



Détection de structures par combinaison des données Planck et BOSS et détection simultanée d'amas de galaxies dans les données Planck et ROSAT

Loïc Verdier

► To cite this version:

Loïc Verdier. Détection de structures par combinaison des données Planck et BOSS et détection simultanée d'amas de galaxies dans les données Planck et ROSAT. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris-Saclay, 2016. Français. NNT : 2016SACLS192 . tel-01394029

HAL Id: tel-01394029

<https://theses.hal.science/tel-01394029>

Submitted on 8 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLS192

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE N°576

PHENIICS :

Particules hadrons énergie et noyau : instrumentation, image, cosmos et simulation
Spécialité de doctorat : Astroparticules et Cosmologie

par

M. Loïc VERDIER

Détection de structures par combinaison des données
***Planck* et *BOSS* et détection simultanée d'amas de**
galaxies dans les données *Planck* et *ROSAT*

Sous la direction de Jean-Baptiste MELIN

Thèse présentée et soutenue au CEA Saclay, le 9 septembre 2016:

Composition du Jury :

M. Alexandre BEELEN
M. Alain BLANCHARD
M. Hervé DOLE
M. Juan MACIAS-PEREZ
Mme Sophie MAUROGORDATO
M. Jean-Baptiste MELIN

Astronome, CNRS
Professeur, Université Paul Sabatier
Professeur, Université Paris-Sud
Directeur de Recherche, CNRS
Directrice de Recherche, CNRS
Chargé de recherche, CEA

Examineur
Rapporteur
Président
Rapporteur
Examinatrice
Directeur de thèse

Je dédie cette thèse à tous celles et ceux qui, en ces temps troublés, ne prennent pas le chemin de la facilité et gardent toujours la raison comme boussole.

Remerciements

Je remercie le service de physique des particules de l'IRFU pour m'avoir accueilli le long de ces trois années et plus particulièrement le groupe de cosmologie dont j'ai énormément appris. Merci donc à Christophe Yèche, Nathalie Palanque-Delabrouille, Etienne Burtin, Jean-Marc Le Goff, Vanina Ruhlmann-Kleider, Jim Rich et Christophe Magneville ainsi qu'à Eric Armengaud et Roy Aleksan qui nous accompagnent quotidiennement pour les repas du midi. Et je n'oublie pas les thésards et post-doctorants passés et présents du groupe cosmo. Je salue Pierre Laurent, Hélion du Mas des Bourboux, Julien Baur, Pauline Zarrouk, Clément Leloup, Anand Raichnoor, Anaïs Moller, Jérémy Neveu et Arnaud Borde.

J'en profite aussi pour remercier les thésards et post-doctorants du SPP en général pour les agréables repas du vendredi midi et pour les nombreuses discussions aussi variées que profondes. Je tiens aussi à saluer, au SPP, Georges Vasseur, Martine Oger et Béatrice Guyot pour leur disponibilité et leur efficacité à résoudre mes problèmes administratifs ainsi que Matthieu Vivier qui a pris son rôle de parrain à coeur et qui m'a donné de bons conseils. Et je n'oublierai pas les journées jeunes chercheurs mémorables, à Sète, que j'ai passé avec toi et Mathieu Durero que je salue ici !

Je souhaite aussi remercier Jim Bartlett pour son implication dans mon travail ainsi que le groupe amas de galaxies du service d'astrophysique de l'IRFU pour les nombreuses et fructueuses discussions que j'ai pu avoir avec ses membres. Aussi je remercie Monique Arnaud, Hervé Aussel, Gabriel Pratt, Remco Van der Burg, Amandine Lebrun, Jessica Democlès, Iacopo Bartalucci et Paulo Tarrio-Alonso.

Je souhaite exprimer ma gratitude au membre du jury de soutenance, Hervé Dole, Alexandre Beelen et Sophie Maurogordato, et notamment à Juan Macias Perez et Alain Blanchard pour avoir accepté de choisir mon manuscrit comme roman de l'été 2016.

J'en profite aussi pour saluer mon directeur de stage à Marseille, Carlo Schmid, et le remercier de m'avoir introduit dans le monde merveilleux, quoique parfois prise de tête, de la cosmologie.

Hors du cadre de l'astrophysique, je souhaite simplement remercier mes parents, mes grands-parents et à mon frère pour leur soutien aussi bien logistique que moral et plus particulièrement pour s'être occupés de la délicate mission d'organiser le pot de thèse. Je remercie aussi mes amis, notamment Alexandre, Julien, Ronan et Jean-Baptiste pour les (trop peu nombreuses, hélas) heures passées ensemble et pour l'intérêt que vous avez porté à ma thèse.

Je tiens aussi à remercier l'équipe pédagogique du département GE2I de l'IUT Cachan et notamment Stéphane Poujouly et Nicolas Liébeaux pour avoir fait de mon monitorat une expérience extrêmement positive qui m'a donné l'appétit de l'enseignement.

Enfin, une fois n'est pas coutume, je vais terminer par mon directeur de thèse, Jean-Baptiste Melin. Je te remercie du soutien constant que tu m'as apporté depuis le début et pour ton ouverture à toutes les idées que j'ai proposées, même les plus discutables. J'aimerais aussi te remercier pour ta patiente relecture du manuscrit qui m'a beaucoup aidé à le finaliser. Ce fut, pour conclure, un véritable plaisir de travailler avec toi pendant ces 3 (courtes) années.

Table des matières

Introduction	1
1 Dynamique de l'Univers	3
1.1 Vers la cosmologie moderne	3
1.1.1 Géocentrisme	3
1.1.2 Héliocentrisme	4
1.1.3 Galaxies et expansion	4
1.2 Un cadre théorique approprié : la relativité générale	6
1.2.1 Distance et espace-temps	6
1.2.2 Le principe d'équivalence et les géodésiques	7
1.2.3 La métrique	8
1.2.4 La covariance	8
1.2.5 La courbure	9
1.2.6 Le tenseur énergie-impulsion pour un fluide	9
1.2.7 Les équations d'Einstein : une approche par un cas limite	10
1.3 L'expansion de l'Univers	12
1.3.1 Le principe cosmologique	12
1.3.2 La métrique Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	13
1.3.3 Les équations de Friedmann	15
1.3.4 Composantes et équations d'état	17
1.3.5 Forme explicite de la première équation de Friedmann	19
1.3.6 Le redshift cosmologique	19
1.3.7 Les distances associées au redshift	20
1.4 Le contenu de l'Univers et son histoire	24
1.4.1 Matière baryonique et matière noire	24
1.4.2 L'évolution du contenu en matière de l'Univers primordial	25
1.4.3 Rayonnement : le fond diffus cosmologique	29
1.4.4 L'énergie noire et le modèle Λ CDM	35
2 Structures de l'Univers	39
2.1 Un univers localement non homogène en évolution	39
2.1.1 L'évolution des fluctuations de matière	40
2.1.2 Spectre de puissance des fluctuations de matière	42
2.1.3 Evolution de la composante baryonique	45
2.2 Des structures remarquables : les amas de galaxies	45
2.2.1 Une évolution non-linéaire des perturbation : l'effondrement sphérique	46
2.2.2 L'abondance des amas de galaxies et les contraintes sur la cosmologie	49
2.2.3 Caractéristiques physiques d'un amas de galaxies	53
2.2.4 Les lois d'échelles	55
2.2.5 Lentille gravitationnelle par les amas	56
2.3 Quasars et noyaux galactiques actifs	56

2.3.1	Le modèle unifié des noyaux galactiques actifs	56
2.3.2	Croissance du trou noir central	57
2.3.3	Rétro-action	58
3	Détection des structures BOSS dans Planck	61
3.1	Projet de détection du gaz chaud lointain	61
3.1.1	Détection du gaz chaud par effet tSZ	62
3.1.2	Les quasars comme traceurs du gaz chaud	63
3.1.3	Panorama de la détection d'amas à grand redshift	64
3.2	Les données Planck, adaptées à la détection du SZ	65
3.2.1	La mission Planck	65
3.2.2	Le satellite Planck	66
3.2.3	Les cartes Planck non polarisées	68
3.3	Les traceurs, les quasars de BOSS	72
3.3.1	Le programme SDSS	74
3.3.2	Le spectrographe BOSS	75
3.3.3	Sélection des quasars et construction du catalogue	76
3.4	Spectre d'émission des structures BOSS dans Planck	77
3.4.1	Modèle d'émission pour les mini-cartes Planck	78
3.4.2	Bruit de fond des mini-cartes Planck	82
3.4.3	Le matched filter mono-fréquence	84
3.4.4	Spectre d'émission des structures BOSS dans Planck	86
3.5	Nécessité d'un modèle d'émission pour trouver le tSZ	88
4	Caractérisation des structures Planck-BOSS	93
4.1	Détection du gaz chaud sans émission parasite	93
4.1.1	Modèle d'émission avec hypothèse sur le spectre et ν_{eff}	94
4.1.2	Un nouvel outil : le matched filter multi-fréquences	95
4.1.3	Vérifier le modèle : résidus et χ^2	97
4.1.4	Extraction du signal tSZ sur simulation et sur les données	98
4.2	Première hypothèse : l'émission de poussière domine	101
4.2.1	Modèle de poussière : un corps gris	102
4.2.2	Filtrage "Marginal" sans hypothèse sur T_d et β_d	104
4.2.3	Validation de la méthode sur simulation	106
4.2.4	Résultats : extraction pour tous les QSO BOSS	107
4.2.5	Résultats : évolution des caractéristiques de l'émission de poussière	111
4.3	Seconde hypothèse : la poussière domine à côté d'autres émissions sous-dominantes comme le tSZ	112
4.3.1	La troisième émission : le synchrotron	113
4.3.2	Un dernier outil : le matched filter multi-fréquences multi-composantes	115
4.3.3	Validation de la méthode sur simulation poussière + tSZ	117
4.3.4	Evolution des paramètres de poussières avec des filtres multi-composantes	118
4.3.5	Emission synchrotron des quasars radio	120
4.3.6	Emission tSZ chez les quasars non radio	122
4.3.7	Emission de poussière et tSZ en fonction de la magnitude absolue en bande i	125
4.4	Comment interpréter le signal tSZ ?	126
4.4.1	Contrainte sur le signal tSZ à bas redshift	126
4.4.2	Contrepartie ROSAT du signal tSZ	127
4.4.3	Comparaison avec le paramètre de Compton intrinsèque théorique	131
4.5	Possibles sources de systématiques	133
4.5.1	Modèle de poussière avec dispersion sur la température	133

4.5.2	Effet du changement de profil sur l'extraction de structures à haut redshift	134
4.5.3	Une possible contamination à 353 GHz et 545 GHz	134
4.5.4	Etalonnage <i>Planck</i> à 545 GHz et à 857 GHz	134
4.5.5	Contamination par des sources ponctuelles	136
4.6	Bilan et perspectives	137
5	La détection des amas dans <i>ROSAT</i> (vers <i>ROSAT</i>+ <i>Planck</i>)	141
5.1	Un canal de détection des amas en X	142
5.1.1	Détection des amas par rayonnement de freinage	142
5.1.2	Conversion en nombre de photons par seconde	149
5.1.3	Contamination par les noyaux galactiques actifs	151
5.2	Les données <i>ROSAT</i> et le catalogue PXCC	151
5.2.1	La mission <i>ROSAT</i>	152
5.2.2	Le satellite <i>ROSAT</i>	153
5.2.3	Les cartes <i>ROSAT</i> et leur ajustement aux cartes <i>Planck</i>	153
5.2.4	Construction des cartes <i>ROSAT</i> simulées	158
5.2.5	Les amas dans <i>ROSAT</i> et le catalogue "PXCC"	159
5.3	Filtrage <i>ROSAT</i> adapté à un fond homogène dans les X	162
5.3.1	Le modèle d'émission pour les mini-cartes <i>ROSAT</i>	162
5.3.2	La maximisation d'une fonction de vraisemblance	164
5.3.3	Application du filtrage aux simulations et aux données	168
5.3.4	Extension de l'algorithme pour filtrage sur toute la mini-carte	170
5.4	Vers la prise en compte de l'hétérogénéité pour le filtrage <i>ROSAT</i> et le filtrage combiné <i>ROSAT-Planck</i>	173
	Conclusion	181
A	Matched Filters	185
A.1	Construction du matched filter mono-fréquence	185
A.1.1	Définitions et hypothèses de départ	185
A.1.2	Expression de la variance en fonction du filtre et du spectre de puissance.	186
A.1.3	Minimisation du rapport signal sur bruit et expression du filtre	186
A.2	Construction du matched filter multi-fréquences	188
A.2.1	Expression de la variance en fonction du filtre et du spectre de puissance.	188
A.2.2	Minimisation du rapport signal sur bruit et expression du filtre	189
A.2.3	Covariance des résidus	190
A.3	Construction du matched filter multi-fréquences multi-composantes	192
A.3.1	Vers les coefficients	192
A.3.2	Expression de la covariance	194
A.3.3	Covariance sur les résidus avec plusieurs émissions	195
B	Sur-dispersion dans une fonction de vraisemblance Poisson	197
B.1	Prise en compte de la sur-dispersion	197
B.1.1	Introduction d'un paramètre de sur-dispersion	197
B.1.2	Conservation du précédent estimateur qui apparaît non biaisé	197
B.1.3	Construction d'une nouvelle variance	200
B.2	Résultats sur simulation	202
B.2.1	Estimation du paramètre de sur-dispersion sur une mini-carte	202

B.2.2 Suppression de la sur-dispersion	203
Liste des figures	205
Liste des tableaux	213
Bibliographie	216

Introduction

Si l'étude de l'Univers dans sa globalité, la cosmologie, se confond au départ avec l'astrophysique et l'astronomie, elle prend son autonomie au début du XX^{ème} siècle. Les travaux d'Hubble et de Lemaître peuvent notamment servir de point de départ à une cosmologie que l'on peut qualifier de "moderne". C'est à cette époque que les premières mesures de l'expansion de l'Univers sont réalisées et qu'un premier modèle cosmologique dit d'Einstein-De Sitter émerge. Ce modèle sera ensuite complété par "l'observation" (indirecte) de la matière noire et par la découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers pour former le modèle de concordance Λ CDM qui fait autorité aujourd'hui et qui est le cadre dans lequel s'articule cette thèse.

À l'époque des travaux d'Hubble, les corps célestes de référence pour étudier l'Univers étaient les galaxies. D'autres observables vont cependant s'ajouter et apporter de nouvelles contraintes comme le fond diffus cosmologique qui conserve l'image d'une partie de l'Univers telle qu'elle était 300 000 ans après le big bang. Si le recensement des objets célestes remonte à l'antiquité, notamment pour les étoiles, il a été complété, entre autres, par l'observation des premières nébuleuses par Herschel et par Messier au XVIII^{ème} siècle. Il faudra attendre le XX^{ème} siècle, et les travaux d'Hubble encore, pour déterminer la nature de ces nébuleuses. Une grande partie d'entre elles sont en fait des galaxies. Certaines sont mêmes regroupées dans des superstructures appelées amas de galaxies. Des observations ultérieures ont montré que la masse de ces amas est, contrairement à ce que leur nom laisserait supposer, principalement sous la forme d'un halo de matière noire et en moindre proportion sous la forme d'un plasma diffus d'hydrogène et d'hélium que je vais appeler gaz chaud. La part du total de la masse dans les galaxies est plus faible. Les amas de galaxies sont issus de l'effondrement des sur-densités de matière primordiales telles qu'elles apparaissaient dans le fond diffus cosmologique. Ce qui fait des amas d'excellentes sondes pour tracer la formation des structures.

Il faut attendre la seconde moitié du XX^{ème} siècle pour voir le nombre de galaxies, et par extension d'amas, exploser grâce notamment aux progrès dans les techniques de détection avec par exemple l'introduction de caméras CCD ces dernières années. En parallèle, la multiplication des canaux d'observation en radio, en micro-ondes et dans les rayons X notamment contribue et a contribué à cette effervescence. Certaines structures sont détectables dans plusieurs canaux comme les amas. En effet, le gaz chaud des amas distord le spectre des photons du fond diffus cosmologique par effet Sunyaev-Zel'dovich thermique (tSZ) mais émet aussi dans les X par rayonnement de freinage.

Dans cette étude, je vais travailler avec les superstructures que sont les amas de galaxies et plus précisément avec leur composante de gaz chaud. Mon objectif sera d'améliorer et de concevoir des techniques de filtrages logicielles pour détecter plus d'amas dans différents canaux avec pour horizon d'apporter des contraintes plus forte sur la cosmologie. La première partie de mon travail se focalise sur la détection du gaz chaud dans des structures lointaines par effet tSZ avec une approche statistique requérant des traceurs indépendants puisque la détection individuelle n'est pas possible. La deuxième partie se concentre sur la construction d'un filtre pour détecter, individuellement cette fois, le gaz chaud dans les X par rayonnement de freinage. Ce filtre est conçu en respectant la statis-

tique des données X et sera par la suite combiné à un filtre adapté à l'effet tSZ.

Je présente un petit historique de la cosmologie dans le chapitre 1. Je profite aussi de ce chapitre pour aborder brièvement le cadre théorique employé par la Cosmologie moderne, la relativité générale. En y ajoutant le principe cosmologique, je retrouve les équations de Friedmann. A partir de ces équations, je dérive les expressions des distances cosmologiques en fonction du redshift, expressions que j'utiliserai dans la suite de mon travail pour notamment convertir un flux en luminosité. J'évoque aussi dans ce chapitre les différentes composantes de l'Univers comme la matière baryonique ou noire, l'énergie sombre ou encore la composante rayonnement dominé par le fond diffus cosmologique.

Le chapitre 2 est consacré à la formation des structures et me permet d'introduire les amas de galaxies et la fonction de masse. J'évoque aussi les lois d'échelles qui permettent de remonter à la masse d'un amas à partir de sa luminosité ou de l'amplitude de l'effet tSZ. Je présente enfin les noyaux galactiques actifs qui seront à la fois mes traceurs dans la première partie de mon travail (les quasars de BOSS) et une source de contamination dans la seconde partie.

La première partie de mon travail est en fait répartie sur les chapitre 3 et 4. Je cherche à détecter du gaz chaud par effet tSZ dans les données *Planck* de 70 à 857 GHz à la position de traceurs, les quasars du catalogue BOSS. J'introduis ces deux expériences, *Planck* et BOSS dans le chapitre 3 après avoir présenté l'effet tSZ. En utilisant un filtre adapté, le matched filter "mono-fréquence", j'obtiens alors le spectre dans *Planck* des émissions à la position des quasars. Le signal étant dominé par une émission de poussière en provenance des quasars, j'utilise cette fois des matched filters "multi-fréquences" pour extraire le signal de gaz chaud sous-dominant dans le chapitre 4. Ce signal est significatif pour les quasars avec un redshift au-delà de 2.5.

La seconde partie de mon travail est présentée dans le chapitre 5 et est consacrée à la détection individuelle de structures de gaz chaud, principalement en X par rayonnement de freinage. Après avoir introduit ce mécanisme puis les données du satellite *ROSAT* qui contiennent tout le ciel en X de 0.1 keV à 2.4 keV, je présente un filtre adapté à l'émission du gaz chaud dans les X. Ce dernier est conçu pour respecter la statistique du bruit dans les cartes *ROSAT* et est construit à partir de la maximisation d'une fonction de vraisemblance. Ce filtre des données X devra ensuite être combiné à un filtre adapté à l'effet tSZ et aux données *Planck* comme le matched filter "multi-fréquences" pour permettre une détection simultanée des amas de galaxies.

Les différents résultats que j'ai obtenus au cours de ma thèse sont ensuite résumés dans la conclusion.

Chapitre 1

Dynamique de l'Univers

Se pencher sur l'étymologie du mot cosmos, du grec " $\kappa\acute{o}\sigma\mu\omicron\varsigma$ " est une manière classique mais efficace pour introduire la cosmologie. En effet " $\kappa\acute{o}\sigma\mu\omicron\varsigma$ " signifie "bon ordre ; ordre de l'univers ; monde, univers" (DUCROCQ, 1959). Dès son origine, le terme "cosmos" contient à la fois l'objet d'étude de la cosmologie, l'Univers, mais aussi la possibilité même de faire la cosmologie puisque cet univers est considéré comme *ordonné*, c'est-à-dire déterminé par des lois supposées accessibles à la raison humaine. Aussi dès la plus haute antiquité, le cosmos apparaît comme un objet de science, au moins partiellement. Si la cosmologie se confond avec l'astrophysique jusqu'au XX^{ème} siècle, elle se spécialise par la suite. Son objet d'étude en effet, c'est l'Univers dans sa globalité. Jusqu'au XVII^{ème} siècle, l'Univers se résume plus ou moins au système solaire puis par la suite avec notre galaxie et ce jusqu'en 1925. C'est cette année là que les premières galaxies autres que la Voie lactée sont formellement identifiées par Hubble. Ainsi après les planètes pour le cosmos limité au système solaire puis les étoiles pour le cosmos limité à la galaxie, les sondes de base de la cosmologie sont désormais les galaxies. C'est moins leurs propriétés physiques que leur répartition dans l'espace qui importe cependant. Car l'objet d'étude de la cosmologie, c'est l'Univers lui-même et l'évolution de ses principaux composants dont les galaxies ne sont que les traceurs. Si les galaxies restent une sonde essentielle, il existe aussi d'autres structures qui remplissent ce rôle comme les quasars qui peuvent être vus comme des galaxies très brillantes et les amas de galaxies. Ces deux structures seront au coeur de cette thèse. Ce chapitre se focalise cependant non pas sur les structures mais sur les différents composants (matière baryonique, matière noire, énergie sombre, rayonnement) de l'Univers vu à grande échelle où le principe cosmologique est applicable et où la dynamique de ces composants est régie par le modèle de concordance.

Dans cette partie, je vais utiliser comme unité de mesure de distance le Megaparsec noté Mpc et qui vaut $1\text{Mpc} = 3.08610^{22}\text{m}$.

1.1 Vers la cosmologie moderne

1.1.1 Géocentrisme

Il faut attendre le XX^{ème} siècle pour pouvoir distinguer la cosmologie de l'astrophysique. Cette dernière se distinguant elle-même de l'astronomie que depuis le XVII^{ème} siècle. Aussi il convient de commencer par l'astronomie. Il est difficile de dater ses débuts, l'observation du ciel faisant partie des activités humaines depuis toujours. Des relevés astronomiques ont été retrouvés dans les ruines de cités Babyloniennes et Egyptiennes. Il y a aussi de forts indices pour que le site mégalithique de Stonehenge soit un observatoire du néolithique. L'astronomie avait surtout un intérêt pratique à cette époque puisque l'observation du mouvement des astres servait à l'élaboration du calendrier et à fixer les jours

de fêtes religieuses.

C'est en Grèce où l'astronomie va prendre son autonomie et devenir une science. Dès ses prémices, l'astronomie grecque fournit des résultats importants. L'observation de l'étoile Canopus à Alexandrie et sa non-observation dans les cieux d'Athènes (elle est "sous" l'horizon) conduisent les astronomes grecques à rejeter le modèle de Terre plate qui ne peut expliquer ces observations et préférer un modèle de Terre courbée. Ces résultats obtenus au VI^{ème} siècle avant J.C. sont les premiers jalons de la cosmologie.

Le modèle géocentrique, qui place la Terre immobile au centre de l'Univers, émerge à cette même période. Il sera porté notamment par Aristote et raffiné par Hipparque au II^{ème} siècle avant J.C. avec l'introduction des épicycles pour expliquer le mouvement des planètes. C'est Ptolémé dans son ouvrage *l'Almageste* (II^{ème} siècle après J.C.) qui fera aboutir ce modèle qui durera jusqu'au XVII^{ème} siècle en Europe.

1.1.2 Héliocentrisme

Il faudra attendre le modèle héliocentrique de Copernic présenté dans son ouvrage posthume *De revolutionibus orbium coelestium* publié en 1543 pour mettre un terme à cette hégémonie. La Terre n'est plus au centre du monde puisque qu'elle tourne désormais autour du Soleil. Cette idée que la Terre n'est pas à une place privilégiée sera étendue à l'idée qu'il n'y a pas de place privilégiée dans l'Univers. C'est le principe cosmologique ou Copernicien qui sera présenté dans la section suivante. Copernic n'est pas le premier à proposer un modèle qui place le Soleil au centre du monde. Aristarque de Samos avait déjà introduit un tel modèle au II^{ème} siècle avant J.C.

Il faudra attendre les lois de Kepler en 1618 pour obtenir une description plus réaliste des trajectoires. En introduisant formellement la force de gravité dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica* publiés en 1687, Newton peut expliquer le mouvement des planètes et des satellites (cosmos) par la chute libre des corps (phénomène terrestre), retrouvant notamment les lois de Kepler. Les lois physiques sont universelles et s'appliquent aussi bien sur Terre qu'au niveau du cosmos : c'est le début de l'astrophysique.

Deux expériences vont porter le coup de grâce au modèle géocentrique, largement abandonné au XVIII^{ème} siècle. Le mouvement de la Terre autour du Soleil est en effet confirmé par la découverte du phénomène d'aberration de la lumière par Bradley en 1725. Plus d'un siècle plus tard, en 1851, c'est le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même qui est mis en évidence. C'est l'expérience du pendule de Foucault. Mais, au XIX^{ème} siècle, le modèle héliocentrique est déjà dépassé. En effet Bessel, en 1838, en utilisant la méthode des parallaxes calcule les distances de nombreuses étoiles qui s'avèrent être très éloignées du système solaire. Auparavant, les expériences de spectrométrie de Fraunhofer en 1814 avaient confirmés la parenté des étoiles avec le Soleil. La vision du cosmos change. Il ne s'agit plus du système solaire mais d'un vaste ensemble d'étoiles, la Voie lactée, notre galaxie.

1.1.3 Galaxies et expansion

Au XVIII^{ème} siècle Herschel détecte des structures diffuses, les nébuleuses. Ses observations sont complétées par les travaux de Messier qui en dresse un catalogue. Si certaines de ces structures appartiennent bien à la Voie lactée comme la nébuleuse du Crabe, M1, d'autres sont bien plus éloignées comme M87 qui est un quasar. Il faut attendre le XX^{ème} siècle pour avoir une confirmation, la méthode des parallaxes employée jusque là étant incapable de donner la distance des objets lointains.

En 1925, Hubble évalue la distance de certaines nébuleuses en utilisant les céphéides, des étoiles variables qui servent de chandelle standard. Pour connaître la distance de ces étoiles, il faut estimer leur luminosité puisque leur flux est connu. Or en 1912, Leavitt

avait trouvé une relation entre la période de variation de la luminosité des céphéïdes et leur luminosité (LEAVITT et al., 1912). C'est cette relation que va employer Hubble pour remonter jusqu'aux distances. Et ces distances sont bien plus grandes qu'attendues. Les nébuleuses ne sont pas dans notre galaxie et sont elles-mêmes des galaxies. C'est là encore une évolution majeure de notre vision du cosmos. La galaxie va devenir la structure de base de la cosmologie.

En 1913, Vesto Slipher mesurait le décalage vers le rouge, le "redshift" du spectre des étoiles dans une des nébuleuses, Andromède (SLIPHER, 1913). C'est la première mesure du redshift cosmologique. En s'appuyant sur les mesures de Slipher et d'autres, Hubble remarque que ce décalage augmente avec la distance. L'interprétant comme un effet Doppler-Fizeau, Hubble en déduit alors que les galaxies les plus lointaines s'éloignent plus vite de l'observateur (HUBBLE, 1929). C'est la loi de Hubble proposée en 1929 :

$$v_r = H_0 r \quad (1.1)$$

avec v_r la vitesse de la galaxie le long de la ligne de visée, r la distance entre la galaxie et l'observateur et $H_0 = 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (valeur la plus récente) la constante de Hubble. Le redshift est lié de la manière suivante à la vitesse d'après l'effet Doppler :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}. \quad (1.2)$$

Si Hubble a laissé son nom à la constante H_0 , il n'a pas été le premier à l'introduire ni à déterminer sa valeur. Il a été précédé par les travaux de Lemaître publiés en 1927 (LEMAÎTRE, 1927) et ceux de Lundmark publiés en 1925 (LUNDMARK, 1925).

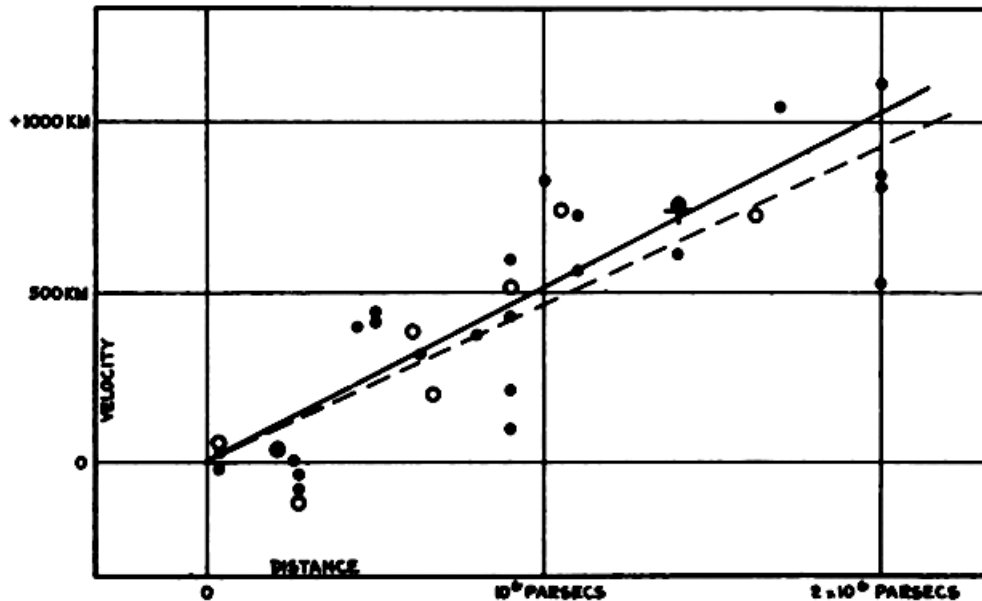


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

FIGURE 1.1 – Les galaxies les plus lointaines semblent s'éloigner le plus vite de nous. La ligne continue donne le meilleur ajustement tandis que la ligne pointillée est corrigée du mouvement du Soleil. Cette figure est tirée de l'article original de Hubble (HUBBLE, 1929).

Cependant, z peut dépasser 1 ce qui invalide l'interprétation du redshift cosmologique comme un effet Doppler-Fizeau. Ce redshift est en fait une conséquence de l'expansion de l'Univers. La loi de Hubble qui est au coeur de la cosmologie moderne s'appuie sur ce formalisme et non sur celui de Hubble, ce dernier doutant de l'expansion de l'Univers.

Entre 1922 et 1924, Friedmann avait déjà développé un modèle expliquant l'expansion de l'Univers en s'appuyant sur la relativité générale. Ce modèle a été retrouvé indépendamment par Lemaître vers 1927 ([LEMAÎTRE, 1927](#)) et a été complété par les travaux de Robertson et Walker sur la métrique ([ROBERTSON, 1933](#) ; [WALKER, 1933](#)). Critiqué par les partisans de l'Univers stationnaire, notamment par Hoyle qui laissera à la postérité le nom de "Big Bang" pour décrire l'instant zéro, le modèle de l'Univers en expansion deviendra l'interprétation dominante après la découverte du fond diffus cosmologique par Penzias et Wilson en 1965 ([PENZIAS et al., 1965](#) ; [DICKE et al., 1965](#)). L'hypothèse de ce fond diffus avait été proposée par Alpher et Herman en 1948 aidés de Gamov ([GAMOW, 1948b](#) ; [GAMOW, 1948a](#) ; [ALPHER et al., 1948](#)). La découverte de l'accélération de l'Univers en 1999 ([PERLMUTTER et al., 1999](#) ; [RIESS et al., 1998](#) ; [SCHMIDT et al., 1998](#)) ne remet pas en cause les fondements de ce modèle.

C'est ce modèle que je vais présenter dans la section 1.3. Les observations qui confirment ce modèle seront présentées dans la section 1.4.

1.2 Un cadre théorique approprié : la relativité générale

Si la relativité restreinte a introduit l'espace-temps, la relativité générale quant à elle décrit les déformations de cet espace-temps en présence de masse. L'espace-temps est donc un objet physique (et non plus la scène "figée" sur laquelle se joue la pièce de théâtre du monde) et surtout dynamique.

L'expansion de l'Univers proposé par Friedmann est avant tout une expansion de cet espace-temps. Avant de présenter le modèle de Friedmann, il convient de faire un petit rappel sur la relativité restreinte et la relativité générale qui introduisent des concepts essentiels comme la métrique. Je me suis appuyé sur le [FERREIRA, 2013](#) pour écrire cette section.

1.2.1 Distance et espace-temps

La relativité est avant tout une affaire d'invariance. Quelle quantité sera invariante d'un observateur à un autre ? Pour la relativité Galiléenne, c'est la distance euclidienne et la durée ; pour la relativité restreinte c'est une distance dans l'espace-temps.

Soit deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. (x, y, z, t) et (x', y', z', t') sont respectivement les coordonnées d'un événement dans un référentiel et dans l'autre. Dans le cadre de la relativité Galiléenne, le différentiel de la distance, qui est une norme euclidienne, se conserve :

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dl'^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

ainsi que le différentiel de temps écoulé ou différentiel de durée :

$$dt = dt' \quad (1.4)$$

Ainsi deux observateurs en translation uniforme l'un par rapport à l'autre mesureront la même distance et la même durée entre deux événements.

Si la composition de vitesse permet de passer d'un jeu de coordonnées à un autre dans la relativité Galiléenne, il faut utiliser les transformations de Lorentz dans le nouveau cadre de la relativité restreinte pour que la lumière conserve sa vitesse dans le vide quelque soit la vitesse de l'observateur. Notons que la relativité Galiléenne est une bonne approximation de la relativité restreinte pour des observateurs avec des vitesses négligeables devant celle de la lumière.

Dans cette nouvelle relativité ce n'est plus la distance euclidienne et la durée qui sont conservées mais une distance dans un espace temps à quatre dimensions. Cette distance peut être vue comme une distance euclidienne "corrigée" de l'écoulement du temps qui est différent entre deux observateurs. Le différentiel de cette distance s'écrit comme il suit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \\ &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = ds'^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

que l'on peut écrire de la façon suivante avec la notation d'Einstein :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.6)$$

avec

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

et $\vec{x} = (ct, x, y, z)$. Deux observateurs en translation uniforme l'un par rapport à l'autre mesureront une distance euclidienne et une durée différente entre deux événements. Ils mesureront cependant une distance "espace-temps" identique. Remarquons que pour la lumière $ds^2 = 0$ car $c = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$. Notons aussi que le temps propre de la particule est défini à partir de la distance dans un espace temps ; soit τ le temps propre alors $c^2 d\tau^2 = -ds^2$.

1.2.2 Le principe d'équivalence et les géodésiques

La relativité restreinte n'est applicable que pour des référentiels où le principe d'inertie est respecté, c'est-à-dire quand les particules non soumises à une force ont une vitesse constante. A première vue ce type de référentiel est attaché à des observateurs en translation uniforme. Einstein va cependant mettre en évidence d'autres référentiels où le principe d'inertie s'applique en s'appuyant sur son principe d'équivalence.

En supposant l'identité parfaite entre masse inertielle et masse gravitationnelle, on peut en déduire que des particules massives soumises au même champ gravitationnel ont la même accélération localement. Il existe donc un observateur en chute libre qui a cette même accélération. Pour cet observateur, les particules ont une vitesse constante ; le champ de gravité paraît absent. Le principe d'inertie s'applique dans le référentiel attaché à un tel observateur et donc la relativité restreinte. C'est le principe d'équivalence.

Soit ξ^α les coordonnées d'une particule dans un tel référentiel. La relativité restreinte s'appliquant pour ce référentiel, on peut écrire que $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$. Soit λ le paramètre tel que $\xi^\alpha(\lambda)$. Pour une particule avec une vitesse inférieure à celle de la lumière, il est possible de prendre le temps propre soit $\lambda = \tau$. D'après le principe d'inertie, la trajectoire de la particule sera une ligne droite :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} = 0. \quad (1.8)$$

On se place cette fois dans un référentiel quelconque. Les coordonnées de la particule sont alors données par x^α . En partant de l'équation 1.8, on aboutit à une l'équation du mouvement de la particule dans ce référentiel :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.9)$$

avec le connecteur affine :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (1.10)$$

Dans ce référentiel quelconque, la particule ne suit plus une ligne droite mais une géodésique. L'espace apparaît alors "courbé" pour un observateur de ce référentiel.

1.2.3 La métrique

L'information sur la courbure est portée par le connecteur affine. Ce connecteur dépend d'une métrique $g_{\mu\nu}$ définie de la façon suivante :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \quad (1.11)$$

et qui lie le jeu de coordonnées du référentiel en chute libre avec celui du référentiel quelconque. Cette définition et celle du connecteur affine permettent d'obtenir la relation entre ce connecteur et la métrique :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (1.12)$$

avec $g^{\mu\nu}$ l'inverse de la matrice $g_{\mu\nu}$, soit telle que $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$. L'expression explicite de l'inverse de la métrique en fonction de $\eta^{\alpha\beta}$ est alors :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}. \quad (1.13)$$

En partant de son expression dans le référentiel en chute libre, le différentiel de distance s'écrit dans le référentiel quelconque de cette façon :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.2.4 La covariance

Partons du vecteur $V^{\alpha} = \frac{d\xi^{\alpha}}{d\lambda}$. Si $\lambda = \tau$, il s'agit du quadrivecteur impulsion à la masse près. La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrit sous la forme $\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\sigma}} = 0$. Dans le référentiel quelconque l'équivalent du quadrivecteur est donné par $T^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{dx^{\alpha}}{d\xi^{\mu}} V^{\mu}$. Il est alors possible de démontrer que $\frac{dT^{\alpha}}{dx^{\sigma}} = -\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} T^{\mu}$.

Il est possible de généraliser à des vecteurs quelconques. Soit un vecteur V^{α} exprimé dans le référentiel en chute libre et un vecteur $T^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\xi^{\mu}} V^{\mu}$ exprimé dans le référentiel quelconque. Si $\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\sigma}} = 0$ alors on obtient l'équation de transport parallèle suivant :

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} T^{\alpha} &= \frac{dT^{\alpha}}{dx^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} T^{\mu} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

∇_{σ} dénote la dérivée covariante. Si $V^{\alpha} = \frac{d\xi^{\alpha}}{d\lambda}$, il est possible de réécrire l'équation 1.9 de cette manière : $\frac{DT^{\alpha}}{D\lambda} = T^{\mu} \nabla_{\mu} T^{\alpha} = 0$.

La covariance est généralisable aussi aux tenseurs d'ordre 2. Soit un tenseur $V^{\alpha\beta}$ exprimé dans le référentiel en chute libre et un tenseur $M^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\xi^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\xi^\nu} V^{\mu\nu}$ exprimé dans le référentiel quelconque. Si $\frac{\partial V^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\sigma} = 0$ alors :

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\alpha\beta} &= \frac{dT^{\alpha\beta}}{dx^\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha T^{\mu\beta} + \Gamma_{\sigma\mu}^\beta T^{\alpha\mu} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Par exemple, $V^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ et $M^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \frac{dx^\alpha}{d\xi^\mu} \frac{dx^\beta}{d\xi^\nu} \eta^{\mu\nu}$ vérifient leurs équations de transports parallèles respectives : comme $\frac{d\eta^{\alpha\beta}}{d\xi^\sigma} = 0$, on a aussi $\nabla_\sigma g^{\alpha\beta} = 0$.

Il est aussi possible de définir un tenseur énergie-impulsion dans le référentiel en chute libre : $\tilde{T}^{\alpha\beta} = m \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{d\xi^\beta}{d\lambda}$ pour une particule de masse m . Dans un référentiel quelconque, ce tenseur prend la forme de T . Comme $\frac{d\tilde{T}^{\alpha\beta}}{d\xi^\sigma} = 0$, nécessairement $\nabla_\sigma T^{\alpha\beta} = 0$.

1.2.5 La courbure

Le tenseur de courbure de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ est tel que pour un vecteur V^α on ait la relation suivante :

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta \quad (1.17)$$

Il est aussi possible de construire ce tenseur de courbure à partir de la métrique. Une expression plus simple s'obtient cependant avec la connexion affine :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\nu\beta}^\alpha}{dx^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \quad (1.18)$$

Le tenseur de Ricci est construit de la manière suivante :

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu, \quad (1.19)$$

ce qui permet d'obtenir le scalaire de Ricci :

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (1.20)$$

1.2.6 Le tenseur énergie-impulsion pour un fluide

Le tenseur énergie-impulsion peut être vu comme le produit tensoriel de deux quadrivecteurs énergie-impulsion dans un référentiel inertiel (le tout divisé par le volume considéré). Par exemple pour un fluide parfait sans pression, ce tenseur s'écrit :

$$T_{\alpha\beta} = \rho U_\alpha U_\beta \quad (1.21)$$

avec $U_\alpha = (c, \vec{v})$, le quadrivecteur vitesse du fluide. Il est possible de retrouver les équations d'Euler de conservation de la masse et de l'impulsion en partant de l'équation de conservation $\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} = 0$.

On va ensuite généraliser l'expression de ce tenseur à tout fluide parfait en introduisant un terme de pression. Dans ce cas, le tenseur aura la forme suivante pour n'importe quel référentiel :

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U_\alpha U_\beta + P g_{\alpha\beta} \quad (1.22)$$

et notamment dans celui de repos du fluide pour lequel on a $U_\alpha = (c, 0, 0, 0)$. Notons que la conservation de la masse et de l'impulsion dérive de l'équation de conservation covariante $\nabla_\sigma T_{\alpha\beta} = 0$.

1.2.7 Les équations d'Einstein : une approche par un cas limite

On cherche maintenant à relier la métrique $g^{\alpha\beta}$, ou un équivalent comme le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta}$, avec un contenu en matière donné par le tenseur énergie-impulsion. Ce dernier peut s'écrire facilement dans certains référentiels. Pour avoir une intuition sur une relation de la sorte entre géométrie et énergie, plaçons nous dans un cas limite non-relativiste où il sera possible d'utiliser l'équation de Poisson. Les indices i, j vont désigner dans cette section les coordonnées spatiales de 1 à 3.

L'approximation des champs faibles

On se place dans l'approximation d'un champ de gravitation faible. On peut alors écrire que :

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \quad (1.23)$$

avec $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$.

La métrique est supposée stationnaire donc telle que $\frac{dg^{\alpha\beta}}{dx^{(0)}} = 0$. Avec ces hypothèses et en utilisant l'expression du connecteur affine en fonction de la métrique et du tenseur de courbure en fonction de ce même connecteur, on arrive à l'expression suivante du premier terme du tenseur de Ricci en se restreignant au terme de 1er ordre en $h^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{ij} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (1.24)$$

car on suppose $\frac{dg^{\alpha\beta}}{dx^{(0)}} = 0$ (métrique stationnaire).

Le fluide considéré ici est presque statique. Ce qui donne l'expression suivante du tenseur énergie-impulsion : $T_{\alpha\beta} \simeq 0$ à l'exception de $T_{00} = \rho c^2$, le terme d'énergie.

On suppose que $R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ (sauf pour R_{00}) pour obtenir la relation suivante (pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \\ &= 0 \\ &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Comme $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$, pour $i \neq j$, $R_{ij} \simeq 0$.

Limite Newtonienne

On se place dans un cas d'une particule non relativiste. Alors à partir de l'expression de la métrique, on peut en déduire que $\frac{dt}{d\tau} \simeq 1$ et que $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$. Partant de l'équation de la géodésique, on arrive aux simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 &\simeq 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{1}{c^2} &\simeq 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Comme $\frac{dg^{\alpha\beta}}{dx^{(0)}} = 0$ et en utilisant l'approximation des champs faibles, on peut écrire la connexion affine de cette manière :

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (1.27)$$

conduisant à l'expression suivante pour la géodésique :

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \quad (1.28)$$

En posant $r^2 = x^{(1)2} + x^{(2)2} + x^{(3)2}$ et en utilisant l'équation ci-dessus on arrive à la relation suivante :

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \nabla h_{00}. \quad (1.29)$$

La seconde loi de Newton est valide dans ce référentiel soumis à un champ faible. On peut donc écrire que $\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\nabla\Phi$ avec $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. Comme $\frac{dt}{d\tau} \simeq 1$, on a alors une expression de la variation de la métrique :

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \quad (1.30)$$

L'équation 1.24 permet d'obtenir l'expression suivante de R_{00} :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi \\ &= \frac{4\pi G\rho}{c^2} \\ &= \frac{4\pi G}{c^4} T_{00}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Notons que $R \simeq \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = -R_{00} + \eta^{ii} R_{ii} = -R_{00} + \frac{1}{2} \eta^{ii} \eta_{ii} R = -R_{00} + \frac{3}{2} R$. Donc $G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \simeq R_{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} R \simeq 2R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}$. Ce qui permet d'en déduire que :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les équations d'Einstein

On va généraliser l'équation obtenue dans le cas limite à tous les champs gravitationnels en ajoutant un terme supplémentaire portée par une *constante cosmologique* Λ :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Il s'agit des équations d'Einstein. Il est possible de les dériver à partir de l'action d'Einstein-Hilbert, ce qui constitue la preuve la plus rigoureuse pour les obtenir (CARROLL, 1997). La géométrie de l'espace temps $G_{\alpha\beta}$ est dépendante du contenu en énergie $T_{\alpha\beta}$ comme le résume la figure 1.2.

Si les équations d'Einstein sont une généralisation de la loi de gravitation universelle de Newton, les équations des géodésiques sont le pendant de la 2ème loi de Newton.

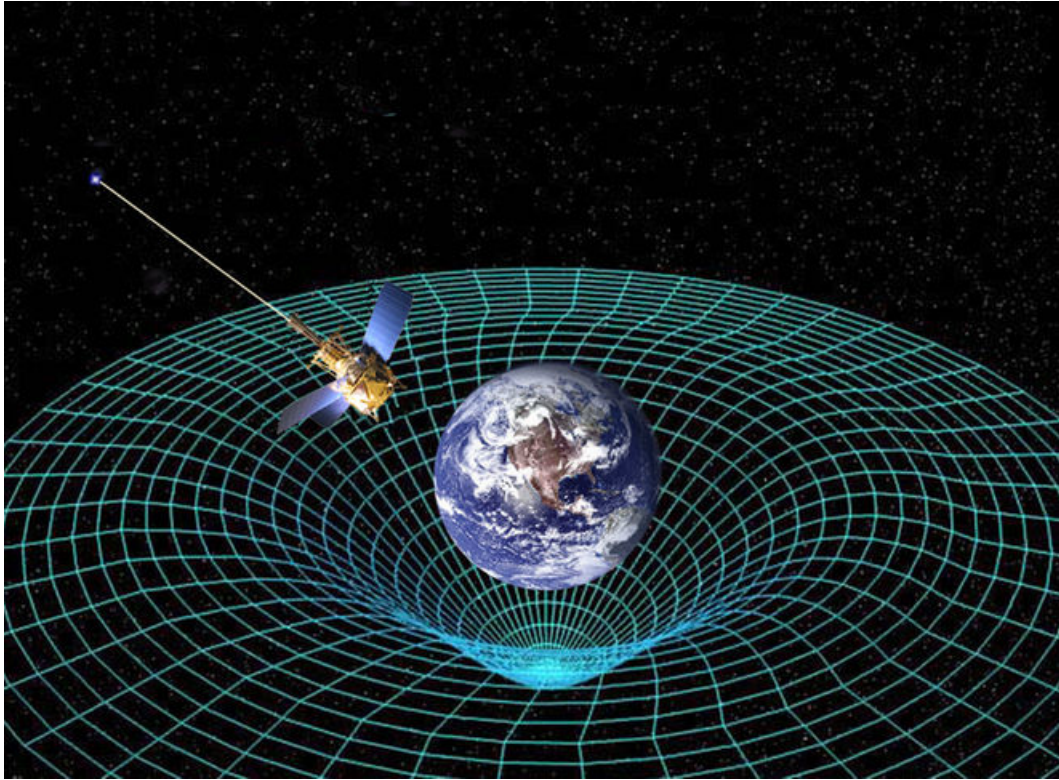


FIGURE 1.2 – Une représentation classique de la déformation de l'espace-temps induite par les masses. Ici, c'est la Terre qui déforme l'espace-temps représenté par une grille bleue ; le satellite au lieu de suivre une trajectoire rectiligne suit une trajectoire courbée. Crédit : NASA

1.3 L'expansion de l'Univers

Dans cette partie je présente le modèle d'expansion de l'Univers dans sa forme la plus générale c'est-à-dire avec la constante cosmologique Λ . Après avoir introduit le facteur d'expansion a , je vais chercher l'expression de ce facteur en fonction du temps puis du redshift z . Je vais ensuite établir la relation entre distance et redshift.

Le modèle d'expansion de l'Univers s'appuie notamment sur une certaine métrique et sur les équations d'Einstein qui sont en pratique difficiles à utiliser. Avec de bonnes hypothèses, il est cependant possible de dériver des solutions simples de ces équations. Par exemple, en partant du principe cosmologique, il est possible de construire une métrique adaptée et d'obtenir les équations de Friedmann facilement. J'ai principalement utilisé le cours [FERREIRA, 2013](#) et les ouvrages [GORBUNOV et al., 2011](#) et [DODELSON, 2003](#) pour écrire cette partie.

1.3.1 Le principe cosmologique

Le principe cosmologique est l'un des piliers de la cosmologie moderne avec le principe d'équivalence qui fonde (en partie) la relativité générale. Depuis Copernic, la Terre n'occupe plus la place centrale dans l'Univers. Les observations qui suivront vont renforcer ce point de vue. Si la Terre n'est pas à une position particulière, il est légitime de se demander s'il y a de telles positions "particulières" dans l'Univers, par exemple si ce dernier a un centre. La réponse la plus logique, c'est de dire non. C'est cette vision qui est portée par le principe cosmologique. Ce principe se résume aux deux propriétés suivantes.

— L'Univers est *homogène*. Pour un temps donné, l'Univers est identique quelque soit

le point de l'espace considéré pour l'observer.

- L'Univers est *isotrope*. Pour un point donné, l'Univers est identique quelque soit la direction d'observation.

Ces deux propriétés sont différentes. La première stipule que des observateurs à des positions différentes observeront le même Univers. Celui-ci peut leur paraître non isotrope avec à chaque fois une direction d'observation particulière. Le deuxième principe est alors nécessaire pour imposer l'isotropie. Du fait de la présence de nombreuses structures, le principe cosmologique est applicable seulement aux très grandes échelles (c'est-à-dire au delà de 100 Mpc aujourd'hui).

1.3.2 La métrique Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Dans cette section, les indices i, j vont désigner les coordonnées spatiales de 1 à 3. Rappelons que la métrique est liée au différentiel de distance de cette façon :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.34)$$

On se place dans un référentiel tel que $g_{0i} = g_{i0} = 0$ et tel que $g_{00} = -1$. On a donc :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.35)$$

L'Univers plat

Je note $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Pour un Univers plat, donc euclidien, j'ai par définition $g_{ij} = 0$ pour i différent de j . Comme l'Univers est isotrope, je n'ai pas de direction privilégiée donc $g_{11} = g_{22} = g_{33}$. L'Univers est homogène, donc la métrique ne dépend pas de la position dans l'espace. D'où $g_{11} = a(t)^2$ avec $a(t)$ le facteur d'échelle. J'ai donc $dl^2 = a(t)^2 (dx^{(1)2} + dx^{(2)2} + dx^{(3)2})$ que je peux écrire avec les coordonnées sphériques (χ, θ, ϕ) de cette manière : $dl^2 = a(t)^2 [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)]$.

Je trouve alors la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) pour un univers plat :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)] \quad (1.36)$$

Cas général

Si l'univers n'est pas plat alors $g_{ij} \neq 0$ pour i différent de j et l'expression précédente de la métrique n'est plus applicable. Pour un Univers homogène et isotrope, il y a trois possibilités de métrique dont l'une vient d'être présentée puisqu'il s'agit de l'Univers plat. La seconde, c'est une hyper-sphère dans un espace euclidien à 4 dimensions. La troisième est donnée par une hyper-hyperboloïde dans un espace de Minkowski à 4 dimensions. C'est à ce résultat que sont parvenus Robertson et Walker dans les années 1930. Notons que dans le second cas, il est possible d'écrire la métrique de cette façon dans un espace à 4 dimensions avec des coordonnées (X, Y, Z, W) :

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)] \quad (1.37)$$

avec $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2$. Dans le troisième cas, la métrique s'écrit de la façon suivante :

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 = R^2 [d\chi^2 + \sinh^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)] \quad (1.38)$$

et $-R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - W^2$. Je peux introduire de nouveau le facteur d'échelle qui est tel que $R(t) = a(t) \cdot R_0$ et tel que $a(t_0) = a_0 = 1$ avec t_0 le temps de l'observation

(aujourd'hui). Je définie k tel que $|k| = 1/R_0^2$ et tel que $k > 0$ pour un univers sphérique, $k < 0$ pour un univers hyperboloïde et $k = 0$ pour un univers plat. La courbure est le rapport k/R_0^2 . Je peux alors écrire la forme générale de la métrique comme il suit :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)] \quad (1.39)$$

avec :

$$S_k(\chi) = \begin{cases} R_0 \sin(\frac{\chi}{R_0}), & \text{si } k > 0 \text{ (Sphère)} \\ \chi, & \text{si } k = 0 \text{ (Espace plat)} \\ R_0 \sinh(\frac{\chi}{R_0}), & \text{si } k < 0 \text{ (Hyperboloïde).} \end{cases} \quad (1.40)$$

χ est appelée la distance comobile.

La loi de Hubble retrouvée

Je définis le paramètre de Hubble de la façon suivante :

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.41)$$

Soit r la distance entre deux galaxies. Alors $r = a\chi$. La vitesse radiale d'une galaxie par rapport à l'autre est donnée par (si l'on néglige les vitesses propres des galaxies) :

$$v_r = \dot{r} = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a} a\chi = Hr. \quad (1.42)$$

Pour des objets proches, $H \simeq H_0$. Je retrouve donc la loi de Hubble :

$$v_r = H_0 r. \quad (1.43)$$

Je vais ensuite chercher une expression du facteur d'expansion a . Comme la relativité générale le suggère, ce facteur doit dépendre du contenu en énergie de l'Univers.

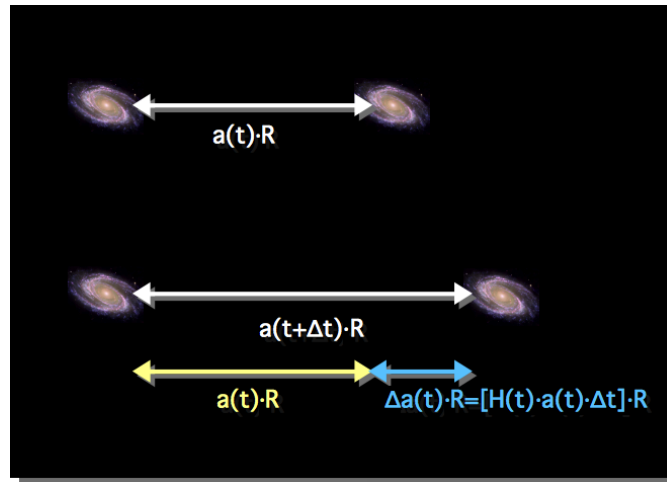


FIGURE 1.3 – Une illustration de l'expansion de l'Univers. La distance entre deux galaxies augmente au cours du temps. Cette augmentation dépend de la distance entre ces galaxies.

1.3.3 Les équations de Friedmann

Les indices i, j vont désigner dans cette section les coordonnées spatiales de 1 à 3. Je vais me placer dans le cas de l'Univers plat pour retrouver la première équation de Friedmann qui sera ensuite généralisée aux univers courbés. La métrique que j'utilise a les propriétés suivantes : $g_{00} = -1$ et $g_{ij} = a(t)^2 \delta_{ij}$. Je suppose que les différents composants de l'Univers sont des fluides parfaits, c'est-à-dire sans cisaillement, sans viscosité et non conducteur de chaleur. Ils sont alors caractérisés seulement par leur densité ρ et leur pression p . Je peux alors utiliser le tenseur énergie-impulsion suivant :

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U_\alpha U_\beta + P g_{\alpha\beta} \quad (1.44)$$

Je me place dans le référentiel au repos du fluide tel que $U_\alpha = (c, 0, 0, 0)$. En utilisant les expressions précédentes pour la métrique, j'obtiens que $T_{00} = \rho c^2$ et que $T_{ij} = a^2 P \delta_{ij}$ donc tel que :

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Il m'est possible d'obtenir aussi les expressions suivantes pour les connexions affines en partant de la métrique FLRW :

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = 0 \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{c} a \dot{a} \delta_{ij} \\ \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ce qui amène aux expressions suivantes pour le tenseur de Ricci :

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{0i} &= 0, \\ R_{ij} &= \frac{1}{c^2} (a \ddot{a} + 2 \dot{a}^2) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.47)$$

et donc à l'expression suivante du scalaire de Ricci :

$$\begin{aligned} R &= g^{00} R_{00} + g^{ii} R_{ii} \\ &= -R_{00} + \frac{3}{a} \frac{1}{c^2} (a \ddot{a} + 2 \dot{a}^2). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Première équation de Friedmann

En utilisant la première équation d'Einstein :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} - \Lambda g_{00}. \quad (1.49)$$

j'aboutis à la première équation de Friedmann dite de Friedmann-Roberston-Walker (FRW) :

$$\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{c^2} \rho + \Lambda \quad (1.50)$$

plus habituellement écrite de la façon suivante :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (1.51)$$

Seconde équation de Friedmann

Et en partant cette fois des équations d'Einstein pour les termes d'espace :

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} - \Lambda g_{ij}. \quad (1.52)$$

je récupère une seconde équation :

$$-\frac{1}{c^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2) = \frac{8\pi G}{c^4}P - \Lambda \quad (1.53)$$

que je peux simplifier à partir de la première pour obtenir cette fois la deuxième équation de Friedmann dite de Raychaudhuri :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (1.54)$$

Il est possible de retrouver la seconde équation de Friedmann en combinant la première équation 1.51 avec les équations de conservation $\nabla_\sigma T^{\alpha\beta} = 0$. En fait ces équations se réduisent à la simple équation suivante si on utilise la métrique FLRW :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0 \quad (1.55)$$

Terme de courbure

Prendre en compte la courbure n'ajoute pas de terme de pression supplémentaire et donc ne modifie pas l'équation de Raychaudhuri. Cependant, l'équation FRW est modifiée par l'ajout du terme de courbure $\frac{kc^2}{a^2}$:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (1.56)$$

Je vais par la suite surtout employer la première équation de Friedmann, notamment pour calculer les distances comobiles à partir du redshift. Je ne vais pas utiliser l'équation de Raychaudhuri ; j'utiliserai l'équation de conservation 1.55 le cas échéant.

Première équation de Friedmann avec une approche Newtonienne

La première équation de Friedmann s'obtient de manière alternative avec la loi de gravitation de Newton. La démonstration est empruntée à [BERNARDEAU, 2005](#) et à [RICH, 2010](#). Soit une sphère de masse M et de rayon $R(t) = a(t)R_0$. Le théorème de Gauss conduit à l'expression suivante :

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}. \quad (1.57)$$

La masse s'obtient en fonction de la densité $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$. Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho. \quad (1.58)$$

Cette équation rappelle celle de Raychaudhuri mais sans les termes de pression qui ne s'obtiennent qu'avec les équations d'Einstein. En fait, si le fluide est composé de matière au repos, le terme de pression est nul et les équations sont équivalentes. La masse se conserve donc l'intégrale première de l'équation 1.57, s'écrit :

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{GM}{R} - K. \quad (1.59)$$

En divisant par $R^2/2$ de part et d'autre, en remplaçant M par son expression en fonction de ρ et en posant $K = kc^2 R_0^2$ on retrouve ainsi la première équation de Friedmann (sans constante cosmologique) :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (1.60)$$

1.3.4 Composantes et équations d'état

Le fluide cosmique de densité ρ est composé de plusieurs fluides cosmiques avec des propriétés différentes notamment en terme de pression. Je vais supposer ici que ce fluide est la somme d'une composante matière au repos ou "froide" (elle même somme d'une composante baryonique et d'une composante de matière noire) de densité ρ_m et d'une composante radiation (photons et neutrinos relativistes) de densité ρ_R tel que $\rho = \rho_m + \rho_R$. Je peux aussi voir la constante cosmologique Λ comme un fluide de densité ρ_Λ , l'énergie noire. Je définie cette densité ρ_Λ telle que je puisse écrire l'équation 1.56 de cette manière là :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_R + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (1.61)$$

J'ai donc l'expression suivante de la densité :

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (1.62)$$

Pour résoudre les équations de Friedmann et trouver a , il faut déterminer la pression P_i exercée par la composante i du fluide. Il faut alors chercher une relation entre cette pression P_i et la densité ρ_i . Je suppose une relation du type :

$$P_i = \omega_i \rho_i c^2. \quad (1.63)$$

C'est l'équation d'état d'un fluide polytropique.

Pour un gaz peu dense, la pression est reliée à la densité de cette manière :

$$P_i = \frac{1}{3} \rho_i \langle v_i^2 \rangle \quad (1.64)$$

avec $\langle v_i^2 \rangle$ la moyenne du carré de la vitesse du fluide. Cette relation est notamment utilisée pour passer des équations de Boltzmann aux équations de Navier-Stokes.

Matière froide

Attardons-nous sur la première composante, la matière que l'on va supposer "froide" c'est-à-dire non relativiste donc telle que $\langle v_m^2 \rangle \ll c^2$. Ainsi la pression est négligeable : $P_m/c^2 = \frac{1}{3}\rho_m \langle v_m^2 \rangle / c^2 \ll \rho_m$. L'équation de conservation 1.55 s'écrit alors de manière simplifiée comme il suit :

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0 \quad (1.65)$$

Ce qui conduit à écrire que $\rho_m = \rho_{0m} a^{-3}$. Il est possible de retrouver ce résultat en utilisant une expression explicite de la masse totale : $M = \frac{4\pi}{3} \rho_m R_0^3 a^3$. Comme la masse se conserve, on peut en déduire que $\rho_m \propto a^{-3}$. Cette matière froide est parfois nommée "dust" ou poussière. Je n'utiliserai pas cette appellation que je réserve pour certaines molécules dont les grains de monoxyde de carbone que l'on trouve dans le milieu interstellaire et qui sont une infime part de la matière baryonique et donc de la matière froide totale.

Rayonnement

La composante rayonnement est constituée de l'ensemble des particules relativistes donc telles que $\langle v_R^2 \rangle \simeq c^2$. On peut donc écrire que $P_R/c^2 = \frac{1}{3}\rho_R$. L'équation de conservation 1.55 prend alors l'expression suivante :

$$\dot{\rho}_R + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_R(1 + \frac{1}{3}) = \dot{\rho}_R + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_R = \frac{1}{a^4} \frac{d}{dt}(\rho_R a^4) = 0 \quad (1.66)$$

Et donc la densité de rayonnement s'écrit ainsi : $\rho_R = \rho_{0R}a^{-4}$.

Energie sombre

Remarquons que, comme $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, la densité d'énergie sombre n'évolue pas avec a . Je peux donc écrire que $\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}$. En utilisant l'équation de conservation 1.55, je peux écrire que :

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 = \omega_\Lambda \rho_\Lambda c^2. \quad (1.67)$$

Cette composante énergie sombre a donc une pression négative ce qui tend à augmenter l'accélération du facteur d'expansion $\ddot{a}$, à l'inverse d'une pression positive comme celle exercée par le rayonnement.

Solution pour un fluide avec une seule composante

On peut généraliser les résultats suivants en partants de $P_i = \omega_i \rho_i c^2$. L'équation de conservation 1.55 peut se simplifier ainsi :

$$\dot{\rho}_R + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_R(1 + \frac{1}{3}) = \dot{\rho}_R + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_R = \frac{1}{a^4} \frac{d}{dt}(\rho_R a^4) = 0 \quad (1.68)$$

conduisant au résultat suivant :

$$\rho_i = \rho_{0i}a^{-3(1+\omega_i)} \quad (1.69)$$

Prenons maintenant un fluide constitué d'une seule composante i . Si l'on injecte le résultat $\rho_i = \rho_{0i}a^{-3(1+\omega_i)}$ dans la première équation de Friedmann, on obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_i - \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{0i}a^{-3(1+\omega_i)} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.70)$$

qui a une solution explicite si l'Univers est plat ($k=0$) pour $\omega_i \neq -1$:

$$a = a_0 t^{\frac{2}{3(\omega_i+1)}}, \quad (1.71)$$

et pour $\omega_i = -1$

$$a = a_0 e^{Ht}. \quad (1.72)$$

Par exemple si le fluide est dominé par de la matière froide, $\omega_i = 0$ et donc $a \propto t^{2/3}$. Dans ce cas, je peux écrire que :

$$H = \frac{2}{3} \frac{t^{-1/3}}{t^{2/3}}. \quad (1.73)$$

Je peux donc déduire l'âge de l'Univers s'il est dominé par la matière :

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \simeq 9.3 \cdot 10^9 \text{ ans si } H_0 = 70 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.74)$$

Notons que l'Univers est maintenant dominé par la constante cosmologique ce qui rend l'estimation de l'âge de l'Univers ci-dessus caduque.

1.3.5 Forme explicite de la première équation de Friedmann

Je définis la densité critique de l'Univers présent ρ_{0c} qui est telle que

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{0c}. \quad (1.75)$$

Ce qui donne l'expression suivante de la densité critique :

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.76)$$

J'introduis un nouveau paramètre Ω_i qui est l'actuelle densité de la composante i normalisée à la densité critique :

$$\Omega_i = \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}}. \quad (1.77)$$

Je peux donc ré-écrire la première équation de Friedmann de cette manière en me plaçant au présent donc quand $a(t) = a_0 = 1$:

$$1 = \Omega_m + \Omega_R + \Omega_\Lambda - \frac{kc^2}{a^2 \rho_{0c}}. \quad (1.78)$$

Je pose $\Omega_T = \Omega_m + \Omega_R + \Omega_\Lambda$, je peux alors écrire que $\frac{kc^2}{a^2 \rho_{0c}} = \Omega_T - 1$. Si $\Omega_T = 1$, l'Univers est plat.

En remplaçant les densités ρ_i par leur expression en fonction de Ω_i et de a je peux écrire la première équation de Friedmann de cette façon :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = H_0^2 (\Omega_m a^{-3} + \Omega_R a^{-4} + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_T) a^{-2}). \quad (1.79)$$

C'est cette formule que je vais utiliser abondamment par la suite. Les paramètres H_0 , Ω_m , Ω_R et Ω_Λ sont obtenus à partir de diverses observations qui seront explicitées en 1.4. La figure 1.4 présente plusieurs évolutions du facteur d'expansion pour différents choix de paramètres : le devenir de l'Univers dépend de sa composition.

1.3.6 Le redshift cosmologique

La densité d'énergie de la composante rayonnement est telle que $\rho_R c^2 = \rho_{0R} c^2 a^{-4}$. Limitons nous par exemple aux photons d'une même longueur d'onde λ . L'énergie totale de ces photons dans un volume a^3 est donnée par :

$$E = N h \frac{c}{\lambda} = \rho_R c^2 a^3 = \rho_{0R} c^2 a^{-1} \quad (1.80)$$

avec N le nombre de photons dans ce volume. Comme N , c et ρ_{0R} ne varient pas au cours du temps, nécessairement $\lambda \propto a$. Si λ_i est la longueur d'onde des photons au moment de leur émission en t_i et λ_0 la longueur d'onde des photons au moment de leur observation en t_0 , je peux alors définir le redshift en fonction de a :

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_i}{\lambda_i} = \frac{a_0 - a(t_i)}{a(t_i)} = \frac{a_0}{a(t_i)} - 1. \quad (1.81)$$

Comme $a_0 = 1$, je peux simplement écrire que $1 + z = 1/a$. Cette relation est extrêmement importante puisqu'elle relie une quantité observable, le décalage vers le rouge des raies d'émission z avec le facteur d'expansion de l'Univers. Je vais ré-écrire la première équation de Friedmann en fonction de ce redshift :

$$\left(\frac{-\dot{z}}{1+z}\right)^2 = H(z)^2 = H_0^2 (\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_R (1+z)^4 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_T)(1+z)^2). \quad (1.82)$$

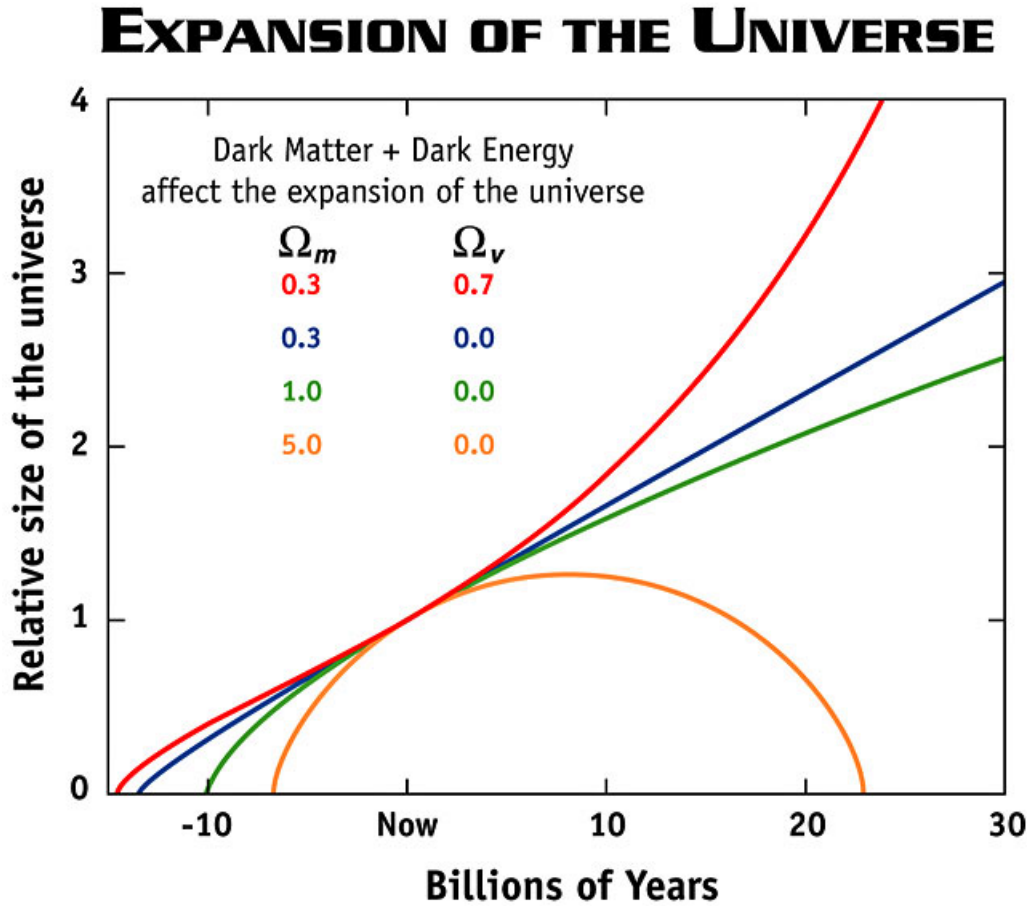


FIGURE 1.4 – Le terme "Relative size of the universe" correspond au facteur d'expansion a qui est fixé à 1 pour l'Univers présent. Le terme de radiation est ici négligeable. Le facteur d'expansion augmente au cours du temps dans de nombreux cas. Par exemple si l'Univers est dominé par la matière donc tel que $\Omega_m = \Omega_T = 1$, le facteur d'expansion suit la relation $a \propto t^{2/3}$. Par contre si le terme de matière dépasse 1, l'Univers devient clos et a finit par diminuer. Ce cas sera notamment exploré avec l'effondrement sphérique. Crédit : www.phys.org/news/2015-04-mysterious-dark-energy-universe-expansion.html

Notons que le redshift mesuré sur certains objets n'est pas entièrement un redshift cosmologique c'est-à-dire lié à a . En effet la vitesse propre des objets est à l'origine d'un redshift (ou blueshift) intrinsèque par effet Doppler-Fizeau que l'on appelle RSD pour "Redshift Space Distorsion". Dans cette étude, je vais négliger cette contamination. Les redshifts que je vais utiliser seront donc entièrement "cosmologique".

1.3.7 Les distances associées au redshift

Je me suis appuyé aussi sur le cours [KENT, 2010](#) pour écrire cette partie. La mesure des distances des corps célestes proches est effectuée par la méthode des parallaxes. Cette méthode n'est pas applicable pour les objets extra-galactiques. Certains objets comme les Supernovae de type Ia et les Céphéides sont des chandelles dites standard car il est possible de connaître leur distance par la mesure de leur flux et par l'estimation de leur luminosité, le plus souvent, via la variation temporelle de ce flux. Pour les autres objets, il faut utiliser le redshift cosmologique introduit dans la section précédente.

Partons de la métrique FLRW proposé par l'équation 1.39. Intéressons-nous à un photon le long de la ligne de visée donc tel que $d\theta = d\phi = 0$ et tel que $ds^2 = 0$. On obtient

alors la relation suivante :

$$c^2 dt^2 - a(t)^2 d\chi^2 = 0. \quad (1.83)$$

Ce qui revient à écrire que :

$$d\chi = c \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.84)$$

Supposons que le photon ait été émis au temps t_i et observé au temps t_0 , on obtient alors la distance comobile entre la source d'émission et l'observateur :

$$\chi = \int_{t_i}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.85)$$

Je vais chercher l'expression de χ en fonction du redshift. Je peux écrire que :

$$\frac{dt}{a(t)} = dz' \frac{1}{z' a(t)} = dz' \frac{1+z'}{z'} = -\frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.86)$$

Le signe négatif vient du fait que z' décroît avec le temps donc $\dot{z}' < 0$. $H(z')$ est une quantité positive, d'où le signe. Sachant que $z(t_0) = a_0/a_0 - 1 = 0$, et en posant $z = z(t_i)$ je peux écrire la distance comobile de cette manière :

$$\chi = \int_0^z c \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.87)$$

En explicitant le terme $H(z')$, j'obtiens alors la relation suivante :

$$\chi = \int_0^z c \frac{dz'}{H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_R(1+z')^4 + \Omega_\Lambda + (1-\Omega_T)(1+z')^2}}. \quad (1.88)$$

χ correspond à la distance entre un objet avec un redshift de z et un observateur au temps de l'observation donc quand $a = a_0 = 1$.

La distance angulaire

Partons de nouveau de la métrique FLRW. Cette fois, je considère une source étendue de largeur angulaire θ_s qui émet un photon à l'instant t_i . Je cherche la largeur de cette source au temps t_i d'où $dt = 0$. La source est située à une distance χ de l'observateur. J'ai donc $d\chi = 0$. Pour simplifier je regarde la largeur de la source selon la coordonnée θ d'où $d\phi = 0$. Je peux alors écrire la métrique comme il suit :

$$ds^2 = a(t_i)^2 S_k^2(\chi) d\theta^2 \quad (1.89)$$

avec pour rappel :

$$S_k(\chi) = \begin{cases} R_0 \sin(\frac{\chi}{R_0}), & \text{si } k = +1 \text{ (Sphère)} \\ \chi, & \text{si } k = 0 \text{ (Espace plat)} \\ R_0 \sinh(\frac{\chi}{R_0}), & \text{si } k = -1 \text{ (Hyperboloïde)}. \end{cases} \quad (1.90)$$

Il est possible de démontrer que $R_0 = (H_0 \sqrt{|1 - \Omega_T|})^{-1}$ à partir de la première équation de Friedmann. La largeur de la source est donnée par s dont j'ai l'expression suivante :

$$s = a(t_i) |S_k(\chi)| \theta_s = D_A(t_i) \theta_s \quad (1.91)$$

avec $D_A(t_i)$ la distance angulaire qui me permet de passer d'une largeur angulaire à la largeur de la source au temps t_i . Comme $a(t_i) = 1/(1+z)$, j'obtiens l'expression suivante de la distance angulaire :

$$D_A(z) = \frac{S_k(\chi)}{1+z}. \quad (1.92)$$

Distance de luminosité, flux et densité de flux

Soit L_{Bol} la luminosité d'une source à l'instant t_i dans le ciel qui est définie comme il suit :

$$L_{Bol} = \int h\nu \frac{d^2 n}{dt_i d\nu} d\nu \quad (1.93)$$

avec $n(t_i)$ le nombre de photons émis par la source à l'instant t_i .

Le flux bolométrique mesurée par un observateur à l'instant t_0 est donnée par la relation suivante :

$$F_{Bol} = \frac{1}{A} \int h\nu \frac{d^2 n}{dt_0 d\nu} d\nu \quad (1.94)$$

avec A la surface que traverse à l'instant t_0 les photons émis par la source à l'instant t_i . Si l'Univers est plat, il s'agit de la surface de la sphère de rayon χ soit $A = 4\pi\chi^2$. Dans le cas plus général, la surface est donnée par la relation suivante $A = 4\pi S_k^2(\chi)$.

Rappelons qu'un photon le long de la ligne de visée voyage selon la géodésique nulle suivante :

$$c^2 dt^2 - a(t)^2 d\chi^2 = 0 \quad (1.95)$$

que je peux écrire de cette façon : $dt = a(t)\chi/c$. En $t = t_0$ j'ai la relation suivante : $dt_0 = dt(t_0) = a(t_0)d\chi/c = d\chi/c$. Je peux alors écrire que $dt_i = a(t_i)d\chi/c = a(t_i)dt_0 = dt_0/(1+z)$. J'obtiens alors la relation traditionnelle entre le flux bolométrique et la luminosité :

$$\begin{aligned} F_{Bol} &= \frac{1}{A} \int h\nu \frac{d^2 n}{dt_0 d\nu} d\nu \\ &= \frac{1}{A} \int h\nu \frac{d^2 n}{dt_i d\nu} \frac{dt_i}{dt_0} d\nu \\ &= \frac{1}{A} \int h\nu \frac{d^2 n}{dt_i d\nu} \frac{1}{1+z} d\nu \\ &= \frac{1}{A(1+z)} L_{Bol} \\ &= \frac{L_{Bol}}{4\pi D_L^2(z)} \end{aligned} \quad (1.96)$$

avec $D_L(z) = |S_k(\chi(z))|(1+z) = D_A(z)(1+z)^2$ la distance de luminosité.

J'obtiens facilement une relation entre le flux monochromatique $F_\nu = \frac{dF_{Bol}}{d\nu}$ (appelée aussi densité de Flux) et la luminosité monochromatique $L_\nu = \frac{dL_{Bol}}{d\nu}$:

$$\begin{aligned} F_\nu &= \frac{dF_{Bol}}{d\nu} \\ &= \frac{\frac{dL_{Bol}}{d\nu}}{4\pi D_L^2(z)} \\ &= \frac{\frac{dL_{Bol}}{d\nu(1+z)} \frac{d\nu(1+z)}{d\nu}}{4\pi D_L^2(z)} \\ &= \frac{L_\nu(1+z)(1+z)}{4\pi D_L^2(z)}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Cette relation sera utilisée pour estimer les luminosités des émissions de poussières et synchrotron dans les sections 4.2.1 et 4.3.1.

La figure 1.5 présente l'évolution des différentes distances avec le redshift pour un univers plat et pour un univers ouvert.

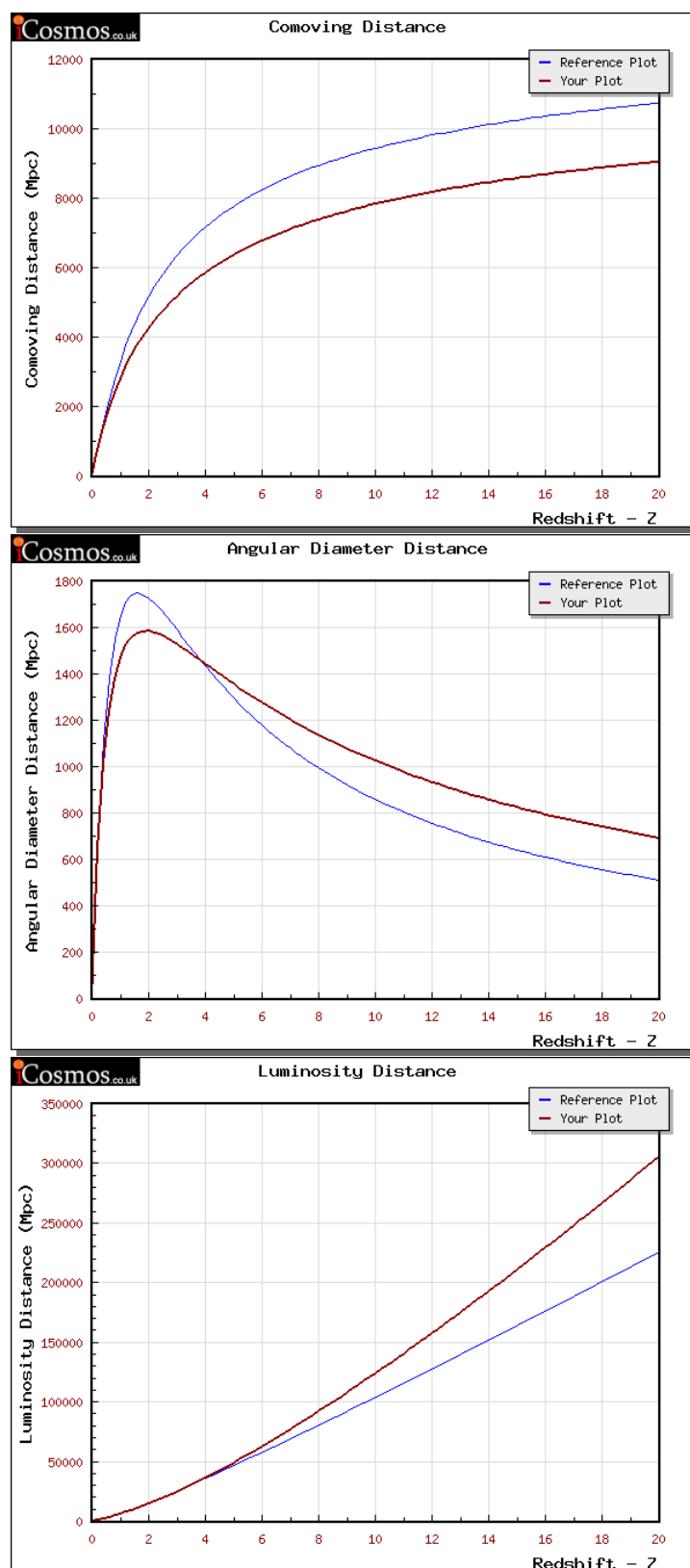


FIGURE 1.5 – Distances (de haut en bas : co-mobile, angulaire, de luminosité) pour un univers plat (courbes bleues) tel que $\Omega_\Lambda = 0.7$ et pour un univers ouvert (courbes rouges) tel que $\Omega_\Lambda = 0$. Les deux univers partagent les paramètres cosmologiques suivants : $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_R = 0$ et $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$. Crédit : www.icosmos.co.uk

1.4 Le contenu de l'Univers et son histoire

La section précédente a introduit l'ossature du modèle d'expansion. Il y manque la chair, c'est-à-dire une présentation plus détaillée des principaux composants de l'Univers mais aussi des observables prédites par le modèle comme le fond diffus cosmologique. Notons que le modèle d'expansion s'ajuste remarquablement bien avec les différentes observations.

1.4.1 Matière baryonique et matière noire

La matière baryonique

L'hydrogène ($\sim 75\%$ de la masse) et l'hélium ($\sim 25\%$) sont les éléments les plus abondants de l'Univers et puisque la masse des électrons est négligeable, on s'attend à ce que le terme de matière Ω_m soit porté par la masse des protons et des neutrons (plus précisément par les protons et les noyaux des atomes d'Hélium), les baryons les plus communs. On verra ci-dessous qu'avec la présence d'une matière invisible, il n'en est rien. La matière composée de baryons est tout simplement nommée matière "baryonique". Elle n'est pas répartie de façon homogène aux petites échelles mais sous forme de structures que je présenterai dans le chapitre 2. Ces structures rayonnent et /ou provoquent la diffusion d'un rayonnement d'arrière-plan. Il est donc possible de les détecter avec des appareils adaptés. Les processus physiques en jeu étant très variés, la gamme de fréquence des émissions en provenance de la matière baryonique est aussi très large, s'étendant des ondes radios (qui sont définies comme des ondes avec une fréquence $\nu < 300$ GHz ou $E < 1.24 \cdot 10^{-6}$ keV) aux rayons gamma R (ondes hautes-fréquences $\nu > 3 \cdot 10^{10}$ GHz ou $E > 124$ keV). Par exemple, les étoiles et les poussières émettent un rayonnement qui est principalement détectable dans l'infrarouge, dans le domaine visible et aussi dans l'ultraviolet. Le gaz chaud diffus qui se trouve dans les amas de galaxies émet dans les X par rayonnement de freinage. Il est aussi détectable dans le domaine des micro-ondes car il fait diffuser le rayonnement du fond diffus cosmologique. Dans cette étude, je vais surtout me concentrer sur deux gammes de longueurs d'onde : les micro-ondes de 70 GHz à 857 GHz et les X de 0.1 à 2.5 keV.

La détection de leptons et ou de baryons, qui ont été accélérés par le champ magnétique de certains corps célestes comme les étoiles à neutron, constitue un autre canal de détection, moins direct. La matière baryonique est aussi détectable par le canal de la force "faible" via les neutrinos notamment quand des réactions nucléaires sont en jeu. Le soleil par exemple est une source importante de neutrinos tout comme les supernovae.

Notons qu'il est assez facile d'obtenir une estimation de la masse baryonique (et non totale) d'une galaxie à partir de sa luminosité en supposant que la masse de la galaxie réside principalement dans les étoiles de la séquence principale. En supposant qu'une étoile est un gaz parfait en équilibre hydrostatique qui rayonne comme un corps noir, on aboutit à une relation du type suivant :

$$L \simeq L_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha} \quad (1.98)$$

avec L la luminosité de l'étoile, $L_{\odot}$ la luminosité du soleil, M la masse de l'étoile, $M_{\odot}$ la masse du soleil et $\alpha = 0.35$ pour une étoile de la séquence principale (SALARIS et al., 2005). Il est donc possible de remonter à la masse de l'étoile connaissant sa luminosité et par extension, d'estimer la masse baryonique de la galaxie via sa luminosité avec les hypothèses ci-dessus.

La matière noire

La matière baryonique, "visible", n'est en fait qu'une petite partie de la matière totale. En effet près de 85% de la matière de l'Univers se trouve sous forme d'une matière exotique dite "noire" qui n'interagirait au mieux que très faiblement avec la matière standard, baryonique et leptonique notamment. Cette matière noire n'est détectable que par le biais du canal "gravitation" où les effets de sa masse se cumulent avec ceux de la masse baryonique. Les observables du canal "gravitation" sont principalement la vitesse de rotation de corps massifs comme les étoiles (au sein des galaxies) ou les galaxies (au sein des amas) ou l'effet de lentille gravitationnelle, la déviation de la trajectoire des rayons lumineux en présence de masse. Il n'y a pour l'instant pas de preuves concluantes de la détection de matière noire dans les canaux "électromagnétiques", "force faible" et "baryons".

Dans le cadre du modèle de concordance Λ CDM, la matière noire est supposée froide. C'est pour cela que l'on parle de "Cold Dark Matter" (CDM). Comme cette matière est froide, la pression P_{CDM} est négligeable. Tout comme la matière baryonique, la matière noire n'est pas distribuée de manière homogène et se trouve dans des structures, les halos de matière noire. Ces halos de matière noire sont presque systématiquement accompagnés d'une sur-densité de matière baryonique équivalente.

La densité de matière normalisée à la densité critique est donc la somme d'un terme de matière baryonique Ω_b et d'un terme de matière noire "froide" Ω_{CDM} :

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM} \quad (1.99)$$

La cosmologie *Planck* 2015 ([PLANCK COLLABORATION et al., 2015h](#)) donne les valeurs suivantes : $\Omega_m = 0.3156$, $\Omega_b = 0.02225/h^2 = 0.04917$ avec $h = 0.6727$ et $\Omega_{CDM} = \Omega_m - \Omega_b = 0.2664$.

La découverte de la matière noire est ironiquement concomitante des débuts du modèle de l'Univers en expansion. En s'appuyant sur la vitesse de dispersion des galaxies dans l'amas Coma, Zwicky obtient une masse bien supérieure aux estimations réalisées à partir de la luminosité de ces galaxies ([ZWICKY, 1937](#)). Notons tout de même que cette luminosité ne donne accès qu'à la masse baryonique des galaxies. La majeure partie de la masse baryonique de l'amas se trouve en fait sous la forme d'un gaz peu dense qui a été détecté une première fois dans les années 1960 en X. La détection de ce gaz sera d'ailleurs le sujet central de cette thèse. Aussi les travaux de Zwicky n'excluaient pas une interprétation "baryonique" de la matière invisible. Il faudra cependant attendre les années 70 et les travaux de Vera Rubin pour que le débat sur la matière sombre prenne de l'ampleur.

Rubin remarque en effet que les vitesses des étoiles de la galaxie d'Andromède ([RUBIN et al., 1970](#)) sont bien plus grandes que ce à quoi on s'attend si l'on utilise la loi de gravitation Newtonienne. Soit il y a une matière invisible dans la galaxie soit la loi de gravitation doit être modifiée. La seconde option a conduit à des théories comme "Modified Newtonian dynamics" (MOND) qui introduisent une évolution de la force de gravité avec l'échelle des phénomènes. La première option n'exclut pas que cette matière "noire" soit baryonique. Les "Massive Compact Haloes" (MACHO) furent une explication proposée à la matière noire. Il s'agit de structures très denses de matière baryonique comme les trous noirs, les étoiles à neutron et les naines brunes. Les MACHO ne peuvent cependant expliquer la présence de matière noire à l'époque du fond diffus cosmologique. L'hypothèse d'une matière non-baryonique est pour l'instant celle qui fait le plus consensus pour expliquer les observations.

1.4.2 L'évolution du contenu en matière de l'Univers primordial

Le modèle de l'expansion de l'Univers a posé très vite le problème des premiers instants. En effet aux temps primordiaux le facteur d'expansion doit être beaucoup plus petit

qu'aujourd'hui et donc les différents composants de l'Univers devaient être beaucoup plus denses, notamment la matière baryonique. Il est possible d'inférer qu'à un moment de l'histoire de l'Univers, la matière baryonique a dû être sous forme d'un plasma très dense et très chaud qui s'est globalement refroidit depuis. Et la question de l'origine de cette matière tout comme celle de la matière noire se pose. Le modèle de formation de cette matière le plus courant est présenté par la figure 1.6. Notons aussi que dans ces temps primordiaux, a devait être petit et le rayonnement devait être l'énergie dominante comme l'indique la figure 1.7.

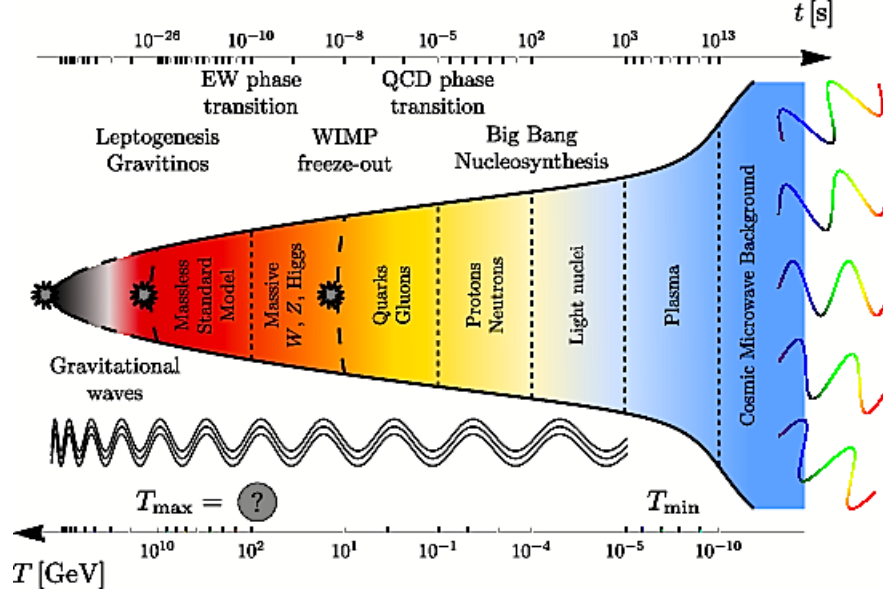


FIGURE 1.6 – Les différents étapes de formation de la matière. Après la formation des premiers leptons survient la brisure électro-faible quand les bosons Z et W acquièrent une masse. Ensuite les quarks et les gluons apparaissent et forment les premiers baryons qui vont à leur tour former différents noyaux durant la nucléosynthèse primordiale. Les électrons vont ensuite se (re)combinaison avec ces noyaux et se découpler des photons. Cette image est tirée de [BUCHMULLER, 2012](#).

Premiers instants : l'inflation

Je m'appuie sur [RICH, 2010](#) et [BERNARDEAU, 2005](#) pour cette section. La théorie de l'inflation a été proposée la première fois par Guth ([GUTH, 1981](#)) pour expliquer entre autres le problème de platitude, c'est-à-dire la très faible valeur du terme de courbure pour l'Univers primordial. Le terme de courbure d'aujourd'hui, $|1 - \Omega_T|$, est inférieur à $5 \cdot 10^{-3}$, la meilleure limite à 2σ proposée par *Planck* 2015 ([PLANCK COLLABORATION et al., 2015h](#)). Je définis le terme de courbure à l'instant t donc pour un facteur d'expansion quelconque tel que

$$\tilde{\Omega}_k = \frac{1 - \Omega_T}{a^2} \frac{\rho_{0c}}{\rho_c(a)} \quad (1.100)$$

avec ρ_{0c} la densité critique de l'Univers aujourd'hui et ρ_c à l'instant t :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3\dot{a}^2}{8\pi G a^2}. \quad (1.101)$$

J'ai donc $\tilde{\Omega}_k \propto \dot{a}^{-2}$. Or l'Univers paraît d'abord dominé par le rayonnement quand $a \propto t^{1/2}$ et donc $\dot{a} \propto t^{-1/2}$, puis par la matière quand $a \propto t^{2/3}$ et donc $\dot{a} \propto t^{-1/3}$. Le terme de courbure $\tilde{\Omega}_k$ augmente donc avec le temps et devait donc être petit aux temps primordiaux.

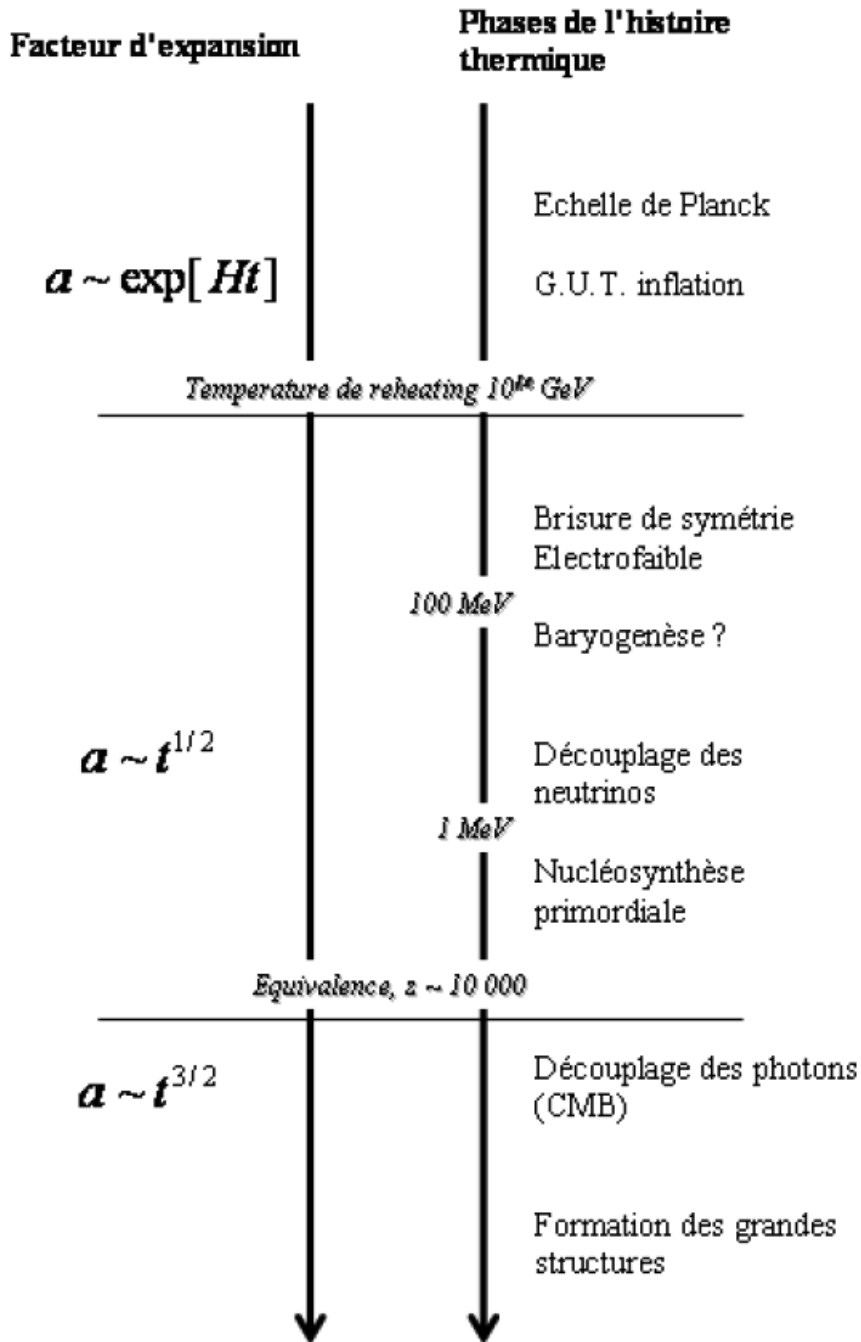


FIGURE 1.7 – On suppose qu'aux premiers instants de l'Univers, le facteur d'expansion s'accroît de manière exponentielle avec le temps jusqu'à la baryogenèse. C'est l'inflation. Ensuite, l'Univers est dominé par le rayonnement jusqu'à la recombinaison. Puis le terme matière devient dominant jusqu'à redshift $z = 0.8$. Crédit : [BERNARDEAU, 2005](#).

Par exemple, au début de l'ère de domination du rayonnement qui correspond à la fin de la grande unification des forces, on a $a_{GUT} = 10^{-28}$ et un terme de courbure très petit $|\tilde{\Omega}_k| < 10^{-52}$. Il a donc fallu que ce terme de courbure diminue très fortement dans l'ère qui a précédé celle où domine le rayonnement. Une solution est d'introduire une expansion très rapide de l'Univers dans cette ère : l'inflation, telle que $a \propto e^{Ht}$. Durant cette période,

$\dot{a} \propto e^{Ht}$ donc $\tilde{\Omega}_k$ va décroître fortement. Il existe plusieurs modèles qui permettent justement d'avoir un facteur d'expansion tel que $a \propto e^{Ht}$, notamment en introduisant un champ scalaire φ , l'inflaton. Je ne les détaillerai pas ici.

L'inflation permet aussi de résoudre le problème de l'horizon sur le fond diffus cosmologique. Des régions qui n'auraient pas été en relation causale si l'expansion de l'univers n'avait pas été fortement accrue aux temps primordiaux paraissent avoir les mêmes températures à $\Delta T \simeq 10^{-5}$ près. Avec le mécanisme de l'inflation, elles ont été en relation causale.

Baryogenèse et nucléosynthèse primordiale

On suppose, qu'au début, l'Univers est constitué d'un champ scalaire, l'inflaton φ . Les leptons électrons et positrons sont alors formés $10^{-26}s$ après le Big-bang (leptogenèse). Puis survient la brisure de la force électrofaible à $10^{-10}s$: les bosons Z et W acquièrent une masse. L'interaction faible s'établit donc à courte portée. Les premiers quarks et gluons se forment peu après à $10^{-8}s$ probablement au même moment que la matière noire. Ces quarks vont former les premiers baryons (baryogenèse) qui vont à leur tour former les premiers noyaux. Cette dernière phase, la nucléosynthèse primordiale, explique l'abondance des éléments dans l'Univers primordial. C'est pendant cette phase que se forment des noyaux de deutérium, de tritium et d'hélium 3 et 4. Cependant, les protons solitaires restent majoritaires.

C'est pendant la phase de léptogenèse puis de baryogenèse que la matière prend le pas sur l'antimatière. Plusieurs mécanismes ont été proposés. Par exemple pour les leptons, un neutrino stérile lourd se désintégrerait préférentiellement en Higgs et en lepton plutôt qu'en Higgs et en anti-lepton (GORBUNOV et al., 2011).

La recombinaison

Je me suis surtout appuyé sur FERREIRA, 2013 et sur GORBUNOV et al., 2011 pour rédiger cette partie. Après la nucléosynthèse primordiale, l'expansion continue et l'Univers se refroidit de plus en plus. Si la matière baryonique est très largement ionisée, les électrons sont de moins en moins véloce et vont finir par se faire capturer par les protons pour former les atomes d'hydrogène. C'est la recombinaison. Il est intéressant de savoir quand cette recombinaison intervient dans l'histoire de l'Univers. Je vais considérer trois espèces de particules i : électron $i = e$, proton $i = p$ et atome d'hydrogène $i = H$. Je suppose que ces particules sont distribués selon une distribution de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein (certains gaz d'hydrogène) :

$$f_i(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(E_i(\vec{p}) - \mu_i)/(k_b T)} \pm 1} \quad (1.102)$$

avec l'énergie $E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4}$. Je considère un gaz de particules non relativistes de faible densité tel que $m_i c^2 - \mu_i \gg T$ et tel que $E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4} \simeq m_i c^2 + \frac{p^2}{2m_i}$. J'ai donc $e^{(E_i(\vec{p}) - \mu_i)/(k_b T)} \gg 1$ Je peux donc réécrire la fonction de distribution de cette façon :

$$f_i(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu_i - m_i c^2}{k_b T}} e^{-\frac{p^2}{2m_i k_b T}}. \quad (1.103)$$

La densité de particule i , n_i est donnée par

$$n_i = g_i \int f(\vec{p}) d^3 \vec{p} \quad (1.104)$$

avec g_i le nombre d'états de spin par particule ; $g_e = g_p = 2$ et $g_H = 4$.

En introduisant l'expression de la fonction de distribution et en sachant que $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ et que $\int \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2m_i k_b T}\right) d\vec{p} = \sqrt{2\pi 2m_i k_b T}$, j'arrive à l'expression suivante de la densité :

$$n_i = g_i \left(\frac{2\pi}{h^2}\right)^{3/2} (m_i k_b T)^{3/2} e^{(\mu_i - m_i c^2)/(k_b T)} \quad (1.105)$$

A l'équilibre, $\mu_e + \mu_p = \mu_h$, comme $n_e = n_p$ et $m_p \simeq m_H$, je peux alors écrire que :

$$n_H = n_p^2 \left(\frac{2\pi}{h^2}\right)^{-3/2} (m_i k_b T)^{-3/2} e^{B/(k_b T)} \quad (1.106)$$

avec $B = (m_e + m_p + m_h)c^2$. J'introduis la fraction d'ionisation $X = n_p/(n_p + n_H)$. Je peux aussi écrire que $n_p = X\eta_B n_\gamma$ et que $n_H = (1 - X)\eta_B n_\gamma$ avec $\eta_B = (n_p + n_H)/n_\gamma = 6.2 \times 10^{-10}$ le rapport baryon sur photon. Ceci me conduit à la relation suivante :

$$(1 - X) = X\eta_B n_\gamma \left(\frac{2\pi}{h^2}\right)^{-3/2} (m_i k_b T)^{-3/2} e^{B/(k_b T)}. \quad (1.107)$$

Je suppose que les photons suivent une distribution de Bose-Einstein. En intégrant sur $\vec{p}$, j'obtiens alors la densité de photons suivante :

$$n_\gamma = \int f(\vec{p}) d^3\vec{p} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_b T}{\hbar c}\right)^3. \quad (1.108)$$

Notons que cette quantité est différente de la densité d'énergie donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\begin{aligned} \rho_\gamma c^2 &= \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3\vec{p} = \frac{\pi^2}{15} (k_b T) \left(\frac{k_b T}{\hbar c}\right)^3 \\ &= \frac{\zeta(3)\pi^4}{15} (k_b T) n_\gamma. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Comme $\rho_\gamma \propto T^4$ et que $\rho_\gamma \propto a^{-4}$, j'ai donc $T \propto a^{-1}$ et donc $T \propto (1 + z)$. Remarquons que $n_\gamma \propto T^3 \propto a^{-3}$ comme les termes de matière. En utilisant l'expression de n_γ et l'équation 1.110, j'aboutis à l'équation suivante dite de Saha :

$$\frac{1 - X}{X^2} = 3.8\eta_B \left(\frac{k_b T}{\hbar c}\right)^{3/2} e^{B/(k_b T)}. \quad (1.110)$$

Cette relation me permet d'établir l'évolution de X en fonction de T et donc en fonction du redshift z présenté par la figure 1.8. L'Univers est d'abord complètement ionisé soit $X = 1$. Cette fraction d'ionisation s'effondre très brutalement pour $z \simeq 1000$: c'est la recombinaison. Elle intervient plus précisément pour $z_{rec} \simeq 1100$ et $T_{rec} = 3570\text{K}$. Les électrons se sont combinés avec les protons pour former les atomes d'hydrogène et ne capturent plus les photons.

1.4.3 Rayonnement : le fond diffus cosmologique

Une fois la recombinaison achevée, les photons qui étaient en équilibre thermique avec les électrons sont désormais découplés de la matière baryonique au niveau de la surface de dernière diffusion. Ils forment alors le Fond Diffus Cosmologique (FDC). Ils sont donc toujours distribués selon un corps noir de température T_{rec} . Comme je l'ai indiqué précédemment, $T \propto (1 + z)$. La température du corps noir que j'observe aujourd'hui est donc

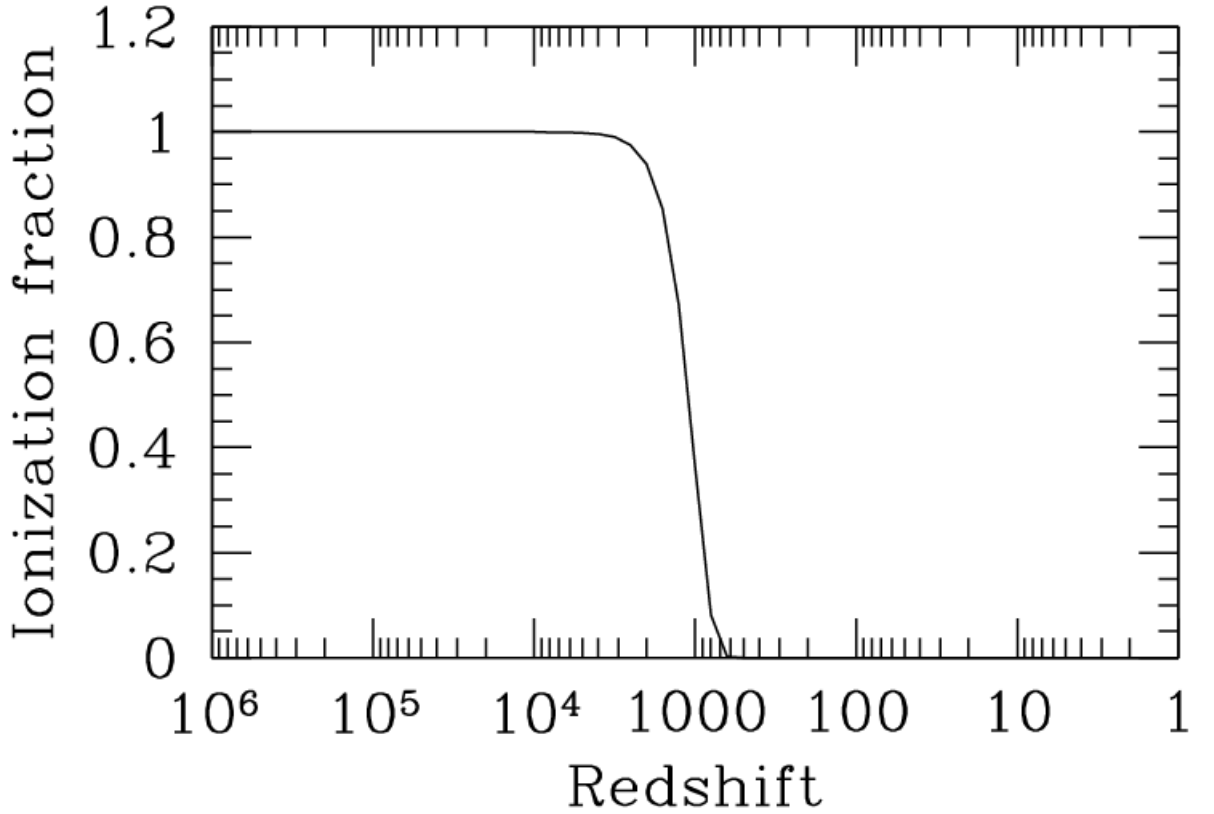


FIGURE 1.8 – Evolution du facteur d'ionisation avec le redshift. Autour de $z = 1000$, le facteur s'effondre : c'est la recombinaison. Crédit : [FERREIRA, 2013](#).

bien plus basse que la température du corps noir lors de la recombinaison. En effet, j'obtiens la température d'observation suivante : $T_{FDC} = 2.7255 \pm 0.0006\text{K}$ ([FIXSEN, 2009](#)) telle que $T_{rec} = T_{FDC}(1 + z_{rec})$. Les différentes mesures du spectre du fond diffus cosmologique confirme bien la nature de corps noir de cette émission comme l'indique la figure 1.9. Notons que les photons du fond diffus cosmologique dominent complètement le terme de rayonnement dans l'Univers.

Les anisotropies du FDC

Pour cette section, j'utilise principalement [RICH, 2010](#), [LINEWEAVER, 1997](#) et [LINEWEAVER et al., 1997](#). L'Univers tel qu'on l'observe aujourd'hui est localement non homogène comme en témoigne la présence de structures comme les galaxies. Aux régions plus denses de matière succèdent des zones moins denses. On peut se poser la question si ces inhomogénéités sont observables au niveau de l'Univers lointain et du fond diffus cosmologique en particulier. Ce dernier donne l'image de la matière baryonique à $z \simeq 1100$. On peut supposer que les zones légèrement plus denses de ce plasma (et de la matière noire sous-jacente) sont à l'origine des structures actuelles qui ont grossi par effondrement gravitationnel. C'est le sujet du chapitre 2. Le fond diffus cosmologique n'est en effet pas homogène aux petites échelles. La température du corps noir varie d'une zone observée à l'autre même si ces variations sont très faibles puisque $\Delta T/T_{FDC} \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ soit $\Delta T \sim 100\mu\text{K}$. La première mesure des anisotropies a été réalisée par l'appareil DMR du

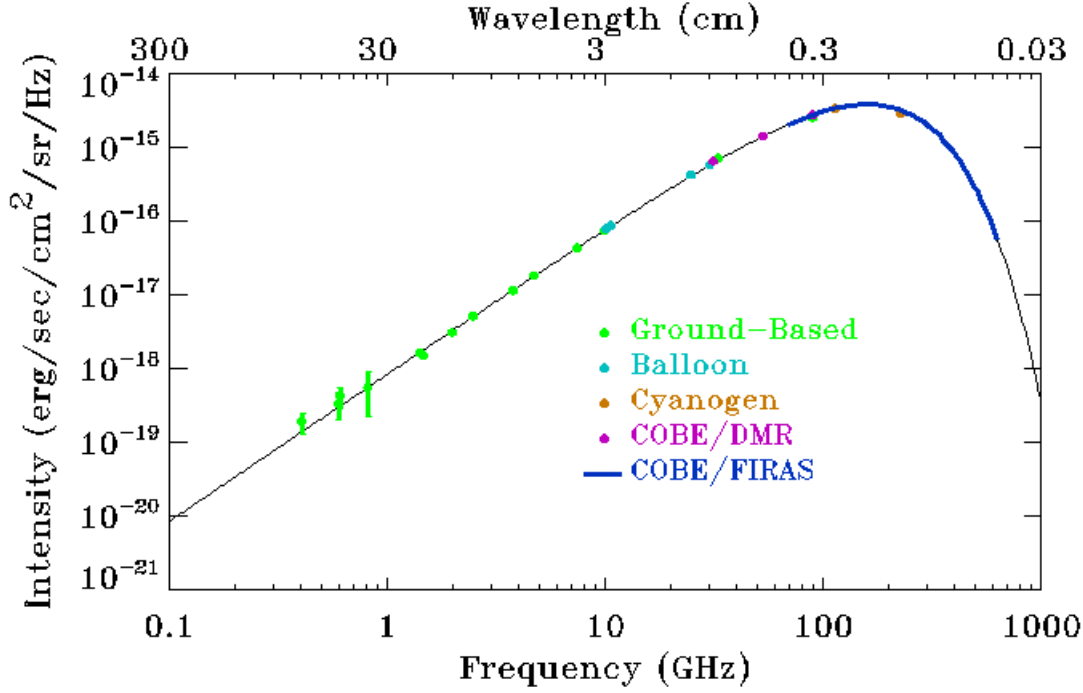


FIGURE 1.9 – Le fond diffus cosmologique est un corps noir à $T_{FDC} = 2.73K$ comme le confirme les différentes expériences dont *COBE* avec l'appareil *FIRAS* (FIXSEN et al., 1996). Crédit : NASA

satellite *COBE* (SMOOT et al., 1992). Les dernières mesures sur tout le ciel ont été réalisées par le satellite *Planck* et sont présentées par la figure 1.10.

L'équation 1.108 indique que la densité de photons est liée à la température par une relation du type $n_\gamma \propto T^3$. Si je pose $\Delta n_\gamma(\vec{r}) = n_\gamma(\vec{r}) - \bar{n}_\gamma$ avec $\bar{n}_\gamma$ la densité moyenne de photon dans l'Univers au temps de la recombinaison et que $\Delta T(\vec{r}) = T(\vec{r}) - T_{FDC}$, je peux écrire pour de petites variations que :

$$\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}} \right)_{dens} = \frac{1}{3} \frac{\Delta n_\gamma(\vec{r})}{\bar{n}_\gamma} = \frac{1}{3} \delta(\vec{r}) \quad (1.111)$$

avec $\delta(\vec{r}) = \frac{\Delta n_\gamma(\vec{r})}{\bar{n}_\gamma}$ le contraste de densité de photons qui est aussi le contraste de densité de matière au temps de la recombinaison.

Le facteur d'expansion a est localement modifié $a(\vec{r}) \simeq \bar{a} / \sqrt{1 - 2\phi(\vec{r})/c^2} \simeq \bar{a}(1 + \phi(\vec{r})/c^2)$ quand le champ gravitationnel $\phi(\vec{r})$ induit par la différence locale de densité est faible. Il est possible de démontrer cette expression en combinant la limite Newtonienne des équations d'Einstein avec la métrique FLRW. Dans ce cas, le potentiel est donné par l'équation de Poisson $\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \bar{\rho} \delta$ avec $\bar{\rho}$ la densité de matière moyenne. Comme $T \propto a^{-1}$, j'en déduis que $T(\vec{r}) \propto a^{-1}(1 + \phi(\vec{r})/c^2)$ avec le facteur d'expansion modifié. Ce qui me conduit à ajouter un nouveau terme d'anisotropie de température :

$$\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}} \right)_{SW} = \frac{\phi(\vec{r})}{c^2} \quad (1.112)$$

C'est l'effet Sachs-Wolfe (SACHS et al., 1967).

En supposant un contraste de densité faible et un facteur d'expansion perturbé $a(1 + \phi(\vec{r})/c^2)$, en utilisant les équations de continuité et d'Euler pour le fluide de photons de densité n_γ et le fait que la vitesse du son au carré $c_s^2 = \partial P / \partial \rho = c^2/3$ quand la pression due au rayonnement domine, je peux déterminer l'évolution du terme $\delta(\vec{r})$ et donc des termes $\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{dens}$ et $\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{SW}$. Ce qui me conduit à l'équation suivante dans l'espace de Fourier :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\left(\frac{\Delta T(k)}{T_{FDC}}\right)_{dens} + \left(\frac{\Delta T(k)}{T_{FDC}}\right)_{SW} \right] = -k^2 c_s^2 \left[\left(\frac{\Delta T(k)}{T_{FDC}}\right)_{dens} + \left(\frac{\Delta T(k)}{T_{FDC}}\right)_{SW} \right] \quad (1.113)$$

Les calculs pour établir cette expression sont similaires à ceux que je présenterai dans le chapitre 2 pour décrire l'évolution linéaire des fluctuations de matière. Les conditions initiales sont données par le spectre de puissance des fluctuations primordiales $P(k) = \langle |\delta(k)|^2 \rangle \simeq A_s k^{n_s}$ que je présenterai aussi avec plus de détails dans la section 2.1.2. L'équation 1.113 est celle de l'oscillateur harmonique ; ce qui veut dire que les anisotropies de température vont osciller. On peut d'ailleurs parler d'oscillations acoustiques car contrôlées par la vitesse du son c_s . Ces oscillations seront amorties aux petites échelles : on parle de l'amortissement de Silk ou "Silk damping" (SILK, 1968). Ce dernier phénomène traduit le fait que les photons des régions chaudes vont avoir tendance à se diriger vers les régions plus froides par diffusion, ce qui va adoucir les différences de températures notamment aux petites échelles. Aux grandes échelles, c'est l'horizon qui va être limitant, c'est-à-dire la distance parcourue par un photon depuis le Big Bang jusqu'à la recombinaison. Les modes des anisotropies de température au-delà de l'horizon seront figés avant la recombinaison et ne pourront osciller. Après recombinaison, tous les modes sont figés puisque les photons sont désormais découplés de la matière.

Un autre mécanisme peut modifier la température mesurée, c'est l'effet Doppler le long de la ligne de visée :

$$\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{dopp} = -\vec{r} \cdot \frac{\vec{v}(\vec{r})}{c} \quad (1.114)$$

avec $\vec{v}(\vec{r})$ la vitesse de déplacement de δ donc des sur-densités de plasma par rapport à l'observateur. $\vec{v}(\vec{r})$ est liée à δ donc aux oscillations de $\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{dens}$ et $\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{SW}$. Une partie de l'effet Doppler est provoqué par le mouvement du système solaire par rapport au FDC.

Les photons du FDC vont ensuite rencontrer les puits de potentiel au niveau des structures formées par l'effondrement gravitationnel des sur-densités de matière primordiale. Par effet Sachs-Wolfe, la température de ces photons va être modifiée. Pour l'effet total le long de la ligne de visée on va parler d'effet Sachs-Wolfe intégré (ISW) : (WHITE et al., 1997) :

$$\left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{ISW} = \frac{2}{c^2} \int \dot{\phi}(\vec{r}, t) dt. \quad (1.115)$$

A cet effet, j'ajoute celui de lentille gravitationnelle provoquée par les structures.

Par conséquent, les anisotropies de température du FDC sont la somme des anisotropies provoquées par les différents effets pré-cités :

$$\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}} = \left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{dens} + \left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{SW} + \left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{dopp} + \left(\frac{\Delta T(\vec{r})}{T_{FDC}}\right)_{ISW}. \quad (1.116)$$

Le spectre de puissance des anisotropies du FDC

Soit θ et ϕ les coordonnées angulaires des positions dans le ciel. La température du fond diffus cosmologique mesurée au niveau de l'observateur terrestre en θ et ϕ s'écrit

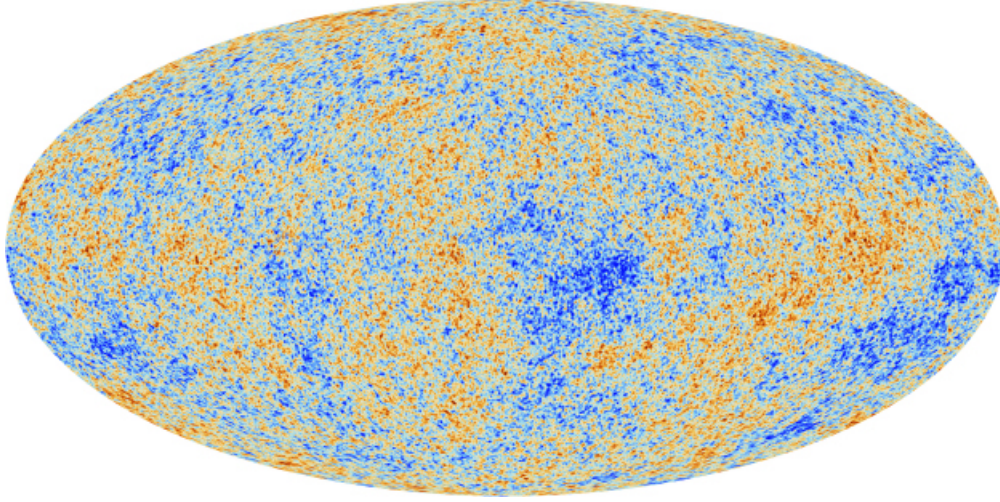


FIGURE 1.10 – Les anisotropies du fond diffus cosmologique vues par le satellite *Planck*.
Crédit : Planck Collaboration / ESA

comme il suit :

$$T(\theta, \phi) = T_{FDC} + \Delta T(\theta, \phi) \quad (1.117)$$

Comme je travaille sur la sphère céleste, je peux décomposer la température en harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$ comme il suit :

$$T(\theta, \phi) = \sum_{l, |m| \leq l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.118)$$

avec $a_{00} = T_{FDC}$. Les termes de dipôle $l = 1$ sont dominés par l'effet Doppler dû au mouvement du système solaire par rapport au fond diffus cosmologique. Sans l'effet Doppler, ces termes seraient tous nuls. Intégrons sur tout le ciel c'est-à-dire sur θ et sur ϕ . Pour les harmoniques sphériques, on a $\langle Y_{lm}^2(\theta, \phi) \rangle = 1/(4\pi)$ et $\langle Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \rangle = 0$ pour $l \neq l'$ et $m \neq m'$. Cela permet d'obtenir l'expression suivante du spectre de puissance des anisotropies de température en faisant la moyenne sur θ et ϕ :

$$\langle \Delta T^2 \rangle = \sum_{l > 1, |m| \leq l} |a_{lm}|^2 = \sum_{l > 1} (2l + 1) C_l \quad (1.119)$$

avec $C_l = \sum_{|m| \leq l} |a_{lm}|^2 / (2l + 1)$. On définit alors $\Delta_T^2(l) = l(l + 1) C_l / (2\pi)$. Le spectre $\Delta_T^2(l)$ pour le FDC est donné par la figure 1.11.

Pour $l \leq 20$, c'est le spectre de puissance est dominé par l'effet Sachs-Wolfe (non intégré), c'est à dire par le potentiel gravitationnel causé par les contrastes de densité de matière aux grandes échelles qui n'ont pas oscillé. Dans ce cas, le spectre des anisotropies de température dépend totalement de celui des anisotropies de matière primordiale $P(k) = A_s k^{n_s}$. Dans le cas où $n_s = 1$, on peut alors écrire que (BOND et al., 1987) :

$$C_l = \frac{24\pi}{5} \frac{Q^2}{l(l + 1)} \quad (1.120)$$

avec Q^2 l'amplitude normalisée du quadrupole qui est telle que $Q^2(A_s)$. $\Delta_T^2(l)$ est donc plat.

Pour $20 < l < 1000$, les modes des anisotropies de température étaient sous l'horizon et ont pu osciller avant la recombinaison. Ils sont figés depuis lors. Cette région est donc dominée par les différents pics dus à l'oscillation des baryons auxquels s'ajoute l'effet

Doppler. Le premier pic acoustique se trouve au niveau de l'angle de l'horizon, c'est-à-dire à la distance parcourue par un photon depuis le Big-Bang jusqu'à la recombinaison divisée par la distance angulaire à l'époque de la recombinaison :

$$l_{peak} \sim \frac{1}{\theta_{peak}} \sim \frac{D_A(z_{rec})}{ct_{rec}} \quad (1.121)$$

avec l'estimation $t_{rec} \sim (\Omega_m h^2)^{-1/2}$. Comme D_A est sensible à la courbure de l'Univers, le premier pic est lui aussi sensible à la courbure. Les mesures du spectre donnent $l_{peak} \simeq 250$ soit $\theta_{peak} \simeq 2^\circ$. Pour les deux pics acoustiques suivants, c'est le rapport des amplitudes qui est sensible cette fois au rapport Ω_b/Ω_m .

Pour $l \geq 1000$, les oscillations sont fortement amorties par le "Silk Damping" et leurs pics associées sont donc en conséquence eux-mêmes fortement réduits jusqu'à disparition aux grands l .

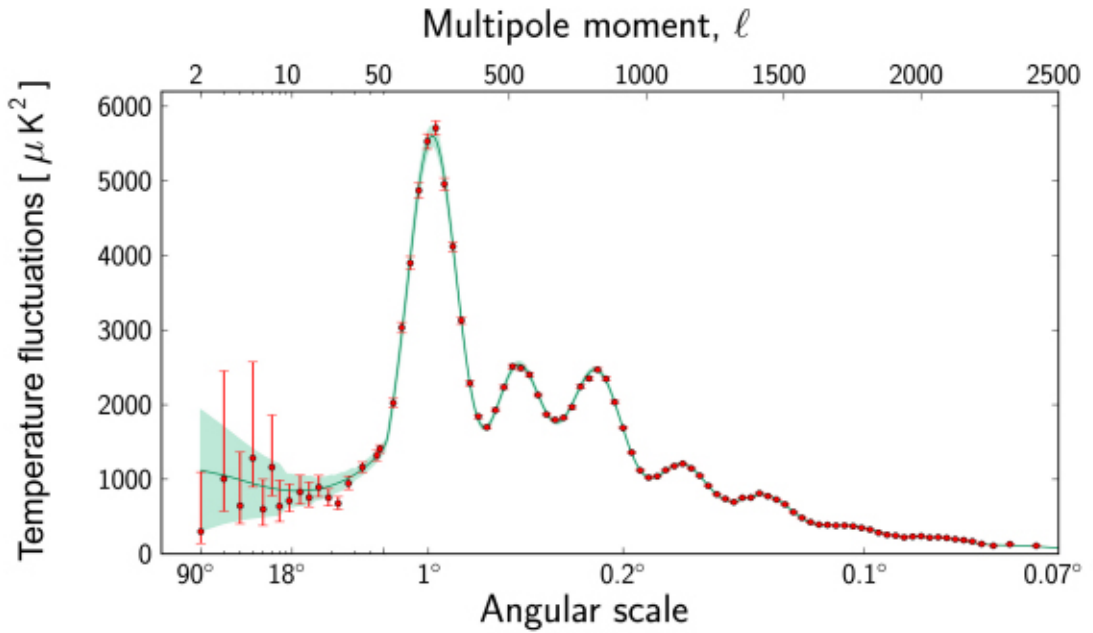


FIGURE 1.11 – Le spectre de puissance des anisotropies de température du FDC. Crédit : Planck Collaboration / ESA

Une autre composante du rayonnement : les neutrinos

Si le terme de rayonnement est principalement dominé par les photons et particulièrement ceux du FDC, il est aussi composé de neutrinos relativistes issus du fond diffus de neutrinos qui n'a pas encore été détecté directement. Soit ρ_ν la densité d'énergie de neutrinos. Alors la densité totale de rayonnement est $\rho_R = \rho_\nu + \rho_\gamma$ avec ρ_γ la densité d'énergie portée par les photons, du fond diffus cosmologique principalement. La densité d'énergie des neutrinos est donnée par :

$$\rho_R = N_{eff} \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma \quad (1.122)$$

Comme il y a trois espèces de neutrinos on s'attend à ce que $N_{eff} = 3$ s'ils sont thermalisés. Cependant, les neutrinos restent couplés aux réactions d'annihilation électron-positron et sont donc légèrement chauffés. La valeur attendue est alors $N_{eff} = 3.046$.

1.4.4 L'énergie noire et le modèle Λ CDM

Les termes de matière et de rayonnement ayant été passés en revue, il convient maintenant d'aborder la dernière pièce du puzzle, à savoir l'énergie noire (ou constante cosmologique). Si la matière est le composant dominant de l'Univers à partir de $z \simeq 1100$, c'est l'énergie noire qui prend le relais à $z \simeq 0.8$. Dans un Univers totalement dominé par l'énergie noire, le facteur d'expansion aurait une croissance exponentielle $a \propto e^{Ht}$ à l'image de ce qu'il aurait été dans la possible période d'inflation. Si l'accélération de l'expansion se poursuit, l'Univers sera donc encore plus froid et les structures encore plus éloignées les unes des autres.

L'énergie noire a été mise en évidence par les travaux suivants [PERLMUTTER et al., 1999](#) ; [RIESS et al., 1998](#) ; [SCHMIDT et al., 1998](#) qui se sont appuyés sur les supernovae de type Ia. Ces supernovae, qui ont un spectre sans raies d'hélium mais avec les raies du Silicium, sont typiques de l'accrétion de matière par une naine blanche qui finit par atteindre la limite de Chandrasekhar et exploser. La variation de luminosité avec le temps est très régulière d'une supernovae de type Ia à une autre, ce qui permet de remonter à la luminosité totale de l'objet et donc à sa distance. Il est alors possible de mesurer l'évolution de la distance de luminosité avec le redshift et de déterminer l'ensemble de paramètres (H_0 , Ω_m , Ω_R et Ω_Λ) qui s'ajuste le mieux avec la relation. Les travaux précédemment cités ont permis l'exclusion de la constante cosmologique nulle. C'est un indice fort de la présence d'une "énergie" noire.

La mesure de la position du premier pic du spectre de puissance des anisotropies réalisée par la collaboration "Balloon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics" ou *BOOMERanG* ([DE BERNARDIS et al., 2000](#)) a confirmé la courbure très petite de l'Univers donc que $1 - \Omega_T \simeq 0$. Cette mesure combinée avec celles sur les supernovae a permis de poser des contraintes fortes sur les paramètres $\Omega_m \simeq 0.3$ et $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ et de confirmer la présence d'énergie noire.

Confirmation du modèle Λ CDM

Depuis lors, le modèle Λ CDM, c'est-à-dire avec de la matière noire froide (CDM) et une constante cosmologique Λ significativement non nulle, s'est vu confirmé par de nombreuses observations. La mesure des distances des Supernovae de type Ia s'est poursuivie avec le "SuperNova Legacy Survey" (SNLS) et le spectre du FDC a été mesuré avec une plus grande précision et à plus petite échelle avec *WMAP* ([HINSHAW et al., 2013](#)) et avec *Planck* ([PLANCK COLLABORATION et al., 2015h](#)).

Il existe d'autres sondes qui permettent de mettre des contraintes sur les paramètres cosmologiques comme le comptage d'amas de galaxies avec l'aide d'une fonction de masse (ce sera l'objet d'un développement dans le chapitre suivant) ou la mesure de l'échelle des oscillations acoustiques des baryons (BAO pour "Baryonic Acoustic oscillations") à un redshift donné. En effet les oscillations de baryons dans le plasma primordial, comme le premier pic acoustique du spectre des anisotropies, sont restées gravées dans la matière. Ce qui fait que deux sur-densités de matière séparées d'une distance caractéristique dans le plasma primordial seront séparées par la même distance (à l'expansion près) bien plus tard. Cette distance caractéristique est de 150 Mpc aujourd'hui ([EISENSTEIN et al., 2005](#)). En utilisant un traceur de sur-densité de matière comme les galaxies, on s'attend à retrouver plus de traceurs que prévu en moyenne à une certaine distance. Cette distance augmente avec l'expansion. Il est donc possible de mettre des contraintes sur cette expansion. Ces contraintes deviennent plus importantes si l'on combine plusieurs sondes. Par exemple, la figure 1.12 présente des contraintes sur les paramètres Ω_m et Ω_Λ en utilisant les BAO, les supernovae et le FDC.

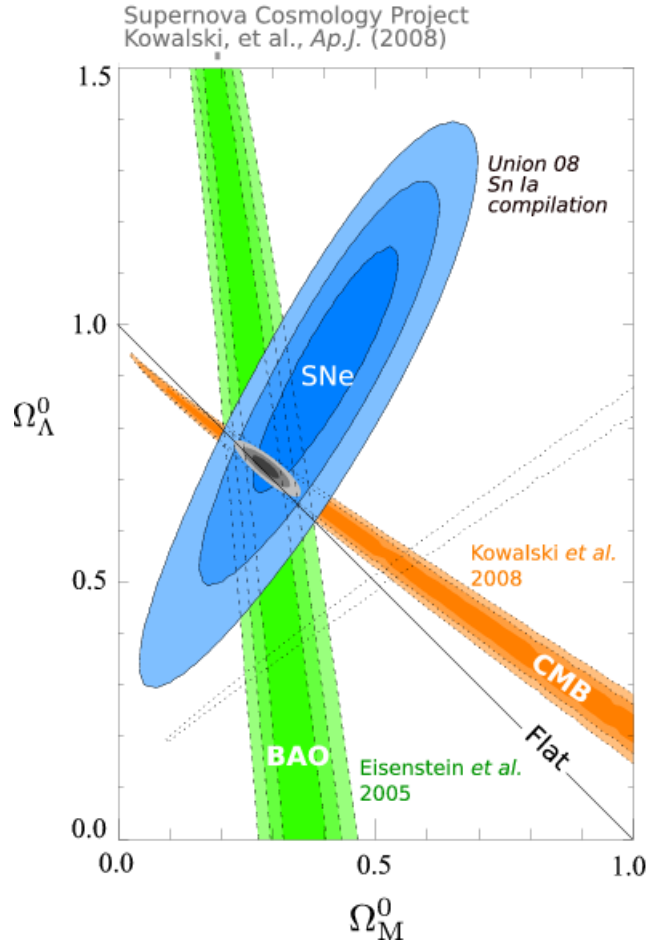


FIGURE 1.12 – Contraintes apportées par des sondes différentes sur les paramètres Ω_m et Ω_Λ . L'Univers paraît plat. Crédit : KOWALSKI et al., 2008

Les six paramètres du modèle Λ CDM

Le modèle Λ CDM repose intégralement sur 6 paramètres que je présente dans le tableau 1.1 avec des valeurs issues entre autres de la cosmologie *Planck* 2015 (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) en supposant un Univers plat. Je précise le sens des paramètres ici :

- $\Omega_{CDM}h^2$: le rapport de la densité de matière noire froide sur la densité critique aujourd'hui.
- $\Omega_b h^2$: le rapport de la densité de baryons sur la densité critique aujourd'hui.
- A_s : l'amplitude du spectre de puissance des fluctuations de matière primordiales (pour $k_0 = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$).
- n_s : l'indice spectral de ce même spectre de puissance (pour $k_0 = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$).
- θ : l'angle de l'horizon sonore sur la surface de dernière diffusion : $\theta = r_s(z_{rec})/D_A(z_{rec})$.
- τ : la profondeur optique de la diffusion Thompson à l'époque de la réionisation.

Les petites fluctuations du FDC vont être amorties par la diffusion des photons sur les électrons libres produits lors de la réionisation vers $z_{rec} \sim 10$.

Notons que l'horizon sonore $r_s(z_{rec})$ est donné par la formule suivante :

$$r_s(z_{rec}) = \int_0^{\eta_{z_{rec}}} \frac{d\eta'}{\sqrt{3(1+R)}} \quad (1.123)$$

Paramètres	Valeurs
$\Omega_{CDM}h^2$	0.1193 ± 0.0014
$\Omega_b h^2$	0.02225 ± 0.00016
$\ln 10^{10} A_s$	3.094 ± 0.034
n_s	0.9645 ± 0.0049
100θ	1.04077 ± 0.00032
τ	0.079 ± 0.017

TABLE 1.1 – Les 6 paramètres cosmologiques du modèle Λ CDM pour la cosmologie *Planck* 2015 (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) avec des erreurs à 1σ . Ces valeurs sont présentées dans la table 4 de l'article (mode TT+TE+EE+lowP).

Avec le temps conforme $\eta = \int dt/a(t)$ et avec $R = 3\rho_b/(4\rho_\gamma)$ le rapport de la densité de baryon sur celle des photons.

A partir de ces paramètres, il est possible de prédire la formation des structures mais aussi d'autres paramètres comme $H_0 = 67.27 \pm 0.66 \text{ km/s/Mpc}$ (et $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc}) = 0.6727 \pm 0.0066$). Si on relâche la contrainte de platitude de l'Univers, on peut aussi estimer que $1 - \Omega_T = 0.0008 \pm 0.0040$, ce qui reste compatible avec l'Univers plat. En relâchant cette fois la contrainte sur les neutrinos, on obtient que $N_{eff} = 3.04 \pm 0.33$. Ces deux mesures sont tirées de (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) en prenant les modes TT+TE+EE+Lensing+BAO+JLA+ H_0 et sont présentées avec des erreurs à 2σ .

Les briques nécessaires au modèle Λ CDM ont donc été introduites dans les grandes lignes. Il reste maintenant à présenter les différentes structures qui peuplent l'Univers et la manière dont elles ont été formées.

Chapitre 2

Structures de l'Univers

Si le chapitre précédent était principalement consacré à la dynamique de l'Univers aux grandes échelles (au delà de 100 Mpc), ce chapitre traite de la dynamique à des échelles plus petites, c'est-à-dire principalement de la formation des structures. L'un des aspects les plus "ironiques" de la cosmologie moderne, c'est qu'elle s'appuie justement sur l'observation de ces structures et les propriétés statistiques de leur population pour contraindre les paramètres d'un modèle qui se fonde sur une hypothèse d'homogénéité. Ce n'est en rien contradictoire si l'on précise bien que cette hypothèse n'est valide que pour de grandes échelles.

Dans un premier temps, je vais m'intéresser au devenir des fluctuations de densités aux échelles intermédiaires où elles restent faibles et où l'évolution linéaire est valide. Je vais ensuite aborder l'évolution de ces fluctuations dans le cadre de l'effondrement sphérique pour introduire une première structure : les amas de galaxies. Je présenterai ensuite brièvement ce qu'est un quasar. Les amas de galaxies et les quasars seront au coeur de mon travail. J'introduis ici la masse solaire $M_{\odot}$ qui est telle que $1M_{\odot} = 1.980 \cdot 10^{30} \text{kg}$.

2.1 Un univers localement non homogène en évolution

Je me suis servi principalement de [LAHAV et al., 2004](#) pour écrire cette section. La matière n'est pas répartie de manière strictement homogène et ce depuis les premiers âges de l'Univers comme en témoigne la présence des anisotropies de température du FDC. Ces anisotropies sont en fait des marqueurs de fluctuations de densité de matière à l'époque de la recombinaison. Ces fluctuations primordiales vont devenir de plus en plus importantes à cause de l'instabilité gravitationnelle et devenir les structures que l'on observe de nos jours.

Je vais donc écrire le terme de densité de matière en prenant en compte cette fois ses fluctuations spatiales, ce qui donne :

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(\vec{x}, t)). \quad (2.1)$$

en me plaçant dans un univers plat avec $\vec{x}$ les coordonnées co-mobiles. Je cherche ensuite l'évolution de $\delta(t, \vec{x})$ quand cette perturbation reste petite en m'appuyant sur [PEEBLES, 1983](#) qui introduit l'approche linéaire.

Dans l'Univers primordial, je m'attends à ce que $\delta \ll 1$ même aux petites échelles. Par contre, pour ces mêmes petites échelles, les fluctuations sont beaucoup plus importantes de nos jours : $\delta \gg 1$. L'approche linéaire que je vais présenter ci-dessous ne peut donc s'appliquer aujourd'hui à de telles échelles car je vais supposer que $\delta \ll 1$.

2.1.1 L'évolution des fluctuations de matière

Je vais m'intéresser au devenir de ces fluctuations. J'ai besoin de savoir dans un premier l'impact de ces fluctuations sur la métrique. D'après la section 1.2.7, le terme de variation de métrique h_{00} tel que $g_{00} = 1 + h_{00}$ est donné par l'expression suivante quand il est faible, c'est-à-dire quand le champ de gravitation est suffisamment faible et quand les particules qui composent le fluide ne sont pas relativistes, donc quand la mécanique Newtonienne est applicable :

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \quad (2.2)$$

Prenons par exemple une fluctuation de matière importante et typique : un amas de galaxies. Soit une particule de vitesse v et de masse m dans l'amas. Dans un amas, je peux appliquer le théorème du viriel qui me dit que $m\Phi = -2 \cdot mv^2/2$. Je suppose que $v^2 \simeq \langle v^2 \rangle = \sigma_v^2$ avec σ_v , l'écart-type des vitesses dans un amas, de l'ordre de 1000 km/s. Je peux donc écrire que

$$h_{00} = \frac{2\sigma_v^2}{c^2} \sim 2 \cdot 10^{-5} \quad (2.3)$$

confirmant que la variation de la métrique est négligeable pour de telles structures. Ce qui veut dire que l'on peut utiliser la mécanique Newtonienne pour décrire leur évolution et celles des fluctuations en général.

Les équations du fluide dans la limite Newtonienne

Je travaille donc avec un fluide non relativiste en instabilité gravitationnelle dans un champ de gravitation faible. Je suis donc dans le cadre de la limite Newtonienne. Ce qui veut dire que je peux employer les équations d'Euler en supposant le fluide sans collision (donc dominé par la matière noire) :

$$\dot{\rho} + \nabla_{\vec{r}}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}})\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{r}} p - \nabla_{\vec{r}} \Phi. \quad (2.5)$$

Je peux aussi utiliser l'équation de Poisson :

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.6)$$

avec $\vec{r}$ les coordonnées du référentiel du fluide au repos s'il était homogène. Notons que $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t}$ indique la dérivée partielle en t et $\nabla_{\vec{r}}$ la dérivée partielle pour les coordonnées spatiales.

Les équations du fluide dans le référentiel co-mobile

Je vais réécrire les équations précédentes avec les coordonnées $\vec{x}$ dans le référentiel comobile donc telles que $\vec{r} = a(t)\vec{x}$. Remarquons que :

$$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a} \cdot \vec{x} + a \cdot \dot{\vec{x}}. \quad (2.7)$$

Je pose $\vec{v} = a \cdot \dot{\vec{x}}$ la vitesse propre du fluide. J'introduis aussi le potentiel suivant :

$$\phi = \Phi + \frac{1}{2} a \ddot{a} |\vec{x}|^2 \quad (2.8)$$

qui est tel que $\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = a^2 \nabla_{\vec{r}}^2 \Phi$. Je remplace ρ par son expression en fonction des fluctuations $\rho = \bar{\rho}(1+\delta)$. Sachant que les équations d'Euler sont vraies pour $\delta = 0$ et $\vec{v} = \vec{0}$, je peux faire

disparaître certains des termes $\bar{\rho}(t)$ et obtenir les équations suivantes pour les fluctuations à partir de ces mêmes équations d'Euler :

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}}((1 + \delta)\vec{v}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{1}{\rho a} \nabla_{\vec{x}} p - \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \phi \quad (2.10)$$

et un équivalent de l'équation de Poisson ci-dessous :

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta. \quad (2.11)$$

Linéarisation

Je suppose que $|\delta| \ll 1$. Je peux donc écrire que $\nabla_{\vec{x}}((1 + \delta)\vec{v}) \simeq \nabla_{\vec{x}}(\vec{v})$ et que $1/\rho \simeq 1/\bar{\rho}$. Comme les fluctuations δ sont à l'origine de la vitesse propre $\vec{v}$, je suppose aussi que cette dernière est faible. Notons que $\vec{u} = \vec{r} = \dot{a} \cdot \vec{x} + \vec{v}$ donc $\vec{v} \ll \dot{a} \cdot \vec{x}$. Pour la coordonnée spatiale i cela donne $v_i \ll \dot{a} \cdot x_i$, soit $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \ll \dot{a}$, donc $v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \ll \dot{a} v_i$. J'en conclus que $(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v} \ll \dot{a} \vec{v}$. Je vais donc négliger le terme $(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v}$ par la suite. J'introduis la vitesse du son au carré $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$. Je peux ensuite écrire que $(\nabla_{\vec{x}} \rho) c_s^2 = \nabla_{\vec{x}} p$ et pour finir que $\bar{\rho} \nabla_{\vec{x}} \delta c_s^2 = \nabla_{\vec{x}} p$. Je peux alors simplifier les équations 2.9 et 2.10 pour obtenir les relations suivantes :

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}}(\vec{v}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{c_s^2}{a} \nabla_{\vec{x}} \delta - \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \phi \quad (2.13)$$

Je peux réécrire la première équation de cette manière en posant $A = \dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}}(\vec{v}) = 0$:

$$\dot{A} + 2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} A = \ddot{\delta} + 2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}}(\dot{\vec{v}} - \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + 2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}) = 0 \quad (2.14)$$

En remplaçant ϕ par son expression en fonction de δ et $\dot{\vec{v}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}$ par le terme de droite de la seconde équation, j'arrive à la relation suivante qui me donne l'évolution du terme de fluctuation :

$$\ddot{\delta} + 2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla_{\vec{x}}^2 \delta - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0. \quad (2.15)$$

Croissance linéaire des fluctuations

Il intéressant de travailler avec la transformée de Fourier des fluctuations qui est donnée par :

$$\delta_{\vec{k}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{x}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 \vec{x} \quad (2.16)$$

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation 2.15, j'obtiens une équation qui me donne l'évolution du mode $\delta_{\vec{k}}$ en supposant que c_s est une constante :

$$\ddot{\delta}_{\vec{k}} + 2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_{\vec{k}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right) \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (2.17)$$

Si $\left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right)$ est positif, $\delta_{\vec{k}}$ est instable et croît ou décroît de façon monotone ; le critère de Jeans est alors respecté :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} > \lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}}. \quad (2.18)$$

Dans le cas contraire, si λ est plus petit que λ_J , $\delta_{\vec{k}}$ va osciller, la pression compensant la force de gravité.

Je vais chercher des solutions de la forme $\delta_{\vec{k}} = D(t)\delta_{0\vec{k}}$ avec $D(t_0) = 1$ et t_0 le temps de l'observation. Notons que la densité moyenne de matière est donnée par :

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{a^3} = \frac{3H_0^2\Omega_m}{8\pi G a^3} \quad (2.19)$$

Je me place aux échelles telles que $\lambda \gg \lambda_J$. Je peux alors réécrire l'équation 2.17 de la manière suivante en remplaçant $\delta_{\vec{k}}$ par son expression en fonction de D :

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} - \frac{3H_0^2\Omega_m}{2a^3}D = 0 \quad (2.20)$$

avec le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a$. $H(t)$ est d'ailleurs une solution de cette équation. Je cherche une forme plus générale de solution de la forme $D(t) = A(t) \cdot H(t)$. A est alors solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}(a^2 H^2 A) = \ddot{A}H + 2\dot{A}(\dot{H} + H^2) = 0 \quad (2.21)$$

qui a pour solution A constante (triviale) ou $A \propto \int_0^t (a(t')^2 H(t')^2)^{-1} dt'$. La première solution me donne le mode décroissant $D(t) \propto H(t)$ puisque que $H(t)$ est lui-même décroissant tandis que la seconde solution me donne le mode croissant. Par la suite, quand je ferai mention de D , ce sera toujours du mode croissant dont il sera question. L'expression de ce mode est donnée ci-dessous :

$$D(t) \propto H(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')^2 H(t')^2}. \quad (2.22)$$

Je peux écrire D en fonction du redshift de cette façon :

$$D(z) = \frac{5\Omega_m H_0^2}{2} H(z) \int_z^\infty \frac{(1+z')dz'}{H(z')^3} \quad (2.23)$$

pour retrouver $D(z) \rightarrow 1/(1+z)$ quand $z \rightarrow \infty$. Dans le cadre d'un modèle d'Einstein-de Sitter dominé par la matière ($\Omega_M = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$) j'obtiens l'expression suivante du mode croissant $D(z) = 1/(1+z)$. La figure 2.1 présente l'évolution de D pour plusieurs cosmologies.

2.1.2 Spectre de puissance des fluctuations de matière

Le spectre des fluctuations de matière s'obtient comme il suit :

$$P(k, z) = \langle |\delta_{\vec{k}}(z)|^2 \rangle \quad (2.24)$$

Dans le cadre de la croissance linéaires des structures, je peux même écrire que

$$P(k, z) = \langle |\delta_{\vec{k}}(t)|^2 \rangle = D^2(z) \langle |\delta_{\vec{k}}(t_0)|^2 \rangle = D^2(z) P_0(k) \quad (2.25)$$

avec $P_0(k)$ le spectre de puissance des fluctuations à t_0 qui est tel que $P_0(k) = A_s k^{n_s} T^2(k)$ où $A_s k^{n_s}$ est le spectre des fluctuations primordiales et $T(k)$ la fonction de transfert qui rend compte des variations de la croissance des fluctuations avec l'échelle considérée. La cosmologie *Planck* 2015 (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) donne $\ln(10^{10} A_s) = 3.094 \pm 0.034$ et $n_s = 0.9645 \pm 0.0049$. La fonction de transfert dépend des paramètres

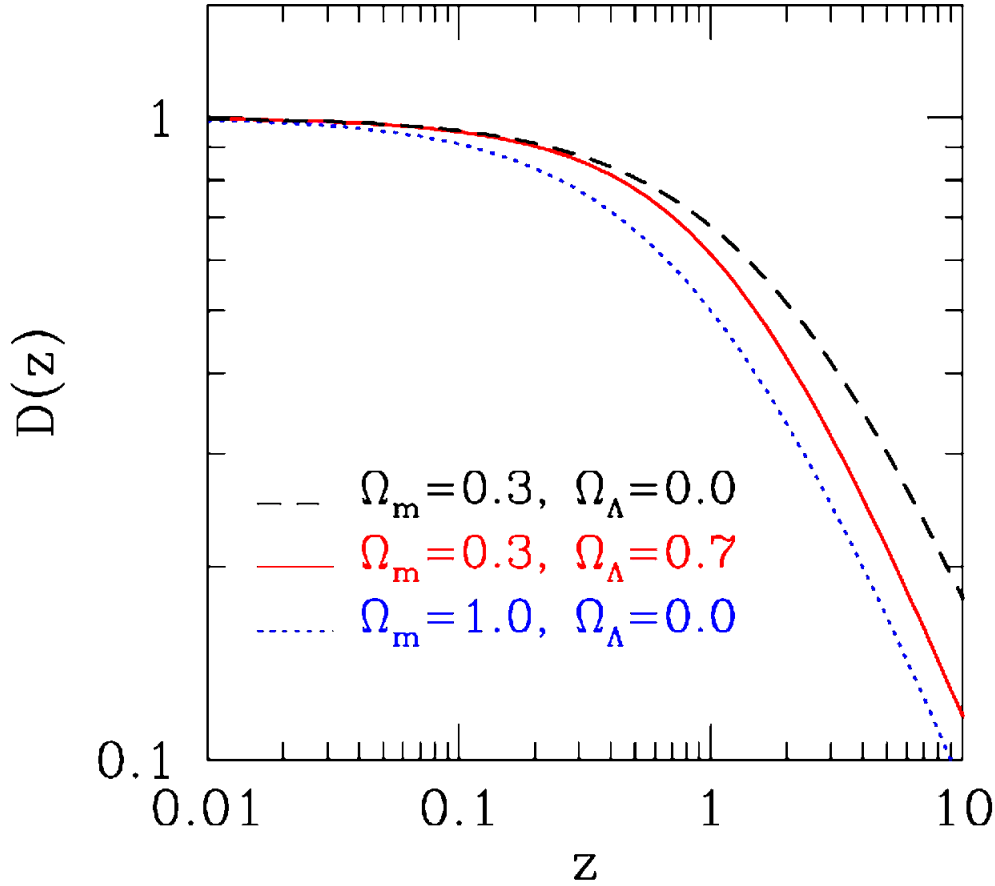


FIGURE 2.1 – Evolution du taux de formation des structures en fonction du redshift pour différents modèles de cosmologie. Crédit : LAHAV et al., 2004.

cosmologiques. Une expression de cette fonction a été introduite par BOND et al., 1984 (et dans JENKINS et al., 2001) :

$$T(k) = \frac{1}{(1 + [aq + (b/q)^{3/2} + (cq)^2]^\nu)^{1/\nu}} \quad (2.26)$$

avec $q = k/\Gamma$, $a = 6.4 h^{-1}\text{Mpc}$, $b = 3 h^{-1}\text{Mpc}$, $c = 1.7 h^{-1}\text{Mpc}$, $\nu = 1.13$ et $\Gamma = \Omega_m h$ (BARDEEN et al., 1986). Les codes les plus récents pour calculer le spectre de puissance comme CAMB ("Code for Anisotropies in the Microwave Background") ou CLASS ("The Cosmic Linear Anisotropy Solving System", LESGOURGUES, 2011) utilisent une autre expression, semi-analytique, de la fonction de transfert construite à partir de BARDEEN et al., 1986.

La fonction de corrélation à deux points

La fonction de corrélation à deux points $\xi(\vec{x}, t)$ est définie comme il suit :

$$\xi(\vec{x}, z) = \langle \delta(\vec{x}_0, z) \delta(\vec{x}_0 + \vec{x}, z) \rangle, \quad (2.27)$$

elle est liée au spectre de puissance des fluctuations de matière par la relation suivante :

$$\xi(\vec{x}, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, z) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k. \quad (2.28)$$

La fonction de corrélation à deux points est donc un équivalent du spectre de puissance et dans de nombreux cas est plus facile à calculer directement que ce dernier. Les oscillations acoustiques de baryons sont par exemple détectable facilement avec la fonction de corrélation à deux points puisque cette dernière présente une bosse à l'échelle des oscillations donc à 150 Mpc (dans le référentiel co-mobile).

Notons cependant que l'accès à la quantité $\delta(\vec{x}, z)$ n'est pas direct. Il faut recourir à de possibles traceurs de sur-densités comme les galaxies. Ces traceurs peuvent être biaisés. Par exemple, si n est la densité moyenne de galaxies et Δn une variation locale de densité, je peux alors supposer que :

$$\delta_g(\vec{x}, z) = \frac{\Delta n(\vec{x}, z)}{n} = b\delta(\vec{x}, z) \quad (2.29)$$

avec b un paramètre de biais qui peut dépendre ou non du redshift, voire de la distance $\vec{x}$.

Contraste à une échelle R

Je définis le contraste à une échelle R de cette façon :

$$\delta_R(\vec{x}, z) = \int \delta(\vec{r} - \vec{x}, z) W(\vec{r}, R) d^3\vec{r} \quad (2.30)$$

avec $W(\vec{r}, R)$ une fonction fenêtre qui peut-être par exemple une courbe de Gauss ou bien une fonction porte. Dans ce dernier cas $W(\vec{r}, R) = 1$ si $|\vec{r}| < R$ et $W(\vec{r}, R) = 0$ si $|\vec{r}| > R$. Quelque soit la fonction fenêtre, la variance du contraste à l'échelle R s'obtient par la formule suivante :

$$\sigma^2(R, z) = \langle \delta_R^2(\vec{x}, z) \rangle = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, z) |\tilde{W}(k, R)|^2 d^3\vec{k}. \quad (2.31)$$

avec $\tilde{W}(k, R)$ la transformée de Fourier de la fonction fenêtre.

Si je prends une fonction porte pour $W(\vec{r}, R)$ ¹, si je fixe $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$ et si je me place en $z = 0$, j'obtiens alors l'écart-type des fluctuations (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) :

$$\sqrt{\sigma^2(8h^{-1}\text{Mpc}, 0)} = \sigma_8 = 0.831 \pm 0.013. \quad (2.32)$$

σ_8 dépend des paramètres du spectre de puissance primordiale comme A_s et n_s mais aussi de la fonction de transfert.

Je peux aussi définir une échelle $R[M, z]$ associée à une région sphérique de masse M (fixée) à redshift z telle que $M = 4/3\pi\bar{\rho}_m(z)R[M, z]^3$. Le contraste des fluctuations dans cette région s'obtient ainsi : $\delta_M(\vec{x}, z) = \delta_{R[M, z]}(\vec{x}, z)$ via l'équation 2.30. De manière similaire, la variance est cette fois calculée avec l'équation 2.31 et est telle que $\sigma^2(M, z) = \sigma^2(R[M, z], z)$. Cette variance $\sigma^2(M, z)$ sera utilisée pour construire la fonction de masse qui donne le nombre de structure de masse M . J'aurai aussi besoin de la dérivée de cette variance en M qui s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2(M, z)}{dM} &= \frac{dR}{dM} \cdot \frac{d\sigma^2(M, z)}{dR} \\ &= \frac{1}{4\pi\bar{\rho}_m(z)R[M, z]^2} \cdot \frac{d\sigma^2(M, z)}{dR} \\ &= \frac{1}{4\pi\bar{\rho}_m(z)R[M, z]^2} \cdot \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, z) \cdot 2 \left| \tilde{W}(k, R[M, z]) \right| \frac{d\tilde{W}(k, R[M, z])}{dR} \Big| d^3\vec{k}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

1. Et dans ce cas $\tilde{W}(k, R) = \tilde{W}(kR) = \tilde{W}(x) = 3(\sin x - x \cos x)/x^3$

2.1.3 Evolution de la composante baryonique

L'évolution linéaire des fluctuations que j'ai présentée ci-dessus et le spectre de puissance concerne toute la matière, noire ou baryonique. Je vais me focaliser ici sur cette dernière. Si l'on reprend l'histoire de l'Univers à partir de la recombinaison, la matière baryonique est alors neutre. On parle alors "d'ère sombre" (pour "dark ages") puisque la matière rayonne très peu à cette époque. La matière baryonique est couplée à la matière noire par la gravitation et avec elle va former des structures sous l'effet de l'instabilité gravitationnelle comme le suggère l'évolution linéaire des fluctuations.

Entre $z \sim 20$ et $z \sim 10$, dans les zones les plus denses de l'Univers, les premières sources compactes de rayonnement vont se former. Il s'agit probablement d'étoiles "primordiales" de type III ou de quasars qui tirent leur énergie de leur trou noir central qui accrete la matière. Le rayonnement issu de ces sources va être absorbé partiellement par les nuages de gaz neutre : c'est la raie d'absorption à 21 cm qui est une transition hyperfine entre deux états d'énergie pour l'hydrogène neutre.

La réionisation

Les premières étoiles et les premiers quasars vont émettre des rayons UV et des rayons X qui vont ioniser le milieu proche (MADAU et al., 1999). La recombinaison des électrons avec les noyaux va certes s'opposer au processus mais au final à $z \simeq 6$ (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h), la matière baryonique est entièrement ionisée dans les régions les plus denses de l'univers comme le présente la figure 2.2. Ces régions vont par la suite former les amas de galaxies par effondrement gravitationnel. Comme l'hydrogène devient majoritairement ionisé dans les structures les plus denses, la ligne d'absorption à 21 cm associée à l'hydrogène neutre va disparaître à plus bas redshift. C'est l'effet Gunn-Peterson (BECKER et al., 2001).

Si le gaz chaud de baryons a été détecté jusqu'à $z \simeq 2$ (cf section 3.1.3), il n'a pas été encore décelé au-delà. Les chapitres 3 et 4 de mon manuscrit seront consacrés à la détection de ce gaz chaud dans les structures à grand redshift entre $z = 2$ et $z = 6$.

2.2 Des structures remarquables : les amas de galaxies

Les amas de galaxies sont issus de l'effondrement des fluctuations de densité primordiales. Contrairement à ce que leur nom pourrait suggérer $\sim 85\%$ de leur masse est sous forme d'un halo de matière noire, $\sim 10 - 12\%$ sous forme d'un gaz chaud de baryon et $\sim 3 - 5\%$ sous forme de baryons dans les galaxies. Par la suite, je vais surtout me focaliser sur ce gaz chaud de baryon qui est détectable par effet Sunyaev-Zel'dovich (cf section 3.1.1) et par rayonnement de freinage (cf section 5.1.1). Notons que depuis la fin de la ré-ionisation à $z \sim 6$, la composante baryonique au niveau des sur-densités de matière est très largement ionisée. Les amas de galaxies sont des structures liées par la gravitation. Ils sont assez variés dans leur morphologie et dans leur taille. Ils ont un diamètre typique de l'ordre de 1Mpc, contiennent entre une petite dizaine à quelques milliers de galaxies et ont des masses (matière noire+ baryonique) très variables de l'ordre de $10^{13} M_\odot$ à $10^{15} M_\odot$. Le paramètre qui nous intéresse, c'est justement la masse totale de l'amas. Plusieurs hypothèses seront proposées dans cette section pour accéder à cette masse via des observables comme la luminosité X du gaz chaud, notamment via des lois d'échelle. Les principales informations de cette section sont tirées de KRAVTSOV et al., 2012.

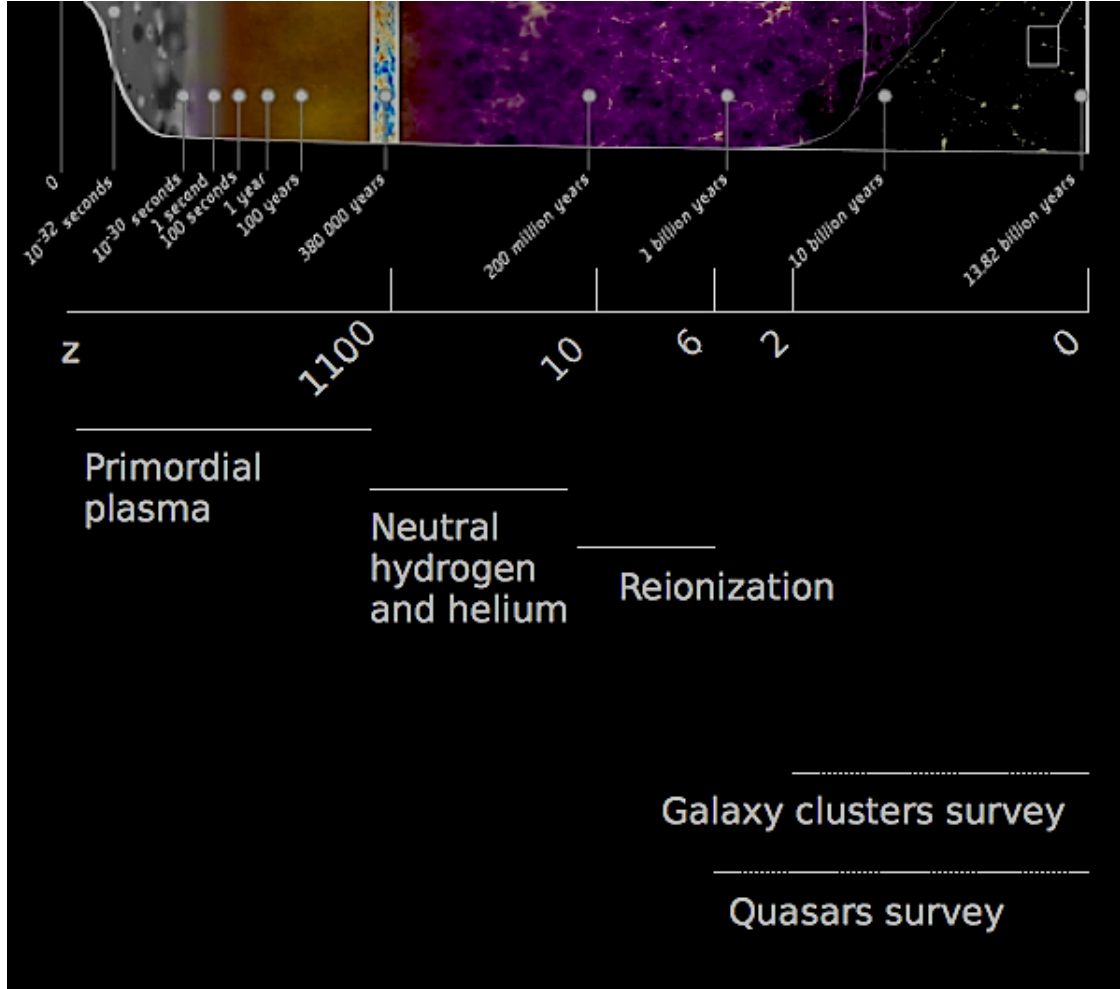


FIGURE 2.2 – Evolution de la composante baryonique dans les zones les plus denses de l'Univers. Une partie de mon travail va consister à détecter le gaz chaud pour z entre 2 et 6.

2.2.1 Une évolution non-linéaire des perturbation : l'effondrement sphérique

Je me suis appuyé aussi sur [RICH, 2010](#) pour écrire cette partie. Le modèle d'évolution linéaire des fluctuations présenté dans la section 2.1 n'est valide qu'aux grandes échelles. Un autre modèle, cette fois non linéaire, peut décrire plus finement la formation de structure aux petites échelles. C'est l'effondrement sphérique, introduit d'abord via une métrique proposée par Lemaître, Tolman et Bondi ([TOLMAN, 1934](#) ; [BONDI, 1947](#)). Ce modèle suppose de considérer une sur-densité isolée de matière de symétrie sphérique. Ce n'est pas vraiment le cas pour les amas de galaxies, qui ont une structure plutôt elliptique avec des filaments, mais cela constitue une bonne approximation. On suppose que la sur-densité va d'abord entrer dans une phase d'expansion puis ensuite de contraction jusqu'à atteindre le stade de virialisation.

Je me place dans un univers dominé par la matière et sans courbure donc tel que $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$; je peux alors utiliser l'équation de Friedmann suivante :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\bar{\rho}_0}{a^3}. \quad (2.34)$$

Il s'agit d'un Univers d'Einstein-De Sitter : j'ai donc $a \propto t^{2/3}$. Ce qui implique que $\dot{a}/a =$

$2/(3t)$ et donc finalement que :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (2.35)$$

Je considère une sphère de rayon R qui englobe une masse $M = 4/3\pi(1 + \delta)\bar{\rho}R^3$. L'effondrement d'une telle sphère est entièrement contrôlé par le paramètre $R(t)$ (GUNN et al., 1972 ; LAHAV et al., 1991). Je travaille avec des particules non relativiste dans un champ de gravité faible (ce qui est le cas pour un amas de galaxies), je peux donc écrire que :

$$\ddot{R} = \frac{-GM}{R^2}. \quad (2.36)$$

La façon la plus simple d'écrire la solution de cette équation, c'est d'introduire un paramètre θ relié au temps tel que

$$R(\theta) = A(1 - \cos(\theta)) \quad (2.37)$$

$$t(\theta) = B(\theta - \sin(\theta)). \quad (2.38)$$

De cette deuxième expression, j'en déduis que $\dot{\theta} = B^{-1}(1 - \cos(\theta))^{-1}$. En injectant ces expressions dans l'équation 2.36, je trouve que $B^2 = A^3/(GM)$.

Première phase : expansion

La sphère de masse M atteint son rayon maximal quand $\theta = \pi$ donc quand $R_{max} = 2 \cdot A$ et quand

$$t_{max} = t(\theta = \pi) = \pi B = \pi \frac{A^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2GM}} R_{max}^{3/2} \quad (2.39)$$

Je peux ainsi évaluer le terme de contraste au maximum de l'expansion :

$$\begin{aligned} \delta(t_{max}) &= \frac{M}{4/3\pi\bar{\rho}(t_{max})R_{max}^3} - 1 \\ &= \frac{6\pi G t_{max}^2 M}{4/3\pi R_{max}^3} - 1 \\ &= \frac{6\pi G t_{max}^2 \pi^2 M}{4/3\pi 4 \cdot 2GM t_{max}^2} - 1 \\ &= \frac{9\pi^2}{16} - 1 \\ &\simeq 4.55. \end{aligned} \quad (2.40)$$

L'expansion de la sphère est en fait plus faible que l'expansion de l'Univers d'Einstein-De Sitter. Sa densité moyenne est donc plus élevée que la densité moyenne de l'Univers, ce qui explique le terme de contraste significatif.

Deuxième phase : contraction et virialisation

La sphère va ensuite se contracter sur elle-même. R atteint alors un minimum en $\theta = 2\pi$ et donc en $t_{min} = 4\pi B = 2t_{max}$. A ce moment en effet $\dot{R} = 0$ et la sphère est devenue un trou noir. En pratique, à cause de l'énergie cinétique des particules qui la composent, il n'y aura pas de singularité. La sphère va en fait se virialiser lors de la contraction et atteindre un équilibre. On suppose donc que l'on peut appliquer le théorème du viriel :

$$2 \cdot T_f + V_f = 0 \quad (2.41)$$

avec T_f l'énergie cinétique d'une particule de masse m au bord de l'amas et $V_f = -mGM/R_f$ l'énergie potentielle en $t = t_{min}$. R_f est le rayon de la sphère et est supposée cette fois non nul. Soit $V_i = -mGM/R_{max}$ l'énergie potentielle en $t = t_{max}$; je suppose l'énergie cinétique nulle à ce moment là d'où $E = V_i$. Comme $E = T_f + V_f = 1/2V_f$, j'en déduis par conservation de l'énergie que $V_f = 2V_i$ et donc que $R_f = 1/2R_{max}$.

Je peux ainsi évaluer le terme de contraste quand l'amas est virialisé :

$$\begin{aligned}
 \delta(t_{min}) &= \frac{M}{4/3\pi\bar{\rho}(t_{min})R_f^3} - 1 \\
 &= \frac{6\pi G 4t_{max}^2 M}{4/3\pi R_f^3} - 1 \\
 &= \frac{6\pi G 4t_{max}^2 8M}{4/3\pi R_{max}^3} - 1 \\
 &= 4 \cdot 8 \cdot (\delta(t_{max}) + 1) - 1 \\
 &= 18\pi^2 - 1 \\
 &\simeq 176.6.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Dans le cas plus général d'une cosmologie Λ CDM telle que $\Omega_m = 0.27$ et $\Omega_\Lambda = 0.73$, un amas virialisé à $z=0$ a un contraste plus important de l'ordre de $\delta \simeq 358$ (KOMATSU, 2011; BRYAN et al., 1998) puisque la densité moyenne de l'Univers est plus petite au même redshift que dans un Univers d'Einstein-De Sitter.

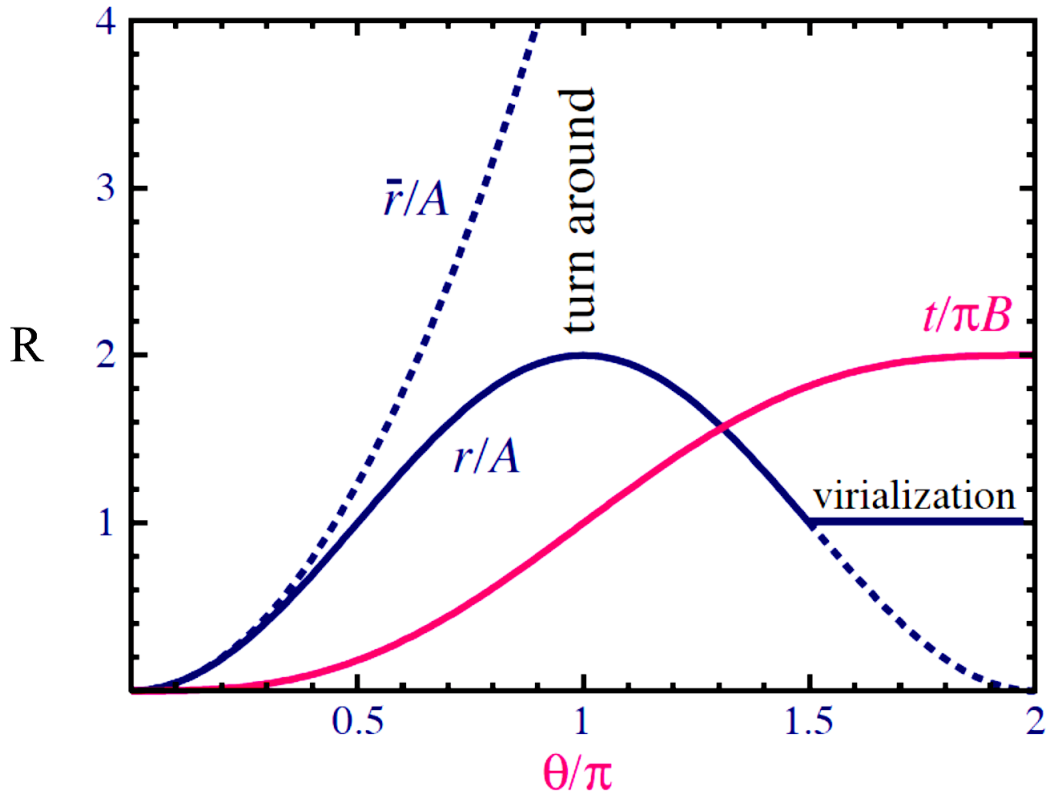


FIGURE 2.3 – En bleu continu : l'évolution du rayon de la sur-densité avec θ dans le cas de l'effondrement sphérique. En bleu pointillé : évolution de R en l'absence de sur-densité; $R \propto a$. En violet : évolution de R quand le contraste est petit. Crédit : Wayne Hu.

Limites de cette approche et recours aux simulations

L'effondrement sphérique a deux limitations majeures : il suppose une symétrie sphérique à la sur-densité alors qu'en réalité elle a une structure plutôt en filaments qui n'est sphérique (et qui est plutôt elliptique en fait) que dans la zone la plus dense. La deuxième limite, c'est de considérer la sur-densité comme isolée alors qu'elle est en fait soumise à l'influence gravitationnelle des autres sur-densités. De plus, plusieurs sur-densités peuvent sous certaines conditions fusionner et former une sur-densité plus importante, une possibilité de nouveau exclue par l'effondrement sphérique. Pour pouvoir s'affranchir de ces deux limitations, le recours aux simulations numérique N-corps est nécessaire. Ces simulations permettent aussi de prendre en compte la composante baryonique qui, à la différence de la matière noire, est un fluide avec des collisions et qui peut rayonner. Des effets additionnels comme les éjections de gaz en provenance des noyaux galactiques actifs qui vont perturber la distribution de la composante baryonique peuvent aussi être ajoutés dans les simulations.

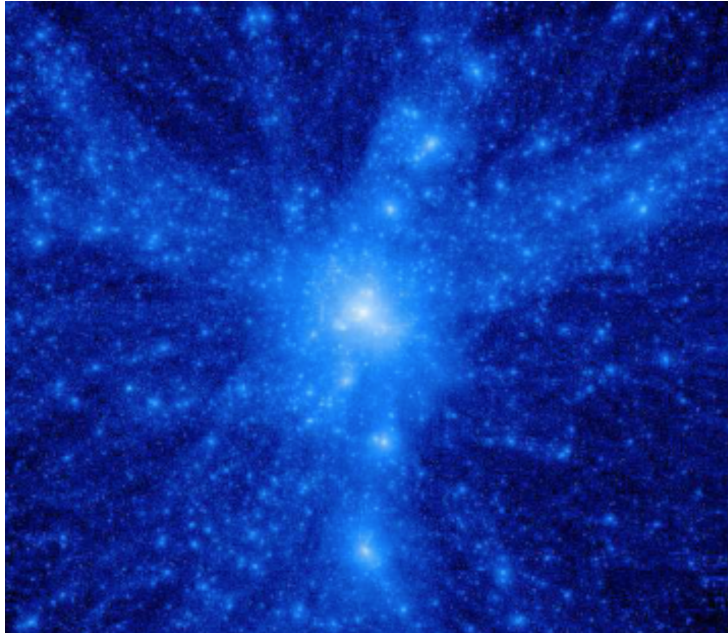


FIGURE 2.4 – Un amas de masse $1.2 \cdot 10^{15} M_{\odot}$ à $z = 0$ obtenue avec une simulation numérique. Sa structure n'est pas sphérique et de nombreux filaments sont visibles. Crédit : [KRAVTSOV et al., 2012](#)

2.2.2 L'abondance des amas de galaxies et les contraintes sur la cosmologie

Le nombre d'amas de masse M à redshift z dépend à la fois du spectre de puissance des fluctuations primordiales mais aussi des modèles d'effondrement, ces derniers dépendant à leur tour des paramètres cosmologiques. Ce qui veut dire que le comptage des amas permet de contraindre la cosmologie.

Approche linéaire et contraste critique δ_c

Pour un contraste δ faible, je suppose que l'échelle de temps pour s'effondrer est faible donc que t et R sont petits. J'en conclus que nécessairement $\theta \ll 1$. Je vais effectuer un développement limité des équations 2.37 et 2.38. Comme le développement à l'ordre 1 me donne R et t constant et que le développement à l'ordre 2 me donne que t est constant, je

pousse le développement à l'ordre 3 :

$$R(\theta) = (1 - \cos(\theta)) \simeq \frac{A}{2} \theta^2 \quad (2.43)$$

$$t(\theta) = B(\theta - \sin(\theta)) \simeq \frac{B}{6} \theta^3 \quad (2.44)$$

J'ai donc $R \propto t^{2/3}$ comme le facteur d'expansion a . La sur-densité subit la même expansion que le reste de l'Univers. Ce qui veut dire que la sur-densité est en fait négligeable. Pour prendre en compte l'effet de la sur-densité sur R je suis donc obligé de pousser le développement limité à un ordre plus important. Je le pousse à l'ordre 5 pour obtenir l'expression suivante de t :

$$t \simeq \frac{B}{6} \theta^3 \left(1 - \frac{\theta^2}{20} \right) \quad (2.45)$$

En substituant θ^2 par $\theta^2 \simeq \frac{6}{B} t^{2/3}$ en utilisant l'équation 2.44, je récupère une expression de θ en fonction de t :

$$\begin{aligned} \theta &= \left(\frac{6}{B} t \right)^{1/3} \left(1 - \frac{\theta^2}{20} \right)^{1/3} \\ &\simeq \left(\frac{6}{B} t \right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\theta^2}{20} \right) \\ &= \left(\frac{6}{B} t \right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{60} \left(\frac{6}{B} t^{1/3} \right)^2 \right) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{60} x^2 \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec $x = \left(\frac{6}{B} t \right)^{1/3}$ et je peux ainsi obtenir l'expression suivante de R :

$$\begin{aligned} R &\simeq \frac{A}{2} \left[\theta^2 - \frac{1}{12} \theta^4 \right] \\ &= \frac{A}{2} \left[\left(x + \frac{1}{60} x^3 \right)^2 - \frac{1}{12} \left(x + \frac{1}{60} x^3 \right)^4 \right] \\ &\simeq \frac{A}{2} \left[x^2 + \frac{1}{30} x^4 - \frac{1}{12} x^4 \right] \\ &= \frac{A}{2} \left[x^2 - \frac{1}{20} x^4 \right] \\ &= \frac{A}{2} x^2 \left(1 - \frac{1}{20} x^2 \right) \\ &= \frac{A}{2} \left(\frac{6}{B} t \right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6}{B} t \right)^{2/3} \right) \\ &= \frac{6^{2/3} (GM)^{1/3}}{2} t^{1/3} \left(1 - \frac{1}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

car $B^2 = A^3/(GM)$ et $t_{max} = B\pi$. Cela me conduit à la formule suivante pour le contraste :

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &= \frac{M}{4/3\pi\bar{\rho}(t)R(t)^3} - 1 \\
 &= \frac{6\pi GMt^2}{4/3\pi R(t)^3} - 1 \\
 &= \frac{2^3 \cdot 6\pi GMt^2}{4/3\pi \cdot 6^2 GMt^2 \left(1 - \frac{1}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}}\right)^{2/3}\right)^3} - 1 \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}}\right)^{2/3}\right)^3} - 1 \\
 &\simeq 1 + 3 \cdot \frac{1}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}}\right)^{2/3} - 1 \\
 &= \frac{3}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_{max}}\right)^{2/3}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

La perturbation entre dans le régime non-linéaire et se détache du flot d'Hubble quand $t = t_{max}$ donc quand $\delta(t_{max}) = 3/20(6\pi)^{2/3} \simeq 1.0624$ (Gunn et al., 1972). L'effondrement de la sur-densité arrive en $t_{coll} = 2t_{max}$ donc quand la densité atteint le seuil $\delta_c = \delta(t_{coll}) = \delta(2t_{max}) = 3/20(2 \cdot 6\pi)^{2/3} \simeq 1.686$. Pour le modèle Λ CDM, la valeur est en fait peu différente : $\delta_c \simeq 1.675$ (δ_c dépend peu de Ω_m et de Ω_Λ d'après Percival, 2005).

L'échelle de masse pour la régime non-linaire M_{NL}

J'utilise dans cette section le contraste moyen de la région de masse M , $\delta_M(\vec{x}, z)$, et sa variance $\sigma^2(M, z)$ déjà introduite dans la section 2.1.2.

La probabilité d'avoir un contraste δ_M est donnée par une loi normale centrée sur zéro et d'écart-type $\sigma^2(M, z)$:

$$p(\delta, \sigma(M, z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M, z)}} e^{-\frac{1}{2}\delta^2/\sigma^2(M, z)} \tag{2.49}$$

Je suppose qu'une sur-densité de contraste δ_M va s'effondrer sous l'effet de la gravitation et former un amas de galaxies si $\delta_M D(z) \geq \delta_c(z)$ avec $\delta_c(z)$ qui varie très peu avec le redshift. Pour un univers type Einstein-De Sitter, il n'y a pas d'évolution avec le redshift et $\delta_c \simeq 1.686$.

Je définis l'échelle de masse pour le régime non linéaire M_{NL} pour un redshift z qui est telle que $\sigma(M_{NL}, z) = D(z)\sigma(M_{NL}, 0) = \sigma_c(z)$. Aussi, les sur-densités avec une masse supérieure à M_{NL} en z vont rentrer ou sont déjà rentrées dans le régime non-linéaire de formation des structures.

Je définis aussi le rapport entre le contraste type pour un effondrement et l'écart-type des contrastes associées aux sur-densités de masse M de cette façon :

$$\nu_{NL}(M, z) = \frac{\delta_c(z)}{\sigma(M_{NL}, z)}. \tag{2.50}$$

Cette dernière quantité sera notamment utilisée pour construire la fonction de masse ci-dessous.

Fonction de masse

Soit $F(M, z)$ la probabilité qu'une région de masse M s'effondre sous l'effet de la gravité pour former un amas de masse maximale M à redshift z :

$$F(M, z) = \int_{-1}^{+\infty} p(\delta, \sigma(M, z)) C_{coll}(\delta) d\delta \quad (2.51)$$

avec $p(\delta, \sigma(M, z))$ la probabilité d'avoir une sur-densité δ exprimée par l'équation 2.49 et $C_{coll}(\delta)$ la probabilité qu'une telle sur-densité δ puisse s'effondrer. Ce formalisme a été introduit par [BLANCHARD et al., 1992](#). Notons que la probabilité qu'une région s'effondre en un amas de masse comprise entre M et $M + dM$ est simplement $dF(M, z)$.

Soit $n(M, z)$ la densité d'amas de masse inférieure à M à redshift z . La densité d'amas de masse entre M et $M + dM$ est donc donné par $dn(M, z)$. Si $\bar{\rho}_m(z)$ est la densité de matière moyenne à redshift z , la densité du nombre de régions de masse M est simplement le rapport de la densité de matière moyenne sur la masse donc $\bar{\rho}_m(z)/M$. La densité d'amas est donc le produit de la densité de région de masse M par la probabilité que cette région s'effondre effectivement en un amas de masse M et $M + dM$:

$$dn(M, z) = \frac{\bar{\rho}_m(z)}{M} |dF(M, z)| \quad (2.52)$$

En suivant [PRESS et al., 1974](#), on peut supposer qu'il y a effectivement effondrement si $\delta D(z) > \delta_c(z)$. On peut prendre une fonction d'Heaviside telle que $C_{coll}(\delta) = 0$ si $\delta < \delta_c$ et $C_{coll}(\delta) = 1$ si $\delta > \delta_c$. Ce qui conduit à écrire que $F(M) = \frac{1}{2} \text{erfc}[\delta_c(z)/\sqrt{2\sigma^2(M, z)}] = \frac{1}{2} \text{erfc}[\nu/\sqrt{2}]$ avec $\text{erfc}(x)$ la fonction d'erreur complémentaire qui est telle que $\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\nu = \delta_c(z)/\sigma(M, z)$. Remarquons alors que la dérivée de F en $\ln \nu$ est une Gaussienne :

$$\left| \frac{dF(\nu)}{d \ln \nu} \right| = \nu \left| \frac{dF(\nu)}{d\nu} \right| = \nu \left| \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-\nu^2/2} \right| = g(\nu) \quad (2.53)$$

Il est courant de travailler avec la dérivée logarithmique de $n(M, z)$ en M et c'est ce que je nomme *fonction de masse* :

$$\begin{aligned} \frac{dn(M, z)}{d \ln M} &= \frac{\bar{\rho}_m(z)}{M} \left| \frac{dF(M, z)}{d \ln M} \right| \\ &= \frac{\bar{\rho}_m(z)}{M} \left| \frac{dF(M, z)}{d \ln \nu} \right| \left| \frac{d \ln \nu}{d \ln M} \right| \\ &= \frac{\bar{\rho}_m(z)}{M} g(\nu) \left| \frac{d \ln \nu}{d \ln M} \right| \\ &= \frac{\bar{\rho}_m(z)}{M} \psi(\nu) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Notons que la dérivée de ν en fonction de M s'exprime comme il suit

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \nu}{d \ln M} &= - \frac{d \ln \sqrt{2\sigma^2(M, z)}}{d \ln M} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d \ln \sigma^2(M, z)}{d \ln M} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{M}{\sigma^2(M, z)} \frac{d\sigma(M, z)}{dM} \end{aligned} \quad (2.55)$$

avec la dérivée $\frac{d\sigma^2(M, z)}{dM}$ présentée dans la section 2.1.2 et qui dépend de Ω_m via $\bar{\rho}_m$, des paramètres du spectre de puissance primordial et de la fonction de transfert.

Il est aussi possible de construire la fonction $\psi(\nu)$ à partir des simulations numérique N-corps. C'est cette approche que suivent [JENKINS et al., 2001](#), [SHETH et al., 2001](#), [WARREN et al., 2001](#), [J. TINKER et al., 2008](#) et [J. L. TINKER et al., 2010](#) (cf figure 2.5). J'utiliserai l'avant dernière fonction de masse ([J. TINKER et al., 2008](#)) dans la section 4.4.3.

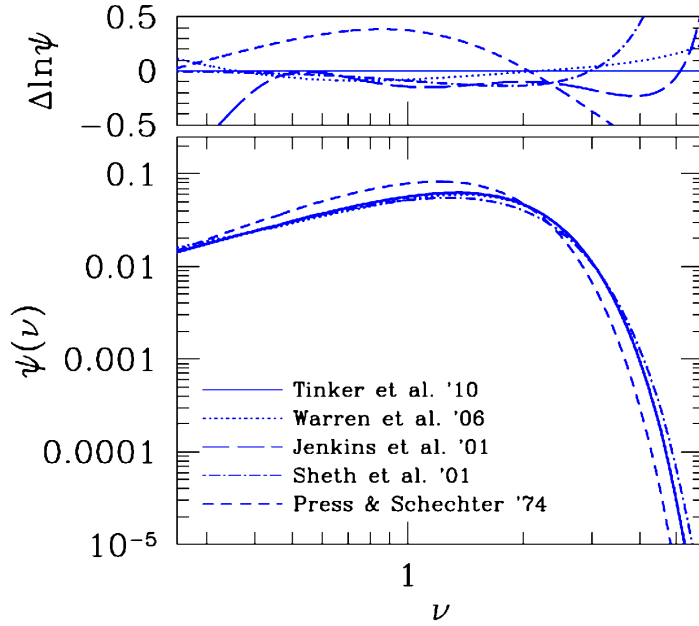


FIGURE 2.5 – Evolution de la fonction de masse $\psi(\nu)$ avec le paramètre $\nu = \delta_c(z)/\sigma(M, z)$. Crédit : [KRAVTSOV et al., 2012](#).

Contraintes sur la cosmologie

La fonction de masse est sensible à Ω_m via $\bar{\rho}_m(z)$ et $\sigma(M, z)$ et à σ_8 l'écart-type des fluctuations dans un rayon de $8h^{-1}\text{Mpc}$ via les paramètres du spectre de puissance qui influent aussi sur $\sigma(M, z)$. La mesure des anisotropies du FDC dans *Planck* ([PLANCK COLLABORATION et al., 2015h](#)) suggère une valeur de $\sigma_8 = 0.831 \pm 0.013$. Par contre, les contraintes sur la fonction de masse par le comptage des amas détectés par l'effet Sunyaev-Zel'dovich dans *Planck* conduit à une valeur de σ_8 plus faible traduisant le manque d'amas très massif ([PLANCK COLLABORATION et al., 2014a](#) ; [PLANCK COLLABORATION et al., 2015i](#)). L'estimation de la masse des amas pourrait être en cause, dans ce cas il faut introduire un paramètre de biais entre la vraie masse (celle de la fonction de masse) et la masse mesurée (par la luminosité X). Je reviens brièvement sur ce problème dans la section 3.2.1 du chapitre suivant et j'introduis le biais sur l'estimation de la masse dans le chapitre qui lui succède dans la section 4.4.3.

Un des versants de mon travail va consister à développer des outils de détection simultanée d'amas à la fois dans la gamme des rayons X et à la fois par effet Sunyaev-Zel'dovich. L'objectif est d'augmenter le nombre d'amas détecté en récupérant des amas moins massifs. Au final cela apportera des contraintes supplémentaires à la fonction de masse.

2.2.3 Caractéristiques physiques d'un amas de galaxies

Je vais supposer comme [KAISER, 1986](#) que les amas suivent un modèle "Self-similar" ou auto-similaire. Leurs propriétés physiques ne dépendent pas de l'échelle considérée puisqu'on suppose que l'effondrement gravitationnel ne dépend pas non plus de l'échelle.

La masse d'un amas de galaxies

Définir la masse d'un amas de galaxies revient en fait à définir l'amas lui même, c'est-à-dire la région que l'on va considérer comme gravitationnellement liée. La première approche c'est la masse "Friends-of-Friends" (FoF). Considérons des particules pour une simulation N-corps. Deux particules appartiennent à la même structure si leur distance est

inférieure à un certain seuil. Si $\bar{n}$ est la densité en particule, alors la distance moyenne entre deux particules est $\bar{l} = \bar{n}^{-1/3}$. Soit l la distance entre deux particules et $b = l/\bar{l}$; ces deux particules appartiennent à la même structure si par exemple b est inférieur à 0.2 ce qui correspond localement à un contraste de $\delta_{FoF} \simeq 81.62$.

Une autre manière de définir un amas, c'est de considérer toute la région sphérique centrée sur le pic de la sur-densité telle que la masse de la région soit $M = 4/3\pi(1 + \delta)\bar{\rho}_i(z)R^3$. Pour un univers Einstein-De Sitter, je peux prendre $\bar{\rho}_i(z) = \bar{\rho}_m(z) = \rho_c(z)$ avec $\rho_c(z)$ la densité critique de l'univers et prendre $\delta = 176.6$ comme le donne l'effondrement sphérique; j'ai alors $M_\Delta = 4/3\pi \cdot 176.6 \cdot \rho_c(z)R^3$. Pour un univers avec une constante cosmologique, je peux choisir $\bar{\rho}_i(z) = \bar{\rho}_m(z)$ ou $\bar{\rho}_i(z) = \rho_c(z)$ car dans ce cas $\bar{\rho}_m(z) \neq \rho_c(z)$. C'est sur le choix de $\bar{\rho}_i(z) = \rho_c(z)$ que je vais me porter dans mon étude. Je vais aussi prendre $(1 + \delta) = 500$, ce qui veut dire que je considère les régions où la densité est 500 fois supérieure à la densité critique de l'Univers à redshift z comme étant des amas de galaxies. Cette définition de la masse sera complétée dans la section 3.4.1.

Le profil du halo de matière noire

Les simulations numériques de formation des structures suggèrent que le halo de matière noire dans les amas suit globalement un profil universel sphérique. Navarro, Frenk et White ont introduit un tel profil (NAVARRO et al., 1995) qui s'accorde bien avec ces simulations :

$$\rho_b(r) = \frac{\rho_0}{x(1+x)^2} \quad (2.56)$$

avec r le rayon de l'amas centré sur le pic de la sur-densité, $x = r/r_s$ et r_s un rayon caractéristique. Je définis la concentration comme étant $c = R/r_s$ avec R le rayon de l'amas qui dépend de la définition de la masse évoquée ci-dessus. Normalement, le paramètre de concentration c ne doit pas dépendre des propriétés de l'amas et notamment de sa masse dans le modèle auto-similaire dans lequel je me place.

Ce profil est en accord avec l'hypothèse d'auto-similarité des amas puisque ses différents paramètres ne dépendent pas de la masse. Notons que ce profil ne concerne que la matière noire. La matière baryonique suit une version généralisée du profil de Navarro, Frenk et White que je vais introduire dans la section 3.4.1.

Un système en équilibre hydrostatique

Je pars de la seconde équation d'Euler pour un fluide :

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}})\vec{u} = -\frac{1}{\rho_g(\vec{r})}\nabla_{\vec{r}}p - \nabla_{\vec{r}}\Phi \quad (2.57)$$

avec cette fois ρ_g la densité de matière baryonique dans l'amas qui exerce une pression. Je suppose que l'amas est en équilibre hydrostatique, donc $\vec{u} = 0$. Je peux alors écrire que :

$$\nabla_{\vec{r}}p = \rho_g(\vec{r})\nabla_{\vec{r}}\Phi \quad (2.58)$$

Je suppose que l'amas a une symétrie sphérique donc que $\rho_g(\vec{r}) = \rho_g(r)$. Je me place dans la limite Newtonienne (particules non relativistes dans un champ de gravité faible) ce qui fait que je peux utiliser l'équation de Poisson. Cela me conduit à l'expression suivante :

$$\frac{dp}{dr} = -\rho_g(\vec{r})G\frac{M_{HE}(r)}{r^2} \quad (2.59)$$

avec $M_{HE}(r)$ la masse totale de l'amas (matière noire et baryonique). Je suppose que la matière baryonique dans l'amas peut être décrite par un gaz parfait d'hydrogène et

d'hélium. Je peux donc utiliser l'équation d'état d'un tel gaz : $p = \rho_g k_B T / (\mu m_p)$ avec μ la masse moléculaire moyenne et m_p la masse du proton, négligeant celle des électrons. Cela conduit à l'équation suivante :

$$M_{HE}(r) = \frac{r k_B T(r)}{G \mu m_p} \left(\frac{d \ln \rho_g(r)}{d \ln r} + \frac{d \ln T(r)}{d \ln r} \right). \quad (2.60)$$

Cette équation peut être utilisée pour estimer la masse totale de l'amas à partir du profil de température et du profil de gaz, ces profils étant estimés par exemple à partir de la luminosité en X d'un amas étendu. Il est alors possible d'étalonner les relations entre masse et luminosité comme les lois d'échelle qui vont être présentées dans la section suivante. Cependant, l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique est forte. Par exemple après la fusion de deux amas, il faut près de $3 - 4 \cdot 10^9$ ans pour que le gaz soit à nouveau en équilibre hydrostatique (NELSON et al., 2012). Employer l'équation ci-dessus peut conduire à biaiser la masse totale estimée chez certains amas qui ne sont pas encore à l'équilibre. Un noyau de galaxie actif peut éjecter de la matière baryonique par auto-réaction ou "feedback" au niveau de l'amas et donc perturber l'équilibre hydrostatique (VERNALEO et al., 2006).

2.2.4 Les lois d'échelles

Les lois d'échelles sont développées dans le cadre du modèle de Kaiser d'auto-similarité. Ces lois donnent des relations simples entre la masse totale de l'amas, la luminosité ou des grandeurs thermodynamiques comme la température et l'entropie. Par souci de simplicité, je ne vais pas prendre en compte le profil spatial de ces quantités dans cette section.

Soit un amas de masse $M = 4/3\pi(1+\delta)\bar{\rho}_i(z)R^3$ avec $(1+\delta)\bar{\rho}_i(z) = \Delta(z)$ qui dépend de la définition de la masse. J'obtiens une première relation $R \propto M^{1/3}/\Delta^{1/3}(z)$. Je suppose l'amas virialisé donc que :

$$2 \cdot E_c + E_p = 0 \quad (2.61)$$

avec $E_c \propto T_X$ l'énergie cinétique d'une particule de masse m dans l'amas de température T_X et $E_p = -mGM/R$ l'énergie potentielle. Ce qui me conduit à la loi d'échelle suivante :

$$T_X \propto \frac{M}{R} \propto \Delta(z)^{1/3} M^{2/3} \quad (2.62)$$

La luminosité X, L_X , est obtenue par rayonnement de freinage et est proportionnelle à la densité M/V au carré intégrée sur tout le volume de l'amas $V \propto R^3$. J'évoquerai plus en détail le rayonnement de freinage en 5.1.1. J'obtiens alors la relation suivante entre luminosité X et masse de l'amas :

$$L_X \propto \left(\frac{M}{V} \right)^2 V \propto \frac{M^2}{V} \propto \frac{M^2}{R^3} \propto \Delta(z) M \quad (2.63)$$

Pour des températures telles que $T < 2\text{keV}$, la relation ci-dessus n'est plus valide du fait des lignes d'émissions dans le spectre du rayonnement X qui deviennent dominantes.

L'entropie pour le rayonnement X des amas est notée K_X et se définit comme il suit :

$$K_X = \frac{k_b T_X}{n_e^{2/3}} \quad (2.64)$$

avec n_e la densité d'électrons qui est telle que $n_e \propto M/V$. Je peux donc obtenir la loi d'échelle suivante :

$$K_X \propto \left(\frac{M}{V} \right)^{-2/3} T_X \propto \Delta(z)^{1/3} M^{2/3} \quad (2.65)$$

La quantité $Y = MT_X$ est utilisée à la fois pour caractériser les émissions X et l'effet Sunyaev-Zel'dovich. Elle est liée au paramètre de Compton que je vais introduire dans la section 3.1.1. Pour cette quantité, j'obtiens que :

$$Y = MT_X \propto \Delta(z)^{1/3} M^{5/3} \quad (2.66)$$

Je vais utiliser une loi d'échelle similaire pour estimer la masse des amas (cf équation 4.28) à partir de l'effet Sunyaev-Zel'dovich.

2.2.5 Lentille gravitationnelle par les amas

Sans rentrer dans les détails, il paraît important de mentionner l'effet de lentille gravitationnelle qui permet d'accéder directement à la masse d'un amas. La relativité générale nous dit qu'en présence de masse, la lumière va courber sa trajectoire. Soit un rayon lumineux issu d'une structure d'arrière-plan à grand redshift (galaxie ou quasar), soit un amas de masse M à plus petit redshift. La trajectoire du rayon va changer à proximité de la masse et l'observateur va se tromper sur la position de l'objet d'arrière-plan. La différence entre la position réelle de l'objet d'arrière-plan et sa position observée dans la voute céleste est notée α . C'est l'angle de déflexion. Quand la masse est suffisamment faible et que le rayon lumineux est suffisamment loin, cet angle de déflexion est donnée par la formule suivante (BARTELMANN et al., 2001) :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 D} \quad (2.67)$$

avec D la distance entre l'amas et le rayon lumineux au point de déflexion. Les structures en arrière plan d'un objet massif auront tendance à se répartir en anneaux à cause de l'effet des lentilles. Notons que les amas de galaxies agissent comme des lentilles pour les photons du FDC, ce qui contamine son spectre de puissance aux petites échelles. Les collaboration WtG ("Weighting the Giants") et CCCP ("Canadian Cluster Comparison Project") travaillent sur l'estimation de la masse des amas de galaxies par effet de lentille gravitationnelle. Leur mesures servent entre autre à étalonner les relations entre masse et luminosité.

2.3 Quasars et noyaux galactiques actifs

Cette petite s'appuie essentiellement sur les articles NETZER, 2015 et SIJACKI et al., 2007. Les quasars sont des noyaux galactiques actifs parfois accompagnés d'une galaxie hôte, donc d'un ensemble d'étoiles liées par la gravitation. Le noyau galactique actif serait composé d'un trou noir supermassif ($M > 10^5 M_\odot$) qui accrète de la matière baryonique comme le présente la figure 2.6. Cette matière forme un disque autour du trou noir et est dans l'état de plasma. Les particules du plasma vont perdre leur moment angulaire en rayonnant. Il arrive aussi qu'une partie de la matière baryonique du disque d'accrétion soit éjectée hors du quasar à des vitesse quasi-relativistes de part et d'autre de l'axe de rotation du disque. On parle alors de "jet". L'éjection est vraisemblablement provoquée par des variations du champ magnétique au niveau du disque d'accrétion. Les électrons et les protons dans les "jets" qui sont en rotation autour des lignes du champ magnétique émettent un rayonnement synchrotron. Les particules vont ralentir et les "jets" vont ensuite se transformer en deux lobes qui vont émettre dans le domaine radio.

2.3.1 Le modèle unifié des noyaux galactiques actifs

Le modèle du trou noir supermassif est au coeur du modèle unifié des noyaux galactiques actifs proposé par ANTONUCCI, 1993 et URRY et al., 1995. Ce modèle permet de

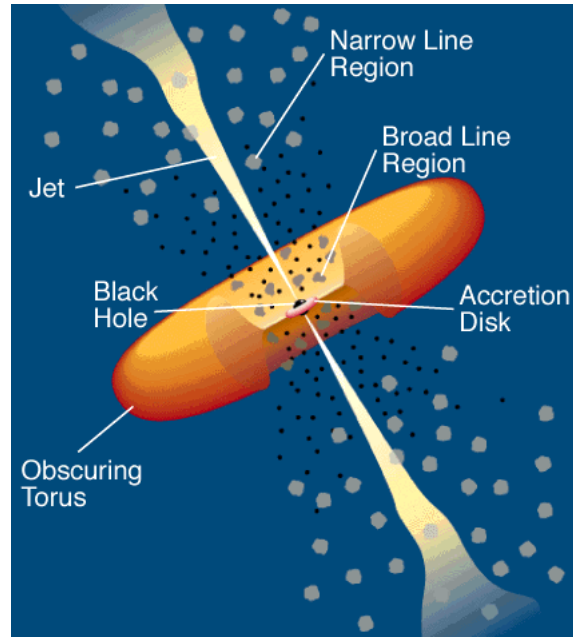


FIGURE 2.6 – Le noyau galactique actif est constitué d'un trou noir central qui accrète de la matière organisée sous forme d'un disque lui même entouré d'un tore de poussière. Une partie de cette matière peut être éjectée sous forme d'éjecta ("jet"). Crédit : [URRY et al., 1995](#)

classer dans une même catégorie des corps célestes à priori très différents qui émettent dans des domaines de longueur d'onde tout aussi différents (cf figure 2.7) :

- Quasars : les quasars sont les objets les plus lumineux du ciel ce qui les rend détectables à très haut redshift. Ils sont observables dans le visible (et l'infrarouge), dans les UV et dans les X. On parle plutôt de noyau galactique actif ou d'AGN (Active Galactic Nuclei) pour les objets observés dans les X. Ils doivent leur luminosité aux particules du disque d'accrétion qui perdent une partie de leur moment angulaire. S'il y a une galaxie hôte, sa contribution à la luminosité totale est minime. Leur luminosité est de l'ordre de $10^{12}L_{\odot}$ et leur volume est équivalent à celui du système solaire.
- Blazar : si le "jet" de matière se produit le long de la ligne de visée, l'observateur détectera une intense source gamma. Les quasars n'ont donc pas systématiquement de contrepartie dans le domaine gamma.
- Galaxie radio : Il s'agit en fait de l'émission synchrotron en provenance des lobes. Tous les quasars n'ont pas de contrepartie radio car leurs lobes sont souvent totalement refroidis.
- Galaxie de Seyfert : Ces galaxies ont un noyau très brillant, qui est bien un noyau galactique actif, et ont une contrepartie dans le domaine gamma.

2.3.2 Croissance du trou noir central

Le trou noir central croît ensuite par accrétion de la matière dans le disque. En s'appuyant sur les travaux de Bondi-Hoyle-Lyttleton ([HOYLE et al., 1939](#) ; [BONDI et al., 1944](#) ; [BONDI, 1952](#)) on peut utiliser la formule suivante pour l'accrétion :

$$\dot{M}_{BH} = \frac{4\pi\alpha G^2 M_{BH}^2 \rho}{(c_s^2 + v^2)^{3/2}} \quad (2.68)$$

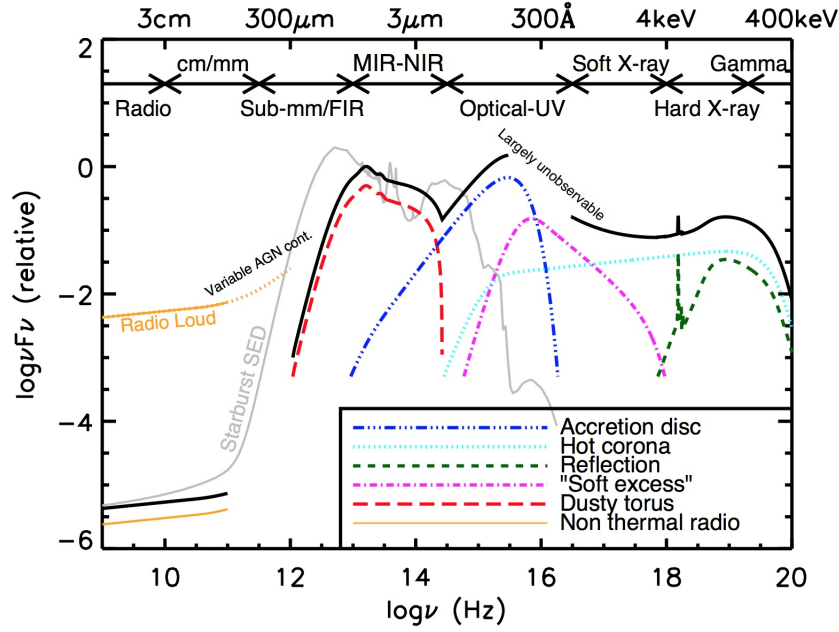


FIGURE 2.7 – Evolution du flux en provenance d'un noyau galactique actif en fonction de la fréquence. Plusieurs émissions sont représentées. En jaune : les émissions synchrotron des lobes dans le domaine radio. En rouge : les émissions de poussières en provenance du disque externe du quasar et/ou de la galaxie hôte du quasar. En bleu, violet et cyan : les émissions en provenance des particules dans le disque d'accrétion. En vert : émission réfléchie sur le disque externe. Crédit : Chris Harrison, [ELVIS et al., 1994](#) et [RICHARDS et al., 2006](#).

avec M_{BH} la masse du trou noir central, v la vitesse du trou noir par rapport au gaz qui l'entoure, c_s la vitesse du son dans le gaz et ρ la densité du gaz environnant. α est un paramètre sans dimension.

La luminosité du noyau galactique actif est liée au taux d'accrétion car la matière consommée par le trou noir perd son moment angulaire qui est converti en luminosité. La luminosité du noyau est donnée par [SPRINGEL et al., 2005](#) :

$$L_r = \epsilon_r c^2 \dot{M}_{BH} \quad (2.69)$$

avec un paramètre sans dimension ϵ_r tel que $0 < \epsilon_r < 1$. Plus l'environnement est dense, plus le taux d'accrétion est important et plus la luminosité du noyau est importante aussi.

2.3.3 Rétro-action

Selon l'approche de [SPRINGEL et al., 2005](#), une partie de la luminosité du noyau galactique actif sert à chauffer le gaz à proximité quand la luminosité dépasse la limite d'Eddington et la pression de radiation l'emporte sur la gravité. Soit E_{feed} l'énergie apportée au milieu par le noyau galactique :

$$E_{feed} = \epsilon_f L_r = \epsilon_f \epsilon_r c^2 \dot{M}_{BH} \quad (2.70)$$

avec ϵ_f l'efficacité du couplage thermique.

Quand la luminosité est en dessous de la limite d'Eddington, le noyau galactique actif peut éventuellement former des "jets". La période d'activité est à peu près de 10^7 à 10^8 ans ([BÎRZAN et al., 2004](#)). L'énergie apportée aux lobes issus des "jets" est alors donnée par

$$E_{bub} = \epsilon_m L_r \Delta t = \epsilon_m \epsilon_r c^2 \Delta M_{BH} \quad (2.71)$$

avec ϵ_m l'efficacité du mécanisme de chauffage des lobes et ΔM_{BH} la variation de la masse du trou noir pendant la période d'activité $\Delta t \sim 10^7 - 10^8$ ans. Dans un milieu plus dense, l'accrétion sera plus importante et donc la croissance du trou noir aussi. L'énergie apportée au lobe sera en conséquence plus importante et le milieu sera plus perturbé.

Chapitre 3

Détection des structures *BOSS* dans *Planck*

La première partie de ma thèse est dédiée à la détection de la composante de gaz chaud des amas ou des proto-amas à grand redshift ($z > 2$) par effet Sunyaev-Zel'dovich thermique dans les cartes du satellite *Planck*. La ré-ionisation des baryons dans les surdensités de matière est totale à partir de $z \sim 6$, impliquant l'existence de structures contenant du gaz chaud pour des redshifts inférieurs. Pour des redshifts $z > 2$, il n'est plus possible de détecter des structures individuelles et il convient d'utiliser des traceurs indépendants. J'utilise ici les quasars du catalogue *BOSS* DR12 comme traceurs. Les quasars de ce catalogue présentent un premier avantage : ils sont nombreux pour des redshifts $z > 2$ et je m'attends donc à pouvoir extraire un signal moyen significatif. De plus les études de clustering présentées dans la section 3.1.2 suggèrent que les quasars à grand redshift sont préférentiellement dans des halos plus massifs que les quasars à bas redshift. Ces études ont été réalisées sur des versions plus anciennes du catalogue et la correspondance quasars-halos massifs est peut-être moins systématique pour DR12. Je vais cependant faire l'hypothèse que ces quasars sont de bons traceurs des halos massifs et donc de la composante de gaz chaud associée. Travailler avec des traceurs indépendants peut poser certains problèmes. En effet les traceurs peuvent avoir des émissions propres qui risquent de masquer le signal de gaz chaud. C'est le cas des quasars qui ont une émission poussière dans l'intervalle de fréquence couvert par *Planck*. La prise en compte de cette émission sera l'une des principales difficultés de cette analyse. Les quasars, qui sont des noyaux galactifs actifs, peuvent aussi éjecter un gaz chaud non virialisé qui n'est pas distinguable de celui associé au halo de matière noire.

Ce chapitre a pour vocation d'établir les premiers pans de l'analyse sur la détection d'un potentiel gaz chaud dans des structures à grand redshift. J'en profite pour présenter avec plus de détails la signature de ce gaz chaud dans les photons du FDC, l'effet SZ thermique, et pour introduire les données utilisées pour le détecter, à savoir les cartes du satellite *Planck* et le catalogue de quasars *BOSS* DR12. C'est aussi l'occasion d'évoquer un premier outil d'extraction, le matched filter, outil qui sera complexifié dans le chapitre suivant avec le reste de l'étude. Le chapitre se conclut sur la détection du signal moyen dans les cartes *Planck* à la position des quasars en utilisant ce filtre. La caractérisation de ce signal fera l'objet de la partie suivante.

3.1 Projet de détection du gaz chaud lointain

Comme évoqué dans le chapitre précédent, la composante baryonique des parties les plus denses de notre univers (telles les amas de galaxies ou les proto-amas à plus grand redshift) se trouve majoritairement sous forme d'un gaz chaud à partir de $z \sim 6$ ([PLANCK](#)

COLLABORATION et al., 2015h; FAN et al., 2006) . Ce gaz est détectable entre autre par l'effet Sunyaev Zel'dovich (SZ), canal qui est privilégié dans mon étude. Si l'effet SZ a permis effectivement la détection d'amas à bas redshift ($z < 1.5$), il reste trop faible au niveau des structures plus lointaines pour permettre leur détection individuelle. Une approche statistique devient nécessaire pour espérer obtenir un signal SZ significatif en provenance de telles structures. Ce qui implique de disposer d'un traceur indépendant pour savoir où extraire un flux. Ce rôle est rempli ici par les quasars du catalogue BOSS DR12.

3.1.1 Détection du gaz chaud par effet tSZ

Les différents effets Sunyaev-Zel'dovich

Les photons du FDC se diffusent de manière non-élastique sur le nuage d'électrons libres (au niveau du gaz chaud) par effet Compton-inverse. Le spectre de ces photons s'en trouve modifié. Ce n'est plus un corps noir. Si l'on soustrait le spectre des photons du FDC, le corps noir, à celui des photons diffusés, on obtient la signature spectrale caractéristique de l'effet SZ thermique. Cet effet a été prédit par Rashid Sunyaev et Yakov Zel'dovich dans les articles fondateurs SUNYAEV et al., 1970 et SUNYAEV et al., 1972.

En se restreignant à une certaine gamme de température pour les électrons libres ($T_e < 10$ keV, BIRKINSHAW, 1999), on peut négliger les corrections relativistes du spectre de l'effet SZ thermique. Dans ce cas, le spectre normalisé tSZ ne dépend ni des caractéristiques de la source ni de son éloignement, c'est-à-dire son redshift ; ces informations sont alors intégralement portées par l'amplitude de l'effet tSZ. Cette (quasi) invariance de la forme du spectre est une des grandes forces de la détection par effet tSZ.

L'effet tSZ a été détecté une première fois par Mark Birkinshaw en 1983 au niveau des amas de galaxies 0016+16, Abell 665 et Abell 2218 à partir des observations à 40 GHz réalisées par le Owens Valley Radio Observatory (BIRKINSHAW et al., 1984).

Le mouvement des amas de galaxies par rapport au FDC modifie aussi le spectre de l'effet SZ (SUNYAEV et al., 1975). On parle alors d'effet SZ cinétique (kSZ). La collaboration Atacama Cosmology Telescope fut la première à détecter cet effet en 2012 via une approche statistique, en mesurant la vitesse moyenne entre deux paires d'amas de galaxies (HAND et al., 2012). En utilisant une méthode similaire, la collaboration *Planck* est aussi sur la voie de l'effet kSZ (PLANCK COLLABORATION et al., 2016). Récemment, la combinaison des données millimétriques du South Pole Telescope (SPT) avec un catalogue d'amas du Dark Energy Survey (DES) a conduit à la détection d'un effet kSZ significatif à 4.2σ (SOERGEL et al., 2016).

De nombreux indices favorisent aussi la détection de l'effet kSZ au niveau d'un objet individuel à savoir l'amas MACS J0717.5+3745 par combinaison de données *MUSTANG* (pour Multiplexed SQUID/TES Array at Ninety GHz) et *Bolocam* (MROCKOWSKI et al., 2012).

Il est possible d'utiliser l'effet kSZ pour d'établir des contraintes sur l'homogénéité de l'Univers. La somme des vitesses des amas par rapport au FDC doit être nulle si l'Univers est effectivement homogène aux grandes échelles. Ce qui veut dire que le signal kSZ moyen au niveau des amas doit être compatible avec zéro. La mesure de la vitesse moyenne (via l'effet kSZ) réalisée par Sarah Puisieux sur le catalogue d'amas MCXC (PIFARETTI et al., 2011), catalogue qui sera présenté avec plus de détails dans le chapitre 5, va dans ce sens. Cette vitesse est de l'ordre de 72 km.s^{-1} avec une erreur de 60 km.s^{-1} , donc compatible avec zéro (PLANCK COLLABORATION et al., 2014d ; PUISIEUX, 2013).

Ce signal SZ cinétique est largement sous-dominant par rapport au signal SZ thermique, en conséquence, je ne le prends pas en compte pour la suite de mon étude. Il existe aussi un signal tSZ polarisé causé à la fois par le mouvement des amas et la polarisation des photons du FDC. Ce signal n'a jamais été détecté et est encore plus faible que

l'effet kSZ. En conséquence, je le néglige aussi pour la suite.

Dérivation de l'effet tSZ à partir de l'équation de Kompaneets

En ne considérant que la diffusion Compton-inverse des photons sur des électrons non relativistes, on peut employer l'équation de Kompaneets pour décrire l'évolution du spectre des photons (BIRKINSHAW, 1999 ; WEINBERG, 2008) :

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} x_e^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x_e} + n + n^2 \right) \quad (3.1)$$

$n(\nu)$ étant le nombre de photons dans l'état d'énergie $h\nu$, $x_e = h\nu/k_b T_e$ et $y = \frac{k_b T_e}{m_e c^2} l \sigma_T n_e$ le paramètre de Compton, avec l la distance parcourue par les photons dans le nuage. σ_T indique la section efficace de la diffusion Thompson et n_e la densité des électrons dans le nuage.

Les photons du FDC suivent une distribution de corps noir, d'où $n(\nu) = (e^x - 1)^{-1}$ avec $x = h\nu/k_b T_{FDC}$ et $T_{FDC} = 2.7255 \pm 0.0006K$ (FIXSEN, 2009). Notons aussi que $\frac{\partial x}{\partial x_e} = \frac{T_e}{T_{FDC}} \gg 1$ pour des électrons dans un plasma. Ce qui implique que $|\frac{\partial n}{\partial x_e}| = |-e^x (e^x - 1)^{-2} \frac{T_e}{T_{FDC}}| \gg e^x (e^x - 1)^{-2} = n + n^2$. On peut donc réécrire l'équation de Kompaneets sous une forme plus simple :

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(x_e^4 \frac{\partial n}{\partial x_e} \right). \quad (3.2)$$

Comme $x = \frac{T_e}{T_{FDC}} x_e$, on peut remplacer x_e par x dans l'équation ci-dessus. Alors, en intégrant de part et d'autre sur y , on arrive à la relation suivante (x ne dépendant pas de y et $n(\nu)$ non plus) :

$$\Delta n = \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (3.3)$$

avec cette fois, le paramètre de Compton intégré le long de la ligne de visée :

$$y = \int \frac{k_b T_e(l)}{m_e c^2} \sigma_T n_e(l) dl. \quad (3.4)$$

En remplaçant n par son expression (corps noir), on obtient alors la variation du nombre de photons $\Delta n(\nu)$ dans un état d'énergie $h\nu$ par rapport au corps noir du FDC :

$$\Delta n = y \left(\frac{\frac{x^2}{4} \coth\left(\frac{x}{2}\right) - x}{\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right) = y \cdot f(\nu) \quad (3.5)$$

Δn ne dépend, à l'amplitude y près, que de x donc que de ν et en aucun cas des caractéristiques de l'amas telles que T_e et n_e . Ce spectre est donc universel pour les amas remplis d'un gaz de "basse" température ($T_e < 10$ keV).

L'intensité (spécifique) du corps noir du FDC en $\text{W.Hz}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ est donnée par $I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} n$. La variation de l'intensité provoquée par l'effet tSZ s'écrit de la même façon $\Delta I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \Delta n$. C'est cette variation qui sera mesurée par la suite. La figure 3.1 donne un aperçu de la forme de la variation en fonction de la fréquence des photons.

3.1.2 Les quasars comme traceurs du gaz chaud

Comme évoqué plus haut, les structures (amas, proto-amas) que je cherche à mettre en évidence sont à haut-redshift ($z > 2$) et ne sont pas détectables de manière individuelle dans le canal tSZ. Il convient donc de travailler avec un nombre important de sources pour

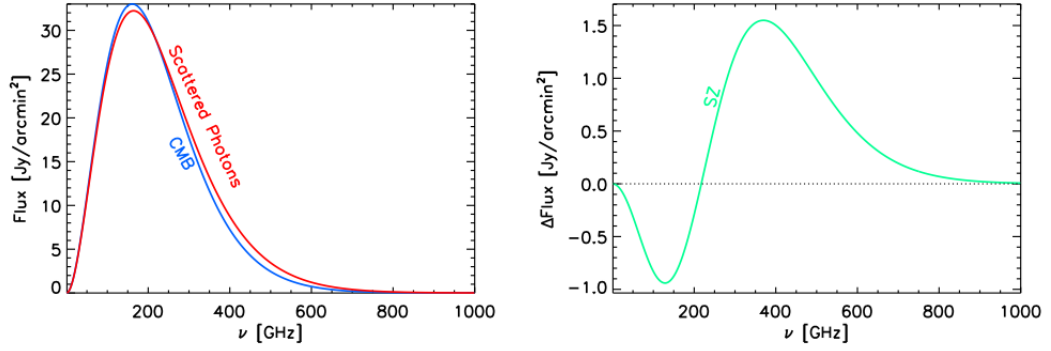


FIGURE 3.1 – A gauche : en bleu, l'intensité des photons du FDC, le corps noir à 2,73 K ; en rouge, le flux modifié par effet tSZ (pour un amas très massif). A droite : la différence entre les deux intensités qui donne le spectre du signal tSZ.

augmenter le rapport signal sur bruit et obtenir un flux significatif. Un problème se pose. Si je ne peux détecter les structure individuellement où vais-je devoir regarder au niveau des cartes *Planck* pour extraire mon flux moyen ? J'ai besoin d'un traceur indépendant, c'est-à-dire d'un objet détecté dans un autre canal que celui de l'effet tSZ pour pouvoir déterminer où je vais récupérer un signal dans le ciel.

Les quasars sont de possibles traceurs d'amas. Comme on l'a vu précédemment dans la dernière partie du chapitre 2, les quasars ont besoin de beaucoup de gaz pour entretenir leur activité, c'est-à-dire l'accrétion de matière autour de leur trou noir central, et donc leur importante luminosité. On peut inférer qu'ils sont nés dans des environnements plus denses que les galaxies non actives, par exemple dans des proto-amas. Il semble par contre qu'à plus bas redshift ($z < 2$) les quasars sont situés en moyenne dans des amas peu massifs de l'ordre de $\sim 2 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ d'après l'article de [N. P. Ross et al., 2009](#) sur le clustering des quasars *SDSS* (pour *Sloan Digital Sky Survey*)-DR5. Un autre article ([RICHARDSON et al., 2012](#)) s'appuie sur *SDSS*-DR7 pour estimer une masse moyenne cette fois de $(4.1 \pm 0.4) \cdot 10^{12} M_{\odot}$ pour les amas hôtes de quasars à $z \sim 1.4$. A contrario, cette même étude suggère pour des quasars avec un redshift moyen de $z \sim 3.2$ des amas hôtes beaucoup plus massifs : $(14.1 \pm 7) \cdot 10^{12} M_{\odot}$.

L'importante luminosité des quasars est un atout important puisque cela les rend détectable à grand redshift, par exemple jusqu'à $z=6$ pour le catalogue *BOSS SDSS*-DR12 utilisé ici. Les catalogues de quasars sont donc profonds et garantissent une population de traceurs suffisamment nombreuse même à des redshifts importants ([PÂRIS et al., 2012](#)).

Je vais dans un premier temps regarder le signal au niveau de ces quasars et donc de leur environnement proche sans faire d'hypothèse sur sa nature. Choisir les quasars comme traceurs ne garantit en rien l'obtention d'un signal purement tSZ d'éventuel proto-amas hôte. D'autres émissions pourront contaminer mon signal. La caractérisation de ces émissions "parasites" sera en partie l'objet du chapitre 4.

3.1.3 Panorama de la détection d'amas à grand redshift

L'amas le plus lointain détecté par rayonnement de freinage (donc en X) possède un redshift de $z = 2.506$. Il a été observé par le satellite *Chandra* ([WANG et al., 2016](#)). C'est la plus lointaine structure contenant du gaz chaud détectée individuellement (si bien sûr on exclut le plasma primordial confirmé par le FDC). L'autre canal de détection du gaz chaud, le tSZ ne permet pas de monter aussi loin. Le redshift des amas du catalogue de l'expérience *SPT* monte jusqu'à $z = 1.5$ alors que dans *Planck*, l'amas confirmé le plus lointain a un redshift de 1. L'amas XLSSU J021744.1-034536 est la plus lointaine structure

avec une émission tSZ significative puisqu'elle se trouve à $z=1.9$. Déjà identifié par *XMM-Newton*, cet amas a été détecté par *CARMA* (Combined Array for Research in Millimeter-wave Astronomy) dans le canal tSZ (MANTZ et al., 2014). Notons qu'à chaque fois le redshift des amas est obtenu avec la contrepartie optique, sous forme d'un groupement de galaxies, par exemple issues du catalogue *SDSS*.

Je profite de cette section pour rappeler une étude qui précède ce travail et dont la méthodologie est assez proche. En utilisant un catalogue (issu des données *SDSS*) de galaxies les plus lumineuses de leur environnement ou locally brightest galaxies (LBGs) comme traceurs, la collaboration *Planck* a pu trouver un signal tSZ significatif et compatible avec les lois d'échelles usuelles pour le SZ notamment chez les amas peu massifs qui ne sont pas détectables individuellement (PLANCK COLLABORATION et al., 2013b). D'autres études combinant les données *Planck* et des catalogues de galaxies (PLANCK COLLABORATION et al., 2011c) ou des catalogue d'amas détectés en X (PLANCK COLLABORATION et al., 2011b) ont confirmés la robustesse des lois d'échelles.

Auparavant, une même approche a été employée pour détecter l'effet tSZ dans les données *WMAP* (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) en utilisant des catalogues de traceurs dérivés aussi des données *SDSS* (CHATTERJEE et al., 2010 ; DRAPER et al., 2012) aboutissant à un signal tSZ significatif à 2.5σ .

Il convient ici aussi de mentionner les deux autres études sur la détection du gaz chaud qui utilisent les quasars comme traceurs. RUAN et al., 2015, en utilisant les quasars du catalogue *SDSS-DR7* et des cartes tSZ de *Planck* (HILL et al., 2014), sont capables d'extraire un signal SZ significatif à la position des traceurs. La collaboration *ACT* en utilisant des cartes de *ACT* et des cartes *Herschel*, avec pour traceurs les quasars *SDSS-DR10*, trouve aussi un signal tSZ significatif quoique largement dominé par une émission de poussière (CRICHTON et al., 2015). En utilisant les radio galaxies des catalogues *FIRST* et *NVSS*, cette même collaboration avait déjà extrait un signal tSZ significatif (GRALLA et al., 2014).

3.2 Les données *Planck*, adaptées à la détection du SZ

La mission *Planck* a permis l'élaboration de 9 cartes du ciel de 30 GHz à 857 GHz (PLANCK COLLABORATION et al., 2015a ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015f ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015d). En plus du FDC et des avant-plans galactiques qui dominent, on trouve ponctuellement des sources significatives d'émission tSZ. Ces sources sont à l'origine du catalogue d'amas *Planck*.

Ce que les cartes *Planck* n'ont pas en résolution du fait d'un lobe assez large, elles l'ont par contre en couverture puisque c'est tout le ciel micro-onde qu'elle sondent. Dans mon étude, je vais regarder les cartes *Planck* à la position des quasars de *BOSS* pour déterminer la présence ou non d'un signal tSZ.

3.2.1 La mission *Planck*

Conçue par l'Agence Spatiale Européenne (ESA), la mission *Planck* (PLANCK COLLABORATION et al., 2011a) succède aux deux missions d'observation du FDC que furent le *Cosmic Background Explorer* ou *COBE* (lancée en 1989, BOGGESS et al., 1992) et le *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* ou *WMAP* (lancée en 2001, BENNETT et al., 2003). *COBE* a permis une mesure directe du corps noir du FDC avec l'appareil *FIRAS* et la première détection de ses anisotropies avec l'appareil *DMR*. Ces deux mesures furent d'ailleurs couronnées par les prix Nobel attribués respectivement à John C. Mather et George Smoot en 2006.

WMAP et *Planck* ne mesurent pas le corps noir lui-même mais les variations de température par rapport à ce corps noir que ce soit les anisotropies du FDC ou plus ponc-

tuellement l'effet SZ. *WMAP* n'avait ni la profondeur et ni la résolution pour permettre la détection individuelle des amas par effet SZ justement. Il a par contre été possible de construire un catalogue d'amas à partir des données *Planck*. J'y reviendrais plus en détail au sein de cette section et au début du chapitre 5.

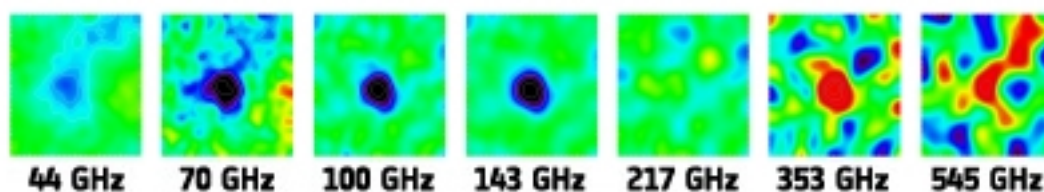


FIGURE 3.2 – Emission tSZ en provenance de l'amas de galaxies Abell 2319 sur des mini-carte *Planck* de 2 degrés de côté. Le signal est négatif pour les fréquences inférieures à 217 GHz et positif au delà. Les carte *Planck* sont parfaitement adaptées à la détection de l'effet tSZ. Crédit : ESA

Lancé en mai 2009 (TAUBER et al., 2010), conjointement avec *Herschel*, le satellite *Planck* rejoint le point de Lagrange L2 Terre/Soleil cette même année. Ce point garantit au satellite une vitesse angulaire comparable à celle de la Terre autour du Soleil et, à la différence du point L1, est moins soumis au rayonnement solaire. C'est ce qui le rend très prisé pour les observations du cosmos. Le point L2 est cependant un point d'équilibre instable. Pour éviter de dériver, le satellite suit une orbite de type courbe de Lissajous autour du point de Lagrange. Cette orbite est elle-même instable et le satellite doit corriger sa trajectoire tous les 6 mois. Les figures 3.3 présentent le point L2 et aussi l'orbite type Lissajous décrite par le satellite autour de ce point.

Le satellite est équipé d'un télescope qui observe le ciel. Ce télescope tourne, pour simplifier, autour de l'axe satellite-Soleil avec une vitesse de 1 tour/minute tandis que le satellite lui-même se déplace de 1° /jour ; ce que transcrit visuellement la figure 3.4 (DUPAC et al., 2005).

Planck a pu faire 4 relevés complets du ciel¹ avant la fin de la mission que l'on peut acter à l'envoi de la dernière commande au satellite en octobre 2013.

C'est aussi en 2013 que *Planck* publie les paramètres cosmologiques dérivés de l'observation du FDC en utilisant deux relevés du ciels. C'est une confirmation de la robustesse du modèle Λ CDM. Le premier catalogue d'amas est aussi publié cette année là, avec deux relevés du ciel aussi (PLANCK COLLABORATION et al., 2014c). Il faut attendre 2015 pour que *Planck* présente la cosmologie FDC avec quatre relevés du ciel (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) et le nouveau catalogue d'amas réalisé lui aussi avec 4 relevés (PLANCK COLLABORATION et al., 2015k).

Le catalogue d'amas *Planck* permet aussi de contraindre la cosmologie via la fonction de masse (PLANCK COLLABORATION et al., 2014a ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015i). La cosmologie amas est en tension à 3σ avec la cosmologie FDC pour ce qui est du paramètre σ_8 (en supposant pour les amas un biais de 0.8 entre la masse estimée par les X et la vraie masse).

3.2.2 Le satellite *Planck*

De manière schématique, il est possible de décomposer le satellite *Planck* en 3 parties : le télescope, les cornets et les détecteurs. Ces détecteurs appartiennent en fait à deux instruments distincts : le Low Frequency Instrument (LFI) qui observe le ciel à 30 GHz, 44 GHz et 70 GHz et le High Frequency Instrument (HFI) qui lui observe à 100 GHz, 143

1. La mission *Planck* a en fait réalisé un peu plus que 4 relevés complets du ciel.

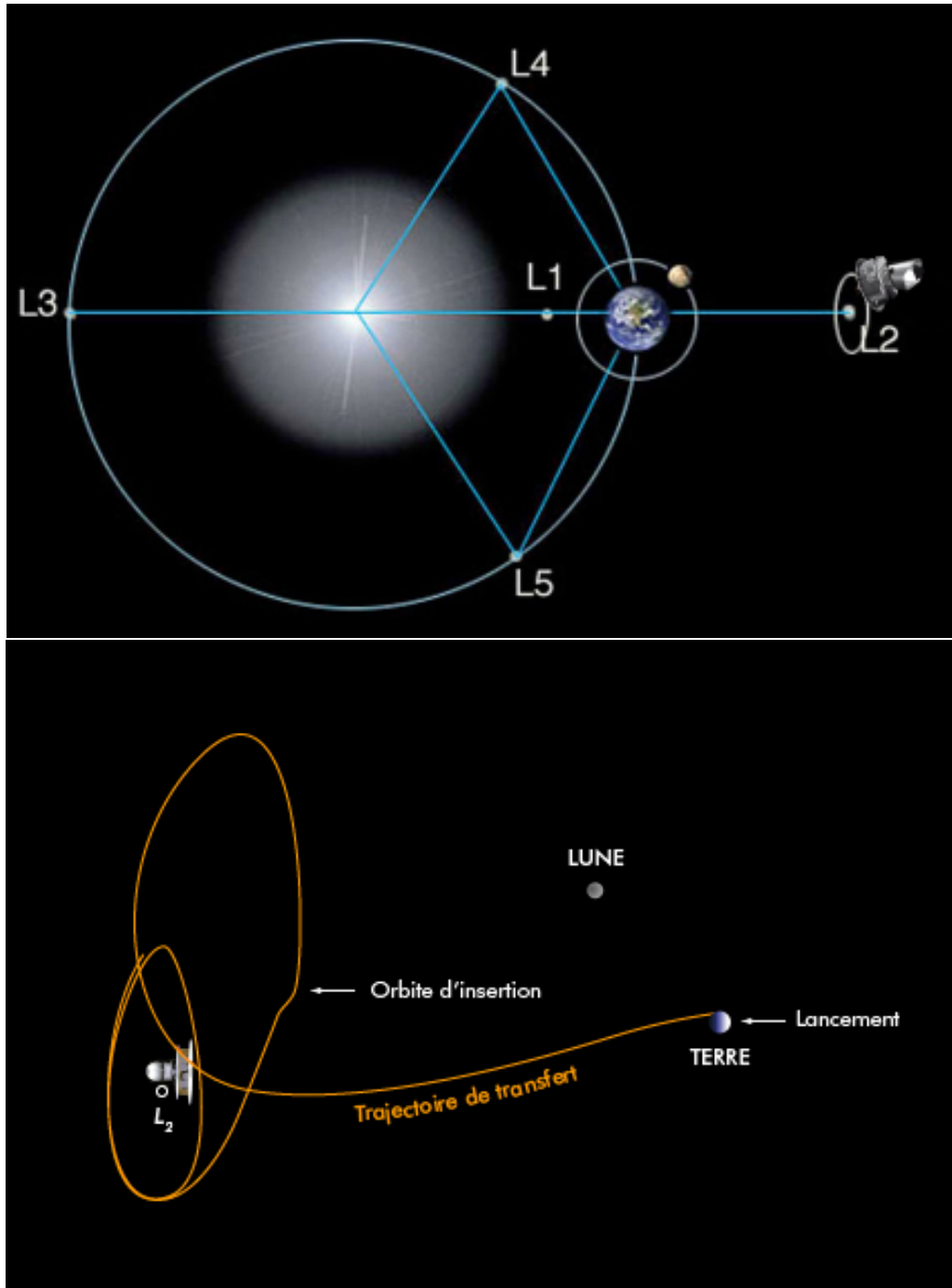


FIGURE 3.3 – En haut : les différents points de Lagrange du système Terre/Soleil. Le satellite Planck se trouve au niveau de L2. En bas : la trajectoire de Planck vers le point L2 puis son orbite type Lissajous. (Crédit ESA)

GHz, 217 GHz, 353 GHz, 545 GHz et 857 GHz. Ce choix de fréquence n'est pas anodin pour HFI ; il est idéal pour la détection de l'effet SZ qui est faiblement négatif à 100 GHz, minimal à 143 GHz, nul à 217 GHz et maximal à 353 GHz.

Je vais présenter ici brièvement le fonctionnement du satellite. Un faisceau de photons micro-ondes arrive sur le miroir primaire du télescope puis se dirige sur le miroir secondaire et enfin sur le plan focal comme le résume la figure 3.5 (TAUBER et al., 2010). Les miroirs *Planck* sont analogues à des fentes de diffraction pour les ondes micro-ondes. Les images ainsi collectées sur le plan focal apparaissent lissées à cause de la diffraction. Le

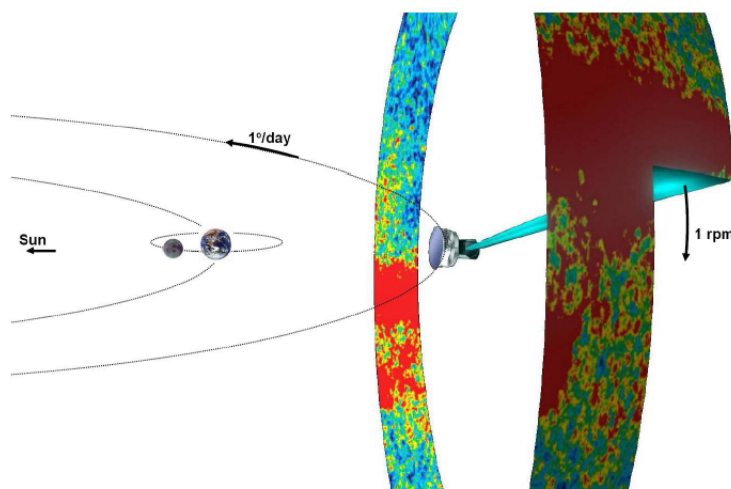


FIGURE 3.4 – Le satellite *Planck* observe le ciel avec une vitesse d'un tour/minute tout en se déplaçant d'un degré par jour. (Crédit ESA)

diamètre du lobe central dépend notamment de la fréquence de l'onde mais aussi de la taille des miroirs, par exemple le miroir secondaire est un carré d'un mètre de côté.

Le plan focal est composé d'un ensemble de cornets, cornets qui ont pour mission de collecter la lumière qui leur arrive de face et d'empêcher les photons venant d'autres directions de traverser. Les cornets permettent aussi de retirer les lobes secondaires dus à la diffraction mais pas le lobe central qu'il faudra prendre en compte pour le reste de l'étude.

A la sortie du cornet se trouve un voire deux détecteurs sensibles ou non à la polarisation de la lumière. Par exemple sur les 52 détecteurs de HFI, 20 sont sensibles au flux total tandis que les autres sont aussi sensibles à la polarisation.

Ces détecteurs sont des radiomètres (LFI) ou des bolomètres (HFI) très fortement refroidis (4K pour les radiomètres LFI, 0.1K pour les bolomètres HFI). Les bolomètres transforment l'énergie apportée par les photons en énergie thermique sous forme d'une hausse de leur température. Un thermomètre convertit ensuite cette hausse en courant électrique. Les détecteurs sont aussi couplés à un filtre qui améliore la réponse des détecteurs à la fréquence de la lumière incidente. Idéalement, on souhaiterait un Dirac au niveau d'une des fréquences parmi celles déjà évoquées au début de cette section. En pratique, la réponse est étalée avec cependant un maximum au niveau de la fréquence souhaitée comme l'indique la figure 3.6 pour l'instrument HFI. Il faudra prendre en compte cette étalement par la suite pour le calcul des fréquences efficaces ν_{eff} indispensable pour utiliser les matched filters.

3.2.3 Les cartes *Planck* non polarisées

J'utilise dans cette étude les cartes de flux total *Planck* réalisées avec l'ensemble des relevés du ciel. A titre indicatif, la collaboration *Planck* a aussi abouti à la construction de cartes du ciel polarisées qui ne sont pas employées ici.

Il y a 9 cartes du ciel micro-onde, une pour chaque fréquence (PLANCK COLLABORATION et al., 2015e ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015f). Je restreins mon analyse à 7 cartes du ciel aux fréquences suivantes : 70 GHz (la seule carte obtenue par LFI que j'utilise dans mon étude), 100 GHz, 143 GHz, 217 GHz, 343 GHz, 545 GHz et 857 GHz.

Les cartes *Planck* de tout le ciel sont divisées en pixels en utilisant le découpage HEAL-

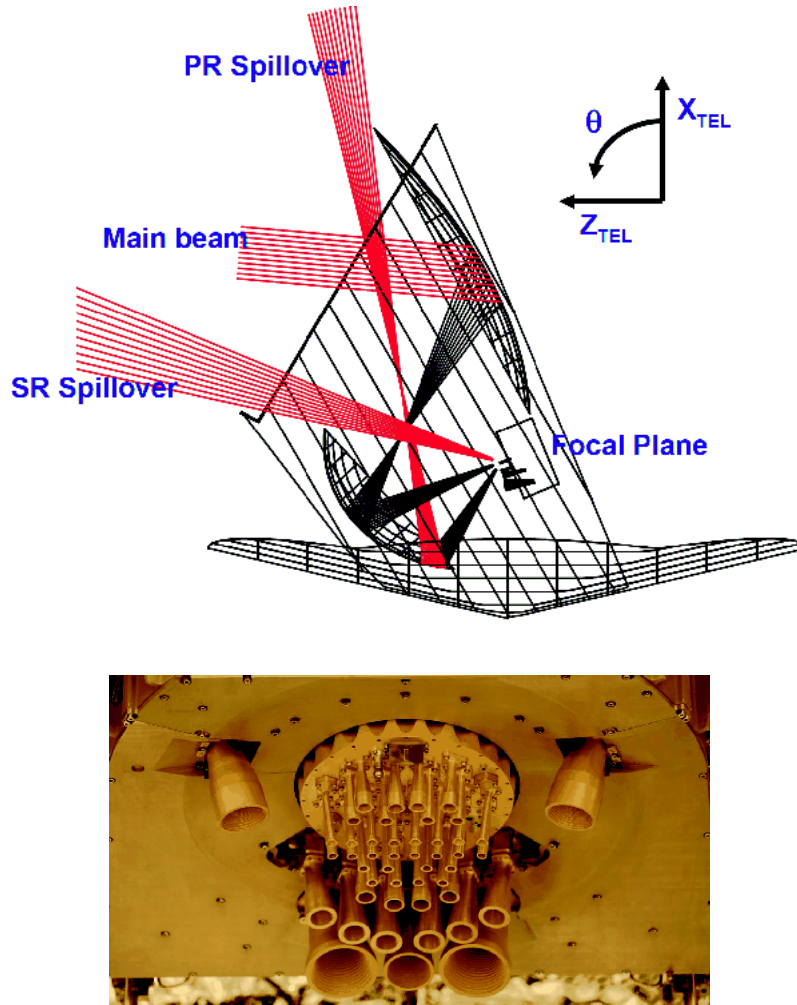


FIGURE 3.5 – En haut : le télescope de *Planck*, la lumière (main beam) arrive sur le miroir primaire puis sur le miroir secondaire pour rentrer dans un cornet sur le plan focal. La lumière venant d'autres directions (PR Spillover, SR Spillover) peut être collectée par le satellite mais se retrouve bloquée par les cornets et ne peut atteindre les détecteurs. En bas : le plan focal avec les cornets HFI et LFI. (Crédit Tauber et al 2010)

Pix (GÓRSKI et al., 2005). Ce découpage est réalisé de manière itérative par division de la sphère céleste en parties de plus en plus petites comme l'indique la figure 3.7 jusqu'à atteindre des pixels de côté de 0.03° soit 1.7 arcmin. Ce choix de taille n'est pas anodin. Le plus petit lobe *Planck* a une largeur à mi-hauteur de 4.2 arcmin ce qui équivaut à un pixel de côté de $\sqrt{\left(2\pi \left(\frac{4.2}{2}\right)^2\right)} = 3.63$ arcmin. D'après le théorème de Nyquist-Shannon, pour ne pas perdre d'information, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois plus grande que la plus grande fréquence du signal. Cette fréquence correspond ici à l'inverse de la taille du plus petit pixel possible, donné par le lobe. L'inverse de la fréquence d'échantillonnage donne ici la taille maximale d'un pixel soit $\frac{3.63}{2} = 1.8$ arcmin.

Pour travailler dans l'espace de Fourier et non en harmonique sphérique sur tout le ciel, mais aussi pour faciliter le calcul du bruit local, les cartes du ciel sont divisées en 504 mini-cartes tangentes de $10^\circ \times 10^\circ$ contenant 350×350 pixels. Chaque mini-carte est ensuite ré-échantillonnée pour que les côtés des pixels soient parallèles ou orthogonaux aux bords de la mini-carte.

Notons que la résolution angulaire de *Planck* est relativement faible si on la compare avec les expériences SZ au sol telles *SPT* et *ACT*. En effet le lobe *Planck* a une largeur à mi-

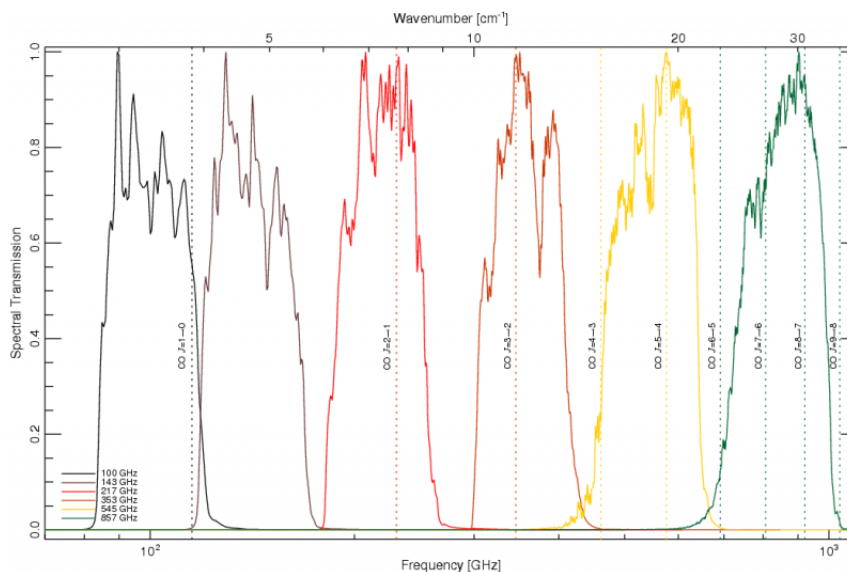


FIGURE 3.6 – Transmission spectrale pour les différents détecteurs HFI en fonction de la fréquence. La réponse est étalée sur une bande en fréquence de l'onde de $\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{1}{3}$. (Crédit ESA)

Fréquence (GHz)	70	100	143	217	343	545	857
FWHM (arcmin)	13.2	9.7	7.2	4.9	4.9	4.7	4.2

TABLE 3.1 – La largeur à mi-hauteur du lobe de *Planck* aux différentes fréquences étudiées.

hauteur (full width half maximum ou FWHM) de 7.2 arcmin à 143 GHz contre 1.38 arcmin à 148 GHz pour *ACT* (HASSELFIELD et al., 2013) et 1.1 arcmin à 150 GHz pour *SPT* (PADIN et al., 2008). *Planck* a cependant l'avantage de couvrir tout le ciel.

Les structures que je vais inspecter dans cette étude sont toutes plus petites que le lobe de *Planck* et peuvent donc être vues comme des sources ponctuelles. Je reviendrais sur ce point dans la dernière section de ce chapitre.

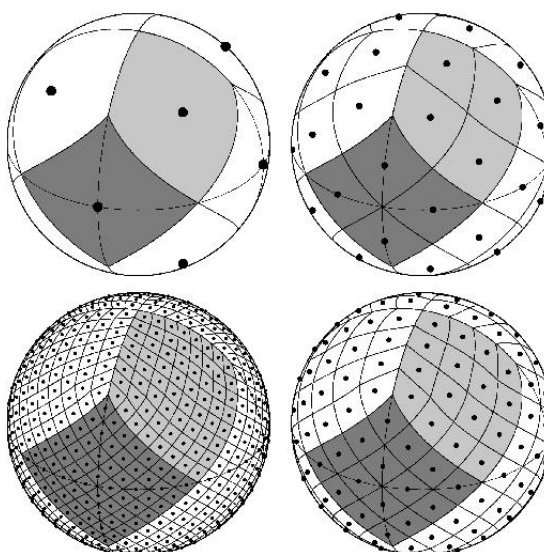


FIGURE 3.7 – Division de la sphère (le ciel) en parties de plus en plus petites avec la méthode HEALPix. (Crédit <http://healpix.sourceforge.net>)

Intensité en température relative

Les cartes *Planck* sont des cartes de températures relatives $\frac{\Delta T}{T_{FDC}}$ (PLANCK COLLABORATION et al., 2015e ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015f). En effet, si l'on part de la dérivée d'une intensité de corps noir par rapport à sa température, on obtient :

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial T} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \frac{1}{T} \quad (3.6)$$

avec $x = h\nu/k_b T$.

Ce qui pour une petite variation de température et pour le corps noir du FDC revient à écrire que

$$\Delta I_\nu \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \left(\frac{\Delta T}{T_{FDC}} \right). \quad (3.7)$$

Ecrire les cartes d'intensité en $\frac{\Delta T}{T_{FDC}}$ est tout à fait adapté pour cartographier les anisotropies du FDC car ce dernier ne varie pas de fréquence à fréquence dans cette unité. Il est cependant possible de convertir toute variation d'intensité ΔI_ν partant d'un corps noir, par exemple l'effet tSZ, en variation relative de température $\frac{\Delta T}{T_{FDC}}$. Notons que le facteur de conversion $g(\nu) = \frac{\Delta I_\nu}{\left(\frac{\Delta T}{T_{FDC}}\right)} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}$ dépend de la fréquence. ΔI_ν est en $\text{W.Hz}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ soit en Jansky/sr ou $\text{Jy}.\text{sr}^{-1}$ ($1\text{Jy} = 10^{-26}\text{W.Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$).

Étalonnage

J'en profite pour mentionner l'étalonnage des cartes *Planck*. La carte LFI à 70 GHz et les cartes HFI de 100 GHz à 353 GHz sont étalonnées avec le dipôle du FDC (PLANCK COLLABORATION et al., 2015c ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015f). Ce dipôle est bien connu et fut déjà mesuré par *COBE*. Il n'est pas intrinsèque et est dû au mouvement du système solaire (il faut aussi prendre en compte le mouvement du satellite) par rapport au FDC, mouvement qui a une vitesse de 370 km/s. Dans cette étude, je considère l'erreur sur l'étalonnage comme négligeable pour ces cartes.

Il n'en va pas de même pour les cartes HFI à 545 GHz et à 857 GHz. Elles sont étalonnées à partir des densités de flux en provenance de Neptune et d'Uranus en suivant le modèle d'émission atmosphérique donné par MORENO, 2010 (PLANCK COLLABORATION et al., 2015f). L'erreur relative sur l'intensité dans ces cartes est de $\pm 5\%$. L'impact de cette systématique sera étudié dans le chapitre suivant dans la section 4.5.4.

Composition des cartes *Planck*

Il convient ici de faire une petite revue des différentes composantes présentes dans les cartes *Planck* (PATANCHON, 2003 ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015g).

1. Comme je l'ai mentionné, précédemment, Le FDC est l'une des composantes majeures des cartes *Planck* (PLANCK COLLABORATION et al., 2015b). Pour autant, *Planck* ne mesure pas le corps noir du FDC, corps noir à la température $T_{FDC} = 2.7255 \pm 0.0006\text{K}$ (FIXSEN, 2009). *Planck* utilise seulement son dipôle pour l'étalonnage. Ce que mesure *Planck*, ce sont les variations angulaires de température du corps noir. Ces variations, très faibles ($\Delta T/T_{FDC} \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ soit $\Delta T \sim 100\mu\text{K}$), sont les signatures des anisotropies du FDC. Il est possible comme je l'ai évoqué dans le chapitre précédent, de construire le spectre de puissance des anisotropies du FDC et de contraindre les paramètres cosmologiques. Par la suite, je range ces anisotropies dans les sources de bruit sur les mini-cartes.

2. L'émission thermique des poussières galactiques est la composante majeure des cartes *Planck* à partir de 100 GHz. Cette émission de poussière pourraient provenir en partie de grains qui ont été chauffés par les étoiles alentours. Son spectre est modélisé par un corps gris c'est-à-dire le produit d'une loi de puissance avec une loi de corps noir soit $I_{dust}(\nu) \propto \nu^{\beta_s} \cdot B_\nu(T_s)$. Le corps gris a deux paramètres, l'exposant de la loi de puissance β_s et la température du corps noir T_s qui ont respectivement les valeurs suivante pour la poussière galactique : 1.55 ± 0.1 (sans unité) et 23 ± 3 K. La poussière galactique est une autre source de bruit pour la détection de l'effet tSZ. Elle plus structurée, bien que diffuse, que les anisotropies du FDC qui sont distribuées aléatoirement. Cela la rend plus difficile à supprimer avec un matched filter. C'est pourquoi je vais par la suite éliminer les traceurs trop proches du plan galactique, où la poussière domine, en utilisant un masque approprié, le masque qui conserve 65% du ciel le plus propre à 857 GHz.
3. La rotation des grains de poussières avec un moment dipolaire non nul est source d'une autre émission en provenance de la galaxies. Cette émission est surtout importante à basse fréquence comme l'indique la figure 3.8 (cette émission porte le nom de "spinning dust").
4. Autre émission importante à basse fréquence ("free-free"), le rayonnement de freinage est provoqué par la collision des électrons avec des ions dans le milieu intergalactique. La réponse spectrale de cette émission est quasiment une loi de puissance, soit $I_{dust}(\nu) \propto \nu^\alpha$, pour des fréquences supérieures à 1 GHz avec un exposant $\alpha \simeq -0.15$.
5. Les électrons en rotation le long des lignes du champ magnétique galactique émettent un rayonnement synchrotron. Le spectre de ce rayonnement est aussi proche d'une loi de puissance pour des fréquences supérieures à 20 GHz avec cette fois l'exposant suivant $\alpha \simeq -1$.
6. Des lignes d'émission du CO de notre galaxie ont été détectées à 100 GHz, 217 GHz et 353 GHz apportant une contamination supplémentaire.
7. Il existe d'autres sources, cette fois ponctuelles, d'émission galactique (et aussi localisées dans les nuages de Magellan) : les nuages moléculaires dits froids (PLANCK COLLABORATION et al., 2015l). Ces nuages pourraient être une contamination supplémentaire. Ils sont cependant localisés dans le plan galactique, zone que je ne vais pas explorer.
8. D'autres sources ponctuelles ont été détectées par *Planck* et forment le Planck Catalogue of Compact Sources (PLANCK COLLABORATION et al., 2015j). Je néglige la contamination qu'elles pourraient engendrer.
9. Le composant qui nous intéresse et qui est rattachée à des structures compactes sans être forcément ponctuelles, c'est l'émission de gaz chaud, c'est-à-dire l'effet tSZ. La détection individuelle de structure via cet effet est à l'origine du catalogue d'amas *Planck*.
10. Pour terminer cette liste, je vais évoquer le bruit instrumental qui provient à la fois du bolomètre et de l'électronique. On peut le modéliser par une variable aléatoire. Par la suite, ce bruit et le bruit astrophysique seront traités ensemble.

3.3 Les traceurs, les quasars de BOSS

J'ai peut-être des sources potentielles d'émission tSZ dans les cartes *Planck*. Il me faut un traceur indépendant pour savoir où regarder sur ces cartes et extraire un flux moyen.

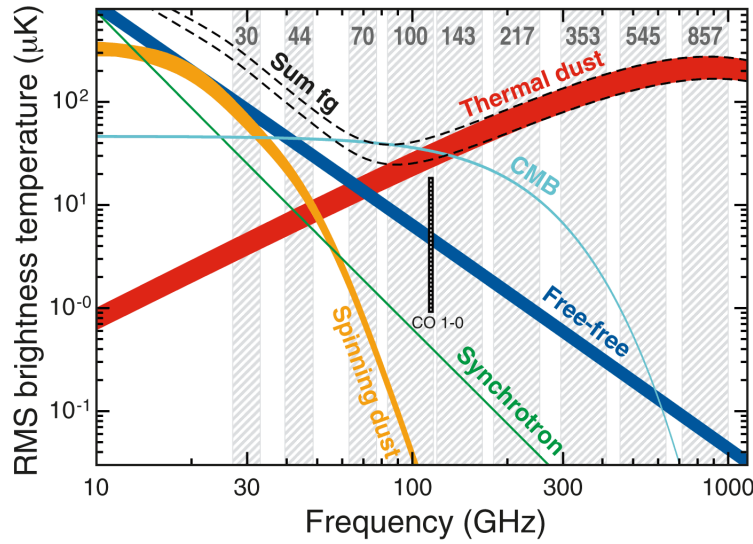


FIGURE 3.8 – Intensité des différentes composantes en ΔT dans les cartes *Planck* en fonction de la fréquence. Le FDC (CMB) est le composant dominant pour une fenêtre allant de 40 GHz à 100 GHz (Crédit NASA).

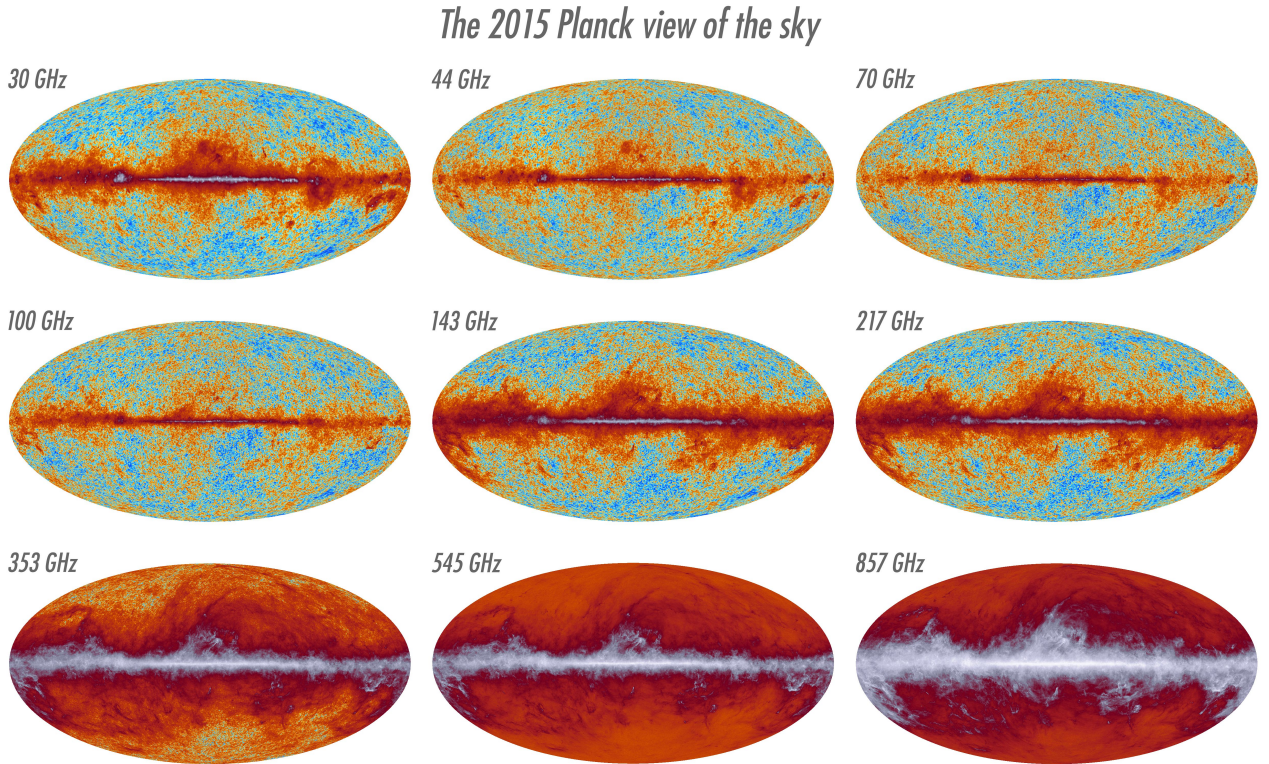


FIGURE 3.9 – Les cartes du ciel *Planck* aux différentes fréquences en $\frac{\Delta T}{T_{CMB}}$. L'émission de poussière galactique, visible sur toutes les cartes au niveau du plan galactique, domine à haute-fréquence. (Crédit ESA)

Comme je l'ai indiqué dans la section d'introduction 3.1.2, je prends des quasars pour remplir ce rôle. J'utilise ici le catalogue de quasars *SDSS-DR12* (ALAM et al., 2015) qui est à la fois profond (objets détectés jusqu'à redshift 6) et vaste puisqu'il couvre 10 000 deg² (le ciel s'étendant sur 41 253 deg²).

3.3.1 Le programme SDSS

Le Sloan Digital Sky Survey (SDSS) est un programme d'observation de sources optiques qui a débuté en 2000. Depuis le début, les observations sont effectuées au télescope optique de 2.5 mètres de l'Apache Point Observatory au Nouveau-Mexique. L'observation se décompose en fait en deux phases distinctes :

- Une première phase d'imagerie où une zone complète du ciel est observée dans 5 bandes optiques à l'aide de caméras CCD (PIER et al., 2003). Des objets dignes d'intérêts (galaxies, quasars ou étoiles) détectés dans ces images sont sélectionnés pour l'étape suivante.
- Une deuxième phase de spectrographie où sont relevés les spectres des objets sélectionnés en pointant au niveau de leur position dans le ciel. Le spectre permet l'obtention d'un redshift beaucoup plus précis de l'objet et de vérifier sa nature. Notons aussi que c'est dans le spectre des quasars que l'on détecte les forêts Lyman- α qui ont notamment permis la détection des oscillations acoustiques des baryons ou BAO à grand redshift ($z > 2$) (PÂRIS et al., 2012 ; DELUBAC et al., 2015 ; BUSCA et al., 2013).

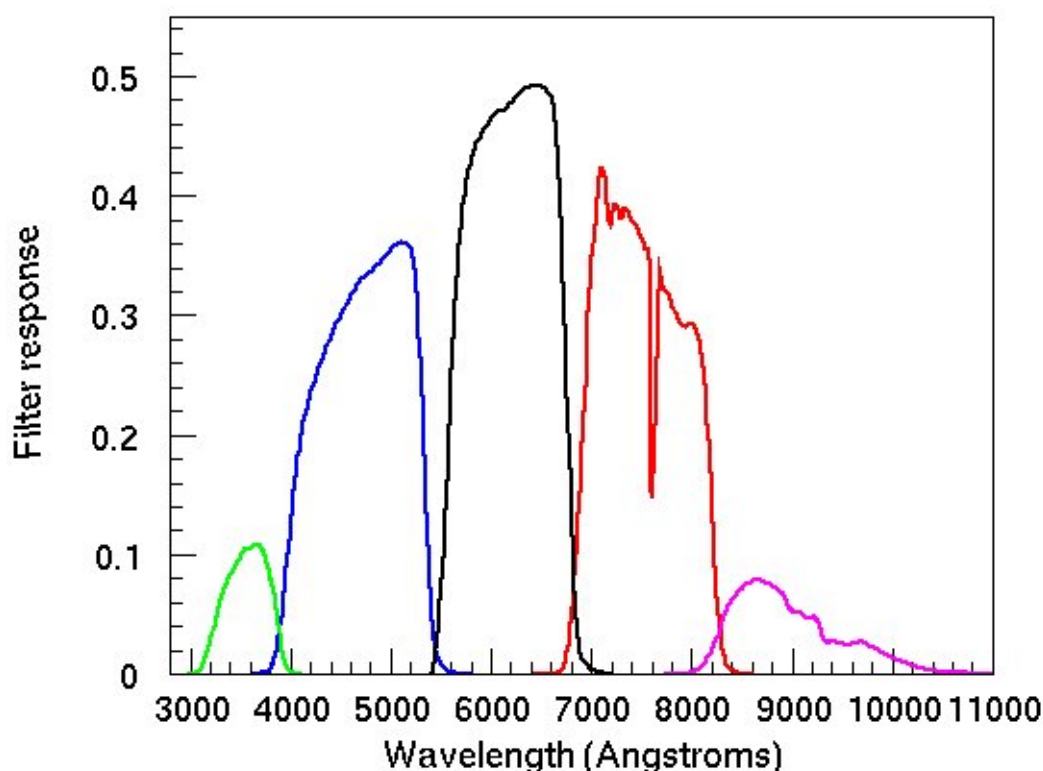


FIGURE 3.10 – Réponse des 5 filtres de la caméra CDD SDSS. Les 5 bandes optiques permettent une première sélection des objets et l'estimation d'un redshift photométrique. (Crédit SDSS)

La chronologie de SDSS peut se découper en trois grosses "campagnes". La première, SDSS-I, qui se déroule de 2000 à 2005, couvre 8000 deg² pour l'imagerie. La deuxième

campagnes va de 2005 à 2008 et a abouti entre autres à la construction d'un catalogue de quasars essentiellement à redshift $z \sim 2$ avec la Data Release 7, *SDSS-DR7* (ABAZAJIAN et al., 2009). La troisième campagne démarre en 2008. C'est durant cette campagne que le nouveau spectrographe, *BOSS* (pour Baryon Oscillation Spectroscopic Survey) entame sa mission. L'année 2015 est marquée par la publication des données DR12 (ALAM et al., 2015) qui couvrent $14\,555 \text{ deg}^2$ pour ce qui est de l'imagerie comme indiquée sur la figure 3.11. Le relevé des spectres des différents objets est effectué sur une surface plus réduite de $10\,000 \text{ deg}^2$. J'utilise le catalogue de quasars de DR12 qui contient près de 300 000 objets. Les redshifts des quasars sont obtenus à partir de la spectrographie *BOSS*. Il existe aussi un catalogue de 1.5 millions de galaxies proches ($z < 0.7$) que je n'utilise pas ici. Le catalogue de quasars a été construit pour permettre la détection de nombreuses forêts Lyman- α . Il est donc majoritairement constitué d'objets à haut-redshift ($z > 2.15$) a contrario par exemple du catalogue DR7 non utilisé dans mon étude.

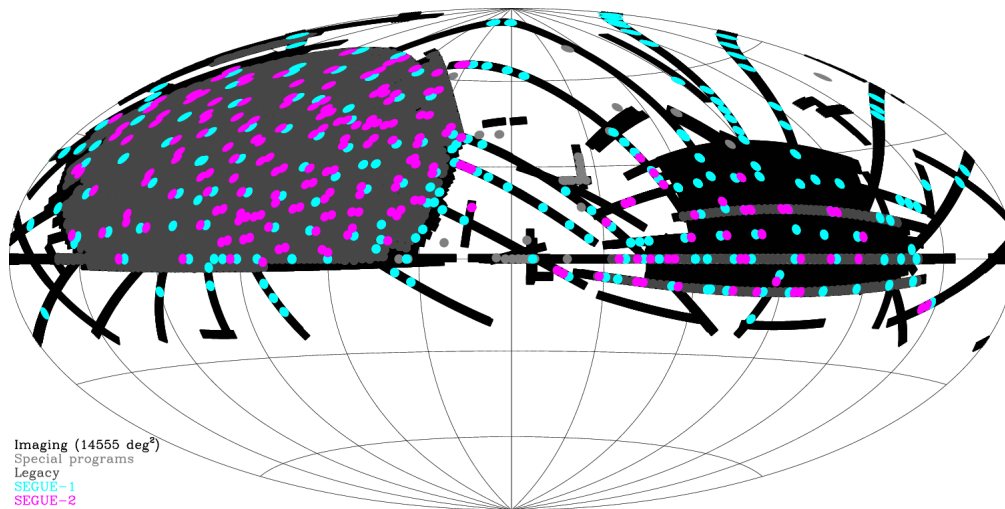


FIGURE 3.11 – La zone grisée correspond à la zone couverte par l'imagerie de DR12. (Crédit SDSS)

L'expérience *eBOSS* (Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey) qui a débutée en 2014 est la suite directe de DR12. Elle devrait aboutir à la construction d'un catalogue de plus de 700 000 galaxies lointaines (avec $0.6 < z < 0.8$) et un autre de plus de 700 000 quasars (avec $0.9 < z < 3.5$).

L'expérience *DESI* (Dark Energy Spectroscopic Instrument) va ensuite succéder à *SDSS* et utiliser un nouveau spectrographe. Les observations devraient débuter en 2018 et conduire à la construction d'un catalogue de galaxies et de quasars encore plus profond et sur une zone du ciel plus vaste que maintenant. Ce type de relevé permettra une mesure encore plus précise de l'échelle BAO à différents redshifts.

3.3.2 Le spectrographe BOSS

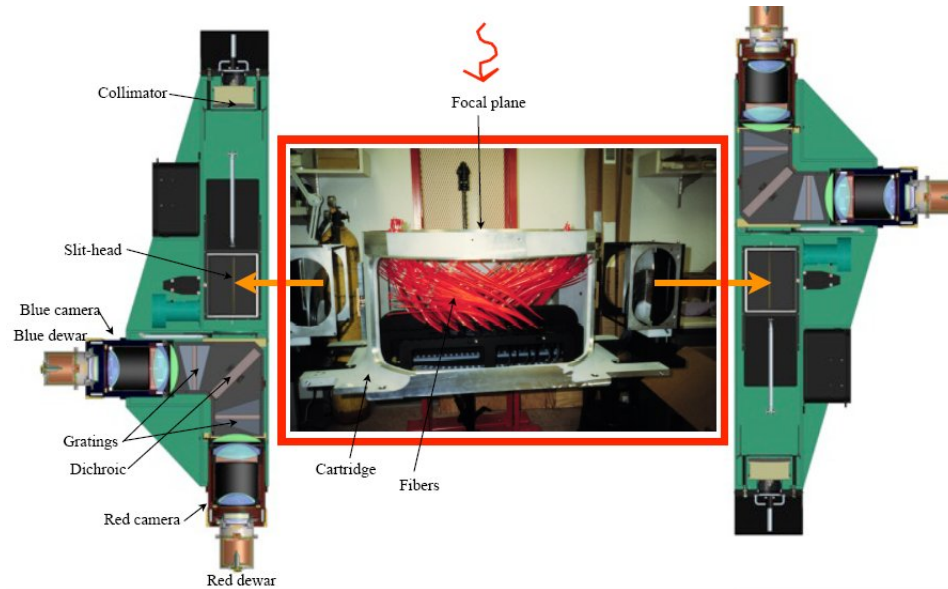
BOSS est le spectrographe de la mission *SDSS* dédié à la détection du spectre des galaxies ou des quasars préalablement sélectionnés par l'imagerie à 5 bandes (SMEE et al., 2013). Le précédent spectrographe *SDSS* avait une résolution plus faible et couvrait une bande de longueurs d'onde plus petite comme l'indique le tableau 3.2. A titre indicatif, l'expérience *SDSS* emploie deux autres spectrographes, *APOGEE* et *MARVELS* tous deux principalement conçus pour mesurer le spectre des étoiles de la Voie lactée.

Les différents objets, galaxies ou quasars, sont donc sélectionnés à partir des données photométriques, notamment dans l'espace des couleurs. Pour chaque portion du ciel ins-

Spectrographe	Résolution	λ min	λ max	Trous/plaque	Réso. angulaire
<i>SDSS-I/II</i>	1800 à 2000 Å	3800 Å	9200 Å	640	3 arcsec
<i>BOSS</i>	1400 à 2600 Å	3650 Å	10400 Å	1000	2 arcsec

TABLE 3.2 – Les propriétés essentielles du spectrographe *BOSS* et de son prédécesseur.

pectée par le spectrographe est créée une plaque percée au niveau des positions des objets sectionnés. Une plaque type *BOSS* peut contenir 1000 trous. Ces trous ont un diamètre de $120 \mu\text{m}$, ce qui correspond à un diamètre angulaire de 2 arcsec sur la voute céleste. C'est une bonne estimation de la résolution de l'appareil. La plaque couvre elle-même un disque de 2.98 deg de diamètre. Chaque trou est relié au spectrographe par une fibre. Ainsi le spectrographe peut mesurer simultanément plusieurs spectres, ce qui apporte un gain de temps énorme. La figure 3.12 présente une plaque *BOSS* au sein du spectrographe. Notons que le spectrographe lui-même dispose de deux caméras CDD, rouge et bleue, sur lesquelles est étalée (grâce à un filtre dichroïque) la lumière conduite par les fibres.

FIGURE 3.12 – Le spectrographe *BOSS*. La plaque est placée au niveau du plan focal du télescope. La lumière arrive ensuite au niveau des deux caméras (bleue et rouge) après avoir voyagé dans les fibres. (Crédit *SDSS*)

Après le relevé du spectre, une inspection visuelle de celui-ci est nécessaire pour confirmer la mesure du redshift et aussi la nature (galaxie, quasar ou étoile) même de l'objet et qu'il n'y ait pas d'ambiguïté. Le catalogue que j'utilise par la suite n'est constitué que de quasars avec un redshift confirmé par l'inspection visuelle.

3.3.3 Sélection des quasars et construction du catalogue

La sélection photométrique

Le catalogue de quasars de DR12 contient 297 301 objets identifiés formellement comme quasars avec un redshift fiable. Ces quasars ont été sélectionnés pour permettre la détection de forêt Lyman- α dans leur spectre. Il s'agit normalement d'objets à haut redshift ($z > 2.15$). Cependant, la sélection de ces quasars est effectuée à partir de leur magnitude dans les différentes bandes de couleur des données photométriques. Et il y a dégénérescence entre ces magnitudes et le redshift (A. J. Ross et al., 2012). De manière

plus précise, cette sélection s'effectue en prenant en compte l'impact du décalage (redshift minimal de 2.15) de la raie Lyman- α sur les magnitudes dans les différentes bandes. Il suffit qu'une raie d'émission d'un objet à plus bas-redshift provoque le même effet dans ces bandes-là pour que cet objet soit sélectionné.

Par exemple, la raie d'émission du Mg-II à 2800 Å pour les quasars à $z \sim 0.8$ est à la même longueur d'onde que la raie Lyman- α des quasars à $z \sim 3.1$. Dans les données photométriques, les deux populations de quasars se confondent. Donc sélectionner les objets à haut redshift revient à sectionner aussi des objets à plus bas redshift.

Autre exemple, la raie du C-IV à 1549 Å pour les quasars à $z \sim 1.6$ est aussi à la même longueur d'onde que la raie Lyman- α des quasars à $z \sim 2.3$.

Le catalogue

Outre leurs coordonnées angulaires dans le ciel et leur redshift photométrique, on trouve aussi leur magnitude relative dans la bande g , leur magnitude absolue dans la bande i ainsi que leur possible contrepartie dans *FIRST* (Faint Images of the Radio Sky at Twenty-Centimeters), catalogue de sources radio détectées à 1.4 GHz avec un flux supérieur à 1 mJy sauf dans quelques régions du ciel (BECKER et al., 1994; BECKER et al., 1995). Les autres informations sur les quasars ne seront pas utilisées dans la suite de mon étude. Une liste détaillée des différentes entrées du catalogue de quasars DR10 est exposée dans le PÂRIS et al., 2012. Le catalogue DR12 a lui aussi les mêmes entrées.

La distribution en redshift (se conférer à la figure 3.13) de ces quasars présente deux maxima, l'un souhaité à $z \sim 2.3$ et l'autre à $z \sim 0.8$ qui est un effet de la sélection photométrique comme évoqué plus haut. L'erreur relative médiane sur les redshift du catalogue de quasars de DR12 est de 0.02%. Je la considère comme négligeable dans la suite de mon étude (pas de systématique sur le redshift).

Sur ces 297 301 quasars, j'en retire 5880 qui se trouvent hors du masque *Planck* à 65%. Ce qui veut dire que ces quasars sont proches du plan galactiques et donc dans un environnement fortement contaminé par l'émission de poussière de la Voie lactée. Je retire ensuite 256 autres quasars qui ont un redshift trop petit ($z < 0.1$) et qui seraient résolus par *Planck*. Je travaillerai en effet par la suite avec des sources quasi ponctuelles. Je retire aussi les quasars qui ont un redshift supérieur à 5 et qui sont trop peu nombreux. Pour finir, j'enlève ceux qui ont une mauvaise estimation de leur magnitude en bande g ($g < 0$). Il me reste donc 291 165 quasars qui vont me servir à sonder les cartes *Planck*.

Outre ce catalogue de 291 165 quasars, que je vais appeler par la suite catalogue total, je vais aussi travailler sur des sous-échantillons de ce catalogue. Je vais notamment ranger les quasars en intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$, mais aussi séparer les quasars qui ont une contrepartie radio dans *FIRST* de ceux qui n'en n'ont pas. La présence d'une contrepartie *FIRST* est un indice d'une possible émission synchrotron à basse fréquence qui pourrait contaminer un signal tSZ. Ces différents sous-échantillons ou sous-catalogues sont présentés dans le tableau 3.3.

Je procéderai aussi à un autre découpage, cette fois en divisant les quasars en 6 intervalles de magnitude absolue en bande i de largeur 2 en partant de -30 pour aller à -18.

3.4 Spectre d'émission des structures BOSS dans *Planck*

Je viens d'introduire dans les sections précédentes ma source potentielle de tSZ, les cartes *Planck*, et mes traceurs, les quasars BOSS qui m'indiquent où regarder. Je présente ici la première analyse qui combine ces données, c'est-à-dire la détection du signal *Planck* au niveau des quasars BOSS. Vu qu'en l'état je ne sais rien des objets détectés dans *Planck*

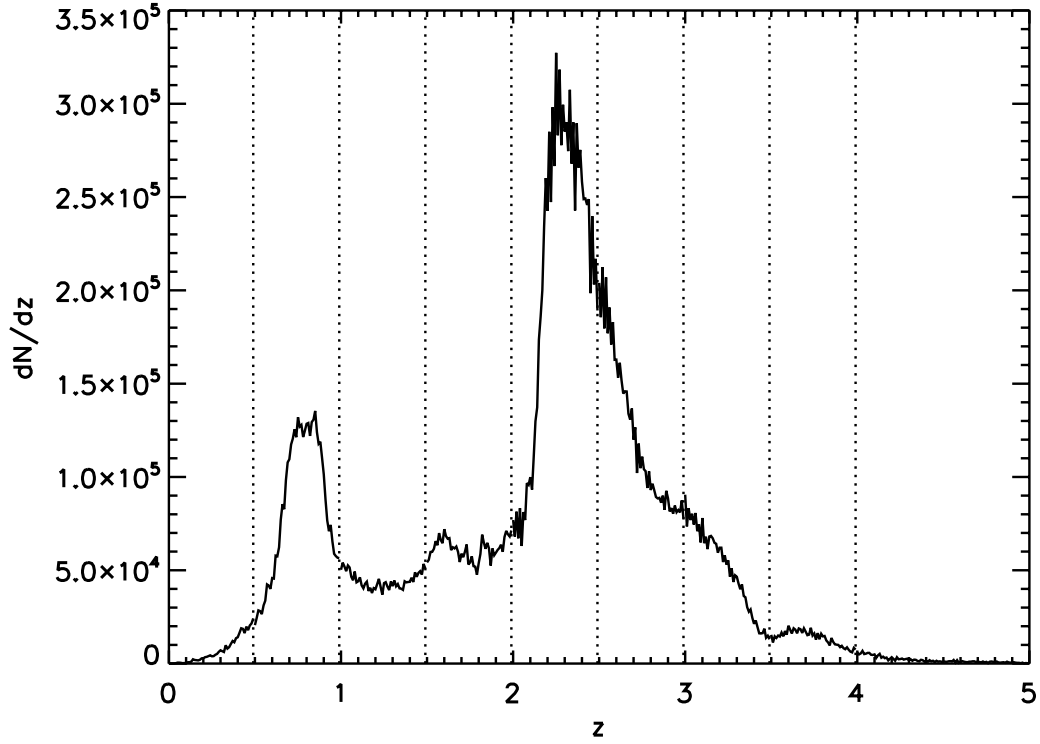


FIGURE 3.13 – Distribution des quasars DR12 selon le redshift. Notons que les lignes pointillées délimitent des intervalles de redshift de même largeur, $\Delta z = 0.5$, à l'exception du dernier plus large. Ces intervalles seront utilisés pour déterminer l'évolution du flux et des propriétés des structures en fonction du redshift.

à la position des quasars, je les nomme sous le vocable générique de structures. Il peut s'agir de quasars seuls. Mais il peut aussi s'agir de structure plus complexe combinant un quasar avec amas de galaxies hôte. Je cherche ici le flux en provenance de ces structures.

3.4.1 Modèle d'émission pour les mini-cartes *Planck*

Comme évoqué dans la section 3.2.3, je découpe les cartes du ciel en 504 mini-cartes tangentes de $10^\circ \times 10^\circ$ contenant 350×350 pixels. Je vais introduire ici un modèle d'émission pour ces mini-cartes *Planck*. Ce modèle doit respecter la statistique du bruit des cartes. Les émissions en provenance des mini-cartes *Planck* peuvent être vues comme une somme de l'émission en provenance d'une structure liée au quasar-traceur et d'un bruit à la fois astrophysique et instrumental. J'avais déjà introduit ce bruit quand j'évoquais les différentes composantes des cartes *Planck*. Je peux donc écrire que :

$$m_\nu(\vec{x}) = S_{\nu,i}(\vec{x}) + n_\nu(\vec{x}) \quad (3.8)$$

avec $\vec{x} = (LON, LAT)$ le vecteur de coordonnées angulaires dans le repère galactique (longitude, latitude), $m_\nu(\vec{x})$ l'intensité donnée par la mini-carte *Planck* à la fréquence ν en $\vec{x}$, $S_{\nu,i}(\vec{x})$ l'intensité venant de la structure i et $n_\nu(\vec{x})$ le bruit total à la fois instrumental et astrophysique.

Le catalogue *BOSS* m'apporte deux informations : la position $\vec{x}_i$ du quasar d'indice i et son redshift z_i qui sont aussi respectivement la position de la structure associée et son redshift.

Redshift	Tous	Radio	Non Radio	Incertains
$0.1 < z < 5$	291 165	9983	252 888	28 294
$0.1 < z < 0.5$	3404	210	2978	216
$0.5 < z < 1$	41 420	1290	35 830	4300
$1 < z < 1.5$	21 853	1134	19 643	1076
$1.5 < z < 2$	30 176	1254	26 750	2172
$2 < z < 2.5$	101 956	2639	88 443	10 874
$2.5 < z < 3$	59 829	2018	51 346	6465
$3 < z < 3.5$	24 131	1006	20 600	2525
$3.5 < z < 4$	6616	330	5709	577
$4 < z < 5$	1780	102	1589	89
$2.5 < z < 4$	90 576	3354	77 655	9567

TABLE 3.3 – Nombre de quasars pour les différents sous-échantillons. Les quasars radio ont une contrepartie dans *FIRST*, les non-radio n'en ont pas et les incertains ne sont pas dans la zone couverte par *FIRST*.

Le profil spatial de la structure

Je vais ensuite faire une deuxième hypothèse, cette fois sur la structure elle-même. J'ai en fait besoin de connaître son profil spatial pour pouvoir extraire son flux du reste de la carte. Je vais supposer que toutes les structures ont le même profil $\tau(\vec{x})$. J'introduis la coordonnée du maximum d'émission de la structure et qui correspond en pratique à la position $\vec{x}_i$ donnée par le quasar i . Le profil est donc centré sur $\vec{x}_i$. Notons aussi que ce profil doit être convolué à le lobe de *Planck* et ce lobe dépend de la fréquence de la carte étudiée. C'est pourquoi, j'écris dorénavant le profil $\tau_\nu(\vec{x})$ pour marquer cette dépendance en fréquence. Ce qui amène à l'expression suivante :

$$S_{\nu,i}(\vec{x}) = f_{\nu,i} \cdot \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (3.9)$$

Le profil que je vais employer dans le reste de l'étude est celui d'un amas de galaxie de masse $M_{500} = 10^{13} M_\odot$ situé à $z = 2$ qui suit le modèle GNFW (Generalized Navarro Frenk White, [NAGAI et al., 2007](#)). Il s'agit en fait d'un profil quasi ponctuel. Le profil sphérique est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{r}{R_s}\right) &= P_0 \cdot \left(\frac{r}{R_s}\right)^{-\gamma} \left(1 + \left(\frac{r}{R_s}\right)^\alpha\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} \\ &= P_0 \cdot \left(c_{500} \cdot \frac{r}{R_{500}}\right)^{-\gamma} \left(1 + \left(c_{500} \cdot \frac{r}{R_{500}}\right)^\alpha\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec r le rayon de la sphère centrée sur l'amas. R_s est le rayon d'échelle. $R_{500} = c_{500} R_s$ correspond au rayon tel que la densité moyenne au sein d'une sphère ce rayon centré sur l'amas à redshift z_i est égale à 500 fois la densité critique de l'univers, soit $\frac{4}{3}\pi R_{500}^3 \cdot 500 \cdot \rho_c(z_i) = M_{500}$ avec $\rho_c(z_i) = \frac{3H(z_i)^2}{8\pi G}$ la densité critique de l'univers au redshift z_i et $H(z_i) = H(0)\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$. Ce qui conduit à l'expression suivante du rayon :

$$R_{500} = \left(\frac{3M_{500}}{4\pi \cdot 500 \cdot \rho_c(z_i)}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.11)$$

On peut considérer que l'amas s'arrête à un rayon de $5R_{500}$. Les paramètres c_{500} (la concentration), α , β et γ sont donnés par l'équation B.2 dans [ARNAUD et al., 2010](#) à partir des

profils de pression des 33 amas du catalogue REXCESS ($z < 0.2$) dans le cas standard auto-similaire. Ces paramètres sont respectivement égaux à 1.156, 1.0620, 5.4807 et 0.3292. P_0 est ici un facteur de normalisation.

Soit, x_c , y_c et z_c les coordonnées Cartésiennes telles que $r^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2$ avec $x_c = l$ la coordonnée de la ligne de visée. Je note R_c le rayon du disque de l'amas sphérique projeté sur le plan orthogonal à la ligne de visée tel que $R_c^2 = y_c^2 + z_c^2$. Je définis l'angle θ tel que $\theta = R_c/D_A(z_i)$. De manière analogue, j'introduis l'angle caractéristique du profil, $\theta_s = R_s/D_A(z_i) = R_{500}/D_A(z_i)/c_{500}$.

Je travaille sur des cartes de ciel en coordonnées angulaires, je dois donc intégrer le profil sphérique le long de la ligne de visée l pour obtenir le profil effectif :

$$\begin{aligned}
 \tau(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{r}{R_s}\right) dl \\
 &= 2 \cdot \int_0^{+\infty} P\left(\frac{r}{R_s}\right) dl \\
 &= 2 \cdot \int_{\sqrt{y_c^2 + z_c^2}}^{+\infty} P\left(\frac{r}{R_s}\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - y_c^2 - z_c^2}} \\
 &= 2 \cdot \int_{R_c}^{+\infty} P\left(\frac{r}{R_s}\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R_c^2}} \\
 &= 2 \cdot \int_{R_c}^{+\infty} P\left(\frac{r}{R_s}\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \theta^2 \cdot D_A(z_i)^2}} \\
 &\simeq 2 \cdot \int_{R_c}^{5R_{500}} P\left(\frac{r}{R_s}\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \theta^2 \cdot D_A(z_i)^2}} \\
 &\simeq 2 \cdot \int_{R_c/D_A(z_i)}^{5R_{500}/D_A(z_i)} P\left(\frac{\theta' D_A(z_i)}{R_s}\right) \frac{\theta' D_A(z_i) d(\theta' D_A(z_i))}{\sqrt{(\theta' D_A(z_i))^2 - \theta^2 \cdot D_A(z_i)^2}} \\
 &\simeq 2 \cdot \int_{\theta_s}^{5c_{500} \cdot \theta} P\left(\frac{\theta'}{\theta_s}\right) \frac{\theta' d\theta'}{\sqrt{\theta'^2 - \theta^2}},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Soit $\vec{x}$ les coordonnées angulaires dans le ciel. Le facteur de normalisation P_0 est ici défini tel que $\int \tau(\vec{x}) d\vec{x} = 1$. Comme $d\vec{x}$ est en deg^2 ou de manière équivalente en sr, P_0 est homogène à l'inverse d'un angle solide et s'exprime donc en sr^{-1} .

Notons que le profil n'a en fait qu'un paramètre libre, θ_s , son angle caractéristique. Pour un amas de masse $M_{500} = 10^{13} M_\odot$ situé à $z = 2$, $\theta_s = 0.27 \text{ arcmin}^2$. J'étudierai dans la partie suivante les systématiques engendrées par le changement de profil, notamment dans la section 4.5.2. Le diamètre angulaire d'un tel profil est plus petit que la largeur à mi-hauteur du plus petit lobe de *Planck* qui est de 4.22 arcmin^2 . On peut donc considérer le profil τ comme quasi ponctuel. Il est ensuite convolué avec les différents lobes de *Planck* en vue d'obtenir les profils réels τ_ν . A noter que la convolution ne change pas l'intégrale du profil sur la carte, d'où $\int \tau_\nu(\vec{x}) d\vec{x} = 1$.

Remarque : Je vais chercher à extraire le paramètre de Compton intégré sur le profil en trois dimensions de l'amas, $Y_{sph}(R) = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int_0^R 4\pi P\left(\frac{r}{R_s}\right) r^2 dr$ pour $R = R_{500}$. Cependant, comme je travaille avec le profil intégré selon la ligne de visée, j'extrait en fait une autre quantité, le paramètre de Compton cylindrique $Y_{cyl}(R) = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int_0^R 2\pi \tau(r) r dr$.

Les quantités $Y_{cyl}(R)$ et $Y_{sph}(R)$ sont quasi identiques quand on intègre jusqu'à $R = 5 \cdot R_{500}$ car dans ce cas la sphère et le cylindre contiennent la totalité de l'amas. Si l'on intègre jusqu'à R_{500} , ces quantités diffèrent comme l'indique la figure 3.14. La solution c'est donc d'intégrer jusqu'à $5 \cdot R_{500}$ pour obtenir $Y_{cyl}(5 \cdot R_{500})$, c'est-à-dire $Y_{sph}(5 \cdot R_{500})$ et convertir cette quantité en $Y_{sph}(R_{500})$ en utilisant le facteur de conversion $C(5R_{500} \rightarrow$

$R_{500}) = \frac{Y_{sph}(R_{500})}{Y_{sph}(5 \cdot R_{500})}$ qui ne dépend ni de la masse, ni du redshift de l'amas (c'est-à-dire de R_s qui dépend de ces quantités) mais des paramètres c_{500} , α , β et γ qui sont fixes. En effet :

$$\begin{aligned}
 C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) &= \frac{Y_{sph}(R_{500})}{Y_{sph}(5 \cdot R_{500})} \\
 &= \frac{\int_0^{R_{500}} 4\pi P\left(\frac{r}{R_s}\right) r^2 dr}{\int_0^{5R_{500}} 4\pi P\left(\frac{r}{R_s}\right) r^2 dr} \\
 &= \frac{\int_0^{c_{500}} 4\pi P(r') r'^2 dr'}{\int_0^{5c_{500}} 4\pi P(r') r'^2 dr'}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Avec les paramètres de [ARNAUD et al., 2010](#) , j'ai la valeur suivante : $C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) = 0.552$.

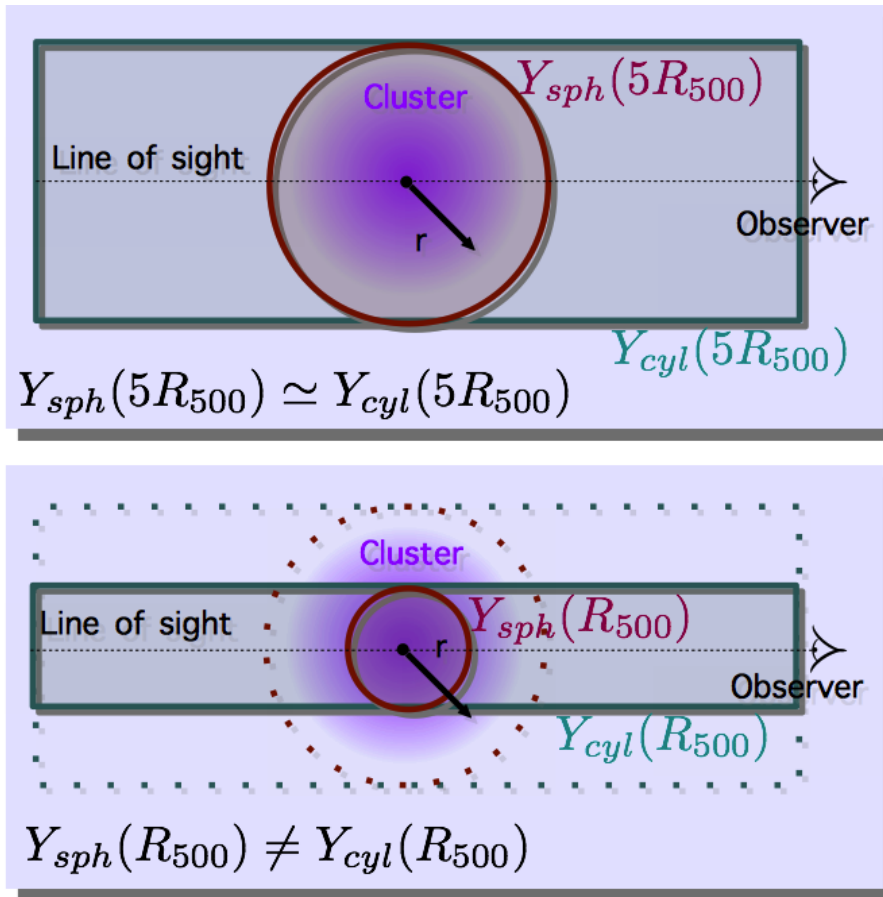


FIGURE 3.14 – *En haut* : Le paramètre de Compton intégré sur une sphère de rayon $5R_{500}$ et le paramètre de Compton intégré sur un cylindre avec un disque de même rayon sont identiques car ils englobent tous deux la totalité de l'amas. *En bas* : Ces paramètres sont différents quand on intègre seulement jusqu'à R_{500} puisqu'ils sont calculés sur des portions différentes de l'amas.

Le modèle avec le profil spatial

En prenant en compte le profil, je peux donc écrire pour une carte *Planck* et pour la structure i que :

$$m_\nu(\vec{x}) = f_{\nu,i} \cdot \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) + n_\nu(\vec{x}). \quad (3.14)$$

En utilisant un filtre adapté, détaillé par la suite, je cherche un estimateur du flux $\widehat{f_{\nu,i}}$ de chaque structure et l'erreur associée à cet estimateur $\sigma_{\widehat{f_{\nu,i}}}$. Avant de construire un tel estimateur, il faut que je fasse une hypothèse sur la nature du bruit.

Remarquons avant d'aller plus loin que les $f_{\nu,i}$ sont bien homogènes à un flux. En effet, sur la mini-carte *Planck*, en $\vec{x}_i$, la structure a une intensité en Jy/sr égale à $f_{\nu,i}\tau_\nu(0) = f_{\nu,i}\tau_0$ avec τ_0 en sr^{-1} . Donc, nécessairement, $f_{\nu,i}$ a pour unité le Jy et est donc homogène à un flux et non à une intensité. En fait $f_{\nu,i}$ est d'abord donnée en $\frac{\Delta T}{T_{\text{CMB}}}\text{sr}$ que je convertis donc en Jy.

3.4.2 Bruit de fond des mini-cartes *Planck*

Le bruit de fond des cartes *Planck*, résultant d'un bruit instrumental et astrophysique, sera considéré comme homogène et isotrope pour le reste de l'étude. En fait, je peux faire une hypothèse plus faible sur ce bruit : considérer qu'il est stationnaire au sens large (hypothèse WSS pour wide-sense stationary). Avec cette hypothèse, je vais pouvoir définir un spectre de puissance qui sera utilisé pour construire l'estimateur, le matched filter.

Variable stationnaire et spectre de puissance

Les premier et second moments pour une variable aléatoire stationnaire au sens large sont indépendants de la position dans l'espace. Dans le cas stationnaire au sens strict, cette indépendance s'étend à tous les moments. On peut donc écrire pour le premier moment, la moyenne, que :

$$\forall \vec{a}, \langle n(\vec{x} + \vec{a}) \rangle = \langle n(\vec{x}) \rangle = n_0. \quad (3.15)$$

Pour le second moment (non centré), l'auto-corrélation, la propriété de stationnarité s'exprime de cette façon :

$$\begin{aligned} \forall \vec{a}, R(\vec{x} + \vec{a}, \vec{x}' + \vec{a}) &= \langle n(\vec{x} + \vec{a})n^*(\vec{x}' + \vec{a}) \rangle \\ &= \langle n(\vec{x})n^*(\vec{x}') \rangle \\ &= R(\vec{x}, \vec{x}'), \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec n^* le complexe conjugué de n . Cette dernière propriété entraîne le résultat suivant :

$$R(\vec{x}, \vec{x}') = R(\vec{x} + (-\vec{x}'), \vec{x}' + (-\vec{x}')) = R(\vec{x} - \vec{x}', 0) = R(\Delta\vec{x}). \quad (3.17)$$

Pour une variable aléatoire stationnaire au sens large, la matrice d'auto-corrélation ne dépend que de la différence entre les positions et non des positions elles-mêmes. Cette caractéristique va permettre d'introduire, comme nous allons le voir, le spectre de puissance du bruit.

Passons dans l'espace de Fourier à deux dimensions. Soit $n_{\mathcal{F}}(\vec{q})$ la transformée de Fourier de la variable aléatoire, ici le bruit. Alors

$$n_{\mathcal{F}}(\vec{q}) = \int n(\vec{x})e^{-2\pi i\vec{q}\vec{x}}d\vec{x} = \mathcal{F}(n(\vec{x})) \quad (3.18)$$

Définissons un équivalent à l'auto-corrélation dans l'espace de Fourier :

$$R_{\mathcal{F}}(\vec{q}, \vec{q}') = \langle n_{\mathcal{F}}(\vec{q})n_{\mathcal{F}}^*(\vec{q}') \rangle. \quad (3.19)$$

Ce qui revient à écrire que :

$$\begin{aligned}
 R_{\mathcal{F}}(\vec{q}, \vec{q}') &= \int \int \langle n(\vec{x}) n^*(\vec{x}') \rangle e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}} e^{+2\pi i \vec{q}' \vec{x}'} d\vec{x} d\vec{x}' \\
 &= \int \int R(\Delta \vec{x}) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}} e^{+2\pi i \vec{q}' \vec{x}'} d\vec{x} d\vec{x}' \\
 &= \int \left(\int R(\Delta \vec{x}) e^{-2\pi i \vec{q} \Delta \vec{x}} d(\Delta \vec{x}) \right) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}'} e^{+2\pi i \vec{q}' \vec{x}'} d\vec{x}' \\
 &= \left(\int R(\Delta \vec{x}) e^{-2\pi i \vec{q} \Delta \vec{x}} d(\Delta \vec{x}) \right) \cdot \left(\int e^{-2\pi i (\vec{q} - \vec{q}') \vec{x}'} d\vec{x}' \right).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

La fonction de Dirac apparaît dans l'expression ci-dessus :

$$\int e^{-2\pi i (\vec{q} - \vec{q}') \vec{x}'} d\vec{x}' = \delta_D(\vec{q} - \vec{q}'). \tag{3.21}$$

Le spectre de puissance est défini de la manière suivante, comme transformée de Fourier de l'auto-corrélation :

$$P(\vec{q}) = \int R(\Delta \vec{x}) e^{-2\pi i \vec{q} \Delta \vec{x}} d(\Delta \vec{x}) = \mathcal{F}(R(\Delta \vec{x})). \tag{3.22}$$

Cette expression est aussi connue sous le nom de théorème de Wiener-Khinchin ([BARRATT, 2005](#)). La matrice d'auto-corrélation dans l'espace de Fourier est en fait une matrice diagonale qui peut s'exprimer ainsi :

$$R_{\mathcal{F}}(\vec{q}, \vec{q}') = P(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}'). \tag{3.23}$$

L'information sur la variance est donc intégralement rangée dans le spectre de puissance et non sur toute la matrice d'auto-corrélation. Ce spectre va être un des éléments clés de la construction du matched filter.

Estimation du spectre de puissance

Je travaille avec des mini-cartes *Planck* auxquelles j'ai soustrait leur valeur moyenne : $m'_{\nu}(\vec{x}) = m_{\nu}(\vec{x}) - \langle m_{\nu}(\vec{x}) \rangle$. Les émissions en provenance de la structure sont négligeables par rapport à celles qui viennent en arrière-plan. D'où $\langle m_{\nu}(\vec{x}) \rangle \simeq \langle n_{\nu}(\vec{x}) \rangle$. Je définis aussi $n'_{\nu}(\vec{x}) = n_{\nu}(\vec{x}) - \langle n_{\nu}(\vec{x}) \rangle$. Je peux donc écrire l'émission en provenance des cartes *Planck* de cette façon :

$$m'_{\nu}(\vec{x}) = f_{\nu,i} \cdot \tau_{\nu}(\vec{x} - \vec{x}_i) + n'_{\nu}(\vec{x}) \tag{3.24}$$

avec $\langle n'_{\nu}(\vec{x}) \rangle = 0$.

J'introduis la transformée de Fourier du bruit centré sur une moyenne nulle :

$$n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) = \int n'_{\nu}(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}} d\vec{x} = \mathcal{F}(n'_{\nu}(\vec{x})), \tag{3.25}$$

et la transformée de Fourier de la mini-carte *Planck* centrée aussi sur une moyenne nulle :

$$m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) = \int m'_{\nu}(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}} d\vec{x} = \mathcal{F}(m'_{\nu}(\vec{x})). \tag{3.26}$$

Nécessairement on a $\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle = 0$.

En faisant abstraction de l'émission de la structure, je peux écrire que :

$$\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle \simeq \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle. \tag{3.27}$$

En pratique, le spectre de puissance est évalué sur une mini-carte donc sur une surface limitée. En reprenant une formulation plus générale de l'expression de l'auto-corrélation (qui est ici aussi une auto-covariance car les variables sont centrées) des transformée de Fourier du bruit, je peux écrire que :

$$\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle = P_\nu(\vec{q}) \cdot \int e^{-2\pi i(\vec{q}-\vec{q}')\vec{x}} d\vec{x}' \quad (3.28)$$

et donc dans le cas $\vec{q} = \vec{q}'$ on a :

$$\begin{aligned} \langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle &= P_\nu(\vec{q}) \cdot \int 1 d\vec{x}' \\ &= P_\nu(\vec{q}) \cdot S, \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec $S = 100 \text{ deg}^2$ la surface de la mini-carte.

En utilisant la relation 3.27 et la relation 3.29, on peut exprimer le spectre de puissance de cette façon :

$$P_\nu(\vec{q}) \simeq \frac{\langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle}{S}. \quad (3.30)$$

$\langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle$ est obtenue à partir du lissage du produit de la transformée de Fourier de la carte avec son conjugué, $m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q})$, et non à partir de la véritable moyenne de ce produit qui n'est pas accessible (il faudrait plusieurs réalisations d'un même ciel).

Le bruit de fond est supposé isotrope et n'a pas de direction privilégiée. Ceci se répercute sur le spectre de puissance que je peux désormais écrire $P_\nu(\vec{q}) = P_\nu(q)$ avec $q = |\vec{q}|$.

3.4.3 Le matched filter mono-fréquence

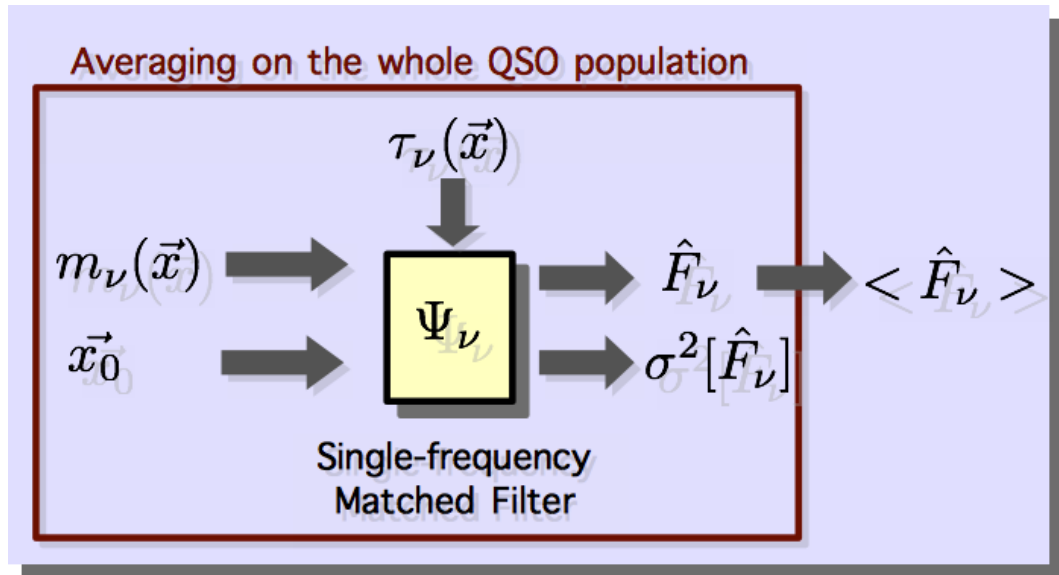


FIGURE 3.15 – Présentation du fonctionnement du matched filter mono-fréquence. Le flux F_ν en provenance de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur la mini-carte *Planck* $m_\nu(\vec{x})$ à la fréquence ν est estimé par un matched filter en supposant un profil spatial $\tau\vec{x}$. Les flux obtenus étant trop faibles, je travaille avec le flux moyen.

Cette partie est dédiée à l'élaboration d'un estimateur du flux. Cet estimateur doit prendre en compte la nature du bruit et aussi le profil spatial de l'amas. L'estimateur obtenu avec un matched filter est une solution qui a fait ses preuves dans la détection

du signal SZ. J'introduis ici la version la plus simple de ce filtre, le matched filter mono-fréquence (HAEHNELT et al., 1996 ; SANZ et al., 2001). Des versions plus complexes seront nécessaires pour la suite de l'analyse. Elles seront évoquées plus en détail dans le chapitre 4.

Un matched filter est en fait une sorte de filtre de Wiener à deux dimensions. C'est un estimateur linéaire optimal, qui donne une estimation avec le plus grand rapport signal sur bruit (S/N) possible quand le bruit est stationnaire, c'est-à-dire quand $\langle n_{\mathcal{F}}(\vec{q}) n_{\mathcal{F}}^*(\vec{q}') \rangle = P(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}')$, ce qui est une des hypothèses de travail.

Je pars, comme SANZ et al., 2001, d'un pseudo filtre $\Psi_{\nu}(\vec{x}, \vec{x}_i, R)$, avec R une échelle. Typiquement, R correspond dans mon étude à θ_s , le rayon angulaire caractéristique de la structure étudiée. Le pseudo filtre a une symétrie centrale au niveau du point de coordonnée $\vec{x}_i$. On peut l'écrire de cette façon :

$$\Psi_{\nu}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) = \frac{1}{R^2} \psi_{\nu} \left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}_i|}{R} \right). \quad (3.31)$$

Soit $\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)$ une mini-carte filtrée par le pseudo-filtre. C'est la convolution de la mini-carte *Planck* de moyenne nulle m'_{ν} avec le pseudo-filtre :

$$\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R) = \int m'_{\nu}(\vec{x}) \Psi_{\nu}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) d\vec{x}. \quad (3.32)$$

C'est aussi une convolution dans l'espace de Fourier :

$$\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R) = \int m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q}. \quad (3.33)$$

avec $\psi_{\mathcal{F},\nu}$ la transformée de Fourier de ψ_{ν} . Comme ce dernier a une symétrie centrale, sa transformée de Fourier ne dépend que de $q = |\vec{q}|$.

Notons qu'à partir de l'expression 3.24, on peut exprimer la transformée de Fourier de m_{ν}^* comme il suit :

$$m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) = f_{\nu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} + n_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \quad (3.34)$$

avec $\tau_{\mathcal{F},\nu}$ la transformée de Fourier du profil, qui est connue. $\tau_{\nu}(\vec{x})$ a une symétrie centrale ; $\tau_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q})$ peut donc s'écrire $\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)$.

Je définis mon estimateur de cette façon ; c'est le flux obtenu à la position $\vec{x}_i$ sur la mini-carte filtrée :

$$\widehat{f}_{\nu,i} = \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R) \quad (3.35)$$

avec l'erreur sur l'estimateur définie classiquement par :

$$\begin{aligned} \sigma[\widehat{f}_{\nu,i}] &= \sqrt{\langle \widehat{f}_{\nu,i}^2 \rangle - \langle \widehat{f}_{\nu,i} \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)^2 \rangle - \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R) \rangle^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'objectif est d'obtenir l'expression de $\psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq)$ pour l'échelle $R = R_0$ qui me donne un estimateur non biaisé avec le meilleur rapport signal sur bruit. Il faut donc $\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0 q)$ tel que le filtrage soit non biaisé :

$$f_{\nu,i} = \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \quad (3.37)$$

et tel que le rapport signal sur bruit

$$D[\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0)] = \frac{\langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle}{\sigma[\widehat{f}_{\nu,i}]} \quad (3.38)$$

soit maximal.

Les deux conditions précédentes mènent à l'expression suivante :

$$\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q) = \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] \cdot \frac{\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)}{P_{\nu}(q)} \quad (3.39)$$

avec aussi une expression pour la variance donnée par :

$$\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] = \left[\int d\vec{q} \frac{|\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)|^2}{P_{\nu}(q)} \right]^{-1} ; \quad (3.40)$$

cette dernière expression ne dépend pas de la position sur la carte filtrée. Elle est donc identique pour tous les flux d'objets sur une même mini-carte qui ont aussi le même profil spatial (ce qui est le cas dans mon étude). J'établis les expressions de $\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q)$ et de $\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]$ en annexe.

3.4.4 Spectre d'émission des structures BOSS dans Planck

Le programme est le suivant : pour chaque quasar i de BOSS, pour chacune des 7 cartes *Planck* à différentes fréquences j'extrait un estimateur $\widehat{f_{\nu,i}}$ du flux avec son erreur associée $\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]$ à l'aide du matched filter mono-fréquence précédemment évoqué (cf figure 3.15). Les flux obtenus seront trop faibles pour être significatifs. Je dois alors travailler avec le flux moyen.

En supposant une distribution normale des flux, je peux estimer le flux moyen sur toute la population de quasars comme :

$$\langle \widehat{f_{\nu}} \rangle = \frac{\sum_i \frac{\widehat{f_{\nu,i}}}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]}}{\sum_i \frac{1}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]}} \quad (3.41)$$

avec pour erreur sur ce flux moyen :

$$\sigma(\widehat{f_{\nu}}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]}}} \quad (3.42)$$

Facteur de conversion du flux $5R_{500} \rightarrow R_{500}$

Les $f_{\nu,i}$ correspondent au flux total en provenance de la structure, ce qui pour un amas correspond à l'émission en provenance d'une sphère de rayon $5R_{500}$. Je vais convertir ce flux pour qu'il corresponde au flux $F_{\nu,i}$ en provenance d'une sphère de rayon R_{500} :

$$F_{\nu,i} = f_{\nu,i} \cdot C(5R_{500} \rightarrow R_{500}), \quad (3.43)$$

avec pour facteur de conversion $C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) = 0.552$ introduit dans la section 3.4.1. Ce facteur de conversion sera particulièrement utile pour le signal tSZ. Par souci d'homogénéité, je l'appliquerai dorénavant à tous les flux.

Empilement des mini-cartes filtrées

J'applique le matched filter évoqué ci-dessus sur chaque pixel $\vec{x}_p$ des mini-cartes *Planck* pour obtenir les mini-cartes de flux $\widehat{F_{\nu}}(\vec{x}_p)$ correspondantes. Je construis ensuite les mini-cartes de flux moyen à chaque fréquence en empilant les mini-cartes de flux centrées sur

les positions $\vec{x}_i$ des quasars DR12 tout en respectant la pondération donnée par l'erreur sur l'estimateur de flux :

$$\langle \hat{F}_\nu(\vec{x}_p) \rangle = \frac{\sum_i \frac{\hat{F}_\nu(\vec{x}_p - \vec{x}_i)}{\sigma^2[\hat{F}_{\nu,i}]}}{\sum_i \frac{1}{\sigma^2[\hat{F}_{\nu,i}]}} \quad (3.44)$$

Chaque mini-carte du flux moyen couvre $10^\circ \times 10^\circ$ et contient 350×350 pixels.

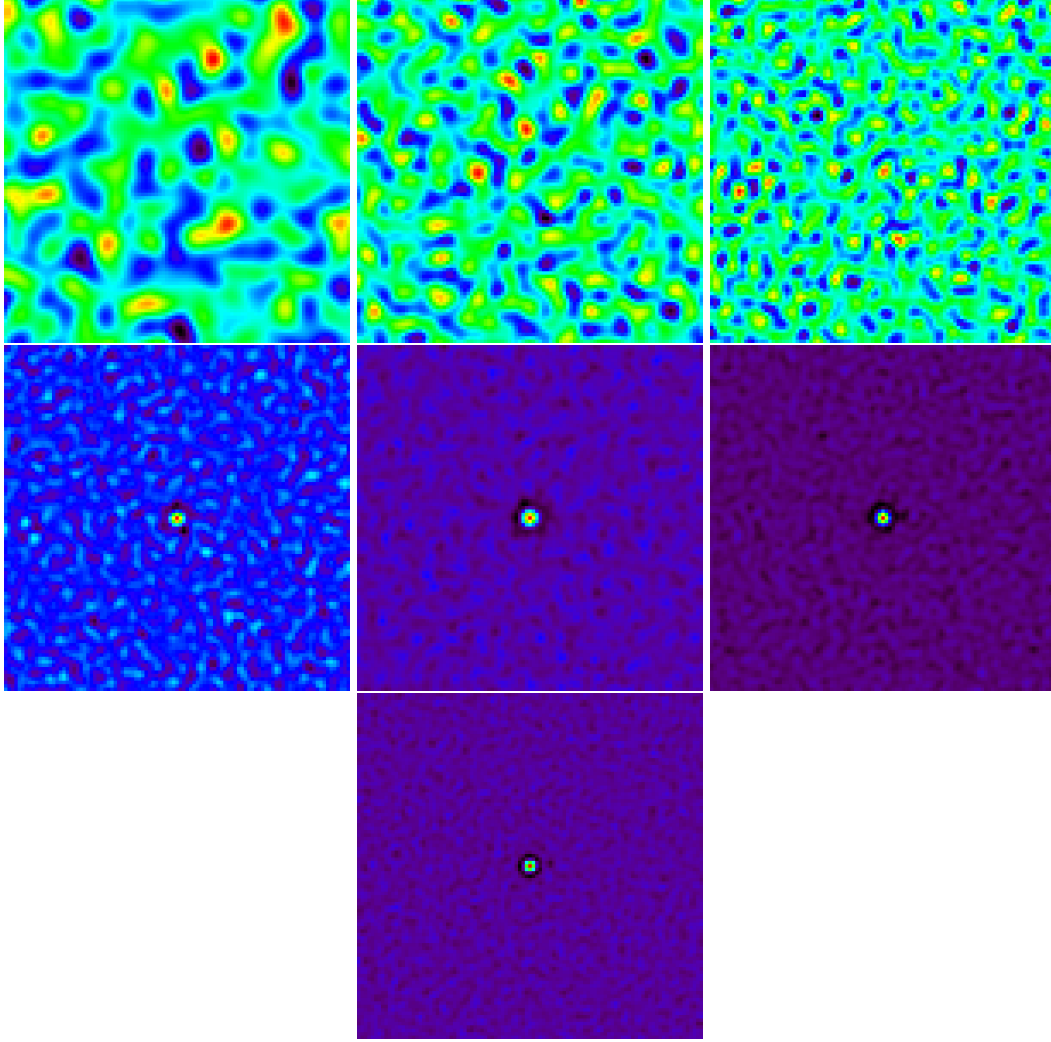


FIGURE 3.16 – De haut en bas et de gauche à droite : les mini-cartes de 2° de côté filtrées centrées sur les positions des quasars de *BOSS* à 70, 100, 143, 217, 353, 545 et 857 GHz. Il s'agit de carte d'intensité en $\frac{\Delta T}{T_{CMB}}$ avec en rouge l'intensité la plus forte et en bleu l'intensité la plus faible.

Il apparaît que le signal devient significatif à partir de 217 GHz puis augmente par la suite comme on peut le voir sur la figure 3.16. Ce n'est pas ce qui est attendu pour un signal tSZ qui est significativement négatif pour une fréquence inférieure à 217 GHz et positif au-delà.

Le spectre moyen : un corps gris

Examinons maintenant le spectre en provenance des structures, c'est-à-dire le flux moyen $\langle \hat{F}_\nu \rangle$ en fonction de la fréquence. Le flux obtenu est quasi nul à basse fréquence (< 200 GHz) et atteint un maximum de 6 mJy à 857 GHz. Il ne s'agit manifestement pas

d'un spectre tSZ mais plutôt d'un corps gris, c'est-à-dire le produit d'un corps noir avec une loi de puissance comme l'indique la figure 3.17. Ce spectre est typique des émissions de poussière. Une caractérisation de ce type d'émission sera proposée dans le chapitre 4 en vue d'extraire un possible signal tSZ qui dans ce cas est au mieux sous-dominant. Le flux extrait à des positions aléatoires du ciel est par contre compatible avec zéro, ce qui implique une origine extra-galactique au signal obtenu à la position des quasars. Je vais considérer par la suite que les contaminations d'avant-plan sont négligeables par rapport à l'erreur statistique sur le signal.

Cependant cette analyse ne prend pas en compte la variabilité des quasars, par exemple la variabilité en redshift. C'est pourquoi je cherche aussi le flux moyen pour des sous-échantillons ; des quasars dans des intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Ces flux sont présentés avec la figure 3.18. Là encore l'émission de poussière domine. Si je me concentre seulement sur les quasars avec une contrepartie radio, je vois apparaître une composante synchrotron à basse fréquence comme l'indique les figures 3.19. Cette composante pourrait masquer l'effet tSZ, négatif à basse fréquence. Les flux en provenance des quasars sans contrepartie radio sont aussi dominés par la poussière. Le seul indice possible de tSZ, c'est le flux légèrement négatif à 143 GHz pour les intervalles $2.5 < z < 3$ et $3 < z < 3.5$ (figure 3.20). Il est cependant nécessaire de retirer l'émission de poussière avant de pouvoir conclure sur ce signal.

3.5 Nécessité d'un modèle d'émission pour trouver le tSZ

L'extraction du flux, effectuée par un matched filter, dans les cartes *Planck* à la position des quasars de *BOSS* permet d'obtenir un spectre moyen. Ce spectre a la forme d'un corps gris, caractéristique d'une émission de poussière, et non d'un spectre tSZ. Si signal tSZ il y a, alors il est sous-dominant. Il devient nécessaire de bien comprendre l'émission de poussière pour la séparer du possible signal tSZ. C'est le sujet du chapitre suivant.

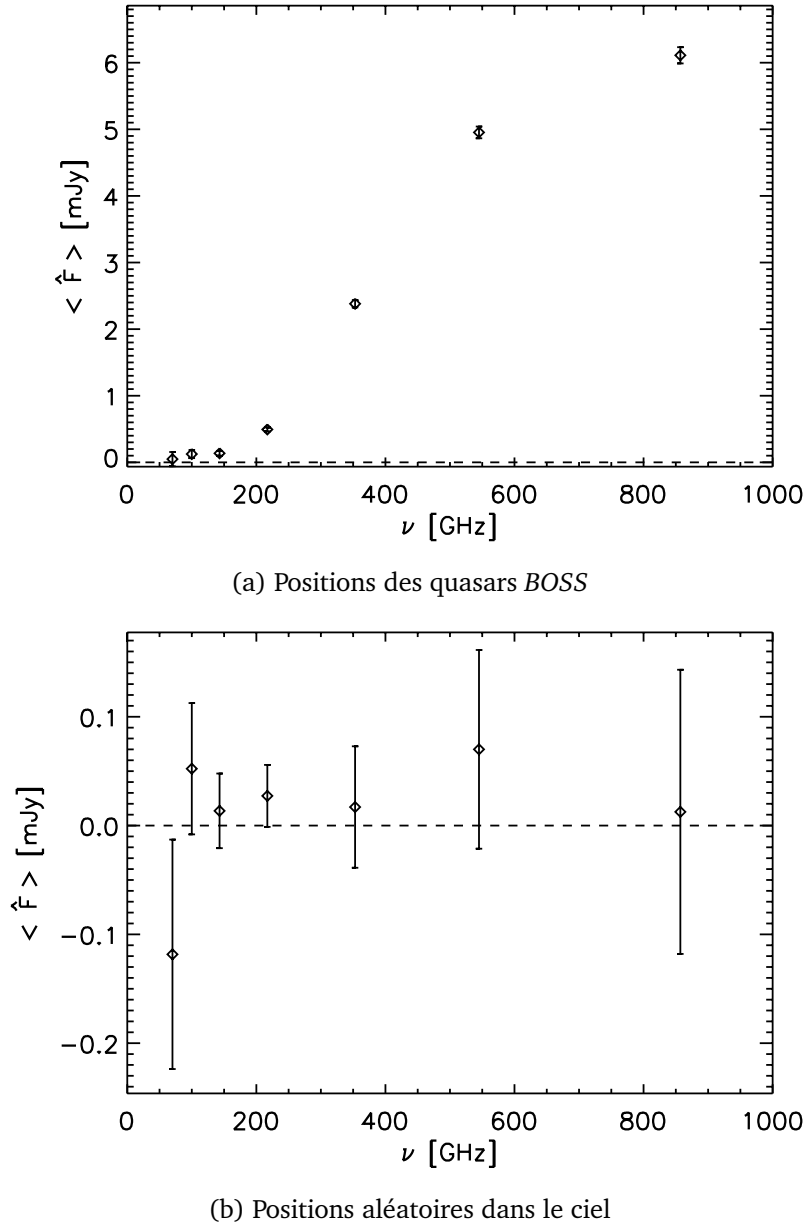


FIGURE 3.17 – En haut : le spectre d’émission moyen à la position des quasars de *BOSS*. Il s’agit manifestement d’une émission type corps gris et non d’une émission tSZ. En bas : flux moyen au niveau de 296 109 positions aléatoires dans le ciel (dans le masque à 65% pour éviter la contamination de poussière galactique). Ce flux est compatible avec zéro, ce qui veut dire que le signal que l’on obtient à la position des quasars ne provient pas d’une contamination en avant-plan comme les poussières galactiques.

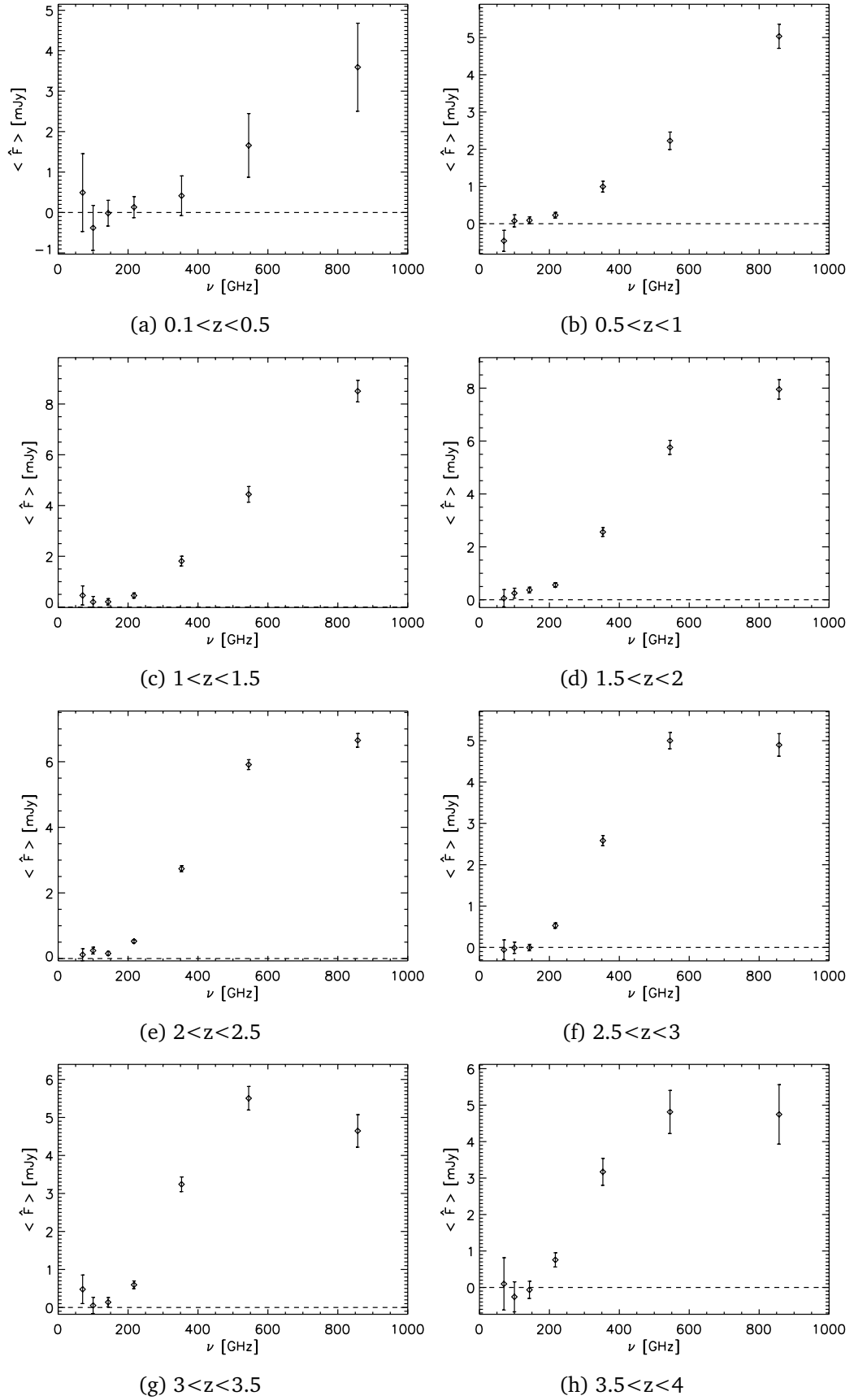


FIGURE 3.18 – Spectres d'émission moyens à la positions des quasars de *BOSS* pour des intervalles en redshift $\Delta z = 0.5$. Le signal est dominé par une émission type poussière pour tous les intervalles.

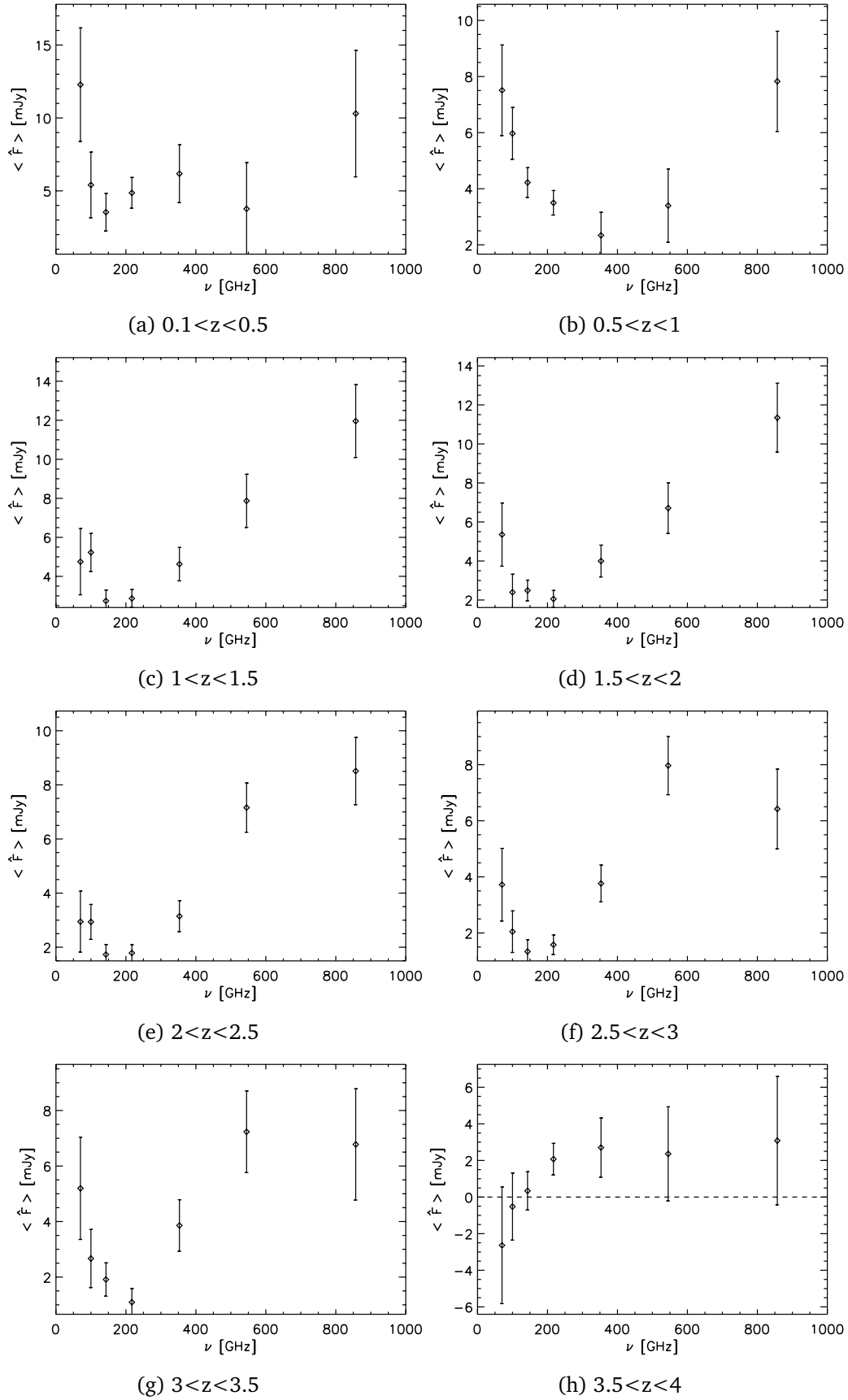


FIGURE 3.19 – Spectres d’émission moyens à la position des quasars de *BOSS* avec une contrepartie radio dans *FIRST*. En plus de l’émission poussière dominante, on trouve un signal synchrotron à basse fréquence.

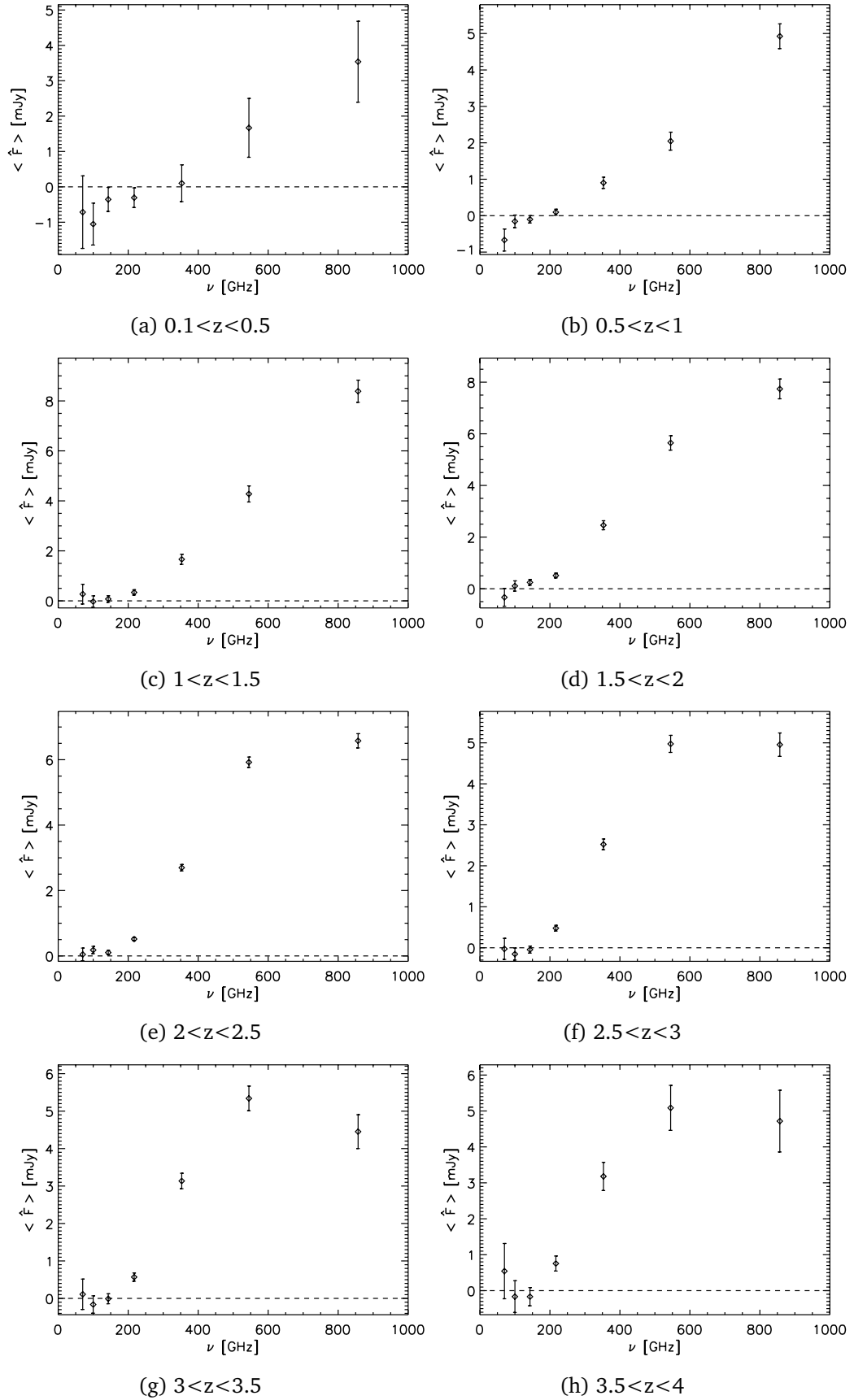


FIGURE 3.20 – Spectres d'émission moyens à la position des quasars de *BOSS* sans contrepartie radio dans *FIRST* pour des intervalles en redshift $\Delta z = 0.5$. La poussière domine.

Chapitre 4

Caractérisation des structures *Planck-BOSS*

Le matched filter, introduit dans le chapitre précédent pour estimer le flux en provenance des structures "*Planck-BOSS*", va être complexifié pour combiner cette fois-ci l'information aux différentes fréquences ; moyennant cependant une hypothèse sur le spectre d'émission. Il conviendra alors de construire les outils nécessaires, notamment un χ^2 , pour départager justement les différentes hypothèses sur le spectre. De manière simplifiée, je vais comparer le flux obtenu par le matched filter mono-fréquence au flux obtenu avec un matched filter cette fois multi-fréquences. Je vais d'abord introduire le matched filter adapté à l'effet tSZ et utilisé notamment pour construire le catalogue d'amas *Planck*. Je vais ensuite construire un nouveau matched filter cette fois adapté à une émission de poussière. Une telle émission introduit une complexité supplémentaire, car à la différence du spectre tSZ, elle dépend de deux paramètres mal connus, la température T_d et l'exposant β_d . Il faudra explorer l'espace de ces paramètres pour trouver le spectre de poussière le plus adapté, donc effectuer une marginalisation. Ensuite, un filtre plus complet sera mis en place ; ce filtre sera capable de séparer des composantes qui ont des spectres différents telles la poussière et le tSZ. Avec ce dernier filtre on détecte en effet un signal tSZ significatif que l'on va comparer aux prédictions. La construction des filtres dérivés du matched filter tSZ comme le matched filter poussière et le matched filter multi-composantes ainsi que le développement de la marginalisation sur l'espace des paramètres de l'émission de poussière sont mes contributions personnelles

Dans le chapitre 3, je ne faisais qu'extraire des flux. Je n'avais alors pas besoin de cosmologie. Dans ce chapitre par contre, je vais travailler avec des quantités qui dépendent de la luminosité de la source. La luminosité est estimée à partir de la distance lumineuse qui dépend du choix des paramètres cosmologiques. J'utilise la cosmologie *Planck* 2015 ([PLANCK COLLABORATION et al., 2015h](#)) pour un univers plat Λ CDM avec $H_0 = 67.27 = h100$ km/s/Mpc, $\Omega_m = 0.3156$, $\Omega_b h^2 = 0.02225$ et $\sigma_8 = 0.831$.

Les résultats présentés dans ce chapitre proviennent en partie du [VERDIER et al., 2016](#).

4.1 Détection du gaz chaud sans émission parasite

Je vais me placer dans le cas idéal où le signal *Planck* en provenance des structures que je sonde est largement dominé par l'effet tSZ. Je vais introduire un nouvel outil, le matched filter multi-fréquences qui va me permettre d'extraire ce signal tSZ avec le meilleur rapport signal sur bruit. Ce matched filter "tSZ" sera ensuite transformé en matched filter "poussière" et en matched filter "poussière + tSZ" qui seront utilisés pour caractériser le signal *Planck* à la position des quasars *BOSS*.

4.1.1 Modèle d'émission avec hypothèse sur le spectre et ν_{eff}

Dans cette section, je suppose donc que mon signal est purement tSZ. Je peux ainsi utiliser un matched filter multi-fréquences pour récupérer l'amplitude de mon signal. Je peux donc exprimer le flux à l'emplacement du quasar i ainsi :

$$f_{\nu,i} = a_{tSZ,i} \cdot tSZ(\nu) \quad (4.1)$$

avec $tSZ(\nu)$ le spectre d'une émission tSZ. L'expression d'un tel spectre est introduite dans la section 3.1.1 : $tSZ(\nu) = \frac{\frac{x^2}{4} \coth(\frac{x}{2}) - x}{\sinh^2(\frac{x}{2})}$ avec $x = h\nu/k_b T_{FDC}$; $a_{tSZ,i}$ fait office de paramètre de Compton intégré. Pour reprendre la notation de la section 3.4.1, $a_{tSZ,i} = Y_{cyl}(5 \cdot R_{500}) = Y_{sph}(5 \cdot R_{500})$.

On peut donc écrire l'intensité en provenance des mini-cartes *Planck* (de moyenne nulle) de cette manière :

$$m'_\nu(\vec{x}) = a_{tSZ,i} \cdot tSZ(\nu) \cdot \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) + n'_\nu(\vec{x}) \quad (4.2)$$

avec $\tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i)$ le profil de la source introduit dans la section 3.4.1.

En fait cette expression serait vraie si la réponse spectrale des détecteurs *Planck* était un Dirac centré sur ν . Ce n'est pas le cas et il va falloir prendre en compte l'étalement spectral de la réponse de *Planck* en modifiant légèrement le spectre d'émission.

Construction des ν_{eff}

Soit $S_\nu(\nu')$ la réponse spectrale des détecteurs *Planck* pour la bande ν . Cette réponse est présentée pour plusieurs bandes dans la figure 3.6 du chapitre précédent. Elle a ici la propriété suivante : $\int S_\nu(\nu') d\nu' = 1$. Notons $\mathcal{M}'_{\nu'}(\vec{x})$ la "vraie" carte du ciel à la fréquence ν' et $n'_{a,\nu'}(\vec{x})$ le bruit astrophysique à cette même fréquence. Cette carte du ciel peut s'écrire ainsi :

$$\mathcal{M}'_{\nu'}(\vec{x}) = a_{tSZ,i} \cdot tSZ(\nu') \cdot \tau_{\nu'}(\vec{x} - \vec{x}_i) + n'_{a,\nu'}(\vec{x}). \quad (4.3)$$

Je suppose que le lobe de *Planck* ne varie pas trop sur chaque bande de réponse spectrale. Ce qui permet d'écrire que $\tau_{\nu'}(\vec{x} - \vec{x}_i) = \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i)$ pour la réponse spectrale S_ν .

La carte détectée par *Planck* est en fait la somme des cartes du ciel à différentes fréquences pondérées par la réponse spectrale :

$$\begin{aligned} m'_\nu(\vec{x}) &= \int S_\nu(\nu') \mathcal{M}'_{\nu'}(\vec{x}) d\nu' + n'_{i,\nu}(\vec{x}) \\ &= a_{tSZ,i} \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) \int S_\nu(\nu') tSZ(\nu') d\nu' + \int S_\nu(\nu') n'_{a,\nu'}(\vec{x}) d\nu' + n'_{i,\nu}(\vec{x}) \\ &= a_{tSZ,i} \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) \int S_\nu(\nu') tSZ(\nu') d\nu' + n'_\nu(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec $n'_{i,\nu}(\vec{x})$ le bruit instrumental et $n'_\nu(\vec{x})$ le bruit total qui est tel que :

$$n'_\nu(\vec{x}) = \int S_\nu(\nu') n'_{a,\nu'}(\vec{x}) d\nu' + n'_{i,\nu}(\vec{x}). \quad (4.5)$$

Je définis alors $\nu_{eff,tSZ}[\nu]$ tel que

$$tSZ(\nu_{eff,tSZ}[\nu]) = \int S_\nu(\nu') tSZ(\nu') d\nu'. \quad (4.6)$$

C'est la fréquence pour laquelle le spectre d'émission est égal au spectre intégré pondéré par la réponse du détecteur dans une certaine bande. Pour une émission tSZ, ces fréquences ne dépendent pas du redshift de la source ; aussi la relation entre ν et $\nu_{eff,tSZ}[\nu]$

ν (GHz)	70	100	143	217	343	545	857
$\nu_{eff,tSZ}[\nu]$ (GHz)	71.4	103.0	144.5	222.1	355.1	528.5	781.5

TABLE 4.1 – Equivalence entre les fréquences nominales et les fréquence effectives causées par l'étalement de la réponse des détecteurs.

est donnée par la table 4.1. J'étendrai les ν_{eff} à d'autres types d'émission, notamment par la suite à l'émission de poussière et au synchrotron. Pour simplifier les notations, je note le spectre d'émission modifié $S_{tSZ}(\nu)$ qui est tel que $S_{tSZ}(\nu) = tSZ(\nu_{eff,tSZ}[\nu])$.

La mini-carte d'émission *Planck* s'écrit alors :

$$m'_\nu(\vec{x}) = a_{tSZ,i} \cdot S_{tSZ}(\nu) \cdot \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) + n'_\nu(\vec{x}). \quad (4.7)$$

4.1.2 Un nouvel outil : le matched filter multi-fréquences

Ce nouveau filtre est bâti en faisant une hypothèse sur le spectre d'émission. Il permet de combiner l'information aux différentes fréquences pour obtenir une amplitude $a_{tSZ,i}$ du spectre normalisé avec un meilleur rapport signal sur bruit qu'un matched filter mono-fréquence. Ce filtre a été introduit par [HERRANZ et al., 2002](#) et [MELIN et al., 2006](#) pour détecter l'effet tSZ. Il a notamment permis la construction des différents catalogues d'amas de galaxies avec les données *Planck* ([PLANCK COLLABORATION et al., 2013a](#) ; [PLANCK COLLABORATION et al., 2014c](#) ; [PLANCK COLLABORATION et al., 2015k](#)). Ce filtre a aussi été utilisé pour détecter l'effet tSZ dans les données *WMAP* et ainsi permettre la comparaison entre luminosité X et paramètre de Compton en utilisant les données *ROSAT* ([MELIN et al., 2011](#)).

Spectre de puissance croisé $P_{\nu,\mu}$

ν et μ dénotent ici les fréquences des cartes *Planck*. Pour utiliser ce nouveau filtre, outre l'hypothèse sur le spectre d'émission, il est nécessaire de connaître le spectre de puissance "croisé" entre les cartes *Planck* aux différentes fréquences. Dans un contexte de bruit stationnaire, ce spectre croisé est donné par la relation suivante :

$$\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'^*_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle = P_{\nu,\mu}(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (4.8)$$

avec $n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q})$ la transformée de Fourier du bruit de moyenne nulle dans la carte de fréquence ν et $P_{\nu,\mu}(\vec{q})$ le spectre de corrélation croisé. Il est possible d'étendre la preuve développée dans la section 3.4.2 pour le spectre de bruit non croisé en partant des propriétés du bruit stationnaire pour aboutir à la relation ci-dessus.

Il convient de noter que le spectre de puissance croisé est estimé sur la carte de façon analogue au spectre de puissance non croisé en utilisant la relation ci-dessous qui est obtenue avec un raisonnement similaire que son équivalente dans la section 3.4.2 :

$$P_{\nu,\mu}(q) \simeq \frac{\langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'^*_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}) \rangle}{S}. \quad (4.9)$$

avec $S = 100 \text{ deg}^2$ la surface de la mini-carte.

Remarquons que le spectre du bruit utilisé par le filtre mono-fréquence $P_\nu(\vec{q})$ est un des termes du spectre croisé : $P_\nu(\vec{q}) = P_{\nu,\nu}(\vec{q})$.

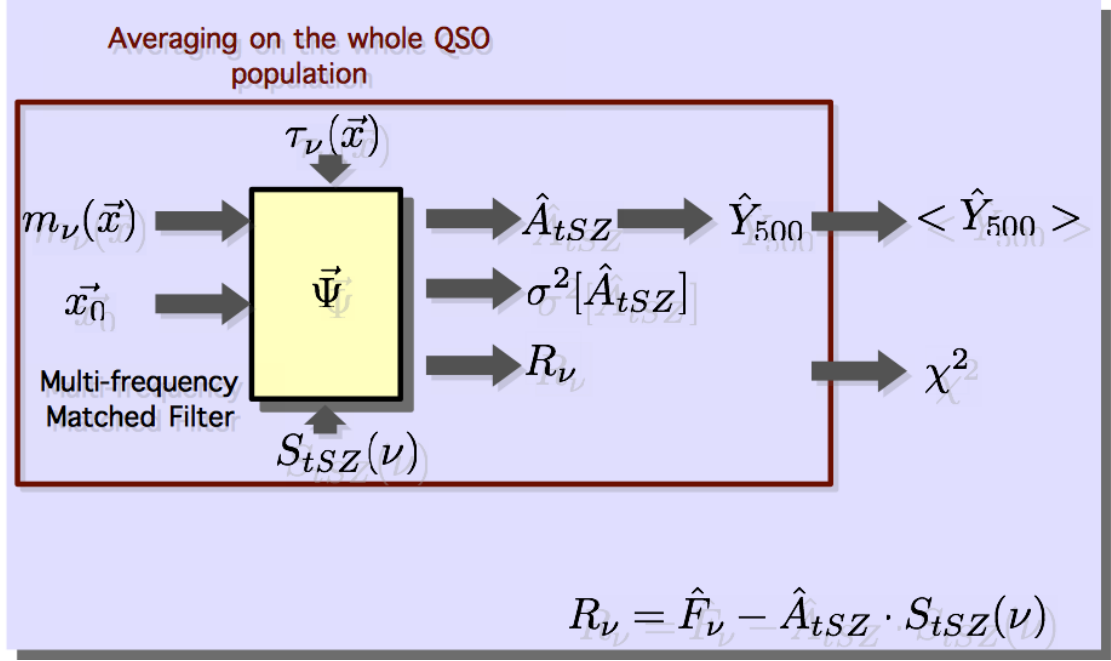


FIGURE 4.1 – Présentation du fonctionnement du matched filter multi-fréquences pour une émission tSZ. Le paramètre de Compton $\hat{Y}_{500}$ en provenance de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur les mini-cartes *Planck* $\vec{m}(\vec{x})$ est estimé par un matched filter multi-fréquences en supposant un profil spatial $\tau_\nu(\vec{x})$ et aussi un spectre d'émission, ici de type tSZ. Les paramètres obtenus étant trop faibles, je travaille avec le paramètre moyen.

Expression du matched-filter

Je construis ici une matched filter adapté à l'émission tSZ mais je pourrais la remplacer par n'importe quelle autre émission.

Je pars du vecteur pseudo-filtre $\vec{\Psi}_{tSZ}(\vec{x}, \vec{x}_i, R)$ comme [HERRANZ et al., 2002](#). C'est un vecteur avec 7 coordonnées qui correspondent aux 7 fréquences des cartes *Planck*. Le pseudo-filtre a une symétrie centrale au niveau du point de coordonnées $\vec{x}_i$. On peut l'écrire de cette façon, comme pour le filtre mono-fréquence :

$$\vec{\Psi}_{tSZ}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) = \frac{1}{R^2} \vec{\psi}_{tSZ} \left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}_i|}{R} \right). \quad (4.10)$$

Je note $\psi_{tSZ,\nu}$ la coordonnée ν du filtre $\vec{\psi}_{tSZ}$ qu'il ne faut pas confondre avec le filtre mono-fréquence ψ_ν .

Je définis une mini-carte filtrée $\omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R)$ comme une certaine combinaison des différentes cartes *Planck* :

$$\begin{aligned} \omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R) &= \int \vec{m}'^t(\vec{x}) \cdot \vec{\Psi}_{tSZ}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) d\vec{x} \\ &= \int \sum_\nu m'_\nu(\vec{x}) \Psi_{tSZ,\nu}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) d\vec{x} \\ &= \int \sum_\nu m'_\nu(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},tSZ,\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \cdot \vec{x}_i} d\vec{q} \\ &= \int \vec{m}'^t(\vec{q}) \cdot \vec{\psi}_{\mathcal{F},tSZ}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \cdot \vec{x}_i} d\vec{q}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $m'_\nu(\vec{x})$ la mini-carte *Planck* à la fréquence ν à laquelle on a soustrait la valeur moyenne.

Quand $\vec{x}_i$ est la position donnée par un quasar de *BOSS* j'obtiens alors un estimateur de $a_{tSZ,i}$ avec cette carte filtrée :

$$\widehat{a_{tSZ,i}} = \omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R_0). \quad (4.12)$$

Comme son équivalent mono-fréquence, le matched filter multi-fréquences est non biaisé (si l'émission est bien du tSZ) pour une échelle R_0 telle que :

$$a_{tSZ,i} = \langle \omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R_0) \rangle. \quad (4.13)$$

Il donne aussi le meilleur rapport signal sur bruit possible ; donc

$$D[\omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R)] = \frac{\langle \omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R) \rangle}{\sigma[\widehat{a_{tSZ,i}}]} \quad (4.14)$$

est maximal en $R = R_0$.

Notons que l'erreur sur l'estimateur est définie comme il suit :

$$\begin{aligned} \sigma[\widehat{a_{tSZ,i}}] &= \sqrt{\langle \widehat{a_{tSZ,i}}^2 \rangle - \langle \widehat{a_{tSZ,i}} \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle \omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R)^2 \rangle - \langle \omega_{tSZ}(\vec{x}_i, R) \rangle^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les deux conditions, l'absence de biais et la maximisation du rapport signal sur bruit, conduisent à l'expression suivante du matched filter multi-fréquences, expression qui dépend du spectre d'émission $\vec{S}_{tSZ}$:

$$\vec{\psi}_{\mathcal{F},tSZ}(R_0 q) = \sigma^2[\widehat{a_{tSZ,i}}] \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{tSZ} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(q) \right) \quad (4.16)$$

qui peut s'écrire aussi de cette façon :

$$\psi_{\mathcal{F},tSZ,\nu}(R_0 q) = \sigma^2[\widehat{a_{tSZ,i}}] \cdot \sum_{\mu} P_{\nu,\mu}^{-1}(q) \cdot S_{tSZ}(\mu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu}(q). \quad (4.17)$$

La variance est alors donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\widehat{a_{tSZ,i}}] &= \left[\int d\vec{q} \left(\vec{S}_{tSZ} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(q) \right)^t \bullet \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{tSZ} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(q) \right) \right]^{-1} \\ &= \left[\int d\vec{q} \sum_{\nu,\mu} S_{tSZ}(\nu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}(q) \cdot P_{\nu,\mu}^{-1}(q) \cdot S_{tSZ}(\mu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu}^*(q) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.1.3 Vérifier le modèle : résidus et χ^2

Le matched filter multi-fréquences permet d'obtenir une amplitude $a_{tSZ,i}$ de l'effet tSZ à la position de chaque quasar mais ne donne aucune information sur le spectre de l'émission supposée être du tSZ.

Résidus pour un quasar

Comment alors valider ou non cette hypothèse sur ce spectre ? Une solution est de comparer le flux $\widehat{f_{\nu,i}}$ obtenu par le matched filter mono-fréquence, donc sans hypothèse sur le type d'émission, et le flux "reconstruit" $\widehat{a_{tSZ,i}} \cdot S_{tSZ}(\nu)$. On peut par exemple partir du résidu, c'est-à-dire la différence entre ces deux flux :

$$R_{\nu,i} = \widehat{f_{\nu,i}} - \widehat{a_{tSZ,i}} \cdot S_{tSZ}(\nu). \quad (4.19)$$

La variance sur un résidu est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} C[\vec{R}_i]_{\nu,\mu} &= \langle R_{\nu,i} R_{\mu,i} \rangle - \langle R_{\nu,i} \rangle \langle R_{\mu,i} \rangle \\ &= C[\widehat{f}_i]_{\nu,\mu} - \sigma^2 [\widehat{a_{tSZ,i}}] \cdot S_{tSZ}(\nu) \cdot S_{tSZ}(\mu) \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec $C[\widehat{f}_i]_{\nu,\mu}$ la variance sur les flux donnée par

$$\begin{aligned} C[\widehat{f}_i]_{\nu,\mu} &= \langle \widehat{f}_{\nu,i} \widehat{f}_{\mu,i} \rangle - \langle \widehat{f}_{\nu,i} \rangle \langle \widehat{f}_{\mu,i} \rangle \\ &= \left[\int d\vec{q} \frac{\tau_{\mathcal{F},\nu}(q) \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu}^*(q)}{P_{\nu,\mu}(q)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

La preuve, non-triviale, des expressions des deux variances est donnée en annexe.

Résidus moyens

Pour un seul quasar, les résidus ne sont pas significatifs. Il est nécessaire, comme pour les flux, de travailler avec les résidus moyens et avec l'erreur sur les résidus moyens. Et, comme pour les flux, je suppose les résidus distribués normalement, centrés sur les résidus moyens. J'obtiens donc 7 résidus sur toute la population des quasars. L'expression suivante de ces résidus prend en compte les corrélations :

$$\langle \vec{R} \rangle = \left[\sum_i \mathbf{C}^{-1}[\vec{R}_i] \right]^{-1} \cdot \left[\sum_i \mathbf{C}^{-1}[\vec{R}_i] \cdot \vec{R}_i \right] \quad (4.22)$$

avec pour variance :

$$\mathbf{C}^{-1}[\langle \vec{R} \rangle] = \left[\sum_i \mathbf{C}^{-1}[\vec{R}_i] \right]^{-1}. \quad (4.23)$$

χ^2 des résidus moyens

Comme je suppose une distribution normale des résidus, je peux construire le χ^2 qui prend en compte les corrélations :

$$\chi^2 = \langle \vec{R} \rangle^t \cdot \mathbf{C}^{-1}[\langle \vec{R} \rangle] \cdot \langle \vec{R} \rangle. \quad (4.24)$$

Si mon modèle d'émission est adapté, les résidus moyens, c'est-à-dire les 7 composantes de $\vec{R}$ doivent être compatibles avec zéro à l'erreur près. Si c'est le cas, le χ^2 doit suivre une loi de Student à 7 degrés de libertés puisque les résidus suivent une loi normale.

A noter qu'il est aussi possible de construire un χ^2 des résidus pour chaque quasar i . Cependant, comme le flux n'est pas significatif au niveau d'un quasar, les résidus ne le sont pas non plus et seront toujours compatibles avec zéro. Le χ^2 obtenu suivra forcément une loi de Student à 7 degrés de liberté et n'en déviara pas, quelle que soit l'hypothèse sur le spectre d'émission. Il vaut donc mieux travailler avec le χ^2 des résidus moyens pour observer une possible déviation.

4.1.4 Extraction du signal tSZ sur simulation et sur les données

Paramètre de Compton intrinsèque et masse de l'amas

Comme pour les flux, je convertis l'amplitude a_{tSZ} (en provenance d'une sphère de rayon $5R_{500}$) en amplitude $A_{tSZ,i}$ (en provenance d'une sphère de rayon R_{500}) :

$$A_{tSZ,i} = a_{tSZ,i} \cdot C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \quad (4.25)$$

avec $C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) = 0.552$.

En suivant le [PLANCK COLLABORATION et al., 2013b](#), je définis le paramètre de Compton intrinsèque $\hat{Y}_{500}$ tel que

$$\hat{Y}_{500,i} = \hat{A}_{tSZ,i} E(z_i)^{-2/3} \left(\frac{D_A(z_i)}{500 \text{ Mpc}} \right)^2, \quad (4.26)$$

avec $D_A(z)$ la distance angulaire en Mpc et z_i le redshift du quasar à la position $\vec{x}_i$. Pour des amas de galaxies virialisés, le paramètre de Compton intrinsèque ne dépend que de la masse de l'amas.

[ARNAUD et al., 2010](#) trouve une relation entre l'amplitude A_{tSZ} du signal tSZ et la masse de l'amas virialisé dans une sphère de rayon R_{500} :

$$\widehat{M}_{500,i}^\alpha = \left[(1-b) \widehat{M}_{500,i,true} \right]^\alpha = \left[3 \times 10^{14} \left(\frac{h}{0.7} \right)^{-1} \right]^\alpha \frac{\hat{A}_{tSZ,i} E(z)^{-2/3}}{A_x} M_\odot^\alpha \quad (4.27)$$

avec $\alpha = 1.78$ et $A_x(z) = 2.925 \times 10^{-5} \times 0.6145 \times \left(\frac{h}{0.7} \right)^{-1} \times D_A^{-2}(z) \times \left(\frac{\pi}{180} \frac{1}{60} \right)^{-2} \text{ arcmin}^2$. $\widehat{M}_{500,i,true}$ est la vraie masse de l'amas ; on mesure cependant une masse biaisée, $\widehat{M}_{500,i}$. Le paramètre de biais b prend à la fois en compte la possible violation de l'équilibre hydrostatique et aussi des erreurs d'étalonnage des instruments X. Ce biais est de $(1-b) \sim 0.6 - 0.7$ pour que les comptages d'amas soient compatibles avec la cosmologie FDC ([PLANCK COLLABORATION et al., 2014b](#) ; [PLANCK COLLABORATION et al., 2015i](#)).

Il est donc possible de dériver une relation $\widehat{M}_{500,i} - \hat{Y}_{500,i}$ à partir des deux dernières équations :

$$\frac{\widehat{M}_{500,i}}{10^{13} M_\odot} = \left(\frac{h}{0.7} \right)^{1/\alpha-1} \left[\frac{\hat{Y}_{500,i}}{2.00 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2} \right]^{1/\alpha}. \quad (4.28)$$

On remarque que $\hat{Y}_{500,i}$ ne dépend en fait que de la masse de l'amas (et de la cosmologie) et a l'avantage, contrairement à la masse, d'être proportionnel à A_{tSZ} . En supposant une distribution normale de $\hat{A}_{tSZ}$ ou de $\hat{Y}_{500}$, je travaille avec les valeurs moyennes de ces quantités, valeurs qui sont significatives.

Extraction sur les simulations

Je construis un catalogue simulé de 296 109 amas avec des positions aléatoires sur le ciel et une même distribution en redshift que les quasars de *BOSS*. J'ajoute, sur les cartes *Planck*, au niveau des positions aléatoires données par le catalogue, un signal tSZ qui suit le profil spatial introduit dans le chapitre précédent dans la section 3.4.1. Je crée ainsi des cartes simulées. Si $m'_\nu(\vec{x})$ est la carte originale alors la carte simulée s'obtient comme il suit : $m_\nu(\vec{x})^s = a_{tSZ,i} \cdot S_{tSZ}(\nu)$. L'amplitude $a_{tSZ,i}$ dépend du paramètre de Compton intrinsèque $(Y_{500})_{input}$ que je fixe ici à $12.02 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2$. En utilisant l'équation 4.28, on peut déterminer la masse des amas qui est de $M_{500} = 2.74 \times 10^{13} M_\odot$.

J'extrais l'amplitude de l'effet tSZ avec le matched filter multi-fréquence sur le catalogue simulé au complet. Les résultats sont présentés dans la première partie du tableau 4.2. Les valeurs extraites sont compatibles à 2σ avec les valeurs injectées et le χ^2 des résidus moyens réduit est proche de 1 comme attendu.

Extraction sur les données

Je vais ensuite utiliser le matched filter tSZ sur les données qui sont largement dominées pour une émission de type poussière. Je me concentre ensuite sur les quasars sans contrepartie *FIRST*, c'est-à-dire avec une contamination synchrotron moindre. Je travaille

	$\chi^2/7$	Y_{500} (10^{-6} arcmin^2)	M_{500} ($10^{13} M_{\odot}$)
<i>input</i>	-	12.02	2.74
<i>output</i>	0.87	13.61 ± 0.79	2.94 ± 0.10

TABLE 4.2 – Comparaison des caractéristiques de sources d’émission tSZ entre les valeurs injectées et les valeurs extraites.

sur les sous-catalogues de quasars délimités par des intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Sur toute la population, j’obtiens un $\chi^2/7$ réduit des résidus moyens très élevé de 520.8 comme attendu puisque la poussière domine. La figure 4.2 traduit la grande valeur du χ^2 sous forme de résidus. J’indique l’évolution du χ^2 des résidus moyens dans la figure 4.3. A part pour les quasars avec un redshift $z < 0.5$ qui sont peu nombreux et émettent peu de signal, le $\chi^2/7$ reste très élevé.

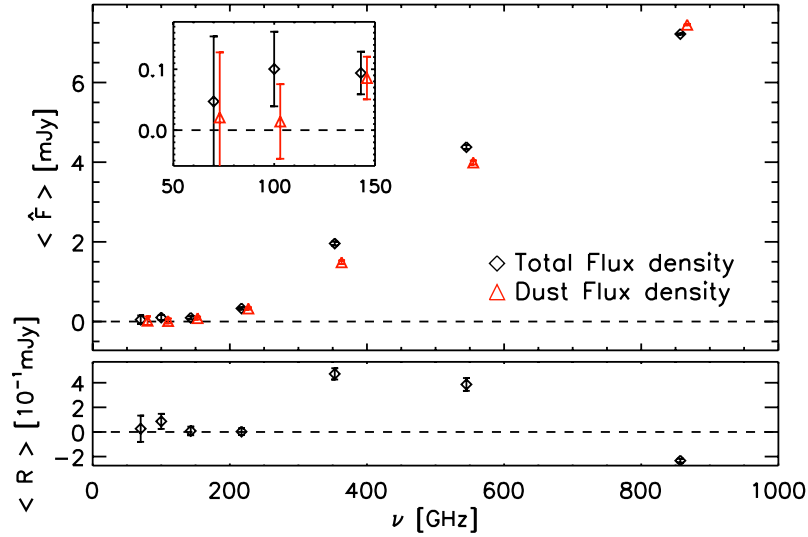


FIGURE 4.2 – *En haut* : le spectre d’émission moyen à la position des quasars de BOSS (losanges noirs), le spectre de l’émission du tSZ (triangles rouges). *En bas* : les résidus, très significatifs. Population de quasars : quasars sans contrepartie FIRST.

Il est cependant possible d’estimer une évolution du paramètre de Compton en fonction du redshift sachant que ce paramètre est en fait totalement contaminé par l’émission de poussière qui est en partie capturée par le matched filter tSZ. La figure 4.4 présente cette évolution. En utilisant un filtre mieux adapté aux données, le matched filter poussière +tSZ, capable de séparer les deux composantes, on obtient des valeurs du paramètre de Compton bien plus faibles (cf figure 4.24).

Extraction à 100 GHz et 143 GHz

L’émission de poussière domine en fait pour les fréquences supérieures à 200 GHz. Il paraît donc judicieux de restreindre l’analyse dans un premier temps aux basses fréquences où le signal tSZ est susceptible d’être plus significatif comparé à la poussière. Je conserve ici seulement deux fréquences 100 GHz et 143 GHz, fréquences pour lesquelles l’émission tSZ est normalement négative. Je procède de la même manière que précédemment et j’obtiens alors la figure 4.5. Aucun signal tSZ significatif n’est extrait. J’ai donc besoin d’un levier à haute-fréquence pour retirer l’émission de poussière. Cette émission quoique plus

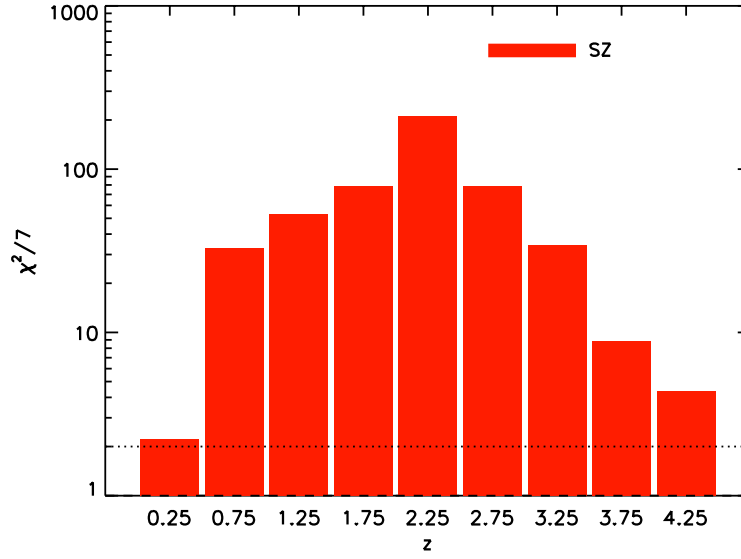


FIGURE 4.3 – Evolution du $\chi^2/7$ des résidus moyens en fonction du redshift pour un filtrage avec l'émission tSZ. Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.

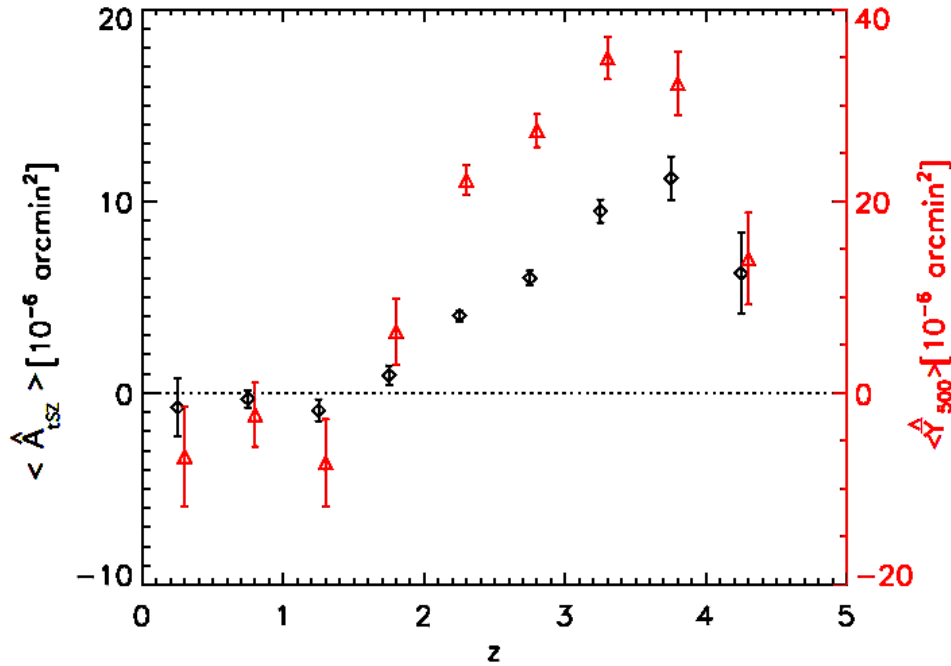


FIGURE 4.4 – Evolution de l'amplitude du signal tSZ (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque (triangles rouges) avec le redshift . Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.

faible à basse fréquence peut compenser le signal tSZ sous-dominant, qui est négatif en dessous de 217 GHz, et expliquer l'absence de flux.

4.2 Première hypothèse : l'émission de poussière domine

La forme du spectre obtenu suggère un corps gris qui est une signature typique des émissions de poussières. Ces poussières, qui émettent dans les micro-ondes, sont des pe-

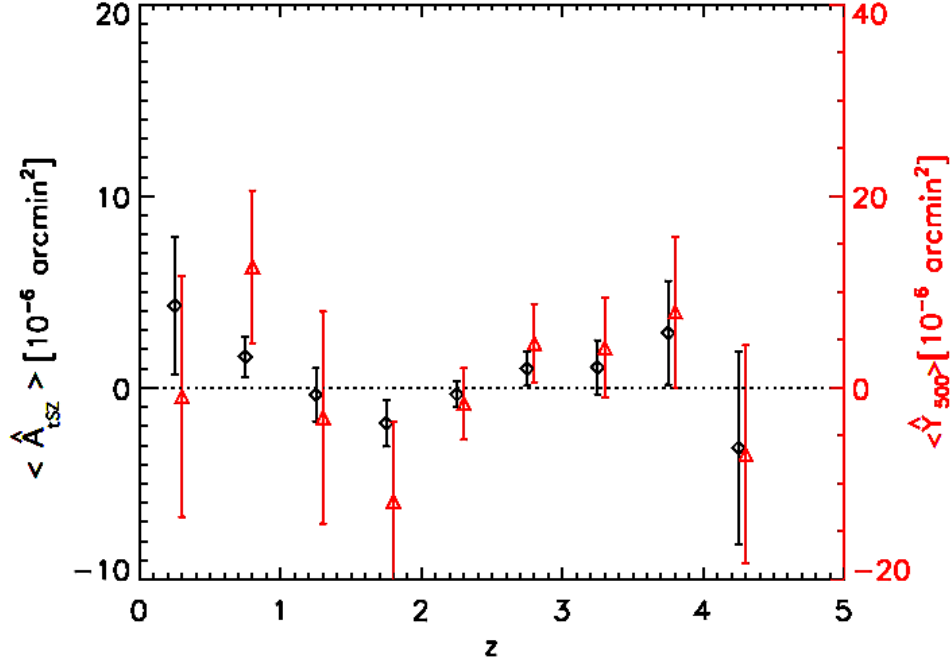


FIGURE 4.5 – Evolution de l’amplitude du signal tSZ (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque (triangles rouges) avec le redshift . Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*. Fréquences *Planck* utilisées : 100 GHz et 143 GHz.

tites molécules chauffées par les étoiles environnantes. Il est probable que les poussières détectées à la position des quasars de *BOSS* proviennent des galaxies hôtes des quasars. Elles pourraient aussi provenir d’amas de galaxies qui sont aussi riches en poussières. Pour extraire la poussière, je vais utiliser le matched filter multi-fréquences en remplaçant le spectre du tSZ par le spectre de l’émission de poussière que je vais introduire ci-dessous.

4.2.1 Modèle de poussière : un corps gris

Je vais m’appuyer sur un spectre de poussière standard, le corps gris qui est notamment introduit dans le [BELEN et al., 2006](#) pour modéliser l’émission de poussière des quasars. Plus spécifiquement, l’émission de poussière est ici thermique et peut être décrite par un corps noir.

Je pars d’un nuage de poussière d’une densité massique $\rho(s, \vec{d})$ avec s la coordonnée ligne de visée et $\vec{d}$ les coordonnées dans le plan orthogonal à cette ligne. $s = 0$ correspond à la coordonnée avant le nuage et s_0 celle en sortie du nuage. Soit $I_{\text{dust},\nu}(s, \vec{d})$ l’intensité spécifique de l’émission de poussière. Elle varie au sein du nuage entre $s = 0$ et s_0 . Une partie de ce flux est absorbée par la poussière tandis que cette même poussière, chauffée par les étoiles, émet elle aussi.

$$\frac{dI_{\text{dust},\nu}}{ds}(s, \vec{d}) = \epsilon_\nu(s, \vec{d}) - \alpha_\nu(s, \vec{d}), \quad (4.29)$$

avec $\epsilon_\nu(s)$ un terme d’émission et $\alpha_\nu(s)$ un terme d’absorption. J’introduis κ_ν le coefficient d’absorption massique de la poussière telle que $\alpha_\nu(s) = \kappa_\nu \cdot \rho(s, \vec{d}) I_{\text{dust},\nu}$. Suivant [BELEN et al., 2006](#), j’adopte le modèle loi de puissance $\kappa_\nu = \kappa_0 \left(\frac{\nu}{249.8 \text{ GHz}} \right)^{\beta_d}$ avec $\kappa_0 = 0.4 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$ et β_d l’exposant de la loi de puissance qui dépend de la nature des poussières. Notons que la valeur de κ_0 varie d’une galaxie à une autre et peut jouer un rôle important sur les

estimations de la masse de poussière. La systématique qu'entraîne la fixation de cette valeur ne sera pas étudiée par la suite.

Les poussières sont en équilibre thermique avec leur environnement. Leur émission peut donc s'écrire comme un corps noir de température T_d , $B_\nu(T_d)$. Je réécris le terme d'émission ϵ_ν comme il suit en prenant en compte la densité massique des poussières et en supposant l'absorption aussi efficace que l'émission : $\epsilon_\nu(s, \vec{d}) = \kappa_\nu \cdot \rho(s, \vec{d}) B_\nu(T_d)$.

Comme $I_{dust,\nu}(0, \vec{d}) = 0$ avant le nuage de poussière, les relations précédentes aboutissent à l'expression suivante de l'intensité spécifique :

$$I_{dust,\nu}(s_0, \vec{d}) = B_\nu(T_d)(1 - e^{-\tau_d(s_0)}) \quad (4.30)$$

avec le chemin optique $\tau_d(s_0) = \kappa_\nu \cdot \int_0^{s_0} \rho(s, \vec{d}) ds$. Je me place dans l'approximation des nuages fins du point de vue optique donc tels que $\tau_d(s_0) \ll 1$. Je peux donc écrire l'intensité comme ci-dessous :

$$I_{dust,\nu}(s_0, \vec{d}) = B_\nu(T_d) \cdot \tau_d = B_\nu(T_d) \cdot \kappa_\nu \cdot \int_0^{s_0} \rho(s, \vec{d}) ds \quad (4.31)$$

La luminosité correspondante pour le nuage de poussière s'écrit :

$$\begin{aligned} L_{dust,\nu} &= \iint I_{dust,\nu}(s_0, \vec{d}) d(\vec{d}) d\Omega \\ &= 4\pi B_\nu(T_d) \cdot \kappa_\nu \cdot \int \int_0^{s_0} \rho(s, \vec{d}) d(\vec{d}) ds \\ &= 4\pi B_\nu(T_d) \cdot \kappa_\nu \cdot M_{dust,tot} \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec $M_{dust,tot} = \int \int_0^{s_0} \rho(s, \vec{d}) d(\vec{d}) ds$ la masse de poussière du nuage.

Le flux reçu sur terre s'exprime comme il suit :

$$\begin{aligned} f_{dust,\nu} &= \frac{L_{dust,(1+z)\nu}(1+z)}{4\pi D_L^2(z)} \\ &= \frac{4\pi B_{(1+z)\nu}(T_d) \cdot \kappa_{(1+z)\nu} \cdot M_{dust,tot}(1+z)}{4\pi D_L^2(z)} \\ &= B_{(1+z)857\text{GHz}}(T_d) \cdot \kappa_{(1+z)857\text{GHz}} \cdot M_{dust,tot} \frac{(1+z)}{D_L^2(z)} \frac{B_{(1+z)\nu}(T_d)}{B_{(1+z)857\text{GHz}}(T_d)} \frac{\kappa_{(1+z)\nu}}{\kappa_{(1+z)857\text{GHz}}} \\ &= a_{dust} \cdot \frac{B_{(1+z)\nu}(T_d)}{B_{(1+z)857\text{GHz}}(T_d)} \frac{\kappa_{(1+z)\nu}}{\kappa_{(1+z)857\text{GHz}}} \\ &= a_{dust} \cdot \frac{B_\nu(\frac{T_d}{1+z})}{B_{857\text{GHz}}(\frac{T_d}{1+z})} \frac{\kappa_\nu}{\kappa_{857\text{GHz}}} \\ &= a_{dust} \cdot \text{Dust} \left(\frac{T_d}{1+z}, \beta_d, \nu \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec $a_{dust} = B_{(1+z)857\text{GHz}}(T_d) \cdot \kappa_{(1+z)857\text{GHz}} \cdot M_{dust,tot} \frac{(1+z)}{D_L^2(z)}$, l'amplitude de l'émission de poussière qui correspond à la densité de flux de poussière observé à 857 GHz. Notons que $\text{Dust}(\frac{T_d}{1+z}, \beta_d, \nu) \propto \nu^{\beta_d} B_\nu(\frac{T_d}{1+z})$ est un corps gris à savoir le produit d'une loi de puissance avec une émission de corps noir. A la différence du tSZ, le spectre du corps noir dépend du redshift de la source à travers le paramètre $\frac{T_d}{1+z}$.

Tout comme le tSZ, le spectre de poussière est modifié par la réponse spectrale du détecteur. J'introduis des ν_{eff} spécifiquement adaptées à la poussière et qui dépendent

$T_d(K)$	β_d	z								
-	-	-	ν (GHz)	70	100	143	217	343	545	857
25	2.5	1	$\nu_{eff,dust}$ (GHz)	71.6	103.6	145.8	225.1	362.7	550.5	828.4
25	2.5	2	$\nu_{eff,dust}$ (GHz)	71.6	103.5	145.7	224.8	361.9	548.1	822.4
25	2.5	3	$\nu_{eff,dust}$ (GHz)	71.6	103.4	145.5	224.5	361.1	545.5	816.3
30	2	1	$\nu_{eff,dust}$ (GHz)	71.5	103.4	145.6	224.8	362.4	550.1	828.6
30	2	2	$\nu_{eff,dust}$ (GHz)	71.5	103.4	145.5	224.6	361.8	548.2	823.6
30	2	3	$\nu_{eff,dust}$ (GHz)	71.5	103.3	145.4	224.3	361.1	546.2	818.7

TABLE 4.3 – Equivalence entre les fréquences nominales et les fréquence effectives causées par l'étalement de la réponse des détecteurs.

de T_d et de β_d . Je présente certaines valeurs dans le tableau 4.3. Le véritable spectre de poussière est donné comme il suit :

$$S_{dust} \left(\frac{T_d}{1+z}, \beta_d, \nu \right) = Dust \left(\frac{T_d}{1+z}, \beta_d, \nu_{eff,dust} \left[\frac{T_d}{1+z}, \beta_d, \nu \right] \right) \quad (4.34)$$

Je fais l'hypothèse que l'émission de poussière a un profil spatial équivalent à celui d'un amas de galaxies ; j'utilise donc le profil précédent déjà employé pour extraire les flux à chaque fréquence et le tSZ. Comme ce profil est quasi ponctuel, ce n'est pas une hypothèse très forte. La mini-carte d'émission *Planck* s'écrit alors :

$$m'_\nu(\vec{x}) = a_{dust,i} \cdot S_{dust} \left(\frac{T_d}{1+z}, \beta_d, \nu \right) \cdot \tau_\nu(\vec{x} - \vec{x}_i) + n'_\nu(\vec{x}). \quad (4.35)$$

J'utiliserai par la suite $\widehat{M}_{dust,i}$ qui est la masse du nuage dans une sphère de rayon R_{500} .

$$\widehat{M}_{dust,i} = \frac{D_L^2(z)}{(1+z)} (B_{(1+z)857\text{GHz}}(T_d) \cdot \kappa_{(1+z)857\text{GHz}})^{-1} \widehat{A}_{dust,i} \quad (4.36)$$

avec $\widehat{A}_{dust,i} = C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \cdot a_{dust,i} = 0.552 \cdot a_{dust,i}$, le flux de poussière pour une sphère de rayon R_{500} .

4.2.2 Filtrage "Marginal" sans hypothèse sur T_d et β_d

Je vais dans un premier temps ne pas faire d'hypothèse sur les paramètres. Je vais en fait en chaque point du plan (T_d, β_d) effectuer une extraction. Je pars donc du point (T_d, β_d) ce qui me permet de construire le spectre de poussière. Je peux alors utiliser le matched filter multi-fréquences construit avec le spectre de poussière. Il est aussi possible d'utiliser un matched filter multi-fréquences multi-composantes avec la poussière parmi les composantes. Un tel filtre sera introduit dans la section 4.3.2.

J'estime alors le $\chi^2(T_d, \beta_d)$ des résidus moyens en ce point ainsi qu'une quantité moyenne $\langle \hat{w}_\lambda \rangle(T_d, \beta_d)$ et son erreur $\sigma_{\langle \hat{w}_\lambda \rangle}(T_d, \beta_d)$. Ces deux quantités sont obtenues avec le matched filter. Elles ne dépendent pas seulement de T_d et de β_d mais aussi des données que sont les mini-cartes *Planck* et les positions des quasars, donc de l'échantillon de quasars choisi pour l'étude. J'appelle *data* l'ensemble de ces données par commodité. Par exemple, $\hat{w}_\lambda = \widehat{A}_{dust,i}$ ou $\hat{w}_\lambda = \widehat{M}_{dust,i}$. Quand je dois travailler avec plusieurs émissions (plusieurs λ), j'ai plusieurs $\hat{w}_\lambda$. Je les considère comme non corrélées et je peux les marginaliser séparément.

Je cherche alors la probabilité d'avoir $\hat{w}_\lambda$, T_d et β_d connaissant les données *data* pour pouvoir marginaliser ces quantités sur le plan (T_d, β_d) .

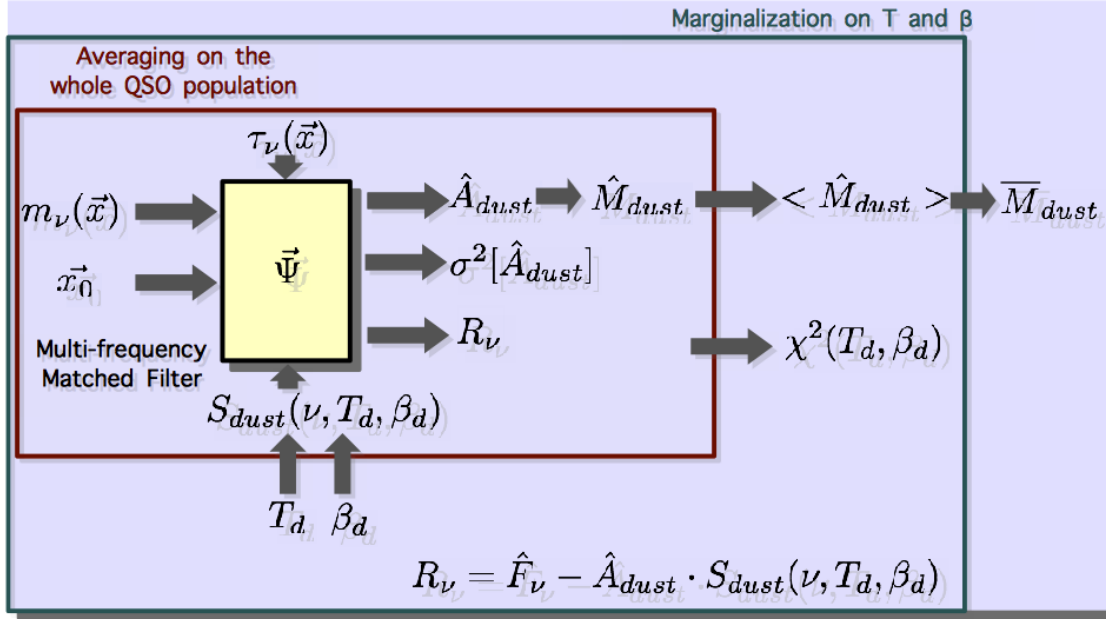


FIGURE 4.6 – Présentation du fonctionnement du matched filter multi-fréquences avec l'approche "marginale" pour une émission de poussière. La masse de poussière $\widehat{M}_{dust}$ de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur les mini-cartes *Planck* $\vec{m}(\vec{x})$ est estimée par un matched filter multi-fréquences en supposant un profil spatial $\tau_\nu(\vec{x})$ et aussi un spectre d'émission, ici de type poussière pour un certain couple (T_d, β_d) . Les masses obtenues étant trop faibles, je travaille avec la masse moyenne. Ensuite, cette valeur est marginalisée sur tout le plan (T_d, β_d) .

Je suppose que la quantité $\hat{w}_\lambda$ est distribuée selon une loi normale. Sa probabilité dépend de $\langle \hat{w}_\lambda \rangle(T_d, \beta_d)$ et de $\sigma_{\langle \hat{w}_\lambda \rangle(T_d, \beta_d)}$ donc de T_d , de β_d et des données *data* :

$$P(\hat{w}_\lambda | T_d, \beta_d, data) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{w}_\lambda - \langle \hat{w}_\lambda \rangle}{\sigma[\langle \hat{w}_\lambda \rangle]} \right)^2 \right). \quad (4.37)$$

La probabilité d'avoir les données *data* connaissant T_d et β_d est donnée par la fonction de vraisemblance suivante :

$$P(data | T_d, \beta_d) \propto \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right) \quad (4.38)$$

avec χ^2 le chi2 des résidus moyens en (T_d, β_d) .

J'opte alors pour une approche Bayésienne en vue cette fois d'avoir la probabilité d'obtenir les paramètres connaissant les données :

$$P(T_d, \beta_d | data) \propto P(T_d, \beta_d) \times \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right). \quad (4.39)$$

Je suppose que le prior $P(T_d, \beta_d)$ est uniforme. Je développe maintenant la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} P(\hat{w}_\lambda, T_d, \beta_d | data) &= P(\hat{w}_\lambda | T_d, \beta_d, data) \times P(T_d, \beta_d | data) \\ &\propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{w}_\lambda - \langle \hat{w}_\lambda \rangle}{\sigma[\langle \hat{w}_\lambda \rangle]} \right)^2 \right) \times \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Avec l'expression de la probabilité précédente, je peux désormais marginaliser les quantités sur le plan (T_d, β_d) :

$$\bar{w}_\lambda = \iiint \hat{w}_\lambda \cdot P(\hat{w}_\lambda, T_d, \beta_d | data) dT_d d\beta_d d\hat{w}_\lambda, \quad (4.41)$$

avec la variance "marginale" suivante :

$$\sigma^2[\bar{w}_\lambda] = \iiint (\hat{w}_\lambda - \bar{w}_\lambda)^2 \cdot P(\hat{w}_\lambda, T_d, \beta_d | data) dT_d d\beta_d d\hat{w}_\lambda. \quad (4.42)$$

Je peux aussi obtenir les valeurs moyennes des paramètres $\bar{T}_d$ et $\bar{\beta}_d$ avec l'approche marginale. Par exemple pour la température, la valeur marginale est obtenue ainsi :

$$\bar{T}_d = \iint T_d \cdot P(T_d, \beta_d | data) dT_d d\beta_d, \quad (4.43)$$

et sa variance de même :

$$\sigma^2[\bar{T}_d] = \iint (T_d - \bar{T}_d)^2 \cdot P(T_d, \beta_d | data) dT_d d\beta_d. \quad (4.44)$$

Je cherche aussi le point de $\chi^2(T_d, \beta_d)$ minimal sur le plan (T_d, β_d) . Si le χ^2 a 7 degrés de liberté puisqu'il est construit à partir de 7 résidus, le χ^2 minimal n'a plus que 5 degrés de liberté. Ce problème sera évoqué dans la section suivante [4.2.3](#).

4.2.3 Validation de la méthode sur simulation

Je construis un catalogue simulé de 296 109 sources placées à des positions aléatoires dans le ciel. Ces sources ont la même distribution en redshift que les quasars de BOSS. Je fabrique des cartes simulées à partir des cartes de *Planck*. A la position des sources du nouveau catalogue, j'ajoute un flux de poussière avec le profil spatial que j'emploie depuis le chapitre précédent qui est ensuite convolué aux différents lobes de *Planck*. Si $m'_\nu(\vec{x})$ est la carte originale alors la carte simulée s'obtient comme il suit : $m_\nu(\vec{x})^s = m'_\nu(\vec{x}) + a_{dust,i} \cdot S_{dust}(\frac{T_d}{1+z_i}, \beta_d, \nu)$. Je suppose qu'il n'y a pas d'émission au niveau des positions aléatoires dans les cartes *Planck* originales. Dans cette section, j'effectue l'extraction à l'aide du matched filter multi-fréquences sur ces cartes simulées. L'amplitude $a_{dust,i}$ dépend du redshift de la source mais aussi de la masse de poussière et des paramètres de l'émission de poussière, T_d et β_d . Je choisis ici la même masse et les mêmes paramètres d'émission pour tous les objets : $(M_{dust})_{input} = 2.5 \times 10^8 M_\odot$, $(T_d)_{input} = 25K$ et $(\beta_d)_{input} = 2.5$. Ces valeurs sont inspirées des résultats de l'extraction au niveau des quasars BOSS dans l'intervalle de redshift $2.5 < z < 4$ (sur les vraies cartes *Planck*) présentés dans la table [4.13](#).

Distribution des χ^2

Je divise aléatoirement le catalogue simulé en 148 sous-échantillons de 2000 quasars. Pour chaque sous-échantillon, je filtre au point d'injection $((T_d)_{input}, (\beta_d)_{input})$ pour obtenir le χ^2 des résidus moyens avec des paramètres fixes. Ensuite je cherche le χ^2 minimal sur le plan (T_d, β_d) donc avec des paramètres libres. Le χ^2 "fixe" doit avoir 7 degrés de liberté tandis que le χ^2 "libre" n'en conserve plus que 5. Je regarde les distributions en cumulatif des deux χ^2 données par la figure [4.7](#) et qui confirment bien mes a priori sur les degrés de libertés. Les distributions sont comparées à des distributions de Student avec différents degrés de libertés. Si les résidus moyens sont distribués selon une loi normale, les χ^2 doivent suivre des lois de Student.

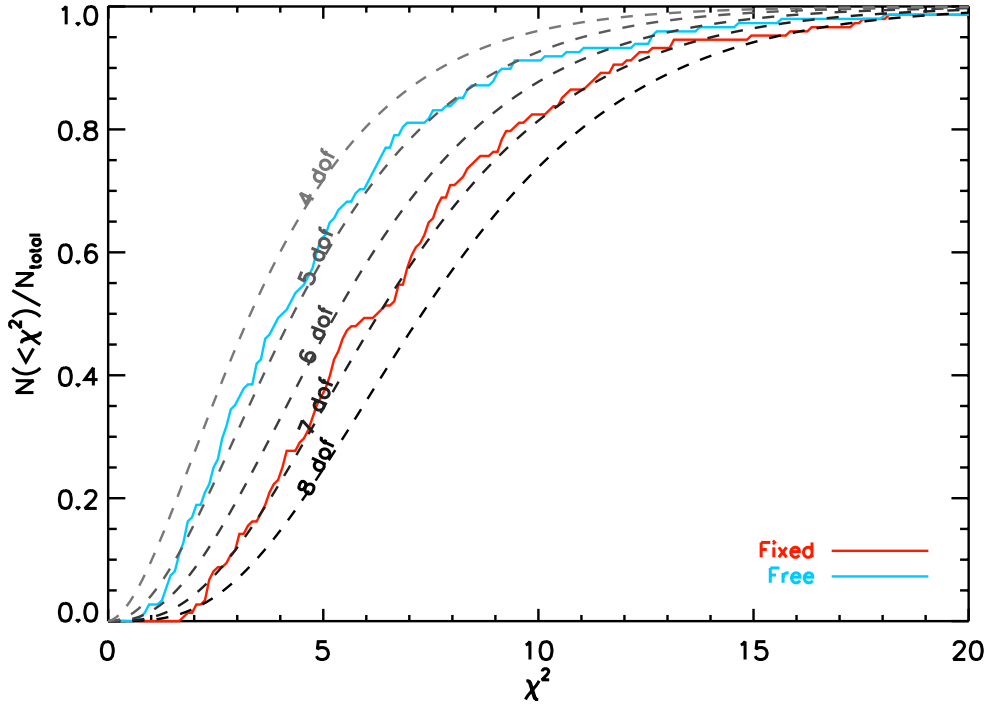


FIGURE 4.7 – En rouge : la distribution cumulée des χ^2 au point d'injection, "Fixed". En bleu : la distribution cumulée des χ^2 minimaux sur le plan (T_d, β_d) , "Free". En pointillées : différentes distributions cumulées associées à des lois de Student à différents degrés de liberté. Figure construite avec un filtrage matched filter multi-fréquences avec un spectre de poussière pour un catalogue simulé de sources de poussière.

Extraction de l'émission de poussière

Cette fois je travaille avec le catalogue simulé complet. Avec le matched filter multi-fréquences j'extrais la masse moyenne de poussière en chaque point du plan. Je peux alors obtenir sa valeur marginale et l'erreur associée. Les résultats de l'extraction sont rangés dans le tableau 4.4 et sont compatibles avec les valeurs d'injection. Le χ^2 minimal réduit est légèrement inférieur à 1 ce qui indique que le modèle d'émission de poussière s'accorde bien avec les données simulées comme je l'attendais.

A ce stade, la méthode que j'emploie paraît robuste. Pour bien faire, je devrais la tester sur d'autres catalogues simulés.

J'effectue aussi un filtrage au niveau de 296 109 positions aléatoires dans les vraies cartes *Planck* en fixant la température T_d à 25K et β_d à 2.5. Normalement, les flux extraits sont compatibles avec zéro, la masse de poussière estimée devrait donc l'être. C'est en effet le cas comme l'indique le tableau 4.5.

4.2.4 Résultats : extraction pour tous les QSO *BOSS*

J'effectue cette fois le filtrage au niveau des quasars *BOSS* sur les cartes *Planck* à la fois pour toute la population de quasars mais aussi sur des sous-échantillons notamment pour chercher une évolution des caractéristiques de la poussière avec le redshift. Dans tous les cas, je suppose que les nuages de poussière ont la même température T_d (au redshift près) et le même exposant β_d . Cette hypothèse peut entraîner des systématiques qui seront explorées dans la section 4.5.

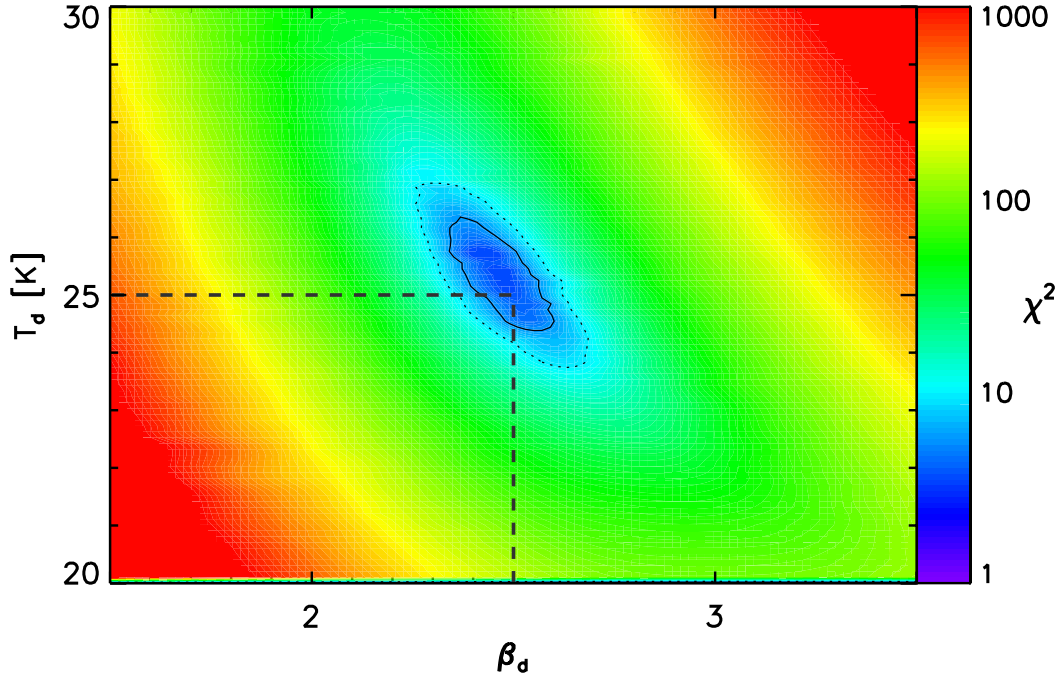


FIGURE 4.8 – Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) . La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Les lignes-tirets horizontales et verticales indiquent les valeurs d'injection. Il s'agit d'un filtrage matched filter multi-fréquences avec un spectre de poussière pour un catalogue simulé de sources de poussière.

Filtre	$\chi^2/5$	T_d (K)	β_d	$\overline{M_{dust}}$ ($10^8 M_\odot$)
<i>input</i>	-	25	2.5	2.50
Poussière	0.7	25.2 ± 0.7	2.48 ± 0.09	2.52 ± 0.26

TABLE 4.4 – Comparaison des caractéristiques des sources d'émission de poussière entre les valeurs injectées et les valeurs extraites par un filtrage puis marginalisées sur le plan (T_d, β_d) . Le χ^2 présenté ici est la valeur minimale sur ce plan (T_d, β_d) .

Dans un premier temps, j'effectue un filtrage avec des valeurs fixes de T_d et de β_d . Suivant [BEELEN et al., 2006](#), je prends $T_d = 40\text{K}$ et $\beta_d = 1.6$. J'obtiens alors les résidus présentés dans la figure 4.9. Le χ^2 obtenu est de 445.8 pour 7 degrés de liberté : ce modèle ne s'ajuste pas bien avec l'émission en provenance des poussières comme le suggère aussi les résidus importants. C'est en fait ce résultat qui m'a poussé à développer l'approche marginale ci-dessus pour obtenir des valeurs de T_d et de β_d qui ajustent bien le spectre de poussière avec les données.

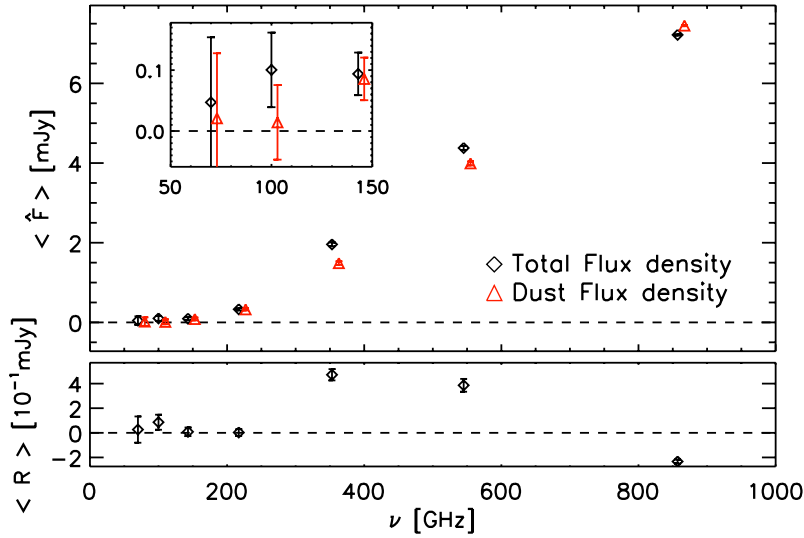
Ensuite, j'effectue un filtrage en chaque point (T_d, β_d) pour obtenir une masse moyenne $\langle \widehat{M_{dust}} \rangle$ sur l'échantillon de quasar considéré. J'obtiens ensuite la masse marginalisée $\overline{M_{dust}}$ sur le plan (T_d, β_d) .

Pour la totalité des quasars de *BOSS*, j'ai un $\chi^2/5$ minimal de 5.2 en $(T_d)_{\chi^2_{min}} = 18.7\text{ K}$ et en $(\beta_d)_{\chi^2_{min}} = 2.79$. Les valeurs marginalisée sont les suivantes : $T_d = 19.1 \pm 0.8\text{ K}$, $\beta_d = 2.71 \pm 0.13$ (compatible avec le point de χ^2 minimum) et une masse de poussière $\overline{M_{dust}} = (0.84 \pm 0.07) \times 10^8 M_\odot$. Cette masse est plus petite que les masses de poussière estimées dans [BEELEN et al., 2006](#). Il s'agit cependant d'une étude qui porte sur des quasars

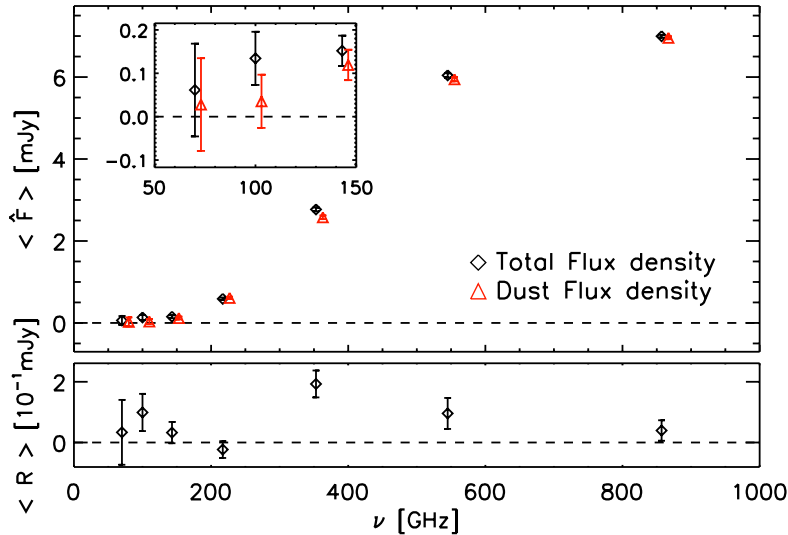
Filtre	$\chi^2/5$	T_d (K)	β_d	$\langle M_{\text{dust}} \rangle$ ($10^8 M_\odot$)
<i>input</i>	-	-	-	2.50
Poussière	0.7	25 (fixé)	2.5 (fixé)	0.003 ± 0.0012

TABLE 4.5 – Extraction de la masse de poussière au niveau de positions aléatoires dans les cartes *Planck*. Cette masse est bien compatible avec zéro.

très brillants dans la gamme des micro-ondes.



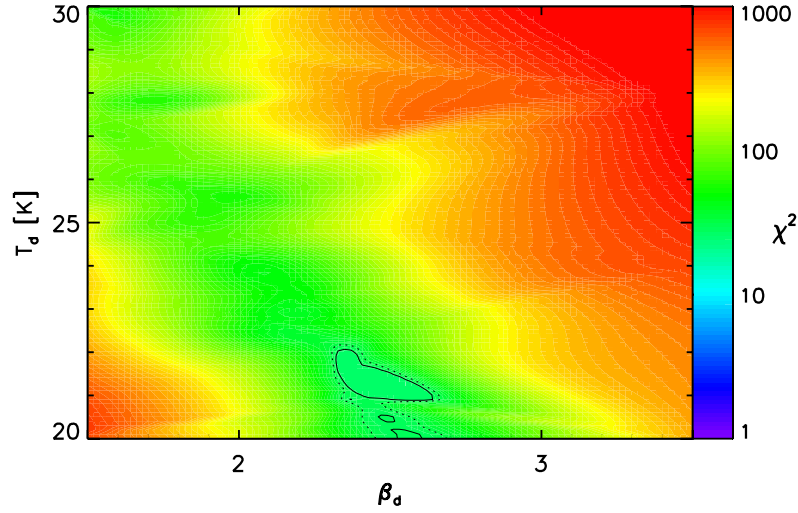
(a) *En haut* : le spectre d'émission moyen à la position des quasars de *BOSS* (losanges noirs), le spectre de l'émission de poussière (triangles rouges). *En bas* : les résidus. Le filtrage a été réalisé pour $T_d = 40$ K et $\beta_d = 1.6$, valeurs compatibles avec le Beelen et al.



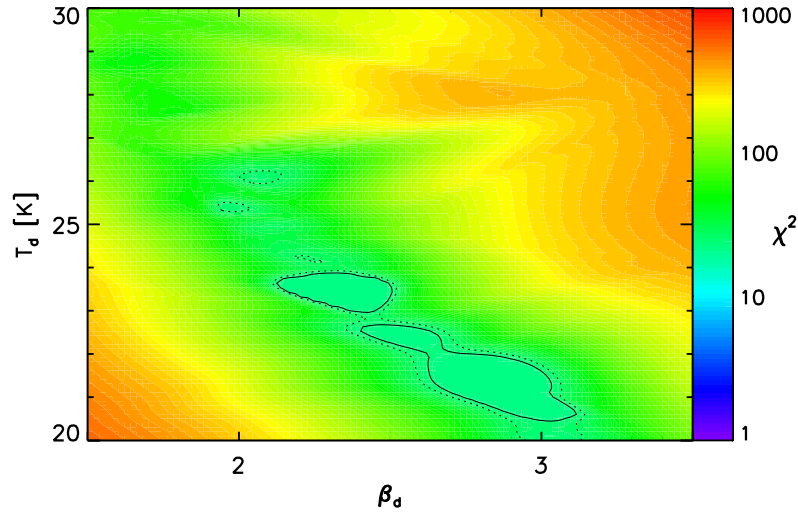
(b) *En haut* : le spectre d'émission moyen à la position des quasars de *BOSS* (losanges noirs), le spectre de l'émission de poussière (triangles rouges). *En bas* : les résidus. Le filtrage a été réalisé pour $T_d = 18.7$ K et $\beta_d = 2.79$ qui donnent le χ^2 minimal.

FIGURE 4.9 – Comparaison des résidus pour des paramètres de poussières fixés ou laissés libres.

Le χ^2 reste important, même si les résidus sont plus faibles qu'en fixant les paramètres comme l'indique la figure 4.9. Cela semble indiquer que le modèle de poussière ne s'ajuste pas totalement avec l'émission. C'est probablement dû à une variabilité des propriétés des quasars. J'explorerai par la suite plusieurs sous-échantillons découpés en intervalles de redshift. Certaines propriétés des poussières semblent évoluer avec le redshift comme l'indique l'évolution du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour des échantillons de quasars différents sur la figure 4.10.



(a) Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour tous les quasars *BOSS*.



(b) Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour les quasars avec un redshift tel que $2.5 < z < 4$.

FIGURE 4.10 – Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) . La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Il s'agit d'un filtrage matched filter multi-fréquences avec un spectre de poussière.

Toujours par rapport au [BEELEN et al., 2006](#) ; mais aussi par rapport au modèle d'émission proposé par la collaboration ACT pour les quasars DR7+DR10 ([CRICHTON et al., 2015](#)), et la détection de l'émission de poussières chez les quasars dans *Herschel* ([DAI et al., 2012](#)), ma température de poussière est systématiquement plus petite (20 K contre 40 K pour les deux premières études, 34 K pour la troisième) que la leur et mon para-

mètre β_d est systématiquement plus grand que les valeurs précédemment mesurées qui s'établissent autour de 1.6 donc systématiquement en dessous de 2. Ce résultat sera à nuancer si l'on prend en compte l'évolution de ces paramètres avec le redshift comme je le ferai par la suite. Une cause possible vient de la simplicité du modèle qui suppose une même température et un même β_d pour tous les quasars. Il est possible de complexifier le modèle d'émission de la poussière par exemple en utilisant plusieurs corps gris, donc avec plusieurs températures et plusieurs exposants, ce que je ne ferai pas ici. Comme je l'ai mentionné plus haut, j'introduirai cependant un modèle de poussière qui prend en compte une dispersion des températures dans la section 4.5.

Si je fixe $\beta_d = 1.6$ comme dans [BELEN et al., 2006](#) et que je laisse la température libre, mon χ^2 minimal est de 81.5 pour 6 degrés de liberté ce qui exclut cette valeur de β_d .

4.2.5 Résultats : évolution des caractéristiques de l'émission de poussière

Cette fois, je travaille sur les sous-échantillons de quasars dans des intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Les paramètres T_d et β_d peuvent varier d'un intervalle à l'autre.

Je regarde en premier lieu l'évolution des valeurs marginalisées des quantités T_d et β_d et la quantité $T_d \times \beta_d^{0.6}$ qui prend en compte la dégénérescence entre les deux paramètres de l'émission de poussière. L'évolution de ces quantités est présentée dans la figure 4.11. Il semble que les quasars à bas redshift ($z < 2$) ont une température plus élevée et un β_d plus petit que leur équivalents à haut redshift ($z > 2$). De plus, la quantité $T_d \times \beta_d^{0.6}$ n'évolue pas pour les quasars avec $z < 2$ et augmente par la suite suggérant une différence entre les deux populations de quasars. N'oublions pas que les quasars *BOSS* que j'utilise ont d'abord été sélectionnés pour être à haut redshift. Les quasars à bas redshift ont été sélectionnés à cause de dégénérescences dans le processus de sélection.

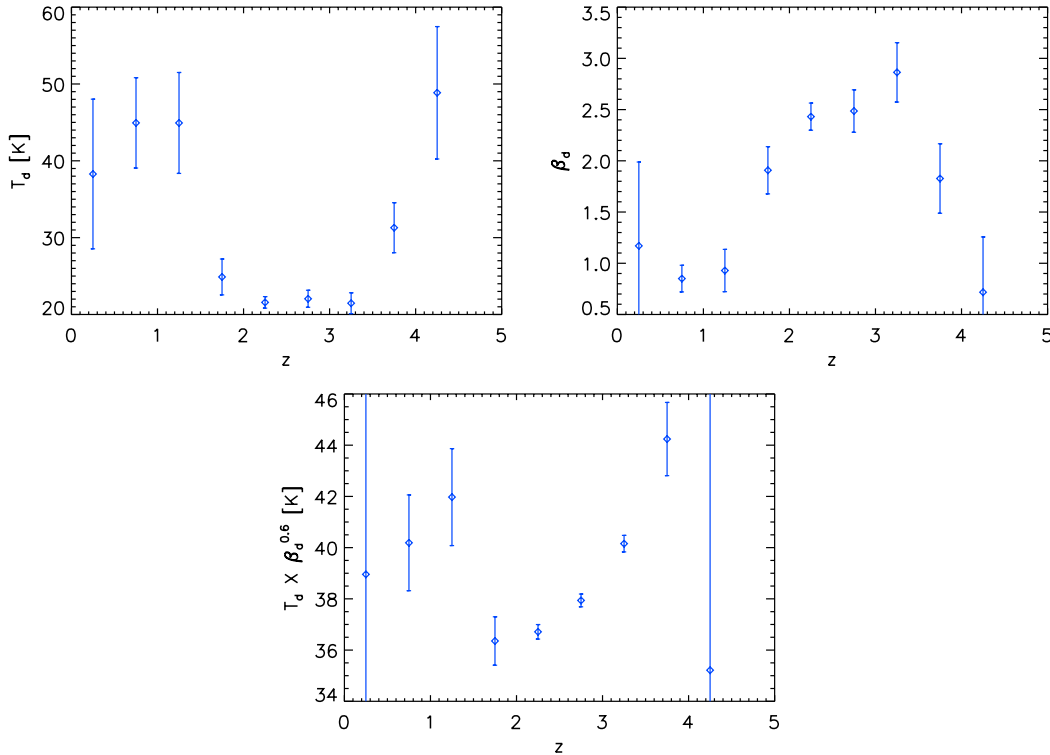


FIGURE 4.11 – Evolution des différents paramètres de poussière en fonction du redshift. Deux populations aux propriétés différentes semblent émerger l'une à bas redshift ($z < 2$) et l'autre à haut redshift ($z > 2$)

Tout comme le flux de poussière, la masse de poussière marginalisée croît jusqu'à $z \sim 2$ pour atteindre un maximum de $\sim 5 \times 10^8 M_{\odot}$ (de 8 mJy pour le flux de poussière) puis décroît par la suite comme l'indique la figure 4.12. L'évolution de cette masse semble suivre celle du taux de formation d'étoile présentée par la même figure et tiré de [MADAU et al., 2014](#). Les jeunes étoiles ont tendance à chauffer les poussières, principalement via leur rayonnement ultraviolet. Mais, contrairement aux galaxies, les quasars dispose d'un autre mécanisme de chauffage des poussières, le noyau galactique lui-même. La contribution de la formation d'étoile à la luminosité infrarouge serait de 21% pour les quasars à $z \sim 1$ de 56% pour les quasars à $z \sim 2$ ([KIRKPATRICK et al., 2012](#)) suggérant une évolution de la part du chauffage attribuée au taux de formation d'étoile et donc au noyau galactique actif. Dans ses conditions, il devient difficile de relier taux de formation d'étoile et masse de poussière. Il faudrait en effet lever la dégénérescence avec le chauffage par le noyau galactique pour le faire. Notons aussi que le taux d'accrétion du trou noir central pour un quasar suit presque la même évolution en redshift que le taux de formation d'étoiles. La figure 4.13 montre que la masse de poussière diminue quand la magnitude absolue dans la bande i du quasar diminue. Cette bande qui va de 700 à 800 nm est dominée par la luminosité infrarouge du quasar, donc par l'émission de poussière, mais aussi par une émission en provenance du noyau galactique dans des proportions qui restent à déterminer. La diminution de la masse de poussière, quand la magnitude en bande i diminue, comme l'indique la figure 4.13, pourrait s'expliquer par un chauffage en provenance du noyau galactique actif plus faible.

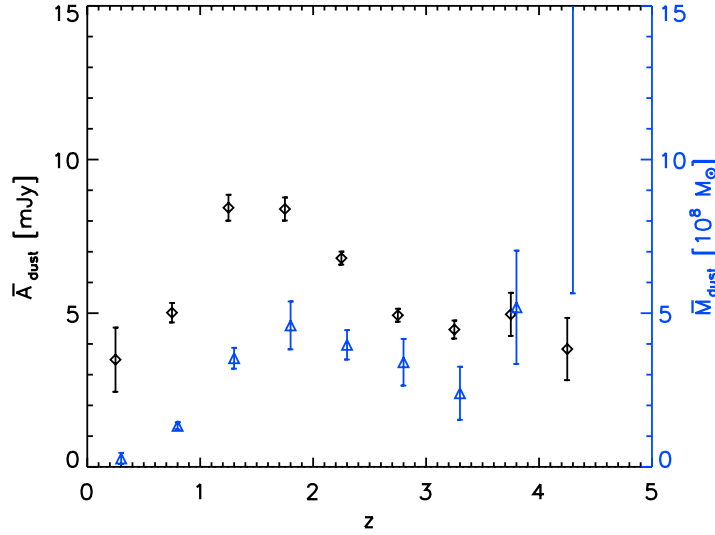
4.3 Seconde hypothèse : la poussière domine à côté d'autres émissions sous-dominantes comme le tSZ

L'émission de poussière domine et le filtrage qui ne prend en compte que cette émission de poussière donne des résultats convenables. Cependant, les χ^2 présentés dans la figure 4.14 sont presque toujours significativement au dessus de 1, ce qui suggère la présence d'émission sous-dominantes non prises en compte. L'extraction des flux avec le filtre mono-fréquence suggère une émission de type synchrotron pour les quasars qui ont une contrepartie dans *FIRST*, c'est-à-dire une émission synchrotron à 1.4 GHz. Il est possible qu'il y ait aussi un signal tSZ. Il devient nécessaire de développer une nouvelle méthode pour séparer les différentes composantes d'une émission en connaissant leurs spectres.

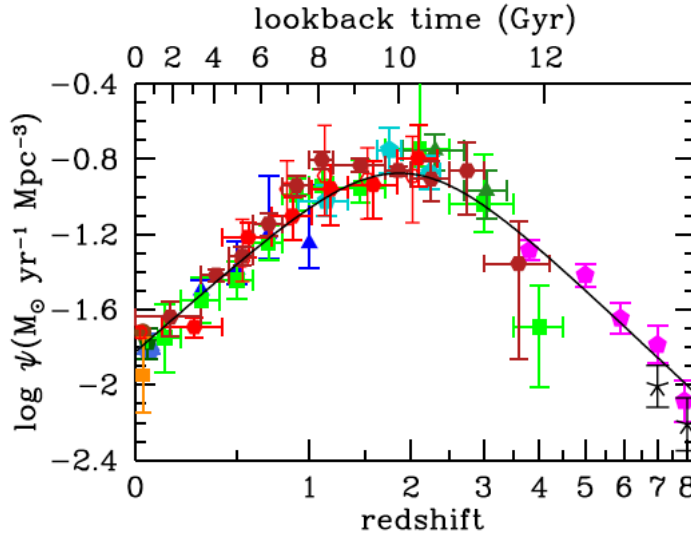
Je vais donc travailler ici avec les trois émissions -poussières, tSZ et synchrotron- pour réaliser les combinaisons de filtrage suivantes qui sont autant d'hypothèse sur les émissions en provenance des structures étudiées :

- Filtrage pour une émission poussière (déjà réalisé dans la section précédente).
- Filtrage pour une émission tSZ (déjà réalisé deux sections auparavant).
- Filtrage avec deux composantes à séparer : poussière et tSZ.
- Filtrage avec deux composantes à séparer : poussière et synchrotron.
- Filtrage avec trois composantes à séparer : poussière, tSZ et synchrotron.

Je vais principalement chercher à extraire la masse de poussière M_{dust} (liée à l'amplitude de l'émission de poussière), le paramètre de Compton intrinsèque Y_{500} (liée à l'amplitude de l'émission de tSZ) et la luminosité synchrotron L_{synch} que je vais introduire ci-dessous. Je vais aussi comparer les χ^2 des résidus moyens ; le filtrage apportant le minimum étant celui qui s'ajuste le mieux avec les données. Les résultats des différents filtrages sont présentés dans le tableau 4.13 qui se trouve à la fin de ce chapitre.



(a) Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec le redshift.



(b) Evolution du taux de formation des étoiles en fonction du redshift des galaxies d'après [MADAU et al., 2014](#).

FIGURE 4.12 – Comparaison entre le flux/la masse de poussière des quasars et le taux de formation d'étoiles dans les galaxies.

4.3.1 La troisième émission : le synchrotron

J'en profite aussi pour introduire formellement le synchrotron. Je choisis un modèle simple d'émission, une loi de puissance telle que le flux synchrotron est donné par :

$$f_{synch,\nu,i} = a_{synch,i} \cdot synch(\nu) = a_{synch} \cdot \left(\frac{100\text{GHz}}{\nu} \right)^{\alpha_s}. \quad (4.45)$$

Je fixe $\alpha = 0.7$, valeur typique pour l'émission des radio-galaxies ([CONDON, 1992](#); [PETERSON, 1997](#)). Je pourrais aussi développer une approche marginale avec ce paramètre en le laissant libre comme les paramètres de l'émission de poussière mais ce ne sera pas le cas.

Comme le tSZ, et à la différence de l'émission de poussière, le spectre du synchrotron

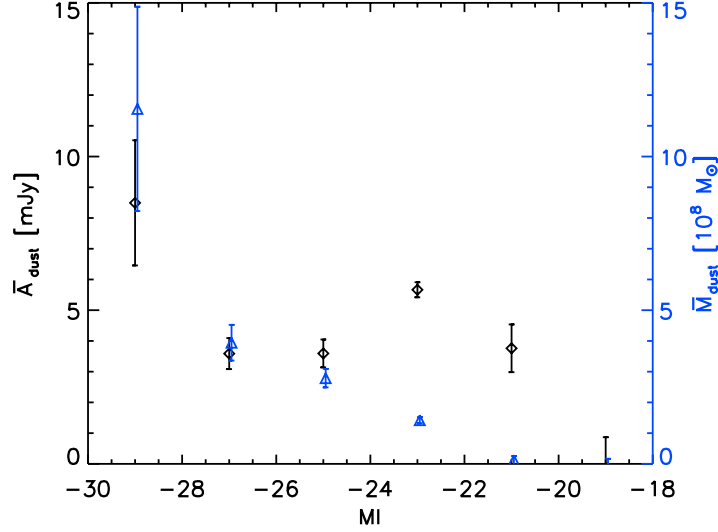


FIGURE 4.13 – Evolution du flux marginalisé de l’émission de poussière à 857GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec la luminosité en bande I.

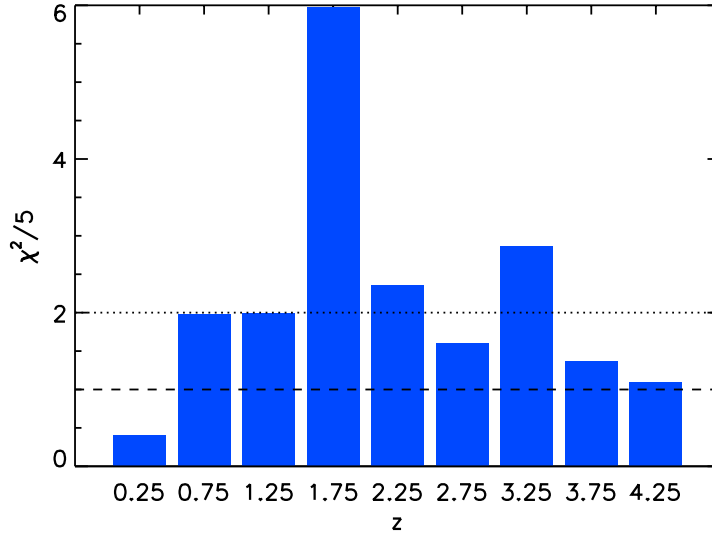


FIGURE 4.14 – Evolution du $\chi^2/5$ minimal sur le plan (T_d, β_d) en fonction du redshift pour un filtrage avec seulement l’émission de poussière. Cette approche fonctionne bien pour la majorité des sous-échantillons.

ne dépend pas du redshift de la source.

Par contre, comme la poussière et le tSZ, le spectre de l’émission synchrotron est lui aussi modifié par l’étalement de la réponse spectrale des détecteurs. Je définis donc des ν_{eff} (présentées dans le tableau 4.6) spécifiques à l’émission synchrotron telles que le vrai spectre synchrotron (modifié par l’étalement) soit donné par :

$$S_{synch}(\nu) = synch(\nu_{eff, synch}[\nu]). \quad (4.46)$$

Je vais ensuite travailler avec la (densité de) luminosité synchrotron à 100 GHz (dans

ν (GHz)	70	100	143	217	343	545	857
$\nu_{eff,synch}[\nu]$ (GHz)	70.4	101.0	141.6	216.0	360.8	543.6	819.9

TABLE 4.6 – Equivalence entre les fréquences nominales et les fréquence effectives causées par l'étalement de la réponse des détecteurs.

le référentiel de la source) pour une sphère de rayon R_{500} :

$$\widehat{L}_{synch,i} = A_{synch,i} \frac{D_L(z_i)^2}{(1+z_i)(1+z_i)^{-\alpha_s}} \quad (4.47)$$

avec avec $A_{synch,i} = C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \cdot a_{synch,i} = 0.552 \cdot A_{synch,i}$, le flux synchrotron pour une sphère de rayon R_{500} , $D_L(z_i)$ la distance de luminosité et z_i le redshift du quasar.

4.3.2 Un dernier outil : le matched filter multi-fréquences multi-composantes

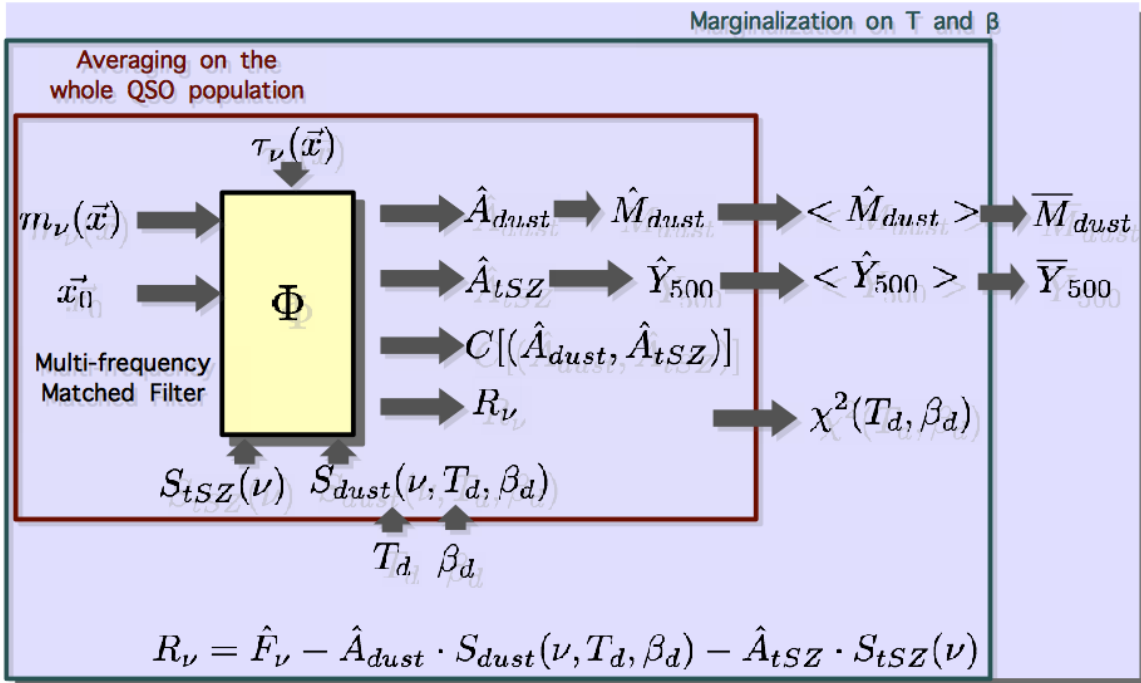


FIGURE 4.15 – Présentation du fonctionnement du matched filter multi-fréquences multi-composantes avec l'approche "marginale" pour une émission de poussière et une émission tSZ. La masse de poussière $\widehat{M}_{dust}$ et le paramètre de Compton intrinsèque $\widehat{Y}_{500}$ de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur les mini-cartes *Planck* $\vec{m}(\vec{x})$ sont estimés par un matched filter multi-fréquences multi-composantes en supposant un profil spatial $\tau_\nu(\vec{x})$ et aussi des spectres d'émission, ici un spectre type poussière pour un certain couple (T_d, β_d) et un autre spectre tSZ. Les masses et les paramètres de Compton obtenus étant trop faibles, je travaille avec la masse moyenne et le paramètre de Compton moyen. Ensuite, ces valeurs sont marginalisées sur tout le plan (T_d, β_d) .

Je vais introduire un nouvel outil, le matched filter multi-fréquences multi-composantes qui a déjà été utilisé dans pour séparer le signal tSZ (dominant) de la poussière au niveau des "Locally Brightest Galaxies" ou LBG (PLANCK COLLABORATION et al., 2013b) et aussi pour dans pour séparer le tSZ du kSZ (PLANCK COLLABORATION et al., 2014d ; PUISIEUX, 2013), donc dans tous les cas pour séparer seulement deux émissions l'une de l'autre. Je vais présenter ce filtre dans sa forme la plus générale adaptée à un nombre N d'émissions.

Je fais cette fois l'hypothèse que mon flux est un mélange de plusieurs émissions avec des spectres différents. Je peux donc exprimer le flux à l'emplacement du quasar i ainsi :

$$f_{\nu,i} = \sum_{\lambda} a_{\lambda,i} \cdot S_{\lambda}(\nu) \quad (4.48)$$

Par la suite, je vais utiliser λ et η pour indexer les différents types d'émissions.

Je construis le nouveau pseudo-filtre comme la combinaison linéaire des matched filters multi-fréquences déjà introduits $\Phi_{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) = \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \vec{\Psi}_{\eta}(\vec{x}, \vec{x}_i, R)$ avec $\vec{\Psi}_{\eta}$ le pseudo filtre associé au matched filter multi-fréquences adapté à l'émission η . $\mathcal{C}_{\lambda,\eta}$ sont des constantes qu'il faudra déterminer par la suite. Le pseudo filtre a une symétrie centrale au niveau du point de coordonnée $\vec{x}_i$. On peut l'écrire de cette façon, comme pour le filtre mono-fréquence et multi-fréquences :

$$\Phi_{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) = \frac{1}{R^2} \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \phi_{\eta} \left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}_i|}{R} \right). \quad (4.49)$$

Je définis une mini-carte filtrée $\Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R)$ comme une certaine combinaison des différentes cartes *Planck* :

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \vec{m}^{tt}(\vec{x}) \bullet \vec{\Psi}_{\eta}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) d\vec{x} \\ &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \vec{m}^{tt}(\vec{q}) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(R\vec{q}) e^{-2\pi i \vec{q} \cdot \vec{x}_i} d\vec{q} \\ &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R). \end{aligned} \quad (4.50)$$

L'estimateur de l'amplitude est donné par cette carte filtrée :

$$\widehat{a_{\lambda,i}} = \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R), \quad (4.51)$$

avec la variance définie par :

$$\begin{aligned} C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} &= \langle \widehat{a_{\lambda,i}} \widehat{a_{\eta,i}} \rangle - \langle \widehat{a_{\lambda,i}} \rangle \langle \widehat{a_{\eta,i}} \rangle \\ &= \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \Omega_{\eta}(\vec{x}_i, R) \rangle - \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle \langle \Omega_{\eta}(\vec{x}_i, R) \rangle. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Pour obtenir un estimateur non biaisé, c'est-à-dire pour avoir $a_{\lambda,i} = \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle$, les coefficients $\mathcal{C}_{\lambda,\eta}$ doivent vérifier la relation suivante :

$$\mathcal{C}_{\lambda,\eta} = [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{\eta,\eta} \quad (4.53)$$

avec $\mathbf{D}_{\lambda,\eta} = \int d\vec{q} \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(q) \right)^t \bullet \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\eta} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(q) \right)$. Notons que $\mathbf{D}_{\eta,\eta} = (\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}])^{-1}$ avec $\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}]$ la variance sur l'amplitude $\widehat{a_{\eta,i}}$ pour un matched filter multi-fréquences mais mono-composante.

Ce qui amène à l'expression suivante pour la variance

$$C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} = [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1}. \quad (4.54)$$

Notons que si l'on suppose les amplitudes $a_{\lambda,i}$ distribuées selon une loi normale et que l'on veut obtenir leurs valeurs moyennes, il faut prendre en compte les corrélations :

$$\langle \vec{a} \rangle = \left[\sum_i \mathbf{C}^{-1}[\vec{a}_i] \right]^{-1} \bullet \left[\sum_i \mathbf{C}^{-1}[\vec{a}_i] \bullet \vec{a}_i \right] \quad (4.55)$$

avec pour variance :

$$\mathbf{C}^{-1}[\langle \vec{a} \rangle] = \left[\sum_i \mathbf{C}^{-1}[\vec{a}_i] \right]^{-1}. \quad (4.56)$$

C'est vrai aussi pour les quantités dérivées des $a_{\lambda,i}$ comme la masse de poussière, le paramètre de Compton intrinsèque ou la luminosité synchrotron.

Les résidus multi-composantes

Le résidus sont désormais la différence entre le flux extrait par le filtre mono-fréquence et le flux reconstruit qui est la somme des différentes émissions :

$$R_{\nu,i} = \widehat{f}_{\nu,i} - \sum_{\lambda} \widehat{a}_{\lambda,i} \cdot S_{\lambda}(\nu). \quad (4.57)$$

La variance sur ces résidus est exprimée comme il suit :

$$\begin{aligned} C[\vec{R}_i]_{\nu,\mu} &= \langle R_{\nu,i} R_{\mu,i} \rangle - \langle R_{\nu,i} \rangle \langle R_{\mu,i} \rangle \\ &= C[\widehat{f}_i]_{\nu,\mu} - \sum_{\lambda,\eta} S_{\lambda}(\nu) \cdot C[\widehat{a}_i]_{\lambda,\eta} \cdot S_{\eta}(\mu). \end{aligned} \quad (4.58)$$

La preuve est présentée en annexe.

Je peux alors calculer les résidus moyens et construire le χ^2 des résidus moyens. Si la poussière est l'une des composantes, je vais utiliser l'approche "marginale" développée dans la section sur la poussière seule pour marginaliser les amplitudes des différentes composantes sur le plan (T_d, β_d) .

4.3.3 Validation de la méthode sur simulation poussière+tSZ

Comme dans la section 4.2.3, je construis un catalogue simulé de 296 109 sources placées à des positions aléatoires sur le ciel. Ces sources ont la même distribution en redshift que les quasars de *BOSS*. Je fabrique des cartes simulées à partir des cartes de *Planck*. A la positions des sources du nouveau catalogue, j'ajoute un flux de poussière et un flux tSZ avec le profil spatial que j'emploie depuis le chapitre précédent qui est ensuite convolué aux différents lobes de *Planck*. Si $m'_{\nu}(\vec{x})$ est la carte originale alors la carte simulée s'obtient comme il suit : $m_{\nu}(\vec{x})^s = m'_{\nu}(\vec{x}) + a_{dust,i} \cdot S_{dust}(\frac{T_d}{1+z_i}, \beta_d, \nu) + a_{tSZ,i} \cdot S_{tSZ}(\nu)$.

L'amplitude $a_{dust,i}$ dépend du redshift de la source mais aussi de la masse de poussière et des paramètres de l'émission de poussière, T_d et β_d . Je choisis ici la même masse et les mêmes paramètres d'émission pour tous les objets : $(M_{dust})_{input} = 2.5 \times 10^8 M_{\odot}$, $(T_d)_{input} = 25$ K et $(\beta_d)_{input} = 2.5$. L'amplitude $a_{tSZ,i}$ dépend du paramètre de Compton intrinsèque $(Y_{500})_{input}$ que je fixe ici à 12.02×10^{-6} arcmin². En utilisant l'équation 4.28, on peut déterminer la masse des amas qui est de $M_{500} = 2.74 \times 10^{13} M_{\odot}$.

Distribution des χ^2

Je divise aléatoirement le catalogue simulé en 148 sous-échantillons de 2000 quasars. Le filtrage suivant est réalisé avec un matched filter multi-fréquences multi-composantes pour une émission de poussière et une émission tSZ. Je filtre à la position des quasars du sous-échantillon et je détermine le χ^2 des résidus moyens à la position du point d'injection et le χ^2 minimal sur le plan (T_d, β_d) . Je regarder ensuite les distributions cumulées des deux χ^2 qui correspondent à des distributions cumulées de loi de Student à 7 degrés de liberté et 5 degrés de liberté respectivement comme l'indique la figure 4.16. Je trouvais le même résultat pour le filtrage poussière seule. Le nombre d'émissions mises en jeu par le filtrage ne joue pas sur la distribution des χ^2 des résidus moyens.

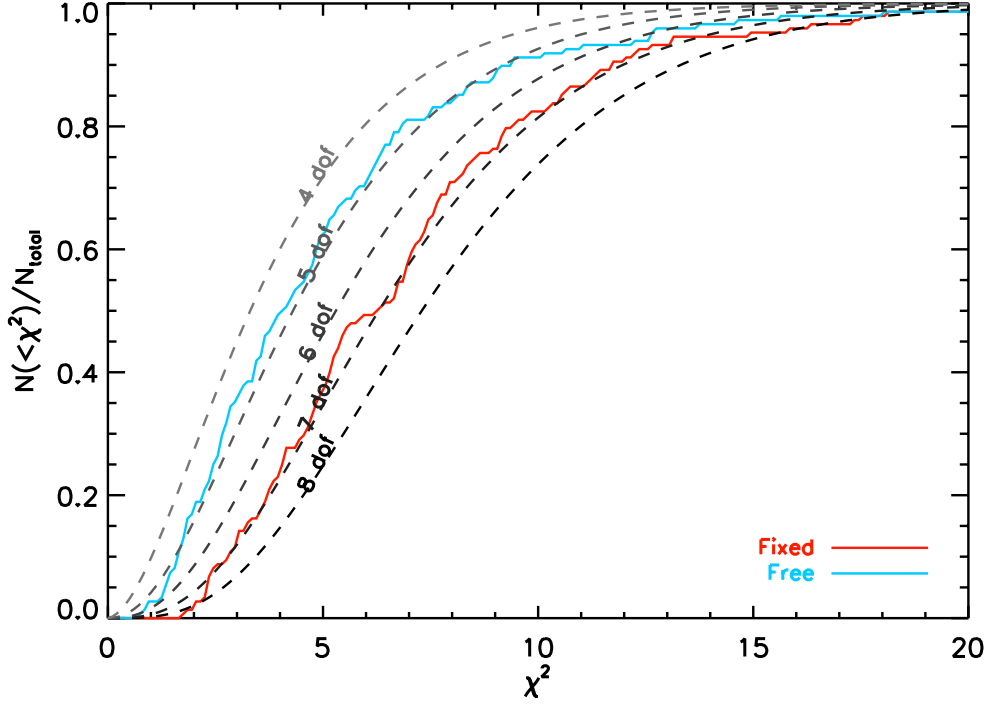


FIGURE 4.16 – En rouge : la distribution cumulée des χ^2 au point d'injection. En bleu : la distribution cumulée des χ^2 minimaux sur le plan (T_d, β_d) . En pointillées : différentes distributions cumulées associée à des lois de Student à différents degrés de liberté. Il s'agit d'un filtrage matched filter multi-fréquences multi-composantes avec un spectre de poussière et un spectre tSZ pour un catalogue simulé de sources à la fois de poussière et de tSZ.

Extraction des différents composantes

J'extrais les amplitudes des différentes composantes avec plusieurs filtres sur le catalogue simulé au complet. Les résultats sont présentés dans la première partie du tableau 4.7, section "Mock catalogue : *dust+tSZ*". La deuxième partie du tableau sera présentée dans la partie sur les systématiques dans la section 4.5.1. Le filtrage poussière-tSZ me donne le plus petit χ^2 comme l'indique la figure 4.23. C'est le filtrage le plus adapté comme attendu. Le filtrage poussière-synchrotron confond l'émission tSZ avec du synchrotron. Comme le tSZ est négatif pour $\nu < 217\text{GHz}$ et que le synchrotron est significatif à basse fréquence, le signal tSZ apparaît comme du synchrotron négatif. Le filtrage triple poussière-tSZ-synchrotron échoue à extraire la totalité du signal tSZ puisqu'il en confond une partie avec du synchrotron négatif.

Le χ^2 permet de sélectionner le filtrage le plus adapté aux données. Pour m'assurer encore plus de la validité de cette approche, je devrais travailler avec des catalogues simulés d'objets avec d'autres émissions.

J'effectue aussi un filtrage au niveau de 296 109 positions aléatoires dans les vraies cartes *Planck* en fixant la température T_d à 25 K et β_d à 2.5 mais sans injecter de sources. Les quantités extraites sont bien compatibles avec zéro comme l'indique le tableau 4.8.

4.3.4 Evolution des paramètres de poussières avec des filtres multi-composantes

Je travaille avec les sous-échantillons du catalogue *BOSS* limités en intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Pour chaque sous-échantillon, j'effectue trois filtrages sur le

Filter	$\chi^2/5$	T_d (K)	β_d	$\overline{M}_{\text{dust}}$ ($10^8 M_\odot$)	$\overline{Y}_{500}$ (10^{-6} arcmin^2)	$\overline{M}_{500}$ ($10^{13} M_\odot$)	$\overline{L}_{\text{synch}}$ ($10^{-3} L_\odot \text{Hz}^{-1}$)
Mock catalogue : <i>dust+tSZ</i>							
<i>input</i>	-	25	2.5	2.50	12.02	2.74	0
dust	12.1	26.1 ± 0.6	2.24 ± 0.07	3.54 ± 0.31	-	-	-
dust+tSZ	1.1	25.4 ± 0.8	2.43 ± 0.1	2.71 ± 0.34	13.03 ± 1.63	2.86 ± 0.20	-
dust+synch	4.0	27.4 ± 0.8	1.95 ± 0.08	5.18 ± 0.42	-	-	-0.65 ± 0.14
dust+tSZ+synch	2.9	27.4 ± 1.0	2.05 ± 0.13	4.29 ± 0.65	8.68 ± 1.90	2.27 ± 0.30	-0.37 ± 0.17
Mock catalogue : <i>dust+tSZ with T_d Gaussian distributed</i>							
<i>input</i>	-	25 ± 5	2.5	2.50	12.02	2.74	0
dust	12.7	30.9 ± 1.2	2.06 ± 0.08	3.27 ± 0.22	-	-	-
dust+tSZ	1.1	29.8 ± 0.8	2.27 ± 0.08	2.46 ± 0.27	13.03 ± 1.70	2.86 ± 0.21	-
dust+synch	3.7	33.6 ± 0.4	1.75 ± 0.05	4.69 ± 0.29	-	-	-0.69 ± 0.13
dust($\sigma_T=2$ K)+tSZ	1.1	29.3 ± 0.8	2.28 ± 0.08	2.47 ± 0.27	12.81 ± 1.68	2.83 ± 0.21	-
dust($\sigma_T=5$ K)+tSZ	1.1	26.4 ± 1.2	2.37 ± 0.10	2.67 ± 0.29	12.97 ± 1.68	2.85 ± 0.21	-
dust($\sigma_T=10$ K)+tSZ	1.2	7.5 ± 1.6	2.95 ± 0.08	5.43 ± 0.40	11.45 ± 1.31	2.66 ± 0.17	-

TABLE 4.7 – Comparaison des caractéristiques de sources d’émission de poussière et tSZ entre les valeurs injectées et les valeurs extraites par un filtrage puis marginalisées sur le plan (T_d, β_d) . Le χ^2 présenté ici est la valeur minimale sur ce plan (T_d, β_d) .

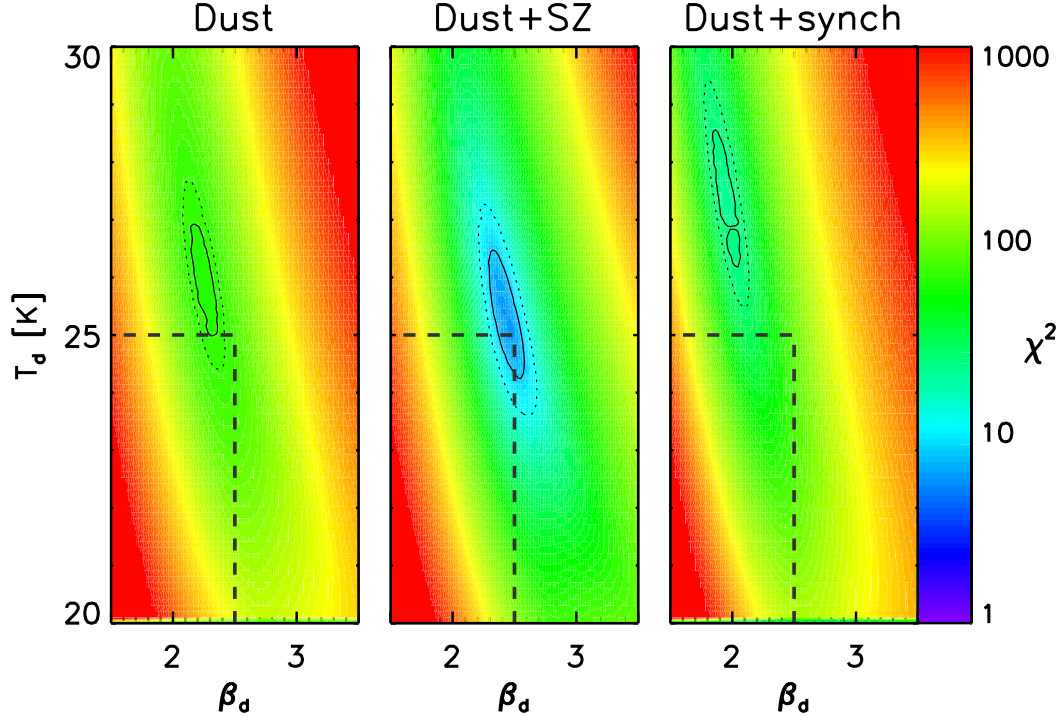


FIGURE 4.17 – Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour différents filtrages. La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Les lignes-tirets horizontales et verticales indiquent les valeurs d’injection. Il s’agit de filtrages type matched filter multi-fréquences mono et multi-composantes pour un catalogue simulé de sources de poussière et de tSZ.

plan (T_d, β_d) puis je marginalise. Je regarde ensuite l’évolution des paramètres de poussière avec le redshift. Cette évolution n’est pas sensible au choix du filtre car la composante poussière domine toujours comme l’indique la figure 4.18. J’effectue les trois filtrages suivants :

- Filtrage pour une émission poussière.
- Filtrage avec deux composantes à séparer : poussière et tSZ.
- Filtrage avec deux composantes à séparer : poussière et synchrotron.

4.3.5 Emission synchrotron des quasars radio

Je me restreins ici aux quasars qui ont une contrepartie radio dans le catalogue *FIRST* et qui sont donc les plus susceptibles d’émettre du synchrotron dans les cartes *Planck*. L’extraction des flux à la position de ces quasars laissait suggérer une telle émission à basse fréquence. J’utilise un matched filter multi-fréquences multi-composantes poussière-synchrotron pour extraire les différentes amplitudes. Amplitudes qui sont ensuite marginalisées sur le plan (T_d, β_d) . Je présente ici les résultats de ce filtrage pour des intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Des résultats supplémentaires sur le filtrage synchrotron sont présentés dans la table 4.13 en fin de ce chapitre.

L’évolution du flux synchrotron à 100 GHz $\overline{A_{synch}}$ et de la luminosité à 100 GHz $\overline{L_{synch}}$ est présentée dans la figure 4.19. Première constatation, le signal synchrotron est significatif pour les structures telles que $z < 3.5$. Deuxième constatation, la luminosité synchrotron croît avec le redshift passant de 0 à $0.2 L_\odot \text{Hz}^{-1}$. Les quasars les plus actifs de mon échantillon sont donc ceux à haut redshift.

Filter	$\chi^2/7$	T_d (K)	β_d	$\langle \widehat{M}_{\text{dust}} \rangle$ ($10^8 M_\odot$)	$\langle \widehat{Y}_{500} \rangle$ (10^{-6} arcmin^2)	$\langle \widehat{L}_{\text{synch}} \rangle$ ($10^{-3} L_\odot \text{ Hz}^{-1}$)
Mock catalogue : <i>Null test</i>						
<i>input</i>	-	-	-	0	0	0
dust	0.7	25	2.5	0.003 ± 0.012	-	-
dust+tSZ	1.2	25	2.5	0.003 ± 0.012	0.77 ± 0.78	-
dust+synch	3.5	25	2.5	0.003 ± 0.012	-	-0.05 ± 0.13

TABLE 4.8 – Extraction de la masse de poussière, du paramètre de Compton et de la luminosité synchrotron au niveau de positions aléatoires dans les cartes *Planck*. Ces quantités sont bien compatibles avec zéro.

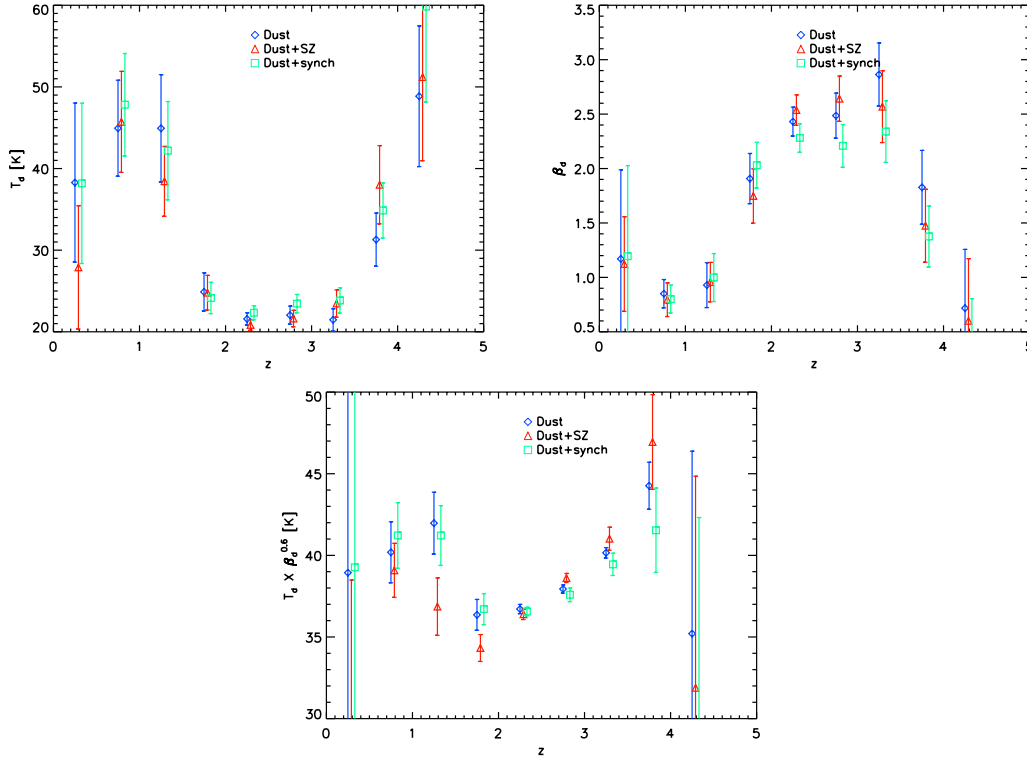


FIGURE 4.18 – Evolution des différents paramètres de poussière en fonction du redshift pour différents filtres. Le choix des filtres a peu d'impact sur l'évolution de ces paramètres.

Le catalogue *FIRST* apporte une information supplémentaire : le flux synchrotron à 1.4 GHz, A_{FIRST} . Pour chaque échantillon de quasars, je construis le flux *FIRST* moyen $\overline{A_{\text{FIRST}}}$ avec la même pondération que le flux $\overline{A_{\text{synch}}}$, donc en utilisant les erreurs données par les matched filters et l'approche marginale. La figure 4.20 présente l'évolution conjointe des deux flux avec le redshift.

Je définis un nouvel exposant pour la loi de puissance du synchrotron en supposant elle-ci valide à 1.4 GHz et en combinant les informations *FIRST* et *Planck* :

$$\alpha = \frac{\ln(\overline{A_{\text{synch}}}) - \ln(\overline{A_{\text{FIRST}}})}{\ln(1.4 \text{ GHz}) - \ln(100 \text{ GHz})}. \quad (4.59)$$

L'évolution de ce nouvel exposant est présentée par la figure 4.21. Cet exposant augmente avec le redshift. L'exposant a été calculé en supposant une même loi de puissance à 1.4 GHz et à 100 GHz. Il est possible que l'exposant de l'émission synchrotron évolue avec la fréquence entre 1.4 et 100 GHz, ce qui entraîne l'évolution constatée avec le red-

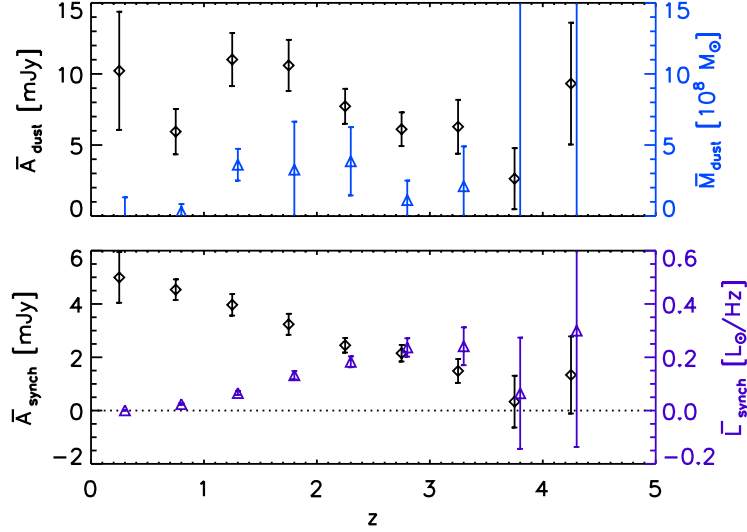


FIGURE 4.19 – *En haut* : Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857 GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleus) avec le redshift. *En bas* : Evolution du flux marginalisé de l'émission synchrotron à 100 GHz (losanges noirs) et de luminosité synchrotron marginalisée (triangles violets) avec le redshift. Population de quasars : quasars avec une contrepartie *FIRST*.

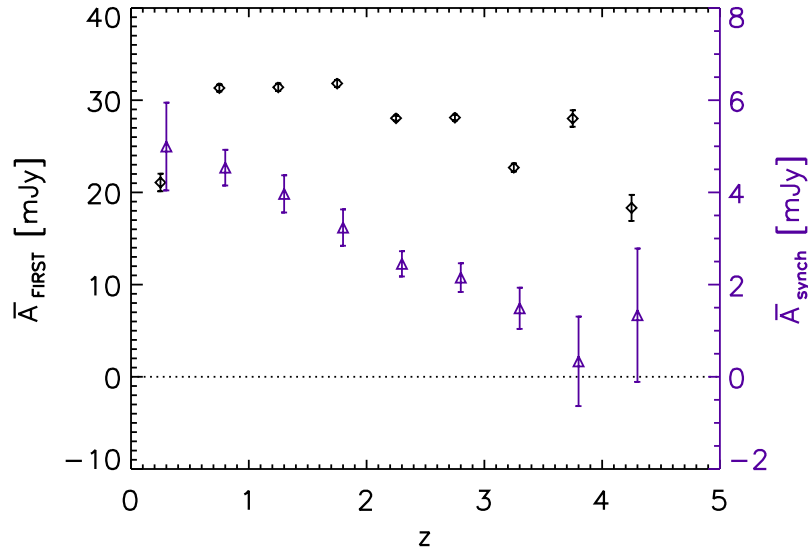


FIGURE 4.20 – Evolution du flux marginalisé de l'émission synchrotron à 100 GHz (losanges noirs) et du flux *FIRST* moyen (triangles violets) avec le redshift. Population de quasars : quasars avec une contrepartie *FIRST*.

shift.

4.3.6 Emission tSZ chez les quasars non radio

Cette fois, je travaille avec les quasars non radio qui n'ont pas de contrepartie dans *FIRST* et qui sont bien dans la zone couverte par ce sondage. Ces quasars sont en théorie moins contaminés par le synchrotron que leurs équivalents avec une contrepartie radio. Dans un premier temps j'effectue les 3 filtrages suivants :

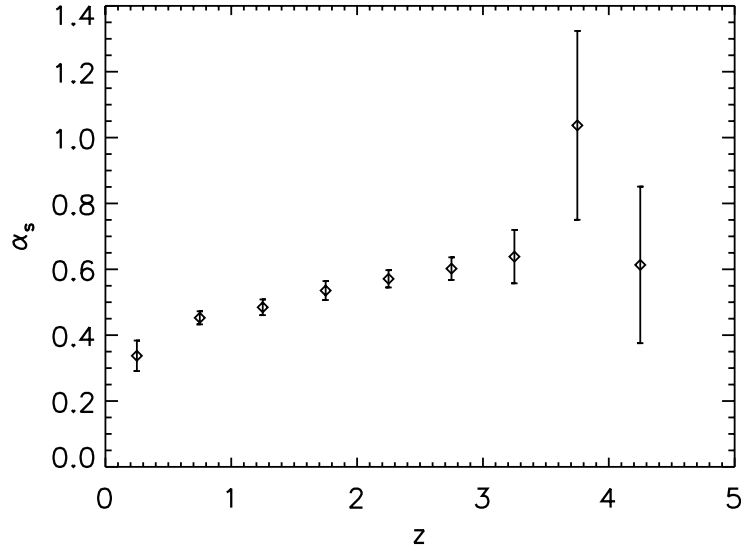


FIGURE 4.21 – Evolution de l'exposant de la loi de puissance pour l'émission synchrotron. Population de quasars : quasars avec une contrepartie *FIRST*.

- Filtrage pour une émission poussière.
- Filtrage avec deux composants à séparer : poussière et tSZ.
- Filtrage avec deux composants à séparer : poussière et synchrotron.

Ces filtrages sont effectués sur les population de quasars dans des intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Je cherche à comparer les χ^2 des résidus moyens de ces différents filtres. J'obtiens alors la figure 4.22. Le filtre poussière+tSZ semble plus performant que les autres filtres à haut redshift pour $2.5 < z < 4$. Je vais par la suite effectuer un filtrage à la position des quasars dans ce sous-échantillon. A plus bas redshift, il est préférable de continuer d'utiliser le filtre "poussière seule".

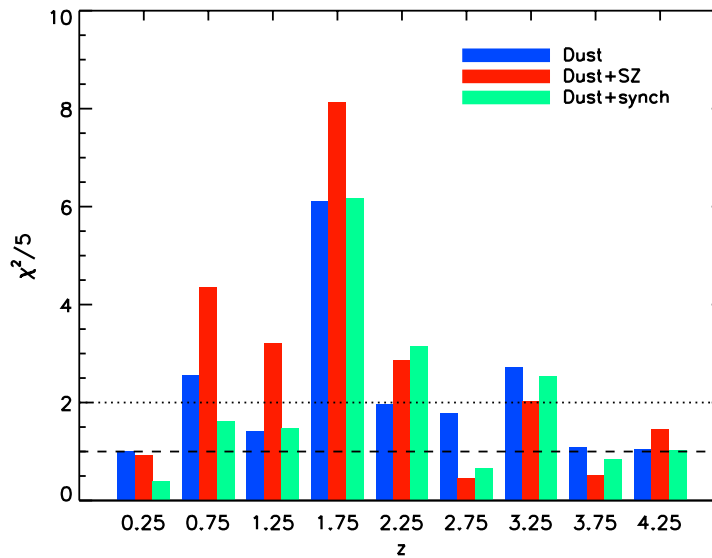


FIGURE 4.22 – Evolution du $\chi^2/5$ des résidus moyens minimum sur le plan (T_d, β_d) . pour différents filtrages. Le filtrage poussière+tSZ semble avoir les faveurs des quasars à haut-redshift. Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.

J'applique ensuite les 3 filtres pour les quasars de l'intervalle en redshift $2.5 < z < 4$.

J'obtiens alors les χ^2 minimaux sur le plan (T_d, β_d) suivant :

- Filtrage pour une émission poussière : $\chi^2/5 = 4.4$.
- Filtrage poussière et tSZ : $\chi^2/5 = 1.5$.
- Filtrage poussière et synchrotron : $\chi^2/5 = 2.7$.

Les résultats essentiels de l'analyse sont rangés dans la table 4.13. La différence de χ^2 (non réduit) entre le filtrage poussière et le filtrage poussière+tSZ est donnée si dessous :

$$\Delta\chi^2 = 14.5 \quad (4.60)$$

Ce qui correspond a une détection à 2.5σ pour 5 degrés de liberté. Le filtrage poussière+tSZ paraît être le plus adapté pour cette population de quasars comme attendu. Le paramètre de Compton moyen $\overline{Y}_{500}$ pour ces quasars est égale à

$$\overline{Y}_{500} = (10.83 \pm 1.36) \times 10^{-6} \text{arcmin}^2 \quad (4.61)$$

donc significatif à 7.4σ . Les possibles amas virialisés à l'origine d'un tel signal auraient alors une masse moyenne de $\overline{M}_{500} = (2.26 \pm 0.20) \times 10^{13} M_\odot$ si je suppose la relation 4.28 valide pour des proto-amas à haut redshift. On ne peut cependant exclure que le signal tSZ provienne plutôt du gaz éjecté par le noyau galactique actif. Dans ce cas, ce gaz n'est pas virialisé et n'est pas un traceur de la matière noire.

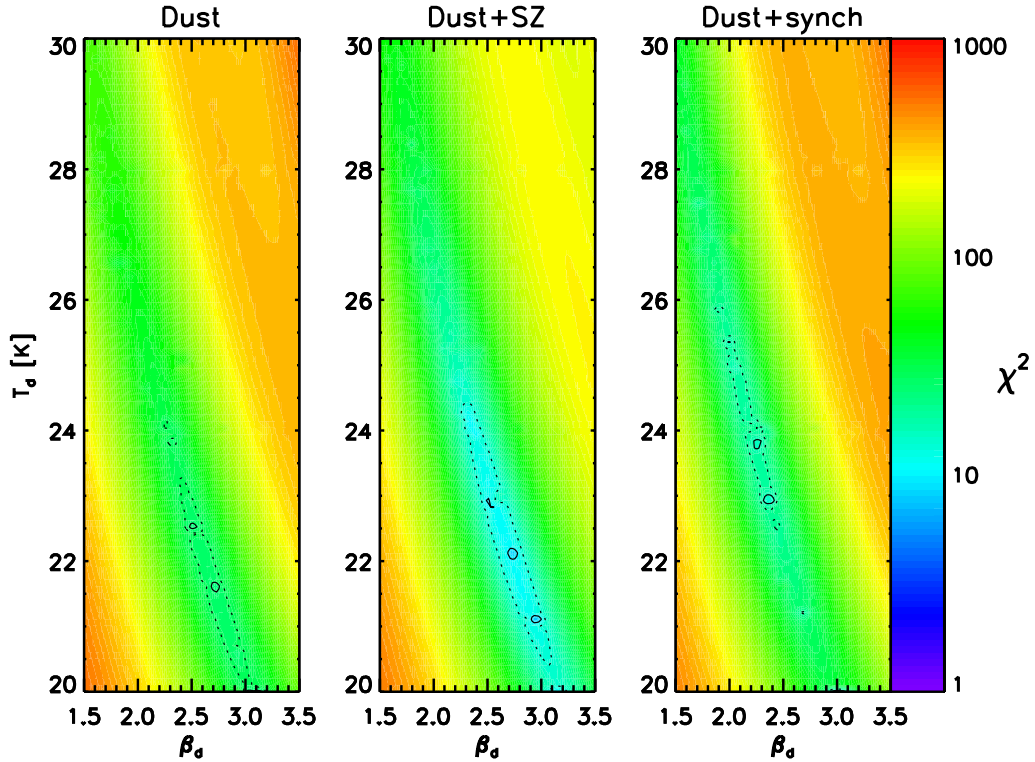


FIGURE 4.23 – Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour différents filtrages. La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Il s'agit de filtrages type matched filter multi-fréquences mono et multi-composantes pour les quasars sans contrepartie *FIRST* qui sont dans l'intervalle en redshift $2.5 < z < 4$.

Je regarde ensuite en détail les résultats donnés par le filtrage poussière+tSZ, notamment l'évolution du paramètre de Compton intrinsèque avec le redshift que présente la figure 4.24. Ce paramètre est significativement positif pour $2.5 < z < 4$, l'intervalle de redshift le plus favorable au filtrage poussière+tSZ. Il apparaît cependant légèrement négatif pour l'intervalle $1 < z < 2$. Une contamination par le synchrotron peut expliquer ce

résultat. Notons aussi que l'ajout du tSZ fait augmenter le χ^2 d'après la figure 4.22 pour cet intervalle de redshift. A priori, l'ajout d'une émission supplémentaire devrait faire baisser ce χ^2 . Cependant, la matrice des corrélations croisées des résidus dépend du type et du nombre d'émissions en jeu comme l'indique l'équation 4.58 et elle est un élément essentiel à la construction du χ^2 . L'augmentation du χ^2 pour $1 < z < 2$ traduit simplement le fait que le modèle poussière+tSZ s'adapte assez mal au signal de cet intervalle de redshift. Le paramètre de Compton extrait doit être considéré avec précaution pour $1 < z < 2$.

Notons que le filtre poussière+synchrotron fait aussi baisser le χ^2 par rapport au filtre poussière seule. Cependant, l'amplitude du synchrotron extrait est négatif, suggérant par là qu'une partie du signal tSZ a été confondu avec du synchrotron positif par le filtre poussière+synchrotron. Le filtre triple poussière+tSZ+synchrotron fonctionne moins bien que le filtre poussière+tSZ car une partie du signal tSZ est prise ici aussi pour du synchrotron négatif. Ces résultats sont présentés dans le tableau 4.13.

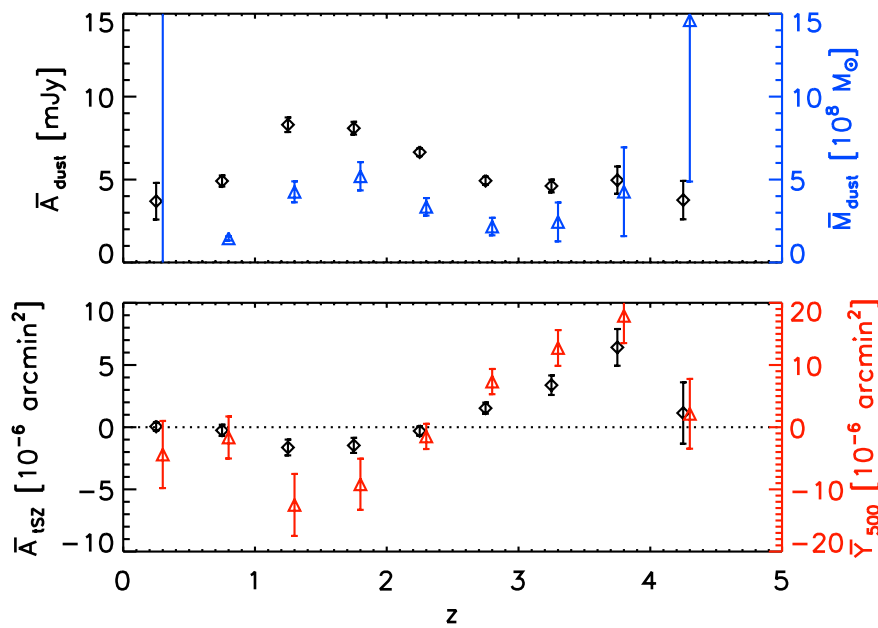


FIGURE 4.24 – *En haut* : Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857 GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec le redshift. *En bas* : Evolution de l'amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) avec le redshift. Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.

4.3.7 Emission de poussière et tSZ en fonction de la magnitude absolue en bande i

J'effectue cette fois un filtrage poussière+tSZ sur d'autres sous-échantillons de quasars, à savoir les quasars sans contrepartie dans *FIRST* rangés dans des intervalles de magnitude absolue en bande i d'une largeur de 2 partant de -30 à -18. J'obtiens alors la figure 4.25. La masse de poussière $\bar{M}_{\text{dust}}$, qui est liée à la luminosité infrarouge, diminue quand la magnitude MI augmente, c'est-à-dire quand la luminosité du quasar diminue, vraisemblablement selon une loi de puissance. Cela suggère un lien intime entre le mécanisme de chauffage des poussières et le noyau galactique actif responsable de la luminosité du quasar. Le paramètre de Compton intrinsèque $\bar{Y}_{500}$ diminue aussi quand la luminosité en bande i diminue (soit quand MI augmente). Si $\bar{Y}_{500}$ est lié à la masse de gaz chaud d'un

éventuel proto-amas hôte, donc à la masse totale du proto-amas, alors les quasars les plus lumineux sont ceux qui résident dans les halos les plus massifs. $\overline{Y}_{500}$ peut aussi être lié au gaz éjecté par le noyau galactique actif. Dans ce cas, plus le quasar serait lumineux, plus il serait actif et donc susceptible d'éjecter du gaz chaud.

Il est plus difficile de conclure sur l'évolution des paramètres de poussières avec la magnitude absolue présentée par la figure 4.26. La quantité $T_d \times \beta_d^{0.6}$ reste cependant constante avec la magnitude en bande i suggérant que cette dernière a un impact limité sur les paramètres de l'émission de poussière.

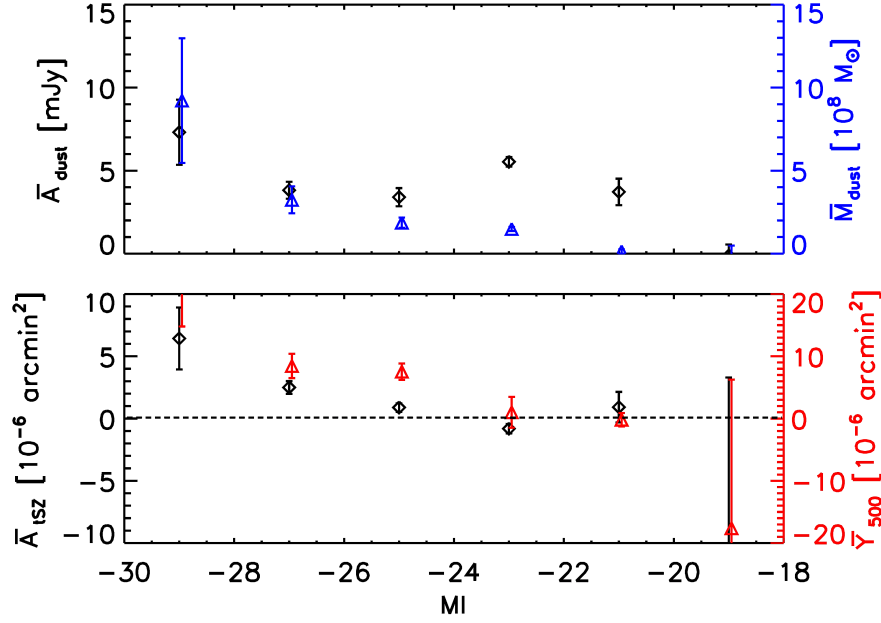


FIGURE 4.25 – *En haut* : Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857 GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec la magnitude absolue en bande i. *En bas* : Evolution de l'amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) avec la magnitude absolue en bande i. Population de quasars : quasars sans contrepartie FIRST.

4.4 Comment interpréter le signal tSZ ?

Le signal tSZ que j'ai obtenu précédemment est significatif à haut redshift et non détecté à bas redshift ce qui permet de mettre des contraintes sur la détection. L'origine de ce signal n'est pas élucidée. Je vais alors estimer un signal tSZ équivalent en m'appuyant sur les données *ROSAT* et sur la fonction de masse pour apporter un éclairage supplémentaire.

4.4.1 Contrainte sur le signal tSZ à bas redshift

Je ne détecte pas de signal tSZ à bas redshift si je me fie à la figure 4.24. A partir de l'erreur sur $\overline{Y}_{500}(z < 1.5)$, je peux cependant mettre des contraintes à 2σ sur le signal tSZ à bas redshift comme il suit pour les quasars tels que $z < 1.5$:

$$\overline{Y}_{500}(z < 1.5) < 4.97 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2 \quad (2\sigma), \quad (4.62)$$

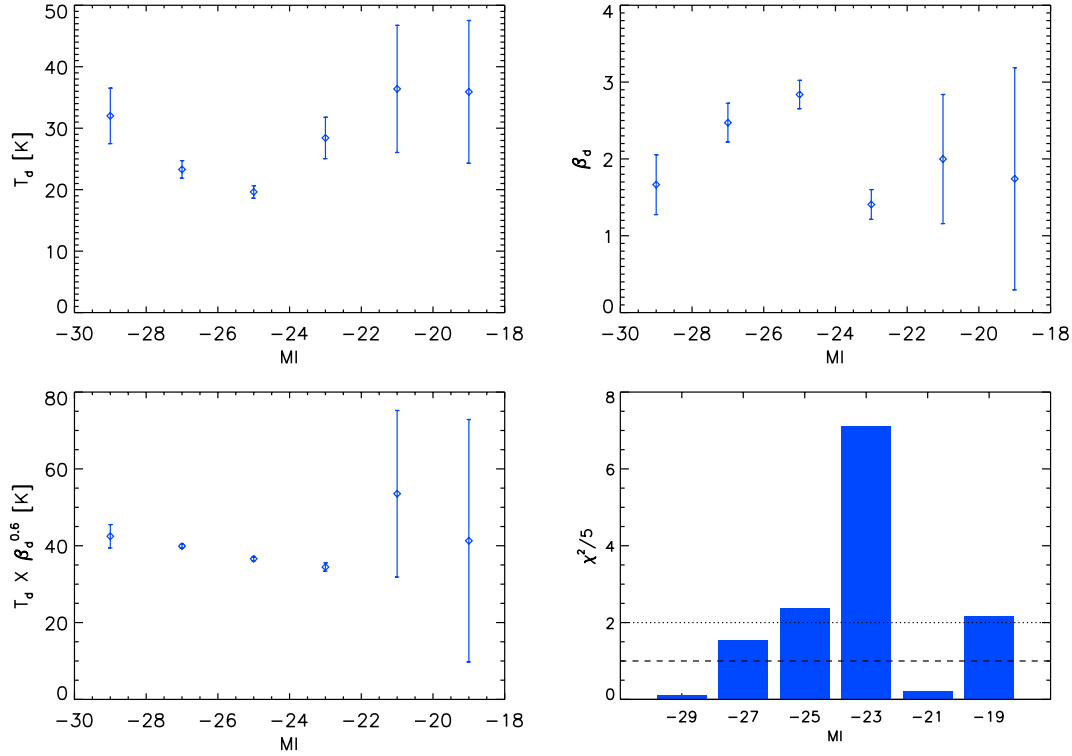


FIGURE 4.26 – Evolution des différents paramètres de poussière et du χ^2 en fonction de la magnitude absolue en bande *i* pour un filtre poussière+tSZ. Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.

ou tels que $z < 2.5$, ce qui donne même une limite plus forte :

$$\overline{Y}_{500}(z < 2.5) < 2.93 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2 \quad (2\sigma), \quad (4.63)$$

Je peux comparer ces limites aux résultats présentés par [RUAN et al., 2015](#). Cette étude emploie les quasars de *SDSS* DR7 comme traceurs. Pour les quasars avec $z < 1.5$, [RUAN et al., 2015](#) mesure $\overline{Y}_{500}^c = 1.52 \times \overline{Y}_{500} = (74 \pm 30) \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2$, à comparer à notre limite supérieure qui est de $\overline{Y}_{500}^c < 1.52 \times 4.97 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2 = 7.55 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2$. Cette limite est en dessous de leur niveau de détection. L'important signal tSZ détecté par [RUAN et al., 2015](#) pourrait être fortement contaminé par de la poussière qui se trouve ponctuellement sur les cartes *Planck* de tSZ. [RUAN et al., 2015](#) aurait alors un signal tSZ similaire à celui que l'on mesure avec le matched filter tSZ seul comme présenté par la figure 4.4.

4.4.2 Contrepartie *ROSAT* du signal tSZ

Il est difficile de conclure sur la nature du signal tSZ détecté au niveau des quasars à haut redshift. Cela peut être le gaz virialisé d'un proto-amas mais aussi l'éjecta d'un noyau galactique actif. Pour confirmer ou infirmer ces origines, j'ai besoin d'un levier supplémentaire. Les données du satellite *ROSAT* donc en X, vont remplir ce rôle. Le gaz chaud est aussi détectable par rayonnement de freinage dans les rayons X entre 0.1 et 10 keV comme le présentera plus en détail le chapitre 5. Cependant, les quasars émettent aussi dans le domaine des X sous forme de rayonnement synchrotron et peuvent contaminer le signal X.

Je vais cependant faire l'hypothèse que l'émission X que je détecte ici provient d'amas de galaxies et que je peux utiliser les lois d'échelles usuelles qui sont validées à bas redshift.

Je vais vérifier si le signal tSZ dérivé de la luminosité X à la position des quasars est compatible ou non avec le signal tSZ *Planck*.

Je ne vais pas utiliser de matched filter pour extraire la luminosité X. Je vais en fait empiler les cartes *ROSAT* à la position des quasars pour obtenir une carte moyenne d'émission. Avec une méthode des moindres carrées et en supposant les structures ont le profil spatial d'un amas X de masse $M_{500} = 10^{13} M_{\odot}$ situé à $z = 2$, je vais extraire un flux X. Je vais ensuite appliquer un facteur de conversion moyen pour obtenir la luminosité X que je convertis en signal tSZ équivalent. Je détaille ces étapes ci-dessous.

Empilement des cartes *ROSAT*

J'utilise la carte *ROSAT* dans la bande "hard" entre 0.5 keV et 2 keV. Cette carte est ré-échantillonnée de manière à ce que ces pixels soient à la même taille et position que ceux des cartes *Planck* qui ont une largeur de 1.7 arcmin (TARRIO et al., 2016). La carte *ROSAT* est ensuite découpée en 504 mini-cartes. Chaque mini-carte est ré-échantillonnée pour que les côtés des pixels soient parallèles ou orthogonaux aux bords de la mini-carte. Les mini-cartes *ROSAT* sont des cartes de nombre de photons par seconde ou taux de photons (par pixels). Je les note $\mathcal{M}_X(\vec{x})$ avec $\vec{x}$ la position dans le ciel. J'effectue le même traitement sur la carte de temps d'exposition pour obtenir des mini-cartes de ce temps d'exposition par pixels, $e(\vec{x})$.

Les mini-cartes de taux de photons sont ensuite empilées à la position des quasars de BOSS dans l'intervalle de redshift d'intérêt $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie dans *FIRST*. Elle sont pondérées par le temps d'exposition. J'obtiens alors une carte du taux de photons moyen à la position des quasars notée $m_X(\vec{x})$:

$$m_X(\vec{x}) = \frac{\sum_i \mathcal{M}_X(\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot e(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\sum_i e(\vec{x} - \vec{x}_i)} \quad (4.64)$$

avec $\vec{x}_i$ la position dans le ciel du quasar d'indice i. La carte obtenue est représentée par la figure 4.27. Je retire ensuite la valeur moyenne de cette carte pour supprimer les émissions en provenance du fond diffus *ROSAT* : $m'_X(\vec{x}) = m_X(\vec{x}) - \langle m_X(\vec{x}) \rangle$.

Extraction du taux de photons

Je suppose que les structures suivent le profil spatial d'un amas X de masse $M_{500} = 10^{13} M_{\odot}$ situé à $z = 2$ pour extraire le nombre de photons par seconde total en provenance de l'amas noté $CR(5R_{500})$ (pour "count-rate") puisque l'amas s'étend jusqu'à un rayon de $5R_{500}$. Si pour un signal tSZ j'ai un profil sphérique $P\left(\frac{r}{R_s}\right)$ comme je l'ai introduit en 3.4.1, j'ai le profil équivalent suivant pour le rayonnement de freinage en supposant l'amas isotherme : $P^2\left(\frac{r}{R_s}\right)$. J'obtiens alors le profil effectif en intégrant le long de la ligne de visée :

$$\tau_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2\left(\frac{r}{R_s}\right) dl. \quad (4.65)$$

C'est le profil en X d'un amas de masse $M_{500} = 10^{13} M_{\odot}$ situé à $z = 2$ avec les mêmes paramètres c_{500} , α , β et γ que ceux de la section 3.4.1. Notons que le profil est normalisé : $\int \tau_X(\vec{x}) d\vec{x} = 1$.

Une quantité intégrée sur la sphère et cette même quantité intégrée de manière cylindrique sont quasiment identiques si l'intégration est poussée jusqu'à $5R_{500}$ comme je le mentionne pour le tSZ dans la section 3.4.1. Je peux donc écrire que $CR_{sph}(5R_{500}) = CR_{cyl}(5R_{500}) = CR(5R_{500})$.

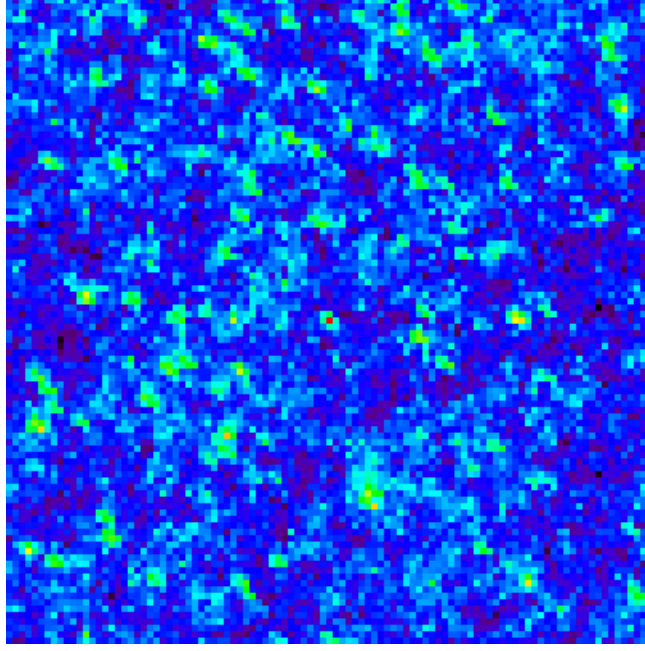


FIGURE 4.27 – Carte de 2° de côté du nombre de photons par seconde moyen dans *ROSAT* en bande "hard" à la position des quasars tels que $2.5 < z < 4$ sans contrepartie *FIRST*.

Le rapport entre une quantité intégrée sur la sphère jusqu'à R_{500} et $5R_{500}$ ne dépend pas de la masse et du redshift de l'amas mais seulement des paramètres du profil et se trouve être ici $C_X(5R_{500} \rightarrow R_{500}) = \frac{\int_0^{R_{500}} 4\pi P^2 \left(\frac{r}{R_s}\right) r^2 dr}{\int_0^{5R_{500}} 4\pi P^2 \left(\frac{r}{R_s}\right) r^2 dr} = 0.88$. Je note ainsi le nombre total de photons par seconde dans un rayon R_{500} : $CR(R_{500}) = CR_{sph}(R_{500}) = C_X(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \cdot CR(5R_{500})$.

Je pars du χ^2 suivant que je vais chercher à minimiser en $CR(5R_{500})$:

$$\chi^2 = \int \frac{(m'_X(\vec{x}) - CR(5R_{500}) \cdot \tau_X(\vec{x}))^2}{\sigma^2[m'_X]} d\vec{x} \quad (4.66)$$

avec la variance directement évaluée sur la carte : $\sigma^2[m'_X] = \langle m_X'^2(\vec{x}) \rangle - \langle m'_X(\vec{x}) \rangle^2$ J'obtiens alors l'expression suivante de $CR(R_{500})$ (équivalente à celle que j'obtiendrais avec un matched filter en supposant un bruit blanc) :

$$CR(R_{500}) = C_X(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \cdot \frac{\int m'_X(\vec{x}) \cdot \tau_X(\vec{x}) d\vec{x}}{\int \tau_X^2(\vec{x}) d\vec{x}} \quad (4.67)$$

avec la variance suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^2[CR(R_{500})] &= C_X(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \cdot \sigma^2[m'_X] \cdot \frac{\int \tau_X(\vec{x}) d\vec{x}}{\int \tau_X^2(\vec{x}) d\vec{x}} \\ &= C_X(5R_{500} \rightarrow R_{500}) \cdot \frac{\sigma^2[m'_X]}{\int \tau_X^2(\vec{x}) d\vec{x}}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Vers la luminosité X

La détection des amas de galaxies dans les données *ROSAT* a conduit à la création du catalogue d'amas REFLEX. L'un des articles sur ce catalogue donne les facteurs de conversion pour passer d'un taux de photons à une luminosité X (BÖHRINGER et al., 2004).

Je suppose ici que l'émission X obtenue à la position des quasars est bien un rayonnement de freinage en provenance du gaz chaud d'amas virialisés. Je peux donc utiliser les facteurs de conversion proposé par [BÖHRINGER et al., 2004](#).

Le premier facteur proposé dans la table 2 de cet article permet de passer d'un taux de photons (nombre de photons par seconde) dans la bande 0.5-2 keV en flux ($10^{-12} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$) dans la bande 0.1-2.4 keV. Je le note $C_{FX}[T_X, NH(\vec{x}_i)]$. Il dépend d'une température en X, T_X , que je suppose identique pour tous les quasars, et d'une densité de colonne de l'hydrogène neutre (qui absorbe partiellement le rayonnement X) $NH(\vec{x}_i)$ à la position du quasar $\vec{x}_i$. Cette densité de colonne est donnée par la carte composite du LAMBA Foreground¹. Cette carte est construite à partir d'un atlas de nuages d'hydrogène neutre ([HARTMANN et al., 1997](#)).

J'applique ensuite le facteur de correction moyen sur le nombre de photons moyen pour obtenir un flux moyen :

$$F_X(R_{500}) = CR(R_{500}) \cdot \frac{1}{N_q} \sum_i C_{FX}[T_X, NH(\vec{x}_i)] \quad (4.69)$$

avec N_q le nombre de quasars considérés ; la variance sur le flux s'obtient naturellement ainsi :

$$\sigma^2[F_X(R_{500})] = \sigma^2[CR(R_{500})] \cdot \frac{1}{N_q} \sum_i C_{FX}[T_X, NH(\vec{x}_i)]. \quad (4.70)$$

Pour calculer la luminosité sur la bande 0.1-2.4 keV dans le référentiel au repos, j'ai besoin d'appliquer une K-correction. Je n'utilise pas celle fournie par la table 3 de l'article [BÖHRINGER et al., 2004](#), mais une autre construite avec le logiciel SHERPA ([FREEMAN et al., 2001](#) ; [DOE et al., 2007](#)). Je note ce facteur correctif $\tilde{K}[T_X, z_i]$. Il dépend du redshift z_i des quasars. J'utilise en fait le facteur $K[T_X, z_i] = 10^{-32} \tilde{K}[T_X, z_i]$ pour passer d'un flux en $10^{-12} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ à une luminosité en $10^{44} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$. J'obtiens la luminosité X (donc exprimée en $10^{44} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$) de cette manière :

$$L_X(R_{500}) = \frac{CR(R_{500})}{\sum_i \frac{1}{D_L^2(z_i)}} \cdot \sum_i \left[\frac{1}{D_L^2(z_i)} \cdot C_{FX}[T_X, NH(\vec{x}_i)] \cdot 4\pi D_L(z_i) \cdot K[T_X, z_i] \right], \quad (4.71)$$

avec $D_L(z_i)$ la distance de luminosité en cm. La variance est obtenue de la même façon. Je pondère par l'inverse de la distance luminosité au carré pour limiter le poids des objets à grand redshift. Je travaille donc avec des moyennes sur le flux et non sur la luminosité.

Masse et paramètre de Compton intrinsèque

[PRATT et al., 2009](#) introduit plusieurs relations entre la luminosité X dans la bande 0.1-2.4 keV et d'autres quantités comme la masse totale de l'amas et la température. Ces relations sont de la forme $A(R)^{\alpha_s} = L_X(R) \cdot \frac{A_0^{\alpha_s}}{C} E(z_i)^n$ avec $A = M(R)$ (masse) ou $A = T_{X,output}(R)$ (température). Dans notre cas, $R = R_{500}$. Les valeurs de n et de A_0 dépendent de la quantité voulue. Pour la masse, $n = -7/3$ et $A_0 = 20 \cdot 10^{13} M_\odot$; pour la température, $n = -1$ et $A_0 = 5 \text{ keV}$.

Ainsi je déduis la quantité moyenne A^{α_s} de cette manière :

$$A^{\alpha_s}(R_{500}) = \frac{CR(R_{500})}{\sum_i \frac{1}{D_L^2(z_i)}} \cdot \sum_i \left[\frac{1}{D_L^2(z_i)} \cdot C_{FX}[T_X, NH(\vec{x}_i)] \cdot 4\pi D_L(z_i) \cdot K[T_X, z_i] \cdot \frac{A_0^{\alpha_s}}{C} E(z_i)^n \right]. \quad (4.72)$$

1. http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/foreground/combnh_map.cfm

$T_{X,input}$ (keV)	$L_X(R_{500})$ ($10^{44} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$)	$Y_{500}^{0.91}$ (10^{-6} arcmin^2) ^{0.91}	Y_{500} (10^{-6} arcmin^2)	$M^{1.62}(R_{500})$ ($10^{13} \text{ M}_\odot$) ^{1.62}	$M(R_{500})$ ($10^{13} \text{ M}_\odot$)
2	3.9 ± 0.4	36.5 ± 3.3	52.1	20.0 ± 1.8	6.4
3	3.3 ± 0.3	30.6 ± 2.7	42.9	16.7 ± 1.5	5.7

 TABLE 4.9 – Caractéristiques en X sur la bande 0.1-2.4 keV des structures à la position des quasars avec $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans *FIRST*.

$T_{X,input}$ (keV)	$T_{X,output}^{2.24}$ (keV) ^{2.24}	$T_{X,output}$ (keV)
2	11.6 ± 1.0	3.0
3	9.72 ± 0.9	2.8

 TABLE 4.10 – Caractéristiques des températures en X sur la bande 0.1-2.4 keV des structures à la position des quasars avec $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans *FIRST*.

Pour la masse, je sélectionne la relation de la ligne 6 du tableau B.2. Cette relation est ajustée sur tout les amas du catalogue REXCESS et est corrigée du biais de Malmquist. Elle est obtenue par une méthode dite BCES(YLX) pour "Bivariate Correlated Errors and intrinsic Scatter estimator" qui est une extension de la méthode des moindres carrés à des quantités avec des erreurs corrélées. Dans ce cas, j'ai $\alpha_s = 1.62$ et $C = 0.83$.

En utilisant la relation 4.28 entre la masse de l'amas et le paramètre de Compton intrinsèque, j'en déduis le paramètre de Compton intrinsèque équivalent :

$$\begin{aligned}
 Y_{500}^{\alpha_s/\alpha} = & \frac{CR(R_{500})}{\sum_i \frac{1}{D_L^2(z_i)}} \cdot \sum_i \left[\frac{1}{D_L^2(z_i)} \cdot C_{FX}[T_X, NH(\vec{x}_i)] \right. \\
 & \cdot 4\pi D_L(z_i) \cdot K[T_X, z_i] \cdot \frac{M_0^{\alpha_s}}{C} E(z_i)^n \left. \right] \\
 & \cdot \left(\frac{1}{10^{13} \text{ M}_\odot} \right)^{\alpha_s} \cdot (2.00 \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2)^{\alpha_s/\alpha} \cdot \left(\frac{0.7}{h} \right)^{\alpha_s/\alpha - \alpha_s},
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

avec $\alpha_s/\alpha = 1.62/1.78 = 0.91$. Pour la température, c'est la première relation du tableau B.2 obtenue avec la méthode BCES(YLX) que j'emploie. J'ai donc $\alpha_s = 2.24$ et $C = 2.86$.

En fixant $T_{X,input} = 2 \text{ keV}$, j'obtiens les résultats suivants qui sont rangés dans les tables 4.9 et 4.10. Les paramètres de Compton obtenus sont au mieux 4 fois plus grands que celui estimé à partir du signal tSZ *Planck*. Cette différence peut s'expliquer par la présence d'un rayonnement synchrotron dans la bande 0.5-2 keV au niveau des quasars. Ce rayonnement domine et rend caduque l'utilisation des facteurs de conversions précédents (qui ne s'appliquent que pour un rayonnement de freinage en provenance d'un amas à bas redshift). La différence entre les paramètres de Compton *ROSAT* et *Planck* empêche la confirmation de l'origine du signal tSZ. Ce signal est probablement contaminé lui aussi par l'éjecta de gaz chaud en provenance des noyaux galactiques actifs.

4.4.3 Comparaison avec le paramètre de Compton intrinsèque théorique

Une autre solution pour vérifier l'origine du signal tSZ c'est de le comparer avec des prédictions données par la fonction de masse en supposant par exemple que les $N_{qso} = 77\,655$ quasars (tels que $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans *FIRST*) sont les traceurs des amas les plus massifs dans cet intervalle de redshift pour la zone du ciel couverte par *BOSS*.

S (deg ²)	$M_{500,true}$ (10 ¹³ M _☉)	$M_{500,bias}$ (10 ¹³ M _☉)	$Y_{500,true}$ (10 ⁻⁶ arcmin ²)	$Y_{500,bias}$ (10 ⁻⁶ arcmin ²)
10 000 (spectrométrie)	1.97	1.18	7.31	2.94
14 555 (imagerie)	2.18	1.31	8.47	3.41

TABLE 4.11 – Masse et paramètres de Compton intrinsèque pour les amas les plus massifs tracés par les quasars avec $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans *FIRST*. Le biais $M_{500,bias}/M_{500,true} = 1 - b$ est fixé à 0.6.

J'utilise la fonction de masse suivante :

$$f(M_{500}, z) = \frac{dn}{d(\log(M_{500}))dz}, \quad (4.74)$$

avec n le nombre d'amas sur 1 deg² d'une masse M_{500} (dans une sphère de rayon R_{500}) de redshift z . Cette fonction est construite à partir du [J. TINKER et al., 2008](#). J'introduis S la surface couverte par le sondage spectrométrique *BOSS* soit 10000 deg². Je cherche ensuite la masse minimale $M_{500,low}$ pour avoir autant d'amas que de quasars donc telle que :

$$N_{qso} = S \cdot \int_{M_{500,low}}^{+\infty} \int_{z=2.5}^4 f(M_{500}, z) d(\log(M_{500})) dz \quad (4.75)$$

Je peux ensuite estimer la masse moyenne des amas les plus massifs :

$$M_{500,true} = \frac{\int_{M_{500,low}}^{+\infty} \int_{z=2.5}^4 M_{500} \cdot f(M_{500}, z) d(\log(M_{500})) dz}{\int_{M_{500,low}}^{+\infty} \int_{z=2.5}^4 f(M_{500}, z) d(\log(M_{500})) dz} \quad (4.76)$$

Et en utilisant la relation [4.28](#), je peux aussi estimer le paramètre de Compton intrinsèque moyen de ces amas :

$$Y_{500,true} = 2 \cdot (10^{-6} \text{ arcmin}^2) \cdot \left(\frac{0.7}{h} \right)^{1-\alpha} \cdot \frac{\int_{M_{500,low}}^{+\infty} \int_{z=2.5}^4 \left(\frac{M_{500}}{10^{13} \text{ M}_{\odot}} \right)^{\alpha} \cdot f(M_{500}, z) d(\log(M_{500})) dz}{\int_{M_{500,low}}^{+\infty} \int_{z=2.5}^4 f(M_{500}, z) d(\log(M_{500})) dz} \quad (4.77)$$

Il faut aussi que je prenne en compte le biais hydrostatique b pour comparer ces quantités avec celles extraites à partir du signal tSZ. Ce biais est probablement causé par la violation de l'équilibre hydrostatique dans les amas et/ou par un problème d'étalonnage des instruments de détection du rayonnement X. Le comptage des amas dans *Planck* suggère une valeur de $(1 - b) = 0.6$ ([PLANCK COLLABORATION et al., 2014b](#) ; [PLANCK COLLABORATION et al., 2015i](#)). Les expressions suivantes me donnent respectivement la masse biaisée et le paramètre de Compton intrinsèque biaisé : $M_{500,bias} = (1 - b) \cdot M_{500,true}$ et $Y_{500,bias} = (1 - b)^{\alpha} \cdot M_{500,true}$.

Notons que, si je remplace $S = 10\,000 \text{ deg}^2$ par $14\,555 \text{ deg}^2$, l'aire de la zone sondée par l'imagerie *SDSS*, je change $M_{500,low}$ et donc $M_{500,true}$ et $Y_{500,true}$. Les valeurs obtenues sont présentées dans la table [4.11](#). Les paramètres de Compton intrinsèques sont systématiquement inférieurs au paramètre de Compton intrinsèque estimé à partir du signal tSZ ($(10.83 \pm 1.36) \times 10^{-6} \text{ arcmin}^2$), au mieux à 2σ si je suppose $b = 0$ et je prends $14\,555 \text{ deg}^2$. Une possible explication serait de dire qu'un signal tSZ issu du gaz chaud éjecté par les quasars se rajoute au signal tSZ en provenance des amas de galaxies ; ceci faisant augmenter sensiblement le $\bar{Y}_{500}$ mesuré. Il se peut aussi que les lois d'échelles, et notamment la relation [4.28](#), ne soient plus valides à grand redshift. Dans ce cas c'est l'estimation de Y_{500} , via la fonction de masse, qui devient incorrecte.

4.5 Possibles sources de systématiques

Avant de conclure, il convient d'évoquer les possibles systématiques qui pourraient jouer sur l'extraction du signal de poussière mais aussi sur l'extraction du signal tSZ. Ce dernier paraît en fait assez robuste aux différentes systématiques présentées ci-dessous.

4.5.1 Modèle de poussière avec dispersion sur la température

La mesure de la masse de poussière $\overline{Y}_{500}$ mais aussi la mesure du paramètre de Compton $\overline{M}_{500}$ dépendent a priori du modèle de poussière utilisé dans l'extraction. Ce modèle suppose que les paramètres T_d et β_d soient les mêmes sur tout l'échantillon de quasars étudié. J'introduis ici un nouveau modèle de poussière qui prend en compte une dispersion sur la température, dispersion avec un écart-type de σ_T :

$$S_{dust(\sigma_T)}\left(\frac{T_d}{1+z_i}, \frac{\sigma_T}{1+z_i}, \beta_d, \nu\right) = \int S_{dust}(T'_d, \beta_d, \nu) \cdot P\left(T'_d, \frac{T_d}{1+z_i}, \frac{\sigma_T}{1+z_i}\right) dT'_d, \quad (4.78)$$

avec S_{dust} l'émission de poussière introduite en 4.2.1, $P(T'_d, \frac{T_d}{1+z_i}, \frac{\sigma_T}{1+z_i})$ la probabilité d'avoir la température T'_d qui suit la loi normale suivante :

$$P\left(T'_d, \frac{T_d}{1+z_i}, \frac{\sigma_T}{1+z_i}\right) \propto \exp\left(-\frac{(T'_d - \frac{T_d}{1+z_i})^2}{2 \cdot \left(\frac{\sigma_T}{1+z_i}\right)^2}\right). \quad (4.79)$$

Filtrage sur simulation

Comme dans la section 4.3.3, j'injecte 296 109 sources sur des positions aléatoires dans les cartes *Planck*. Je choisis les mêmes paramètres d'injection que dans la section 4.3.3 sauf que, cette fois, la température T'_d varie d'un quasar à un autre avec une probabilité $P(T'_d, \frac{T_d}{1+z_i}, \frac{\sigma_T}{1+z_i})$ et un écart-type $\sigma_T = 5$ K. Les résultats sont rangés dans la seconde partie de la table 4.7. L'extraction avec un filtre poussière + tSZ donne un résultat biaisé sur la température moyenne et sur β_d mais donne une masse de poussière et un paramètre de Compton intrinsèque compatibles avec les valeurs injectées. J'effectue ensuite trois filtrages poussières (σ_T) + tSZ qui utilisent le nouveau modèle de poussière. Le filtre tel que $\sigma_T = 5$ K me donne des valeurs de température moyenne et de β_d non biaisés à la différence des deux autres. Par contre si la dispersion utilisée dans le filtrage est bien plus grande que la dispersion sur les simulations (10 K contre 5 K ici), l'extraction échoue à donner une température moyenne cohérente et donc donne une masse de poussière biaisée. Remarquons que les χ^2 minimaux ne varient pas d'un filtre à l'autre rendant le choix du bon modèle de poussière avec dispersion difficile à déterminer a priori. Cependant, dans tous les cas de filtrage, le paramètre de Compton intrinsèque reste compatible avec la valeur d'injection. C'est donc un estimateur assez robuste par rapport aux systématiques dues au choix du modèle.

Filtrage sur les données

J'utilise les nouveaux filtres poussières (σ_T) + tSZ sur les données et plus spécifiquement pour les quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie dans *FIRST*. Les résultats de ces filtrages constituent les trois dernières lignes du tableau 4.13. Ces filtres augmentent le χ^2 minimal ce qui semble favoriser une dispersion minimale sur la température de poussière au sein d'une population de quasar. Les paramètres de Compton intrinsèques restent compatibles entre eux ; traduisant là encore la robustesse de l'estimateur au modèle de poussière.

θ_s (arcmin)	$\chi^2/5$	T_d (K)	β_d	M_{dust} ($10^8 M_\odot$)	Y_{500} (10^{-6} arcmin 2)	M_{500} ($10^{13} M_\odot$)
0.12	2.0	22.3 ± 1.0	2.68 ± 0.21	2.00 ± 0.47	10.89 ± 1.42	2.59 ± 0.19
0.27	1.5	22.4 ± 1.2	2.68 ± 0.23	2.18 ± 0.56	10.83 ± 1.46	2.58 ± 0.20
0.57	2.6	22.6 ± 1.0	2.67 ± 0.20	2.23 ± 0.50	11.15 ± 1.47	2.62 ± 0.20

TABLE 4.12 – Caractéristiques moyennes et marginalisées sur (T_d, β_d) de structures à la position des quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie dans *FIRST* pour trois profils avec des rayons caractéristiques θ_s différents. J'utilise le filtre poussière+tSZ pour les trois profils.

4.5.2 Effet du changement de profil sur l'extraction de structures à haut redshift

Tout au long de cette étude, j'ai travaillé avec un profile spatial adapté à des amas de masse $M_{500} = 10^{13} M_\odot$ situé à $z = 2$, c'est-à-dire avec un rayon caractéristique $\theta_s = 0.27$ arcmin 2 . Je vais tester deux nouveaux profils adaptés aux amas de masse $M_{500} = 10^{12} M_\odot$ ou $M_{500} = 10^{14} M_\odot$, tous deux à $z = 2$. J'ai alors respectivement des rayons caractéristiques $\theta_s = 0.12$ arcmin 2 et $\theta_s = 0.57$ arcmin 2 . Dans tous les cas, le profil reste confiné au sein du lobe de *Planck*. J'effectue ensuite un filtrage poussière (sans dispersion)+tSZ sur les quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie dans *FIRST*. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.12. Les différentes quantités extraites sont compatibles entre elles à l'erreur prête. Le χ^2 favorise sensiblement une taille $\theta_s = 0.27$ arcmin 2 .

4.5.3 Une possible contamination à 353 GHz et 545 GHz

J'effectue un filtrage poussière seule au point de χ^2 minimal pour trois populations de quasars dans les intervalles de redshift suivants : $0.1 < z < 1.5$, $1.5 < z < 2$ et $2 < z < 5$. Le point de χ^2 minimal est respectivement en $(T_d = 56.8, \beta_d = 0.66)$, $(T_d = 23.4, \beta_d = 2.06)$ et en $(T_d = 21.3, \beta_d = 2.60)$. C'est avec les quasars dans l'intervalle $1.5 < z < 2$ que j'ai le χ^2 minimal le plus important ; c'est pourquoi je prends cette population à part. Les résidus obtenus avec ce filtrage sont présentés par la figure 4.28. Pour les quasars à bas redshift, le résidu positif le plus important est à 545 GHz alors qu'il est à 353 GHz pour les quasars à grand redshift quoique sensiblement moins significatif. Pour la population intermédiaire, le résidu le plus significatif est à 353 GHz et est moins marqué à 545 GHz, à l'inverse de la population à bas redshift. Il semble que ce résidu soit "redshifté" ce qui pourrait suggérer une contamination par une ou des lignes d'émissions en provenance des quasars. Néanmoins, une modélisation insuffisante de la poussière peut aussi expliquer ces résidus. Notons que le résidu à 545 GHz est négatif pour les quasars à grand redshift sans être très significatif.

Si je retire les cartes *Planck* à 353 GHz et que j'effectue un filtrage cette fois poussière+tSZ pour les quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie dans *FIRST*, j'obtiens alors la figure 4.29. Je conserve un signal tSZ quoique légèrement plus faible. La possible contamination à 353 GHz n'est donc pas à l'origine du signal tSZ extrait à haut redshift.

4.5.4 Etalonnage *Planck* à 545 GHz et à 857 GHz

Les cartes *Planck* à 545 GHz et à 857 GHz ne sont pas étalonnées sur le dipôle du FDC mais à partir des densités de flux en provenance de Neptune et d'Uranus en suivant le modèle d'émission atmosphérique donné par MORENO, 2010 (PLANCK COLLABORATION et al., 2015f). L'erreur sur le flux à 545 GHz est de 6.1%, elle est de 6.4% pour le flux à 857 GHz. Je vais alors explorer 4 cas extrêmes où je vais me placer sur la limite supérieure

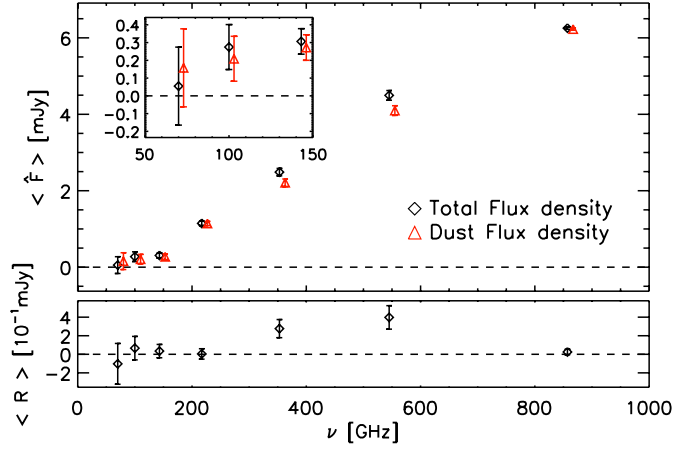
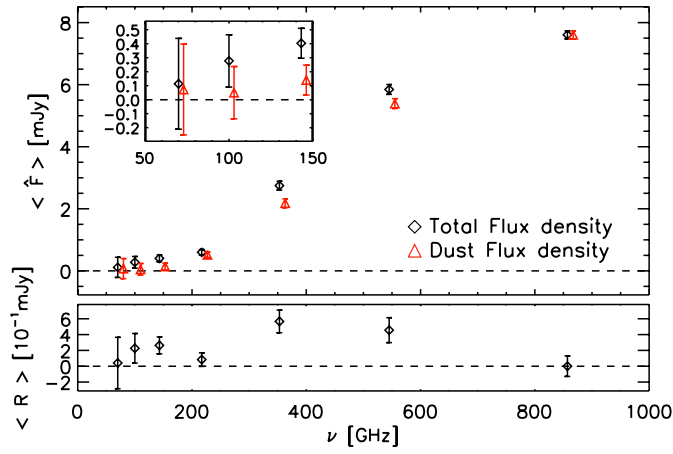
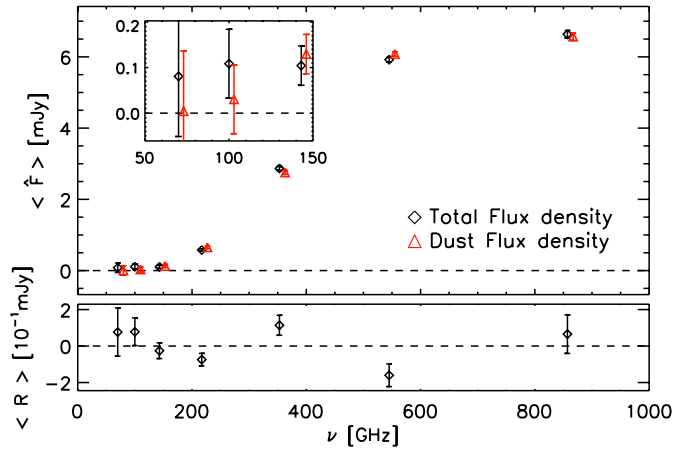

 (a) $0.1 < z < 1.5$

 (b) $1.5 < z < 2$

 (c) $2 < z < 5$

FIGURE 4.28 – Spectres moyens des quasars dans trois intervalles de redshift avec pour chaque figure : *En haut* : le spectre d'émission moyen à la position des quasars de *BOSS* (losanges noirs), le spectre de l'émission de poussières (triangles rouges). *En bas* : les résidus. Population de quasars : tous (*FIRST* et non *FIRST*).

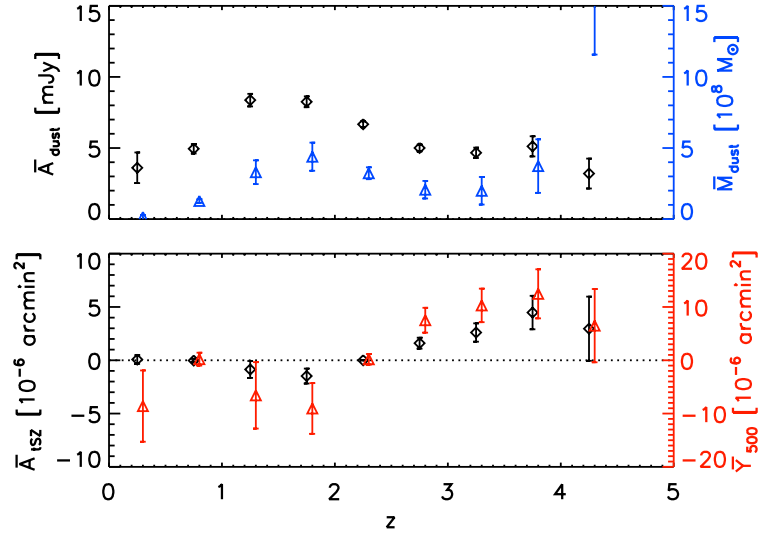


FIGURE 4.29 – *En haut* : Flux marginalisé à 857 GHz (losanges noirs) et la masse marginalisée (triangles bleues) pour la poussière en fonction de z . *En bas* : Amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) en fonction de z . Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*. Fréquence retirée pour l'extraction : 353 GHz.

et la limite inférieure données par l'erreur sur l'étalonnage pour les flux sur les cartes à 545 GHz et à 857 GHz. Je vais ensuite effectuer un filtrage poussière+tSZ avec ces cartes hautes fréquences modifiées.

Je vais tester les 4 cas d'étalonnage suivants :

- "Calibration 0" : je diminue le flux à 545 GHz à -6.1% et celui à 857 GHz à -6.4% ,
- "Calibration 1" : j'augmente le flux à 545 GHz à $+6.1\%$ et diminue à 857 GHz à -6.4% ,
- "Calibration 2" : je diminue le flux à 545 GHz à -6.1% et augmente celui à 857 GHz à $+6.4\%$,
- "Calibration 3" : j'augmente le flux à 545 GHz à $+6.1\%$ et celui à 857 GHz à $+6.4\%$.

Les évolutions de la masse de poussière et du paramètre de Compton intrinsèque sont peu affectées par la modification de l'étalonnage sur les cartes *Planck* hautes fréquences comme l'indique la figure 4.30. Cependant, l'étalonnage a un impact non négligeable sur les paramètres de la poussière, T_d et β_d . Par exemple, la "Calibration 2" entraîne une diminution de la valeur de β_d à haut redshift et le rapproche des valeurs plus physiques aux alentours de 2. L'évolution des paramètres de l'émission de poussière est présentée par la figure 4.31.

4.5.5 Contamination par des sources ponctuelles

Je combine les 43 290 sources ponctuelles dans la zone d'exclusion et les 4891 au-delà du Planck Catalogue of Compact Sources (PLANCK COLLABORATION et al., 2015j) à 857GHz avec les 13 242 nuages moléculaires froids(PLANCK COLLABORATION et al., 2015l) pour obtenir un catalogue de 61 423 sources ponctuelles. Je supprime ensuite les quasars qui sont dans les disques de 4 arcmin (résolution à 857 GHz pour *Planck*) centrés sur la position des sources ponctuelles. Je conserve 290 469 quasars sur les 291 421 quasars au départ (après avoir appliqué le masque à 65%).

J'extrait ensuite le flux à la positions de ces quasars à l'aide d'un matched filter mono-

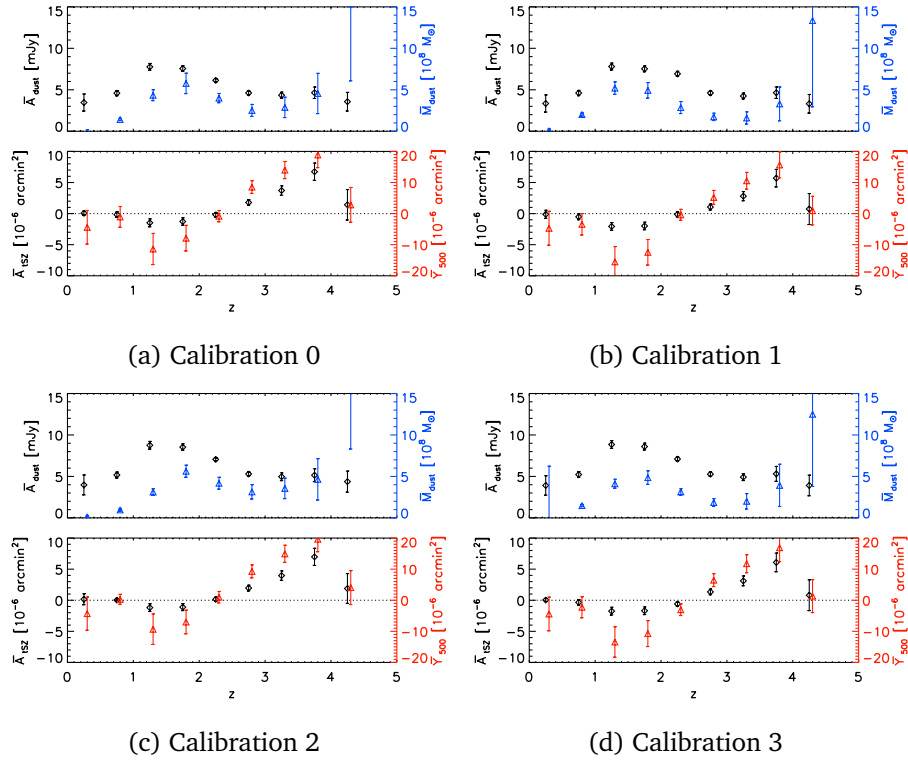


FIGURE 4.30 – Impact des incertitudes d’étalonnage de *Planck* (voir texte) avec pour chaque figure : *En haut* : Flux marginalisé à 857 GHz (losanges noirs) et la masse marginalisée (triangles bleues) pour la poussière en fonction de z . *En bas* : Amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) en fonction de z . Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.

fréquence puis je calcule le flux moyen sur toute la population ce pour chaque fréquence. J’obtiens donc le flux moyen en provenance des quasars non contaminés par les sources ponctuelles. Je retire à ce flux le flux moyen sur tous les quasars pour voir la contribution des sources ponctuelles. La différence de flux est présentée par la figure 4.32. Elle est compatible avec zéro. Je peux donc négliger la contamination due aux sources ponctuelles. Notons aussi qu’une partie de cette contamination est un signal qui provient des quasars eux-mêmes.

4.6 Bilan et perspectives

Bien que fortement dominé par l’émission thermique des poussières, le rayonnement en provenance des structures positionnées au niveaux des quasars *BOSS* est aussi en petite partie du synchrotron et du tSZ (cf. table 4.13). Pour extraire ce dernier qui est fortement sous-dominant, j’ai dû développer un nouveau filtre, le matched filter multi-composantes et introduire une dose de Bayes en marginalisant sur les paramètres de l’émission de poussière. Si le signal tSZ extrait est significatif, il est difficile pour le moment de conclure sur son origine. Il est probable qu’il ne soit pas totalement originaire du gaz chaud d’éventuel proto-amas hôtes de quasars. Il peut très bien provenir de gaz éjecté par les quasars eux-mêmes. Si *ROSAT* donne un levier préliminaire sur la contrepartie X du signal tSZ, il faudra sans doute attendre les données du satellite *eROSITA* pour obtenir une contrainte forte sur les X et déterminer au mieux l’origine du gaz chaud détecté.

TABLE 4.13 – Caractéristiques moyennes et marginalisées sur (T_d, β_d) de structures à la position des échantillons de quasars dans les cartes *Planck*. Les paramètres T_d et β_d sont laissés libres sauf mention contraire. La colonne *FIRST* indique si les quasars ont une contrepartie radio dans le catalogue *FIRST* ou non. Les χ^2 présentés ici sont les valeurs minimales sur le plan (T_d, β_d) . Les lignes grises indiquent les filtres qui donnent le plus petit χ^2 pour une population de quasar donnée. La ligne "Filter" indique les spectres d'émission utilisés pour construire le filtre (qui peut être un matched filter multi-fréquences mono ou multi-composantes).

z_{min}	z_{max}	<i>FIRST</i>	Filter	$\chi^2/5$	T_d (K)	β_d	$\overline{M_{dust}}$ ($10^8 M_\odot$)	$\overline{Y_{500}}$ (10^{-6} arcmin^2)	$\overline{M_{500}}$ ($10^{13} M_\odot$)	$\overline{L_{synch}}$ ($10^{-3} L_\odot \text{ Hz}^{-1}$)
0.1	5	-	dust	16.3	28.2 ± 0.5	1.6 (fixed)	1.70 ± 0.08	-	-	-
0.1	5	-	dust	5.2	19.1 ± 0.8	2.71 ± 0.13	0.84 ± 0.07	-	-	-
0.1	5	-	dust+tsZ	9.1	18.6 ± 0.8	2.80 ± 0.13	0.76 ± 0.07	17.02 ± 0.82	3.32 ± 0.09	-
0.1	5	-	dust+synch	6.7	20.0 ± 1.0	2.52 ± 0.14	0.98 ± 0.09	-	-	0.34 ± 0.13
0.1	5	-	dust+tsZ+synch	16.1	21.3 ± 1.1	2.24 ± 0.15	1.21 ± 0.12	17.15 ± 0.82	3.34 ± 0.09	0.66 ± 0.13
2.5	4	-	dust	12.4	28.7 ± 0.5	1.6 (fixed)	7.85 ± 0.42	-	-	-
2.5	4	-	dust	4.2	21.9 ± 0.8	2.63 ± 0.14	2.82 ± 0.46	-	-	-
2.5	4	-	dust+tsZ	2.3	22.5 ± 0.9	2.59 ± 0.18	2.60 ± 0.53	8.62 ± 1.36	2.26 ± 0.20	-
2.5	4	-	dust+synch	3.8	23.8 ± 0.9	2.25 ± 0.16	4.46 ± 0.82	-	-	-26.41 ± 5.78
2.5	4	-	dust+tsZ+synch	3.4	23.5 ± 1.0	2.34 ± 0.22	3.75 ± 1.05	5.92 ± 2.25	1.63 ± 0.71	-11.37 ± 8.66
2.5	4	yes	dust	4.9	32.5 ± 5.1	1.24 ± 0.44	16.31 ± 6.40	-	-	-
2.5	4	yes	dust+tsZ	2.0	23.3 ± 3.2	2.01 ± 0.46	14.32 ± 6.24	-40.14 ± 7.57	-	-
2.5	4	yes	dust+synch	0.4	18.8 ± 2.8	3.72 ± 0.67	1.11 ± 1.14	-	-	236.91 ± 30.47
2.5	4	yes	dust+tsZ+synch	0.3	15.7 ± 3.3	5.33 ± 1.43	0.38 ± 0.68	15.77 ± 10.44	2.23 ± 1.88	278.76 ± 40.69
2.5	4	no	dust	4.4	21.8 ± 0.9	2.69 ± 0.19	2.57 ± 0.54	-	-	-
2.5	4	no	dust+tsZ	1.5	22.4 ± 1.2	2.68 ± 0.23	2.18 ± 0.56	10.83 ± 1.46	2.58 ± 0.20	-
2.5	4	no	dust+synch	2.7	24.0 ± 1.0	2.22 ± 0.18	4.47 ± 0.89	-	-	-34.17 ± 6.23
2.5	4	no	dust+tsZ+synch	2.3	23.6 ± 1.1	2.34 ± 0.23	3.65 ± 1.09	6.82 ± 2.41	1.83 ± 0.67	-16.86 ± 9.24
2.5	4	no	dust($\sigma_T=2$ K)+tsZ	2.1	20.9 ± 1.1	2.81 ± 0.22	2.03 ± 0.45	10.55 ± 1.43	2.54 ± 0.20	-
2.5	4	no	dust($\sigma_T=5$ K)+tsZ	1.9	10.7 ± 1.5	3.61 ± 0.23	3.08 ± 0.33	9.37 ± 1.49	2.37 ± 0.21	-
2.5	4	no	dust($\sigma_T=10$ K)+tsZ	11.7	6.6 ± 0.9	2.31 ± 0.02	13.07 ± 1.12	9.73 ± 1.47	2.42 ± 0.21	-

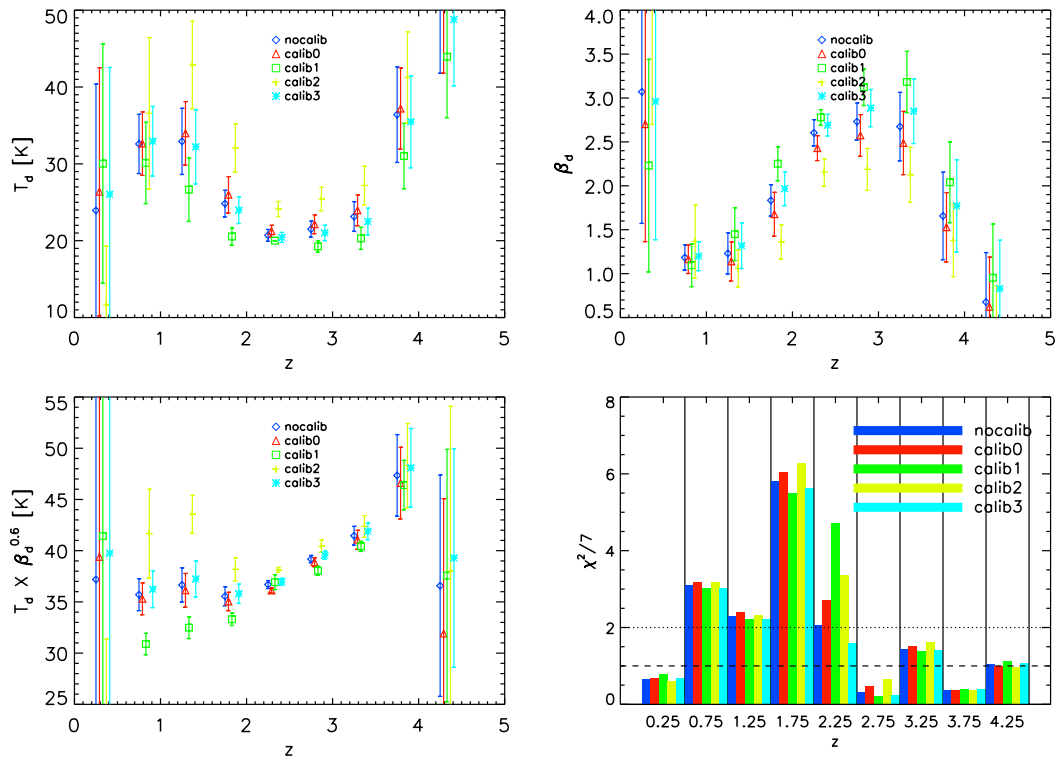
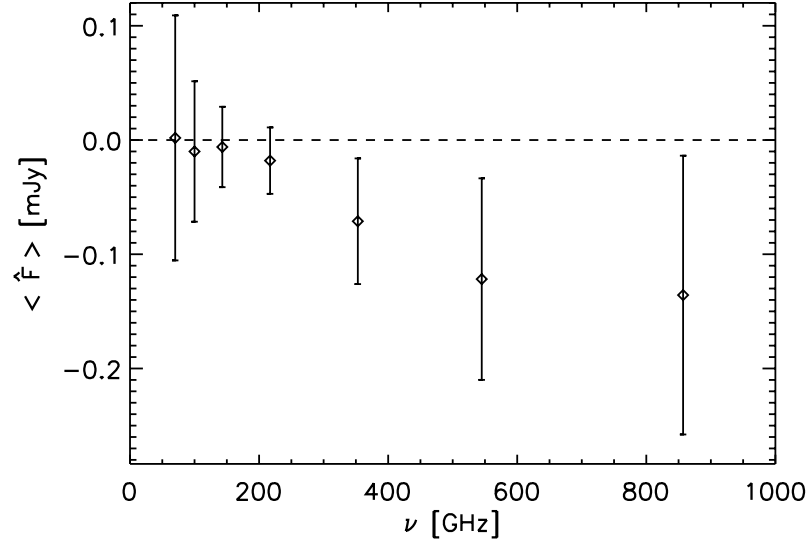
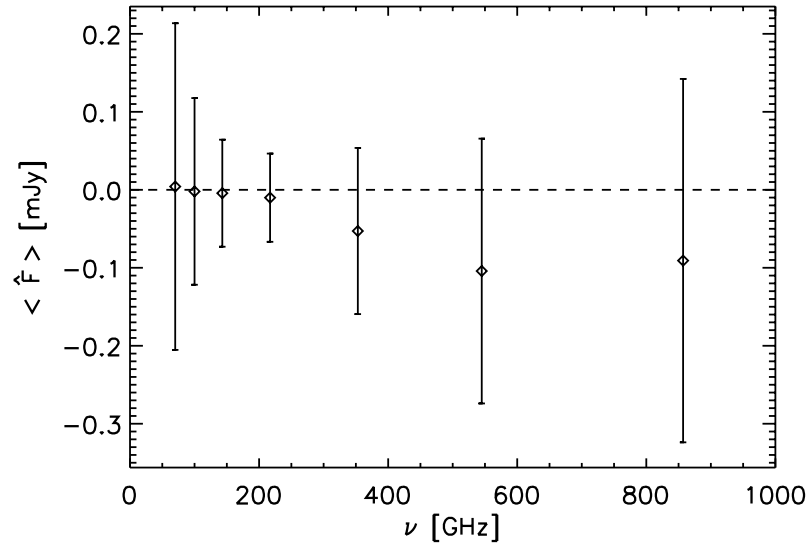


FIGURE 4.31 – Evolution des différents paramètres de poussière et du χ^2 en fonction du redshift pour un filtre poussière+tSZ. Population de quasars : quasars sans contrepartie *FIRST*.



(a) Différence de flux quasars sans sources ponctuelles et quasars avec sources ponctuelles. Tous les quasars *BOSS*.



(b) Différence de flux quasars sans sources ponctuelles et quasars avec sources ponctuelles. Quasars sans contrepartie radio avec $2.5 < z < 4$.

FIGURE 4.32 – En haut : la différence entre spectre d'émission moyen à la position des quasars de *BOSS* sans sources ponctuelles proches et avec sources ponctuelles proches. En bas : même différence mais pour la sous-population de quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie radio.

Chapitre 5

La détection des amas dans *ROSAT* (vers *ROSAT+ Planck*)

Après m'être intéressé à la détection par une approche statistique de structures contenant du gaz chaud à grand redshift, je vais cette fois porter mon attention sur la détection individuelle de telles structures à plus bas redshift ($0 < z < 1.5$). L'objectif final est de développer un filtre capable de combiner l'effet Sunyaev-Zel'dovich thermique aux émissions de rayonnement de freinage dans les X pour détecter des structures moins massives que celles détectées dans un seul canal et apporter des contraintes plus fortes sur la fonction de masse présentée dans la section 2.2.2. L'étape du filtre consacré à la détection de l'effet tSZ sera le matched filter multi-fréquence que j'évoque dans la section 4.1.2. Avec ce filtre, je peux convertir les mini-cartes *Planck* en carte de signal tSZ. Quand le signal dépasse une certaine valeur du rapport signal-sur-bruit, je considère qu'il y a détection d'un amas de galaxies. Le rapport signal-sur-bruit seuil est fixé par les simulations pour minimiser la contamination en provenance de sources non tSZ et de fluctuations statistiques. Cette approche a été notamment au cœur de la détection et de la construction du catalogue d'amas dans *Planck* (MELIN et al., 2006 ; PLANCK COLLABORATION et al., 2014c ; PLANCK COLLABORATION et al., 2015k).

L'étape tSZ du filtre n'est cependant pas le sujet de cette partie. En effet, je vais consacrer ce chapitre au développement du filtre adapté au rayonnement de freinage qui prend source dans le gaz chaud au sein des amas, rayonnement qui est détectable dans les X et plus particulièrement dans les données satellite *ROSAT*. Le filtrage en X présente des difficultés particulières et l'une d'entre elles, c'est la nature du bruit qui n'est plus stationnaire. En effet les photons X arrivent sur le détecteur en petites quantités et leur nombre est distribué selon une loi de Poisson. Ce qui veut dire que le bruit, ou l'erreur sur le signal si l'on préfère, dépend de la valeur moyenne du signal lui-même en un point donné. Cette propriété est incompatible avec les hypothèses de la stationnarité comme je vais l'évoquer dans la section 5.3.1. Il n'est donc pas possible d'utiliser sans aménagement un matched filter qui est construit avec l'hypothèse de stationnarité (cf section 3.4.2 dans le chapitre 3). C'est pourquoi je vais utiliser une autre approche. Je vais construire le filtre X à partir de la maximisation d'une fonction de vraisemblance. Comme le matched filter, cependant, le filtre X est construit en supposant un certain profil spatial pour les amas à extraire. Cette nouvelle approche n'est pas non plus sans difficultés. Ces dernières vont être aussi le sujet de ce chapitre avec de manière plus générale, la faisabilité d'un tel filtre. Je vais ensuite chercher à qualifier ce filtre sur une population d'amas connus donnée par le catalogue "PXCC" présenté dans la section 5.2.5.

L'utilisation d'un matched filter, quoique non optimale, reste possible pour extraire un signal dans les données X. La combinaison de ce matched filter X avec le matched filter tSZ doit augmenter le taux de détection des amas dans les données *Planck* et *ROSAT* (TARRIO

et al., 2016).

5.1 Un canal de détection des amas en X

Avant de présenter la mission *ROSAT* et le filtre X, je vais d'abord introduire ce qu'est le rayonnement de freinage dans cette section.

5.1.1 Détection des amas par rayonnement de freinage

Je m'appuie principalement sur [SARAZIN, 1988](#) et sur [BÖHRINGER et al., 2009](#) pour écrire cette section introductive. Historiquement, si la première détection du gaz chaud d'un amas de galaxies par effet tSZ remonte à 1983 ([BIRKINSHAW et al., 1984](#)), la détection de ce même gaz chaud par rayonnement de freinage la précède de plus d'une dizaine d'année. La première source X extra-galactique détectée n'est cependant pas le gaz chaud d'un amas mais le noyau galactique actif de la galaxie M87 ([BYRAM et al., 1966](#)). D'autres sources X seront ensuite détectées dans les amas de Persée ([FRITZ et al., 1971](#)) et de Coma ([MEEKINS et al., 1971](#)). Sources X et amas de galaxies semblent aller de paire ([CAVALIERE et al., 1971](#)). Il faudra cependant attendre le satellite *Uhuru* pour pouvoir détecter les premières sources X extra-galactique étendues qui ne sont donc pas associées à des noyaux galactique actifs mais à un gaz chaud diffus ([GURSKY et al., 1972](#); [KELLOGG et al., 1972](#); [FORMAN et al., 1972](#)).

Se pose alors la question du mécanisme à l'origine du signal X du gaz dans les amas. Notons que ce gaz est un plasma d'hydrogène et d'hélium (plus des éléments plus lourds en quantités moindres) ionisés avec des électrons libres. Je vais ici m'attarder sur les quatre mécanismes suivants qui peuvent expliquer le rayonnement X :

- "Free-Free" ou "Thermal bremsstrahlung" ; rayonnement de freinage thermique. Un électron libre du plasma va être accéléré à proximité d'un ion et va émettre un rayonnement comme toute particule chargée libre qui accélère. Ce mécanisme a été proposé par [FELTEN et al., 1966](#) pour les amas.
- "Free-bound" ou recombinaison. Un électrons libre va se recombiner avec un ion et de ce fait émettre un photon.
- "Bound-Bound" ou raies d'émissions. Un électron lié à un ion va changer d'état d'énergie et libérer un photon. Dans le spectre X des amas ont trouve des raies d'hydrogène, de fer, de silicium, de magnésium, d'oxygène, d'azote, de soufre, de néon et de carbone parmi d'autres. Tous ces éléments sont très fortement ionisés avec un ou deux électrons liés au noyau au maximum.
- "Two photons radiation" ou transition à deux photons. La transition d'un électron d'un état d'énergie à un autre va libérer deux photons. Si l'énergie totale portée par les deux photons est fixée, la répartition de l'énergie entre les deux photons n'est par contre pas déterminée. C'est pourquoi le processus de transition à deux photons contribue au continuum et non aux raies d'émissions.

Comme les particules du gaz chaud sont soumises au même champ de gravitation que les galaxies, elles doivent avoir des vitesses similaires. A partir de ce constat, [FELTEN et al., 1966](#) conclut que $k_b T_X \simeq \mu m_p \sigma_r^2$ avec T_X la température des particules, μm_p la masse moyenne d'un ion et σ_r^2 la variance de la vitesse des galaxies dans un amas. Ce qui conduit à écrire que :

$$T_X \simeq 7 \times 10^7 \text{K} \left(\frac{\sigma_r}{1000 \text{km/s}} \right)^2 \quad (5.1)$$

Comme les vitesses dans un amas sont bien de l'ordre de 1000 km/s, on peut estimer que la température des particules dans le gaz chaud est de l'ordre de $10^7 - 10^8 \text{K}$. [BOEHRINGER et al., 1989](#) a démontré que pour cette gamme de température, le rayonnement de freinage

thermique devient le mécanisme dominant comme l'indique la figure 5.1. Je vais donc me concentrer sur le rayonnement de freinage et laisser les autres mécanismes de côté. De plus, localement, le plasma peut avoir plusieurs phases et donc plusieurs températures associées. Je vais considérer que localement, le plasma a une seule température ce qui peut biaiser l'estimation de la température réelle (MAZZOTTA et al., 2004).

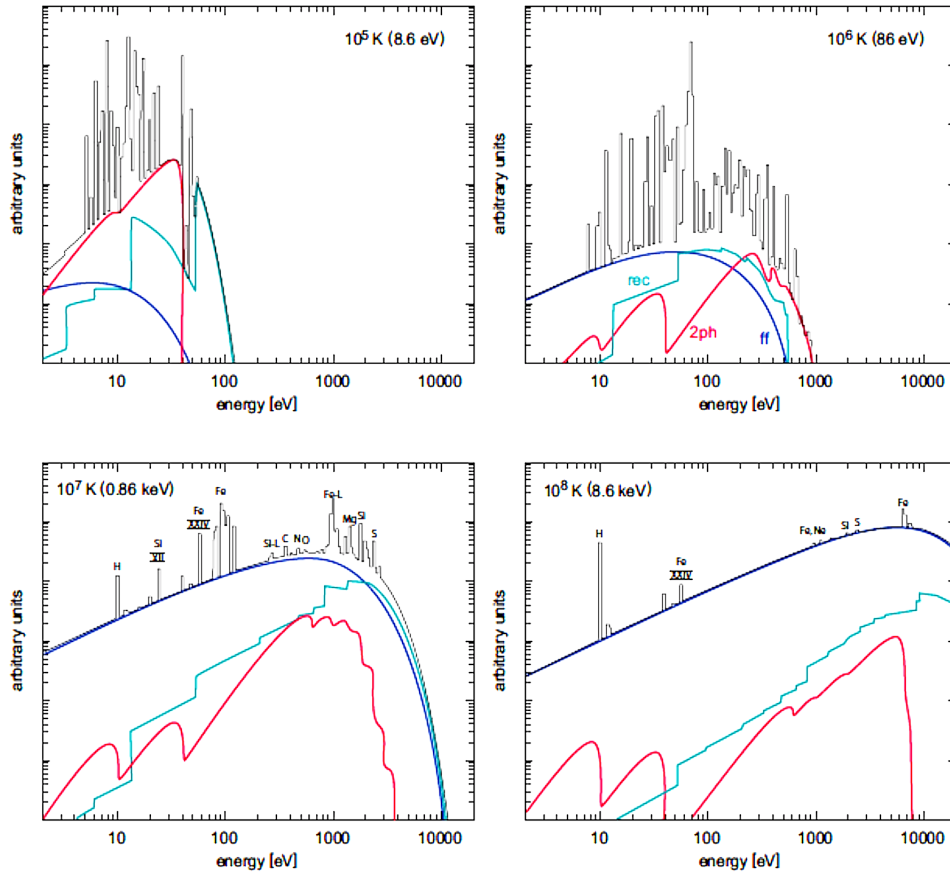


FIGURE 5.1 – Spectre des amas dans la gamme des rayons X pour différentes températures : $10^5 K$, $10^6 K$, $10^7 K$ et $10^8 K$. Les différents mécanismes sont présentés : en bleu, le rayonnement de freinage thermique, en vert la recombinaison, et en rouge la transition à deux photons. Le spectre final, en noir, est obtenu par l'addition des spectres associés aux 3 mécanismes plus les raies d'émission du plasma. Pour des températures $T \geq 10^7 K$, le rayonnement de freinage domine. Crédit : BÖHRINGER et al., 2009

Spectre d'énergie pour un électron

Pour la suite de cette section, j'ai utilisé le cours de HU, 2016 et sur celui de GRAINGE, 2016. Je me restreins d'abord à un électron qui va rencontrer un ion comme le présente la figure 5.2. On peut alors parler de collision avec l'ion. L'accélération de l'électron est notée $a(t)$. On va supposer que l'accélération le long de l'axe horizontal est négligeable, ce qui veut dire que $a_{\perp}(t) \gg a_{\parallel}(t)$ et donc que $a(t) \simeq a_{\perp}(t)$ et que la vitesse V de l'électron le long de l'axe horizontal reste quasi-constante. Dans ces conditions, je peux écrire x la distance entre l'électron et l'ion de cette façon $x^2 = b^2 + V^2 t^2$. En appliquant la loi de

Coulomb, et en supposant que l'ion a une charge Ze j'obtiens que

$$\begin{aligned} a(t) \simeq a_{\perp} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \cdot Ze}{x^2} \frac{b}{x} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2 b}{(b^2 + V^2 t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec ϵ_0 la permittivité du vide. Il sera intéressant par la suite de travailler avec l'intégrale de l'accélération en fonction du temps :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) dt &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{b^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \left(\frac{Vt}{b}\right)^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{b^2} \cdot \frac{b}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{b^2} \cdot \frac{b}{V} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{bV} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{bV} \cdot 2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

avec $u = \frac{Vt}{b}$ et $u = \tan \theta$ et en utilisant la propriété suivante : $1 + \tan^2 \theta = (\cos \theta)^{-2}$.

Je définis un temps caractéristique τ qui est tel que pour $t < -\tau$ et $t > \tau$, l'accélération devient négligeable donc tel que $a(|t| > \tau) = 0$. Je peux ainsi dire que 2τ est le temps de "collision" entre l'électron et l'ion. Je vais travailler avec des processus qui ont des échelles de temps $1/\nu$ très grandes par rapport au temps de collision, donc telles que $\tau \ll 1/\nu$ soit $\nu\tau \ll 1$. La transformée de Fourier de l'accélération peut s'écrire ainsi dans ces conditions de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{i2\pi\nu t} dt \\ &\simeq \int_{-\tau}^{+\tau} a(t) e^{i2\pi\nu t} dt \\ &\simeq \int_{-\tau}^{+\tau} a(t) 1 dt \\ &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) dt \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{bV} \end{aligned} \quad (5.4)$$

car comme $\nu\tau \ll 1$, j'ai aussi $e^{i2\pi\nu t} \simeq 1$.

La formule de Larmor me donne la puissance perdue par l'électron sous forme de rayonnement quand il accélère (et quand il n'est pas relativiste) :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2(t)}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (5.5)$$

Je veux obtenir la quantité $\frac{dW}{d\nu}$. Je note que l'énergie totale perdue par l'électron lors de la collision avec l'ion s'écrit comme il suit en utilisant le théorème de Parseval qui stipule

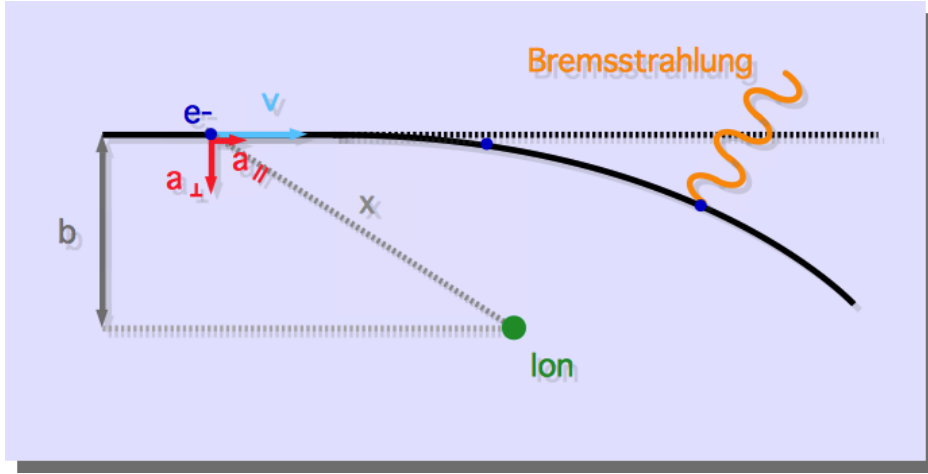


FIGURE 5.2 – A proximité d'un ion (disque vert), un électron (disque bleu) va ralentir et changer de trajectoire (ligne continue noire). De ce fait, il va émettre des photons, c'est le rayonnement de freinage.

que $\int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |a^2(\nu)|d\nu$ et que $a(\nu) = a^*(-\nu)$:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dt} dt \\
 &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t)dt \\
 &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |a^2(\nu)|d\nu \\
 &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \int_0^{+\infty} |a^2(\nu)|d\nu \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{dW}{d\nu} d\nu.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Par identification, j'obtiens que

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{2 \cdot 2}{3} \frac{e^2 |a^2(\nu)|}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \tag{5.7}$$

et en remplaçant $a(\nu)$ par son expression donnée par l'équation 5.4, j'arrive à l'expression suivante de la dérivée de l'énergie perdue par ν :

$$\frac{dW}{d\nu} = \frac{16}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 b^2 V^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3. \tag{5.8}$$

Spectre d'énergie pour le gaz chaud

La puissance perdue par un électron de vitesse V lors d'une collision est donnée par l'équation 5.8. Un électron parcourt une distance $V dt$ pendant une durée dt . Je ne regarde que les collisions possibles avec des ions situés à une distance b de l'électron, soit dans un anneau d'aire $2\pi b db$ si l'électron est fixe. Comme l'électron se déplace de $V dt$, il va entrer en collision avec tous ces ions qui sont dans un volume $2\pi b db V dt$. L'électron peut donc rentrer en collision avec $N_i = n_i 2\pi b db V dt$ ions avec n_i la densité d'ion par volume. Il y a $N_e(v) = n_e(V) dV$ électron de vitesse V dans un volume dV . Chaque électron pouvant entrer en collision avec N_i ions, il y a donc $N_e(V) \cdot N_i$ collisions dans un volume dV pour

un temps dt et pour des ions et des électrons séparés d'une distance b . Dans un tel cas la dérivée de l'énergie perdue par ν s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\nu} &= N_e(V) \cdot N_i \left(\frac{dW}{d\nu} \right)_{1 \text{ collision}} \\ &= N_e(V) \cdot N_i \cdot \frac{16}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 b^2 V^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\ &= n_e(V) n_i dV 2\pi b db V dt \cdot \frac{16}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 b^2 V^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3\end{aligned}\quad (5.9)$$

Je vais m'intéresser à la dérivée de l'énergie perdue par ν par unité de volume et de temps pour tous les ions et électrons séparés par des distances entre b_{min} et b_{max} , ce qui correspond en fin de compte au spectre par unité de volume :

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\nu dt dV} &= n_e(V) n_i 2\pi \cdot \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{16}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 b^2 V^2} V b db \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\ &= n_e(V) n_i 2\pi \cdot \frac{16}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 V} \ln \left(\frac{b_{min}}{b_{max}} \right) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Il est assez difficile de trouver l'expression de b_{min} et b_{max} . Pour ce dernier, on peut par exemple supposer qu'il n'y a pas d'émission au-delà de fréquence V/b et donc écrire que $b_{max} \simeq V/\nu$. Pour b_{min} , on peut utiliser la limite quantique qui dérive du principe d'incertitude qui amène à écrire que $b_{min} = h/(m_e V)$ ou on peut supposer que c'est à cette distance que l'énergie potentielle devient égale à l'énergie cinétique de l'électron. Dans ce dernier cas $b_{min} = 2 \cdot Ze^2/(4\pi\epsilon_0 m_e V)$. Les incertitudes sur b_{min} et b_{max} sont atténuées par la fonction logarithme. Le tout est porté par le facteur de Gaunt $g(\nu, V)$ qui s'écrit comme il suit :

$$g(\nu, V) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{b_{min}}{b_{max}} \right) \quad (5.11)$$

Je suppose que ce facteur ne varie pas ou peu avec la vitesse des électrons donc que $g(\nu, V) \simeq g(\nu)$.

Soit n_e la densité totale d'électrons quelque soit leur vitesse. Je suppose les électrons sont en équilibre thermique avec le reste du gaz chaud. Ils suivent alors une distribution de Maxwell :

$$\begin{aligned}n_e(V) &= n_e(\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}) \\ &\propto \exp \left(-\frac{m_e(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)}{2k_b T_e} \right) dV_x dV_y dV_z \\ &= \exp \left(-\frac{m_e V^2}{2k_b T_e} \right) 4\pi V^2 dV\end{aligned}\quad (5.12)$$

J'introduis $\sigma_V^2 = k_b T_e / m_e$. Je peux donc écrire que :

$$n_e(V) = n_e \frac{\exp \left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2} \right) V^2 dV}{\int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2} \right) V^2 dV} \quad (5.13)$$

avec n_e la densité totale d'électron. Je peux ainsi écrire le spectre de puissance volumique

pour un électron de vitesse V :

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{d\nu dt dV} &= n_e(V) n_i \cdot \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 V} g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\
 &= n_e n_i \cdot \frac{\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V^2 dV}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V^2 dV} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2 V} g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\
 &= n_e n_i \cdot \frac{\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V dV}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V^2 dV} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2} g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Pour émettre un photon d'énergie $h\nu$, les électrons doivent avoir une énergie cinétique supérieure à cette énergie donc une vitesse supérieure à $m_e V_{min}^2/2 = h\nu$. Je vais donc intégrer de V_{min} à $+\infty$ et non de 0 à $+\infty$. Comme :

$$\int_{V_{min}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V dV = \sigma_V^2 \exp\left(-\frac{V_{min}^2}{2\sigma_V^2}\right) = \sigma_V^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e}\right) \tag{5.15}$$

et que :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V^2 dV = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_V^2 \sigma_V^2, \tag{5.16}$$

j'obtiens que

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{d\nu dt dV} &= n_e n_i \cdot \frac{\int_{V_{min}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V dV}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_V^2}\right) V^2 dV} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2} g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\
 &= n_e n_i \cdot \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e}\right) \left(\frac{\pi}{2} \sigma_V^2 \right)^{-1/2} \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2}{c^2 m_e^2} g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\
 &= n_e n_i \cdot \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e}\right) \frac{32\pi}{3c^2 m_e^2} \left(\frac{2\pi m_e}{3k_b T_e} \right)^{1/2} e^6 Z^2 g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Absorption dans le gaz chaud

Une partie du rayonnement de freinage va être absorbée par les électrons environnant. Je vais m'inspirer de l'approche que j'ai développé dans la section 4.2.1 pour la poussière. Je pars d'un nuage de gaz chaud. s est la coordonnée le long de la ligne de visée. $s = 0$ correspond à la position avant le nuage et s_0 celle en sortie du nuage. $\vec{d}$ indique les coordonnées sur le plan orthogonal à la ligne de visée. Soit $I_\nu(s, \vec{d})$ l'intensité spécifique du gaz chaud. L'intensité spécifique varie le long de la ligne de visée puisque à chaque fois il y a émission et absorption de photons

$$\frac{dI_\nu}{ds}(s, \vec{d}) = \epsilon_\nu(s, \vec{d}) - \alpha_\nu(s, \vec{d}), \tag{5.18}$$

avec $\epsilon_\nu(s, \vec{d})$ un terme d'émission et $\alpha_\nu(s, \vec{d})$ un terme d'absorption.

Le terme d'émission est donné par la formule précédente pour le rayonnement de freinage :

$$\frac{dW}{d\nu dV dt}(s, \vec{d}) = \int_{4\pi} \epsilon_\nu(s, \vec{d}) d\Omega = 4\pi \epsilon_\nu(s, \vec{d}) \tag{5.19}$$

J'ai alors l'expression suivante pour $\epsilon_\nu(s, \vec{d})$

$$\epsilon_\nu(s, \vec{d}) = n_e(s, \vec{d}) n_i(s, \vec{d}) \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e(s, \vec{d})}\right) \frac{8}{3c^2 m_e^2} \left(\frac{2\pi m_e}{3k_b T_e(s, \vec{d})} \right)^{1/2} e^6 Z^2 g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \tag{5.20}$$

Je vais par la suite supposer la température des électrons constante selon la ligne de visée pour simplifier les calculs qui vont suivre ; donc $T_e(s, \vec{d}) = T_e(\vec{d})$.

Le terme d'absorption dépend de l'intensité spécifique :

$$\alpha_\nu(s, \vec{d}) = \kappa_\nu(s, \vec{d}) I_\nu(s, \vec{d}) \quad (5.21)$$

La loi de Kirchoff stipule que l'absorption compense totalement l'émission de photons quand le spectre est un corps noir :

$$\epsilon_\nu(s, \vec{d}) = \kappa_\nu(s, \vec{d}) B_\nu(T_e(\vec{d})). \quad (5.22)$$

Comme $I_\nu(0, \vec{d}) = 0$ avant le nuage de gaz chaud, les relations précédentes aboutissent à l'expression suivante de l'intensité spécifique :

$$I_\nu(s_0, \vec{d}) = B_\nu(T_e(\vec{d}))(1 - e^{-\tau_d(s_0, \vec{d})}) \quad (5.23)$$

avec le chemin optique

$$\begin{aligned} \tau_d(s_0, \vec{d}) &= \int_0^{s_0} \kappa_\nu(s, \vec{d}) ds \\ &= (B_\nu(T_e(\vec{d})))^{-1} \epsilon_\nu(s, \vec{d}) ds \\ &= \frac{8}{3c^2 m_e^2} \left(\frac{2\pi m_e}{3k_b} \right)^{1/2} e^6 Z^2 g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e(\vec{d})}\right) (T_e(\vec{d}))^{-1/2} \int_0^{s_0} (B_\nu(T_e(\vec{d})))^{-1} n_e(s, \vec{d}) n_i(s, \vec{d}) ds \\ &= \frac{8}{3c^2 m_e^2} \left(\frac{2\pi m_e}{3k_b} \right)^{1/2} e^6 Z^2 g(\nu) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \\ &\quad \times \frac{c^2}{2h\nu^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e(\vec{d})}\right) \right) (T_e(\vec{d}))^{-1/2} \int_0^{s_0} n_e(s, \vec{d}) n_i(s, \vec{d}) ds \end{aligned} \quad (5.24)$$

Quand $\nu \rightarrow 0$, $\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e(\vec{d})}\right)\right) \rightarrow +\infty$ donc $\tau_d(s_0) \rightarrow +\infty$ et $I_\nu(s_0, \vec{d}) \rightarrow B_\nu(T_e(\vec{d}))$. A basse-fréquence, le spectre X ressemble à celui d'un corps noir. Quand $\nu \rightarrow \infty$, $\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_b T_e(\vec{d})}\right)\right) \rightarrow 0$ donc $\tau_d(s_0)$ devient petit. Je peux alors écrire que

$$\begin{aligned} I_\nu(s_0, \vec{d}) &\simeq B_\nu(T_e(\vec{d})) \tau_d(s_0, \vec{d}) \\ &= B_\nu(T_e(\vec{d})) (B_\nu(T_e(\vec{d})))^{-1} \int_0^{s_0} \epsilon_\nu(s, \vec{d}) ds = \int_0^{s_0} \epsilon_\nu(s, \vec{d}) ds \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dans ce dernier cas, $I_\nu(s_0, \vec{d}) \propto (T_e(\vec{d}))^{-1/2} \int_0^{s_0} n_e(s, \vec{d}) n_i(s, \vec{d})$. Je vais travailler sur une gamme de fréquence et de température ou je suppose que c'est le cas. C'est avec cette relation que les lois d'échelles pour la luminosité X présentées en 2.2.4 ont été établies. La luminosité X s'obtient comme il suit :

$$L_\nu = \int \int I_\nu(s_0, \vec{d}) d\Omega d\vec{d} = 4\pi \int I_\nu(s_0, \vec{d}) d\vec{d} \quad (5.26)$$

et le flux observé sur terre est donné par la relation suivante :

$$F_\nu = \frac{L_\nu(1+z)(1+z)}{4\pi D_L^2(z)} \quad (5.27)$$

avec $D_L(z)$ la distance de luminosité, z le redshift du nuage de gaz chaud. A la différence de l'effet SZ dont la dépendance en fréquence n'est fonction ni du redshift et ni des propriétés physiques du gaz, l'évolution du flux X avec les fréquences est fonction à la fois du redshift z et de la température T_e . C'est analogue à l'émission de poussière présentée dans le chapitre 4.

5.1.2 Conversion en nombre de photons par seconde

L'une des particularités de l'astronomie X, c'est le faible nombre de photons détectés par unité de temps. Ce nombre de photons détectés est alors distribué selon une loi de Poisson, ce qui va avoir un impact important sur la construction du filtre X. Les détecteurs X sont en quelque sorte des compteurs de photons. Ils sont aussi capables de donner l'énergie de chaque photon incident. J'y reviendrai quand j'évoquerai le détecteur de *ROSAT@*, PSCP, dans la section 5.2.2.

Je pose $E = h\nu$ l'énergie du photon incident sur le détecteur X. Le flux reçu par le détecteur est noté $F_\nu(\vec{x}) = F(E, \vec{x}) = n_\gamma(E, \vec{x})E$ avec $n_\gamma(E, \vec{x})$ le nombre de photons par unité de surface, par énergie, par unité de temps et par angle solide et $\vec{x}$ les coordonnées dans le ciel de la source de flux $F(E, \vec{x})$. Pour obtenir le nombre de photons par angle solide pour une gamme d'énergie entre E_1 et E_2 , je dois multiplier $n_\gamma(E, \vec{x})$ par la surface effective du détecteur (qui prend en compte son efficacité) $A(E)$, par le temps d'exposition du détecteur t_{exp} et intégrer le tout sur l'énergie :

$$N_\gamma(\vec{x}) = t_{exp} \cdot \int_{E_1}^{E_2} n_\gamma(E, \vec{x}) A(E) dE = t_{exp} \cdot \int_{E_1}^{E_2} \frac{F(E, \vec{x})}{E} A(E) dE \quad (5.28)$$

Il me manque cependant un ingrédient. En effet les rayons X extra-galactiques vont être en partie absorbés par l'hydrogène neutre de la galaxie. La densité de colonne en hydrogène neutre par unité de surface (car intégré le long de la ligne de visée) est notée $N_H(\vec{x})$. Il existe plusieurs cartes du ciel de cette concentration. Dans cette étude je vais utiliser les cartes fournies par le *Leiden/Argentine/Bonn (LAB) survey* (KALBERLA et al., 2005). Elles seront ensuite ré-échantillonnées dans une procédure présentée dans la section 5.2.3. La figure 5.3 présente une carte du ciel du N_H qui est plus important au niveau du plan galactique.

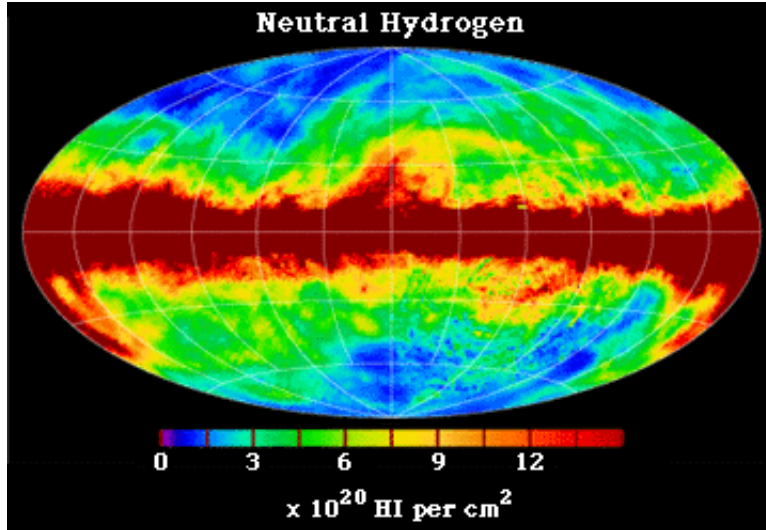


FIGURE 5.3 – Carte du ciel de la densité de colonne de l'hydrogène neutre galactique susceptible d'absorber une partie des rayons X. Crédit : SNOWDEN et al., 1995

La part de photons non absorbés est donnée par le coefficient $\exp[-\sigma_{ab}(E)N_H(\vec{x})]$ avec $\sigma_{ab}(E)$ la section efficace de l'absorption par les atomes d'hydrogènes. Son expression est explicitée par MORRISON et al., 1983. Je peux alors écrire que le nombre de photons, ou comptage, est égal à :

$$C_{E_1, E_2}(\vec{x}) = t_{exp} \cdot \int_{E_1}^{E_2} \frac{F(E, \vec{x})}{E} \exp[-\sigma_{ab}(E)N_H(\vec{x})] A(E) dE \quad (5.29)$$

N_H (10^{22}cm^{-2})	$FC(CR_{0.5\text{keV}, 2\text{keV}} \rightarrow F_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}})$ ($10^{-11} \text{erg.s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$)/(counts/s)
0.0010	1.89
0.0020	1.92
0.0050	1.92
0.0100	1.94
0.0200	2.00
0.0501	2.17
0.1000	2.46
0.1995	3.08
0.5012	5.34
1.000	10.6

TABLE 5.1 – Facteur de conversion pour passer d'un taux de photons au flux X en fonction de la densité de colonne N_H en supposant le modèle d'émission *MEKAL* pour un plasma de température $T_e = 7 \text{ keV}$ à redshift $z = 0.3$.

comme le présente [KEMBHAVI et al., 1999](#).

Je note CR_{E_1, E_2} le nombre de photons par unité de temps qui est tel que $CR_{E_1, E_2} = C_{E_1, E_2}/t_{exp}$. Notons que c'est la quantité C_{E_1, E_2} qui est distribuée selon une loi de Poisson et non CR_{E_1, E_2} . Pour passer du taux de photons $CR_{E_1, E_2}(\vec{x})$ sur une gamme d'énergie $[E_1, E_2]$ à un flux $F_{E_a, E_b}(\vec{x})$ sur une gamme d'énergie différente $[E_a, E_b]$, j'utilise le facteur de conversion suivant :

$$FC(CR_{E_1, E_2} \rightarrow F_{E_a, E_b}) = \frac{F_{E_a, E_b}}{C_{E_1, E_2}(\vec{x})} = \frac{\int_{E_a}^{E_b} F(E, \vec{x}) dE}{\int_{E_1}^{E_2} \frac{F(E, \vec{x})}{E} \exp[-\sigma_{ab}(E)N_H(\vec{x})] A(E) dE} \quad (5.30)$$

Conversion taux de comptage-flux pour les amas

Dans mon étude, je vais travailler avec des taux de photons $CR_{0.5\text{keV}, 2\text{keV}}$ estimés sur la gamme d'énergie $[0.5\text{keV}, 2\text{keV}]$, la "hard band" des données *ROSAT*. Cette quantité sera ensuite convertie en un flux $F_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}}$ cette fois sur la gamme d'énergie $[0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}]$ en utilisant le facteur de conversion présenté dans le tableau 5.1 et qui dépend de la densité de colonne. Ce facteur de conversion a été élaboré à partir de l'équation 5.30 en supposant que le spectre $F(E)$ soit celui d'un plasma de température $T_e = 7 \text{ keV}$ à redshift $z = 0.3$, plasma qui suit le modèle *MEKAL* ([MEWE et al., 1985](#) ; [MEWE et al., 1986](#)). Ce modèle d'émission prend en compte tous les mécanismes d'émission et pas seulement le rayonnement de freinage. Les lignes d'émission plasma sont aussi de la partie en supposant que l'abondance des éléments est celle que l'on trouve dans le soleil.

Je peux ensuite convertir le flux $F_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}}$ en luminosité $L_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}}$ en utilisant la formule suivante :

$$L_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}} = 4\pi D_L^2(z) F_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}} K(z) \quad (5.31)$$

avec $K(z)$ la K-correction qui dépend du modèle d'émission, ici le modèle *MEKAL* avec $T_e = 7 \text{ keV}$. Les différentes valeurs de K sont présentées dans le tableau 5.2.

En fait dans mon étude, je vais faire la démarche inverse pour simuler des amas et les injecter sur des cartes du ciel en X. Je vais partir de la luminosité $L_{0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}}$ des amas du catalogue PXCC et la convertir en taux de photon $CR_{0.5\text{keV}, 2\text{keV}}$. Je noterai ce taux de photons a_{CR} par la suite.

z	$K(z)$
0.01	1.006
0.02	1.011
0.05	1.028
0.1	1.056
0.15	1.081
0.2	1.106
0.3	1.153
0.4	1.198
0.5	1.238
0.6	1.276
0.7	1.311
0.8	1.344

TABLE 5.2 – K-correction en fonction du redshift pour convertir un flux en luminosité en supposant le modèle d'émission *MEKAL* pour un plasma de température $T_e = 7$ keV.

5.1.3 Contamination par les noyaux galactiques actifs

L'une des difficultés majeures de la détection des amas dans les données X, c'est la présence des émissions X en provenance des noyaux galactiques actifs (AGN). Ces noyaux sont des sources ponctuelles (quoique légèrement étendues par le lobe *ROSAT*) de luminosité très variables. Les AGN peu lumineux, très nombreux, vont former un arrière-plan homogène d'émission X dans le ciel *ROSAT* tandis que les AGN plus lumineux formeront une contamination de sources ponctuelles. Je reviendrai sur ce point délicat dans la section 5.2.3. Les sources AGN les plus brillantes peuvent être confondues avec des amas de galaxies lointains qui ne sont pas résolus.

Ce qui différencie une source X AGN d'une source X amas, c'est d'abord le spectre d'émission. Pour la seconde, c'est globalement un spectre de rayonnement de freinage, pour la première c'est un spectre en loi de puissance du type $F_\nu = \nu^\alpha$ avec $\alpha = -1$ (HASINGER et al., 1993). Il faut cependant avoir la résolution en énergie nécessaire pour différencier les spectres, donc suffisamment de photons ; ce qui ne concerne que les sources très lumineuses ou détectées avec un temps d'exposition suffisamment long. La seconde façon de différencier un AGN d'un amas, c'est l'étendue spatiale de la source X. Les AGN sont de petites structures, plus petites qu'une galaxie. Ils apparaissent donc sous forme de sources ponctuelles. Les amas à bas redshift sont par contre des sources étendues, ce qui a d'ailleurs permis de déterminer leur profil de densité de gaz et de température. Les amas à plus grand redshift sont par contre des sources ponctuelles et il devient délicat de les différencier des AGN. Il faut alors recourir aux simulations pour déterminer la part de la contamination AGN dans la détection d'amas de galaxies.

Il existe aussi d'autres contaminations dans la gamme des X comme les vents solaires qui peuvent altérer les mesures. Cependant ce type de contamination, à la différence des AGN, a une variabilité temporelle notable et peut donc être assez facilement détecté.

5.2 Les données *ROSAT* et le catalogue PXCC

ROSAT (ASCHENBACH et al., 1981 ; ZIMMERMANN, 1992) pour "Röntgensatellit", est un satellite allemand qui embarque un télescope et un détecteur de rayons X. Le gaz chaud des amas de galaxies est détectable dans la gamme d'énergie couverte par *ROSAT* qui va de 0.1 keV à 2.4 keV via le rayonnement de freinage principalement.

5.2.1 La mission ROSAT

A la différence des satellites micro-ondes, les satellites X sont beaucoup plus nombreux. L'astronomie X extra-galactique a pris son essor dans les années 1960 et depuis lors les missions se multiplient. J'ai déjà fait mention d'*Uhuru* lancé en 1970 par la NASA et qui fut l'un des premiers observatoires des source X de gaz dans les amas. Le satellite *ROSAT* quant à lui fut lancé le 1er juin 1990 et a cessé d'émettre le 12 février 1999. Lui succède le satellite *XMM-Newton* lancé le 10 décembre 1999 par l'ESA, *Chandra* lancé le 23 juillet 1999 par la NASA et *Suzaku* lancé en 2005 par la JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency). L'instrument *eROSITA* du satellite SRG ("Spectrum-Roentgen-Gamma") devrait prendre le relais en 2017. Le satellite ASTRO-H lancé le 17 février 2016 par la JAXA a cessé de communiquer depuis mars 2016 avec la terre, mettant prématurément fin à la mission.

Le satellite *ROSAT* après son lancement avait atteint une altitude de 580 km. En orbite autour de la terre, elle-même en orbite autour du soleil, *ROSAT* pouvait ainsi bénéficier de cette double rotation pour observer l'intégralité du ciel comme le montre la figure 5.4. Le satellite dans cette disposition effectuait un balayage complet du ciel en 180 jours. En effet, il parcourait 4 arcmin en une rotation autour de la terre et perpendiculairement de 1° par jour du fait de la rotation de la terre autour du soleil.

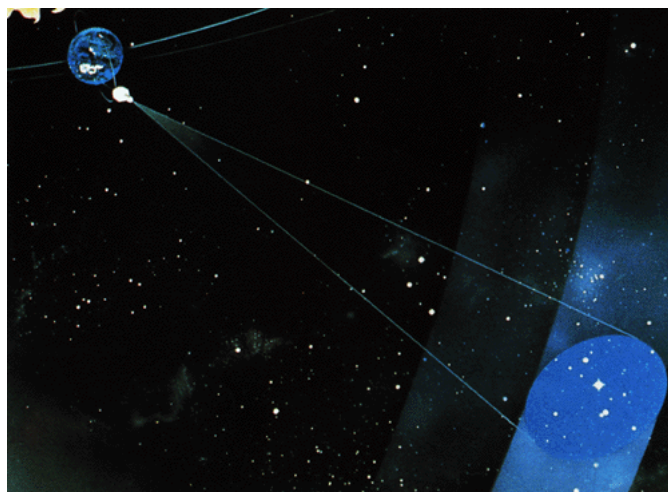


FIGURE 5.4 – Vue d'artiste du satellite *ROSAT* observant une certaine région du ciel. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik

L'un des intérêts majeurs des données récupérées par le satellite *ROSAT*, c'est qu'elles couvrent tout le ciel dans des gammes d'énergie de $[0.1\text{keV}, 2.4\text{keV}]$, de $[0.1\text{keV}, 0.5\text{keV}]$ ("Soft band") et de $[0.5\text{keV}, 2\text{keV}]$ ("Hard band"). On parle alors de cartes du ciel RASS pour "*ROSAT All Sky Survey*". Ces cartes sont à l'origine du catalogue de sources brillantes en X (VOGES et al., 1999) et aussi de deux catalogues d'amas de galaxies : NORAS (Northern ROSAT All-Sky) pour l'hémisphère nord (BÖHRINGER et al., 2000) et REFLEX (ROSAT-ESO Flux-Limited X-Ray) pour l'hémisphère sud (BOHRINGER et al., 1998 ; BÖHRINGER et al., 2001 ; BÖHRINGER et al., 2004), parmi d'autres. La figure 5.5 présente un exemple d'amas de galaxies détecté dans *ROSAT*.

Dans cette étude je vais travailler avec la carte du ciel X *ROSAT* dans la gamme $[0.5\text{keV}, 2\text{keV}]$. Cette carte sera ré-échantillonnée pour que la taille et la position de ses pixels soient respectivement de même taille et à la même position que les pixels des cartes HEALPix *Planck*.

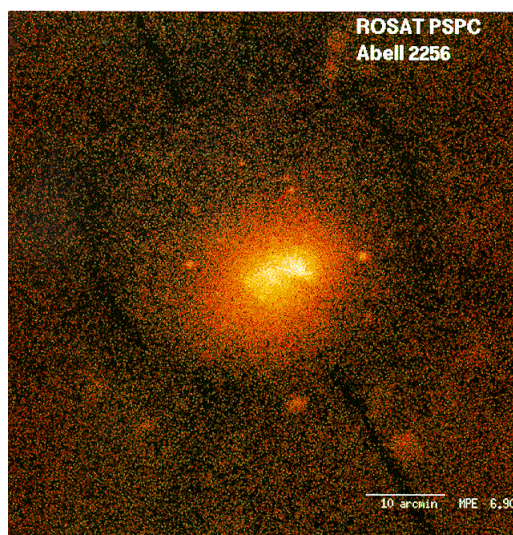


FIGURE 5.5 – Emission X en provenance de l'amas de galaxies Abell 2256 dans le ciel ROSAT. Le bruit de fond est dû à un "tapis" de sources AGN non résolues. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik

5.2.2 Le satellite ROSAT

Le satellite *ROSAT* embarque avec lui un télescope et 3 instruments. Le télescope de rayon X est nommé XRT ("X-Ray Telescope"). Il s'agit d'un télescope de type Wolter avec des miroirs en incidence rasante. Les rayons X arrivent avec un très faible angle d'incidence au niveau du miroir et sont donc légèrement réfléchis. Ils sont orientés vers le plan focal de l'appareil où se trouve le détecteur PSPC. Si les rayons X arrivaient face aux miroirs, ils les traverseraient du fait de leur importante énergie. La figure 5.6 présente la disposition Wolter des miroirs et le bloc optique du satellite. Le champ de vue du télescope est de 2° .

Les 3 instruments *ROSAT* sont présentés dans la liste suivante :

- Le détecteur de rayon X, PSPC ("Position Sensitive Proportional Counters") ([BRIEL et al., 1985](#) ; [BRIEL et al., 1995](#)). Ce détecteur est constitué de deux grilles de fils électrique dont la disposition est donnée par la figure 5.7. Ces grilles sont plongées dans un gaz. Il s'agit d'une sorte de mini-chambre à fils. Quand un rayon X arrive au niveau du gaz, il le ionise localement et provoque l'apparition d'un nuage d'électrons libres. La charge totale de ce nuage permet de remonter à l'énergie du rayon tandis que la présence d'un courant électrique ou non dans certains fils permet de localiser le "point d'impact" de ce rayon. Le détecteur PSPC a une résolution en énergie $\Delta E/E \sim 0.43$ pour $E = 0.93 \text{ keV}$, une résolution spatiale de 25 arcsec à 1 keV et une résolution temporelle de $130 \mu\text{s}$.
- Un détecteur haute-résolution (HRI, "High Resolution Imager") lui aussi placé aussi au niveau du plan focal de XRT.
- Un détecteur d'ultraviolets lointains (WFC, "Wide field camera").

5.2.3 Les cartes ROSAT et leur ajustement aux cartes Planck

Les photons détectés par PSPC sont rangés dans 3 gammes d'énergie, $[0.1 \text{ keV}, 2.4 \text{ keV}]$, $[0.1 \text{ keV}, 0.5 \text{ keV}]$ et $[0.5 \text{ keV}, 2 \text{ keV}]$. En utilisant les informations sur la position (provenant aussi du détecteur PSPC), il est possible de construire les cartes du ciel du RASS ("ROSAT All Sky Survey") dans ces 3 gammes d'énergie sus-nommées. La figure 5.8 présente la carte RASS du nombre de photons détectés à 1.5 keV. Pour chaque gamme d'énergie, les données RASS prennent la forme de 1378 mini-cartes de $6.4^\circ \times 6.4^\circ$ et de 512×512 pixels,

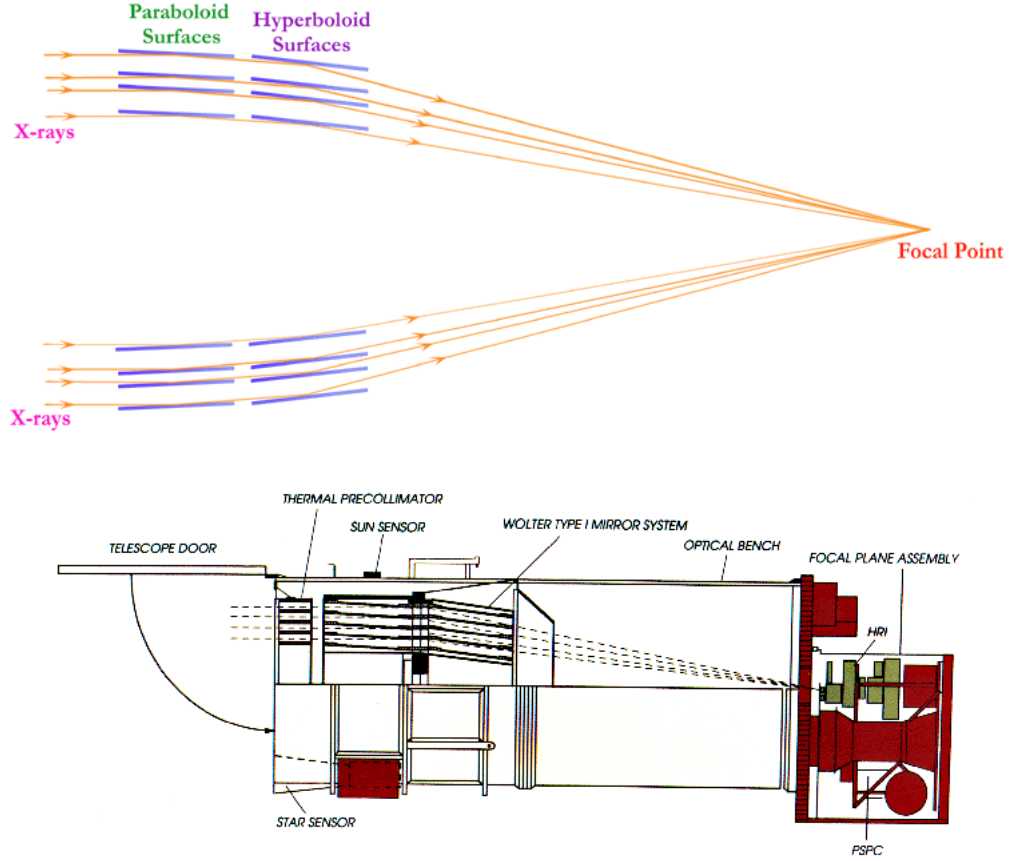


FIGURE 5.6 – En haut : la disposition en incidente rasante (dite "Wolter") des miroirs qui permet de focaliser les rayons X. En bas : le télescope embarqué par *ROSAT* avec les miroirs en disposition rasante. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik

soit une résolution de 0.75 arcmin (largeur d'un pixel) supérieure à celles des cartes *Planck* qui est de 1.7 arcmin. Les pixels des cartes *Planck* suivent l'organisation donnée par la méthode HEALPix (cf section 3.2.3). Les mini-cartes RASS vont alors être ré-échantillonnées à la résolution de *Planck* suivant le découpage HEALPix aussi. Pour ce faire, on construit une carte du ciel HEALPix sans signal de résolution 1.7 arcmin. Si la coordonnée dans le ciel du centre du pixel RASS est au niveau d'un pixel de la carte HEALPix, alors l'intégralité du nombre de photons détectés dans le pixel RASS sera reporté sur le pixel HEALPix. On obtient alors une carte du ciel X sous format HEALPix avec une résolution de 1.7 arcmin et dont les pixels correspondent parfaitement avec ceux des cartes *Planck*. Cette méthode pour passer d'une résolution à l'autre a été développée par [TARRIO et al., 2016](#). De la même façon, sont construites des cartes HEALPix du temps d'exposition par pixel.

Je vais travailler avec les cartes HEALPix *ROSAT* en "hard band" soit pour un intervalle d'énergie [0.5keV, 2keV]. Les cartes HEALPix *ROSAT* et du temps d'exposition seront ensuite découpées en mini-cartes de $10^\circ \times 10^\circ$ et de 350×350 pixels. Je note respectivement $m_X(\vec{x})$ et $t_{exp}(\vec{x})$ le nombre de photons X et le temps d'exposition à la position d'un pixel $\vec{x}$ (dans le ciel). $m_X(\vec{x})$ est un petit nombre (inférieur à 10, le plus souvent 0 ou 1) et a priori est distribué selon une loi de Poisson de moyenne $\tilde{m}_X(\vec{x}) = e_{CR}(\vec{x}) \cdot t_{exp}(\vec{x})$ avec $e_{CR}(\vec{x})$ le taux de photons, la quantité qui nous intéresse. Pour reprendre la notation de la section 5.1.2, je peux écrire que $e_{CR}(\vec{x}) = CR_{0.5keV, 2keV}(\vec{x})$. Notons qu'en moyenne $t_{exp}(\vec{x}) \simeq 500$ s.

Je vais avoir besoin du lobe *ROSAT* pour la suite de mon étude. Le lobe n'est pas tout à fait une courbe de Gauss et évolue avec l'énergie ([BOESE, 2000](#)). Le plus simple pour

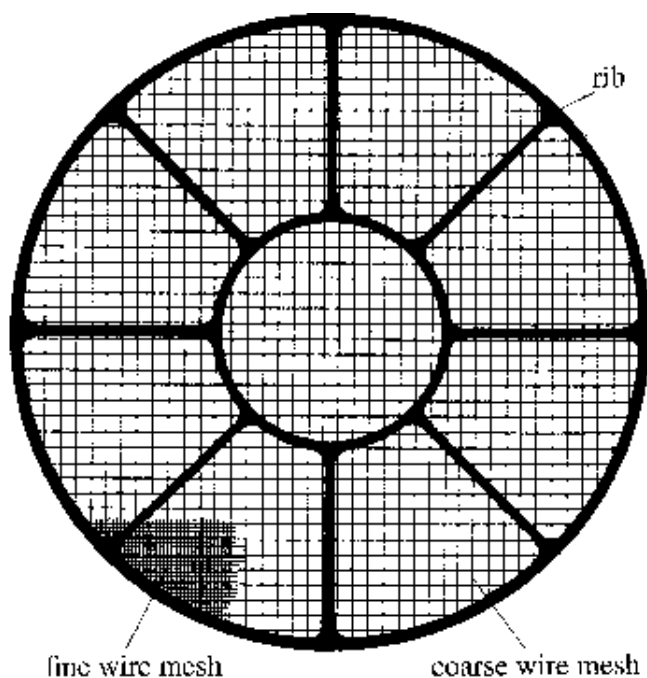


FIGURE 5.7 – La disposition de la grille de fils plongée dans du gaz pour le détecteur PSPC. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik

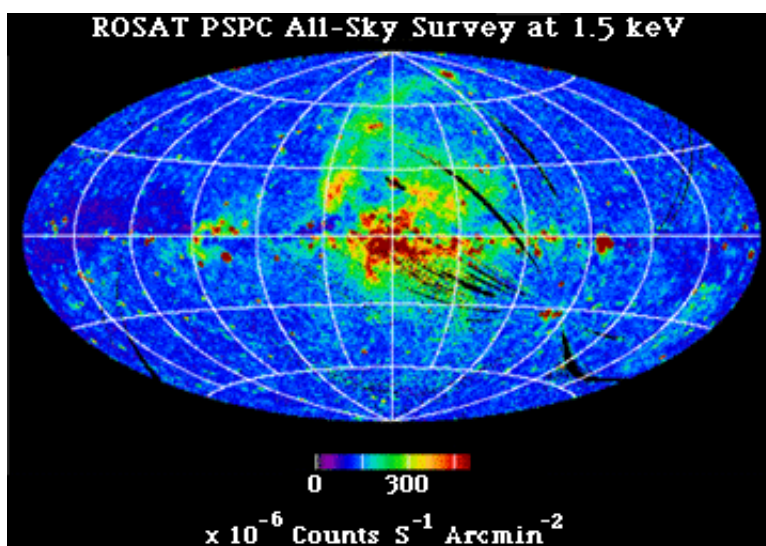


FIGURE 5.8 – Carte RASS à 1.5 keV du taux de photons par angle solide. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik

retrouver ce lobe, c'est de le construire par la sommation des données *ROSAT* HEALPix en centrant à la position des sources ponctuelles du catalogue [VOGES et al., 1999](#) ([TARRIO et al., 2016](#)). On obtient alors la figure 5.9.

Composition des cartes *ROSAT*

- Je vais supposer qu'il y a trois sources possibles d'émissions X dans les cartes *ROSAT* :
- des amas de galaxies,
 - des sources ponctuelles brillantes que je vais supprimer par la suite,

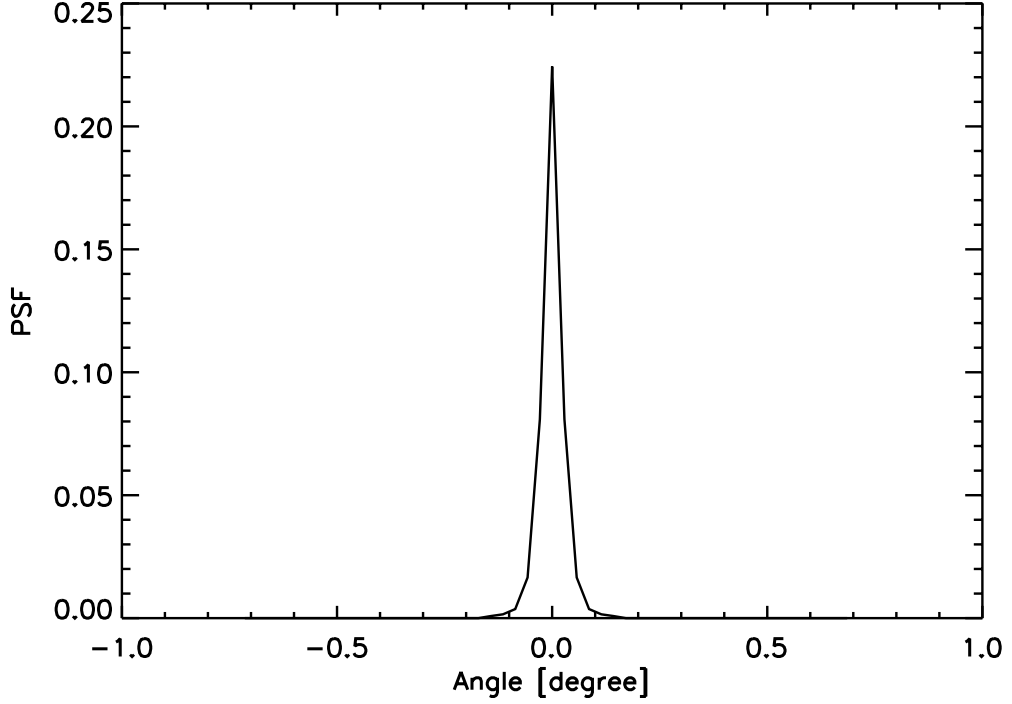


FIGURE 5.9 – Vue de coupe du lobe ROSAT pour la gamme d'énergie [0.5keV, 2keV].

— un fond diffus de sources ponctuelles que je vais supposer dans un premier temps homogène. Cette hypothèse, comme on le verra par la suite, devra être nuancée.

Je vais porter mon attention sur la dernière composante. Des études comme [HASINGER et al., 1993](#) ; [FIORE et al., 1999](#) suggèrent que ce bruit de fond est en fait principalement constitué de sources ponctuelles (des AGN) non résolues.

Je vais cependant m'appuyer sur [MORETTI et al., 2003](#) qui en plus des données ROSAT utilise les données des satellites XMM-Newton et Chandra. Ces satellites peuvent résoudre plus de sources du fait de leur meilleure résolution. [MORETTI et al., 2003](#) suggère que les sources ponctuelles résolues ou non contribuent à hauteur de $94.3 \pm 7.0\%$ au fond diffus X dans la bande d'énergie [0.5keV, 2keV]. Soit F_s le flux en provenance d'une source ponctuelle. Alors la densité de source ponctuelle $n_s(> F_s)$ de flux supérieur à F_s par angle solide est donnée par une relation empirique :

$$n_s(> F_s) = n_{s,0} \frac{(2 \times 10^{-15})^{\alpha_1}}{F_s^{\alpha_1} + F_{s,0}^{\alpha_1 - \alpha_2} F_s^{\alpha_2}} \quad (5.32)$$

avec $n_s(> F_s)$ en deg^{-2} , F_s en $10^{-14} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, $\alpha_1 = 1.82$, $\alpha_2 = 0.60$, $n_{s,0} = 6150$ et $F_{s,0} = 1.48 \times 10^{-14} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Ces valeurs sont obtenues par l'ajustement de la relation avec les données X dans la bande [0.5keV, 2keV] dans [MORETTI et al., 2003](#).

Le flux total du fond diffus par degré carré se calcule comme il suit :

$$\mathcal{F}_s = \int_0^{+\infty} F_s \frac{n_s(> F_s)}{dF_s} dF_s = 7.53 \times 10^{-12} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-2}. \quad (5.33)$$

Suppression des sources les plus brillantes

A partir de la carte du ciel ROSAT HEALPix, je vais construire deux nouvelles cartes du ciel en supprimant les sources ponctuelles les plus brillantes. Ces sources peuvent conta-

miner l'extraction du flux en provenance des amas comme nous allons le voir dans la section 5.3.3.

Le catalogue de sources ponctuelles (VOGES et al., 1999) me donne la position de ces sources et l'erreur sur la position σ_p . Pour chaque source, je cherche alors le maximum local d'émission dans un disque de rayon $3\sigma_p$ centré sur la position de la source. Du fait du lobe ROSAT les sources ponctuelles sont étendues. Je retire alors tout le signal dans un disque de rayon θ_{min} centré sur le maximum d'émission (et non la position donnée par le catalogue). Je m'intéresse ensuite à l'anneau compris entre deux disques de rayons θ_{min} et θ_{max} . Je suppose que le signal dans l'anneau est homogène donc que la valeur moyenne par pixel est telle que $\tilde{m}_X(\vec{x}_a) = b_{CR} \cdot t_{exp}(\vec{x}_a)$ avec $\vec{x}_a$ la position dans l'anneau et avec b_{CR} le taux de photons moyen du fond diffus. J'ai donc l'estimation suivante : $b_{CR} = \langle m_X \rangle / \langle t_{exp} \rangle$ avec $\langle . \rangle$ la moyenne sur les pixels dans l'anneau. Je reviens sur le disque de rayon θ_{min} . J'effectue alors un tirage aléatoire du nombre de photons pour chaque pixel du disque dans le ciel. Je suppose une distribution Poisson de moyenne $b_{CR} \cdot t_{exp}(\vec{x}_d)$ avec $\vec{x}_d$ la position des pixels du disque dans le ciel. J'ai donc remplacé la source ponctuelle par un fond diffus que j'ai estimé dans l'anneau. La figure 5.10 résume cette opération. La figure 5.11 montre l'effet de l'opération sur une carte ROSAT HEALPix.

Je vais choisir deux doublets pour $(\theta_{min}, \theta_{max})$ qui sont $(3\sigma_{psf}, 5\sigma_{psf})$ [suppression élargie] et $(2\sigma_{psf}, 4\sigma_{psf})$ [suppression réduite]. J'effectuerai des tests avec ces deux doublets différents. σ_{psf} indique l'écart-type du lobe ROSAT pour la gamme d'énergie [0.5keV, 2keV].

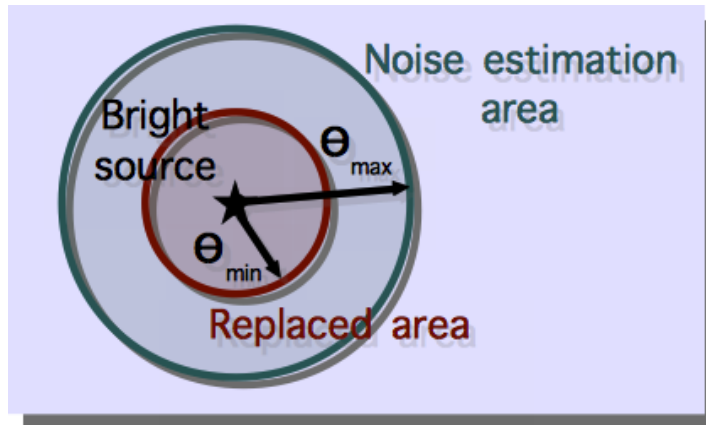


FIGURE 5.10 – Suppression d'une source ponctuelle. Le signal est supprimé dans un disque centré sur le maximum d'émission et remplacé par un bruit de fond dont la valeur moyenne a été estimée dans l'anneau vert.

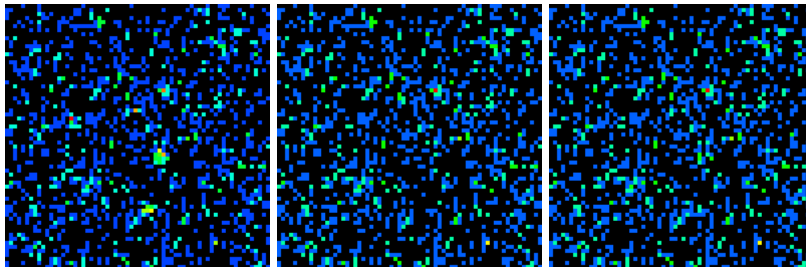


FIGURE 5.11 – A gauche : une partie du ciel ROSAT HEALPix avec les sources brillantes. Au centre : après avoir retiré les sources ponctuelles tel que $(\theta_{min}, \theta_{max}) = (3\sigma_{psf}, 5\sigma_{psf})$ [suppression élargie]. A droite : après avoir retiré les sources ponctuelles tel que $(\theta_{min}, \theta_{max}) = (2\sigma_{psf}, 4\sigma_{psf})$ [suppression réduite].

5.2.4 Construction des cartes ROSAT simulées

Je pars d'une mini-carte ROSAT $10^\circ \times 10^\circ$ et de 350×350 pixels. Je suppose que son fond diffus est homogène, donc que la valeur moyenne par pixel est telle que $\tilde{m}_X(\vec{x}) = b_{CR} \cdot t_{exp}(\vec{x})$ et donc que $b_{CR} = \langle m_X \rangle / \langle t_{exp} \rangle$ avec $\langle . \rangle$ la moyenne sur les pixels de la mini-carte.

Cartes avec un fond homogène

Je construis alors une carte vide de 350×350 pixels et j'utilise la mini-carte de temps d'exposition $t_{exp}(\vec{x})$ associée à la mini-carte ROSAT. Pour chaque pixel de la carte vide, j'effectue un tirage aléatoire du nombre de photons en employant une distribution de Poisson de moyenne $b_{CR} \cdot t_{exp}(\vec{x})$. J'obtiens alors une carte avec un fond homogène.

Cartes avec un fond diffus de sources ponctuelles

D'après MORETTI et al., 2003, le flux total du fond diffus par angle solide est de $\mathcal{F}_s = 7.53 \times 10^{-12} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-2}$. Le taux de comptage moyen sur la carte est lui de b_{CR} . Je suppose qu'il est entièrement dû aux sources ponctuelles. Je peux alors construire un facteur de conversion entre le flux des sources ponctuelles et le taux de comptage de la manière qui suit :

$$FC_{ps} = \frac{b_{CR}}{\mathcal{F}_s} \frac{N}{10^\circ \times 10^\circ} = \frac{b_{CR}}{\mathcal{F}_s} \frac{1}{(1.7 \text{ arcmin})^2} \quad (5.34)$$

Avec $N = 350 \times 350$ le nombre de pixels dans une mini-carte de $10^\circ \times 10^\circ$. Normalement, ce facteur de conversion dépend de la densité de colonne en N_H . Je suppose que cette dernière n'évolue pas ou peu sur la mini-carte ROSAT et que par conséquent le facteur de conversion reste constant.

Je considère que les sources ponctuelles avec un flux en dessous d'une limite $F_{s,min} = 2.5 \times 10^{-14} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ sont suffisamment nombreuses pour former un fond diffus homogène. Je définis μ_{ps} la part du flux issue des sources ponctuelles qui forment un fond diffus homogène :

$$\mu_{ps} = \frac{\int_0^{F_{s,min}} F_s \frac{n_s(>F_s)}{dF_s} dF_s}{\int_0^{+\infty} F_s \frac{n_s(>F_s)}{dF_s} dF_s}. \quad (5.35)$$

Le taux de photons issu de ce fond homogène est donc de $\mu_{ps} b_{CR}$. Je vais ensuite construire sur une mini-carte de 350×350 pixels soit $10^\circ \times 10^\circ$ un tapis de sources ponctuelles brillantes qui vont former un fond diffus non homogène. Ces sources ponctuelles brillantes ont un flux $F_s > F_{s,min}$. Je travaille avec des intervalles de flux de largeur $\Delta \ln F_s = \ln 10/1000$ donc tel que $\Delta F_s = F_s \times \ln 10/1000$. Pour un flux F_s j'ai donc $\tilde{N}_{ps}(F_s) = \frac{n_s(>F_s)}{dF_s} \Delta F_s \times 10^2$ sources ponctuelles sur la mini-carte. J'effectue en fait un tirage Poisson de moyenne $\tilde{N}_{ps}(F_s)$ pour obtenir le nombre de sources ponctuelles $N_{ps}(F_s)$. Je tire ensuite $N_{ps}(F_s)$ positions $\vec{x}_i$ dans la mini-carte (loi uniforme cette fois) et j'ajoute le flux F_s dans chaque pixel. J'effectue cette opération pour chaque intervalle de flux. J'obtiens alors une carte de flux issue des sources ponctuelles $m_{ps}(\vec{x}) = \sum_{F_s} F_s \sum_{i=0}^{N_{ps}(F_s)} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ avec δ un Dirac. Je vais ensuite, soit laisser la carte telle qu'elle, soit faire une convolution avec le lobe ROSAT.

Je construis ensuite une carte vide de 350×350 pixels et j'utilise la mini-carte de temps d'exposition $t_{exp}(\vec{x})$ associée à la mini-carte ROSAT. Pour chaque pixel de la carte vide, j'effectue un tirage aléatoire du nombre de photons en employant une distribution de Poisson de moyenne :

$$[\mu_{ps} \cdot b_{CR} + (1 - \mu_{ps}) \cdot FC_{ps} \cdot m_{ps}(\vec{x})] \cdot t_{exp}(\vec{x}). \quad (5.36)$$

J'obtiens alors une carte avec un fond partiellement non-homogène.

5.2.5 Les amas dans ROSAT et le catalogue "PXCC"

Pour tester la robustesse de ma méthode d'extraction, je vais utiliser un catalogue d'amas, le catalogue "PXCC" ("Planck X-ray Cluster Catalogue", [PLANCK COLLABORATION et al., 2014c](#)) qui est issu de l'addition de 20 amas MACS ("MASSive Cluster Survey", [EBELING et al., 2001](#), données ROSAT et Chandra), 21 amas REFLEX-II (données ROSAT, [BÖHRINGER et al., 2014](#)) et de 5 amas SGP ("South galactic pole", données ROSAT, [CRUDDACE et al., 2002](#)) aux 1743 amas du catalogue MCXC (Meta-Catalogue of X-ray Clusters). Ce dernier catalogue est issu lui-même de la fusion des catalogues REFLEX-I et NORAS avec d'autres catalogues d'amas ROSAT et quelques amas détectés par XMM-Newton et Chandra ([PIFFARETTI et al., 2011](#)). Le catalogue "PXCC" et, à plus forte raison, le catalogue MCXC présentent pour chaque amas la liste des propriétés suivantes :

- les coordonnées angulaires du pic d'émission X (repère galactique),
- le redshift z estimé à partir de contreparties optiques (les galaxies),
- le rayon R_{500} d'une sphère centrée sur le pic d'émission telle que la densité moyenne dans la sphère soit égale à 500 fois la densité critique de l'univers au redshift de l'amas (cf section 3.4.1),
- la luminosité L_{500} de l'amas dans la gamme d'énergie [0.1keV, 2.4keV] et dans la sphère de rayon de rayon R_{500} .

La répartition des amas MCXC sur le ciel est présentée par la figure 5.12.

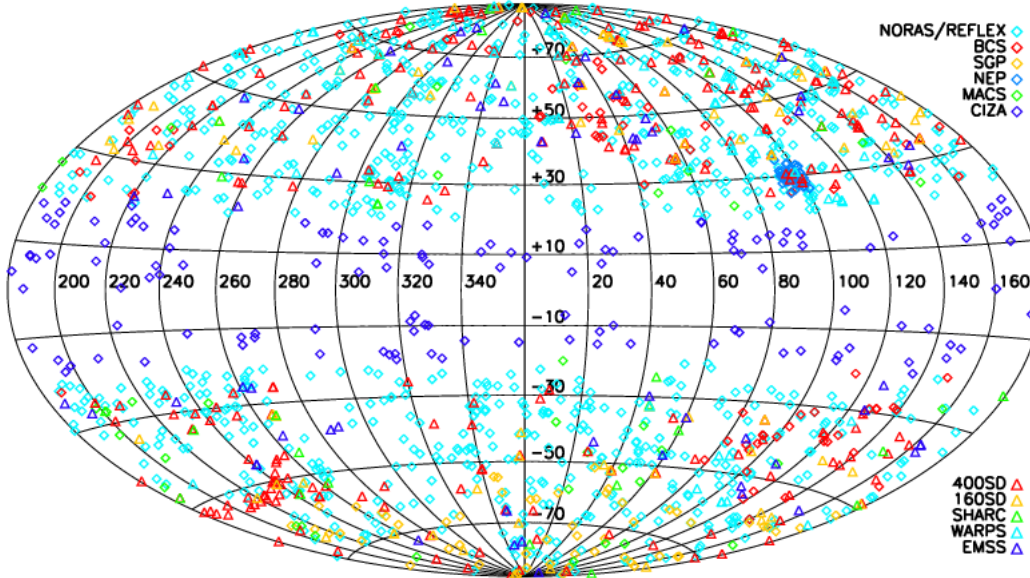


FIGURE 5.12 – Positions des amas MCXC sur le ciel. Crédit : [PIFFARETTI et al., 2011](#)

Le profil des amas "PXCC"

Quand l'émission des amas est dominé par le rayonnement de freinage et que l'absorption est suffisamment faible, le flux X est tel que $F(\vec{x}) \propto \int n_e(\vec{x}, l) n_i(\vec{x}, l) T_e(\vec{x}) dl$ avec l la position le long de la ligne de visée, $\vec{x}$ la position sur le ciel, n_e la densité en électron, n_i

la densité en ion et T_e la température des électrons (ARNAUD et al., 2005). Je peux supposer que la densité en électron est proportionnelle à la densité en ion qui est elle même proportionnelle à la densité de matière baryonique : $n_e(\vec{x}, l) \propto n_i(\vec{x}, l) \propto \rho_b(\vec{x}, l)$. Je vais supposer l'amas isotherme donc que $T_e(\vec{x}) = T_e$. Dans ce cas, $F(\vec{x}) \propto \int \rho_b(\vec{x}, l)^2 dl$.

Comme dans la section 3.4.1, je vais supposer la pression $P = n_e \cdot T_e$ suit un profil GNFW. Comme l'amas est isotherme, T_e ne dépend pas de la position et c'est n_e et donc ρ_b qui suivent un profil GNFW :

$$\rho_b(\vec{x}, l) \propto P \left(\frac{r}{R_s} \right) = P_0 \cdot \left(c_{500} \cdot \frac{r}{R_{500}} \right)^{-\gamma} \left(1 + \left(c_{500} \cdot \frac{r}{R_{500}} \right)^\alpha \right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} \quad (5.37)$$

sauf que cette fois les paramètres sont donnés par PIFFARETTI et al., 2011 :

$$[c_{500}, \alpha, \beta, \gamma] = [1/0.303, 2.0, 0.768, -0.525]. \quad (5.38)$$

Le taux de photons en provenance de l'amas est aussi proportionnel au flux car le facteur de conversion entre les deux dépend seulement du redshift de l'amas, de la température des électrons supposée constante et de la densité de colonne N_H que je suppose varier assez peu au niveau de l'amas. Dans ces conditions le nombre de photons moyen provenant de l'amas s'écrit alors :

$$\tilde{A}_{CR}(\vec{x}) = a_{CR} \cdot \tau_X(\vec{x}) \cdot t_{exp}(\vec{x}) \quad (5.39)$$

avec $\tau_X(\vec{x}) \propto \int \rho_b(\vec{x}, l)^2 dl$ et $\int \tau_X(\vec{x}) d\vec{x} = 1$. a_{CR} est le taux de photons total issu de l'amas. C'est cette quantité que je vais chercher à extraire dans la section suivante 5.3. L'expression du profil s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\tau_X(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P \left(\frac{r}{R_s} \right)^2 dl \quad (5.40)$$

Ce profil est ensuite convolué avec le lobe ROSAT.

Comme le profil de la section 3.4.1, le profil ci-dessus ne dépend que du paramètre θ_s qui est tel que $\theta_s = \theta_{500}/c_{500} = R_{500}/D_A(z)/c_{500}$ avec $D_A(z)$ la distance angulaire et z le redshift de l'amas. Je peux donc écrire que $\tau_X(\vec{x}) = \tau_X(\theta_s, \vec{x})$.

A la différence du profil du signal SZ qui est proportionnel au profil GNFW, le profil X est lui proportionnel au carré de ce profil et de ce fait est beaucoup plus "piqué". Les systématiques dues à la différence entre ce profil et le profil réel des amas seront donc beaucoup plus importantes en X que pour l'effet SZ.

De même que dans la section 3.4.1, le facteur pour passer d'une quantité estimée sur tout l'amas (comprise dans une sphère de rayon $5R_{500}$) et une sphère de rayon R_{500} est donné par :

$$C(5R_{500} \rightarrow R_{500}) = \frac{\int_0^{c_{500}} 4\pi P \left(\frac{r'}{R_{500}} \right)^2 r'^2 dr'}{\int_0^{5c_{500}} 4\pi P \left(\frac{r'}{R_{500}} \right)^2 r'^2 dr'} = 0.876 \quad (5.41)$$

Nouveau catalogue et catalogue simulé

Pour chaque amas du catalogue "PXCC", je calcule θ_s son paramètre de profil à partir de R_{500} et z . Je convertis la luminosité L_{500} de l'amas dans la sphère de rayon R_{500} en luminosité totale sur tout l'amas L_X en utilisant le facteur de conversion 5.41. J'obtiens alors le flux de l'amas F_X à partir de L_X et du redshift z en utilisant la relation 5.31. Enfin je peux obtenir le taux de photons de l'amas a_{CR} dans la gamme d'énergie [0.5keV, 2.keV] en utilisant le facteur de conversion du tableau 5.1 et en prenant N_H au pic de l'émission X (en supposant une faible variation de N_H au niveau de l'amas). Je peux alors construire

un nouveau catalogue avec seulement les trois propriétés qui m'intéressent pour les amas : la position du pic d'émission dans le ciel $\vec{x}_0$, le paramètre de profil θ_s et le taux de photons a_{CR} . En moyenne, plus l'amas est grand donc plus θ_s est grand, plus le taux de photons est important comme le montre la figure 5.13. A partir de ce catalogue, je crée cette fois un catalogue simulé en remplaçant les coordonnées des amas PXCC par des positions aléatoires dans le ciel.

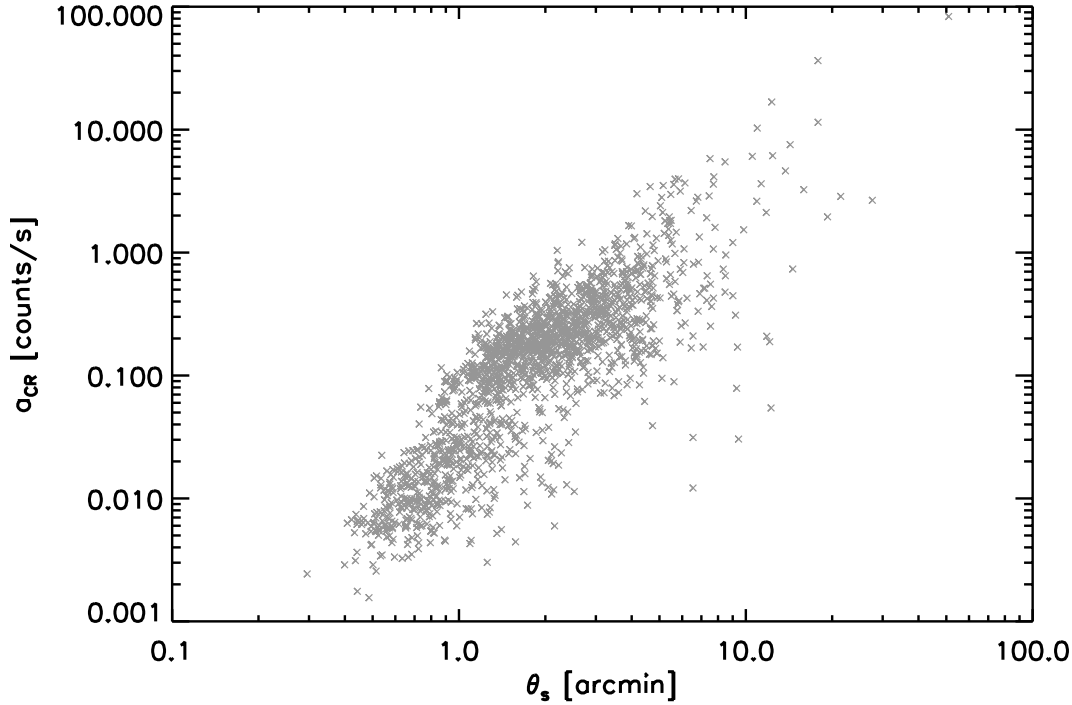


FIGURE 5.13 – Le taux de photons a_{CR} en fonction de l'angle θ_s pour le catalogue PXCC.

Pour chaque amas du catalogue PXCC, je vais découper une mini-carte de taille 350×350 pixels du ciel ROSAT centrée sur cet amas. J'effectue l'opération pour le ciel ROSAT avec les sources ponctuelles brillantes et sans les sources ponctuelles brillantes (suppression élargie ou réduite).

Je fais de même pour les amas du catalogue simulé. J'obtiens donc des mini-cartes ROSAT centrées sur les positions aléatoires données par le catalogue simulé. Je vais ensuite injecter ces amas sur les mini-cartes ROSAT. Pour le pixel de position $\vec{x}$, je tire un nombre de photons $A_{CR}(\vec{x})$ en supposant une distribution de Poisson de moyenne

$$\tilde{A}_{CR}(\vec{x}) = a_{CR} \cdot \tau_X(\theta_s, \vec{x} - \vec{x}_0) \cdot t_{exp}(\vec{x}) \quad (5.42)$$

avec $\vec{x}_0$ la position future de l'amas localisée au centre de la mini-carte. Je rajoute ce nombre de photons sur le pixel. C'est possible car la somme de deux variables Poisson (en supposant une distribution Poisson pour le fond diffus) est une variable Poisson qui a pour moyenne la somme des moyennes des deux variables. Ce n'est par contre pas le cas si l'on soustrait une variable Poisson à une autre.

J'estime un bruit de fond sur la mini-carte ROSAT sans sources ponctuelles (suppression réduite) avant injection pour construire une carte de bruit de fond homogène, une carte de fond diffus de sources ponctuelles non lobées et une carte de bruit de fond diffus de sources ponctuelles lobées cette fois (cf 5.2.4 pour une explication détaillée sur la construction de telles cartes). J'injecte ensuite l'amas sur ces trois mini-cartes.

J'ai donc, pour chaque amas du catalogue simulé, 6 mini-cartes centrées sur l'amas injecté : une carte *ROSAT*, une carte *ROSAT* sans source ponctuelle (suppression élargie), une carte *ROSAT* sans source ponctuelle (suppression réduite), une carte simulée avec un bruit de fond homogène, une carte simulée avec un fond diffus de sources non lobées et une carte simulée avec un fond diffus de sources lobées.

5.3 Filtrage ROSAT adapté à un fond homogène dans les X

La détection des amas dans les données X est souvent réalisée en supprimant le bruit de fond par une méthode à base d'ondelettes. Ensuite, en partant du pic d'émission et en intégrant le signal de plus en plus loin de ce pic, on peut construire une courbe de flux moyen en fonction du rayon. Quand le flux moyen n'augmente plus, c'est qu'on arrive aux limites de l'amas. C'est la méthode dites de "Growth curves" qui a notamment servie à construire le catalogue REFLEX (BÖHRINGER et al., 2000). La méthode que je vais utiliser ici est différente. Je cherche en effet à construire un filtre en X qui soit équivalent au matched filter utilisé pour détecter les amas dans *Planck* par effet tSZ ; l'objectif étant de faciliter la combinaison de ces deux filtres. Comme pour le matched filter, je vais supposer un certain profil des amas pour construire le filtre X. Ce filtre dérive d'une maximisation d'une fonction de vraisemblance. Notons que l'approche de maximisation d'une fonction de vraisemblance a été employée dans un registre différent, non pour détecter des amas mais pour identifier les sources étendues et les séparer des sources ponctuelles qui peuvent être des noyaux galactiques actifs (PACAUD et al., 2006). Dans cette section, je vais d'abord construire le filtre X puis je vais le tester sur des simulations et sur un catalogue d'amas connu.

5.3.1 Le modèle d'émission pour les mini-cartes ROSAT

Soit $m_X(\vec{x})$ le nombre de photons dans la mini-carte (*ROSAT* ou simulée) au niveau du pixel de position $\vec{x}$ et $t_{exp}(\vec{x})$ le temps d'exposition pour ce pixel. Je note $\tilde{m}_X(\vec{x})$ la valeur moyenne du nombre de photons dans ce pixel. Je peux écrire que

$$m_X(\vec{x}) = \tilde{m}_X(\vec{x}) + n(\vec{x}) \quad (5.43)$$

avec $n(\vec{x})$ le bruit. Pour une distribution Poisson, ce bruit dépend de $\tilde{m}_X(\vec{x})$. Si $\langle . \rangle$ est la moyenne sur plusieurs pixels de même valeur moyenne, alors

$$\langle n(\vec{x}) \rangle = 0 \quad (5.44)$$

et

$$\langle n(\vec{x})^2 \rangle = \tilde{m}_X(\vec{x}). \quad (5.45)$$

Je suppose que la mini-carte *ROSAT* est simplement constituée d'un amas et d'un bruit de fond homogène, donc que :

$$\tilde{m}_X(\vec{x}) = (a_{CR} \cdot \tau_X(\theta_s, \vec{x} - \vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot t_{exp}(\vec{x}) \quad (5.46)$$

avec a_{CR} le taux de photons en provenance de l'amas, τ_X le profil de l'amas, $\vec{x}_0$ la position du pic d'émission de l'amas et b_{CR} le taux de photons moyen en provenance du bruit de fond. L'hypothèse d'homogénéité du fond diffus est une hypothèse forte puisqu'une partie de ce fond est constitué de sources ponctuelles assez brillantes qui rendent l'ensemble hétérogène. On verra dans la section 5.3.3 que cela entraîne une sur-dispersion supplémentaire. En supposant que la contribution de l'amas aux émissions totales de la mini-carte

est faible, je peux alors écrire que :

$$b_{CR} \simeq \frac{\sum_{\vec{x}} m_X(\vec{x})}{\sum_{\vec{x}} t_{exp}(\vec{x})}. \quad (5.47)$$

La quantité que je vais chercher à extraire, c'est a_{CR} .

Dans ces conditions, est-ce que je peux utiliser un matched filter ? Il faudrait que la quantité $n(\vec{x})$ soit quasi-stationnaire, c'est-à-dire que ses premiers et second moment ne dépendent pas de la position dans l'espace. Attardons-nous sur le premier moment, la moyenne :

$$\forall \vec{a}, \langle n(\vec{x} + \vec{a}) \rangle = 0 = \langle n(\vec{x}) \rangle \quad (5.48)$$

C'est en effet bon pour la moyenne. Pour le second moment, l'auto-corrélation, les choses vont se gâter :

$$\begin{aligned} \forall \vec{a}, R(\vec{x} + \vec{a}, \vec{x}' + \vec{a}) &= \langle n(\vec{x} + \vec{a}) n(\vec{x}' + \vec{a}) \rangle \\ &= \tilde{m}_X(\vec{x} + \vec{a}) \delta([\vec{x} + \vec{a}] - [\vec{x}' + \vec{a}]) \\ &= [a_{CR} \cdot \tau_X(\theta_s, \vec{x} + \vec{a} - \vec{x}_0) + b_{CR}] \cdot t_{exp}(\vec{x} + \vec{a}) \delta([\vec{x} + \vec{a}] - [\vec{x}' + \vec{a}]) \\ &\neq [a_{CR} \cdot \tau_X(\theta_s, \vec{x} - \vec{x}_0) + b_{CR}] \cdot t_{exp}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= \langle n(\vec{x}) n(\vec{x}') \rangle \\ &= R(\vec{x}, \vec{x}'), \end{aligned} \quad (5.49)$$

car $t_{exp}(\vec{x} + \vec{a}) \neq t_{exp}(\vec{x})$ et $\tau_X(\theta_s, \vec{x} + \vec{a} - \vec{x}_0) \neq \tau_X(\theta_s, \vec{x} - \vec{x}_0)$. L'auto-corrélation dépend donc de la position dans l'espace. Il n'est dans ce cas pas possible de construire un spectre de puissance et donc un matched filter (cf section 3.4.2). L'utilisation du matched filter pour extraire a_{CR} reste possible mais n'est pas optimale.

Il faut donc développer une autre approche. Je vais d'abord simplifier les notations. Soit i l'indice du pixel à la position $\vec{x}$. Je note alors $m_i = m_X(\vec{x})$, $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) = \tau_X(\theta_s, \vec{x} - \vec{x}_0)$, $t_i = t_{exp}(\vec{x})$. Ensuite j'introduis la probabilité $f_i(m_i|a_{CR})$ d'avoir un nombre de photons m_i qui suit une loi de Poisson de moyenne $(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot t_i$:

$$f_i(m_i|a_{CR}) = \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot t_i]^{m_i}}{m_i!} \cdot \exp(-[(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot t_i]) \quad (5.50)$$

Avec la nouvelle notation, je peux écrire le taux de photons du fond diffus de cette façon :

$$b_{CR} \simeq \frac{\sum_i m_i}{\sum_i t_i}. \quad (5.51)$$

Je suppose les m_i indépendants. La probabilité d'avoir l'ensemble $[m_0, \dots, m_n]$ est donc le produit des probabilités d'avoir chaque valeur :

$$f([m_0, \dots, m_N]|a_{CR}) = \prod_i f_i(m_i|a_{CR}). \quad (5.52)$$

Je note cette probabilité $L(a_{CR}) = f([m_0, \dots, m_N]|a_{CR})$. C'est la fonction de vraisemblance. N dénote le nombre de pixels dans la mini-carte soit 350×350 .

5.3.2 La maximisation d'une fonction de vraisemblance

Je me place dans un cas général. J'ai une probabilité $f_i(m_i|\theta)$ d'avoir une valeur m_i sachant le paramètre θ . Les valeurs m_i sont indépendantes. La probabilité d'avoir l'ensemble $[m_0, \dots, m_n]$ est donc le produit des probabilités d'avoir chaque valeur $L(\theta) = f([m_0, \dots, m_N]|\theta) = \prod_i f_i(m_i|\theta)$. $L(\theta)$, comme je l'indique plus haut, est la fonction de vraisemblance. Alors l'estimateur $\hat{\theta}$ qui est tel que

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = 0 \quad (5.53)$$

est un estimateur non biaisé de θ (si les données suivent le modèle de probabilité proposé). Je vais le prouver ci-dessous.

Le score

Je définis d'abord le score $S_i(\theta)$ comme la dérivée du logarithme de la probabilité en θ :

$$S_i(\theta) = \frac{\partial \ln[f_i(m_i|\theta)]}{\partial \theta} = \frac{1}{f_i(m_i|\theta)} \frac{\partial f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta} \quad (5.54)$$

Comme les m_i sont indépendants, les scores $S_i(\theta)$ le sont aussi. Je m'intéresse à la valeur moyenne du score qui est de :

$$\begin{aligned} \langle S_i(\theta) \rangle &= \int S_i(\theta) f_i(m_i|\theta) dm_i \\ &= \int \frac{1}{f_i(m_i|\theta)} \frac{\partial f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta} f_i(m_i|\theta) dm_i \\ &= \int \frac{\partial f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta} dm_i \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int f_i(m_i|\theta) dm_i \right) \\ &= \frac{\partial 1}{\partial \theta} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

en supposant que la fonction $f_i(m_i|\theta)$ est régulière.

Je calcule ensuite la dérivée seconde du logarithme de la de probabilité en θ :

$$\begin{aligned} S2_i(\theta) &= \frac{\partial^2 \ln[f_i(m_i|\theta)]}{\partial^2 \theta} \\ &= \frac{1}{f_i(m_i|\theta)} \frac{\partial^2 f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{f_i(m_i|\theta)^2} \left(\frac{\partial f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{f_i(m_i|\theta)} \frac{\partial^2 f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta^2} - S_i(\theta)^2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

Je cherche maintenant l'écart type de $S_i(\theta)$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{S_i}^2(\theta) &= \langle (S_i - 0)^2 \rangle \\
 &= \int S_i(\theta)^2 f_i(m_i|\theta) dm_i \\
 &= \int \left[\frac{1}{f_i(m_i|\theta)} \frac{\partial^2 f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta^2} - S_{2i}(\theta) \right] f_i(m_i|\theta) dm_i \\
 &= \int \frac{\partial^2 f_i(m_i|\theta)}{\partial \theta^2} dm_i - \langle S_{2i}(\theta) \rangle \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\int f_i(m_i|\theta) dm_i \right) - \langle S_{2i}(\theta) \rangle \\
 &= - \langle S_{2i}(\theta) \rangle
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

$\langle S_{2i}(\theta) \rangle$ est appelée information de Fischer.

Maximisation et convergence

Comme j'ai $\hat{\theta}$ qui est tel que

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = 0, \tag{5.58}$$

je peux écrire que :

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = \frac{1}{L(\hat{\theta})} \frac{\partial L}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = 0 \tag{5.59}$$

Il est en effet plus simple de travailler avec $\ln(L)$ qu'avec L . Notons que

$$\ln(L)(\theta) = \sum_i \ln[f_i(m_i|\theta)]. \tag{5.60}$$

Je peux alors écrire que :

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = \sum_i S_i(\hat{\theta}) \tag{5.61}$$

Je suppose que $\hat{\theta}$ est proche de la vraie valeur θ . Je peux alors faire le développement limité suivant :

$$0 = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta}(\hat{\theta}) = \frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial^2 \theta}(\theta)(\hat{\theta} - \theta) \tag{5.62}$$

Ce qui me conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta) &= -\sqrt{N} \frac{\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta}(\theta)}{\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial^2 \theta}(\theta)} \\
 &= -\sqrt{N} \frac{\sum_i S_i(\theta)}{\sum_i S_{2i}(\theta)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sum_i S_i(\theta)}{\frac{1}{N} \sum_i S_{2i}(\theta)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i Y_i(\theta)
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

avec $Y_i(\theta) = S_i(\theta)/[\frac{1}{N} \sum_i S_{2i}(\theta)]$. $Y_i(\theta)$ est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance $\sigma_{S_i}^2/[\frac{1}{N} \sum_i S_{2i}(\theta)]^2$. Les $Y_i(\theta)$ sont indépendants les uns des autres et la quantité

$1/[\frac{1}{N} \sum_i S_{2_i}(\theta)]$ est une constante. Alors d'après le théorème central-limite, j'en conclus, quand N est suffisamment grand, que $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)$ est distribué selon une loi normale centrée en zéro de variance $\sum_i \sigma_{S_i}^2(\theta)/[\frac{1}{N} \sum_i S_{2_i}(\theta)]^2$.

J'en conclus que $\hat{\theta}$ est aussi distribuée selon une loi normale centrée sur θ et de variance $\sum_i \sigma_{S_i}^2(\theta)/[\frac{1}{N} \sum_i S_{2_i}(\theta)]^2$. Pour retrouver la valeur moyenne, je peux aussi intégrer sur toutes les valeurs de m_0 à m_N , c'est-à-dire sur l'ensemble de cartes de N pixels possibles. De plus, je suppose que $\sum_i S_{2_i}(\theta)$, qui est une somme pondérée de tous les m_i d'une mini-carte, ne varie pas significativement quand un seul m_k de la somme change. Ce qui me permet d'écrire que :

$$\int \frac{S_k(\theta)}{\sum_i S_{2_i}(\theta)} f_k(m_k|\theta) dm_k \simeq \frac{1}{\sum_i S_{2_i}(\theta)} \int S_k(\theta) f_k(m_k|\theta) dm_k \quad (5.64)$$

et donc que :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\theta} - \theta \rangle &= \int \dots \int (\hat{\theta} - \theta) f_0(m_0|\theta) \dots f_N(m_N|\theta) dm_0 \dots dm_N \\ &= \int \dots \int \frac{-\sum_i S_i(\theta)}{\sum_i S_{2_i}(\theta)} f_0(m_0|\theta) \dots f_N(m_N|\theta) dm_0 \dots dm_N \\ &= \frac{-1}{\sum_i S_{2_i}(\theta)} \sum_i \int \dots \int S_i(\theta) f_0(m_0|\theta) \dots f_N(m_N|\theta) dm_0 \dots dm_N \quad (5.65) \\ &= \frac{-1}{\sum_i S_{2_i}(\theta)} \sum_i \langle S_i(\theta) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même façon je peux retrouver la variance de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\hat{\theta}] &= \int \dots \int (\hat{\theta} - \theta)^2 f_0(m_0|\theta) \dots f_N(m_N|\theta) dm_0 \dots dm_N \\ &= \int \dots \int \left[\frac{\sum_i S_i(\theta)}{\sum_i S_{2_i}(\theta)} \right]^2 f_0(m_0|\theta) \dots f_N(m_N|\theta) dm_0 \dots dm_N \\ &= \frac{1}{[\sum_i S_{2_i}(\theta)]^2} \sum_{i,j} \int \dots \int S_i(\theta) S_j(\theta) f_0(m_0|\theta) \dots f_N(m_N|\theta) dm_0 \dots dm_N \quad (5.66) \\ &= \frac{1}{[\sum_i S_{2_i}(\theta)]^2} \sum_i \langle S_i(\theta)^2 \rangle \\ &= \frac{\sum_i \sigma_{S_i}^2(\theta)}{[\sum_i S_{2_i}(\theta)]^2} \end{aligned}$$

En pratique, je ne connais pas θ . Pour calculer $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ je remplace alors θ par $\hat{\theta}$ dans l'expression de la variance. J'ai alors :

$$\sigma^2[\hat{\theta}] = \frac{\sum_i \sigma_{S_i}^2(\hat{\theta})}{[\sum_i S_{2_i}(\hat{\theta})]^2} \quad (5.67)$$

Avec le modèle d'émission des mini-cartes ROSAT

J'applique la maximisation de fonction de vraisemblance au d'émission des mini-cartes ROSAT(ou simulées) pour extraire le taux de photons de l'amas noté a_{CR} . La probabilité $f_i(m_i|a_{CR})$ est donnée par l'équation 5.50. Avec une telle probabilité, j'obtiens le score suivant :

$$S_i(a_{CR}) = \frac{\partial \ln[f_i(m_i|a_{CR})]}{\partial a_{CR}} = \frac{m_i \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0)}{a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}} - \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) \cdot t_i \quad (5.68)$$

et l'information de Fischer (au signe près) suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{S_i}^2(a_{CR}) &= \left\langle \frac{\partial^2 \ln[f_i(m_i|a_{CR})]}{\partial a_{CR}^2} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{m_i \cdot \tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR})^2} \right\rangle \\ &= \frac{\langle m_i \rangle \cdot \tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR})^2} \\ &= \frac{(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot \tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR})^2} \\ &= \frac{\tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

L'estimateur $\hat{a}_{CR}$ est obtenu par maximisation de la fonction de vraisemblance et donc du logarithme de cette fonction :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \ln(L)}{\partial a_{CR}}(\hat{a}_{CR}) \\ &= \sum_i S_i(\hat{a}_{CR}) \\ &= \sum_i \frac{m_i \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0)}{\hat{a}_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}} - \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) \cdot t_i \end{aligned} \quad (5.70)$$

Il n'y a pas de solution analytique pour $\hat{a}_{CR}$. Je vais utiliser la méthode de Newton pour évaluer l'estimateur. J'écris que $\hat{a}_{CR} = \tilde{a}_{CR} + \Delta a_{CR}(\tilde{a}_{CR})$ tel que $|\Delta a_{CR}| \ll |\tilde{a}_{CR}|$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \ln(L)}{\partial a_{CR}}(\hat{a}_{CR}) \\ &= \frac{\partial \ln(L)}{\partial a_{CR}}(\tilde{a}_{CR}) + \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial a_{CR}^2}(\tilde{a}_{CR}) \Delta a_{CR}(\tilde{a}_{CR}) \end{aligned} \quad (5.71)$$

J'obtiens l'expression de la différence :

$$\begin{aligned} \Delta a_{CR}(\tilde{a}_{CR}) &= - \frac{\frac{\partial \ln(L)}{\partial a_{CR}}(\tilde{a}_{CR})}{\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial a_{CR}^2}(\tilde{a}_{CR})} \\ &= - \frac{\sum_i \frac{m_i \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0)}{\tilde{a}_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}} - \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) \cdot t_i}{\sum_i \frac{m_i^2 \cdot \tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{(\tilde{a}_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR})^2}} \end{aligned} \quad (5.72)$$

De manière itérative, je vais me rapprocher de l'estimateur. Je définie une suite $U_n = \tilde{a}_{CR,n}$ telle que $\tilde{a}_{CR,n+1} = \tilde{a}_{CR,n} + \Delta a_{CR,n}(\tilde{a}_{CR,n})$. Si $\tilde{a}_{CR} \rightarrow \hat{a}_{CR}$ alors $\Delta a_{CR,n}(\tilde{a}_{CR,n}) \rightarrow$

$\Delta a_{CR,n}(\hat{a}_{CR,n}) = 0$. La suite peut donc converger vers l'estimateur. En pratique je suppose la convergence atteinte après 5 itérations. Cela n'exclue pas une possible divergence. Dans ce cas, j'impose que $\hat{a}_{CR} = 0$.

D'autres cas peuvent poser problème. En effet la valeur moyenne $[(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot t_i]$ doit être positive pour des distributions de Poisson. Et donc $a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}$ doit forcément être positif. Si pour un pixel, cette quantité est négative, j'impose aussi $\hat{a}_{CR} = 0$.

Je prend pour point de départ de la suite $U_0 = \tilde{a}_{CR,0}$ la valeur de l'estimateur si les m_i étaient distribuées selon une loi normale de moyenne $[(a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}) \cdot t_i]$ et d'une même variance σ_p^2 pour chaque pixel :

$$\tilde{a}_{CR,0} = \frac{\sum_i (m_i - b_{CR} \cdot t_i) \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) \cdot t_i}{\sum_i \tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0) \cdot t_i^2}. \quad (5.73)$$

J'obtiens donc l'estimateur $\hat{a}_{CR}$. Je peux évaluer son erreur en m'appuyant sur la formule 5.67 :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\hat{a}_{CR}] &= \frac{\sum_i \sigma_{S_i}^2(\hat{a}_{CR})}{[\sum_i S2_i(\hat{a}_{CR})]^2} \\ &= \frac{\sum_i \frac{\tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{\hat{a}_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}}}{[\sum_i \frac{m_i^2 \cdot \tau_{i,\theta_s}^2(\vec{x}_0)}{(\hat{a}_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR})^2}]^2} \end{aligned} \quad (5.74)$$

5.3.3 Application du filtrage aux simulations et aux données

De manière générale, pour chaque amas d'un catalogue, j'extrait un taux de photons $\hat{a}_{CR}$ et l'erreur associée $\sigma[\hat{a}_{CR}]$ avec la méthode de maximisation de la fonction de vraisemblance, notée MLE (pour "Maximum Likelihood Estimator") pour la suite. La position de l'amas $\vec{x}_0$ (son pic d'émission) est donnée par le catalogue ainsi que la taille du profil θ_s , ce qui me permet de calculer la quantité $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0)$ utilisée pour construire la fonction de vraisemblance. En principe, j'ai fait en sorte de travailler avec des mini-cartes centrées sur la position de l'amas. Le catalogue me fournit aussi le taux de photons réel a_{CR} . Je construis alors le rapport :

$$r = \frac{\hat{a}_{CR} - a_{CR}}{\sigma[\hat{a}_{CR}]} \quad (5.75)$$

Si mon modèle d'émission est bon, si de plus l'amas est suffisamment étendu et donc le nombre de pixels en jeu suffisamment important, par application du théorème central limite (cf 5.63 en remplaçant θ par a_{CR}), je peux dire que $\hat{a}_{CR}$ suit une loi normale centrée sur a_{CR} et de variance $\sigma^2[\hat{a}_{CR}]$. Donc r suit aussi, dans ce cas là, une loi normale de moyenne zéro et de variance 1. Normalement 68% des r doivent être tels que $|r| < 1$. Je définis $[|r| < 1]\%$ le pourcentage de rapport r inférieur à 1 en valeur absolu. Si ce nombre est inférieur à 68%, mon erreur est sous estimée ; ce qui veut dire aussi que j'ai une sur-dispersion. Je définis aussi $[Fail]\%$ le nombre d'extractions qui n'ont pas abouti : la méthode de Newton pour estimer a_{CR} peut conduire à un résultat qui diverge ou à une quantité $a_{CR} \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_0) + b_{CR}$ négative sur certain pixel. Ces extractions ratées sont comptées comme si $|r| > 1$, ce qui rajoute une sur-dispersion.

Soit $\langle . \rangle$ la moyenne sur tous les amas du catalogue. Je m'attends à ce que $\langle r \rangle = median(r) = 0$ (avec $median(r)$ la valeur médiane de r sur le catalogue) et à ce que $\sigma_r^2 = \langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle = 1$ si le modèle d'émission est bon. Si $\langle r \rangle \neq 0$, j'ai un biais et si

$\sigma_r^2 > 1$, j'ai une sur-dispersion que je n'ai pas pris en compte. A priori, j'ai supposé le fond diffus des cartes ROSAT homogène alors que ce fond diffus est composé d'une myriade de sources ponctuelles de luminosités très différentes. Cette hétérogénéité du fond diffus pourrait être une source possible de sur-dispersion.

J'effectue l'extraction pour le catalogue simulé et le catalogue PXCC. Les résultats sont rangés dans le tableau 5.3. La construction des mini-cartes de fond diffus homogènes et de sources ponctuelles est explicitée en 5.2.4. Sur ces mini-cartes et sur des mini-cartes ROSAT au niveau de positions aléatoires du ciel, on injecte des amas du catalogue simulé (cf 5.2.5). Une extraction au niveau des positions aléatoires sur les cartes ROSAT mais sans injection d'amas, est aussi effectuée : c'est le "nulltest". Je travaille avec 3 cartes ROSAT : l'une où sont conservées les sources les plus brillantes, une autre où j'ai retiré et remplacé par un fond homogène le signal dans un rayon de $3\sigma_{psf}$ autour du pic d'émission (suppression élargie) et une autre enfin où j'ai effectuée cette opération dans un rayon de $2\sigma_{psf}$ (suppression réduite). σ_{psf} indique l'écart-type du lobe ROSAT. Dans tous les cas, le taux de photons du fond diffus b_{CR} est estimé sur des cartes (ROSAT ou simulées) en présence d'amas (injectés ou PXCC) et peut-être biaisé si les amas sont particulièrement brillants. Il y a cependant une exception à cette règle : pour le cas (S1') du tableau 5.3, b_{CR} est estimé sur une carte simulée avant l'injection de l'amas et est donc non biaisé.

Pour chaque cas de figure présenté par le tableau 5.3, j'ai aussi construit un histogramme de r dans les figures 5.16 et 5.17. Je présente aussi l'évolution de r en fonction du taux de photons des amas a_{CR} et de leur taille θ_s dans les figures 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 et 5.22. Pour ces cinq dernières figures, les barres d'erreurs sur $\langle r \rangle$ sont données par l'écart-type des r sur des intervalles en a_{CR} ou en θ_s . Quand il n'y a qu'un seul objet sur l'intervalle considéré, la barre d'erreur est réduite à zéro. Il ne faut pas prendre en considération ces points-là.

J'arrive aux conclusions suivantes ci-dessous.

L'extraction fonctionne quand le fond diffus est homogène :

Je suis dans le cas (S1) du tableau 5.3. La MLE permet effectivement de récupérer le taux de photons des amas sans sous-estimer l'erreur (σ_r de 1.07 contre 1) quand le bruit de fond est homogène. Par contre, quand $\theta_s > 10$ arcmin, je suis légèrement biaisé et je sous-estime le taux de photons. J'ai le même problème pour des taux de photons $\theta_s > 10$ arcmin. Le problème vient de mon choix de fixer la valeur de b_{CR} . Les amas qui ont les taux de photons les plus importants vont contribuer de manière non négligeable à b_{CR} et donc cette valeur va être un peu surestimée. La valeur $\hat{a}_{CR}$ sera en conséquence sous-estimée. Remarquons que les amas avec le plus fort taux de photons sont aussi les plus étendus d'après la figure 5.13. Le filtre que je cherche à développer sera surtout utilisé pour extraire des amas avec un faible taux de photons et peu étendus. Le problème n'en est donc pas tout à fait un. Je pourrais donc faire une coupure en θ_s et travailler seulement avec les amas peu étendus tels que $\theta_s < 5$ arcmin. Je perdrais alors 108 amas sur les 1789 du catalogue. Notons que les résultats présentés ici sont obtenus sans coupure. Si j'estime directement b_{CR} sur la carte simulée avant injection, cas noté (S1'), je n'ai plus ce problème de biais pour les structures étendues comme l'indique la figure 5.22. Ceci confirme bien l'impact des amas très brillants sur la mesure de b_{CR} .

Un fond diffus hétérogène rajoute une sur-dispersion sur le paramètre estimé :

Quand je réalise l'extraction d'un amas injecté sur un fond diffus de sources ponctuelles (lobées ou non) ou sur une mini-carte ROSAT, j'obtiens des valeurs de r très légèrement biaisées. J'ai aussi une sur-dispersion puisque j'obtiens $\sigma_r \simeq 1.6$. Ce problème est dû à mon hypothèse sur le fond diffus lors de l'extraction, fond diffus que je suppose homogène. Je

propose dans la section 5.4 quelques pistes possibles pour prendre en compte l'hétérogénéité du fond diffus ROSAT. Notons que les simulations de fond diffus, les cas (S2) et (S3), reproduisent la sur-dispersion et le biais sur r engendrés par les hétérogénéités du fond sur les cartes ROSAT, cas (S4), (S5) et (S6) (cf figures 5.18 et 5.19). A la différence de la MLE Poisson, le matched filter est capable de prendre en compte l'hétérogénéité du fond via le spectre de puissance de la mini-carte et n'est pas concerné par ce problème. Notons aussi que la suppression des sources brillantes des cartes ROSAT n'a qu'un effet limité sur la sur-dispersion et le biais sur r . Le biais sur r est donc lui aussi causé par les hétérogénéité non résolues et non par les sources brillantes. Si le "nulltest" est plus affecté par la suppression de telles sources, la sur-dispersion que je constate est aussi le fruit de l'hétérogénéité du bruit de fond. Les amas les étendues semblent les plus touchées par la sur-dispersion comme l'indique les figures 5.18 et 5.19. Cela veut dire que les profils plus larges "accrochent" plus de sources ponctuelles lors du filtrage.

Le flux des amas PXCC est contaminé par celui des sources brillantes :

Si je conserve les sources brillantes sur les cartes ROSAT, je surestime grandement $\hat{a}_{CR}$. En plus du signal en provenance de l'amas, je vais accrocher le signal en provenance de telles sources. L'évolution de r en fonction de a_{CR} ou θ_s est assez éloquent, plus l'amas a un taux de photons important et/ou est étendu, plus r s'écarte positivement de zéro. La suppression des sources brillantes permet de supprimer le biais. Cependant, si je supprime les sources dans un rayon de $3\sigma_{pdf}$ (suppression élargie), je vais perdre une partie du signal comme en témoigne les valeurs négatives de r pour $\theta_s \simeq 2$ arcmin. La suppression des sources brillantes dans une région plus petite de rayon $2\sigma_{pdf}$ paraît un meilleur compromis puisqu'elle supprime le biais sur r .

La sur-dispersion du taux de photons des amas est dû à l'hétérogénéité du fond diffus mais aussi à la différence entre le profil du modèle et le profil réel :

La sur-dispersion sur r est plus grande avec les amas PXCC que pour les amas injectés sur des cartes ROSAT, suggérant une autre cause de sur-dispersion. Le profil que j'utilise est en fait un profil moyen qui donc n'est pas forcément (localement) celui d'un amas PXCC, ce qui engendre une systématique supplémentaire.

Perspectives immédiates :

La sur-dispersion induite sur l'estimateur $\hat{a}_{CR}$ est provoquée par des hétérogénéité du fond diffus ROSAT. Ma priorité sera de modifier la fonction de vraisemblance pour prendre en compte cette sur-dispersion en amont, pendant l'extraction. Plusieurs pistes seront présentées dans la section 5.4 pour résoudre ce problème.

5.3.4 Extension de l'algorithme pour filtrage sur toute la mini-carte

Je n'ai réalisé précédemment que l'extraction sur un pixel, celui de position $\vec{x}_0$ qui est au niveau du maximum d'émission de l'amas. Je cherche maintenant à extraire un taux de photons sur n'importe quel pixel de position $\vec{x}_k$ sur la mini-carte ROSAT (ou simulée). Je veux donc construire une mini-carte de taux de photons $\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)$ et aussi la mini-carte de variance associée $\sigma^2[\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)]$. J'applique la même méthode MLE que précédemment, sauf que je centre le profil sur $\vec{x}_k$. J'utilise donc $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)$ dans la fonction de vraisemblance. La figure 5.14 résume cette approche. Cette méthode "force brute" est en fait très couteuse en temps car pour chaque pixel de la carte, je suis obligé de construire une fonction de vraisemblance distincte puis d'utiliser la méthode de Newton pour obtenir $\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)$.

Notation	Catalogue	Sources brillantes	Cartes	$median(r)$	σ_r	$[r < 1]\%$	$[Fail]\%$
(S1)	Simulation	-	Fond diffus homogène	-0.03	1.07	64.62	0.34
(S1')	Simulation	-	Fond diffus homogène (b_{CR} d'injection)	-0.02	1.05	65.57	0.34
(S2)	Simulation	-	Fond diffus de sources ponctuelles non lobées	-0.52	1.62	44.05	1.12
(S3)	Simulation	-	Fond diffus de sources ponctuelles lobées	-0.41	1.56	47.68	0.84
(S4)	Simulation	Conservées	Cartes ROSAT injectées	-0.46	1.69	44.21	1.23
(S5)	Simulation	Suppression élargie	Cartes ROSAT injectées	-0.29	1.62	48.02	1.17
(S6)	Simulation	Suppression réduite	Cartes ROSAT injectées	-0.33	1.64	46.95	1.17
(P1)	PXCC	Conservées	Cartes ROSAT	-1.76	2.35	25.94	1.90
(P2)	PXCC	Suppression élargie	Cartes ROSAT	-0.32	3.83	26.16	1.84
(P3)	PXCC	Suppression réduite	Cartes ROSAT	0.31	2.98	29.29	1.57
(N1)	Nulltest	Conservées	Cartes ROSAT	-0.42	2.06	39.68	6.65
(N2)	Nulltest	Suppression élargie	Cartes ROSAT	-0.28	1.87	43.49	5.53
(N3)	Nulltest	Suppression réduite	Cartes ROSAT	-0.32	1.92	42.20	5.75

TABLE 5.3 – Résultats de l'extraction sur différentes mini-cartes du taux de photons des amas avec une maximisation de la fonction de vraisemblance. Les différentes entrées de ce tableau sont présentées dans la section 5.3.3. L'extraction (S1') est identique à (S1) sauf pour l'estimation du taux de photons du fond diffus b_{CR} . Dans le premier cas, b_{CR} est estimé sur la carte simulée avant injection de l'amas et est donc non biaisé, dans le second cas b_{CR} est estimé sur la carte simulée après injection de l'amas et peut-être biaisé si l'amas est particulièrement brillant. Dans tous les autres cas b_{CR} est estimé sur des cartes en présence d'amas.

Sans chambouler cette approche, il est possible d'accélérer les choses. Au lieu de travailler sur toute la mini-carte, je vais me restreindre à la zone où $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k) > \epsilon$ avec ϵ un seuil fixé arbitrairement. Je prend par exemple $\epsilon = 1/N$ avec $N = 350 \times 350$ le nombre de pixels sur la mini-carte. Notons que certains pixels de $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)$ peuvent déborder de la mini-carte et sont donc supprimés. Je note $[O](\vec{x}_k)$ (pour "overlap") l'ensemble des pixels sur la mini-carte tel que $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k) > \epsilon$. Je peux aussi utiliser le fait que je travaille avec des lois de Poisson très souvent de moyenne plus petite que 1. En effet pour une majorité de pixel, la valeur de m_i est nulle. L'ensemble des pixels de valeur non nulle est noté $[P]$ (pour positif car les m_i sont forcément positifs). Je peux alors définir l'ensemble des pixels dans $[O](\vec{x}_k)$ qui ont une valeur de m_i non nulle. Je note cet ensemble $[O](\vec{x}_k) \cap [P]$. Je peux alors écrire la maximisation de la vraisemblance de cette façon :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \ln(L)}{\partial a_{CR}}(\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)) \\
 &= \sum_i \frac{m_i \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)}{\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k) \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k) + b_{CR}} - \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k) \cdot t_i \\
 &= \sum_{i \in [O](\vec{x}_k) \cap [P]} \frac{m_i \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)}{\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k) \cdot \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k) + b_{CR}} - \sum_{i \in [O](\vec{x}_k)} \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k) \cdot t_i.
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

J'ai beaucoup moins de terme dans mes sommes. Je gagne ensuite en temps sur la méthode de Newton pour estimer $\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)$. Cette méthode est surtout valable pour des amas de petites tailles ($\theta_s < 5$ arcmin) qui sont très localisés sur la mini-carte et qui, au lieu de s'étendre sur 350×350 pixels, s'étendent seulement sur quelques centaines voire quelques milliers de pixels. Elle est aussi bien adaptée au langage *IDL* que j'utilise pour coder. Il est en effet moins coûteux en temps, avec ce langage, de construire les ensemble $[O](\vec{x}_k)$ et $[O](\vec{x}_k) \cap [P]$ que de faire des sommations sur tous les pixels de la mini-carte.

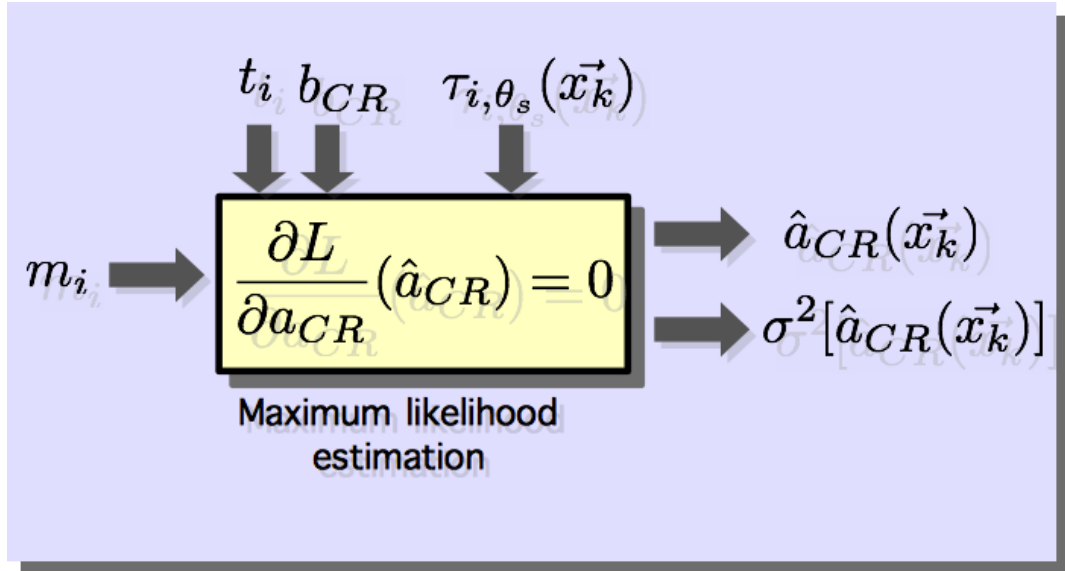


FIGURE 5.14 – Présentation du fonctionnement du filtre maximisation de la fonction de vraisemblance. Je suppose que j'ai un amas à la position $\vec{x}_k$. Le taux de photons $a_{CR}(\vec{x}_k)$ de l'amas sur la mini-carte ROSAT (ou simulée) m_i est estimé par le taux qui maximise une fonction de vraisemblance. Cette fonction est construite à partir de distribution de Poisson en supposant un profil spatial pour l'amas $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)$ centré sur $\vec{x}_k$. La valeur moyenne du taux de photons du fond diffus, b_{CR} , et la carte de temps d'exposition t_i sont aussi nécessaires pour extraire le taux de photons de l'amas.

La figure 5.15 présente le résultat du filtrage sur une mini-carte *ROSAT* $m(\vec{x}_k)$ centrée sur un amas injecté en fixant une certaine taille θ_s pour construire le profil. J'obtiens alors la carte du taux de photons $\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)$ et de la variance sur ce taux $\sigma^2[\hat{a}_{CR}(\vec{x}_k)]$.

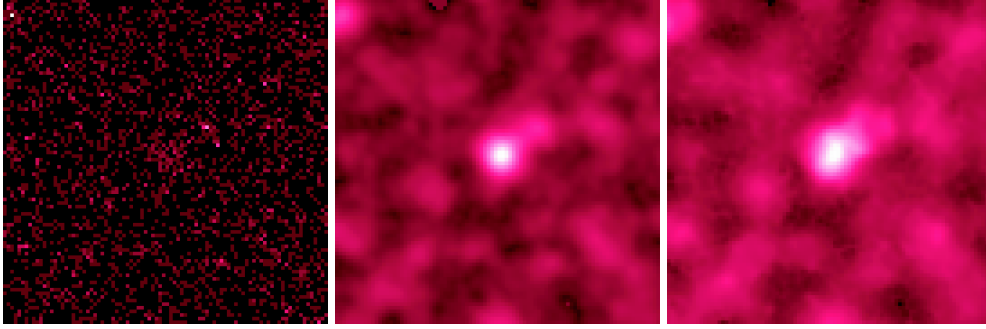


FIGURE 5.15 – A gauche : une mini-carte *ROSAT* centrée sur un amas injecté. Au centre : la carte filtrée qui donne le taux de photons des amas. A droite : la carte de la variance sur ce taux.

5.4 Vers la prise en compte de l'hétérogénéité pour le filtrage *ROSAT* et le filtrage combiné *ROSAT-Planck*

Traitement de la sur-dispersion due à l'hétérogénéité du fond diffus *ROSAT*

Le principal problème du filtre que je viens de présenter, c'est qu'il sous-estime l'erreur sur le taux de photons $\hat{a}_{CR}$. En effet ce filtre est construit à partir de l'hypothèse d'un fond homogène pour les mini-cartes *ROSAT*. En fait, ce fond est constitué de sources ponctuelles de luminosité diverse et est donc hétérogène. Cette hétérogénéité n'est pas prise en compte dans le filtre.

On peut aussi voir le problème comme étant lié intrinsèquement à la loi de Poisson. En effet la variance d'une loi de poisson est égale à sa moyenne contrairement à la loi normale qui a une variance indépendante qui peut donc s'ajuster pour capturer la sur-dispersion. Je dois donc ajouter un paramètre supplémentaire pour capturer cette sur-dispersion. Il est possible par exemple de travailler avec la loi binomiale négative. Avec cette loi, j'ai un paramètre de sur-dispersion p . Si je suppose que j'ai une moyenne μ_i alors j'ai une variance $\mu_i + p\mu_i^2$ avec la loi binomiale négative. J'ai construit une fonction de vraisemblance avec cette loi de probabilité. Je capture une partie de la sur-dispersion mais pas sa totalité et c'est pourquoi je m'oriente vers d'autres solutions.

Je suis en train de travailler sur des probabilité de la forme

$$\tilde{f}_i(m_i|a_{CR}) = \int f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) P(\delta_i) d\delta_i \quad (5.77)$$

avec $f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i)$ la probabilité de Poisson que j'employais jusque là et à laquelle je rajoute le terme $\delta_i t_i$ dans la moyenne. Je cherche la probabilité $P(\delta_i)$ la mieux adaptée. Je cherche notamment à introduire l'équivalent du spectre de puissance d'un matched filter dans l'expression de cette probabilité. Cette approche donne des résultats prometteurs. Elle est présentée dans l'annexe B.

Perspectives sur la combinaison des données *ROSAT* et *Planck*

Une fois que j'ai extrait le taux de photons $\hat{a}_{CR}$ et son erreur associée $\sigma[\hat{a}_{CR}]$, je convertis les deux en flux $F_{500,X}$ et en erreur sur le flux $\sigma[F_{500,X}]$ en utilisant les valeurs de la

table 5.1 et le facteur de conversion de l'équation 5.41 pour passer du flux total au flux dans un rayon R_{500} . Je peux ensuite convertir cette quantité en paramètre de Compton Y_{500} en utilisant la formule suivante (TARRIO et al., 2016 ; PLANCK COLLABORATION et al., 2012) :

$$F_{500,X}[\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}] = Y_{500,X}[\text{arcmin}^2] \times 4.95 \cdot 10^{-9} E(z)^{5/3} (1+z)^{-4} K(z) \quad (5.78)$$

J'obtiens alors le paramètre de Compton estimé à partir des données X $Y_{500,X}$ et l'erreur associée à ce paramètre $\sigma[Y_{500,X}]$. J'utilise ensuite le matched filter sur les cartes *Planck* pour extraire le paramètre de Compton estimé à partir de l'effet SZ $Y_{500,SZ}$ et son erreur $\sigma[Y_{500,SZ}]$. En supposant que ces deux paramètres suivent une loi normale, je peux calculer le paramètre de Compton moyen comme il suit :

$$Y_{500} = \frac{\frac{Y_{500,X}}{\sigma^2[Y_{500,X}]} + \frac{Y_{500,SZ}}{\sigma^2[Y_{500,SZ}]}}{\frac{1}{\sigma^2[Y_{500,X}]} + \frac{1}{\sigma^2[Y_{500,SZ}]}} \quad (5.79)$$

avec l'erreur sur ce paramètre comme il suit :

$$\sigma[Y_{500}] = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sigma^2[Y_{500,X}]} + \frac{1}{\sigma^2[Y_{500,SZ}]}}} \quad (5.80)$$

Un matched filter est équivalent à une minimisation de fonction de vraisemblance quand le bruit est distribué selon une loi normale (dans l'espace de Fourier). Bien que le bruit des cartes *Planck* ne suive pas strictement une telle distribution, il serait envisageable de construire la fonction de vraisemblance pour $Y_{500,SZ}$ avec cette hypothèse de loi normale. Cette fonction de vraisemblance SZ serait alors multipliée à la fonction de vraisemblance X pour construire la fonction de vraisemblance SZ+X. Je chercherais ensuite à maximiser cette fonction pour extraire directement $Y_{500,SZ}$.

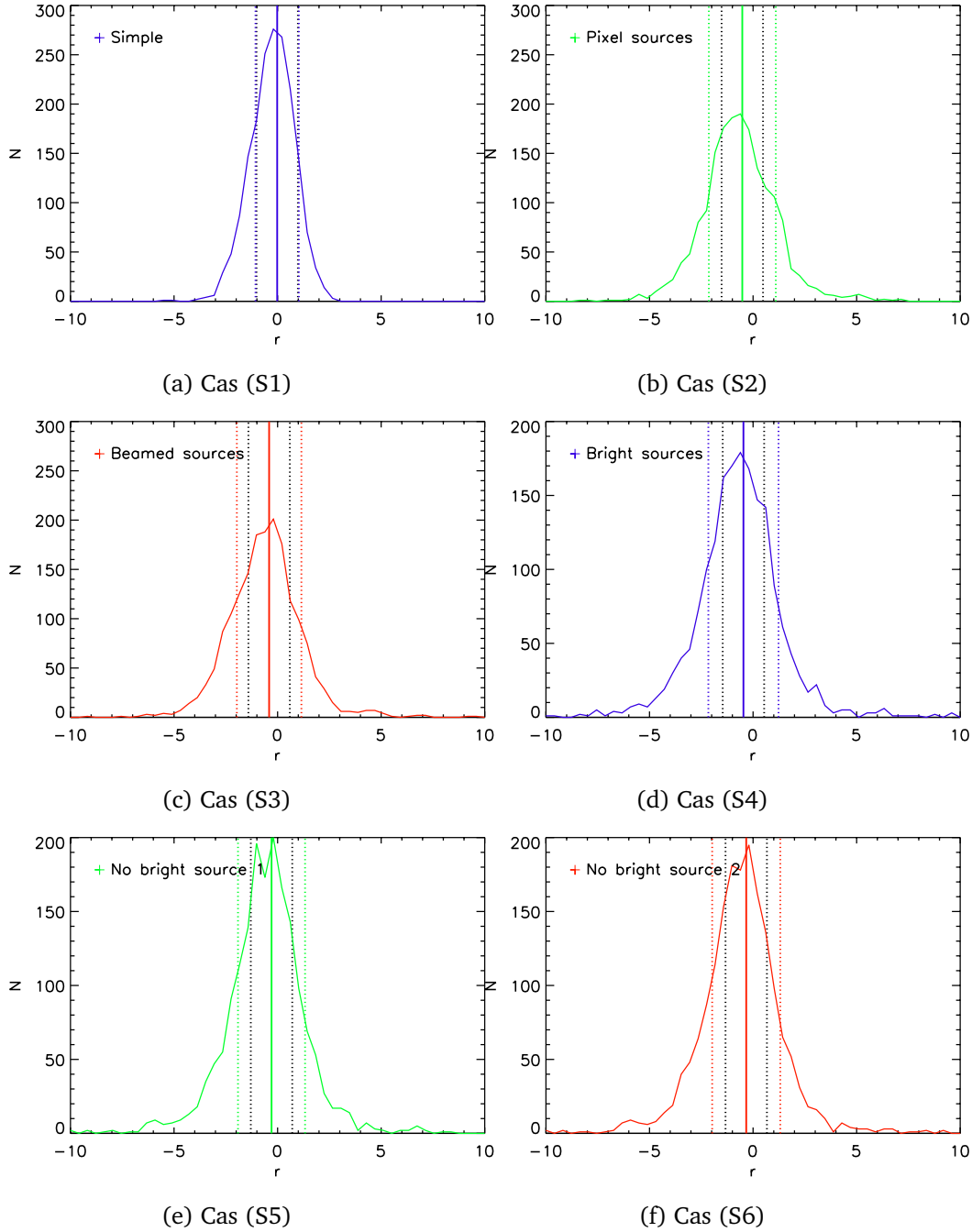


FIGURE 5.16 – Histogramme du rapport r pour des extractions d’amas du catalogue simulé pour différentes mini-cartes. La notation des différents cas est présentée dans le tableau 5.3. Les lignes pointillées verticales noires indiquent un écart-type de 1 qui est attendu si le modèle d’émission des mini-cartes est valide. Les lignes pointillées colorées indiquent l’intervalle centré sur la médiane contenant 68% des valeurs de r pour le cas considéré, tandis que la ligne verticale colorée indique la valeur médiane de r .

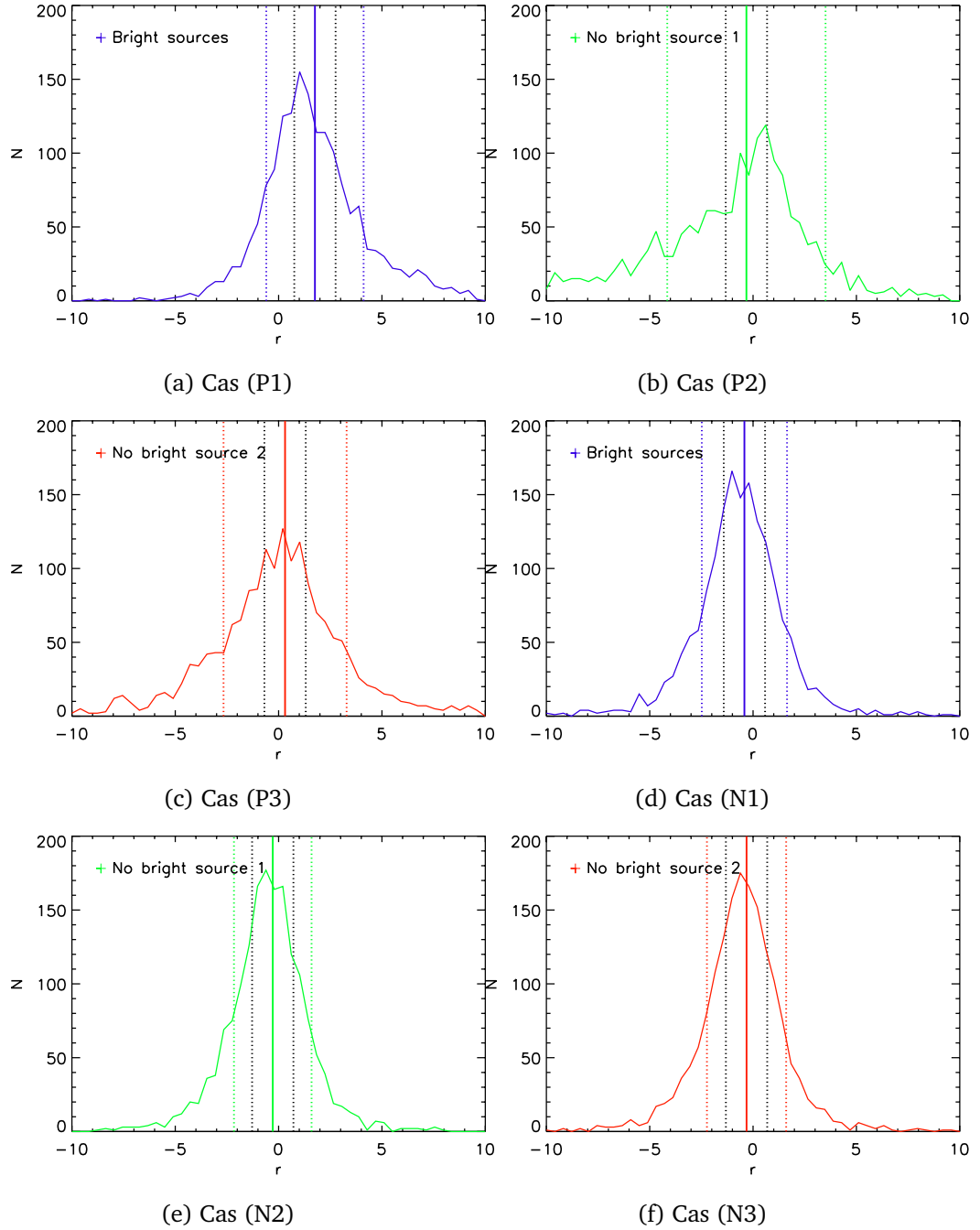


FIGURE 5.17 – Histogramme du rapport r pour des extractions d'amas du catalogue PXCC et du "nulltest" pour différents mini-cartes. La notation des différents cas est présentée dans le tableau 5.3. Les lignes pointillées verticales noires indiquent un écart-type de 1 qui est attendu si le modèle d'émission des mini-cartes est valide. Les lignes pointillées colorées indiquent l'intervalle centré sur la médiane contenant 68% des valeurs de r pour le cas considéré, tandis que la ligne verticale colorée indique la valeur médiane de r .

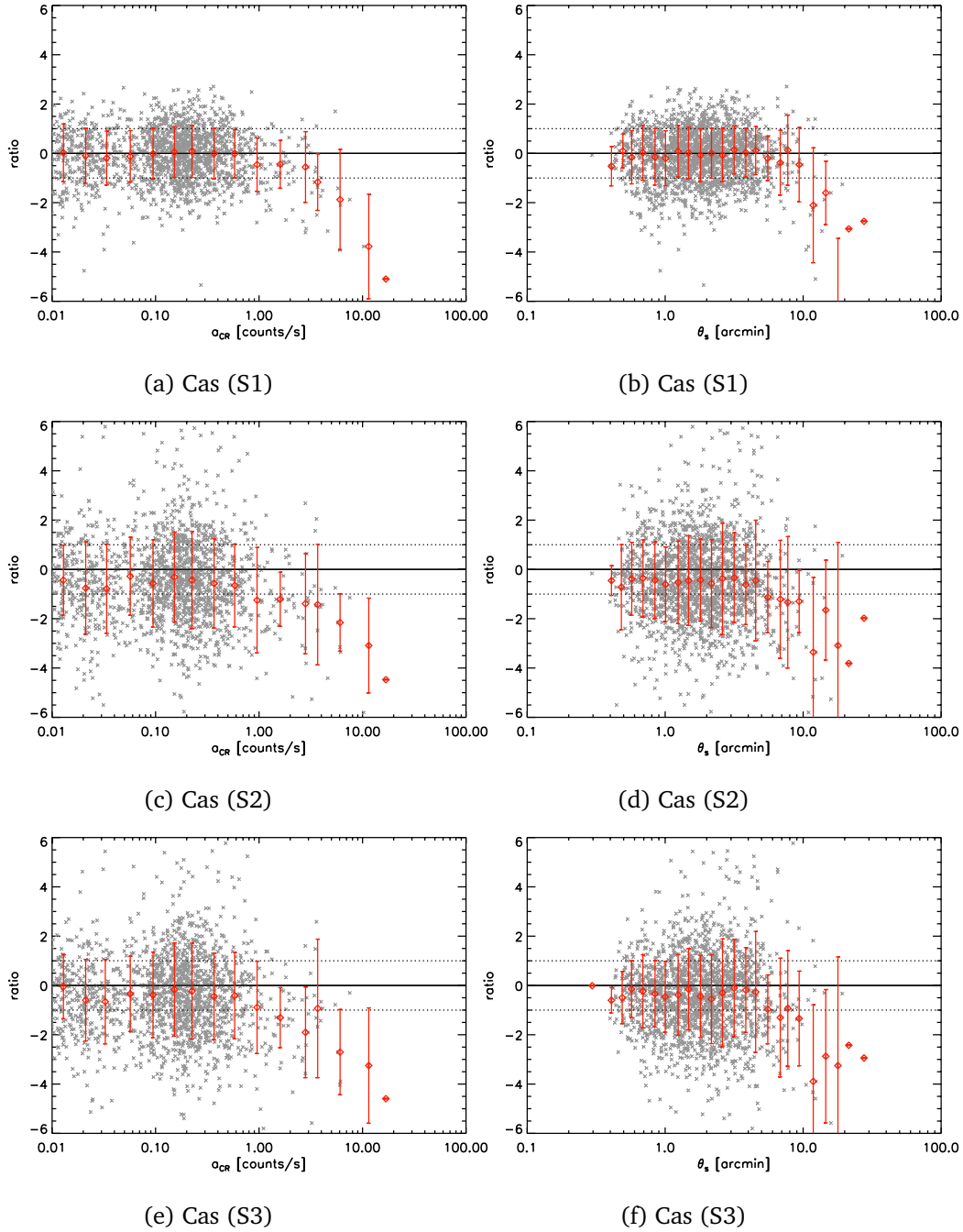


FIGURE 5.18 – Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes avec un fond diffus simulé centrées sur un amas injecté.

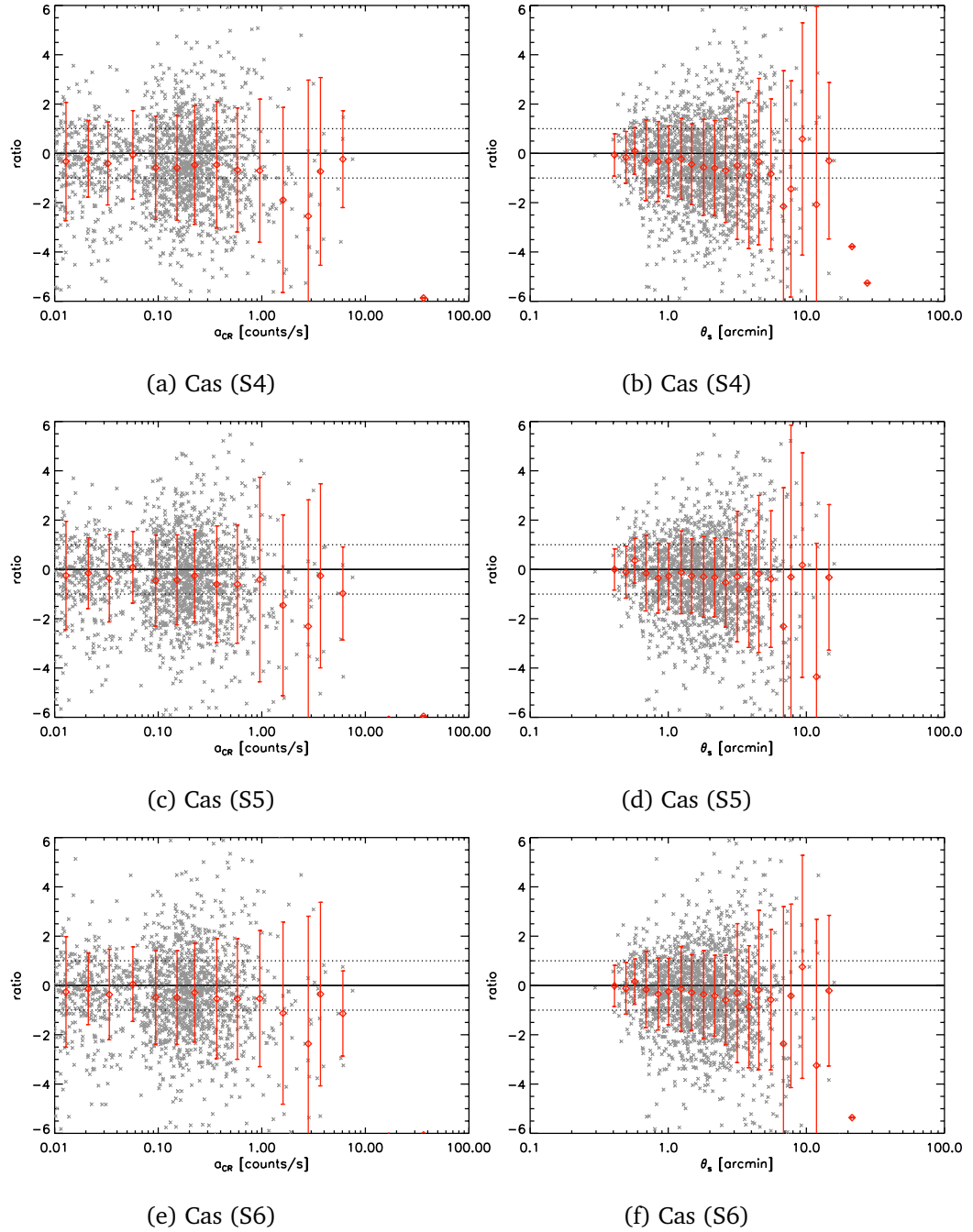


FIGURE 5.19 – Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes *ROSAT* centrées sur un amas injecté.

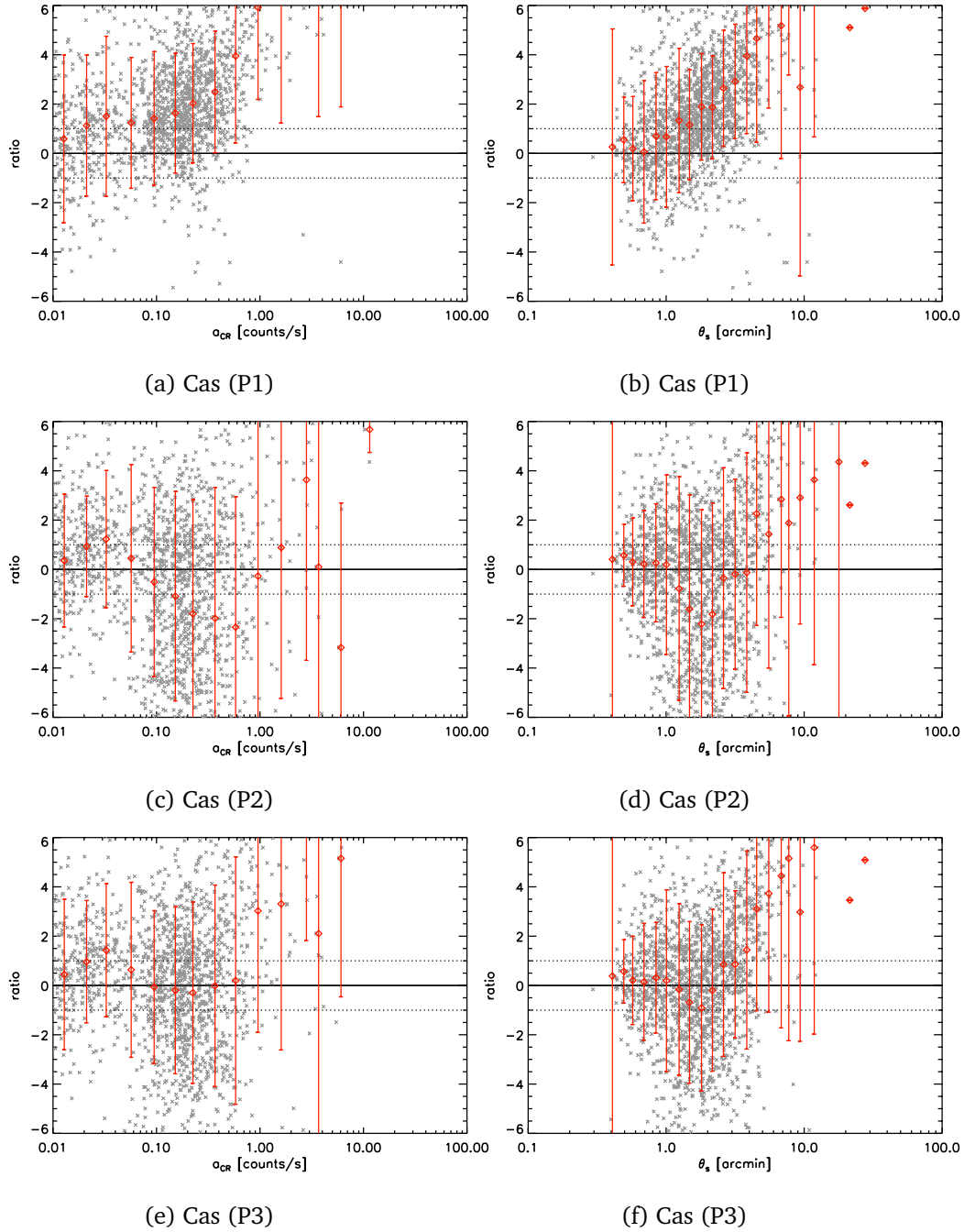


FIGURE 5.20 – Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l’amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l’écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L’erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes *ROSAT* centrées sur un amas PXCC.

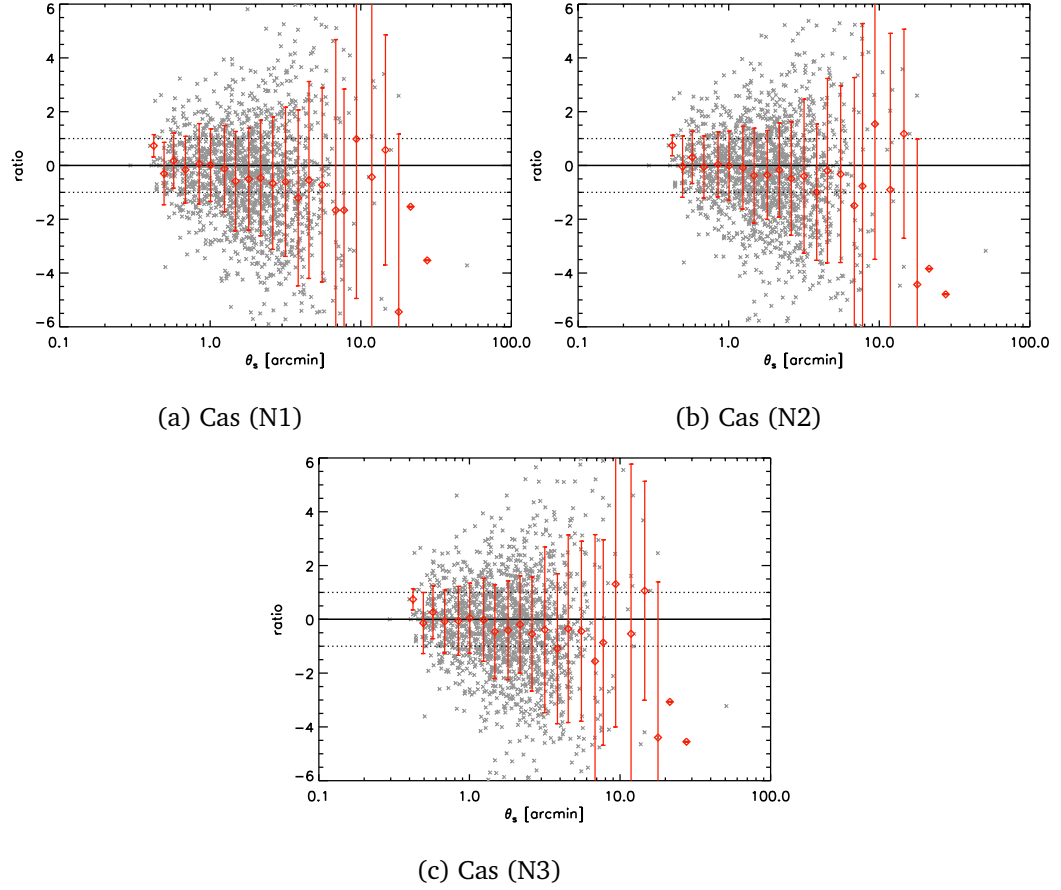


FIGURE 5.21 – Evolution du rapport r en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil. Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes *ROSAT* centrées sur des positions aléatoires sur le ciel (nulltest). Je suppose que $a_{CR} = 0$ (pas d'amas).

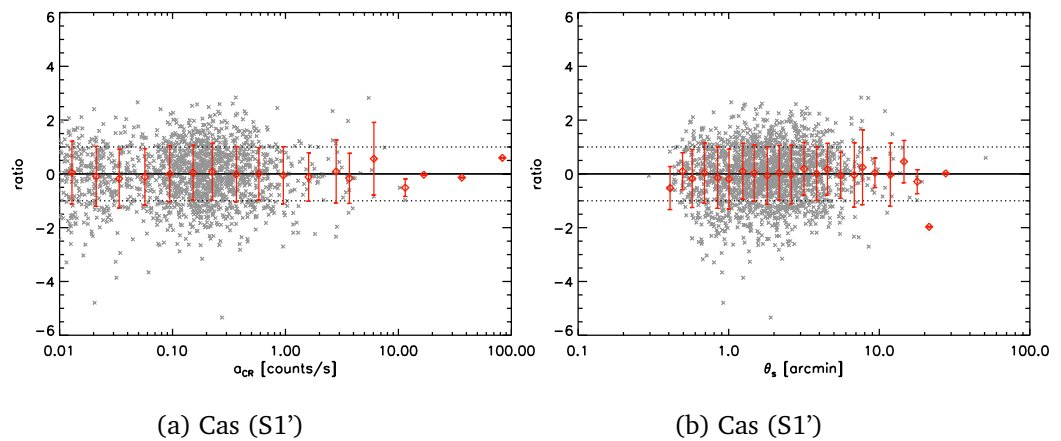


FIGURE 5.22 – Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes avec un fond diffus simulé centrées sur un amas injecté.

Conclusion

Mon travail de détection des structures de gaz chaud s'articule autour de deux axes principaux :

- un axe consacré à la détection du gaz chaud dans des structures à grand redshift $z > 2.5$ par effet Sunyaev-Zel'dovich thermique (tSZ) dans les données *Planck* et en utilisant les quasars de *BOSS* comme traceurs,
- un autre axe consacré à la détection du gaz chaud dans des structures à plus bas redshift $z < 1.5$ par rayonnement de freinage dans les données *ROSAT* en vue d'une combinaison avec les données *Planck*. Les structures sont détectées individuellement, il n'y a donc pas besoin de traceur dans ce cas.

La combinaison des données est l'une des clefs de mon étude puisque c'est en combinant les cartes *Planck* avec les positions des quasars de *BOSS* que j'obtiens un signal significatif de gaz chaud. Le filtre adapté au rayonnement de freinage dans *ROSAT* est construit en supposant un certain profil pour les amas comme le matched filter utilisé pour extraire le signal de ces amas dans *Planck*, ce qui devrait faciliter la combinaison du premier filtre avec le second et conduire à la détection simultanée.

Je présente ici les résultats des travaux réalisés sur les deux axes.

Le chapitre 3 présente les premières étapes de l'analyse du premier axe. En employant un matched filter "mono-fréquence", je peux extraire un flux sur les différentes cartes *Planck* de 70 à 857 GHz (auxquelles j'ai soustrais l'émission du fond diffus cosmologique) au niveau des positions des quasars *BOSS*. Pris individuellement, les flux ne sont pas significatifs ; je dois donc travailler avec le flux moyen sur toute la population des quasars ou sur des sous-échantillons de cette population. J'obtiens alors un spectre d'émission moyen qui ressemble à un corps noir modifié, typique des émissions de poussière, et non à la signature caractéristique de l'effet tSZ. Si effet tSZ il y a, il doit être largement sous-dominant. Pour pouvoir l'extraire, il est nécessaire de bien caractériser l'émission de poussière en premier lieu.

Dans le chapitre 4, je vais cependant commencer par supposer que le signal est dominé par l'effet SZ. J'emploie alors le matched filter "multi-fréquence" utilisé pour la construction du catalogue des amas de *Planck*. Pour chaque quasar, j'obtiens l'amplitude de l'effet SZ puis je calcule l'amplitude moyenne sur toute la population des quasars. Cette amplitude est significative mais mon hypothèse de départ est fausse. Le χ^2 des résidus moyens est l'outil qui va me permettre de vérifier mon hypothèse sur la loi d'émission. Il est très élevé quand je suppose que l'émission est dominé par tSZ, suggérant que ce dernier n'est en fait pas l'effet le plus significatif. Je suppose ensuite que mon signal est dominé par une émission de poussière. Le spectre de cette émission est un corps gris, le produit d'un corps noir avec une loi de puissance et dépend donc de deux paramètres, la température T_d et l'indice spectral β_d . Pour chaque valeur (T_d, β_d) , j'extrais l'amplitude de poussière de chaque quasar avec un matched filter "multi-fréquences" adapté. Je calcule ensuite la valeur moyenne de cette amplitude sur la sous-population donnée. J'ai découpé préalablement la population des quasars *BOSS* en sous populations d'intervalles de redshift de largeur $\Delta z = 0.5$. Puis je calcule la valeur marginale de l'amplitude de l'émission de poussière sur tout le plan (T_d, β_d) . Je peux ensuite estimer la masse de poussière à partir de cette

amplitude. L'évolution de cette masse avec le redshift apparaît corrélée à celle du taux de formation d'étoiles dans les galaxies. En conservant cette approche, j'ajoute l'émission tSZ dans mes hypothèses. Je construis un filtre pour extraire à la fois l'amplitude de l'émission de poussière et l'amplitude de l'émission tSZ, un matched filter "multi-fréquences" "multi-composantes" capable de séparer des émissions qui ont des spectres différents. Avec ce nouveau filtre, j'obtiens en effet un signal tSZ, donc en provenance d'un gaz chaud, significatif pour des structures à grand redshift $z > 2.5$. Cependant ce signal est en tension avec le signal de gaz chaud attendu pour des amas à grands redshift, signal construit à partir de la fonction de masse. Le signal estimé à la position des quasars *BOSS* dans les données *ROSAT* est plus important qu'attendu si je suppose que ce signal provient intégralement du gaz chaud d'un amas. Des contraintes additionnelles en X avec les futures données *eROSITA* ou *Athena* pourrait préciser l'origine de ce signal de gaz chaud, c'est à dire entre le gaz chaud virialisé d'un proto-amas et de l'éjecta de matière en provenance d'un noyau galactique actif.

Le second axe de ma thèse est présenté dans le chapitre 5. Je cherche à développer un filtre qui combine les données *Planck* et les données *ROSAT* pour détecter des amas moins massifs et en plus grandes quantités et donc apporter des contraintes plus fines sur la fonction de masse et sur la cosmologie après avoir estimé la fonction de sélection *ROSAT-Planck*. Mon travail se focalise surtout sur le développement de l'étage *ROSAT* de ce filtre (filtre X), l'étage *Planck* devant être le matched filter déjà employé pour construire le catalogue d'amas *Planck* (filtre tSZ). Je développe d'abord l'étage *ROSAT* sous forme d'un filtre X indépendant qui, comme le matched filter, est construit en supposant un certain profil spatial pour les amas que je cherche à extraire. Le filtre X me donne en fait le taux de photons en provenance d'un amas, taux que je convertis ensuite en luminosité X de l'amas, luminosité qui elle-même dépend de la masse de l'amas. Je teste ce filtre X sur des amas déjà détectés, les amas du catalogue "PXCC". Pour obtenir un filtre X optimal, je le conçois comme la maximisation d'une fonction de vraisemblance. Je suppose que le bruit des cartes *ROSAT* suit une loi de Poisson. Je fais l'hypothèse que le fond diffus *ROSAT* est homogène au temps d'exposition près. Cette hypothèse entraîne une sur-dispersion sur le taux de photons estimé en provenance des amas car le fond des cartes *ROSAT* est en fait hétérogène. Je travaille actuellement à la prise en compte de cette hétérogénéité dans la fonction de vraisemblance. Cette étape doit être complétée avant de réaliser la combinaison des étages *ROSAT* et *Planck* du filtre.

Les amas de galaxies sont une sonde très intéressante pour la cosmologie et notamment pour les contraintes qu'ils apportent sur le paramètre σ_8 qui semblent en tension avec celles issues du fond diffus cosmologique. Cependant, comparés à d'autres objets comme les galaxies, les amas détectés sont encore relativement peu nombreux. Le catalogue d'amas *Planck* contient plus d'un millier d'amas tout au plus. La combinaison de canaux d'émission différent est donc une voie très prometteuse pour détecter des amas moins brillants et donc pour augmenter la statistique. Il faut cependant construire des outils adaptés qui prennent en compte les spécificités des différents canaux, par exemple le bruit "Poisson" des émissions en X.

L'utilisation de traceurs indépendants d'amas de galaxies, comme les quasars, est une autre piste. Ils permettent d'accéder aux propriétés moyennes des populations d'amas de galaxies plus lointains (et non à un amas individuellement). Cette approche butte cependant sur différentes difficultés comme le possible biais entre le traceur et la structure sous-jacente et les émissions en provenance de ce même traceur qui peuvent contaminer le signal. La solution réside encore dans l'utilisation de plusieurs canaux d'émission pour contraindre aux mieux les diverses émissions et récupérer celle des amas, c'est-à-dire du gaz chaud. A partir des propriétés moyennes dérivées de l'émission de gaz chaud, il sera peut-être possible d'apporter des contraintes sur les modèles de formation d'amas et sur

la cosmologie à plus grand redshift.

Annexe A

Matched Filters

A.1 Construction du matched filter mono-fréquence

Cette section est dédiée au calcul de l'expression du matched filter $\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0 q)$ présenté dans la section 3.4.3. Pour les hypothèses de départ elle s'appuie sur le [SANZ et al., 2001](#). J'ai par contre réalisé personnellement les calculs.

A.1.1 Définitions et hypothèses de départ

Soit la mini-carte filtrée :

$$\omega_\nu(\vec{a}, R) = \int m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{a}} d\vec{q}. \quad (\text{A.1})$$

avec la mini-carte *Planck* exprimée en Fourier de cette façon :

$$m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) = f_{\nu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} + n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}). \quad (\text{A.2})$$

Le bruit est stationnaire donc

$$\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}') \rangle = P_\nu(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (\text{A.3})$$

Le bruit est de moyenne nulle d'où $\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle = 0$.

Je définis la variance sur le flux de cette façon :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] &= \langle \widehat{f_{\nu,i}}^2 \rangle - \langle \widehat{f_{\nu,i}} \rangle^2 \\ &= \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R)^2 \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R) \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Le matched filter doit respecter deux conditions :

$$f_{\nu,i} = \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \quad (\text{A.5})$$

et l'expression suivante (le rapport signal sur bruit) doit être maximale :

$$D[\omega_\nu(\vec{x}_i, R_0)] = \frac{\langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]}. \quad (\text{A.6})$$

Cette deuxième condition peut s'écrire de cette manière-ci :

$$\left. \frac{dD[\omega_\nu(\vec{x}_i, R)]}{dR} \right|_{R=R_0} = 0. \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Expression de la variance en fonction du filtre et du spectre de puissance.

Je cherche à exprimer la variance du flux en fonction du filtre et de l'échelle R . Je vais donc développer l'expression de cette variance comme il suit :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] &= \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)^2 \rangle - \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R) \rangle^2 \\
 &= \left\langle \left(\int m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right)^2 \right\rangle - \left(\left\langle \int m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \right)^2 \\
 &= \left\langle \left(\int m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right)^2 \right\rangle - \left(\int \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right)^2 \\
 &= \left\langle \int \int m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(Rq') e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} e^{+2\pi i \vec{q}' \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \right\rangle \\
 &\quad - \int \int \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(Rq') e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} e^{+2\pi i \vec{q}' \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \\
 &= \int \int \left(\langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle - \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle \right) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(Rq') e^{-2\pi i (\vec{q} - \vec{q}') \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}'.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Remarquons qu'il est possible d'écrire le spectre de puissance de cette manière :

$$\begin{aligned}
 P_{\nu}(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}') &= \langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle \\
 &= \langle (m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) - f_{\nu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i}) (m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') - f_{\nu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') e^{-2\pi i \vec{q}' \vec{x}_i}) \rangle \\
 &= \langle (m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) - \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle) (m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') - \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle) \rangle \\
 &= \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle - \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}') \rangle.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Cette expression permet d'écrire la variance de cette façon :

$$\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] = \int \int P_{\nu}(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(Rq') e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} e^{+2\pi i \vec{q}' \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \tag{A.10}$$

Ce qui amène finalement au résultat ci-dessous ; la variance ne dépend pas de la position sur la mini-carte :

$$\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] = \int P_{\nu}(q) |\psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq)|^2 d\vec{q}. \tag{A.11}$$

Cette expression est très générale et est vraie pour tout filtre symétrique (mais peut être étendue à des filtres asymétriques) quand le bruit est stationnaire.

A.1.3 Minimisation du rapport signal sur bruit et expression du filtre

J'ai désormais l'expression de la variance. Il me manque l'expression de la carte filtrée moyenne pour obtenir l'expression complète du rapport signal sur bruit. Donc, la carte filtrée moyenne s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R) \rangle &= \left\langle \int m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \\
 &= \int \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \\
 &= f_{\nu,i} \int \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) d\vec{q}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Il convient ensuite d'exprimer la dérivée de l'erreur en fonction de la variance et de sa dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]}{dR} &= \frac{d\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]}{dR} \frac{1}{2\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} \\ &= \int P_{\nu}(q) 2\psi_{\mathcal{F},\nu}^*(Rq) \frac{d\psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq)}{dR} d\vec{q} \frac{1}{2\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]}\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

La dérivée du rapport signal sur bruit en R se développe ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{dD[\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)]}{dR} &= \frac{d\langle\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)\rangle}{dR} \frac{1}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} - \langle\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)\rangle \frac{d\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]}{dR} \frac{1}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]} \\ &= \frac{d\langle\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)\rangle}{dR} \frac{1}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} - \langle\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)\rangle \frac{d\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]}{dR} \frac{1}{2\sigma^3[\widehat{f_{\nu,i}}]} \\ &= \frac{1}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} \int d\vec{q} \frac{d\psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq)}{dR} \left(f_{\nu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) - \frac{\langle\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)\rangle}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]} P_{\nu}(q) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(Rq) \right)\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

En $R = R_0$, comme on souhaite un filtre non biaisé, on a $\langle\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0)\rangle = f_{\nu,i}$. On peut donc réécrire la relation ci-dessus de cette façon :

$$\begin{aligned}\left. \frac{dD[\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R)]}{dR} \right|_{R=R_0} &= \frac{f_{\nu,i}}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} \int d\vec{q} \frac{d\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q)}{dR} \left(\tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) - \frac{1}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]} P_{\nu}(q) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(R_0q) \right) \\ &= 0\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Notons que $\tau_{\nu}(\vec{x})$ a une symétrie centrale donc $\tau_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) = \tau_{\mathcal{F},\nu}(q)$. Comme $\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q) = \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] \cdot \frac{\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)}{P_{\nu}(q)}$ est solution de

$$\tau_{\mathcal{F},\nu}^*(q) - \frac{1}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]} P_{\nu}(q) \psi_{\mathcal{F},\nu}^*(R_0q) = 0, \quad (\text{A.16})$$

il est solution de

$$\left. \frac{dD[\omega(\vec{x}_i, R)]}{dR} \right|_{R=R_0} = 0. \quad (\text{A.17})$$

C'est donc l'expression de mon matched filter.

Il nous manque maintenant l'expression finale de la variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] &= \int P_{\nu}(q) |\psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq)|^2 d\vec{q} \\ &= \sigma^4[\widehat{f_{\nu,i}}] \int P_{\nu}(q) \frac{|\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)|^2}{P_{\nu}(q)^2} d\vec{q}\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

Ce qui nous amène bien à l'expression attendue :

$$\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] = \left[\int d\vec{q} \frac{|\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)|^2}{P_{\nu}(q)} \right]^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

CQFD.

A.2 Construction du matched filter multi-fréquences

On suppose une loi d'émission pour le flux tel que $f_{\nu,i} = a_{\lambda,i} S_{\lambda}(\nu)$ avec, par exemple, $\lambda = \text{tSZ}$. La démonstration suivante est très proche de celle présentée pour le matched filter mono-fréquence à quelques détails près. J'en propose cependant une version complète ci-dessous :

Soit la mini-carte filtrée :

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) &= \int \vec{m}^t(\vec{x}) \bullet \vec{\Psi}_{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) d\vec{x} \\ &= \int \sum_{\nu} m'_{\nu}(\vec{x}) \Psi_{\lambda,\nu}(\vec{x}, \vec{x}_i, R) d\vec{x} \\ &= \int \sum_{\nu} m'_{\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) d\vec{q} e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} \\ &= \int \vec{m}^t(\vec{q}) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

avec les mini-cartes *Planck* exprimées en Fourier de cette façon :

$$m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) = a_{\lambda,i} S_{\lambda}(\nu) \cdot \tau^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} + n'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}). \quad (\text{A.21})$$

Le bruit est stationnaire donc

$$\langle n'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) n'^*_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle = P_{\nu,\mu}(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (\text{A.22})$$

Le bruit est de moyenne nulle d'où $\langle n'_{\nu}(\vec{q}) \rangle = 0$.

Je définis la variance sur le flux de cette façon :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] &= \langle \widehat{a_{\lambda,i}}^2 \rangle - \langle \widehat{a_{\lambda,i}} \rangle^2 \\ &= \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R)^2 \rangle - \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Le matched filter doit respecter deux conditions :

$$a_{\lambda,i} = \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \quad (\text{A.24})$$

et

$$\left. \frac{dD[\omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R)]}{dR} \right|_{R=R_0} = 0. \quad (\text{A.25})$$

avec

$$D[\omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0)] = \frac{\langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle}{\sigma[\widehat{a_{\lambda,i}}]}. \quad (\text{A.26})$$

A.2.1 Expression de la variance en fonction du filtre et du spectre de puissance.

De même que pour le filtre mono-fréquence, je cherche à exprimer la variance en fonction du filtre :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] &= \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R)^2 \rangle - \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle^2 \\ &= \left\langle \left(\int \sum_{\nu} m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right)^2 \right\rangle - \left(\left\langle \sum_{\nu} \int m'^*_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \right)^2 \\ &= \sum_{\nu,\mu} \iint \Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) \psi^*_{\mathcal{F},\lambda,\mu}(Rq') e^{-2\pi i (\vec{q}-\vec{q}') \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

avec $\Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') = \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle - \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle$.

Remarquons qu'il est possible d'écrire le spectre de puissance (croisé) de cette manière :

$$\begin{aligned}
 P_{\nu,\mu}(q) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}') &= \langle n_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) n'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle \\
 &= \langle (m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) - f_{\nu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i}) (m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') - f_{\mu,i} \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') e^{-2\pi i \vec{q}' \vec{x}_i}) \rangle \\
 &= \langle (m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) - \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \rangle) (m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') - \langle m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle) \rangle \\
 &= \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle - \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle.
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Ce qui me fait aboutir à l'expression suivante de la variance :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] &= \sum_{\nu,\mu} \int P_{\nu,\mu}(q) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \cdot \psi_{\mathcal{F},\mu}^*(Rq) d\vec{q} \\
 &= \int \vec{\psi}_{\mathcal{F}}^t(Rq) \bullet \mathbf{P}(q) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F}}^*(Rq) d\vec{q}.
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

A.2.2 Minimisation du rapport signal sur bruit et expression du filtre

Commençons par développer l'expression de la carte filtrée :

$$\begin{aligned}
 \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle &= \left\langle \int \sum_{\nu} m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \\
 &= \int \left\langle \sum_{\nu} m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \right\rangle \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \\
 &= a_{\lambda,i} \int \sum_{\nu} S_{\lambda}(\nu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) d\vec{q} \\
 &= a_{\lambda,i} \int \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(\vec{q}) \right) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(Rq) d\vec{q};
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

puis la dérivée du rapport signal sur bruit :

$$\begin{aligned}
 \frac{dD[\omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R)]}{dR} &= \frac{d\langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle}{dR} \frac{1}{\sigma[\widehat{a_{\lambda,i}}]} - \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle \frac{d\sigma[\widehat{a_{\lambda,i}}]}{dR} \frac{1}{\sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}]} \\
 &= \frac{d\langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle}{dR} \frac{1}{\sigma[\widehat{a_{\lambda,i}}]} - \langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle \frac{d\sigma^2[\widehat{f_{\lambda,i}}]}{dR} \frac{1}{2\sigma^3[\widehat{a_{\lambda,i}}]} \\
 &= \frac{1}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} \int d\vec{q} \frac{d\vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(Rq)}{dR} \bullet \left(a_{\lambda,i} \cdot \vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(\vec{q}) - \frac{\langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle}{\sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}]} \mathbf{P}(q) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}^*(Rq) \right)
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

En $R = R_0$, comme on souhaite un filtre non biaisé, on a $\langle \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle = a_{\lambda,i}$. On peut donc réécrire la relation ci-dessus en :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dD[\omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R)]}{dR} \right|_{R=R_0} &= \frac{1}{\sigma[\widehat{f_{\nu,i}}]} \int d\vec{q} a_{\lambda,i} \cdot \frac{d\vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(Rq)}{dR} \bullet \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(\vec{q}) - \frac{1}{\sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}]} \mathbf{P}(q) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}^*(Rq) \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

$\vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(R_0q) = \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet (\vec{S}_\lambda \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}))$ est bien une solution de l'équation ci-dessus. A partir de cette solution, on obtient l'expression de la variance :

$$\begin{aligned} \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] &= \int \vec{\psi}_{\mathcal{F}}^t(Rq) \bullet \mathbf{P}(q) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F}}^*(Rq) d\vec{q} \\ &= \sigma^4[\widehat{a_{\lambda,i}}] \int (\vec{S}_\lambda \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}))^t \bullet \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet (\vec{S}_\lambda \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}))^* d\vec{q}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Ce qui nous amène bien à l'expression attendue :

$$\sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] = \left[\int d\vec{q} (\vec{S}_\lambda \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(q))^t \bullet \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet (\vec{S}_\lambda \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(q)) \right]^{-1} \quad (\text{A.34})$$

CQFD.

A.2.3 Covariance des résidus

Je définis les résidus comme la différence entre les flux obtenus par un filtre mono-fréquence et le flux reconstruit avec l'amplitude estimée par un filtre multi-fréquences construit sur l'hypothèse d'une émission type λ :

$$\begin{aligned} R_{\nu,i} &= \widehat{f_{\nu,i}} - \widehat{a_{\lambda,i}} \cdot S_\lambda(\nu) \\ &= \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) - \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_\lambda(\nu) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

avec ω_ν la carte filtrée par le matched-filter mono-fréquence $\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q)$ et ω_λ la carte filtrée par la version multi-fréquences $\vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(R_0q)$.

La variance de ces résidus peut alors s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} C[\vec{R}_i]_{\nu,\mu} &= \langle R_{\nu,i} R_{\mu,i} \rangle - \langle R_{\nu,i} \rangle \langle R_{\mu,i} \rangle \\ &= \langle (\omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) - \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_\lambda(\nu)) (\omega_\mu(\vec{x}_i, R_0) - \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_\lambda(\mu)) \rangle \\ &= \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) - \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_\lambda(\nu) \rangle \langle \omega_\mu(\vec{x}_i, R_0) - \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_\lambda(\mu) \rangle \\ &= \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \omega_\mu(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_\mu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\ &\quad + S_\lambda(\nu) S_\lambda(\mu) (\langle \omega_\lambda^2(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle^2) \\ &= S_\lambda(\nu) (\langle \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \omega_\mu(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_\mu(\vec{x}_i, R_0) \rangle) \\ &\quad - S_\lambda(\mu) (\langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle) \\ &= C[\widehat{f}_i]_{\nu,\mu} + S_\lambda(\nu) S_\lambda(\mu) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] - S_\lambda(\nu) \Delta\omega_{\lambda,\mu}(\vec{x}_i) - S_\lambda(\mu) \Delta\omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

avec $\Delta\omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i) = \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle$. Remarquons que ν et μ dénotent des fréquences alors que λ dénote un type d'émission.

Si le filtre mono-fréquence s'exprime ainsi :

$$\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q) = \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] \cdot \frac{\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)}{P_\nu(q)}, \quad (\text{A.37})$$

la coordonnée ν du filtre multi-fréquence a une expression différente :

$$\psi_{\mathcal{F},\nu}(R_0q) = \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \cdot \sum_{\mu} P_{\nu,\mu}^{-1}(q) \cdot S_\lambda(\mu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu}(q). \quad (\text{A.38})$$

Etablissement de la covariance pour le flux

La covariance pour le flux est donnée par l'expressions suivante ; son développement est présenté pour les termes diagonaux dans l'annexe sur le matched filter mono-fréquence :

$$\begin{aligned} C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} &= \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R) \omega_\mu(\vec{x}_i, R) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R) \rangle \langle \omega_\mu(\vec{x}_i, R) \rangle \\ &= \iint \Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\lambda,\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq') e^{-2\pi i(\vec{q}-\vec{q}')\vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

avec $\Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') = \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle - \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle$.

Comme le spectre de puissance peut s'écrire ainsi :

$$P_{\nu,\mu}(\vec{q}) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}') = \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle - \langle m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle; \quad (\text{A.40})$$

il devient possible d'établir l'expression ci-dessous de la covariance du flux :

$$\begin{aligned} C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} &= \int P_{\nu,\mu}(q) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \cdot \psi_{\mathcal{F},\mu}^*(Rq) d\vec{q} \\ &= \left[\int d\vec{q} \tau_{\mathcal{F},\nu}(q) \cdot \frac{P_{\nu,\mu}(q)}{P_{\nu,\nu}(q) \cdot P_{\mu,\mu}(q)} \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu}^*(q) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Terme mixte

J'appelle terme mixte, le terme $\Delta \omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i)$ qui mélange à la fois le filtre mono-fréquence et le filtre multi-fréquences.

Voici le développement de son expression :

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i) &= \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\ &= \left\langle \left(\int m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right) \left(\int \sum_{\mu} m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \int m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \left\langle \sum_{\mu} \int m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \\ &= \sum_{\mu} \iint \Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq') e^{-2\pi i(\vec{q}-\vec{q}')\vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \\ &= \sum_{\mu} \iint P_{\nu,\mu}(q) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq') e^{-2\pi i(\vec{q}-\vec{q}')\vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \\ &= \sum_{\mu} \int P_{\nu,\mu}(q) \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq) d\vec{q} \\ &= \int \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \sum_{\mu} (P_{\nu,\mu}(q) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq)) d\vec{q} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

En introduisant l'expression du filtre, il devient possible d'écrire la somme suivante de

manière simplifiée :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu} P_{\nu,\mu}(q) \psi_{\mathcal{F},\lambda,\mu}^*(Rq) &= \sum_{\mu} P_{\nu,\mu}(q) \sum_{\mu'} \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] P_{\mu,\mu'}^{-1}(q) \cdot S_{\lambda}(\mu') \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu'}(q) \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \sum_{\mu'} S_{\lambda}(\mu') \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu'}^*(q) \sum_{\mu} P_{\nu,\mu}(q) P_{\mu,\mu'}^{-1}(q) \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \sum_{\mu'} S_{\lambda}(\mu') \cdot \tau_{\mathcal{F},\mu'}^*(q) \delta_{\nu,\mu'} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] S_{\lambda}(\nu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(q),
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

avec $\delta_{\nu,\mu'} = 0$ si $\nu \neq \mu'$ ou $\delta_{\nu,\mu'} = 1$ si $\nu = \mu'$.

En continuant le développement de l'expression de la variance on aboutit à

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i) &= \int \psi_{\mathcal{F},\nu}(Rq) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] S_{\lambda}(\nu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(q) d\vec{q} \\
 &= \int \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] \cdot \frac{\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)}{P_{\nu}(q)} \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] S_{\lambda}(\nu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(q) d\vec{q} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \cdot S_{\lambda}(\nu) \cdot \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] \cdot \int \frac{|\tau_{\mathcal{F},\nu}(q)|^2}{P_{\nu}(q)} d\vec{q} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \cdot S_{\lambda}(\nu) \cdot \sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}] \cdot \frac{1}{\sigma^2[\widehat{f_{\nu,i}}]} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \cdot S_{\lambda}(\nu).
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

En utilisant l'équation A.36, on arrive à l'expression finale de la variance des résidus :

$$\begin{aligned}
 C[\vec{R}_i]_{\nu,\mu} &= C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} + S_{\lambda}(\nu) S_{\lambda}(\mu) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] - S_{\lambda}(\nu) \Delta\omega_{\lambda,\mu}(\vec{x}_i) - S_{\lambda}(\mu) \Delta\omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i) \\
 &= C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} + S_{\lambda}(\nu) S_{\lambda}(\mu) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] - S_{\lambda}(\nu) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] S_{\lambda}(\mu) - S_{\lambda}(\mu) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] S_{\lambda}(\nu) \\
 &= C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} - S_{\lambda}(\nu) S_{\lambda}(\mu) \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}].
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

A.3 Construction du matched filter multi-fréquences multi-composantes

A.3.1 Vers les coefficients

Ce dernier filtre $\sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(Rq)$ est construit comme une combinaison linéaire des matched filters multi-fréquences $\vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(R_0q)$. L'objectif est de trouver les bons coefficients $\mathcal{C}_{\lambda,\eta}$ pour obtenir un estimateur non biaisé.

Si λ et η indiquent le type d'émission, ν indique quant à lui la fréquence.

La mini-carte filtrée s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \vec{m}^{tt}(\vec{x}) \bullet \vec{\Psi}_{\eta}(\vec{x}, \vec{x}_i, R_0) d\vec{x} \\
 &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \vec{m}^{tt}(\vec{q}) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(R_0q) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \\
 &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0).
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

avec les mini-cartes *Planck* exprimées en Fourier de cette façon :

$$m_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) = \left(\sum_{\eta'} a_{\eta',i} S_{\eta'}(\nu) \cdot \tau_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \right) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} + n_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}). \tag{A.47}$$

Ce qui revient à écrire sous forme vectorielle (fréquences) :

$$\vec{m}_{\mathcal{F}}'^*(\vec{q}) = \left(\sum_{\eta'} a_{\eta',i} \vec{S}_{\eta'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \right) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} + \vec{n}_{\mathcal{F}}'^*(\vec{q}). \quad (\text{A.48})$$

et les matched filters multi-fréquences de cette manière ci :

$$\vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda}(R_0 q) = \sigma^2[\widehat{a_{\lambda,i}}] \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right). \quad (\text{A.49})$$

Je définis aussi $\mathbf{D}_{\lambda,\eta} = \int d\vec{q} \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(q) \right)^t \bullet \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\eta} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}^*(q) \right)$. Notons que $\mathbf{D}_{\eta,\eta} = (\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}])^{-1}$.

Partons de la condition d'estimateur non biaisé :

$$\begin{aligned} a_{\lambda,i} &= \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R) \rangle \\ &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \langle \vec{m}^t(\vec{q}) \rangle \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \\ &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \left(\sum_{\eta'} a_{\eta',i} \vec{S}_{\eta'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \right) e^{+2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \\ &= \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \int \left(\sum_{\eta'} a_{\eta',i} \vec{S}_{\eta'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \right) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta}(Rq) \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}] \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right) d\vec{q} \\ &= \sum_{\eta,\eta'} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}] a_{\eta',i} \int \left(\vec{S}_{\eta'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F},\nu}^*(\vec{q}) \right) \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\lambda} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right) d\vec{q} \\ &= \sum_{\eta,\eta'} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}] a_{\eta',i} D_{\eta,\eta'} \\ &= \sum_{\eta'} a_{\eta',i} \sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}] \mathbf{D}_{\eta,\eta'} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Il faut donc que $\sum_{\eta} \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}] \mathbf{D}_{\eta,\eta'} = \delta_{\lambda,\eta'}$ avec $\delta_{\lambda,\eta'} = 0$ si $\lambda \neq \eta'$ ou $\delta_{\lambda,\eta'} = 1$ si $\lambda = \eta'$. Dans ce cas $\sum_{\eta'} a_{\eta',i} \delta_{\lambda,\eta'} = a_{\lambda,i}$ comme souhaité.

Je note $\mathcal{M}_{\lambda,\eta} = \mathcal{C}_{\lambda,\eta} \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}]$. Je veux donc que $\sum_{\eta} \mathcal{M}_{\lambda,\eta} \mathbf{D}_{\eta,\eta'} = \delta_{\lambda,\eta'}$, d'où $\mathcal{M}_{\lambda,\eta} = [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1}$. J'ai donc $\mathcal{C}_{\lambda,\eta} = [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}])^{-1}$. CQFD.

A.3.2 Expression de la covariance

Je pars de la définition de la covariance que je vais développer :

$$\begin{aligned}
 C[\widehat{a}_i]_{\lambda,\eta} &= \langle \widehat{a_{\lambda,i}} \widehat{a_{\eta,i}} \rangle - \langle \widehat{a_{\lambda,i}} \rangle \langle \widehat{a_{\eta,i}} \rangle \\
 &= \langle \Omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \Omega_\eta(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \Omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \Omega_\eta(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\
 &= \langle \sum_{\lambda'} \mathcal{C}_{\lambda,\lambda'} \omega_{\lambda'}(\vec{x}_i, R_0) \sum_{\eta'} \mathcal{C}_{\eta,\eta'} \omega_{\eta'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \sum_{\lambda'} \mathcal{C}_{\lambda,\lambda'} \omega_{\lambda'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \sum_{\eta'} \mathcal{C}_{\eta,\eta'} \omega_{\eta'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\
 &= \sum_{\lambda',\eta'} \mathcal{C}_{\lambda,\lambda'} \mathcal{C}_{\eta,\eta'} (\langle \omega_{\lambda'}(\vec{x}_i, R_0) \omega_{\eta'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_{\lambda'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_{\eta'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle) \\
 &= \sum_{\lambda',\eta'} \mathcal{C}_{\lambda,\lambda'} \mathcal{C}_{\eta,\eta'} \Delta \omega_{\lambda',\eta'} \\
 &= \sum_{\lambda',\eta'} [\mathbf{D}]_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}])^{-1} [\mathbf{D}]_{\eta,\eta'}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}])^{-1} \Delta \omega_{\lambda',\eta'}
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

Développons alors le terme de covariance $\Delta \omega_{\lambda',\eta'}$:

$$\begin{aligned}
 \Delta \omega_{\lambda',\eta'} &= \langle \omega_{\lambda'}(\vec{x}_i, R_0) \omega_{\eta'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_{\lambda'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_{\eta'}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\
 &= \left\langle \left(\int \sum_{\nu} m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda',\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right) \left(\int \sum_{\mu} m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\eta',\mu}^*(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right) \right\rangle \\
 &\quad - \left\langle \int \sum_{\nu} m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\lambda',\nu}(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \left\langle \int \sum_{\mu} m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}) \psi_{\mathcal{F},\eta',\mu}^*(Rq) e^{-2\pi i \vec{q} \vec{x}_i} d\vec{q} \right\rangle \\
 &= \sum_{\nu,\mu} \iint \Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\lambda',\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\eta',\mu}^*(Rq') e^{-2\pi i (\vec{q}-\vec{q}') \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \\
 &= \sum_{\nu,\mu} \iint P_{\nu,\mu}(q) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}') \psi_{\mathcal{F},\lambda',\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\eta',\mu}^*(Rq') e^{-2\pi i (\vec{q}-\vec{q}') \vec{x}_i} d\vec{q} d\vec{q}' \\
 &= \sum_{\nu,\mu} \int P_{\nu,\mu}(q) \psi_{\mathcal{F},\lambda',\nu}(Rq) \psi_{\mathcal{F},\eta',\mu}^*(Rq) d\vec{q} \\
 &= \int \vec{\psi}_{\mathcal{F},\lambda'}^t(Rq) \bullet \mathbf{P}(q) \bullet \vec{\psi}_{\mathcal{F},\eta'}^*(Rq) d\vec{q} \\
 &= \int \left[\sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}] \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\lambda'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right) \right]^t \bullet \mathbf{P}(q) \bullet \left[\sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}] \cdot \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\eta'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right) \right]^* d\vec{q} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}] \cdot \sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}] \int \left(\vec{S}_{\lambda'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right)^t \bullet \mathbf{P}^{-1}(q) \bullet \left(\vec{S}_{\eta'} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{F}}(\vec{q}) \right)^* d\vec{q} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}] \cdot \sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}] \mathbf{D}_{\lambda',\eta'} \\
 &= \sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}] \cdot \sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}] \mathbf{D}_{\eta',\lambda'}
 \end{aligned} \tag{A.52}$$

par symétrie des termes dans l'intégrale. Notons que $\Delta m_{\nu,\mu}(\vec{q}, \vec{q}') = \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle - \langle m'_{\mathcal{F},\nu}(\vec{q}) \rangle \langle m'_{\mathcal{F},\mu}(\vec{q}') \rangle = P_{\nu,\mu}(q) \cdot \delta_D(\vec{q} - \vec{q}')$.

Ce qui nous amène à l'expression finale de la covariance des amplitudes :

$$\begin{aligned}
C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} &= \sum_{\lambda',\eta'} [\mathbf{D}]_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}])^{-1} [\mathbf{D}]_{\eta,\eta'}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}])^{-1} \Delta\omega_{\lambda',\eta'} \\
&= \sum_{\lambda',\eta'} [\mathbf{D}]_{\lambda,\lambda'}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}])^{-1} [\mathbf{D}]_{\eta,\eta'}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}])^{-1} \sigma^2[\widehat{a_{\eta',i}}] \cdot \sigma^2[\widehat{a_{\lambda',i}}] \mathbf{D}_{\eta',\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda',\eta'} [\mathbf{D}]_{\lambda,\lambda'}^{-1} [\mathbf{D}]_{\eta,\eta'}^{-1} \mathbf{D}_{\eta',\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda'} [\mathbf{D}]_{\lambda,\lambda'}^{-1} \sum_{\eta'} [\mathbf{D}]_{\eta,\eta'}^{-1} \mathbf{D}_{\eta',\lambda'} \\
&= \sum_{\lambda'} [\mathbf{D}]_{\lambda,\lambda'}^{-1} \delta_{\eta,\lambda'} \\
&= [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.53}$$

CQFD.

A.3.3 Covariance sur les résidus avec plusieurs émissions

Notation : λ et η indiquent le type d'émission, ν et μ indiquent des fréquences. Le résidu est défini comme il suit :

$$\begin{aligned}
R_{\nu,i} &= \widehat{f_{\nu,i}} - \sum_{\lambda} \widehat{a_{\lambda,i}} \cdot S_{\lambda}(\nu) \\
&= \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) - \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_{\lambda}(\nu)
\end{aligned} \tag{A.54}$$

La covariance de ces résidus peut alors s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}
C[\vec{R}_i]_{\nu,\mu} &= \langle R_{\nu,i} R_{\mu,i} \rangle - \langle R_{\nu,i} \rangle \langle R_{\mu,i} \rangle \\
&= \langle (\omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) - \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_{\lambda}(\nu)) (\omega_{\mu}(\vec{x}_i, R_0) - \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_{\lambda}(\mu)) \rangle \\
&\quad - \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) - \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_{\lambda}(\nu) \rangle \langle \omega_{\mu}(\vec{x}_i, R_0) - \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \cdot S_{\lambda}(\mu) \rangle \\
&= \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) \omega_{\mu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_{\mu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\
&\quad + \sum_{\lambda,\eta} S_{\lambda}(\nu) S_{\eta}(\mu) (\langle \Omega_{\lambda}^2(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle^2) \\
&\quad - \sum_{\lambda} S_{\lambda}(\nu) (\langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \omega_{\mu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_{\mu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle) \\
&\quad - \sum_{\lambda} S_{\lambda}(\mu) (\langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_{\nu}(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \Omega_{\lambda}(\vec{x}_i, R_0) \rangle) \\
&= C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} + \sum_{\lambda,\eta} S_{\lambda}(\nu) S_{\eta}(\mu) C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} - \sum_{\lambda} S_{\lambda}(\nu) \Delta\Omega_{\lambda,\mu}(\vec{x}_i) - \sum_{\lambda} S_{\lambda}(\mu) \Delta\Omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i)
\end{aligned} \tag{A.55}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Delta\Omega_{\lambda,\nu}(\vec{x}_i) &= \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \Omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \Omega_\lambda(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\
 &= \sum_{\eta} [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}])^{-1} \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \omega_\eta(\vec{x}_i, R_0) \rangle - \langle \omega_\nu(\vec{x}_i, R_0) \rangle \langle \omega_\eta(\vec{x}_i, R_0) \rangle \\
 &= \sum_{\eta} [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}])^{-1} \Delta\omega_{\eta,\nu}(\vec{x}_i) \\
 &= \sum_{\eta} [\mathbf{D}]_{\lambda,\eta}^{-1} \cdot (\sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}])^{-1} \sigma^2[\widehat{a_{\eta,i}}] \cdot S_\eta(\nu) \\
 &= \sum_{\eta} C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} \cdot S_\eta(\nu);
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

cette dernière ligne étant la conséquence de l'équation A.44 introduite pour estimer la covariance des résidus pour un matched filter mono-composante. D'où

$$\begin{aligned}
 C[\vec{R_i}]_{\nu,\mu} &= C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} + \sum_{\lambda,\eta} S_\lambda(\nu) S_\eta(\mu) C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} \\
 &\quad - \sum_{\lambda,\eta} S_\lambda(\nu) C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} \cdot S_\eta(\mu) - \sum_{\lambda,\eta} S_\lambda(\mu) C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta} \cdot S_\eta(\nu) \\
 &= C[\widehat{f_i}]_{\nu,\mu} - \sum_{\lambda,\eta} S_\lambda(\nu) S_\eta(\mu) C[\widehat{a_i}]_{\lambda,\eta}
 \end{aligned} \tag{A.57}$$

CQFD.

Annexe B

Sur-dispersion dans une fonction de vraisemblance Poisson

B.1 Prise en compte de la sur-dispersion

Je me suis appuyé sur le formalisme présenté dans les sections 5.3.1 et 5.3.2 pour écrire cette annexe. Je cherche à ajouter un paramètre supplémentaire dans la fonction de vraisemblance pour prendre en compte la sur-dispersion. Je ne cherche pas à changer l'estimateur mais plutôt à construire une variance plus réaliste.

B.1.1 Introduction d'un paramètre de sur-dispersion

Soit m_i le nombre de photons X reçus par le pixel i d'une mini-carte ROSAT. Dans la section 5.3.2, je supposais que la probabilité d'avoir un nombre de photons m_i était donné par une loi de Poisson de valeur moyenne $(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i$ ici pour un profil $\tau_{i,k} = \tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)$ centré sur le pixel k (de position $\vec{x}_k$) :

$$f_i(m_i|a_{CR}) = \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^{m_i}}{m_i!} \cdot \exp(-[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]). \quad (B.1)$$

Pour prendre en compte la non-homogénéité du fond diffus, je vais introduire la variation de ce fond δ_i qui va modifier la valeur moyenne qui sera alors $(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i$. Soit $P(\delta_i)$ la probabilité d'avoir δ_i . Je suppose la valeur moyenne de δ_i nulle donc que $\int \delta_i P(\delta_i) = 0$. Je suppose aussi que sa variance reste la même pour tous les pixels de la mini carte, donc que $\int \delta_i^2 P(\delta_i) = \sigma_\delta^2$. En fait, σ_δ^2 sera le paramètre de sur-dispersion. La probabilité d'obtenir m_i sachant a_{CR} est cette fois obtenue en marginalisant la loi de Poisson sur δ_i :

$$\begin{aligned} F_i(m_i|a_{CR}) &= \int f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) d\delta_i \\ &= \int \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i]^{m_i}}{m_i!} \cdot \exp(-[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i]) P(\delta_i) d\delta_i \end{aligned} \quad (B.2)$$

B.1.2 Conservation du précédant estimateur qui apparaît non biaisé

Je ne vais pas construire un estimateur à partir des probabilités $F_i(m_i|a_{CR})$. Je vais en fait garder l'estimateur $\hat{a}_{CR}$ de la section 5.3.2 et voir s'il est biaisé ou non. Cet estimateur dérive des probabilités $f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i = < \delta_i > = 0)$. Je suppose toujours les m_i indépendants. La probabilité d'avoir l'ensemble $[m_0, \dots, m_n]$ est donc le produit des probabilités

d'avoir chaque valeur :

$$f([m_0, \dots, m_N] | a_{CR}, 0) = \prod_i f_i(m_i | a_{CR}, 0). \quad (B.3)$$

Avec N le nombre de pixels dans la mini-carte. La maximisation de cette fonction de vraisemblance conduit à écrire que (au 1er ordre) :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{CR} - a_{CR} &= \frac{\sum_i \frac{\partial \ln[f_i(m_i | a_{CR}, 0)]}{\partial a_{CR}}}{\sum_i \frac{\partial^2 \ln[f_i(m_i | a_{CR}, 0)]}{\partial a_{CR}^2}} \\ &= \frac{-\sum_i S_i(a_{CR}, 0)}{\sum_i S2_i(a_{CR}, 0)} \\ &= \frac{-\sum_i S_i(a_{CR}, 0)}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} \end{aligned} \quad (B.4)$$

avec $S_i(a_{CR}, 0)$ le score et $\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle$ l'information de Fischer qui sont respectivement tels que :

$$S_i(a_{CR}, 0) = \frac{\partial \ln[f_i(m_i | a_{CR}, 0)]}{\partial a_{CR}} = \frac{m_i \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \quad (B.5)$$

et tel que :

$$\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle = \sum_i \frac{\partial^2 \ln[f_i(m_i | a_{CR}, 0)]}{\partial a_{CR}^2} = - \sum_i \frac{m_i \cdot (\tau_{i,k} \cdot t_i)^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} \quad (B.6)$$

Je vais ensuite regarder si cet estimateur est non biaisé, cette fois en tenant compte des probabilités réelles d'avoir les m_i :

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{CR} - a_{CR} \rangle &= \int \dots \int (\hat{a}_{CR} - a_{CR}) F_0(m_0 | a_{CR}) \dots F_N(m_N | a_{CR}) dm_0 \dots dm_N \\ &= \int \dots \int \frac{-\sum_i S_i(a_{CR}, 0)}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} F_0(m_0 | a_{CR}) \dots F_N(m_N | a_{CR}) dm_0 \dots dm_N \\ &= \frac{-1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} \int \dots \int \sum_i S_i(a_{CR}, 0) F_0(m_0 | a_{CR}) \dots F_N(m_N | a_{CR}) dm_0 \dots dm_N \\ &= \frac{-1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} \sum_i \int S_i(a_{CR}, 0) F_i(m_i | a_{CR}) dm_i \\ &= \frac{-1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} \sum_i \int S_i(a_{CR}, 0) \left[\int f_i(m_i | a_{CR}) P(\delta_i) d\delta_i \right] dm_i \\ &= \frac{-1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} \sum_i \int \int S_i(a_{CR}, 0) f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) P(\delta_i) dm_i d\delta_i \\ &= \frac{-1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle} \sum_i A_i. \end{aligned} \quad (B.7)$$

Pour aboutir à cette expression, j'ai dû supposer que $\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle$, qui est une somme pondérée de tous les m_i d'une mini-carte, ne varie pas significativement quand un

seul m_k de la somme change. Je peux alors écrire que :

$$\int \frac{S_k(a_{CR}, 0)}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle} F_k(m_k|a_{CR}) dm_k \simeq \frac{1}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle} \int S_k(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) dm_k; \quad (B.8)$$

ce qui me permet de passer de la ligne deux à la ligne trois dans l'équation B.7. Pour passer de la ligne trois à la ligne quatre, j'ai utilisé la propriété suivante. Comme les m_i sont indépendants, pour deux pixels d'indice k et l , et comme $S_k(a_{CR}, 0)$ ne dépend que de m_k , je peux écrire cette fois que :

$$\begin{aligned} & \int \int S_k(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) F_l(m_l|a_{CR}) dm_k dm_l \\ &= \int S_k(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) \left[\int F_l(m_l|a_{CR}) dm_l \right] dm_k \\ &= \int S_k(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) dm_k \end{aligned} \quad (B.9)$$

Je vais maintenant chercher l'expression de chaque A_i :

$$\begin{aligned} A_i &= \int \int S_i(a_{CR}, 0) f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) P(\delta_i) dm_i d\delta_i \\ &= \int \left[\int S_i(a_{CR}, 0) f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) dm_i \right] P(\delta_i) d\delta_i \\ &= \int \left[\int \left(\frac{m_i \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \right) f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) dm_i \right] P(\delta_i) d\delta_i \\ &= \int \left(\frac{[\int m_i f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) dm_i] \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \right) P(\delta_i) d\delta_i \\ &= \int \left(\frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i] \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \right) P(\delta_i) d\delta_i \\ &= \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + [\int \delta_i P(\delta_i) d\delta_i]) \cdot t_i] \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \\ &= \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + 0) \cdot t_i] \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \\ &= 0. \end{aligned} \quad (B.10)$$

J'ai donc $\langle \hat{a}_{CR} - a_{CR} \rangle = 0$. Malgré la sur-dispersion, $\hat{a}_{CR}$ reste un estimateur non biaisé de a_{CR} .

B.1.3 Construction d'une nouvelle variance

La variance de l'estimateur va, par contre, changer et le paramètre σ_δ^2 va apparaître dans son expression finale. Je pars de la définition de cette variance :

$$\begin{aligned}
 & \sigma^2[\hat{a}_{CR}, \delta] \\
 &= \int \dots \int (\hat{a}_{CR} - a_{CR})^2 F_0(m_0|a_{CR}) \dots F_N(m_N|a_{CR}) dm_0 \dots dm_N \\
 &= \int \dots \int \frac{\left(\sum_i S_i(a_{CR}, 0) \right)^2}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2} F_0(m_0|a_{CR}) \dots F_N(m_N|a_{CR}) dm_0 \dots dm_N \\
 &= \frac{1}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2} \int \dots \int \sum_{i,j} S_i(a_{CR}, 0) S_j(a_{CR}, 0) F_0(m_0|a_{CR}) \dots F_N(m_N|a_{CR}) dm_0 \dots dm_N \\
 &= \frac{1}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \int S_i^2(a_{CR}, 0) F_i(m_i|a_{CR}) dm_i \\
 &= \frac{1}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \int S_i^2(a_{CR}, 0) \left[\int f_i(m_i|a_{CR}) P(\delta_i) d\delta_i \right] dm_i \\
 &= \frac{1}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \int \int S_i^2(a_{CR}, 0) f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) P(\delta_i) dm_i d\delta_i \\
 &= \frac{1}{\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i B_i.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Comme dans la section précédente, je suppose que $\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle$ (et donc $\langle S_{2i}(a_{CR}, 0) \rangle^2$) ne varie pas significativement quand la valeur m_k (pour un seul pixel) change. Ceci me permet de passer de la ligne deux à la ligne trois dans l'équation ci-dessus. Pour passer de la ligne trois à la ligne quatre, je m'appuie sur l'indépendance des m_i les uns par rapports aux autres. Soient deux pixels d'indice k et l . Comme $S_k(a_{CR}, 0)$ ne dépend que de m_k et $S_l(a_{CR}, 0)$ ne dépend que de m_l , je peux écrire cette fois que :

$$\begin{aligned}
 & \int \int S_k(a_{CR}, 0) S_l(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) F_l(m_l|a_{CR}) dm_k dm_l \\
 &= \int S_k(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) \left[\int S_l(a_{CR}, 0) F_l(m_l|a_{CR}) dm_l \right] dm_k \\
 &= \int S_k(a_{CR}, 0) F_k(m_k|a_{CR}) dm_k \cdot \int S_l(a_{CR}, 0) F_l(m_l|a_{CR}) dm_l \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Il me faut ensuite l'expression de B_i . Mais avant j'ai besoin d'écrire d'une façon différente l'expression ci-dessus qui ressemble à la variance de m_i à laquelle j'ai retiré δ_i :

$$\int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2 f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) dm_i. \tag{B.13}$$

Avec une loi de Poisson la variance est égale à la moyenne. Comme la valeur moyenne de m_i est égale à $(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i$, je peux écrire la variance de m_i ainsi :

$$\int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i]^2 f_i(m_i|a_{CR}, \delta_i) dm_i = (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i \tag{B.14}$$

Je vais développer l'expression de la variance de m_i :

$$\begin{aligned}
 & (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i \\
 &= \int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \\
 &= \int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i - \delta_i \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \\
 &= \int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \\
 &\quad - 2 \cdot \int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i] \cdot [\delta_i \cdot t_i] f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \\
 &\quad + \int [\delta_i \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \\
 &= \int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i - 2 \cdot [\delta_i \cdot t_i] \cdot [\delta_i \cdot t_i] + [\delta_i \cdot t_i]^2 \\
 &= \int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i - [\delta_i \cdot t_i]^2,
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

pour aboutir à la relation suivante :

$$\int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i = (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i + (\delta_i \cdot t_i)^2 \tag{B.16}$$

Je peux ainsi obtenir l'expression de B_i :

$$\begin{aligned}
 B_i &= \int \int S_i^2(a_{CR}, 0) f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) P(\delta_i) dm_i d\delta_i \\
 &= \int \left[\int S_i^2(a_{CR}, 0) f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \right] P(\delta_i) d\delta_i \\
 &= \int \left[\int \left(\frac{m_i \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} - \tau_{i,k} \cdot t_i \right)^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \right] P(\delta_i) d\delta_i \\
 &= \int \left[\int \left(\frac{[m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i] \cdot \tau_{i,k} \cdot t_i}{(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i} \right)^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i \right] P(\delta_i) d\delta_i \\
 &= \int \frac{[\int [m_i - (a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2 f_i(m_i | a_{CR}, \delta_i) dm_i] \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} P(\delta_i) d\delta_i \\
 &= \int \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \delta_i) \cdot t_i + (\delta_i \cdot t_i)^2] \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} P(\delta_i) d\delta_i \\
 &= \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + \int \delta_i P(\delta_i) d\delta_i) \cdot t_i + \int (\delta_i)^2 P(\delta_i) d\delta_i \cdot t_i^2] \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} \\
 &= \frac{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR} + 0) \cdot t_i + \sigma_\delta^2 t_i^2] \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} \\
 &= \frac{[\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]} + \sigma_\delta^2 \cdot \frac{t_i^2 \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2}
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

J'obtiens ainsi l'expression suivante de la variance de l'estimateur :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2[\hat{a}_{CR}, \delta] &= \frac{1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \frac{[\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]} + \sigma_\delta^2 \cdot \frac{t_i^2 \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} \\
 &= \frac{1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \frac{[\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]} \\
 &\quad + \sigma_\delta^2 \cdot \frac{1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \frac{t_i^2 \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2} \\
 &= \sigma^2[\hat{a}_{CR}] + \sigma_\delta^2 \cdot \Delta[\hat{a}_{CR}]
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

avec $\sigma^2[\hat{a}_{CR}]$ la variance sans sur-dispersion et $\Delta[\hat{a}_{CR}]$ un coefficient qui dépend de a_{CR} et qui est tel que :

$$\Delta[\hat{a}_{CR}] = \frac{1}{\langle S2_i(a_{CR}, 0) \rangle^2} \sum_i \frac{t_i^2 \cdot [\tau_{i,k} \cdot t_i]^2}{[(a_{CR} \cdot \tau_{i,k} + b_{CR}) \cdot t_i]^2}. \tag{B.19}$$

Pour calculer $\sigma^2[\hat{a}_{CR}]$ et $\Delta[\hat{a}_{CR}]$, je remplace a_{CR} par $\hat{a}_{CR}$ dans leurs expressions.

B.2 Résultats sur simulation

Je cherche à estimer σ_δ^2 et à tester la validité de la nouvelle variance. Je travaille avec le catalogue d'amas simulé présenté dans la section 5.2.5. Je vais me limiter aux amas qui ont un θ_s inférieur à 3 arcmin pour limiter le temps de calcul.

B.2.1 Estimation du paramètre de sur-dispersion sur une mini-carte

Pour chaque amas du catalogue simulé, j'ai une mini-carte *ROSAT* centrée sur la position de l'amas (préalablement injecté) de 350×350 pixels. Je vais appliquer le filtre X sur chaque pixel de la mini-carte en utilisant la méthode de la section 5.3.4. J'utilise le même profil pour chaque pixel, celui de l'amas injecté. J'ai donc, pour chaque pixel k , un estimateur du nombre de photons $\hat{a}_{CR,k}$, la variance $\sigma^2[\hat{a}_{CR,k}]$ et aussi le coefficient $\Delta[\hat{a}_{CR,k}]$. Je suppose que, pour un pixel quelconque, le flux en provenance de structures (donc autre que le bruit de fond) est nul donc que la valeur attendue du nombre de photons est nulle : $a_{CR,k} = 0$. Je suppose le paramètre de sur-dispersion nul dans un premier temps : $\sigma_\delta^2 = 0$. Je peux donc construire, toujours pour chaque pixel k , le rapport suivant :

$$r_k = \frac{\hat{a}_{CR,k} - a_{CR,k}}{\sigma[\hat{a}_{CR,k}, \delta]} = \frac{\hat{a}_{CR,k} - 0}{\sqrt{\sigma^2[\hat{a}_{CR,k}] + \sigma_\delta^2 \cdot \Delta[\hat{a}_{CR,k}]}} \tag{B.20}$$

avec $\sigma[\hat{a}_{CR,k}, \delta]$ l'erreur qui prend en compte la sur-dispersion.

Si le profil est suffisamment étendu et donc le nombre de pixels en jeu suffisamment important, par application du théorème central limite, je peux dire que $\hat{a}_{CR,k}$ suit une loi normale centrée sur $a_{CR,k} = 0$ et de variance $\sigma^2[\hat{a}_{CR,k}]$ (ou $\sigma^2[\hat{a}_{CR,k}, \delta]$ s'il y a sur-dispersion). Donc r_k suit aussi, dans ce cas là, une loi normale de moyenne zéro et de variance 1. On s'attend à ce que 68% des r_k soient tels que $|r_k| < 1$. S'il y a sur-dispersion, ce ne sera pas le cas. Je vais donc fixer σ_δ^2 pour avoir 68% des r_k tels que $|r_k| < 1$. Notons que j'ai une bonne statistique de r_k puisque j'en ai a priori 350×350 .

B.2.2 Suppression de la sur-dispersion

Si c est l'indice du pixel central de la mini-carte, l'estimateur du nombre de photons de l'amas injecté est donné par $\hat{a}_{CR,c}$ et sa variance par $\sigma^2[\hat{a}_{CR,c}, \delta]$ qui dépend de σ_δ^2 . Je vais m'intéresser au rapport r_c pour le pixel central. Je regarde ensuite la distributions des r_c dans deux cas, quand je laisse $\sigma_\delta^2 = 0$ et quand il est estimé (pour chaque amas) sur une mini-carte *ROSAT*. Cela conduit à la figure B.1. Comme je l'avais précédemment remarqué dans la section 5.3.3, il y a une sur-dispersion sur r_c quand $\sigma_\delta^2 = 0$. Par contre, dans l'autre cas, la sur-dispersion disparaît. **La nouvelle variance $\sigma^2[\hat{a}_{CR,c}, \delta]$ prend bien en compte l'effet de la non-homogénéité du fond diffus *ROSAT*.**

Notons, de nouveau, que σ_δ^2 n'est pas estimé après coup sur la distribution des r_c mais est estimé localement sur une mini-carte *ROSAT* pour chaque amas du catalogue simulé. σ_δ^2 diffère donc d'un amas à l'autre.

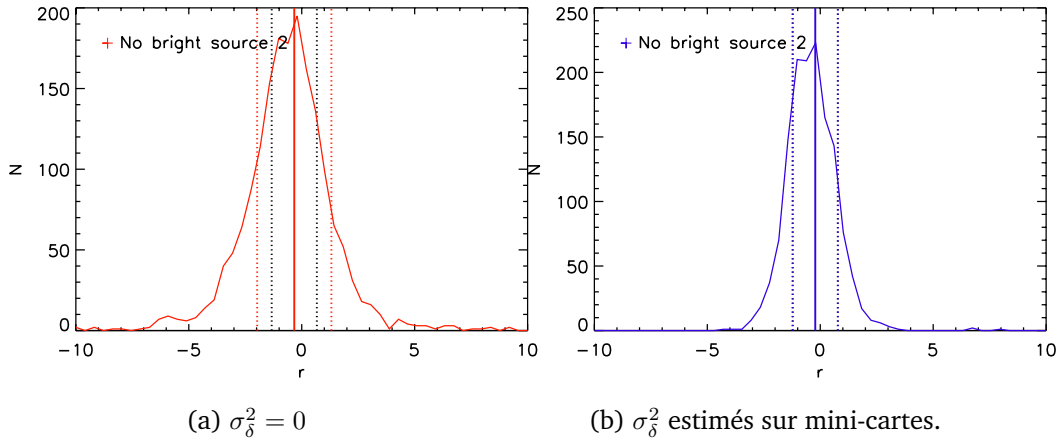


FIGURE B.1 – Histogramme du rapport r_c pour des extractions d'amas du catalogue simulé pour différentes mini-cartes. Pour les deux courbes, il s'agit de la même extraction dans le cas d'amas injectés sur cartes *ROSAT* (simulation). Les lignes pointillées verticales noires indiquent un écart-type de 1 qui est attendu si le modèle d'émission des mini-cartes est valide. Les lignes pointillées colorées indiquent l'intervalle centré sur la médiane contenant 68% des valeurs de r_c pour le cas considéré, tandis que la ligne verticale colorée indique la valeur médiane de r_c .

Table des figures

1.1	Les galaxies les plus lointaines semblent s'éloigner le plus vite de nous. La ligne continue donne le meilleur ajustement tandis que la ligne pointillée est corrigée du mouvement du Soleil. Cette figure est tirée de l'article original de Hubble (HUBBLE, 1929).	5
1.2	Une représentation classique de la déformation de l'espace-temps induite par les masses. Ici, c'est la Terre qui déforme l'espace-temps représenté par une grille bleue ; le satellite au lieu de suivre une trajectoire rectiligne suit une trajectoire courbée. Crédit : NASA	12
1.3	Une illustration de l'expansion de l'Univers. La distance entre deux galaxies augmente au cours du temps. Cette augmentation dépend de la distance entre ces galaxies.	14
1.4	Le terme "Relative size of the universe" correspond au facteur d'expansion a qui est fixé à 1 pour l'Univers présent. Le terme de radiation est ici négligeable. Le facteur d'expansion augmente au cours du temps dans de nombreux cas. Par exemple si l'Univers est dominé par la matière donc tel que $\Omega_m = \Omega_T = 1$, le facteur d'expansion suit la relation $a \propto t^{2/3}$. Par contre si le terme de matière dépasse 1, l'Univers devient clos et a finit par diminuer. Ce cas sera notamment exploré avec l'effondrement sphérique. Crédit : www.phys.org/news/2015-04-mysterious-dark-energy-universe-expansion.html	20
1.5	Distances (de haut en bas : co-mobile, angulaire, de luminosité) pour un univers plat (courbes bleues) tel que $\Omega_\Lambda = 0.7$ et pour un univers ouvert (courbes rouges) tel que $\Omega_\Lambda = 0$. Les deux univers partagent les paramètres cosmologiques suivants : $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_R = 0$ et $H_0 = 70\text{km/s/Mpc}$. Crédit : www.icosmos.co.uk	23
1.6	Les différents étapes de formation de la matière. Après la formation des premiers leptons survient la brisure électro-faible quand les bosons Z et W acquièrent une masse. Ensuite les quarks et les gluons apparaissent et forment les premiers baryons qui vont à leur tour former différents noyaux durant la nucléosynthèse primordiale. Les électrons vont ensuite se (re)combinaison avec ces noyaux et se découpler des photons. Cette image est tirée de BUCHMULLER, 2012.	26
1.7	On suppose qu'aux premiers instants de l'Univers, le facteur d'expansion s'accroît de manière exponentielle avec le temps jusqu'à la baryogenèse. C'est l'inflation. Ensuite, l'Univers est dominé par le rayonnement jusqu'à la recombinaison. Puis le terme matière devient dominant jusqu'à redshift $z = 0.8$. Crédit : BERNARDEAU, 2005.	27
1.8	Evolution du facteur d'ionisation avec le redshift. Autour de $z = 1000$, le facteur s'effondre : c'est la recombinaison. Crédit : FERREIRA, 2013.	30

1.9	Le fond diffus cosmologique est un corps noir à $T_{FDC} = 2.73K$ comme le confirme les différentes expériences dont <i>COBE</i> avec l'appareil FIRAS (FIXSEN et al., 1996). Crédit : NASA	31
1.10	Les anisotropies du fond diffus cosmologique vues par le satellite <i>Planck</i> . Crédit : Planck Collaboration / ESA	33
1.11	Le spectre de puissance des anisotropies de température du FDC. Crédit : Planck Collaboration / ESA	34
1.12	Contraintes apportées par des sondes différentes sur les paramètres Ω_m et Ω_Λ . L'Univers paraît plat. Crédit : KOWALSKI et al., 2008	36
2.1	Evolution du taux de formation des structures en fonction du redshift pour différents modèles de cosmologie. Crédit : LAHAV et al., 2004.	43
2.2	Evolution de la composante baryonique dans les zones les plus denses de l'Univers. Une partie de mon travail va consister à détecter le gaz chaud pour z entre 2 et 6.	46
2.3	En bleu continu : l'évolution du rayon de la sur-densité avec θ dans le cas de l'effondrement sphérique. En bleu pointillé : évolution de R en l'absence de sur-densité ; $R \propto a$. En violet : évolution de R quand le contraste est petit. Crédit : Wayne Hu.	48
2.4	Un amas de masse $1.2 \cdot 10^{15} M_\odot$ à $z = 0$ obtenue avec une simulation numérique. Sa structure n'est pas sphérique et de nombreux filaments sont visibles. Crédit : KRAVTSOV et al., 2012	49
2.5	Evolution de la fonction de masse $\psi(\nu)$ avec le paramètre $\nu = \delta_c(z)/\sigma(M, z)$. Crédit : KRAVTSOV et al., 2012.	53
2.6	Le noyau galactique actif est constitué d'un trou noir central qui accrete de la matière organisée sous forme d'un disque lui même entouré d'un tore de poussière. Une partie de cette matière peut être éjectée sous forme d'éjecta ("jet"). Crédit : URRY et al., 1995	57
2.7	Evolution du flux en provenance d'un noyau galactique actif en fonction de la fréquence. Plusieurs émissions sont représentées. En jaune : les émissions synchrotron des lobes dans le domaine radio. En rouge : les émissions de poussières en provenance du disque externe du quasar et/ou de la galaxie hôte du quasar. En bleu, violet et cyan : les émissions en provenance des particules dans le disque d'accrétion. En vert : émission réfléchi sur le disque externe. Crédit : Chris Harrison, ELVIS et al., 1994 et RICHARDS et al., 2006.	58
3.1	A gauche : en bleu, l'intensité des photons du FDC, le corps noir à 2,73 K ; en rouge, le flux modifié par effet tSZ (pour un amas très massif). A droite : la différence entre les deux intensités qui donne le spectre du signal tSZ.	64
3.2	Emission tSZ en provenance de l'amas de galaxies Abell 2319 sur des mini-cartes <i>Planck</i> de 2 degrés de côté. Le signal est négatif pour les fréquences inférieures à 217 GHz et positif au delà. Les cartes <i>Planck</i> sont parfaitement adaptées à la détection de l'effet tSZ. Crédit : ESA	66
3.3	En haut : les différents points de Lagrange du système Terre/Soleil. Le satellite <i>Planck</i> se trouve au niveau de L2. En bas : la trajectoire de <i>Planck</i> vers le point L2 puis son orbite type Lissajous. (Crédit ESA)	67
3.4	Le satellite <i>Planck</i> observe le ciel avec une vitesse d'un tour/minute tout en se déplaçant d'un degré par jour. (Crédit ESA)	68

3.5	En haut : le télescope de <i>Planck</i> , la lumière (main beam) arrive sur le miroir primaire puis sur le miroir secondaire pour rentrer dans un cornet sur le plan focal. La lumière venant d'autres directions (PR Spillover, SR Spillover) peut être collectée par le satellite mais se retrouve bloquée par les cornets et ne peut atteindre les détecteurs. En bas : le plan focal avec les cornets HFI et LFI. (Crédit Tauber et al 2010)	69
3.6	Transmission spectrale pour les différents détecteurs HFI en fonction de la fréquence. La réponse est étalée sur une bande en fréquence de l'onde de $\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{1}{3}$. (Crédit ESA)	70
3.7	Division de la sphère (le ciel) en parties de plus en plus petites avec la méthode HEALPix. (Crédit http://healpix.sourceforge.net)	70
3.8	Intensité des différentes composantes en ΔT dans les cartes <i>Planck</i> en fonction de la fréquence. Le FDC (CMB) est le composant dominant pour une fenêtre allant de 40 GHz à 100 GHz (Crédit NASA).	73
3.9	Les cartes du ciel <i>Planck</i> aux différentes fréquences en $\frac{\Delta T}{T_{CMB}}$. L'émission de poussière galactique, visible sur toutes les cartes au niveau du plan galactique, domine à haute-fréquence. (Crédit ESA)	73
3.10	Réponse des 5 filtres de la caméra CDD <i>SDSS</i> . Les 5 bandes optiques permettent une première sélection des objets et l'estimation d'un redshift photométrique. (Crédit <i>SDSS</i>)	74
3.11	La zone grisée correspond à la zone couverte par l'imagerie de DR12. (Crédit <i>SDSS</i>)	75
3.12	Le spectrographe <i>BOSS</i> . La plaque est placée au niveau du plan focal du télescope. La lumière arrive ensuite au niveau des deux caméras (bleue et rouge) après avoir voyagé dans les fibres. (Crédit <i>SDSS</i>)	76
3.13	Distribution des quasars DR12 selon le redshift. Notons que les lignes pointillées délimitent des intervalles de redshift de même largeur, $\Delta z = 0.5$, à l'exception du dernier plus large. Ces intervalles seront utilisés pour déterminer l'évolution du flux et des propriétés des structures en fonction du redshift.	78
3.14	<i>En haut</i> : Le paramètre de Compton intégré sur une sphère de rayon $5R_{500}$ et le paramètre de Compton intégré sur un cylindre avec un disque de même rayon sont identiques car ils englobent tous deux la totalité de l'amas. <i>En bas</i> : Ces paramètres sont différents quand on intègre seulement jusqu'à R_{500} puisqu'ils sont calculés sur des portions différentes de l'amas.	81
3.15	Présentation du fonctionnement du matched filter mono-fréquence. Le flux F_ν en provenance de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur la mini-carte <i>Planck</i> $m_\nu(\vec{x})$ à la fréquence ν est estimé par un matched filter en supposant un profil spatial $\tau\vec{x}$. Les flux obtenus étant trop faibles, je travaille avec le flux moyen.	84
3.16	De haut en bas et de gauche à droite : les mini-cartes de 2° de côté filtrées centrées sur la positions des quasars de <i>BOSS</i> à 70, 100, 143, 217, 353, 545 et 857 GHz. Il s'agit de carte d'intensité en $\frac{\Delta T}{T_{CMB}}$ avec en rouge l'intensité la plus forte et en bleu l'intensité la plus faible.	87
3.17	<i>En haut</i> : le spectre d'émission moyen à la position des quasars de <i>BOSS</i> . Il s'agit manifestement d'une émission type corps gris et non d'une émission tSZ. <i>En bas</i> : flux moyen au niveau de 296 109 positions aléatoires dans le ciel (dans le masque à 65% pour éviter la contamination de poussière galactique). Ce flux est compatible avec zéro, ce qui veut dire que le signal que l'on obtient à la position des quasars ne provient pas d'une contamination en avant-plan comme les poussières galactiques.	89

3.18 Spectres d'émission moyens à la positions des quasars de <i>BOSS</i> pour des intervalles en redshift $\Delta z = 0.5$. Le signal est dominé par une émission type poussière pour tous les intervalles.	90
3.19 Spectres d'émission moyens à la position des quasars de <i>BOSS</i> avec une contrepartie radio dans <i>FIRST</i> . En plus de l'émission poussière dominante, on trouve un signal synchrotron à basse fréquence.	91
3.20 Spectres d'émission moyens à la position des quasars de <i>BOSS</i> sans contrepartie radio dans <i>FIRST</i> pour des intervalles en redshift $\Delta z = 0.5$. La poussière domine.	92
4.1 Présentation du fonctionnement du matched filter multi-fréquences pour une émission tSZ. Le paramètre de Compton $\hat{Y}_{500}$ en provenance de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur les mini-cartes <i>Planck</i> $\vec{m}(\vec{x})$ est estimé par un matched filter multi-fréquences en supposant un profil spatial $\tau_\nu(\vec{x})$ et aussi un spectre d'émission, ici de type tSZ. Les paramètres obtenus étant trop faibles, je travaille avec le paramètre moyen.	96
4.2 <i>En haut</i> : le spectre d'émission moyen à la position des quasars de <i>BOSS</i> (losanges noirs), le spectre de l'émission du tSZ (triangles rouges). <i>En bas</i> : les résidus, très significatifs. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	100
4.3 Evolution du $\chi^2/7$ des résidus moyens en fonction du redshift pour un filtrage avec l'émission tSZ. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	101
4.4 Evolution de l'amplitude du signal tSZ (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque (triangles rouges) avec le redshift . Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	101
4.5 Evolution de l'amplitude du signal tSZ (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque (triangles rouges) avec le redshift . Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i> . Fréquences <i>Planck</i> utilisées : 100 GHz et 143 GHz.	102
4.6 Présentation du fonctionnement du matched filter multi-fréquences avec l'approche "marginale" pour une émission de poussière. La masse de poussière $\widehat{M}_{dust}$ de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur les mini-cartes <i>Planck</i> $\vec{m}(\vec{x})$ est estimée par un matched filter multi-fréquences en supposant un profil spatial $\tau_\nu(\vec{x})$ et aussi un spectre d'émission, ici de type poussière pour un certain couple (T_d, β_d) . Les masses obtenues étant trop faibles, je travaille avec la masse moyenne. Ensuite, cette valeur est marginalisée sur tout le plan (T_d, β_d)	105
4.7 En rouge : la distribution cumulée des χ^2 au point d'injection, "Fixed". En bleu : la distribution cumulée des χ^2 minimaux sur le plan (T_d, β_d) , "Free". En pointillées : différentes distributions cumulées associées à des lois de Student à différents degrés de liberté. Figure construite avec un filtrage matched filter multi-fréquences avec un spectre de poussière pour un catalogue simulé de sources de poussière.	107
4.8 Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) . La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Les lignes-tirets horizontales et verticales indiquent les valeurs d'injection. Il s'agit d'un filtrage matched filter multi-fréquences avec un spectre de poussière pour un catalogue simulé de sources de poussière.	108
4.9 Comparaison des résidus pour des paramètres de poussières fixés ou laissés libres.	109

4.10	Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) . La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Il s'agit d'un filtrage matched filter multi-fréquences avec un spectre de poussière.	110
4.11	Evolution des différents paramètres de poussière en fonction du redshift. Deux populations aux propriétés différentes semblent émerger l'une à bas redshift ($z < 2$) et l'autre à haut redshift ($z > 2$)	111
4.12	Comparaison entre le flux/la masse de poussière des quasars et le taux de formation d'étoiles dans les galaxies.	113
4.13	Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec la luminosité en bande I.	114
4.14	Evolution du $\chi^2/5$ minimal sur le plan (T_d, β_d) en fonction du redshift pour un filtrage avec seulement l'émission de poussière. Cette approche fonctionne bien pour la majorité des sous-échantillons.	114
4.15	Présentation du fonctionnement du matched filter multi-fréquences multi-composantes avec l'approche "marginale" pour une émission de poussière et une émission tSZ. La masse de poussière $\widehat{M}_{dust}$ et le paramètre de Compton intrinsèque $\widehat{Y}_{500}$ de la structure à la position $\vec{x}_0$ sur les mini-cartes <i>Planck</i> $\vec{m}(\vec{x})$ sont estimés par un matched filter multi-fréquences multi-composantes en supposant un profil spatial $\tau_\nu(\vec{x})$ et aussi des spectres d'émission, ici un spectre type poussière pour un certain couple (T_d, β_d) et un autre spectre tSZ. Les masses et les paramètres de Compton obtenus étant trop faibles, je travaille avec la masse moyenne et le paramètre de Compton moyen. Ensuite, ces valeurs sont marginalisées sur tout le plan (T_d, β_d)	115
4.16	En rouge : la distribution cumulée des χ^2 au point d'injection. En bleu : la distribution cumulée des χ^2 minimaux sur le plan (T_d, β_d) . En pointillées : différentes distributions cumulées associée à des lois de Student à différents degrés de liberté. Il s'agit d'un filtrage matched filter multi-fréquences multi-composantes avec un spectre de poussière et un spectre tSZ pour un catalogue simulé de sources à la fois de poussière et de tSZ.	118
4.17	Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour différents filtrages. La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Les lignes-tirets horizontales et verticales indiquent les valeurs d'injection. Il s'agit de filtrages type matched filter multi-fréquences mono et multi-composantes pour un catalogue simulé de sources de poussière et de tSZ.	120
4.18	Evolution des différents paramètres de poussière en fonction du redshift pour différents filtres. Le choix des filtres a peu d'impact sur l'évolution de ces paramètres.	121
4.19	<i>En haut</i> : Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857 GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleus) avec le redshift. <i>En bas</i> : Evolution du flux marginalisé de l'émission synchrotron à 100 GHz (losanges noirs) et de luminosité synchrotron marginalisée (triangles violets) avec le redshift. Population de quasars : quasars avec une contrepartie <i>FIRST</i>	122
4.20	Evolution du flux marginalisé de l'émission synchrotron à 100 GHz (losanges noirs) et du flux <i>FIRST</i> moyen (triangles violets) avec le redshift. Population de quasars : quasars avec une contrepartie <i>FIRST</i>	122
4.21	Evolution de l'exposant de la loi de puissance pour l'émission synchrotron. Population de quasars : quasars avec une contrepartie <i>FIRST</i>	123

4.22 Evolution du $\chi^2/5$ des résidus moyens minimum sur le plan (T_d, β_d) . pour différents filtrages. Le filtrage poussière+tSZ semble avoir les faveurs des quasars à haut-redshift. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	123
4.23 Contours du χ^2 sur le plan (T_d, β_d) pour différents filtrages. La ligne noire continue indique la déviation à 1σ tandis que la ligne pointillé indique celle à 2σ . Il s'agit de filtrages type matched filter multi-fréquences mono et multi-composantes pour les quasars sans contrepartie <i>FIRST</i> qui sont dans l'intervalle en redshift $2.5 < z < 4$	124
4.24 <i>En haut</i> : Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857 GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec le redshift. <i>En bas</i> : Evolution de l'amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) avec le redshift. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	125
4.25 <i>En haut</i> : Evolution du flux marginalisé de l'émission de poussière à 857 GHz (losanges noirs) et de la masse de poussière marginalisée (triangles bleues) avec la magnitude absolue en bande i. <i>En bas</i> : Evolution de l'amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) avec la magnitude absolue en bande i. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	126
4.26 Evolution des différents paramètres de poussière et du χ^2 en fonction de la magnitude absolue en bande i pour un filtre poussière+tSZ. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	127
4.27 Carte de 2° de côté du nombre de photons par seconde moyen dans <i>RO-SAT</i> en bande "hard" à la position des quasars tels que $2.5 < z < 4$ sans contrepartie <i>FIRST</i>	129
4.28 Spectres moyens des quasars dans trois intervalles de redshift avec pour chaque figure : <i>En haut</i> : le spectre d'émission moyen à la position des quasars de <i>BOSS</i> (losanges noirs), le spectre de l'émission de poussières (triangles rouges). <i>En bas</i> : les résidus. Population de quasars : tous (<i>FIRST</i> et non <i>FIRST</i>).	135
4.29 <i>En haut</i> : Flux marginalisé à 857 GHz (losanges noirs) et la masse marginalisée (triangles bleues) pour la poussière en fonction de z . <i>En bas</i> : Amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) en fonction de z . Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i> . Fréquence retirée pour l'extraction : 353 GHz.	136
4.30 Impact des incertitudes d'étalonnage de <i>Planck</i> (voir texte) avec pour chaque figure : <i>En haut</i> : Flux marginalisé à 857 GHz (losanges noirs) et la masse marginalisée (triangles bleues) pour la poussière en fonction de z . <i>En bas</i> : Amplitude du signal tSZ marginalisée (losanges noirs) et du paramètre de Compton intrinsèque marginalisé (triangles rouges) en fonction de z . Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	137
4.31 Evolution des différents paramètres de poussière et du χ^2 en fonction du redshift pour un filtre poussière+tSZ. Population de quasars : quasars sans contrepartie <i>FIRST</i>	139
4.32 <i>En haut</i> : la différence entre spectre d'émission moyen à la position des quasars de <i>BOSS</i> sans sources ponctuelles proches et avec sources ponctuelles proches. <i>En bas</i> : même différence mais pour la sous-population de quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie radio.	140

5.1	Spectre des amas dans la gamme des rayons X pour différentes températures : 10^5K , 10^6K , 10^7K et , 10^8K . Les différents mécanismes sont présentés : en bleu, le rayonnement de freinage thermique, en vert la recombinaison, et en rouge la transition à deux photons. Le spectre final, en noir, est obtenu par l'addition des spectres associés aux 3 mécanismes plus les raies d'émission du plasma. Pour des températures $T \geq 10^7\text{K}$, le rayonnement de freinage domine. Crédit : BÖHRINGER et al., 2009	143
5.2	A proximité d'un ion (disque vert), un électron (disque bleu) va ralentir et changer de trajectoire (ligne continue noire). De ce fait, il va émettre des photons, c'est le rayonnement de freinage.	145
5.3	Carte du ciel de la densité de colonne de l'hydrogène neutre galactique susceptible d'absorber une partie des rayons X. Crédit : SNOWDEN et al., 1995	149
5.4	Vue d'artiste du satellite <i>ROSAT</i> observant une certaine région du ciel. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik	152
5.5	Emission X en provenance de l'amas de galaxies Abell 2256 dans le ciel <i>ROSAT</i> . Le bruit de fond est dû à un "tapis" de sources AGN non résolues. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik	153
5.6	En haut : la disposition en incidente rasante (dite "Wolter") des miroirs qui permet de focaliser les rayons X. En bas : le télescope embarqué par <i>ROSAT</i> avec les miroirs en disposition rasante. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik	154
5.7	La disposition de la grille de fils plongée dans du gaz pour le détecteur PSCP. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik	155
5.8	Carte RASS à 1.5 keV du taux de photons par angle solide. Crédit : Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik	155
5.9	Vue de coupe du lobe <i>ROSAT</i> pour la gamme d'énergie [0.5keV, 2keV].	156
5.10	Suppression d'une source ponctuelle. Le signal est supprimé dans un disque centré sur le maximum d'émission et remplacé par un bruit de fond dont la valeur moyenne a été estimé dans l'anneau vert.	157
5.11	A gauche : une partie du ciel <i>ROSAT</i> HEALPix avec les sources brillantes. Au centre : après avoir retiré les sources ponctuelles tel que $(\theta_{min}, \theta_{max}) = (3\sigma_{psf}, 5\sigma_{psf})$ [suppression élargie]. A droite : après avoir retiré les sources ponctuelles tel que $(\theta_{min}, \theta_{max}) = (2\sigma_{psf}, 4\sigma_{psf})$ [suppression réduite].	157
5.12	Positions des amas MCXC sur le ciel. Crédit : PIFFARETTI et al., 2011	159
5.13	Le taux de photons a_{CR} en fonction de l'angle θ_s pour le catalogue PXCC.	161
5.14	Présentation du fonctionnement du filtre maximisation de la fonction de vraisemblance. Je suppose que j'ai un amas à la position $\vec{x}_k$. Le taux de photons $a_{CR}(\vec{x}_k)$ de l'amas sur la mini-carte <i>ROSAT</i> (ou simulée) m_i est estimé par le taux qui maximise une fonction de vraisemblance. Cette fonction est construite à partir de distribution de Poisson en supposant un profil spatial pour l'amas $\tau_{i,\theta_s}(\vec{x}_k)$ centré sur $\vec{x}_k$. La valeur moyenne du taux de photons du fond diffus, b_{CR} , et la carte de temps d'exposition t_i sont aussi nécessaires pour extraire le taux de photons de l'amas.	172
5.15	A gauche : une mini-carte <i>ROSAT</i> centrée sur un amas injecté. Au centre : la carte filtrée qui donne le taux de photons des amas. A droite : la carte de la variance sur ce taux.	173

5.16	Histogramme du rapport r pour des extractions d'amas du catalogue simulé pour différentes mini-cartes. La notation des différents cas est présentée dans le tableau 5.3. Les lignes pointillées verticales noires indiquent un écart-type de 1 qui est attendu si le modèle d'émission des mini-cartes est valide. Les lignes pointillées colorées indiquent l'intervalle centré sur la médiane contenant 68% des valeurs de r pour le cas considéré, tandis que la ligne verticale colorée indique la valeur médiane de r	175
5.17	Histogramme du rapport r pour des extractions d'amas du catalogue PXCC et du "nulltest" pour différentes mini-cartes. La notation des différents cas est présentée dans le tableau 5.3. Les lignes pointillées verticales noires indiquent un écart-type de 1 qui est attendu si le modèle d'émission des mini-cartes est valide. Les lignes pointillées colorées indiquent l'intervalle centré sur la médiane contenant 68% des valeurs de r pour le cas considéré, tandis que la ligne verticale colorée indique la valeur médiane de r	176
5.18	Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes avec un fond diffus simulé centrées sur un amas injecté.	177
5.19	Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes ROSAT centrées sur un amas injecté.	178
5.20	Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes ROSAT centrées sur un amas PXCC.	179
5.21	Evolution du rapport r en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil. Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes ROSAT centrées sur des positions aléatoires sur le ciel (nulltest). Je suppose que $a_{CR} = 0$ (pas d'amas).	180
5.22	Evolution du rapport r en fonction du taux de photons a_{CR} des amas (panneaux de gauche) ou en fonction de la taille de l'amas θ_s , le paramètre du profil (panneaux de droite). Les losanges et les barres rouges indiquent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de r sur un intervalle de a_{CR} ou de θ_s . L'erreur sur r est normalement de 1. La notation des différents cas est tirée du tableau 5.3. Extraction sur des mini-cartes avec un fond diffus simulé centrées sur un amas injecté.	180

B.1	Histogramme du rapport r_c pour des extractions d'amas du catalogue simulé pour différentes mini-cartes. Pour les deux courbes, il s'agit de la même extraction dans le cas d'amas injectés sur cartes <i>ROSAT</i> (simulation). Les lignes pointillées verticales noires indiquent un écart-type de 1 qui est attendu si le modèle d'émission des mini-cartes est valide. Les lignes pointillées colorées indiquent l'intervalle centré sur la médiane contenant 68% des valeurs de r_c pour le cas considéré, tandis que la ligne verticale colorée indique la valeur médiane de r_c .	203
-----	---	-----

Liste des tableaux

1.1	Les 6 paramètres cosmologiques du modèle Λ CDM pour la cosmologie <i>Planck</i> 2015 (PLANCK COLLABORATION et al., 2015h) avec des erreurs à 1σ . Ces valeurs sont présentées dans la table 4 de l'article (mode TT+TE+EE+lowP).	37
3.1	La largeur à mi-hauteur du lobe de <i>Planck</i> aux différentes fréquences étudiées.	70
3.2	Les propriétés essentielles du spectrographe BOSS et de son prédécesseur.	76
3.3	Nombre de quasars pour les différents sous-échantillons. Les quasars radio ont une contrepartie dans <i>FIRST</i> , les non-radio n'en ont pas et les incertains ne sont pas dans la zone couverte par <i>FIRST</i> .	79
4.1	Equivalence entre les fréquences nominales et les fréquence effective causées par l'étalement de la réponse des détecteurs.	95
4.2	Comparaison des caractéristiques de sources d'émission tSZ entre les valeurs injectées et les valeurs extraites.	100
4.3	Equivalence entre les fréquences nominales et les fréquence effective causées par l'étalement de la réponse des détecteurs.	104
4.4	Comparaison des caractéristiques des sources d'émission de poussière entre les valeurs injectées et les valeurs extraites par un filtrage puis marginalisées sur le plan (T_d, β_d) . Le χ^2 présenté ici est la valeur minimale sur ce plan (T_d, β_d) .	108
4.5	Extraction de la masse de poussière au niveau de positions aléatoires dans les cartes <i>Planck</i> . Cette masse est bien compatible avec zéro.	109
4.6	Equivalence entre les fréquences nominales et les fréquence effective causées par l'étalement de la réponse des détecteurs.	115
4.7	Comparaison des caractéristiques de sources d'émission de poussière et tSZ entre les valeurs injectées et les valeurs extraites par un filtrage puis marginalisées sur le plan (T_d, β_d) . Le χ^2 présenté ici est la valeur minimale sur ce plan (T_d, β_d) .	119
4.8	Extraction de la masse de poussière, du paramètre de Compton et de la luminosité synchrotron au niveau de positions aléatoires dans les cartes <i>Planck</i> . Ces quantités sont bien compatibles avec zéro.	121
4.9	Caractéristiques en X sur la bande 0.1-2.4 keV des structures à la position des quasars avec $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans <i>FIRST</i> .	131
4.10	Caractéristiques des températures en X sur la bande 0.1-2.4 keV des structures à la position des quasars avec $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans <i>FIRST</i> .	131
4.11	Masse et paramètres de Compton intrinsèque pour les amas les plus massifs tracés par les quasars avec $2.5 < z < 4$ sans contrepartie dans <i>FIRST</i> . Le biais $M_{500,bias}/M_{500,true} = 1 - b$ est fixé à 0.6.	132

4.12	Caractéristiques moyennes et marginalisées sur (T_d, β_d) de structures à la position des quasars avec $2.5 < z < 4$ et sans contrepartie dans <i>FIRST</i> pour trois profils avec des rayons caractéristiques θ_s différents. J'utilise le filtre poussière+tSZ pour les trois profils.	134
4.13	Caractéristiques moyennes et marginalisées sur (T_d, β_d) de structures à la position des échantillons de quasars dans les cartes <i>Planck</i> . Les paramètres T_d et β_d sont laissés libres sauf mention contraire. La colonne <i>FIRST</i> indique si les quasars ont une contrepartie radio dans le catalogue <i>FIRST</i> ou non. Les χ^2 présentés ici sont les valeurs minimales sur le plan (T_d, β_d) . Les lignes grisées indiquent les filtres qui donnent le plus petit χ^2 pour une population de quasar donnée. La ligne "Filter" indique les spectres d'émission utilisés pour construire le filtre (qui peut être un matched filter multi-fréquences mono ou multi-composantes).	138
5.1	Facteur de conversion pour passer d'un taux de photons au flux X en fonction de la densité de colonne N_H en supposant le modèle d'émission <i>MEKAL</i> pour un plasma de température $T_e = 7$ keV à redshift $z = 0.3$	150
5.2	K-correction en fonction du redshift pour convertir un flux en luminosité en supposant le modèle d'émission <i>MEKAL</i> pour un plasma de température $T_e = 7$ keV.	151
5.3	Résultats de l'extraction sur différentes mini-cartes du taux de photons des amas avec une maximisation de la fonction de vraisemblance. Les différentes entrées de ce tableau sont présentées dans la section 5.3.3. L'extraction (S1') est identique à (S1) sauf pour l'estimation du taux de photons du fond diffus b_{CR} . Dans le premier cas, b_{CR} est estimé sur la carte simulée avant injection de l'amas et est donc non biaisé, dans le second cas b_{CR} est estimé sur la carte simulée après injection de l'amas et peut-être biaisé si l'amas est particulièrement brillant. Dans tous les autres cas b_{CR} est estimé sur des cartes en présence d'amas.	171

Bibliographie

- ABAZAJIAN, K. N. et al. (2009). « The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey ». In : *ApJ Supplement* 182, 543–558, p. 543–558. DOI : [10.1088/0067-0049/182/2/543](#). arXiv : [0812.0649](#) (cf. p. 75).
- ALAM, S. et al. (2015). « The Eleventh and Twelfth Data Releases of the Sloan Digital Sky Survey : Final Data from SDSS-III ». In : *ApJ Supplement* 219, 12, p. 12. DOI : [10.1088/0067-0049/219/1/12](#). arXiv : [1501.00963 \[astro-ph.IM\]](#) (cf. p. 73, 75).
- ALPHER, R. A. et R. C. HERMAN (1948). « On the Relative Abundance of the Elements ». In : *Physical Review* 74, p. 1737–1742. DOI : [10.1103/PhysRev.74.1737](#) (cf. p. 6).
- ANTONUCCI, R. (1993). « Unified models for active galactic nuclei and quasars ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 31, p. 473–521. DOI : [10.1146/annurev.aa.31.090193.002353](#) (cf. p. 56).
- ARNAUD, M., E. POINTECOUTEAU et G. W. PRATT (2005). « The structural and scaling properties of nearby galaxy clusters. II. The M-T relation ». In : *A&A* 441, p. 893–903. DOI : [10.1051/0004-6361:20052856](#). eprint : [astro-ph/0502210](#) (cf. p. 160).
- ARNAUD, M., G. W. PRATT, R. PIFFARETTI, H. BÖHRINGER, J. H. CROSTON et E. POINTECOUTEAU (2010). « The universal galaxy cluster pressure profile from a representative sample of nearby systems (REXCESS) and the Y_{SZ} - M_{500} relation ». In : *A&A* 517, A92, A92. DOI : [10.1051/0004-6361/200913416](#). arXiv : [0910.1234 \[astro-ph.CO\]](#) (cf. p. 79, 81, 99).
- ASCHENBACH, B., H. BRAEUNINGER, U. BRIEL, W. BRINKMANN, H. FINK, N. HEINECKE, H. HIPPMANN, G. KETTENRING, G. METZNER et A. ONDRUSCH (1981). « The ROSAT mission ». In : *Space Science Reviews* 30, p. 569–573 (cf. p. 151).
- BARDEEN, J. M., J. R. BOND, N. KAISER et A. S. SZALAY (1986). « The statistics of peaks of Gaussian random fields ». In : *ApJ* 304, p. 15–61. DOI : [10.1086/164143](#) (cf. p. 43).
- BARRETT, Harrison H (2005). *Theory of random processes*. University Lecture (cf. p. 83).
- BARTELMANN, M., L. J. KING et P. SCHNEIDER (2001). « Weak-lensing halo numbers and dark-matter profiles ». In : *A&A* 378, p. 361–369. DOI : [10.1051/0004-6361:20011199](#). eprint : [astro-ph/0103465](#) (cf. p. 56).
- BECKER, R. H., R. L. WHITE et D. J. HELFAND (1994). « The VLA's FIRST Survey ». In : *Astronomical Data Analysis Software and Systems III*. Sous la dir. de D. R. CRABTREE, R. J. HANISCH et J. BARNES. T. 61. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 165 (cf. p. 77).
- (1995). « The FIRST Survey : Faint Images of the Radio Sky at Twenty Centimeters ». In : *ApJ* 450, p. 559. DOI : [10.1086/176166](#) (cf. p. 77).
- BECKER, R. H. et al. (2001). « Evidence for Reionization at $z \sim 6$: Detection of a Gunn-Peterson Trough in a $z=6.28$ Quasar ». In : *AJ* 122, p. 2850–2857. DOI : [10.1086/324231](#). eprint : [astro-ph/0108097](#) (cf. p. 45).
- BEELEN, A., P. COX, D. J. BENFORD, C. D. DOWELL, A. KOVÁCS, F. BERTOLDI, A. OMONT et C. L. CARILLI (2006). « 350 μm Dust Emission from High-Redshift Quasars ». In : *ApJ* 642, p. 694–701. DOI : [10.1086/500636](#). eprint : [astro-ph/0603121](#) (cf. p. 102, 108, 110, 111).

- BENNETT, C. L. et al. (2003). « The Microwave Anisotropy Probe Mission ». In : *ApJ* 583, p. 1–23. DOI : [10.1086/345346](https://doi.org/10.1086/345346). eprint : [astro-ph/0301158](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0301158) (cf. p. 65).
- BERNARDEAU, Francis (2005). *Introduction à la cosmologie*. University Lecture (cf. p. 16, 26, 27).
- BIRKINSHAW, M. (1999). « The Sunyaev-Zel'dovich effect ». In : *Phys. Rep.* 310, p. 97–195. DOI : [10.1016/S0370-1573\(98\)00080-5](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(98)00080-5). eprint : [astro-ph/9808050](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9808050) (cf. p. 62, 63).
- BIRKINSHAW, M., S. F. GULL et H. HARDEBECK (1984). « The Sunyaev-Zeldovich effect towards three clusters of galaxies ». In : *Nature* 309, p. 34. DOI : [10.1038/309034a0](https://doi.org/10.1038/309034a0) (cf. p. 62, 142).
- BÎRZAN, L., D. A. RAFFERTY, B. R. MCNAMARA, M. W. WISE et P. E. J. NULSEN (2004). « A Systematic Study of Radio-induced X-Ray Cavities in Clusters, Groups, and Galaxies ». In : *ApJ* 607, p. 800–809. DOI : [10.1086/383519](https://doi.org/10.1086/383519). eprint : [astro-ph/0402348](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0402348) (cf. p. 58).
- BLANCHARD, A., D. VALLS-GABAUD et G. A. MAMON (1992). « The origin of the galaxy luminosity function and the thermal evolution of the intergalactic medium ». In : *A&A* 264, p. 365–378 (cf. p. 52).
- BOEHRINGER, H. et G. HENSLER (1989). « Metallicity-dependence of radiative cooling in optically thin, hot plasmas ». In : *A&A* 215, p. 147–149 (cf. p. 142).
- BOESE, F. G. (2000). « The ROSAT point spread functions and associates ». In : *A&A, Supplement* 141, p. 507–521 (cf. p. 154).
- BOGGESE, N. W. et al. (1992). « The COBE mission - Its design and performance two years after launch ». In : *ApJ* 397, p. 420–429. DOI : [10.1086/171797](https://doi.org/10.1086/171797) (cf. p. 65).
- BÖHRINGER, H., G. CHON, C. A. COLLINS, L. GUZZO, N. NOWAK et S. BOBROVSKYI (2014). « The extended ROSAT-ESO Flux Limited X-ray Galaxy Cluster Survey (REFLEX II) II. Construction and Properties of the Survey ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1403.5886](https://arxiv.org/abs/1403.5886) (cf. p. 159).
- BÖHRINGER, H. et N. WERNER (2009). « X-ray Spectroscopy of Galaxy Clusters ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [0907.4277](https://arxiv.org/abs/0907.4277) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).C0] (cf. p. 142, 143).
- BOHRINGER, H. et al. (1998). « Results from the REFLEX Cluster Survey ». In : *Wide Field Surveys in Cosmology, 14th IAP meeting held May 26-30, 1998, Paris*. Publisher : Editions Frontieres. ISBN : 2-8 6332-241-9, p. 261. P. 261+ (cf. p. 152).
- BÖHRINGER, H. et al. (2000). « The Northern ROSAT All-Sky (NORAS) Galaxy Cluster Survey. I. X-Ray Properties of Clusters Detected as Extended X-Ray Sources ». In : *ApJ Supplement* 129, p. 435–474. DOI : [10.1086/313427](https://doi.org/10.1086/313427). eprint : [astro-ph/0003219](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0003219) (cf. p. 152, 162).
- BÖHRINGER, H. et al. (2001). « The ROSAT-ESO flux limited X-ray (REFLEX) galaxy cluster survey. I. The construction of the cluster sample ». In : *A&A* 369, p. 826–850. DOI : [10.1051/0004-6361:20010240](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20010240). eprint : [astro-ph/0012266](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0012266) (cf. p. 152).
- BÖHRINGER, H. et al. (2004). « The ROSAT-ESO Flux Limited X-ray (REFLEX) Galaxy cluster survey. V. The cluster catalogue ». In : *A&A* 425, p. 367–383. DOI : [10.1051/0004-6361:20034484](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20034484). eprint : [astro-ph/0405546](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0405546) (cf. p. 129, 130, 152).
- BOND, J. R. et G. EFSTATHIOU (1984). « Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter ». In : *ApJ Letters* 285, p. L45–L48. DOI : [10.1086/184362](https://doi.org/10.1086/184362) (cf. p. 43).
- (1987). « The statistics of cosmic background radiation fluctuations ». In : *MNRAS* 226, p. 655–687. DOI : [10.1093/mnras/226.3.655](https://doi.org/10.1093/mnras/226.3.655) (cf. p. 33).
- BONDI, H. (1947). « Spherically Symmetrical Models in General Relativity ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 107.5-6, p. 410–425. DOI : [10.1093/mnras/107.5-6.410](https://doi.org/10.1093/mnras/107.5-6.410). eprint : <http://mnras.oxfordjournals.org/content/107/5-6/410.full.pdf+html> (cf. p. 46).

- (1952). « On spherically symmetrical accretion ». In : *MNRAS* 112, p. 195. DOI : [10.1093/mnras/112.2.195](#) (cf. p. 57).
- BONDI, H. et F. HOYLE (1944). « On the mechanism of accretion by stars ». In : *MNRAS* 104, p. 273. DOI : [10.1093/mnras/104.5.273](#) (cf. p. 57).
- BRIEL, U. G. et E. PFEFFERMANN (1985). « The position sensitive proportional counter (PSPC) of the ROSAT telescope ». In : *Unknown* 87, p. 11649+ (cf. p. 153).
- (1995). « ROSAT position-sensitive proportional counter and its in-orbit performance ». In : *SPIE Proceedings* 2518, p. 120–131 (cf. p. 153).
- BRYAN, G. L. et M. L. NORMAN (1998). « Statistical Properties of X-Ray Clusters : Analytic and Numerical Comparisons ». In : *ApJ* 495, p. 80–99. DOI : [10.1086/305262](#). eprint : [astro-ph/9710107](#) (cf. p. 48).
- BUCHMULLER, W. (2012). « Baryogenesis, Dark Matter and the Maximal Temperature of the Early Universe ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1212.3554 \[hep-ph\]](#) (cf. p. 26).
- BUSCA, N. G. et al. (2013). « Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS quasars ». In : *A&A* 552, A96, A96. DOI : [10.1051/0004-6361/201220724](#). arXiv : [1211.2616 \[astro-ph.CO\]](#) (cf. p. 74).
- BYRAM, E. T., T. A. CHUBB et H. FRIEDMAN (1966). « Cosmic X-Ray Sources-Galactic and Extragalactic. » In : *AJ* 71, p. 379. DOI : [10.1086/109934](#) (cf. p. 142).
- CARROLL, S. M. (1997). « Lecture Notes on General Relativity ». In : *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*. eprint : [gr-qc/9712019](#) (cf. p. 11).
- CAVALIERE, A. G., H. GURSKY et W. H. TUCKER (1971). « Extragalactic X-ray Sources and Associations of Galaxies ». In : *Nature* 231, p. 437–438. DOI : [10.1038/231437a0](#) (cf. p. 142).
- CHATTERJEE, S., S. HO, J. A. NEWMAN et A. KOSOWSKY (2010). « Tentative Detection of Quasar Feedback from WMAP and SDSS Cross-correlation ». In : *ApJ* 720, p. 299–305. DOI : [10.1088/0004-637X/720/1/299](#) (cf. p. 65).
- CONDON, J. J. (1992). « Radio emission from normal galaxies ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 30, p. 575–611. DOI : [10.1146/annurev.aa.30.090192.003043](#) (cf. p. 113).
- CRICHTON, D. et al. (2015). « Evidence for the Thermal Sunyaev-Zel'dovich Effect Associated with Quasar Feedback ». In : *ArXiv e-prints*. 1510.05656. arXiv : [1510.05656](#) (cf. p. 65, 110).
- CRUDDACE, R., W. VOGES, H. BÖHRINGER, C. A. COLLINS, A. K. ROMER, H. MACGILLIVRAY, D. YENTIS, P. SCHUECKER, H. EBELING et S. DE GRANDI (2002). « The ROSAT All-Sky Survey : a Catalog of Clusters of Galaxies in a Region of 1 steradian around the South Galactic Pole ». In : *ApJ Supplement* 140, p. 239–264. DOI : [10.1086/324519](#). eprint : [astro-ph/0201069](#) (cf. p. 159).
- DAI, Y. S. et al. (2012). « A Population of Dust-rich Quasars at $z \sim 1.5$ ». In : *ApJ* 753, 33, p. 33. DOI : [10.1088/0004-637X/753/1/33](#). arXiv : [1205.1808](#) (cf. p. 110).
- DE BERNARDIS, P. et al. (2000). « A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation ». In : *Nature* 404, p. 955–959. eprint : [astro-ph/0004404](#) (cf. p. 35).
- DELUBAC, T. et al. (2015). « Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS DR11 quasars ». In : *A&A* 574, A59, A59. DOI : [10.1051/0004-6361/201423969](#). arXiv : [1404.1801](#) (cf. p. 74).
- DICKE, R. H., P. J. E. PEEBLES, P. G. ROLL et D. T. WILKINSON (1965). « Cosmic Black-Body Radiation. » In : *ApJ* 142, p. 414–419. DOI : [10.1086/148306](#) (cf. p. 6).
- DODELSON, S. (2003). *Modern cosmology* (cf. p. 12).
- DOE, S. et al. (2007). « Developing Sherpa with Python ». In : *Astronomical Data Analysis Software and Systems XVI*. Sous la dir. de R. A. SHAW, F. HILL et D. J. BELL. T. 376. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 543 (cf. p. 130).

- DRAPER, P., S. DODELSON, J. HAO et E. ROZO (2012). « Sunyaev-Zel'dovich signal of the maxBCG SDSS galaxy clusters in WMAP ». In : *Phys. Rev. D* 85.2, 023005, p. 023005. DOI : [10.1103/PhysRevD.85.023005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.023005). arXiv : [1106.2185](https://arxiv.org/abs/1106.2185) [[astro-ph.C0](#)] (cf. p. 65).
- DUCROCQ, A. (1959). *Victoire sur l'espace*. Julliard (cf. p. 3).
- DUPAC, X. et J. TAUBER (2005). « Scanning strategy for mapping the Cosmic Microwave Background anisotropies with Planck ». In : *A&A* 430, p. 363–371. DOI : [10.1051/0004-6361:20041526](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041526). eprint : [astro-ph/0409405](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0409405) (cf. p. 66).
- EBELING, H., A. C. EDGE et J. P. HENRY (2001). « MACS : A Quest for the Most Massive Galaxy Clusters in the Universe ». In : *ApJ* 553, p. 668–676. DOI : [10.1086/320958](https://doi.org/10.1086/320958). eprint : [astro-ph/0009101](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0009101) (cf. p. 159).
- EISENSTEIN, D. J. et al. (2005). « Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies ». In : *ApJ* 633, p. 560–574. DOI : [10.1086/466512](https://doi.org/10.1086/466512). eprint : [astro-ph/0501171](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0501171) (cf. p. 35).
- ELVIS, M., B. J. WILKES, J. C. MCDOWELL, R. F. GREEN, J. BECHTOLD, S. P. WILLNER, M. S. OEY, E. POLOMSKI et R. CUTRI (1994). « Atlas of quasar energy distributions ». In : *ApJ Supplement* 95, p. 1–68. DOI : [10.1086/192093](https://doi.org/10.1086/192093) (cf. p. 58).
- FAN, X., M. A. STRAUSS, R. H. BECKER, R. L. WHITE, J. E. GUNN, G. R. KNAPP, G. T. RICHARDS, D. P. SCHNEIDER, J. BRINKMANN et M. FUKUGITA (2006). « Constraining the Evolution of the Ionizing Background and the Epoch of Reionization with $z \sim 6$ Quasars. II. A Sample of 19 Quasars ». In : *AJ* 132, p. 117–136. DOI : [10.1086/504836](https://doi.org/10.1086/504836). eprint : [astro-ph/0512082](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0512082) (cf. p. 62).
- FELTEN, J. E., R. J. GOULD, W. A. STEIN et N. J. WOOLF (1966). « X-Rays from the Coma Cluster of Galaxies ». In : *ApJ* 146, p. 955–958. DOI : [10.1086/148972](https://doi.org/10.1086/148972) (cf. p. 142).
- FERREIRA, Pedro (2013). *Lectures on General Relativity and Cosmology*. University Lecture (cf. p. 6, 12, 28, 30).
- FIGLIORE, F., F. LA FRANCA, P. GIOMMI, M. ELVIS, G. MATT, A. COMASTRI, S. MOLENDI et I. GIOIA (1999). « The contribution of faint active galactic nuclei to the hard X-ray background ». In : *MNRAS* 306, p. L55–L60 (cf. p. 156).
- FIXSEN, D. J. (2009). « The Temperature of the Cosmic Microwave Background ». In : *ApJ* 707, p. 916–920. DOI : [10.1088/0004-637X/707/2/916](https://doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/916). arXiv : [0911.1955](https://arxiv.org/abs/0911.1955) (cf. p. 30, 63, 71).
- FIXSEN, D. J., E. S. CHENG, J. M. GALES, J. C. MATHER, R. A. SHAFER et E. L. WRIGHT (1996). « The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set ». In : *ApJ* 473, p. 576. DOI : [10.1086/178173](https://doi.org/10.1086/178173). eprint : [astro-ph/9605054](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9605054) (cf. p. 31).
- FORMAN, W., E. KELLOGG, H. GURSKY, H. TANANBAUM et R. GIACCONI (1972). « Observations of the Extended X-Ray Sources in the Perseus and Coma Clusters from UHURU ». In : *ApJ* 178, p. 309–316. DOI : [10.1086/151791](https://doi.org/10.1086/151791) (cf. p. 142).
- FREEMAN, P., S. DOE et A. SIEMIGINOWSKA (2001). « Sherpa : a mission-independent data analysis application ». In : *Astronomical Data Analysis*. Sous la dir. de J.-L. STARCK et F. D. MURTAGH. T. 4477. SPIE Proceedings, p. 76–87. DOI : [10.1117/12.447161](https://doi.org/10.1117/12.447161). eprint : [astro-ph/0108426](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0108426) (cf. p. 130).
- FRITZ, G., A. DAVIDSEN, J. F. MEEKINS et H. FRIEDMAN (1971). « Discovery of an X-Ray Source in Perseus ». In : *ApJ Letters* 164, p. L81. DOI : [10.1086/180697](https://doi.org/10.1086/180697) (cf. p. 142).
- GAMOW, G. (1948a). « The Evolution of the Universe ». In : *Nature* 162, p. 680–682. DOI : [10.1038/162680a0](https://doi.org/10.1038/162680a0) (cf. p. 6).
- (1948b). « The Origin of Elements and the Separation of Galaxies ». In : *Physical Review* 74, p. 505–506. DOI : [10.1103/PhysRev.74.505.2](https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.505.2) (cf. p. 6).
- GORBUNOV, D. S. et V. A. RUBAKOV (2011). *Introduction to the theory of the early universe* (cf. p. 12, 28).

- GÓRSKI, K. M., E. HIVON, A. J. BANDAY, B. D. WANDELT, F. K. HANSEN, M. REINECKE et M. BARTELMANN (2005). « HEALPix : A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere ». In : *ApJ* 622, p. 759–771. DOI : [10.1086/427976](https://doi.org/10.1086/427976). eprint : [astro-ph/0409513](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0409513) (cf. p. 69).
- GRAINGE, Keith (2016). *Radiation Processes/Free-Free or Bremsstrahlung Radiation*. University Lecture (cf. p. 143).
- GRALLA, M. B. et al. (2014). « A measurement of the millimetre emission and the Sunyaev-Zel'dovich effect associated with low-frequency radio sources ». In : *MNRAS* 445, p. 460–478. DOI : [10.1093/mnras/stu1592](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1592). arXiv : [1310.8281](https://arxiv.org/abs/1310.8281) (cf. p. 65).
- GUNN, J. E. et J. R. GOTT III (1972). « On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution ». In : *ApJ* 176, p. 1. DOI : [10.1086/151605](https://doi.org/10.1086/151605) (cf. p. 47, 51).
- GURSKY, H., A. SOLINGER, E. M. KELLOGG, S. MURRAY, H. TANANBAUM, R. GIACCONI et A. CAVALIERE (1972). « X-Ray Emission from Rich Clusters of Galaxies ». In : *ApJ Letters* 173, p. L99. DOI : [10.1086/180926](https://doi.org/10.1086/180926) (cf. p. 142).
- GUTH, A. H. (1981). « Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems ». In : *Phys. Rev. D* 23, p. 347–356. DOI : [10.1103/PhysRevD.23.347](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347) (cf. p. 26).
- HAEHNELT, M. G. et M. TEGMARK (1996). « Using the Kinematic Sunyaev-Zeldovich effect to determine the peculiar velocities of clusters of galaxies ». In : *MNRAS* 279, p. 545. DOI : [10.1093/mnras/279.2.545](https://doi.org/10.1093/mnras/279.2.545). eprint : [astro-ph/9507077](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9507077) (cf. p. 85).
- HAND, N. et al. (2012). « Evidence of Galaxy Cluster Motions with the Kinematic Sunyaev-Zel'dovich Effect ». In : *Physical Review Letters* 109.4, 041101, p. 041101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.109.041101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.041101). arXiv : [1203.4219](https://arxiv.org/abs/1203.4219) (cf. p. 62).
- HARTMANN, D. et W. B. BURTON (1997). *Atlas of Galactic Neutral Hydrogen*, p. 243 (cf. p. 130).
- HASINGER, G., R. BURG, R. GIACCONI, G. HARTNER, M. SCHMIDT, J. TRUMPER et G. ZAMORANI (1993). « A Deep X-Ray Survey in the Lockman-Hole and the Soft X-Ray N-Log ». In : *A&A* 275, p. 1 (cf. p. 151, 156).
- HASSELFIELD, M. et al. (2013). « The Atacama Cosmology Telescope : Beam Measurements and the Microwave Brightness Temperatures of Uranus and Saturn ». In : *ApJ Supplement* 209, 17, p. 17. DOI : [10.1088/0067-0049/209/1/17](https://doi.org/10.1088/0067-0049/209/1/17). arXiv : [1303.4714](https://arxiv.org/abs/1303.4714) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).IM] (cf. p. 70).
- HERRANZ, D., J. L. SANZ, M. P. HOBSON, R. B. BARREIRO, J. M. DIEGO, E. MARTINEZ-GONZÁLEZ et A. N. LASENBY (2002). « Filtering techniques for the detection of Sunyaev-Zel'dovich clusters in multifrequency maps ». In : *MNRAS* 336, p. 1057–1068. DOI : [10.1046/j.1365-8711.2002.05704.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05704.x). eprint : [astro-ph/0203486](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0203486) (cf. p. 95, 96).
- HILL, J. C. et D. N. SPERGEL (2014). « Detection of thermal SZ-CMB lensing cross-correlation in Planck nominal mission data ». In : *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2, 030, p. 30. DOI : [10.1088/1475-7516/2014/02/030](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/02/030). arXiv : [1312.4525](https://arxiv.org/abs/1312.4525) (cf. p. 65).
- HINSHAW, G. et al. (2013). « Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Parameter Results ». In : *ApJ Supplement* 208, 19, p. 19. DOI : [10.1088/0067-0049/208/2/19](https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19). arXiv : [1212.5226](https://arxiv.org/abs/1212.5226) (cf. p. 35).
- HOYLE, F. et R. A. LYTTLETON (1939). « The effect of interstellar matter on climatic variation ». In : *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 35, p. 405. DOI : [10.1017/S0305004100021150](https://doi.org/10.1017/S0305004100021150) (cf. p. 57).
- HU, Wayne (2016). *Radiative Processes / bremsstrahlung*. University Lecture (cf. p. 143).
- HUBBLE, E. (1929). « A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae ». In : *Proceedings of the National Academy of Science* 15, p. 168–173. DOI : [10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168) (cf. p. 5).

- JENKINS, A., C. S. FRENK, S. D. M. WHITE, J. M. COLBERG, S. COLE, A. E. EVRARD, H. M. P. COUCHMAN et N. YOSHIDA (2001). « The mass function of dark matter haloes ». In : *MNRAS* 321, p. 372–384. DOI : [10.1046/j.1365-8711.2001.04029.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04029.x). eprint : [astro-ph/0005260](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0005260) (cf. p. 43, 52).
- KAISER, N. (1986). « Evolution and clustering of rich clusters ». In : *MNRAS* 222, p. 323–345. DOI : [10.1093/mnras/222.2.323](https://doi.org/10.1093/mnras/222.2.323) (cf. p. 53).
- KALBERLA, P. M. W., W. B. BURTON, D. HARTMANN, E. M. ARNAL, E. BAJAJA, R. MORRAS et W. G. L. PÖPPEL (2005). « The Leiden/Argentine/Bonn (LAB) Survey of Galactic HI. Final data release of the combined LDS and IAR surveys with improved stray-radiation corrections ». In : *A&A* 440, p. 775–782. DOI : [10.1051/0004-6361:20041864](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041864). eprint : [astro-ph/0504140](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0504140) (cf. p. 149).
- KELLOGG, E., E. SCHREIER, H. TANANBAUM, H. GURSKY et R. GIACCONI (1972). « X-Ray Sources in Clusters of Galaxies Versus Isolated Extragalactic Sources. » In : *Bulletin of the American Astronomical Society*. T. 4. Bulletin of the American Astronomical Society, p. 336 (cf. p. 142).
- KEMHAVI, A. K. et J. V. NARLIKAR (1999). *Quasars and active galactic nuclei : an introduction* (cf. p. 150).
- KENT, Stephen (2010). *The Universe as a Function of Redshift*. University Lecture (cf. p. 20).
- KIRKPATRICK, A. et al. (2012). « GOODS-Herschel : Impact of Active Galactic Nuclei and Star Formation Activity on Infrared Spectral Energy Distributions at High Redshift ». In : *ApJ* 759, 139, p. 139. DOI : [10.1088/0004-637X/759/2/139](https://doi.org/10.1088/0004-637X/759/2/139). arXiv : [1209.4902](https://arxiv.org/abs/1209.4902) (cf. p. 112).
- KOMATSU, E. (2011). « Critical Tests of Inflation as a Mechanism for Generating Observed Cosmological Fluctuations in the Universe ». In : *Journal of Geophysical Research (Biogeosciences)*, p. 112 (cf. p. 48).
- KOWALSKI, M. et al. (2008). « Improved Cosmological Constraints from New, Old, and Combined Supernova Data Sets ». In : *ApJ* 686, 749–778, p. 749–778. DOI : [10.1086/589937](https://doi.org/10.1086/589937). arXiv : [0804.4142](https://arxiv.org/abs/0804.4142) (cf. p. 36).
- KRAVTSOV, A. V. et S. BORGANI (2012). « Formation of Galaxy Clusters ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 50, p. 353–409. DOI : [10.1146/annurev-astro-081811-125502](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081811-125502). arXiv : [1205.5556](https://arxiv.org/abs/1205.5556) (cf. p. 45, 49, 53).
- LAHAV, O., P. B. LILJE, J. R. PRIMACK et M. J. REES (1991). « Dynamical effects of the cosmological constant ». In : *MNRAS* 251, p. 128–136. DOI : [10.1093/mnras/251.1.128](https://doi.org/10.1093/mnras/251.1.128) (cf. p. 47).
- LAHAV, O. et Y. SUTO (2004). « Measuring our Universe from Galaxy Redshift Surveys ». In : *Living Reviews in Relativity* 7. DOI : [10.12942/lrr-2004-8](https://doi.org/10.12942/lrr-2004-8). eprint : [astro-ph/0310642](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310642) (cf. p. 39, 43).
- LEAVITT, H. S. et E. C. PICKERING (1912). « Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud. » In : *Harvard College Observatory Circular* 173, p. 1–3 (cf. p. 5).
- LEMAÎTRE, G. (1927). « Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques ». In : *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 47, p. 49–59 (cf. p. 5, 6).
- LESGOURGUES, J. (2011). « The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I : Overview ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1104.2932](https://arxiv.org/abs/1104.2932) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).IM] (cf. p. 43).
- LINWEAVER, C. H. (1997). « Gold in the Doppler Hills : Cosmological Parameters in the Microwave Background ». In : *From Quantum Fluctuations to Cosmological Structures*. Sous la dir. de D. VALLS-GABAUD, M. A. HENDRY, P. MOLARO et K. CHAMCHAM. T. 126. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 185. eprint : [astro-ph/9702042](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9702042) (cf. p. 30).

- LINEWEAVER, C. H., D. BARBOSA, A. BLANCHARD et J. G. BARTLETT (1997). « Constraints on h , $\{\Omega_{\text{b}}\}$ and $\lambda_{\text{c}}^{\text{dS}}$ from cosmic microwave background observations. » In : *A&A* 322, p. 365–374. eprint : [astro-ph/9610133](#) (cf. p. 30).
- LUNDMARK, K. (1925). « Nebulæ, The motions and the distances of spiral ». In : *MNRAS* 85, p. 865. DOI : [10.1093/mnras/85.8.865](#) (cf. p. 5).
- MADAU, P. et M. DICKINSON (2014). « Cosmic Star-Formation History ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 52, p. 415–486. DOI : [10.1146/annurev-astro-081811-125615](#). arXiv : [1403.0007](#) (cf. p. 112, 113).
- MADAU, P., F. HAARDT et M. J. REES (1999). « Radiative Transfer in a Clumpy Universe. III. The Nature of Cosmological Ionizing Sources ». In : *ApJ* 514, p. 648–659. DOI : [10.1086/306975](#). eprint : [astro-ph/9809058](#) (cf. p. 45).
- MANTZ, A. B. et al. (2014). « The XXL Survey. V. Detection of the Sunyaev-Zel'dovich Effect of the Redshift 1.9 Galaxy Cluster XLSSU J021744.1-034536 with CARMA ». In : *ApJ* 794, 157, p. 157. DOI : [10.1088/0004-637X/794/2/157](#). arXiv : [1401.2087](#) (cf. p. 65).
- MAZZOTTA, P., E. RASIA, L. MOSCARDINI et G. TORMEN (2004). « Comparing the temperatures of galaxy clusters from hydrodynamical N-body simulations to Chandra and XMM-Newton observations ». In : *MNRAS* 354, p. 10–24. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2004.08167.x](#). eprint : [astro-ph/0404425](#) (cf. p. 143).
- MEEKINS, J. F., G. FRITZ, R. C. HENRY, T. A. CHUBB et H. FRIEDMAN (1971). « Continuous and Pulsed X-ray Emission of the Crab Nebula ». In : *Bulletin of the American Astronomical Society*. T. 3. Bulletin of the American Astronomical Society, p. 22 (cf. p. 142).
- MELIN, J.-B., J. G. BARTLETT et J. DELABROUILLE (2006). « Catalog extraction in SZ cluster surveys : a matched filter approach ». In : *A&A* 459, p. 341–352. DOI : [10.1051/0004-6361:20065034](#). eprint : [astro-ph/0602424](#) (cf. p. 95, 141).
- MELIN, J.-B., J. G. BARTLETT, J. DELABROUILLE, M. ARNAUD, R. PIFFARETTI et G. W. PRATT (2011). « The galaxy cluster $Y_{\text{SZ}} - L_{\text{X}}$ and $Y_{\text{SZ}} - M$ relations from the WMAP 5-yr data ». In : *A&A* 525, A139, A139. DOI : [10.1051/0004-6361/201013999](#). arXiv : [1001.0871](#) (cf. p. 95).
- MEWE, R., E. H. B. M. GRONENSHILD et G. H. J. VAN DEN OORD (1985). « Calculated X-radiation from optically thin plasmas. V ». In : *A&A, Supplement* 62, p. 197–254 (cf. p. 150).
- MEWE, R., J. R. LEMEN et G. H. J. VAN DEN OORD (1986). « Calculated X-radiation from optically thin plasmas. VI - Improved calculations for continuum emission and approximation formulae for nonrelativistic average Gaunt factors ». In : *A&A, Supplement* 65, p. 511–536 (cf. p. 150).
- MORENO, Raphael (2010). *Neptune and Uranus planetary brightness temperature tabulation*. Rapp. tech. ESA Herschel Science Center (cf. p. 71, 134).
- MORETTI, A., S. CAMPANA, D. LAZZATI et G. TAGLIAFERRI (2003). « The Resolved Fraction of the Cosmic X-Ray Background ». In : *ApJ* 588, p. 696–703. DOI : [10.1086/374335](#). eprint : [astro-ph/0301555](#) (cf. p. 156, 158).
- MORRISON, R. et D. MCCAMMON (1983). « Interstellar photoelectric absorption cross sections, 0.03-10 keV ». In : *ApJ* 270, p. 119–122. DOI : [10.1086/161102](#) (cf. p. 149).
- MROCZKOWSKI, T. et al. (2012). « A Multi-wavelength Study of the Sunyaev-Zel'dovich Effect in the Triple-merger Cluster MACS J0717.5+3745 with MUSTANG and Bolocam ». In : *ApJ* 761, 47, p. 47. DOI : [10.1088/0004-637X/761/1/47](#). arXiv : [1205.0052](#) (cf. p. 62).
- NAGAI, D., A. V. KRAVTSOV et A. VIKHLININ (2007). « Effects of Galaxy Formation on Thermodynamics of the Intracluster Medium ». In : *ApJ* 668, p. 1–14. DOI : [10.1086/521328](#). eprint : [astro-ph/0703661](#) (cf. p. 79).

- NAVARRO, J. F., C. S. FRENK et S. D. M. WHITE (1995). « The assembly of galaxies in a hierarchically clustering universe ». In : *MNRAS* 275, p. 56–66. DOI : [10.1093/mnras/275.1.56](#). eprint : [astro-ph/9408067](#) (cf. p. 54).
- NELSON, K., D. H. RUDD, L. SHAW et D. NAGAI (2012). « Evolution of the Merger-induced Hydrostatic Mass Bias in Galaxy Clusters ». In : *ApJ* 751, 121, p. 121. DOI : [10.1088/0004-637X/751/2/121](#). arXiv : [1112.3659](#) (cf. p. 55).
- NETZER, H. (2015). « Revisiting the Unified Model of Active Galactic Nuclei ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 53, p. 365–408. DOI : [10.1146/annurev-astro-082214-122302](#). arXiv : [1505.00811](#) (cf. p. 56).
- PACAUD, F. et al. (2006). « The XMM Large-Scale Structure survey : the X-ray pipeline and survey selection function ». In : *MNRAS* 372, p. 578–590. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2006.10881.x](#). eprint : [astro-ph/0607177](#) (cf. p. 162).
- PADIN, S. et al. (2008). « South Pole Telescope optics ». In : *Applied Optics* 47, p. 4418–4428. DOI : [10.1364/AO.47.004418](#) (cf. p. 70).
- PÂRIS, I. et al. (2012). « The Sloan Digital Sky Survey quasar catalog : ninth data release ». In : *A&A* 548, A66, A66. DOI : [10.1051/0004-6361/201220142](#). arXiv : [1210.5166 \[astro-ph.CO\]](#) (cf. p. 64, 74, 77).
- PATANCHON, Guillaume (2003). « Analyse multi-composantes d’observations du fond diffus cosmologique ». Thèse de doct. Université Paris VI- Pierre et Marie Curie (cf. p. 71).
- PEEBLES, P. J. E. (1983). « Large-scale fluctuations in the mass distribution and the microwave background - Nature and evolution ». In : *The Origin and Evolution of Galaxies*. Sous la dir. de B. J. T. JONES et J. E. JONES, p. 143–169 (cf. p. 39).
- PENZIAS, A. A. et R. W. WILSON (1965). « A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. ». In : *ApJ* 142, p. 419–421. DOI : [10.1086/148307](#) (cf. p. 6).
- PERCIVAL, W. J. (2005). « Cosmological structure formation in a homogeneous dark energy background ». In : *A&A* 443, p. 819–830. DOI : [10.1051/0004-6361:20053637](#). eprint : [astro-ph/0508156](#) (cf. p. 51).
- PERLMUTTER, S. et al. (1999). « Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae ». In : *ApJ* 517, p. 565–586. DOI : [10.1086/307221](#). eprint : [astro-ph/9812133](#) (cf. p. 6, 35).
- PETERSON, B. M. (1997). *An Introduction to Active Galactic Nuclei* (cf. p. 113).
- PIER, J. R., J. A. MUNN, R. B. HINDSLEY, G. S. HENNESSY, S. M. KENT, R. H. LUPTON et Ž. IVEZIĆ (2003). « Astrometric Calibration of the Sloan Digital Sky Survey ». In : *AJ* 125, p. 1559–1579. DOI : [10.1086/346138](#). eprint : [astro-ph/0211375](#) (cf. p. 74).
- PIFFARETTI, R., M. ARNAUD, G. W. PRATT, E. POINTECOUTEAU et J.-B. MELIN (2011). « The MCXC : a meta-catalogue of x-ray detected clusters of galaxies ». In : *A&A* 534, A109, A109. DOI : [10.1051/0004-6361/201015377](#). arXiv : [1007.1916](#) (cf. p. 62, 159, 160).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2011a). « Planck early results. I. The Planck mission ». In : *A&A* 536, A1, A1. DOI : [10.1051/0004-6361/201116464](#). arXiv : [1101.2022 \[astro-ph.IM\]](#) (cf. p. 65).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2011b). « Planck early results. X. Statistical analysis of Sunyaev-Zeldovich scaling relations for X-ray galaxy clusters ». In : *A&A* 536, A10, A10. DOI : [10.1051/0004-6361/201116457](#). arXiv : [1101.2043 \[astro-ph.CO\]](#) (cf. p. 65).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2011c). « Planck early results. XII. Cluster Sunyaev-Zeldovich optical scaling relations ». In : *A&A* 536, A12, A12. DOI : [10.1051/0004-6361/201116489](#). arXiv : [1101.2027 \[astro-ph.CO\]](#) (cf. p. 65).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2012). « Planck intermediate results. I. Further validation of new Planck clusters with XMM-Newton ». In : *A&A* 543, A102, A102. DOI : [10.1051/0004-6361/201118731](#). arXiv : [1112.5595](#) (cf. p. 174).

- PLANCK COLLABORATION et al. (2013a). « Planck intermediate results. VIII. Filaments between interacting clusters ». In : A&A 550, A134, A134. DOI : [10.1051/0004-6361/201220194](#). arXiv : [1208.5911](#) (cf. p. 95).
- (2013b). « Planck intermediate results. XI. The gas content of dark matter halos : the Sunyaev-Zeldovich-stellar mass relation for locally brightest galaxies ». In : A&A 557, A52, A52. DOI : [10.1051/0004-6361/201220941](#). arXiv : [1212.4131](#) (cf. p. 65, 99, 115).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2014a). « Planck 2013 results. XX. Cosmology from Sunyaev-Zeldovich cluster counts ». In : A&A 571, A20, A20. DOI : [10.1051/0004-6361/201321521](#). arXiv : [1303.5080](#) (cf. p. 53, 66).
- (2014b). « Planck 2013 results. XX. Cosmology from Sunyaev-Zeldovich cluster counts ». In : A&A 571, A20, A20. DOI : [10.1051/0004-6361/201321521](#). arXiv : [1303.5080](#) (cf. p. 99, 132).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2014c). « Planck 2013 results. XXIX. The Planck catalogue of Sunyaev-Zeldovich sources ». In : A&A 571, A29, A29. DOI : [10.1051/0004-6361/201321523](#). arXiv : [1303.5089](#) (cf. p. 66, 95, 141, 159).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2014d). « Planck intermediate results. XIII. Constraints on peculiar velocities ». In : A&A 561, A97, A97. DOI : [10.1051/0004-6361/201321299](#). arXiv : [1303.5090](#) (cf. p. 62, 115).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015a). « Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results ». In : *ArXiv e-prints*. 1502.01582. arXiv : [1502.01582](#) (cf. p. 65).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015b). « Planck 2015 results. IX. Diffuse component separation : CMB maps ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1502.05956](#) (cf. p. 71).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015c). « Planck 2015 results. V. LFI calibration ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1505.08022](#) [[astro-ph.IM](#)] (cf. p. 71).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015d). « Planck 2015 results. VI. LFI mapmaking ». In : *ArXiv e-prints*. 1502.01585. arXiv : [1502.01585](#) (cf. p. 65).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015e). « Planck 2015 results. VI. LFI mapmaking ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1502.01585](#) (cf. p. 68, 71).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015f). « Planck 2015 results. VIII. High Frequency Instrument data processing : Calibration and maps ». In : *ArXiv e-prints*. 1502.01587. arXiv : [1502.01587](#) (cf. p. 65, 68, 71, 134).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015g). « Planck 2015 results. X. Diffuse component separation : Foreground maps ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1502.01588](#) (cf. p. 71).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015h). « Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1502.01589](#) (cf. p. 25, 26, 35–37, 42, 44, 45, 53, 61, 66, 93).
- (2015i). « Planck 2015 results. XXIV. Cosmology from Sunyaev-Zeldovich cluster counts ». In : *ArXiv e-prints*. 1502.01597. arXiv : [1502.01597](#) (cf. p. 53, 66, 99, 132).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015j). « Planck 2015 results. XXVI. The Second Planck Catalogue of Compact Sources ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1507.02058](#) (cf. p. 72, 136).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015k). « Planck 2015 results. XXVII. The Second Planck Catalogue of Sunyaev-Zeldovich Sources ». In : *ArXiv e-prints*. 1502.01598. arXiv : [1502.01598](#) (cf. p. 66, 95, 141).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2015l). « Planck 2015 results. XXVIII. The Planck Catalogue of Galactic Cold Clumps ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1502.01599](#) (cf. p. 72, 136).
- PLANCK COLLABORATION et al. (2016). « Planck intermediate results. XXXVII. Evidence of unbound gas from the kinetic Sunyaev-Zeldovich effect ». In : A&A 586, A140, A140. DOI : [10.1051/0004-6361/201526328](#). arXiv : [1504.03339](#) (cf. p. 62).

- PRATT, G. W., J. H. CROSTON, M. ARNAUD et H. BÖHRINGER (2009). « Galaxy cluster X-ray luminosity scaling relations from a representative local sample (REXCESS) ». In : *A&A* 498, p. 361–378. DOI : [10.1051/0004-6361/200810994](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200810994). arXiv : [0809.3784](https://arxiv.org/abs/0809.3784) (cf. p. 130).
- PRESS, W. H. et P. SCHECHTER (1974). « Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation ». In : *ApJ* 187, p. 425–438. DOI : [10.1086/152650](https://doi.org/10.1086/152650) (cf. p. 52).
- PUISIEUX, Sarah (2013). « Etude des effets Sunyaev-Zel'dovitch cinétique et relativiste dans les données Planck ». Thèse de doct. Université Paris VII- Denis Diderot (cf. p. 62, 115).
- RICH, J. (2010). *Fundamentals of Cosmology*. DOI : [10.1007/978-3-642-02800-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02800-7) (cf. p. 16, 26, 30, 46).
- RICHARDS, G. et al. (2006). « Optical-IR SEDs of SDSS Quasars in the Spitzer First Look Survey ». In : *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*. Sous la dir. de L. ARMUS et W. T. REACH. T. 357. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 261 (cf. p. 58).
- RICHARDSON, J., Z. ZHENG, S. CHATTERJEE, D. NAGAI et Y. SHEN (2012). « The Halo Occupation Distribution of SDSS Quasars ». In : *ApJ* 755, 30, p. 30. DOI : [10.1088/0004-637X/755/1/30](https://doi.org/10.1088/0004-637X/755/1/30). arXiv : [1203.4570](https://arxiv.org/abs/1203.4570) (cf. p. 64).
- RIESS, A. G. et al. (1998). « Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant ». In : *AJ* 116, p. 1009–1038. DOI : [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499). eprint : [astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201) (cf. p. 6, 35).
- ROBERTSON, H. P. (1933). « Relativistic Cosmology ». In : *Reviews of Modern Physics* 5, p. 62–90. DOI : [10.1103/RevModPhys.5.62](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.5.62) (cf. p. 6).
- ROSS, A. J. et al. (2012). « The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey : analysis of potential systematics ». In : *MNRAS* 424, p. 564–590. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2012.21235.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21235.x). arXiv : [1203.6499](https://arxiv.org/abs/1203.6499) (cf. p. 76).
- ROSS, N. P. et al. (2009). « Clustering of Low-redshift ($z \leq 2.2$) Quasars from the Sloan Digital Sky Survey ». In : *ApJ* 697, p. 1634–1655. DOI : [10.1088/0004-637X/697/2/1634](https://doi.org/10.1088/0004-637X/697/2/1634). arXiv : [0903.3230](https://arxiv.org/abs/0903.3230) (cf. p. 64).
- RUAN, J. J., M. MCQUINN et S. F. ANDERSON (2015). « Detection of Quasar Feedback from the Thermal Sunyaev-Zel'dovich Effect in Planck ». In : *ApJ* 802, 135, p. 135. DOI : [10.1088/0004-637X/802/2/135](https://doi.org/10.1088/0004-637X/802/2/135). arXiv : [1502.01723](https://arxiv.org/abs/1502.01723) (cf. p. 65, 127).
- RUBIN, V. C. et W. K. FORD Jr. (1970). « Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions ». In : *ApJ* 159, p. 379. DOI : [10.1086/150317](https://doi.org/10.1086/150317) (cf. p. 25).
- SACHS, R. K. et A. M. WOLFE (1967). « Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background ». In : *Liege International Astrophysical Colloquia*. T. 14. Liege International Astrophysical Colloquia, p. 59 (cf. p. 31).
- SALARIS, M. et S. CASSISI (2005). *Evolution of Stars and Stellar Populations*, p. 400 (cf. p. 24).
- SANZ, J. L., D. HERRANZ et E. MARTINEZ-GÓNZALEZ (2001). « Optimal Detection of Sources on a Homogeneous and Isotropic Background ». In : *ApJ* 552, p. 484–492. DOI : [10.1086/320550](https://doi.org/10.1086/320550). eprint : [astro-ph/0107384](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0107384) (cf. p. 85, 185).
- SARAZIN, C. L. (1988). *X-ray emission from clusters of galaxies* (cf. p. 142).
- SCHMIDT, B. P. et al. (1998). « The High-Z Supernova Search : Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type IA Supernovae ». In : *ApJ* 507, p. 46–63. DOI : [10.1086/306308](https://doi.org/10.1086/306308). eprint : [astro-ph/9805200](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805200) (cf. p. 6, 35).
- SHETH, R. K., H. J. MO et G. TORMEN (2001). « Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes ». In : *MNRAS* 323, p. 1–12. DOI : [10.1046/j.1365-8711.2001.04006.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04006.x). eprint : [astro-ph/9907024](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9907024) (cf. p. 52).

- SIJACKI, D., V. SPRINGEL, T. DI MATTEO et L. HERNQUIST (2007). « A unified model for AGN feedback in cosmological simulations of structure formation ». In : *MNRAS* 380, p. 877–900. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2007.12153.x](#). arXiv : [0705.2238](#) (cf. p. 56).
- SILK, J. (1968). « Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation ». In : *ApJ* 151, p. 459. DOI : [10.1086/149449](#) (cf. p. 32).
- SLIPHER, V. M. (1913). « The radial velocity of the Andromeda Nebula ». In : *Lowell Observatory Bulletin* 2, p. 56–57 (cf. p. 5).
- SMEE, S. A. et al. (2013). « The Multi-object, Fiber-fed Spectrographs for the Sloan Digital Sky Survey and the Baryon Oscillation Spectroscopic Survey ». In : *AJ* 146, 32, p. 32. DOI : [10.1088/0004-6256/146/2/32](#). arXiv : [1208.2233 \[astro-ph.IM\]](#) (cf. p. 75).
- SMOOT, G. F. et al. (1992). « Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps ». In : *ApJ* 396, p. L1–L5. DOI : [10.1086/186504](#) (cf. p. 31).
- SNOWDEN, S. L., M. J. FREYBERG, P. P. PLUCINSKY, J. H. M. M. SCHMITT, J. TRUEMPER, W. VOGES, R. J. EDGAR, D. MCCAMMON et W. T. SANDERS (1995). « First Maps of the Soft X-Ray Diffuse Background from the ROSAT XRT/PSPC All-Sky Survey ». In : *ApJ* 454, p. 643. DOI : [10.1086/176517](#) (cf. p. 149).
- SOERGEL, B. et al. (2016). « Detection of the kinematic Sunyaev-Zel'dovich effect with DES Year 1 and SPT ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1603.03904](#) (cf. p. 62).
- SPRINGEL, V. et al. (2005). « Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars ». In : *Nature* 435, p. 629–636. DOI : [10.1038/nature03597](#). eprint : [astro-ph/0504097](#) (cf. p. 58).
- SUNYAEV, R. A. et Y. B. ZELDOVICH (1970). « The Spectrum of Primordial Radiation, its Distortions and their Significance ». In : *Comments on Astrophysics and Space Physics* 2, p. 66 (cf. p. 62).
- (1972). « The Observations of Relic Radiation as a Test of the Nature of X-Ray Radiation from the Clusters of Galaxies ». In : *Comments on Astrophysics and Space Physics* 4, p. 173 (cf. p. 62).
- (1975). « The velocity of clusters of galaxies relative to the microwave background. The possibility of its measurement ». In : *NASA STI/Recon Technical Report N 80* (cf. p. 62).
- TARRIO, P., J.-B. MELIN, M. ARNAUD et G. W. PRATT (2016). « Joint signal extraction from galaxy clusters in X-ray and SZ surveys : A matched-filter approach ». In : *ArXiv e-prints*. arXiv : [1604.06107](#) (cf. p. 128, 141, 154, 155, 174).
- TAUBER, J. A. et al. (2010). « Planck pre-launch status : The Planck mission ». In : *A&A* 520, A1, A1. DOI : [10.1051/0004-6361/200912983](#) (cf. p. 66, 67).
- TINKER, J. L., B. E. ROBERTSON, A. V. KRAVTSOV, A. KLYPIN, M. S. WARREN, G. YEPES et S. GOTTLÖBER (2010). « The Large-scale Bias of Dark Matter Halos : Numerical Calibration and Model Tests ». In : *ApJ* 724, p. 878–886. DOI : [10.1088/0004-637X/724/2/878](#). arXiv : [1001.3162](#) (cf. p. 52).
- TINKER, J., A. V. KRAVTSOV, A. KLYPIN, K. ABAZAJIAN, M. WARREN, G. YEPES, S. GOTTLÖBER et D. E. HOLZ (2008). « Toward a Halo Mass Function for Precision Cosmology : The Limits of Universality ». In : *ApJ* 688, 709–728, p. 709–728. DOI : [10.1086/591439](#). arXiv : [0803.2706](#) (cf. p. 52, 132).
- TOLMAN, R. C. (1934). « Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models ». In : *Proceedings of the National Academy of Science* 20, p. 169–176. DOI : [10.1073/pnas.20.3.169](#) (cf. p. 46).
- URRY, C. M. et P. PADOVANI (1995). « Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei ». In : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 107, p. 803. DOI : [10.1086/133630](#). eprint : [astro-ph/9506063](#) (cf. p. 56, 57).

- VERDIER, L., J.-B. MELIN, J. G. BARTLETT, C. MAGNEVILLE, N. PALANQUE-DELABROUILLE et C. YÈCHE (2016). « Quasar host environments : The view from Planck ». In : *A&A* 588, A61, A61. DOI : [10.1051/0004-6361/201527431](#). arXiv : [1509.07306](#) (cf. p. 93).
- VERNALEO, J. C. et C. S. REYNOLDS (2006). « AGN Feedback and Cooling Flows : Problems with Simple Hydrodynamic Models ». In : *ApJ* 645, p. 83–94. DOI : [10.1086/504029](#). eprint : [astro-ph/0511501](#) (cf. p. 55).
- VOGES, W. et al. (1999). « The ROSAT all-sky survey bright source catalogue ». In : *A&A* 349, p. 389–405. eprint : [astro-ph/9909315](#) (cf. p. 152, 155, 157).
- WALKER, A. G. (1933). « Distance in an expanding universe ». In : *MNRAS* 94, p. 159. DOI : [10.1093/mnras/94.2.159](#) (cf. p. 6).
- WANG, T. et al. (2016). « Discovery of a Galaxy Cluster with a Violently Starbursting Core at $z=2.506$ ». In : *ApJ* 828, 56, p. 56. DOI : [10.3847/0004-637X/828/1/56](#). arXiv : [1604.07404](#) (cf. p. 64).
- WARREN, M. S., B. C. BROMLEY, R. LAFLAMME, W. H. ZUREK et J. SALMON (2001). « Determining the Mass of the Universe ». In : *NASA STI/Recon Technical Report N 1* (cf. p. 52).
- WEINBERG, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press (cf. p. 63).
- WHITE, M. et W. HU (1997). « The Sachs-Wolfe effect. » In : *A&A* 321, p. 8–9. eprint : [astro-ph/9609105](#) (cf. p. 32).
- ZIMMERMANN, H. U. (1992). « The ROSAT Mission ». In : *DATA ANALYSIS IN ASTRONOMY - IV P. 115, 1992*, p. 115+ (cf. p. 151).
- ZWICKY, F. (1937). « On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae ». In : *ApJ* 86, p. 217. DOI : [10.1086/143864](#) (cf. p. 25).

Titre : Détection de structures par combinaison des données Planck et BOSS et détection simultanée d'amas de galaxies dans les données Planck et ROSAT

Mots clés : Cosmologie, Amas de galaxies, Filtrage, Planck, SDSS-BOSS, ROSAT

Résumé : Issus de l'effondrement gravitationnel des fluctuations de matière primordiales, les amas de galaxies sont constitués d'un halo de matière noire, d'un plasma de baryon ou « gaz chaud » et de galaxies. Le comptage des amas apporte des contraintes fortes sur la cosmologie. Mon travail consiste à améliorer la détection de la composante de gaz chaud des amas, à la fois pour des structures proches et lointaines. Ce gaz chaud est détectable dans les cartes du satellite *Planck* par effet Sunyaev-Zel'dovich et dans les cartes du satellite *ROSAT* par rayonnement de freinage.

La première partie de cette thèse consiste à détecter du gaz chaud dans les cartes de *Planck* à la position des quasars de l'expérience *BOSS*, donc dans des structures lointaines.

Le signal est dominé par une émission de type poussière. J'ai donc élaboré un filtre capable d'extraire un signal de gaz chaud sous-dominant et de le séparer de l'émission de poussière. Le signal de gaz chaud obtenu par cette approche est significatif pour les structures à redshift $z > 2.5$.

La seconde partie de cette thèse, la détection simultanée, est dédiée à la construction d'un filtre capable d'extraire des amas (à $z < 1.5$) individuellement dans les données *ROSAT* et adapté à la statistique du bruit. Ce filtre est en outre conçu dans la perspective d'être combiné avec le filtre utilisé pour détecter les amas dans les données *Planck*. L'objectif final étant d'obtenir plus d'amas moins massifs.

Title : Detection of structures by combining Planck and BOSS data and simultaneous detection of galaxy clusters in Planck and ROSAT data

Keywords : Cosmology, Galaxy clusters, Filtering, Planck, SDSS-BOSS, ROSAT

Abstract : Originating from the gravitational collapse of the primordial fluctuations of matter, galaxy clusters are the mixture of a dark matter halo, a baryonic plasma also called « hot gas » and several galaxies. Cluster counts provide stringent constraints on cosmology.

Improving the detection of the hot gas component in nearby or distant structures is the main goal of my work. We can detect this hot gas in the *Planck* satellite maps thanks to the Sunyaev-Zel'dovich effect and in the *ROSAT* satellite maps by bremsstrahlung.

The first part of my thesis is dedicated to the detection of hot gas in *Planck* maps at the positions of *BOSS* quasars, so in distant structures.

Dust-like emission dominates our signal. I developed a new filter in order to separate the possible sub-dominant hot gas emission from the dust one. I get a significant hot gas signal for structures with redshift $z > 2.5$.

In the second part of the thesis, the simultaneous detection, I build a filter suited for extracting clusters ($z < 1.5$) individually in the *ROSAT* data respecting the noise statistics. This filter is also designed to be combined with the filter used for detecting clusters in *Planck* maps. Increasing the number of less massive clusters will be the final goal.