naturelle est donc d'étudier les caractéristiques dynamiques des attracteurs à la frontière du chaos.

D'un point de vue pratique, les comportements dynamiques seront étudiés depuis la valeur de  $g_{dest}$ , valeur à partir de laquelle le réseau commence à produire un comportement dynamique, jusqu'aux valeurs de  $g \gg g_{chaos}$  pour lesquelles le réseau présente une dynamique hyperchaotique ayant l'apparence d'un bruit gaussien (chaos profond).

Il est important de noter que cette étude repose uniquement sur des observations faites sur des réseaux *de taille finie*. On sait en effet que les régimes dynamiques décrits à la limite thermodynamique ne comprennent pas le phénomène de route vers le chaos par quasi-périodicité. Or, les propriétés que nous allons étudier reposent essentiellement sur la capacité du réseau à produire des comportements de type périodique et cyclique. Plus la taille est élevée, plus la zone d'intérêt correspond à un domaine étroit de valeurs du paramètre de gain  $g$ . Pour un réseau donné, la valeur de  $g$  doit être soigneusement choisie pour que la dynamique soit située à l'intérieur de cette zone d'intérêt.

### 3.2.1 Comportement dynamique global

Dans cette section, on regarde les informations que l'on peut tirer de l'étude du signal moyen  $m_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$ . On a vu que ce signal reproduit avec fidélité les caractéristiques de la dynamique, et permet de tracer en deux dimensions une représentation pratique de l'attracteur du système.

L'étude des caractéristiques temporelles du signal dynamique nécessite des mesures de périodicité en termes de fréquences ou nombres de rotation. On dispose de trois outils pour appréhender la périodicité : l'étude des valeurs propres de la jacobienne, l'étude du spectre de Fourier et l'étude de l'autocorrélation du signal.

#### Répartition de la période

La configuration spatiale à la déstabilisation détermine les valeurs propres dominantes conjuguées,  $\lambda$  et  $\lambda^*$ , dont les parties réelles et imaginaires permettent de déterminer un angle  $\alpha$  compris entre 0 et  $\pi$ . Cette valeur d' $\alpha$  donne accès à la période de la dynamique qui vaut  $\tau = 2\pi/\alpha$ .

Cette période peut a priori prendre ses valeurs entre 2 et  $+\infty$ . Dans l'approximation où la probabilité d'apparition d'un angle  $\alpha$  est uniformément répartie<sup>2</sup> sur  $[0, \pi]$ , la fonction de répartition de la période  $\tau \leq x$ , pour  $x \in [2, +\infty[$  est donnée par :

$$\mathcal{P}(\tau \leq x) = \frac{x - 2}{x}$$

Ce qui donne comme densité  $f(x) = 2/x^2$ .

On voit donc que :

- Il n'y a pas de limite supérieure sur les valeurs possibles de la période.
- La probabilité d'apparition d'une période  $\tau$  est inversement proportionnelle à sa longueur.

On a représenté sur la figure 3.5 la répartition empirique des périodes mesurées sur 1000 réseaux en dynamique spontanée à la déstabilisation.

La densité empirique trouvée est proche de la densité théorique, c'est à dire que la répartition de l'angle  $\alpha$  sur  $[0, \pi]$  est proche de l'uniformité. On constate une légère surdensité pour les périodes proches de 2 (qui correspond à la bifurcation Flip), ainsi que pour les périodes proches de 4, compensées en partie par une sous-densité sur les périodes proches de 3.

#### Spectre de Fourier

On va maintenant regarder l'aspect de ces spectres de puissance pour les différents régimes dynamiques rencontrés dans nos réseaux, sur la base du signal moyen  $m_N(t)$ . Le spectre de puissance est donc calculé à partir d'un échantillon de taille  $T$  du signal  $m_N(t)$  en dynamique stationnaire. Ce signal n'étant pas un

<sup>2</sup>Si on ne tient pas compte de la surdensité sur l'axe des réels.



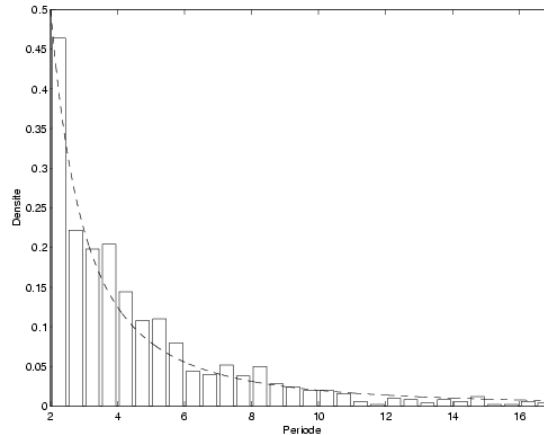


FIG. 3.5 – **Répartition empirique des périodes à la déstabilisation.** On a tracé en pointillé la densité théorique  $f(x) = 2/x^2$ . Mesure sur 1000 réseaux. Paramètres :  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

signal centré, on ne représente pas la fréquence  $\frac{1}{T}$  associée à la partie constante du signal. Dans la mesure où l'on se place en régime stationnaire, on n'a pas de dérive de la moyenne. On prend un échantillon suffisamment grand pour qu'il puisse exprimer toutes les fréquences présentes dans le signal.

### Spectre pour les dynamiques cycliques périodiques

Lorsque la période  $\tau$  est entière, le spectre de puissance est discontinu, c'est à dire que des pics de puissance ne sont associés qu'à des harmoniques de la fréquence fondamentale, soit  $k/\tau$ , pour  $1 \leq k \leq \tau/2$ . On appelle *fréquence dominante* la fréquence d'amplitude maximale sur le spectre. La fréquence dominante n'est pas nécessairement la fréquence fondamentale. Cette fréquence dominante  $f = k/\tau$  donne la valeur du nombre de rotation ( $k$  correspondant au nombre de tours).

Les périodes entières sont relativement rares dans nos réseaux. On les rencontre, par exemple, dans le cas d'une bifurcation flip (voir page 59), auquel cas la période vaut  $\tau = 2$ .

### Spectre pour les dynamiques cycliques pseudo-périodiques

Lorsque l'on est en régime pseudo-périodique, ce qui est le régime le plus courant après la première bifurcation, une fréquence dominante peut être mise en évidence sur le spectre de puissance. La fréquence fondamentale correspond au pic le plus à gauche du spectre. La fréquence dominante est soit une harmonique, soit la fondamentale.

Le spectre est cette fois-ci dense (voir figure 3.6). La densité du spectre manifeste le fait que toute fréquence irrationnelle ne peut être qu'approchée par un

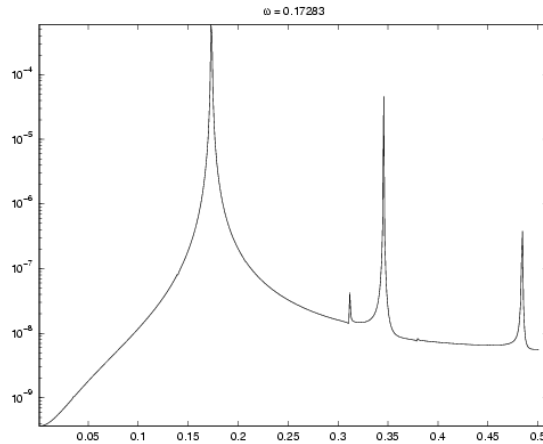


FIG. 3.6 – **Spectre de puissance sur le signal moyen  $m_N(t)$ , dynamique pseudo-périodique** La fréquence est en abscisse, la puissance (normalisée) en ordonnée. L’ordonnée est en échelle logarithmique. La fondamentale et deux harmoniques ressortent du spectre. La fréquence fondamentale et dominante est  $f \simeq 0.17$  (pseudo-période : 5,78), et les deux fréquences secondaires correspondant à  $2f$  et  $3f$ . Paramètres :  $T = 1000$ ,  $g = 6.7$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

nombre rationnel, et la valeur du spectre associée à chaque fréquence rationnelle  $f$  marque la “qualité” de cette approximation.

Remarque : on constate parfois des discontinuités sur le spectre (un peu au delà de la fréquence 0.3 sur la figure 3.6), qui correspondent aux zones où l’attracteur se recouvre (points d’accumulation). Le système n’étant pas linéaire, il peut en effet exister des fréquences qui ne soient pas des harmoniques de la fondamentale.

Le spectre de la figure 3.6 correspond au deuxième attracteur de la figure 2.10 page 62.

### Spectre pour les dynamiques toriques

Dans le cas d’une dynamique torique, une deuxième fréquence fondamentale se superpose à la première. Ces deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  peuvent être extraites du spectre de puissance. Toutes les combinaisons  $\alpha f_1 + \beta f_2$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , ressortent du spectre (par exemple, sur la figure 3.7, on a une fréquence qui ressort à  $f_1 - f_2 \simeq 0.10$ ). Les pics correspondant à la deuxième fréquence apparue sont en général plus faibles que ceux qui correspondent à la première fréquence. Même si dans les faits toutes ne se manifestent pas, on a par combinaison un nombre beaucoup plus important d’harmoniques, d’où l’aspect très “hérissé” du spectre de puissance (voir figure 3.7).

Remarque : le spectre de la figure 3.7 correspond au sixième attracteur de la

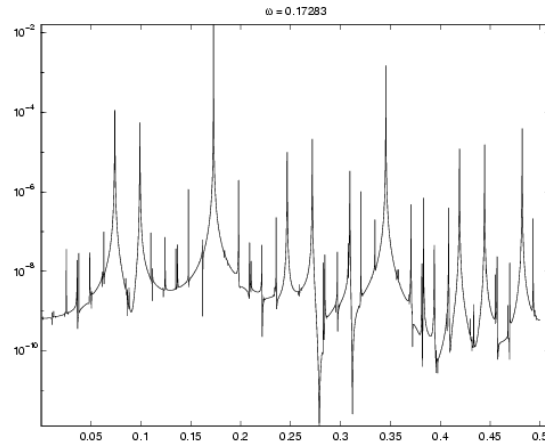


FIG. 3.7 – **Spectre de puissance sur le signal moyen  $m_N(t)$ , dynamique torique** La fréquence est en abscisse, la puissance (normalisée) en ordonnée. L'ordonnée est en échelle logarithmique. Deux fréquences fondamentales,  $f_1 \simeq 0.17$  ( $\tau_1 \simeq 5.78$ ) et  $f_2 \simeq 0.074$  ( $\tau_2 \simeq 13.5$ ) ressortent du spectre. On observe de nombreuses harmoniques. Paramètres :  $T = 6000$ ,  $g = 6.82$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

figure 2.10 page 62.

### Spectre pour les dynamiques chaotiques

Lors du passage en dynamique chaotique, le spectre change radicalement d'aspect. Le spectre ressemble à un signal bruité d'où émergent quelques fréquences dominantes.

Plus on augmente la valeur de  $g$ , plus on entre dans un chaos dit profond, et plus le signal acquiert les caractéristiques d'un bruit. Les fréquences fondamentales et harmoniques émergent de moins en moins nettement du fond bruité jusqu'à être complètement "noyées". C'est ce qu'on observe sur les spectres de la figure 3.8, où l'on a représenté les spectres de puissance d'un même réseau en régime chaotique pour des valeurs de  $g$  croissantes.

Il reste néanmoins que pour le chaos dit "léger" (celui que l'on trouve à la frontière du chaos), la fréquence dominante ressort très nettement du spectre, et cette fréquence est *identique à celle des modes dynamiques précédents*. Cette fréquence sera appelée *fréquence résiduelle* (et la période attachée période résiduelle).

On a donc une conservation de la fréquence dominante tout au long de la route vers le chaos par quasi-périodicité.

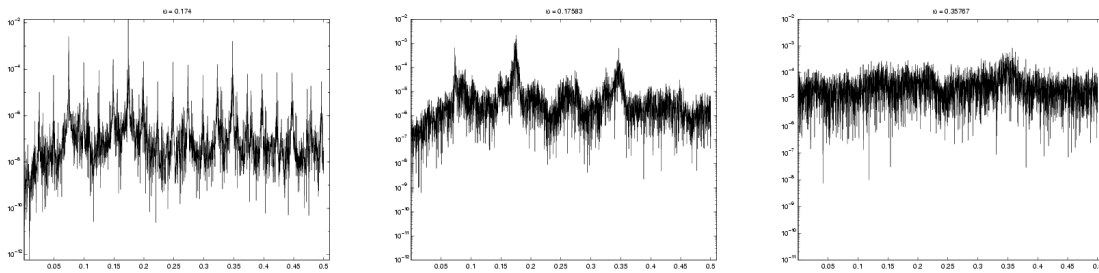


FIG. 3.8 – **Spectres de puissance sur le signal moyen  $m_N(t)$ , dynamique chaotique** La fréquence est en abscisse, la puissance (normalisée) en ordonnée. L'ordonnée est en échelle logarithmique. On a représenté les spectres de puissance associés au régime chaotique, pour un même réseau, avec (de gauche à droite)  $g = 7.02$  (frontière du chaos),  $g = 7.2$  et  $g = 8$ . Sur les deux premiers spectres, la fréquence dominante est la même que celle de la dynamique cyclique  $f \simeq 0.17$ . Le spectre de droite correspond à un chaos profond proche du bruit gaussien. Paramètres :  $T = 6000$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

### Invariance de la fréquence dominante

On a représenté sur la figure 3.9 l'évolution de la période dominante (l'inverse de la fréquence dominante) sur 8 réseaux de taille 200, pour des valeurs de  $g$  comprises entre  $g_{dest}$  et  $g_{dest} + 1$ . On constate sur ces 8 réseaux que la période dominante se maintient à la même valeur sur une plage correspondant à la route vers le chaos. Suite à l'entrée dans le chaos, le spectre tend à devenir de plus en plus uniforme et d'autres périodes (correspondant souvent à d'autres harmoniques de la fondamentale) peuvent prendre le dessus.

### Fonction d'auto-corrélation

Dans nos systèmes, où la dynamique chaotique conserve une périodicité résiduelle vers la frontière du chaos, il subsiste une mémoire des états passés, dans la mesure où la valeur de  $g$  n'est pas trop éloignée de la frontière du chaos.

Sur la figure 3.10, on a représenté la fonction d'auto-corrélation (définie page 15), pour des valeurs de  $g$  allant de la frontière du chaos au chaos profond (qui peuvent être mis en correspondance avec les spectres de puissance de la figure 3.8). On constate que plus la dynamique chaotique correspond à des valeurs de  $g$  éloignées de la frontière du chaos ( $g_{chaos} \simeq 7$  sur ce réseau), plus la fonction d'autocorrélation tend à décroître (en moyenne) avec  $\tau$ . Cela indique que plus on s'enfonce dans le chaos, plus le réseau tend à perdre la mémoire de ses états passés. Pour  $g = 8$ , qui correspond à un chaos profond sur ce réseau, la fonction d'auto-corrélation est similaire à celle d'un signal aléatoire. Le réseau perd quasiment toute mémoire de ses états passés.

Le résultat le plus important de cette approche par transformée de Fourier

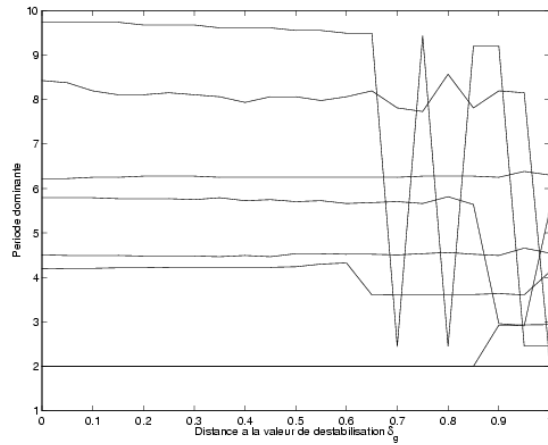


FIG. 3.9 – **Évolution de la période dominante après la déstabilisation pour 8 réseaux.** Pour chaque réseau, on regarde la valeur  $g_{dest}$  de déstabilisation, et on regarde la période dominante pour  $g_{dest} + \delta_g$ , avec  $0 \leq \delta_g \leq 1$ . La valeur de  $\delta_g$  est en abscisse, et la valeur de la période en ordonnée (chaque ligne pleine correspond à un réseau différent). On notera que les deux lignes correspondant à la période 2 (bifurcation flip) se superposent. Paramètres :  $T = 1500$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

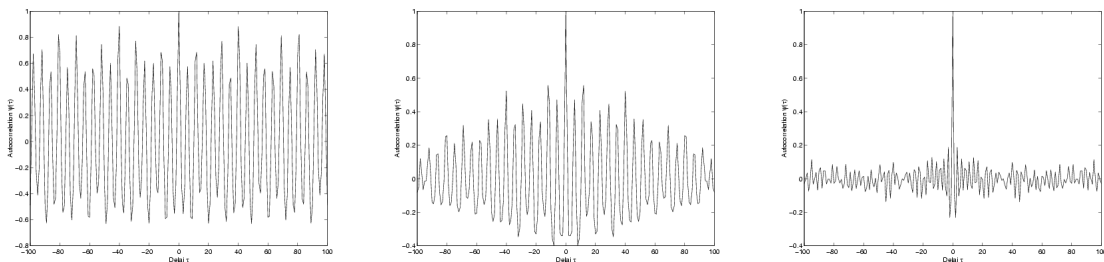


FIG. 3.10 – **Autocorrélation du signal moyen  $m_N(t)$ , pour des valeurs de  $g$  croissantes en régime chaotique.** La valeur de  $\tau$  est en abscisse, celle de  $\psi(\tau)$  en ordonnée, avec de gauche à droite  $g = 7.02$  (frontière du chaos),  $g = 7.2$ , et  $g = 8$  (chaos profond). Paramètres :  $T = 500$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

est que la fréquence dominante reste la même sur une plage de valeurs de  $g$  qui va de la déstabilisation jusqu'au chaos profond. Sur cette plage, la dynamique du réseau est "rythmée" par la même pulsation de base. Ainsi, la période qui se met en place à la déstabilisation est loin d'être anecdotique, puisqu'elle conditionne la nature de la dynamique du réseau pour une large plage de valeurs de  $g$ .

On a vu dans les sections précédentes que cette période fondamentale est intimement liée aux caractéristiques de la jacobienne à la déstabilisation, qui elle-même est conditionnée par la configuration spatiale des activations du réseau. On constate ici la persistance du lien entre configuration spatiale et périodicité de la dynamique.

### 3.2.2 Caractéristiques profondes de la dynamique

L'étude du spectre de puissance du signal  $m_N(t)$  nous a permis de caractériser pour un réseau la période ou pseudo période dominante, qui se maintient lors de la route vers le chaos et persiste après le passage en régime chaotique.

Pour étudier plus en profondeur les caractéristiques de la dynamique, on prend en compte le signal d'activation  $x(t)$  qui contient les  $N$  signaux neuronaux individuels, pour  $t = t_0..t_0 + T - 1$ . On suppose  $t_0$  suffisamment grand pour être en régime stationnaire. Ce signal à  $N$  dimensions correspond à la description la plus détaillée de l'attracteur du système.

#### Circuits d'activation, dynamique pseudo-périodique

Considérons un réseau en régime cyclique (périodique ou pseudo-périodique), présentant une période dominante  $\tau$ .

Si la période est entière, elle représente le nombre de pas de temps nécessaires pour que la dynamique s'auto-reproduise. Le réseau passe par  $\tau$  états distincts avant de revenir à son point de départ et de recommencer le cycle. On voit donc bien dans ce cas qu'il existe une séquence d'états  $x(t)$ ,  $t = 1..\tau$ , qui caractérise complètement la dynamique.

Dans le cas générique d'un régime pseudo-périodique, on peut tenir un raisonnement analogue, et dire que la pseudo-période nous donne une valeur approchée du nombre de pas de temps nécessaires pour revenir dans un état voisin de l'état dans lequel a débuté le cycle.

Pour une dynamique de type chaotique présentant une périodicité résiduelle, les maxima de l'autocorrélogramme nous donnent la même estimation du temps au bout duquel la dynamique tend à s'auto-reproduire. On conçoit que plus le chaos est profond, moins cette reproduction est fidèle.

Étant donnés  $N$  signaux  $\{x_i(t)\}_{i=1..N, t=1..T}$ , la matrice des variances-covariances

est donnée par :

$$\text{cov}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_i(t) - x_i^*)(x_j(t) - x_j^*)$$

où  $\bar{x}_i$  représente la moyenne empirique du signal  $x_i(t)$  et la matrice des corrélations croisées est obtenue par normalisation de la matrice des variances-covariances, soit :

$$\psi_{ij} = \frac{\text{cov}_{ij}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}$$

où  $\sigma_{x_i}$  et  $\sigma_{x_j}$  sont les écarts-types des signaux  $x_i(t)$  et  $x_j(t)$ .

On se place sur un réseau de taille  $N = 200$ , en dynamique pseudo-périodique, avec une pseudo-période proche de 6 ( $\tau \simeq 5.88$ ). Dans ces conditions, on considère que les neurones pour lesquels  $\psi_{ij}$  est proche de 1 sont *synchronisés*. Ceux pour lesquels  $\psi_{ij}$  est proche de -1 sont considérés en opposition de phase.

On a représenté sur la partie gauche de la figure 3.11 une partie de matrice des corrélations croisées, correspondant aux signaux d'activation émis par les 40 premiers neurones du réseau. On a représenté sur la partie droite de la figure 3.11 la même matrice, dont on a permuté les lignes et les colonnes en fonction de la ressemblance entre ces lignes et ces colonnes. Ce classement permet de mettre en relief les caractéristiques communes de certaines lignes et de certaines colonnes ; on met ainsi côte à côte les indices des signaux dont les valeurs de corrélation croisées présentent la même configuration.

On voit sur la matrice classée la présence de blocs sur la diagonale, dont les frontières sont plus ou moins bien délimitées. Le fait de raisonner sur des “blocs” permet juste de fixer les idées dans un premier temps.

Les neurones appartenant au même bloc tendent à être mutuellement synchronisés. La corrélation étant proche de 1, tous les neurones de ce bloc produisent un signal qui a les mêmes caractéristiques.

Qui plus est, ce bloc peut être mis en correspondance avec un bloc négatif à valeurs proche de -1, situé dans le même alignement. Le signal produit par les neurones du deuxième bloc semble donc avoir les mêmes caractéristiques, à ceci près qu'il est décalé dans le temps d'une demi-période.

On a représenté sur la figure 3.12 des signaux individuels issus du même réseau présentant deux à deux un décalage de phase de 1 (on repère la valeur de ce décalage de phase par rapport à l'instant où la dérivée du signal s'annule).

On voit bien sur la figure 3.12 que le signal d'activation du premier neurone ( $i = 140$ ) est corrélé à celui du second neurone ( $j = 25$ ) au pas de temps précédent. Ceci est vrai pour tout temps en moyenne. On a le même rapport de corrélation entre l'activation du second neurone au temps  $t$  et celle du troisième au temps  $t - 1$ , quel que soit  $t$ . De proche en proche, on voit que l'on peut établir un *circuit d'activation* qui propage un signal en boucle fermée du sixième au premier neurone.

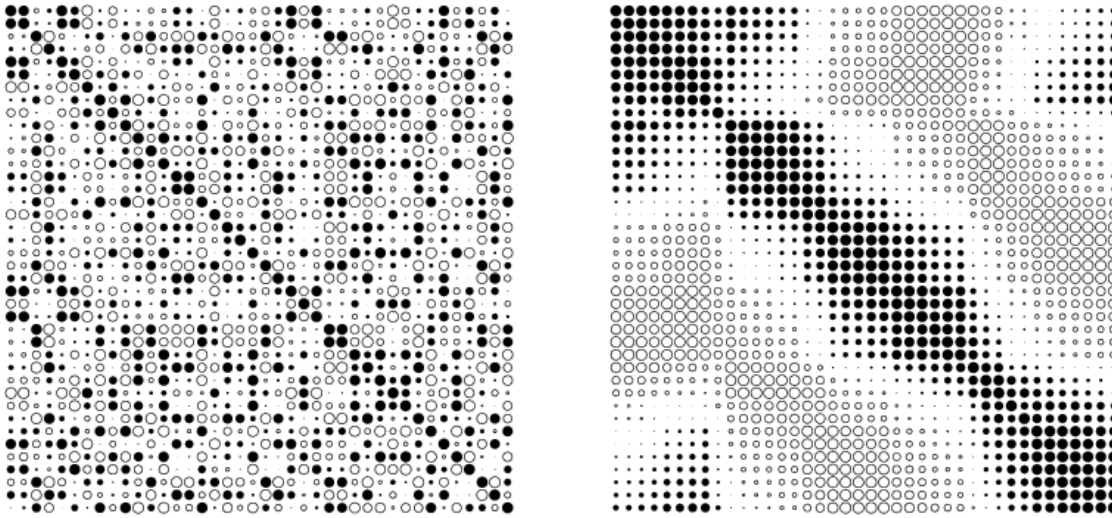


FIG. 3.11 – **Matrice des corrélations croisées.** À gauche : matrice de corrélations croisées pour les 40 premiers signaux d'activation. À droite : la même matrice dont on a classé les lignes et les colonnes pour faire ressortir les neurones dont les signaux d'activation ont des caractéristiques communes. Représentation de Hinton. Paramètres :  $g = 7.6$  (régime cyclique),  $T = 100$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta} = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$

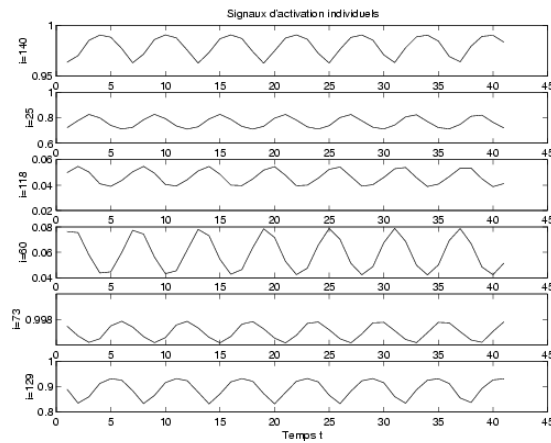


FIG. 3.12 – **Quelques signaux individuels en décalage de phase.** On a représenté six signaux individuels pris dans un réseau en régime pseudo-périodique, présentant deux à deux un décalage de phase de 1. Paramètres :  $g = 7.6$ ,  $T = 40$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_{\theta} = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$



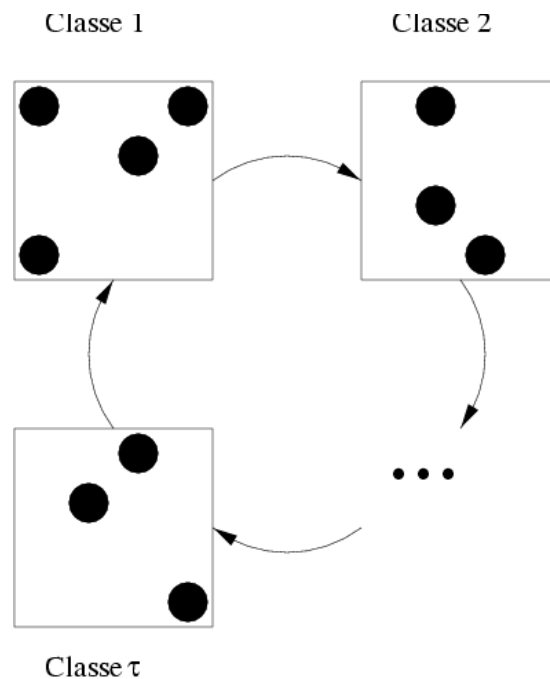


FIG. 3.13 – Circuit d’activation, période  $\tau$ .

Par extension, tout neurone en phase avec le deuxième neurone propage le même signal vers tout neurone en phase avec le premier neurone. On voit donc que ce circuit d’activation met en jeu tous les neurones du réseau, qui servent de relais pour la propagation en boucle fermée du même signal dynamique. Le nombre de relais est en moyenne égal à la période interne de la dynamique.

Plusieurs raisons font que l’appartenance à une classe (une étape du circuit) n’est pas absolue, mais obéit à des critères flous. Tout d’abord, même en régime cyclique, il y a des signaux dont les harmoniques sont prépondérants par rapport à la fréquence fondamentale, et qui présentent deux maxima sur l’intervalle d’une période. Ils appartiennent dans ce cas à deux classes en opposition de phase. Par ailleurs, le décalage de phase entre deux neurones est lui même non-entier, et il existe des neurones qui se positionnent de façon intermédiaire entre deux classes successives. Enfin, lorsque la période est non entière, le nombre de classes lui même peut être approximé par la valeur entière la plus proche, mais on peut aussi considérer que le nombre de classes est fractionnaire.

Malgré toutes ces remarques, il y a une structure qui émerge de l’activité dynamique, qui permet dans les faits de différencier fonctionnellement les neurones par leur appartenance à une (ou plusieurs) étapes du circuit. Les neurones sont placés dans un rapport de succession temporelle. On parle dans ce cas de *configuration dynamique* (par opposition à configuration spatiale). Seule l’observation des signaux d’activation permet de définir le circuit. Ce circuit manifeste une architecture dont les caractéristiques ne sont pas directement déductibles des

valeurs de la matrice des poids.

C'est plutôt sur une toute autre propriété de la matrice des poids que repose la mise en place de ce circuit. La matrice des poids est en effet une matrice aléatoire de grande taille. Ces deux caractéristiques : *aléatoire* et *de grande taille* sont importantes. C'est en effet en raisonnant sur le comportement limite des systèmes aléatoires de grande taille que l'on peut proposer une explication sur la mise en place de ce circuit.

Les équations de champ moyen (voir page 72) décrivent un processus itératif sur les grandeurs macroscopiques du système (moyenne  $m(t)$ , moment du deuxième ordre  $q(t)$ ). Ce processus permet de déterminer l'évolution de ces grandeurs en fonction de la loi initiale des activations. Sur le modèle à une population, la valeur moyenne  $m(t)$  tend vers une constante  $m^*$ , quel que soit le régime décrit (point fixe ou chaos). Cela signifie en particulier que dans le cas du régime chaotique, l'activité de tous les neurones se compense en moyenne. Autrement dit : les neurones ne sont pas synchronisés.

Comme on l'a vu, à taille finie, sur un intervalle de temps  $1..T$ , la valeur empirique moyenne  $m_N(t)$  est d'autant plus proche de la moyenne théorique des ECM  $m(t)$  que la taille est élevée. En particulier, dans la mesure où  $m(t)$  se rapproche de son point fixe  $m^*$  pour  $t$  grand (numériquement :  $t > 10$ , voir figure 2.2),  $m_N(t)$  tend également à être constant et proche de  $m^*$  pour les  $t$  et les  $N$  grands (voir aussi page 68). La diminution de l'écart-type du signal moyen est assez lente (en  $1/\sqrt{N}$ ) comme on peut le constater sur la figure 2.14. Néanmoins, pour des tailles à partir de  $N = 50$ , l'écart-type du signal moyen est déjà très significativement inférieure à la moyenne des écarts-types des signaux individuels.

Cette absence de synchronisation est indépendante du régime dynamique qui se développe dans le réseau. Elle est assez banale si on considère un régime chaotique profond, où les signaux individuels ressemblent à du bruit décorréolé. Par contre, pour des régimes périodiques ou pseudo-périodiques, la décorrélation des signaux individuels implique que *les phases individuelles soient uniformément réparties* sur  $[0, \tau]$ , où  $\tau$  est la valeur de la période ou pseudo-période.

Une petite simulation simplificatrice montre que cette conséquence aboutit naturellement à la mise en place de circuits d'activation. On considère  $N$  signaux dont le décalage de phase est compris entre  $\frac{\tau}{N}$  et  $\tau$  : pour  $i = 1..N$ ,  $\tilde{u}_i(t) = 0.3 * \sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{i}{2\pi N}) - 0.4$ . Ces signaux ont des caractéristiques (moyenne, écart-type) que l'on peut retrouver sur un réseau réel. On a représenté ce signal sur la figure 3.14, ainsi que sa matrice de corrélations.

La matrice de corrélation associée à ces signaux ne permet pas de déceler des blocs distincts caractérisant des signaux manifestant mutuellement un degré de corrélation élevé (ou du moins l'élaboration de telles classes serait purement arbitraire).

Si l'on fait passer ces signaux par la fonction de transfert  $f_g$ , on constate que la déformation du signal induite a pour effet d'associer les maxima d'activation à des instants discrets, et donc finalement de créer des classes de neurones qui tendent

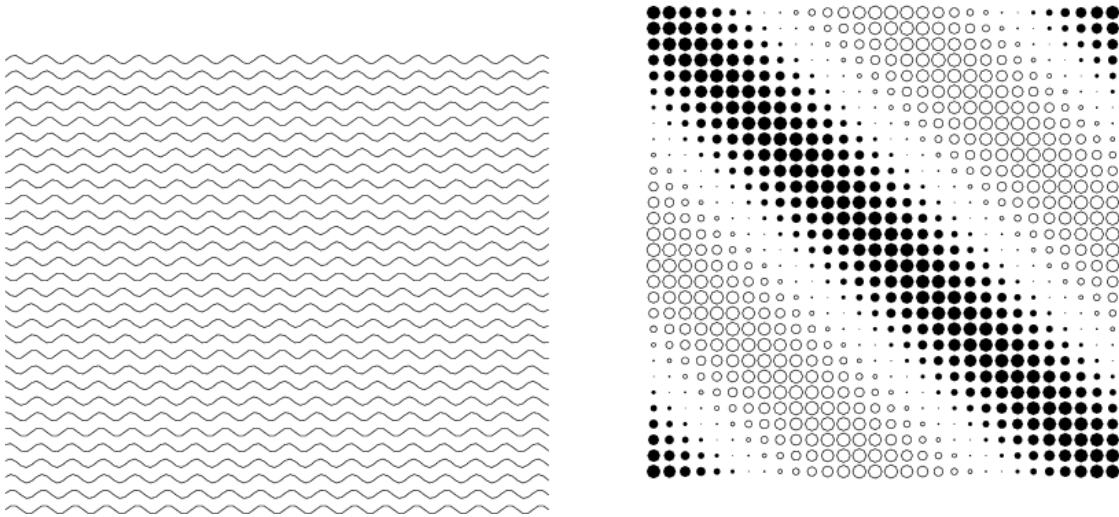


FIG. 3.14 – 30 signaux périodiques de période 6 dont la phase est uniformément répartie et matrice de corrélations associée.

à atteindre leur maximum (sous forme de pic d'activation) simultanément. Des blocs apparaissent alors sur la diagonale (voir figure 3.15) qui ont pour effet de séparer fonctionnellement les neurones, *et de faire apparaître les différentes étapes du circuit*. On peut également voir dans ce cas que l'appartenance à une classe est floue, dans la mesure où il reste des neurones qui sont intermédiaires entre deux classes.

Ce phénomène, observé sur des signaux très simples, est également à l'œuvre sur les réseaux que nous étudions, même si les signaux sont moins réguliers. L'apparition des circuits d'activation repose à la fois sur une contrainte forte de non synchronisation entre les neurones, sur la présence de régimes cycliques à taille finie et sur les caractéristiques non-linéaires de la fonction de transfert.

Le nombre d'étapes du circuit repose évidemment sur la période initiale, qui elle-même provient des valeurs propres de la jacobienne à la déstabilisation. La configuration spatiale a donc une influence directe sur les caractéristiques du circuit.

Sachant que la probabilité d'apparition d'une période longue est plus faible que celle d'une période courte, et que le circuit d'activation qui se met en place possède  $\tau$  étapes, on voit en conséquence que les circuits longs sont moins probables que les circuits courts. C'est bien les circuits les plus "simples" qui sont favorisés de façon générale.

La mise en évidence de circuits d'activations sur un régime cyclique à taille finie est une illustration intéressante de la contrainte exercée par le macroscopique sur le microscopique. On voit en effet que les régimes cycliques, qui ne sont pas décrits à la limite thermodynamique, subissent néanmoins

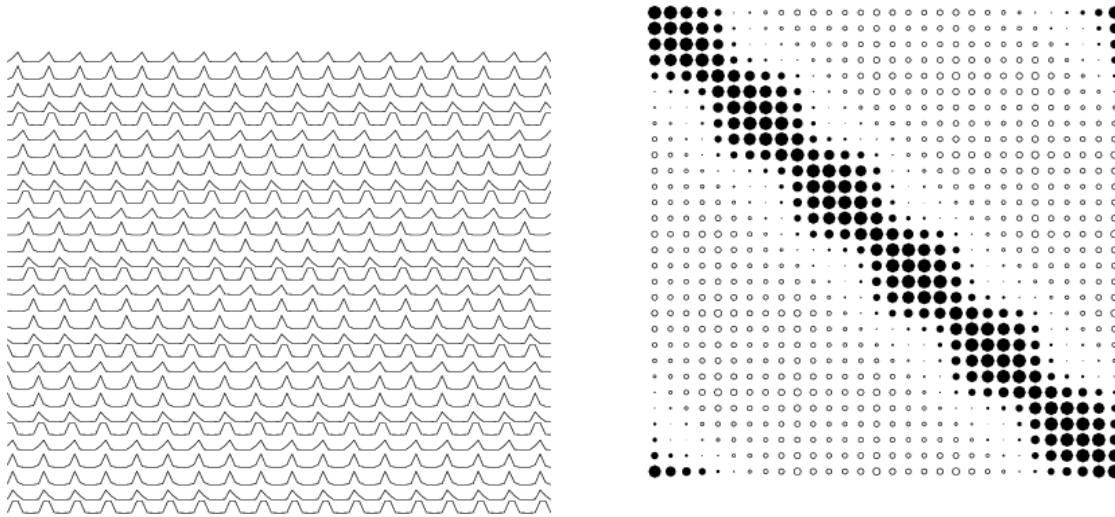


FIG. 3.15 – Passage par la fonction de transfert ( $g = 8$ ) des signaux précédents, et matrice de corrélations associée.

la contrainte de décorrélation des signaux individuels mise en évidence à la limite thermodynamique. Cette contrainte implique, pour ces régimes cycliques, que les phases des signaux individuels soient uniformément réparties sur la longueur de la période, *ce qui a pour conséquence de faire émerger une structure dynamique en forme de circuit* qui propage la phase d'un groupe de neurones à l'autre.

Par analogie avec la configuration spatiale (neurones muets/actifs/saturés), on a parlé de *configuration dynamique* pour désigner ce circuit. Cette nouvelle forme d'organisation permet de classer les neurones selon leur phase, indépendamment de l'amplitude de leur signal.

Les paragraphes qui suivent tentent d'évaluer dans quelle mesure la configuration dynamique peut être déduite des couplages  $J_{ij}$ , et montre également la relative indépendance de la structure du circuit par rapport à une augmentation du paramètre de gain  $g$  et à une complexification de la dynamique.

### Estimation de la covariance

Dans le cadre de la mise en place d'un circuit d'activation à la déstabilisation, il reste la question du choix précis des neurones : dans quelle mesure la matrice des poids détermine-t-elle la position d'un neurone au sein du circuit ? On va voir dans le paragraphe suivant que la contrainte des poids est beaucoup plus lâche que dans le cas de la configuration spatiale, mais on peut néanmoins la mettre en évidence en utilisant la notion de *frustration*.

Dans un premier temps, on définit la covariance croisée selon le délai  $\tau$ , qui

nous servira au paragraphe suivant pour caractériser la frustration.

Étant donnés deux signaux  $x_i(t)$  et  $x_j(t)$ , de moyenne  $x_i^*$  et  $x_j^*$ , pour  $t$  de 1 à  $T$ , l'expression empirique de leur covariance selon le délai  $\tau$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{ij}^{[\tau]} &= \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau+1}^T (x_i(t) - x_i^*)(x_j(t - \tau) - x_j^*) \\ &= \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau+1}^T a_i(t)a_j(t - \tau) \end{aligned}$$

Dans le cadre de notre modèle, on s'intéressera essentiellement au délai  $\tau = 1$ , qui donne le délai de transmission. Dans ce cas, la covariance entre  $a_i(t)$  et  $a_j(t - 1)$  donne une indication sur les rapports de succession dans la transmission de l'activité dynamique. Une valeur positive de la covariance indique que le signal afférent du neurone  $j$  est synchronisé avec le signal efférent du neurone  $i$ . Une valeur négative indique que le neurone  $j$  produit un signal afférent en opposition avec le signal efférent du neurone  $i$ . Si cette valeur est proche de zéro, les signaux peuvent être considérés comme non-corrélés, un cas fréquent de non-corrélation correspondant au fait que l'un au moins des neurones est figé.

### Transferts d'énergie et Frustration

Rappelons ici que les poids synaptiques prennent leurs valeurs sur  $\mathbb{R}$ . En conséquence, le signal d'activation source  $x_j(t - 1)$  atteint le neurone cible sous la forme  $c_{ij}(t) = J_{ij}x_j(t - 1)$ , qui est corrélé à  $x_j(t - 1)$  si  $J_{ij}$  est positif et anticorrélé à  $x_j(t - 1)$  si  $J_{ij}$  est négatif.

On peut par extension dire, a priori, qu'un lien excitateur (positif) tend à favoriser la corrélation entre  $x_j(t - 1)$  et  $x_i(t)$ , et un lien négatif tend à favoriser l'anticorrélation entre  $x_j(t - 1)$  et  $x_i(t)$ . Ceci vaut pour les  $N^2$  liens synaptiques qui définissent le réseau. Dans les faits, l'organisation qui se met en place dans le réseau peut être vue comme le résultat d'un compromis entre toutes ces tendances. Deux neurones peuvent présenter une covariance positive en  $(t - 1, t)$  et néanmoins avoir un lien de l'un vers l'autre négatif; dans ce cas, l'influence globale de tous les autres états du réseau domine cette instanciation particulière.

Le concept de *frustration*, introduit par les physiciens dans l'étude des verres de spin [92], pourrait être étendu ici. Rappelons que dans le modèle de Hopfield, où les liens sont symétriques, et où les activations prennent leurs valeurs sur  $\{-1, 1\}$ . une connexion  $J_{ij}$  est dite frustrée si le lien est positif et les activations opposées, ou si le lien est négatif et les activations sont égales. En effet, l'énergie d'interaction entre neurones (spins) étant  $E_{ij} = -J_{ij}x_ix_j$ , une configuration est frustrée si elle ne peut réaliser un minimum global de son énergie. Si les  $J_{ij}$  sont aléatoires, il n'existe pas en général de configuration réalisant un minimum global de l'énergie, mais plutôt une multitude de configurations réalisant un minimum

local et dans lesquelles certaines liaisons sont frustrées. Il s'en suit l'existence d'une multitude d'attracteurs créant la richesse du modèle de Hopfield.

La définition de la frustration que nous adopterons porte non pas sur l'activation du signal, mais sur la covariance entre  $x_i(t)$  et  $x_j(t-1)$ . Cette covariance est estimée une fois que le réseau a atteint sa dynamique stationnaire. On propose la terminologie suivante :

- Un lien  $J_{ij}$  est dit frustré si  $J_{ij}\text{cov}_{ij}^{[1]} < 0$  soit :
  - $J_{ij} > 0$  et  $\text{cov}_{ij}^{[1]} < 0$ .
  - $J_{ij} < 0$  et  $\text{cov}_{ij}^{[1]} > 0$ .
- Un lien est non frustré si  $J_{ij}\text{cov}_{ij}^{[1]} > 0$  soit :
  - $J_{ij} > 0$  et  $\text{cov}_{ij}^{[1]} > 0$ .
  - $J_{ij} < 0$  et  $\text{cov}_{ij}^{[1]} < 0$ .

On pose  $E_{ij} = -J_{ij}\text{cov}_{ij}^{[1]}$ , analogue formel de l'énergie d'interaction du modèle de Hopfield. Ce terme peut encore être appelé *transfert d'énergie* pour indiquer le mouvement induit par le décalage temporel. La somme de tous ces transferts d'énergie donne un terme d'énergie global  $E = \sum_{i,j} E_{ij}$ , qui donne une indication sur l'activité dynamique du réseau (en cas de point fixe, l'énergie globale est nulle).

La figure 3.16 montre que la répartition des valeurs de  $E_{ij}$  est non centrée, décalée vers les valeurs négatives, ce qui indique qu'en dynamique stationnaire, il y a moins de liens frustrés que de liens non-frustrés. La dynamique semble s'organiser de telle sorte que la frustration soit faible. On voit donc l'analogie qui peut être établie avec le modèle de Hopfield, à ceci près que le critère de frustration repose sur l'activité dynamique qui n'existe pas dans le modèle de Hopfield.

Ce décalage des  $E_{ij}$  vers les valeurs négatives, montré sur un exemple, est systématiquement observé sur toutes les dynamiques, du cycle limite au chaos profond. En particulier, l'histogramme présenté porte sur une dynamique de type chaos profond. Cette dynamique reproduit extérieurement toutes les caractéristiques d'un signal aléatoire. On observe une régularité statistique reposant sur une tendance à réduire la frustration.

Dans le cas où la dynamique est cyclique et où l'on peut discerner un circuit d'activation, la disposition des neurones dans ce circuit suit en partie cette contrainte de minimisation de la frustration qui repose sur les valeurs particulières des poids synaptiques. On peut cependant remarquer que cette contrainte est assez lâche et autorise un grand nombre de circuits différents. Il est en effet peu probable que le circuit qui se met en place dans le réseau soit précisément celui qui minimise la frustration, dans la mesure où de nombreux circuits différents, compatibles avec la matrice  $J$ , peuvent apparaître lorsque l'on modifie les seuils.

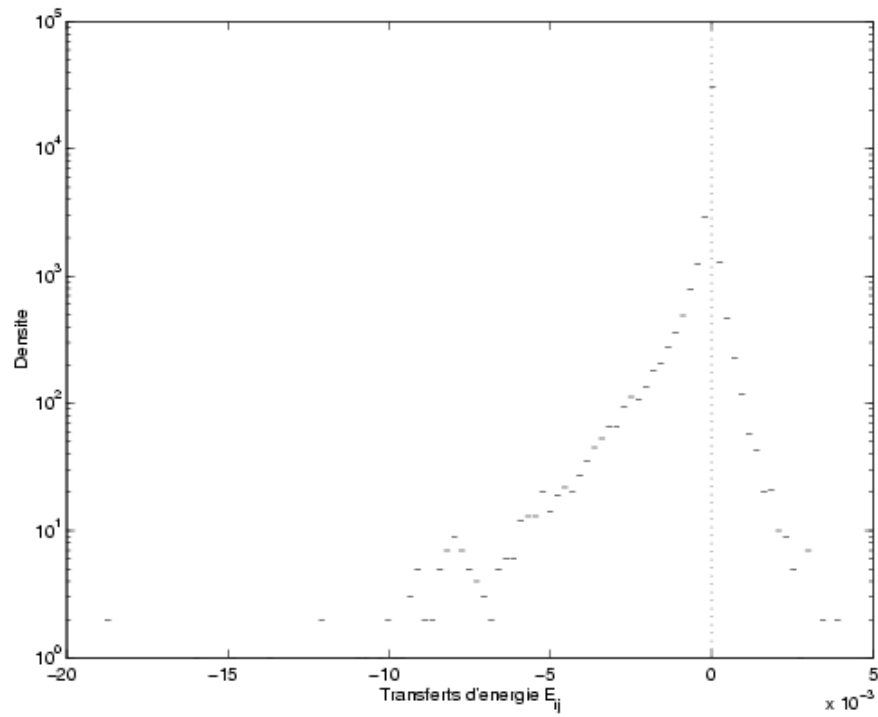


FIG. 3.16 – **Histogramme sur les transferts d'énergie  $E_{ij}$ .** La mesure est faite sur un réseau de 200 neurones en dynamique stationnaire. On a tracé l'histogramme sur les 40.000 termes de transferts d'énergie trouvés (un terme par lien synaptique). L'abscisse est en échelle logarithmique. Régime chaotique ( $g = 8$ ). Paramètres :  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

### Permanence du circuit d'activation avec $g$

On a vu qu'une des propriétés intéressantes de la configuration spatiale est sa relative permanence par rapport au régime dynamique qui se développe dans le réseau (indépendance en  $g$ ). On cherche à mettre en évidence de la même façon une certaine permanence de la configuration dynamique par rapport à  $g$ , au moins sur la plage de valeurs qui conduit de la déstabilisation au chaos léger.

On a vu que la période issue de la déstabilisation se maintient sur une large plage de valeurs de  $g$ , qui va de la déstabilisation au chaos léger. Il paraît raisonnable de penser que le circuit d'activation se maintient sur la même plage de valeurs, et en particulier dans le cas du chaos léger que la période résiduelle peut être mise en correspondance avec un circuit d'activation résiduel.

Pour assigner à chaque signal d'activation une phase discrète, on considère le signal  $s_i(t)$  qui vaut 1 si  $x_i(t) - x_i(t-1) > 0$  et  $x_i(t+1) - x_i(t) < 0$ , et zéro sinon. Ce signal marque le moment où le signal d'activation passe par un maximum (la "dérivée" s'annule). On obtient ainsi une représentation synthétique sur la phase de tous les signaux d'activation du réseau (voir figure 3.17).

Pour étudier l'invariance du circuit d'activation, on prendra pour référence le circuit qui se forme à la déstabilisation. En se fondant sur le signal  $s_i(t)$ , on détermine un classement sur les indexations : on représente côte à côte les neurones dont les phases sont très corrélées.

Au fur et à mesure que  $g$  augmente, le signal perd sa régularité initiale et des fréquences "concurrentes" apparaissent. La dérivée des signaux tend à s'annuler plusieurs fois sur la durée d'une période. Pour les régimes toriques, et à plus forte raison chaotiques, le signal  $s_i(t)$  présente un certain nombre de points parasites.

Si on classe les neurones selon le classement qui a été établi à la déstabilisation du réseau, on constate que l'organisation initiale se maintient, même en régime chaotique proche de la frontière du chaos. Les mêmes neurones présentent une tendance à atteindre leur maximum au même moment, c'est à dire à être en phase. Pour des valeurs plus élevée de  $g$ , et un chaos plus profond, la structure dynamique disparaît. Le circuit d'activation survit donc tant que la dynamique garde une périodicité résiduelle.

### Comportement d'une sous-population

Sur un régime chaotique à périodicité résiduelle, le signal produit par un neurone particulier est en général insuffisant pour caractériser sa phase. On montre ici que le signal moyen (champ moyen) produit par une population de neurones appartenant au même "relais dynamique" traduit sans équivoque la persistance de l'information sur la phase.

Sur un réseau dont la pseudo période est proche de la valeur 8 ( $\tau \simeq 7.88$ ) à la déstabilisation, on détermine pour chaque neurone l'appartenance à l'un des 8 relais, sur la base de la matrice des corrélations croisées ( $g = 4.5$ ). Pour chacun



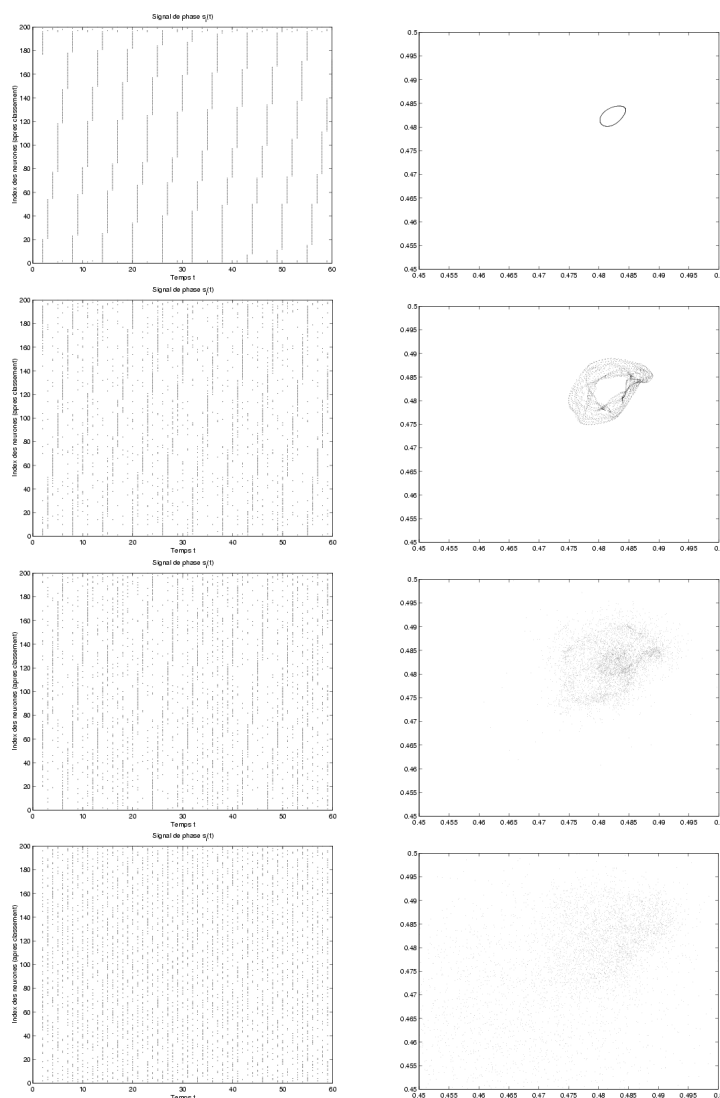


FIG. 3.17 – **Signaux de phase.** On a représenté les signaux de phase d'un même réseau pour différents régimes dynamiques : cycle limite ( $g = 7.6$ ), tore ( $g = 8.3$ ), frontière du chaos ( $g = 8.4$ ), chaos profond ( $g = 8.6$ ). Le classement sur l'index des neurones a été effectué en fonction du signal de phase sur le régime cyclique. On voit que la structure dynamique qui se met en place à la déstabilisation persiste en régime torique et à la frontière du chaos, et disparaît dans le chaos profond. À titre indicatif, les diagrammes de premier retour de  $m_N(t)$  ont été représentés à côté des signaux de phase. Paramètres :  $T = 60$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.1$ ,  $\sigma_\theta = 0.1$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

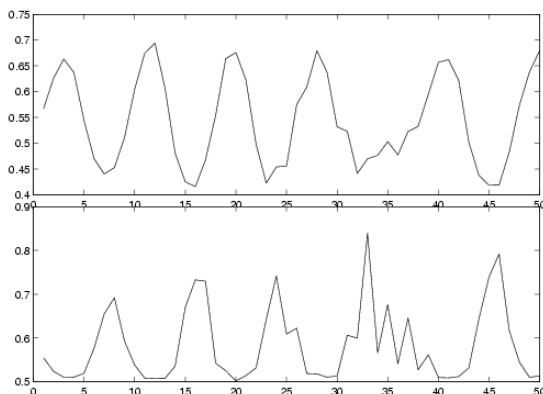


FIG. 3.18 – Représentation des signaux moyens des neurones appartenant à la classe 4 (en haut) et à la classe 8 (en bas) pour une dynamique chaotique. Les classes ont été déterminées sur la base d’une dynamique cyclique de pseudo-période  $\tau \simeq 7,88$ .  $N = 100$ ,  $g = 5.5$ .

de ces huit relais, on peut déterminer le signal moyen produit par les neurones du relais.

On augmente ensuite la valeur du gain ( $g = 5,5$ ) pour atteindre une nouvelle dynamique stationnaire de type chaotique. La figure 3.18 représente les signaux moyens des relais 4 et 8. On voit clairement apparaître une opposition de phase entre les deux signaux, qui reproduit le comportement observé sur les signaux individuels pour des valeurs plus faibles de  $g$ .

Le réseau contient donc toujours la même information sur la phase, mais celle-ci est diffuse sur un groupe de neurones au lieu d’être reproduite individuellement par chaque neurones. L’information est présente dans le *champ* et non au niveau des neurones individuels.

### Liens avec la biologie

La mise en évidence de circuits d’activation dans notre modèle peut être mis en correspondance avec de nombreuses observations sur les circuits neuronaux observés dans le système nerveux. La présence de boucles semble en effet être une donnée fondamentale du fonctionnement des neurones réels.

La présence de tels cycles a en particulier été mise en évidence dans le cortex frontal du macaque [16], on a mesuré des triplets d’activations successives qui présentent une grande précision temporelle, et sont reproductibles chaque fois que la même tâche est demandée à l’animal. Abeles fait donc l’hypothèse qu’il existe une “synfire chain” (chaîne de tirs synchronisés), caractérisée par des liens forts entre les neurones activés successivement.

Il existe des modèles qui reproduisent de tels circuits d’activation [93], en choisissant explicitement les poids des connexions en fonction des chaînes d’activation

que l'on souhaite produire, et donne une estimation de la capacité de tels réseaux récurrents à la limite thermodynamique, qui dépend du nombre de séquences, de leur longueur et la densité (*sparseness*) des connexions.

En introduisant la notion de frustration, nous avons mis en évidence le fait que les couplages contraignent de façon faible mais significative le circuit d'activation qui se met en place à la déstabilisation. Ce circuit minimise en effet une énergie d'interaction fondée sur la covariance des signaux afférents et efférents.

Par ailleurs, la configuration dynamique manifeste une certaine robustesse au cours de la route vers le chaos. Le même circuit se maintient malgré la complexité croissante des dynamiques. Sur les régimes chaotiques, il n'est plus possible de définir la phase des signaux individuels, mais il est possible de déceler sur le *champ* de chaque relais du circuit le maintien de la même configuration dynamique.

Maintenant qu'on a suffisamment d'outils pour caractériser la dynamique spontanée, on peut se pencher sur les propriétés de sensibilité et d'adaptation dynamique qui peuvent être mises en évidence dans le cas où l'on présente au réseau des motifs statiques ou dynamiques.

### 3.3 Sensibilité dynamique

On s'intéresse dans cette section à la nature des régimes dynamiques qui se développent dans un système contraint par une entrée  $I(t)$ , qui peut être une entrée statique (le motif est défini par ses  $N$  valeurs) ou dynamique (séquence temporelle de motifs statiques).

La présentation d'une entrée statique ou dynamique modifie le système, et donc les caractéristiques de la dynamique. Un des intérêts du modèle est sa *sensibilité dynamique* : des stimulations d'amplitude modeste peuvent produire des changements dynamiques fondamentaux. Le réseau dispose d'une grande variété d'organisations dynamiques en réserve, et peut basculer de l'une à l'autre lorsque l'on change quelques caractéristiques du système.

On cherche à comprendre la réponse du réseau en regardant la nouvelle organisation dynamique. On veut savoir ce que la dynamique nous dit à propos du motif présenté, et voir dans quelle mesure elle s'adapte à la contrainte nouvelle constituée par ce motif.

On séparera l'étude des motifs statiques et l'étude de motifs dynamiques périodiques, dans la mesure où les seconds agissent explicitement sur la périodicité du régime dynamique.

### 3.3.1 Effet d'un motif statique sur le régime dynamique

#### Discrimination dynamique

Considérons un réseau destabilisé (en régime cyclique ou chaotique) auquel on présente un motif statique. cela revient à modifier soudainement les paramètres du système. Le système se retrouve hors d'équilibre et converge vers un nouvel attracteur. L'importance de ces changements dépend de la moyenne et de la dispersion des valeurs du motif. On comprend en effet que plus les valeurs des motifs sont variées, et élevées en valeur absolue, plus le nouveau système est loin de l'équilibre et plus le nouvel attracteur sera éloigné de l'attracteur initial.

Dans le cas de motifs tirés selon une loi gaussienne identique, les différents jeux de valeurs peuvent induire des réponses dynamiques très différentes. Certains de ces motifs font augmenter l'activité dynamique du réseau, et la complexité de la dynamique. D'autres motifs, analogues statistiquement, tendent au contraire à diminuer l'activité dynamique du réseau, voire à l'éteindre complètement. Le réseau fournit une réponse dynamique différente dans les deux cas présentés, et opère donc une discrimination dynamique entre les deux motifs.

On a représenté sur la figure 3.19 différentes réponses dynamiques pour un même réseau, avec des motifs tirés suivant la même loi.

Si on s'intéresse statistiquement aux réponses dynamiques moyennes, pour des dynamiques spontanées telles que  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ , et des motifs aléatoires de moyenne  $\bar{I} = 0$  et d'écart-type  $\sigma_I$ , on observe les tendances suivantes [94] :

- Quelle que soit la valeur de  $\sigma_I$ , la tendance majoritaire est la diminution de l'activité dynamique (l'amplitude du signal  $m_N(t)$  diminue).
- Plus la perturbation est importante (plus  $\sigma_I$  est élevé), plus la proportion de motifs qui réduisent la dynamique augmente.

Ces tendances sont une fois de plus corroborées par le comportement du système à la limite thermodynamique.

#### Effet d'un motif sur le régime à la limite thermodynamique

L'étude de la divergence des trajectoires individuelles à la limite thermodynamique permet de mettre en évidence une variété de bifurcation entre un régime stable (point fixe) et un régime instable (chaos) dans l'espace des paramètres macroscopiques ( $g, \bar{J}, \sigma_J, \bar{\theta}, \sigma_{\theta}$ ) (voir page 77). On a déjà noté l'analogie formelle entre un motif statique gaussien  $I$  et un seuil gaussien  $\theta$ . À la limite thermodynamique, la présentation d'un motif gaussien de moyenne  $\bar{I}$  et d'écart-type  $\sigma_I$  revient alors à un déplacement dans l'espace des paramètres macroscopiques, selon les directions  $-\bar{\theta}$  et  $\sigma_{\theta}$ . Présenter un motif gaussien revient donc à rajouter un seuil.

La figure 3.20 montre l'évolution de la valeur théorique de  $g_{dest}$  en fonction de l'écart-type  $\sigma_I$  du motif, lorsque les paramètres qui définissent les seuils sont

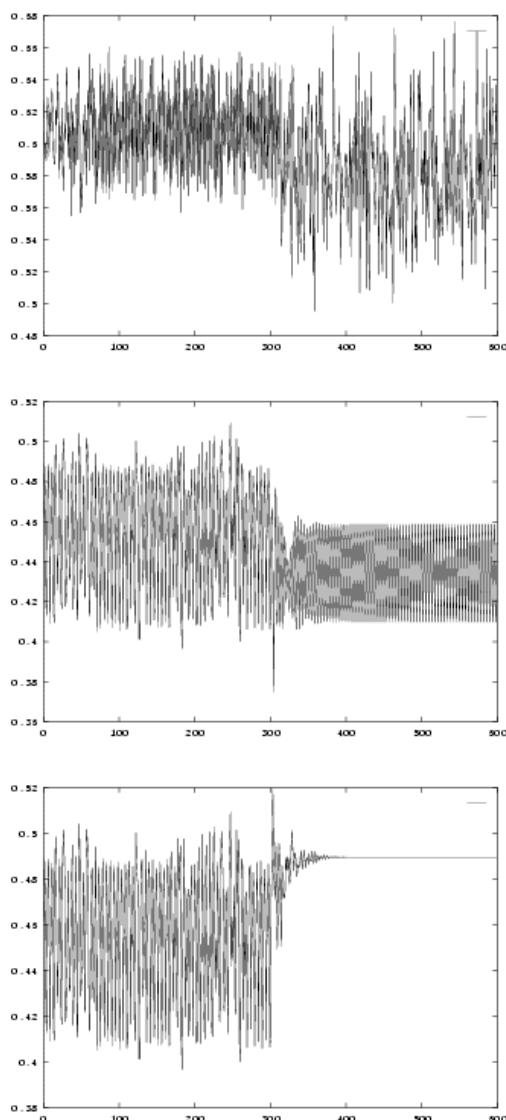


FIG. 3.19 – **Trois exemples de réponses dynamiques sur un même réseau.** Les trois figures présentent l'évolution du signal  $m_N(t)$  au cours du temps. Les 100 premiers pas de temps correspondent à la dynamique spontanée (en régime stationnaire). Les 100 pas de temps suivants correspondent à la dynamique contrainte, pour trois motifs différents tirés selon la même loi gaussienne. La dynamique spontanée est légèrement chaotique. Le premier motif (haut) mène à une augmentation de l'activité dynamique (augmentation de l'amplitude) avec augmentation de la complexité. Le second motif mène à une diminution de l'activité dynamique, et diminution de la complexité (on passe à un régime de cycle limite). Le troisième motif mène à une complète extinction de la dynamique. Paramètres :  $N = 100$ ,  $g = 6$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.3$ .

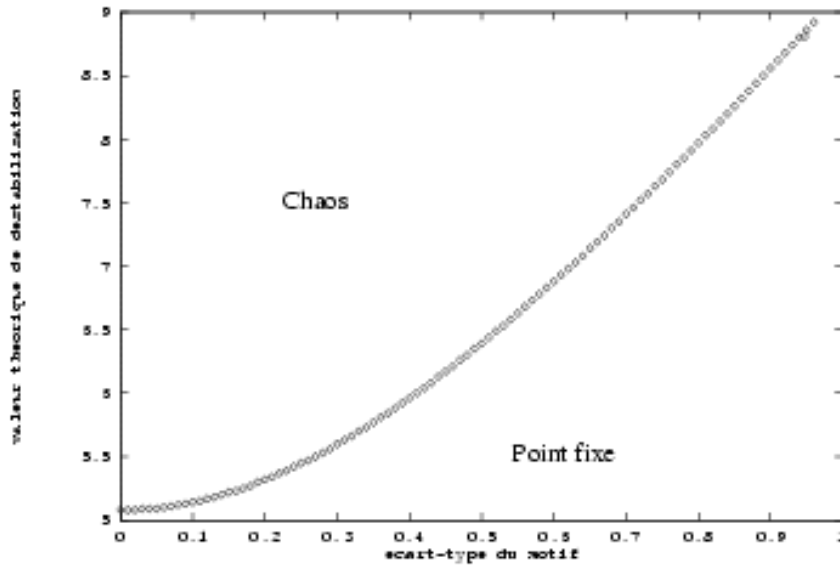


FIG. 3.20 – **valeur théorique de déstabilisation pour des motifs gaussiens.** La valeur de  $g_{dest}$  marque la frontière entre régime de point fixe et régime chaotique, à la limite thermodynamique, en fonction de l'écart-type du motif  $\sigma_I$ . Paramètres :  $\bar{I} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

$\bar{\theta} = 0$  et  $\sigma_\theta = 0$ . Cette courbe est une coupe de la variété de bifurcation présentée figure 2.19 par le plan  $\bar{\theta} = 0$ .

Cette courbe peut être facilement mise en rapport avec les simulations : l'augmentation de  $\sigma_I$  tend à augmenter la valeur de déstabilisation. La présentation d'un motif statique gaussien correspond à un déplacement vers la droite (à  $g$  fixé) dans cet espace. À  $g$  fixé, il existe une valeur critique de  $\sigma_I$  au delà de laquelle la dynamique passe du régime chaotique au régime de point fixe. Ramenée à des réseaux de taille finie, cette propriété traduit le fait que plus  $\sigma_I$  est élevé, plus les motifs statiques tirés selon  $(\bar{I}, \sigma_I)$  auront tendance à provoquer un effondrement de la dynamique.

### Route par quasi-périodicité inverse

On a tracé, à taille finie, une courbe analogue à la ligne de bifurcation obtenue à la limite thermodynamique. La taille finie permet de prendre en compte la largeur de la plage de déstabilisation (c'est à dire l'intervalle entre  $g_{dest}$  valeur de déstabilisation et  $g_{chaos}$  valeur d'entrée dans le chaos). Cette courbe se fonde sur les comportements observés sur 50 réseaux de 200 neurones tirés aléatoirement. Sur chacun de ces réseaux, on mesure la valeur de  $g_{chaos}$  (méthode du plus grand exposant de Lyapunov), ainsi que la valeur de  $g_{dest}$  (déstabilisation de la jacobienne), pour des motifs dont l'écart-type  $\sigma_I$  varie entre 0 (pas de motif) et

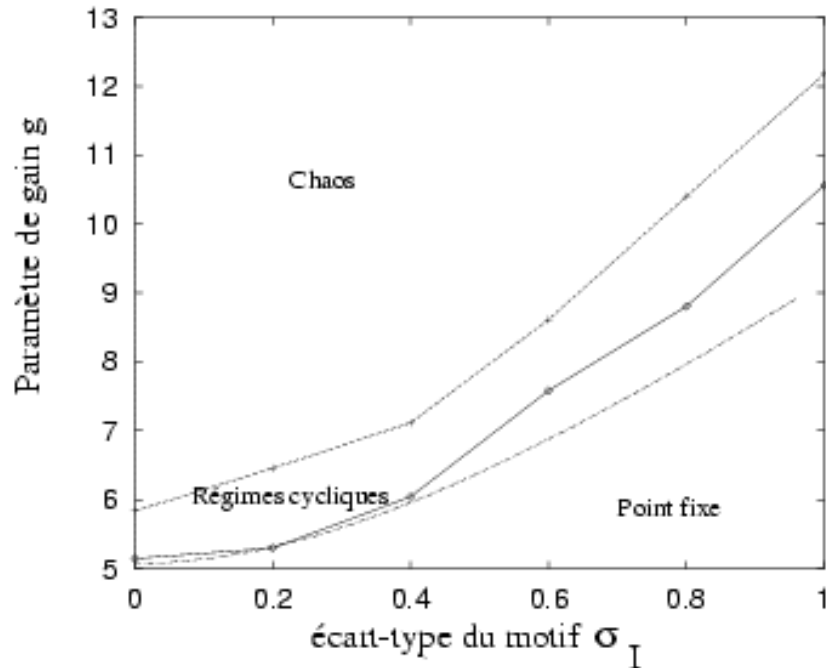


FIG. 3.21 – **Mesure empirique de la plage de déstabilisation.** Chaque mesure est effectuée sur 50 réseaux de taille  $N = 200$ .  $\sigma_I$  est en abscisse et  $g$  en ordonnée. Ligne pleine : valeur moyenne d'entrée en déstabilisation. Ligne pointillée : valeur moyenne d'entrée dans le chaos. Ligne alternée : valeur théorique de déstabilisation. Paramètres :  $\bar{I} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

1. Pour chaque  $\sigma_I$ , ces valeurs sont moyennées sur les 50 réseaux. On obtient la figure 3.21.

On voit donc :

- Pour  $\sigma_I < 0.5$ , les valeurs empiriques de déstabilisation sont très proches de la valeur théorique. La longueur de la plage de transition  $g_{chaos} - g_{dest}$  vaut à peu près 1.
- Pour  $\sigma_I > 0.5$ , la valeur de déstabilisation empirique dépasse nettement la valeur de déstabilisation théorique. Cette moins bonne convergence provient du fait que les valeurs de  $\sigma_I$  tendent à produire une configuration spatiale fortement corrélée au motif présenté (voir section 3.1.4). La valeur de déstabilisation dépend donc fortement de l'aléa du motif, dont les fluctuations par rapport à la loi sont plus grandes que celles de l'aléa des connexions ( $N$  valeurs aléatoires pour le motif,  $N^2$  valeurs aléatoires pour les connexions).

En tenant le même raisonnement que précédemment, on voit que l'augmentation de l'écart-type  $\sigma_I$  d'un motif donné (déplacement vers la droite du diagramme) tend à induire une route par quasi-périodicité *inverse*. La seule différence est que dans ce cas, on ne garde pas l'homogénéité de la période fondamentale et de l'organisation dynamique.

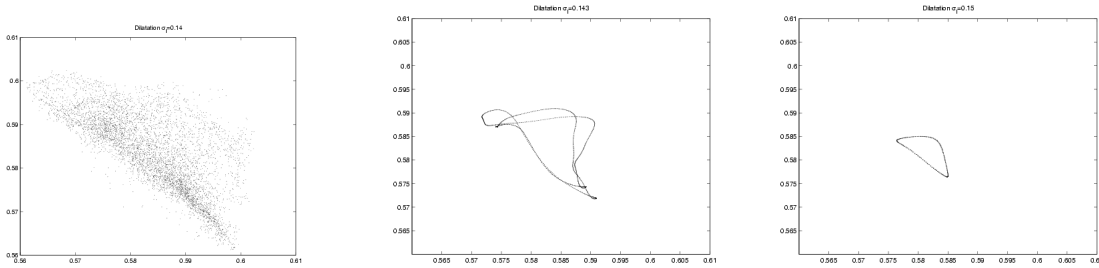


FIG. 3.22 – **Route par quasi-périodicité inverse.** à  $g$  fixé, on augmente l’intensité du motif d’entrée selon le paramètre  $\sigma_I$ . On présente les diagrammes de premier retour du signal  $m_N(t)$  pour  $\sigma_I = 0.14$  (frontière du chaos),  $\sigma_I = 0.143$  (cycle double – correspondant à une bifurcation flip –) et  $\sigma_I = 0.15$  (cycle limite). Paramètres :  $g = 5$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

La figure 3.22 permet mettre en évidence cette route par quasi-périodicité inverse sur un exemple particulier. Un motif  $I_{ref}$  qui nous sert de référence est tiré selon une loi normale centrée. La figure donne l’évolution de la dynamique contrainte par le motif  $I = \sigma_I I_{ref}$ , pour des valeurs croissantes de  $\sigma_I$ . Une simplification de la dynamique est ainsi mise en évidence. Celle-ci aboutit dans tous les cas à un point fixe (qui n’est pas montré sur la figure).

Ce comportement systématique de simplification de la dynamique pour  $\sigma_I$  croissant observé sur les motifs centrés se complique singulièrement lorsque l’on effectue la même opération sur des motifs *non centrés*, avec un facteur de dilatation sur la dispersion  $I = \bar{I} + \sigma_I I_{ref}$ .

Sur un réseau donné, on voit que la valeur d’entrée dans le chaos varie de manière non-monotone lorsque l’on augmente  $\sigma_I$ . Le comportement non-monotone de la figure 3.23) peut être comparé avec le comportement monotone croissant obtenu à la limite thermodynamique de la figure 3.19 (sachant que ce comportement monotone croissant se maintient pour la valeur  $\bar{I} = -0.1$  utilisée). Ainsi, lorsque l’on augmente  $\sigma_I$  à  $g$  fixé (par exemple  $g = 7$ ), on peut observer des allers retours entre des régimes chaotiques, cycliques et de point fixe.

Sachant que la valeur de déstabilisation dépend fortement de la configuration spatiale et donc des valeurs des potentiels  $u_i^*$ , on a ici l’illustration du fait que la dilatation d’un motif non centré a des répercussions très variées sur cette configuration spatiale, et donc sur l’effectif des neurones actifs qui entretiennent la dynamique. L’augmentation de  $\sigma_I$  fait transiter les neurones à travers la zone où ils sont actifs dynamiquement (c.à.d où leur potentiel moyen est proche de zéro). L’augmentation de  $\sigma_I$  produit ainsi un renouvellement de l’effectif des neurones actifs qui peut induire le développement de régimes dynamiques nouveaux.



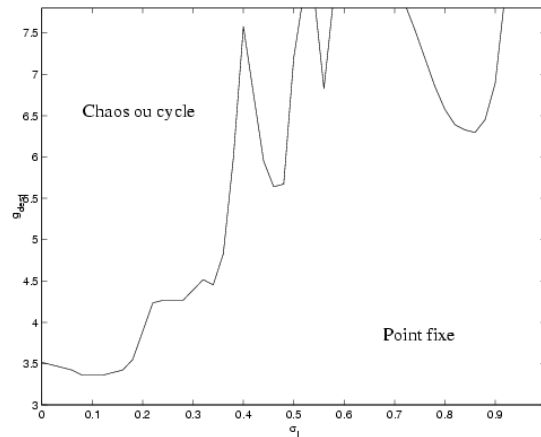


FIG. 3.23 – **Diagramme de réactivité** sur un réseau de 100 neurones pour un motif aléatoire. En abscisse : écart-type du motif, en ordonnée : valeur de déstabilisation du réseau. Les valeurs de  $g_{dest}$  supérieures à 8 ne sont pas représentées. Paramètres :  $\bar{I} = -0.1$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

### 3.3.2 Effet d'un motif statique sur la période

#### Évolution de la période avec $\sigma_I$

Parallèlement à son effet sur le régime dynamique (route par quasi-périodicité inverse), la dilatation du motif a également pour effet de modifier la période interne, et par extension l'organisation des circuits d'activation. L'invariance sur la période, observée pour des valeurs de  $g$  croissantes en dynamique spontanée, ne se retrouve pas lorsque l'on fait varier  $\sigma_I$ .

Sur l'exemple de la figure 3.22, par exemple, on constate que la dilatation du motif tend à imposer une périodicité nouvelle sur le signal. Cette nouvelle période apparaît dans le spectre de puissance de la dynamique contrainte pour des valeurs faibles de  $\sigma_I$ , et prend de plus en plus d'importance pour des valeurs croissantes de  $\sigma_I$ . Dans le cas considéré, la période de la dynamique spontanée ( $\tau \simeq 5.4$ ) est progressivement dominée par une nouvelle période ( $\tau \simeq 7.8$ ).

#### Répartition des périodes en dynamique contrainte

On a vu (section 3.1.4) qu'un motif statique modifie profondément la configuration spatiale des activations, qui conditionne à son tour la configuration du spectre de la jacobienne à la déstabilisation. La justesse de l'approximation selon laquelle la probabilité d'apparition d'une valeur propre formant un angle  $\alpha$  avec l'axe des réels est uniformément répartie sur  $[0, \pi]$  a pu être constatée lorsque cette mesure est effectuée sur un grand nombre de réseaux différents (voir figure 3.5).

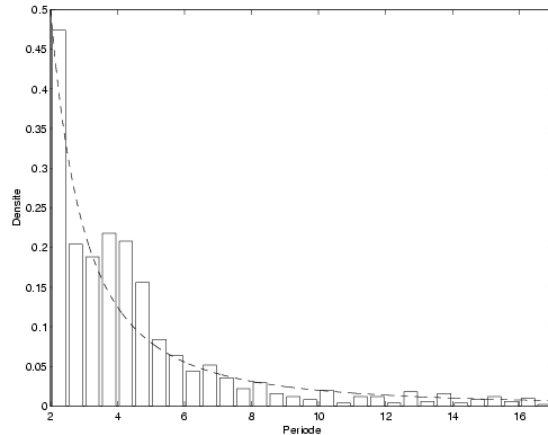


FIG. 3.24 – **Répartition empirique des périodes en dynamique contrainte.** Cette répartition est issue d'une mesure sur 1 réseau, auquel on a présenté 1000 motifs différents définis selon les paramètres  $\bar{I} = -0.4$ ,  $\sigma_I = 0.3$ . On a tracé en pointillé la densité théorique  $f(x) = 2/x^2$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

Cette répartition est maintenant mesurée sur *un seul* réseau, auquel on présente de nombreux motifs différents. Sur un réseau donné, de taille  $N = 200$ , 1000 motifs gaussiens tirés indépendamment selon  $\bar{I}$  et  $\sigma_I$ , sont successivement présentés. Le choix des valeurs  $\sigma_I = 0.3$ ,  $\bar{I} = -0.4$  assure que la modification induite sur la configuration spatiale est significative et spécifique pour chaque motif différent (voir section 3.1.4). La répartition obtenue est présentée sur la figure 3.24.

On voit la grande proximité entre la répartition des périodes issue de 1000 réseaux différents (voir figure 3.5), et celle issue de 1000 motifs différents sur un seul réseau (figure 3.24). Cette dernière présente néanmoins une surdensité plus accentuée pour les périodes proches de 4.

Il a par ailleurs été vérifié que des répartitions analogues se retrouvent sur tout réseau défini selon les mêmes paramètres.

Sachant qu'à chaque période correspond une organisation sous-jacente sous forme de circuit d'activation, on voit que l'*organisation dynamique s'adapte au motif*, et à chaque motif différent on peut associer une organisation dynamique différente. Le système semble pouvoir se reconfigurer à l'infini, et adapter son organisation interne aux circonstances. Le système apparaît comme très *malléable*.

### Comportement dynamique au voisinage d'un motif

Ce paragraphe cherche à établir le lien entre les voisinage statique et voisinage dynamique ; on cherche à voir si des motifs voisins entraînent des réponses dyna-

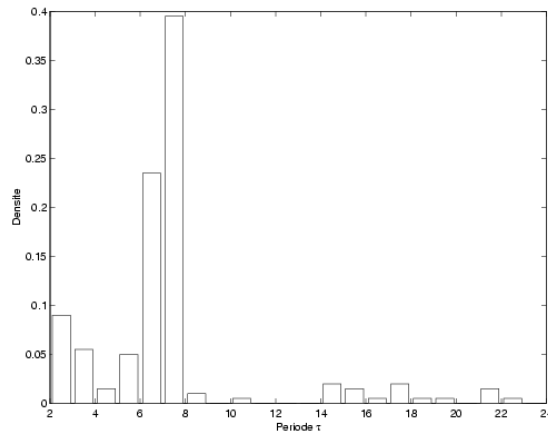


FIG. 3.25 – **Répartition empirique des périodes lors d’une perturbation locale.** Cette répartition est issue d’une mesure sur 1 réseau, pour lesquels on a excité individuellement chacun des 200 neurones. Les 200 valeurs sont ensuite réparties sur l’histogramme. La période de la dynamique spontanée est  $\tau \simeq 7.1$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0.3$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

miques voisines. Dans ce but, on fixe un motif et un réseau, qui nous serviront de référence. De petites modifications sont alors appliquées au motif.

Les mesures qui suivent ont été effectuées à la frontière du chaos. Dans une étude sur les petites perturbations, la frontière du chaos, qui peut être vue comme une zone dynamique de transition, semble favorable à ce que de petits changements sur le système produisent de forts changements sur le régime dynamique.

On a ici tiré les poids d’un réseau ( $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ), de taille moyenne  $N = 200$ , avec un seuil identique pour tous ( $\bar{\theta} = 0.3$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ). Pour de tels seuils, l’activation moyenne  $m_N(t)$  à chaque instant de l’ordre de 0.3. On perturbe alors le système avec des motifs statiques très simples, qui sont nuls partout, sauf pour un seul neurone d’indice  $j$ , dont la valeur est 1. C’est une perturbation locale, dans la mesure où un seul neurone est excité par le motif. *Les motifs ne sont donc plus gaussiens.*

Cette perturbation augmente systématiquement le potentiel du neurone  $j$ , ce qui tend à provoquer une saturation de son signal d’activation. Le neurone “forcé” produit alors un signal presque constant, ce qui revient à imposer la valeur  $J_{ij}$  en entrée de chaque récepteur  $i$ . Le neurone se comporte donc comme un seuil statique dont l’écart-type vaut  $\sigma_J/\sqrt{N}$ .

On a représenté sur la figure 3.25 la répartition des périodes trouvées après avoir excité individuellement chacun des 200 neurones, sachant que la période en dynamique spontanée vaut  $\tau \simeq 7.1$ . On a donc 200 valeurs de périodes réparties sur l’histogramme.

On constate immédiatement que les périodes qui apparaissent majoritairement sont comprises entre 6 et 8. Les deux colonnes correspondant aux intervalles

[6,7] et [7,8] comprennent environ les deux tiers des périodes trouvées. Les autres valeurs se répartissent entre 2 et 20 environ, et correspondent donc à des perturbations beaucoup plus importantes relativement à la période initiale. On constate par ailleurs que ces perturbations se traduisent par des changements importants au niveau de l'organisation dynamique.

On a déjà pu constater que les *régimes dynamiques* manifestent une sensibilité importante aux entrées statiques. On voit ici que la *période* de la dynamique est également très sensible à ces entrées. Modifier l'activation d'*un seul* neurone, s'il est judicieusement choisi, peut perturber fortement l'organisation dynamique. On constate donc ici l'aspect très *instable* de cette organisation.

La propriété qui en découle, c'est que l'organisation dynamique permet de faire une discrimination très fine sur l'entrée. Au vu de la section 3.1, on voit donc se dessiner une répartition des tâches entre configuration spatiale et configuration dynamique : la configuration spatiale, peu discriminante sur des entrées voisines, permet de distinguer les entrées décorréelées. Les mêmes entrées voisines peuvent au contraire entraîner de très fortes variations dans la configuration dynamique, c'est à dire être distinguées par des comportements qualitativement différents.

*La présentation d'un motif statique oriente systématiquement la dynamique vers une nouvelle organisation spatio-temporelle.*

### 3.3.3 Présentation de motifs dynamiques séquentiels

Un motif dynamique séquentiel est constitué par une séquence de motifs gaussiens indépendants  $\{I_1, I_2, \dots, I_\tau\}$ , caractérisée par sa période  $\tau$ . Chaque motif composant la séquence est tiré selon  $\mathcal{N}(\bar{I}, \sigma_I^2)$ . Le paramètre  $\sigma_I$  donne l'écart-type de ces motifs. Les motifs étant indépendant,  $\sigma_I$  donne également l'espérance de l'écart-type du signal séquentiel  $I_i(t)$  en entrée de chaque neurone  $i$ . La séquence est présentée en boucle au réseau  $I(t) = I(1 + t \bmod \tau)$ .

On a vu précédemment que des motifs statiques modifient l'organisation dynamique du réseau, et donc sa période interne, mais on ne connaît pas a priori cette période. Dans le cas d'un motif dynamique, au contraire, on impose une période  $\tau$  au réseau, et le réseau va modifier son organisation dynamique sous la contrainte de cette période. On a donc une contrainte *explicite* sur la période.

#### Route vers le chaos

Lorsqu'un motif dynamique est imposé, celui-ci alimente de l'extérieur la dynamique du réseau. Le système n'est donc plus autonome. Il s'instaure donc une forme de concurrence entre le régime dynamique périodique imposé et celui qui se développe spontanément dans le système.

On peut noter qu'il n'y a plus de régime de point fixe, quelle que soit la valeur de  $g$ ,

Pour des séquences de motifs tels que  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.1$ , on observe en général le comportement suivant (voir figure 3.26) :

- Pour les valeurs de  $g$  correspondant au point fixe en dynamique spontanée, la dynamique contrainte est strictement périodique. La dynamique du réseau est passive et se laisse guider par le signal d'entrée. Si la période de l'entrée est  $\tau$  entière, la dynamique passe strictement par une séquence de  $\tau$  états dynamiques distincts.
- Pour les valeurs de  $g$  correspondant au régime pseudo-périodique en dynamique spontanée, on observe  $\tau$  cycles distincts sur un diagramme de premier retour du signal moyen. Le cycle est dupliqué  $\tau$  fois.
- Pour les valeurs de  $g$  correspondant au régime chaotique en dynamique spontanée, on observe sur le diagramme de premier retour, à la frontière du chaos,  $\tau$  régions où la densité de points est plus importante, qui sont des reliquats des cycles atteints à la déstabilisation. Pour des valeurs de  $g$  plus élevées, on ne parvient plus à distinguer à l'oeil la périodicité du motif (bien que celle-ci reste décelable par spectre de puissance pour toute valeur de  $g$ ).

Plus  $g$  augmente, plus la dynamique interne semble donc prendre le pas sur la dynamique imposée.

### Effet sur la valeur d'entrée dans le chaos

Il est intéressant de voir dans quelle mesure la présentation d'un motif dynamique séquentiel peut favoriser ou au contraire défavoriser le développement d'un régime chaotique.

On a représenté sur la figure 3.27 l'évolution de la valeur d'entrée dans le chaos moyenne pour des valeurs croissantes de  $\sigma_I$ .

On voit que pour des valeurs de  $\sigma_I$  inférieures à 0.2, il y a peu d'effet sur la valeur d'entrée dans le chaos. On observe même une légère baisse de cette valeur, ce qui peut être interprété comme suit : un motif périodique de faible intensité tend à stimuler la dynamique du réseau. La dynamique est nourrie par le signal, mais n'empiète pas sur le signal de champ local qui reste déterminant sur la valeur du signal de potentiel. La prise en compte prioritaire de l'information en provenance de tous les afférents autorise la complexification de cette dynamique. Pour des valeurs plus élevées de  $\sigma_I$ , la stimulation périodique domine le champ local, et tend donc à favoriser un régime périodique. Le régime chaotique est alors plus difficile à atteindre (nécessite des valeurs de  $g$  plus élevées).

On peut noter que dans tous les cas, la propriété de décroissance du diagramme d'autocorrélation n'a plus cours. Les régimes chaotiques se "surajoutent" à un régime périodique immuable. La figure 3.28 présente l'aspect du diagramme d'autocorrélation sur le signal  $m_N(t)$  pour une dynamique stimulée par une séquence de période 3, avec  $\sigma_I = 0.2$ .

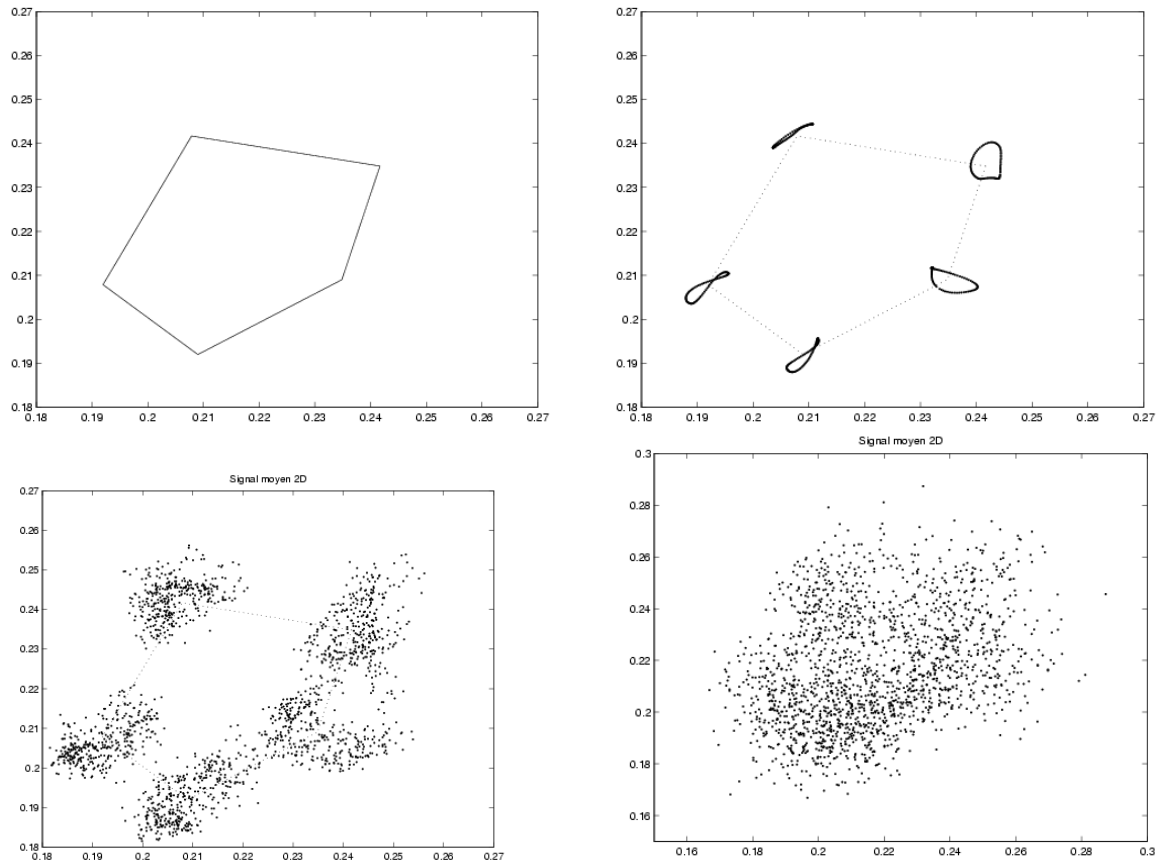


FIG. 3.26 – **Route vers le chaos avec un signal d’entrée périodique.** La période imposée est  $\tau = 5$ . On a représenté les diagrammes de premier retour du signal  $m_N(t)$ . Les valeurs de  $g$  sont successivement  $g = 4$  ( $\simeq$  point fixe),  $g = 4.65$  (cycles limites),  $g = 5$  (frontière du chaos),  $g = 6$  (chaos profond). On constate, en dynamique pseudo-périodique et à la frontière du chaos, que la disposition des amas de points reproduit celle observée pour  $g = 4$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.1$ ,  $\bar{\theta} = 0.4$ ,  $\sigma_\theta = 0.3$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

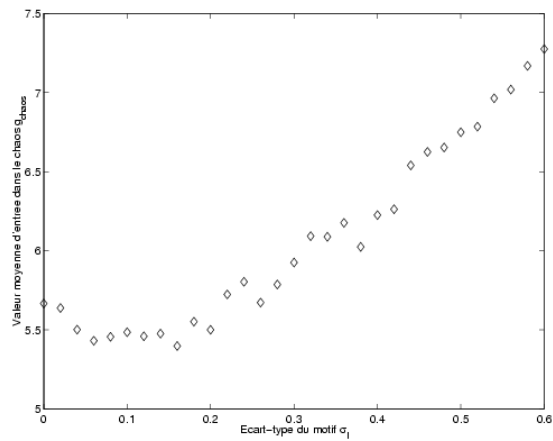


FIG. 3.27 – **Évolution de la valeur d'entrée dans le chaos avec  $\sigma_i$ .** La période du motif dynamique vaut 6. Pour chaque valeur de  $\sigma_I$ , on calcule la valeur d'entrée dans le chaos moyenne sur 100 réseaux. Paramètres :  $N = 200$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

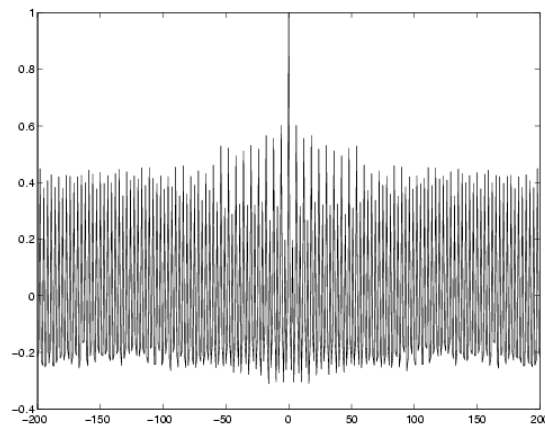


FIG. 3.28 – **Diagramme d'autocorrélation en régime chaotique avec stimulation périodique.** Le diagramme porte sur le signal  $m_N(t)$  en régime stationnaire. La période de la séquence imposée vaut  $\tau = 3$ . Paramètres :  $g = 10$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0.4$ ,  $\sigma_\theta = 0.3$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

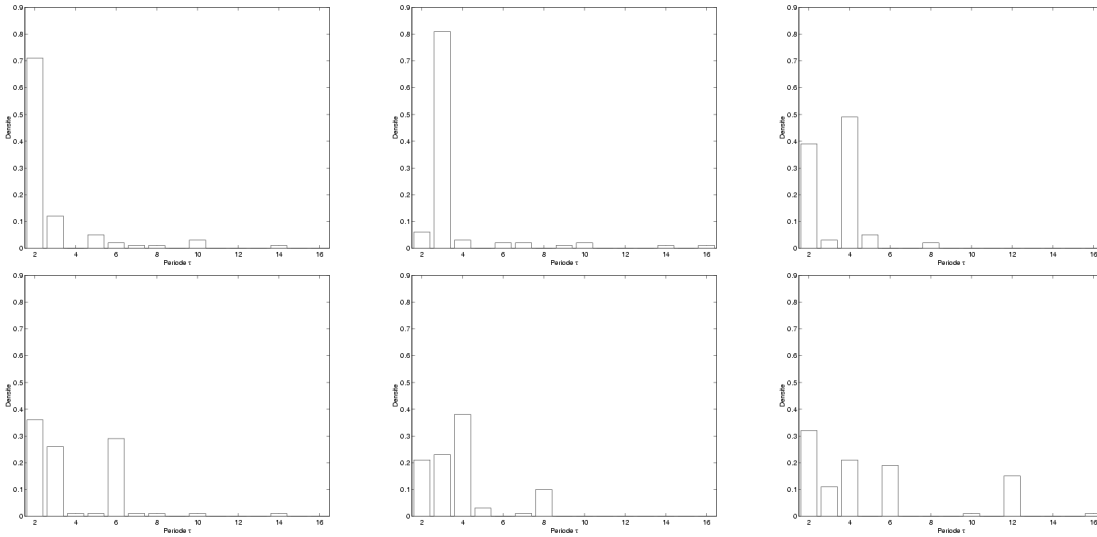


FIG. 3.29 – Capture de la période pour différentes valeurs de  $\tau$ . On a représenté sur ces histogrammes la répartition des périodes, mesurée sur 100 couples (Réseau, Séquence) pour  $\tau = 2$  (haut, gauche),  $\tau = 3$  (haut, milieu),  $\tau = 4$  (haut, droite),  $\tau = 6$  (bas, gauche),  $\tau = 8$  (bas, milieu) et  $\tau = 12$  (bas, droite). Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ ,  $\sigma_I = 0.1$ .

### Capture de la période

Lorsqu’un motif de période  $\tau$  est présenté en entrée, cette période tend à imposer la fréquence fondamentale du spectre de puissance  $1/\tau$ . Néanmoins, cette pulsation fondamentale n’est pas nécessairement celle qui domine le spectre de puissance. On constate que le système favorise indifféremment la fréquence fondamentale ou l’une de ses harmoniques. Bien sûr, plus la valeur de  $\tau$  est grande, plus le risque de voir se développer un régime dont la période est fondée sur l’un de ces harmoniques est grande.

La période “capturée” est donc celle qui domine le spectre. Pour mesurer les caractéristiques de cette capture, on définit des séquences de motifs aléatoires pour des périodes allant de 2 à 12. Chaque motif est défini selon les paramètres  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.1$ . Pour chaque valeur de  $\tau$ , on tire différents couples (Réseau, Séquence), et on mesure la période capturée. Les valeurs trouvées sont alors réparties sur un histogramme (voir figure 3.29).

On voit donc que pour des séquences de période 2 ou 3, la capture est conforme à la période imposée. Il existe néanmoins une minorité de réseaux pour lesquels une autre période reste dominante dans le spectre. On peut penser que celle-ci correspond soit à la période de la dynamique spontanée, soit à un multiple de la période imposée.

À partir de  $\tau = 4$ , on commence à observer des phénomènes de résonance.



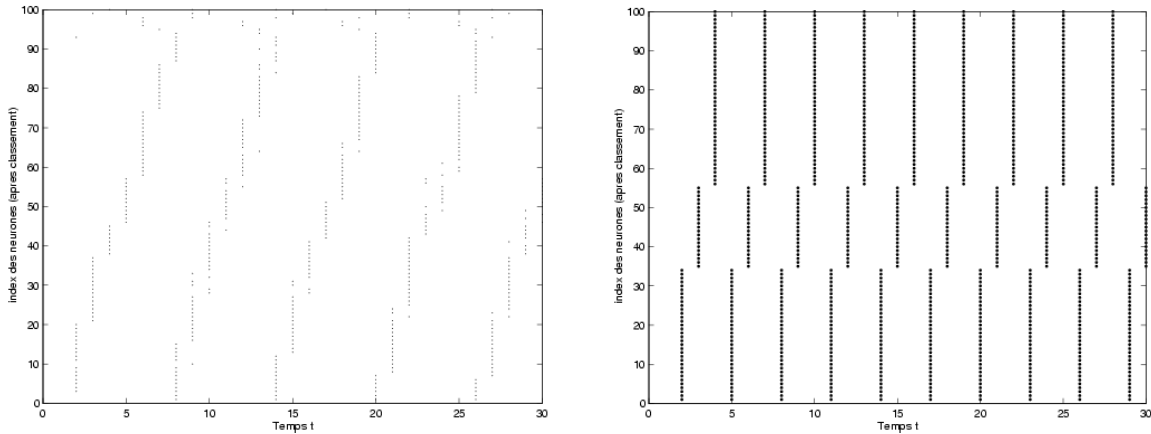


FIG. 3.30 – **Signaux de phase avant et après imposition d’un motif dynamique de période 3.** Les deux diagrammes correspondent à des classements différents sur les signaux de phase. Paramètres :  $N = 100$ ,  $\sigma_I = 0.1$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\bar{\theta} = 0.4$ ,  $\sigma_\theta = 0.3$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

Dans presque la moitié des cas, l’harmonique 2 est dominante. Ce choix indifférent entre la période fondamentale et ses harmoniques semble réduire les chances de capter la période fondamentale lorsque  $\tau$  augmente. Par exemple, pour un signal de période  $\tau = 12$ , la probabilité d’apparition associée à la période  $\tau = 12$  est à peu près égale à la probabilité d’apparition de chacun de ses harmoniques 6, 4, 3 et 2.

Si, par exemple, l’harmonique  $\tau = 4$  domine le spectre pour une stimulation de période  $\tau = 12$ , et que le système tend à produire un circuit d’activation de période 4, on peut dire qu’il “interprète” de la même façon sur ses sorties les 3 séquences de période 4 qui forment la séquence complète.

### Effet sur le circuit d’activation

La présentation d’un motif dynamique introduit une nouvelle période qui produit une réorganisation du circuit d’activation. Sur la figure 3.30, on a représenté les signaux de phase classés avant et après présentation d’une séquence de période 3.

Comme on pouvait s’y attendre, le signal d’entrée *impose donc un circuit d’activation* qui est sans rapport avec le circuit d’activation produit en dynamique spontanée. Contrairement aux motifs statiques qui tendent à produire un circuit “arbitraire”, tout motif dynamique périodique impose un circuit de période fixe.

## CONCLUSION LOCALE

Ce chapitre a permis de mettre en avant l'organisation qui se met en place dans le système, spontanément ou sous la contrainte d'une entrée extérieure. Le terme "organisation" se réfère ici à la possibilité de catégoriser les neurones en classes distinctes. Lorsque le classement porte sur le niveau d'activité des neurones (neurones actifs/neurones inactifs), on parle de *configuration spatiale* du système. Lorsque le classement porte sur les caractéristiques de phase des signaux émis par les neurones, on parle de *configuration dynamique*. La répartition homogène des neurones entre ces différentes classes dynamiques est assurée par les propriétés de décorrélation prouvées dans le cadre du champ moyen. On a montré que l'apparition d'un régime cyclique à la déstabilisation s'accompagne de la mise en place d'un *circuit d'activation*, correspondant à l'activation en chaîne des différentes classes (ou paquets) de neurones, et dont les caractéristiques spatiales et temporelles se maintiennent jusque dans les régimes chaotiques. On a constaté par ailleurs que la période de ce circuit d'activation dépend fortement de la configuration spatiale des activations à la déstabilisation. Cette configuration spatiale présente deux propriétés : – 1 – elle tend à rester la même pour toutes les valeurs de  $g$ , c'est à dire pour tous les régimes dynamiques, et – 2 – elle tend à évoluer régulièrement selon les modifications effectuées sur *les seuils* du système. C'est donc en agissant sur les seuils, et non sur les conditions initiales comme dans le modèle de Hopfield, que l'on apporte au système une information susceptible de modifier son comportement dynamique, en agissant directement sur la configuration spatiale, et par ricochet en modifiant le circuit d'activation. L'extrême sensibilité du système à toute modification de ses entrées se manifeste par une reconfiguration du réseau.

La présentation de motifs dynamiques de période  $\tau$  impose au système une modulation *explicite* de son activité dynamique. La période imposée, ou l'une de ses harmoniques, domine la dynamique contrainte et conditionne alors le circuit d'activation.

Cette étude des propriétés d'organisation du système est un préalable indispensable à la mise en place des algorithmes d'apprentissages décrits dans les chapitres suivants. Ces mécanismes de catégorisation neuronale permettent de comprendre ensuite le fonctionnement de l'apprentissage.



# Chapitre 4

## Apprentissage : une dynamique sur les poids

Notre étude sur les dynamiques spontanées et contraintes a mis en avant quelques propriétés intéressantes. En dynamique spontanée, Les signaux produits par le réseau témoignent d'une grande variété de formes et de périodes. Une analyse approfondie de ces signaux permet de différencier les neurones actifs des neurones inactifs (configuration spatiale), ainsi que des circuits d'activation (configuration dynamique). Il s'avère en fin de compte qu'à proximité de la déstabilisation, l'entretien de la dynamique repose sur quelques paquets de neurones actifs qui propagent un signal en chaîne d'un paquet de neurones à l'autre, le nombre de paquets déterminant approximativement la période.

Cette forme d'organisation est sensible à toute perturbation induite par un motif statique ou dynamique. Un motif statique, par exemple, déplace les valeurs des potentiels des neurones, de sorte que certains neurones actifs deviennent inactifs, et certains neurones inactifs deviennent actifs, ce qui tend à perturber l'organisation spontanée et la plupart du temps à en créer une nouvelle tout à fait différente. Cette nouvelle organisation peut modifier profondément à la fois la période et le régime dynamique du signal. Chaque motif statique différent peut ainsi produire une organisation dynamique qui lui est propre. Dans le cas de motifs périodiques, la période imposée tend à se substituer à la période spontanée, ce qui conditionne également l'apparition d'un nouveau circuit d'activation.

Le réseau possède donc potentiellement une multitude d'organisations dynamiques différentes. Chacune peut a priori être interprétée comme tâche cognitive différente. Il apparaît à présent judicieux de mettre en place une règle d'apprentissage qui modifie au mieux les poids du réseau afin que les propriétés non spécifiques observées sur les dynamiques spontanées et contraintes acquièrent un caractère de spécificité. On veut que le choix de l'organisation dynamique adoptée soit conditionné par l'apprentissage.

Le présent chapitre définit quelques règles d'apprentissage et décrit leurs

modes d'action sur l'organisation dynamique. Toutes les règles présentées se fondent sur la règle de Hebb.

La section 4.1 présente deux règles d'apprentissage qui ont été étudiées en premier lieu dans le cadre de l'apprentissage sur ce modèle. La règle initiale, fondée sur le produit des activations, est présentée section 4.1.1. Une version modifiée de cette règle, qui introduit la notion d'*habituation* et se fonde sur des différentiels de niveau d'activation est présentée section 4.1.2.

La section 4.2 présente la règle qui sera utilisée dans le cours de cette thèse, qui est une règle fondée sur la covariance *effective* entre neurone afférent et neurone récepteur. La section 4.2.1 décrit la règle d'apprentissage à proprement parler. La section 4.2.2 montre que les valeurs des covariance entre neurones se répartissent selon une loi de puissance. La section 4.2.3 montre l'effet du processus d'apprentissage sur la dynamique spontanée du réseau et la matrice des poids.

La section 4.3 met en œuvre l'apprentissage dans le cadre de la dynamique contrainte, dans le cas de motifs statiques (section 4.3.1), de motifs dynamiques périodiques (section 4.3.2) et enfin dans le cas mixte où les motifs statiques sont assimilés à des motifs conditionnants (section 4.3.3)

## 4.1 Historique

En pratique, il a fallu plusieurs essais, plusieurs campagnes de tests pour trouver une règle qui présente au mieux les propriétés recherchées. Pour ne pas alourdir le document, je me contenterai d'un bref rappel du cheminement qui a conduit au choix final.

Toutes ces règles se fondent sur le même principe, celui de Hebb, c'est à dire sur un calcul de corrélations entre l'état d'un neurone source et celui d'un neurone cible. Il s'avère que certaines sont meilleures que d'autres, pour des raisons qui tiennent à la structure du réseau et à la nature des dynamiques qui s'y développent.

Même si le choix final d'une règle portant sur la composante dynamique du signal paraît naturel au vu de ce qui a été présenté dans la première partie, c'est aussi parce que certaines règles d'apprentissage ne conduisaient pas aux résultats recherchés que l'on a été amené à se pencher sur certains aspects plus subtils de la dynamique qui se développe dans le réseau. Il faut donc voir que certains résultats présentés précédemment dans le cadre de la dynamique spontanée proviennent aussi d'interrogations qui ont été soulevées par l'étude de l'apprentissage.

### 4.1.1 La règle initiale

La première règle a été présentée dans la thèse de Mathias Quoy [95].

La règle de Hebb, qui porte sur des liens excitateurs, dit que le lien synaptique est renforcé lorsqu'un pic d'activation sur le neurone afférent est suivi, dans un intervalle de temps  $\tau$ , d'un pic d'activation sur le neurone récepteur. Dans le cas où l'activation du neurone afférent n'est pas suivie par une activation du neurone récepteur, le lien est légèrement diminué.

La première règle proposée sur notre modèle, d'inspiration hebbienne, repose par ailleurs sur deux principes forts :

1. La dynamique sur les poids repose sur un produit des activations, avec un *décalage* d'un pas de temps entre le neurone source et le neurone cible qui représente le délai de transmission sur l'axone.
2. La dynamique d'apprentissage est *adiabatique*. C'est une dynamique lente par rapport à la dynamique sur les activations. À chaque modification des poids, on a une centaine de pas de relaxation permettant à la dynamique de rejoindre son nouvel attracteur. On fixe par avance le temps de relaxation :  $T$ .

Trois contraintes complètent cette règle :

- on exige une activation minimale ( $x_j(t) > 0.5$ ) du neurone source pour engendrer une modification du lien, ce qui revient à dire : lorsque le neurone source est inactif, il ne se passe rien.
- pour des raisons de plausibilité biologique, un poids ne peut pas changer de signe i.e. : un lien inhibiteur ne peut pas devenir excitateur.
- les neurones ne possèdent pas de lien propre, soit  $J_{ii} = 0$  ; la règle n'agit donc pas sur ce lien.

Ce qui donne, sous forme algorithmique :

(Tous les  $T$  pas de temps, pour tout  $i$ , pour tout  $j \neq i$ )  
 Si  $x_j(t-1) > 0.5$  alors

$$J_{ij}(t) = J_{ij}(t-1) + \frac{\alpha}{N}(x_i(t) - 0.5)(x_j(t-1) - 0.5) \quad (4.1)$$

Sinon on ne modifie pas les poids.

Si l'activation du neurone cible est  $> 0.5$ , le poids est augmenté. Si l'activation du neurone cible est  $< 0.5$ , le poids est diminué. Le paramètre qui règle la force de l'apprentissage est  $\alpha$ . On prend souvent des valeurs d' $\alpha$  comprises entre 0.01 et 0.1. La normalisation d' $\alpha$  en  $1/N$  permet d'avoir un impact équivalent en moyenne sur le champ local du neurone, quelle que soit la taille du réseau. En contrepartie, plus la taille est grande, plus l'effet de l'apprentissage sur un lien particulier est faible.

Une expérience d'apprentissage se déroule typiquement comme suit : après initialisation des poids  $J$  et du motif  $I_1$ , on itère les transitoires jusqu'à atteindre la dynamique stationnaire. Chaque modification des poids est suivie de  $T =$

100 transitoires, et l'opération est répétée jusqu'à l'obtention d'une dynamique périodique (voir premier point ci-dessous). La nouvelle matrice des poids  $J_{app}$  sert ensuite de base aux différents tests sur les caractéristiques de cet apprentissage.

Cette règle a permis de mettre en évidence les résultats suivants :

- L'effet principal de la règle d'apprentissage est de provoquer une réduction continue de la complexité de l'activité dynamique. Ainsi, à  $g$  fixé, si la dynamique de départ est de type chaotique, on observe au cours de l'apprentissage une route inverse qui va du chaos vers le point fixe en passant par des cycles limites. Ce résultat dynamique spectaculaire est obtenu en modifiant très faiblement les poids synaptiques. Dans le cadre de nos expériences, 10 à 20 modifications synaptiques, avec  $\alpha = 0.01$ , suffisent pour atteindre un régime de type cycle limite.
- La modification des poids synaptiques est de très faible amplitude. On prend conscience que nos régimes dynamiques sont fragiles. Toute l'organisation dynamique spontanée peut être détruite par quelques changements très ciblés des poids.
- Le changement dynamique est *spécifique*, dans la mesure où il s'applique à la dynamique issue de l'association entre les poids  $J_{app}$  et le motif appris  $I_1$ . En particulier, la présentation d'un autre motif  $I_2$  n'a pas d'effet spécifique sur la dynamique. Cette propriété nous permet d'associer ce comportement dynamique cyclique à ce motif. Schématiquement, ce comportement est comparable à celui observé par Freeman sur le bulbe olfactif du lapin.

Ces résultats présentés dans la thèse de Mathias Quoy ont pu être approfondis grâce à un apport personnel portant sur la répartition de l'activité dynamique des neurones (voir section 3.1.1). Tous ces résultats ont donné lieu à publication [82]

L'évolution de ces répartitions en cours d'apprentissage a permis de mieux comprendre les mécanismes mis en jeu :

- L'apprentissage agit essentiellement sur la configuration spatiale (activations moyennes) associée au motif  $I_1$ . En particulier, les neurones dits "saturés", dont l'activation est proche de 1 et l'activité dynamique faible, ont une influence prépondérante. En effet, les liens en provenance de ces neurones sont systématiquement renforcés.
- La règle provoque en moyenne une translation des potentiels moyens des neurones vers des valeurs excentrées. Or, plus le potentiel moyen est excentré, moins le neurone est actif. On a donc un appauvrissement en neurones actifs, qui provoque l'effondrement dynamique observé. Une conséquence importante est que l'on *perd la distribution gaussienne* des potentiels, qui constitue le socle des équations de champ moyen. On sort donc du cadre de la théorie du champ moyen dès que l'on met en œuvre la règle d'apprentissage.
- La modification de l'entrée statique (motif  $I_2$ ) provoque une nouvelle configuration spatiale, et en particulier une redistribution des neurones saturés.

La dynamique associée à  $I_2$  est cependant influencée de façon marginale par les modifications synaptiques. On peut parler d'effet de bord de l'apprentissage. Cet effet de bord se mesure à la *proportion de neurones saturés communs* entre la dynamique associée à  $I_1$  et la dynamique associée à  $I_2$ .

Le résultat principal est donc que l'apprentissage a des effets de bord. Par malheur, ces effets de bord deviennent prépondérants lorsque l'on veut apprendre plusieurs motifs. Chaque nouvel apprentissage sur un motif  $I_m$  déplace les potentiels d'une partie des neurones vers des valeurs excentrées, ce qui tend à effondrer la dynamique pour tout motif  $I_k$  tel que l'entretien de cette dynamique reposait initialement sur certains des neurones déplacés. Plus on apprend de motifs, plus l'ensemble des neurones ainsi déplacés est important, et plus il est probable que la présentation d'un motif quelconque  $I_k$  effondre la dynamique du réseau. On perd ainsi progressivement la propriété de spécificité dynamique associée aux motifs appris. La capacité maximale du réseau est en fait rapidement atteinte.

Cette capacité dépend en grande partie des choix des paramètres initiaux. Des mesures précises ont été effectuées pour les paramètres suivants, et sont présentées dans [82] :

- on choisit un paramètre de gain élevé ( $g = 15$ ), de manière à ce que la dynamique spontanée développée dans les réseaux soit éloignée de la frontière du chaos, et donc peu sensible aux effets de bord produits par l'apprentissage.
- on prend des motifs aléatoires statiques centrés dont l'écart-type est élevé ( $\sigma_I = 0.7$ ), afin que les changements de motifs tendent à redistribuer fortement la configuration spatiale des activations.
- La taille est relativement élevée  $N = 200$ .

Dans ces conditions, les effets de bord sont de l'ordre de 12 à 16% *par motif appris*, c'est à dire qu'après apprentissage, 12 à 16% des motifs quelconques présentés induisent une réduction dynamique non souhaitée. On voit donc dans ces conditions que la limitation en termes de capacité est sérieuse.

À l'issue de l'étude sur cette première règle d'apprentissage, deux constatations peuvent être faites :

1. La principale limitation de la règle vient du renforcement de neurones non-spécifiques. Il faut donc opérer une sélection plus importante sur le choix des poids à modifier afin de limiter les effets de bord.
2. L'essentiel des modifications synaptiques provient des neurones saturés à activité dynamique faible. Dans les faits, la règle prend essentiellement en compte l'activation moyenne des neurones, et non la composante temporelle du signal d'activation. En conséquence, les délais présents dans la règle d'apprentissage n'ont aucun rôle en pratique. Il faut donc renforcer la prise en compte de cette information temporelle.

C'est pour pallier à cette capacité faible qu'on a cherché à mettre en place des règles d'apprentissage moins coûteuses. Ces considérations ont abouti à la mise en œuvre de deux nouveaux types de règles d'apprentissage, qui ont été explorés



successivement :

- Dans un premier temps, on a cherché à mettre en place des règles d'apprentissage fondées sur des différentiels d'activation, c'est à dire qui renforcent les neurones dont l'activation moyenne est la plus fortement modifiée suite à la présentation d'un motif. Le principe de la dynamique d'apprentissage adiabatique est conservé, et les délais de transmission sont abandonnés.
- Dans un deuxième temps, on a cherché à mettre en place des règles d'apprentissage qui ne prennent en compte que les caractéristiques dynamiques des signaux émis par les neurones. Dans ce cas, la prise en compte du délai de transmission devient prépondérante, mais on abandonne par contre la dynamique adiabatique.

C'est la deuxième voie qui a été la plus fructueuse, et qui sera développée en détail dans la suite de ce rapport, mais voyons dans un premier temps les résultats obtenus pour le premier type de règles d'apprentissage, et ce qu'ils apportent.

### 4.1.2 Différentiels d'activation

Cette règle d'apprentissage et ses résultats ont été présentés à ICANN'98 [96].

L'idée qui sous tend la mise en place de cette nouvelle règle d'apprentissage est le principe d'habituation, selon lequel un neurone favorise ce qui est nouveau dans son environnement, et néglige ce qui ne change pas. Ce principe est bien connu dans le cas des neurones biologiques [97].

L'idée de départ est que chaque neurone possède une estimation *instantanée* de la valeur de l'activation moyenne de chacun de ses afférents  $\tilde{x}_j^*$ . Cette estimation est remise à jour à chaque pas de temps selon :

$$\tilde{x}_j^*(t) = \underbrace{(1 - \beta)\tilde{x}_j^*(t-1)}_{\text{mémoire}} + \underbrace{\beta x_j(t)}_{\text{nouveau}} \quad (4.2)$$

où  $\beta \in ]0, 1[$  est le paramètre qui règle l'habituation ( $\beta$  est un paramètre arbitraire indépendant des autres paramètres).

Si on considère un signal d'activation  $x_i = \{x_i(t)\}_{t=1..T}$ , on a :

$$\tilde{x}_i^*(T) = \beta \sum_{t=0}^{T-1} (1 - \beta)^t x_i(T - t)$$

Dans cette formule,  $\beta$  peut être vu comme un terme de normalisation, dans la mesure où  $\sum_{t=0}^{T-1} (1 - \beta)^t$  tend vers  $1/\beta$  quand  $T \rightarrow \infty$ . On voit alors que  $\tilde{x}_i^*(T)$  nous donne, au même titre que la moyenne empirique, une estimation de l'activation fondée sur la totalité des valeurs du signal. Néanmoins, du fait de la pondération sur le temps, seuls les états les plus proches temporellement de  $T$  sont effectivement pris en compte pour le calcul de cette moyenne.

Si le signal est stationnaire, on peut estimer l'écart par rapport à sa moyenne effective  $x_i^*$  (sachant que  $a_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ ) comme suit :

$$\tilde{x}_i^*(T) = x_i^* \underbrace{\beta \sum_{t=0}^{T-1} (1-\beta)^t}_{\rightarrow 1(T \rightarrow \infty)} + \beta \sum_{t=0}^{T-1} (1-\beta)^t a_i(T-t)$$

Donc, l'écart à la moyenne (pour  $T$  grand) vaut :

$$\tilde{e}_i^*(T) \simeq \beta \sum_{t=0}^{T-1} (1-\beta)^t a_i(T-t)$$

Si  $\beta$  vaut 1, le terme d'écart correspond à l'activité dynamique  $a_i(t)$  du neurone au temps  $T$ . Pour des valeurs élevées de  $\beta$ , l'estimation tend à reproduire (de manière affaiblie) les fluctuations temporelles du signal d'activation. Plus  $\beta$  se rapproche de zéro, plus le terme d'écart se rapproche également de zéro, en tant qu'estimation de la moyenne du signal centré  $a_i(t)$ . L'estimation de  $x_i^*$  est d'autant meilleure que  $\beta$  est petit, dans la mesure où les activations anciennes sont mieux prises en compte.

À l'inverse, on peut remarquer que plus  $\beta$  est petit, plus il faut que  $T$  soit élevé pour que l'autre terme d'écart  $\beta \sum_{t=0}^{T-1} (1-\beta)^t$  soit proche de 1. Le comportement de ce terme d'écart avec  $T$  permet d'estimer le temps de convergence.

Une valeur opérationnelle de  $\beta$ , permettant une bonne estimation de l'activation moyenne en entrée est  $\beta = 0.1$ . Elle nécessite que  $T \geq 60$  pour que l'écart du au temps de convergence soit inférieur à  $10^{-3}$ .

Lorsque l'on itère la dynamique spontanée du réseau, si à un instant  $t_0$ , on présente un motif statique, le système tend à se réorganiser. La dynamique converge vers son nouvel attracteur, et, au cours de ce temps de relaxation la dynamique est non stationnaire. En particulier, pour chaque neurone, l'activation moyenne  $\tilde{x}_i^*$  est amenée à évoluer vers une nouvelle valeur stationnaire. La différence entre l'activation moyenne qui précède la présentation du motif et celle qui suit la présentation du motif constitue le *différentiel d'activation*  $\delta x_i$ . En pratique, si  $t_0$  est le temps où le motif est présenté, et  $T$  le temps de relaxation<sup>1</sup>, on a :

$$\delta x_i(T) = \tilde{x}_i^*(t_0 + T) - \tilde{x}_i^*(t_0)$$

C'est sur la valeur de ce différentiel que se fonde la nouvelle règle d'apprentissage.

Les différentiels d'activation les plus élevés correspondent aux neurones qui sont le plus fortement influencés par la présentation du motif. Si on n'autorise la modification des poids que pour les neurones sources dont le différentiel d'activation est supérieur à un certain seuil  $s$ , on est sûr de sélectionner les neurones qui

<sup>1</sup>Ce temps, fixé arbitrairement, est supposé grand, de l'ordre de 100 pas de temps.

sont le plus spécifiquement liés au motif présenté. Pour les simulations, on a pris en général  $s = 0.5$ , ce qui permet de sélectionner environ 5% des neurones, pour un motif d'écart-type  $\sigma_I = 0.2$ .

Une fois la sélection opérée, la variation des poids repose sur un produit entre l'activation moyenne du neurone source (moins le seuil) et le différentiel d'activation du neurone cible. Chaque fois que l'on veut itérer la règle d'apprentissage, il faut laisser relaxer la dynamique spontanée, présenter le motif à apprendre, laisser relaxer la dynamique contrainte, et effectuer la modification des poids synaptiques. En prenant des temps de relaxation  $T = 100$ , il faut donc itérer 200 pas de la dynamique rapide par pas d'apprentissage.

Sous forme algorithmique :

Pour tout  $i$ , pour tout  $j \neq i$   
Si  $\delta x_j(T) > 0.5$  alors

$$J_{ij}(t_0 + T) = J_{ij}(t_0) + \frac{\alpha}{N} \delta x_i(T) (\tilde{x}_j^*(t_0 + T) - 0.5) \quad (4.3)$$

Sinon on ne modifie pas les poids.

Avec ce type de règle, le neurone renforce la corrélation entre son différentiel d'activation et la valeur de l'activation moyenne des neurones les plus spécifiquement liés au motif (ces neurones spécifiques sont ceux qui sont sélectionnés par la condition  $\delta x_j(T) > 0.5$ ). Par la suite, chaque fois que le *même* motif sera présenté, l'activation des mêmes neurones spécifiques tendra à provoquer un différentiel d'activation plus important sur *tous* les neurones, donc à translater les potentiels moyens des neurones vers des valeurs plus excentrées en moyenne, et donc à favoriser un affaiblissement de la dynamique.

Avec ce type de règle d'apprentissage, qui prend en compte une mémoire de l'état moyen du réseau, on arrive à diviser par 10 en moyenne les effets de bord de la dynamique d'apprentissage. Autrement dit, en apprenant 10 motifs, on aura en moyenne les mêmes effets de bord que lorsque l'on en apprenait 1 pour la règle précédente. En fin de compte, l'efficacité de ce type de règle repose sur une capacité à sélectionner quelques neurones et quelques liens qui sont les plus spécifiques de la dynamique contrainte, et à translater les potentiels des bons neurones pour éteindre la dynamique.

Un des points qui illustre le plus nettement le fait que l'on atteint nécessairement une capacité limite se fonde sur l'observation des réductions de dynamique obtenues par apprentissage de motifs binaires, tels que 5% des neurones du réseau soient excités par ce motif. Outre les réductions de dynamique spécifiquement associées aux motifs appris, on constate en effet que des motifs qui sont des combinaisons des motifs appris tendent également à réduire la dynamique. Cette réduction est également observée pour des versions bruitées (ajout et retrait au hasard de certaines valeurs binaires) des motifs appris. Plus le nombre de motifs

appris est grand, plus le nombre de combinaisons possibles est élevé et plus il y a de chance qu'un motif quelconque soit proche d'une combinaison de plusieurs motifs appris. Dans ces conditions, on comprend mieux la perte de spécificité liée à l'apprentissage d'un grand nombre de motifs.

En conclusion, les deux règles présentées fondent les changements synaptiques sur les caractéristiques statiques de la dynamique, c'est à dire sur des niveaux moyens d'activation. Ceci a pour conséquence la réduction systématique de l'écart-type et de la complexité de la dynamique au cours de l'apprentissage. On comprend dès lors que l'effet d'un apprentissage poussé trop loin provoque systématiquement un effondrement généralisé de la dynamique. C'est pour cette raison que l'on va maintenant s'intéresser à un autre type de règle, qui ne se fonde que sur les caractéristiques dynamiques de l'activation des neurones, et tend au contraire à *renforcer l'activité dynamique* des réseaux.

## 4.2 Covariance des activations

### 4.2.1 Règle de covariance

Les limites des règles d'apprentissage qui reposent sur les caractéristiques statiques des activations ont été à peu près cernées. En particulier, il est apparu sur la première règle étudiée (4.1), qui est fondée sur un produit entre les activations effectives, que le terme constant  $x_i^*$  intervient de façon décisive dans le changement synaptique. De manière globale, la règle tend à renforcer l'influence des neurones dont l'activation est la plus forte en moyenne, c'est à dire les neurones saturés. Sachant que les neurones saturés produisent un signal d'activation d'amplitude très faible, on augmente l'influence des neurones qui sont les moins représentatifs de la dynamique.

Il paraît dès lors logique de mettre en place une règle qui gomme les aspects statiques du signal d'activation, c'est à dire qui néglige autant que possible sa partie constante. Lorsque l'on souhaite renforcer l'intensité des signaux propagés, la quantité qui nous intéresse est la partie dynamique du signal d'activation  $a_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ .

La mise en œuvre de cette nouvelle règle nécessite d'utiliser l'estimation instantanée de l'activation moyenne  $\tilde{x}_i^*(t)$ . Cette variable conserve à tout instant une mémoire de l'activation moyenne, remise à jour à chaque pas de temps selon le paramètre d'habituation  $\beta = 0.1$  (voir page 158). On accède ainsi à tout instant  $T$  à une estimation de l'activité dynamique

$$\tilde{a}_i(T) = x_i(T) - \tilde{x}_i^*(T)$$

Et (en régime stationnaire) on a :

$$\tilde{a}_i(T) = (x_i(T) - x_i^*) \underbrace{\beta \sum_{t=0}^{T-1} (1-\beta)^t}_{\rightarrow 1(T \rightarrow \infty)} - \beta \sum_{t=0}^{T-1} (1-\beta)^t a_i(T-t)$$

Pour  $T$  grand :

$$\tilde{a}_i(T) \simeq a_i(T) - e_i^*(T)$$

Comme précédemment, une valeur de  $\beta$  proche de zéro améliore l'estimation sur l'activité dynamique. La valeur opérationnelle  $\beta = 0.1$  nécessite un temps de convergence d'environ 60 pas de temps.

Le mécanisme d'adaptation synaptique proposé ici reste fondamentalement un mécanisme Hebbien. Le but de la nouvelle règle d'apprentissage est de modifier les liens synaptiques  $J_{ij}$  selon les caractéristiques de l'activité dynamique  $a_i(t)$  exclusivement. Dans notre système, le principe général de Hebb doit subir quelques adaptations :

- Dans le modèle biologique, l'activation d'un neurone est un événement rare. Dans notre modèle, comme on l'a vu, les événements rares (et donc "chargés de sens") sont les activités dynamiques de grande amplitude.
- Notre modèle est à états continus. La co-occurrence de spikes peut être fonctionnellement remplacée par la covariance, qui prend en compte l'amplitude des signaux afférents et récepteurs. Il est possible d'avoir une covariance négative.
- Contrairement au modèle biologique, où inhibiteurs et excitateurs sont séparés, tout neurone envoie à la fois des connexions inhibitrices et excitatrices. L'équivalent du renforcement d'un lien excitateur doit être l'affaiblissement (en valeur absolue) d'un lien inhibiteur. Inversement, l'équivalent de l'affaiblissement d'un lien excitateur doit être le renforcement (en valeur absolue) d'un lien inhibiteur.
- Le délai biologique  $\tau$  est le délai 1 qui correspond à la mise à jour synchrone des états des neurones.

On traduit le mécanisme de Hebb par la dynamique sur les poids (4.4), fondée sur le produit des activités dynamiques entre l'activité des neurones émetteurs au temps  $t-1$  et l'activité des neurones récepteurs au temps  $t$ . Il est important de bien insister sur le rôle majeur que joue à présent le délai de transmission  $\tau = 1$ . Le renforcement des liens se fonde sur les caractéristiques des signaux antérieurs d'un pas de temps au signal actuel. Les règles analogues présentes dans la littérature [55] *ne prennent pas en compte ce délai temporel*. [59] montre l'importance de la prise en compte du délai de transmission pour des systèmes visant à apprendre des motifs spatio-temporels.

À chaque pas de temps, chaque neurone  $i$  modifie ses poids afférents  $J_{ij}$  selon

la règle :

$$J_{ij}(t+1) = J_{ij}(t) + \frac{\alpha}{N} a_i(t) a_j(t-1) \quad (4.4)$$

La notation  $a_i(t)$  qui apparaît dans la règle d'apprentissage, désigne en fait  $\tilde{a}_i(t)$  dans la mise en œuvre numérique, avec pour valeur opérationnelle  $\beta = 0.1$ .

- Si le produit  $a_i(t)a_j(t-1) > 0$ , la valeur du poids augmente.
  - Si le poids est excitateur, il est renforcé et devient plus excitateur.
  - Si le poids est inhibiteur, il est affaibli et devient moins inhibiteur.
- Si le produit  $a_i(t)a_j(t-1) < 0$ , la valeur du poids diminue.
  - Si le poids est excitateur, il est affaibli et devient moins excitateur.
  - Si le poids est inhibiteur, il est renforcé et devient plus inhibiteur (il propage l'opposé du signal afférent). Ainsi, si  $x_j(t-1)$  est opposé à  $x_i(t)$ ,  $J_{ij}x_j(t-1)$  est de même signe que  $x_i(t)$ , et cette co-activation est renforcée. *Moins par moins égale plus.*

On voit que les liens “excitateur” et “inhibiteur” jouent des rôles symétriques, ce qui n'est pas le cas des neurones biologiques.

Si un des deux neurones est saturé ou silencieux, le produit  $a_i(t)a_j(t-1)$  est proche de zéro, et par conséquent le poids change très peu. L'essentiel des modifications de poids s'effectue sur les liaisons entre neurones actifs.

La règle que nous avons mise en place repose fondamentalement, comme nous allons le voir, sur une estimation de la covariance effective entre les signaux d'activation afférents et efférents. Au prix d'une hypothèse de stationnarité du processus d'apprentissage, on peut montrer que les modifications synaptiques inscrites par la règle sont en effet proportionnelles à cette covariance. Ainsi, si l'apprentissage est effectué entre  $t = t_0$  et  $t = T$ , et si dans ce cas on prend une valeur d' $\alpha$  suffisamment petite pour que l'hypothèse de stationnarité soit correctement approchée, alors :

$$\begin{aligned} J_{ij}(T) - J_{ij}(t_0) &= \frac{\alpha}{N} \sum_{t=t_0+1}^T (x_i(t) - x_i^*)(x_j(t-1) - x_j^*) \\ &\simeq \frac{T\alpha}{N} \text{cov}_{ij}^{[1]} \end{aligned}$$

Dans le cas général, l'influence de la covariance des activations sur le renforcement des poids reste, comme nous le verrons plus loin, tout à fait fondamentale. La règle renforce les liens propageant des signaux corrélés à  $t-1$  au signal du neurone au temps  $t$ , ce qui revient à *renforcer les liens entre les différentes étapes du circuit d'activation*.

Avant l'étude des effets de l'apprentissage sur la dynamique, la section suivante propose un aperçu de la répartition de ces covariances sur nos réseaux.

### 4.2.2 Comportement statistique de la covariance

Une loi de puissance est caractérisée par une densité de la forme :

$$f(x) = Bx^{-b}$$

avec  $b > 1$ . Plus la valeur de  $b$  est élevée, plus la probabilité associée à un événement de grande amplitude est faible. Les lois de puissance caractérisent des répartitions fortement hétérogènes, pour lesquelles un très petit nombre d'observables portent l'essentiel de l'énergie (ou une autre mesure) du système. La valeur de l'exposant indique le degré d'hétérogénéité de la distribution. Plus l'exposant est élevé, moins la distribution est homogène.

D'un point de vue pratique, étant donnée un jeu de mesures  $m = \{m_i\}_{i=1..N}$ , on pourra dire que cet ensemble obéit à une loi de puissance si la répartition empirique manifeste une linéarité en échelle (Log,Log). La pente de cette répartition empirique nous fournit l'exposant  $b$ .

On a représenté sur la figure 4.1 la répartition empirique des valeurs absolues des covariances  $\text{cov}_{ij}^{[1]}$  mesurées sur un même réseau pour un régime pseudo-périodique ( $g = 4.2$ ) et un régime chaotique ( $g = 5$ ). Dans les deux cas, on voit apparaître en échelle (Log,Log) une série de points alignés, puis un phénomène de "cut-off" classique lié à la taille finie de l'échantillon. On trouve dans le premier cas (cycle limite)  $b \simeq 1,37$  et dans le second (chaos)  $b \simeq 1,09$ . La dynamique chaotique manifeste donc une homogénéité plus grande (relativement) sur sa distribution des covariances. Cela indique simplement que les neurones actifs sont plus nombreux proportionnellement dans le second cas.

On voit de façon manifeste qu'un terme de covariance élevé entre deux signaux d'activation décalés d'un pas de temps est un phénomène relativement rare. Une majorité de neurones (neurones saturés et muets) émettent un signal de très faible amplitude. Seuls les covariances entre des neurones dynamiques peuvent atteindre des valeurs plus importantes, à la condition que leurs signaux soient corrélés en  $(t, t - 1)$  (ou anticorrélés).

Cette distribution en loi de puissance se maintient pour tout réseau sur les différents régimes dynamiques. L'exposant  $b$  tend à diminuer au cours de la route vers le chaos, ce qui indique une homogénéisation progressive des activités dynamiques individuelles.

### 4.2.3 Application de la règle sur la dynamique spontanée

Dans un premier temps, les effets de la règle d'apprentissage sont étudiés en l'absence de tout signal extérieur. Le système est beaucoup plus complexe que précédemment puisque les poids du réseau deviennent également des variables d'état (qui évoluent avec le temps).

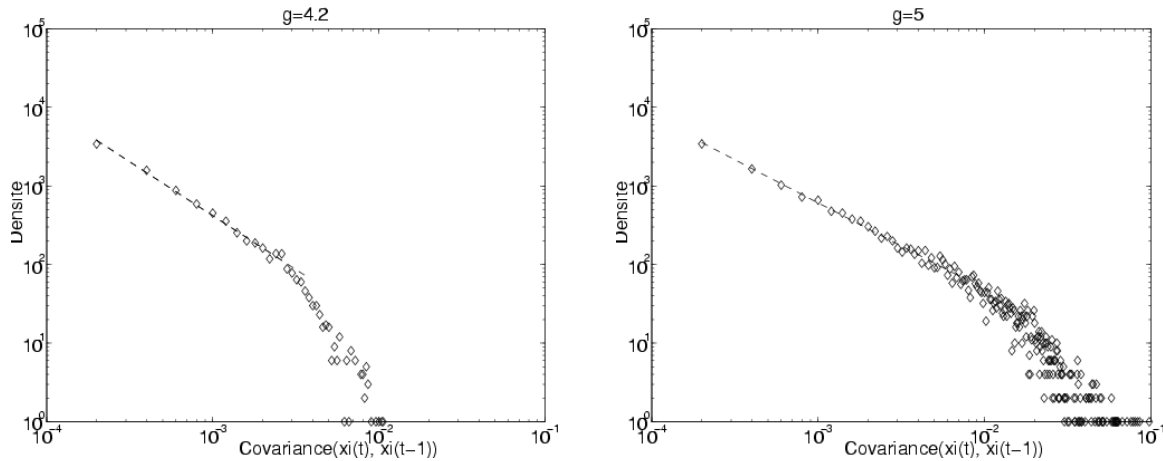


FIG. 4.1 – **Loi de puissance sur la valeur absolue de la covariance des activations.** La mesure est faite sur un réseau de 200 neurones en dynamique stationnaire. On a tracé l'histogramme de la valeur absolue de la covariance  $\text{cov}_{ij}^{[1]}$ . Abscisse et ordonnée sont en échelle logarithmique. Figure de gauche : régime pseudo-périodique ( $g = 4.2$ ). La pente est  $b \simeq 1,37$ . Figure de droite : régime chaotique ( $g = 5$ ). La pente est  $b \simeq 1,09$ . Paramètres :  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

### Observations générales

**Régime pseudo-périodique** Sur un réseau de taille  $N = 200$ , la dynamique spontanée est itérée jusqu'à ce que la dynamique soit estimée suffisamment proche de la stationnarité. Le temps  $t_0$  marque cette entrée en dynamique stationnaire. La valeur de  $g$  a été choisie afin que le système soit en régime pseudo-périodique. De  $t = t_0 + 1$  à  $t = t_0 + T$ , la dynamique d'apprentissage est itérée, avec  $\alpha = 0.1$ . La figure 4.2 présente l'évolution du signal moyen  $m_N(t)$ , avec  $t_0 = 1000$ . L'apprentissage est arrêté arbitrairement après  $T$  pas de temps (deux valeurs de  $T$  sont utilisées :  $T = 1000$  et  $T = 2000$ ). La dynamique spontanée est itérée après apprentissage sur 1000 pas de temps supplémentaires (avec la nouvelle matrice de poids).

Lorsque la dynamique initiale est un cycle limite d'amplitude faible, on constate d'emblée que la dynamique d'apprentissage tend à augmenter l'amplitude du signal moyen. Cet effet sur l'observable global correspond localement à une augmentation de l'amplitude moyenne des signaux individuels. En effet, si le signal d'activation  $x_j(t-1)$  est corrélé au signal d'activation  $x_i(t)$ , l'apprentissage facilite et amplifie la transmission du neurone  $j$  vers le neurone  $i$ . Sachant que les neurones afférents corrélés à  $x_i(t)$  sont également corrélés entre eux, le renforcement des liens en provenance de ce groupe de neurones accentue l'influence de leur signal commun sur le champ local du neurone  $i$ , ce qui a pour effet d'augmenter :

- la corrélation entre le neurone  $i$  et ses afférents



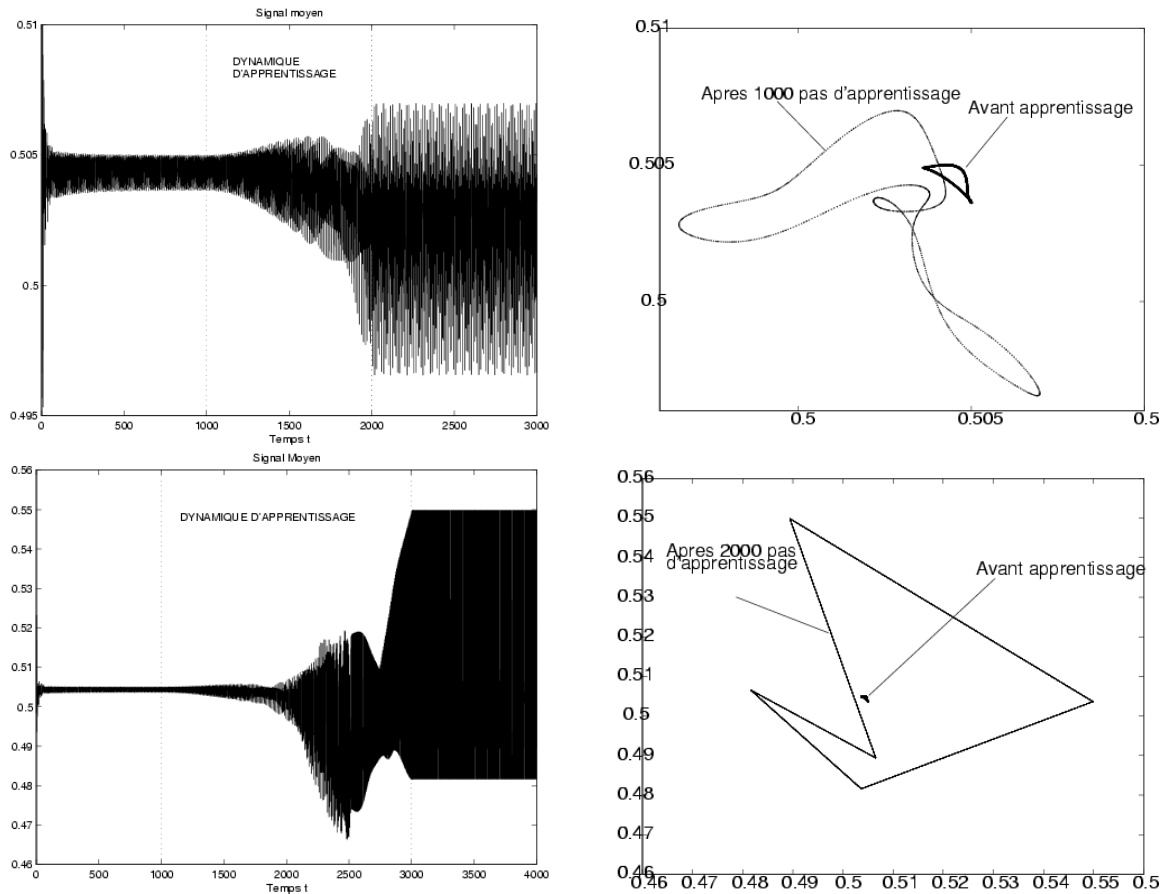


FIG. 4.2 – Évolution du signal  $m_N(t)$  au cours de la dynamique d'apprentissage (dynamique spontanée). Les 1000 premiers pas de temps correspondent à la dynamique de relaxation. Les 1000 (Figure du haut) ou 2000 (Figure du bas) pas de temps suivants correspondent à la dynamique d'apprentissage. Après apprentissage, on itère la dynamique spontanée sur 1000 pas de temps. À droite sont représentés les diagrammes de premier retour, qui superposent l'attracteur avant apprentissage et l'attracteur après apprentissage. Dans le second cas (2000 pas d'apprentissage), l'attracteur est périodique de période 5. On a relié les 5 points successifs par des traits. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $N = 200$ ,  $g = 4.9$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

- l'amplitude du signal de champ local  $c_i(t)$ .

Par ailleurs, on constate que l'évolution du régime dynamique est non-monotone. On observe fréquemment une augmentation de la complexité de la dynamique qui va de pair avec l'augmentation du diamètre du signal  $m_N(t)$ , suivie d'une régularisation de la dynamique qui aboutit à un cycle de forte amplitude. On peut voir cette évolution en deux étapes comme la manifestation de deux tendances concurrentes :

- Par augmentation de l'amplitude des signaux locaux, le régime dynamique tend à se complexifier (c'est l'équivalent de l'augmentation du paramètre de gain  $g$ ).
- En renforçant les corrélations entre classes de neurones successives, on tend à produire un régime régulier de type périodique.

La dynamique cyclique atteinte en fin de compte est strictement périodique (période fondamentale entière). Au cours de l'apprentissage, la valeur irrationnelle de la période dominante dérive légèrement jusqu'à se bloquer sur une valeur rationnelle.

**Régime chaotique** La figure 4.3 présente un exemple de dynamique d'apprentissage, lorsque l'on place le réseau à la frontière du chaos. Après 200 pas de temps de dynamique spontanée, on lance l'apprentissage sur 500 pas de temps, avec  $\alpha = 0.1$ . La pseudo-période initiale, très proche de 6, évolue en cours d'apprentissage. Après apprentissage, la dynamique est strictement périodique, de période  $\tau = 6$ .

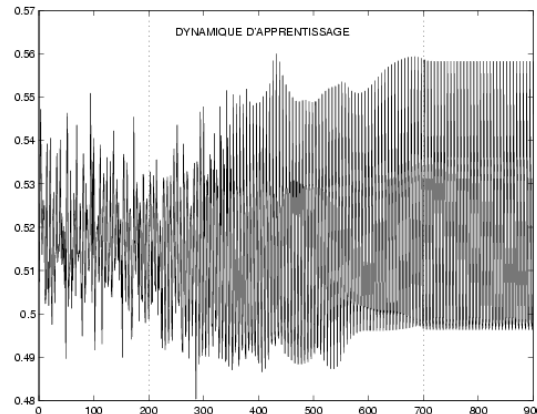


FIG. 4.3 – Évolution du signal  $m_N(t)$  au cours de l'apprentissage. Les 200 premiers pas de temps correspondent à la dynamique de relaxation. Les 500 pas de temps suivants correspondent à la dynamique d'apprentissage. Les 200 derniers pas de temps donnent la dynamique issue de l'apprentissage. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $N = 200$ ,  $g = 6$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

En renforçant le pouvoir excitateur des neurones les plus corrélés au temps

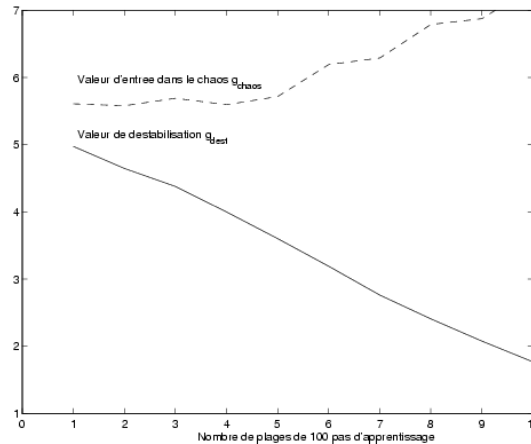


FIG. 4.4 – **Évolution de  $g_{dest}$  et  $g_{chaos}$  au cours de l'apprentissage.** Pour chaque plage de 100 pas d'apprentissage, on mesure les valeurs de déstabilisation et d'entrée dans le chaos sur 10 réseaux tests. Les valeurs présentées sont moyennées sur ces 10 réseaux. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

$t - 1$  et le pouvoir inhibiteur des neurones les plus anticorrélés au temps  $t - 1$ , on tend à ce que l'activité de certains neurones au temps  $t$  dépende plus fortement d'un groupe de neurones dont le signal est fort et significatif au temps  $t - 1$  (qui eux mêmes dépendent de l'activité simultanée d'un certain nombre de neurones au temps  $t - 2$  etc...). Si une période sous-jacente existe dans le système, celle-ci sera renforcée, l'activité du neurone devenant de proche en proche de plus en plus corrélée à sa propre activité au temps  $t - \tau$ . Au contraire, si aucune périodicité n'existe au préalable, les poids seront modifiés selon l'aléa de la dynamique sans induire de modification significative sur le régime pour des durées d'apprentissage de l'ordre de 500 pas de temps.

### Effet sur la valeur de déstabilisation

Contrairement aux deux règles présentées précédemment, la nouvelle règle d'apprentissage tend à produire des régimes cyclique *sans jamais mener à un point fixe*. La règle semble favoriser les régimes cycliques au détriment des régimes de point fixe. Après apprentissage, on s'attend donc à un élargissement de la plage de déstabilisation, favorisant ainsi l'apparition de régimes périodiques et pseudo-périodiques.

La figure 4.4 présente l'évolution des valeurs de déstabilisation et d'entrée dans le chaos au cours de l'apprentissage, en moyenne sur 10 réseaux.

Il apparaît très clairement que la règle d'apprentissage tend à baisser fortement la valeur de déstabilisation. Cette valeur baisse presque linéairement en fonction de la durée de l'apprentissage. La valeur d'entrée dans le chaos reste

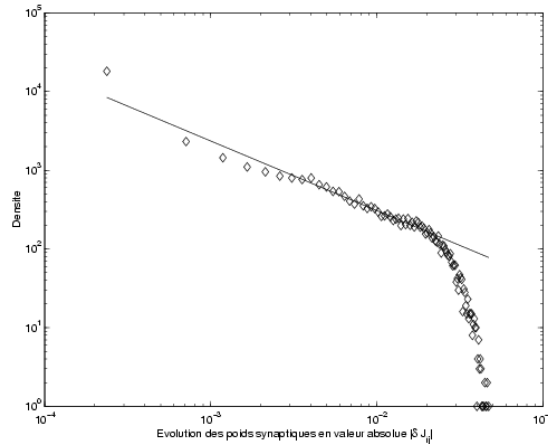


FIG. 4.5 – **Répartition des valeurs de  $\delta J$ .** La matrice  $\delta J$  est issue d'un apprentissage sur 500 pas de temps, avec  $\alpha = 0.1$ . Chaque  $|\delta J_{ij}|$  est reporté dans l'histogramme, pour des plages de répartitions de largeur  $5 \cdot 10^{-4}$ . On trouve une pente  $b \simeq 0.88$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 6$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

stationnaire pour des durées d'apprentissage inférieures à 500 pas, puis se met à augmenter pour des durées d'apprentissage supérieures. L'apprentissage augmente de façon très marquée la largeur de la plage de déstabilisation puisqu'après 1000 pas d'apprentissage, celle-ci prend place en moyenne sur un intervalle de  $g$  de l'ordre de 5.

### Effet sur la matrice des poids

Après apprentissage, on observe une augmentation faible, mais sensible et systématique, de la variance empirique de la distribution des poids. Si  $t_0$  marque le début de l'apprentissage et  $T$  est la durée de l'apprentissage, on définit la matrice d'évolution des poids synaptiques par  $\delta J = J(t_0 + T) - J(t_0)$ . L'observation de la matrice  $\delta J$  montre que la répartition des valeurs n'est pas du tout uniforme. Sachant que la modification des poids est proportionnelle à  $\text{cov}_{ij}^{[1]}$ , dont la distribution suit une loi de puissance avant apprentissage, la répartition des  $\delta J_{ij}$  correspond logiquement à une loi de puissance (voir figure 4.5). On voit que la modification de variance observée de manière globale, correspond localement à des augmentations fortes et ciblées sur certains liens synaptiques spécifiques et rares.

Par ailleurs, les liens renforcés correspondent au circuit d'activation spécifique de la dynamique spontanée du réseau. Dans le cas où  $\tau$  est proche de 2, par exemple, la matrice  $\delta J$  est à peu près symétrique (renforcement des signaux en opposition de phase). Dans le cas où la période  $\tau$  est proche de 4, la matrice  $\delta J$  est à peu près antisymétrique (renforcement des signaux en quadrature). Globalement, une forte valeur de  $\delta J_{ij}$  indique un décalage de phase de 1 entre le

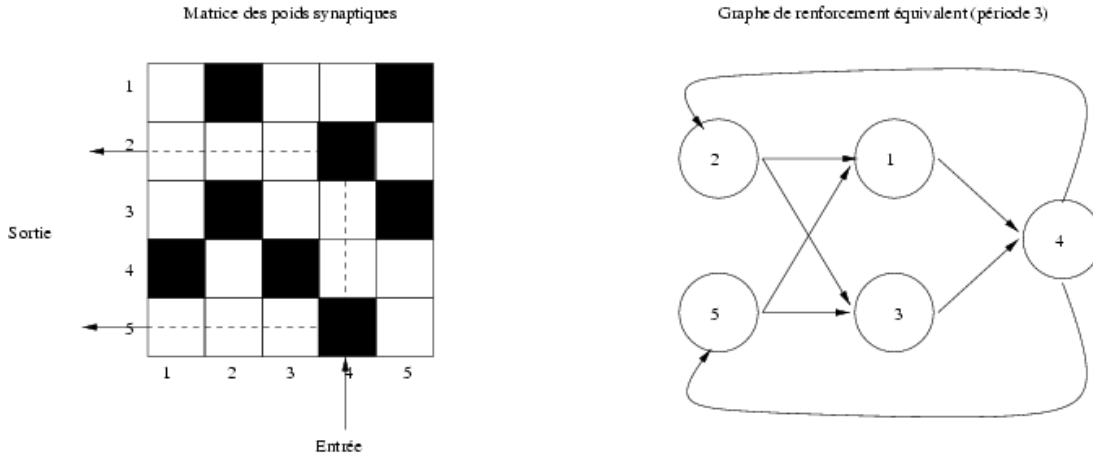


FIG. 4.6 – Exemple de configuration de la matrice  $\delta J$ , dans le cas d’une dynamique de période 3. Les liens renforcés permettent de déduire la nature du circuit d’activation.

signal de  $i$  et celui de  $j$ . La règle a plus généralement tendance à renforcer la connectivité positive entre les relais du circuit interne dont le décalage de phase vaut 1 (et la connectivité négative entre les relais dont le décalage de phase vaut environ  $1 + \frac{\tau}{2}$ ).

L’étude de la matrice  $\delta J$  permet d’observer la mise en place de circuits d’activation qui relient entre eux des groupes de neurones corrélés avec un décalage d’un pas de temps. Chaque colonne (d’indice  $j$ ) de la matrice contient des valeurs significativement plus élevées que la moyenne qui désignent les neurones cibles  $i$  que le neurone source  $j$  active préférentiellement. On peut ainsi définir un graphe où apparaît le chemin complet, dont la longueur doit correspondre à la période fondamentale. Le schéma de la figure 4.6 illustre ce principe de renforcement, pour 5 neurones et une période  $\tau = 3$ .

### Effet sur l’amplitude des signaux individuels

Les notions d’énergie introduites page 131, peuvent également être utilisées dans le cadre de l’apprentissage pour mesurer l’évolution de l’amplitude des signaux individuels. À partir du terme de transfert d’énergie  $E_{ij} = -J_{ij}\text{cov}_{ij}^{[1]}$ , il est possible en effet d’estimer un terme d’énergie local à chaque neurone caractéristique de l’amplitude du signal produit localement.

$$\begin{aligned}
 E_i &= \sum_{j=1}^N E_{ij} \\
 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^T (x_i(t) - x_i^*) \sum_{j=1}^N J_{ij} (x_j(t-1) - x_j^*) \\
 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^T (x_i(t) - x_i^*) \left[ \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j(t-1) - \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j^* \right] \\
 &\quad (\text{si on accepte l'approximation } \sum_{j=1}^N J_{ij} x_j^* \simeq u_i^*) \\
 &\simeq -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^T (x_i(t) - x_i^*) (u_i(t) - u_i^*)
 \end{aligned}$$

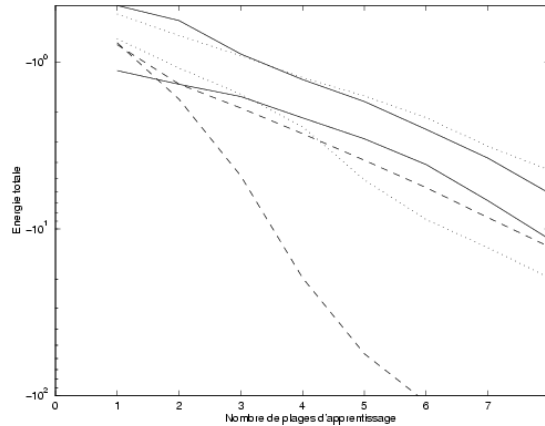


FIG. 4.7 – **Évolution du terme d'énergie global au cours de l'apprentissage.** Les six lignes correspondent à des apprentissages effectués sur 6 réseaux différents. Pour chaque plage de 100 pas d'apprentissage, on mesure la valeur du terme d'énergie global. L'abscisse est en coordonnée logarithmique, indiquant la décroissance exponentielle du terme d'énergie global. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

On a donc  $E_i \simeq -\text{cov}(x_i(t), u_i(t))$ . Les signaux  $x_i(t)$  et  $u_i(t)$  étant fortement corrélés, le terme d'énergie locale donne tout simplement une indication sur l'amplitude du signal produit, en tenant à la fois compte de la variance du signal de potentiel, qui est assez homogène d'un neurone à l'autre, et de celle du signal d'activation, qui est importante si le neurone est actif et très faible si le neurone est inactif. En conséquence, les neurones inactifs, muets ou saturés, ont un terme d'énergie local très faible. Les neurones actifs sont ceux qui concentrent l'essentiel des valeurs de l'énergie.

Le terme global d'énergie  $E = \sum_i E_i$  donne quant à lui une indication sur l'amplitude moyenne de chaque signal individuel.

La modification des liens synaptiques se fonde comme on l'a vu sur la covariance entre neurone afférent et neurone récepteur. Tous les neurones actifs dans le réseau subissent une augmentation de l'amplitude de leur signal d'activation, qui se traduit également par une augmentation de la valeur de la covariance entre le neurone et ses prédécesseurs. La Figure 4.7 montre l'évolution du terme d'énergie globale en cours d'apprentissage. Celui-ci tend à augmenter en valeur absolue, au cours de l'apprentissage, à vitesse exponentielle en fonction du nombre de pas d'apprentissage. L'apprentissage semble ainsi produire une réaction en chaîne qui conduit à une augmentation exponentielle de l'amplitude des signaux d'activation individuels.

Pour l'exemple présenté figure 4.3, la valeur de l'énergie totale passe de -4 à -46.5, soit globalement multipliée par 10. Chaque terme de transfert d'énergie  $E_{ij} = -J_{ij} \text{cov}_{ij}^{[1]}$  dépend linéairement de la covariance et voit son amplitude

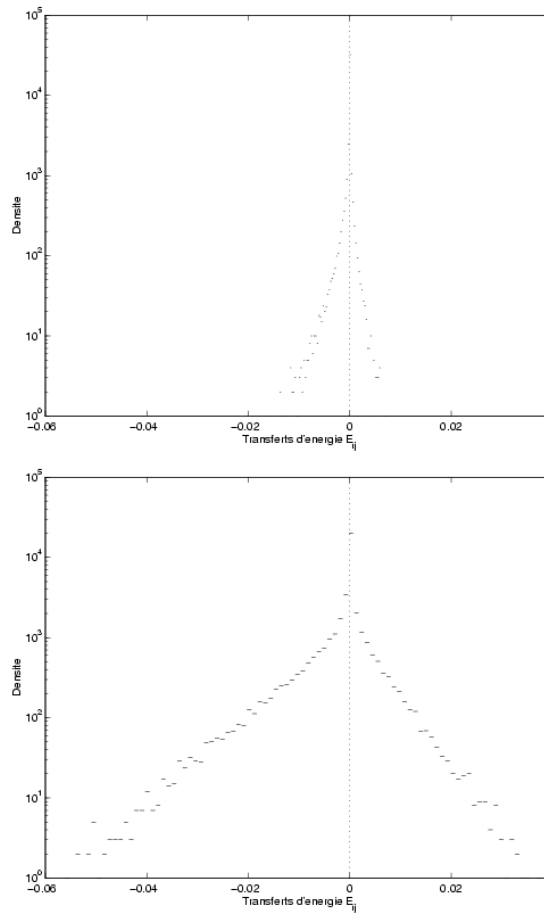


FIG. 4.8 – Répartition des transferts d'énergie  $E_{ij} = -J_{ij} \text{cov}_{ij}^{[1]}$ . Figure du haut : avant apprentissage. Figure du bas : après 500 pas d'apprentissage. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $N = 200$ ,  $g = 6$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

augmenter dans les mêmes proportions au cours de l'apprentissage. Ainsi, la répartition des  $E_{ij}$  subit une dilatation du même ordre, comme on peut le voir sur la figure 4.8. L'asymétrie de la distribution se maintient, et la proportion de liens frustrés reste à peu près la même.

On a vu dans les parties précédentes qu'il subsistait à la frontière du chaos une périodicité résiduelle. L'effet de l'apprentissage est de renforcer cette périodicité, et de mener progressivement d'une dynamique chaotique à une dynamique cyclique. La présence d'une périodicité résiduelle est une condition nécessaire pour que l'apprentissage fondé sur la dynamique spontanée ait un effet sensible sur le régime. Plus on est loin de la frontière du chaos, plus il faut itérer longtemps l'apprentissage pour produire un régime cyclique.

L'étude de la dynamique d'apprentissage sans stimulation extérieure permet de montrer le mode d'action de la règle, à savoir :

- Renforcement des périodicités internes quand elles existent, et régularisation de la dynamique.
- Baisse importante de la valeur de déstabilisation. La transition du point fixe au chaos intervient sur des plages de valeurs de  $g$  beaucoup plus larges.
- Modifications ciblées sur la matrice des poids, faibles en moyenne, permettant néanmoins une forte évolution du comportement dynamique.
- Augmentation importante de l'amplitude des signaux individuels. Cette croissance de l'amplitude est exponentielle avec le nombre de pas d'apprentissage.

### 4.3 Apprentissage en dynamique contrainte

Dans un premier temps, notre étude de l'apprentissage se place dans le cadre du paradigme de Freeman [32], voir page 27. Rappelons que Freeman associe sur le bulbe olfactif la reconnaissance d'un percept à une réduction sur une dynamique cyclique spécifique, la dynamique courante étant chaotique.

On considère un réseau dont la dynamique spontanée est chaotique, et un ensemble de motifs  $I_1(t), \dots, I_M(t)$  différents ( $M$  est le nombre de motifs). Les motifs sont maintenus en entrée du réseau (voir page 104). La reconnaissance n'est donc pas fondée sur une dynamique de relaxation comme dans le modèle de Hopfield. On cherche alors à associer à chaque motif une configuration dynamique différente et spécifique.

- Sous la contrainte d'un motif statique, l'apprentissage vise à renforcer le circuit d'activation associé à ce motif. L'amplitude de l'activité dynamique est renforcée suite à la présentation du motif appris.
- Sous la contrainte d'un motif dynamique de période  $\tau$ , l'apprentissage a pour but d'inscrire dans les poids synaptiques la période (ou la séquence) imposée.
- En superposant motif statique et motif dynamique, on cherche à associer au motif statique la période du motif dynamique, afin que celle-ci soit reproductible sur présentation du motif statique seul.

Plus généralement, les motifs peuvent être vus comme des *perceptions*, et le mode dynamique choisi par le réseau comme la mise en œuvre d'une *action* (sans que celle-ci n'ait, sur ce modèle, de transposition effective vers le monde extérieur). Reste la question de la capacité, à savoir : combien d'associations perception/action peuvent être apprises par un réseau avec le moins de pertes possibles sur la spécificité de la réponse ?

#### 4.3.1 Motifs statiques

Dans les chapitres précédents (voir page 114), on a vu que la présentation d'un motif statique gaussien peut induire une modification sensible de la confi-



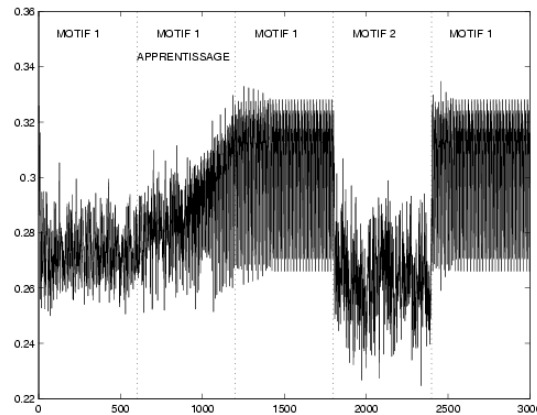


FIG. 4.9 – **Apprentissage en dynamique contrainte.** À l'initialisation, la dynamique est contrainte par le motif  $I_1$ . Les 600 premiers pas de temps donnent la dynamique spontanée (chaotique). La règle d'apprentissage est itérée de  $t = 600$  à  $t = 1200$ . L'apprentissage conduit à un régime périodique. La présentation d'un second motif  $I_2$  non appris produit un nouveau régime chaotique. Une nouvelle présentation du motif initial produit un retour à la dynamique cyclique obtenue en fin d'apprentissage. Paramètres :  $N = 200$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{I} = -0.4$ ,  $\sigma_I = 0.3$ ,  $\theta = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

guration spatiale des activations, et provoquer une complète réorganisation du circuit d'activation. On sait que pour des motifs statiques de grande amplitude définis selon les paramètres  $\bar{I} = -0.4$ ,  $\sigma_I = 0.3$ , la présentation de chaque motif produit une structure spatio-temporelle différente et spécifique.

Pour ce type de motifs statiques, la fonction de l'apprentissage est simplement de renforcer l'organisation interne associée au motif. Pour chaque motif à apprendre, l'apprentissage est itéré sur quelques centaines de pas de temps. Si la dynamique initiale est proche de la frontière du chaos, il est fréquent de passer du chaos à une dynamique périodique. Dans tous les cas (même si on reste en régime chaotique), les effets de l'apprentissage se font sentir sur la valeur de déstabilisation du système (qui baisse) et la covariance  $\text{cov}_{ij}^{[1]}$  qui augmente en valeur absolue.

### Apprentissage d'un motif unique

La figure 4.9 montre l'évolution du signal moyen en cours d'apprentissage, pour une dynamique contrainte par un motif statique  $I_1$ . Le système passe progressivement d'une dynamique chaotique à une dynamique périodique.

Pour le cas présenté, les effets de l'apprentissage sont circonscrits à la dynamique issue de la matrice des poids initiale et du motif  $I_1$ . En modifiant le motif d'entrée, on retrouve un comportement chaotique générique. Il suffit néanmoins

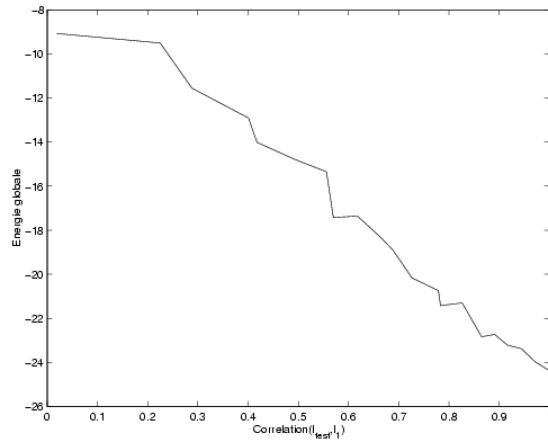


FIG. 4.10 – **Comportement moyen du terme d'énergie globale selon la proximité avec le motif appris.** La matrice des poids est issue d'un apprentissage sur 1200 pas de temps avec un motif de référence  $I_1$ . La valeur du terme d'énergie à l'issue de l'apprentissage vaut  $-24,4$ . L'abscisse donne la corrélation des motifs de test avec le motif  $I_1$ . Pour chaque valeur de la corrélation, on tire 20 motifs mixtes (combinaison entre  $I_1$  et un motif aléatoire). Le terme d'énergie est moyenné sur les valeurs associées à ces 20 motifs. Paramètres :  $N = 200$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{I} = -0.4$ ,  $\sigma_I = 0.3$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

de présenter à nouveau le motif  $I_1$  pour reproduire à l'identique la dynamique atteinte en fin d'apprentissage. Le réseau a donc appris à associer un régime périodique spécifique à la stimulation  $I_1$ .

Plus généralement, la valeur de l'énergie globale  $E$  attachée à la dynamique contrainte par le motif appris est nettement supérieure (en valeur absolue) à l'énergie globale attachée à un motif quelconque (voir figure 4.10). Rappelons que l'augmentation en valeur absolue de  $E = \sum_i E_i = -\sum_{i,j} J_{ij} \text{cov}_{ij}^{[1]}$  correspond à une augmentation de l'amplitude des signaux d'activation, donc de l'activité dynamique. Tout motif ayant une corrélation positive avec  $I_1$  tend à développer une activité dynamique plus importante que celle développée par un motif non corrélé. Les valeurs des termes d'énergie sont mesurées pour des motifs  $I_{test}$  combinant les valeurs de  $I_1$  et celles d'un autre motif tiré indépendamment  $I_2$ , comme  $I_{test} = \bar{I} + \sqrt{1-\beta}(I_1 - \bar{I}) + \sqrt{\beta}(I_2 - \bar{I})$ , avec  $\beta \in [0, 1]$ , tel que  $E(I_{test}) = \bar{E}$  et  $\text{var}(I_{test}) = \sigma_I^2$ . La valeur  $1 - \beta$  donne l'espérance de la corrélation entre le motif  $I_1$  et le motif  $I_{test}$ . On constate sur cette figure que l'intensité de l'activité dynamique est proportionnelle à la corrélation avec le motif appris. On a  $E_{test} \simeq (1 - \beta)E_1 + \beta E_2$ , où  $E_1$  est l'énergie attachée au motif appris,  $E_2$  l'énergie attachée en moyenne à un motif décorrélié  $I_2$ .

Il apparaît donc que l'activité dynamique associée au motif  $I_1$  tend à dominer en amplitude celle associée à tout autre motif. Le comportement initial du sys-

tème, qui tendait à produire une activité du même ordre de grandeur pour tout motif, est révolu. La configuration associée à  $I_1$  peut être qualifiée de persistante, dans la mesure où cette configuration se maintient pour une famille de motifs présentant des caractéristiques communes avec  $I_1$ .

On appelle rayon d'action du motif  $I_1$  la quantité  $\beta_r = \frac{E_1}{E_1 + E_2}$ . Pour des motifs définis selon une valeur de  $\beta < \beta_r$ , le terme  $E_1$  domine le terme  $E_2$  sur la valeur de  $E_{test}$ , soit  $(1 - \beta)E_1 > \beta E_2$ . En ce sens, un apprentissage effectué sur des dynamiques de faible amplitude (cycles limites proches de la destabilisation), dont le terme d'énergie initial  $E_2$  est faible, tendra à assurer au motif  $I_1$  un rayon d'action élevé, et donc à faire baisser la spécificité de l'apprentissage. Il est ainsi préférable de pratiquer l'apprentissage sur des dynamiques nettement chaotiques, dont le terme d'énergie initial est élevé, afin de limiter le rayon d'action de l'apprentissage.

### Apprentissage de plusieurs motifs

On se donne un jeu de motifs à apprendre  $\{I_1, \dots, I_m\}_{m=1..M}$ . L'apprentissage de ces motifs est effectué de façon croisée : une présentation consiste à présenter au réseau chaque motif de la série et à effectuer pour chacun un apprentissage sur une durée de 100 pas de temps. Plusieurs présentations de la série complète sont ainsi effectuées. La durée totale d'apprentissage est la même pour tous les motifs, égale à 100 fois le nombre de présentations.

On cherche à estimer les conséquences de cet apprentissage sur le comportement spontané du réseau face à des motifs non spécifiques. Pour les résultats décrits ci-dessous, on a pris  $\alpha = 0.01$ , et chaque motif a été présenté 20 fois en tout. Pour chaque motif, l'apprentissage est effectué à la frontière du chaos. Le tableau ci-dessous donne les valeurs moyennes (sur les  $M = 10$  motifs) de  $g_{dest}$ ,  $g_{chaos}$  et  $E$  avant apprentissage et à l'issue de cet apprentissage, à la fois pour les motifs appris et des motifs quelconques.

	$g_{dest}$	$g_{chaos}$	$E$
Avant apprentissage	4.9	5.4	- 0.8
Après apprentissage, motifs appris	2.1	4.6	- 3.7
Après apprentissage, autres motifs	3.1	5.1	- 1.1

Il apparaît immédiatement que les changements spécifiques induits par l'apprentissage des 10 motifs ont des répercussions variées sur les dynamiques associées aux autres motifs.

Pour les motifs  $I_k$  non-appris :

- La valeur de destabilisation  $g_{dest}$  est fortement modifiée de près de deux points. C'est là la principale différence par rapport à la dynamique avant apprentissage. Tout motif tend à produire un régime cyclique pour des valeurs de  $g$  plus faibles.

- La valeur d’entrée dans le chaos baisse légèrement, mais de façon beaucoup moins significative.
- L’énergie  $E_k$  passe de -0.8 à -1.1, ce qui est également peu significatif

On voit donc que l’apprentissage de plusieurs motifs modifie essentiellement le comportement de déstabilisation du réseau, et produit *pour tout motif* une plage de déstabilisation beaucoup plus large. Par contre, le renforcement de l’activité dynamique (terme  $E$ ) reste spécifique aux motifs appris.

Le comportement dynamique du réseau subit un remodelage qui tend à favoriser de façon générale le développement de régimes cycliques et périodiques (régularisation dynamique diffuse), et à produire une activité dynamique de plus grande amplitude pour les motifs qui ont été spécifiquement appris (excitabilité spécifique).

### 4.3.2 Motifs dynamiques : apprentissage en ligne d’une séquence

Le terme “apprentissage en ligne” signifie que l’on n’a pas de connaissance a priori sur la ou les séquences à apprendre. Cette précision est importante dans la mesure où il existe dans la littérature de nombreux travaux traitant du stockage explicite de séquences dans des réseaux récurrents (voir page 35).

*Dans notre cas, il existe donc au préalable une matrice des poids aléatoire  $J$ , et l’apprentissage ne vise pas à reproduire explicitement les caractéristiques spatiales de la séquence à apprendre.*

La figure 4.11 présente un apprentissage effectué sur un réseau stimulé par une séquence de période 3. La période initiale en dynamique spontanée vaut  $\tau \simeq 4,4$ . Les motifs sont définis avec  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ . La séquence  $I(t)$  de période  $\tau_I = 3$  est présentée en boucle, et l’apprentissage est effectué sur la dynamique contrainte. Après 300 pas d’apprentissage, avec  $\alpha = 0.1$ , la dynamique contrainte est devenue strictement périodique de période 3. Lorsque l’on retire le motif temporel, la dynamique spontanée *reproduit les caractéristiques de la dynamique contrainte*. Il s’agit là d’une persistance forte de la dynamique associée au signal appris, qui se maintient sur la dynamique spontanée. La période en dynamique spontanée est strictement égale à 3, et la corrélation moyenne entre les signaux d’activation contraints et spontanés  $\text{cor}(x^{(\text{spon})}(t), x^{(\text{contr})}(t)) = 0,79$ . (Après un test sur la phase, la corrélation est calculée entre chaque signal  $x_i(t)$  et le signal d’activation de référence de même indice, et la moyenne est faite sur toutes ces corrélations).

Ainsi, l’apprentissage inscrit dans les poids synaptiques les caractéristiques spatiales et temporelles de la dynamique contrainte. L’apprentissage permet de coder le signal perçu en imitant les configurations spatiale et dynamique produites par ce signal. L’information contenue dans le signal s’inscrit explicitement dans la dynamique.

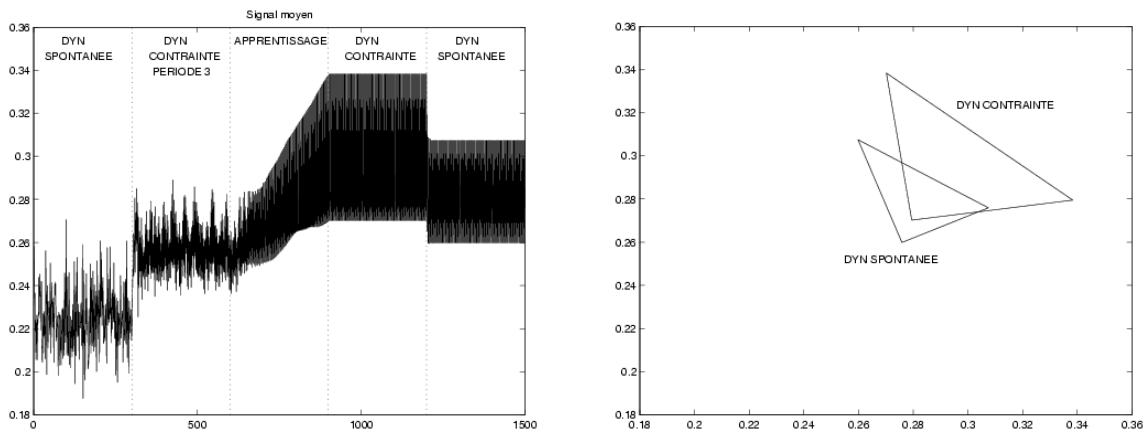


FIG. 4.11 – **Apprentissage d’une séquence de période 3.** Evolution du signal moyen  $m_N(t)$ . Les 300 premiers pas de temps donnent la dynamique spontanée (chaotique). Les 300 pas de temps suivants donnent la dynamique contrainte par le motif temporel (regime chaotique). La règle d’apprentissage est itérée de  $t = 600$  à  $t = 900$ . L’apprentissage conduit à un régime périodique. Après apprentissage, la dynamique spontanée (sans stimulation) est également périodique de période 3. La figure de droite présente les 2 attracteurs périodiques de la dynamique contrainte et de la dynamique spontanée après apprentissage. Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 6$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\tau_I = 3$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0.4$ ,  $\sigma_\theta = 0.3$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

La contrepartie immédiate est que cet apprentissage ne peut être effectué qu’une seule fois, pour une seule séquence. Il possède un caractère définitif. Il est donc intéressant de voir comment associer motif statique et motif dynamique au sein d’un même réseau, afin d’inscrire plusieurs séquences qui puissent être déclenchées par le motif statique associé.

On a vu que l’apprentissage permet :

- d’associer à plusieurs motifs statiques appris une activité dynamique de grande amplitude et plus régulière que la dynamique initiale.
- d’inscrire dans la dynamique spontanée du réseau les caractéristiques de la dynamique contrainte par un motif temporel.

L’étape suivante consiste à associer à chaque de motif statique appris une activité dynamique (ou une période) imposée par un motif dynamique. L’apprentissage s’effectue donc sous la contrainte de deux motifs, l’un statique et l’autre dynamique, présentés simultanément pendant la période d’apprentissage.

### 4.3.3 Motifs conditionnants

On cherche ici à fusionner information spatiale et information temporelle. Le motif statique peut être vu comme un *motif conditionnant (drive)*. Dans la suite, ce motif est pris suffisamment “fort” pour imposer la configuration spatiale du

réseau. Le motif dynamique vient se greffer sur cette configuration spatiale et impose la période de la dynamique. L'apprentissage sert ensuite à inscrire dans la dynamique les caractéristiques de la séquence. La présentation du motif conditionnant seul après apprentissage doit permettre de reproduire les caractéristiques spatiales et temporelles de la dynamique obtenue en fin d'apprentissage.

Le système contraint peut être réécrit comme :

$$\begin{cases} u_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij}x_j(t-1) - \theta_i + D_{i,m} + I_{i,m}(t) \\ x_i(t) = f_g(u_i(t)) \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $D_m$  est le motif conditionnant  $m$ , gaussien, de moyenne  $\bar{D}$  et d'écart-type  $\sigma_D$ , et  $I_m(t)$  le motif dynamique associé au motif conditionnant  $m$ , de moyenne  $\bar{I}$ , d'écart-type  $\sigma_I$  et de période  $\tau_m$ .

Les résultats de simulations ci-dessous présentent un apprentissage effectué avec 5 motifs conditionnants  $\{D_m\}_{m=1..5}$  et cinq motifs dynamiques  $\{I_m(t)\}_{m=1..5}$  de périodes respectives  $\tau_1 = 2$ ,  $\tau_2 = 3$ ,  $\tau_3 = 4$ ,  $\tau_4 = 5$  et  $\tau_5 = 6$  sur un réseau de taille  $N = 200$ , avec  $g = 8$ . Les motifs conditionnants et des motifs dynamiques associés sont toujours présentés simultanément. L'apprentissage est croisé, et le paramètre d'apprentissage est  $\alpha = 0.1$ . Chaque séquence est présentée 60 fois, soit en tout 1200 pas d'apprentissage. On présente figure 4.12 le comportement dynamique du réseau après apprentissage, lorsque l'on présente une association  $(D_m, I_m(t))$ , lorsque l'on présente  $D_m$  seul, et lorsque l'on présente des motifs statiques conditionnants quelconques (motifs tests).

À l'issue de l'apprentissage, la dynamique contrainte par les couples  $(D_m, I_m(t))$ , initialement chaotique, présente une périodicité stricte. La dynamique contrainte par les motifs conditionnants seuls reste chaotique, avec une périodicité marquée indiquant la proximité de la frontière du chaos. Les valeurs moyennes de cette dynamique se rapprochent des valeurs moyennes de la dynamique atteinte à la fin de l'apprentissage. La dynamique contrainte par des motifs tests reste, sur l'exemple présenté, fortement chaotique.

Le tableau 4.1 donne les valeurs de la période mesurée sur le signal moyen, pour différentes stimulations. La valeur de la période est fondée sur la mesure de la fréquence dominante apparaissant dans le spectre de Fourier. Avant apprentissage, les périodes trouvées en dynamique contrainte par les motifs conditionnants  $D_m$  seuls sont décorréliées des périodes des motifs dynamiques  $I_m(t)$  associés. Après apprentissage, la dynamique contrainte par les motifs conditionnants seuls reproduit la périodicité issue de la capture du signal  $I_m(t)$  par le réseau. Des motifs quelconques définis selon les mêmes paramètres que les motifs conditionnants amènent une dynamique souvent chaotique dont la période est difficile à discerner. On a donc réussi à associer les motifs conditionnants à des régimes périodiques spécifiques.

Les termes d'énergie globale  $E$  (voir tableau 4.2) permettent de mesurer l'évolution de l'activité dynamique associée aux différentes stimulations. Avant apprentissage, les systèmes stimulés périodiquement ont une activité dynamique

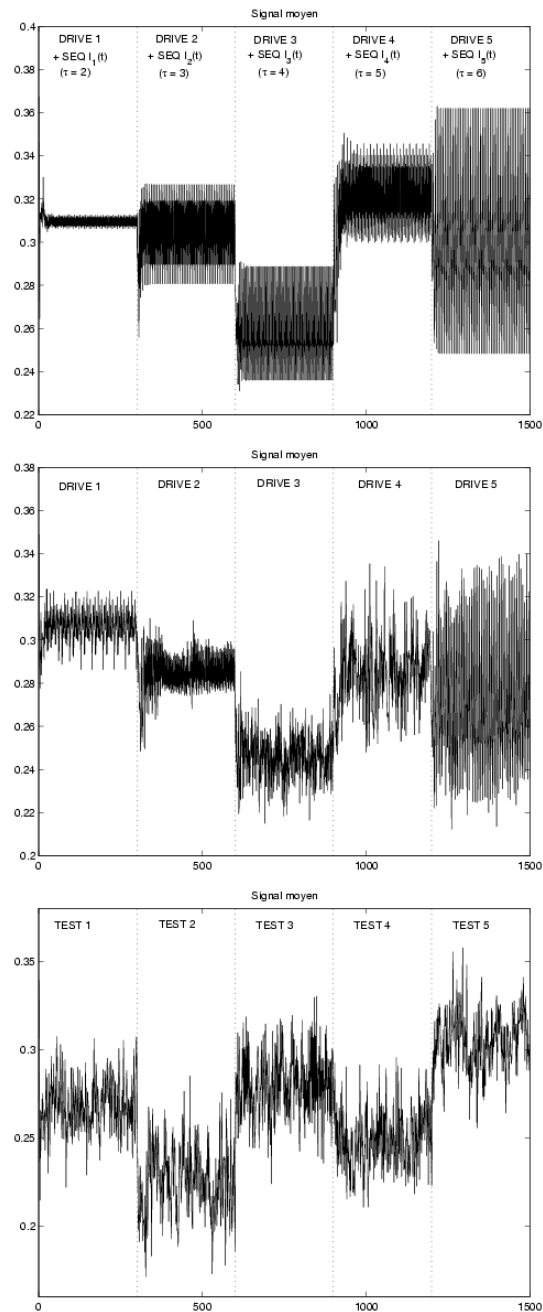


FIG. 4.12 – Signal d’activation moyen, après apprentissage, pour différentes stimulations. La figure du haut donne le signal moyen lorsque l’on stimule le réseau avec des couples  $(D_m, I_m(t))$ . La figure du milieu donne le signal moyen lorsque l’on stimule le réseau avec les motifs conditionnants  $D_m$  seuls. La figure du bas donne le signal moyen lorsque l’on stimule le réseau avec des motifs tests. Les motifs tests sont tirés selon  $\bar{D}$ ,  $\sigma_D$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{D} = -0.4$ ,  $\sigma_D = 0.3$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

	$m = 1$ ( $\tau_m = 2$ )	$m = 2$ ( $\tau_m = 3$ )	$m = 3$ ( $\tau_m = 4$ )	$m = 4$ ( $\tau_m = 5$ )	$m = 5$ ( $\tau_m = 6$ )
$(D_m, I_m(t))$ avant apprentissage	2	3	2	5	6
$D_m$ avant apprentissage	5.5	7.7	(8)	(40)	5
$(D_m, I_m(t))$ apres apprentissage	2	3	2	2.5	6
$D_m$ apres apprentissage	2	3	2	2.5	6
motifs tests apres apprentissage	(6.2)	6.9	3	(3)	(7.2)

TAB. 4.1 – Période dominante mesurée sur le signal moyen, avant et après apprentissage, pour différentes stimulations. Les valeurs entre parenthèses indiquent que le signal est très chaotiques et que la valeur n’est pas fiable. Les motifs tests sont tirés selon  $\bar{D}$ ,  $\sigma_D$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{D} = -0.4$ ,  $\sigma_D = 0.3$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	<b>moyenne</b>
$(D_m, I_m(t))$ avant apprentissage	-5.6	-9.1	-9	-6.5	-6.9	<b>-7.4</b>
$D_m$ avant apprentissage	-1.5	-6.6	-6.6	-4.5	-2.9	<b>-4.2</b>
$(D_m, I_m(t))$ apres apprentissage	-23.9	-29.1	-30.6	-16	-29.2	<b>-25.7</b>
$D_m$ apres apprentissage	-18.9	-20.1	26.7	-9.9	-20.7	<b>-19.3</b>
motifs tests apres apprentissage	-8.8	-11.2	-12.3	-10.4	-10.2	<b>-10.6</b>

TAB. 4.2 – Terme d’énergie globale  $E$ , avant et après apprentissage, pour différentes stimulations. Les motifs tests sont tirés selon  $\bar{D}$ ,  $\sigma_D$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{D} = -0.4$ ,  $\sigma_D = 0.3$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

d’amplitude deux fois plus importante, en moyenne, que celle des systèmes non stimulés périodiquement. À l’issue de l’apprentissage, le terme d’énergie associé aux couples  $(D_m, I_m(t))$  augmente comme prévu. Le terme d’énergie associé aux motifs conditionnants  $D_m$  est en moyenne le double de celui associé à des motifs test. On constate néanmoins une forte augmentation de ce terme, même pour les dynamiques non-spécifiques. L’apprentissage provoque ici une augmentation globale de l’activité dynamique (qui est un peu plus que doublée pour les motifs non-spécifiques).

Enfin, pour calculer les données du tableau 4.3, on prend pour référence les 5 dynamiques associées aux couples  $(D_m, I_m(t))_{m=1..5}$  après apprentissage. On cherche à voir dans quelle mesure les dynamiques associées aux motifs conditionnants  $D_m$  imitent les dynamiques de référence. Après un test sur la phase, on calcule la corrélation entre chaque signal  $x_i(t)$  et le signal d’activation de référence de même indice, et on fait la moyenne sur toutes ces corrélations. Il apparaît alors que pour  $m$  fixé, seule la dynamique associée au motif  $D_m$  présente une corrélation significativement élevée avec la dynamique de  $(D_m, I_m(t))$ . Les valeurs de corrélation obtenues pour les autres motifs appris sont tout aussi faibles que celles



	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	<b>moyenne</b>
$D_m$ apres apprentissage	0.49	0.56	0.38	0.15	0.44	<b>0.4</b>
motifs tests apres apprentissage	0.04	0.03	0.05	0.02	0.03	<b>0.03</b>

TAB. 4.3 – Corrélacion moyenne avec les signaux d’activation de référence (dynamique issue de  $(D_m, I_m(t))$ ), après apprentissage, pour différentes les dynamiques issues des motifs conditionnants  $D_m$  seuls, et les dynamiques issues de motifs tests. Les motifs tests sont tirés selon  $\bar{D}$ ,  $\sigma_D$ . Paramètres :  $N = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{D} = -0.4$ ,  $\sigma_D = 0.3$ ,  $\bar{I} = 0$ ,  $\sigma_I = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\bar{J} = 0$ ,  $\sigma_J = 1$ .

obtenues avec des motifs quelconques. La dynamique produite par  $D_m$  possède donc des caractéristiques de celle produite par  $(D_m, I_m(t))$ , même si la corrélation est moins élevée que dans le cas de l’apprentissage d’une séquence unique.

On constate également que l’apprentissage est “moins abouti” pour certains motifs que pour d’autres. Le motif le mieux appris a une corrélation de 0.56 avec la dynamique de référence, et le moins bien appris une corrélation de 0.15. Bien que chaque séquence soit présentée le même nombre de fois au cours de l’apprentissage, il n’y a pas nécessairement homogénéité en terme de qualité d’apprentissage.

Ces données concernent un apprentissage effectué sur une réseau unique. Elles sont néanmoins représentatives de l’apprentissage effectué sur ce type de réseau. On constate en particulier, pour ces paramètres, qu’il existe une valeur limite du nombre de pas d’apprentissage au delà de laquelle la réponse du réseau se dégrade sérieusement, et le réseau perd la spécificité de ces réponses. Dans le cas présenté, cette valeur se situe aux alentours de 70 présentations, avec quelques variations d’un réseau à l’autre. Suivant la tâche que l’on se fixe, il semble y avoir une nombre de pas d’apprentissage optimal pour mener au mieux cette tâche. La qualité de la réponse obtenue pour ce nombre de pas optimal fixe en quelque sorte la capacité du réseau. Une mesure plus précise de la capacité des réseaux est proposée dans le chapitre suivant dans le cadre d’un modèle un peu plus élaboré.

## CONCLUSION LOCALE

Plusieurs règles d’apprentissage ont pu être testées dans le cadre de cette étude. La règle qui a finalement été choisie, et fait l’objet de développements importants dans cette thèse tend à renforcer, grâce à une mesure “en temps réel” de la covariance entre les signaux d’activation, les liens qui relient les relais successifs du circuit d’activation interne. Il est important de noter que la prise en compte du délai de transmission est fondamentale pour obtenir ce renforcement du circuit.

On peut noter également que les modifications synaptique portent sur un nombre très faible de connexions. Cette sélection sur les liens s’opère de façon naturelle dans la mesure où la distribution des covariances entre

neurones semble suivre une loi de puissance où une très grande majorité de valeurs sont proches de 0.

Dans ces conditions, l'apprentissage tend systématiquement à renforcer les quelques liens correspondant à une covariance significativement élevée entre afférent et efférent. Ces modifications, très peu nombreuses, produisent néanmoins des changements importantes sur la dynamique du réseau. D'une part, l'amplitude des signaux individuels tend à augmenter fortement. D'autre part, dans le cas d'un régime initialement chaotique, la période résiduelle tend à se renforcer, ce qui aboutit dans la plupart des cas au passage vers un régime cyclique.

Lorsque le système est contraint par un motif statique, la réduction de dynamique observée est spécifique à ce motif. Lors de la présentation d'un autre motif, non corrélé au premier, le système se maintient sur un régime chaotique. Néanmoins, on peut constater une certaine persistance du régime dynamique associé au motif appris, dans la mesure où des motifs faiblement corrélés au motif appris tendent également à réduire la dynamique sur un cycle limite. Il apparaît qu'un temps d'apprentissage optimal doit être trouvé pour produire des réductions de dynamique à la fois robustes (la dynamique se réduit en présence d'une version bruitée du motif appris) et spécifiques (pas de réduction de dynamique pour des motifs non-corrélés).

En effectuant l'apprentissage à la fois sous la contrainte d'un motif statique conditionnant et d'un motif dynamique périodique, il est possible d'obtenir, sous la contrainte d'un motif conditionnant seul, le comportement périodique appris. Ce comportement périodique n'est pas analogue à la séquence de motifs présentés (les valeurs d'activation de "redessinent" pas le motif), mais réalisent plutôt un codage de ce motif sous la forme d'une activité spatio-temporelle spécifique périodique (ou proche de la périodicité). Ce comportement de réduction de la dynamique en présence d'un motif conditionnant est très proche des comportements mis en évidence par Freeman dans le cadre d'observations neurophysiologiques.

Il est important de noter qu'au sein de ce système, plusieurs associations entre motifs conditionnants et régimes périodiques associés peuvent être réalisées sans nuire à la spécificité de la réponse produite. À partir d'une seule matrice des poids, il est possible de reconstruire plusieurs régimes périodiques différenciés en présence des motifs conditionnants associés, et de maintenir un régime chaotique "indifférencié" pour tout motif conditionnant non-appris.

Il est à présent possible d'envisager une utilisation des propriétés de l'apprentissage mises en évidence dans ce système simple. Dans le chapitre suivant, le système est intégré dans un modèle plus complexe, capable d'extraire de la structure spatio-temporelle produite par la dynamique une information permettant de reconstruire explicitement le motif appris. On peut néanmoins noter que les propriétés d'apprentissage de ce nouveau modèle reposent fondamentalement sur celles qui ont été montrées dans ce

chapitre.

# Chapitre 5

## Apprentissage sur le modèle étendu

L'apprentissage tel qu'on l'a vu jusqu'à présent repose sur une couche unique densément connectée. Cette couche récurrente dispose potentiellement d'un grand nombre de configurations spatiales (activations moyennes) et dynamiques (période, circuits d'activation), qui peuvent être atteintes en modifiant les seuils (motifs directeurs  $D_m$ ) ou en imposant une période (motifs dynamiques  $I_m(t)$ ). Cette configuration spatio-temporelle n'est pas inscrite explicitement dans les motifs imposés, mais se construit en interaction avec ces motifs.

L'apprentissage permet alors de renforcer la configuration spatio-temporelle associée à une stimulation ( $D_m, I_m(t)$ ) donnée. Cette configuration devient persistante, c'est à dire qu'une stimulation partielle (motif conditionnant :  $D_m$ ) tend à reproduire l'intégralité de la configuration apprise (correspondant à  $(D_m, I_m(t))$ ).

D'un point de vue fonctionnel, il devient intéressant de placer une telle "machine à apprendre" au sein d'une structure lui permettant de communiquer et d'agir sur le monde extérieur. La couche récurrente est connectée à une ou plusieurs autres couches, que nous appellerons "couches primaires". Chaque couche primaire reçoit un signal (une stimulation) contenant des informations provenant du monde extérieur au sens large (c'est à dire tout ce qui n'est pas le système), et évoluant au cours du temps. Cette couche "traduit" les informations sur le monde dans un langage que la couche récurrente peut comprendre : elle projette sur celle-ci un signal dont les caractéristiques sont proches du signal  $I_m(t)$  défini au chapitre précédent. Par ailleurs, on autorise une modulation "interne" à la couche récurrente, en modifiant les seuils selon les caractéristiques du motif conditionnant  $D_m$ .

Le point véritablement nouveau est la possibilité d'extraire des informations de la couche récurrente grâce à un signal appelé "signal retour", qui se projette sur les couches primaires. Ainsi, les couches primaires ne sont pas

de simples relais de transmission, mais se trouvent au cœur d'une interaction plus complexe entre un signal interne (en provenance de la couche récurrente) et un signal extérieur [98].

La section 5.1 détaille les caractéristiques du système. La section 5.1.1 propose tout d'abord un formalisme pour un modèle à  $K$  populations qui étend le modèle à 2 populations vu page 79. La section 5.1.2 décrit les paramètres qui permettent de différencier les couches primaires de la couche dynamique, et la section 5.1.3 définit ce qu'est, dans ce cadre, la réponse du réseau.

La section 5.2 fournit un aperçu aussi exhaustif que possible des capacités d'apprentissage du réseau. Les effets d'un apprentissage restreint à chaque classe de liens sont donnés dans la section 5.2.1. Les résultats concernant l'apprentissage de séquences temporelles élémentaires, ainsi qu'une estimation de la capacité du réseau, sont donnés en 5.2.2. Enfin, on étend l'étude de l'apprentissage à des signaux qui se développent dans le temps et dans l'espace, avec ou sans adjonction de bruit, dans la section 5.2.3.

La section 5.3 décrit l'implantation de l'architecture sur un robot mobile en interaction avec son environnement. Après avoir décrit la nature de l'information visuelle (5.3.1) et de l'information motrice (5.3.2), ainsi que l'architecture globale de l'automate (5.3.3), on met en place l'apprentissage dans le cadre d'un mouvement rotatif imposé (5.3.4). Le comportement d'adaptation dynamique issu de cet apprentissage est alors décrit dans la section 5.3.5.

## 5.1 Une architecture pour l'apprentissage de signaux dynamiques

### 5.1.1 Le système dynamique à $K$ populations

On propose ici une architecture à  $K$  populations. Ce système constitue une extension du modèle à deux populations présenté page 79. Il permet de fixer le cadre formel qui permettra ensuite de définir les paramètres d'architecture adaptés à la tâche souhaitée.

Le modèle contient  $K$  couches (ou populations) de neurones, dont le label est donné par  $p$ . Pour  $p \in \{1, \dots, K\}$ , il y a  $N^{(p)}$  neurones dans la couche  $p$ .  $N = \sum_{p=1}^K N^{(p)}$  est le nombre total de neurones. Pour  $p, q \in \{1, \dots, K\}^2$ , les  $(J_{ij}^{(pq)})$  représentent les poids de la couche  $q$  vers la couche  $p$ . Les  $\theta_i^{(p)}$  sont les seuils. Le signal externe  $I_i^{(p)}(t)$  représente toutes les informations en provenance des autres couches de traitement ou capteurs non inclus dans le modèle.

**Dynamique.** Pour  $p \in \{1, \dots, K\}$  et  $1 \leq i \leq N^{(p)}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } q \in \{1, \dots, K\}, c_i^{(pq)}(t) = \sum_{j=1}^{N^{(q)}} J_{ij}^{(pq)} x_j^{(q)}(t-1) \\ u_i^{(p)}(t) = \sum_{q=1}^K c_i^{(pq)}(t) + I_i^{(p)}(t) - \theta_i^{(p)} \\ x_i^{(p)}(t) = f_g(u_i^{(p)}(t)) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Le champ local  $c_i^{(pq)}(t)$  intègre les signaux en provenance de la population  $q$  vers la population  $p$ . Le potentiel  $u_i^{(p)}(t)$  est la somme des champs locaux  $c_i^{(pq)}(t)$  et du signal externe  $I_i^{(p)}(t)$ , auquel on soustrait le seuil d'activation  $\theta_i^{(p)}$ . L'activation est notée par  $x_i^{(p)}(t)$ .  $f_g$  est la fonction de transfert de  $\mathbb{R}$  vers  $]0, 1[$ . On prend toujours pour les simulations  $f_g(x) = \frac{1+\tanh(gx)}{2}$ , de gain  $g/2$ . Les valeurs des poids synaptiques et des seuils sont fixées à l'initialisation, et suivent respectivement les lois gaussiennes  $\mathcal{N}(\frac{\bar{J}^{(pq)}}{N^{(q)}}, \frac{\sigma_J^{(pq)^2}}{N^{(q)}})$  et  $\mathcal{N}(\bar{\theta}^{(p)}, \sigma_\theta^{(p)^2})$ . Toutes ces variables aléatoires sont supposées indépendantes.

En régime stationnaire, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(p)}(t) = u_i^{(p)*} + b_i^{(p)}(t) \\ x_i^{(p)}(t) = x_i^{(p)*} + a_i^{(p)}(t) \end{array} \right.$$

Où  $u_i^{(p)*}$  est le potentiel moyen,  $b_i^{(p)}(t)$  le signal propre,  $x_i^{(p)*}$  l'activation moyenne et  $a_i^{(p)}(t)$  l'activité dynamique.

**Apprentissage.** La règle d'apprentissage à  $K$  populations repose exactement sur les mêmes principes que ceux appliqués au modèle à une population. La dynamique sur les couplages repose sur la conjonction des activités pré et post-synaptiques  $a_i^{(p)}(t)a_j^{(q)}(t-1)$ , avec un décalage d'un pas de temps représentant le délai de transmission.

$$J_{ij}^{(pq)}(t) = J_{ij}^{(pq)}(t-1) + \frac{\alpha^{(pq)}}{N^{(q)}} a_i^{(p)}(t) a_j^{(q)}(t-1) \quad (5.2)$$

La partie constante du signal d'activation  $x_i^{(p)*}$  est estimée à chaque instant par  $\tilde{x}_i^{(p)*}(t) = (1 - \beta)\tilde{x}_i^{(p)*}(t-1) + \beta\tilde{x}_i^{(p)}(t)$ .

Le paramètre qui règle l'intensité de l'apprentissage de  $q$  vers  $p$  est  $\alpha^{(pq)}$ . La modification des poids est normalisée en  $1/N^{(q)}$ , afin que l'impact moyen de la règle sur le champ local  $c_i^{(pq)}$  soit indépendant de  $N^{(q)}$ . Pour une valeur d' $\alpha^{(pq)}$  fixée, plus la taille de la population  $q$  est faible, plus l'impact de l'apprentissage sur un lien  $J_{ij}^{(pq)}$  donné est élevé. Une valeur nulle d' $\alpha^{(pq)}$  interdit les modifications synaptiques entre la population  $q$  et la population  $p$  (lien non modifiable). Sur le

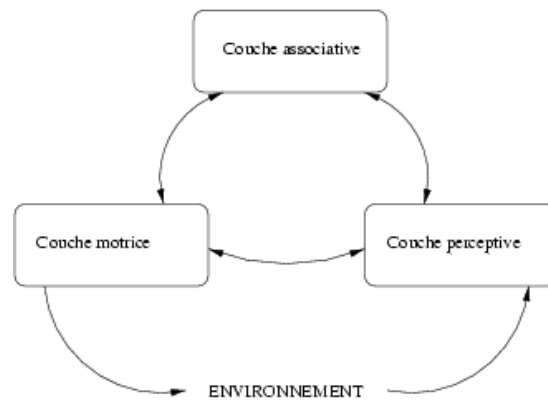


FIG. 5.1 – Modèle de système sensoriel et moteur en interaction avec son environnement

modèle utilisé dans la suite de ce chapitre, on note  $\alpha$  la valeur de référence telle que  $\alpha^{(pq)} = \alpha$  pour toute classe de liens modifiables, et  $\alpha^{(pq)} = 0$  pour toute classe de liens non-modifiables.

### 5.1.2 Modèle pour l'apprentissage

#### Principe de fonctionnement

Cette section présente l'architecture d'un système constitué de plusieurs couches, capable d'interagir avec un environnement. L'information sur l'environnement passe par l'intermédiaire des signaux  $I^{(p)}(t)$ . Ces signaux peuvent provenir directement de capteurs, ou présenter le résultat d'un traitement effectué par des couches non incluses dans le modèle.

Un modèle classique d'organisation neuronale, fondé sur une schématisation du fonctionnement du système nerveux animal, met en œuvre une couche perceptive et une couche motrice, auxquelles sont attachées une ou plusieurs couches associatives autorisant des traitements plus élaborés (voir figure 5.1). Un tel modèle est proposé, par exemple, dans [99, 71].

Ce système entretient une relation circulaire avec son environnement. Dans le cadre d'un apprentissage, il établit des correspondances entre des événements perçus et les actions qu'il produit (il capte à chaque instant la co-occurrence d'une action motrice et d'une perception). Le système s'organise sous la contrainte à la fois de son environnement (influence externe) et de ses couplages préexistants (influence interne). La réponse du système n'étant pas évaluée par une entité extérieure, on est dans le cadre de l'apprentissage non-supervisé.

Dans la suite de ce chapitre, on distinguera l'apprentissage effectué lorsque le système est passif (la stimulation d'entrée est fixée par l'utilisateur, et on étudie l'adaptation de la dynamique interne à cette entrée), et l'apprentissage effectué lorsque le système est actif (le signal produit par le système agit directement sur

les caractéristiques perçues du monde). Dans ce cas, c'est l'état d'une des couches primaires (appelée couche primaire motrice) qui détermine l'action produite. Les simulations de la partie 5.2, qui évaluent la capacité d'apprentissage des réseaux, sont faites avec un système passif. Les expériences de la partie 5.3, qui présentent une application à la robotique, se déroulent naturellement avec un système actif.

### Architecture générale du système

Le modèle est constitué d'une ou plusieurs couches primaires, chargées de recueillir le signal spatio-temporel, et d'une couche dynamique comparable au modèle récurrent étudié dans les chapitres précédents. On distingue alors quatre types de liens :

- Liens récurrents : liens internes à la couche dynamique.
- Liens latéraux : liens internes aux couches primaires.
- Liens directs : liens qui vont d'une couche primaire vers la couche dynamique.
- Liens retour : liens qui “retournent” de la couche dynamique vers une couche primaire.

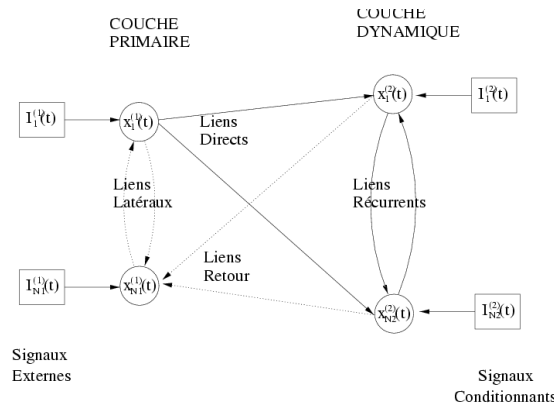


FIG. 5.2 – **Architecture du modèle.** Le modèle présenté possède une seule couche primaire. Les lignes pointillées indiquent les liens nuls à l'initialisation.

Les couches primaires et la couche dynamique se différencient à la fois par la nature de leurs connexions afférentes et la nature des signaux qu'elles reçoivent.

- À la création du système, les liens afférents aux couches primaires (liens latéraux et liens retour) sont nuls, tandis que les liens afférents à la couche dynamique (liens récurrents et liens directs) sont issus d'un tirage aléatoire gaussien (d'écart-type non nul). Tous les liens (nuls ou non-nuls) peuvent être modifiés au cours de l'apprentissage.
- Les signaux en entrée des couches primaires sont des signaux à “évolution rapide”, qui peuvent par exemple représenter une stimulation sensorielle (ou sensori-motrice). Dans le cadre de nos simulations, ce sont des signaux



binaires, qui évoluent à chaque pas de temps. Les signaux en entrée de la couche dynamique sont des motifs conditionnants, à valeurs gaussiennes, comme dans le chapitre précédent, qui sont maintenus sur des échelles de temps plus longues. Ils portent une information sur l’"état interne" du système, et permettent de conditionner la sensibilité du système à certaines entrées dynamiques.

**Choix des paramètres** La mise en place de l’architecture présentée ci-dessus nécessite, dans le cadre du modèle général à  $K$  populations, de définir pour chaque couple  $(p, q)$  les valeurs des paramètres qui définissent les poids, et pour chaque valeur de  $p$  la nature des signaux projetés et les paramètres pour les seuils d’activation. Tous ces choix de paramètres sont fondés, comme on le verra, sur les études qui ont été faites dans le cadre du modèle à une population. Ils visent à reproduire les conditions d’apprentissage qui ont été mise en place sur le modèle à une population.

Soit une population  $p$  de type :

– **Couche Primaire :**

- À l’initialisation, les liens retour et les liens latéraux sont nuls. On a donc  $\bar{J}^{(pq)} = 0$ ,  $\sigma_J^{(pq)} = 0$ .
- Le signal  $I^{(p)}(t)$  est binaire, de densité  $f^{(p)}$ . À chaque instant, le signal  $I^{(p)}(t)$  stimule en moyenne  $f^{(p)}N^{(p)}$  neurones de la couche primaire.
- À l’initialisation du système, le signal de potentiel d’un neurone de la couche primaire dépend exclusivement du signal  $I^{(p)}(t)$ , qui prend ses valeurs sur  $\{0, 1\}$ . Les paramètres des seuils d’activation sont fixés afin que le signal d’activation reproduise fidèlement le signal d’entrée, soit  $\bar{\theta}^{(p)} = 0.5$  et  $\sigma_{\theta}^{(p)} = 0$ .

– **Couche dynamique :**

- La couche dynamique a la même structure que le réseau à une population étudié dans les chapitres précédents. Les liens récurrents de la couche dynamique sont donc définis selon les mêmes paramètres, soit  $\bar{J}^{(pp)} = 0$  et  $\sigma_J^{(pp)} = 1$ . Le choix des paramètres des liens provenant d’une couche primaire  $q$  repose sur le même souci de cohérence avec le modèle à une population. *Les paramètres sont choisis afin que le champ local  $c^{(pq)}(t)$  ait les caractéristiques d’un motif gaussien centré d’écart-type  $\sigma_I^{(q)}$ .* Connaissant la densité  $f^{(q)}$  de l’entrée dynamique de la couche primaire, il vient  $\bar{J}^{(pq)} = 0$  et  $\sigma_J^{(pq)} = \frac{\sigma_I^{(q)}}{\sqrt{f^{(q)}}}$ .
- Le signal  $I^{(p)}(t)$  est le signal conditionnant : c’est un signal gaussien qualifié de "statique", dans la mesure où il se maintient aux mêmes valeurs sur une longue durée. Dans les simulations, chaque motif conditionnant statique est associé à une entrée dynamique. Ce motif est issu d’un tirage aléatoire selon les paramètres  $\bar{I}^{(p)} = 0$ ,  $\sigma_I^{(p)} = 0.3$ .

- Le seuil d'activation est défini selon les paramètres  $\bar{\theta}^{(p)} = 0.4$  et  $\sigma_{\theta}^{(p)} = 0$ .

Cette spécification de paramètres est fixée pour l'ensemble des simulations qui suivent. Dans un modèle de référence à deux populations, tel que l'index 1 désigne la couche primaire et l'index 2 la couche dynamique, il reste à choisir :

- Pour la dynamique spontanée : la valeur de  $g$ , la valeur de  $\sigma_I^{(21)}$  qui détermine l'intensité avec laquelle la couche primaire se projette sur la couche dynamique.
- Pour l'apprentissage : la valeur d' $\alpha$ . Il reste de plus à déterminer les liens sur lesquels l'apprentissage est autorisé.

Dans la suite de ce document, on ne précisera en général que la valeur de ces paramètres, tous les autres étant, sauf exception, fixés aux valeurs décrites plus haut.

### 5.1.3 Réponse du système

De nombreux travaux de neurophysiologie sur les animaux mettent en avant la capacité du cerveau à anticiper les événements correspondant aux perceptions et aux actions effectuées par l'animal dans son environnement. Cette anticipation nécessite qu'une séquence similaire d'événements ait au préalable été *inscrite* dans le système nerveux. L'inscription d'une telle séquence d'actions/perceptions permet alors à l'animal de reproduire la même séquence dans les mêmes conditions. L'animal est en quelque sorte assuré du résultat de l'action mise en œuvre. Cette mémoire séquentielle pourrait être stockée à moyen terme dans la structure fortement récurrente de l'hippocampe, et projetée pour le long terme dans l'ensemble du cortex [44].

Au delà de cette forme immédiate d'anticipation, des hypothèses récentes mettent en avant chez les mammifères les plus évolués la capacité à *simuler* l'environnement [17]. Dans ce cadre, l'animal est capable de tester plusieurs hypothèses, c'est à dire d'évoquer, en l'absence de toute mise en œuvre effective, plusieurs séquences d'actions, et d'effectuer un choix en faveur de celle qui apparaît la plus efficace. Ces capacités cognitives "supérieures" permettraient par exemple à un prédateur de choisir parmi plusieurs stratégies d'attaque possibles. À ce stade, on est très loin du simple comportement réactif.

On constate de façon générale que plus on monte dans l'échelle de l'intelligence, plus la mise en œuvre de l'action s'éloigne du simple conditionnement. Les données de l'environnement sont insuffisantes pour décrire le comportement, dans la mesure où le cerveau confronte en permanence les données de l'environnement à des modèles préexistants, avec lesquels la "mise en conformité" s'effectue de façon dynamique. Il devient alors possible d'ignorer certaines données de l'environnement en cas de désaccord avec le modèle interne (idée fixe), ou au contraire de reproduire à partir d'un petit élément d'information sensorielle un contexte beaucoup plus général.

Le modèle que nous proposons ne vise pas à reproduire les fonctions cognitives les plus hautes décrites ci-dessus, mais plutôt à illustrer quelques capacités d'anticipation simple qui peuvent être obtenues au sein d'un modèle qui possède une dynamique interne propre. Ce modèle peut alors confronter les données de l'expérience avec cette source dynamique interne. Dans ce cas, la reconnaissance s'apparente à une mise en conformité entre les séquences perçues et les séquences "intérieures".

Dans le cadre du paradigme de Freeman, nous nous sommes jusqu'à présent essentiellement intéressés aux modifications des propriétés dynamiques du système. Il a été établi que l'apprentissage permet d'associer un régime dynamique spécifique à chaque motif appris, et que la présentation d'une partie de l'information apprise permet d'évoquer le régime dynamique associé au motif complet. Nos réseaux à une population pouvaient alors apprendre un *comportement* dynamique (une configuration spatio-temporelle des activations). Notre travail est à présent de relier ce comportement à une action effective sur l'environnement, ou à une prédiction sur l'état futur de l'environnement.

Le développement d'un modèle à couches primaires vise précisément à permettre le déchiffrement de la réponse du réseau, grâce aux liens retour. Ces liens sont, comme on l'a vu, initialisés à zéro. Les couplages entre la couche dynamique et les couches primaires se mettent en place au cours de l'apprentissage. L'apprentissage tend à établir une correspondance à *double sens* entre le signal en entrée et le régime de la couche dynamique. Il devient alors intéressant de corrompre le signal d'entrée afin d'estimer dans quelles conditions et pour quelles durées d'apprentissage une information bruitée ou incomplète en entrée parvient néanmoins à "faire sens", c'est à dire à s'accorder à une représentation dynamique interne. Dans ce cas, l'image évoquée sur les neurones de la couche primaire via les liens retour doit permettre de reconstituer les parties manquantes de l'information.

Il faut noter avant d'aller plus loin que tous les apprentissages effectués impliquant une stimulation dynamique mettent également en jeu un motif conditionnant. L'utilisation de plusieurs motifs conditionnants permet de produire sur un même réseau plusieurs configurations, chacune d'entre elles étant dédiée à la reconnaissance d'une séquence dynamique apprise. En ce sens, la capacité à reconnaître une entrée dynamique dépend d'un contexte plus général, considéré comme interne au système, qui rend le système particulièrement sensible à cette entrée.

Sur notre modèle, la stimulation test peut prendre deux aspects :

- activation du motif conditionnant et d'une partie du signal appris, soit en supprimant à chaque instant une partie du motif binaire, soit en supprimant certains éléments de la séquence.
- activation du motif conditionnant seul, sans stimulation temporelle, même partielle.

La réponse du système est alors analysée, soit :

- à partir du champ local  $c^{(pq)}(t)$ , qui contient le signal envoyé de la couche  $q$  (couche dynamique) vers la couche  $p$  (couche primaire),
- en regardant le signal d'activation  $x^{(p)}(t)$  sur la couche primaire. Ce signal d'activation prend en compte à la fois les informations qui proviennent des liens retour, celles qui proviennent des liens latéraux, et (éventuellement) le signal de test.

## 5.2 Banc de tests

Dans cette section, les caractéristiques et performances de l'apprentissage sur un modèle à 2 couches sont explorées de façon systématique. Sur ce modèle à deux couches, la couche primaire est repérée par l'indice 1 et la couche dynamique par l'indice 2. Cette étude vise essentiellement à déterminer dans quelle mesure le réseau peut inférer l'état de la couche primaire connaissant tout ou partie de son état passé. La qualité de l'apprentissage est évalué selon l'écart entre le signal appris et la réponse de la couche dynamique.

**Nature des signaux.** Les signaux sont comme on l'a dit binaires, à valeurs sur  $\{0, 1\}$ . Pour la première partie de l'évaluation, la nature des signaux est un peu plus simplifiée encore, et obéit aux deux conditions :

- **Motifs élémentaires** : Sur la couche primaire, un seul neurone peut être activé à l'instant  $t$ . Chaque motif composant la séquence est donc caractérisé par un index de neurone. Il n'est pas interdit a priori que ce motif élémentaire apparaisse plusieurs fois au sein de la même séquence. La densité de chaque motif élémentaire vaut exactement  $1/N^{(p)}$  si  $N^{(p)}$  est la taille de la couche primaire. On prendra généralement  $N^{(p)} = 100$ , soit une densité de  $10^{-2}$ .
- **Équirépartition** : L'espérance sur la valeur d'activation est la même pour toutes les entrées stimulées : au sein d'une même séquence, chaque motif élémentaire apparaît le même nombre de fois. On évite ainsi que certaines entrées soient "surappries" parce qu'elles apparaissent plus souvent que d'autres en cours d'apprentissage.

Cette simplification des signaux permet de caractériser les séquences de longueur  $\tau$  par les index des neurones :  $s_\tau = (i_1, \dots, i_\tau)$ . Ainsi, l'index  $s_\tau((t \bmod \tau) + 1)$  définit le motif élémentaire  $I^{(1)}(t)$  tel que  $I_j^{(1)}(t) = 1$  si  $s_\tau((t \bmod \tau) + 1) = j$  et 0 sinon.

**Nature de l'information contenue dans les signaux.** Les informations produites en entrée du réseau ont été classées en trois catégories, suivant un degré croissant de complexité :

1. **Séquences non ambiguës** : une séquence est caractérisée par une série  $s_\tau = (i_1, \dots, i_\tau)$ . Pour que la séquence soit non-ambiguë, on suppose de plus

que tous les  $i_k$  sont différents,  $1 \leq k \leq \tau$ . La stimulation du neurone  $i_k$  est suivie par celle du neurone  $i_{k+1}$  à l'instant suivant, pour  $1 \leq k \leq \tau - 1$ , et la stimulation du neurone  $i_\tau$  est suivie par celle du neurone  $i_1$ . Le signal  $I^{(1)}(t)$  est donc périodique de période  $\tau$ .

2. **Séquences ambiguës** : les  $i_k$  ne sont pas nécessairement différents : un même neurone peut apparaître plusieurs fois dans la séquence (voir aussi page 36). Pour lever l'ambiguïté, il est nécessaire de faire appel à une information antérieure à la prémisse  $i_k$ , c'est à dire de *mémoriser* un ou plusieurs états plus anciens. Par exemple, sur la séquence  $s_4 = (1, 1, 2, 2)$ , la prémisse 1 est suivie par un 1 ou par un 2 suivant le contexte. Il est nécessaire d'avoir en mémoire l'état qui précède cette prémisse pour lever l'ambiguïté. Le degré d'une séquence est caractérisé par le nombre d'états antérieurs à la prémisse qu'il faut mémoriser pour lever toutes les ambiguïtés [62]. Par exemple, la séquence  $s_4 = (1, 1, 2, 2)$  est de degré 1, et la séquence  $s_8 = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 4)$  est de degré 3 (pour savoir si la prémisse 3 est suivie d'un 1 ou d'un 4, il faut mémoriser trois états antérieurs).
3. **associations statiques/dynamiques** : Lorsque les stimuli conditionnants sont pris en compte en tant que signal "interne", l'apprentissage porte sur une association  $(s_{\tau_m, m}(t), D_m)$  où  $s_{\tau_m, m}(t \bmod \tau + 1)$  définit le signal  $I_m^{(1)}(t)$  projeté sur la couche primaire et  $D_m$  désigne le motif conditionnant présent sur la couche dynamique tel que pendant l'apprentissage de la séquence,  $\forall t, I_m^{(2)}(t) = D_m$ .

**Évaluation.** L'évaluation de l'apprentissage repose sur une comparaison entre la réponse fournie par le système et la réponse attendue. La réponse du système peut être évaluée de plusieurs manières, de plus en plus exigeantes :

- le motif dynamique est maintenu intégralement sur la couche primaire, et l'évaluation repose sur une comparaison entre cette stimulation et le signal projeté sur la couche primaire via les liens retour.
- le signal est présenté de façon partielle sur la couche primaire (on supprime de 50 à 90 % du signal). Dans les plages où le signal est absent, on regarde le neurone dont l'activation est maximale sur la couche primaire. Si ce neurone correspond à celui qui aurait été stimulé si on avait maintenu l'intégralité du signal, on considère que la réponse est correcte.
- le signal d'entrée est simplement supprimé, et le signal évoqué spontanément sur l'interface est comparé avec le signal appris.

On verra que pour répondre à ces niveaux d'exigence croissants, on doit procéder à des apprentissages de plus en plus longs. Le choix de l'une de ces évaluations dépend de la durée de l'apprentissage.

### 5.2.1 Apprentissage partiel

On se place ici dans le formalisme d'un modèle à deux populations, avec une couche primaire et une couche dynamique. Rappelons qu'il existe quatre familles de liens sur lesquels l'apprentissage peut porter :

- liens récurrents : liens internes à la couche dynamique.
- Liens directs : liens qui vont de la couche primaire vers la couche dynamique.
- liens latéraux : liens internes à la couche primaire.
- Liens retour : liens qui “retournent” de la couche dynamique vers la couche primaire.

L'idée de l'apprentissage partiel est de n'autoriser l'apprentissage que sur une seule de ces familles de liens afin de bien spécifier le rôle tenu par chacune d'elles (et éventuellement de déterminer s'il est utile dans le cas général d'autoriser l'apprentissage sur tous ces liens).

#### Apprentissage sur les liens récurrents

Cet apprentissage sur les liens récurrents a déjà fait l'objet du chapitre précédent. On a vu que l'apprentissage permet de renforcer la régularité de la structure périodique interne à cette couche.

#### Apprentissage sur les liens directs

Le rôle des liens directs est principalement de diffuser le signal de la couche primaire sur l'ensemble des neurones de la couche dynamique. L'apprentissage sur ces liens vise à améliorer la communication entre les deux couches, c'est à dire faire en sorte que le signal émis soit bien pris en compte par le récepteur. Ainsi :

- Si la stimulation du neurone  $j$  de la couche primaire à  $t - 1$  correspond à une valeur positive du signal  $a_i^{(p)}(t)$ , le lien est augmenté.
- Si la stimulation du neurone  $j$  de la couche primaire à  $t - 1$  correspond à une valeur négative du signal  $a_i^{(p)}(t)$ , le lien est diminué.

Ainsi, petit à petit, les liens en provenance du neurone  $j$  se spécialisent sur le groupe de neurones qui répond le mieux à cette stimulation. Ils envoient en moyenne un signal plus fort vers ces neurones, et un signal plus faible sur les autres. Le groupe de récepteurs devient donc plus sensible à cette stimulation.

L'effet de l'apprentissage est donc de spécifier le groupe de récepteurs de chaque stimulation, et de différencier les différents groupes de récepteurs. Chaque groupe de récepteurs se spécialise sur une stimulation donnée. Une conséquence indirecte est que le circuit d'activation de la couche dynamique se renforce dès lors que la stimulation en entrée est périodique. Dans ce cas, l'effet de l'apprentissage sur les liens directs est comparable à celui observé dans le chapitre précédent lors d'un apprentissage sur les liens récurrents : on a un renforcement de la périodicité et de la régularité du circuit interne *de la couche dynamique*.

L'effet d'un tel apprentissage sur le signal de la couche dynamique est présenté figure 5.3, dans le cas d'une stimulation de période 3. La différenciation progressive des récepteurs en cours d'apprentissage se traduit sur la figure de droite par une scission de l'attracteur en trois parties distinctes qui correspondent dans ce cas à trois cycles pseudo-périodiques.

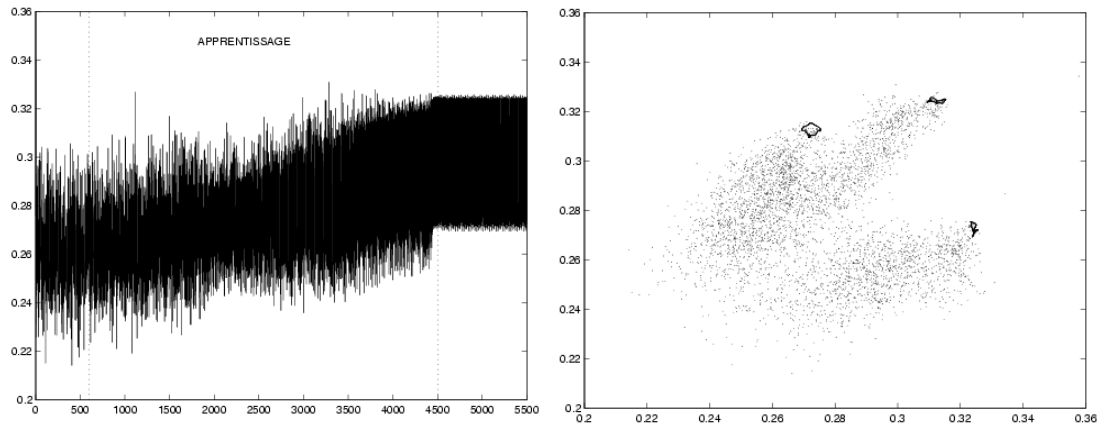


FIG. 5.3 – Effet de l'apprentissage des liens directs observé sur le signal moyen de la couche dynamique. Figure de gauche : évolution du signal moyen en cours d'apprentissage. La dynamique d'apprentissage est itérée entre  $t = 600$  et  $t = 4500$ . Figure de droite : diagramme de premier retour sur le même signal. La stimulation est périodique de période 3. Les paramètres sont  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ ,  $\sigma_I^{(21)} = 0.2$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0.4$ ,  $\sigma_\theta^{(1)} = 0.3$ .

### Apprentissage sur les liens latéraux

Lorsque l'on effectue un apprentissage sur les liens latéraux uniquement, les liens retour, initialisés à 0, restent inertes. Par conséquent, le signal qui se développe sur la couche dynamique est sans effet sur la couche primaire. L'activation des neurones de la couche primaire dépend donc uniquement du motif d'entrée et des changements sur les liens latéraux. Tout se passe comme si l'apprentissage avait lieu sur un réseau récurrent unique, dont les poids sont initialisés à zéro.

Étant donné la nature du signal (au plus un seul neurone actif sur la couche à chaque instant), la stimulation du neurone  $j$ , puis du neurone  $i$  entraîne le renforcement du lien  $J_{ij}^{(1)}$  et celui-là seul. Si on stimule ultérieurement le neurone  $j$ , la valeur positive du lien tendra à favoriser l'activation du neurone  $i$  au temps suivant. Si une chaîne d'inférences non ambiguë  $(i_1, \dots, i_L)$  est projetée sur la couche primaire pendant l'apprentissage, les liens correspondants sont renforcés. Après apprentissage, la stimulation du neurone  $i_\ell$  favorise l'activation du neurone  $i_{\ell+1}$ , qui à son tour favorise l'activation de l'élément suivant, ainsi de suite jusqu'à

$i_L$ . S'il s'agit d'une séquence périodique  $(i_1, \dots, i_\tau)$ , l'activation après apprentissage d'un seul élément de la séquence favorise l'activation en boucle de la séquence.

Bien sûr, la mise en place de telles chaînes d'activation dépend de la valeur des liens qui relient les neurones successifs. Si ces liens sont faibles, le signal est atténué à chaque relais et finit par disparaître. La valeur des liens après apprentissage conditionne donc la capacité à évoquer la totalité de la séquence apprise à partir d'un seul élément de la séquence. On suppose que le couple  $(j, i)$  appartient à la séquence apprise, et donc que le lien  $J_{ij}^{(11)}$  est non-nul après apprentissage.

Supposons de plus qu'au cours de la dynamique, on a  $x_j^{(1)}(t-1) = 1$ . On dira alors que le neurone  $j$  est capable d'activer son successeur  $i$  si le champ local  $c_{ij}^{(11)}(t) = J_{ij}^{(11)} x_j^{(1)}(t-1) = J_{ij}^{(11)}$  dépasse le seuil  $\theta_i^{(1)}$ , soit  $J_{ij}^{(11)} > \theta_i^{(1)}$ . D'après les caractéristiques que l'on a fixées pour la couche primaire, les seuils sont tous égaux et valent  $\bar{\theta}^{(1)} = 0.5$ . La valeur critique du lien est donc  $J_{ij}^{(11)} = \bar{\theta}^{(1)}$ . Lorsque cette valeur critique est dépassée sur plusieurs liens successifs, la stimulation d'un neurone de la séquence apprise permet d'activer les éléments suivants. La sortie de la fonction de transfert n'étant pas binaire, la valeur de l'activation est décroissante à chaque relais, mais reste significative pendant un certain temps. La couche primaire est capable, en quelque sorte, de s'auto-stimuler. La présentation d'un élément de la séquence permet d'activer les quelques neurones suivants.

Le fait d'avoir  $J_{ij}^{(11)} > \bar{\theta}^{(1)}$  dépend à la fois du paramètre d'apprentissage  $\alpha^{(11)}$ , qui fixe l'amplitude de la modification à chaque passage, et de  $n$ , le nombre de passages de la séquence pendant l'apprentissage :

- Si on fixe  $\alpha^{(11)}$ , le nombre de passages critiques est de l'ordre de

$$n_c^{(11)} \geq \frac{N^{(1)} \bar{\theta}^{(1)}}{\alpha^{(11)}}$$

- Si on fixe le nombre de passages, on a de même

$$\alpha_c^{(11)} \geq \frac{N^{(1)} \bar{\theta}^{(1)}}{n^{(11)}}$$

En particulier, si on souhaite fixer à 1 le nombre de passages, on doit avoir  $\alpha^{(11)} \geq N^{(1)} \bar{\theta}^{(1)}$ .

Pour un tel apprentissage "express", on doit avoir une valeur d' $\alpha^{(11)}$  très élevée, supérieure à 5 dans le cas où  $N^{(1)} = 10$  et  $\bar{\theta}^{(1)} = 0.5$ . Cette valeur de  $\alpha^{(11)}$  est largement supérieure à la valeur usuelle, qui est de l'ordre de 0.1. Une valeur faible est en effet nécessaire lorsque l'apprentissage porte sur un système dynamique où de nombreux neurones sont activés et où l'apprentissage nécessite des temps longs pour capter les régularités statistiques de la dynamique et les inscrire progressivement dans les poids synaptiques.

On a représenté sur la figure 5.4 les résultats d'un apprentissage express sur les liens latéraux, après apprentissage de deux séquences de périodes 4 et 5,  $s_4 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $s_5 = (5, 6, 7, 8, 9)$ , avec  $\alpha^{(11)} = 9$ . On constate que la matrice des



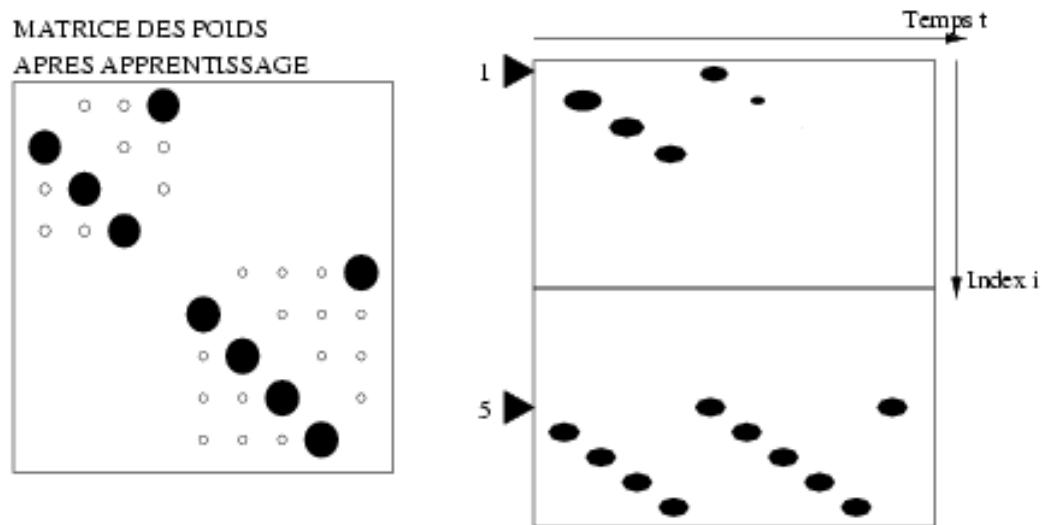


FIG. 5.4 – **Apprentissage express sur les liens latéraux.** À gauche : matrice des liens latéraux après apprentissage. À gauche : comportement dynamique après stimulation du neurone 1 et après stimulation du neurone 5. Les séquences apprises sont  $s_1 = (1, 2, 3, 4)$  et  $s_2 = (5, 6, 7, 8, 9, 10)$ . Représentation de Hinton. Paramètres :  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 10$ ,  $\alpha = 9$ ,  $\bar{\theta}^{(1)} = 0.5$ .

pois permet de reconstituer explicitement les deux circuits appris. La stimulation du neurone 1 (premier élément de la séquence  $s_4$ ) produit une activation en chaîne, dont l'activité se maintient environ sur 5 pas de temps. La séquence  $s_4$  est *évoquée*. La stimulation du neurone 5 (premier élément de la séquence  $s_5$ ) produit une chaîne d'activation beaucoup plus durable, dans la mesure où les activations successives atteignent la valeur de saturation. La séquence  $s_5$  est *restituée*.

L'apprentissage en ligne de séquences dans un modèle récurrent est une tâche facile, tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté ni de recouvrement sur les séquences. L'apprentissage en ligne de séquences temporelles bute généralement sur les problèmes rencontrés avec les séquences ambiguës. Lever les ambiguïtés est l'une des fonctions de la couche dynamique, comme nous le verrons plus loin.

Dans le cas général d'un apprentissage sur tous les liens, les liens latéraux permettent de capter les enchaînements contenus dans le signal, et participent, en coordination avec les autres liens, à l'évocation ou à la restitution du signal appris.

### Apprentissage sur les liens retour

L'apprentissage sur les liens retour permet ici d'illustrer le comportement *réactif* de la couche dynamique.

Les signaux présentés en entrée ne sont pas, pour ce paragraphe, des séquences, mais des inférences définies comme suit. Une inférence est caractérisée par un

couple  $(i, j)$ , tel que dans le signal  $I^{(1)}(t)$ , si le neurone  $i$  est stimulé au temps  $t$ , le neurone  $j$  est systématiquement stimulé au temps  $t + \tau$ , avec  $\tau \geq 1$  et  $i \neq j$ . Une base d'inférences de taille  $L$  est un ensemble  $B_L = \{(i_1, j_1), \dots, (i_L, j_L)\}$ , tel que – 1 – tous les  $i_\ell$  sont différents et – 2 – la stimulation de  $i_\ell$  au temps  $t$  est toujours suivi par celle du neurone  $j_\ell$  au temps  $t + \tau$ , avec  $\tau \geq 1$  et  $1 \leq \ell \leq L$ .

On prend pour base d'apprentissage la base d'inférences  $B_2 = \{(1, 2), (3, 4)\}$ , avec pour délai  $\tau = 2$ , afin de prendre en compte le délai de transmission à travers la couche dynamique. Ainsi, si le neurone 1 est stimulé au temps  $t$ , alors le neurone 2 est stimulé au temps  $t + 2$  (même rapport entre la stimulation 3 et la stimulation 4). Les couples sont répartis au hasard sur le signal temporel. La probabilité d'apparition des deux couples est la même. Des plages de silence sont maintenues entre les présentations de ces couples.

Le mécanisme est le suivant : Pour un couple  $(j, i)$ , la stimulation du neurone  $j$  sur la couche primaire envoie un signal sur la couche dynamique. Cette stimulation est également appelée "impulsion" étant donné le caractère brutal de la transition par rapport au repos. L'effet de cette impulsion est sensible au temps  $t + 1$  sur la couche dynamique. La stimulation du neurone  $i$  de la couche primaire au temps  $t + 2$  arrive en même temps que le signal retour qui prend en compte les effets de l'impulsion. La règle d'apprentissage favorise alors les liens retour correspondant aux neurones chez qui l'impulsion initiale induit une variation significative d'activité. Après apprentissage, la stimulation du neurone  $j$  tend à produire l'activation du neurone  $i$  au temps  $t + 2$  via la couche dynamique.

Avec en entrée un signal conforme à la base  $B_2$ , on itère la dynamique d'apprentissage sur 200 de pas de temps, avec  $\alpha = 0.1$ , en modifiant uniquement les poids retour. Chaque couple est présenté 12 fois en tout.

Pour tester l'effet de l'apprentissage, les neurones 1 ou 3 de la couche primaire sont stimulés isolément, et le signal évoqué sur la couche primaire via les poids retour est mesuré. Il apparaît clairement sur la figure 5.5 que pour le couple  $(j, i)$ , l'activation du neurone  $j$  au temps  $t$  se traduit par un pic d'activité du neurone  $i$  à  $t + 2$ , conformément à la base d'apprentissage.

Il faut noter que les impulsions envoyées sur la couche dynamique n'induisent pas de changement sensible sur le signal moyen  $m_N^{(2)}(t)$  parce que les liens directs sont centrés. Le champ local des neurones de la couche dynamique est ponctuellement déplacé. L'apprentissage sur les poids retour permet précisément de capter ces déplacements. Les neurones 2 et 4 deviennent sensibles à une perturbation spécifique. Sur la figure 5.6, on voit que si on prolonge la stimulation sur le neurone 1 de la couche primaire, le niveau d'activation du neurone 2 est nettement augmenté sur la même durée. On voit donc bien que le neurone 2 réagit à la nouvelle configuration spatiale des activations induite sur la couche dynamique, c'est à dire à des différences de niveaux d'activité.

Dernière remarque : vue la valeur d' $\alpha^{(21)}$  choisie et le nombre de présentations, le niveau d'activation des neurones 2 et 4 demeure faible. Ceci n'empêche pas l'interprétation et l'exploitation du comportement issu de l'apprentissage.

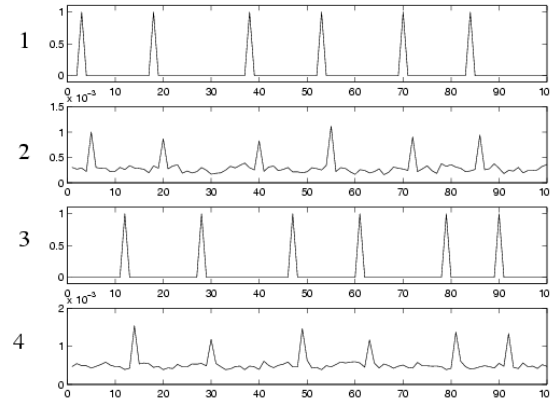


FIG. 5.5 – Signaux d’activation  $x_i^{(1)}(t)$ , pour  $i = 1..4$ , après apprentissage sur les poids retour. L’apprentissage a préalablement été effectué sur 200 pas de temps avec la base d’inférences  $B_2 = \{(1, 2), (3, 4)\}$ . Après apprentissage, seuls les neurones 1 et 3 sont stimulés. Les signaux des neurones 2 et 4 sont d’un niveau beaucoup plus faible (échelle  $\times 10^3$ ). Paramètres :  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ ,  $\alpha = 0.1$ .

On peut tenir sensiblement le même raisonnement que précédemment pour déterminer le nombre critique de présentations au delà duquel les neurones de la couche primaire deviennent sensibles au signal retour, au point d’atteindre des valeurs d’activation d’un ordre de grandeur comparable aux stimulations. Dans le cas où le signal d’entrée est une séquence, le franchissement de cette valeur permet l’entretien d’une chaîne d’activation (le signal retour tend alors à se substituer à la stimulation).

Dans le cas général, on peut estimer le nombre critique de présentations par le raisonnement suivant. L’activation du neurone  $i$  sur la couche primaire produit au cours de l’apprentissage un changement sur tous les liens  $J_{ij}^{(12)}$ , pour  $j$  de 1 à  $N^{(2)}$ . L’intensité de ce changement vaut localement  $\left| \frac{\alpha^{(12)}}{N^{(2)}} a_j(t-1) \right|$ , et le changement total relatif aux  $N^{(2)}$  afférents du neurone  $i$  est de l’ordre de  $|\alpha^{(12)} \sigma_x^{(2)}|$ , où  $\sigma_x^{(2)}$  est l’écart-type moyen des signaux d’activation de la couche dynamique, qui est de l’ordre de 0,25 pour  $g = 8$ . Si l’activation du neurone  $i$  était toujours précédée des mêmes valeurs d’activation sur la couche dynamique, le nombre de présentations critique serait de l’ordre de

$$n_{\text{sans bruit}}^{(12)} = \frac{\bar{\theta}^{(1)}}{\alpha^{(12)} \sigma_x^{(2)}}$$

Dans les faits, bien sûr, l’activité de la couche dynamique comprend une partie d’activité non corrélée à la stimulation.

Si maintenant, on suppose que l’on sait estimer par simulation le nombre critique  $n_c^{(12)}$ , il devient possible d’estimer à partir de ce nombre l’écart-type  $\sigma_s^{(2)}$

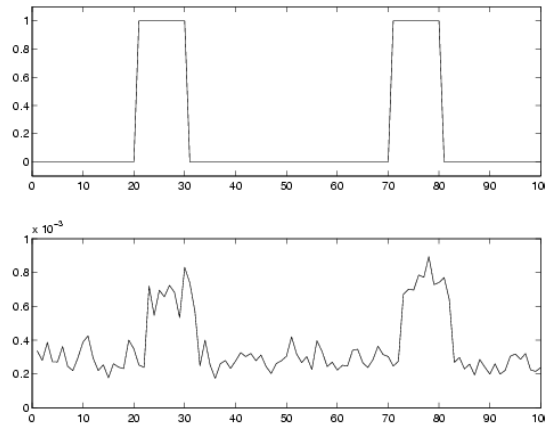


FIG. 5.6 – **Signaux d’activation**  $x_i^{(1)}(t)$ , pour  $i = 1..2$ , après apprentissage sur les poids retour. Le neurone 1 est stimulé à deux reprises sur une durée de 10 pas de temps. On constate en retour une hausse sur l’activation moyenne du neurone 2, sur la même durée. *Les signaux ne sont pas à la même échelle.* Paramètres :  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ ,  $\alpha^{(21)} = 0.1$ .

correspondant à la partie significative (porteuse d’information) de l’activité de la couche dynamique comme

$$\sigma_s^{(2)} \simeq \frac{\bar{\theta}^{(1)}}{\alpha^{(12)} n_c^{(12)}}$$

et correspondant donc au rapport signal sur bruit

$$\frac{\sigma_s^{(2)}}{\sqrt{\sigma_s^{(2)2} - \sigma_x^{(2)2}}}$$

## BILAN DE L’APPRENTISSAGE PARTIEL

Il apparaît que l’apprentissage sur les différentes classes de liens provoque la même tendance à capter les régularités dynamiques, de type séquences ou inférences. Pour les signaux sans recouvrement ni ambiguïté temporelle, l’utilisation d’une couche dynamique peut même s’avérer superflue. Pour des signaux plus complexes, la mise en œuvre de l’apprentissage sur tous les liens devrait permettre de mettre en commun les effets produits localement, afin d’augmenter la correspondance entre le signal issu de la couche dynamique et le signal imposé sur la couche primaire.

Naturellement, le point central de ce travail repose sur une évaluation des possibilités offertes par la couche dynamique, en coordination avec les autres couches. L’apprentissage doit permettre au système de modifier son organisation dynamique afin d’imiter au mieux les caractéristiques de la stimulation. Dans ce cadre, deux écueils sont à éviter :

- l'apprentissage sur les liens latéraux est prépondérant, et dicte les valeurs de la sortie. Dans ce cas, la couche dynamique n'a pas d'utilité, et se comporte à peu près comme un générateur de bruit.
- à l'issue de l'apprentissage, seul le comportement *réactif* (Une même impulsion sur la couche primaire produit environ la même réponse impulsionnelle de la couche dynamique, *quelle que soit la configuration spatiale*) de la couche dynamique sert à déterminer la réponse. La couche dynamique se comporte de manière passive en transmettant, via un changement sur ses activations moyennes, les impulsions envoyées sur la couche primaire.

Après apprentissage, ces deux points seront systématiquement testés de la manière suivante :

- Réinitialisation des liens directs et des liens récurrents. La couche dynamique se comporte alors a priori de manière tout à fait différente, et seuls les liens retour et les liens latéraux sont maintenus. Si le réseau maintient la qualité de sa réponse, on sait alors que les liens latéraux sont prépondérants, et donc que la couche dynamique est sans fonction réelle (le signal en provenance des liens retour ne fait que bruyier le signal provenant des liens latéraux).
- Maintien de l'intégrité de tous les liens ; seul le motif conditionnant change (on change les seuils sur les neurones de la couche dynamique). Sachant qu'un tel changement sur les seuils modifie profondément l'organisation spatio-temporelle du réseau *sans changer le comportement réactif*<sup>1</sup>, un maintien de la qualité de la réponse indique alors que le circuit d'activation de la couche dynamique n'est pas prépondérant pour déterminer la réponse, et donc que la couche dynamique a un rôle passif.

Dans le cas où ces deux tests produisent une dégradation sensible de la réponse, on peut affirmer que le signal de la couche dynamique influence significativement la réponse. Le rôle de la section suivante est de mettre en avant les potentialités supplémentaires apportées par l'utilisation de cette couche.

## 5.2.2 Apprentissage de séquences

Dans cette partie, on évalue la capacité du système à apprendre des séquences prédéfinies. Pour une séquence donnée, l'apprentissage est effectué sur un grand nombre de réseaux afin de déterminer un comportement générique pendant l'apprentissage.

On se concentre essentiellement sur l'aspect temporel de l'information à apprendre, puisque à chaque instant un seul neurone de la couche primaire est stimulé. Ces résultats peuvent cependant être très facilement généralisés à des séquences de motifs orthogonaux, c'est à dire dont le recouvrement peut être

<sup>1</sup>En effet, le changement de seuils agit de façon à peu près linéaires sur le potentiel des neurones, et par extension sur leur activation (voir page 112).

considéré comme négligeable (par exemple, des motifs aléatoires avec  $f^{(1)} = 10^{-2}$ , en supposant la taille de la couche primaire bien supérieure, de l'ordre de  $N^{(1)} = 10000$ ; la probabilité pour que deux motifs aient des points en commun est alors faible).

### Séquences non ambiguës

L'apprentissage de séquences non ambiguës (voir page 193) permet ici d'illustrer la méthode d'évaluation des résultats de l'apprentissage.

On fixe par avance les paramètres  $g$ ,  $\alpha$ ,  $N^{(1)}$ ,  $N^{(2)}$ , la période  $\tau$ , la séquence  $s_\tau$  et le nombre de présentations  $n$ . Rappelons que par défaut, un motif conditionnant  $D$  est présent sur la couche dynamique à chaque instant. Après une centaine de transitoires, la dynamique d'apprentissage est itérée sur  $n\tau$  pas de temps. À l'issue de l'apprentissage, on modifie le signal en entrée avec une séquence dont on a supprimé une partie des valeurs. Pour la simulation qui suit, la séquence d'apprentissage est  $s_8 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ , la séquence test est  $s'_8 = (1, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0)$  où la valeur 0 signifie une absence de stimulation.

Pour évaluer la réponse du réseau, on regarde les signaux d'activation sur la couche primaire pendant les plages temporelles où la stimulation est absente. Ces signaux donnent une information sur la manière dont le système complète les informations absentes. On calcule à chaque instant l'indice du neurone dont le signal d'activation est maximal. On a alors un uplet  $s_{\max}$  que l'on compare avec l'uplet qui correspond aux valeurs d'indices qu'on a enlevées de la séquence initiale :  $s_{\text{ref}}$ . Pour l'exemple donné,  $s_{\text{ref}} = (2, 3, 4, 6, 7, 8)$ . La réussite de l'apprentissage est donnée par le rapport entre le nombre d'indices correctement restitués et la durée totale des plages où le signal est absent. En moyennant cette réussite sur plusieurs réseaux, on obtient un taux de réussite moyen  $R_{\text{app}}$ .

Pour chaque réseau, on change ensuite le motif conditionnant, ce qui a pour effet de modifier la structure du circuit d'activation. On calcule le nouveau taux de réussite  $R_{\text{cond}}$  dans ces conditions. Comme vu précédemment, la valeur de ce taux nous aide à mesurer la réussite de l'apprentissage. Il repose sur les seules propriétés réactives de la couche dynamique. Plus l'écart entre  $R_{\text{app}}$  et  $R_{\text{cond}}$  est important, plus la structure de circuit interne à la couche dynamique joue un rôle prépondérant dans la restitution du signal appris.

En dernier lieu, on réinitialise les liens directs  $J^{(21)}$  et les liens récurrents  $J^{(22)}$ . Ces nouvelles valeurs sont donc sans rapport avec l'apprentissage précédemment effectué, et la nouvelle dynamique qui se développe est sans lien avec la dynamique précédente. On peut alors considérer que le signal retour se comporte comme un bruit. Dans ces conditions, on calcule à nouveau le taux de réussite  $R_{\text{test}}$ , cette fois ci avec le motif conditionnant utilisé pendant l'apprentissage. La valeur de ce taux nous donne une indication sur la part de réussite qui provient des liens latéraux. En l'absence d'apprentissage sur les liens latéraux, ce taux correspond au taux de réussite que l'on obtiendrait en déterminant la réponse aléatoirement,

et sert alors de valeur plancher par rapport aux deux autres taux de réussite.

Sur la figure 5.7, on présente l'évolution de  $R_{\text{app}}$ ,  $R_{\text{cond}}$  et  $R_{\text{test}}$  en fonction du nombre  $n$  de présentations de la séquence pendant l'apprentissage. Chaque triplet  $(R_{\text{app}}, R_{\text{cond}}, R_{\text{test}})$  est issu d'une moyenne sur 50 réseaux, et pour chaque valeur de  $n$  on tire des réseaux différents. La figure du haut correspond à un apprentissage sans liens latéraux, et la figure du bas correspond à un apprentissage avec liens latéraux. Pour tracer chacune de ces figures, il a fallu mettre en œuvre l'apprentissage sur 5000 réseaux différents.

**Absence d'apprentissage sur les liens latéraux (figure du haut)** On constate en premier lieu qu'il y a statistiquement *une durée d'apprentissage optimale*, qu'on peut situer aux alentours de  $n = 50$  présentations ( $n\tau = 400$  pas d'apprentissage), pour laquelle le taux de réussite est de l'ordre de 0.90, ce qui correspond au fait qu'une grande majorité de réseaux parvient à compléter correctement le signal partiel. On appellera  $n_c^{(12)}$  le nombre critique de présentations.

On sait que l'écart-type du signal retour, nul à l'initialisation parce que les poids sont nuls, augmente en cours d'apprentissage. Plus cet écart-type est élevé, plus le signal retour influence le potentiel des neurones de la couche primaire. Ainsi, au delà d'une certaine durée critique d'apprentissage, le signal retour est capable de produire une activation soutenue sur la couche primaire. C'est autour de cette valeur critique que s'opère le retournement de tendance observé. En effet :

- Pour une valeur légèrement inférieure à la valeur critique, le signal retour reproduit une version affaiblie du motif d'entrée sans jamais se substituer à lui. Il a les caractéristiques d'une évocation, et ne permet pas d'entretenir l'activation de la couche primaire, qui dépend essentiellement de la stimulation. Néanmoins, lorsqu'un signal partiel est présenté sur la couche primaire, le signal retour reproduit les étapes suivantes de la séquence, et l'activation retour de faible amplitude sur la couche primaire participe de la restitution de la séquence complète, ce qui améliore la qualité de la réponse.
- Pour une valeur légèrement supérieure à la valeur critique, le signal retour tend à se substituer à la stimulation. Si en particulier le signal retour provoque une activation parasite d'un neurone n'appartenant pas à la séquence, celle-ci sera amplifiée par l'apprentissage puisqu'elle est reproduite sur la couche primaire. De plus, cette activation "fantôme" de la couche primaire tend à se renforcer très rapidement aux pas d'apprentissage suivants, en exploitant le taux d'amplification très important sur la partie linéaire de la fonction de transfert. Ce neurone tend finalement à supplanter d'autres valeurs d'activation correspondant au déroulement normal de la séquence. Le signal retour devient alors de moins en moins homogène, avec de grosses différences d'écart-type d'un neurone à l'autre. Le système se met à fonctionner en boucle fermée, en se confortant de plus en plus dans son erreur. Le signal interne prend le pas sur le signal externe, et la réponse se détériore

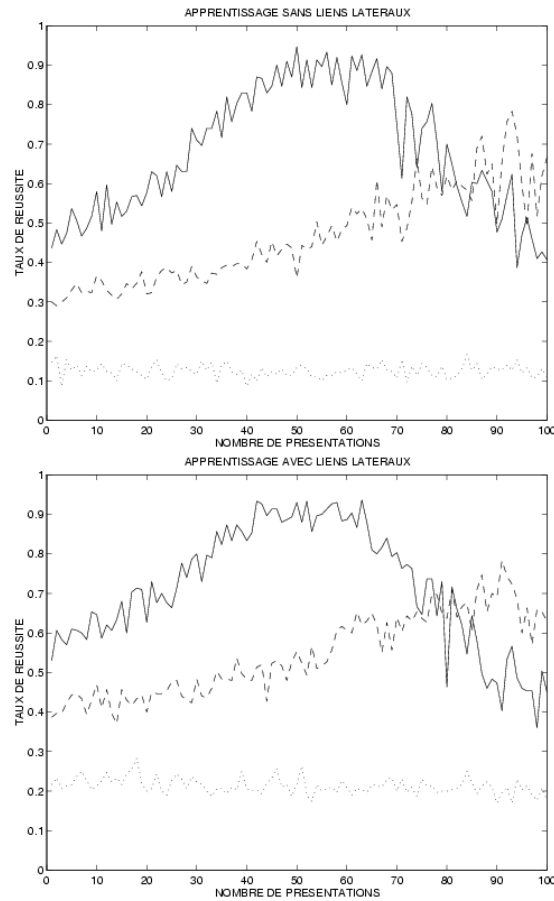


FIG. 5.7 – Évolution des taux de réussite avec le nombre de présentations pendant l'apprentissage, signal non ambigu. En ligne pleine :  $R_{app}$ . Pointillé long :  $R_{cond}$ . Pointillé fin :  $R_{test}$ . La séquence d'apprentissage est  $s_8 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ , et la séquence test  $s'_8 = (1, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0)$ . Figure du haut : pas d'apprentissage sur les liens latéraux. Figure du bas : on autorise l'apprentissage sur les liens latéraux. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ .



rapidement.

Il apparaît donc que l'écart-type du signal retour est une valeur critique pour déterminer l'arrêt du processus d'apprentissage.

Comme on l'a vu précédemment (page 201),  $n_c^{(12)}$  fournit une estimation du rapport signal sur bruit de l'activité de la couche dynamique. On trouve une valeur de  $\sigma_s^{(2)} \simeq 0.1$ , soit un rapport signal sur bruit à 0,44. L'amplitude du bruit est environ deux fois plus importante que celle du signal. Autrement dit, lorsqu'un lien  $J_{ij}^{(12)}$  est renforcé par l'apprentissage, tout se passe comme si l'activité de la couche dynamique correspondait deux fois sur trois à des fluctuations aléatoires de l'activité de la couche dynamique et seulement une fois sur trois à une information pertinente. L'apprentissage nécessite donc une certaine durée pour effectuer en quelque sorte un tri sur les signaux à extraire de l'activité de la couche dynamique.

Le comportement du taux  $R_{\text{cond}}$ , relatif à un changement de motif conditionnant, est également intéressant. Il donne des indications sur l'évolution du comportement réactif en cours d'apprentissage, qui traduit essentiellement l'effet de l'apprentissage sur les liens directs. On constate que la qualité de la réponse réactive continue à augmenter assez longtemps après que le taux de réussite global se soit mis à chuter. Cela traduit le mécanisme suivant : le changement de motif conditionnant statique produit une réorganisation dynamique qui change le circuit d'activation sur lequel s'appuie le signal retour. On remélange la donne en quelque sorte, si bien que les signaux retour non homogènes dans le cas où  $n > n_c^{(12)}$ , retrouvent leur homogénéité, qui leur permet de faire transiter la réponse réactive du réseau.

On constate qu'il n'y a pas d'évolution sur la valeur de  $R_{\text{test}}$ , qui correspond au taux de réussite d'un choix aléatoire parmi six réponses possibles (16% de réussite).

**Apprentissage sur les liens latéraux (figure du bas)** La durée optimale ne varie selon qu'il existe ou non un apprentissage sur les liens latéraux, ce qui indique qu'elle dépend pour l'essentiel du comportement des poids retour  $J^{(12)}$  (c'est en effet le signal retour  $c^{(12)}(t)$  seul qui, pour la figure du haut, détermine la réponse du système).

Si on compare maintenant la figure du bas (apprentissage autorisé sur les liens latéraux) avec celle de gauche (pas d'apprentissage sur les liens latéraux), on constate une augmentation sensible et à peu près similaire sur les taux  $R_{\text{app}}$ ,  $R_{\text{cond}}$  et  $R_{\text{test}}$ . Les liens latéraux participent à hauteur de 10% à la qualité de la réponse. Il apparaît sur la figure que le signal provenant des liens latéraux tend à confirmer celui qui vient des liens retour. Les deux couches coopèrent dans l'élaboration de la réponse, et permettent donc de lever des incertitudes. On constate néanmoins que le taux de réussite maximal n'augmente pas significativement, ce qui semble indiquer qu'il reste toujours un petit nombre de réseaux "réfractaires" à l'apprentissage de cette séquence.

On peut noter que le signal provenant des liens latéraux repose sur l'activité de la couche primaire au temps  $t - 1$ , et que le signal provenant des liens retour a transité par la couche dynamique, et traduit en partie l'activité de la couche primaire au temps  $t - 2$ . Le signal d'activation de la couche primaire, qui repose sur l'addition du signal latéral  $c^{(11)}(t)$  et du signal retour  $c^{(12)}(t)$ , fusionne donc l'information sur l'état du réseau à  $t - 1$  et à  $t - 2$  pour estimer l'état la plus probable au temps  $t$ . Cette capacité purement réactive est donc favorable à la résolution des ambiguïtés<sup>2</sup> de degré 1.

### Contrainte sur la durée de la séquence

Le dépassement du nombre de présentations critique  $n_c^{(12)}$  n'est pas le seul facteur qui limite la qualité de la réponse fournie par le réseau. La longueur de la séquence à apprendre semble un facteur limitatif important. Le système a des difficultés pour apprendre des séquences trop longues. Cette difficulté repose sur les limitations de la couche dynamique en termes de capture de fréquence. On a vu page 149 que la présentation d'une stimulation de période  $\tau$  peut produire sur la couche dynamique un signal dont la fréquence dominante du spectre est un harmonique de la fréquence fondamentale  $1/\tau$ . Pour des valeurs de  $\tau$  petites, c'est à dire inférieures à 8-10, la fréquence fondamentale reste significativement présente dans le spectre issu du signal moyen  $m_N(t)$ , ce qui assure, avec une bonne probabilité, que certains neurones possèdent cette fréquence fondamentale dans leur signal d'activation  $x_i(t)$ . Il est encore possible dans ces conditions d'obtenir la restitution de la séquence complète à partir de l'activité de la couche dynamique. Plus  $\tau$  augmente, plus il devient difficile d'obtenir une bonne restitution. Le système peut alors produire des motifs d'activation très proches pour deux motifs élémentaires distincts de la séquence d'entrée. Dans ces conditions, la discrimination n'est plus possible. Les figures 5.8 et 5.9 montrent l'évolution de la qualité de la réponse en fonction de la longueur de la séquence que l'on veut apprendre. La qualité de la réponse tend à décroître avec la longueur de la séquence à apprendre.

À ce stade, il semble que notre réseau soit plus adapté à l'apprentissage de nombreuses séquences assez courtes qu'à celui d'une seule séquence très longue<sup>3</sup>. Avant de regarder comment il est possible d'apprendre plusieurs séquences à un même réseau, on se penche tout d'abord sur l'apprentissage de séquences ambiguës temporellement.

<sup>2</sup>définition du degré d'ambiguïté page 194.

<sup>3</sup>Si l'on accepte l'analogie, on peut remarquer que de nombreux tests psychologiques semblent indiquer que l'empan de la mémoire de travail est limitée à un nombre restreint (6 ou 7) d'éléments décorrélés.

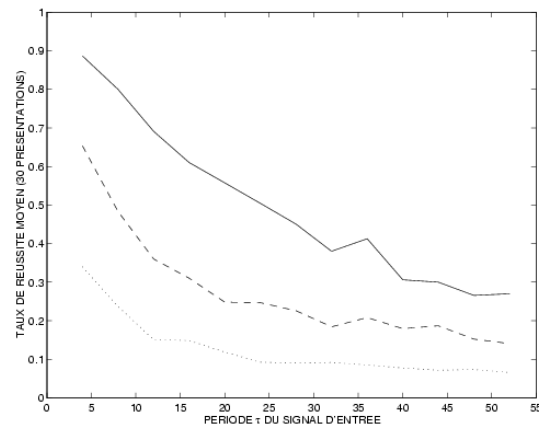


FIG. 5.8 – **Décroissance du taux de réussite selon la longueur de la séquence.** Pour chaque valeur de  $\tau$  comprise entre 4 et 50, la figure donne les taux de réussite pour un apprentissage effectué en 30 présentations, en moyenne sur 50 réseaux. En ligne pleine :  $R_{app}$ . Pointillé long :  $R_{cond}$ . Pointillé fin :  $R_{test}$ . Paramètres  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

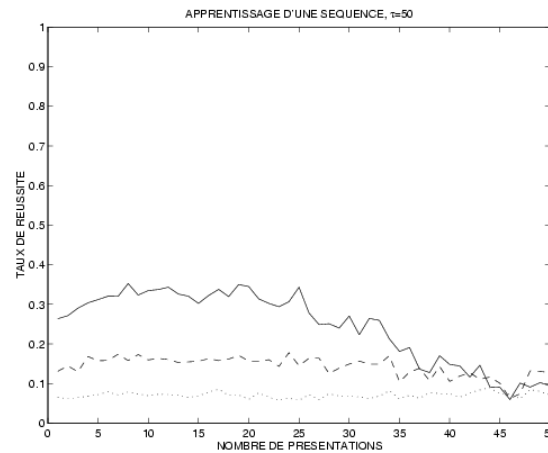


FIG. 5.9 – **Évolution du taux de réussite pour une séquence de longueur  $\tau = 50$ .** La figure donne l'évolution en fonction du nombre de pas d'apprentissage des trois taux de réussite. En ligne pleine :  $R_{app}$ . Pointillé long :  $R_{cond}$ . Pointillé fin :  $R_{test}$ . Paramètres  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

## Séquences ambiguës

Les données qu'on a examiné jusqu'à présent nous fournissent des renseignements intéressants sur le fonctionnement du système et la manière dont les différentes classes de liens coopèrent. Cette coopération permet la reconstitution d'une séquence non-ambiguës à partir de quelques éléments de cette séquence. En inscrivant la période de cette séquence dans son circuit, la couche dynamique participe à cette reconstitution.

Cette première vérification faite, on cherche à utiliser plus spécifiquement les propriétés de la couche dynamique. L'apprentissage de séquences ambiguës complique la structure temporelle du signal à apprendre. Avec un signal ambigu de degré  $\geq 2$ , la configuration spatio-temporelle de la couche dynamique est décisive, et permet en particulier d'associer à deux éléments identiques de la séquence des étapes différentes du circuit d'activation interne. L'apprentissage d'une séquence ambiguë nécessite une mémoire dynamique des états passés.

On a effectué une mesure sur la qualité de l'apprentissage dans les mêmes conditions que précédemment. La séquence a pour période  $\tau = 8$  et possède un degré d'ambiguïté de 3 :  $s_8 = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 4)$ . Lors de la présentation de la séquence, chaque entrée est donc stimulée deux fois.

Après apprentissage, la séquence de test est  $s'_8 = (1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0)$ . Cette séquence est univoque (il n'y a qu'une seule façon de placer les éléments absents conformément à la séquence), et une bonne restitution nécessite donc une mémorisation de la structure complète de la séquence (le 1 doit être identifié comme le premier élément, et le 2 comme le cinquième élément).

Les taux de réussite pour l'apprentissage de cette séquence sont présentés figure 5.10. La structure de la courbe d'apprentissage de la séquence ambiguë est très similaires à celle de la séquence non-ambiguë. On a une durée d'apprentissage optimale sur les liens retour assez comparable, de l'ordre de  $n_c^{(12)} = 50$ , à laquelle correspond un taux de réussite compris entre 88 % (à gauche) et 92% (à droite). Pour  $n = n_c^{(12)}$ , cela semble indiquer qu'une grosse majorité de réseaux qui reproduit correctement la séquence ambiguë.

Il apparaît donc que l'ambiguïté temporelle peut être levée par le système dans la plupart des cas. Le circuit d'activation de la couche dynamique sert de "réservoir de périodes", et permet d'associer à chaque étape du circuit un état de la couche primaire. Tout se passe comme si les liens retour sélectionnaient le signal de champ du paquet de neurones correspondant à une étape bien déterminée du circuit. Par exemple, lorsque les neurones du groupe atteignent leur niveau d'activation maximale, le neurone associé de la couche primaire tend à atteindre sa valeur d'activation maximale à l'instant suivant.

On peut d'ailleurs remarquer que le nombre de présentations optimales  $n_c^{(12)}$  est sensiblement le même que précédemment, alors que les neurones de la couche primaire sont activés deux fois par séquence, soit en tout  $2n$  fois pour un apprentissage. On a ici une illustration du fait que, pour un neurone de la couche

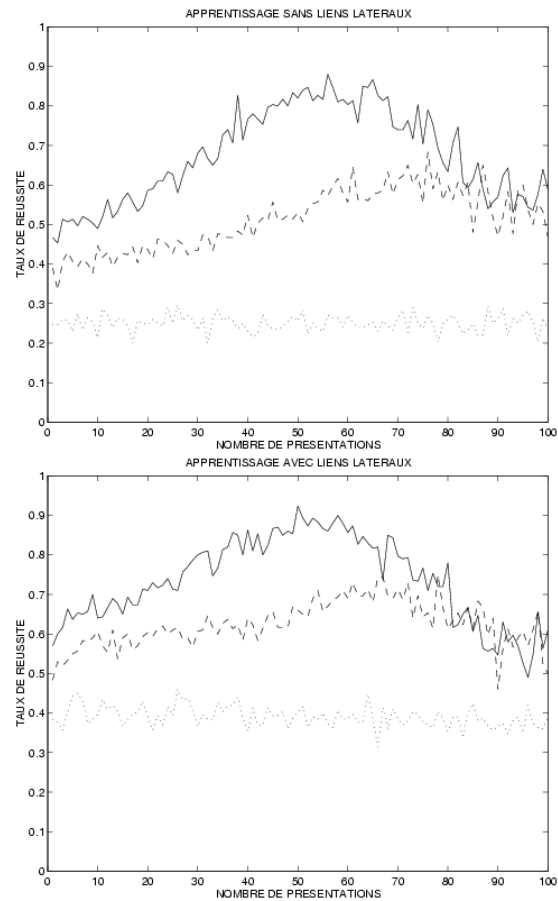


FIG. 5.10 – Évolution des taux de réussite avec le nombre de présentations, signal ambigu. En ligne pleine :  $R_{app}$ . Pointillé long :  $R_{cond}$ . Pointillé fin :  $R_{test}$ . La séquence d'apprentissage est  $s_8 = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 4)$ , et la séquence test  $s'_8 = (1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0)$ . Figure du haut : pas d'apprentissage sur les liens latéraux. Figure du bas : on autorise l'apprentissage sur les liens latéraux. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

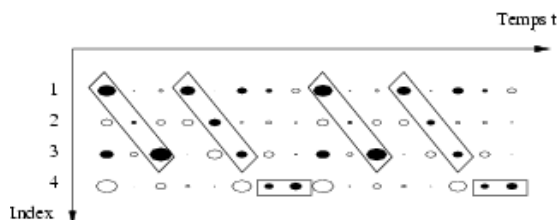


FIG. 5.11 – **Signal retour  $c^{(12)}(t)$ , après apprentissage d'une séquence ambiguë de degré 3.** La séquence apprise est du type  $(1,2,3,1,2,3,4,4)$ , et est présentée 50 fois pendant l'apprentissage. On a représenté le signal retour sur les 4 premiers neurones de la couche primaire, après apprentissage, et avec une stimulation partielle à 25%. Les points entourés désignent les neurones qui réalisent le maximum d'activation à un instant donné (sur une colonne). Paramètres :  $N^{(1)} = 100$ ,  $N^{(2)} = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ .

primaire participant à deux étapes de la séquence, ce ne sont pas les mêmes liens retour qui sont renforcés. À chaque étape correspond un jeu de liens retour différent.

Une bonne reconstitution nécessite donc un circuit d'activation régulier. L'apprentissage sur les liens récurrents sert précisément à renforcer cette structure. Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, la configuration dynamique est néanmoins plus fragile que la configuration spatiale. Un changement du motif conditionnant tend à produire un nouveau circuit, dont les étapes ne sont pas spécifiquement connectées à des neurones particuliers de la couche primaire. Ainsi, le changement du motif conditionnant n'autorise plus qu'une réponse réactive qui ne permet pas de lever l'ambiguïté. C'est ce qu'on observe sur la valeur de  $R_{\text{cond}}$  qui plafonne à 60% (figure du haut), et 70 % (figure du bas), ce qui fait de l'ordre de deux erreurs en moyenne, que l'on peut relier à l'ambiguïté sur la 4ème et la 7ème étape de la séquence.

On voit par ailleurs que l'apprentissage sur les liens latéraux permet d'augmenter légèrement le taux de réussite, en renforçant vraisemblablement les réponses associées aux parties linéaires de la séquence, de type 1,2,3...

Quant à la valeur de  $R_{\text{test}}$ , de l'ordre de 25 % sur la figure du haut, elle est comme précédemment comparable à un choix aléatoire effectué sur les sorties.

La figure 5.11 donne sur un réseau un exemple de signal retour après apprentissage de la séquence ambiguë. On a entouré les valeurs correspondant au maximum sur les quatre signaux à un instant donné.

### Apprentissage de plusieurs séquences

Comme on l'a vu au chapitre 4, la couche dynamique est capable, après apprentissage, de produire un signal spécifique lorsqu'on la stimule avec l'entrée

statique associée au cours du processus d'apprentissage. Cette propriété permet d'inscrire sur un même réseau plusieurs organisations dynamiques différentes, qui peuvent être activées à la commande.

Cette propriété peut bien sûr être exploitée sur le nouveau modèle. À chaque motif conditionnant  $D_m$  (gaussien, de moyenne  $\bar{D} = -0.4$  et d'écart-type  $\sigma_D = 0.3$ ) on associe pour les besoins de l'apprentissage une séquence  $s_{m,\tau}$  que l'on projette sur la couche primaire lorsque le motif  $D_m$  est présent.

Pendant l'apprentissage, les associations  $(s_{m,\tau}, D_m)$  sont présentées les unes à la suite des autres, en laissant à chaque fois une soixantaine de transitoires, et en itérant la dynamique d'apprentissage sur une durée  $\tau_m$ . Ce passage en revue de toutes les séquences compte comme une présentation, et correspond en tout à  $\sum_m \tau_m$  pas d'apprentissage. La valeur de  $n$  donne le nombre de présentations.

Pour l'exemple présenté, toutes les séquences apprises sont de période 6, et non ambiguës. De plus, les différentes séquences ne possèdent aucun neurone commun. Il y a en tout 10 séquences qui activent les neurones numérotés de  $6(m-1)+1$  à  $6m$ . On a calé la taille de la couche primaire sur les caractéristiques des stimulations, soit  $N^{(1)} = 60$ , autrement dit tous les neurones de cette couche appartiennent à l'une ou l'autre des séquences. On autorise l'apprentissage sur tous les liens.

À l'issue de l'apprentissage, on calcule les taux de réussite en présentant successivement 10 séquences incomplètes qui stimulent un neurone sur 3, soit  $s'_{m,6} = (6(m-1)+1, 0, 0, 6(m-1)+4, 0, 0)$ , avec le motif  $D_m$  associé sur la couche dynamique. Le taux  $R_{\text{app}}$  donne alors le rapport entre le nombre de réponses correctes et le nombre total de réponses testées. On compare ce taux avec le taux  $R_{\text{cond}}$  que l'on obtient en stimulant le réseau avec  $s'_{m,6}$  et en mettant un mauvais motif conditionnant, appartenant cependant à l'ensemble utilisé. Le taux  $R_{\text{test}}$  correspond comme précédemment au taux de réussite obtenu lorsque l'on réinitialise les poids afférents à la couche dynamique.

La figure 5.12 donne l'évolution de  $R_{\text{app}}$ ,  $R_{\text{cond}}$  et  $R_{\text{test}}$  en fonction du nombre de présentations des séquences pendant l'apprentissage. La moyenne a été effectuée sur 10 réseaux pour chaque valeur de  $n$ , au lieu de 50 dans le cas précédent, pour des raisons de temps de calcul (4 nuits sur Sparc 10). Ceci qui explique l'aspect plus accidenté de la courbe.

La courbe présente les mêmes caractéristiques que précédemment : on constate qu'il y a un nombre de présentations optimal au delà duquel la qualité de la réponse du réseau chute rapidement. Ce nombre optimal  $n_c^{(12)}$  est légèrement inférieur au nombre obtenu précédemment, de l'ordre de 30 à 40 itérations. Le taux de réussite maximal atteint est de l'ordre de 88%, et le taux moyen pour  $n$  entre 30 et 40 est de l'ordre de 80%. On peut penser, comme cela se confirme sur des exemples individuels d'apprentissage, que sur 10 motifs présentés, environ 8 sont bien reproduits.

On remarque que la chute du taux de réussite, lorsque  $n_c^{(12)}$ , est dépassé est beaucoup plus "catastrophique" que sur les exemples précédents. Ce point illustre

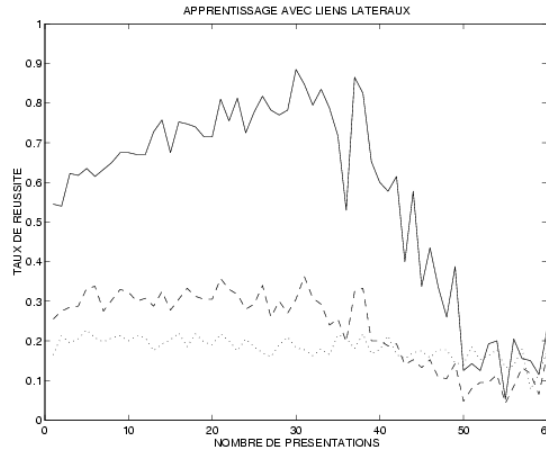


FIG. 5.12 – Évolution des taux de réussite avec le nombre de présentations, pour l’apprentissage de 10 associations entre un motif dynamique et un motif conditionnant. En ligne pleine :  $R_{app}$ . Pointillé long :  $R_{cond}$ . Pointillé fin :  $R_{test}$ . paramètres :  $N^{(1)} = 60$ ,  $N^{(2)} = 200$ ,  $g = 8$ ,  $\alpha = 0.1$ .

une sensibilité beaucoup plus prononcée à l’effet des activations parasites sur le signal retour. En effet, le test sur la réponse du réseau évalue le maximum sur les 60 signaux d’activation. Il suffit qu’un seul parmi les 60 neurones présente une activation parasite pour tout fausser. Dès lors que les poids retour atteignent des valeurs critiques, l’hétérogénéité sur les 60 sorties tend rapidement à faire chuter le taux de réussite.

Le comportement du taux  $R_{cond}$ , qui plafonne à 30% jusqu’à  $n_c^{(12)}$ , montre que la présentation du mauvais motif conditionnant ne permet pas d’obtenir la bonne réponse. On voit donc que l’évocation de la séquence apprise est bien dépendante de la présence du motif statique associé pendant l’apprentissage. Seule la présence de ce motif permet de reconstituer la séquence apprise.

Le même système possède donc différents modes de fonctionnement dépendant des motifs conditionnants. À chaque motif conditionnant correspond une séquence de sortie privilégiée, que l’on peut activer ou désactiver à volonté. La couche dynamique tient bien le rôle de “réservoir à dynamiques”.

On a représenté sur la figure 5.13 le comportement dynamique d’un réseau après un apprentissage où chaque association  $(D_m, s_{\tau_m})$  est présentée 40 fois au cours de l’apprentissage. Par ailleurs, les séquences ont une longueur variable, dont la période varie entre  $\tau_m = 2$  et  $\tau_m = 6$ .

On a plus précisément  $s_{1,2} = (1, 2)$ ,  $s_{2,3} = (3, 4, 5)$ ,  $s_{3,4} = (6, 7, 8, 9)$ ,  $s_{4,5} = (10, 11, 12, 13, 14)$ ,  $s_{5,6} = (15, 16, 17, 18, 19, 20)$ ,  $s_{6,2} = (21, 22)$ ,  $s_{7,3} = (23, 24, 25)$ ,  $s_{8,4} = (26, 27, 28, 29)$ ,  $s_{9,5} = (30, 31, 32, 33, 34)$  et  $s_{10,6} = (35, 36, 37, 38, 39, 40)$ . Après apprentissage, on présente successivement les  $m$  motifs  $D_m$  sur une durée de l’ordre de 100 pas de temps, et on regarde le signal d’activation des 40 premiers neurones de la couche primaire. Ces signaux d’activation sont représentés figure



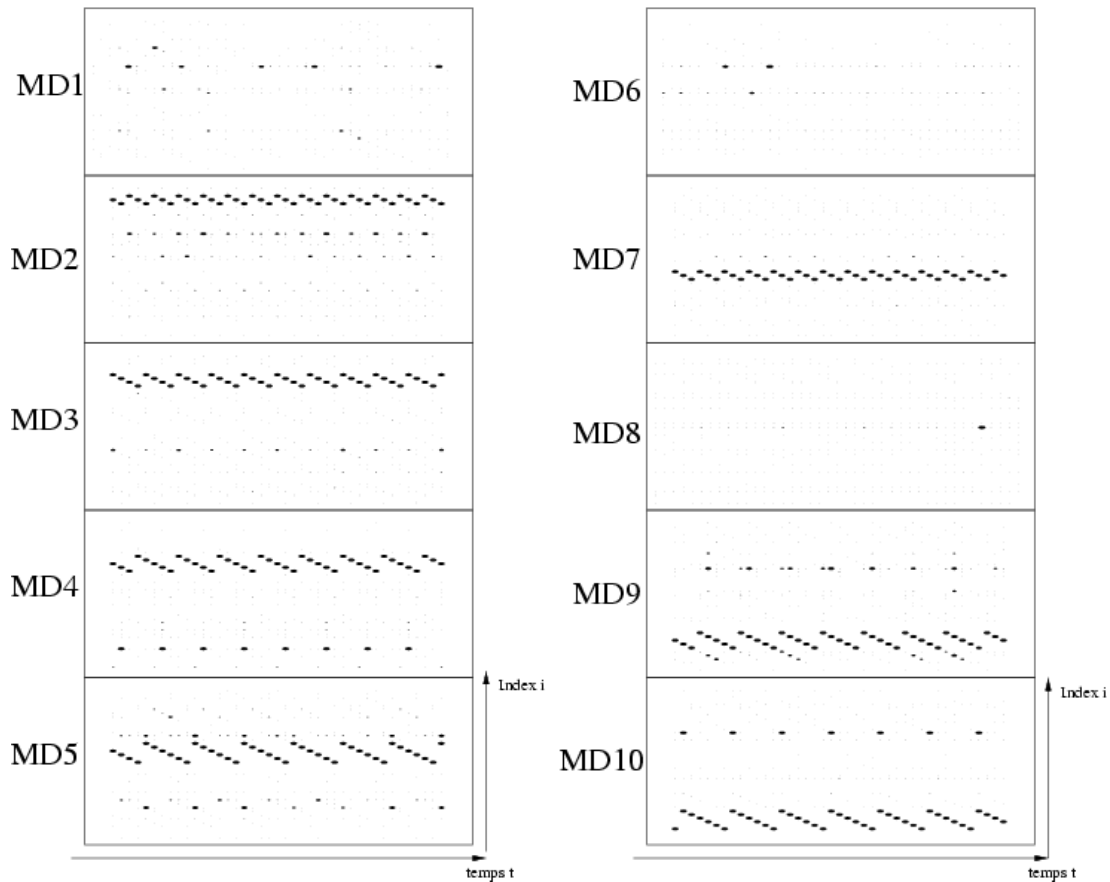


FIG. 5.13 – **Signaux d’activation sur la couche primaire après apprentissage** Chaque motif conditionnant (de 1 à 10) induit une organisation spatio-temporelle sur la couche dynamique qui se traduit par l’excitation via les poids retour des neurones correspondant aux séquences apprises. Pendant l’apprentissage : 40 présentations pour chacune des 10 séquences à apprendre. Apprentissage croisé. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 40$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

### 5.13.

Après apprentissage, la présentation du motif  $D_m$  tend à produire l’activation de la séquence associée sur la couche primaire (pour  $n = 40$ , on a donc dans ce cas légèrement dépassé la valeur critique). On voit qu’environ 7 séquences sur 10 sont nettement reproduites sur la couche primaire. On voit également qu’il existe quelques neurones parasites qui tendent à s’activer pour le mauvais motif conditionnant, et forment une sorte de bruit de fond sur le signal retour. Pour les motifs conditionnants 1, 6 et 8, l’activité de fond sur la couche primaire est essentiellement chaotique, et aucune séquence ne se dégage sur le signal retour.

Il faut noter que l’activité qui se développe sur la couche primaire est entièrement pilotée par la couche dynamique, puisqu’aucun signal n’est projeté sur la couche primaire. La seule information provient des motifs conditionnants, et

porte sur la configuration spatiale des activations, qui sert donc de guide pour la mise en place du bon circuit d'activation.

### 5.2.3 Signaux incomplets et bruités

Jusqu'à présent, on s'est essentiellement intéressé aux aspects temporels du signal à apprendre en réduisant les motifs à une stimulation sur un seul neurone de la couche primaire. On a vu qu'en tronquant temporellement un signal, le réseau est capable de compléter les éléments manquants, voire de reproduire complètement la séquence.

On souhaite à présent effectuer un apprentissage sur des signaux qui se rapprochent de signaux naturels, c'est à dire :

- Une séquence est composée de motifs qui ne se réduisent plus à un seul neurone. En moyenne,  $f^{(1)}N^{(1)}$  neurones de la couche primaire sont activés, où  $f^{(1)}$  est la densité moyenne du motif.
- Il peut éventuellement y avoir recouvrement entre deux motifs de la séquence (deux motifs différents peuvent avoir des neurones en commun).

Par ailleurs, pendant la période de test, les motifs composant la séquence n'apparaissent pas toujours de la même façon : ils peuvent être tronqués ou bruités (mais pas dilatés ni déformés).

Le système est appelé à reconstituer également les caractéristiques spatiales de l'information présentée sur son entrée, c'est à dire compléter les motifs incomplets et éliminer le bruit.

#### Signaux incomplets

On utilise comme séquence d'apprentissage un motif  $I^{(1)}(t)$  de taille  $N^{(1)} = 3600$ , qui peut être disposé sous forme de carré  $60 \times 60$ , et représente alors le déplacement d'un petit bonhomme en six étapes (rappelons qu'il n'y a aucune géométrie de connexion dans la couche primaire, donc la disposition visuelle, signifiante pour nous, ne se distingue pas, pour le réseau, d'une disposition quelconque contenant le même nombre d'éléments). La période est donc de 6, la densité vaut 0,075 et le recouvrement est de 1%. Par ailleurs, la taille de la couche dynamique reste  $N^{(2)} = 200$ . Le signal est représenté figure 5.14.

La séquence est présentée  $n = 40$  fois au cours de l'apprentissage, en présence d'un motif conditionnant. Pour des raisons de rapidité et d'espace mémoire, l'apprentissage n'est pas autorisé sur les  $3600^2$  liens latéraux qui pour ce modèle n'ont donc pas d'existence. Après apprentissage, on présente une version tronquée du motif qui ne restitue que la partie supérieure de la stimulation (c'est à dire le déplacement de la tête). Ce signal tronqué fournit environ 25% du signal d'origine. On regarde alors le signal retour  $c^{(12)}(t)$ , représenté sous forme carrée sur la séquence du bas de la figure 5.14 – rappelons que le signal retour n'est pas égal à l'activation  $x^{(1)}(t)$  –.

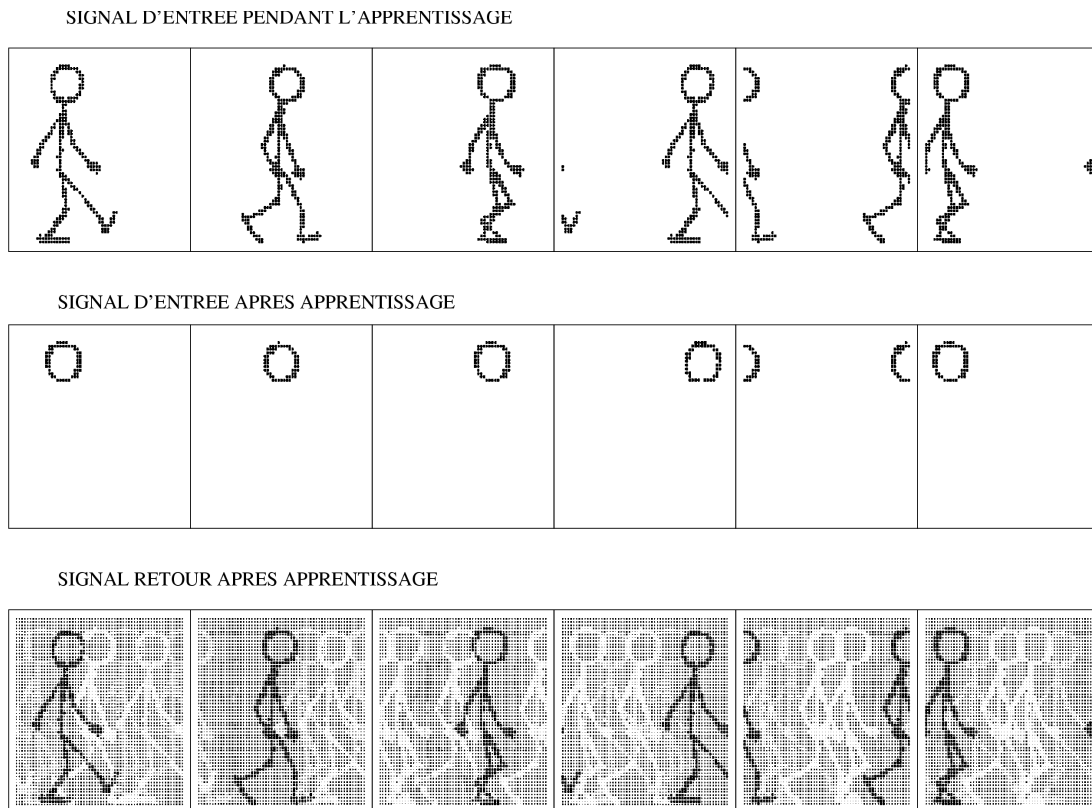


FIG. 5.14 – **Apprentissage sur un signal spatial non bruité.** La séquence du haut représente le signal projeté sur la couche primaire pendant l'apprentissage. La séquence du bas représente le signal retour  $c^{(12)}(t)$  envoyé vers la couche primaire lorsque celle-ci est stimulée par le motif tronqué (séquence du milieu) après l'apprentissage. Dynamique chaotique. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 3600$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

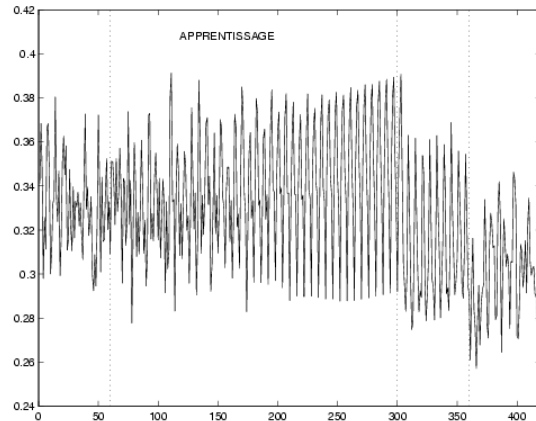


FIG. 5.15 – **Évolution du signal moyen  $m_N^{(2)}(t)$  pendant et après apprentissage.** On a représenté le signal moyen sur les neurones de la couche dynamique.  $t \leq 60$  : dynamique transitoire, motif complet.  $61 \leq t \leq 300$  : dynamique d'apprentissage, motif complet.  $301 \leq t \leq 420$  : dynamique stimulée par le motif tronqué.  $t = 361$  : on change le motif conditionnant. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 3600$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

Après apprentissage, le système est donc capable de reconstituer à chaque instant le motif spatial complet à partir d'une partie de ce motif. On a vérifié par ailleurs que cette propriété de reconstitution n'est pas purement réactive, dans la mesure où la présentation d'un motif conditionnant différent annule la propriété de reconstitution du signal. Cette reconstitution nécessite donc la contribution du circuit d'activation de la couche dynamique.

La figure 5.15 représente l'évolution du signal moyen pendant l'apprentissage, lorsque l'on présente le signal tronqué puis lorsque l'on modifie le motif conditionnant associé. Pendant l'apprentissage, le régime chaotique évolue progressivement vers un régime périodique, dont la période reproduit celle du signal. La présentation du motif tronqué fait passer la dynamique sur un régime légèrement chaotique, qui conserve les propriétés d'organisation du régime périodique, et permet donc de reproduire la séquence apprise sur le signal retour. Lorsque le motif conditionnant est modifié, l'organisation dynamique change complètement et un régime de chaos profond se développe, ne permettant pas de reconstituer le signal.

La séquence apprise ne se distingue pas fondamentalement des séquences simples non ambiguës utilisées dans la section précédente. En ce sens, les résultats obtenus dans le cas précédent concernant le nombre critique de pas d'apprentissage reste valable. Rappelons que ce nombre critique  $n_c^{(12)} = 50$  donne le nombre de présentations au delà duquel le signal retour tend à évoquer sur la couche une activation concurrente de celle qui provient du signal extérieur. La séquence ayant été présentée  $n = 40$  fois pendant l'apprentissage, le signal retour se maintient

à une amplitude faible relativement à l'amplitude de la stimulation. L'influence externe reste prépondérante par rapport à l'influence interne. Ainsi, lorsqu'une stimulation partielle est présentée en entrée, le signal retour n'est pas à un niveau suffisant pour activer significativement les neurones de la couche primaire correspondant aux parties manquantes du signal.

Dans des conditions d'apprentissage plus difficiles (avec un signal bruité), il peut être intéressant d'utiliser l'information du signal retour pour compléter explicitement l'image perçue, c'est à dire de se servir de cette reconstitution pour améliorer la reconstitution ! Pour obtenir un signal retour d'amplitude significative, il faut effectuer un apprentissage dont la durée se rapproche de la durée critique. Bien sûr, cette façon de faire est plus risquée dans la mesure où le dépassement de la valeur critique tend à faire chuter les performances du réseau et à entretenir une activation fantôme sur la couche primaire en l'absence de stimulation.

### Signaux incomplets et bruités

La tâche d'apprentissage est à présent rendue plus difficile par l'ajout d'un bruit sur la séquence d'entrée, tel que le rapport signal sur bruit soit égal à 1. Ainsi, la densité du bruit est égale à celle du motif, et vaut  $f^{(1)} = 0.075$ , afin que la moitié des stimulations ne portent pas d'information. Un tel signal bruité est représenté sur la séquence du haut de la figure 5.16.

On a vu que pour une entrée non bruitée, le rapport signal sur bruit de l'activité de la couche dynamique est inférieur à 0.5 (voir page 206). On a vu également que l'on peut relier ce rapport au nombre critique de pas d'apprentissage. Lorsque le signal d'entrée est lui même bruité à 50%, on trouve un nombre critique  $n_c^{(12)}$  qui est de l'ordre de 100, soit le double du cas non bruité. Cela donne un rapport signal sur bruit de l'ordre de 0.2 sur la couche dynamique. On peut dire pour simplifier que les régularités sont environ deux fois plus faibles que précédemment, et les liens retour mettent environ deux fois plus de temps pour capter ces régularités.

Au cours de l'apprentissage, la séquence bruitée est présentée  $n = 100$  fois. À l'issue de l'apprentissage, le motif initial est tronqué à 75%, et le même niveau de bruit est maintenu. Le signal d'entrée contient alors 4 fois plus d'information aléatoire que d'information significative. Le rapport signal sur bruit vaut 1/4.

La figure 5.16 donne l'aspect de la séquence d'entrée utilisée pendant l'apprentissage (séquence du haut), l'aspect de la séquence présentée après apprentissage (séquence du milieu), et l'aspect du signal retour lorsque cette séquence incomplète et bruitée est mise en entrée.

On constate immédiatement que le signal retour reproduit exhaustivement et sans bruit le signal précédemment appris. On a bien reconstitution de l'information manquante à partir d'une information d'un niveau très faible.

L'apprentissage ayant été poussé aux environs de la valeur critique, il faut no-

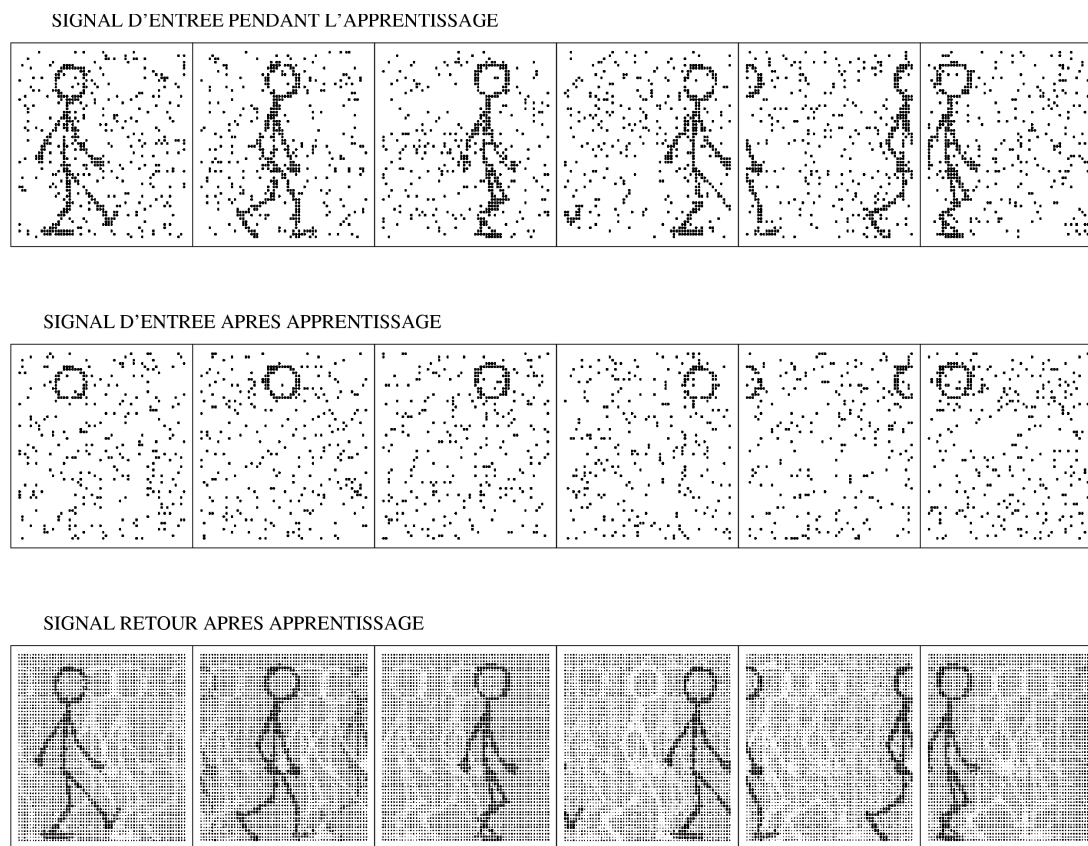


FIG. 5.16 – **Apprentissage sur un signal spatial bruité.** La séquence du haut représente un extrait (le bruit change à chaque tour) du signal projeté sur la couche primaire pendant l'apprentissage. Le rapport signal/bruit vaut 1 (50% des neurones stimulés ne correspondent pas au motif). La séquence du bas représente le signal retour projeté sur la couche primaire lorsque celle-ci est stimulée par le motif tronqué (séquence du milieu) après l'apprentissage. Dynamique chaotique. Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 3600$ ,  $N^{(2)} = 200$ .

ter que le signal retour est cette fois-ci capable d'activer les neurones de la couche primaire. Ainsi, les neurones de la couche primaire correspondant aux bras et aux jambes du bonhomme sont activés en accord avec le signal projeté. La partie de signal correspondant à la tête est complétée (à un niveau d'activation plus faible) par les autres éléments du motif. Dans ces conditions, le motif complété se comporte comme une entrée, et permet donc d'améliorer encore la complétion. Le système se met donc à fonctionner en boucle fermée. Il est capable de s'auto-stimuler. Bien sûr, ce comportement présente le risque de couper le système de ses entrées. Il faut donc dans ce cas vérifier que la stimulation présente sur l'entrée permet dans tous les cas de moduler le signal évoquée en boucle interne.

Sur la figure 5.17, on crée les conditions d'un conflit entre le signal produit en boucle interne et le signal d'entrée. Une anomalie apparaît en effet à partir du septième motif de la séquence d'entrée, afin que celle-ci soit en opposition de phase avec le signal retour. Dans ces conditions, le système est amené à adapter sa dynamique interne aux caractéristiques de l'entrée. Dans la mesure où le signal d'entrée est très incomplet, cette adaptation est difficile. Le réseau doit donc effectuer un choix entre ce qu'il imagine que l'entrée doit être et ce qu'elle est réellement. On constate qu'environ *15 pas de temps* sont nécessaires pour que le signal interne se recale sur son entrée.

Dans ces conditions, le rôle de la dynamique interne apparaît tout à fait crucial. La reconstitution d'un motif complet à partir d'une seule imagerie serait pour tout réseau une tâche difficile (80% des informations d'entrée sont erronées!) si l'on suppose qu'il n'y a aucune connaissance a priori sur la période de la séquence à apprendre (dans le cas contraire, un corrélateur à 6 sorties peut le faire). Notre système n'a aucune connaissance a priori sur la période de la séquence qu'il est amené à apprendre. C'est la régularité issue du défilement de ces entrées et l'inscription de la séquence complète dans la dynamique et les poids synaptiques qui permet en fin de compte cette reconstitution. Dans les conditions difficiles que l'on s'est imposé, le défilement temporel et le régime dynamique propre au système jouent un rôle fondamental dans le processus de reconnaissance.

Comme dans le cas précédent, un changement de motif conditionnant annule tous les effets de l'apprentissage, et le réseau se retrouve alors incapable de reconstituer l'information à partir d'éléments bruités. Cet effet prouve là encore le rôle important de l'organisation dynamique pour l'entretien d'une réponse correcte lorsque très peu d'éléments sont disponibles. Il est en effet nécessaire de prendre en compte toute l'information fournie dans le passé pour élaborer cette réponse.

#### L'APPORT DE LA COUCHE DYNAMIQUE

On peut donc résumer en trois points les apports de la couche dynamique par rapport aux modèles associatifs directs.

- Résolution des ambiguïtés temporelles.

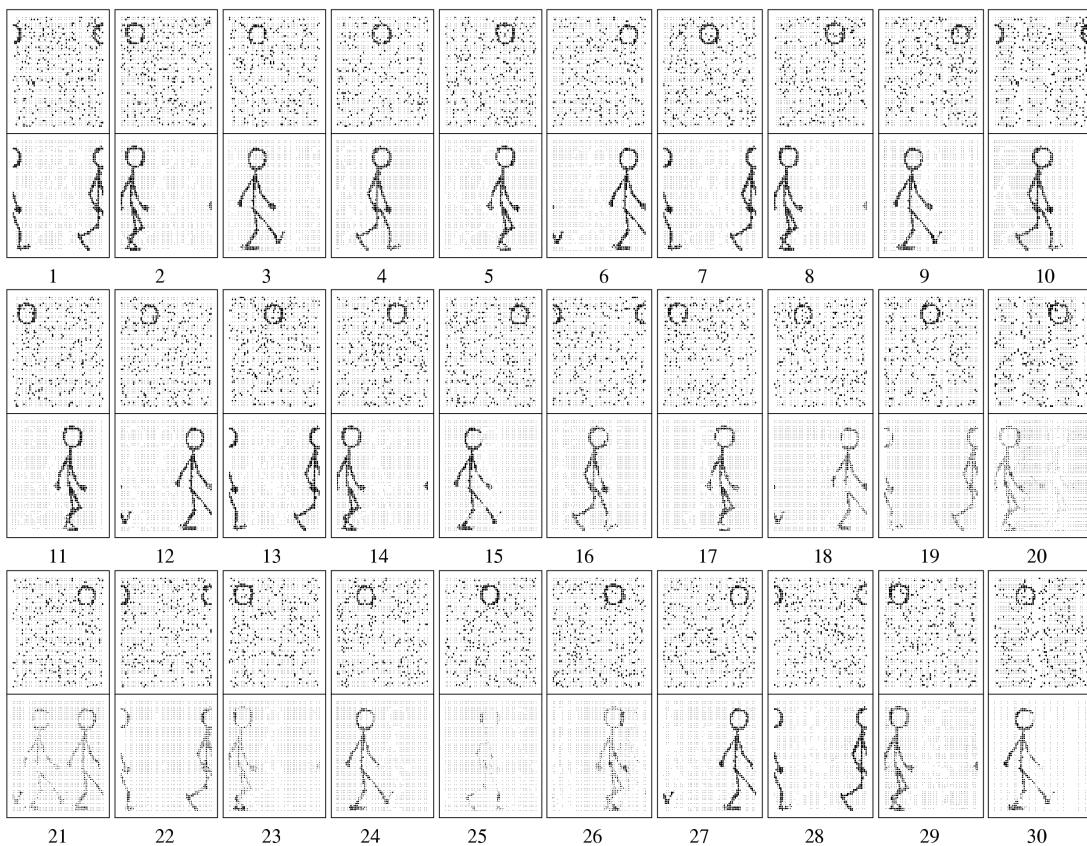


FIG. 5.17 – Évolution sur le signal retour lorsque l'on décale le signal d'entrée. On a représenté 30 étapes de la dynamique, où le carré du haut donne la stimulation et le carré du bas le signal retour. L'entrée est décalée à  $t = 7$ , et le recalage du signal retour s'opère aux alentours de  $t = 22$ . Paramètres :  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 8$ ,  $N^{(1)} = 3600$ ,  $N^{(2)} = 200$ .



- Capacité à produire des comportements différents sur commande, lorsque l'on modifie le motif conditionnant.
- Capacité à reproduire le signal complet sur la base d'une information très incomplète ou bruitée.

Ces trois points reposent sur les caractéristiques dynamiques de la mémoire, c'est à dire la capacité à prendre en compte l'information du passé pour élaborer la réponse présente. Toutes les classes de liens participent à l'élaboration de la réponse, mais le signal issu de la couche dynamique est décisif pour reconstituer des entrées pour lesquelles la connaissance de l'état au temps  $t - 1$  ne suffit pas pour déterminer l'état au temps  $t$ .

Le modèle proposé nous fournit de plus un exemple de coopération entre différentes "aires", fonctionnellement différenciées, mais possédant un mode de communication commun. Une règle d'apprentissage unique permet aux différentes couches d'améliorer la correspondance entre le signal perçu et le signal produit, et de renforcer la régularité de l'organisation interne. On a donc bien une "machine à apprendre", nécessitant peu de paramètres (peu d'information) pour être définie, et capable d'auto-organisation. Même si le détail des échanges entre neurones est assez éloigné de la biologie, le fonctionnement général peut nous fournir des indices sur l'organisation qui se met en place sur les ensembles fonctionnels du cerveau.

### 5.3 Application à la robotique autonome

Un séjour d'une semaine au laboratoire ETIS (ENSEA, Cergy-Pontoise) a permis de mettre en place l'algorithme d'apprentissage dans le cadre d'une tâche de repérage d'un robot mobile dans son environnement [100]. Ce travail est par ailleurs soutenu financièrement par un projet GIS "Sciences de la Cognition" dont le titre est "Codage dynamique par réseaux de neurones récurrents asymétriques", collaboration qui inclut l'ETIS (Cergy-Pontoise), L'ONERA-Centre de Toulouse, l'INSERM U455 (Toulouse) et l'INLN (Institut non linéaire de Nice).

Le robot utilisé à l'ETIS pour les expérimentations est de modèle Koala. Il possède 6 roues, une caméra frontale et une boussole. Il possède de plus un système d'évitement d'obstacles automatique. Le robot est capable de se déplacer dans toutes les directions à différentes vitesses. Un mouvement se décompose en général en une manœuvre de rotation, et une translation à vitesse constante. Ce robot est représenté figure 5.18.

La problématique est la suivante : étant données les informations disponibles sur les capteur, le système doit apprendre à se repérer en explorant son environnement. Le choix des mouvements nécessite un système de traitement qui analyse de façon détaillée des données de l'environnement, et prend également en compte des indicateurs internes qui décrivent l'évolution des "besoins" du système. Le système fonde son action à la fois sur des données externes et des données internes. L'apprentissage, par exploration, essai et erreur, doit permettre au système de se

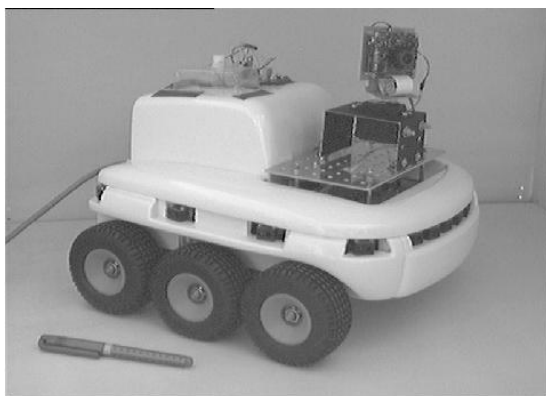


FIG. 5.18 – Le robot Koala utilisé à l'ETIS.

forger des représentations plus précises de son environnement qui lui permettent alors de mettre en œuvre des actions menant plus sûrement aux buts recherchés.

Le groupe neuro-cybernétique de l'ETIS possède déjà une solide expérience en la matière, et consacre sa recherche à l'implantation d'architectures neurales d'inspiration biologique pour le traitement visuel et la mémorisation de lieux et de séquences d'action dans le cadre d'une exploration non-supervisée de l'environnement. Le modèle de mémoire mis en œuvre s'inspire en particulier du fonctionnement de l'hippocampe (mémoire des lieux) et du cortex frontal (planification) [101] [102] [74].

Les algorithmes de traitement visuel (pré-attentif) déjà implantés ont été utilisés tels quels, dans le cadre du logiciel *Prométhée*, qui réalise l'interface avec le robot et implémente la partie contrôle. L'utilisation de la bibliothèque de procédures de ce logiciel a permis de se consacrer exclusivement à la mise en place d'un système récurrent avec interface visuelle et interface motrice, et d'avancer assez vite.

Les échelles de temps ne sont pas les mêmes entre une simulation où l'on peut faire défiler des milliers de pas de temps et une expérimentation sur robot où chaque itération se traduit par un mouvement et met entre 2 et 5 secondes pour s'effectuer. L'expérimentation sur robot nous oblige à travailler sur des échelles de temps très réduites, avec des conditions de convergence limites, c'est à dire avec un risque supplémentaire. On a pu constater que l'algorithme d'apprentissage se comporte de façon très robuste dans des conditions de convergence limites (c'est à dire des transitoires et des temps d'apprentissage courts). En particulier, pour l'application de repérage qu'on s'est fixée, 20 pas d'apprentissage (correspondant à 6 présentations de la séquence d'entrée) ont suffi à provoquer le comportement adéquat.

Pour cette première expérience sur un robot, on a mis en place une architecture à trois couches, comprenant une couche primaire visuelle (population 1), une couche dynamique (population 2) et une couche primaire sensori-motrice (popula-

tion 3) qui retranscrit la commande motrice. On a fixé une tâche motrice simple : la rotation. L'exploration visuelle de l'environnement repose sur un mouvement rotatif du robot. Le robot apprend donc à associer à certaines vues des commandes motrices (angle de rotation) spécifiques. Cette séquence de commandes motrices est prédéfinie avant apprentissage. Elle agit comme une stimulation périodique pendant l'apprentissage. L'environnement perçu au cours de ces rotations est alors associé aux mouvements imposés. Après apprentissage, la commande périodique est supprimée, et le robot se fonde uniquement sur l'information visuelle pour choisir le mouvement adéquat.

### 5.3.1 Principe du traitement visuel

Le traitement visuel correspond à des modules de vision pré-attentive programmés dans Prométhée. Toute la richesse de ce traitement n'a pas été exploitée dans le cadre de la tâche que l'on s'est fixée.

Le robot prend une image de son environnement avec sa petite caméra, qui correspond à un champ visuel d'environ  $60^\circ$ . Il connaît sa direction grâce à la boussole.

- Sur la ligne qui correspond à l'horizon du robot (les points qui sont à la même hauteur), le traitement visuel pré-attentif sélectionne  $k$  zones correspondant aux contrastes les plus forts. Pour chacune de ces zones, une imagerie  $32 \times 32$  pixels est prise, avec le point de fort contraste pour centre. Cette imagerie, stockée en mémoire, constitue un "amer" (un "objet" qui sert de point de repère). À chaque amer est attribué un angle absolu (azimuth) grâce à la boussole (l'azimuth varie de  $0$  à  $360^\circ$ , par pas de  $4^\circ$ , ce qui fait 90 valeurs possibles). Pour chaque amer sélectionné, un degré de confiance est attribué à chaque valeur angulaire, compris entre  $0$  et  $1$  (la valeur la plus élevée correspondant à la direction estimée de l'amer en question). Ce degré de confiance est lié à la précision de la boussole.
- Lorsque, à un moment ultérieur, le robot regardera dans la même direction, l'image en mémoire sera comparée à l'image vue pour déterminer s'il s'agit bien du même amer. La tolérance sur cette comparaison est donnée par une variable appelée *vigilance*, comprise entre  $0$  et  $1$ , correspondant à la corrélation minimale requise pour dire que les deux images correspondent bien au même amer.

Pour notre tâche d'apprentissage, dans la mesure où le robot se contente de tourner sur place, il n'y a pas d'occlusions ni de déformations dans l'espace des amers. Pour un angle de vue donné, en supposant que l'environnement ne bouge pas trop pendant le temps d'apprentissage, les points de fort contraste restent les mêmes. On n'a donc pas besoin d'une information visuelle aussi élaborée que cette imagerie  $32 \times 32$ . La détermination de l'azimuth associé à un contraste "fort" est suffisante.

On a fixé  $k = 5$ . L'information qui sera prise en compte pour la suite du

traitement est donc le vecteur qui donne l'estimation de l'azimuth des 5 amers sélectionnés. Ce vecteur constitue l'information visuelle  $I^{(1)}(t)$ , à valeurs sur  $[0, 1]$ .

### 5.3.2 Ordres moteurs

On définit pour le système 7 entrées motrices possibles, qui correspondent à des rotations de  $-90^\circ$  à  $+90^\circ$ , par pas de  $30^\circ$ . La couche 3 (couche primaire sensori-motrice) possède un neurone par entrée motrice.

À chaque instant, un seul neurone de la couche 3 peut être stimulé. Le signal moteur  $I^{(3)}(t)$  est défini par une séquence de type  $s_\tau = (i_1, \dots, i_\tau)$ , de période  $\tau$ . Le signal moteur détermine l'ordre de rotation fourni au robot  $\phi(t) = 90^\circ \times (s(1 + (t \bmod \tau)) - 4)$ .

En l'absence de stimulation, la commande motrice  $\phi(t)$  se fonde sur la valeur du signal retour  $c_i^{(32)}(t)$  :

$$\phi(t) = 90^\circ \times \left( \left( \operatorname{argmax}_{1..7}(c_i^{(32)}(t)) \right) - 4 \right)$$

### 5.3.3 Architecture

Le modèle possède 3 couches, soit  $K = 3$ . Les paramètres qui définissent les poids et les seuils sont les mêmes que dans le cadre des simulations. Les tailles des différentes couches sont :  $N^{(1)} = 90$ ,  $N^{(2)} = 100$  et  $N^{(3)} = 7$ . Il n'y a pas de motif conditionnant. Le paramètre de gain vaut  $g = 8$ .

Le signal  $I^{(1)}(t)$  contient les informations en provenance des couches de traitement visuelle (position des amers) et le signal  $I^{(3)}(t)$  contient une séquence motrice définie par l'utilisateur. La densité du signal visuel est de l'ordre de  $f^{(1)} = k/N^{(1)}$ , et celle du signal moteur vaut  $f^{(3)} = 1/N^{(3)}$ .

La dynamique qui se met en place dans la couche 1 doit prendre en compte à la fois les signaux provenant de la couche primaire visuelle et ceux de la couche primaire sensori-motrice. Les paramètres choisis permettent d'établir une priorité de l'information visuelle sur l'information motrice, soit  $\sigma_I^{(1)} > \sigma_I^{(3)}$ . On a pris pour l'expérience  $\sigma_I^{(1)} = 0.2$  et  $\sigma_I^{(3)} = 0.1$ .

Les liens non nuls à l'initialisation sont les liens récurrents  $J^{(22)}$  et les liens directs des couches primaires vers la couche dynamique  $J^{(21)}$  et  $J^{(23)}$ . On a :

$$\begin{aligned} \bar{J}^{(22)} &= 0 & \sigma_J^{(22)} &= 1 \\ \bar{J}^{(21)} &= 0 & \sigma_J^{(21)} &= \sigma_I^{(1)} / \sqrt{f^{(1)}} \\ \bar{J}^{(13)} &= 0 & \sigma_J^{(13)} &= \sigma_I^{(3)} / \sqrt{f^{(3)}} \end{aligned}$$

Tous les liens afférents à la couche dynamique, ainsi que les liens retour de la couche dynamique vers les couches primaires ( $J^{(12)}$  et  $J^{(32)}$ ) sont modifiables par apprentissage. Les liens latéraux  $J^{(11)}$ ,  $J^{(13)}$ ,  $J^{(31)}$  et  $J^{(33)}$  n'existent pas.

Le modèle d'architecture est présenté sur la figure 5.19. Les liens modifiables nuls à l'initialisation sont en trait pointillé.

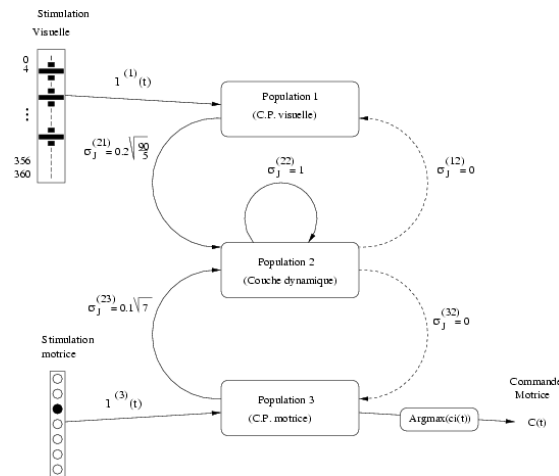


FIG. 5.19 – Architecture du modèle à trois couches.

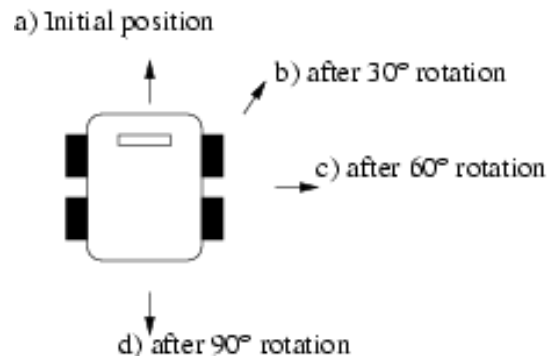


FIG. 5.20 – Mouvements de rotation effectués par le robot.

### 5.3.4 Apprentissage

L'apprentissage se fonde sur la corrélation entre les stimulations motrices imposées au robot et l'entrée visuelle.

La séquence mise en entrée motrice est de période 3, et vaut  $s_3 = (5, 6, 7)$ , ce qui correspond à la séquence de rotations (30°, 60°, 90°). Après avoir effectué une fois la séquence, le robot a donc fait un demi-tour sur lui-même et regarde le mur opposé. (Deux séquences forment un tour complet) – voir figure 5.20 –.

Cette mise en œuvre de l'algorithme d'apprentissage se situe dans un contexte différent des simulations précédentes. Cette différence repose sur le fait que les perceptions dépendent à présent des actions produites au sein de l'environnement. Dans le cadre de cette expérimentation, une partie de la perception est imposé, sous forme de séquence d'ordres moteurs sur la couche primaire sensori-motrice, et une autre provient directement du monde perçu sur la couche primaire visuelle. Une partie de l'environnement perçu n'est plus sous le contrôle de l'expérimentateur, et se définit à partir des mouvements effectués.

Néanmoins, il nous a paru important de vérifier que le protocole mis en place permet bien de capter des éléments réguliers de l'environnement, et en particulier qu'une stimulation périodique doit correspondre à un défilement périodique des entrées visuelles. Il nous a ainsi semblé nécessaire de corriger pendant l'apprentissage les effets de la dérive du robot. En effet, lorsque l'on donne comme commande motrice "tourner de  $\phi$  degrés", le robot, du fait des frottements et de contraintes mécaniques, tourne en général d'un peu moins que l'ordre donné. C'est imperceptible sur un mouvement, mais en additionnant les erreurs, la dérive tend à devenir importante, de l'ordre de  $30^\circ$  au bout d'une quinzaine de rotations. *Pendant l'apprentissage, le robot est recalé dans la bonne direction par l'expérimentateur tous les demi-tours environ.*

C'est au sein de cet environnement "sans dérive" que l'apprentissage prend place. Le système effectue son apprentissage dans un environnement un petit peu plus régulier que l'environnement qu'il aurait rencontré si on l'avait laissé tourner spontanément. Nous verrons plus loin les conséquences de ce choix sur le comportement du système après apprentissage.

Le robot est placé sur un repère, au milieu de la pièce. Les poids du système sont initialisés. La dynamique du système est itérée sur 20 transitoires, avec une stimulation régulière sur la couche primaire motrice. Vu le temps que prend une itération (chaque pas de temps, qui correspond à la saisie d'une image, à la sélection de 5 amers et à un mouvement prend entre 10 et 15 secondes), nos expériences d'apprentissage se sont déroulées sur des temps beaucoup plus courts qu'en simulation. Pour l'expérience décrite, la dynamique d'apprentissage est alors itérée sur 20 pas de temps. Cet apprentissage correspond donc à seulement 6 séquences d'ordres moteurs, ce qui donne le temps de faire un peu plus de trois tours complets.

### 5.3.5 Adaptation dynamique

À l'issue de l'apprentissage, la commande motrice est désactivée. Les ordres moteurs proviennent à partir cet instant du signal retour de la couche 2, qui repose en partie sur les informations visuelles en provenance de la couche 1. L'information visuelle influence le mouvement accompli, en fonction des corrélations qui ont été apprises.

Le robot est posé sur le repère, dans une direction quelconque. La dynamique spontanée est lancée. À l'issue des transitoires, on constate alors que le robot se cale sur la bonne série de rotations, et reproduit l'association entre les mouvements et les positions imposés pendant l'apprentissage.

**Exemple** Recalage après une dérive.

30 90 (Transitoires)

90 30 60 (Bon calage du robot)

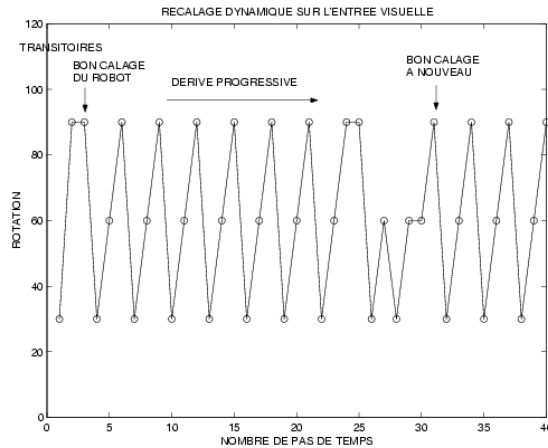


FIG. 5.21 – Exemple de trajectoire du robot lors d’une dérive progressive. Le temps est en abscisse et l’angle de rotation en ordonnée.

90 30 60  
 90 30 60  
 90 30 60 (Derive progressive)  
 90 30 60  
 90 30 60 (Le robot est en decalage de 30°)  
 90 30 60  
 90 **90 30 60 30 60 60** (Bonne position a nouveau)  
 90 30 60  
 90 30 60 ...

Cette trajectoire est représentée sur la figure 5.21

Sur cet exemple, 3 mouvements sont nécessaires au robot pour atteindre la bonne position. Ces mouvements constituent les transitoires. Après ces transitoires, le robot effectue la séquence de mouvements apprise, mais contrairement à la situation d’apprentissage, l’expérimentateur n’intervient plus pour recalibrer le robot. Celui-ci est en quelque sorte livré à lui-même. Dans ces conditions, les effets de la dérive se font progressivement sentir : les images perçues tendent à se désynchroniser des mouvements effectués. Ainsi, le robot finit par être en décalage de plus de 30° par rapport à l’entrée souhaitée. Plus de la moitié de l’entrée visuelle est alors “fausse”, ce qui produit une contradiction forte entre l’image perçue et le mouvement effectué. Le robot *perd alors la régularité* de son mouvement. Il produit des séquences de mouvements d’apparence aléatoire, jusqu’à ce qu’il se retrouve dans une configuration connue pour laquelle le mouvement se remet en correspondance avec l’image perçue. Cet intermède irrégulier permet ainsi au robot de retrouver une séquence connue, et de régulariser à nouveau sa dynamique.

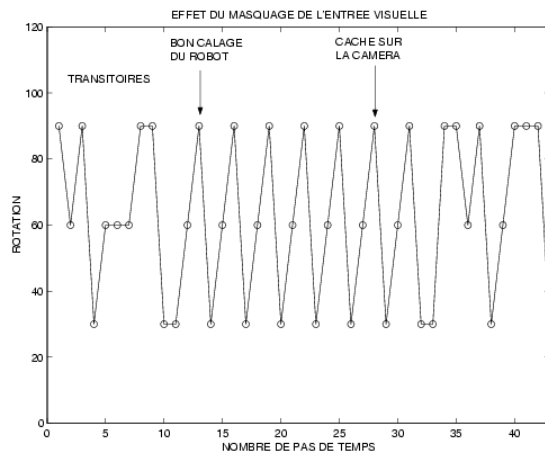


FIG. 5.22 – Exemple de trajectoire du robot avant et après masquage de l’entrée visuelle. Le temps est en abscisse et l’angle de rotation en ordonnée.

**Exemple** Masquage de l’entrée visuelle.

90 60 90 30 60 60 60 90 90 30 30 60 (Transitoires)  
 90 30 60 (Bon calage du robot)  
 90 30 60  
 90 30 60  
 90 30 60  
 90 30 60 (on met un cache sur la camera)  
 90 30 60  
 90 30 30 90 90 60 90 30 60 90 90 90 30 ...

Cette trajectoire est représentée sur la figure 5.22

Sur cet exemple, les transitoires sont un peu plus longs, et le robot met 12 pas de temps pour se caler sur la bonne entrée visuelle. Une fois ce calage effectué et stabilisé, un cache est mis sur la caméra. L’information visuelle n’est plus alors en conformité avec la séquence de mouvements produite. Au bout de 5 à 6 pas de temps, le robot perd la régularité de son mouvement, et se met à suivre une séquence de mouvements apériodique. L’information visuelle absente ou contradictoire ne permet plus au système de maintenir un mouvement régulier.

On trouve là un exemple particulièrement frappant d’adaptation dynamique. Le régime dynamique se met en conformité avec le degré de reconnaissance de l’environnement. Si la reconnaissance est bonne, le mouvement est régulier. Si au contraire cette reconnaissance est mauvaise (ou “catastrophique”), le mouvement devient irrégulier, jusqu’à ce qu’une nouvelle situation de reconnaissance amène le robot à régulariser sa dynamique et son comportement. On peut dès à présent établir un parallélisme entre ce type de comportement et le paradigme de Freeman, qui associe les régimes périodiques à un phénomène de reconnaissance et associe les régimes chaotiques à l’absence de reconnaissance. Dans le cadre de



cette expérimentation sur robot mobile, avec une structure neuronale beaucoup plus simple que le bulbe olfactif du lapin, il est possible en outre d'*associer à ces deux régimes des comportements*.

- Le mouvement régulier est une séquence spécifique acquise. Il peut être vu comme une réponse adéquate à une configuration de l'environnement sensoriel (comme par exemple lapper en présence d'une odeur associée à un aliment comestible).
- Le mouvement irrégulier (chaotique) peut être vu comme un comportement d'*exploration*, qui permet d'atteindre de nouvelles configurations sensori-motrices connues, et la mise en œuvre d'un comportement plus régulier. Si bien sûr l'environnement ne présente aucune configuration qui "fasse sens", la dynamique se maintient sur un régime chaotique.

### Conclusion et perspectives pour la robotique

Cette expérience a montré la faisabilité d'une implémentation de notre système dans le cadre d'une application à la robotique mettant en jeu des données réelles.

Certains des comportements observés peuvent être mis en rapport avec ceux que l'on a obtenus en simulation. Le comportement de recalage différé a déjà été observé en cas de conflit entre l'information disponible en entrée et les pré-représentations de la couche dynamique (voir page 221). Dans le premier cas, le conflit aboutissait à une mise en conformité de la séquence évoquée en retour sur la couche visuelle. Ici, la mise en conformité repose sur une action effective qui vise à recalculer l'entrée visuelle sur ce que le système "souhaite voir".

La séquence qui est produite par la couche dynamique est capable de se maintenir quelques pas de temps lorsqu'il y a contradiction avec l'entrée visuelle, puis finit par s'adapter à cette entrée.

On n'est donc pas dans le cadre d'une simple association entre stimulus d'entrée et stimulus de sortie. Le système a intégré un séquençage des actions, et effectue un compromis entre le défilement de sa séquence interne et son entrée.

Lorsque l'information en entrée est non cohérente par rapport à la séquence apprise, le système produit un comportement irrégulier (chaotique) au sein duquel des éléments de la séquence apprise peuvent apparaître. On peut l'interpréter comme une exploration d'un environnement inconnu, et le système cherche à projeter sur cet environnement un élément de séquence connu :

- Dans le cas d'une dérive, le comportement exploratoire permet de se recalculer sur la bonne séquence lorsque la séquence de mouvements proposée correspond à nouveau au bon séquençage des entrées visuelles.
- Lorsque l'on met un cache sur la caméra, il n'y a plus de cohérence entre l'entrée visuelle et les commandes visuelles produites. L'activité exploratoire se poursuit alors indéfiniment.

Les résultats obtenus dans ce cadre restreint permettent d'entrevoir de nombreux développements possibles :

- Faire des apprentissages de séquences de mouvements différentes dans des pièces différentes, ou à des endroits différents de la même pièce. Suivant son environnement, le robot ne choisit pas la même séquence (il tourne vers la droite lorsqu'il est près de la télé, et il tourne vers la gauche lorsqu'il est près de la table...). (il est probable que pour réussir cela, il faudra prendre une entrée visuelle plus élaborée, c'est à dire augmenter la vigilance).
- Ajouter des motifs conditionnants, qui représenteraient la motivation du moment (faim, soif...). En fonction de cette entrée "interne", le robot ne fait pas le même mouvement au même endroit (s'il a soif, il tourne vers la gauche près de la table, s'il a faim, il tourne vers la droite près de la table). Dans un premier temps, les associations motif conditionnant/lieu/mouvement seraient imposées au système.
- Faire de l'apprentissage sur des mouvements complets (rotation/translation) et plus seulement sur des mouvements de rotation. Il faut faire un choix entre un codage analogique de la vitesse (fondé sur l'intensité du signal dynamique), et un codage binaire (choix d'une vitesse parmi un ensemble discret de vitesses possibles), moins plausible biologiquement. Avec (rotation/translation), les combinaisons à apprendre sont beaucoup plus nombreuses. On pourrait dans un premier temps se contenter de (pas de mouvement/un mouvement), avec un déplacement de longueur constante lorsque le mouvement est effectué.
- En dernier lieu, il faudrait mettre en place un modèle permettant l'apprentissage non-supervisé, soit en mixant le modèle dynamique avec des modules d'apprentissage par renforcement, soit en étendant la règle d'apprentissage du modèle afin de prendre en compte des stimulations de type récompense/punition.

## CONCLUSION LOCALE

Le chapitre 5 concentre un certain nombre de résultats sur un modèle qui met en jeu une couche récurrente similaire à celle du modèle à une population, et une couche primaire qui sert d'interface entre les signaux d'entrée et le régime dynamique de la couche récurrente (appelée couche dynamique). Dans ce cadre, l'apprentissage est effectué en présence d'un signal externe binaire spatio-temporel périodique. La reconnaissance se fonde sur la capacité à reconstruire le signal appris : lorsque le signal est bien reconstruit, on dit qu'il est reconnu. Il y a donc une différence importante avec la définition de la reconnaissance donnée au chapitre précédent. La notion de reconnaissance était alors associée à une réduction de la complexité de la dynamique. On peut néanmoins remarquer que cette simplification de la dynamique vers des régimes périodiques est nécessaire pour reconstruire

correctement une séquence périodique.

Il apparaît que le système peut, après apprentissage, reconstruire le signal d'origine au niveau de son signal retour (le signal qui se projette de la couche dynamique vers la couche primaire), à partir d'éléments partiels ou bruités du signal d'origine. Les performances sont très bonnes, à la fois pour la reconnaissance de motifs très dégradés (25% du motif d'origine "noyé" au milieu d'un bruit quatre fois plus important) et pour la restitution de séquences temporelles ambiguës (nécessitant de mémoriser plusieurs états passés pour déterminer l'état courant). Ces bonnes performances montrent qu'il existe de façon latente une représentation de ce signal, issue de l'apprentissage. Cette représentation s'active lorsqu'un signal possédant certaines caractéristiques du signal appris est présenté sur la couche primaire.

En contrepartie de ces bonnes performances, le système est capable de se couper de ses entrées lorsque l'apprentissage est poussé trop loin. Dans ce cas, le système évoque indéfiniment la séquence apprise en boucle interne sans prendre en compte ses entrées, tout au moins tant que le signal conditionnant est maintenu. Selon les caractéristiques du signal à apprendre, on a mesuré par simulations intensives la durée d'apprentissage optimale moyenne. Cette durée critique marque le moment où la dynamique interne tend à prendre le pas sur le signal externe. C'est en effet au moment où le système fonde sa réponse à la fois sur les caractéristiques de la dynamique interne et celles du signal externe que les performances sont les meilleures. Ces mesures de durée optimale d'apprentissage permettent aussi d'apprécier la capacité de nos réseaux, en regardant la qualité de la réponse pour la durée optimale d'apprentissage. On constate en particulier que les performances chutent lorsque les séquences à apprendre ont une période supérieure à huit ou dix. Il semble en fait que le système soit plus performant pour reconnaître plusieurs séquences périodiques courtes que pour reconnaître une seule séquence dont la période est très longue. Lorsque l'on associe à chaque séquence apprise un motif conditionnant différent, une couche dynamique de 200 neurones peut reconnaître une dizaine de séquences différentes, ambiguës ou non, et bien sûr de multiples versions tronquées et/ou bruitées de ces séquences.

L'intérêt cognitif d'un tel modèle repose sur les interactions entre le signal imposé et le signal interne à la couche dynamique. En particulier, on a montré que la couche dynamique ne se comporte pas comme un simple générateur de bruit, mais qu'au contraire les caractéristiques de la dynamique interne sont fondamentales pour reconstruire le signal qui a été appris. Le rôle de la couche dynamique a été mis en évidence de plusieurs manières. En premier lieu, on a montré que l'organisation spatio-temporelle de la couche dynamique (le circuit d'activation) intervient de façon importante dans la reconstruction du signal appris. En particulier, une modification forcée de cette organisation interne (changement de motif conditionnant) réduit fortement la qualité de la reconstruction. En second lieu, l'apprentissage

de signaux périodiques différents en association avec des motifs statiques conditionnants permet de produire pour chaque motif conditionnant un comportement dynamique conforme au signal appris. Dans ce cas, la dynamique interne reconstruit le signal appris sans apport extérieur autre que le motif statique. Enfin, l'illustration la plus frappante de l'intervention de la dynamique interne sur la réponse du réseau apparaît lorsqu'un conflit existe entre le signal mis en entrée et la dynamique interne. Dans le cas d'un décalage de phase entre le signal partiel mis en entrée et le signal produit par la dynamique interne, l'adaptation à cette entrée non conforme met un certain temps (plus de 10 pas de temps). Durant cette période transitoire, le système "hésite" entre le signal qu'il souhaite voir sur l'entrée d'après sa dynamique interne et celui qui se trouve réellement sur cette entrée.

Le système testé par simulations a été utilisé pour une application de repérage sur un robot mobile. Le robot apprend une succession périodique de mouvements associée à des vues de son environnement. Cette application a permis de mettre en évidence un comportement nouveau. Pour des raisons de frottements mécaniques, le robot tend à produire un mouvement qui se décale progressivement par rapport aux entrées visuelles qu'il a apprises. Lorsque le conflit devient trop grand entre ce qui est vu et les mouvements produits, il y a un changement qualitatif de comportement : le robot se met à produire des mouvements aperiodiques, jusqu'à ce qu'il parvienne à se caler sur une entrée visuelle conforme à ce qu'il a appris, et produire à nouveau un mouvement périodique. Ce changement de comportement dynamique montre là encore le rôle du régime dynamique interne qui produit un mouvement régulier lorsque l'environnement est en cohérence avec la séquence de mouvements, et produit un mouvement irrégulier dans le cas contraire.



# CONCLUSION GÉNÉRALE

Ainsi donc, de nombreuses propriétés des réseaux de neurones à connexions aléatoires ont pu être explorées dans le cadre de cette thèse. Il est important de rappeler que ces résultats sont le fruit de nombreuses collaborations et discussions au sein d'une équipe de recherche fortement pluridisciplinaire, où j'ai pu apprécier une volonté commune de transmettre à tous des notions issues de domaines souvent complexes.

C'est également cet esprit qui nous a guidé tout au long de ce document, afin de rendre accessible à tous les nombreuses notions et points de vue nécessaires à la compréhension du modèle. Cette compréhension nécessitait d'évoquer d'un côté les développements mathématiques qui sous-tendent le modèle, dont seuls les résultats principaux (propagation du chaos, équations de champ moyen) ont été exposés – leurs développements techniques et démonstrations sont l'objet d'une autre thèse en cours –. D'un autre côté, nous avons veillé à toujours mettre nos résultats en perspective vis à vis des données de la biologie. Notre modèle présente en effet une grande variété de régimes dynamiques ; il est l'un des rares à proposer indifféremment des comportements soit chaotiques, soit synchronisés, ou encore mêlant l'une et l'autre de ces caractéristiques, sur un système de grande taille, dont on peut décrire le comportement à partir du champ global. Cette richesse dynamique ouvre la voie à des modélisations de phénomènes naturels de synchronisation, qui sont l'objet d'un intérêt grandissant dans la communauté scientifique.

Par ailleurs, nous avons pu constater que la dynamique qui se développe spontanément au sein du système possède une structure ; les neurones sont différenciés fonctionnellement par la dynamique. Il existe en effet un noyau de neurones actifs qui entretient la dynamique. Ces neurones actifs tendent à s'organiser en petits paquets et à propager le signal d'activation en boucle. Cette organisation possède par ailleurs un aspect très malléable. La présentation d'une entrée statique tend à produire une reconfiguration profonde de la structure spatio-temporelle de la dynamique. Le nombre de ces configurations est potentiellement très important au sein d'un même système.

Le déploiement de toute cette richesse dynamique spontanée nous a bien entendu incité à développer des algorithmes d'apprentissage visant à retrouver cette richesse au sein des comportements et des réponses produites. Nous avons cher-

ché plus particulièrement à provoquer dans le système, grâce à l'apprentissage hebbien, un comportement d'adaptation dynamique, c'est à dire une capacité à produire des associations spécifiques entre des motifs appris et des comportements dynamiques.

La règle de Hebb mise en place prend en compte le délai de transmission élémentaire correspondant à la mise à jour synchrone des états. Cette règle tend à renforcer un nombre restreint de liens, ceux-là mêmes qui relient les différentes étapes du circuit d'activation interne. De façon progressive, pour une dynamique initialement chaotique, l'apprentissage renforce la période interne, et tend donc à produire des régimes cycliques plus réguliers. Lorsque l'apprentissage est effectué en présence d'un stimulus, la dynamique associée au stimulus tend après apprentissage à se réduire sur un régime cyclique spécifique. Cette réduction spécifique de la dynamique s'apparente au paradigme de Freeman. Le faible impact de l'apprentissage sur les poids synaptiques autorise l'apprentissage de plusieurs motifs ou séquences de motifs, et permet d'associer à chacun d'entre eux une dynamique périodique spécifique. Il est en particulier possible, pendant l'apprentissage, d'adjoindre à un motif dynamique séquentiel un motif statique, appelé motif conditionnant, tel qu'après apprentissage, la présence du motif conditionnant seul suffit à réactiver la structure spatio-temporelle associée à la séquence de motifs apprise.

Un modèle à plusieurs couches a ensuite été mis en place, qui connecte le modèle récurrent simple à une couche dite primaire, qui récolte une information spatio-temporelle provenant du monde extérieur. Après apprentissage, la dynamique interne à la couche récurrente permet de reconstruire explicitement sur la couche primaire la totalité de l'information apprise à partir de versions bruitées ou incomplètes de cette information. Les simulations ont montré qu'il existe une durée d'apprentissage optimale, correspondant au moment où le signal en provenance de la couche récurrente atteint un niveau comparable à celui du signal extérieur sur la couche primaire. Le système est alors capable, à partir de versions très incomplètes en entrée, de reconstituer sur la couche primaire l'information manquante grâce au signal provenant de la couche récurrente.

Plusieurs propriétés de notre modèle peuvent être mises en avant :

- On peut noter en particulier que le modèle possède une bonne capacité pour apprendre et reconstruire des séquences ambiguës temporellement. C'est une tâche qui pose depuis longtemps problème aux systèmes qui doivent, grâce à l'exploration et à l'apprentissage, produire une réponse en fonction de l'état de l'environnement à un instant donné. Cette réponse nécessite bien souvent de mémoriser plusieurs états passés. Notre modèle, qui code au sein de sa dynamique la mémoire de plusieurs états passés, pourrait par extension offrir des solutions à cette classe de problèmes.
- Le système est particulièrement robuste au bruit sur ses entrées. Il peut à la fois apprendre en environnement bruité et reconstruire le signal global à partir d'une information très partielle. Cette robustesse a déjà pu être testée

dans le cadre d'une application à la robotique mobile. Dans ce cadre, on a pu montrer que le robot est capable de maintenir un mouvement périodique appris en association avec une entrée visuelle tant que celle-ci reste, jusqu'à un certain degré, en conformité avec l'entrée visuelle apprise.

- Enfin, le système est capable de produire des régimes dynamiques qui s'adaptent de façon spécifique aux entrées. De façon générale, une entrée connue produit une dynamique régulière, et une entrée inconnue produit un comportement chaotique. Lorsqu'il existe un conflit entre l'entrée sensorielle et la dynamique interne, l'abandon provisoire d'une dynamique régulière permet lorsque c'est possible de remettre la dynamique interne en conformité avec le stimulus. Ce comportement a pu être mis en évidence en simulation et lors de l'expérimentation sur le robot. Dans le cas du robot, on constate que lorsque le conflit est trop important entre la dynamique interne et l'entrée visuelle, le comportement change brusquement, devient aperiodique, jusqu'à ce que, grâce à cette exploration aléatoire, l'entrée visuelle soit à nouveau en conformité avec la séquence de mouvements apprise.

De nombreuses idées issues de la biologie sous-tendent la conception de notre modèle (grands ensembles de neurones densément connectés, règle de Hebb, paradigme de Freeman). Il est normal de voir, par un juste retour des choses, dans quelle mesure les comportements mis en évidence sur notre modèle peuvent fournir des explications sur l'organisation neuronale des systèmes biologiques.

Les idées sur l'adaptation qui ont été exposées au début de ce document peuvent être revues à la lumière des résultats obtenus sur notre modèle. En premier lieu, deux principes d'adaptation sont à l'œuvre dans notre modèle : l'adaptation *synaptique*, par le biais de l'apprentissage Hebbien sur les connexions, peut représenter la mémoire à long terme. Un certain nombre de couplages entre des entrées et des organisations dynamiques internes associées sont en effet inscrites pour le long terme dans le système par l'apprentissage. L'adaptation *dynamique*, qui prend place dans le réseau après apprentissage, peut manifester à la fois un comportement de reconnaissance, un calcul, et une mémoire à court terme. La reconnaissance se manifeste par le fait que le système change qualitativement son régime dynamique lorsqu'une entrée connue est présente. Le calcul repose sur la capacité à reconstruire (ou inférer) une information manquante à partir de l'information disponible. Enfin, la mémoire à court terme repose sur la structure de circuit qui se met en place dynamiquement dans le système et permet de maintenir au sein de l'activité des neurones la mémoire de plusieurs états, correspondant au nombre de relais du signal interne. Cette mémoire en forme de circuit pourrait par ailleurs être comparée à une mémoire procédurale qui marque les différentes étapes d'un mouvement ou d'une action.

De façon plus générale, il est important de souligner l'extrême importance de la dynamique dans les systèmes neuronaux réels, et notre thèse, en mettant en avant ce point sur un modèle formel, montre qu'il existe de nombreuses possibilités en termes d'apprentissage et d'adaptation. Cette approche va de pair avec une



prise en compte de plus en plus poussée en neurophysiologie des phénomènes de synchronisation et de résonance, et la recherche de leurs corrélats fonctionnels.

Tous nos résultats permettent également d'échafauder des hypothèses nouvelles sur la cognition naturelle. Rappelons tout d'abord que toute capacité cognitive naturelle est le fruit d'un apprentissage, qui met en jeu de nombreuses interactions entre un organisme et son environnement. Cette adaptation progressive permet au système de se construire un modèle interne de son environnement. Dans ce cadre, toute action produite au sein de l'environnement est déterminée non seulement à partir des entrées sensorielles mais également à partir de ce modèle interne. Celui-ci place l'action dans un contexte plus général, c'est à dire qu'il apporte quelque chose à la simple information sensorielle. Ce qui conditionne le choix de l'action provient à la fois d'une influence intérieure et d'une influence extérieure.

Dans le cadre de notre système, il est intéressant de voir que ces notions d'influence extérieure et d'influence intérieure ont pour corollaire le signal d'entrée, projeté sur la couche primaire, et le signal issu des couplages internes qui se projette en retour sur la couche primaire. C'est lorsque ces deux influences s'équilibrent que le système produit les comportements les plus riches, en reconstruisant explicitement sur la couche primaire l'information sensorielle manquante. Ce que le système "perçoit" n'est donc pas exactement la simple entrée sensorielle, mais plutôt une version complétée et élargie de cette stimulation. Ce que le système perçoit est donc à la frontière entre ce que le système reçoit réellement et ce qu'il "pense voir". Le système extrapole, "rêve" ses sensations, et peut même s'égarer en préférant les rêves à la réalité.

Il est bien sûr à présent permis de rêver...

# Bibliographie

- [1] Prigogine, I. : la fin des certitudes. Odile Jacob (1996)
- [2] Schrödinger, E. : Qu'est-ce que la vie ? Christian Bourgeois (1986) (1944)
- [3] Varela, F., Thomson, E., Rosch, E. : L'inscription corporelle de l'esprit. Seuil (1993)
- [4] Dupuy, J.P. : Aux origines des sciences cognitives. la Découverte (1999)
- [5] Lorenz, E.N. : Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. **20** (1963) 130–141
- [6] Mandelbröt, B. : les objets fractals. Flammarion (1975)
- [7] Ruelle, D., Takens, F. : On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. **20** (1971) 167–192
- [8] Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, C. : L'ordre dans le chaos. Hermann (1988,1992)
- [9] Cessac, B. : Propriétés statistiques des dynamiques de réseaux neuromimétiques. PhD thesis, Université Paul Sabatier (1994)
- [10] Arnold, V. : Chapitre supplémentaire sur la théorie des équations différentielles ordinaires. Mir, Moscou (1978)
- [11] Maas, W., Bishop, C.M. : Pulsed Neural networks. MIT Press (1999)
- [12] Hebb, D. : The Organization of behavior. Wiley, New York (1949)
- [13] Pelissier, A., Tête, A. : Sciences cognitives textes fondateurs. PUF (1995)
- [14] Bliss, T.V.P., Lomo, T. : Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dendate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path. J. Physiol. **232** (1973) 331–356
- [15] Schütz, A. : Neuroanatomy in a computational perspective. In Arbib, M., ed. : The handbook of Brain Theory and Neural Networks, MIT Press (1995) 230–234
- [16] Abeles, M. : Local Cortical Circuits : An Electrophysiological Study. Springer-Verlag (1982)
- [17] Berthoz, J. : Le sens du mouvement. Odile Jacob (1996)

- [18] Gray, C., Konig, P., Engel, A., Singer, W. : Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflect global stimulus properties. *Nature* **7** (1989) 334–338
- [19] Gevins, A. : Dynamic cognitive networks in the human brain. In Buzsáki, G., ed. : *Temporal Coding in the Brain*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag (1994) 273–290
- [20] Jirsa, V.K., Fuchs, A., Kelso, J.A.S. : Connecting cortical and behaviorall dynamics : Bimanual coordination. *Neural Computation* **10** (1998) 2019–2045
- [21] Gray, C., Singer, W. : Stimulus-dependent neuronal oscillations in the cat visual cortex area. In : *Neuroscience Suppl. Number 1301P*, 2nd IRBO Congress (1987)
- [22] Abeles, M., Bergman, H., Margalit, E., Vaadia, E. : Spatiotemporal firing patterns in the frontal cortex of behaving monkeys. *J. neurophys.* **70** (1993) 1629–1638
- [23] MacLeod, K., Laurent, G. : Distinct mechanisms for synchronization and temporal patterning of odor-encoding cell assemblies. *Science* **274** (1996) 976–979
- [24] Hansel, D., Sompolinsky, H. : Chaos and synchrony in a model of a hyper-column in visual cortex. *J. Comp. Neurosc.* **3** (1996) 7–34
- [25] Finkel, L., Yen, S.C., Menschick, E. : Synchronization : The computational currency of cognition. In Niklasson, L., Boden, M., Ziemke, T., eds. : *ICANN 98. Volume 1.*, Springer (1998) 23–40
- [26] Von der Malsburg, C. : A neural cocktail-party processor. *Biol. Cybern.* **54** (1986) 29–40
- [27] Thorpe, S.J., Fize, D., Marlot, C. : Speed of processing in the human visual system. *Nature* **381** (1996) 520–522
- [28] Rapp, P. : Chaos in the neurosciences : cautionary tales from the frontier. *Biologist* **40** (1993) 89–94
- [29] Babloyantz, A., Nicolis, C., Salazar, J. : Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle. *Phys. Lett* (1985) 152–156
- [30] Martinerie, J., Adam, C., Le van Quyen, M., Baulac, M., Renault, B., Varela, F.J. : Can epileptic crisis be anticipated ? *Nature Medecine* (1998) In press.
- [31] Thomasson, N., Pezard, L., Allillaire, J., Renault, B., Martinerie, J. : Nonlinear eeg changes associated with clinical improvement in depressed patients. *Nonlinear Dynamics in psychology and life science* **4** (1999) à paraître
- [32] Skarda, C., Freeman, W. : How brains make chaos in order to make sense of the world. *Behav. Brain Sci.* **10** (1987) 161–195

- [33] Mac Culloch, W.S., Pitts, W. : A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.* **5** (1943) 115–133
- [34] Rosenblatt : Perceptron simulation experiments. *Proceedings of the I. R. E.* (1960) 167–192
- [35] Hopfield, J. : Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **79** (1982) 2554–2558
- [36] Kohonen, T. : Self-organized formation of topologically correct feature maps. *Biological Cybernetics* **43** (1982) 59–69
- [37] Rumelhart, D., Hinton, G., Williams, R. : Learning representations by back-propagating errors. *Nature* (1986) 533–536
- [38] Mac Kay, D. : Bayesian methods for supervised neural networks. In Arbib, M., ed. : *The handbook of Brain Theory and Neural Networks*, MIT Press (1995) 144–149
- [39] Vapnik, V.N. : *The nature of statistical learning theory*. Springer Verlag (1995)
- [40] Lang, K.J., Waibel, A.H., Hinton, G.E. : A time-delay neural network architecture for isolated word recognition. *Neural Networks* **3** (1990) 23–43
- [41] Dorffner, G. : Neural networks for time-series processing. *Neural Network World* **6** (1996) 447–468
- [42] Haykin, S. : *Neural Networks : a comprehensive fundation*. Prentice-Hall (1999)
- [43] Singer, W. : Time as coding space in neocortical processing : a hypothesis. In Buzsáki, G., ed. : *Temporal Coding in the Brain*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag (1994) 51–79
- [44] Rolls, E.T., Treves, A. : *Neural Networks and brain functions*. Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP (1998)
- [45] Lanthorn, T., Storn, J., Andersen, P. : Current-to-frequency transduction in ca1 hippocampal pyramidal cells : slow prepotentials dominate the primary range firing. *Experimental brain research* **53** (1984) 431–443
- [46] Thorpe, S., Imbert, M. : Parallel processing in neural systems. R.Eckmiller G.Hartman and G.Hauske, North Holland (1990)
- [47] Hertz, J., Prugel-Bennett, A. : Learning synfire chains : turning noise into signal. *Int. J. Neural Systems* **7** (1996) 445–450
- [48] Eurich, C.W., Conradi, T., Schwegler, H. : Critical and non-critical avalanche behaviour in networks of integrate and fire neurons. In Verleysen, M., ed. : *ESANN 99, D-Facto* (1999) 411–416
- [49] Brunel, N., Hakim, V. : Fast global oscillations in networks of integrate-and-fire neurons with low firing rates. *Neural Computation* **11** (1999) 1621–1676

- [50] Sick, B. : Structure evolution for time-delay neural networks. In : ICANN 99 (Proceedings of the 9th International Conference on Artificial Neural Networks). Volume 2. (1999) 667–672
- [51] Changeux, J., Dehaene, S. : Neuronal models of cognitive function. *Cognition* **33** (1989) 63–109
- [52] Hirsch, M.W. : Convergent activation dynamics in continuous time networks. *Neural Networks* **2** (1989) 331–349
- [53] Yao, Y., Freeman, W. : Model of biological pattern recognition with spatially chaotic dynamics. *Neural networks* **3** (1990) 153–170
- [54] Nérot, O. : Mémorisation par forçage neuronal des dynamiques chaotiques dans les modèles connexionnistes récurrents. PhD thesis, INPG (1996)
- [55] Sejnowski, T.J. : Strong covariance with nonlinearly interacting neurons. *Journal of Mathematical biology* **4** (1977) 303–321
- [56] Watkins, C.J.C.H. : Learning from delayed rewards. PhD thesis, Cambridge University (1989)
- [57] Francois, O., Demongeot, J., Hervé, T. : Convergence of a self-organizing stochastic neural network. *Neural networks* **5** (1992) 277–282
- [58] Williams, R.J., Zipser, D. : A learning algorithm for continually running recurrent neural networks. *Neural Computation* **1** (1989) 270–280
- [59] Herz, A., Sulzer, B., Kuhn, R., van Hemmen, J.L. : Hebbian learning reconsidered : Representation of static and dynamic objects in associative neural nets. *Biological Cybernetics* **60** (1989) 457–467
- [60] Meunier, C., Nadal, J.P. : Sparsely coded neural networks. In Arbib, M., ed. : *The handbook of Brain Theory and Neural Networks*, MIT Press (1995) 899–901
- [61] Grossberg, S. : Adaptive pattern classification and universal recoding (i and ii). *Biological Cybernetics* **23** (1976) 121–134,187–202
- [62] Dehaene, S., Changeux, J.P., Nadal, J.P. : Neural networks that learn temporal sequences by selection. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **84** (1987) 2727–2731
- [63] Reiss, M., Taylor, J.G. : Storing temporal sequences. *Neural networks* **4** (1991) 773–787
- [64] Ans, B., Coiton, Y., Gilhodes, J.C., Velay, J.L. : A neural network model for temporal sequence learning and motor programming. *Neural Networks* **7** (1994) 1461–1476
- [65] Pearlmutter, B. : Learning state space trajectories in recurrent neural networks. *Neural computation* **2** (1989) 263–269
- [66] Tani, J., Fukumura, N. : Embedding a grammatical description in deterministic chaos : an experiment in recurrent neural learning. *Biological Cybernetics* **72** (1995) 365–370

- [67] Amari, S. : Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields. *Biological Cybernetics* **27** (1977) 77–87
- [68] Schöner, G., Dose, M., Engels, C. : Dynamics of behavior : theory and applications for autonomous robot architectures. *Robotics and Autonomous System* **16** (1995) 213–245
- [69] Bicho, E., Schöner, G. : The dynamics approach to autonomous robotics demonstrated on a low-level vehicle platform. *Robotics and Autonomous System* **21** (1997) 23–35
- [70] Kuniyoshi, Y., Berthouze, L. : Neural learning of embodied interaction dynamics. *Neural Networks* **11** (1998) 1259–1276
- [71] Tani, J. : An interpretation of the self from the dynamical systems perspective : a constructivist approach. *Journal of consciousness studies* **5** (1998)
- [72] Tani, J., Nolfi, S. : Learning to perceive the world as articulated : an approach for hierarchical learning in sensory-motor systems. In Pfeifer, R., Blumberg, B., Meyer, J., Wilson, S., eds. : *From Animals to Animats : Simulation of Adaptive Behavior SAB'98*, MIT Press (1998) 270–279
- [73] Gaussier, P., Zrehen, S. : A topological map for on-line learning : Emergence of obstacle avoidance in a mobile robot. In : *From Animals to Animats : SAB'94*, Brighton, MIT Press (1994) 282–290
- [74] Banquet, J., Gaussier, P., Dreher, J., Joulain, C., Revel, A., Gunther, W. : Space-time, order and hierarchy in frontal-hippocampal system : a neural basis of personality. In : *Cognitive Science Perspectives on Personality and Emotion*, Amsterdam, Elsevier Science (1998)
- [75] Gaussier, P., Moga, S., Banquet, J., Quoy, M. : From perception-action loops to imitation processes. *Applied Artificial Intelligence* **1** (1999)
- [76] Amari, S., Yoshida, K., Kanatani, K.I. : A mathematical foundation for statistical neurodynamics. *SIAM J. Appl. Math.* **33** (1977) 95–126
- [77] Sompolinsky, H., Crisanti, A., Sommers, H. : Chaos in random neural networks. *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 259–262
- [78] Doyon, B., Cessac, B., Quoy, M., Samuelides, M. : Control of the transition to chaos in neural networks with random connectivity. *Int. J. of Bif. and Chaos* **3** (1993) 279–291
- [79] Cessac, B., Doyon, B., Quoy, M., Samuelides, M. : Mean-field equations, bifurcation map and route to chaos in discrete time neural networks. *Physica D* **74** (1994) 24–44
- [80] Cessac, B. : Increase in complexity in random neural networks. *Journal de Physique I* **5** (1995) 409–432
- [81] Quoy, M., Doyon, B., Samuelides, M. : Hebbian learning in discrete time chaotic neural networks. In : *WCNN 95*. (1995)

- [82] Daucé, E., Quoy, M., Cessac, B., Doyon, B., Samuelides, M. : Self-organization and dynamics reduction in recurrent networks : stimulus presentation and learning. *Neural Networks* **11** (1998) 521–533
- [83] Girko, V. : Circular law. *Theory Prob. Appl. (USSR)* **29** (1985) 694–706
- [84] Samuelides, M., Moynot, O., Pinaud, O., Daucé, E. : étude de la dynamique de réseaux neuronaux aléatoires récurrents. Technical report, ONERA (1999)
- [85] Amari, S. : Characteristics of random nets of analog neuron-like elements. *IEEE Trans. Syst. Man. Cyb.* **2** (1972)
- [86] Derrida, B., Pommeau, Y. : Random networks of automata : A simple annealed approximation. *Europhys. Lett.* **1** (1986) 45–59
- [87] van Vreewijk, C., Sompolinsky, H. : Chaotic balanced state in a model of cortical circuits. *Neural Computation* **10** (1998) 1321–1371
- [88] Daucé, E., Moynot, O., Pinaud, O., Samuelides, M., Doyon, B. : Mean field equations reveal synchronization in a 2-populations neural network model. In Verleysen, M., ed. : *ESANN 99, D-Facto* (1999) 7–12
- [89] Moynot, O., Daucé, E., Pinaud, O. : équations de champ moyen pour les réseaux de neurones à deux populations. In *Cognito* (1999) À paraître.
- [90] Ginzburg, I., Sompolinsky, H. : Theory of correlations in stochastic neural networks. *Phys. Rev. E.* **50** (1994) 3171–3191
- [91] Pinaud, O. : Chaos dans les équations de champ moyen d'un réseau neuronal à deux populations quasi-symétrique. Technical report, ONERA (1999)
- [92] Weisbuch, G. : *Dynamique des systèmes complexes*. InterEditions/Editions du CNRS (1989)
- [93] Hertz, J. : Computing with attractors. In Arbib, M., ed. : *The handbook of Brain Theory and Neural Networks*, MIT Press (1995) 230–234
- [94] Daucé, E. : *Dynamique chaotique et apprentissage au sein de réseaux neuromimétiques*. ONERA-CERT (1995) rapport de DEA.
- [95] Quoy, M. : *Apprentissage dans les réseaux neuromimétiques à dynamique chaotique*. PhD thesis, ENSAE (1994)
- [96] Daucé, E., Doyon, B. : Novelty learning in a discrete-time chaotic network. In Niklasson, L., Boden, M., Ziemke, T., eds. : *ICANN 98. Volume 2.*, Springer (1998) 1051–1056
- [97] Buonviso, N., Gervais, R., Chalansonnet, M., Chaput, M. : Short-lasting exposure to one odor decreases general reactivity in the olfactory bulb of adult rat. *European J. Neuroscience* **10** (1998) 2472 – 2475
- [98] Daucé, E., Doyon, B. : Apprentissage dynamique dans les réseaux de neurones. In Vivicorsi, B., ed. : *Actes du troisième colloque jeunes chercheurs en sciences cognitives*, ASCO, Université V. Segalen, Bordeaux (1999) 76–83

- 
- [99] Aitken, A. : An architecture for learning to behave. In : From Animals to Animats 3. Proceedings of the Third International Conference on Simulation of Adaptive Behavior. (1994) 315–324
  - [100] Quoy, M., Daucé, E. : Visual and motor learning using a chaotic recurrent neural network : application to the control of a mobile robot. In : NC 2000. (2000) accepted for oral presentation.
  - [101] O’Keefe, J., Nadel, L. : The hippocampus as a cognitive map. Oxford University Press (1978)
  - [102] Rolls, E., O’Mara, S. : View-responsive neurons in the primate hippocampal complex. Hippocampus (1995) 409–424