Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions

Diego Izquierdo

NNT : 2016SACLS345

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay préparée à l' Université Paris-Sud

Ecole doctorale n°574
École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)
Établissement d'accueil : École normale supérieure

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

par

M. Diego Izquierdo

Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions

Thèse présentée et soutenue à l'École normale supérieure, le 14 octobre 2016.

Composition du Jury :

M.	Jean-Louis Colliot-Thélène	Directeur de recherche émérite Université Paris-Sud	(Président du jury)
M.	David Harari	Professeur des universités Université Paris-Sud	(Directeur de thèse)
M.	Bruno Kahn	Directeur de recherche Université Pierre et Marie Curie	(Examinateur)
M.	Cédric Pépin	Maître de conférences Université Paris 13	(Examinateur)
M.	Alexei Skorobogatov	Professor of Pure Mathematics Imperial College	(Examinateur)
M.	Tamás Szamuely	Research advisor Alfréd Rényi Institute of Mathematics	(Examinateur)

Rapporteurs (absents le jour de la soutenance) :

M.	David Harbater	Distinguished Professor	University of Pennsylvania
M.	Dino Lorenzini	Distinguished Research Professor	University of Georgia

Résumé

Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'arithmétique de certains corps de fonctions. Nous cherchons à établir dans un premier temps des théorèmes de dualité arithmétique sur ces corps, pour les appliquer ensuite à l'étude des points rationnels sur certaines variétés algébriques.

Dans les trois premiers chapitres, nous travaillons sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps local supérieur (comme $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p((t))$, $\mathbb{C}((t))$ ou $\mathbb{C}((t))((u))$). Dans le premier chapitre, nous établissons sur un tel corps des théorèmes de dualité arithmétique « à la Poitou-Tate » pour les modules finis, les tores, et même pour certains complexes de tores. Nous montrons aussi l'existence, sous certaines hypothèses, de certaines portions des suites exactes de Poitou-Tate correspondantes. Ces résultats sont appliqués dans le deuxième chapitre à l'étude du principe local-global pour les algèbres simples centrales, de l'approximation faible pour les tores, et des obstructions au principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes. Dans le troisième chapitre, nous nous penchons sur les variétés abéliennes et établissons des théorèmes de dualité arithmétique « à la Cassels-Tate ». Cela demande aussi de mener une étude fine des variétés abéliennes sur les corps locaux supérieurs.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous travaillons sur les corps des fractions de certaines algèbres locales normales de dimension 2 (typiquement $\mathbb{C}((x,y))$ ou $\mathbb{F}_p((x,y))$). Nous établissons d'abord un théorème de dualité en cohomologie étale « à la Artin-Verdier » dans ce contexte. Cela nous permet ensuite de montrer des théorèmes de dualité arithmétique en cohomologie galoisienne « à la Poitou-Tate » pour les modules finis et les tores. Nous appliquons finalement ces résultats à l'étude de l'approximation faible pour les tores et des obstructions au principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes.

Mots-clefs : corps de fonctions, dualité arithmétique, groupe de Tate-Shafarevich, Poitou-Tate, Cassels-Tate, tores, groupes linéaires, variétés abéliennes, principe local-global, torseurs, groupe de Brauer, obstruction de Brauer-Manin, approximation faible, cohomologie galoisienne, corps locaux supérieurs, anneaux locaux de dimension 2.

Abstract

Duality and local-global principle over function fields

In this thesis, we are interested in the arithmetic of some function fields. We first want to establish arithmetic duality theorems over those fields, in order to apply them afterwards to the study of rational points on algebraic varieties.

In the first three chapters, we work on the function field of a curve defined over a higher-dimensional local field (such as $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p((t))$, $\mathbb{C}((t))$ or $\mathbb{C}((t))((u))$). In the first chapter, we establish "Poitou-Tate type" arithmetic duality theorems over such fields for finite modules, tori and even some complexes of tori. We also prove the existence, under some hypothesis, of parts of the corresponding Poitou-Tate exact sequences. These results are applied in the second chapter to the study of the local-global principle for central simple algebras, of weak approximation for tori, and of obstructions to local-global principle for torsors under connected linear algebraic groups. In the third chapter, we are interested in abelian varieties and we establish "Cassels-Tate type" arithmetic duality theorems. To do so, we also need to carry out a precise study of abelian varieties over higher-dimensional local fields.

In the fourth and last chapter, we work on the field of fractions of some 2-dimensional normal local algebras (such as $\mathbb{C}((x,y))$ or $\mathbb{F}_p((x,y))$). We first establish in this context an "Artin-Verdier type" duality theorem in étale cohomology. This allows us to prove "Poitou-Tate type" arithmetic duality theorems in Galois cohomology for finite modules and tori. In the end, we apply these results to the study of weak approximation for tori and of obstructions to local-global principle for torsors under connected linear algebraic groups.

Keywords : function fields, arithmetic duality, Tate-Shafarevich group, Poitou-Tate, Cassels-Tate, tori, linear algebraic groups, abelian varieties, local-global principle, torsors, Brauer group, Brauer-Manin obstruction, weak approximation, Galois cohomology, higher-dimensional local fields, 2-dimensional local rings.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour m'avoir guidé pendant ces trois ans de thèse, pour tout ce qu'il m'a appris, son soutien constant, sa disponibilité, son humanité. Il a toujours trouvé le temps pour discuter avec moi, pour répondre à mes questions, pour relire mon travail. Il a sans cesse stimulé ma curiosité et il m'a encouragé à tout moment. Ça a été un véritable plaisir de travailler avec lui. Je lui témoigne toute mon estime et ma gratitude. Merci pour tout, David ! J'espère que nous pourrons continuer à travailler ensemble !

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement David Harbater, avec qui j'ai pu avoir de très intéressantes discussions lors d'un workshop à Philadelphie, ainsi que Dino Lorenzini, avec qui j'ai pu avoir des conversations enrichissantes par mail. C'est un grand honneur pour moi qu'ils aient accepté de rapporter cette thèse. Je leur en suis très reconnaissant.

Je voudrais également remercier vivement Jean-Louis Colliot-Thélène, Bruno Kahn, Cédric Pépin, Alexei Skorobogatov et Tamás Szamuely de faire partie de mon jury de thèse. Je tiens à insister sur le rôle fondamental qu'ont joué Jean-Louis Colliot-Thélène et Tamás Szamuely, par l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, leurs conseils, leurs encouragements et les nombreuses discussions mathématiques que j'ai pu partager avec eux.

Je remercie aussi tous les mathématiciens avec qui j'ai pu partager de fort intéressantes discussions et/ou qui se sont intéressés à mon travail. Je pense notamment à Cyril Demarche, Yong Hu, Giancarlo Lucchini-Arteche et Olivier Wittenberg, mais aussi à Olivier Benoist, Matthieu Florence, Philippe Gille, Yonathan Harpaz, Julia Hartmann, Daniel Krashen, Yongqi Liang, Raman Parimala, Alena Pirutka, Arne Smeets...

Je voudrais aussi exprimer toute ma gratitude à mes anciens professeurs de mathématiques qui m'ont toujours encouragé et poussé à aller plus loin. Je pense notamment à Marco Castrillón, Philippe Espéret, Mme. García-Vergnolle, María Gaspar, Josep Grané, Alain Henri, Joaquín Hernández, Annick Mahieux et Merche Sánchez. Je remercie sincèrement mes professeurs de l'ENS et d'Orsay, notamment Olivier Debarre et Jean-Benoît Bost, ainsi que mon directeur de mémoire de M2, Florian Herzig, pour m'avoir transmis leur passion pour la géométrie algébrique et la théorie des nombres.

Un grand merci aussi à tous les membres du DMA, qui m'ont accueilli à bras ouverts. Je remercie tout particulièrement ceux dont le bureau est "sous les toits" et avec qui j'ai pu partager de nombreuses pauses café et pauses déjeuner : Alberto, Antoine, Arthur-César, Bertrand, Farhad, Florent, Ilia, Jérémy, Laurent, Margaret, Nicolas, Noé, Omid, Quentin, Selim, Sylvain, Tony, Zoé... Je pense aussi à Claude, Guillaume, Joseba, Maxime, Patrick... Je remercie également ceux avec qui j'ai partagé dans la bonne humeur cette expérience qu'est le secrétariat du concours : Bastien, Fabrice, Gilles, Jérémy, Joseph, Ludivine, Noureddine, Zhen-tao. Je voudrais finalement exprimer toute ma gratitude au personnel administratif du DMA, qui a toujours été d'une efficacité impressionnante : Bénédicte Auffray, Zaina Elmir, Lara Morise, Albane Trémeau, Laurence Vincent.

Pendant ces trois années de thèse, j'ai pris un énorme plaisir à enseigner la théorie de Galois et l'algèbre commutative et à introduire des élèves à la géométrie algébrique et la théorie des nombres. Je voudrais donc remercier sincèrement les professeurs avec qui j'ai travaillé (ou je travaille), Jean-François Dat et Jan Nekovář. Je remercie aussi tous les élèves qui ont suivi (ou suivent) mes TD : j'espère avoir réussi à leur transmettre le goût pour l'algèbre.

Je voudrais également remercier tous les doctorants d'Orsay, avec qui j'ai pu partager des groupes de travail, de nombreux repas et des pauses café : Arthur, Carolina, Céline, Cong, Davide, Élodie, Linxiao, Lucie, Lucile, Marco, Pierre-Antoine, Ramón, Robert, Salim, Sasha, Thibault, Tiago, Valérie, Vincent, Yang... Et je remercie aussi Valérie Lavigne et Florence Rey, qui m'ont toujours aidé à m'en sortir avec les démarches administratives.

Je tiens bien sûr à remercier tous les amis, mathématiciens ou non, sur qui j'ai toujours pu compter : Alberto, Aude, Benoît, Cagri, Clara, Clément, Cyril, Daniel, David, Elisa, Florence, Florent, Florian, Gabriel, Guillaume, Hongzhou, Jaime, Javier, Jhih-Huang, Joël, Kathleen, Kévin, Lise, Mariore, Maxime, Maxime, Médéric, Miguel, Nicolas, Pedro, Sébastien, Simon, Thibault, Torben, Victoria, Weikun, Yichao, Yue, Zhizhong, Zongyan...

J'exprime finalement ma profonde gratitude à toute ma famille, et en particulier à mes parents, Loren et Javier, qui m'ont toujours soutenu inconditionnellement.

Table des matières

Introduction

1 Principe local-global sur les corps de nombres

Cette thèse porte sur les points rationnels des variétés sur certains corps de fonctions. Mais pour comprendre les motivations, il convient de rappeler brièvement le cas classique des corps de nombres.

1.1 Principe local-global et obstruction de Brauer-Manin

« *On donne une équation diophantienne à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : on demande de trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels.* »

David Hilbert, Congrès International, 1900.

Le dixième problème de Hilbert demande de trouver un algorithme déterminant si une équation diophantienne a des solutions entières. C'est en 1970, après les travaux de Davis, Putnam et Robinson, que Matjasevich démontre qu'un tel algorithme n'existe pas. Il est alors naturel de se demander s'il existe un algorithme permettant de déterminer si une équation diophantienne a des solutions rationnelles (non nécessairement entières). Autrement dit, étant donnée une variété algébrique sur un corps de nombres, peut-on déterminer si elle possède des points rationnels ? Cette question, qui est au coeur de la géométrie arithmétique, reste ouverte de nos jours. Le principe local-global est l'un des principaux outils qui ont été développés pour l'attaquer.

Soient K un corps de nombres et X une K-variété algébrique. Soit Ω_K l'ensemble des places de K, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs absolues non triviales sur K à équivalence près. Pour $v \in \Omega_K$, on note K_v le complété de K par rapport à v. Il est clair que, si V possède des points rationnels, alors V possède des K_v-points pour chaque $v \in \Omega_K$. Il est alors naturel de se poser des questions à propos de la réciproque :

Définition 1.1. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit que la famille $\mathcal{F}$ vérifie le **principe local-global** (ou le principe de Hasse) si tout élément de $\mathcal{F}$ ayant des K_v-points pour tout $v \in \Omega_K$ a en fait des points rationnels. Autrement dit :*

$$\forall V \in \mathcal{F}, \prod_{v \in \Omega_K} V(K_v) \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

L'un des premiers exemples non triviaux de famille vérifiant le principe de Hasse est donné par le célèbre théorème de Hasse-Minkowski :

Théorème 1.2. (Minkowski 1890, Hasse 1924)
Toute quadrique dans $\mathbb{P}^n$ vérifie le principe local-global.

Ainsi, le principe local-global est toujours vérifié en degré au plus 2. Voici un autre exemple classique, aussi dû à Hasse, qui découle de la théorie du corps de classes :

Théorème 1.3. (Hasse 1924)
Soient L/K une extension cyclique et $\omega_1, ..., \omega_n$ une K-base de L. Pour chaque $a \in K^\times$, l'équation normique :

$$N_{L/K}(x_1\omega_1 + ... + x_n\omega_n) = a$$

définit une K-variété qui vérifie le principe local-global.

Ce théorème est en fait un corollaire de l'axiome du corps de classes global.

Depuis les travaux de Hasse, le principe local-global a été établi pour un certain nombre de familles de variétés. Mais de nombreux contre-exemples ont aussi été trouvés. L'un des plus célèbres, qui montre que le principe de Hasse est faux pour les courbes cubiques dans $\mathbb{P}^2$, est dû à Selmer :

Théorème 1.4. (Selmer 1951)
Soit V la courbe de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ définie par l'équation

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0.$$

Alors $V(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $V(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ pour tout premier p, mais $V(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Ainsi, si d'après le théorème 1.2 le principe local-global est toujours vrai en degré au plus 2, le théorème précédent montre que le principe local-global tombe en défaut dès le degré 3. Voici un autre contre-exemple classique, qui est le pendant du théorème 1.3 :

Théorème 1.5. (Hasse 1934)
Soient $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$. Soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ une K-base de L. Alors l'équation normique :

$$N_{L/K}(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4) = -1$$

définit une K-variété qui ne vérifie pas le principe local-global.

En tenant compte des contre-exemples précédents, il est alors naturel de chercher à comprendre les obstructions au principe local-global. Pour ce faire, il convient d'introduire le groupe de Brauer (cohomologique) de V, que l'on notera Br V : c'est par définition le groupe de cohomologie étale $H^2_{\text{ét}}(V, \mathbb{G}_m)$. Ce groupe coïncide avec le groupe de Brauer au sens des algèbres d'Azumaya sur V lorsque V est supposée quasi-projective lisse. En particulier, si $V = \text{Spec } K$, le groupe Br K classifie les K-algèbres simples centrales à équivalence près. Ce groupe est bien compris grâce à la théorie du corps de classes. En effet, la théorie du corps de classes local fournit pour chaque place $v \in \Omega_K$ un morphisme injectif $\text{inv}_v : \text{Br } K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ce morphisme est un isomorphisme dès que v est finie (ie K_v est un corps p-adique). Lorsque v est réelle (ie $K_v = \mathbb{R}$), le morphisme inv_v identifie Br K_v à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, et lorsque v est complexe (ie $K_v = \mathbb{C}$), le groupe Br K_v est trivial. Le groupe Br K peut alors être calculé grâce à l'un des théorèmes principaux de la théorie du corps de classes global, à savoir la suite exacte de Brauer-Hasse-Noether :

$$0 \longrightarrow \text{Br } K \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_K} \text{Br } K_v \xrightarrow{\sum_{v\in\Omega_K} \text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Revenons maintenant au cas où V est une K-variété quelconque. Considérons un modèle lisse $\mathcal{V}$ de V sur un ouvert non vide U du spectre de l'anneau des entiers de K. En notant $\mathbb{A}_K$ l'anneau des adèles de K, on dispose de l'ensemble des points adéliques de V :

$$V(\mathbb{A}_K) = \varinjlim_{\substack{U' \subseteq U \\ U' \neq \emptyset}} \prod_{v \in \Omega_K \setminus U'} V(K_v) \times \prod_{v \in (U')^{(1)}} \mathcal{V}(\mathcal{O}_v).$$

On peut alors définir un accouplement, dit de Brauer-Manin :

$$\begin{aligned} BM : V(\mathbb{A}_K) \times \text{Br } V &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((p_v)_{v\in\Omega_K}, \alpha) &\mapsto \sum_{v \in \Omega_K} \text{inv}_v(p_v^*\alpha) \end{aligned}$$

où $p_v^* : \text{Br } V \to \text{Br } K_v$ est le morphisme induit par $p_v \in V(K_v)$ par fonctorialité contravariante du groupe de Brauer. En injectant diagonalement $V(K)$ dans $V(\mathbb{A}_K)$, la suite exacte de Brauer-Hasse-Noether montre alors que $V(K)$ est contenu dans l'orthogonal $V(\mathbb{A}_K)^{\text{Br}}$ de Br V pour l'accouplement BM. Cela permet de définir une obstruction au principe local-global :

Définition 1.6. (Manin 1970)
*Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés. On dit que **l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe local-global** pour les éléments de $\mathcal{F}$ si :*

$$\forall V \in \mathcal{F}, V(\mathbb{A}_K)^{Br} \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

Il existe des K-variétés pour lesquelles l'obstruction de Brauer-Manin n'est pas la seule obstruction au principe local-global. Par exemple, dans [Sko99], Skorobogatov exhibe une surface bielliptique V sur $\mathbb{Q}$ telle que $V(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ et $V(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Malgré cela, il existe d'importantes familles de K-variétés pour lesquelles la seule obstruction au principe local-global est bien l'obstruction de Brauer-Manin. Dans [CT03], Colliot-Thélène conjecture que la seule obstruction au principe local-global pour les K-variétés propres, lisses, rationnellement connexes est l'obstruction de Brauer-Manin. L'un des résultats les plus célèbres dans ce sens est dû à Sansuc :

Théorème 1.7. (Sansuc 1981 - [San81])
L'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe local-global pour les (compactifications lisses de) K-espaces principaux homogènes sous des K-groupes linéaires connexes.

Pour prouver ce résultat, Sansuc fait appel à un théorème de dualité arithmétique, le théorème de Poitou-Tate, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

1.2 Théorèmes de dualité arithmétique

La plupart des théorèmes de dualité arithmétique pour la cohomologie galoisienne des groupes algébriques commutatifs sur des corps p-adiques ou sur des corps de nombres ont été annoncés par Tate dans les années 1960. Les groupes algébriques concernés sont divers : les groupes finis, les tores, les variétés abéliennes.

Commençons par le cas (plus simple) des corps p-adiques. Fixons K un corps de nombres et v une place finie de K.

Théorème 1.8. (Tate 1957-1962)
Soit $G = Gal(\overline{K_v}/K_v)$ le groupe de Galois absolu de K_v.
(i) Soient F un G-module discret fini et $F' = Hom(F, \overline{K_v}^{\times})$ son dual de Cartier. Pour $0 \leq r \leq 2$, le cup-produit induit un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(K_v, F) \times H^{2-r}(K_v, F') \to Br\, K_v \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Soient T un K_v-tore et $\hat{T}$ son module des caractères. Pour $0 \leq r \leq 2$, le cup-produit induit un accouplement :

$$H^r(K_v, T) \times H^{2-r}(K_v, \hat{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui met en dualité parfaite :
- *le complété profini de $H^0(K_v, T)$ et le groupe discret de torsion $H^2(K_v, \hat{T})$;*
- *les groupes finis $H^1(K_v, T)$ et $H^1(K_v, \hat{T})$;*
- *le groupe discret de torsion $H^2(K_v, T)$ et le complété profini de $H^0(K_v, \hat{T})$.*

(iii) Soient A une variété abélienne sur K_v et A^t la variété abélienne duale. Alors il existe un accouplement canonique :

$$A(K_v) \times H^1(K_v, A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui met en dualité parfaite le groupe profini $A(K_v)$ et le groupe discret de torsion $H^1(K_v, A^t)$.

Pour pouvoir énoncer des théorèmes de dualité arithmétique sur les corps de nombres, nous avons besoin d'introduire les groupes de Tate-Shafarevich :

Définition 1.9. *Soit M un $Gal(\overline{K}/K)$-module discret. Pour $r \in \{1,2\}$, on définit les* ***groupes de Tate-Shafarevich*** *:*

$$Ш^r(K,M) = Ker\left(H^r(K,M) \to \prod_{v\in\Omega_k} H^r(K_v,M)\right).$$

Théorème 1.10. *Soit $G = Gal(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K.*

(i) (Dualité de Poitou-Tate pour les modules finis, 1962-1967)
Soient F un G-module discret fini et $F' = Hom(F, \overline{K}^{\times})$ son dual de Cartier. Il existe un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^1(K,F) \times Ш^2(K,F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) (Dualité de Poitou-Tate pour les tores, 1962-1967)
Soient T un K-tore et $\hat{T}$ son module des caractères. Pour $r \in \{1,2\}$, il existe un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^r(K,T) \times Ш^{3-r}(K,\hat{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(iii) (Dualité de Cassels-Tate, 1962-1964)
Soient A une variété abélienne sur K et A^t la variété abélienne duale. Alors il existe un accouplement canonique :

$$Ш^1(K,A) \times Ш^1(K,A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

dont le noyau à gauche (resp. à droite) est le sous-groupe divisible maximal de $Ш^1(K,A)$ (resp. $Ш^1(K,A^t)$).

Expliquons maintenant brièvement comment on peut étudier l'obstruction de Brauer-Manin et obtenir le théorème de Sansuc (théorème 1.7) pour les espaces principaux homogènes sous des tores à l'aide du théorème précédent. Pour ce faire, on se donne un K-tore T et un K-espace principal homogène V sous T tel que $V(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$. On veut alors montrer que $V(K) \neq \emptyset$. Les espaces principaux homogènes sous T sont classifiés à isomorphisme près par le groupe de cohomologie $H^1(K,T)$, et un espace principal homogène W sous T a un point rationnel si, et seulement si, sa classe $[W]$ dans $H^1(K,T)$ est triviale. Par conséquent, le groupe $Ш^1(K,T)$ mesure exactement l'obstruction au principe local-global pour les torseurs sous T, et il contient $[V]$ puisqu'on a supposé $V(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. L'idée consiste alors à comparer l'accouplement de Brauer-Manin :

$$BM : V(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Br}\, V \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

à l'accouplement de Poitou-Tate :

$$PT : Ш^1(K,T) \times Ш^2(K,\hat{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

du théorème 1.10(ii). Pour ce faire, Sansuc construit un sous-groupe $Б(V)$ de Br V contenant l'image de Br K et un morphisme $B : Ш^2(K,\hat{T}) \to Б(V)/\mathrm{Br}\, K$ tel que pour tout $\beta \in Ш^2(K,\hat{T})$ et pour tout $(p_v)_v \in V(\mathbb{A}_K)$, on ait :

$$PT([V],\beta) = BM((p_v)_v, B(\beta)).$$

En choisissant $(p_v)_v \in V(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}}$, on obtient que pour tout $\beta \in Ш^2(K,\hat{T})$, on a $PT([V],\beta) = 0$. Il suffit alors d'appliquer la dualité de Poitou-Tate pour les tores (théorème 1.10(ii)) pour obtenir que $[V] = 0$, autrement dit que $V(K) \neq \emptyset$.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons que la dualité de Cassels-Tate (théorème 1.10(iii)) permet aussi d'obtenir des résultats concernant le principe local-global pour les torseurs sous des variétés abéliennes :

Théorème 1.11. (Manin 1971 - [Man71])
Soient K un corps de nombres et A une variété abélienne sur K. Supposons que $Ш^1(K,A)$ soit fini. La seule obstruction au principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous A est l'obstruction de Brauer-Manin.

La finitude du groupe $Ш^1(K,A)$, qui est conjecturée depuis le début des années 1960 et qui est étroitement liée à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, est utilisée pour affirmer que l'accouplement du théorème 1.10(iii) :

$$Ш^1(K,A) \times Ш^1(K,A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est non dégénéré. Elle est connue pour certaines courbes elliptiques (par exemple [Rub87] et [Kol88]).

1.3 Approximation faible

Le principe local-global permet d'étudier l'existence de points rationnels sur les variétés algébriques sur les corps de nombres. Une fois que l'on sait qu'une telle variété a des points rationnels, il est naturel de se demander si elle en possède « beaucoup ». C'est pourquoi on introduit la notion d'approximation faible.

Soient K un corps de nombres et V une K-variété lisse géométriquement intègre telle que $V(K) \neq \emptyset$. Pour $v \in \Omega_K$, on munit $V(K_v)$ de la topologie v-adique. On munit ensuite $V(K_\Omega) = \prod_{v\in\Omega_K} V(K_v)$ de la topologie produit. On remarquera que $V(K_\Omega) = V(\mathbb{A}_K)$ lorsque V est propre d'après le critère valuatif de propreté.

Définition 1.12. *On dit que V vérifie l'**approximation faible** si l'ensemble $V(K)$ est dense dans $V(K_\Omega)$.*

Supposons désormais que V est un K-tore, que l'on notera plutôt T. Afin de comprendre le défaut d'approximation faible pour T, il convient de compléter l'énoncé du théorème 1.10 avec une suite exacte à 9 termes qui permet de mieux contrôler les groupes de Tate-Shafarevich de T. Pour simplifier, supposons que K est totalement imaginaire et considérons un K-tore T de module des caractères $\hat{T}$. Soit Ω_K^f l'ensemble des places finies de K. Pour chaque groupe abélien A, on note A_{tors} le sous-groupe de torsion de A ; si de plus A est un groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), on note aussi $A^\wedge$ son complété profini et A^D le groupe des morphismes continus de A dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Théorème 1.13. (Tate 1962-1967)
On rappelle que K est supposé totalement imaginaire. Il existe une suite exacte à 9 termes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(K,\hat{T})^\wedge \arrow[r] & \mathbb{P}^0(\hat{T})^\wedge \arrow[r] & H^2(K,T)^D \arrow[d] \\ & H^1(K,T)^D \arrow[d] & \mathbb{P}^1(\hat{T}) \arrow[l] & H^1(K,\hat{T}) \arrow[l] \\ & H^2(K,\hat{T}) \arrow[r] & \mathbb{P}^2(\hat{T})_{tors} \arrow[r] & (H^0(K,T)^D)_{tors} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}^r(\hat{T})$ désigne un certain produit restreint des $H^r(K_v,\hat{T})$ pour $v \in \Omega_K^f$.

En utilisant le théorème 1.10(ii) ainsi que la dernière ligne de la suite exacte précédente, il est alors possible d'insérer le défaut d'approximation faible pour un tore dans une suite exacte, similaire à la suite duale de Cassels-Tate :

Théorème 1.14. (Voskresenskii, Sansuc 1981 - [San81])
Il existe une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v \in \Omega_K^f} T(K_v) \to \text{Ш}^2_\omega(\hat{T})^D \to \text{Ш}^1(T) \to 0,$$

où $\text{Ш}^2_\omega(\hat{T})$ désigne le sous-groupe de $H^2(K,\hat{T})$ constitué des éléments dont la restriction à $H^2(K_v,\hat{T})$ est triviale pour presque tout $v \in \Omega_K$ et $\overline{T(K)}$ l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in \Omega_K^f} T(K_v)$. Les groupes $\text{Ш}^2_\omega(\hat{T})$ et $\text{Ш}^1(T)$ sont finis.

À l'aide de cette suite, il est ensuite possible de comprendre les obstructions à l'approximation faible pour les tores sur K.

2 Principe local-global sur les corps de fonctions : résultats connus antérieurement

Soient k un corps et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. Soit $K = k(X)$ le corps des fonctions de X. Peut-on obtenir des résultats similaires à ceux du paragraphe précédent en remplaçant les corps de nombres par le corps K ?

Commençons par le cas classique où $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini de caractéristique p. Dans cette situation, les places de $K = \mathbb{F}_q(X)$ sont en bijection avec les points de codimension 1 de la courbe X. C'est un fait bien connu en arithmétique que le corps K a un comportement très similaire aux corps de nombres, si ce n'est que K est de caractéristique positive et qu'il n'a pas de places réelles. Ainsi, dans le théorème 1.8 :

- l'assertion (i) reste valable si l'on suppose l'ordre de F premier avec p,
- les assertions (ii) et (iii) restent valables telles quelles (théorèmes I.2.3 et III.7.8 de [Mil06]).

De manière similaire, dans le théorème 1.10,

- l'assertion (i) reste valable si l'on suppose l'ordre de F premier avec p,
- les assertions (ii) et (iii) restent valables telles quelles (théorème 1.2 de [GA09]).

Ces théorèmes de dualité permettent d'établir des analogues des théorèmes de Sansuc (théorème 1.7) et de Manin (théorème 1.11) : si G est un K-tore ou une variété abélienne sur K dont le premier groupe de Tate-Shafarevich est fini, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe local-global pour les K-espaces principaux homogènes sous G qui sont déployés par une extension de K de degré premier à p.

Lorsque k n'est pas un corps fini, comme l'ensemble Ω_K des places de K (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de valuations discrètes sur K) n'est plus en bijection avec l'ensemble $X^{(1)}$ des points de codimension 1 de X, il est possible de définir le principe local-global de deux manières différentes :

Définition 2.1. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de K-variétés.*
(i) On dit que la famille $\mathcal{F}$ vérifie le ***principe local-global algébrique*** *si :*

$$\forall V \in \mathcal{F}, \prod_{v \in \Omega_K} V(K_v) \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

(ii) On dit que la famille $\mathcal{F}$ vérifie le ***principe local-global géométrique*** *si :*

$$\forall V \in \mathcal{F}, \prod_{v \in X^{(1)}} V(K_v) \neq \emptyset \Rightarrow V(K) \neq \emptyset.$$

Remarque 2.2. La terminologie introduite dans la définition précédente n'est pas standard.

Bien sûr, si une famille de variétés vérifie le principe local-global géométrique, elle vérifie aussi le principe local-global algébrique. Mais la réciproque est fausse : par exemple, les espaces principaux homogènes sous des $\mathbb{C}((t))(u)$-tores rationnels vérifient le principe local-global algébrique mais pas le principe local-global géométrique ([HHK15] et [CTH15]). Ainsi, les méthodes développées pour étudier le principe local-global algébrique et le principe local-global géométrique sont (pour l'instant) radicalement différentes.

Le principe local-global algébrique a d'abord été étudié par Harbater, Hartmann et Krashen dans les articles [HHK09], [HHK14] et [HHK15] à l'aide de techniques de patching lorsque k est un corps de valuation discrète complet et X possède un modèle projectif régulier. Ils ont en particulier montré le principe local-global algébrique pour les espaces principaux homogènes sous des K-groupes linéaires connexes rationnels lorsque le corps résiduel de k est algébriquement clos de caractéristique nulle ([HHK15]), ainsi que pour les espaces principaux homogènes sous certains K-groupes linéaires simplement connexes lorsque k est équicaractéristique ([HHK14]). Les techniques de patching ont par la suite été utilisées par Colliot-Thélène, Parimala et Suresh pour établir le principe local-global algébrique pour les formes quadratiques en au moins 3 variables et pour les espaces principaux homogènes sous certains groupes réductifs ([CTPS12]).

Parlons maintenant plus en détail du principe local-global géométrique. Ce point de vue a d'abord été adopté par Harari, Scheiderer et Szamuely pour étudier le cas où k est un corps p-adique ([HSz16] et [HSSz15]), puis par Harari et Colliot-Thélène pour étudier le cas où $k = \mathbb{C}((t))$ ([CTH15]). Dans les deux situations, les techniques utilisées sont de nature cohomologique et elles sont inspirées des méthodes décrites dans le paragraphe 1 dans le cas des corps de nombres. En particulier, elles s'appuient sur des théorèmes de dualité arithmétique.

Plaçons-nous d'abord dans le cas étudié par Colliot-Thélène et Harari, c'est-à-dire le cas où $k = \mathbb{C}((t))$. Le corps K, qui est le corps des fonctions de la $\mathbb{C}((t))$-courbe X, est alors de dimension cohomologique 2.

Définition 2.3. *Soit M un $Gal(\overline{K}/K)$-module discret. Pour $r \in \mathbb{N}$, on appelle **r-ième groupe de Tate-Shafarevich** de M le groupe :*

$$Ш^r(K,M) = Ker\left(H^r(K,M) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^r(K_v,M)\right).$$

Colliot-Thélène et Harari démontrent alors un théorème de dualité « à la Poitou-Tate » sur le corps K :

Théorème 2.4. (Colliot-Thélène, Harari, 2014 - [CTH15])
Soit X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur $k = \mathbb{C}((t))$ de corps des fonctions K. Soit $G = Gal(\overline{K}/K)$.

(i) Soient F un G-module discret fini d'ordre n et $F' = Hom(F,\mu_n)$. Alors il existe un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^1(K,F) \times Ш^2(K,F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Soient T un K-tore et $\hat{T}$ son module des caractères. Alors on a un accouplement :

$$Ш^1(K,T) \times Ш^2(K,\hat{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

qui est non dégénéré modulo le sous-groupe divisible maximal de $Ш^2(K,\hat{T})$*, ainsi qu'un accouplement :*

$$Ш^1(K,\hat{T}) \times Ш^2(K,T) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

qui est non dégénéré modulo le sous-groupe divisible maximal de $Ш^2(K,T)$*.*

Colliot-Thélène et Harari appliquent ensuite le théorème précédent à l'étude des obstructions au principe local-global géométrique pour les K-espaces principaux homogènes sous des groupes linéaires connexes : en particulier, ils montrent que, comme sur les corps de nombres, ces obstructions sont toujours contrôlées par le groupe de Brauer d'un tel torseur. Plus précisément, soient V un K-espace principal homogène sous un k-groupe linéaire connexe, et $\mathcal{V}$ un modèle lisse géométriquement intègre de V sur un ouvert non vide U de X. Posons :

$$V(\mathbb{A}_K) = \varinjlim_{U' \subseteq U} \prod_{v \in X \setminus U'} V(K_v) \times \prod_{v \in U^{(1)}} \mathcal{V}(\mathcal{O}_v),$$

où $\mathcal{O}_v$ désigne le complété de l'anneau local de X en v. Alors on peut définir exactement comme dans le paragraphe 1.1 un accouplement de Brauer-Manin :

$$BM : V(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Br}\, V \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On vérifie à l'aide de la loi de réciprocité de Weil que $V(K)$ est contenu dans l'orthogonal de Br V pour BM. Colliot-Thélène et Harari montrent alors le théorème suivant, qui est l'analogue du théorème de Sansuc (théorème 1.7) :

Théorème 2.5. (Colliot-Thélène, Harari, 2014 - [CTH15])
Soit X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur $k = \mathbb{C}((t))$ de corps des fonctions K. Soient G un K-groupe linéaire connexe et V un K-espace principal homogène sous G. Si l'orthogonal de Br V pour l'accouplement BM est non vide, alors V possède un point rationnel.

Finalement, Colliot-Thélène et Harari s'intéressent aussi à l'approximation faible pour les tores sur K et établissent une suite exacte analogue à la suite duale de Cassels-Tate (théorème 1.14) :

Théorème 2.6. (Colliot-Thélène, Harari, 2014 - [CTH15])
Soit T un K-tore. Il existe une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to Ш^2_\omega(K,\hat{T})^D \to Ш^2(K,\hat{T})^D \to 0,$$

où $Ш^2_\omega(\hat{T})$ *désigne le sous-groupe de* $H^2(K,\hat{T})$ *constitué des éléments dont la restriction à* $H^2(K_v,\hat{T})$ *est triviale pour presque tout* $v \in X^{(1)}$ *et où* $\overline{T(K)}$ *est l'adhérence de* $T(K)$ *dans* $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$*. De plus, le défaut d'approximation faible* $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)/\overline{T(K)}$ *est toujours fini.*

Passons maintenant aux travaux de Harari, Scheiderer et Szamuely. Ils étudient le cas où k est un corps p-adique. Le corps K, qui est le corps des fonctions de la k-courbe X, est alors de dimension cohomologique 3. En définissant comme avant les groupes de Tate-Shafarevich, Harari et Szamuely démontrent alors un théorème de dualité « à la Poitou-Tate » sur le corps K :

Théorème 2.7. (Harari, Szamuely, 2013 - [HSz16])
Soient k un corps p-adique et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k de corps des fonctions K. Soit $G = Gal(\overline{K}/K)$.

(i) Soient F un G-module discret fini d'ordre n et $F' = Hom(F, \mu_n^{\otimes 2})$. Alors, pour chaque $r \in \{1, 2, 3\}$, il existe un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^r(K, F) \times Ш^{4-r}(K, F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Soient T un K-tore et T' son tore dual, c'est-à-dire le tore dont le module des caractères est le module des cocaractères de T. Alors on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^1(K, T) \times Ш^2(K, T') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Forts de ce résultat, Harari et Szamuely se penchent sur les obstructions au principe local-global géométrique pour les K-espaces principaux homogènes sous des tores : en particulier, ils montrent que, si V est un tel torseur, l'obstruction n'est plus contrôlée par le groupe de Brauer $\mathrm{Br}\, V$ comme pour les corps de nombres ou les corps de fonctions de courbes sur $\mathbb{C}((t))$, mais par le groupe :

$$H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) := \varinjlim_n H^3(V, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Plus précisément, soient T un K-tore et V un K-espace principal homogène sous T. Soit $\mathcal{V}$ un modèle lisse géométriquement intègre de V sur un ouvert non vide U de X. Posons :

$$V(\mathbb{A}_K) = \varinjlim_{U' \subseteq U} \prod_{v \in X \setminus U'} V(K_v) \times \prod_{v \in (U')^{(1)}} \mathcal{V}(\mathcal{O}_v),$$

où $\mathcal{O}_v$ désigne la complétion de l'anneau local de X en v. Étant donné que, pour chaque $v \in X^{(1)}$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{inv}_v : H^3(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) := \varinjlim_n H^3(K_v, \mu_n^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

on peut construire un accouplement analogue à l'accouplement de Brauer-Manin pour les corps de nombres :

$$\begin{aligned} BM : V(\mathbb{A}_K) \times H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((p_v)_v, \alpha) &\mapsto \sum_{v \in X^{(1)}} \mathrm{inv}_v(p_v^* \alpha). \end{aligned}$$

La loi de réciprocité de Weil garantit que $V(K)$ est contenu dans l'orthogonal de $H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour l'accouplement BM. Harari et Szamuely montrent alors le théorème suivant, qui est l'analogue du théorème de Sansuc (théorème 1.7) dans ce contexte :

Théorème 2.8. (Harari, Szamuely, 2013 - [HSz16])
Soient k un corps p-adique et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k de corps des fonctions K. Soient T un K-tore et V un K-espace principal homogène sous T. Si l'orthogonal de $H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour l'accouplement BM est non vide, alors V possède un point rationnel.

Par ailleurs, dans l'article [HSSz15], Harari, Scheiderer et Szamuely s'intéressent aussi à l'approximation faible pour les K-tores. Ainsi, ils insèrent le défaut d'approximation faible dans une suite exacte analogue à la suite duale de Cassels-Tate (théorème 1.14) :

Théorème 2.9. (Harari, Scheiderer, Szamuely, 2013 - [HSSz15])
Soit T un K-tore de tore dual T'. Soit $\overline{T(K)}$ l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$.
(i) Il existe une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to Ш^2_\omega(K, T')^D \to Ш^1(K, T) \to 0,$$

où $Ш^2_\omega(K, T')$ désigne le sous-groupe de $H^2(K, T')$ constitué des éléments dont la restriction à $H^2(K_v, T')$ est triviale pour presque tout $v \in X^{(1)}$.
(ii) L'ensemble $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ si, et seulement si, $Ш^2_\omega(K, T') = Ш^2(K, T')$.
(iii) Il existe une partie finie S de $X^{(1)}$ telle que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)} \setminus S} T(K_v)$ si, et seulement si, $Ш^2_\omega(K, T')$ est fini.

Remarque 2.10. Avec les notations du théorème précedent, le groupe $Ш^2_\omega(K, T')$ peut être infini.

3 Principaux résultats de la thèse

3.1 Corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs

Les corps locaux supérieurs ont été introduits par Kato dans les années 1970 afin de généraliser la théorie du corps de classes local. Nous adoptons ici une définition légèrement plus générale que celle de Kato :

Définition 3.1. *Les corps 0-locaux sont, par définition, les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. Un corps d-local est un corps de valuation discrète complet dont le corps résiduel est $(d-1)$-local.*

Remarque 3.2. Il est parfois commode de dire aussi que $\mathbb{C}$ est un corps -1-local.

Exemple 3.3. Les corps 1-locaux sont les corps locaux usuels et $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$. Les corps $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))$, $\mathbb{F}_q((t_1))...((t_d))$ et $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ sont d-locaux.

Le but des trois premiers chapitres de cette thèse est d'étudier l'arithmétique des corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs. Voici les deux questions centrales que l'on se pose dans ce contexte :

(1) peut-on établir des théorèmes de dualité ?

(2) peut-on comprendre les obstructions au principe local-global géométrique et à l'approximation faible ?

Cela nous amènera à travailler en grande dimension cohomologique puisqu'un corps d-local est de dimension $d+1$, et donc le corps des fonctions d'une courbe sur un corps d-local est de dimension $d+2$.

Dans la suite de ce paragraphe, on se donne un entier $d \geq 0$ et un corps d-local k. Pour chaque i compris entre 0 et d, on note k_i le corps i-local associé à k : autrement dit, $k_d = k$ et k_i est le corps résiduel de k_{i+1} pour chaque i. On suppose que k_1 est de caractéristique nulle, de sorte que k est de la forme $k'((t_2))...((t_d))$ pour un certain corps p-adique k' ou bien $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$. On fixe une courbe projective lisse géométriquement intègre X sur k de corps des fonctions K.

Dans la suite de cette section, on dira « principe local-global » au lieu de « principe local-global géométrique ».

Dualité pour les groupes linéaires

Dans le premier chapitre de la thèse, on cherche à établir des théorèmes de dualité « de type Poitou-Tate » pour des groupes linéaires abéliens sur K. Nous commençons par le cas le plus simple, celui des modules finis. En définissant les groupes de Tate-Shafarevich comme dans la définition 2.3, on obtient le théorème suivant :

Théorème A. (Théorèmes 2.4 et 2.7 du chapitre 1)
Soit $G = Gal(\overline{K}/K)$. Soient F un G-module discret fini d'ordre n et $F' = Hom(F, \mu_n^{\otimes(d+1)})$.

(i) Pour $0 \leq r \leq d+3$, il existe un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^r(K,F) \times Ш^{d+3-r}(K,F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) On a une suite exacte à $3(d+3)$ termes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(K,F) \arrow[r] & \mathbb{P}^0(F) \arrow[r] & H^{d+2}(K,F')^D \arrow[d] \\
& H^{d+1}(K,F')^D \arrow[d] & \mathbb{P}^1(F) \arrow[l] & H^1(K,F) \arrow[l] \\
& {} \arrow[r, dotted, dash] & \cdots \arrow[r, dotted, dash] & {} \arrow[d] \\
0 & H^0(K,F')^D \arrow[l] & \mathbb{P}^{d+2}(F) \arrow[l] & H^{d+2}(K,F) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}^r(F)$ désigne un produit restreint des $H^r(K_v,F)$ pour $v \in X^{(1)}$.

Remarque 3.4. Le théorème précédent reste valable pour le corps « -1-local » $\mathbb{C}$, à condition de choisir $d=-1$ (cf remarque 3.2).

Nous nous intéressons ensuite aux tores : c'est là que nous établissons les principaux résultats du premier chapitre de la thèse. La situation est nettement plus compliquée que sur les corps de nombres ou les corps de fonctions d'une courbe sur $\mathbb{C}((t))$ ou $\mathbb{Q}_p$, puisque l'objet qui va jouer le rôle de dual d'un tore n'est plus un faisceau, mais un complexe de faisceaux qui est construit à partir des complexes motiviques (cf [Blo86], [Gei05]). Nous aurons donc besoin de travailler de manière systématique avec ces complexes et devrons faire appel à certains théorèmes difficiles et récents qui les concernent, en particulier la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum qui découle de la conjecture de Bloch-Kato (cf paragraphes 1.2.8 et 1.2.9 de [Gei05]). En notant $\overline{A}$ le quotient d'un groupe abélien A par son sous-groupe divisible maximal et $A_\wedge$ la limite projective des A/nA pour $n \in \mathbb{N}^*$, les principaux résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème B. (Théorèmes 3.10, 3.22 et 3.24 du chapitre 1)
Soit T un K-tore. Soient $\hat{T}$ son module des caractères et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$, où $\mathbb{Z}(d)$ est le d-ième complexe motivique.
(i) On a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^1(K,T) \times \overline{Ш^{d+2}(K,\tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad Ш^{d+1}(K,\tilde{T}) \times \overline{Ш^2(K,T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Soit L une extension finie déployant T. Supposons que $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul. On dispose alors d'une suite exacte à 7 termes :

$$\begin{tikzcd}
Ш^{d+3}(K,\tilde{T})^D \arrow[d] & 0 \arrow[l] & \\
H^0(K,T)_\wedge \arrow[r] & \mathbb{P}^0(T)_\wedge \arrow[r] & H^{d+2}(K,\tilde{T})^D \arrow[d] \\
H^{d+1}(K,\tilde{T})^D & \mathbb{P}^1(T) \arrow[l] & H^1(K,T) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}^r(T)$ désigne un produit restreint des $H^r(K_v,T)$ pour $v \in X^{(1)}$, et une suite exacte à 8 termes :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \arrow[r] & H^1(K,T)^D \arrow[d] \\
(H^0(K,T)_\wedge)^D & \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \arrow[l] & H^{d+2}(K,\tilde{T}) \arrow[l] \\
H^{d+3}(K,\tilde{T}) \arrow[r] \arrow[from=u] & \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \arrow[r] & (\varprojlim_n {}_nT(K^s))^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}^r(\tilde{T})$ désigne un produit restreint des $H^r(K_v,\tilde{T})$ pour $v \in X^{(1)}$.

On clôt le premier chapitre en établissant des théorèmes de dualité pour les complexes à deux termes de tores. Étant donné un nombre premier ℓ, on note $A\{\ell\}$ le sous-groupe de torsion ℓ-primaire de A pour chaque groupe abélien A.

Théorème C. (Théorème 4.17 et corollaire 4.18 du chapitre 1)
Soit $G = [T_1 \to T_2]$ un complexe de deux K-tores placés en degrés -1 et 0. Soient $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$ (resp. $\check{T}_1$ et $\check{T}_2$) les modules de caractères (resp. cocaractères) de T_1 et T_2. Notons $\tilde{G}$ le cône de $\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1$, où $\tilde{T}_1 = \hat{T}_1 \otimes \mathbb{Z}(d)$ et $\tilde{T}_2 = \hat{T}_2 \otimes \mathbb{Z}(d)$.

(i) On suppose que k est de la forme $k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique. On a alors un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^0(K,G)_{tors}} \times \overline{Ш^{d+2}(K,\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) On suppose que l'un des morphismes $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ ou $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif. On a alors un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^1(K,G)} \times \overline{Ш^{d+1}(K,\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, si $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, alors $Ш^1(K,G)$ est de torsion de type cofini et $Ш^{d+1}(K,\tilde{G})$ est fini ; si $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif, alors $Ш^1(K,G)$ est fini et $Ш^{d+1}(K,\tilde{G})$ est de torsion de type cofini.

(iii) Soit ℓ un nombre premier. On suppose que le morphisme $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif ou que k est de la forme $k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique et $\ell \neq p$. On a alors un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^2(K,G)\{\ell\}} \times \overline{Ш^d(K,\tilde{G})\{\ell\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En particulier, ce théorème, qui sera utile pour étudier les obstructions au principe local-global sur le corps des fonctions d'une courbe sur $\mathbb{C}((t))$, permet d'obtenir une dualité pour les groupes de type multiplicatif, puisque tout groupe de type multiplicatif est quasi-isomorphe à un complexe de tores $[T_1 \to T_2]$ avec $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ injectif.

Applications arithmétiques

Dans le deuxième chapitre de la thèse, on cherche à appliquer les théorèmes **A**, **B** et **C** à l'étude du principe local-global et de l'approximation faible.

Dans un premier temps, nous nous interrogeons à propos de l'annulation du groupe $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$. Autrement dit, le principe local-global vaut-il pour les algèbres simples centrales sur K ? Cette question est d'autant plus intéressante que les suites exactes du théorème **B**(ii) ne sont valables que sous l'hypothèse $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$ pour L une extension finie de K déployant le tore étudié.

Théorème D. (Théorèmes 1.2 et 1.13 et exemples 1.15 et 1.17 du chapitre 2)
Pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, soit $\mathcal{O}_{k_i}$ l'anneau des entiers de k_i.

(i) *Si X est de genre 0, alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$ est nul.*

(ii) *Supposons que k_1 est un corps p-adique et que X est une courbe sur k de la forme $\mathrm{Proj}(k[x, y, z]/(P(x, y, z)))$ où $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x, y, z]$ est un polynôme homogène. Supposons aussi que $\mathrm{Proj}(k_0[x, y, z]/(\overline{P}(x, y, z)))$ est une courbe lisse et géométriquement intègre, où $\overline{P}(x, y, z) \in k_0[x, y, z]$ désigne la réduction de P. Alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.*

(iii) *Supposons que $k_0 = \mathbb{C}((t))$ et que X est la courbe elliptique sur k d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ avec $A, B \in k_0$. Supposons de plus que la courbe elliptique sur k_0 d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ admet une réduction modulo t de type additif. Alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) = 0$.*

(iv) *Soit p un nombre premier impair. Si $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$ avec $d > 1$ et X est la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-p)$, alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) \neq 0$.*

(v) *Si $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_{d+1}))$ avec $d \geq 0$ et X est la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-t_1)$, alors $Ш^2(K, \mathbb{G}_m) \neq 0$.*

Remarque 3.5. Si k est un corps p-adique, Harari et Szamuely ont montré que $Ш^2(K, \mathbb{G}_m)$ est toujours nul en utilisant la dualité de Lichtenbaum entre le groupe de Picard et le groupe de Brauer de la courbe p-adique X.

Dans un second temps, nous cherchons à comprendre le défaut d'approximation faible pour les tores sur K. Nous montrons notamment que, si T est un tore et $\tilde{T}$ désigne le complexe introduit dans le théorème **B**, alors le défaut d'approximation faible de T est contrôlé par le groupe $Ш^{d+2}_\omega(K, \tilde{T})$ constitué des éléments de $H^{d+2}(K, \tilde{T})$ dont la restriction à $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ est nulle pour presque tout $v \in X^{(1)}$. L'une des principales difficultés rencontrées est la non finitude du groupe $Ш^{d+2}(K, \tilde{T})$.

Théorème E. (Théorème 2.4 et corollaire 2.7 du chapitre 2)
Soit T un K-tore de module des caractères $\hat{T}$. Soit $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$.

(i) On a une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to (Ш^{d+2}_\omega(K, \tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(K, \tilde{T}))^D \to 0,$$

où $\overline{T(K)}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$.

(ii) L'ensemble $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ si, et seulement si, les groupes $Ш^{d+2}(K, \tilde{T})$ et $Ш^{d+2}_\omega(K, \tilde{T})$ coïncident.

(iii) Il existe une partie finie S de $X^{(1)}$ telle que l'ensemble $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)} \setminus S} T(K_v)$ si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_\omega(K, \tilde{T})$ est de type cofini.

(iv) Il existe une partie dénombrable S de $X^{(1)}$ telle que l'ensemble $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)} \setminus S} T(K_v)$ si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_{\omega}(K, \tilde{T})$ est dénombrable.

Dans un troisième et dernier temps, nous étudions le principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes. Dans le cas $k = \mathbb{C}((t))$, en utilisant le théorème **C** et les techniques d'abélianisation de la cohomologie de Borovoi, nous améliorons les résultats obtenus précédemment par Colliot-Thélène et Harari :

Théorème F. (Théorème 3.9 du chapitre 2)
Soit X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur $k = \mathbb{C}((t))$ de corps des fonctions K. Soit H un K-groupe réductif connexe. Posons $\overline{H} = H \times_K \overline{K}$ et pour $v \in X^{(1)}$, $H_v = H \times_K K_v$ et $\overline{H_v} = H_v \times_{K_v} \overline{K_v}$. Soit :

$$Б(H) = Ker \left(\frac{Ker(Br(H) \to Br(\overline{H}))}{Im(Br(K) \to Br(H))} \to \prod_{v \in X^{(1)}} \frac{Ker(Br(H_v) \to Br(\overline{H_v}))}{Im(Br(K_v) \to Br(H_v))} \right).$$

L'accouplement de Brauer-Manin induit un accouplement :

$$Ш^1(K, H) \times Б(H) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré à gauche et dont le noyau à droite est le sous-groupe divisible maximal de $Б(H)$.

Remarque 3.6. Dans [CTH15], Colliot-Thélène et Harari obtiennent la non dégénérescence à gauche de l'accouplement précédent. Mais ils ne déterminent pas le noyau à droite. Le théorème 2.5 est en tout cas une conséquence du théorème précédent.

Dans le cas général où k est un corps d-local avec $d \geq 1$ tel que k_1 est de caractéristique nulle, nous montrons à l'aide du théorème **B** que l'obstruction au principe local-global pour un espace principal homogène V sous un K-tore est contrôlée par le groupe :

$$H^{d+2}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) := \varinjlim_n H^{d+2}(V, \mu_n^{\otimes(d+1)}).$$

Plus précisément, si T est un K-tore et V est un K-espace principal homogène sous T, on peut construire un accouplement analogue à celui de Brauer-Manin :

$$BM : V(\mathbb{A}_K) \times H^{d+2}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $V(\mathbb{A}_K)$ est défini comme dans la section 2. L'ensemble $V(K)$ est contenu dans l'orthogonal de $H^{d+2}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$ pour l'accouplement BM. On montre alors :

Théorème G. (Théorème 3.1 du chapitre 2)
Soient k un corps d-local avec k_1 de caractéristique nulle et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k de corps des fonctions K. Soient T un K-tore et V un K-espace principal homogène sous T. Si l'orthogonal du groupe $H^{d+2}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$ pour l'accouplement BM est non vide, alors V possède un point rationnel.

Pour terminer, nous obtenons aussi des résultats partiels concernant les espaces principaux homogènes sous des K-groupes réductifs.

Dualité pour les variétés abéliennes

Dans le troisième chapitre de la thèse, nous cherchons à établir des théorèmes de dualité pour les variétés abéliennes. Nous traitons d'abord le cas où $k = \mathbb{C}((t))$:

Théorème H. (Théorèmes 2.3, 2.12 et 2.22 et corollaire 2.25 du chapitre 3)
On suppose que $k = \mathbb{C}((t))$.

(i) Soient $L = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$, $\mathcal{O}_L = \mathbb{C}((t_0))[[t_1]]$ et A une variété abélienne sur L. Soit A^t sa variété abélienne duale. Les groupes $H^1(L, A)$ et $(H^0(L, A^t)^\wedge)^D$ sont isomorphes modulo divisibles. Plus précisément, on a une suite exacte :

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(L, A) \to (H^0(L, A^t)^\wedge)^D \to 0,$$

où $m(A)$ est un entier naturel compris entre 0 et $4 \dim A$ dépendant de la géométrie de A. L'entier $m(A)$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne sur $\mathbb{C}((t_0))$ apparaissant dans la réduction du modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A modulo t_1 a réduction purement additive. Lorsque la fibre spéciale de $\mathcal{A}$ est connexe, le noyau de $H^1(L, A) \to (H^0(L, A^t)^\wedge)^D$ est un groupe contenant $H^1_{nr}(L, A) := H^1(\mathcal{O}_L, \mathcal{A})$ qui peut être décrit explicitement : on le note $H^1_{nrs}(L, A)$.

(ii) Soit A une variété abélienne sur K, de variété abélienne duale A^t. Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que $m(A \times_K K_v) = 0$. On suppose que, pour toute place $v \in X^{(1)} \setminus Z$, la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$ est connexe, et on pose :

$$Ш^1(K, A) := Ker\left(H^1(K, A) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v, A)\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A) := Ker\left(H^1(K, A) \to \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v, A)/H^1_{nrs}(K_v, A) \times \prod_{v \in Z} H^1(K_v, A)\right).$$

Notons que $Ш^1(K, A) \subseteq Ш^1_{nrs}(A)$. Alors, pour chaque nombre premier ℓ, il existe une dualité parfaite de groupes finis

$$\overline{Ш^1(K, A)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ainsi qu'un accouplement $Ш^1(K, A) \times Ш^1(K, A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont le noyau à gauche (resp. à droite) est constitué des éléments de $Ш^1(K, A)$ (resp. $Ш^1(K, A^t)$) qui sont divisibles dans $Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $Ш^1_{nrs}(A^t)$).

Nous obtenons aussi une vaste généralisation du théorème précédent au cas où $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$.

Dans la suite du troisième chapitre, nous étudions le cas où k est un corps p-adique (ou plus généralement un corps de la forme $k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique). Nous établissons une dualité pour les variétés abéliennes sur $k((t))$ analogue à la partie (i) du théorème **H**, puis nous obtenons un théorème de dualité globale pour les variétés abéliennes sur K analogue à la partie (ii) du théorème **H**. Ce dernier résultat est le théorème le plus important du chapitre 3 de la thèse, mais l'énoncer maintenant rallongerait excessivement cette introduction.

3.2 Corps des fractions d'anneaux locaux henséliens de dimension 2

Le corps des séries de Laurent à deux variables sur un corps k est par définition le corps des fractions de l'anneau local $k[[x, y]]$, qui est de dimension 2. Il est contenu strictement dans $k((x))((y))$. Le but du dernier chapitre de la thèse est d'étudier son arithmétique lorsque k est algébriquement clos, un corps fini, un corps p-adique, $\mathbb{C}((t))$ ou encore un corps local supérieur.

Dans la suite de ce paragraphe, on fixe un corps k et une k-algèbre R_0 commutative, locale, intègre, normale, hensélienne, excellente, de dimension 2, de corps résiduel k. On suppose de plus que $R_0 \otimes_k \overline{k}$ est intègre. On note $\mathfrak{m}_0$ l'idéal maximal de R_0 et $X_0 = \text{Spec } R_0 \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$. On note aussi K_0 le corps des fractions de R_0. Pour simplifier, nous ne parlerons dans cette introduction que du cas où k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ou un corps fini.

Dualité d'Artin-Verdier

Le premier résultat que nous obtenons est une dualité de type Artin-Verdier sur le schéma X_0 lorsque k est algébriquement clos :

Théorème I. (Corollaire 1.27 et théorème 2.4 du chapitre 4)
Soient $j : U \hookrightarrow X_0$ une immersion ouverte avec U non vide et F un schéma en groupes fini étale sur U de n-torsion.
(i) Supposons k algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$ le dual de Cartier de F. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X_0, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

(ii) Supposons que k est fini de caractéristique p première à n. Soit $F' = Hom(F, \mu_n^{\otimes 2})$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{4-r}(X_0, j_! F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

La démonstration de (i) repose notamment sur l'étude des singularités de la normalisation de R_0 dans une extension finie de K_0.

Dualité de Poitou-Tate

Nous utilisons ensuite le théorème **I** pour établir des théorèmes de dualité de type Poitou-Tate pour les modules finis et les tores. Pour ce faire, on introduit les groupes de Tate-Shafarevich :

$$Ш^r(K_0, M) = \mathrm{Ker}\left(H^r(K_0, M) \to \prod_{v \in X_0^{(1)}} H^r(K_{0,v}, M) \right)$$

pour chaque $\mathrm{Gal}(\overline{K_0}/K_0)$-module discret. Dans le cas des modules finis :

Théorème J. (Théorème 2.5 du chapitre 4)
Soit F un $Gal(\overline{K_0}/K_0)$-module discret fini d'ordre n.
(i) Supposons que k est algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $F' = Hom(F, \mu_n)$ le dual de Cartier de F. On a un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^1(K_0, F) \times Ш^2(K_0, F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Supposons que k est fini de caractéristique p première à n. Soit $F' = Hom(F, \mu_n^{\otimes 2})$. Pour chaque $r \in \{1, 2, 3\}$, on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^r(K_0, F) \times Ш^{4-r}(K_0, F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Dans le cas des tores :

Théorème K. (Théorème 2.8 du chapitre 4)
Soit T un K_0-tore de module des caractères $\hat{T}$ et de tore dual T'.
(i) Supposons que k est algébriquement clos de caractéristique 0. On a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^1(K_0, \hat{T}) \times \overline{Ш^2(K_0, T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$
$$Ш^1(K_0, T) \times \overline{Ш^2(K_0, \hat{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Supposons que k est fini de caractéristique p. Pour chaque premier ℓ différent de p, on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^1(K_0, T)\{\ell\} \times \overline{Ш^2(K_0, T')}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Finalement, nous obtenons aussi une dualité pour les complexes à deux termes de tores dans le cas où k est algébriquement clos de caractéristique 0.

Principe local-global

Les théorèmes précédents permettent alors d'étudier l'obstruction au principe local-global pour les K_0-torseurs sous des groupes linéaires connexes. Considérons d'abord le cas où k est algébriquement clos de caractéristique 0. Soient G un K_0-groupe linéaire connexe et V un torseur sous G. Notons $\mathcal{V}$ un modèle lisse géométriquement intègre de V sur un ouvert non vide U de X_0 et considérons l'ensemble :

$$V(\mathbb{A}_{K_0}) := \varinjlim_{\substack{U' \subseteq U \\ U' \neq \emptyset}} \prod_{v \in X_0 \setminus U'} V(K_v) \times \prod_{v \in (U')^{(1)}} \mathcal{V}(\mathcal{O}_v).$$

Dans ce contexte, il est encore possible de définir un accouplement de type Brauer-Manin :

$$BM : V(\mathbb{A}_{K_0}) \times \mathrm{Br}(V) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

tel que $V(K_0)$ est dans l'orthogonal de $\mathrm{Br}(V)$. On montre alors :

Théorème L. (Théorème 3.2 du chapitre 4)
Si l'orthogonal de $Br(V)$ pour l'accouplement BM est non vide, alors V a un point rationnel.

Cela répond affirmativement à la question posée par Colliot-Thélène, Parimala et Suresh à la fin de l'article [CTPS16].

Supposons maintenant k fini. Soit V un K_0-espace principal homogènes sous un tore. On suppose que V devient trivial dans une extension finie de K_0 de degré premier à p. Dans ce contexte, on peut construire un accouplement de type Brauer-Manin :

$$BM : V(\mathbb{A}_{K_0}) \times H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{\mathrm{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

tel que $V(K)$ est dans l'orthogonal de

$$H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{\mathrm{non}-p} := \bigoplus_{\ell \neq p} H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\{\ell\}.$$

On montre alors :

Théorème M. (Théorème 3.4 du chapitre 4)
Si l'orthogonal de $H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))_{non-p}$ pour l'accouplement BM est non vide, alors V a un point rationnel.

Cela permet notamment d'étudier le principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous des tores stablement rationnels :

Théorème N. (Proposition 3.5 du chapitre 4)
Supposons k fini de caractéristique p et considérons un tore stablement rationnel T sur K_0. Soit V un espace principal homogène sous T tel que $V(\mathbb{A}_{K_0}) \neq \emptyset$ et qui devient trivial sur une extension finie de K_0 de degré non divisible par p. Alors V vérifie le principe local-global.

Approximation faible

Pour terminer, nous nous intéressons à l'approximation faible pour les tores lorsque k est algébriquement clos de caractéristique nulle :

Théorème O. (Théorème 3.7 du chapitre 4)
Supposons k algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit T un K_0-tore de module de caractères $\hat{T}$. On note $\overline{T(K_0)}$ l'adhérence de $T(K_0)$ dans $\prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v})$. On a la suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K_0)} \to \prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v}) \to (\text{Ш}^2_\omega(K_0,\hat{T}))^D \to (\text{Ш}^2(K_0,\hat{T}))^D \to 0.$$

Ainsi, $T(K_0)$ est dense dans $\prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v})$ si, et seulement si, $\text{Ш}^2(K_0,\hat{T}) = \text{Ш}^2_\omega(K_0,\hat{T})$. Dans tous les cas, il existe une partie finie S de $X_0^{(1)}$ telle que $T(K_0)$ est dense dans $\prod_{v\in X_0^{(1)}\setminus S} T(K_{0,v})$.

4 Analogies

Pour aider le lecteur, nous ajoutons le tableau ci-dessous, qui résume les analogies entre les différents corps. Plus précisément, des corps qui sont dans la même colonne se comportent de manière semblable vis-à-vis des théorèmes de dualité arithmétique et du principe local-global. La dimension cohomologique est indiquée sur la première ligne du tableau.

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>$d+2$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbb{Q}(i)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{\mathbb{F}_q}(x)$</td><td rowspan="2">$\mathbb{F}_q(x)$</td><td>$\mathbb{F}_q((t))(x)$</td><td>$\mathbb{F}_q((t_1))((t_2))(x)$</td><td>$\mathbb{F}_q((t_1))...((t_d))(x)$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{Q}_p(x)$</td><td>$\mathbb{Q}_p((t))(x)$</td><td>$\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))(x)$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{C}(x)$</td><td>$\mathbb{C}((t))(x)$</td><td>$\mathbb{C}((t_0))((t_1))(x)$</td><td>$\mathbb{C}((t_0))((t_1))((t_2))((x,y))$</td><td>$\mathbb{C}((t_0))...((t_d))((x,y))$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$\overline{\mathbb{F}_q}((x,y))$</td><td rowspan="2">$\mathbb{F}_q((x,y))$</td><td>$\mathbb{F}_q((t))((x,y))$</td><td>$\mathbb{F}_q((t_1))...((t_{d-1}))((x,y))$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{Q}_p((x,y))$</td><td>$\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_{d-1}))((x,y))$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbb{C}((x,y))$</td><td>$\mathbb{C}((t))((x,y))$</td><td>$\mathbb{C}((t_0))((t_1))((x,y))$</td><td>$\mathbb{C}((t_0))...((t_{d-1}))((x,y))$</td></tr>
</table>

Notations

Corps. Lorsque L est un corps, on notera L^s sa clôture séparable. Si de plus L est un corps de valuation discrète complet, on notera L^{nr} son extension non ramifiée maximale.

Dimension. Lorsque Z est un schéma noethérien et i un entier naturel, on notera $Z^{(i)}$ l'ensemble des points de codimension i de Z. En particulier, $Z^{(0)}$ désignera l'ensemble des points génériques de Z, que l'on confondra parfois avec l'ensemble des composantes irréductibles de Z.

Groupes abéliens. Pour M un groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), $n > 0$ un entier et ℓ un nombre premier, on notera :
- M_{tors} la partie de torsion de M.
- ${}_nM$ la partie de n-torsion de M.
- $M\{\ell\}$ la partie de torsion ℓ-primaire de M.
- $M_{\text{non}-\ell} = \bigoplus_{p \neq \ell} M\{p\}$ où p décrit les nombres premiers différents de ℓ.
- $M^{(\ell)} := \varprojlim_r M/\ell^r$ le complété pour la topologie ℓ-adique de M.
- $M^{\wedge}$ le complété profini de M.
- $M_{\wedge}$ la limite projective des M/nM. Le groupe $M_{\wedge}$ coïncide en fait avec le complété profini si M/nM est fini pour tout n.
- $T_\ell M$ la limite projective des ${}_{\ell^r}M$.
- M_{div} le sous-groupe divisible maximal de M.
- $\overline{M} = M/M_{div}$ le quotient de M par son sous-groupe divisible maximal.
- M^D le groupe des morphismes continus $M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

On dira qu'un groupe abélien de torsion est de type cofini si son sous-groupe de n-torsion est fini pour tout $n \geq 1$. Un groupe abélien de torsion de type cofini qui est en plus de torsion ℓ-primaire est isomorphe à la somme directe d'un ℓ-groupe abélien fini et d'une puissance finie de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Faisceaux. Sauf indication du contraire, tous les faisceaux sont considérés pour le petit site étale. On fera souvent appel à des catégories dérivées de faisceaux : on entendra toujours par là la catégorie dérivée des faisceaux étales sur le schéma considéré. Pour F un faisceau sur un schéma X, on note $\mathrm{Hom}_X(F,-)$ (ou $\mathrm{Hom}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau G sur X associe le groupe des morphismes de faisceaux de F vers G. De même, pour $n>0$ et pour F un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur un schéma X, on note $\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules G sur X associe le groupe des morphismes de faisceaux de F vers G. Ainsi :

$$\mathrm{Hom}_X(F,-) : \text{Faisceaux sur } X \to \text{Groupes abéliens}$$
$$\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Groupes abéliens.}$$

On remarquera que les foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_X(F,-)$ et de $\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ sont différents. On notera $\mathrm{Ext}^*_X(F,-)$ (resp. $\mathrm{Ext}^*_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$) les foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_X(F,-)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$).

Cohomologie. Par convention, pour F et G des faisceaux sur un schéma X et r un entier strictement négatif, on pose $\mathrm{Ext}^r_X(F,G)=H^r(X,F)=0$.

Complexes. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Lorsque A_0, A_1, A_2 ..., A_n sont des objets de $\mathcal{A}$ munis de morphismes $A_{i+1}\to A_i$ pour $0\leq i\leq n-1$, on notera $[A_n\to A_{n-1}\to ...\to A_0]$ le complexe où tous les termes en degrés strictement inférieurs à $-n$ ou strictement positifs sont nuls et où A_i est placé en degré $-i$ pour $0\leq i\leq n$. Lorsque $f^\bullet : A^\bullet\to B^\bullet$ est un morphisme de complexes, on notera $[A^\bullet\to B^\bullet]$ le cône de $f^\bullet$. Lorsque $A^\bullet$ est un complexe de faisceaux sur un schéma X, on notera $H^r(X,A^\bullet)$ son r-ième groupe d'hypercohomologie.

Corps locaux supérieurs. Les corps 0-locaux sont par définition les corps finis et le corps $\mathbb{C}((t))$. Pour $d\geq 1$, un corps d-local est un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local. *On remarquera que cette définition est plus générale que la définition standard* (que l'on retrouve par exemple dans le paragraphe avant le théorème I.2.17 de [Mil06]). Lorsque k est un corps d-local, on notera k_0, k_1, ..., k_d les corps tels que k_0 est fini ou $\mathbb{C}((t))$, $k_d=k$, et pour chaque i le corps k_i est le corps résiduel de k_{i+1}. On rappelle le théorème de dualité sur un corps d-local k : pour tout $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module fini M d'ordre n premier à $\mathrm{Car}(k_1)$, on a un accouplement parfait de groupes finis $H^r(k,M)\times H^{d+1-r}(k,\mathrm{Hom}(M,\mu_n^{\otimes d}))\to H^{d+1}(k,\mu_n^{\otimes d})\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce théorème est énoncé et démontré dans [Mil06] (théorème I.2.17, p. 38) lorsque $k_0\neq\mathbb{C}((t))$. Il se prouve exactement de la même manière dans ce dernier cas : en effet, il suffit de procéder par récurrence à l'aide du lemme I.2.18 de [Mil06], l'initialisation étant réduite à la dualité évidente $H^r(k_{-1},M)\times H^{-r}(k_{-1},\mathrm{Hom}(M,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))\to H^0(k_{-1},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour le corps "-1-local" $k_{-1}=\mathbb{C}$.

Groupes de Tate-Shafarevich. Lorsque L est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre Y sur un corps et $v\in Y^{(1)}$, on note L_v (resp. L_v^h) le complété (resp. le henselisé) de L par rapport à v et $\mathcal{O}_v$ (resp. $\mathcal{O}_v^h$) l'anneau de valuation de L_v (resp. L_v^h). On rappelle que, si G est un L-schéma en groupes localement de type fini, le théorème d'approximation de Greenberg implique que $H^i(L_v^h, G) \cong H^i(L_v, G)$ pour $i > 0$ (voir le lemme 2.7 de [HSz05]). Cet isomorphisme reste vrai si $i = 0$ et G est fini étale. Par ailleurs, si M est un $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-module discret (ou plus généralement un objet de la catégorie dérivée des $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-modules discrets), le r-ième groupe de Tate-Shafarevich de M est, par définition, le groupe $\text{Ш}^r(L, M) = \mathrm{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} H^r(L_v, M))$. Il sera aussi utile d'introduire, pour chaque partie S de $Y^{(1)}$, le groupe $\text{Ш}^r_S(L, M) = \mathrm{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)} \setminus S} H^r(L_v, M))$, ainsi que le groupe $\text{Ш}^r_\omega(L, M) = \bigcup_{S \subseteq X^{(1)},\, S \text{ finie}} \text{Ш}^r_S(L, M)$.

Groupe de Brauer. Lorsque Z est un schéma, on note $\mathrm{Br}(Z)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2(Z, \mathbb{G}_m)$. Si Z est une L-variété géométriquement intègre pour un certain corps L, on note $\mathrm{Br}_1(Z)$ le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(Z) \to \mathrm{Br}(Z \times_L L^s))$ et $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z)$ le quotient $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(Z) \to \mathrm{Br}(Z \times_L L^s))/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(Z))$. Finalement, si L est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre Y sur un corps l, on notera $\text{Б}(Z)$ le groupe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z \times_L L_v))$.

Tores algébriques. On dit qu'un groupe algébrique T sur un corps L est un tore si $T \times_L L^s$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m^r$ pour un certain $r \geq 0$. On rappelle que le foncteur $T \mapsto \hat{T} = \mathrm{Hom}_{L^s, gr}(T \times L^s, \mathbb{G}_{m, L^s})$ établit une équivalence de catégories entre les tores algébriques sur L et les $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-modules qui, en tant que groupes abéliens, sont libres de type fini. On note $\check{T} := \mathrm{Hom}(\hat{T}, \mathbb{Z})$ le module des cocaractères de T. Si T est un tore sur L, on appelle rang de T la dimension d'un sous-tore déployé maximal : c'est aussi le rang de $H^0(L, \hat{T})$. Par ailleurs, on dit qu'un tore T sur L est quasi-trivial s'il est isomorphe à $R_{A/L}\mathbb{G}_m$ pour une certaine L-algèbre finie séparable A.

1

Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs

0 Introduction

0.1 Contexte et motivation

Les premiers théorèmes de dualité arithmétique portant sur la cohomologie galoisienne de certains corps ont été annoncés dans les années 1960 par John Tate. Ces résultats, qui se sont avérés depuis particulièrement utiles pour étudier de profonds problèmes arithmétiques comme le principe local-global ou l'approximation faible, concernaient la cohomologie de corps de petite dimension cohomologique ayant de fortes propriétés arithmétiques : les corps p-adiques et les corps de séries de Laurent à coefficients dans les corps finis dans le cadre local, les corps de nombres et les corps de fonctions de courbes projectives lisses sur des corps finis dans le cadre global. Ces théorèmes ont été assez facilement généralisés dans le cas local à certains corps de dimension cohomologique quelconque (finie), les corps locaux supérieurs, à condition que les corps résiduels successifs soient de caractéristique nulle. Par contre, une telle généralisation s'avère nettement plus difficile dans le cas des corps globaux et ce n'est que très récemment, à partir de l'article [SvH03] de Scheiderer et Van Hamel, que nous avons été témoins d'un regain d'intérêt pour des études dans cette direction.

Deux grandes méthodes se sont développées ces dernières années afin de comprendre le principe local-global et l'approximation faible sur les corps globaux de dimension cohomologique quelconque. D'une part, dans les articles [HSz16] et [HSSz15], Harari, Scheiderer et Szamuely étudient certaines obstructions cohomologiques au principe de Hasse (théorèmes 5.1 et 6.1 de [HSz16]) et à l'approximation faible (théorèmes 3.3 et 4.2 de [HSSz15]) pour le corps des fonctions d'une courbe projective lisse sur un corps p-adique, c'est-à-dire un corps de dimension cohomologique 3, en établissant préalablement des théorèmes de dualité arithmétique type Poitou-Tate pour les tores (théorèmes 4.1 de [HSz16] et 2.9 de [HSSz15]). Cette méthode a ensuite été utilisée par Colliot-Thélène et Harari dans [CTH15] pour étudier les corps de fonctions sur $\mathbb{C}((t))$. D'autre part, dans une série d'articles parmi lesquels nous pouvons notamment citer [HHK14], Harbater, Hartmann et Krashen ont utilisé des techniques de patching afin d'étudier le principe de Hasse pour le corps des fonctions d'une courbe sur un corps à valuation discrète complet possédant un modèle projectif, intègre et normal. Ces techniques ont par la suite été utilisées par Colliot-Thélène, Parimala et Suresh pour établir le principe local-global pour l'isotropie des formes quadratiques (théorème 3.1 de [CTPS12]) et pour les espaces homogènes sous certains groupes réductifs (théorème 4.3 de [CTPS12]). Une différence essentielle distingue les résultats obtenus par les deux méthodes précédentes : s'il est vrai que dans les deux cas on étudie le corps des fonctions d'une courbe projective lisse sur un corps local, la première méthode tient uniquement compte des places provenant d'un point de codimension 1 de la courbe, alors que la deuxième tient compte de toutes les places provenant d'un point de codimension 1 d'un modèle entier de la courbe.

Dans ce premier chapitre de la thèse, nous allons utiliser la méthode développée par Harari, Scheiderer et Szamuely pour généraliser leurs résultats à des corps de fonctions de courbes projectives lisses sur un corps local supérieur, ce qui fournit un cadre unifié permettant de traiter simultanément les corps de fonctions sur un corps fini, un corps p-adique ou $\mathbb{C}((t))$. L'étude de tels corps pose un certain nombre de difficultés supplémentaires et permet de mettre en évidence des phénomènes nouveaux. D'une part, elle demande à gérer la dimension cohomologique quelconque, alors que les travaux de Harari, Scheiderer et Szamuely ainsi que les travaux postérieurs de Colliot-Thélène et Harari concernent uniquement des corps de dimension cohomologique au plus 3. Rappelons que, d'un point de vue cohomologique, l'objet qui joue le rôle du dual d'un tore est son module des caractères en dimension cohomologique 2 et son tore dual en dimension cohomologique 3. Nous verrons que la situation est nettement plus compliquée à partir de la dimension cohomologique 4, puisque le dual d'un tore n'est plus un faisceau mais un complexe de faisceaux défini à partir des complexes de Bloch. Nous aurons donc besoin de travailler de manière systématique avec lesdits complexes et devrons faire appel à certains théorèmes difficiles et récents qui les concernent, en particulier la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum qui découle de la conjecture de Bloch-Kato. D'autre part, contrairement au cas étudié par Harari, Scheiderer et Szamuely, pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs, il n'y a pas, en général, d'annulation du deuxième groupe de Tate-Shafarevich de $\mathbb{G}_m$, et nous avons donc affaire à des groupes de Tate-Shafarevich infinis.

Pour terminer ces généralités, insistons sur le fait que, comme dans les articles de Harari, Scheiderer et Szamuely et contrairement à ceux de Harbater, Hartmann et Krashen, tous les résultats que nous obtenons tiennent uniquement compte des places provenant d'un point de codimension 1 de la courbe projective lisse considérée. Notons finalement que nous n'étudierons pas les phénomènes liés à la caractéristique p, qui s'avèrent particulièrement difficiles à traiter (voir paragraphe 0.4).

0.2 Notations supplémentaires

Faisceaux. Pour F un faisceau sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ (ou $\underline{\mathrm{Hom}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \mathrm{Hom}_U(F|_U, G|_U)$. De même, pour $n>0$ et pour F un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ (ou $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \mathrm{Hom}_{U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F|_U, G|_U)$. Ainsi :

$$\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Groupes abéliens}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Faisceaux sur } X.$$

On remarquera que les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ peuvent être différents. On notera $\underline{\mathrm{Ext}}^*_X(F,-)$ (resp. $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$) les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$).

Cadre. Dans toute la suite, d désignera un entier naturel fixé (éventuellement nul), k un corps d-local et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On notera $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points de codimension 1 et K son corps des fonctions. Pour $v \in X^{(1)}$, on notera aussi $k(v)$ le corps résiduel de X et v. <u>Lorsque k_0 est fini, on supposera que le corps k_1 est de caractéristique 0 :</u> autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et k_1 est un corps p-adique. Lorsque M est un objet de la catégorie dérivée des $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules discrets, on notera souvent $Ш^r(M)$ au lieu de $Ш^r(K,M)$.

Remarque 0.1. En fait, on peut aussi prendre $d=-1$, en décrétant que $\mathbb{C}$ est un corps -1-local.

Cohomologie à support compact. Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, le r-ième groupe de cohomologie à support compact est, par définition, le groupe $H^r_c(U,\mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$. On notera aussi $\mathbb{R}\Gamma_c(U,\mathcal{F})$ le complexe $\mathbb{R}\Gamma(X, j_!\mathcal{F})$, dont le r-ième groupe de cohomologie est le r-ième groupe de cohomologie à support compact de $\mathcal{F}$. De même, lorsque $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux sur U, on notera $H^r_c(U,\mathcal{F}^\bullet)$ le groupe d'hypercohomologie $H^r(k, \mathbb{R}f_* j_!\mathcal{F}^\bullet) = H^r(X, j_!\mathcal{F}^\bullet)$, où f désigne le morphisme propre $X \to \mathrm{Spec}\, k$.

Remarque 0.2. Comme nous ne supposons pas que le faisceau $\mathcal{F}$ est représentable par un schéma en groupes fini étale, nous n'affirmons pas que $H^r_c(U,\mathcal{F})$ est le groupe $H^r(Y, j_!\mathcal{F})$ pour toute compactification lisse Y de U.

0.3 Organisation du chapitre

Ce chapitre est composé de quatre parties. La première section permet d'établir quelques résultats préliminaires et la deuxième est consacrée à des théorèmes de dualité arithmétique de type Poitou-Tate pour les modules finis sur K (théorèmes 2.4 et 2.7).

Les théorèmes principaux sont établis dans la troisième partie. En particulier, nous montrons un théorème de dualité arithmétique pour les tores en nous ramenant aux théorèmes analogues pour les modules finis :

Théorème 0.3. *(théorème 3.10)*
Soit T un K-tore. On note $\hat{T}$ le module des caractères de T, $\check{T}$ le module des cocaractères de T et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$, où $\mathbb{Z}(d)$ est le d-ième complexe motivique. On a alors des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^1(T) \times \overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad Ш^{d+1}(\tilde{T}) \times \overline{Ш^2(T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Nous établissons ensuite des parties de la suite exacte de Poitou-Tate associée à un K-tore T sous l'hypothèse cruciale qu'il existe une extension L de K déployant T telle que $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$ (théorèmes 3.22 et 3.24).

Dans la quatrième et dernière section, nous établissons un théorème de dualité pour les complexes à deux termes de tores sur K (théorème 4.17 et corollaire 4.18).

0.4 Quelques remarques sur l'hypothèse Car$(k_1) = 0$

Comme indiqué dans les notations, nous supposerons que k_1 est de caractéristique nulle. En fait, dans le cas où k_1 est de caractéristique positive p, la plupart des résultats de ce chapitre restent valables à condition d'ignorer les phénomènes de p-torsion, comme cela est expliqué en remarque à la fin de chaque partie. Par contre, l'étude des phénomènes de p-torsion relève d'une grande difficulté, puisque la dualité locale (théorème 2.17 de [Mil06]) tombe en défaut.

Plus précisément, dans la littérature, les seuls résultats qui pointent vers une telle dualité locale sont dus à Kato ([Kat79] pour les corps 2-locaux, [Kat00] en général). Dans les deux cas, Kato établit une dualité uniquement pour le module μ_{p^r}, et pour ce faire, il a besoin de munir les groupes de cohomologie à valeurs dans μ_{p^r} d'une structure supplémentaire (une topologie dans le cas 2-local, une structure plus compliquée en général).

Plaçons-nous dans le cas où k est 2-local pour simplifier. Si l'on veut généraliser la dualité de Kato à n'importe quel module galoisien sur k, il est naturel de munir les groupes de cohomologie d'une structure supplémentaire, par exemple une topologie. Cette topologie devrait vérifier que les morphismes d'un groupe de cohomologie à valeurs dans μ_{p^r} vers $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui sont continus pour cette topologie coïncident avec les morphismes continus pour la topologie de Kato. Mais construire une telle topologie est difficile. En effet, la manière classique de le faire consiste à voir les groupes de cohomologie comme des groupes de cohomologie de Cech et à munir les cochaînes d'une topologie (voir le paragraphe 4 du chapitre VI de [Sha72]). Pour ce faire, on munit généralement k^s ou $k^{s\times}$ d'une topologie qui étend celle de k et qui est (au moins) compatible avec la multiplication. Comme l'isomorphisme naturel entre $k^\times/k^{\times,p}$ et $\{x\otimes x^{-1}/x\in k^\times\}/\{\zeta\otimes\zeta^{-1}/\zeta^p=1\}$ fait intervenir une racine p-ième, la topologie sur $k^{s\times}$ doit probablement vérifier la condition supplémentaire suivante : il est possible de choisir localement une racine p-ième continue. Il semble extrêmement difficile de construire une telle topologie, aussi bien que de trouver une autre structure que l'on pourrait mettre sur les groupes de cohomologie et qui permette d'aboutir.

En outre, si l'on suppose pouvoir établir une dualité locale dans ce contexte, il y a une deuxième difficulté qui se pose : puisqu'il faut munir les groupes de cohomologie locaux d'une structure supplémentaire, il n'est pas du tout évident que cette structure serait compatible avec la suite spectrale de Hochschild-Serre nécessaire pour établir une dualité type Artin-Verdier (voir la section 2).

0.5 Quelques rappels sur les complexes de Bloch et la cohomologie motivique

Dans l'article [Blo86], Bloch associe à chaque schéma Y séparé de type fini sur un corps E et à chaque entier naturel i un complexe noté $z^i(Y,\cdot)$. Lorsque Y est lisse, on note $\mathbb{Z}(i)$ (resp. $\mathbb{Z}(i)_{\text{Zar}}$) le complexe de faisceaux $z^i(-,\cdot)[-2i]$ sur le petit site étale (resp. sur le petit site de Zariski), et pour chaque groupe abélien A, on note $A(i)$ (resp. $A(i)_{\text{Zar}}$) le complexe $A\otimes\mathbb{Z}(i)$ (resp. $A\otimes\mathbb{Z}(i)_{\text{Zar}}$), qui coïncide avec le complexe $A\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(i)$ (resp. $A\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(i)_{\text{Zar}}$) puisque chaque terme de $\mathbb{Z}(i)$ (resp. $\mathbb{Z}(i)_{\text{Zar}}$) est un faisceau plat. Ce dernier fait sera utilisé de manière récurrente dans la suite.
On rappelle sans preuve les propriétés fondamentales du complexe $\mathbb{Z}(i)$ dont nous aurons besoin dans la suite :

Théorème 0.4. ***(Propriétés du complexe $\mathbb{Z}(i)$)***
Soit Y un schéma séparé lisse de type fini sur un corps E. Soit $i\geq 0$.
(i) Il existe un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux étales $\mathbb{Z}(1)[1]\cong\mathbb{G}_m$.
(ii) Le complexe $\mathbb{Z}(i)_{Zar}$ est concentré en degrés $\leq i$.
(iii) Soit α la projection du site étale de Y sur le site de Zariski de Y. On a alors un isomorphisme $\mathbb{Q}(i)_{Zar}\cong R\alpha_*\mathbb{Q}(i)$.
(iv) (Geisser-Levine) Pour m inversible dans E, on a un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux étales $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(i)\cong\mu_m^{\otimes i}$.
(v) (Nesterenko-Suslin, Totaro) On a un isomorphisme $K_i^M(E)\cong H^i_{Zar}(E,\mathbb{Z}(i)_{Zar})$, où $K_*^M(E)$ désigne la K-théorie de Milnor de E.

(vi) (Conjecture de Bloch-Kato, prouvée par Rost-Voevodsky) Pour m inversible dans E, on a un isomorphisme $K_i^M(E)/mK_i^M(E) \cong H^i(E, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(i))$.
(vii) (Conjecture de Beilinson-Lichtenbaum) Pour chaque $j \leq i+1$, on a un isomorphisme $H^j_{Zar}(Y, \mathbb{Z}(i)_{Zar}) \cong H^j(Y, \mathbb{Z}(i))$.

Démonstration. (i) Corollaire 6.4 de [Blo86].
(ii) Lemme 2.5 de [Kah12].
(iii) Théorème 2.6 c) de [Kah12].
(iv) Théorème 1.5 de [GL01].
(v) [NS89] ou [Tot92].
(vi) Le théorème a été prouvé par Rost et Voevodsky dans les articles [SJ06] et [Voe11]. On pourra aussi aller voir une esquisse de preuve dans l'exposé [Rio13].
(vii) Suslin et Voevodsky ont démontré que la conjecture de Bloch-Kato implique la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en supposant la résolution des singularités dans [SV00]. L'hypothèse de résolution des singularités est supprimée dans [GL01]. Le cas de la caractéristique positive est traité dans [GL00].

□

Remarque 0.5. • Les assertions (ii) et (vii) montrent que, pour tout corps E, on a $H^{i+1}(E, \mathbb{Z}(i)) = 0$.
• Le complexe $\mathbb{Z}(i)$ peut aussi être construit lorsque Y est un schéma lisse sur le spectre d'un anneau de Dedekind, et dans ce cas, les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) et (vii) restent vraies (on pourra aller voir [Gei05] et [Gei04]). Cela nous sera utile pour pouvoir appliquer ces constructions lorsque Y est le complété de l'anneau local de X en un point de codimension 1.

Pour terminer, on rappelle aussi que, lorsque Y est un schéma lisse sur un corps, on dispose d'un accouplement $\mathbb{Z}(i) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(j) \to \mathbb{Z}(i+j)$ pour chaque couple d'entiers naturels (i,j) (voir par exemple [Tot92]), et on prouve la propriété suivante, bien connue des experts, pour laquelle on n'a pas trouvé de référence adéquate :

Proposition 0.6. *Soit $n > 0$. Soit l un corps de caractéristique 0. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $cd(l) \leq n$.
(ii) Pour toute extension algébrique L de l, on a $H^{n+2}(L, \mathbb{Z}(n)) = 0$.
(ii') Pour toute extension finie L de l, on a $H^{n+2}(L, \mathbb{Z}(n)) = 0$.

Démonstration. Supposons (i). Soit L une extension algébrique de l. Comme $H^{n+2}(L, \mathbb{Q}(n)) = 0$, on dispose d'une surjection $H^{n+1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)) \to H^{n+2}(L, \mathbb{Z}(n))$. Or $H^{n+1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)) \cong \varinjlim_m H^{n+1}(L, \mu_m^{\otimes n})$. Puisque l'hypothèse (i) impose que $\mathrm{cd}(L) \leq n$ (proposition 14 du paragraphe I.3.3 de [Ser02]), on déduit que le groupe $H^{n+1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n))$ est nul, d'où (ii).
Supposons (ii). Soit p un nombre premier. Soit L_p le sous-corps de l^s fixé par un p-Sylow de $\mathrm{Gal}(l^s/l)$. Comme L_p contient toutes les racines p-ièmes de l'unité de l^s, on a $H^{n+1}(L_p, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong H^{n+1}(L_p, \mu_p^{\otimes n})$. Or, d'après les théorèmes 0.4(ii) et 0.4(vii) (conjecture de Beilinson-Lichtenbaum), on a $H^{n+1}(L_p, \mathbb{Z}(n)) = 0$, ce qui entraîne que $H^{n+1}(L_p, \mu_p^{\otimes n}) = {}_pH^{n+2}(L_p, \mathbb{Z}(n)) = 0$. On en déduit que $H^{n+1}(L_p, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$,

ce qui implique (i) d'après le corollaire 1 de la section I.3.3 et la proposition 21 de la section I.4.1 de [Ser02].
Pour terminer, montrons que (ii') implique (ii). Soit L une extension algébrique de l. Pour chaque extension finie L' de l contenue dans L, on a par hypothèse $H^{n+2}(L',\mathbb{Z}(n)) = 0$. En passant à la limite inductive sur L', on obtient $H^{n+2}(L,\mathbb{Z}(n)) = 0$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque 0.7. Si l est un corps de caractéristique $p > 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{cd}(l) \leq n$.
(ii) Pour toute extension algébrique L de l, on a $H^{n+2}(L,\mathbb{Z}(n))_{\text{non}-p} = 0$.
(ii') Pour toute extension finie L de l, on a $H^{n+2}(L,\mathbb{Z}(n))_{\text{non}-p} = 0$.
La preuve est tout à fait analogue.

1 Quelques résultats préliminaires

Dans cette partie, nous allons présenter deux résultats préliminaires nécessaires pour la suite. D'une part, il sera utile de disposer de reformulations dans le langage des catégories dérivées du théorème de dualité sur un corps local supérieur et de la dualité de Poincaré :

Théorème 1.1. ***(Dualité sur un corps local supérieur et dualité de Poincaré)***
Rappelons que nous avons supposé $Car(k_1) = 0$. Soit $m > 0$.
(i) Notons $G = Gal(k^s/k)$ et Γ_G le foncteur qui à un G-module discret M associe M^G. Soit $M^\bullet$ un complexe de G-modules discrets de m-torsion borné inférieurement. On a alors un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{R}Hom_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))[d+1] \cong \mathbb{R}Hom_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

(ii) Soit $\overline{X}$ une k^s-variété projective lisse de dimension x. Soit $\overline{\mathcal{F}}$ un faisceau constructible de m-torsion sur un ouvert non vide $\overline{U}$ de $\overline{X}$. On a alors un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens :

$$\mathbb{R}Hom_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{\mathcal{F}},\mu_m^{\otimes x}) \cong \mathbb{R}Hom_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(\overline{U},\overline{\mathcal{F}}),\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-2x].$$

Démonstration. (i) D'après le théorème de dualité sur un corps local supérieur (théorème 2.17 de [Mil06]), pour chaque G-module discret M de m-torsion, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^r_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M,\mu_m^{\otimes d}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+1-r}(k,M),\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}). \tag{1.1}$$

De plus, on dispose des suites spectrales :

$$\mathrm{Ext}^s_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{-t}(M^\bullet),\mu_m^{\otimes d}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{s+t}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet,\mu_m^{\otimes d}), \tag{1.2}$$

$$H^s(k, H^t(M^\bullet)) \Rightarrow H^{s+t}(k, M^\bullet). \tag{1.3}$$

Comme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module injectif, (1.3) induit une suite spectrale :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+1-s}(k, H^{-t}(M^\bullet)), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+1-s-t}(k, M^\bullet), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}). \tag{1.4}$$

Comme pour chaque s le morhisme naturel

$$\mathrm{Ext}^s_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{-t}(M^\bullet), \mu_m^{\otimes d}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+1-s}(k, H^{-t}(M^\bullet)), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme, on déduit des suites spectrales (1.2) et (1.4) que :

$$\mathrm{Ext}^r_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mu_m^{\otimes d}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+1-r}(k, M^\bullet), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}). \tag{1.5}$$

Toujours parce que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module injectif, la suite spectrale $\mathrm{Ext}^s_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^t\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{s+t}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ dégénère, d'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+1-r}(k, M^\bullet), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &\cong H^{r-d-1}\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ &\cong H^r\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-d-1].\end{aligned}$$

En utilisant (1.1), on a donc des isomorphismes :

$$H^r\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mu_m^{\otimes d}) \cong H^r\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-d-1].$$

Reste alors à contruire un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mu_m^{\otimes d}) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-d-1]$$

induisant les isomorphismes précédents. Pour ce faire, on remarque que $\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet = \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, M^\bullet)$, ce qui fournit un morphisme :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mu_m^{\otimes d}) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mu_m^{\otimes d})).$$

Comme k est de dimension cohomologique $d+1$, on obtient que le complexe $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mu_m^{\otimes d})$ est quasi-isomorphe à un complexe :

$$... \to \mathrm{Hom}^{d-1}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mu_m^{\otimes d}) \to \mathrm{Hom}^d_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mu_m^{\otimes d}) \to H^{d+1}(k, \mu_m^{\otimes d}) \to 0 \to ...,$$

où $\mathrm{Hom}^i_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mu_m^{\otimes d})$ est un groupe abélien placé en degré i et $H^{d+1}(k, \mu_m^{\otimes d})$ est placé en degré $d+1$. En tenant compte de l'isomorphisme $H^{d+1}(k, \mu_m^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, cela permet de construire un morphisme :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mu_m^{\otimes d}) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[-d-1].$$

Par composition, on obtient donc un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mu_m^{\otimes d}) \to \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-d-1]$$

induisant les isomorphismes :

$$H^r\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mu_m^{\otimes d}) \cong H^r\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-d-1].$$

C'est donc un isomorphisme dans la catégorie dérivée.

(ii) C'est l'isomorphisme 3.2.6.1 de l'exposé XVIII de [Gro72a].

□

Remarque 1.2. L'assertion (i) reste vraie lorsque $\mathrm{Car}(k_1) \neq 0$ à condition de supposer que m est premier avec $\mathrm{Car}(k_1)$. L'assertion (ii) reste vraie en remplaçant k^s par n'importe quel corps séparablement clos de caractéristique première à m.

D'autre part, nous aurons besoin du calcul d'un groupe de cohomologie, analogue au lemme 1.1 de [HSz16] :

Lemme 1.3. *Soit U un ouvert non vide de X. Alors $H_c^{d+4}(U, \mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Avant de commencer la preuve, rappelons que la dimension cohomologique de X pour la topologie de Zariski est 1, et que la dimension cohomologique de $\overline{X} = X \times_k k^s$ pour la topologie étale est 2.

- Calculons d'abord $H^{d+4}(X, \mathbb{Z}(d+1))$. Le triangle distingué $\mathbb{Z}(d+1) \to \mathbb{Q}(d+1) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1) \to \mathbb{Z}(d+1)[1]$ fournit une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^{d+3}(X, \mathbb{Q}(d+1)) &\to H^{d+3}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \\ &\to H^{d+4}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \to H^{d+4}(X, \mathbb{Q}(d+1)). \end{aligned}$$

  Rappelons que, si α désigne la projection du petit site étale de X sur le petit site de Zariski de X, alors le morphisme $\mathbb{Q}(d+1)_{\mathrm{Zar}} \to R\alpha_* \mathbb{Q}(d+1)$ est un isomorphisme. Par conséquent, pour $r > 0$, $H^r(X, \mathbb{Q}(d+1)) \cong H^r_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{Q}(d+1)_{\mathrm{Zar}})$, qui est nul pour $r > d+2$ puisque $\mathbb{Q}(d+1)$ est concentré en degrés $\leq d+1$ et X est de dimension 1. On en déduit un isomorphisme :

$$H^{d+4}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \cong H^{d+3}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \varinjlim_m H^{d+3}(X, \mu_m^{\otimes d+1}).$$

  Dans la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^r(k, H^s(\overline{X}, \mu_m^{\otimes d+1})) \Rightarrow H^{r+s}(X, \mu_m^{\otimes d+1})$, les termes de gauche sont nuls dès que $r > d+1$ ou $s > 2$. Cela induit un isomorphisme :

$$H^{d+3}(X, \mu_m^{\otimes d+1}) \cong H^{d+1}(k, H^2(\overline{X}, \mu_m^{\otimes d+1})) \cong H^{d+1}(k, H^2(\overline{X}, \mu_m) \otimes \mu_m^d).$$

  Or l'application trace du théorème de dualité de Poincaré fournit un isomorphisme $H^2(\overline{X}, \mu_m) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Comme k est d-local, cela impose des isomorphismes :

$$H^{d+3}(X, \mu_m^{\otimes d+1}) \cong H^{d+1}(k, \mu_m^d) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

  ce qui permet de conclure que $H^{d+4}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- Notons $Z = X \setminus U$ et écrivons maintenant la suite exacte de localisation :

$$\begin{aligned} H^{d+3}(Z, i^*\mathbb{Z}(d+1)) &\to H_c^{d+4}(U, \mathbb{Z}(d+1)) \\ &\to H^{d+4}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \to H^{d+4}(Z, i^*\mathbb{Z}(d+1)), \end{aligned}$$

où $i : Z \hookrightarrow X$ désigne l'immersion fermée. Or, pour $r > d+1$, en notant $i_v : v \hookrightarrow X$ l'immersion fermée pour $v \in X^{(1)}$, on a :

$$\begin{aligned}
H^r(Z, i^*\mathbb{Q}(d+1)) &\cong \bigoplus_{v \in Z} H^r(k(v), i_v^*\mathbb{Q}(d+1)) \\
&\cong \bigoplus_{v \in Z} H^r(\mathcal{O}_v^h, \mathbb{Q}(d+1)) \\
&\cong \bigoplus_{v \in Z} H^r_{Zar}(\mathcal{O}_v^h, \mathbb{Q}(d+1)_{Zar}) && \text{(théorème 0.4(iii))} \\
&\cong \bigoplus_{v \in Z} H^r_{Zar}(k(v), i_v^*\mathbb{Q}(d+1)_{Zar}) \\
&= 0 && \text{(théorème 0.4(ii))}.
\end{aligned}$$

Cela fournit un isomorphisme $H^{r+1}(Z, i^*\mathbb{Z}(d+1)) \cong H^r(Z, i^*\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) = H^r(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$ dès que $r > d+1$ et ces groupes sont nuls dès que $r > d+2$. On obtient donc un isomorphisme : $H_c^{d+4}(U, \mathbb{Z}(d+1)) \cong H^{d+4}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

Remarque 1.4. Si $p = \mathrm{Car}(k_1) > 0$, on a $H_c^{d+4}(U, \mathbb{Z}(d+1))_{\mathrm{non}-p} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\mathrm{non}-p}$.

2 Modules finis

Dans cette section, nous allons traiter le cas des $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules finis. C'est le cas le plus simple, il ne fait pas intervenir les complexes de Bloch, et il sera essentiel dans la suite puisque, afin de traiter les tores ou les groupes de type multiplicatif, nous nous ramènerons toujours à des modules finis. Dans cette section, tout reste analogue au cas où k est un corps p-adique traité dans les articles [HSz16] et [HSSz15]. Notre premier but consiste à établir un théorème de dualité de type Poitou-Tate sur le corps K.

Proposition 2.1. ***(Dualité globale d'Artin-Verdier pour les modules finis)*** *Soit U un ouvert non vide de X. Soit $\mathcal{F}$ un schéma en groupes fini étale abélien sur U et notons $\mathcal{F}' = \underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$. On a alors un accouplement parfait de groupes finis pour chaque $r \in \mathbb{Z}$:*

$$H^r(U, \mathcal{F}') \times H_c^{d+3-r}(U, \mathcal{F}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Soit $m \geq 0$ tel que $\mathcal{F}$ est de m-torsion. Posons $G = \mathrm{Gal}(k^s/k)$ et $\overline{U} = U \times_k k^s$, et notons $\overline{\mathcal{F}}$ la restriction de $\mathcal{F}$ à $\overline{U}$. La finitude de $H^r(U, \mathcal{F}')$ et $H_c^{d+3-r}(U, \mathcal{F})$ découle des suites spectrales de Hochschild-Serre :

$$H^s(k, H^t(\overline{U}, \overline{\mathcal{F}}')) \Rightarrow H^{s+t}(U, \mathcal{F}')$$
$$H^s(k, H_c^t(\overline{U}, \overline{\mathcal{F}})) \Rightarrow H_c^{s+t}(U, \mathcal{F})$$

via la finitude de $H^s(k, H^t(\overline{U}, \overline{\mathcal{F}}'))$ et de $H^s(k, H^t_c(\overline{U}, \overline{\mathcal{F}}))$. Par ailleurs, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1)) &\cong \mathbb{R}\Gamma_G \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\overline{U},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\overline{\mathcal{F}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1)) && (1.6)\\
&\cong \mathbb{R}\Gamma_G \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(\overline{U}, \overline{\mathcal{F}}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))[-2] && (1.7)\\
&\cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(\overline{U}, \overline{\mathcal{F}}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d))[-2] && (1.8)\\
&\cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[-d-3] && (1.9)
\end{aligned}$$

où la ligne (1.6) découle d'une suite spectrale de Grothendieck (voir le corollaire 10.8.3 de [Wei94]), la ligne (1.7) découle de la dualité de Poincaré (voir théorème 1.1), la ligne (1.8) découle d'une autre suite spectrale de Grothendieck, et la ligne (1.9) découle du théorème de dualité locale sur le corps d-local k (voir théorème 1.1). Cela fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^r_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1))) \cong \mathrm{Ext}^{r-d-3}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}). \tag{1.10}$$

En calculant les tiges de $\underline{Ext}^t_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1))$ et en observant que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module injectif, on remarque que le faisceau $\underline{Ext}^t_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1))$ est nul pour $t > 0$. Par conséquent, la suite spectrale :

$$H^s(U, \underline{Ext}^t_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1))) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{s+t}_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1)))$$

fournit un isomorphisme de faisceaux :

$$\mathrm{Ext}^r_{U,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1)) \cong H^r(U, \underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1))). \tag{1.11}$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module injectif, le groupe $\mathrm{Ext}^s_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est nul quels que soient le $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-module M et l'entier $s > 0$. On en déduit que la suite spectrale $\mathrm{Ext}^s_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{-t}\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ dégénère, fournissant ainsi un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^{r-d-3}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(H^{d+3-r}_c(U, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}). \tag{1.12}$$

Les isomorphismes (1.10), (1.11) et (1.12) permettent de conclure. □

Dans tout le reste de cette section, on se donne un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret fini F, ainsi qu'un schéma en groupes fini étale abélien $\mathcal{F}$ sur un ouvert non vide U_0 de X tel que $F = \mathcal{F} \times_{U_0} \mathrm{Spec}K$. On note $\mathcal{F}' = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$ et $F' = \underline{\mathrm{Hom}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$. Comme $\mathcal{F}$ est fini étale et comme k est de caractéristique 0, on remarquera que le faisceau $\mathcal{F}'$ est localement constant à tiges finies sur U_0 et donc qu'il est représenté par un schéma en groupes fini étale (voir la proposition V.1.1 de [Mil80]). Pour U ouvert non vide de U_0, on définit :

$$D^r_{sh}(U, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\left(H^r(U, \mathcal{F}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^r(K_v, F)\right)$$

$$\mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}') = \mathrm{Im}(H^r_c(U, \mathcal{F}') \to H^r(K, F')).$$

Proposition 2.2. *Soit $r \in \mathbb{N}$. Il existe un ouvert non vide U_1 de U_0 tel que, pour tout ouvert non vide U de U_1, on a $\mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}') = Ш^r(F')$.*

Démonstration. Le groupe $\mathcal{D}^r(U_0, \mathcal{F})$ est fini et, si $V \subseteq U$ sont des ouverts non vides de U_0, alors $\mathcal{D}^r(V, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F})$ par fonctorialité contravariante de la cohomologie à support compact. Par conséquent, il existe U_1 un ouvert non vide de U_0 tel que $\mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}) = \mathcal{D}^r(U_1, \mathcal{F})$ pour chaque ouvert non vide U de U_1.
Montrons que $\mathcal{D}^r(U_1, \mathcal{F}) = Ш^r(F)$. Pour ce faire, donnons-nous $x \in \mathcal{D}^r(U_1, \mathcal{F})$. Pour chaque ouvert non vide U de U_1, on a $x \in \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F})$ et donc, comme la suite $H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^r(K_v, F)$ est exacte (proposition 3.1(1) et corollaire 3.2 de [HSz16]), on a $x \in \mathrm{Ker}\left(H^r(K, F) \to \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^r(K_v, F)\right)$. Cela étant vrai pour chaque ouvert U de U_1, on déduit que $x \in Ш^r(F)$, c'est-à-dire que $\mathcal{D}^r(U_1, \mathcal{F}) \subseteq Ш^r(F)$.
Considérons à présent $x \in Ш^r(F)$. Il existe U un ouvert non vide de U_1 et $\tilde{x} \in H^r(U, \mathcal{F})$ tels que $\tilde{x}$ s'envoie sur x par $H^r(U, \mathcal{F}) \to H^r(K, F)$. Comme $x \in Ш^r(F)$, on a $\tilde{x} \in \mathrm{Ker}\left(H^r(U, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus U} H^r(K_v, F)\right) = \mathrm{Im}(H^r_c(U, \mathcal{F}) \to H^r(U, \mathcal{F}))$. Par conséquent, $x \in \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}) = \mathcal{D}^r(U_1, \mathcal{F})$ et $Ш^r(F) \subseteq \mathcal{D}^r(U_1, \mathcal{F})$.
Finalement, on a $\mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}) = Ш^r(F)$ pour chaque ouvert non vide U de U_1. □

Proposition 2.3. *Soit $r \in \mathbb{N}$. Pour chaque ouvert non vide U de U_0, on dispose d'une suite exacte :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r-1}(K_v, F') \to H^r_c(U, \mathcal{F}') \to \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}') \to 0.$$

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de U_0. D'après la proposition 4.3.c) de [CTH15], pour chaque ouvert non vide V de U, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{v \in X \setminus U} H^{r-1}(K_v, F') \arrow[r] \arrow[d] & H^r_c(U, \mathcal{F}') \\
\bigoplus_{v \in X \setminus V} H^{r-1}(K_v, F') \arrow[r] & H^r_c(V, \mathcal{F}'). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Cela permet de définir un morphisme $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r-1}(K_v, F') \to H^r_c(U, \mathcal{F}')$, et la suite exacte de localisation montre que $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r-1}(K_v, F') \to H^r_c(U, \mathcal{F}') \to \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}') \to 0$ est un complexe. Reste donc à montrer que :

$$\mathrm{Ker}(H^r_c(U, \mathcal{F}') \to \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}')) \subseteq \mathrm{Im}(\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r-1}(K_v, F') \to H^r_c(U, \mathcal{F}')).$$

Considérons donc $\alpha \in \mathrm{Ker}(H^r_c(U, \mathcal{F}') \to \mathcal{D}^r(U, \mathcal{F}'))$. Pour $V \subseteq U$, on a un diagramme commutatif dont la première ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd}
H^r_c(V, \mathcal{F}') \arrow[r] & H^r_c(U, \mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(k(v), F') \arrow[d] \\
& H^r(K, F') \arrow[r] & \bigoplus_{v \in U \setminus V} H^r(K_v, F'),
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

le morphisme vertical $H^r(k(v),F') \to H^r(K_v,F')$ étant obtenu par composition :

$$H^r(k(v),F') \cong H^r(\mathcal{O}_v^h,\mathcal{F}') \to H^r(K_v^h,F') \cong H^r(K_v,F').$$

La flèche $H^r(\mathcal{O}_v^h,\mathcal{F}') \to H^r(K_v^h,F')$ s'identifie en cohomologie galoisienne à la flèche d'inflation $H^r(G_v/I_v,F'^{I_v}) \to H^r(G_v,F')$, où $G_v = \mathrm{Gal}(K_v^{h,s}/K_v^h)$ et I_v est le sous-groupe d'inertie. Or le module galoisien F' est non ramifié en v (puisque $v \in U_0$) et donc $F'^{I_v} = F'$. Comme la projection $G_v \to G_v/I_v$ admet une section, on en déduit que $H^r(\mathcal{O}_v^h,\mathcal{F}') \to H^r(K_v^h,F')$ et $H^r(k(v),F') \to H^r(K_v,F')$ sont injectifs.
Prenons pour V un ouvert non vide de U tel que l'image de α dans $H^r(V,\mathcal{F}')$ est nulle. En exploitant le diagramme précédent (1.13), on voit alors que α provient d'un élément $\tilde{\alpha}$ de $H^r_c(V,\mathcal{F}')$ dont l'image dans $H^r(V,\mathcal{F}')$ est nulle. Par conséquent, α provient de $\bigoplus_{v\in X\setminus V} H^{r-1}(K_v,F')$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Ker}(H^r_c(U,\mathcal{F}') \to \mathcal{D}^r(U,\mathcal{F}')) \subseteq \mathrm{Im}(\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{r-1}(K_v,F') \to H^r_c(U,\mathcal{F}'))$. $\square$

Théorème 2.4. ***(Dualité de Poitou-Tate pour les modules finis)***
On rappelle que $F' = \underline{Hom}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$. Soit $r \in \mathbb{Z}$. On dispose d'une dualité parfaite de groupes finis :

$$Ш^r(F) \times Ш^{d+3-r}(F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Si $r<0$ ou si $r>d+3$, le résultat est immédiat par dimension cohomologique. On suppose donc $0 \leq r \leq d+3$.
À l'aide de la proposition 2.3, pour U ouvert non vide de U_1, on dispose des deux suites exactes :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{d+2-r}(K_v,F') \to H^{d+3-r}_c(U,\mathcal{F}') \to \mathcal{D}^{d+3-r}(U,\mathcal{F}') \to 0,$$

$$0 \to D^r_{sh}(U,\mathcal{F}) \to H^r(U,\mathcal{F}) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^r(K_v,F).$$

Or $(\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{d+2-r}(K_v,F'))^D \cong \prod_{v\in X^{(1)}} H^r(K_v,F)$ d'après le théorème de dualité locale sur un corps $(d+1)$-local et $H^{d+3-r}_c(U,\mathcal{F}')^D \cong H^r(U,\mathcal{F})$ d'après le théorème 2.1. En utilisant la proposition 4.3(f) de [CTH15], on en déduit que $\mathcal{D}^{d+3-r}(U,\mathcal{F}')^D \cong D^r_{sh}(U,\mathcal{F})$. En passant à la limite inductive sur U et en utilisant la proposition 2.2, on obtient $Ш^{d+3-r}(F')^D \cong Ш^r(F)$. $\square$

Dans le reste de cette section, nous cherchons à établir une suite exacte de type Poitou-Tate sur le corps K.

Proposition 2.5. *Soient $r \in \{1,2,...,d+1\}$ et $v \in U_0^{(1)}$. Alors :*
(i) $H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F})$ est un sous-groupe de $H^r(K_v,F)$,
(ii) $H^{d+2-r}(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}')$ est un sous-groupe de $H^{d+2-r}(K_v,F')$,
(iii) $H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F})$ et $H^{d+2-r}(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}')$ sont les annulateurs l'un de l'autre dans l'accouplement parfait :

$$H^r(K_v,F) \times H^{d+2-r}(K_v,F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Notons $G_v = \mathrm{Gal}(K_v^s/K_v)$, $I_v = \mathrm{Gal}(K_v^s/K_v^{nr})$ et $g_v = \mathrm{Gal}(K_v^{nr}/K_v) = \mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v))$. La suite exacte $1 \to I_v \to G_v \to g_v \to 1$ est scindée et I_v est de dimension cohomologique 1. La suite spectrale de Hochschild-Serre fournit donc des suites exactes courtes :

$$0 \to H^r(g_v, F) \to H^r(G_v, F) \to H^{r-1}(g_v, H^1(I_v, F)) \to 0,$$

$$0 \to H^{d+2-r}(g_v, F') \to H^{d+2-r}(G_v, F') \to H^{d+1-r}(g_v, H^1(I_v, F')) \to 0.$$

Comme $H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}) = H^r(g_v, F)$ et $H^{d+2-r}(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}') = H^{d+2-r}(g_v, F')$, on obtient (i) et (ii). De plus, le théorème de dualité locale sur $k(v)$ montre que :

$$H^{r-1}(g_v, H^1(I_v, F)) \cong H^{r-1}(g_v, F(-1)) \cong H^{d+2-r}(g_v, F')^D.$$

On en déduit que $\frac{|H^r(K_v,F)|}{|H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F})|} = |H^{d+2-r}(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}')|$.
Par conséquent, pour obtenir (iii), il suffit de montrer que l'accouplement $H^r(K_v, F) \times H^{d+2-r}(K_v, F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est nul sur $H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}) \times H^{d+2-r}(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}')$. Mais cela découle de la trivialité de $H^{d+2}(\mathcal{O}_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) = H^{d+2}(g_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) = 0$ (par dimension cohomologique). □

Dans la suite, on notera $\mathbb{P}^r(F)$ le produit restreint des groupes $H^r(K_v, F)$ pour $v \in X^{(1)}$ par rapport aux groupes $H^r(\mathcal{O}_v, \mathcal{F})$ (pour $v \in U_0^{(1)}$) : c'est un groupe abélien que l'on munit de la topologie produit restreint. Ainsi, $\mathbb{P}^r(F)$ est muni d'une structure de groupe abélien localement compact. On remarque aisément que $\mathbb{P}^0(F) = \prod_{v \in X^{(1)}} H^0(K_v, F)$. Comme, pour chaque $v \in U_0^{(1)}$, le corps $k(v)$ est de dimension cohomologique $d+1$, on a $H^{d+2}(\mathcal{O}_v, \mathcal{F}) = H^{d+2}(k(v), \mathcal{F}_{\overline{v}}) = 0$, ce qui entraîne que $\mathbb{P}^{d+2}(F) = \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v, F)$. On remarquera que la proposition 2.5 montre que la dualité locale induit un accouplement parfait de groupes localement compacts :

$$\mathbb{P}^r(F) \times \mathbb{P}^{d+2-r}(F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour chaque entier r.

Proposition 2.6. *Soit $r \in \{1, 2, ..., d+2\}$. On a une suite exacte :*

$$H^r(K, F) \longrightarrow \mathbb{P}^r(F) \longrightarrow H^{d+2-r}(K, F')^D$$

où le morphisme $\mathbb{P}^r(F) \to H^{d+2-r}(K, F')^D$ est défini par :

$$(f_v) \mapsto (f' \mapsto \sum_{v \in X^{(1)}} (f_v, f'_v)_v),$$

pour $(f_v) \in \mathbb{P}^r(F)$ et $f' \in H^{d+2-r}(K, F')$.

Démonstration. Pour chaque ouvert $V \subseteq U_0$, on dispose d'une suite exacte de groupes finis :

$$H^r_c(V, \mathcal{F}) \to H^r(V, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^r(K_v, F) \to H^{r+1}_c(V, \mathcal{F}).$$

Soient U et V deux ouverts de U_0 tels que $V \subseteq U$. Comme d'après le lemme 2.2 de [HSSz15] un élément de $H^r(V,\mathcal{F})$ provient de $H^r(U,\mathcal{F})$ si, et seulement si, son image dans $H^r(K_v,F)$ provient de $H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F})$ pour chaque $v \in U \setminus V$, on obtient une suite exacte :

$$H^r(U,\mathcal{F}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \oplus \bigoplus_{v\in U\setminus V} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}) \to H^{r+1}_c(V,\mathcal{F}).$$

Or $H^{r+1}_c(V,\mathcal{F}) \cong H^{d+2-r}(V,\mathcal{F}')^D$ d'après la proposition 2.1 et $\varinjlim_V H^{d+2-r}(V,\mathcal{F}') = H^{d+2-r}(K,F')$. Par conséquent, en passant à la limite projective sur V, on obtient un complexe :

$$H^r(U,\mathcal{F}) \to \prod_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \times \prod_{v\in U} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}) \to H^{d+2-r}(K,F')^D.$$

Montrons que ce complexe est en fait une suite exacte. Pour ce faire, choisissons un élément $(f_v)_{v\in X^{(1)}} \in \prod_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \times \prod_{v\in U} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F})$ dont l'image dans $H^{d+2-r}(K,F')^D$ est nulle. Pour chaque ouvert V de U, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \times \prod_{v\in U} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2-r}(K,F')^D \arrow[d] \\
\bigoplus_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \oplus \bigoplus_{v\in U\setminus V} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^{r+1}_c(V,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

montre que l'image de $(f_v)_{v\in X\setminus V}$ est nulle dans $H^{r+1}_c(V,\mathcal{F})$. Cela impose que l'image réciproque E_V de $(f_v)_{v\in X\setminus V}$ dans $H^r(U,\mathcal{F})$ est non vide. Comme pour $W \subseteq V$ on a $E_W \subseteq E_V$ et comme le groupe $H^r(U,\mathcal{F})$ est fini, l'intersection $\bigcap_V E_V$ est non vide. On en déduit que $(f_v)_{v\in X^{(1)}}$ est dans l'image de $H^r(U,\mathcal{F}) \to \prod_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \times \prod_{v\in U} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F})$ et donc que la suite

$$H^r(U,\mathcal{F}) \to \prod_{v\in X\setminus U} H^r(K_v,F) \times \prod_{v\in U} H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}) \to H^{d+2-r}(K,F')^D$$

est exacte. Il suffit alors de prendre la limite inductive sur U. $\square$

Théorème 2.7. ***(Suite exacte de Poitou-Tate pour les modules finis)*** *On rappelle que $F' = \underline{Hom}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$. On a une suite exacte à $3(d+3)$ termes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(K,F) \arrow[r] & \mathbb{P}^0(F) \arrow[r] & H^{d+2}(K,F')^D \arrow[d] \\
 & H^{d+1}(K,F')^D \arrow[d] & \mathbb{P}^1(F) \arrow[l] & H^1(K,F) \arrow[l] \\
 & \cdots & & \cdots \arrow[d] \\
0 & H^0(K,F')^D \arrow[l] & \mathbb{P}^{d+2}(F) \arrow[l] & H^{d+2}(K,F) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le morphisme $\mathbb{P}^{d+2}(F) \to H^0(K,F')^D$ est surjectif car la flèche duale est injective. De plus, la première ligne est duale de la dernière. On déduit donc de la proposition précédente que toutes les lignes sont exactes.
Les flèches verticales $H^r(K,F')^D \to H^{d+3-r}(K,F)$ sont définies par la composée :

$$H^{d+3-r}(K,F')^D \twoheadrightarrow Ш^{d+3-r}(F')^D \cong Ш^r(F) \hookrightarrow H^r(K,F).$$

Pour vérifier l'exactitude au niveau de ces flèches, il suffit de voir que la suite duale de :

$$0 \to Ш^{d+3-r}(F') \to H^{d+3-r}(K,F') \to \mathbb{P}^{d+3-r}(F')$$

est encore exacte. D'après le lemme 2.4 de [HSSz15], il suffit donc de vérifier que l'image I de $H^{d+3-r}(K,F')$ dans $\mathbb{P}^{d+3-r}(F')$ est discrète. Fixons U un ouvert de U_0. D'après le lemme 2.2 de [HSSz15], tout élément de $I \cap (\prod_{v\in X\setminus U} H^{d+3-r}(K_v,F') \times \prod_{v\in U} H^{d+3-r}(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}'))$ provient de $H^{d+3-r}(U,\mathcal{F}')$, qui est un groupe fini. On en déduit que le groupe $I \cap (\prod_{v\in X\setminus U} H^{d+3-r}(K_v,F') \times \prod_{v\in U} H^{d+3-r}(\mathcal{O}_v,\mathcal{F}'))$ est fini, et donc I est discret dans $\mathbb{P}^{d+3-r}(F')$. □

Remarque 2.8. Les théorèmes 2.4 et 2.7 restent valables lorsque $k=\mathbb{C}$ à condition de choisir $d=-1$.

Remarque 2.9. Si on ne suppose pas que k_1 est de caractéristique 0, toutes les propriétés de cette section restent valables à condition de supposer que F est d'ordre premier à $\mathrm{Car}(k_1)$.

3 Tores

Avant d'entrer dans le vif de cette section, établissons le lemme suivant, qui sera utile à de nombreuses reprises :

Lemme 3.1. *Soient Y un schéma de Dedekind de dimension $y \in \{0,1\}$ et M un faisceau sur Y localement isomorphe à un faisceau constant libre de rang fini. Soient $i \geq 0$ et $r \geq i+y+1$. Alors le groupe $H^r(Y, M\otimes \mathbb{Q}(i))$ est trivial.*

Démonstration. Soit $\pi : Z \to Y$ un morphisme fini étale de degré n déployant M avec Z connexe (voir le théorème X.5.16 de [Gro70]). Comme $H^r(Z,\mathbb{Q}(i)) \cong H^r_{Zar}(Z,\mathbb{Q}(i)_{Zar})$ et $\mathbb{Q}(i)_{Zar}$ est concentré en degré $\leq i$, le groupe $H^r(Z,\mathbb{Q}(i))$ est trivial car $r > i+\dim\ Z$. Un argument de restriction-corestriction montre alors que $H^r(Y,M\otimes\mathbb{Q}(i))$ est de n-torsion. Mais ce groupe est aussi uniquement divisible. Il est donc nul. □

Fixons maintenant a un élément de $\{0,1,2,...,d+1\}$ et $\hat{T}$ un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module qui, comme groupe abélien, est libre de type fini. Notons $\check{T} = \mathrm{Hom}(\hat{T},\mathbb{Z})$. Soit $\hat{\mathcal{T}}$ un faisceau défini sur un ouvert U_0 de X, localement isomorphe à un faisceau constant libre de type fini et étendant $\hat{T}$. On pose $\check{\mathcal{T}} = \underline{\mathrm{Hom}}(\hat{\mathcal{T}},\mathbb{Z})$. Soient $T = \check{T}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(a)[1]$

et $\mathcal{T} = \check{\mathcal{T}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$. On dispose alors d'un accouplement dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur U_0 :

$$\mathcal{T} \otimes^{\mathbf{L}} (\hat{\mathcal{T}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)[1]) \to \mathbb{Z}(d+1)[2],$$

qui induit grâce au lemme 1.3 un accouplement en hypercohomologie :

$$H^r(U, \mathcal{T}) \times H^{d+3-r}_c(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)) \to H^{d+4}_c(U, \mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (1.14)$$

pour chaque ouvert non vide U de U_0. De plus, comme on a un morphisme naturel $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a) \to \mathbb{Z}(d+1-a)[1]$, (1.14) induit aussi un accouplement :

$$H^r(U, \mathcal{T}) \times H^{d+2-r}_c(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (1.15)$$

On notera dans la suite $\tilde{T}_t = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)$, $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$, $\tilde{\mathcal{T}}_t = \hat{\mathcal{T}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)$ et $\tilde{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$. C'est le complexe $\tilde{T}$ qui nous intéresse, mais parfois il sera plus facile de travailler avec le faisceau $\tilde{T}_t$.

Remarque 3.2. Lorsque $a = 1$, les complexes T et $\mathcal{T}$ sont quasi-isomorphes à des tores.

Nous cherchons à établir un théorème de dualité de type Poitou-Tate pour le complexe T. Pour ce faire, l'idée consiste à se ramener au cadre de la section précédente en travaillant avec $\tilde{T}_t$, qui est une limite inductive de faisceaux localement constants à tiges finies, plutôt qu'avec le complexe $\tilde{T}$.

Théorème 3.3. ***(Artin-Verdier pour les tores)***
Soit $r \in \mathbb{Z}$. Soit U un ouvert non vide de U_0. Pour chaque nombre premier l, l'accouplement (1.15) induit un accouplement parfait de groupes finis :

$$(H^r(U, \mathcal{T})\{l\})^{(l)} \times H^{d+2-r}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)^{(l)}\{l\} \to \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l.$$

Démonstration. Soit l un nombre premier. Pour chaque entier naturel n, on dispose du triangle distingué :

$$\mathcal{T} \to \mathcal{T} \to \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a)[1] \to \mathcal{T}[1],$$

d'où des suites exactes :

$$0 \to H^{r-1}(U, \mathcal{T})/l^n \to H^r(U, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a)) \to {}_{l^n}H^r(U, \mathcal{T}) \to 0.$$

En passant à la limite inductive sur n, on obtient une suite exacte :

$$0 \to H^{r-1}(U, \mathcal{T}) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to \varinjlim_n H^r(U, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a)) \to H^r(U, \mathcal{T})\{l\} \to 0.$$

Par conséquent, pour chaque entier naturel m, on a un isomorphisme :

$$(\varinjlim_n H^r(U, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a)))/l^m \to H^r(U, \mathcal{T})\{l\}/l^m.$$

En passant à la limite projective sur m, on obtient :

$$(\varinjlim_n H^r(U, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a)))^{(l)} \cong H^r(U, \mathcal{T})\{l\}^{(l)}. \tag{1.16}$$

D'autre part, on remarque que $\check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a)$ s'identifie à un faisceau localement constant à tiges finies, qui est représentable par un schéma en groupes fini étale d'après la proposition V.1.1 de [Mil80], et que :

$$(\check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a))' := \underline{\mathrm{Hom}}(\check{\mathcal{T}} \otimes \mu_{l^n}^{\otimes a}, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) = \hat{\mathcal{T}} \otimes \mu_{l^n}^{\otimes d+1-a} = {}_{l^n}\tilde{\mathcal{T}}_t.$$

À l'aide de la suite exacte :

$$0 \to {}_{l^n}\tilde{\mathcal{T}}_t \to \tilde{\mathcal{T}}_t \to \tilde{\mathcal{T}}_t \to 0,$$

on obtient une suite exacte :

$$0 \to H_c^{d+2-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)/l^n \to H_c^{d+3-r}(U, {}_{l^n}\tilde{\mathcal{T}}_t) \to {}_{l^n}H_c^{d+3-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to 0.$$

Les groupes apparaissant dans la suite précédente étant finis, en passant à la limite projective sur n, on obtient une suite exacte :

$$0 \to H_c^{d+2-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)^{(l)} \to \varprojlim_n H_c^{d+3-r}(U, {}_{l^n}\tilde{\mathcal{T}}_t) \to \varprojlim_n {}_{l^n}H_c^{d+3-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to 0.$$

Le groupe $\varprojlim_n {}_{l^n}H_c^{d+3-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ étant sans torsion, on obtient un isomorphisme :

$$H_c^{d+2-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)^{(l)}\{l\} \cong \left(\varprojlim_n H_c^{d+3-r}(U, {}_{l^n}\tilde{\mathcal{T}}_t)\right)\{l\}. \tag{1.17}$$

Comme $H^r(U, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(a))$ et $H_c^{d+3-r}(U, {}_{l^n}\tilde{\mathcal{T}}_t)$ sont duaux pour chaque entier naturel n d'après le théorème 2.1, les isomorphismes (1.16) et (1.17) permettent d'obtenir un accouplement parfait de groupes finis :

$$(H^r(U, \mathcal{T})\{l\})^{(l)} \times H_c^{d+2-r}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)^{(l)}\{l\} \to \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l.$$

□

Remarque 3.4. De même, on a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$(H^r(U, \mathcal{T})\{l\})^{(l)} \times H_c^{d+3-r}(U, \tilde{\mathcal{T}})^{(l)}\{l\} \to \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l,$$
$$(H^r(U, \tilde{\mathcal{T}})\{l\})^{(l)} \times H_c^{d+3-r}(U, \mathcal{T})^{(l)}\{l\} \to \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l,$$

Soit $v \in X^{(1)}$. D'après le lemme 3.1, on a

$$H^{d+2}(K_v, \mathbb{Q}(d+1)) = H^{d+3}(K_v, \mathbb{Q}(d+1)) = 0.$$

Par conséquent, le morphisme $T \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{T} \to \mathbb{Z}(d+1)[1]$ (dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur K_v) induit un accouplement :

$$H^r(K_v, T) \times H^{d+2-r}(K_v, \tilde{T}) \to H^{d+3}(K_v, \mathbb{Z}(d+1)) \cong H^{d+2}(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{1.18}$$

Proposition 3.5. ***(Dualité locale pour les tores)***
(i) Pour $r = a$, l'accouplement (1.18) est un accouplement parfait de groupes finis.
(ii) Pour chaque entier naturel n, on a des isomorphismes de groupes finis :

$$ {}_nH^a(K_v, T) \cong (H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})/n)^D \cong (H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_t)/n)^D, $$

le premier étant induit par (1.18) et le deuxième par le morphisme $\tilde{T}_t \to \tilde{T}[1]$.
(iii) L'accouplement (1.18) induit un accouplement parfait entre un groupe profini et un groupe discret de torsion :

$$ H^{a-1}(K_v, T)^\wedge \times H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. $$

Démonstration. (i) Pour chaque $n > 0$, on dispose des triangles distingués :

$$ \check{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a) \to T \to T \to (\check{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))[1], \tag{1.19} $$
$$ \tilde{T} \to \tilde{T} \to \hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a) \to \tilde{T}[1], \tag{1.20} $$

ce qui fournit un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$ \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^{a-1}(K_v, T)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^a(K_v, \check{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & ... \\ 0 \arrow[r] & ({}_nH^{d+3-a}(K_v, \tilde{T}))^D \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v, \hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a))^D \arrow[r] & ... \end{tikzcd} $$

$$ \begin{tikzcd} ... \arrow[r] & {}_nH^a(K_v, T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ ... \arrow[r] & (H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})/n)^D \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} $$

Ici, la flèche verticale centrale est induite par la dualité locale pour les modules finis sur le corps $(d+1)$-local K_v : c'est un isomorphisme d'après le théorème I.2.17 de [Mil06]. Les deux autres flèches verticales sont induites par (1.18). On déduit que la flèche verticale de droite est surjective.
Montrons maintenant que les groupes $H^a(K_v, T)$ et $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})$ sont finis. Si L est une extension finie de K_v de degré n_0 déployant $\hat{T}$, comme $H^{a+1}(L, \mathbb{Z}(a)) = H^{d+2-a}(L, \mathbb{Z}(d+1-a)) = 0$ d'après la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum, un argument de restriction-corestriction montre immédiatement que $H^a(K_v, T)$ et $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})$ sont de n_0-torsion. Ainsi, le groupe $H^a(K_v, T) = {}_{n_0}H^a(K_v, T)$ est un quotient du groupe fini $H^a(K_v, \check{T} \otimes \mathbb{Z}/n_0\mathbb{Z}(a))$ et est donc fini. On a aussi $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}) \cong H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})/n_0$. Comme ${}_{n_0}H^a(K_v, T) \to (H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})/n_0)^D$ est surjectif, on déduit que $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})$ est fini. Nous avons donc prouvé pour l'instant que $H^a(K_v, T)$ et $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})$ sont finis et que le morphisme $H^a(K_v, T) \to (H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}))^D$ est surjectif.
Montrons maintenant que le cardinal de $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})$ est supérieur ou égal à celui de $H^a(K_v, T)$. Pour ce faire, remarquons que les triangles distingués (1.19)

et (1.20) fournissent le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T})/n \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+1-a}(K_v,\hat{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & ... \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{a+1}(K_v,T))^D \arrow[r] & H^{a+1}(K_v,\check{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))^D \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & {}_nH^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
... \arrow[r] & (H^a(K_v,T)/n)^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, le morphisme vertical de droite est surjectif. En choisissant $n = n_0$, on déduit que l'ordre de $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})$ est supérieur à l'ordre de $H^a(K_v,T)$. On a donc bien un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^a(K_v,T)\times H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) La propriété (i) fournit immédiatement des isomorphismes ${}_nH^a(K_v,T)\cong(H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})/n)^D$. Montrons que $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})/n\cong H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)/n$.
De façon tout à fait analogue à (i), on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{a-1}(K_v,T)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^a(K_v,\check{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & ... \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_t))^D \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v,\hat{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a))^D \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & {}_nH^a(K_v,T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
... \arrow[r] & (H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)/n)^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

La flèche ${}_nH^a(K_v,T)\to(H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)/n)^D$ est donc surjective. L'exploitation du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{}_nH^a(K_v,T) \arrow[r] \arrow[dr] & (H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})/n)^D \arrow[d] \\
 & (H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)/n)^D
\end{tikzcd}$$

permet alors de conclure que la flèche $H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)/n\to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})/n$ est injective.
Par ailleurs, la suite exacte courte de complexes

$$0\to\tilde{T}\to\hat{T}\otimes\mathbb{Q}(d+1-a)\to\tilde{T}_t\to 0$$

fournit une suite exacte de cohomologie

$$H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)\to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})\to H^{d+2-a}(K_v,\hat{T}\otimes\mathbb{Q}(d+1-a)).$$

D'après le lemme 3.1, $H^{d+2-a}(K_v, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1-a)) = 0$. Par conséquent, l'application $H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_t) \to H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})$ est surjective. On en déduit que la flèche $H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_t)/n \to H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T})/n$ est injective et surjective, donc un isomorphisme.

(iii) Le premier diagramme de la preuve de (i) montre que les applications

$$H^{a-1}(K_v, T)/n \to ({}_nH^{d+3-a}(K_v, \tilde{T}))^D$$

sont des isomorphismes. En passant à la limite projective sur n :

$$H^{a-1}(K_v, T)^\wedge \cong (H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T})_{tors})^D.$$

Or d'après le lemme 3.1, les groupes $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$ et $H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls. On en déduit que le groupe $H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T})$ est isomorphe à $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$: il est donc de torsion et on a :

$$H^{a-1}(K_v, T)^\wedge \cong H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T})^D.$$

□

Proposition 3.6. *Soit U un ouvert non vide de U_0.*
(i) Le groupe $Ш^a(T)$ est d'exposant fini.
(ii) Pour $r \geq 0$, les groupes $H^r(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ sont de torsion de type cofini.
(iii) Pour $r \geq 0$, les groupes $H^r_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ sont de torsion de type cofini.
(iv) Les groupes $H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}})$ et $H^{d+4-a}(U, \tilde{\mathcal{T}})$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. (i) Soit L une extension finie de K déployant $\hat{T}$. Comme la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum impose que $H^{a+1}(L, \mathbb{Z}(a)) = 0$, un argument de restriction-corestriction montre que $H^a(K, T)$ est d'exposant fini.

(ii) Soit $r \geq 0$. Remarquons d'abord que $\tilde{\mathcal{T}}_t$ est un faisceau de torsion, et donc $H^r(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ est de torsion. De plus, la suite exacte de Kummer fournit une surjection $H^r(U, {}_n\tilde{\mathcal{T}}_t) \to {}_nH^r(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ pour chaque entier naturel n. Comme $H^r(U, {}_n\tilde{\mathcal{T}}_t)$ est fini pour chaque n, on déduit que $H^r(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ est de torsion de type cofini.

(iii) La preuve est tout à fait analogue à celle de la propriété (ii).

(iv) Les groupes $H^{d+3-a}(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(d+1-a))$ et $H^{d+4-a}(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(d+1-a))$ sont nuls d'après le lemme 3.1. Par conséquent, les suites exactes :

$$H^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}) \to H^{d+3-a}(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(d+1-a)),$$

$$H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to H^{d+4-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}) \to H^{d+4-a}(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(d+1-a))$$

fournissent des surjections $H^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}})$ et $H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to H^{d+4-a}(U, \tilde{\mathcal{T}})$. On en déduit que $H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}})$ et $H^{d+4-a}(U, \tilde{\mathcal{T}})$ sont de torsion de type cofini via (ii).

□

Pour U ouvert non vide de U_0, posons $\mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) = \mathrm{Im}(H^{d+2-a}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to H^{d+2-a}(K, \tilde{T}_t))$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}) = \mathrm{Im}(H^{d+3-a}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}) \to H^{d+3-a}(K, \tilde{T}))$. D'après la proposition précédente, les groupes $H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)$ et $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})$ sont de torsion de type cofini. De plus, le morphisme $H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}) \to H^{d+3-a}(K,\tilde{T})$ se factorise par $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})$. On en déduit que les groupes $\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})$ sont de torsion de type cofini.

Proposition 3.7. *Pour chaque nombre premier l, il existe un ouvert non vide U_1 de U_0 tel que, pour tout ouvert $U \subseteq U_1$, on a :*

$$\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\} = \mathcal{D}^{d+2-a}(U_1,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\} = Ш^{d+2-a}(\tilde{T}_t)\{l\},$$

$$\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})\{l\} = \mathcal{D}^{d+3-a}(U_1,\tilde{\mathcal{T}})\{l\} = Ш^{d+3-a}(\tilde{T})\{l\}.$$

Démonstration. Montrons d'abord que la restriction $H^{d+3-a}(K_v^h,\tilde{T}) \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T})$ est un isomorphisme. On remarque que, pour $v \in X^{(1)}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{d+3-a}(K_v^h,\tilde{T}) \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}) \\
H^{d+2-a}(K_v^h,\tilde{T}_t) \arrow[r] \arrow[u] & H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_t) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme les groupes $H^{d+2-a}(K_v^h,\tilde{T}\otimes\mathbb{Q})$, $H^{d+3-a}(K_v^h,\tilde{T}\otimes\mathbb{Q})$, $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Q})$ et $H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Q})$ sont nuls d'après le lemme 3.1, on déduit que les flèches verticales sont des isomorphismes. De plus, pour chaque $n>0$, le faisceau $\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est représentable par un schéma en groupes fini étale et donc le morphisme $H^{d+2-a}(K_v^h,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme (lemme 2.7 de [HSz05]). On en déduit que la flèche $H^{d+2-a}(K_v^h,\tilde{T}_t) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_t)$ est aussi un isomorphisme. Il en est donc de même de la restriction $H^{d+3-a}(K_v^h,\tilde{T}) \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T})$.
Fixons maintenant un nombre premier l. Pour des ouverts $V \subseteq V'$ de U, par fonctorialité contravariante de la cohomologie à support compact, on a $\mathcal{D}^{d+2-a}(V,\tilde{\mathcal{T}}_t) \subseteq \mathcal{D}^{d+2-a}(V',\tilde{\mathcal{T}}_t)$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(V,\tilde{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{D}^{d+3-a}(V',\tilde{\mathcal{T}})$. Or, grâce à la proposition précédente, on sait que $\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})$ sont de torsion de type cofini. Par conséquent, d'après le lemme 3.7 de [HSz16], il existe un ouvert non vide U_1 de U tel que, pour tout ouvert $V \subseteq U_1$, on a $\mathcal{D}^{d+2-a}(V,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\} = \mathcal{D}^{d+2-a}(U_1,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\}$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(V,\tilde{\mathcal{T}})\{l\} = \mathcal{D}^{d+2-a}(U_1,\tilde{\mathcal{T}})\{l\}$. Une chasse au diagramme analogue à la preuve de la proposition 2.2 permet alors d'établir que $\mathcal{D}^{d+2-a}(U_1,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\} = Ш^{d+2-a}(\tilde{T}_t)\{l\}$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U_1,\tilde{\mathcal{T}})\{l\} = Ш^{d+3-a}(\tilde{T})\{l\}$. □

Remarque 3.8. La proposition précédente impose en particulier que $Ш^{d+2-a}(\tilde{T}_t)$ est de torsion de type cofini. Via le lemme 3.1, on a un isomorphisme $Ш^{d+2-a}(\tilde{T}_t) = Ш^{d+3-a}(\tilde{T})$. Cela prouve que $Ш^{d+3-a}(\tilde{T})$ est aussi de torsion de type cofini.

Proposition 3.9. *Soit U un ouvert non vide de U_0. La suite*

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t) \to H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}_t) \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit $m > 0$ un entier. On sait que $\hat{\mathcal{T}}$ représente un faisceau localement constant libre de type fini sur U, et donc, comme k est de caractéristique 0, le faisceau $\hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1-a)$ est localement constant à tiges finies sur U. Il est donc représentable par un schéma en groupes fini étale d'après la proposition V.1.1 de [Mil80], et grâce à la proposition 2.3, on en déduit une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v, \hat{T} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1-a)) \to H^{d+2-a}_c(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1-a))$$
$$\to \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \hat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(d+1-a)) \to 0.$$

Il suffit alors de passer à la limite inductive sur m. □

Théorème 3.10. ***(Dualité de Poitou-Tate pour les tores)***
On rappelle que $a \in \{0, 1, ..., d+1\}$, $T = \check{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$ et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$. On a un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^a(T) \times \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Remarque 3.11. Le groupe $Ш^{d+3-a}(\tilde{T})$ peut être infini. Dans la section 1 du chapitre 2, on s'intéresse à la finitude de $Ш^{d+3-a}(\tilde{T})$ lorsque $a = 1$ ou $a = d$.

Démonstration. Fixons l un nombre premier. Pour U ouvert de U_1, on pose $D^a_{sh}(U, \mathcal{T}) = \mathrm{Ker}(H^a(U, \mathcal{T}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^a(K_v, T))$. D'une part, on a la suite exacte :

$$0 \to D^a_{sh}(U, \mathcal{T})\{l\} \to H^a(U, \mathcal{T})\{l\} \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^a(K_v, T)\{l\}.$$

Comme $\prod_{v \in X^{(1)}} H^a(K_v, T)\{l\}$ est d'exposant fini d'après la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum, son sous-groupe divisible maximal est trivial, et donc le sous-groupe divisible maximal de $H^a(U, \mathcal{T})\{l\}$ est contenu dans $D^a_{sh}(U, \mathcal{T})\{l\}$. De plus, comme $H^a(U, \mathcal{T})\{l\}$ est de torsion de type cofini, si $x \in H^a(U, \mathcal{T})\{l\}$ est divisible, il existe pour chaque entier $n > 0$ un élément divisible x_n de $H^a(U, \mathcal{T})\{l\}$: l'élément x_n appartient alors à $D^a_{sh}(U, \mathcal{T})\{l\}$. Cela montre que x est divisible dans $D^a_{sh}(U, \mathcal{T})\{l\}$ et donc que le sous-groupe divisible maximal de $H^a(U, \mathcal{T})\{l\}$ est contenu dans celui de $D^a_{sh}(U, \mathcal{T})\{l\}$. On en déduit une suite exacte :

$$0 \to \overline{D^a_{sh}(U, \mathcal{T})\{l\}} \to \overline{H^a(U, \mathcal{T})\{l\}} \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^a(K_v, T)\{l\}.$$

D'autre part, d'après la proposition 3.9, on a la suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_t) \to H^{d+2-a}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t) \to 0.$$

Comme $H^{d+2-a}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)$ est un groupe de torsion de type cofini, elle induit une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} \overline{H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_t)} \to \overline{H^{d+2-a}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)} \to \overline{\mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{T}}_t)} \to 0.$$

Avec la proposition 4.3 de [CTH15], on obtient donc un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{D^a_{sh}(U,\mathcal{T})\{l\}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{H^a(U,\mathcal{T})\{l\}} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^a(K_v,T)\{l\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (\overline{\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\}})^D \arrow[r] & (\overline{H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\}})^D \arrow[r] & (\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{d+1-a}(K_v,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\}})^D
\end{tikzcd}$$

D'après la proposition 3.5, la flèche verticale de droite est un isomorphisme. De plus, on a $\overline{H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\}} = H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)^{(l)}\{l\}$, et donc le morphisme vertical du milieu est un isomorphisme d'après le théorème 3.3. On en déduit que $\overline{D^a_{sh}(U,\mathcal{T})\{l\}} \cong (\overline{\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)\{l\}})^D$. Comme $\text{Ш}^a(T)$ n'admet pas de sous-groupe divisible non nul d'après la proposition 3.6, en passant à la limite sur U et en utilisant la propriété 3.7, on obtient que :

$$\text{Ш}^a(T)\{l\} \cong (\overline{\text{Ш}^{d+2-a}(\tilde{T}_t)}\{l\})^D \cong (\overline{\text{Ш}^{d+3-a}(\tilde{T})}\{l\})^D.$$

□

Corollaire 3.12. *Les groupes $\text{Ш}^2(\mathbb{G}_m)$ et $\text{Ш}^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ sont divisibles.*

Démonstration. Prenons $T = \mathbb{G}_m$ dans le théorème 3.10, de sorte que $\tilde{T} = \mathbb{Z}(d)$.

- D'après le théorème de Hilbert 90, on a $\text{Ш}^1(\mathbb{G}_m) = 0$. Par conséquent, $\overline{\text{Ш}^{d+2}(\mathbb{Z}(d))} = 0$, et $\text{Ш}^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ est bien divisible.
- D'après la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum, on a $\text{Ш}^{d+1}(\mathbb{Z}(d)) = 0$. Par conséquent, $\overline{\text{Ш}^2(\mathbb{G}_m)} = 0$, et $\text{Ш}^2(\mathbb{G}_m)$ est divisible.

□

Nous voulons maintenant établir une suite exacte de type Poitou-Tate pour les tores.

Proposition 3.13. *Soit $v \in U_0^{(1)}$.*

(i) L'image de $H^a(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})$ dans $H^a(K_v,T)$ et l'image de $H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})$ dans $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})$ sont annulateurs l'un de l'autre dans l'accouplement parfait :

$$H^a(K_v,T) \times H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Supposons que $a = 1$. Alors $H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})$ s'identifie à un sous-groupe de $H^{d+2}(K_v,\tilde{T})$ et son annulateur dans l'accouplement parfait :

$$H^0(K_v,T)^\wedge \times H^{d+2}(K_v,\tilde{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})^\wedge$, qui s'identifie à un sous-groupe de $H^0(K_v,T)^\wedge$.

Démonstration. (i) Considérons l'unique accouplement

$$[.,.] : H^a(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \times H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) & \times & H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ H^a(K_v, \mathcal{T}) & \times & H^{d+2-a}(K_v, \tilde{\mathcal{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

Soit $(x,y) \in H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) \times H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}})$. Comme $H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(a)) \cong H^{a+1}(k(v), i^*(\check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(a)))$ où $k(v)$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_v$ et $i : \mathrm{Spec}(k(v)) \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_v$ est l'immersion fermée, un argument similaire à celui du lemme 3.1 montre que $H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}(a)) = 0$. On en déduit que $H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T})$ est de torsion. Soit donc $n > 0$ tel que $nx = 0$. L'élément x provient alors de $x_n \in H^a(\mathcal{O}_v, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))$. Si y_n est l'image de y dans $H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a))$, on remarque que $[x,y] = [x_n, y_n]_n$, où l'accouplement

$$\begin{aligned} [.,.]_n : H^a(\mathcal{O}_v, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)) \times H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v, \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a)) \\ \to H^{d+2}(\mathcal{O}_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) \to H^{d+2}(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{aligned}$$

est induit par $\check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a) \otimes \check{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1-a) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)$. Cet accouplement est nul car $H^{d+2}(\mathcal{O}_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = 0$. On en déduit que $[x,y] = 0$, et donc que $[.,.] = 0$.

Reste à montrer que, si $t \in H^a(K_v, T)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}}) \to H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}))$, alors $t \in \mathrm{Im}(H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) \to H^a(K_v, T))$. Considérons donc $t \in H^a(K_v, T)$ orthogonal à $\mathrm{Im}(H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}}) \to H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}))$. Fixons $n > 0$. L'image de t dans $H^a(K_v, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est alors orthogonale à $H^{d+1-a}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subseteq H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Grâce à la proposition 2.5, on déduit qu'elle est dans $H^a(\mathcal{O}_v, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Considérons maintenant le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) & \longrightarrow & H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^a(K_v, T) & \xrightarrow{\cdot n} & H^a(K_v, T) & \longrightarrow & H^a(K_v, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{a+1}(K_v, T) \end{array}$$

Montrons que la flèche verticale de droite est injective. Pour ce faire, remarquons que le diagramme suivant est commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) & \longrightarrow & H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^a(K_v, T \otimes \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^a(K_v, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{a+1}(K_v, T) & \longrightarrow & H^{a+1}(K_v, T \otimes \mathbb{Q}) \end{array}$$

Or $H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}) = H^a(K_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}) = 0$ d'après le lemme 3.1 et le morphisme $H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^a(K_v, T \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est injectif d'après la proposition 2.5. Une chasse au diagramme prouve alors que $H^{a+1}(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) \to H^{a+1}(K_v, T)$ est injectif.

Cela prouve qu'il existe $t_n \in \mathrm{Im}(H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) \to H^a(K_v, T))$ tel que $t - t_n \in nH^a(K_v, T)$. On en déduit que l'image de t dans le groupe fini

$$\mathrm{Coker}(H^a(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}) \to H^a(K_v, T))$$

est divisible. Elle est donc nulle puisque $H^a(K_v,T)$ est d'exposant fini via la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum et un argument de restriction-corestriction.

(ii) Pour montrer que $H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})$ s'identifie à un sous-groupe de $H^{d+2}(K_v,\tilde{T})$, il suffit de remarquer (en utilisant le lemme 3.1) que :

$$H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}) = H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}_t),$$
$$H^{d+2}(K_v,\tilde{T}) = H^{d+1}(K_v,\tilde{T}_t),$$

et que la restriction $H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+1}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est injective pour chaque $n \geq 1$.

Comme dans (i), on montre que l'accouplement $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})^\wedge \times H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est nul. Fixons maintenant $n>0$ et considérons $t \in H^0(K_v,T)/n$ orthogonal à ${}_nH^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})$. L'image de t dans $H^0(K_v,T\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est alors orthogonale à $H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subseteq H^{d+1}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ et appartient donc à $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Écrivons le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})/n \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^0(K_v,T)/n \arrow[r] & H^0(K_v,T\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^1(K_v,T)
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \to H^1(K_v,T)$ s'identifie à un morphisme d'inflation en cohomologie galoisienne : il est donc injectif. De plus, $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^0(K_v,T\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est injectif. Une chasse au diagramme permet alors d'établir que $H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})/n \to H^0(K_v,T)/n$ est injectif et que $t \in H^0(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})/n$, ce qui achève la preuve.

$\square$

Remarque 3.14. Dans la preuve précédente, pour montrer que $[.,.]$ est nul, on ne peut pas simplement dire que $[.,.]$ est à valeurs dans $H^{d+3}(\mathcal{O}_v,\mathbb{Z}(d+1))$ car on ne sait pas s'il existe un accouplement $\mathbb{Z}(i)\otimes\mathbb{Z}(j) \to \mathbb{Z}(i+j)$ sur $\mathcal{O}_v$ (qui n'est pas une variété sur un corps).

Dans la suite de cette section, on supposera que

(H 3.15) *$a=1$, c'est-à-dire $T = \check{T}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(1)[1]$ est quasi-isomorphe à un tore et $\tilde{T} = \hat{T}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(d)$.*

Pour chaque $r \geq 0$, on notera $\mathbb{P}^r(T)$ le produit restreint des $H^r(K_v,T)$ pour $v \in X^{(1)}$ par rapport aux $H^r_{\text{nr}}(K_v,T) = \text{Im}(H^r(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \to H^r(K_v,T))$, muni de sa topologie naturelle. De même, on notera $\mathbb{P}^r(\tilde{T})$ le produit restreint des $H^r(K_v,\tilde{T})$ pour $v \in X^{(1)}$ par rapport aux $H^r_{\text{nr}}(K_v,\tilde{T}) = \text{Im}(H^r(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}) \to H^r(K_v,\tilde{T}))$, muni de sa topologie naturelle. Il convient de munir $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ d'une topologie qui n'est pas induite par la topologie produit restreint sur $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})$. Pour ce faire, remarquons que, pour chaque $n>0$, le groupe ${}_n\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})$ est le produit restreint des ${}_nH^{d+2}(K_v,\tilde{T})$ par rapport aux ${}_nH^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}) \subseteq {}_nH^{d+2}(K_v,\tilde{T})$. Nous pouvons donc le munir de sa topologie produit restreint. La topologie sur $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} = \varinjlim_n {}_n\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})$ sera alors tout simplement la topologie limite inductive.

Remarque 3.16. Pour $v \in U_0^{(1)}$, le lemme 3.1 montre que $H^{d+2}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q})$ et $H^{d+3}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls. En notant $i_v : \{v\} \hookrightarrow X$ l'immersion fermée, on obtient donc un isomorphisme :

$$H^{d+3}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}}) \cong H^{d+2}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}}_t) \cong H^{d+2}(k(v), i_v^* \tilde{\mathcal{T}}_t).$$

Comme $k(v)$ est de dimension cohomologique $d+1$, on en déduit que $H^{d+3}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}})$ est nul. On a donc :

$$\mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) = \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+3}(K_v, \tilde{T}).$$

De plus, les groupes $H^{d+2}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$ et $H^{d+3}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls d'après le lemme 3.1. Donc :

$$\mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) = \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}_t)$$

et $\mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T})$ est un groupe de torsion.

Corollaire 3.17. *On rappelle que l'on a supposé (H 3.15). La dualité locale induit un accouplement parfait* $\mathbb{P}^1(T) \times \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *et un isomorphisme* $\mathbb{P}^0(T)_\wedge \to (\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors})^D$.

Démonstration. La première affirmation découle immédiatement de l'assertion (i) de la proposition 3.13. Quant à la seconde, on remarque que, pour chaque $n > 0$, $\mathbb{P}^0(T)/n$ s'identifie au produit restreint des $H^0(K_v, T)/n$ par rapport aux $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T})/n$ puisque $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T})/n \subseteq H^0(K_v, T)/n$. On déduit de l'assertion (ii) de la proposition 3.13 que $\mathbb{P}^0(T)/n \cong ({}_n\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T}))^D$. En passant à la limite projective sur n, on obtient l'isomorphisme $\mathbb{P}^0(T)_\wedge \to (\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors})^D$. □

Proposition 3.18. *On rappelle que l'on a supposé (H 3.15).*
(i) On a une suite exacte :

$$H^{d+2}(K, \tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to (H^0(K,T)_\wedge)^D \to H^{d+3}(K, \tilde{T}) \to$$
$$\to \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \to (\varprojlim_n {}_nT(K^s))^D \to 0.$$

(ii) Supposons que $\text{Ш}^2(T)$ *est fini. Alors on a une suite exacte :*

$$H^1(K,T) \to \mathbb{P}^1(T) \to H^{d+1}(K, \tilde{T})^D.$$

Démonstration. (i) Soit $n > 0$. On rappelle que, dans notre contexte, $T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ désigne $\check{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)[1]$. On dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_n H^{d+1}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n H^0(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
H^{d+2}(K, \tilde{T}) \arrow[r] & \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \arrow[r] & (H^0(K,T)_\wedge)^D \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \varinjlim_n H^{d+2}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n H^{-1}(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & H^{d+3}(K, \tilde{T}) \arrow[r] & \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \arrow[r] & \varinjlim_n H^{-1}(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les morphismes sont définis de la manière suivante :

- <u>flèches verticales :</u>
  - les morphismes
$$\varinjlim_n H^{d+1}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+3}(K, \tilde{T})$$
$$\varinjlim_n H^{d+2}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+3}(K, \tilde{T})$$
sont induits par le triangle distingué $\tilde{T} \xrightarrow{\cdot n} \tilde{T} \to \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \tilde{T}$. Ce sont des isomorphismes puisqu'ils s'insèrent dans des suites exactes :
$$H^{d+1}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q}) \to \varinjlim_n H^{d+1}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+2}(K, \tilde{T}) \to H^{d+2}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$$
$$H^{d+2}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q}) \to \varinjlim_n H^{d+2}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+3}(K, \tilde{T}) \to H^{d+3}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$$
et $H^{d+1}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$, $H^{d+2}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$ et $H^{d+3}(K, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls (lemme 3.1).
  - le morphisme $\varinjlim_n \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ est surjectif étant donné que $H^{d+1}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to {}_nH^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ (pour $v \in X^{(1)}$ et $n > 0$) et $H^{d+1}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to {}_nH^{d+2}(\mathcal{O}_v, \tilde{\mathcal{T}})$ (pour $v \in U_0^{(1)}$ et $n > 0$) sont surjectifs.
  - le morphisme $\varinjlim_n H^0(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \to (H^0(K,T)_\wedge)^D$ est obtenu à partir des morphismes $H^0(K,T)/n \to H^0(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ par dualisation et passage à la limite sur n. Or ce dernier morphisme s'insère dans la suite exacte :
$$0 \to H^0(K,T)/n \to H^0(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to {}_nH^1(K,T) \to 0.$$
Comme $H^1(K,T)$ est d'exposant fini, cela impose que
$$\varinjlim_n (H^0(K, T \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D) \to (H^0(K,T)_\wedge)^D$$
est un isomorphisme.
  - le morphisme $\varinjlim_n \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T})$ est un isomorphisme puisqu'il s'identifie au morphisme
$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v, \tilde{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+3}(K_v, \tilde{T}).$$
- <u>première ligne :</u>
  - toute la ligne est obtenue à partir du théorème 2.7 par passage à la limite inductive : ledit théorème impose donc qu'elle est exacte.
- <u>deuxième ligne :</u>
  - les morphismes $H^{d+2}(K, \tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ et $H^{d+3}(K, \tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T})_{tors}$ sont induits par les restrictions.
  - le morphisme $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to (H^0(K,T)_\wedge)^D$ est le dual de $H^0(K,T)_\wedge \to \mathbb{P}^0(T)_\wedge$ (voir le corollaire 3.17).

- les morphismes $(H^0(K,T)_\wedge)^D \to H^{d+3}(K,\tilde{T})$ et $\mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \to \varinjlim_n H^{-1}(K, T\otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D$ sont les seuls qui font commuter le diagramme.

Une chasse au diagramme permet alors de conclure que la deuxième ligne est exacte.

(ii) Nous sommes dans le cas $a = 1$, ce qui impose que T et $\mathcal{T}$ sont quasi-isomorphes à des tores. Pour chaque ouvert non vide $V \subseteq U_0$, on dispose d'une suite exacte :

$$H^1_c(V,\mathcal{T}) \to H^1(V,\mathcal{T}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v^h,T) \to H^2_c(V,\mathcal{T}).$$

Pour $v \in X^{(1)}$, on a un isomorphisme $H^1(K_v,T) \cong H^1(K_v^h,T)$ (on pourra aller voir le corollaire 3.2 de [HSz16] ou le lemme 2.7 de [HSz05]). Par conséquent, on obtient, pour chaque ouvert non vide V de U_0, une suite exacte :

$$H^1_c(V,\mathcal{T}) \to H^1(V,\mathcal{T}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,T) \to H^2_c(V,\mathcal{T}).$$

Soient maintenant U et V deux ouverts de U_0 tels que $V \subseteq U$. D'après le lemme de Harder (corollaire A.8 de [GP08]), un élément de $H^1(V,\mathcal{T})$ provient de $H^1(U,\mathcal{T})$ si, et seulement si, son image dans $H^1(K_v,T)$ provient de $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})$ pour chaque $v \in U \setminus V$. On obtient donc une suite exacte :

$$H^1(U,\mathcal{T}) \to \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^1(K_v,T) \oplus \bigoplus_{v\in U\setminus V} H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \to H^2_c(V,\mathcal{T}).$$

Soit $m > 0$ le degré d'une extension déployant T. Le groupe $H^1(K_v,T)$ étant de m-torsion pour $v \in X^{(1)}$, il en est de même de $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})$ pour $v \in U_0$, et on obtient une suite exacte de groupes finis :

$$H^1(U,\mathcal{T})/m \to \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^1(K_v,T) \oplus \bigoplus_{v\in U\setminus V} H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \to {}_mH^2_c(V,\mathcal{T}).$$

Grâce à la proposition 3.7, choisissons V assez petit pour que $\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T})\{l\} \cong Ш^2(T)\{l\}$ pour chaque nombre premier l divisant m, et montrons que pour un tel nombre premier le groupe $H^2_c(V,\mathcal{T})\{l\}$ est fini.

On sait que le groupe $H^2_c(V,\mathcal{T})\{l\}$ est de type cofini et qu'il s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ker}(H^2_c(V,\mathcal{T}) \to H^2(K,T)) \to H^2_c(V,\mathcal{T}) \to \mathcal{D}^2(V,\mathcal{T}) \to 0.$$

Le groupe $\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T})\{l\}$ étant fini (puisqu'on a supposé la finitude de $Ш^2(T)$), il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(H^2_c(V,\mathcal{T}) \to H^2(K,T))$ est d'exposant fini. Considérons alors un morphisme fini étale $\tilde{V} \to V$ de degré m avec $\tilde{V}$ intègre déployant $\mathcal{T}$. Notons $\tilde{K}$ le corps des fonctions de $\tilde{V}$. Comme $\tilde{V}$ est régulier, le morphisme $H^2(\tilde{V},\mathcal{T}) \to H^2(\tilde{K},T)$ est injectif (voir la proposition II.4.5.3 de [Tam94]), et un argument de restriction-corectriction montre que

$\mathrm{Ker}(H^2(V,\mathcal{T}) \to H^2(K,T))$ est de m-torsion. De plus, le théorème de Hilbert 90 impose que, pour chaque $v \in X \setminus V$, le groupe $H^1(K_v,T)$ est de m-torsion. Par conséquent, la suite exacte $\bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,T) \to H^2_c(V,\mathcal{T}) \to H^2(V,\mathcal{T})$ permet de conclure que $\mathrm{Ker}(H^2_c(V,\mathcal{T}) \to H^2(K,T))$ est de m^2-torsion, ce qui établit la finitude de $H^2_c(V,\mathcal{T})\{l\}$ pour chaque premier l divisant m.
En utilisant la remarque 3.4 et en observant que $H^{d+1}(V,\tilde{\mathcal{T}})\{l\}$ est de type cofini, on obtient une injection ${}_mH^2_c(V,\mathcal{T}) \hookrightarrow \prod_{l|m} H^{d+1}(V,\tilde{\mathcal{T}})\{l\}^D$, d'où une suite exacte :

$$H^1(U,\mathcal{T})/m \to \bigoplus_{v\in X\setminus U} H^1(K_v,T) \oplus \bigoplus_{v\in U\setminus V} H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \to \prod_{l|m} H^{d+1}(V,\tilde{\mathcal{T}})\{l\}^D.$$

Comme $H^{d+1}(K,\tilde{T})$ est de m-torsion via la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum et un argument de restriction-corestriction, en passant à la limite projective sur V comme dans la proposition 2.6, on déduit la suite exacte :

$$H^1(U,\mathcal{T}) \to \prod_{v\in X\setminus U} H^1(K_v,T) \times \prod_{v\in U} H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}) \to H^{d+1}(K,\tilde{T})^D.$$

Il suffit alors de passer à la limite inductive sur U pour conclure.

□

Lemme 3.19. *On rappelle que l'on a supposé (H 3.15). Soient $V \subseteq U$ deux ouverts non vides de U_0. Soit $\alpha \in H^{d+2}(V,\tilde{\mathcal{T}})$. Si, pour chaque $v \in U \setminus V$, l'image de α dans $H^{d+2}(K_v,\tilde{T})$ provient de $H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})$, alors α provient de $H^{d+2}(U,\tilde{\mathcal{T}})$.*

Démonstration. Comme $H^{d+2}(V,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Q})$ est nul d'après le lemme 3.1, on a une surjection $H^{d+1}(V,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^{d+2}(V,\tilde{\mathcal{T}})$. On en déduit que $H^{d+2}(V,\tilde{\mathcal{T}})$ est de torsion. Soit donc n tel que α est de n-torsion et choisissons $\alpha_n \in H^{d+1}(V,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ relevant α. Pour $v \in U\setminus V$, soit $\alpha_{n,v}$ l'image de α_n dans $H^{d+1}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Par hypothèse, pour chaque $v \in U \setminus V$, l'image de $\alpha_{n,v}$ dans $H^{d+2}(K_v,\tilde{T})$ provient de $H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})$. Comme $H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Q}) = H^{d+2}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Q}) = H^{d+1}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Q}) = 0$ d'après le lemme 3.1, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_m H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}) \arrow[d] \\
\varinjlim_m H^{d+1}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & H^{d+1}(K_v,\tilde{T})
\end{tikzcd}$$

On en déduit qu'il existe un multiple m de n tel que, pour chaque $v \in U\setminus V$, l'image de $\alpha_{n,v}$ dans $H^{d+1}(K_v,\tilde{T}\otimes\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ provient de $H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. D'après le lemme 2.2 de [HSSz15], cela entraîne que l'image de α_n dans $H^{d+1}(V,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ provient de $H^{d+1}(U,\tilde{\mathcal{T}}\otimes\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, d'où le résultat. □

Lemme 3.20. *Le groupe $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ est nul si, et seulement si, le groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ l'est aussi.*

Démonstration. Pour chaque entier naturel $n > 0$, la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum fournit un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{d+1}(K,\mu_n^{\otimes d}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2}(K,\mathbb{Z}(d)) \arrow[r, "\cdot n"] \arrow[d] & H^{d+2}(K,\mathbb{Z}(d)) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+1}(K_v,\mu_n^{\otimes d}) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v,\mathbb{Z}(d)) \arrow[r, "\cdot n"] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v,\mathbb{Z}(d))
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) \cong {}_nШ^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$. Comme $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ est de torsion d'après la remarque 3.8, on obtient avec le théorème 2.4 :

$$Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d)) \cong \varinjlim_n Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) \cong \varinjlim_n Ш^2(\mu_n)^D.$$

Or, par un argument tout à fait analogue à celui qui précède, on a $Ш^2(\mu_n) \cong {}_nШ^2(\mathbb{G}_m)$. Par conséquent :

$$Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d)) \cong (\varprojlim_n {}_nШ^2(\mathbb{G}_m))^D.$$

On en déduit que la partie divisible de $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ est nulle si, et seulement si, la partie divisible de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est nulle (en fait, les parties divisibles de $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ sont non canoniquement isomorphes). Or :

- d'après le théorème 3.10 avec $a = 1$, le dual de $\overline{Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))}$ est $Ш^2(\mathbb{Z}(1)) = Ш^1(\mathbb{G}_m)$. Ce dernier groupe est trivial par Hilbert 90. Donc $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ est divisible.
- d'après le théorème 3.10 avec $a = d$, le dual de $\overline{Ш^2(\mathbb{G}_m)}$ est $Ш^{d+1}(\mathbb{Z}(d))$. Ce dernier groupe est trivial par la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum. Donc $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est divisible.

D'où le lemme. □

Remarque 3.21. Plus généralement, si $a \neq 1$, on prouve que $Ш^{d+3-a}(\mathbb{Z}(d+1-a))$ est nul si, et seulement si, $Ш^{a+2}(\mathbb{Z}(a))$ l'est.

Théorème 3.22. ***(Suite exacte de Poitou-Tate pour les tores)***
Rappelons que nous avons supposé (H 3.15), c'est-à-dire que $T = \check{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(1)[1]$ est quasi-isomorphe à un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. Soit L une extension finie déployant T. Supposons que $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul. On dispose alors d'une suite exacte à 7 termes :

$$\begin{tikzcd}
 & Ш^{d+3}(\tilde{T})^D \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & H^0(K,T)_\wedge \arrow[r] & \mathbb{P}^0(T)_\wedge \arrow[r] & H^{d+2}(K,\tilde{T})^D \arrow[d] \\
 & H^{d+1}(K,\tilde{T})^D & \mathbb{P}^1(T) \arrow[l] & H^1(K,T) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.23. (i) La nullité du groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est étudiée dans la section 1 du chapitre 2. Elle est en particulier établie dans les trois cas suivants :

- X est la droite projective ou une conique sur k (théorème 1.2 du chapitre 2) ;

- k_1 est un corps p-adique, X est une courbe de la forme $\text{Proj}(k[x,y,z]/(P(x,y,z)))$ où $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ est un polynôme homogène, et, en notant $\overline{P}$ la réduction de P modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{k_1}$, le schéma $\text{Proj}(k_0[x,y,z]/(\overline{P}(x,y,z)))$ est une courbe lisse et géométriquement intègre (théorème 1.13 du chapitre 2) ;
- $k_0 = \mathbb{C}((t))$, X est la courbe elliptique sur k d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ avec $A, B \in k_0$, et la courbe elliptique sur k_0 d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ admet une réduction modulo t de type additif (théorème 1.13 du chapitre 2).

Toujours dans la section 1 du chapitre 2, on exhibe des exemples où $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$ dès que k n'est pas un corps p-adique (exemples 1.15 et 1.17 du chapitre 2). Dans le cas où k est p-adique, on rappelle que Harari et Szamuely ont montré que $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est toujours nul (démonstration de la proposition 3.4 de [HSz16]).

(*ii*) Plaçons-nous dans le cas où $T = \mathbb{G}_m$ et où K est tel que $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$. D'après le lemme 3.20, le groupe de torsion de type cofini $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ est non nul. De plus, comme on le verra dans la preuve du théorème 3.22, la suite $\mathbb{P}^0(\mathbb{G}_m)_\wedge \to H^{d+2}(K,\mathbb{Z}(d))^D \to Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))^D \to 0$ est exacte. Par conséquent, le morphisme $\mathbb{P}^0(\mathbb{G}_m)_\wedge \to H^{d+2}(K,\mathbb{Z}(d))^D$ n'est pas surjectif. Ainsi, la suite du théorème 3.22 est fausse dans ce contexte. Cela met en évidence l'importance de l'hypothèse $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$.

(*iii*) Le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est étudié à la fin de la section 1 du chapitre 2. On montre en particulier qu'il est nul si k est un corps p-adique et fini si $k = \mathbb{C}((t))((t_1))$.

Démonstration. • Comme $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$, un argument de restriction-corestriction montre que $Ш^2(T)$ est d'exposant fini. Comme c'est un groupe de torsion de type cofini, on en déduit qu'il est fini. La proposition 3.18 permet alors d'établir l'exactitude de la dernière ligne.

• On dispose de la suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to H^{d+2}(K,\tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}. \tag{1.21}$$

Comme $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$, le lemme 3.20 montre que $Ш^{d+2}(L,\mathbb{Z}(d)) = 0$. Un argument de restriction-corestriction permet donc de conclure que $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ est d'exposant fini. Ainsi, $Ш^{d+2}(\tilde{T}) = \overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})}$, et le théorème 3.10 permet alors d'obtenir que $Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \cong Ш^1(T)$. En combinant cela au corollaire 3.17, on déduit que la suite duale de (1.21) s'écrit :

$$\mathbb{P}^0(T)_\wedge \to H^{d+2}(K,\tilde{T})^D \to Ш^1(T) \to 0. \tag{1.22}$$

Pour montrer l'exactitude de cette suite, il suffit d'établir que le morphisme $H^{d+2}(K,\tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ est strict, c'est-à-dire que son image I est discrète. Pour ce faire, on fixe U un ouvert de U_0 et on remarque grâce au lemme 3.19 que tout élément de $I \cap (\prod_{v \in X\setminus U} {}_nH^{d+2}(K_v,\tilde{T}) \times \prod_{v\in U} {}_nH^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}})) \subseteq \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ provient de $H^{d+2}(U,\tilde{\mathcal{T}})$. Ce dernier groupe est de torsion de type cofini. Par conséquent, $I \cap (\prod_{v \in X\setminus U} {}_nH^{d+2}(K_v,\tilde{T}) \times \prod_{v\in U} {}_nH^{d+2}(\mathcal{O}_v,\tilde{\mathcal{T}}))$ est de n-torsion et de type cofini, donc fini. Par définition de la topologie de $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$, I est discret, et la suite (1.22) est exacte.

- La proposition 3.18 fournit une suite exacte

$$H^{d+2}(K,\tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to (H^0(K,T)_\wedge)^D \to Ш^{d+3}(\tilde{T}) \to 0. \tag{1.23}$$

D'après le corollaire 3.17, la suite duale s'écrit :

$$0 \to Ш^{d+3}(\tilde{T})^D \to H^0(K,T)_\wedge \to \mathbb{P}^0(T)_\wedge \to H^{d+2}(K,\tilde{T})^D. \tag{1.24}$$

Pour montrer son exactitude, il suffit de montrer que les morphismes dans (1.23) sont stricts (lemme 2.4 de [HSSz15]). On a déjà vu que le morphisme $H^{d+2}(K,\tilde{T}) \to \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ est strict, et le morphisme $(H^0(K,T)_\wedge)^D \to Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est strict de manière évidente puisque $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est discret. Reste donc à montrer que $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to (H^0(K,T)_\wedge)^D$ est strict. Le groupe localement compact $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors}$ est muni d'une topologie qui en fait une réunion dénombrable d'espaces compacts, et, le groupe $(H^0(K,T)_\wedge)^D$ étant localement compact, l'image J de $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to (H^0(K,T)_\wedge)^D$ est localement compacte car elle est fermée dans $(H^0(K,T)_\wedge)^D$. Comme le morphisme $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to J$ est surjectif, on déduit du théorème 5.29 de [HR79] que c'est un morphisme strict. Cela impose immédiatement que $\mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \to (H^0(K,T)_\wedge)^D$ est strict, et donc la suite (1.24) est exacte.

□

Théorème 3.24. ***(Suite exacte de Poitou-Tate pour le dual d'un tore)*** *Rappelons que nous avons supposé (H 3.15), c'est-à-dire que $T = \check{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(1)[1]$ est quasi-isomorphe à un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. Soit L une extension finie déployant T. Supposons que $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul. On dispose d'une suite exacte à 8 termes :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \arrow[r] & H^1(K,T)^D \arrow[d] \\
(H^0(K,T)_\wedge)^D \arrow[d] & \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{tors} \arrow[l] & H^{d+2}(K,\tilde{T}) \arrow[l] \\
H^{d+3}(K,\tilde{T}) \arrow[r] & \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \arrow[r] & (\varprojlim_n {}_nT(K^s))^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. • L'exactitude des six derniers termes découle de la proposition 3.18.

- Remarquons que la suite de groupes d'exposant fini :

$$0 \to Ш^1(T) \to H^1(K,T) \to \mathbb{P}^1(T).$$

est exacte. En utilisant la nullité de $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$, le lemme 3.20 et le théorème 3.10, on remarque que sa suite duale s'écrit :

$$\mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \to H^1(K,T)^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to 0.$$

Pour vérifier son exactitude, il suffit de montrer que le morphisme $H^1(K,T) \to \mathbb{P}^1(T)$ est strict, c'est-à-dire que son image est discrète. Pour ce faire, on fixe U

un ouvert de U_0 et on remarque grâce au lemme de Harder (corollaire A.8 de [GP08]) que tout élément de $I \cap (\prod_{v\in X\setminus U} H^1(K_v,T) \times \prod_{v\in U} H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T})) \subseteq \mathbb{P}^1(T)$ provient de $H^1(U,\mathcal{T})$. Comme $\mathbb{P}^1(T)$ est d'exposant fini n et $H^1(U,\mathcal{T})/n$ est fini, on déduit que $I \cap (\prod_{v\in X\setminus U} H^1(K_v,T) \times \prod_{v\in U} H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{T}))$ est fini. Cela entraîne que I est discret et donc que la suite $\mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \to H^1(K,T)^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to 0$ est exacte.

□

Remarque 3.25. En combinant les deux théorèmes précédents, on retrouve, dans le cas où k est p-adique, la suite à 9 termes du théorème 2.9 de [HSSz15] à condition d'utiliser la remarque 3.23.

Remarque 3.26. Supposons k_1 est de caractéristique $p>0$. Dans ce cas :
- le théorème 3.3 et la remarque 3.4 restent valables pour $l \neq p$.
- l'assertion (i) de la proposition 3.5 donne un accouplement parfait de groupes finis :
$$H^a(K_v,T)_{\mathrm{non}-p} \times H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T})_{\mathrm{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$
l'assertion (ii) reste valable pour n non divisible par p, et l'assertion (iii) donne un accouplement parfait :
$$\varprojlim_{p\nmid n} H^{a-1}(K_v,T)/n \times H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T})_{\mathrm{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
- concernant la proposition 3.6, le groupe $Ш^a(T)$ est d'exposant fini et les groupes $H^r(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)_{\mathrm{non}-p}$, $H^r(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)_{\mathrm{non}-p}$, $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})_{\mathrm{non}-p}$ et $H^{d+4-a}(U,\tilde{\mathcal{T}})_{\mathrm{non}-p}$ sont de torsion de type cofini.
- la proposition 3.7 reste vraie pour $l \neq p$.
- concernant la proposition 3.9, on a une suite exacte :
$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_t)_{\mathrm{non}-p} \to H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)_{\mathrm{non}-p} \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_t)_{\mathrm{non}-p} \to 0.$$
- le théorème 3.10 fournit un accouplement parfait de groupes finis :
$$Ш^a(T)_{\mathrm{non}-p} \times \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{T})_{\mathrm{non}-p}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

4 Groupes de type multiplicatif

Soit $a \in \{0,1,...,d+1\}$ fixé. Soient $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$ deux $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules qui, comme groupes abéliens, sont libres de type fini. Notons $\check{T}_1 = \mathrm{Hom}(\hat{T}_1,\mathbb{Z})$ et $\check{T}_2 = \mathrm{Hom}(\hat{T}_2,\mathbb{Z})$. Posons aussi $T_1 = \check{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$ et $T_2 = \check{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$. Comme dans les sections précédentes, introduisons $\tilde{T}_1 = \hat{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$, $\tilde{T}_2 = \hat{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$, $\tilde{T}_{1t} = \hat{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)$ et $\tilde{T}_{2t} = \hat{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)$, ainsi que $T_{1t} = \check{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a)[1]$ et $T_{2t} = \check{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a)[1]$.
Considérons maintenant un morphisme $\hat{\rho} : \hat{T}_2 \to \hat{T}_1$. Un tel morphisme induit

des morphismes $\rho : T_1 \to T_2$, $\check{\rho} : \check{T}_1 \to \check{T}_2$, $\tilde{\rho} : \tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1$, $\tilde{\rho}_t : \tilde{T}_{2t} \to \tilde{T}_{1t}$ et $\rho_t : T_{1t} \to T_{2t}$. Soit $G = [T_1 \to T_2]$ le cône de ρ, de sorte que l'on a un triangle distingué $T_1 \to T_2 \to G \to T_1[1]$. Soit $\tilde{G} = [\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1]$ le cône du morphisme $\tilde{\rho}$, de sorte que l'on a alors un triangle distingué $\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1 \to \tilde{G} \to \tilde{T}_2[1]$. On notera aussi $G_t = [T_{1t} \to T_{2t}]$ le cône de ρ_t et $\tilde{G}_t = [\tilde{T}_{2t} \to \tilde{T}_{1t}]$ le cône de $\tilde{\rho}_t$, et on remarquera que l'on a des triangles distingués :

$$G \to G \otimes \mathbb{Q} \to G_t \to G[1] \quad \text{et} \quad \tilde{G} \to \tilde{G} \otimes \mathbb{Q} \to \tilde{G}_t \to \tilde{G}[1].$$

Donnons-nous maintenant $\hat{\mathcal{T}}_1$ et $\hat{\mathcal{T}}_2$ des faisceaux définis sur un ouvert U_0 de X, localement isomorphes à des faisceaux constants libres de type fini et étendant respectivement $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$, ainsi qu'un morphisme $\hat{\mathcal{T}}_2 \to \hat{\mathcal{T}}_1$ étendant $\hat{\rho}$. Notons $\check{\mathcal{T}}_1 = \mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{T}}_1, \mathbb{Z})$ et $\check{\mathcal{T}}_2 = \mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{T}}_2, \mathbb{Z})$, ainsi que $\mathcal{T}_1 = \check{\mathcal{T}}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$ et $\mathcal{T}_2 = \check{\mathcal{T}}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]$, et introduisons $\tilde{\mathcal{T}}_1 = \hat{\mathcal{T}}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$, $\tilde{\mathcal{T}}_2 = \hat{\mathcal{T}}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)$, $\tilde{\mathcal{T}}_1 = \hat{\mathcal{T}}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)$ et $\tilde{\mathcal{T}}_2 = \hat{\mathcal{T}}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1-a)$. Le morphisme $\hat{\mathcal{T}}_2 \to \hat{\mathcal{T}}_1$ induit des morphismes $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$, $\check{\mathcal{T}}_1 \to \check{\mathcal{T}}_2$, $\tilde{\mathcal{T}}_2 \to \tilde{\mathcal{T}}_1$ et $\tilde{\mathcal{T}}_{2t} \to \tilde{\mathcal{T}}_{1t}$. Soient $\mathcal{G} = [\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2]$ et $\tilde{\mathcal{G}} = [\tilde{\mathcal{T}}_2 \to \tilde{\mathcal{T}}_1]$, de sorte que l'on a des triangles distingués $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2 \to \mathcal{G} \to \mathcal{T}_1[1]$ et $\tilde{\mathcal{T}}_2 \to \tilde{\mathcal{T}}_1 \to \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{T}}_2[1]$. On notera aussi $\mathcal{G}_t = [\mathcal{T}_{1t} \to \mathcal{T}_{2t}]$ et $\tilde{\mathcal{G}}_t = [\tilde{\mathcal{T}}_{2t} \to \tilde{\mathcal{T}}_{1t}]$, et on remarquera que l'on a des triangles distingués :

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G} \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{G}_t \to \mathcal{G}[1] \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Q} \to \tilde{\mathcal{G}}_t \to \tilde{\mathcal{G}}[1].$$

Remarque 4.1. Soit Φ un groupe de type multiplicatif sur K. Il existe deux tores T_1 et T_2 s'insérant dans une suite exacte $1 \to \Phi \to T_1 \to T_2 \to 0$. On en déduit que Φ est quasi-isomorphe au complexe $[T_1 \to T_2][-1]$.

Remarque 4.2. Lorsque $a = d = 1$, on remarque que $\tilde{G}[1]$ est le complexe $[T_2' \to T_1']$, où T_1' et T_2' désignent les tores duaux de T_1 et T_2 respectivement.

Dans la suite, nous cherchons à établir un théorème de dualité type Poitou-Tate pour G. Comme dans la section 3, le dual de G qui apparaîtra dans le théorème sera le complexe $\tilde{G}$. Cependant, pour le prouver, il sera utile de faire appel au complexe $\tilde{G}_t$ qui peut être approché par des modules finis auxquels on peut appliquer les théorèmes de la section qui leur était consacrée.

Lemme 4.3. ***(Définition de l'accouplement)***
On dispose d'accouplements naturels :

$$G \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{G} \to \mathbb{Z}(d+1)[2] \quad \textit{et} \quad \mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{\mathcal{G}} \to \mathbb{Z}(d+1)[2]$$

qui, dans le cas où $\hat{T}_1 = 0$, coïncident avec les accouplements :

$$T_2 \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{T}_2 \to \mathbb{Z}(d+1)[1] \quad \textit{et} \quad \mathcal{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{\mathcal{T}}_2 \to \mathbb{Z}(d+1)[1],$$

définis au début de la section 3.

Démonstration. Nous allons construire le premier accouplement, le deuxième étant tout à fait analogue.
Remarquons que $[\check{T}_1 \to \check{T}_2] \otimes^{\mathbf{L}} [\hat{T}_2 \to \hat{T}_1]$ s'identifie au complexe :

$$[\check{T}_1 \otimes \hat{T}_2 \xrightarrow{(-Id\otimes\hat{\rho})\oplus(\check{\rho}\otimes Id)} (\check{T}_1 \otimes \hat{T}_1) \oplus (\check{T}_2 \otimes \hat{T}_2) \xrightarrow{\check{\rho}\otimes Id + Id\otimes\hat{\rho}} \check{T}_2 \otimes \hat{T}_1].$$

On vérifie aisément que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\check{T}_1 \otimes \hat{T}_2 \arrow[r, "Id\otimes\hat{\rho}"] \arrow[d, "\check{\rho}\otimes Id"] & \check{T}_1 \otimes \hat{T}_1 \arrow[d] \\
\check{T}_2 \otimes \hat{T}_2 \arrow[r] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de définir un morphisme $[\check{T}_1 \to \check{T}_2] \otimes^{\mathbf{L}} [\hat{T}_2 \to \hat{T}_1] \to \mathbb{Z}[1]$. On a donc des morphismes :

$$\begin{aligned} G \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{G} &= ([\check{T}_1 \to \check{T}_2] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1]) \otimes^{\mathbf{L}} ([\hat{T}_2 \to \hat{T}_1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a)) \\ &\to \mathbb{Z}[1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1-a) \to \mathbb{Z}(d+1)[2]. \end{aligned}$$

□

On en déduit en particulier des accouplements :

$$H^r(U, \mathcal{G}) \times H^{d+2-r}_c(U, \tilde{\mathcal{G}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$
$$H^r(K_v, G) \times H^{d+1-r}(K_v, \tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

pour chaque ouvert non vide U de U_0.

Proposition 4.4. ***(Artin-Verdier dans le cadre fini)***
Pour $r \in \mathbb{Z}$, on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, \mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times H^{d+1-r}_c(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. En remarquant que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'identifie au complexe $[\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}]$ où la première flèche est donnée par $x \mapsto (nx, -nx)$ et la deuxième par $(x,y) \mapsto n(x+y)$, on peut définir un accouplement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1]$ en envoyant $(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur $x+y \in \mathbb{Z}$. Cela permet de définir un accouplement :

$$(\mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes^{\mathbf{L}} (\tilde{\mathcal{G}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}(d+1)[3],$$

d'où un accouplement

$$H^r(U, \mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times H^{d+1-r}_c(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En exploitant les triangles distingués $\mathcal{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathcal{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathcal{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[1]$ et $\tilde{\mathcal{T}}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \tilde{\mathcal{T}}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \tilde{\mathcal{G}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \tilde{\mathcal{T}}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[1]$ et en faisant appel à la proposition 2.1, on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes de groupes finis :

$$\begin{tikzcd}
H^r(U, \mathcal{T}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^r(U, \mathcal{T}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^r(U, \mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
H^{d+2-r}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_1 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & H^{d+2-r}_c(U, \tilde{\mathcal{T}}_2 \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & H^{d+1-r}_c(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & H^{r+1}(U,\mathcal{T}_1\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{r+1}(U,\mathcal{T}_1\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \\
... \arrow[r] & H^{d+1-r}_c(U,\tilde{\mathcal{T}_1}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & H^{d+1-r}_c(U,\tilde{\mathcal{T}_2}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D.
\end{tikzcd}$$

On en déduit que la flèche verticale centrale est un isomorphisme. □

Théorème 4.5. ***(Artin-Verdier pour les groupes de type multiplicatif)*** *Soit $r\in\mathbb{Z}$. Pour chaque nombre premier l, on a un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U,\mathcal{G})\{l\}^{(l)}\times H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})^{(l)}\{l\}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour chaque entier naturel n, on dispose des triangles distingués :

$$\mathcal{G}\to\mathcal{G}\to\mathcal{G}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}\to\mathcal{G}[1],$$
$$\tilde{\mathcal{G}}\to\tilde{\mathcal{G}}\to\tilde{\mathcal{G}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}\to\tilde{\mathcal{G}}[1].$$

On en déduit des suites exactes de groupes finis :

$$0\to H^{r-1}(U,\mathcal{G})/l^n\to H^{r-1}(U,\mathcal{G}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})\to {}_{l^n}H^r(U,\mathcal{G})\to 0,$$
$$0\to H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})/l^n\to H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})\to {}_{l^n}H^{d+3-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})\to 0.$$

En passant à la limite inductive dans la première suite et à la limite projective dans la deuxième, on obtient des suites exactes :

$$0\to H^{r-1}(U,\mathcal{G})\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l\to\varinjlim_n H^{r-1}(U,\mathcal{G}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})\to H^r(U,\mathcal{G})\{l\}\to 0,$$
$$0\to H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})^{(l)}\to\varprojlim_n H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})\to\varprojlim_n {}_{l^n}H^{d+3-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})\to 0.$$

En remarquant que $H^{r-1}(U,\mathcal{G})\otimes\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ est divisible et que $\varprojlim_n {}_{l^n}H^{d+3-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})$ est sans torsion et en utilisant la proposition 4.4, on obtient alors des isomorphismes :

$$\begin{aligned}H^r(U,\mathcal{G})\{l\}^{(l)}&\cong(\varinjlim_n H^{r-1}(U,\mathcal{G}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}))^{(l)}\cong(\varinjlim_n H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^D)^{(l)}\\&\cong(\varprojlim_n H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}))\{l\}^D\cong H^{d+2-r}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})^{(l)}\{l\}^D.\end{aligned}$$

□

Lemme 4.6. *Soit l un nombre premier. Supposons que le morphisme $\check{T}_1\to\check{T}_2$ est injectif et que $K_a^M(L)\{l\}$ est d'exposant fini pour toute extension finie L de K_v. Alors le groupe $H^{a-1}(K_v,G)\{l\}$ est d'exposant fini.*

Démonstration. Notons Q le conoyau de $\check{T}_1\to\check{T}_2$, de sorte que l'on a un quasi-isomorphisme $G\cong Q\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(a)[1]$. On peut alors trouver un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module fini F et un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module sans torsion de type fini M s'insérant dans une suite exacte de $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules $0\to F\to Q\to M\to 0$. On en déduit une suite exacte :

$$H^a(K_v,F\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(a))\to H^{a-1}(K_v,G)\to H^a(K_v,M\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(a)).$$

Le groupe $H^a(K_v, F \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a))$ est bien sûr d'exposant fini. De plus, si L est une extension finie de K_v de degré e telle que $\mathrm{Gal}(K^s/L)$ agit trivialement sur M, on a, pour un certain entier naturel n, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^a(K_v, M \otimes \mathbb{Z}(a)) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[dr, "\cdot e"'] & H^a(L, \mathbb{Z}(a))^n \arrow[d, "\mathrm{Cor}"] \\ & H^a(K_v, M \otimes \mathbb{Z}(a)) \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme de Suslin-Nesterenko-Totaro s'écrit $H^a(L, \mathbb{Z}(a)) \cong K_a^M(L)$. Par conséquent, l'hypothèse impose que $H^a(L, \mathbb{Z}(a))\{l\}$ est d'exposant fini, et on en déduit immédiatement que $H^a(K_v, M \otimes \mathbb{Z}(a))\{l\}$ et $H^{a-1}(K_v, G)\{l\}$ le sont aussi. $\square$

Proposition 4.7. (*i*) *Supposons que le morphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif. Alors les groupes $H^{a-1}(K_v, G)$ et $H^{a-1}(K_v^h, G)$ sont d'exposant fini.*
(*ii*) *Soit l un nombre premier. Supposons que $K_a^M(L)\{l\}$ est d'exposant fini pour toute extension finie L de K_v. Alors le groupe $H^{a-1}(K_v, G)\{l\}$ est d'exposant fini.*

Remarque 4.8. L'hypothèse sur la K-théorie de Milnor est toujours vérifiée lorsque $a = 0$, ainsi que lorsque k_1 est un corps p-adique et $l \neq p$. En effet, le morphisme $H^{a-1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a))\{l\} \to H^a(L, \mathbb{Z}(a))\{l\}$ est surjectif et, si k_1 est p-adique et $l \neq p$, le groupe $H^{a-1}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a))\{l\}$ est fini d'après la proposition 1.16(i) du chapitre 3.

Démonstration. (i) À l'aide du triangle distingué :

$$\mathrm{Ker}(T_1 \to T_2)[1] \to G \to \mathrm{Coker}(T_1 \to T_2) \to \mathrm{Ker}(T_1 \to T_2)[2], \tag{1.25}$$

on obtient une suite exacte :

$$H^a(K_v, \mathrm{Ker}(T_1 \to T_2)) \to H^{a-1}(K_v, G) \to H^{a-1}(K_v, \mathrm{Coker}(T_1 \to T_2)).$$

Comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois, le groupe

$$H^a(K_v, \mathrm{Ker}(T_1 \to T_2)) \cong H^a(K_v, \mathrm{Ker}(\check{T}_1 \to \check{T}_2) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(a)[1])$$

est fini. De plus, le morphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ étant injectif, le conoyau de $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est fini. Un argument de restriction-corestriction prouve alors que le groupe $H^{a-1}(K_v, \mathrm{Coker}(T_1 \to T_2))$ est d'exposant fini. On en déduit que $H^{a-1}(K_v, G)$ est d'exposant fini. On prouve exactement de la même manière que $H^{a-1}(K_v^h, G)$ est d'exposant fini.
(ii) En notant $\mathrm{Im}(T_1 \to T_2) = \mathrm{Im}(\check{T}_1 \to \check{T}_2) \otimes \mathbb{Z}(a)$, le triangle distingué (1.25) se réécrit :

$$[T_1 \to \mathrm{Im}(T_1 \to T_2)] \to G \to [\mathrm{Im}(T_1 \to T_2) \to T_2] \to [T_1 \to \mathrm{Im}(T_1 \to T_2)][1],$$

d'où une suite exacte :

$$H^{a-1}(K_v, [T_1 \to \mathrm{Im}(T_1 \to T_2)]) \to H^{a-1}(K_v, G) \to H^{a-1}(K_v, [\mathrm{Im}(T_1 \to T_2) \to T_2]).$$

D'après (i), le groupe $H^{a-1}(K_v,[T_1 \to \mathrm{Im}(T_1 \to T_2)])$ est d'exposant fini, et d'après le lemme 4.6, $H^{a-1}(K_v,[\mathrm{Im}(T_1 \to T_2) \to T_2])\{l\}$ l'est aussi. On en déduit que $H^{a-1}(K_v,G)\{l\}$ est d'exposant fini.

□

Proposition 4.9. ***(Dualité locale pour les groupes de type multiplicatif)***
(i) Le morphisme naturel $H^{a-1}(K_v,G)^\wedge \to (H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}))^D$ est injectif.
(ii) Supposons que le morphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif. On a alors un accouplement parfait :

$$H^{a-1}(K_v,G)^\wedge \times H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. (i) Soit $n > 0$ un entier. On dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^{a-1}(K_v,T_1\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{a-1}(K_v,T_2\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{a-1}(K_v,G\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_2\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^{a}(K_v,T_1\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{a}(K_v,T_2\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \\
\dots \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_1\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_2\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D.
\end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq fournit alors une dualité parfaite de groupes finis :

$$H^{a-1}(K_v,G\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{a-1}(K_v,G)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^{a-1}(K_v,G\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \dots \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}))^D \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^D \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & {}_nH^{a}(K_v,G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\dots \arrow[r] & (H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G})/n)^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, la flèche $H^{a-1}(K_v,G)/n \to ({}_nH^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}))^D$ est injective. Il suffit alors de passer à la limite projective sur n.

(ii) Les triangles distingués $T_1 \to T_2 \to G \to T_1[1]$ et $\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1 \to \tilde{G} \to \tilde{T}_2[1]$ fournissent des suites exactes :

$$\begin{aligned} H^{a-1}(K_v,T_1) \to H^{a-1}(K_v,T_2) \to H^{a-1}(K_v,G) \to \\ \to H^{a}(K_v,T_1) \to H^{a}(K_v,T_2), \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_2) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}) \to \\ \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2) \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_1). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Exploitons ces deux suites :

- Comme $H^a(K_v,T_1)$ et $H^a(K_v,T_2)$ sont finis et $H^{a-1}(K_v,G)$ est d'exposant fini d'après la proposition 4.7, la suite (1.26) impose que la suite
$$H^{a-1}(K_v,T_2)^\wedge \to H^{a-1}(K_v,G)^\wedge \to H^a(K_v,T_1) \to H^a(K_v,T_2)$$
est exacte. De plus, $H^{a-1}(K_v,T_1)^\wedge \to H^{a-1}(K_v,T_2)^\wedge \to H^{a-1}(K_v,G)^\wedge$ est un complexe.
- Les groupes de la suite (1.27) étant discrets de torsion, on obtient une suite exacte
$$H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_1)^D \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2)^D \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})^D$$
$$\to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1)^D \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_2)^D.$$

On obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{a-1}(K_v,T_1)^\wedge \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{a-1}(K_v,T_2)^\wedge \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{a-1}(K_v,G)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_1)^D \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2)^D \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})^D \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & H^a(K_v,T_1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^a(K_v,T_2) \arrow[d, "\cong"] \\
... \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1)^D \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_2)^D
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est un complexe dont les quatre derniers termes forment une suite exacte, la deuxième ligne est exacte, et les isomorphismes proviennent de la proposition 3.5. On en déduit que le morphisme vertical central est un isomorphisme. On en déduit que l'accouplement :
$$H^{a-1}(K_v,G)^\wedge \times H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
est parfait.

□

On définit :
- $\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}) = \mathrm{Im}(H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}) \to H^{d+3-a}(K,\tilde{G}))$,
- $\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}_t) = \mathrm{Im}(H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}_t) \to H^{d+2-a}(K,\tilde{G}_t))$,
- $\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}(H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+2-a}(K,\tilde{G}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$.
- $\mathcal{D}^{a}(U,\mathcal{G}) = \mathrm{Im}(H^{a}_c(U,\mathcal{G}) \to H^{a}(K,G))$,
- $\mathcal{D}^{a-1}(U,\mathcal{G}_t) = \mathrm{Im}(H^{a-1}_c(U,\mathcal{G}_t) \to H^{a-1}(K,G_t))$,
- $\mathcal{D}^{a-1}(U,\mathcal{G}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Im}(H^{a-1}_c(U,\mathcal{G}\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{a-1}(K,G\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$.

Lemme 4.10. *(i) Le groupe $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Le groupe $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})$ est de torsion de type cofini pour $v\in X^{(1)}$.
(iii) Le groupe $H^{d+2-a}(K_v^h,\tilde{G})$ est de torsion de type cofini pour $v\in X^{(1)}$.

Si $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, alors :

(iv) Le groupe $H^a(U,\mathcal{G})$ est de torsion de type cofini.
(v) Le groupe $H^{a-1}(K_v,G)$ est de torsion de type cofini pour $v \in X^{(1)}$.
(vi) Le groupe $H^{a-1}(K_v^h,G)$ est de torsion de type cofini pour $v \in X^{(1)}$.

Démonstration. (i) La proposition 3.6 montre que $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_1)$ et $H^{d+4-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_2)$ sont de torsion de type cofini. La suite exacte $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_1) \to H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}) \to H^{d+4-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_2)$ permet alors de conclure.
(ii) Les groupes $H^{d+2-a}(K_v,\hat{T}_1 \otimes \mathbb{Q}(d+1-a))$ et $H^{d+3-a}(K,\hat{T}_2 \otimes \mathbb{Q}(d+1-a))$ sont nuls. Par conséquent, les suites exactes :

$$H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_{1t}) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1) \to H^{d+2-a}(K_v,\hat{T}_1 \otimes \mathbb{Q}(d+1-a)),$$

$$H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_{2t}) \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2) \to H^{d+3-a}(K_v,\hat{T}_2 \otimes \mathbb{Q}(d+1-a))$$

fournissent des morphismes surjectifs $H^{d+1-a}(K_v,\tilde{T}_{1t}) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1)$ et $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_{2t}) \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2)$. On en déduit que les groupes $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1)$ et $H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2)$ sont de torsion de type cofini. La suite exacte

$$H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}) \to H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2)$$

permet alors de conclure.
(iii) La preuve est identique à celle de (ii).
(iv) Le triangle distingué $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2)[1] \to \mathcal{G} \to \mathrm{Coker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2) \to \mathrm{Ker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2)[2]$ fournit une suite exacte :

$$H^{a+1}(U,\mathrm{Ker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2)) \to H^a(U,\mathcal{G}) \to H^a(U,\mathrm{Coker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2)).$$

Comme $\hat{\mathcal{T}}_2 \to \hat{\mathcal{T}}_1$ est injectif, le conoyau de $\check{\mathcal{T}}_1 \to \check{\mathcal{T}}_2$ est fini, et donc le groupe $H^a(U,\mathrm{Coker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2))$ est d'exposant fini. De plus, comme $H^{a+1}(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(a)) \to H^{a+2}(U,\mathbb{Z}(a))$ est surjectif, un argument de restriction-corestriction montre que $H^{a+1}(U,\mathrm{Ker}(\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2))$ est de torsion. Par conséquent, $H^a(U,\mathcal{G})$ est de torsion. Reste à montrer qu'il est de type cofini. Mais cela découle immédiatement de la suite exacte :

$$0 \to H^{a-1}(U,\mathcal{G})/n \to H^{a-1}(U,\mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to {}_nH^a(U,\mathcal{G}) \to 0.$$

(v) Nous avons déjà montré dans la proposition 4.7 que $H^{a-1}(K_v,G)$ est de torsion. Le même argument qu'en (iv) montre qu'il est de type cofini.
(vi) La preuve est identique à celle de (v).

□

Corollaire 4.11. *(i) Les groupes $H_c^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ sont de torsion de type cofini.*
(ii) Si $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, les groupes $H_c^a(U,\mathcal{G})$ et $\mathcal{D}^a(U,\mathcal{G})$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. (i) La suite exacte $\bigoplus_{v \in X\setminus U} H^{d+2-a}(K_v^h,\tilde{G}) \to H_c^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}) \to H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ prouve que $H_c^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ est de torsion de type cofini. On en déduit que $\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})$ est aussi de torsion de type cofini.

(ii) La preuve est identique à celle de (i).

□

Lemme 4.12. *Soit $L = K$, K_v ou K_v^h pour un certain $v \in X^{(1)}$.*
(i) Le morphisme $H^{d+2-a}(L, \tilde{G}_t) \to H^{d+3-a}(L, \tilde{G})$ est un isomorphisme. En particulier, $Ш^{d+2-a}(\tilde{G}_t) \cong Ш^{d+3-a}(\tilde{G})$.
(ii) Supposons que $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif. Le morphisme $H^{a-1}(L, G_t) \to H^a(L, G)$ est un isomorphisme. En particulier, $Ш^{a-1}(G_t) \cong Ш^a(G)$.

Démonstration. (i) On a des suites exactes :

$$H^{d+2-a}(L, \tilde{G} \otimes \mathbb{Q}) \to H^{d+2-a}(L, \tilde{G}_t) \to H^{d+3-a}(L, \tilde{G}) \to H^{d+3-a}(L, \tilde{G} \otimes \mathbb{Q}),$$
$$H^{d+2-a}(L, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Q}) \to H^{d+2-a}(L, \tilde{G} \otimes \mathbb{Q}) \to H^{d+3-a}(L, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Q}),$$
$$H^{d+3-a}(L, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Q}) \to H^{d+3-a}(L, \tilde{G} \otimes \mathbb{Q}) \to H^{d+4-a}(L, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Q}).$$

Or les groupes $H^{d+2-a}(L, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Q})$, $H^{d+3-a}(L, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Q})$, $H^{d+3-a}(L, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Q})$ et $H^{d+4-a}(L, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls d'après le lemme 3.1. On en déduit que le morphisme

$$H^{d+2-a}(L, \tilde{G}_t) \to H^{d+3-a}(L, \tilde{G})$$

est un isomorphisme.

(ii) Il suffit de vérifier que $H^{a-1}(L, G \otimes \mathbb{Q})$ et $H^a(L, G \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls. La nullité de $H^a(L, G \otimes \mathbb{Q})$ est évidente (puisque $H^a(L, T_2 \otimes \mathbb{Q})$ et $H^{a+1}(L, T_1 \otimes \mathbb{Q})$ sont nuls d'après le lemme 3.1). Pour montrer la nullité de $H^{a-1}(L, G \otimes \mathbb{Q})$, on considère la suite exacte :

$$H^a(L, \mathrm{Ker}(T_1 \otimes \mathbb{Q} \to T_2 \otimes \mathbb{Q})) \to H^{a-1}(L, G \otimes \mathbb{Q}) \to H^{a-1}(L, \mathrm{Coker}(T_1 \otimes \mathbb{Q} \to T_2 \otimes \mathbb{Q})).$$

Le groupe $H^a(L, \mathrm{Ker}(T_1 \otimes \mathbb{Q} \to T_2 \otimes \mathbb{Q}))$ est nul d'après le lemme 3.1, et le groupe $H^{a-1}(L, \mathrm{Coker}(T_1 \otimes \mathbb{Q} \to T_2 \otimes \mathbb{Q}))$ est nul car $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif (et donc $\mathrm{Coker}(\check{T}_1 \to \check{T}_2)$ est fini). Cela entraîne la nullité de $H^{a-1}(L, G \otimes \mathbb{Q})$.

□

Proposition 4.13. *(i) Soit l un nombre premier. Il existe un ouvert U_1 de U_0 tel que, pour tout ouvert non vide U de U_1, on a*

$$\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\} = \mathcal{D}^{d+3-a}(U_1, \tilde{\mathcal{G}})\{l\} = Ш^{d+3-a}(K, \tilde{G})\{l\},$$
$$\mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t)\{l\} = \mathcal{D}^{d+2-a}(U_1, \tilde{\mathcal{G}}_t)\{l\} = Ш^{d+2-a}(K, \tilde{G}_t)\{l\}.$$

(ii) Supposons que $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif. Soit l un nombre premier. Il existe un ouvert U_2 de U_0 tel que, pour tout ouvert non vide U de U_2, on a

$$\mathcal{D}^a(U, \mathcal{G})\{l\} = \mathcal{D}^a(U_2, \mathcal{G})\{l\} = Ш^a(K, G)\{l\},$$
$$\mathcal{D}^{a-1}(U, \mathcal{G}_t)\{l\} = \mathcal{D}^{a-1}(U_2, \mathcal{G}_t)\{l\} = Ш^{a-1}(K, G_t)\{l\}.$$

Démonstration. (i) Comme $\mathcal{D}^{d+2-a}(U_0, \tilde{\mathcal{G}}_t)$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U_0, \tilde{\mathcal{G}})$ sont de torsion de type cofini d'après le corollaire 4.11, la preuve est tout à fait analogue à celle de la proposition 3.7, à condition de montrer que les restrictions $H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G}_t) \to H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}_t)$ et $H^{d+3-a}(K_v^h, \tilde{G}) \to H^{d+3-a}(K_v, \tilde{G})$ sont des isomorphismes. On se contentera donc d'établir ce dernier résultat.

Pour ce faire, on remarque que, pour $v \in X^{(1)}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{d+3-a}(K_v^h, \tilde{G}) \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v, \tilde{G}) \\
H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G}_t) \arrow[r] \arrow[u] & H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}_t) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 4.12, les flèches verticales sont des isomorphismes. De plus, la flèche $H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G}_t) \to H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}_t)$ est aussi un isomorphisme puisqu'elle s'insère dans le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{T}_{2t}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{T}_{1t}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G}_t) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}_{2t}) \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}_{1t}) \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G}_t) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v^h, \tilde{T}_{2t}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{d+3-a}(K_v^h, \tilde{T}_{1t}) \arrow[d, "\cong"] \\
\dots \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T}_{2t}) \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v, \tilde{T}_{1t}).
\end{tikzcd}$$

La restriction $H^{d+3-a}(K_v^h, \tilde{G}) \to H^{d+3-a}(K_v, \tilde{G})$ est donc un isomorphisme.

(ii) La preuve est tout à fait analogue.

□

Lemme 4.14. *On a des suites exactes :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_c^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0,$$

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{a-2}(K_v, G \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_c^{a-1}(U, \mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathcal{D}^{a-1}(U, \mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

Démonstration. On montre uniquement la première suite exacte, la deuxième étant tout à fait analogue. Pour ce faire, on remarque qu'en procédant exactement de la même manière que pour les modules finis (voir proposition 4.2 et théorème 4.4 de [HSz16]), il suffit de montrer que le morphisme $H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est injectif. Or on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{T}}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{T}}_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & ... \\
H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+3-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{T}}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, hook] \\
... \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^{d+3-a}(K_v^h, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),
\end{tikzcd}$$

et les deux flèches verticales de gauche admettent des sections qui font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{T}}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{T}}_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Une chasse au diagramme permet alors de conclure que $H^{d+2-a}(\mathcal{O}_v^h, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est injectif, ce qui achève la preuve. □

Lemme 4.15. *On a des suites exactes :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G}_t) \to H_c^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t) \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t) \to 0,$$

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{a-2}(K_v, G_t) \to H_c^{a-1}(U, \mathcal{G}_t) \to \mathcal{D}^{a-1}(U, \mathcal{G}_t) \to 0.$$

Démonstration. On montre uniquement la première suite exacte, la deuxième étant tout à fait analogue. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_n H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \varinjlim_n H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \varinjlim_n H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & ... \\
H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_{2t}) \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v, \tilde{T}_{1t}) \arrow[r] & H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G}_t) \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & \varinjlim_n H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}_2 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \varinjlim_n H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}_1 \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \\
... \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}_{2t}) \arrow[r] & H^{d+2-a}(K_v, \tilde{T}_{1t}).
\end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq permet alors d'établir que $\varinjlim_n H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G}_t)$. De la même manière, on prouve que $\varinjlim_n H_c^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H_c^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t)$ et que $\varinjlim_n H^{d+2-a}(K, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^{d+2-a}(K, \tilde{G}_t)$. Cela montre que $\varinjlim_n \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t)$. En passant à la limite inductive dans les suites exactes :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_c^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0$$

on obtient la suite exacte voulue. $\square$

Proposition 4.16. *(i) Soit l un nombre premier. Soit U un ouvert de U_1. On a une suite exacte :*

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})\{l\}} \to \overline{H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \to \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\}} \to 0.$$

(ii) Supposons $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ injectif. Soit l un nombre premier. Soit U un ouvert de U_2. On a une suite exacte :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{a-1}(K_v,G)\{l\}} \to \overline{H^{a}_c(U,\mathcal{G})\{l\}} \to \overline{\mathcal{D}^{a}(U,\mathcal{G})\{l\}} \to 0.$$

Démonstration. (i) On dispose d'un diagramme commutatif où, d'après le lemme 4.15, la première ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}_t)}\{l\} & \longrightarrow & \overline{H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}_t)}\{l\} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}_t)}\{l\} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})}\{l\} & \longrightarrow & \overline{H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})}\{l\} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})}\{l\} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Il suffit donc de montrer que les morphismes verticaux sont des isomorphismes.

- On dispose de la suite exacte :

$$H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Q}) \to H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}_t) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}) \to H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Q}).$$

  Comme $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{T}_1\otimes\mathbb{Q}) = H^{d+3-a}(K_v,\tilde{T}_2\otimes\mathbb{Q}) = 0$, on a $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Q}) = 0$. Par conséquent, comme $H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Q})$ est divisible, on obtient un isomorphisme $\overline{H^{d+1-a}(K_v,\tilde{G}_t)} \cong \overline{H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})}$.
- On dispose de la suite exacte :

$$H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Q}) \to H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}_t) \to H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}) \to H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Q}).$$

  Comme $H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_1\otimes\mathbb{Q}) = H^{d+4-a}(U,\tilde{\mathcal{T}}_2\otimes\mathbb{Q}) = 0$ (d'après le lemme 3.1), on a :

$$H^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Q}) = 0.$$

  De plus, $H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}\otimes\mathbb{Q}) = 0$ pour tout $v\in X^{(1)}$. Donc le groupe $H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Q})$ est nul. Par conséquent, comme $H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}\otimes\mathbb{Q})$ est divisible, on obtient un isomorphisme $\overline{H^{d+2-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}}_t)} \cong \overline{H^{d+3-a}_c(U,\tilde{\mathcal{G}})}$.
- D'après le lemme 4.12, on a un isomorphisme $Ш^{d+2-a}(\tilde{G}_t) \cong Ш^{d+3-a}(\tilde{G})$, d'où un isomorphisme $\overline{\mathcal{D}^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}_t)}\{l\} \cong \overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})}\{l\}$ d'après la proposition 4.13 puisque $U\subseteq U_1$.

(ii) En procédant exactement de la même manière, il s'agit de montrer que l'on a des isomorphismes $\overline{H^{a-2}(K_v,G_t)} \cong \overline{H^{a-1}(K_v,G)}$, $\overline{H^{a-1}_c(U,\mathcal{G}_t)} \cong \overline{H^{a}_c(U,\mathcal{G})}$ et $\overline{\mathcal{D}^{a-1}(U,\mathcal{G}_t)}\{l\} \cong \overline{\mathcal{D}^{a}(U,\mathcal{G})}\{l\}$. On les établit de la même manière que dans (i) en remarquant que, comme les groupes $H^{a-1}(K_v,G)$ et $H^{a}_c(U,\mathcal{G})$ sont de torsion et les groupes $H^{a-1}(K_v, G \otimes \mathbb{Q})$ et $H^a_c(U, \mathcal{G} \otimes \mathbb{Q})$ sont uniquement divisibles, les morphismes $H^{a-1}(K_v, G) \to H^{a-1}(K_v, G\otimes\mathbb{Q})$ et $H^a_c(U, \mathcal{G}) \to H^a_c(U, \mathcal{G}\otimes\mathbb{Q})$ sont nuls.

□

Théorème 4.17. ***(Dualité de Poitou-Tate pour les groupes de type multiplicatif)***
On rappelle que $a \in \{0, 1, ..., d+1\}$.
(i) Soit l *un nombre premier. On fait l'une des deux hypothèses suivantes :*

(H 4.17.1) *le morphisme* $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ *est injectif,*

(H 4.17.2) *le groupe* $K_a^M(L)\{l\}$ *est d'exposant fini pour tout corps* $(d+1)$*-local* L *dont le corps résiduel est une extension finie de* k.

On a alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{Ш^{a-1}(G)\{l\}} \times \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{G})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (H 4.17.1), on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{Ш^{a}(G)} \times Ш^{d+2-a}(\tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. (i) Pour U un ouvert de U_1, posons $D^{a-1}_{sh}(U, \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}(H^{a-1}(U, \mathcal{G}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^{a-1}(K_v, G))$. D'après la proposition 4.16, on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes (cf [CTH15], proposition 4.3) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^{a-1}_{sh}(U,\mathcal{G})\{l\} \arrow[r] \arrow[d] & H^{a-1}(U,\mathcal{G})\{l\} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^{a-1}(K_v,G)\{l\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (\overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\}})^D \arrow[r] & (\overline{H_c^{d+3-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\}})^D \arrow[r] & (\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})\{l\}})^D
\end{tikzcd}$$

La proposition 4.5 impose que le morphisme vertical central est surjectif et que son noyau est divisible. De plus, comme l'une des hypothèses (H 4.17.1) et (H 4.17.2) est satisfaite, la proposition 4.7 impose que $H^{a-1}(K_v, G)\{l\}$ est d'exposant fini pour tout $v \in X^{(1)}$. On en déduit que le morphisme naturel $H^{a-1}(K_v, G)\{l\} \to H^{a-1}(K_v, G)^\wedge$ est injectif. La proposition 4.9 montre alors que le morphisme $\prod_{v\in X^{(1)}} H^{a-1}(K_v, G)\{l\} \to (\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G})\{l\}})^D$ est injectif. Par conséquent le morphisme

$$D^{a-1}_{sh}(U, \mathcal{G})\{l\} \to (\overline{\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})\{l\}})^D$$

est surjectif et son noyau est divisible. En passant à la limite inductive sur U et en utilisant la proposition 4.13, on obtient un isomorphisme :

$$Ш^{a-1}(G)\{l\}/D_l \cong \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{G})\{l\}}^D,$$

où D_l est contenu dans le sous-groupe divisible maximal de $Ш^{a-1}(G)\{l\}$. Or $\overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{G})\{l\}}^D$ est fini. Par conséquent D_l est le sous-groupe divisible maximal de $Ш^{a-1}(G)\{l\}$ et on a un isomorphisme :

$$\overline{Ш^{a-1}(G)\{l\}} \cong \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{G})\{l\}}^D.$$

(ii) La méthode est similaire. Pour U un ouvert de U_2, posons $D^{d+2-a}_{sh}(U,\tilde{\mathcal{G}}) = \mathrm{Ker}(H^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{G}}) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G}))$. D'après la proposition 4.16, on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^{d+2-a}_{sh}(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\} \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2-a}(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+2-a}(K_v,\tilde{G})\{l\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (\overline{\mathcal{D}^a(U,\mathcal{G})\{l\}})^D \arrow[r] & (\overline{H^a_c(U,\mathcal{G})\{l\}})^D \arrow[r] & (\bigoplus_{v\in X^{(1)}} \overline{H^{a-1}(K_v,G)\{l\}})^D
\end{tikzcd}$$

La proposition 4.5 impose que le morphisme vertical central est surjectif et que son noyau est divisible. De plus, l'hypothèse (H 4.17.1) impose que le morphisme vertical de droite est un isomorphisme d'après les propositions 4.7 et 4.9. Par conséquent le morphisme $D^{d+2-a}_{sh}(U,\tilde{\mathcal{G}})\{l\} \to (\overline{\mathcal{D}^a(U,\mathcal{G})\{l\}})^D$ est surjectif et son noyau est divisible. En passant à la limite inductive sur U et en utilisant la proposition 4.13, on obtient un isomorphisme :

$$Ш^{d+2-a}(\tilde{G})\{l\}/D_l \cong \overline{Ш^a(G)\{l\}}^D,$$

où D_l est contenu dans le sous-groupe divisible maximal de $Ш^{d+2-a}(\tilde{G})\{l\}$. Or $\overline{Ш^a(G)\{l\}}^D$ est fini. Donc D_l est le sous-groupe divisible maximal de $Ш^{d+2-a}(\tilde{G})\{l\}$ et on a un isomorphisme :

$$\overline{Ш^{d+2-a}(\tilde{G})\{l\}} \cong \overline{Ш^a(G)\{l\}}^D.$$

Comme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, si l'on note Q son conoyau, $\tilde{G}$ est quasi-isomorphe à $Q \otimes \mathbb{Z}(d+1-a)$. Par conséquent, la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum (avec un argument de restriction-corestriction) permet d'établir que le groupe $Ш^{d+2-a}(\tilde{G})$ est d'exposant fini, ce qui achève la preuve.

□

Corollaire 4.18. *On rappelle que $a \in \{0,1,...,d+1\}$.*
(i) Soit l un nombre premier. On fait l'une des deux hypothèses suivantes :

(H 4.18.1) *le morphisme $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif,*

(H 4.18.2) *le groupe $K^M_{d+1-a}(L)\{l\}$ est d'exposant fini pour tout corps $(d+1)$-local L dont le corps résiduel est une extension finie de k.*

On a alors un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^{a+1}(G)\{l\}} \times \overline{Ш^{d+1-a}(\tilde{G})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (H 4.18.1), on a un accouplement parfait :

$$Ш^a(G) \times \overline{Ш^{d+2-a}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Notons $H = [\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1][1]$ et $\tilde{H} = [T_1 \to T_2][-1]$. En appliquant le théorème précédent à H au lieu de G, on obtient :

- sous (H 4.18.1) ou (H 4.18.2), un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^{d-a}(H)\{l\}} \times \overline{Ш^{a+2}(\tilde{H})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

- sous (H 4.18.1), un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^{d+1-a}(H)} \times Ш^{a+1}(\tilde{H}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

d'où le résultat. □

Remarque 4.19. (i) Comme indiqué dans la remarque 4.8, l'hypothèse (H 4.17.2) est toujours vérifiée pour $a = 0$, ainsi que lorsque k_1 est p-adique et $l \neq p$. Je ne sais pas si elle est vérifiée dans d'autres cas.

(ii) Soit Φ un groupe de type multiplicatif. Soient T_1 et T_2 deux tores s'insérant dans une suite exacte $0 \to \Phi \to T_1 \to T_2 \to 0$, de sorte que Φ s'identifie à $G[-1]$. On remarque alors que $Ш^1(\Phi)$ est de torsion d'exposant fini et que $Ш^3(\Phi)$ est de torsion. On obtient donc des accouplements parfaits :

$$Ш^1(\Phi) \times \overline{Ш^{d+2}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \overline{Ш^2(\Phi)} \times Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et si l'hypothèse (H 4.17.2) est vérifiée pour $a = d$ et un certain premier l, on a aussi un accouplement parfait :

$$\overline{Ш^3(\Phi)\{l\}} \times \overline{Ш^d(\tilde{G})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(iii) Supposons que $a = 1$ et que le morphisme $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif. On dispose alors de trois accouplements parfaits :

$$\overline{Ш^0(G)_{tors}} \times \overline{Ш^{d+2}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad Ш^1(G) \times \overline{Ш^{d+1}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

$$\overline{Ш^2(G)} \times \overline{Ш^d(\tilde{G})_{tors}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(iv) Si $T_2 = 0$, on retrouve la dualité parfaite $Ш^a(T_1) \times \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{T_1})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(v) Si l'hypothèse (H 4.17.2) est vérifiée pour un certain premier l et $T_1 = 0$, on obtient une dualité :

$$\overline{Ш^{a-1}(T_2)\{l\}} \times \overline{Ш^{d+4-a}(\tilde{T_2})\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lorsque k_1 est p-adique et $a = 1$, cela prouve en particulier que le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T_2})$ est divisible. Toujours sous l'hypothèse (H 4.17.2), en prenant $T_2 = \mathbb{Z}(a)[1]$ et à l'aide de la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum et de l'isomorphisme de Nesterenko-Suslin-Totaro, on obtient une dualité parfaite :

$$\overline{\mathrm{Ker}\left(K_a^M(K) \to \prod_{v \in X^{(1)}} K_a^M(K_v)\right)\{l\}} \times \overline{Ш^{d+4-a}(\mathbb{Z}(d+1-a))\{l\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(vi) Les points (iv) et (v) permettent de comprendre mieux les groupes de Tate-Shafarevich de $\mathbb{Z}(d)$ lorsque k_1 est p-adique :
- le groupe $Ш^{d+1}(\mathbb{Z}(d))$ est nul d'après la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum.
- les groupes $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et $Ш^{d+3}(\mathbb{Z}(d))$ sont divisibles d'après (iv) et (v).
- le groupe $Ш^r(\mathbb{Z}(d))$ pour $r \geq d+4$ est nul par dimension cohomologique.

(vii) Dans le paragraphe 3.2 du chapitre 2, le théorème et le corollaire précédents sont appliqués à l'étude du principe local-global pour les espaces principaux homogènes sous un K-groupe algébrique linéaire connexe lorsque $k = \mathbb{C}((t))$.

Remarque 4.20. Supposons que k_1 est de caractéristique $p > 0$. Dans ce cas :
- le lemme 4.3 reste vrai.
- la proposition 4.4 reste valable pour n non divisible par p et le théorème 4.5 reste vrai pour $l \neq p$.
- dans la proposition 4.7, l'assertion (i) reste vraie ; dans (ii) et (iii), il faut supposer $l \neq p$.
- lorsque $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, la proposition 4.9 fournit un accouplement parfait :
$$\varprojlim_{p\nmid n} H^{a-1}(K_v, G)/n \times H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G})_{\mathrm{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$
elle donne une injection $\varprojlim_{p\nmid n} H^{a-1}(K_v, G)/n \to (H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G})_{\mathrm{non}-p})^D$ dans le cas général.
- concernant la proposition 4.10 et le corollaire 4.11, les groupes $H^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})_{\mathrm{non}-p}$, $H^{d+2-a}(K_v, \tilde{G})_{\mathrm{non}-p}$, $H^{d+2-a}(K_v^h, \tilde{G})_{\mathrm{non}-p}$, $H_c^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})_{\mathrm{non}-p}$ et $\mathcal{D}^{d+3-a}(U, \tilde{\mathcal{G}})_{\mathrm{non}-p}$ sont de torsion de type cofini, et si $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, les groupes $H^a(U, \mathcal{G})_{\mathrm{non}-p}$, $H^{a-1}(K_v, G)_{\mathrm{non}-p}$, $H^{a-1}(K_v^h, G)_{\mathrm{non}-p}$, $H_c^a(U, \mathcal{G})_{\mathrm{non}-p}$ et $\mathcal{D}^a(U, \mathcal{G})_{\mathrm{non}-p}$ sont de torsion de type cofini.
- le lemme 4.12 reste vrai, de même que la proposition 4.13 si $l \neq p$ et le lemme 4.14 si n n'est pas divisible par p.
- concernant le lemme 4.15, on a une suite exacte :
$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{d+1-a}(K_v, \tilde{G}_t)_{\mathrm{non}-p} \to H_c^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t)_{\mathrm{non}-p} \to \mathcal{D}^{d+2-a}(U, \tilde{\mathcal{G}}_t)_{\mathrm{non}-p} \to 0.$$
- la proposition 4.16 reste vraie pour $l \neq p$.
- le théorème 4.17 fournit un accouplement parfait :
$$\overline{Ш^{a-1}(G)_{\mathrm{non}-p}} \times \overline{Ш^{d+3-a}(\tilde{G})_{\mathrm{non}-p}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
et son corollaire fournit un accouplement parfait :
$$\overline{Ш^{a+1}(G)_{\mathrm{non}-p}} \times \overline{Ш^{d+1-a}(\tilde{G})_{\mathrm{non}-p}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
- le théorème 4.17 fournit un accouplement parfait :
$$\overline{Ш^{a}(G)_{\mathrm{non}-p}} \times Ш^{d+2-a}(\tilde{G})_{\mathrm{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
et son corollaire fournit un accouplement parfait :
$$Ш^{a}(G)_{\mathrm{non}-p} \times \overline{Ш^{d+2-a}(\tilde{G})_{\mathrm{non}-p}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

2

Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs

0 Introduction

Dans ce deuxième chapitre de la thèse, nous allons donner des applications au principe local-global et à l'approximation faible des résultats obtenus dans le chapitre précédent. Nous étudions notamment le principe local-global pour les algèbres simples centrales, l'approximation faible pour les tores et le principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps local supérieur.

0.1 Notations supplémentaires

Nous gardons les notations du chapitre 1 :

Faisceaux. Pour F un faisceau sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ (ou $\underline{\mathrm{Hom}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \mathrm{Hom}_U(F|_U, G|_U)$. De même, pour $n > 0$ et pour F un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ (ou $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \mathrm{Hom}_{U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F|_U, G|_U)$. Ainsi :

$$\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Groupes abéliens}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Faisceaux sur } X.$$

On remarquera que les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ peuvent être différents. On notera $\underline{\mathrm{Ext}}^*_X(F,-)$ (resp. $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$) les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$).

Cadre. Dans tout le chapitre, d désigne un entier naturel fixé (éventuellement nul), k un corps d-local et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On note $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points de codimension 1 et K son corps des fonctions. Pour $v \in X^{(1)}$, on note aussi $k(v)$ le corps résiduel de X et v. Lorsque k_0 est fini, on suppose que le corps k_1 est de caractéristique 0 : autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et k_1 est un corps p-adique. Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on note K_v le complété de K pour la valuation v et $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers. Lorsque M est un objet de la catégorie dérivée des $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules discrets, on note $Ш^r(M)$ (resp. $Ш^r_S(M)$, resp. $Ш^r_\omega(M)$) au lieu de $Ш^r(K,M)$ (resp. $Ш^r_S(K,M)$, resp. $Ш^r_\omega(K,M)$) s'il n'y a pas d'ambigüité.

Cohomologie à support compact. Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, le r-ième groupe de cohomologie à support compact est, par définition, le groupe $H^r_c(U,\mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$. On notera aussi $\mathbb{R}\Gamma_c(U,\mathcal{F})$ le complexe $\mathbb{R}\Gamma(X, j_!\mathcal{F})$, dont le r-ième groupe de cohomologie est le r-ième groupe de cohomologie à support compact de $\mathcal{F}$. De même, lorsque $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux sur U, on notera $H^r_c(U,\mathcal{F}^\bullet)$ le groupe d'hypercohomologie $H^r(k, \mathbb{R}f_*j_!\mathcal{F}^\bullet) = H^r(X, j_!\mathcal{F}^\bullet)$, où f désigne le morphisme propre $X \to \mathrm{Spec}\, k$.

Rappels de notations du chapitre 1. Lorsque F est un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module fini, on note $F' = \underline{\mathrm{Hom}}_K(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$. Lorsque T est un tore sur K, on note $\hat{T}$ (resp. $\check{T}$) son module des caractères (resp. cocaractères), $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$ et $\tilde{T}_t = \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)$. De même, si $G = [T_1 \to T_2]$ est un complexe à deux termes de tores (placés en degrés -1 et 0), on note $\tilde{G} = [\tilde{T_2} \to \tilde{T_1}]$ et $\tilde{G}_t = [\tilde{T}_{2t} \to \tilde{T}_{1t}]$.

0.2 Organisation du chapitre

Ce chapitre est constitué de trois parties. Dans la première section, on étudie le principe local-global pour les K-algèbres simples centrales. On donne des exemples de situations où le principe est vérifié, ainsi que des exemples de situations où le principe n'est pas vérifié :

Théorème 0.1. *(théorèmes 1.2 et 1.13 et exemples 1.15 et 1.17)*
Pour $i \in \{0,1,...,d\}$, on note k_i le corps i-local associé à k et $\mathcal{O}_{k_i}$ son anneau des entiers.

(i) *Si X est de genre 0, alors $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est nul.*

(ii) *Supposons que k_1 est un corps p-adique et que X est une courbe sur k de la forme* $\mathrm{Proj}(k[x,y,z]/(P(x,y,z)))$ *où $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ est un polynôme homogène. Supposons aussi que* $\mathrm{Proj}(k_0[x,y,z]/(\overline{P}(x,y,z)))$ *est une courbe lisse et géométriquement intègre, où $\overline{P}(x,y,z) \in k_0[x,y,z]$ désigne la réduction de P. Alors* $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

(iii) *Supposons que $k_0 = \mathbb{C}((t))$ et que X est la courbe elliptique sur k d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ avec $A, B \in k_0$. Supposons de plus que la courbe elliptique sur k_0 d'équation $y^2 = x^3 + Ax + B$ admet une réduction modulo t de type additif. Alors* $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

(iv) *Soit p un nombre premier impair. Si $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$ avec $d > 1$ et X est la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-p)$, alors* $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.
(v) *Si $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_{d+1}))$ avec $d \geq 0$ et X est la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-t_1)$, alors* $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.

La motivation pour étudier cette question est double :

- d'après le théorème 3.10 du chapitre 1, si T est un K-tore, alors on a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^1(T) \times \overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad Ш^{d+1}(\tilde{T}) \times \overline{Ш^2(T)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};$$

  il est donc naturel de se demander si les groupes $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $Ш^2(T)$ sont finis de sorte que $\overline{Ш^{d+2}(\tilde{T})} = Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $\overline{Ш^2(T)} = Ш^2(T)$. Il se trouve que ces finitudes sont impliquées par la nullité de $Ш^2(L, \mathbb{G}_m)$. En effet, d'après le lemme 3.20 du chapitre 1, le groupe $Ш^2(L, \mathbb{G}_m)$ est nul si, et seulement si, le groupe $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d))$ l'est, et comme $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $Ш^2(T)$ sont de torsion de type cofini, un argument de restriction-corestriction montre que les nullités de $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d))$ et $Ш^2(L, \mathbb{G}_m)$ impliquent les finitudes de $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ et $Ш^2(T)$.
- les suites de Poitou-Tate des théorèmes 3.22 et 3.24 du chapitre 1 sont exactes sous l'hypothèse que le principe local-global est vrai sur une certaine extension finie de K.

Dans la deuxième section, nous nous intéressons à l'approximation faible pour les K-tores (on se reportera à la définition 2.1 pour les définitions) :

Théorème 0.2. *(théorème 2.4 et corollaires 2.6 et 2.7)*
On rappelle que k est un corps d-local et que K est le corps des fonctions de la k-courbe X. Soient $S \subseteq X^{(1)}$ une partie finie et T un K-tore.
(i) On a une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)}_S \to \prod_{v \in S} T(K_v) \to \overline{Ш^{d+2}_S(\tilde{T})}^D \to Ш^1(T) \to 0,$$

où $\overline{T(K)}_S$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$.
(ii) On a une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to \overline{Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})}^D \to Ш^1(T) \to 0,$$

où $\overline{T(K)}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$.
(iii) Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}(\tilde{T}) = Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$.
(iv) Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est de type cofini. En particulier, lorsque $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ pour une extension finie L de K déployant T, le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est fini.

(v) Le tore T vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est dénombrable.

Remarque 0.3. La preuve de ce théorème mélange les difficultés qui avaient été rencontrées dans les articles [HSz16] et [CTH15] : le groupe $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ n'est pas forcément nul, et le groupe $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ n'est pas forcément fini (ni même de torsion de type cofini).

Finalement, dans la troisième section, nous utilisons les théorèmes de dualité arithmétique du chapitre 1 afin d'étudier le principe local-global pour les K-espaces principaux homogènes sous un groupe linéaire connexe. Dans le cas où $k = \mathbb{C}((t))$, nous appliquons les méthodes de Borovoi ([Bor98]) et Sansuc ([San81]), ce qui permet notamment de montrer que la seule obstruction est l'obstruction de Brauer-Manin, alors que, dans certains autres cas, nous suivons la méthode de Harari et Szamuely ([HSz16]).

1 Nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$

Dans cette section, nous allons établir dans certains cas la nullité du groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m)$. Commençons par un lemme préliminaire :

Lemme 1.1. *Les sous-groupes* $\mathrm{Ker}\left(Br(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} Br(k(v))\right)$ *et* $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ *de* $Br(K)$ *coïncident.*

Démonstration. Le schéma X étant intègre et régulier, $\mathrm{Br}(X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Br}(K)$. Il en est donc de même de $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))\right)$. Montrons que ce sous-groupe coïncide avec $Ш^2(\mathbb{G}_m)$.
Soit $x \in Ш^2(\mathbb{G}_m) \subseteq \mathrm{Br}(K)$. L'image de x dans $\mathrm{Br}(K_v)$ est nulle pour chaque $v \in X^{(1)}$. Par conséquent, comme l'application résidu $\mathrm{Br}(K) \to H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (qui est définie dans les paragraphes 1 et 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser02]) se factorise par $\mathrm{Br}(K_v)$, le résidu de x dans $H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est nul pour chaque v. De la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(exemple III.2.22(a) de [Mil80], p. 106), on déduit alors que $x \in \mathrm{Br}(X)$. Fixons maintenant $v_0 \in X^{(1)}$. On remarque que $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{v_0})$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(K_{v_0})$ puisque $\mathcal{O}_{v_0}$ est intègre régulier. Comme l'image de x dans $\mathrm{Br}(K_{v_0})$ est nulle, il en est de même de l'image de x dans $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{v_0})$ et donc de celle dans $\mathrm{Br}(k(v_0))$. Cela étant vrai pour tout $v_0 \in X^{(1)}$, on obtient l'inclusion :

$$Ш^2(\mathbb{G}_m) \subseteq \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))\right).$$

Réciproquement, soient $y \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))\right)$ et $v_0 \in X^{(1)}$. D'après le corollaire IV.2.13 de [Mil80] (p. 148), le groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{v_0})$ est isomorphe à $\mathrm{Br}(k(v_0))$.

On en déduit que l'image de y dans $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_{v_0})$, et donc dans $\mathrm{Br}(K_{v_0})$, est nulle. Cela étant vrai pour tout $v_0 \in X^{(1)}$, on obtient l'inclusion :

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))\right) \subseteq Ш^2(\mathbb{G}_m).$$

□

Nous pouvons à présent énoncer un premier résultat concernant la nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$:

Théorème 1.2. *Notons $\overline{X} = X \times_k k^s$ et supposons que $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ (c'est-à-dire que X est la droite projective ou une conique dans $\mathbb{P}^2_k$). Alors $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est nul.*

Démonstration. Considérons N le noyau du morphisme $\mathrm{Br}(X) \to \prod_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(k(v))$ et donnons-nous $x \in N$. D'après le lemme 1.1, on a $N = Ш^2(\mathbb{G}_m)$. Le corollaire 3.12 du chapitre 1 permet donc de déduire que N est divisible, et on peut considérer, pour chaque entier $n > 0$, un élément x_n de N tel que $x = nx_n$.
Remarquons maintenant que $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$, puisque $\mathrm{Br}(\overline{X})$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(\overline{k}(X))$ et $\mathrm{Br}(\overline{k}(X)) = 0$ d'après le théorème de Tsen. On obtient donc une suite exacte :

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

Or, comme $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$, le groupe $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est nul. On en déduit que x et x_n pour chaque n sont dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$. Notons $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x_n}$) un élément de $\mathrm{Br}(k)$ d'image x (resp. x_n) dans $\mathrm{Br}(X)$. Fixons maintenant $v_0 \in X^{(1)}$, et notons $n_0 = [k(v_0) : k]$. Comme $x_{n_0} \in N$, on déduit que l'image de $\tilde{x_{n_0}}$ par la composée :

$$\mathrm{Br}(k) \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(k(v)) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} \mathrm{Br}(k)$$

est 0. Mais un argument de restriction-corestriction impose que cette image est aussi $n_0\tilde{x_{n_0}}$. On en déduit que $n_0\tilde{x_{n_0}} = 0$, et donc $x = n_0 x_{n_0} = 0$. Par conséquent, N est nul. □

Remarque 1.3.
(i) En fait, dans la preuve précédente, on pourrait supposer que $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est d'exposant fini e au lieu de $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. En effet, dans ce cas, on prend pour $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{x_n}$) un élément de $\mathrm{Br}(k)$ d'image ex (resp. ex_n) dans $\mathrm{Br}(X)$, et on montre exactement de la même manière que $ex = n_0(ex_{n_0})$ est nul. On en déduit que le groupe divisible N est d'exposant e, donc nul.
(ii) Supposons que k est p-adique et notons J la jacobienne de X. On dispose d'une suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to J(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0$$

où $NS(\overline{X})$ est le groupe de Néron-Severi de $\overline{X}$. On obtient alors une suite exacte de cohomologie :

$$H^0(k, NS(\overline{X})) \to H^1(k, J) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(k, NS(\overline{X})).$$

Le groupe de Néron-Severi $NS(\overline{X})$ est toujours de type fini. On en déduit que :

- $H^0(k, NS(\overline{X}))$ est de type fini et donc, comme $H^1(k,J)$ est de torsion, l'image de $H^0(k, NS(\overline{X})) \to H^1(k,J)$ est finie ;
- $H^1(k, NS(\overline{X}))$ est d'exposant fini par un argument de restriction-corestriction.

Il suit que le groupe $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est d'exposant fini si, et seulement si, $H^1(k,J)$ est d'exposant fini. Or $H^1(k,J)$ est isomorphe au dual de $J(k)$ d'après le théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur un corps p-adique (corollaire I.3.4 de [Mil06], p. 43), et $J(k)$ est de torsion si, et seulement si, J est triviale d'après le théorème de structure de Mattuck ([Mat55], lemme I.3.3 de [Mil06], p. 41). Par conséquent, $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est d'exposant fini si, et seulement si, il est nul. Je ne sais pas si cette équivalence reste vraie lorsque k n'est pas p-adique.

Notons maintenant $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k, π une uniformisante de $\mathcal{O}_k$ et κ le corps résiduel de $\mathcal{O}_k$. Pour obtenir la nullité de $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ dans des situations plus générales (théorème 0.1(ii)(iii) ou corollaires 1.11 et 1.12), nous allons procéder par récurrence sur l'entier $d \geq 0$. Pour ce faire, nous allons commencer par établir la propriété d'hérédité. Dans le cas où k_0 est un corps fini, l'initialisation sera donnée par le cas où $d = 1$, c'est-à-dire le cas où k est p-adique, et elle découlera aisément des articles [Kat86] et [HSz16]. Dans le cas où $k_0 = \mathbb{C}((t))$, l'initialisation sera donnée par le cas où $d = 0$, c'est-à-dire le cas où $k = \mathbb{C}((t))$, et elle découlera aisément de l'article [DT83]. Nous allons donc établir l'hérédité sous l'hypothèse suivante sur le corps k :

(H 1.4) *$d > 1$ si k_0 est fini et $d > 0$ si $k_0 = \mathbb{C}((t))$, c'est-à-dire k n'est ni un corps fini ni un corps p-adique ni $\mathbb{C}((t))$.*

Énonçons maintenant l'hypothèse de récurrence :

(H 1.5) (i) *il existe un schéma intègre, projectif, lisse $\mathcal{X}$ de dimension 2 sur Spec $\mathcal{O}_k$ dont la fibre générique est X et dont la fibre spéciale, que nous notons X_0, est intègre de point générique η_0,*

(ii) *il existe un entier naturel non nul e vérifiant la propriété suivante : pour tout $w \in X_0^{(1)}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{U}_w = \mathrm{Spec}\ \mathcal{A}_w$ de $\mathcal{X}$ contenant w et un point fermé v_w de $U_w = \mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_k} k$ tels que l'adhérence $\overline{\{v_w\}}$ de v_w dans $\mathcal{U}_w$, munie de sa structure réduite, est régulière, contient w et π est de valuation au plus e dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$,*

(iii) *les groupes $Ш^2(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z})$ et $Ш^3(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(1))$ sont nuls.*

Sous de telles hypothèses, on notera $U_{w,0}$ la fibre spéciale de $\mathcal{U}_w$ pour chaque $w \in X_0$.

Lemme 1.6. *On suppose (H 1.4) et (H 1.5). Soient $r \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$. Il existe un unique morphisme $H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
H^{r+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{r+1}(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d] \\
H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, hook] & H^r(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)),
\end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical de droite est le résidu en η_0.

Démonstration.
•*Unicité :* La flèche :

$$H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \hookrightarrow H^r(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$$

est injective d'après la discussion suivant le corollaire 3.4.2 de [CT95]. L'unicité en découle immédiatement.
•*Existence :* Le cas $r=0$ est évident puisque

$$H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \to H^r(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$$

est un isomorphisme.
Concernant le cas $r=1$, on remarque qu'il suffit de montrer que l'image de la composée $H^2(X,\mu_n) \to H^2(K,\mu_n) \to H^1(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est contenue dans $H^1(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Soit donc $x \in H^2(X,\mu_n)$. Écrivons le complexe de Bloch-Ogus (proposition 1.7 de [Kat86]) :

$$H^2(K,\mu_n) \to \bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^1(k(v),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\oplus H^1(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{w\in X_0^{(1)}} H^0(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)).$$

Comme $x \in H^2(X,\mu_n)$, l'image de x dans $\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^1(k(v),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est nulle. On en déduit que l'image de x dans $H^1(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est contenue dans :

$$\mathrm{Ker}\left(H^1(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{w\in X_0^{(1)}} H^0(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))\right) = H^1(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

□

Remarque 1.7. On suppose (H 1.4) et (H 1.5). Sous de telles hypothèses, on rappelle que $U_{w,0}$ désigne la fibre spéciale $\mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_k} \kappa$ de $\mathcal{U}_w$. On remarque alors qu'une preuve tout à fait identique à celle qui précède fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^{r+1}(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d] \\
H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, hook] & H^r(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)).
\end{tikzcd}$$

Lemme 1.8. *On suppose (H 1.4) et (H 1.5). Soient $r \in \{0,1\}$ et $n \geq 1$. Soient $w \in X_0^{(1)}$ et e_w la valuation de π dans $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$. Le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r, "Res_{k(v_w)}"] \arrow[d, "\delta_{\eta_0}"] & H^{r+1}(k(v_w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d, "\delta_w"] \\ H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, "e_w\cdot Res_{\kappa(w)}"] & H^r(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)), \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des résidus, est commutatif.

Démonstration. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d] \\ H^r(X_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r] & H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \end{tikzcd}$$

est commutatif puisque les diagrammes du lemme 1.6 et de la remarque 1.7 le sont et la flèche

$$H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \hookrightarrow H^r(\kappa(\eta_0),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$$

est injective. Il suffit donc de montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[r, "\mathrm{Res}_{k(v_w)}"] \arrow[d, "\delta_{\eta_0}"] & H^{r+1}(k(v_w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \arrow[d, "\delta_w"] \\ H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \arrow[r, "e_w\cdot \mathrm{Res}_{\kappa(w)}"] & H^r(\kappa(w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)). \end{tikzcd}$$

Notons $\hat{\mathcal{A}}_w$ le complété de $\mathcal{A}_w$ pour la topologie π-adique. On remarque que, comme $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w}$ est complet pour la topologie π-adique, le morphisme Spec $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w} \to \mathcal{U}_w$ s'étend en un morphisme Spec $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w} \to$ Spec $\hat{\mathcal{A}}_w$. En tenant compte de la compatibilité des résidus avec la complétion et en remplaçant v et w par leurs images à travers le morphisme Spec $\mathcal{O}_{\overline{\{v\}},w} \to$ Spec $\hat{\mathcal{A}}_w$, on peut supposer que $\mathcal{A}_w$ est complet pour la topologie π-adique, et donc que le morphisme $H^r(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \to H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ est surjectif.
Soit $x \in H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Notons $y_0 = \delta_{\eta_0}(x) \in H^r(U_{w,0},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$. D'après ce qui précède, y_0 se relève en un élément $y \in H^r(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$. En voyant y dans $H^r(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ et π dans $H^1(K,\mu_n) = K^\times/K^{\times n}$, on pose $z = y \cup \pi \in H^{r+1}(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Pour $v \in U_w^{(1)}$, on remarque que $\delta_v(z) = v(\pi)\mathrm{Res}_{k(v)}(y) = 0$ et donc $z \in H^{r+1}(U_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. De plus, comme π est une uniformisante de $\mathcal{O}_{\eta_0}$, on a $\delta_{\eta_0}(z) = y_0$ et donc, d'après le théorème de pureté cohomologique absolue de Gabber (théorème 3.1.1 de l'exposé XVI de [ILO14]), $x-z$ provient de $H^{r+1}(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Comme le morphisme $H^{r+1}(\mathcal{U}_w,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^{r+1}(k(v_w),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ se factorise par $H^{r+1}(\overline{\{v_w\}},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$, on déduit la relation $\delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(x-z)) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(\delta_{\eta_0}(x-z)) = 0$. Il reste donc à montrer que $\delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(z)) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(\delta_{\eta_0}(z))$, ce qui découle immédiatement des calculs :

$$\delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(z)) = \delta_w(\mathrm{Res}_{k(v_w)}(y)\cup\mathrm{Res}_{k(v_w)}(\pi)) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(y) = e_w\mathrm{Res}_{\kappa(w)}(\delta_{\eta_0}(x)).$$

□

Proposition 1.9. *On suppose (H 1.4) et (H 1.5). Soit $r \in \{0,1\}$. On a :*

$$e! \cdot Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r)) \subseteq H^{r+2}(\mathcal{X},\mathbb{Z}(r)).$$

Démonstration. Soit $x \in Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r))$. Soit $n > 0$ tel que x est de n-torsion. La suite exacte de Kummer et la nullité de $H^1(K, \mathbb{Z})$ et $H^1(K, \mathbb{G}_m)$ fournissent les diagrammes commutatifs à lignes exactes suivants :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(K,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K,\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^2(K_v,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^2(K_v,\mathbb{Z}), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2(K,\mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K,\mathbb{G}_m) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^2(K_v,\mu_n) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^2(K_v,\mathbb{G}_m) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^2(K_v,\mathbb{G}_m). \end{tikzcd}$$

On obtient alors que $Ш^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = {}_nШ^2(\mathbb{Z})$ et que $Ш^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) = {}_nШ^2(\mathbb{G}_m)$. Comme $\mathbb{Z}(0) \cong \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}(1)[1] \cong \mathbb{G}_m$, on en déduit que $x \in Ш^{r+1}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Pour $v \in X^{(1)}$, comme l'image de x dans $H^{r+1}(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ est nulle, l'image de x dans $H^r(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$ l'est aussi, ce qui prouve que x provient de $\tilde{x} \in H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$. Étant donné que $H^{r+1}(\mathcal{O}_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ s'injecte dans $H^{r+1}(K_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ (voir l'annexe du chapitre II de [Ser02]) et que $H^{r+1}(\mathcal{O}_v, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^{r+1}(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ est un isomorphisme, on déduit que

$$\tilde{x} \in \mathrm{Ker}\left(H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^{r+1}(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \right).$$

Notons y l'image de $\tilde{x}$ dans $H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1))$. À l'aide du lemme précédent et de l'hypothèse (H 1.5)(ii), on déduit que $e!y \in \mathrm{Ker}(H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)) \to \prod_{w\in X_0^{(1)}} H^r(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)))$. Montrons que $e!y = 0$:

- Si $r = 0$, alors $H^0(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)) \to \prod_{w\in X_0^{(1)}} H^0(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))$ est injectif et donc $e!y = 0$.
- Si $r = 1$, comme $H^1(\mathcal{O}_{X_0,w}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(\kappa(w), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un isomorphisme et $H^1(\mathcal{O}_{X_0,w}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(\kappa(\eta_0)_w, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est injectif, on déduit que $e!y \in Ш^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Or $Ш^1(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = {}_nШ^2(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}) = 0$ d'après l'hypothèse (H 1.5)(iii), et donc $e!y = 0$.

Par conséquent, $e!\tilde{x} \in \mathrm{Ker}\,(H^{r+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^r(X_0, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r-1)))$. Le théorème de pureté cohomologique absolue de Gabber permet alors de conclure que $e!\tilde{x}$ provient de $H^{r+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$, ce qui prouve que tout élément de $e! \cdot Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r))$ provient de $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r))$. Reste donc à montrer l'injectivité du morphisme $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(K, \mathbb{Z}(r))$:

- Si $r = 0$, on remarque que le morphisme $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(K, \mathbb{Z})$ s'identifie au morphisme $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ce dernier est la composée de $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ suivie de $H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, et ces deux morphismes sont injectifs d'après le théorème 3.1.1 de l'exposé XVI de [ILO14]. On en déduit l'injectivité de $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(K, \mathbb{Z})$.
- Si $r = 1$, comme $\mathbb{G}_m \cong \mathbb{Z}(1)[1]$, l'injectivité de $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(K, \mathbb{Z}(r))$ est équivalente à l'injectivité de $\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Br}(K)$, qui découle du fait que $\mathcal{X}$ est intègre et régulier.

□

Théorème 1.10. *Supposons (H 1.4) et (H 1.5). En particulier, k n'est ni un corps fini ni un corps p-adique ni $\mathbb{C}((t))$. Soit $r \in \{0,1\}$. On a $Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r)) = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in e! \cdot Ш^{r+2}(\mathbb{Z}(r))$. D'après le corollaire précédent, on a $x \in H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r))$. De plus, pour chaque $v \in X^{(1)}$, l'image de x dans $H^{r+2}(k(v), \mathbb{Z}(r))$ est nulle.
Soit $w \in X_0^{(1)}$. D'après l'hypothèse (H 1.5)(ii), la restriction $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\kappa(w), \mathbb{Z}(r))$ se factorise sous la forme $H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\overline{\{v_w\}}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\kappa(w), \mathbb{Z}(r))$. L'image de x dans $H^{r+2}(k(v_w), \mathbb{Z}(r))$ est nulle. Comme $\overline{\{v_w\}}$ est régulier, la flèche $H^{r+2}(\overline{\{v_w\}}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(k(v_w), \mathbb{Z}(r))$ est injective et donc l'image de x dans $H^{r+2}(\overline{\{v_w\}}, \mathbb{Z}(r))$ est nulle. Par conséquent, l'image de x dans $H^{r+2}(k(w), \mathbb{Z}(r))$ est nulle. Cela impose que l'image de x dans $H^{r+2}(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(r))$ est en fait dans $Ш^{r+2}(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(r))$, qui est nul d'après l'hypothèse (H 1.5)(iii). On en déduit que

$$x \in \operatorname{Ker}\left(H^{r+2}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}(r)) \to H^{r+2}(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z}(r))\right).$$

- Si $r = 0$, comme $H^2(X_0, \mathbb{Z}) \to H^2(\kappa(\eta_0), \mathbb{Z})$ est injectif, x est dans le noyau de $\operatorname{Ker}(H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to H^2(X_0, \mathbb{Z}))$. Ce dernier morphisme est injectif par pureté cohomologique absolue et donc $x = 0$. Par conséquent, le groupe $Ш^2(\mathbb{Z})$ est de $e!$-torsion et divisible, donc nul.
- Si $r = 1$, comme on a un isomorphisme $\operatorname{Br}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta_0}) \cong \operatorname{Br}(\kappa(\eta_0))$ et une injection $\operatorname{Br}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta_0}) \to \operatorname{Br}(K_{\eta_0})$, on déduit que :

$$x \in \operatorname{Ker}\left(\operatorname{Br}(K) \to \prod_{v \in X^{(1)}} \operatorname{Br}(K_v) \times \operatorname{Br}(K_{\eta_0})\right).$$

  Soit $n \geq 1$ tel que x est de n-torsion. Alors :

$$x \in \operatorname{Ker}\left(H^2(K, \mu_n) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^2(K_v, \mu_n) \times H^2(K_{\eta_0}, \mu_n)\right).$$

  D'après le théorème 3.3.6 de [HHK14], cela impose que $x = 0$. On en déduit que le groupe $Ш^3(\mathbb{Z}(1))$ est de $e!$-torsion, donc nul.

□

Le théorème précédent nous permet à présent de passer à la récurrence :

Corollaire 1.11. ***(Cas où k_1 est p-adique)***
Supposons que $d \geq 1$ et que le corps k_1 est p-adique. Pour $i \in \{1, 2, 3, ..., d\}$, notons $\mathcal{O}_{k_i}$ l'anneau des entiers de k_i et π_i une uniformisante de $\mathcal{O}_{k_i}$. Supposons que, pour chaque $i \in \{1, 2, 3, ..., d\}$, il existe un schéma intègre, projectif, lisse $\mathcal{X}_i$ de dimension 2 sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ vérifiant les conditions suivantes :
- *pour $1 \leq i \leq d$, la fibre générique X_i et la fibre spéciale $X_{i,0}$ de $\mathcal{X}_i$ sont intègres.*

- *la fibre générique X_d de $\mathcal{X}_d$ est isomorphe à X.*
- *pour $1 \leq i \leq d-1$, la fibre générique X_i de $\mathcal{X}_i$ est isomorphe à la fibre spéciale $X_{i+1,0}$ de $\mathcal{X}_{i+1}$.*
- *la fibre spéciale $X_{1,0}$ de $\mathcal{X}_1$ est géométriquement intègre.*
- *il existe un entier naturel e vérifiant la propriété suivante : pour $1 \leq i \leq d$, pour $w \in X_{i,0}^{(1)}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{U}_w$ de $\mathcal{X}_i$ contenant w et un point fermé v_w de $U_w = \mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_{k_i}} k_i$ tels que l'adhérence $\overline{\{v_w\}}$ de v_w dans $\mathcal{U}_w$, munie de sa structure réduite, est régulière, contient w et π_i est de valuation au plus e dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$.*

Alors $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

Démonstration. Par récurrence, il suffit de montrer que, si K_1 est le corps des fonctions de $\mathcal{X}_1$, alors $Ш^2(K_1, \mathbb{G}_m) = Ш^2(K_1, \mathbb{Z}) = 0$. La nullité de $Ш^2(K_1, \mathbb{G}_m)$ est prouvée dans la proposition 3.4 de [HSz16]. Il reste donc à vérifier que $Ш^2(K_1, \mathbb{Z})$ est nul, ou, ce qui revient au même, vérifier que $Ш^1(K_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est nul pour tout $n > 0$. Par dualité (théorème 2.4 du chapitre 1), cela équivaut à montrer que $Ш^3(K_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$ est nul pour tout $n > 0$, ou, ce qui revient au même, montrer que $Ш^3(K_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul. Mais la fibre spéciale de $\mathcal{X}_1$ étant géométriquement intègre, si l'on note K_0 son corps des fonctions, la proposition 5.2 de [Kat86] impose que le groupe $Ш^3(K_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est isomorphe au groupe $Ш^2(K_0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$, qui est nul d'après le théorème de Brauer-Hasse-Noether car $X_{1,0}$ est lisse. Cela achève la preuve. □

Corollaire 1.12. ***(Cas où** k_0 **est** $\mathbb{C}((t))$**)**
Supposons que $d \geq 0$ et que $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Pour $i \in \{1, 2, 3, ..., d\}$, notons $\mathcal{O}_{k_i}$ l'anneau des entiers de k_i et π_i une uniformisante de $\mathcal{O}_{k_i}$. Supposons que, pour chaque $i \in \{1, 2, ..., d\}$, il existe un schéma intègre, projectif, lisse $\mathcal{X}_i$ de dimension 2 sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ vérifiant les conditions suivantes :

- *pour $1 \leq i \leq d$, la fibre générique X_i et la fibre spéciale $X_{i,0}$ de $\mathcal{X}_i$ sont intègres.*
- *la fibre générique X_d de $\mathcal{X}_d$ est isomorphe à X.*
- *pour $1 \leq i \leq d-1$, la fibre générique X_i de $\mathcal{X}_i$ est isomorphe à la fibre spéciale $X_{i+1,0}$ de $\mathcal{X}_{i+1}$.*
- *la jacobienne de la fibre spéciale $X_{1,0}$ a réduction purement additive.*
- *il existe un entier naturel e vérifiant la propriété suivante : pour $1 \leq i \leq d$, pour $w \in X_{i,0}^{(1)}$, il existe un ouvert affine $\mathcal{U}_w$ de $\mathcal{X}_i$ contenant w et un point fermé v_w de $U_w = \mathcal{U}_w \times_{\mathcal{O}_{k_i}} k_i$ tels que l'adhérence $\overline{\{v_w\}}$ de v_w dans $\mathcal{U}_w$, munie de sa structure réduite, est régulière, contient w et π_i est de valuation au plus e dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\overline{\{v_w\}},w}$.*

Alors $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

Démonstration. Par récurrence, il suffit de montrer que, si K_0 est le corps des fonctions de $X_{1,0}$, alors $Ш^2(K_0, \mathbb{G}_m) = Ш^2(K_0, \mathbb{Z}) = 0$. La nullité de $Ш^2(K_0, \mathbb{G}_m)$ provient de l'article [DT83] (on remarquera que ce résultat reste vrai même si l'errata [DT85] montre que le théorème 1 de [DT83] est faux). D'après le lemme 3.20 du chapitre 1, cela entraîne aussi que $Ш^2(K_0, \mathbb{Z})$ est nul, ce qui achève la preuve. □

Je ne sais pas à quel point la dernière hypothèse des corollaires précédents est contraignante, mais elle permet au moins de traiter les exemples qui suivent.

Théorème 1.13. ***(Courbes constantes)***
(i) *Supposons que* $d \geq 1$*, que* k_1 *est un corps* p*-adique et que* X *est une courbe de la forme* $\mathrm{Proj}(k[x,y,z]/(P(x,y,z)))$ *où* $P \in \mathcal{O}_{k_1}[x,y,z]$ *est un polynôme homogène. Supposons aussi que* $\mathrm{Proj}(k_0[x,y,z]/(\overline{P}(x,y,z)))$ *est une courbe lisse et géométriquement intègre. Alors* $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.
(ii) *Supposons que* $d \geq 0$*, que* $k_0 = \mathbb{C}((t))$ *et que* X *est la courbe elliptique sur* k *d'équation* $y^2 = x^3 + Ax + B$ *avec* $A, B \in k_0$*. Supposons de plus que la courbe elliptique sur* k_0 *d'équation* $y^2 = x^3 + Ax + B$ *admet une réduction modulo* t *de type additif. Alors* $Ш^2(\mathbb{Z}) = Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

Démonstration.
(i) Pour $i \in \{1, 2, ..., d\}$, soit $\mathcal{X}_i = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_{k_i}[x,y,z]/(P(x,y,z)))$. Pour chaque i, le schéma $\mathcal{X}_i$ étant dominant sur $\mathcal{O}_{k_i}$, il est plat. De plus, le critère jacobien permet de vérifier immédiatement que $X_{i,0}$ est lisse sur le corps résiduel de k_i. Par conséquent, pour chaque i, $\mathcal{X}_i$ est lisse sur $\mathcal{O}_{k_i}$.
Toutes les hypothèses du corollaire 1.11 sont évidemment vérifiées sauf peut-être la dernière. Fixons donc un certain $i \in \{1, 2, ..., d\}$ et soit w un point fermé de la fibre spéciale $X_{i,0}$. Supposons sans perte de généralité que w est dans l'ouvert $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k_i}[x,y]/(P(x,y,1)))$ de $\mathcal{X}_i$, et choisissons $\mathcal{U}_w = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k_i}[x,y]/(P(x,y,1)))$. Le point w est alors le noyau d'un morphisme $\mathrm{ev}_w : k_{i-1}[x,y]/(P(x,y,1)) \to k_{i-1}^s$. Notons b et c les images respectives de x et y dans k_{i-1}^s. Soient λ une extension finie de k_{i-1} contenant b et c et $l = \lambda((\pi_i))$. Le noyau v du morphisme $k_i[x,y]/(P(x,y,1)) \to k_i^s$ qui envoie x et y sur b et c respectivement est un point fermé de la fibre générique U_w de $\mathcal{U}_w$ qui contient w dans son adhérence. On vérifie aisément que l'idéal premier définissant w dans $\mathcal{U}_w$ est l'idéal engendré par l'idéal premier définissant v dans $\mathcal{U}_w$ et par π_i. Par conséquent, l'anneau des fonctions de $\overline{\{v\}}$ est un anneau intègre ayant un unique idéal premier non nul, engendré par π_i : c'est donc un anneau de valuation discrète d'uniformisante π_i, ce qui prouve la dernière hypothèse du corollaire 1.11 avec $e = 1$.
(ii) La démonstration est analogue à celle qui précède.

□

Exemple 1.14. La partie (ii) précédente s'applique par exemple à la courbe elliptique $y^2 = x^3 + t$ sur $k = \mathbb{C}((t))((\pi_1))...((\pi_d))$ pour $d \geq 0$.

Nous fournissons maintenant des contre-exemples à $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$.

Exemple 1.15. Soit p un nombre premier impair, de sorte que $1-p$ soit un carré dans $\mathbb{Q}_p$. Prenons $k = \mathbb{Q}_p((t))$ et considérons X la courbe elliptique d'équation $y^2 = x(1-x)(x-p)$. Nous allons montrer que, dans ce contexte, $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.
- D'après l'appendice de [CTPS12], dans K_{η_0}, $1-x$ est de valuation nulle mais n'est pas un carré.
- Soit $v \in X^{(1)}$. Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_v$. Montrons que $1-x$ est un carré dans K_v. En suivant les idées de [CTPS12], plusieurs cas se présentent.

(1) Supposons que $v(1-x) < 0$. Alors $v(x)$, $v(1-x)$ et $v(x-p)$ sont égaux et pairs. Écrivons $x = u/\pi^{2n}$ avec $u \in \mathcal{O}_v^\times$ et $n > 0$. L'équation de X impose que $-u$ est un carré dans $\mathcal{O}_v$. Par conséquent, $1-x = \frac{\pi^{2n}-u}{\pi^{2n}}$ est un carré dans K_v.
(2) Supposons que $v(1-x) > 0$. Alors $v(x) = v(x-p) = 0$ et $v(1-x)$ est pair. En écrivant $1-x = u\pi^{2n}$, on remarque que $x = 1-u\pi^{2n}$ et $x-p = 1-p-u\pi^{2n}$ sont des carrés dans K_v. Il en est donc de même pour $1-x$.
(3) Supposons que $v(1-x) = 0$. Si $v(x) > 0$, alors $1-x$ est bien sûr un carré dans K_v. Si $v(x-p) > 0$, alors $1-x = 1-p-(x-p)$ est aussi un carré. Il reste donc à étudier le cas $v(x) = v(x-p) = 0$. Dans ce cas, les réductions de x et y modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$ donnent lieu à des éléments b et c dans $k(v)$ tels que $b^2 = c(1-c)(c-p) \neq 0$. Pour montrer que $1-x$ est un carré dans K_v, il suffit de montrer que $1-c$ est un carré dans $k(v)$. Notons w la valuation de $k(v)$, B son anneau des entiers, k_B son corps résiduel et π_B une uniformisante de B. Plusieurs cas se présentent alors.
   (a) Supposons que $w(1-c) < 0$. Alors $w(c)$, $w(1-c)$ et $w(c-p)$ sont égaux et pairs. Écrivons $c = u/\pi_B^{2n}$ avec $u \in B^\times$ et $n > 0$. L'équation vérifiée par b et c impose que $-u$ est un carré dans B. Par conséquent, $1-c = \frac{\pi_B^{2n}-u}{\pi_B^{2n}}$ est un carré dans $k(v)$.
   (b) Supposons que $w(1-c) > 0$. Alors $w(c) = w(c-p) = 0$ et $w(1-c)$ est pair. En écrivant $1-c = u\pi_B^{2n}$, on remarque que $c = 1-u\pi_B^{2n}$ et $c-p = 1-p-u\pi_B^{2n}$ sont des carrés dans $k(v)$. Il en est donc de même pour $1-c$.
   (c) Supposons que $w(1-c) = 0$. Si $w(c) > 0$, alors $1-c$ est bien sûr un carré dans $k(v)$. Si $w(c-p) > 0$, alors $1-c = 1-p-(c-p)$ est aussi un carré. Il reste donc à étudier le cas $w(c) = w(c-p) = 0$. Dans ce cas, les réductions de b et c modulo l'idéal maximal de B donnent lieu à des éléments β et γ dans k_B tels que $\beta^2 = \gamma(1-\gamma)(\gamma-p) \neq 0$. Pour montrer que $1-c$ est un carré dans $k(v)$, il suffit de montrer que $1-\gamma$ est un carré dans le corps p-adique k_B. Mais cela est montré dans l'appendice de [CTPS12].

Par conséquent, $1-x \in Ш^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

- Soit $z = (1-x) \cup t \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Pour chaque $v \in X^{(1)}$, $1-x$ est un carré dans K_v et donc $z \in Ш^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus, le résidu de z en η_0 est $\mathrm{Res}(1-x) \in \kappa(\eta_0)^\times/\kappa(\eta_0)^{\times 2}$. Ce résidu ne peut pas être nul puisque $1-x$ n'est pas un carré dans K_{η_0}. Par conséquent, $z \neq 0$ et ${}_2Ш^2(\mathbb{G}_m) = Ш^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$.

Plus généralement, si $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$ avec $d > 1$, la courbe elliptique X d'équation $y^2 = x(1-x)(x-\lambda)$ où $\lambda \in \{p, t_1, ..., t_{d-2}\}$ vérifie $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$. Bien sûr, on peut remplacer $\mathbb{Q}_p$ par n'importe quel corps p-adique.

Remarque 1.16. Dans le cas où k est un corps p-adique, on a $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$ quelle que soit la courbe X, même si elle a mauvaise réduction (voir la proposition 3.4 de [HSz16]).

Exemple 1.17.
- Pour $k = \mathbb{C}((t))$ et X une courbe elliptique ayant bonne réduction (resp. mauvaise réduction de type multiplicatif), on a $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$: en effet, d'après [DT83], si J désigne la jacobienne de X, le groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m) \cong H^1(k, \mathrm{Pic}\ \overline{X})$

s'identifie au conoyau de $\mathbb{Z} \to H^1(k,J)$ et $H^1(k,J)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ (resp. à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Ces résultats de [DT83] restent vrais malgré l'errata [DT85].
- Pour $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_{d+1}))$ avec $d > 0$, un raisonnement analogue à l'exemple précédent montre que la courbe elliptique X d'équation $y^2 = x(1-x)(x-\lambda)$ avec $\lambda \in \{t_1,...,t_d\}$ vérifie $Ш^2(\mathbb{G}_m) \neq 0$.

Remarque 1.18. Le groupe $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est-il une puissance de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$? Je ne sais pas répondre en toute généralité à cette question de Jean-Louis Colliot-Thélène, mais la réponse est affirmative lorsque k est un corps p-adique ou $\mathbb{C}((t))$:
- lorsque k est un corps p-adique, on a toujours $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$ d'après [HSz16] ;
- lorsque k est le corps $\mathbb{C}((t))$, les résultats de [DT83] montrent que $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est le conoyau de $\mathbb{Z} \to H^1(k,J)$ et que $H^1(k,J)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$ pour un certain $r \in \{0,1,...,2g\}$ où g est le genre de X, ce qui impose que $Ш^2(\mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$.

Complément : Finitude du $(d+3)$-ième groupe de Tate-Shafarevich du dual d'un tore

Soit T un tore sur K, déployé par une extension finie L. Notons $\hat{T}$ (resp. $\check{T}$) son module des caractères (resp. cocaractères), et posons $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.
En tenant compte du théorème 4.21 du chapitre 1, il est aussi intéressant d'étudier le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T})$: c'est le but de ce complément.

Proposition 1.19. *Soit Y une courbe projective lisse géométriquement intègre sur une extension finie l de k, de corps de fonctions $L = l(Y)$.*
(i) *Le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) *On a un isomorphisme $Ш^{d+3}(\tilde{T}) \cong (\varprojlim_n Ш^1({}_nT))^D$. En particulier, on a $Ш^{d+3}(\mathbb{Z}(d)) \cong (\varprojlim_n Ш^1(\mu_n))^D$, et ce groupe est nul pour $X = \mathbb{P}^1_k$.*
(iii) *Supposons que k_1 soit un corps p-adique. Alors $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est divisible. Il est nul dès que $\varprojlim_n Ш^1(L,\mu_n) = 0$ ou dès que $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) = 0$. Cette deuxième condition est automatiquement satisfaite lorque $d=1$.*
(iv) *Supposons que $k_0 = \mathbb{C}((t))$. Alors $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est fini dès que $Ш^2(L,\mathbb{Z}) = 0$ ou dès que $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) = 0$. Cette deuxième condition est automatiquement satisfaite lorque $d=1$.*

Démonstration.
(i) Cela découle immédiatement du corollaire 4.11, du lemme 4.12 et de la proposition 4.13 du chapitre 1.
(ii) D'après la preuve de la proposition 3.18(i) du chapitre 1, on a un isomorphisme $Ш^{d+3}(\tilde{T}) \cong \varinjlim_n Ш^{d+2}(\hat{T} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.4 du chapitre 1 pour établir $Ш^{d+3}(\tilde{T}) \cong (\varprojlim_n Ш^1({}_nT))^D$. Les autres affirmations en découlent aisément.
(iii) Le groupe $Ш^{d+3}(\tilde{T})$ est divisible d'après la remarque 4.19(v) du chapitre 1. Il est donc nul dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $\varprojlim_n Ш^1(L, \mu_n) = 0$ (d'après (ii)).
- $Ш^{d+3}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ (par restriction-corestriction).

La deuxième condition est bien sûr satisfaite dès que $H^{d+3}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$. Reste donc à montrer que $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) \cong H^{d+3}(L, \mathbb{Z}(d))$.
Soit U un ouvert affine de Y et écrivons la suite spectrale :

$$H^r(l, H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) \Rightarrow H^{r+s}(U, \mathbb{Z}(d)).$$

On remarque que :
- comme $\mathrm{scd}(l) = d + 1$, on a $H^r(l, H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) = 0$ dès que $r \geq d + 2$.
- comme $\mathrm{cd}(\overline{U}) \leq 1$, le groupe $H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ est uniquement divisible pour $s > 2$, et donc $H^r(l, H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) = 0$ dès que $s > 2$ et $r > 0$.
- pour $s \geq d + 2$, le groupe $H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ est uniquement divisible, et, comme $H^s(\overline{U}, \mathbb{Q}(d)) = 0$, on a une surjection $H^{s-1}(\overline{U}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \to H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$; on en déduit que le groupe $H^s(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))$ est de torsion, donc nul.

Par conséquent, la suite spectrale fournit un isomorphisme :

$$H^{d+1}(l, H^2(\overline{U}, \mathbb{Z}(d))) \cong H^{d+3}(U, \mathbb{Z}(d)).$$

En prenant la limite inductive sur les ouverts affines U de X, on obtient un isomorphisme :

$$H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(X), \mathbb{Z}(d))) \cong H^{d+3}(K, \mathbb{Z}(d)).$$

Lorsque $d = 1$, ces groupes sont nuls d'après le théorème de Hilbert 90.

(iv) Le cas où $H^{d+1}(l, H^2(\bar{l}(Y), \mathbb{Z}(d))) = 0$ se démontre de la même manière que dans (iii). On se place donc dans le cas où $Ш^2(L, \mathbb{Z}) = 0$. Comme $k_0 = \mathbb{C}((t))$, on a $\varprojlim_n Ш^1(L, \mu_n) \cong \varprojlim_n Ш^1(L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \varprojlim_n {}_nШ^2(L, \mathbb{Z}) = 0$. Un argument de restriction-corestriction permet alors de conclure.

□

Remarque 1.20. La nullité de $Ш^2(L, \mathbb{Z})$ a déjà été étudiée avant ce complément, dans les corollaires 1.11 et 1.12 et dans le théorème 1.13.

2 Approximation faible pour les tores

Soit T un tore sur K. Notons $\hat{T}$ (resp. $\check{T}$) son module des caractères (resp. co-caractères), et posons $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. Nous voulons ici étudier les propriétés d'approximation faible pour le tore T :

Définition 2.1. *On dit que T vérifie* ***l'approximation faible*** *si $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$, où le groupe $T(K_v)$ est muni de la topologie v-adique pour chaque v et $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ de la topologie produit. On dit que T vérifie* ***l'approximation faible faible*** *(resp.* ***l'approximation faible faible dénombrable****) s'il existe une partie finie (resp. dénombrable) S_0 de $X^{(1)}$ telle que, pour toute partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K)$ est dense dans $\prod_{v \in S} T(K_v)$.*

Nous allons voir que ces propriétés se lisent dans la “taille” du groupe $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$: plus le groupe $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est “gros”, plus on s'éloigne de la propriété d'approximation faible. Pour ce faire, rappelons que l'approximation faible est vérifiée pour les tores quasi-triviaux. En effet, ces derniers étant lisses et K-rationnels, cela découle du lemme d'approximation d'Artin-Whaples (théorème XII.1.2 de [Lan02]) et du théorème des fonctions implicites pour les valuations ultramétriques (théorème III.9.2 de [Ser92]).

Fixons maintenant une partie finie S de $X^{(1)}$.

Lemme 2.2. *Soit F un Gal(K^s/K)-module discret fini. Pour $r \in \{1, 2, ..., d+1\}$, on a une suite exacte :*

$$H^r(K, F) \to \prod_{v \in S} H^r(K_v, F) \to Ш^{d+2-r}_S(F')^D \to Ш^{d+2-r}(F')^D \to 0,$$

où le morphisme $\prod_{v\in S} H^r(K_v, F) \to Ш^{d+2-r}_S(F')^D$ est donné par

$$(f_v) \mapsto (f' \mapsto \sum_{v \in S}(f_v, f'_v)_v),$$

et où $(.,.)_v : H^r(K_v, F) \times H^{d+2-r}(K_v, F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'accouplement du théorème I.2.17 de [Mil06].

Démonstration. D'après la proposition 2.6 du chapitre 1, on a une suite exacte :

$$H^{d+2-r}(K, F') \longrightarrow \mathbb{P}^{d+2-r}(F') \longrightarrow H^r(K, F)^D \cdot$$

En remarquant qu'un élément de $\prod_{v\in S} H^r(K_v, F)$ peut être relevé en un élément de $\mathbb{P}^{d+2-r}(F')$ en rajoutant des zéros, on en déduit la suite exacte :

$$Ш^{d+2-r}_S(F') \longrightarrow \prod_{v\in S} H^{d+2-r}(K_v, F') \longrightarrow H^r(K, F)^D \cdot$$

En dualisant à l'aide du théorème I.2.17 de [Mil06], on obtient l'exactitude de :

$$H^r(K, F) \to \prod_{v \in S} H^r(K_v, F) \to Ш^{d+2-r}_S(F')^D.$$

Pour achever la preuve, il suffit de dualiser la suite :

$$0 \to Ш^{d+2-r}(F') \to Ш^{d+2-r}_S(F') \to \bigoplus_{v \in S} H^{d+2-r}(K_v, F).$$

□

Lemme 2.3. *Le groupe $Ш^{d+2}_S(\mathbb{Z}(d))$ coïncide avec le groupe $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et est donc de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. Soit $n > 0$. D'après la proposition précédente, on a une suite exacte :

$$H^1(K, \mu_n) \to \prod_{v \in S} H^1(K_v, \mu_n) \to Ш^{d+1}_S(\mu_n^{\otimes d})^D \to Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d})^D \to 0.$$

Or le morphisme $H^1(K,\mu_n) \to \prod_{v\in S} H^1(K_v,\mu_n)$ est surjectif puisque $\mathbb{G}_m$ vérifie l'approximation faible, $H^1(K,\mu_n) \cong K^\times/K^{\times n}$ et $K_v^{\times n}$ est ouvert dans $K_v^\times$ pour chaque $v \in X^{(1)}$. Donc $Ш_S^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) = Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d})$. Comme les groupes $Ш_S^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ sont de torsion (cf remarque 3.8 du chapitre 1) et comme la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum impose les égalités $Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) = {}_nШ^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et $Ш_S^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) = {}_nШ^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$, cela prouve que $Ш_S^{d+2}(\mathbb{Z}(d)) = Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$. $\square$

Théorème 2.4. *Rappelons que T est un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.*
(i) On a la suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

où $\overline{T(K)}_S$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$.
(ii) On a la suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \to (Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

où $\overline{T(K)}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$.

Démonstration. (i) Remarquons que, si T est quasi-trivial :
- $\overline{T(K)}_S = \prod_{v\in S} T(K_v)$ puisque T vérifie l'approximation faible,
- le morphisme $(Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D$ est un isomorphisme d'après le lemme précédent et le lemme de Shapiro,
- le dual de la suite exacte

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S} H^{d+2}(K_v,\tilde{T})$$

  est une suite exacte

$$\prod_{v\in S} T(K_v)^\wedge \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0$$

  où le morphisme $Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D$ est un isomorphisme ; cela montre que le morphisme naturel $\prod_{v\in S} T(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$ (qui se factorise par $\prod_{v\in S} T(K_v)^\wedge$) est nul.

On en déduit que la suite

$$0 \to \overline{T(K)}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0$$

est exacte dès que T est quasi-trivial. Par conséquent, pour prouver la proposition, nous pouvons remplacer T par un tore de la forme $T^m \times_K T_0$, où $m > 0$ et T_0 est un tore quasi-trivial.
D'après le lemme d'Ono (lemme 1.10 de [San81]), on peut donc supposer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T \to 0$$

où F est un schéma en groupes fini commutatif sur K et R un tore quasi-trivial sur K. On en déduit une suite exacte de $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules :

$$0 \to \hat{T} \to \hat{R} \to \hat{F} \to 0.$$

En tensorisant par $\mathbb{Z}(d)$, on obtient un triangle distingué :

$$\tilde{T} \to \tilde{R} \to F' \to \tilde{T}[1],$$

puisqu'on a des quasi-isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\hat{F} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d) &\cong \hat{F} \otimes \mathbb{Z}(d) && (2.1)\\
&\cong \hat{F} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}(d) && (2.2)\\
&\cong \hat{F} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) && (2.3)\\
&\cong \hat{F} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) && (2.4)\\
&\cong \hat{F} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mu_n^{\otimes d} && (2.5)\\
&\cong \hat{F} \otimes \mu_n^{\otimes d}, && (2.6)\\
&\cong F' && (2.7)
\end{aligned}$$

où :
- (2.1) vient du fait que $\mathbb{Z}(d)$ est un complexe de faisceaux plats ;
- (2.3) vient tout simplement de la définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)$;
- (2.4) vient du fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)$ est un complexe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-faisceaux plats ;
- (2.5) vient du quasi-isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) \cong \mu_n^{\otimes d}$;
- (2.6) vient du fait que $\mu_n^{\otimes d}$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-faisceau plat.

D'après le lemme de Shapiro et la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum, on remarque que $H^{d+1}(K,\tilde{R}) = 0$ et $H^{d+1}(K_v,\tilde{R}) = 0$ pour $v \in X^{(1)}$. On en déduit une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+1}_S(F') \to Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_S(\tilde{R}).$$

Montrons que le morphisme $Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_S(\tilde{R})$ est surjectif. Soit n l'ordre de F. Soit $x \in Ш^{d+2}_S(\tilde{R})$. Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & H^{d+2}(K,\tilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2}(K,\tilde{R}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2}(K,F') \arrow[d] \\
\prod_{v\notin S} H^{d+1}(K_v,F') \arrow[r] & \prod_{v\notin S} H^{d+2}(K_v,\tilde{T}) \arrow[r] & \prod_{v\notin S} H^{d+2}(K_v,\tilde{R}) \arrow[r] & \prod_{v\notin S} H^{d+2}(K_v,F').
\end{tikzcd}$$

Comme $Ш^{d+2}_S(\tilde{R})$ est divisible (d'après le lemme de Shapiro et le lemme 2.3) et $H^{d+2}(K,F')$ est d'exposant fini, il existe $x' \in Ш^{d+2}_S(\tilde{R})$ tel que $x = nx'$ et l'image de x' dans $H^{d+2}(K,F')$ est nulle. Par conséquent, x' provient d'un élément $y \in H^{d+2}(K,\tilde{T})$. Soit z l'image de y dans $\prod_{v\notin S} H^{d+2}(K_v,\tilde{T})$. Son image dans $\prod_{v\notin S} H^{d+2}(K_v,\tilde{R})$ est nulle (puisque $x' \in Ш^{d+2}_S(\tilde{R})$), et donc z provient d'un élément de $\prod_{v\notin S} H^{d+1}(K_v,F')$, qui est de n-torsion. Donc $nz = 0$, et

$ny \in Ш_S^{d+2}(\tilde{T})$. Comme ny s'envoie sur x dans $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$, on déduit que le morphisme $Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ est surjectif.
Nous disposons donc d'une suite exacte :

$$0 \to Ш_S^{d+1}(F') \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R}) \to 0.$$

En dualisant, on obtient la suite exacte :

$$0 \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \to Ш_S^{d+1}(F')^D \to 0.$$

On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & R(K) \arrow[r] \arrow[d] & T(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K,F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \prod_{v\in S} R(K_v) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} T(K_v) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} H^1(K_v,F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \arrow[r] & Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \arrow[r] & Ш_S^{d+1}(F')^D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

De plus, la colonne concernant le module fini F est exacte d'après le lemme 2.2. Comme R vérifie l'approximation faible, une simple chasse au diagramme montre que le noyau $\mathrm{Ker}(\prod_{v\in S} T(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))$ est contenu dans l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$. Montrons que $0 \to T(K) \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$ est un complexe.
Soient $x \in T(K)$, $(x_v)_{v\in S}$ son image dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$ et y son image dans $Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$. On remarque immédiatement que l'image de y dans $Ш_S^{d+1}(F')^D$ est nulle, et donc y provient d'un élément $z \in Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D$. Comme F est d'ordre n, la famille $(nx_v)_{v\in S}$ provient d'un élément $(r_v)_{v\in S} \in \prod_{v\in S} R(K_v)$. La nullité du morphisme $\prod_{v\in S} R(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D$ montre alors que $ny = 0$. Or, ny est l'image de nz par $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$ et le morphisme $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$ est injectif. Donc $nz = 0$. Mais $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ étant de torsion de type cofini divisible, son dual est sans torsion. Donc $z = 0$ et $y = 0$.
Cela permet de conclure à l'exactitude de :

$$0 \to \overline{T(K)}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D. \tag{2.9}$$

Reste donc à montrer l'exactitude de :

$$\prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0.$$

Pour ce faire, remarquons que nous disposons d'une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S} H^{d+2}(K_v,\tilde{T}),$$

d'où une suite exacte duale :

$$\prod_{v\in S} T(K_v)^\wedge \to Ш^{d+2}_S(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0$$

d'après la proposition 3.5(iii) du chapitre 1. Or une chasse au diagramme dans le diagramme commutatif à lignes exactes (2.8) montre que le conoyau de $\overline{T(K)}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v)$ est de n-torsion. Par conséquent, en utilisant la suite (2.9), l'image de $\prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш^{d+2}_S(\tilde{T}))^D$ est aussi de n-torsion et elle coïncide donc avec l'image de $\prod_{v\in S} T(K_v)^\wedge \to Ш^{d+2}_S(\tilde{T})^D$. On en déduit l'exactitude de

$$\prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш^{d+2}_S(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

ce qui achève la preuve.

(ii) En passant à la limite projective sur S dans la suite exacte de (i), on obtient immédiatement l'exactitude de :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D.$$

Pour établir les derniers termes de la suite exacte, on procède comme dans (i). En effet, on vérifie exactement de la même manière que l'on peut supposer que T s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T \to 0,$$

où F est un groupe fini et R est un tore quasi-trivial. On remarque alors que l'on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v,\tilde{T}),$$

d'où une suite exacte duale :

$$\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)^\wedge \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0.$$

Or, comme R vérifie l'approximation faible, une chasse au diagramme dans :

$$\begin{tikzcd}
R(K) \arrow[r] \arrow[d] & T(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K,F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\prod_{v\in X^{(1)}} R(K_v) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,F) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

permet de conclure que le groupe topologique $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/\overline{T(K)}$ s'identifie à $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,F)\right)/\overline{H^1(K,F)}$, où $\overline{H^1(K,F)}$ désigne l'adhérence de $H^1(K,F)$ dans $\prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,F)$ (muni de la topologie produit). C'est donc un groupe compact et l'image de $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$ dans $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D$ est fermée. On en déduit que cette image coïncide avec celle de $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)^\wedge$, ce qui impose l'exactitude de :

$$\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0.$$

□

Remarque 2.5. (i) La preuve précédente montre aussi que $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/\overline{T(K)}$ est d'exposant fini. Cependant, ce groupe n'est pas forcément fini. Par exemple, prenons $K = \mathbb{Q}_p(t)$ et soit T le tore dual du tore de la proposition 3.5 de [HSSz15]. D'après la preuve de cette proposition, comme $\mathbb{Q}_p$ n'est pas dénombrable, il en est de même du groupe $Ш^3_\omega(\tilde{T})$. On en déduit que $Ш^3_\omega(\tilde{T})^D$ est infini, et comme $Ш^1(T)$ est fini, le théorème 3.3 de [HSSz15] permet de conclure que $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/\overline{T(K)}$ est infini.

(ii) Pour montrer que $0 \to \overline{T(K)}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш^{d+2}_S(\tilde{T}))^D$ est un complexe, nous aurions aussi pu faire appel à un argument topologique comme dans le lemme 9.5 et la remarque 9.8 de [CTH15].

Nous pouvons récrire la suite exacte (i) du théorème sous une forme plus agréable :

Corollaire 2.6. *Rappelons que T est un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.*
(i) On a une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to \overline{Ш^{d+2}_S(\tilde{T})}^D \to Ш^1(T) \to 0.$$

(ii) On a une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K)} \to \prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \to \overline{Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})}^D \to Ш^1(T) \to 0.$$

Démonstration. Le corollaire découle immédiatement du théorème et de la remarque précédents, ainsi que du théorème de dualité 3.10 du chapitre 1. □

Le théorème 2.4 nous permet finalement d'étudier les propriétés d'approximation faible, d'approximation faible faible et d'approximation faible faible dénombrable pour le tore T :

Corollaire 2.7. ***(Propriétés d'approximation faible des tores)***
Rappelons que T est un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.
(i) Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}(\tilde{T}) = Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$.
(ii) Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est de type cofini. En particulier, lorsque $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ pour une extension finie L de K déployant T, le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est fini.
(iii) Le tore T vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable.

Démonstration. (i) Cette propriété découle immédiatement du théorème 2.4(ii).
(ii) Supposons que T vérifie l'approximation faible faible, et notons S_0 une partie finie de $X^{(1)}$ telle que, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$. D'après le théorème 2.4(i), cela impose que, pour une telle partie S, on a $Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) = Ш^{d+2}(\tilde{T})$, d'où une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S_0} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}).$$

On en déduit que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est de torsion de type cofini.
Réciproquement, supposons que le groupe de torsion $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est de type cofini. Montrons d'abord que $Ш^{d+2}(\tilde{T})_{\text{div}} = Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})_{\text{div}}$. Comme $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/\overline{T(K)}$ est d'exposant fini, le théorème 2.4(ii) fournit une suite exacte :

$$0 \to A \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0,$$

où A est un groupe abélien de torsion. On en déduit que :

$$Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D/(Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D)_{\text{tors}} \cong Ш^{d+2}(\tilde{T})^D/(Ш^{d+2}(\tilde{T})^D)_{\text{tors}},$$

et donc que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})_{\text{div}} \cong Ш^{d+2}(\tilde{T})_{\text{div}}$, puisque $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est supposé de torsion de type cofini. Rappelons maintenant qu'il existe $n > 0$ tel que le groupe $\left(\prod_{v\in S} T(K_v)\right)/\overline{T(K)}_S$ est de n-torsion pour toute partie finie S de $X^{(1)}$ et fixons un nombre premier l divisant n. Comme $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est de type cofini et $Ш^{d+2}(\tilde{T})_{\text{div}} = Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})_{\text{div}}$, il existe une partie finie $S_l \subseteq X^{(1)}$ telle que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})\{l\} = Ш^{d+2}_{S_l}(\tilde{T})\{l\}$. On en déduit que, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_l, on a $Ш^{d+2}(\tilde{T})\{l\} = Ш^{d+2}_S(\tilde{T})\{l\}$. Grâce au théorème 2.4(i), on en déduit que

$$\left(\left(\prod_{v\in S} T(K_v)\right)/\overline{T(K)}_S\right)\{l\} = 0.$$

Cela prouve que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$ pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas $\bigcup_{l|n} S_l$, et donc T vérifie l'approximation faible faible.
(iii) Supposons que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable. Soit S_0 l'ensemble des places $v \in X^{(1)}$ telles qu'il existe un élément de $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ dont l'image dans $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ est non nulle. On sait que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) = \bigcup_{S\subseteq X^{(1)} \text{ fini}} Ш^{d+2}_S(\tilde{T})$. Comme $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable, il existe une suite $(S_i)_{i\geq 1}$ de parties finies de $X^{(1)}$ telle que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) = \bigcup_{i\geq 1} Ш^{d+2}_{S_i}(\tilde{T})$. On en déduit que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) \subseteq Ш^{d+2}_{\bigcup_{i\geq 1} S_i}(\tilde{T})$ et que $S_0 \subseteq \bigcup_{i\geq 1} S_i$. Par conséquent, S_0 est dénombrable. De plus, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant par S_0, on a $Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) = Ш^{d+2}(\tilde{T})$. Le théorème 2.4(i) impose alors que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$, et donc T vérifie l'approximation faible faible dénombrable.
Réciproquement, supposons que T vérifie l'approximation faible faible dénombrable. Soit S_0 une partie dénombrable de $X^{(1)}$ telle que, pour chaque partie finie

S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$. D'après le théorème 2.4(i), cela impose que, pour une telle partie S, on a $Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) = Ш^{d+2}(\tilde{T})$, d'où une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S_0} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}).$$

On en déduit que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable.

□

Remarque 2.8. (i) Il existe des tores qui ne vérifient pas l'approximation faible faible dénombrable. C'est par exemple le cas du tore de la proposition 3.5 de [HSSz15] (voir la remarque 2.5).

(ii) Je ne connais pas la réponse à la question suivante mais elle me semble intéressante : existe-t-il des tores vérifiant l'approximation faible faible dénombrable mais ne vérifiant pas l'approximation faible faible ?

3 Applications au principe local-global

3.1 Torseurs sous un tore

Dans cette section, on suppose que $d > 0$, c'est-à-dire que k (qui est de caractéristique 0) n'est pas $\mathbb{C}((t))$. Soient T un tore sur K et Y un espace principal homogène sous T. Soit $\mathcal{Y}$ un modèle lisse géométriquement intègre de Y sur un ouvert non vide U de X et notons :

$$Y(\mathbb{A}_K) := \varinjlim_{V\subseteq U} \prod_{v\in X\setminus V} Y(K_v) \times \prod_{v\in V^{(1)}} \mathcal{Y}(\mathcal{O}_v)$$

où $\mathcal{O}_v$ désigne le complété de l'anneau local de X en v. Supposons que $Y(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. Comme dans la partie 5 de [HSz16], on peut définir :

$$\begin{aligned} H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) = \mathrm{Ker}(&H^{d+2}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \\ &\to \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+2}(Y_{K_v}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \end{aligned}$$

où Y_{K_v} désigne $Y \times_K K_v$. On considère alors l'accouplement :

$$\begin{aligned} [.,.] : Y(\mathbb{A}_K) \times H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((P_v)_v, \alpha) &\mapsto \sum_{v\in X^{(1)}} \mathrm{inv}_v(\alpha(P_v)) \end{aligned}$$

où inv_v désigne l'isomorphisme $H^{d+2}(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ du théorème I.2.17 de [Mil06]. D'après la loi de réciprocité de Weil (paragraphes 2 et 3 de l'annexe du chapitre II de [Ser02])), $Y(K)$ est contenu dans l'orthogonal de $H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$

par $[.,.]$. De plus, la quantité $[(P_v)_v, \alpha]$ est indépendante du choix du point adélique $(P_v)_v$. Cela permet donc de construire un morphisme

$$\rho_Y : H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On prouve alors exactement de la même manière que dans la partie 5 de [HSz16] le théorème :

Théorème 3.1. *On rappelle que l'on a supposé que $d > 0$. Si ρ_Y est trivial, alors $Y(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. (Esquisse)
Comme K est de dimension cohomologique $d+2$, la suite spectrale de HochSchild-Serre :

$$H^p(K, H^q(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$$

induit un morphisme

$$H^{d+1}(K, H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \to H^{d+2}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))).$$

De plus, on montre exactement comme dans le lemme 5.2 de [HSz16] que :

$$H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \tilde{T}_t.$$

Comme les groupes $H^{d+1}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d))$ et $H^{d+2}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d))$ sont nuls d'après le lemme 3.1 du chapitre 1, on a des isomorphismes

$$H^{d+1}(K, H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \cong H^{d+1}(K, \tilde{T}_t) \cong H^{d+2}(K, \tilde{T}),$$

d'où un morphisme :

$$H^{d+2}(K, \tilde{T}) \to H^{d+2}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))).$$

En passant aux éléments localement triviaux, on obtient un morphisme

$$\tau : Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

En procédant exactement comme dans la proposition 5.3 de [HSz16], on peut montrer que, si α est un élément de $Ш^{d+2}(\tilde{T})$, $[Y]$ désigne la classe de Y dans $Ш^1(T)$ et $PT(.,.) : Ш^1(T) \times Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ désigne l'accouplement du théorème 3.10 du chapitre 1, alors $\rho_Y(\tau(\alpha)) = PT([Y], \alpha)$ au signe près. Ainsi, grâce au théorème 3.10 du chapitre 1, on déduit que si ρ_Y est trivial, alors $[Y] = 0$ et donc $Y(K) \neq \emptyset$. □

Remarque 3.2. Dans le théorème précédent, il suffit de supposer que la composée :

$$Ш^{d+2}(\tilde{T}) \xrightarrow{\tau} H^{+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \xrightarrow{\rho_Y} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est triviale pour conclure que $Y(K) \neq \emptyset$.

3.2 Torseurs sous un groupe réductif

Cas $d = 0$

Dans cette section, on suppose que $k = \mathbb{C}((t))$ (et donc que $d = 0$). Nous allons suivre de près les méthodes développées par Borovoi dans l'article [Bor98] afin de montrer que, pour chaque K-groupe linéaire réductif connexe H, il existe un accouplement non dégénéré BM : $Ш^1(H) \times \overline{Б(H)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En fait, un tel accouplement a déjà été étudié dans la partie 10 de l'article [CTH15] : les méthodes utilisées dans ce dernier, fondées sur les revêtements spéciaux, permettent d'établir la non-dégénérescence à gauche mais pas la non-dégénérescence à droite.

Considérons H un groupe réductif connexe sur K, et notons H^{ss} son sous-groupe dérivé et H^{sc} le revêtement universel de H^{ss}, qui est semi-simple simplement connexe. Soit T un tore maximal de H. Notons $T^{(sc)}$ l'image réciproque de T par le morphisme composé $\rho : H^{sc} \to H^{ss} \to H$ et $G = [T^{(sc)} \to T]$ le cône de $T^{(sc)} \to T$. Pour L une extension de K, on définit la cohomologie galoisienne abélienne de H par $H^r_{\text{ab}}(L, H) = H^r(L, G)$. On rappelle que, dans la section 3 de [Bor98], Borovoi a construit, pour chaque extension L de K, des morphismes d'abélianisation :

$$\begin{aligned} \text{ab}^0_L :& H(L) \to H^0_{\text{ab}}(L, H) \\ \text{ab}^1_L :& H^1(L, H) \to H^1_{\text{ab}}(L, H). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous nous intéressons au morphisme ab^1_L avec $L = K$ et avec $L = K_v$ pour un certain $v \in X^{(1)}$. Commençons par montrer qu'il est injectif.

Théorème 3.3. ***(Cas particulier de la conjecture de Serre II)***
Rappelons que nous avons supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. Supposons de plus que H soit semisimple simplement connexe.
(i) Pour chaque $v \in X^{(1)}$, l'ensemble pointé $H^1(K_v, H)$ est trivial.
(ii) L'ensemble pointé $H^1(K, H)$ est trivial.

Démonstration. (i) On pourra aller voir le théorème 4.7 de [BT87].
(ii) D'après le théorème 10 de [Lan52], le corps $\mathbb{C}((t))$ est C_1. En utilisant en plus le théorème 6 de [Lan52] complété par [Nag57], le corps K est un corps C_2 de caractéristique 0 et son extension abélienne maximale est de dimension cohomologique au plus 1. La partie (v) du théorème 1.2 de [CTGP04] permet alors de conclure.

□

Corollaire 3.4. *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$.*
(i) Pour chaque $v \in X^{(1)}$, le morphisme d'abélianisation $ab^1_{K_v}$ est injectif.
(ii) Le morphisme d'abélianisation ab^1_K est injectif.

Démonstration. La preuve découle du théorème précédent par un dévissage suivi d'un argument de torsion. Elle est tout à fait analogue à celle du corollaire 5.4.1 de [Bor98]. □

Quant à la surjectivité des morphismes d'abélianisation, elle découle des travaux de González-Avilés ([GA12]) :

Théorème 3.5. *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$.*
(i) Pour chaque $v \in X^{(1)}$, le morphisme d'abélianisation $ab^1_{K_v}$ est surjectif.
(ii) Le morphisme d'abélianisation ab^1_K est surjectif.

Démonstration. Rappelons que le corps K (resp. K_v pour $v \in X^{(1)}$) est de type de Douai (voir définition 5.2 de [GA12]) d'après le théorème 2.1(a) de [CTGP04], puisque K (resp. K_v) est un corps de caractéristique 0 de dimension cohomologique 2 dont l'extension abélienne maximale est de dimension cohomologique au plus 1 et l'exposant et l'indice coïncident pour les algèbres simples centrales sur des extensions finies de K (resp. K_v) (voir p. 350 de [Par10] ou le théorème 5.5 de [HHK09]). Cela permet de déduire la surjectivité des morphismes d'abélianisation du théorème 5.5(i) de [GA12], puisque nous sommes en caractéristique 0. □

Nous allons voir que les propriétés que nous venons d'établir concernant les morphismes d'abélianisation permettent d'étudier l'obstruction au principe local-global.
Soit Y un espace principal homogène sous H tel que, pour chaque $v \in X^{(1)}$, on a $Y(K_v) \neq \emptyset$. Comme avant, on considère $\mathcal{Y}$ un modèle lisse géométriquement intègre de Y sur un ouvert non vide U de X et on note :

$$Y(\mathbb{A}_K) := \varinjlim_{V \subseteq U} \prod_{v \in X \setminus V} Y(K_v) \times \prod_{v \in V^{(1)}} \mathcal{Y}(\mathcal{O}_v)$$

où $\mathcal{O}_v$ désigne le complété de l'anneau local de X en v. On peut alors définir un accouplement de type Brauer-Manin :

$$[.,.] : Y(\mathbb{A}_K) \times \text{Б}(Y) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et on remarque que, pour $\alpha \in \text{Б}(Y)$, la valeur de $[(P_v), \alpha]$ ne dépend pas du choix du point adélique $(P_v) \in Y(\mathbb{A}_K)$. Comme on dispose d'un isomorphisme canonique $\text{Б}(Y) \to \text{Б}(H)$ (voir le lemme 5.2(iii) de [BvH09]), cela permet de définir un accouplement :

$$\begin{aligned} \mathrm{BM} : Ш^1(H) \times \text{Б}(H) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ([Y], \alpha) &\mapsto [(P_v), \alpha] \end{aligned}$$

où $(P_v) \in Y(\mathbb{A}_K)$ est un point adélique quelconque.
D'autre part, le noyau du morphisme $T^{(sc)} \to T$ étant fini, le corollaire 4.18(ii) du chapitre 1 fournit un accouplement parfait de type Poitou-Tate :

$$\mathrm{PT} : Ш^1(G) \times \overline{Ш^1(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, nous disposons d'isomorphismes permettant de comparer les deux accouplements précédents :
- d'après le corollaire 3.4 et le théorème 3.5, les morphismes d'abélianisation induisent une bijection $\mathrm{ab}^1 : Ш^1(H) \to Ш^1(G)$,
- d'après le corollaire 2.20 et le théorème 4.8 de [BvH09], on dispose d'un isomorphisme $B : Б(H) \to Ш^1(\tilde{G})$.

Le lemme suivant montre que les accouplements de Brauer-Manin et de Poitou-Tate sont compatibles :

Proposition 3.6. *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} BM: & Ш^1(H) \arrow[d, "ab^1"] & \times & \overline{Б(H)} \arrow[d, "B"] \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ PT: & Ш^1(G) & \times & \overline{Ш^1(\tilde{G})} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

est commutatif au signe près.

Avant de passer à la preuve du lemme précédent, introduisons les notations suivantes, calquées de l'article [HSz08] :

Notation 3.7. Lorsque Y est une variété lisse géométriquement intègre sur K et $\mathcal{Y}$ un modèle lisse géométriquement intègre de Y sur un ouvert non vide U_0 de X :
- $\pi^Y : Y \to \mathrm{Spec}\, K$ et $\pi^{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to U_0$ sont les morphismes structuraux,
- $\overline{Y}$ désigne $Y \times_K K^s$,
- $KD(Y) = [K^s(\overline{Y})^\times \to \mathrm{Div}(\overline{Y})] = \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^Y_*\mathbb{G}_m[1]$ dans la catégorie dérivée,
- $KD'(Y) = [K^s(\overline{Y})^\times/K^{s\times} \to \mathrm{Div}(\overline{Y})] = [\mathbb{G}_m \to \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^Y_*\mathbb{G}_m][1]$ dans la catégorie dérivée,
- $\mathcal{KD}(\mathcal{Y}) = \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^{\mathcal{Y}}_*\mathbb{G}_m[1]$,
- $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) = [\mathbb{G}_m \to \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^{\mathcal{Y}}_*\mathbb{G}_m][1]$.

On rappelle que $H^1(K, KD'(Y)) \cong \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Y)$ d'après le lemme 2.1 de [HSz08].

Démonstration. Soient $[Y] \in Ш^1(H)$ et $\alpha \in Б(H)$. On notera aussi α l'image réciproque de α par l'isomorphisme $Б(Y) \to Б(H)$. Soit U_0 un ouvert non vide de X tel qu'il existe :
- $\mathcal{Y}$ un modèle lisse géométriquement intègre de Y sur U_0,
- $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^{(sc)}$) un schéma en groupes réductif (au sens du chapitre XIX de [Gro70]) sur un ouvert non vide de U_0 étendant H (resp. H^{sc}),
- un morphisme $\mathcal{H}^{(sc)} \to \mathcal{H}$ étendant $H^{sc} \to H$,
- $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}^{(sc)}$) un tore sur U_0 étendant T (resp. $T^{(sc)}$),
- un morphisme $\mathcal{T}^{(sc)} \to \mathcal{T}$ étendant $T^{(sc)} \to T$,
- un morphisme $\mathcal{T}^{(sc)} \to \mathcal{H}^{(sc)}$ étendant $T^{(sc)} \hookrightarrow H^{sc}$,
- un morphisme $\mathcal{T} \to \mathcal{H}$ étendant $T \hookrightarrow H$,
- un morphisme $\mathcal{H} \times_{U_0} \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ étendant l'action $H \times_K Y \to Y$ de H sur Y,

et tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^{(sc)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T} \arrow[d] \\
\mathcal{H}^{(sc)} \arrow[r] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On adopte en outre les notations suivantes :

- $\hat{\mathcal{T}}$ et $\hat{\mathcal{T}^{(sc)}}$ désignent les modules de caractères de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{(sc)}$,
- $\mathcal{G} = [\mathcal{T}^{(sc)} \to \mathcal{T}]$ et $\tilde{\mathcal{G}} = [\hat{\mathcal{T}} \to \hat{\mathcal{T}^{(sc)}}]$,
- U désigne un ouvert de U_0 tel que α se relève en un élément $\alpha_U \in H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y}))$ et tel que $\mathrm{ab}^1([Y])$ s'étend en un élément de $H^1(U, \mathcal{G})$,
- $\mathcal{E}_Y$ désigne la classe du morphisme naturel $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \to \mathbb{G}_m[2]$ dans le groupe $\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y})), \mathbb{G}_m[1])$,
- $C(\mathcal{H}) = [\mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H}^{(sc)})][-1]$ et $C(\mathcal{T}) = [\mathcal{KD}'(\mathcal{T}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{T}^{(sc)})][-1]$,
- $\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) = \mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}), \mathbb{G}_m[1]) \oplus \mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1])$ et $H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H})) = H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y})) \oplus H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{H}))$.

On dispose d'un diagramme commutatif d'accouplements :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}), \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y})) \arrow[r] \arrow[d] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) \arrow[u] \arrow[d] & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) \arrow[u] \arrow[d] & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{H})) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(C(\mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, C(\mathcal{H})) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(C(\mathcal{T}), \mathbb{G}_m[1]) \arrow[u] \arrow[d] & \times & H^1_c(U, C(\mathcal{T})) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\tilde{\mathcal{G}}, \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, \tilde{\mathcal{G}}) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, equal] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
H^1(U, \mathcal{G}) \arrow[u] & \times & H^1_c(U, \tilde{\mathcal{G}}) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont induits (du haut vers le bas) par :

- le morphisme $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})$ induit par le morphisme $\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ qui étend l'action de H sur Y,
- le morphisme naturel $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})$ induit par les projections,
- la projection $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H})$,
- le morphisme naturel $C(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H})$,

- le morphisme naturel $C(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{T})$,
- le morphisme $\tilde{\mathcal{G}} \to C(\mathcal{T})$ le morphisme induit par $\hat{\mathcal{T}} \cong [\mathbb{G}_m \to \pi_*^{\mathcal{T}}\mathbb{G}_m] \to \mathcal{KD}'(\mathcal{T})[-1]$ et par $\hat{\mathcal{T}^{(sc)}} \cong [\mathbb{G}_m \to \pi_*^{\mathcal{T}^{(sc)}}\mathbb{G}_m] \to \mathcal{KD}'(\mathcal{T}^{(sc)})[-1]$ (les identifications $\hat{\mathcal{T}} \cong [\mathbb{G}_m \to \pi_*^{\mathcal{T}}\mathbb{G}_m]$ et $\hat{\mathcal{T}^{(sc)}} \cong [\mathbb{G}_m \to \pi_*^{\mathcal{T}^{(sc)}}\mathbb{G}_m]$ découlent du lemme de Rosenlicht),
- l'accouplement $\mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{\mathcal{G}} \to \mathbb{G}_m[1]$.

De manière analogue à la proposition 3.3 de [HSz08], on peut montrer que :

$$\mathrm{BM}([Y],(\alpha)) = \mathcal{E}_Y \cup \alpha_U.$$

De plus, l'article [BvH09] établit que l'isomorphisme

$$H^1(K,G) \to \mathrm{Ext}^1_K(KD'(Y),\mathbb{G}_m[1])$$

envoie $\mathrm{ab}^1([Y])$ sur $-E_Y$, où E_Y désigne l'image de $\mathcal{E}_Y$ dans $\mathrm{Ext}^1_K(KD'(Y),\mathbb{G}_m[1])$ (théorème 5.5 de [BvH09]), et que les morphismes $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})$, $C(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H})$ et $\tilde{\mathcal{G}} \to C(\mathcal{T})$ deviennent des isomorphismes sur la fibre générique (lemmes 5.2, 4.3 et 4.2 de [BvH09]). Donc, quitte à diminuer U, on en déduit que :

$$\mathrm{PT}(\mathrm{ab}^1([Y]), B(\alpha)) = \pm \mathcal{E}_Y \cup \alpha_U = \pm \mathrm{BM}([Y],(\alpha)).$$

$\square$

Remarque 3.8. Pour établir la proposition 3.3 de [HSz08], on a besoin de donner une autre construction du morphisme $\mathrm{BM}([Y],.)$ à l'aide du lemme du serpent (lemme 3.1). Dans notre situation, dans la preuve précédente, pour montrer que $\mathrm{BM}([Y],(\alpha)) = \mathcal{E}_Y \cup \alpha_U$, il convient de remarquer que la même construction marche même si le morphisme $\mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(K_v)$ n'est pas injectif et son conoyau n'est pas isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: en fait, la loi de réciprocité de Weil (paragraphes 2 et 3 de l'annexe du chapitre II de [Ser02])) fournit un morphisme $\mathrm{Coker}(\mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(K_v)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et cela nous suffit.

Théorème 3.9. ***(Obstruction au principe local-global)***
On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$ et que H est un groupe réductif connexe sur $K = k(X)$. L'accouplement $BM : Ш^1(H) \times \overline{Б(H)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induit une bijection $Ш^1(H) \cong \overline{Б(H)}^D$.

Démonstration. Cela découle du lemme précédent, du corollaire 4.18(ii) du chapitre 1, et du fait que ab^1 est une bijection et que $B : Б(H) \to Ш^1(\tilde{G})$ est un isomorphisme. $\square$

Remarque 3.10. Comme la cohomologie d'un groupe unipotent sur un corps de caractéristique 0 est triviale, en quotientant par le radical unipotent, on voit que le théorème précédent reste valable pour un groupe algébrique linéaire connexe quelconque.

Corollaire 3.11. *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. Soit H un groupe linéaire connexe quelconque sur K. La seule obstruction au principe local-global pour les K-espaces principaux homogènes sous H est l'obstruction de Brauer-Manin associée à $Б(H)$.*

Remarque 3.12. • Ce corollaire découle uniquement de la non-dégénérescence à gauche de l'accouplement BM : les résultats de l'article [CTH15] étaient donc déjà suffisants pour l'établir.
• Il est probable que les mêmes techniques permettent d'étudier les espaces homogènes à stabilisateurs connexes.

Cas $d = 1$

Dans cette section, on suppose que $k = \mathbb{C}((t_1))((t_2))$ (le cas où k est p-adique a été traité dans la partie 6 de [HSz16]). Soit H un groupe réductif sur K tel que H^{sc} est quasi-déployé. On suppose de plus que :
• le groupe $Ш^2(\mathbb{Z})$ est nul,
• le groupe H est déployé sur une extension finie galoisienne L de K (ie H possède un tore maximal qui devient déployé sur L) telle que $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$.

Remarque 3.13. (i) L'hypothèse $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$ implique que $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$, mais la réciproque est fausse. En effet :
  • si $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$, un argument de restriction-corestriction montre que $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est d'exposant fini ; comme il est divisible, il est nul ;
  • pour voir que la réciproque est fausse, il suffit de choisir $K = \mathbb{C}((t_1))((t_2))(x)$ et L la clôture galoisienne d'une extension finie L' de K telle que $Ш^2(L', \mathbb{G}_m) \neq 0$ (cela est possible grâce à l'exemple 1.17).

  De même, si $Ш^2(L, \mathbb{Z}) = 0$, alors $Ш^2(\mathbb{Z}) = 0$, mais la réciproque est fausse.

(ii) Les nullités de $Ш^2(\mathbb{Z})$ et de $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$ ont été étudiées dans la section 1.

Soit E un espace principal homogène sous H tel que $E(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. Comme dans la partie 3.1, on peut construire un morphisme $\rho_E : H^3_{\text{lc}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Exactement de la même manière que dans la partie 6 de [HSz16], on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 3.14. *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t_1))((t_2))$. Si H^{sc} n'a pas de facteur E_8 et si ρ_E est le morphisme trivial, alors $E(K) \neq \emptyset$. Si H^{sc} est de type E_8 et si ρ_E est le morphisme trivial, alors E possède un zéro-cycle de degré 1.*

Remarque 3.15. (i) La preuve fait appel à l'invariant de Rost. En particulier, on utilise les deux résultats suivants :
  • pour H' un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé sur un corps K' de dimension cohomologique au plus 3, si H' n'est pas de type E_8, le noyau de l'invariant de Rost $H^1(K', H') \to H^3(K', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est trivial (théorème 5.3 de [CTPS12]) ;

- pour H' un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé de type E_8 sur un corps K' de dimension cohomologique au plus 4, tout torseur sous H' représentant une classe du noyau de l'invariant de Rost $H^1(K',H') \to H^3(K',\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ admet un zéro-cycle de degré 1 ([Che94], [Che10], [Sem16]).

(ii) La nullité de $Ш^2(\mathbb{Z})$ est utilisée pour établir un résultat analogue à la proposition 6.2 de [HSz16], ou plus précisément pour montrer l'injectivité du morphisme $H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^3(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$: le noyau de $H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^3(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est isomorphe à $Ш^4(\mathbb{Z}(2))$, qui est nul si, et seulement si, $Ш^2(\mathbb{Z})$ l'est d'après une variante du lemme 3.20 du chapitre 1.

(iii) La nullité du $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ permet de calculer la cohomologie des tores quasi-triviaux. Plus précisément, dans la partie 6 de [HSz16], on a besoin de considérer une z-extension (suite exacte (37)) faisant intervenir un tore quasi-trivial Q. Il se trouve qu'avec le choix que nous avons fait du corps L, on peut supposer que le module des caractères de Q est un $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-module libre (proposition 3.1 de [MS82]). Comme $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul, cela permet d'établir avec le lemme de Shapiro que $Ш^2(Q)$ et $Ш^3(\tilde{Q})$ sont nuls.

Cas $d > 1$

Dans cette section, on suppose que $d > 1$. Soit H un groupe réductif sur K tel que H^{sc} est quasi-déployé. Soit L une extension finie galoisienne de K telle que H contient un tore maximal déployé sur L. On suppose que $Ш^4(\mathbb{Z}(2)) = 0$ et que $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$.

Remarque 3.16. La nullité de $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ a été étudiée dans la section 1.

Soit E un espace principal homogène sous H tel que $E(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. Comme dans la partie 3.1, on peut construire un morphisme $\rho_E : H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On peut alors montrer le théorème suivant :

Théorème 3.17. *On rappelle que l'on a supposé que $d > 1$.*

(i) Si ρ_E est le morphisme trivial et si H^{sc} ne contient que des facteurs de type A_n avec $n \leq 5$, B_n avec $n \leq 6$, C_n avec $n \leq 5$, D_n avec $n \leq 6$, ${}^1D_7$, E_6, E_7, F_4, G_2, alors $E(K) \neq \emptyset$.

(ii) Si $d = 2$, ρ_E est le morphisme trivial et H^{sc} est de type E_8, alors E possède un zéro-cycle de degré 1.

La preuve est très similaire à celle du théorème 6.1 de [HSz16] mais présente quelques différences que nous signalons dans la suite.

Démonstration. (Esquisse)

- Comme le noyau de l'invariant de Rost d'un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé de type A_n avec $n \leq 5$, B_n avec $n \leq 6$, C_n avec $n \leq 5$, D_n avec $n \leq 6$, ${}^1D_7$, E_6, E_7, F_4 ou G_2 est trivial (théorèmes 0.1 et 0.5 de [Gar01]) et comme tout torseur dans le noyau de l'invariant de Rost d'un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé de type E_8 sur un corps de dimension cohomologique au plus 4 a un zéro-cycle de degré 1 ([Che94], [Che10], [Sem16]), on montre la propriété suivante exactement de la même manière que la proposition 6.2 de [HSz16] : sous les hypothèses de (i), le noyau de $H^1(K,H^{sc}) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,H^{sc}))$ est trivial ; sous les hypothèses de (ii), tout torseur sous H^{sc} représentant un élément de $\mathrm{Ker}(H^1(K,H^{sc}) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,H^{sc}))$ possède un zéro-cycle de degré 1. Dans la preuve de ces résultats, l'injectivité de $H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^3(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ découle de la nullité de $Ш^4(\mathbb{Z}(2))$.

- On considère une z-extension de H :

$$1 \to Q \to H_z \to H \to 1.$$

C'est une extension centrale de K-groupes réductifs, Q est un tore quasi-trivial dont le module des caractères est un module libre sur l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$, et le sous-groupe dérivé H_z^{ss} de H_z est H^{sc}. Comme H_z est réductif, on dispose aussi d'une suite exacte $1 \to H^{sc} \to H_z \to H_z/H^{sc} \to 1$ où H_z/H^{sc} est un tore. On prouve alors de la même manière que le lemme 6.4 et la proposition 6.5 de [HSz16] le résultat suivant : le morphisme naturel d'ensembles pointés $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H)$ est un isomorphisme, et le noyau du morphisme naturel d'ensembles pointés $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H_z/H^{sc})$ est trivial. Pour ce faire, il est nécessaire de montrer que $Ш^2(Q)$ est nul : cela découle immédiatement du lemme de Shapiro, du fait que $\hat{Q}$ est un $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-module libre et de la nullité de $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$. On notera E_z un torseur sous H_z représentant l'image réciproque de E par l'isomorphisme $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H)$, et Y un torseur représentant l'image de E_z par $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H_z/H^{sc})$.

- On note T (resp. T_z) un tore maximal de H (resp. H_z). On note $T^{(sc)}$ (resp. $T_z^{(sc)}$) l'image réciproque de T (resp. T_z) dans H^{sc} (resp. H_z^{sc}). On note finalement $G = [T^{(sc)} \to T]$ et $G_z = [T_z^{(sc)} \to T_z]$. Le lemme 6.7 de [San81] fournit un isomorphisme $H^1(\overline{E},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong H^1(\overline{H},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ et donc un isomorphisme $H^1(\overline{E},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_K(\check{T}/\check{T^{(sc)}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ d'après la proposition 6.7 de [CT08]. Comme $\check{T^{(sc)}} \to \check{T}$ est injectif, on obtient ainsi un isomorphisme :

$$\begin{aligned} H^1(\overline{E},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) &\cong \underline{\mathrm{Hom}}_K(\check{T}/\check{T^{(sc)}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \\ &\cong H^0\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_K([\check{T^{(sc)}} \to \check{T}],\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)). \end{aligned}$$

On a alors un morphisme naturel $H^0(\tilde{G}_t[-1]) \to H^1(\overline{E},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$ induit par l'accouplement $[\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}} [\check{T^{(sc)}} \to \check{T}] \to \mathbb{Z}[1]$ construit dans la preuve du lemme 4.3 du chapitre 1. Comme le conoyau de $\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}$ est fini, $\tilde{G}_t[-1]$ est concentré en degré 0, et on a une suite exacte :

$$\begin{aligned} H^{d+1}(K,[\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]) \to H^{d+1}(K,\tilde{G}_t[-1]) \to H^{d+2}(K,\tilde{G}[-1]) \\ \to H^{d+2}(K,[\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]). \end{aligned}$$

Montrons que $H^{d+1}(K,[\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1])$ est nul. Pour ce faire, on dispose de la suite exacte $H^{d+1}(K,\mathrm{Ker}(\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)) \to H^{d+1}(K,[\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}}$

$\mathbb{Q}(d)[-1]) \to H^{d+1}(K, \mathrm{Coker}(\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1])$. Le troisième terme est nul car $\mathrm{Coker}(\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}})$ est fini. Quant au premier, il est divisible et le lemme 4.1 du chapitre 1 montre qu'il est d'exposant fini. Il est donc nul, et à fortiori le groupe $H^{d+1}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1])$ l'est aussi.
On montre de même que $H^{d+2}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(sc)}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]) = 0$, et on obtient donc un isomorphisme :

$$H^{d+1}(K, \tilde{G}_t[-1]) \cong H^{d+2}(K, \tilde{G}[-1]),$$

qui permet de construire par composition un morphisme :

$$H^{d+2}(K, \tilde{G}[-1]) \to H^{d+1}(K, H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))).$$

En composant avec le morphisme

$$H^{d+1}(K, H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \to H^{d+2}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)),$$

on obtient un morphisme :

$$H^{d+1}(K, \tilde{G}) \to H^{d+2}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

En passant aux éléments localement triviaux, cela induit un morphisme :

$$Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

De même, on a des morphismes :

$$Ш^{d+1}(\tilde{G}_z) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E_z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)),$$

$$Ш^{d+2}((H_z/H^{sc})^{\sim}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

En exploitant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Ш^{d+2}((H_z/H^{sc})^{\sim}) \arrow[r] \arrow[d] & Ш^{d+1}(\tilde{G}_z) \arrow[d] & Ш^{d+1}(\tilde{G}) \arrow[l] \arrow[d] \\
H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_Y"] & H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E_z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \arrow[d, "\rho_{E_z}"] & H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \arrow[l] \arrow[d, "\rho_E"] \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

on voit que, si le morphisme $Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to Ш^{d+1}(\tilde{G}_z)$ est un isomorphisme, alors la composée $Ш^{d+2}((H_z/H^{sc})^{\sim}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \stackrel{\rho_Y}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est nulle, et donc d'après la remarque 3.2, le torseur Y est trivial : le noyau de $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H_z/H^{sc})$ étant trivial et le morphisme d'ensembles pointés $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H)$ étant un isomorphisme, on en déduit que le torseur E est trivial. Il suffit donc de montrer que le morphisme $Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to Ш^{d+1}(\tilde{G}_z)$ est un isomorphisme.
Pour ce faire, on écrit le triangle distingué $\tilde{G} \to \tilde{G}_z \to \tilde{Q}[1] \to \tilde{G}[1]$. Comme Q

est quasi-trivial, le lemme de Shapiro et la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum imposent que $H^{d+1}(K, \tilde{Q}) = H^{d+1}(K_v, \tilde{Q}) = 0$. De plus, en utilisant toujours le lemme de Shapiro et le fait que $\hat{Q}$ est un $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-module libre, on a $Ш^{d+2}(\tilde{Q}) = Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d))^m$ pour un certain m, qui est nul d'après le lemme 3.20 du chapitre 1 puisque $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$. Par conséquent, le morphisme $Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to Ш^{d+1}(\tilde{G}_z)$ est bien un isomorphisme, ce qui achève la preuve.

□

Remarque 3.18. Dans le cas $d = 2$, on n'a pas besoin de supposer que $Ш^4(\mathbb{Z}(2)) = 0$. En effet, comme $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$, un argument de restriction-corestriction montre que $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$, et donc, en vertu du lemme 3.20 du chapitre 1, $Ш^4(\mathbb{Z}(2))$ est automatiquement nul. En particulier, dans ce cas, il suffit de supposer que le corps L vérifie les hypothèses du corollaire 1.11 ou du corollaire 1.12.

3

Variétés abéliennes sur les corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs

0 Introduction

0.1 Contexte et motivations

Dans le premier chapitre de la thèse, nous avons établi des théorèmes de dualité arithmétique pour les modules finis, les tores et les groupes de type multiplicatif sur des corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs. L'objectif de ce troisième chapitre de la thèse est d'obtenir aussi des théorèmes de dualité pour les variétés abéliennes. Commençons par rappeler brièvement les résultats portant sur ces dernières dans le cas classique des corps p-adiques et des corps de nombres.

Dans le cadre local, Tate montre en 1958, dans l'exposé [Tat58], qu'étant donnée une variété abélienne A sur un corps p-adique k de variété abélienne duale A^t, il existe un accouplement canonique $H^0(k,A)\times H^1(k,A^t) \to \mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui met en dualité parfaite le groupe profini $H^0(k,A)$ et le groupe de torsion $H^1(k,A^t)$. Dans le cadre global, en généralisant des travaux de Cassels pour les courbes elliptiques, il construit pour chaque variété abélienne A sur un corps de nombres K de variété duale A^t un accouplement $Ш^1(K,A) \times Ш^1(K,A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ puis annonce au Congrès International des Mathématiciens de 1962 ([Tat63]) la non-dégénérescence de ce dernier modulo divisibles. Ici, $Ш^1(K,A)$ désigne le groupe de Tate-Shafarevich constitué des classes d'isomorphismes de torseurs sous A triviales dans tous les complétés de K. Des résultats analogues ont aussi été établis pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{F}_p((u))$ et sur $\mathbb{F}_p(u)$ (Remarque I.3.6 et Théorème I.6.13 de [Mil06]).

Avant cette thèse, très peu de résultats étaient connus (du point de vue de la dualité) pour les variétés abéliennes sur des corps de fonctions de courbes définies sur des corps infinis. En fait, à ma connaissance, on ne disposait que de résultats pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((u))$ et $\mathbb{C}(u)$: cela remonte à des travaux de Ogg dans les années 1960 ([Ogg62]). Le but de ce chapitre est donc d'établir des théorèmes de dualité, analogues à ceux de Tate rappelés ci-dessus, pour les variétés abéliennes sur les corps de la forme $k((u))$ et $k(u)$ avec $k = \mathbb{Q}_p$ ou $k = \mathbb{C}((t))$, voire avec $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ ou $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_d))$.

Remarque 0.1. Il est vrai qu'on peut déjà trouver des résultats similaires pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ dans [Koy00], mais l'article en question contient un grand nombre d'erreurs et soit le théorème principal soit la principale proposition permettant de le prouver semble erroné (voir la remarque 5.19).

0.2 Notations supplémentaires

Faisceaux et cohomologie. Soit $r \geq 0$. Pour F et G deux faisceaux fppf sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(F,G)$ (ou $\underline{\mathrm{Ext}}^r(F,G)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) le faisceau associé pour la topologie étale au préfaisceau $T \mapsto \mathrm{Ext}^r_{T_{fppf}}(F,G)$. On rappelle qu'avec cette définition, la formule de Barsotti-Weil garantit que, si A est une variété abélienne sur un corps k, alors la variété abélienne duale A^t représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A,\mathbb{G}_m)$ (voir par exemple le théorème III.18.1 de [Oor66]). Par ailleurs, en mimant les notations pour les groupes abéliens, on pose, pour F un faisceau sur un schéma X et l un nombre premier, $H^r(X,T_lF) = \varprojlim_n H^r(X, {}_{l^n}F)$ et $H^r(X,F\{l\}) = \varinjlim_n H^r(X, {}_{l^n}F)$.

Cadre. Dans tout le chapitre, d désignera un entier naturel fixé (éventuellement nul), k un corps d-local et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On notera K son corps des fonctions. *Lorsque k_0 est fini, on supposera que le corps k_1 est de caractéristique 0* : autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et k_1 est un corps p-adique. Lorsque M est un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret, on notera parfois $Ш^r(M)$ au lieu de $Ш^r(K,M)$.

Cohomologie à support compact. Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, le r-ième groupe de cohomologie à support compact est, par définition, le groupe $H^r_c(U,\mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$.

0.3 Organisation du chapitre

Ce chapitre est constitué de 7 sections.

La première partie permet de faire quelques rappels et d'établir quelques résultats préliminaires. On y étudie notamment la cohomologie des tores sur le corps d-local k.

La deuxième partie porte sur les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et sur $\mathbb{C}((t_0))(t)$. Voici les principaux résultats obtenus :

Théorème 0.2. *(théorèmes 2.3, 2.12 et 2.23 et corollaire 2.25)*
(i) Supposons que $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et que A une variété abélienne sur k. Soit A^t sa variété abélienne duale. Les groupes $H^1(k, A)$ et $(H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ sont isomorphes modulo divisibles. Plus précisément, on a un morphisme naturel $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ qui s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D \to 0,$$

où $m(A)$ est un entier naturel compris entre 0 et $4 \dim A$ dépendant de la géométrie de A. L'entier $m(A)$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne sur $\mathbb{C}((t_0))$ apparaissant dans la réduction du modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A modulo t_1 a réduction purement additive. Lorsque la fibre spéciale de $\mathcal{A}$ est connexe, le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est un groupe contenant $H^1_{nr}(k, A)$ qui peut être décrit explicitement : on le note $H^1_{nrs}(k, A)$.
(ii) Supposons que $k = \mathbb{C}((t_0))$. Soit A une variété abélienne sur $K = k(X)$, de variété abélienne duale A^t. Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que $m(A \times_K K_v) = 0$. On suppose que, pour toute place $v \in X^{(1)} \setminus Z$, la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$ est connexe, et on pose :

$$Ш^1_{nrs}(A) := Ker\left(H^1(K, A) \to \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v, A)/H^1_{nrs}(K_v, A) \times \prod_{v \in Z} H^1(K_v, A)\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A^t) := Ker\left(H^1(K, A^t) \to \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v, A^t)/H^1_{nrs}(K_v, A^t) \times \prod_{v \in Z} H^1(K_v, A^t)\right).$$

On remarquera que $Ш^1(K, A) \subseteq Ш^1_{nrs}(A)$ et que $Ш^1(K, A^t) \subseteq Ш^1_{nrs}(A^t)$. Alors, pour chaque nombre premier ℓ, il existe une dualité parfaite de groupes finis :

$$\overline{Ш^1(K, A)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ainsi qu'un accouplement $Ш^1(K, A) \times Ш^1(K, A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont le noyau à gauche (resp. à droite) est constitué des éléments de $Ш^1(K, A)$ (resp. $Ш^1(K, A^t)$) qui sont divisibles dans $Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $Ш^1_{nrs}(A^t)$).

Remarque 0.3. L'énoncé précédent est moins général que les énoncés qui seront démontrés dans la suite : il est en fait possible d'affaiblir l'hypothèse de connexité des fibres spéciales des modèles de Néron. On remarquera aussi que l'hypothèse ne concerne que les places de mauvaise réduction.

Les parties 3 et 5 sont consacrées à une généralisation de (i) du théorème 0.2 aux variétés abéliennes sur le corps d-local k (sans supposer que $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$). Plus précisément, elles permettent de construire un accouplement entre la cohomologie d'une variété abélienne et la cohomologie d'un certain faisceau qui lui est associé puis :

- de démontrer que ledit accouplement induit toujours une dualité parfaite modulo divisibles (corollaires 3.1 et 5.4 et théorèmes 3.5 et 5.7),
- de déterminer quand c'est un accouplement parfait (sans quotienter par les sous-groupes divisbles) (corollaire 3.17, théorèmes 3.18, 5.18 et 5.22 et proposition 5.20),
- de calculer dans certains cas les noyaux à gauche et à droite de l'accouplement (théorèmes 3.25 et 5.30).

Les parties 4 et 6 sont consacrées à une généralisation de (ii) du théorème 0.2 aux variétés abéliennes sur le corps $K = k(X)$ lorsque k n'est pas forcément $\mathbb{C}((t_0))$ (théorèmes 4.8, 6.9 et 6.15 et corollaires 4.9 et 6.16).

Finalement, dans la septième partie, on s'intéresse à la finitude du premier groupe de Tate-Shafarevich d'une variété abélienne sur $K = k(X)$.

1 Préliminaires

1.1 Groupes de torsion de type cofini

Dans ce chapitre de la thèse, nous étudierons souvent la structure des groupes de cohomologie par des arguments de comptage. Ainsi, les lemmes qui suivent, qui ne sont que des exercices d'algèbre élémentaire, seront utilisés très souvent sans référence explicite. On rappelle qu'un groupe abélien de torsion est de type cofini si son sous-groupe de n-torsion est fini pour tout $n \geq 1$.

Lemme 1.1. *(Théorème 25.1 de [Fuc70])*
Soit A un groupe de torsion de type cofini. Pour chaque nombre premier ℓ, il existe un groupe fini F_ℓ et un entier naturel r_ℓ tels que $A\{\ell\} \cong F_\ell \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{r_\ell}$.

Lemme 1.2. *Avec les notations du lemme précédent, pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\frac{|{}_nA|}{|A/n|} = \prod_\ell \ell^{r_\ell v_\ell(n)}.$$

Ici, $v_\ell(n)$ désigne la valuation ℓ-adique de n.

Lemme 1.3. *Soient A et A' deux groupes de torsion de type cofini. Si $|{}_nA| = |{}_nA'|$ pour tout entier naturel n, alors A et A' sont (non canoniquement) isomorphes.*

1.2 Caractéristique d'Euler-Poincaré

On rappelle brièvement la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré :

Définition 1.4. ***(Caractéristique d'Euler-Poincaré)***
On rappelle que k est un corps d-local. Soit F un $Gal(k^s/k)$-module fini. La ***ca-***

ractéristique d'Euler-Poincaré *de F est :*

$$\chi(k,F) = \prod_{r=0}^{\infty} |H^r(k,F)|^{(-1)^r}.$$

Cette quantité est bien définie car $H^r(k,F)$ est fini pour chaque $r \geq 0$ et k est de dimension cohomologique finie (égale à $d+1$).

Proposition 1.5. *Soit F un $Gal(k^s/k)$-module fini.*
(i) Si k_0 est fini et $d \geq 2$, alors $\chi(k,F)=1$.
(ii) Si $k_0 = \mathbb{C}((t))$, alors $\chi(k,F)=1$.

Démonstration. (i) Notons κ le corps résiduel de k et procédons par récurrence sur d.

- Supposons que $d=2$. On dispose de la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^r(\kappa, H^s(k^{nr},F)) \Rightarrow H^{r+s}(k,F)$, qui dégénère en une suite exacte longue :

$$... \rightarrow H^r(\kappa, H^0(k^{nr},F)) \rightarrow H^r(k,F) \rightarrow H^{r-1}(\kappa, H^1(k^{nr},F)) \rightarrow ...$$

  On a donc $\chi(k,F) = \frac{\chi(\kappa,H^0(k^{nr},F))}{\chi(\kappa,H^1(k^{nr},F))}$. Or $H^0(k^{nr},F)$ et $H^1(k^{nr},F)$ ont même cardinal puisque $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (cela découle aisément de la proposition 1.7.7(i) de [NSW08]). Par conséquent, d'après le théorème I.2.8 de [Mil06], on a $\chi(\kappa, H^0(k^{nr},F)) = \chi(\kappa, H^1(k^{nr},F))$, et donc $\chi(k,F)=1$.
- Soit $d>2$ et supposons que la proposition soit vraie pour tout corps $(d-1)$-local. Comme avant, la suite spectrale $H^r(\kappa, H^s(k^{nr},F)) \Rightarrow H^{r+s}(k,F)$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \rightarrow H^r(\kappa, H^0(k^{nr},F)) \rightarrow H^r(k,F) \rightarrow H^{r-1}(\kappa, H^1(k^{nr},F)) \rightarrow ...$$

  On a donc $\chi(k,F) = \frac{\chi(\kappa,H^0(k^{nr},F))}{\chi(\kappa,H^1(k^{nr},F))}$. Par hypothèse de récurrence, on a l'égalité $\chi(\kappa, H^0(k^{nr},F)) = \chi(\kappa, H^1(k^{nr},F)) = 1$, et donc $\chi(k,F)=1$.

(ii) L'énoncé est vrai pour $d=0$ puisque $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}((t))^s/\mathbb{C}((t))) \cong \hat{\mathbb{Z}}$. On procède ensuite par récurrence comme dans (i).

□

1.3 Tores algébriques

Dans ce paragraphe, nous allons calculer le sous-groupe divisible maximal de $H^r(k,T)$ pour T un k-tore et r un entier naturel. Pour ce faire, on commence par rappeler le lemme d'Ono, qui sera utilisé à de nombreuses reprises :

Lemme 1.6. ***(Lemme d'Ono - théorème 1.5.1 de [Ono61])***
Soient l un corps et T un tore sur l. Il existe un entier naturel non nul m, des l-tores quasi-triviaux T_0 et R et un l-schéma en groupes fini commutatif F tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow R \rightarrow T^m \times_l T_0 \rightarrow 0.$$

Cas où $k_0 = \mathbb{C}((t))$

Nous nous plaçons d'abord dans le cas, plus simple, où $k_0 = \mathbb{C}((t))$.

Lemme 1.7. *Pour chaque entier naturel non nul n, l'ordre de $H^1(k, \mu_n)$ est n^{d+1}.*

Démonstration. On procède par récurrence sur d. Pour $d = 0$, le lemme est clairement vrai. Supposons-le prouvé pour un certain d, et considérons un corps $(d+1)$-local k avec $k_0 = \mathbb{C}((t))$. En notant κ le corps résiduel de k, on a une suite exacte (paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser02]) :

$$0 \to H^1(\kappa, \mu_n) \to H^1(k, \mu_n) \to H^0(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

Comme κ est d-local, l'hypothèse de récurrence impose que $|H^1(\kappa, \mu_n)| = n^{d+1}$, et donc $|H^1(k, \mu_n)| = n|H^1(\kappa, \mu_n)| = n^{d+2}$. □

Proposition 1.8. *Soient T un tore sur k et ρ son rang. On a alors pour chaque entier naturel non nul n :*

$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}.$$

Démonstration. • Le lemme 1.7 implique que :

$$\frac{|{}_n\mathbb{G}_m(k)|}{|\mathbb{G}_m(k)/n|} = \frac{|H^0(k, \mu_n)|}{|H^1(k, \mu_n)|} = \frac{n}{|H^1(k, \mu_n)|} = n^{-d}.$$

Cela montre que la proposition est vraie pour $T = \mathbb{G}_m$, et donc aussi pour tout tore quasi-trivial d'après le lemme de Shapiro.

• On se place maintenant dans le cas général, où T est un tore quelconque. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Notons ρ_R le rang de R. En passant à la cohomologie et en appliquant le lemme de Shapiro et le théorème de Hilbert 90, on obtient une suite exacte :

$$0 \to F(k) \to R(k) \to T(k)^m \times T_0(k) \to H^1(k, F) \to 0.$$

Comme F est fini, les groupes $F(k)$ et $H^1(k, F)$ sont finis. On déduit alors du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)/n|} = \frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)/n|}.$$

Or nous avons montré que $\frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)/n|} = n^{-d(\rho_R - \rho m)}$ et $\frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)/n|} = n^{-d\rho_R}$, puisque T_0 et R sont des tores quasi-triviaux de rangs respectifs $\rho_R - \rho m$ et ρ_R. On en déduit que $\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}$.

□

Proposition 1.9. *Soit T un tore de rang ρ sur k. On a alors pour chaque entier naturel non nul n :*
$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|} = n^\rho.$$

Démonstration. • La propriété est évidente pour $T = \mathbb{G}_m$. Elle est donc aussi vraie pour tout tore quasi-trivial.

• On se place maintenant dans le cas général. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :
$$0 \to F \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$
avec F un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Comme $F(k^s)$ est fini, on déduit une suite exacte :
$$0 \to F(k^s)_{tors} \to R(k^s)_{tors} \to T^m(k^s)_{tors} \times T_0(k^s)_{tors} \to 0.$$
En passant à la cohomologie, on obtient l'exactitude de :
$$0 \to F(k)_{tors} \to R(k)_{tors} \to T(k)^m_{tors} \times T_0(k)_{tors} \to H^1(k, F(k^s)_{tors}).$$
Or $F(k^s)_{tors}$ est fini. Donc il en est de même du groupe $H^1(k, F(k^s)_{tors})$, et il existe une suite exacte :
$$0 \to F(k)_{tors} \to R(k)_{tors} \to T(k)^m_{tors} \times T_0(k)_{tors} \to Q \to 0,$$
où Q est fini. On déduit du lemme du serpent que :
$$\left(\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)_{tors}/n|} = \frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)_{tors}/n|}.$$
Or, en notant ρ_R le rang de R, nous avons montré que $\frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)_{tors}/n|} = n^{\rho_R - \rho m}$ et $\frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)_{tors}/n|} = n^{\rho_R}$. On en déduit que $\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^\rho$.

□

Remarque 1.10. Comme $T(k)_{tors}$ est un groupe de torsion de type cofini, on déduit de la proposition précédente que $T(k)_{tors} \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\rho$ pour un certain groupe abélien F dépendant de T tel que, pour chaque nombre premier ℓ, la torsion ℓ-primaire de F est finie. On peut en fait montrer que F est fini. En effet, si $x \in F$ et L est une extension finie galoisienne de k déployant T, on remarque que x est divisible dans $T(L)_{tors}$. Par conséquent, $[L : k]x$ est divisible dans $T(k)_{tors}$. Comme $[L : k]x \in F$, on déduit que x est de $[L : k]$-torsion, ce qui montre que F est d'exposant fini, donc fini.

Proposition 1.11. *Soit T un tore de rang ρ sur k. Soit $r \geq 1$. On note $c_{r,d} = 0$ si $r = 1$ et $c_{r,d} = \binom{d+1}{r}$ si $r > 1$. Il existe un groupe abélien fini F (qui dépend de r et de T) tel que :*
$$H^r(k, T) \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_{r,d} \cdot \rho}.$$
De plus, si $T = \mathbb{G}_m$ (ou si T est quasi-trivial), alors $F = 0$.

Démonstration. On procède en deux étapes :

(A) Montrons d'abord la proposition pour $T = \mathbb{G}_m$ en procédant par double récurrence sur d et r. Pour $d = 0$, la proposition est vraie par le théorème de Hilbert 90 et par dimension cohomologique. Supposons-la donc vraie pour un certain $d \geq 0$, et considérons k un corps $d+1$-local.

- Pour $r = 1$, on a bien $H^1(k, \mathbb{G}_m) = 0$ par le théorème de Hilbert 90.
- Pour $r = 2$, si l'on note κ le corps résiduel de k, on a pour chaque $n \geq 1$ la suite exacte (voir le paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser02]) :

$$0 \to H^2(\kappa, \mu_n) \to H^2(k, \mu_n) \to H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

  Comme $H^2(\kappa, \mu_n) = {}_nH^2(\kappa, \mathbb{G}_m)$, $H^2(k, \mu_n) = {}_nH^2(k, \mathbb{G}_m)$ et $|H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = n^{d+1}$ d'après le lemme 1.7, on obtient que $|{}_nH^2(k, \mathbb{G}_m)| = n^{d+1}|{}_nH^2(\kappa, \mathbb{G}_m)| = n^{d+1+\binom{d+1}{2}} = n^{\binom{d+2}{2}}$. On en déduit que $H^2(k, \mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{2}}$ d'après le lemme 1.3.
- Supposons que l'on ait montré que $H^r(k, \mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{r}}$ pour un certain $r \geq 2$. On a alors la suite exacte :

$$0 \to H^{r+1}(\kappa, \mu_n) \to H^{r+1}(k, \mu_n) \to H^r(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

  Par hypothèse de récurrence, les groupes $H^r(\kappa, \mathbb{G}_m)$, $H^r(k, \mathbb{G}_m)$ et $H^{r-1}(\kappa, \mathbb{G}_m)$ sont divisibles, et donc on a $H^{r+1}(\kappa, \mu_n) = {}_nH^{r+1}(\kappa, \mathbb{G}_m)$, $H^{r+1}(k, \mu_n) = {}_nH^{r+1}(k, \mathbb{G}_m)$ et $H^r(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^r(\kappa, \mu_n) = {}_nH^r(\kappa, \mathbb{G}_m)$. On en déduit, toujours à l'aide de l'hypothèse de récurrence, que $|{}_nH^{r+1}(k, \mathbb{G}_m)| = n^{\binom{d+1}{r+1}+\binom{d+1}{r}} = n^{\binom{d+2}{r+1}}$, et donc que $H^{r+1}(k, \mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{r+1}}$.

Cela achève la démonstration de la proposition pour $T = \mathbb{G}_m$. Le lemme de Shapiro montre alors que la proposition est vraie pour tout tore quasi-trivial.

(B) On se place maintenant dans le cas général. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F_0 \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F_0 un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Notons ρ_R le rang de R. En passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte :

$$H^r(k, F_0) \to H^r(k, R) \to H^r(k, T)^m \times H^r(k, T_0) \to H^{r+1}(k, F_0).$$

Comme F_0 est fini, on déduit du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nH^r(k,T_0)|}{|H^r(k,T_0)/n|} = \frac{|{}_nH^r(k,R)|}{|H^r(k,R)/n|}.$$

Par conséquent, comme le rang de T_0 est $\rho_R - m\rho$:

$$\left(\frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|}\right)^m = n^{c_{r,d}(-\rho_R+m\rho)} n^{c_{r,d}\cdot\rho_R} = n^{mc_{r,d}\cdot\rho},$$

et on a $\frac{|_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|} = n^{c_{r,d}\cdot\rho}$. On en déduit que $H^r(k,T) \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_{r,d}\cdot\rho}$ pour un certain groupe abélien F tel que, pour chaque premier ℓ, la partie ℓ-primaire de F est finie. Soit L une extension finie galoisienne de k déployant T. Alors, comme $H^r(L,\mathbb{G}_m)$ est divisible, un argument de restriction-corestriction montre que tout élément de $[L:k]F$ est divisible. Par conséquent, $[L:k]F = 0$, et F est fini.

□

Proposition 1.12. *Soit T un tore de rang ρ sur k. On a alors pour chaque entier naturel naturel non nul n :*

$$\frac{|_nH^1(k,T(k^s)_{tors})|}{|H^1(k,T(k^s)_{tors})/n|} = n^{(d+1)\rho}.$$

Démonstration. Pour $T = \mathbb{G}_m$, on a $H^1(k,\mu_n) = {}_nH^1(k,\mathbb{G}_m(k^s)_{tors})$, et donc $H^1(k,\mathbb{G}_m(k^s)_{tors}) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{d+1}$ d'après le lemme 1.7. La formule est donc vraie pour les tores quasi-triviaux. En procédant comme dans les propositions précédentes, on obtient le résultat désiré. □

Cas où k_1 est un corps p-adique

On se place maintemant dans le cas où k_0 est un corps fini de caractéristique p, et on rappelle que l'on a supposé que k_1 est un corps p-adique.

Lemme 1.13. *Pour chaque entier naturel non nul n, l'ordre de $H^1(k,\mu_n)$ est :*

$$n^d \cdot |\mu_n(k_1)| \cdot p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

Démonstration. En procédant exactement comme dans le lemme 1.7, on a l'égalité $|H^1(k,\mu_n)| = n^{d-1}\cdot|H^1(k_1,\mu_n)|$. En utilisant alors le théorème I.2.8 de [Mil06] et la dualité de Tate sur k_1, on obtient :

$$|H^1(k,\mu_n)| = n^{d-1}\cdot|H^0(k_1,\mu_n)|\cdot|H^2(k_1,\mu_n)|\cdot p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)} = n^d\cdot|\mu_n(k_1)|\cdot p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

□

Proposition 1.14. *Soit T un k-tore de rang ρ.*
(i) Pour chaque entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{|_n\mathbb{G}_m(k)|}{|\mathbb{G}_m(k)/n|} = n^{-d}\cdot p^{-[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

(ii) Pour chaque entier naturel n non divisible par p :

$$\frac{|_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}.$$

(iii) Si $d=1$ (c'est-à-dire k est p-adique), alors pour chaque entier naturel non nul n :

$$\frac{|_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-\rho}\cdot p^{-[k:\mathbb{Q}_p]\dim T\cdot v_p(n)}.$$

Démonstration. Pour (i), il suffit d'appliquer le lemme 1.13 et de remarquer que $|\mu_n(k)| = |\mu_n(k_1)|$. Pour (ii) et (iii), les preuves sont analogues à celle de la proposition 1.8. $\square$

Remarque 1.15. On a $\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|} = 1$ pour tout tore T et tout entier naturel n non nul puisque $T(k)_{tors}$ est fini.

Proposition 1.16. *Soit T un k-tore de rang ρ.*
(i) Pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, ℓ un nombre premier différent de p et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^t}H^r(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(i))|}{|H^r(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(i))/\ell^t|} = \begin{cases} \ell^{t\binom{d}{i}} & si\ r \in \{i, i+1\} \\ 1 & sinon, \end{cases}$$

$$\frac{|{}_{p^t}H^r(k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))|}{|H^r(k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))/p^t|} = \begin{cases} p^{t\left(\binom{d}{i}+\binom{d-1}{r-1}[k_1:\mathbb{Q}_p]\right)} & si\ r \in \{i, i+1\} \\ p^{t\binom{d-1}{r-1}[k_1:\mathbb{Q}_p]} & sinon. \end{cases}$$

(ii) Pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, ℓ un nombre premier différent de p et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^t}H^r(k, \varinjlim_s {}_{\ell^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i))|}{|H^r(k, \varinjlim_s {}_{\ell^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i))/\ell^t|} = \begin{cases} \ell^{t\binom{d}{i+1}\rho} & si\ r \in \{i+1, i+2\} \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

(iii) Si $d = 1$ (ie k est p-adique), alors pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{p^t}H^r(k, \varinjlim_s {}_{p^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(i))|}{|H^r(k, \varinjlim_s {}_{p^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(i))/p^t|} = \begin{cases} p^{t((\delta_{i,-1}+\delta_{i,0})\rho+\delta_{r,1}[k:\mathbb{Q}_p]\dim T)} & si\ r \in \{i+1, i+2\} \\ p^{t\delta_{r,1}[k:\mathbb{Q}_p]\dim T} & sinon, \end{cases}$$

où $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Kronecker.

Démonstration. Pour (i), on vérifie d'abord que la propriété est vraie dans le cas où $d = 1$:
- la vérification est évidente pour $r \notin \{0, 1, 2\}$ par dimension cohomologique ;
- pour $r = 0$, il suffit de remarquer que k possède un nombre fini de racines de l'unité ;
- pour $r = 2$, on se ramène au cas $r = 0$ grâce à la dualité de Tate $H^2(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))^D \cong H^0(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1-i))$;
- pour $r = 1$, on exploite la caractéristique d'Euler-Poincaré sur k (théorème I.2.8 de [Mil06]) :

$$\frac{|H^0(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))| \cdot |H^2(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))|}{|H^1(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))|} = [\mathcal{O}_k : n\mathcal{O}_k]^{-1}.$$

Une fois la propriété prouvée pour $d = 1$, il suffit de procéder par récurrence sur d grâce à la suite exacte (paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser02]) :

$$0 \to H^r(k_{d-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) \to H^r(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) \to H^{r-1}(k_{d-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) \to 0.$$

Pour (ii) et (iii), la preuve est analogue à celle de la proposition 1.11. $\square$

Corollaire 1.17. *Fixons des entiers $n \geq 1$ et $r \geq 3$.*
(i) On a :

$$\frac{|{}_nH^2(k,\mathbb{G}_m)|}{|H^2(k,\mathbb{G}_m)/n|} = n^d \cdot p^{(d-1)[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}, \qquad \frac{|{}_nH^r(k,\mathbb{G}_m)|}{|H^r(k,\mathbb{G}_m)/n|} = p^{\binom{d-1}{r-1}[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

(ii) Soit T un k-tore. Si p ne divise pas n ou si $d=1$:

$$\frac{|{}_nH^2(k,T)|}{|H^2(k,T)/n|} = n^{d\rho}, \qquad \frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|} = 1.$$

1.4 Variétés abéliennes

Réduction des variétés abéliennes

Soient l un corps complet de valuation discrète à corps résiduel parfait λ et A une variété abélienne sur l. Notons $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 sa fibre spéciale. Soit A_0^0 la composante connexe du neutre dans A_0. On rappelle que A_0/A_0^0 est un groupe algébrique fini et qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to U \times_\lambda T \to A_0^0 \to B \to 0,$$

où U est un groupe abélien unipotent, T un tore et B une variété abélienne. Dans le cas où l est de caractéristique résiduelle nulle, U est une puissance de $\mathbb{G}_a$.

Définition 1.18. *On dit que A a **réduction purement additive** si $T=0$ et $B=0$. On dit que A est **à réduction scindée** si la suite exacte $0 \to T \to A_0^0 \to A_0^0/T \to 0$ est scindée.*

Théorème 1.19. ***(Théorème de Ogg - Théorème 1 de [Ogg62])***
Soient l un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et A une variété abélienne sur $l((t))$. Soient $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 la fibre spéciale de $\mathcal{A}$. Soit A_0^0 la composante connexe du neutre dans A_0. On considère la suite exacte $0 \to U \times_l T \to A_0^0 \to B \to 0$ où U est une puissance de $\mathbb{G}_a$, T est un tore et B une variété abélienne. Soient r la dimension de T, s la dimension de U et $\epsilon = r+2s$. Alors $H^1(l((t)),A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\dim A-\epsilon}$. En particulier, le groupe $H^1(l((t)),A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\dim A-\epsilon}$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne A a réduction purement additive.

Remarque 1.20. Dans le théorème précédent, lorsque l'on remplace $l((t))$ par un corps L complet de valuation dicrète de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique $p>0$, on a un isomorphisme $H^1(L,A)_{\text{non}-p} \cong ((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{non}-p})^{2\dim A-\epsilon}$.

Définition 1.21. *On appellera ϵ l'**entier de Ogg** de A.*

Variétés abéliennes sur un corps fini

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p et de cardinal q. Soient ℓ un nombre premier différent de p et i un entier relatif. Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante :

Proposition 1.22. *Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{F}$. On note $A\{\ell\}(i)$ le module galoisien $\varinjlim_r {}_{\ell^r}A(\mathbb{F}^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(i)$. Alors le groupe $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ est fini.*

Démonstration. Supposons que $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ soit infini. Cela signifie que le groupe $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$, et donc que $A(\mathbb{F}^s)$ possède un sous-module galoisien isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-i)$. Par conséquent, le module de Tate $T_\ell A(\mathbb{F}^s)$ contient $\mathbb{Z}_\ell(-i)$ comme module galoisien. Comme le Frobenius géométrique agit sur $\mathbb{Z}_\ell(1)$ par multiplication par q^{-1}, on déduit que le Frobenius géométrique sur $T_\ell A(\mathbb{F}^s) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ possède une valeur propre de module complexe q^i. Mais l'accouplement de Weil fournit un isomorphisme entre les modules galoisiens $T_\ell A(\mathbb{F}^s)$ et $H^1(A^t \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^s, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$, et d'après les conjectures de Weil (théorème IV.1.2 de [FK88]), les valeurs propres du Frobenius géométrique sur $H^1(A^t \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^s, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ sont de module complexe $q^{-1/2}$: absurde ! Donc $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ est fini. Pour établir la nullité de $H^1(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$, il suffit d'utiliser le théorème de dualité sur $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}^s/\mathbb{F}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (exemple I.1.10 de [Mil06]) :

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i)) &\cong \varinjlim_s H^1(\mathbb{F}, {}_{\ell^s}A \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i)) \\ &\cong \varinjlim_s H^0(\mathbb{F}, {}_{\ell^s}A^t \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(-i-1))^D \cong (\varprojlim_s {}_{\ell^s}H^0(\mathbb{F}, A^t\{\ell\}(-i-1)))^D \end{aligned}$$

et la finitude de $H^0(\mathbb{F}, A^t\{\ell\}(-i-1))$. □

Remarque 1.23. Ce résultat sera notamment utile dans la section 5 afin de déterminer quand il y a un bon théorème de dualité pour les groupes de cohomologie d'une variété abélienne sur un corps de la forme $\mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$.

2 Variétés abéliennes sur le corps des fonctions d'une courbe sur $\mathbb{C}((t))$

2.1 Étude locale

Le but de cette partie est d'établir un théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$ (théorème 2.3). Il s'agit d'un résultat analogue aux théorèmes de dualité pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p$ et sur $\mathbb{F}_p((t))$. En fait, c'est essentiellement le "dernier" cas de corps local de dimension cohomologique 2 non compris, et il se trouve qu'il pose certaines difficultés supplémentaires par rapport aux cas déjà connus.
On se place donc dans le cas où $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ (et alors $d = 1$). Soient $\kappa = \mathbb{C}((t_0))$ et A une variété abélienne sur k. Soit A^t sa variété abélienne duale,

qui, d'après le théorème de Barsotti-Weil, représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}_k^1(A, \mathbb{G}_m)$ (on rappelle que $\underline{\mathrm{Ext}}_k^r(A, \mathbb{G}_m)$ est le faisceau sur le petit site étale associé à $T \mapsto \mathrm{Ext}^r_{T_{fppf}}(F, G)$). Comme $\underline{\mathrm{Ext}}_k^r(A, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \neq 1$, on dispose d'un accouplement $A \otimes^{\mathbf{L}} A^t \to \mathbb{G}_m[1]$, d'où un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{1-r}(k, A^t) \to \mathrm{Br}\, k \cong H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lemme 2.1. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D$ est injectif et ${}_nH^r(k, A) \to (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif.*

Démonstration. On remarque que $\underline{\mathrm{Hom}}({}_nA, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = {}_nA^t$. On en déduit que, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r-1}(k, A)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^r(k, {}_nA) \arrow[r] \arrow[d] & {}_nH^r(k, A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D \arrow[r] & H^{2-r}(k, {}_nA^t)^D \arrow[r] & (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale centrale est un isomorphisme. Par conséquent, $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D$ est injectif et ${}_nH^r(k, A) \to (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif. □

Notons $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 sa fibre spéciale. On dispose alors d'une filtration $A_0 \supseteq A_0^0 \supseteq A_0^1$ de A_0, où :
- A_0^0 est la composante connexe de l'élément neutre de A_0,
- $F = A_0/A_0^0$ est un schéma en groupes fini,
- A_0^1 est de la forme $U \times T$ où U est un groupe additif (c'est-à-dire une puissance de $\mathbb{G}_a$) et T un tore,
- $B = A_0^0/A_0^1$ est une variété abélienne.

On note ϵ l'entier de Ogg de B.
De même, on note $\mathcal{A}^*$ le modèle de Néron de A^t et A_0^* sa fibre spéciale. On dispose alors d'une filtration $A_0^* \supseteq A_0^{0*} \supseteq A_0^{1*}$ de A_0^*, où :
- A_0^{0*} est la composante connexe de l'élément neutre de A_0^*,
- $F^* = A_0^*/A_0^{0*}$ est un schéma en groupes fini,
- A_0^{1*} est de la forme $U^* \times T^*$ où U^* est un groupe additif et T^* un tore,
- $B^* = A_0^{0*}/A_0^{1*}$ est une variété abélienne.

On note ϵ^* l'entier de Ogg de B^*.

Remarque 2.2. Ainsi, B, B^* et toutes les variétés indexées par 0 sont définies sur κ.

Théorème 2.3. *On a une suite exacte :*

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D \to 0$$

avec $m(A) = 2 \cdot (dim\, B + dim\, B^*) - \epsilon - \epsilon^*$.

Remarque 2.4. La multiplication par n sur A^t est étale puisque k est de caractéristique 0. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, le groupe $nA^t(k)$ est ouvert dans $A^t(k)$. De plus, il est d'indice fini. On en déduit que $H^0(k, A^t)^\wedge$ coïncide avec le complété profini de $H^0(k, A^t)$.

Démonstration. La surjectivité du morphisme $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ découle immédiatement du lemme précédent par passage à la limite inductive. Nous voulons maintenant calculer son noyau N.
D'après la propriété universelle du modèle de Néron, on a l'égalité $A(k) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_k)$, ainsi qu'une suite exacte :

$$0 \to D \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_k) \to A_0(\kappa) \to 0,$$

où D désigne un groupe abélien uniquement divisible (paragraphe 3 de [LT58]). Le lemme du serpent impose donc que :

$$\frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|} = \frac{|A_0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0(\kappa)|}.$$

Nous allons maintenant dévisser A_0.

- En exploitant la suite exacte $0 \to A_0^0(\kappa) \to A_0(\kappa) \to F(\kappa)$, le lemme du serpent et la finitude de $F(\kappa)$, on obtient que :

$$\frac{|A_0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0(\kappa)|} = \frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|}.$$

- Comme $H^1(\kappa,U) = 0$ et $H^1(\kappa,T) = 0$ (puisque d'une part $H^1(\kappa,T)$ est d'exposant fini d'après le théorème de Hilbert 90 et d'autre part c'est un groupe divisible car κ est de dimension cohomologique 1), on a une suite exacte :

$$0 \to U(\kappa) \times T(\kappa) \to A_0^0(\kappa) \to B(\kappa) \to 0.$$

  Par conséquent :

$$\frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|} = \frac{|B(\kappa)/n|}{|{}_nB(\kappa)|} \cdot \frac{|U(\kappa)/n|}{|{}_nU(\kappa)|} \cdot \frac{|T(\kappa)/n|}{|{}_nT(\kappa)|}.$$

  Or :
  - on a $\frac{|U(\kappa)/n|}{|{}_nU(\kappa)|} = 1$;
  - comme $\chi(\kappa, {}_nT) = 1$ et $H^1(\kappa,T) = 0$, on a $\frac{|T(\kappa)/n|}{|{}_nT(\kappa)|} = \frac{1}{|{}_nH^1(\kappa,T)|} = 1$;
  - d'après le théorème de Ogg, on a $H^1(\kappa,B) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\cdot \dim B - \epsilon}$; étant donné que $\chi(\kappa, {}_nB) = 1$, on obtient $\frac{|B(\kappa)/n|}{|{}_nB(\kappa)|} = \frac{1}{|{}_nH^1(\kappa,B)|} = \frac{1}{n^{2\cdot \dim B - \epsilon}}$.

  On en déduit que :

$$\frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|} = \frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|} = \frac{1}{n^{2\cdot \dim B - \epsilon}}.$$

On montre de même que :

$$\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nA^t(k)|} = \frac{1}{n^{2\cdot \dim B^* - \epsilon^*}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\chi(k,{}_nA) &= \frac{|{}_nA(k)||H^2(k,{}_nA)|}{|A(k)/n||{}_nH^1(k,A)|}\\ &= n^{2\cdot \dim B-\epsilon}\frac{|H^2(k,{}_nA)|}{|{}_nH^1(k,A)|}\\ &= n^{2\cdot \dim B-\epsilon}\frac{|{}_nA^t(k))|}{|{}_nH^1(k,A)|} \qquad \text{(par dualité sur } k\text{)}\\ &= n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nH^1(k,A)|}.\end{aligned}$$

Comme $\chi(k,{}_nA)=1$ (d'après la proposition 1.5), on en déduit l'égalité :

$$|{}_nH^1(k,A)| = n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}|A^t(k)/n|.$$

Par conséquent, $|{}_nN| = n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}$. Cela étant vrai pour tout n, comme N est de torsion de type cofini, on a $N\cong(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}$, ce qui achève la preuve avec $m(A)=2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*$. □

Remarque 2.5. Comme A et A^t sont isogènes (paragraphe 10 de [Mil86]), on a :

$$\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nA^t(k)|} = \frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|}$$

pour tout n. Cela montre que $2\cdot\dim B^*-\epsilon^* = 2\cdot\dim B-\epsilon$, et donc $m(A) = 2(2\cdot\dim B-\epsilon)$

Corollaire 2.6. *(i) Si A a bonne réduction, alors $m(A)=4\cdot dim\ A-2\epsilon$. Si de plus B a bonne réduction, alors $m(A)=4\cdot dim\ A$, et il y a donc une suite exacte de groupes de torsion de type cofini :*

$$0\to(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{4\cdot dim\ A}\to H^1(k,A)\to(H^0(k,A^t)^\wedge)^D\to 0.$$

(ii) En général, on a un isomorphisme $\overline{H^1(k,A)}\cong\overline{(H^0(k,A^t)^\wedge)^D}$.
(iii) Le morphisme $H^1(k,A)\to(H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ est un isomorphisme si, et seulement si, B a réduction purement additive.

Dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^1(k,A)\to(H^0(k,A^t)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient d'établir quelques résultats préliminaires :

Lemme 2.7. *Le morphisme naturel $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A})\to H^1(k,A)$ est injectif d'image le sous-groupe $H^1(k^{nr}/k,A(k^{nr}))$ de $H^1(k,A)$.*

Démonstration. Notons $g:\mathrm{Spec}\ k\to\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k$ et $i:\mathrm{Spec}\ \kappa\to\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k$. Comme $\mathcal{A}\cong g_*A$ (d'après la propriété universelle du modèle de Néron), il suffit de remarquer que :

$$H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A})\cong H^1(\mathcal{O}_k,g_*A)\cong H^1(\kappa,i^*g_*A)\cong H^1(k^{nr}/k,A(k^{nr}))$$

où le deuxième isomorphisme découle de la proposition II.1.1 de [Mil06] et le troisième de l'exemple II.8.1.9 de [Tam94]. □

Dans la suite, on notera $|F|$ l'ordre du groupe fini $F(\kappa^s)$.

Proposition 2.8. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F|$.*
(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles.
(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D.$$

Démonstration.

(i) Montrons d'abord que $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible. Comme $A(k^{nr}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et comme il existe un morphisme surjectif $\mathcal{A}(k^{nr}) \to A_0(\kappa^s)$ à noyau divisible, cela revient à montrer que $A_0(\kappa^s)$ est ℓ-divisible. En exploitant la suite exacte $0 \to A_0^0 \to A_0 \to F \to 0$ et le fait que ℓ ne divise pas $|F|$, on remarque alors qu'il suffit de prouver que $A_0^0(\kappa^s)$ est ℓ-divisible. Mais cela découle immédiatement de l'exactitude de $0 \to U \times T \to A_0^0 \to B \to 0$. Donc $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible.
D'après le paragraphe IX.11.3 de [Gro72b], on a $|F^*| = |F|$. On en déduit que ℓ ne divise pas $|F^*|$ et donc que le groupe $A^t(k^{nr})$ est ℓ-divisible.

(ii) D'après (i), on a une suite exacte :

$$0 \to {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr}) \to 0.$$

Comme ${}_{\ell^r}H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))$ et $H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))$ sont finis (puisque ce sont des sous-quotients de $H^1(k, {}_{\ell^r}A)$), en passant à la limite projective, on obtient une surjection $\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})) \to T_\ell H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))$. En utilisant le lemme 2.7, cela permet de réaliser $(T_\ell H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr})))^D = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D$ comme un sous-groupe de $(\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$. □

Lemme 2.9. *On obtient un isomorphisme :*

$$\iota_\ell : H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

par composition des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)) \\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) \\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

Démonstration. Le premier isomorphisme est évident. Le deuxième découle du fait que $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible. Les deux derniers sont obtenus par dualité sur $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \mathrm{Gal}(k^{nr}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (voir exemple I.1.10 de [Mil06]). □

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 2.10. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F|$. On appelle* ***ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de*** *A le groupe :*

$$H^1_{nrs}(k, A, \ell) := (\iota_\ell \circ Res)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D) \subseteq H^1(k, A)\{\ell\}$$

où $Res : H^1(k, A) \to H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))$ désigne la restriction et ι_ℓ l'isomorphisme du lemme précédent. Comme κ est de dimension cohomologique 1, le morphisme Res est surjectif et on a une suite exacte :

$$0 \to H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\} \to H^1_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to 0.$$

Remarque 2.11. • Le ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de A est bien défini quel que soit ℓ lorsque F est trivial, c'est-à-dire lorsque A_0 est connexe.

• La suite exacte :

$$0 \to H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\} \to H^1_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to 0$$

s'identifie à la suite exacte de groupes abstraits :

$$0 \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2} \to 0.$$

Théorème 2.12. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F|$, la partie ℓ-primaire du noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est $H^1_{nrs}(k, A, \ell)$.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)) & & \\
H^1(k, A)\{\ell\} \arrow[urr, "Res"] \arrow[ddd, "f_4"'] & & & & \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \arrow[ull, "f_1"', "\cong"] \arrow[ddd, "f_6", "\cong"'] \\
 & & \varinjlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A) \arrow[ull, "f_2"] \arrow[urr, "f_3"'] \arrow[d, "f_5"] & & \\
 & & (\varprojlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A^t))^D \arrow[dll, "f_7"] \arrow[drr, "f_8"] & & \\
(H^0(k, A^t)^{(\ell)})^D \arrow[drr, equal] & & & & (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D \arrow[dll, "f_9"] \\
 & & (H^0(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))^{(\ell)})^D & &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme f_6 est obtenu par composition des isomorphismes

$$\varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r (H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

provenant de la dualité pour la cohomologie du groupe profini $\hat{\mathbb{Z}}$. On vérifie aisément que ce diagramme est commutatif.
Soit maintenant $x \in {}_{\ell^r}H^1(k, A)$. Comme f_2 est surjectif, on peut relever x en $z \in H^1(k, {}_{\ell^r}A)$. On remarque alors que $f_3(z) = f_1^{-1}(Res(x))$. Donc, par définition de ι_ℓ :

$$\begin{aligned} f_9(\iota_\ell(Res(x))) &= f_9(f_6(f_1^{-1}(Res(x))) = f_9(f_6(f_3(z))) \\ &= f_9(f_8(f_5(z))) = f_7(f_5(z)) = f_4(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $x \in \mathrm{Ker}(f_4)$ si, et seulement si,

$$\iota_\ell(Res(x)) \in \mathrm{Ker}(f_9) = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D.$$

□

Remarque 2.13. Pour ℓ divisant $|F|$, le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ ne contient pas forcément $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$: par exemple, si ℓ divise $|F(\kappa)|$ et A a réduction purement additive, le groupe $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}$ est non trivial alors que le morphisme $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est injectif. En fait, pour ℓ divisant $|F|$, il semble difficile de caractériser la partie ℓ-primaire du noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$: en particulier, il serait intéressant de déterminer si elle contient forcément $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\}_{div}$.

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^1_{nrs}(k, A) := \bigoplus_{\ell \wedge |F| = 1} H^1_{nrs}(k, A, \ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^1_{nrs}(k, A, \ell)$ si ℓ ne divise pas $|F|$, triviale sinon.

2.2 Étude globale

Supposons maintenant que $k = \mathbb{C}((t))$ (et donc que $d = 0$). Soient A une variété abélienne sur $K = k(X)$ et A^t sa variété abélienne duale. Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de dualité à la Cassels-Tate pour A : plus précisément, nous voulons déterminer, sous certaines hypothèses géométriques et modulo divisibles, le dual du groupe de Tate-Shafarevich $Ш^1(A)$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, notons :
- $\mathcal{A}_v$ le modèle de Néron de A sur $\mathcal{O}_v$,
- F_v le groupe algébrique fini des composantes connexes de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$,
- B_v la variété abélienne qui apparaît dans la filtration de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$.

Notons aussi U l'ouvert de bonne réduction de A, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\mathcal{A}^t$ le schéma abélien dual.
Fixons maintenant un nombre premier ℓ et faisons l'hypothèse suivante :

(H 2.14)$_\ell$ *pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
- *ℓ ne divise pas $|F_v|$,*
- *B_v a réduction purement additive.*

Remarque 2.15. Étant donnée une variété abélienne A, l'hypothèse précédente est vérifiée pour presque tout ℓ. Par conséquent, les résultats que nous allons montrer sont vrais pour presque tout ℓ.

Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que B_v a réduction purement additive. Pour chaque ouvert V de U, on introduit les groupes suivants :

$$Ш^1_{nr}(V,A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A) \to \prod_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v,A)/H^1_{nr}(K_v,A))\right),$$

$$\begin{aligned} Ш^1_{nrs}(V,A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v\in Z\setminus V} H^1(K_v,A^t) \times \prod_{v\in X\setminus (V\cup Z)} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t)\right. \\ \left. \times \prod_{v\in V^{(1)}} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nr}(K_v,A^t))\right). \end{aligned}$$

On note aussi :

$$Ш^1_{nrs}(A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v\in Z} H^1(K_v,A^t) \times \prod_{v\in X^{(1)}\setminus Z} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t)\right).$$

Ici, $H^1_{nr}(K_v,A)$ désigne $H^1(\mathcal{O}_v,\mathcal{A}_v) = H^1(K_v^{nr}/K_v, A(K_v^{nr}))$.

Remarque 2.16. • L'intersection $Z \cap U$ n'est pas forcément vide.
• Bien sûr, le groupe $Ш^1_{nrs}(A^t)$ contient :

$$Ш^1(A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,A^t)\right).$$

• Pour $v \in Z \cap V$, on a $H^1_{nr}(K_v,A^t) = 0$ et pour $v \in V^{(1)} \setminus Z$, le groupe $H^1_{nr}(K_v,A^t)\{\ell\}$ est contenu dans $H^1_{nrs}(K_v,A^t)\{\ell\}$. On en déduit que :

$$Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \bigcup_{V\subseteq U} Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}.$$

Fixons V un ouvert non vide de U.

Lemme 2.17. *(i) Pour $r>0$, le groupe $H^r(V,\mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Le groupe $H^2_c(V,\mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. (i) On note $g : \operatorname{Spec} K \to V$. On sait que $\mathcal{A}$ représente le faisceau $g_* A$ sur V. On peut alors écrire la suite spectrale de Leray :

$$H^r(V, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A).$$

En calculant les tiges de $R^s g_* A$ grâce au théorème II.6.4.1 de [Tam94], on prouve aisément que, pour $s > 0$, $R^s g_* A$ est un faisceau de torsion. Comme V est quasi-compact, cela entraîne que $H^r(V, R^s g_* A)$ est de torsion pour $r \geq 0$ et $s > 0$. De plus, $H^r(K, A)$ est de torsion pour $r > 0$. La suite spectrale entraîne alors que $H^r(V, \mathcal{A})$ est bien de torsion.
Reste à prouver que ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est fini pour chaque $n \geq 1$. La suite exacte :

$$0 \to {}_n\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \to 0.$$

montre que ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est un quotient de $H^r(V, {}_n\mathcal{A})$. Or ce dernier est fini. Donc ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est fini, et $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.
(ii) En utilisant le lemme 2.7 de [HSz05], on a une suite exacte :

$$... \to \bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^1(K_v, A) \to H^2_c(V, \mathcal{A}) \to H^2(V, \mathcal{A}) \to ...$$

Comme les $H^1(K_v, A)$ sont de torsion de type cofini, grâce à (i), on conclut que $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

□

Lemme 2.18. *Il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

Ici, $H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\})$ *et* $H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A})$ *désignent* $\varinjlim_n H^1(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A}^t)$ *et* $\varprojlim_n H^2_c(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ *respectivement.*

Démonstration. • En utilisant la suite de Kummer, pour chaque entier naturel r on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t)/\ell^r \to H^1(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}^t) \to {}_{\ell^r}H^1(V, \mathcal{A}^t) \to 0.$$

En prenant la limite inductive, on obtient la suite exacte :

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0.$$

• Pour chaque entier naturel r on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})/\ell^r \to H^2_c(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}) \to {}_{\ell^r}H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

Par passage à la limite projective, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

□

Lemme 2.19. *Il existe un accouplement canonique :*

$$H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La proposition 2.1 du chapitre 1 fournit pour chaque $r \geq 0$ un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}^t) \times H^2_c(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de passer à la limite pour obtenir un accouplement non dégénéré :

$$H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

De plus, d'après la formule de Barsotti-Weil et la nullité de $\underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, on a un accouplement canonique $\mathcal{A}^t \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A} \to \mathbb{G}_m[1]$ qui induit donc un accouplement :

$$H^1(V, \mathcal{A}^t) \times H^1_c(V, \mathcal{A}) \to H^3_c(V, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Posons maintenant :

$$D^1(V, \mathcal{A}) = \mathrm{Im}(H^1_c(V, \mathcal{A}) \to H^1(V, \mathcal{A})) = \mathrm{Ker}(H^1(V, \mathcal{A}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A)),$$

$$D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}\left(H^1(V, \mathcal{A}^t) \to \bigoplus_{v \in Z \setminus V} H^1(K_v, A^t) \oplus \bigoplus_{v \in X \setminus (V \cup Z)} H^1(K_v, A^t)/H^1_{nrs}(K_v, A^t) \right).$$

Ce sont bien sûr des groupes de torsion de type cofini.

Lemme 2.20. *(i) La suite suivante est exacte :*

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A).$$

(ii) L'application naturelle $H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A)$ induit un isomorphisme $D^1(V, \mathcal{A}) \cong$ Ш$^1_{nr}(V, A)$.

(iii) L'application naturelle $H^1(V, \mathcal{A}^t) \to H^1(K, A^t)$ induit un isomorphisme

$$D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t) \cong \text{Ш}^1_{nrs}(V, A^t).$$

Démonstration. (i) Soit $g : \mathrm{Spec}\, K \to V$. La suite spectrale de Leray s'écrit :

$$H^r(V, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A).$$

Cela fournit alors une suite exacte courte :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to H^0(V, R^1 g_* A).$$

Soit P un ensemble de points géométriques tels que, pour tout $v \in V$, il existe un unique élément de P d'image v. On sait alors que $R^1 g_* A$ s'injecte dans $\prod_{u \in P} u_* u^* R^1 g_* A$ (c'est le premier terme de la résolution de Godement). On en déduit que $H^0(V, R^1 g_* A)$ s'injecte dans $\prod_{u \in P} u_* u^* R^1 g_* A(V) = \prod_{v \in V} (R^1 g_* A)_{\overline{v}} = \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A)$. On obtient donc une suite exacte :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A).$$

(ii) Cela découle aisément de (i) et de la suite d'inflation-restriction :

$$0 \to H^1_{nr}(K_v, A) \to H^1(K_v, A) \to H^1(K_v^{nr}, A),$$

pour $v \in V^{(1)}$.

(iii) Cela découle aisément des suites exactes :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}^t) \to H^1(K, A^t) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A^t),$$
$$0 \to H^1_{nr}(K_v, A^t) \to H^1(K_v, A^t) \to H^1(K_v^{nr}, A^t).$$

□

Afin d'établir un théorème de dualité pour les groupes de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour les groupes $D^1(U, \mathcal{A})$ et $D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)$:

Proposition 2.21. *Il existe un accouplement canonique :*

$$\overline{D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

Lemme 2.22. *La suite :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A)^{(\ell)} \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to D^1(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Nous disposons d'une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A) \to H^1_c(U, \mathcal{A}) \to D^1(U, \mathcal{A}) \to 0,$$

d'où des suites exactes pour tout r :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^0(K_v, A)/\ell^r \to H^1_c(U, \mathcal{A})/\ell^r \to D^1(U, \mathcal{A})/\ell^r \to 0.$$

En passant à la limite projective on obtient l'exactitude de :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}\setminus V} H^0(K_v,A)^{(\ell)} \to H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to 0.$$

□

Démonstration. (De la proposition 2.21)

- Rappelons que, d'après le lemme 2.19, nous disposons d'un accouplement non dégénéré :
$$H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$
d'où un isomorphisme $H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A})^D$. On dispose aussi d'un accouplement :
$$H^1(V,\mathcal{A}^t) \times H^1_c(V,\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
qui induit pour chaque entier naturel n un accouplement :
$${}_{\ell^n}H^1(V,\mathcal{A}^t) \times H^1_c(V,\mathcal{A})/\ell^n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
d'où un accouplement obtenu par passage à la limite :
$$H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \times H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
Ainsi on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (1)) :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(V,\mathcal{A}^t)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[r]\arrow[d] & H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \arrow[r]\arrow[d, "\cong"] & H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r]\arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D \arrow[r] & (H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}))^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$
De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (2)) :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r]\arrow[d] & H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r]\arrow[d] & W \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in X\setminus V}(H^0(K_v,A)^{(\ell)})^D, \end{tikzcd}$$
où $W=\bigoplus_{v\in Z\setminus V} H^1(K_v,A^t)\{\ell\} \oplus \bigoplus_{v\in X\setminus (V\cup Z)} H^1(K_v,A^t)\{\ell\}/H^1_{nrs}(K_v,A^t)\{\ell\}$. La flèche verticale de droite est un isomorphisme d'après le corollaire 2.6(iii), le théorème 2.12 et l'hypothèse (H 2.14)$_\ell$, et la flèche verticale centrale est surjective d'après le diagramme (1). Cela montre immédiatement que la flèche verticale de gauche est surjective. Nous allons à présent calculer son noyau.
- Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \to (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D)$ est divisible. En utilisant les diagrammes (1) et (2) et le lemme du serpent, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \to (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D) &\cong \mathrm{Ker}(H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \to (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D) \\ &\cong \mathrm{Coker}(H^0(V,\mathcal{A}^t)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to (T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D).\end{aligned}$$
Or le groupe $(T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D$ est divisible (puisque $T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A})$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini sans torsion), et il en est donc de même de $\mathrm{Ker}(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \to (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D)$.

- Remarquons maintenant que $D^1(V,\mathcal{A})$ est de torsion de type cofini. Cela entraîne que le morphisme naturel $D^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} \to D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)}$ induit un isomorphisme $\overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\} \cong D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)}$. Ce groupe étant fini, le noyau de $D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \to (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D$ est $(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\})_{\text{div}}$, et on a bien un accouplement non dégénéré :
$$\overline{D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Théorème 2.23. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On rappelle aussi que A est une variété abélienne sur K et que V est un ouvert non vide de X contenu dans l'ouvert de bonne réduction de A. On suppose (H 2.14)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*
$$\overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nr}(V,A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
De plus, $Ш^1_{nrs}(V,A^t)$ et $Ш^1_{nr}(V,A)$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. La dualité découle immédiatement de la proposition 2.21 et du lemme 2.20. La nature des groupes $Ш^1_{nrs}(V,A^t)$ et $Ш^1_{nr}(V,A)$ vient du lemme 2.20 et du fait que $H^1(V,\mathcal{A})$ et $H^1(V,\mathcal{A}^t)$ sont de torsion de type cofini. $\square$

Corollaire 2.24. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 2.14)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*
$$\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour $V \subseteq V'$ deux ouverts de U, on remarque que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\}$ et $Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$ sont des sous-groupes du groupe de torsion de type cofini $Ш^1_{nr}(U,A)\{\ell\}$ tels que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} \subseteq Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$. Comme toute suite décroissante de sous-groupes d'un groupe de torsion de type cofini ℓ-primaire est stationnaire (Lemme 3.7 de [HSz16]), on en déduit qu'il existe un ouvert non vide V_0 de U tel que, pour tout ouvert non vide V de V_0, on a $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} = Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\}$. Cela implique que $Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$.
Par ailleurs, on remarque que, pour $V \subseteq V'$ deux ouverts non vides de V_0, on a un diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V',A^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Ш^1_{nrs}(V',A^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{Ш^1_{nrs}(V',A^t)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\} \arrow[r] & \overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
Comme $Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \bigcup_{V\subseteq V_0} Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}$, en passant à la limite inductive, on obtient que l'injection naturelle $Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)\{\ell\} \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}$ induit un isomorphisme $\overline{Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)}\{\ell\} \xrightarrow{\sim} \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\}$. Par conséquent, d'après le théorème 2.23, il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :
$$\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

On peut aussi obtenir un énoncé symétrique en A et A^t :

Corollaire 2.25. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 2.14)$_\ell$ et on note $i : Ш^1(A) \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $i^t : Ш^1(A^t) \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A^t)$) l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$Ш^1(A^t)\{\ell\}/(i^t)^{-1}(Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}_{div}) \times Ш^1(A)\{\ell\}/i^{-1}(Ш^1_{nrs}(A)\{\ell\}_{div}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[d, "i"] \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[u, "i^t"] & \times & \overline{Ш^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

commute. On définit des accouplements CT et CT^t par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CT} : & \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[d, equal] & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[d, "i"] \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
& \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[d, equal] \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{CT}^t : & \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[u, "i^t"] & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Pour établir le corollaire, il suffit de montrer que CT et CT^t coïncident. En procédant comme dans le corollaire 2.24, on choisit un ouvert V de U tel que $D^1(V, \mathcal{A})\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$ et $D^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} = Ш^1(A^t)\{\ell\}$. Puis en procédant comme pour la proposition 2.21, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1(V, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & H^1(V, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A)\{\ell\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (D^1(V, \mathcal{A}^t)^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V, \mathcal{A}^t)^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v \in X \setminus V} (H^0(K_v, A^t)^{(\ell)})^D,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "j^t"] & H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A^t)\{\ell\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (D^1(V, \mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v \in X \setminus V} (H^0(K_v, A)^{(\ell)})^D.
\end{tikzcd}$$

On vérifie alors aisément que CT est induit par j et que CT^t est induit par j^t. Il suffit donc d'établir le lemme qui suit. □

Lemme 2.26. *Soient $r, s \geq 0$. On a un diagramme commutatif au signe près :*

$$\begin{tikzcd}
H^r_c(V, \mathcal{A}) \arrow[d] & \times & H^s(V, \mathcal{A}^t) \arrow[r] & H^{r+s}_c(V, \mathcal{A} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A}^t) \arrow[d, equal] \\
H^r(V, \mathcal{A}) & \times & H^s_c(V, \mathcal{A}^t) \arrow[u] \arrow[r] & H^{r+s}_c(V, \mathcal{A} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A}^t).
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Démonstration. On note $j : V \to X$ l'immersion ouverte et on fait les identifications suivantes :

$$H^r_c(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}[r]), \qquad H^s_c(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}^t[s]),$$
$$H^r(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{D(V)}(\mathbb{Z}, \mathcal{A}[r]), \qquad H^s(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(V)}(\mathbb{Z}, \mathcal{A}^t[s]),$$
$$H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!(\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t)[r+s]),$$

où $D(U)$ et $D(X)$ désignent les catégories dérivées de faisceaux étales sur U et sur X respectivement. La commutativité de (3.1) revient alors à montrer que, si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}[r])$ et $\beta \in \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}^t[s])$, alors le diagramme suivant commute dans $D(X)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & j_!\mathcal{A}[r] \arrow[rr, "\cong"] & & (j_!\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathbb{Z})[r] \arrow[d, "j_!j^*\beta"] \\
j_!\mathcal{A}^t[s] \arrow[r, "\cong"] & (j_!\mathcal{A}^t\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathbb{Z})[s] \arrow[rr, "j_!j^*\alpha"] & & (j_!\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathcal{A}^t)[r+s].
\end{tikzcd}$$

Mais cette commutativité est évidente, ce qui achève la preuve. □

Exemple 2.27. • Les variétés abéliennes ayant bonne réduction partout vérifient les hypothèses des corollaires précédents. C'est par exemple le cas des variétés abéliennes définies sur k.

• Supposons que $X = \mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire que $K = \mathbb{C}((t))(u)$. La courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + u$ vérifie les hypothèses des corollaires.

3 Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$

On suppose dans cette section que $d \geq 2$ et que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$. Soit A une variété abélienne sur k de variété abélienne duale A^t.

3.1 Dualité modulo divisibles

La formule de Barsotti-Weil impose que $A^t = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A,\mathbb{G}_m)$. De plus, $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A,\mathbb{G}_m) = 0$. On dispose donc d'un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$A\otimes^{\mathbf{L}} A^t \to \mathbb{G}_m[1],$$

induisant un accouplement :

$$H^r(k,A)\times H^{d-r}(k,A^t) \to H^{d+1}(k,\mathbb{G}_m) \cong H^{d+1}(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On remarquera que pour obtenir l'isomorphisme $H^{d+1}(k,\mathbb{G}_m) \cong H^{d+1}(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$ il faut choisir un système compatible de racines de l'unité.

Lemme 3.1. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k,A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k,A^t))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,A^t)/n)^D$ est surjectif.*

Remarque 3.2. Dans le lemme précédent (ainsi que dans toute la suite), lorsque M est un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module discret, on pose $H^s(k, M) = 0$ pour $s < 0$.

Démonstration. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r-1}(k,A)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^r(k,{}_nA) \arrow[r] \arrow[d] & {}_nH^r(k,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{d+1-r}(k,A^t))^D \arrow[r] & H^{d+1-r}(k,{}_nA^t)^D \arrow[r] & (H^{d-r}(k,A^t)/n)^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le théorème I.2.17 de [Mil06] car ${}_nA^t \cong \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$. On en déduit que le morphisme $H^{r-1}(k,A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k,A^t))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,A^t)/n)^D$ est surjectif. □

Notation 3.3. Pour $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et M un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module discret tel que ${}_nH^r(k,M)$ et $H^r(k,M)/n$ sont finis, on note $\lambda_r(k,n,M) = \frac{|{}_nH^r(k,M)|}{|H^r(k,M)/n|}$.

Proposition 3.4. *Pour $r \in \mathbb{Z}$, il existe des familles d'entiers $(\beta_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^t_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^{tors}_{0,\ell})_\ell$ et $(\beta^{t,tors}_{0,\ell})_\ell$ indexées par les nombres premiers telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\lambda_r(k,n,A) = \prod_\ell \ell^{\beta_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_r(k,n,A^t) = \prod_\ell \ell^{\beta^t_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{tors}_{0,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A^t(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{t,tors}_{0,\ell} v_\ell(n)}.$$

Lorsque $r \geq 1$, les $\beta_{r,\ell}$, les $\beta^t_{r,\ell}$, les $\beta^{tors}_{0,\ell}$ et les $\beta^{t,tors}_{0,\ell}$ sont positifs. Pour $r < 0$, les entiers $\beta_{r,\ell}$ et $\beta^t_{r,\ell}$ sont nuls.

Démonstration. Les deux dernières égalités sont évidentes car $A(k)_{tors}$ et $A^t(k)_{tors}$ sont de torsion de type cofini. Montrons les deux premières. Pour $r \geq 1$, elles sont évidentes, puisque les groupes $H^r(k,A)$ et $H^r(k,A^t)$ sont de torsion de type cofini. Le cas $r = 0$ découle alors des formules suivantes (que l'on obtient grâce à la suite exacte de Kummer) :

$$1 = \chi(k,{}_nA) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r},$$
$$1 = \chi(k,{}_nA^t) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A^t)^{(-1)^r}.$$

□

Théorème 3.5. *Pour $r \geq 1$, le noyau du morphisme surjectif $H^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,A^t)^\wedge)^D$ est un groupe de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. Soit $s \in \{-1,0,...,d+1\}$. On calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de ${}_nA$ pour chaque entier naturel n :

$$\begin{aligned}
1 &= \chi(k, {}_nA) \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=s+1}^{d+1} |H^r(k,{}_nA)|^{(-1)^r} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} |H^r(k,{}_nA^t)|^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} \lambda_r(k,n,A^t)^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,A^t)/n|^{(-1)^{s+1}} \\
&= |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,A^t)/n|^{(-1)^{s+1}} \cdot \prod_\ell \ell^{(-1)^{s+1}\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)},
\end{aligned}$$

où $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^t_{r,\ell}$. Par conséquent, si $s \geq 1$ et si N_s désigne le noyau de $H^s(k,A) \to (H^{d-s}(k,A^t)^\wedge)^D$, on obtient :

$$|{}_nN_s| = \frac{|{}_nH^s(k,A)|}{|H^{d-s}(k,A^t)/n|} = \prod_\ell \ell^{\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)}.$$

D'après le lemme 1.3, cela prouve que N_s est divisible. □

En reprenant les notations de la preuve précédente, on a alors :

$$N_s \cong \bigoplus_\ell (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\gamma_{s,\ell}},$$

et nous voulons calculer les $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^t_{r,\ell}$. Avant de passer à la suite, il est utile d'établir des équations reliant les différentes variables que nous avons introduites $(\beta_{r,\ell}, \beta^t_{r,\ell}, \beta^{tors}_{0,\ell}, \beta^{t,tors}_{0,\ell}, \gamma_{r,\ell})$.

Proposition 3.6. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\beta_{r,\ell})_r$ et $(\beta^t_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\begin{cases}
\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell} \quad \forall r \in \{-1\} \cup \{1,2,...,d-1\} \cup \{d+1\} \\
\gamma_{0,\ell} = \beta^{tors}_{0,\ell} \\
\beta_{r,\ell} = \beta^t_{d+1-r,\ell} \quad \forall r \in \{2,3,...,d-1\} \\
\beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta^t_{d,\ell} - \beta^t_{d+1,\ell} \\
\beta^{t,tors}_{0,\ell} = \beta_{d+1,\ell} \\
\sum_{r=0}^{d+1}(-1)^r\beta_{r,\ell} = 0 \\
\beta_{r,\ell} = \beta^t_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq d+2
\end{cases}$$

Démonstration. D'après la démonstration du théorème 3.5, on a pour $r \in \{-1, 0, 1, ..., d+1\}$ la relation :

$$1 = |{}_nH^r(k, A)|^{(-1)^r} |H^{d-r}(k, A^t)/n|^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_p p^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell}v_p(n)} \tag{3.2}$$

avec $\gamma_{r,\ell} = \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{s,\ell} + \sum_{s=0}^{d-r}(-1)^{d+r-s}\beta^t_{s,\ell}$. Cela permet d'établir les résultats suivants :

(1) Soit $r \in \{1, 2, ..., d-1\} \cup \{-1, d+1\}$. L'équation (3.2) impose l'existence de deux fonctions bornées $h, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \left(\prod_p p^{\beta_{r,\ell}v_p(n)} \cdot h(n)\right)^{(-1)^r} \cdot g(n)^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_p p^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell}v_p(n)}.$$

Par conséquent, $\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}$.

(2) Dans le cas $r = 0$, l'équation (3.2) impose l'existence de deux fonctions bornées $h, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \left(\prod_p p^{\beta^{tors}_{0,\ell}v_p(n)} \cdot h(n)\right) \cdot g(n)^{-1} \cdot \prod_p p^{-\gamma_{0,\ell}v_p(n)}.$$

On en déduit que $\beta^{tors}_{0,\ell} = \gamma_{0,\ell}$,

(3) On remarque que :

$$|H^0(k, A^t)/n| = |{}_nH^0(k, A^t)| \cdot \lambda_0(k, n, A^t)^{-1}.$$

Par conséquent, dans le cas $r = d$, l'équation (3.2) impose l'existence de deux fonctions bornées $h, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \left(\prod_p p^{\beta_{d,\ell}v_p(n)} \cdot h(n)\right)^{(-1)^d} \cdot \left(\prod_p p^{(\beta^{t,tors}_{0,\ell} - \beta^t_{0,\ell})v_p(n)} \cdot g(n)\right)^{(-1)^{d+1}} \cdot \prod_p p^{(-1)^{d+1}\gamma_{d,\ell}v_p(n)}.$$

On obtient donc que $\beta_{d,\ell} + \beta^t_{0,\ell} - \beta^{t,tors}_{0,\ell} = \gamma_{d,\ell}$.

En exploitant (1), on obtient que :

- pour $r \in \{2, 3, ..., d-1\}$, $\gamma_{r,\ell} + \gamma_{r-1,\ell} = \beta_{r,\ell} + \beta_{r-1,\ell}$, et donc $\beta_{r,\ell} = \beta^t_{d+1-r,\ell}$;
- $\gamma_{1,\ell} - \gamma_{-1,\ell} = \beta_{1,\ell}$, et donc $\beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta^t_{d,\ell} - \beta^t_{d+1,\ell}$.
- $\gamma_{-1,\ell} = 0$, et donc $\sum_{r=0}^{d+1}(-1)^r\beta_{r,\ell} = 0$.

Avec (1) et (3), on a $\gamma_{d+1,\ell} + \gamma_{d,\ell} = \beta_{d+1,\ell} + \beta_{d,\ell} + \beta^t_{0,\ell} - \beta^{t,tors}_0$ et donc $\beta^{t,tors}_{0,\ell} = \beta_{d+1,\ell}$. Finalement, la nullité de $\beta_{r,\ell}$ et $\beta^t_{r,\ell}$ pour $r \geq d+2$ est une conséquence immédiate du fait que k est de dimension cohomologique $d+1$. □

Proposition 3.7. *Pour tout premier ℓ, pour tout entier r, on a $\beta_{r,\ell} = \beta^t_{r,\ell}$. On a aussi $\beta^{tors}_{0,\ell} = \beta^{t,tors}_{0,\ell}$.*

Démonstration. Les variétés abéliennes A et A^t sont isogènes. Il existe donc une suite exacte $0 \to F \to A \to A^t \to 0$ où F est un schéma en groupes abélien fini. En passant à la cohomologie, on obtient donc un morphisme $H^r(k, A) \to H^r(k, A^t)$ de noyau et conoyau finis pour chaque r. Cela montre grâce au lemme du serpent que $\beta_{r,\ell} = \beta^t_{r,\ell}$ pour tout r.
Pour montrer que $\beta^{tors}_{0,\ell} = \beta^{t,tors}_{0,\ell}$, on procède de la même façon en remarquant que l'on a un morphisme $A(k)_{tors} \to A^t(k)_{tors}$ de noyau et conoyau finis. □

Des deux propositions précédentes, on déduit :

Corollaire 3.8. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\beta_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\begin{cases} \beta_{r,\ell} = \beta_{d+1-r,\ell} \quad \forall r \in \{2, 3, ..., d-1\} \\ \beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta_{d,\ell} - \beta_{d+1,\ell} \\ \beta^{tors}_{0,\ell} = \beta_{d+1,\ell} \\ \beta_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq d+2 \end{cases}$$

3.2 Étude de $\beta_{0,\ell}$ et de $\beta^{tors}_{0,\ell}$

Pour chaque $i \in \{0, 1, ..., d\}$, on considère $\mathcal{A}_i$ (resp. A_i, F_i, U_i, T_i, B_i) un schéma en groupes commutatifs sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ (resp. sur Spec k_i) tels que :
- on a $A_d = B_d = A$, $F_d = 0$, $U_d = 0$ et $T_d = 0$,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, B_i est une variété abélienne,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, $\mathcal{A}_i$ est le modèle de Néron de B_i,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d-1\}$, A_i est la fibre spéciale de $\mathcal{A}_{i+1}$,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, F_i (resp. U_i, T_i, B_i) est le groupe fini (resp. le groupe additif, le tore, la variété abélienne) apparaissant dans la filtration de A_i.

On note aussi A_{-1} la fibre spéciale de $\mathcal{A}_0$, et F_{-1}, U_{-1}, T_{-1}, B_{-1} les parties finie, unipotente, torique et abélienne apparaissant dans la filtration de A_{-1}. De même, pour chaque $i \in \{0, 1, ..., d\}$, on considère $\mathcal{A}^*_i$ (resp. A^*_i, F^*_i, U^*_i, T^*_i, B^*_i) un schéma en groupes commutatifs sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ (resp. sur Spec k_i) tels que :
- on a $A^*_d = B^*_d = A^t$, $F^*_d = 0$, $U^*_d = 0$ et $T^*_d = 0$,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, B^*_i est une variété abélienne,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, $\mathcal{A}^*_i$ est le modèle de Néron de B^*_i,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d-1\}$, A^*_i est la fibre spéciale de $\mathcal{A}^*_{i+1}$,
- pour $i \in \{0, 1, ..., d\}$, F^*_i (resp. U^*_i, T^*_i, B^*_i) est le groupe fini (resp. le groupe additif, le tore, la variété abélienne) apparaissant dans la filtration de A^*_i.

On note aussi A^*_{-1} la fibre spéciale de $\mathcal{A}^*_0$, et F^*_{-1}, U^*_{-1}, T^*_{-1}, B^*_{-1} les parties finie, unipotente, torique et abélienne apparaissant dans la filtration de A^*_{-1}.

Proposition 3.9. *(i) On a $\lambda_0(k, n, A) = \lambda_0(k_{-1}, n, B_{-1}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r, n, T_r)$.*

(ii) Le nombre $\frac{\lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}(k_{-1})_{tors})\cdot\prod_{r=-1}^{d-1}\lambda_0(k_r,n,T_r(k_r^s)_{tors})}{\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors})}$ *est entier. Si* B_i *est à réduction scindée pour* $i \in \{1,...,d\}$*, alors*

$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}(k_{-1}^s)_{tors}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r,n,T_r(k_r^s)_{tors}).$$

Démonstration. (i) Exactement comme dans le théorème 2.3, on montre que :

$$\lambda_0(k,n,A) = \lambda_0(k_{d-1},n,B_{d-1})\lambda_0(k_{d-1},n,T_{d-1})\lambda_0(k_{d-1},n,U_{d-1}).$$

Comme U_{d-1} est unipotent, $\lambda_0(k_{d-1},n,U_{d-1}) = 1$, et donc :

$$\lambda_0(k,n,A) = \lambda_0(k_{d-1},n,B_{d-1})\lambda_0(k_{d-1},n,T_{d-1}).$$

Il suffit alors de procéder par récurrence.

(ii) Comme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k) = A(k)$ et le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k) \to A_{d-1}(k_{d-1})$ est surjectif à noyau uniquement divisible, on a $\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})$. On procède maintenant par dévissage.

- Comme $0 \to A_{d-1}^0 \to A_{d-1} \to F_{d-1} \to 0$ est exacte, le morphisme $A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ est injectif à conoyau fini, et donc :

$$\lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors}).$$

- On a une suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A_{d-1}^0 \to B_{d-1} \to 0$. Comme $U_{d-1}(k_{d-1}^s)$ et $T_{d-1}(k_{d-1}^s)$ sont divisibles, on en déduit l'exactitude de $0 \to T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to 0$. En passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte :

$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to H^1(k_{d-1},T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}).$$

Donc $\lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors})$ divise $\lambda_0(k_{d-1},n,T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})\lambda_0(k_{d-1},n,B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})$.

En procédant par récurrence, $\lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors})$ divise $\lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}(k_{-1}^s)_{tors})\cdot \prod_{r=-1}^{d-1}\lambda_0(k_r,n,T_r(k_r^s)_{tors})$.

Si $A = B_d$ est à réduction scindée, on remarque que la flèche $B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to H^1(k_{d-1},T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})$ est nulle, et on a donc une suite exacte courte :

$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to 0.$$

Donc en procédant par récurrence, si B_i est à réduction scindée pour $i \in \{1,...,d\}$, on obtient l'égalité :

$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}(k_{-1}^s)_{tors}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r,n,T_r(k_r^s)_{tors}).$$

□

Corollaire 3.10. *Notons ρ_r le rang du tore T_r pour $r \in \{-1, 0, ..., d-1\}$. On a pour tout premier ℓ :*

$$\beta_{0,\ell} = 2dimB_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r,$$

$$\beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{d+1,\ell} \leq 2dimB_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r.$$

Si B_i est à réduction scindée pour $i \in \{1, ..., d\}$, alors pour tout premier ℓ :

$$\beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{d+1,\ell} = 2dimB_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r.$$

Démonstration. Cela découle de la proposition 3.9, du corollaire 3.8, des propositions 1.8 et 1.9, et du fait que $B_{-1}(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{C})^{2\dim B_{-1}}$. □

Corollaire 3.11. *On a $2dimB_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r = 2dimB_{-1}^* - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r^*$. Si B_i et B_i^* sont à réduction scindée pour $i \in \{1, ..., d\}$, alors $2dimB_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r = 2dimB_{-1}^* + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r^*$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du corollaire 3.10 et du lemme 3.7. □

Remarque 3.12. Plus généralement, la quantité $2\dim B_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r$ est invariante par isogénie.

3.3 Majorations des $\beta_{r,\ell}$ pour $r \geq 1$

Lemme 3.13. *Les parties divisibles des groupes $(\varprojlim_m H^{d-r}(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr})))^D$ et de $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})_{tors})$ sont (non canoniquement) isomorphes.*

Démonstration. Fixons un nombre premier ℓ. Pour chaque entier naturel s, on a une suite exacte :

$$0 \to {}_{\ell^s}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr})_{tors} \to A^t(k^{nr})_{tors} \to A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s \to 0.$$

En notant Q_{ℓ^s} le groupe $\ell^s A^t(k^{nr})_{tors}$, on a des suites exactes :

$$0 \to {}_{\ell^s}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr})_{tors} \to Q_{\ell^s} \to 0, \tag{3.3}$$

$$0 \to Q_{\ell^s} \to A^t(k^{nr})_{tors} \to A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s \to 0. \tag{3.4}$$

La suite exacte (3.4) et la finitude de $A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s$ montrent que, pour chaque entier u, les deux groupes :

$$\mathrm{Ker}(H^u(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^u(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$
$$\mathrm{Coker}(H^u(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^u(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$

sont finis. Par ailleurs, en exploitant la suite (3.3), on a un diagramme commutatif à colonne exacte dont les flèches diagonales sont la multiplication par ℓ^s :

$$\begin{tikzcd}
H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}) \arrow[d] \arrow[dr, "\ell^s"] & \\
H^{d-r-1}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}) \\
H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \arrow[d] & \\
H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}) \arrow[d] \arrow[dr, "\ell^s"] & \\
H^{d-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \arrow[r] & H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}).
\end{tikzcd}$$

Il existe $s_0 \geq 1$ tel que, pour tout $s \geq s_0$, le module galoisien $A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s$ est isomorphe à $A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^{s_0}$. Par conséquent, il existe une constante entière $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $s \geq 0$, les ordres des groupes :

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ker}(H^{d-r-1}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})), \\
\mathrm{Coker}(H^{d-r-1}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})), \\
\mathrm{Ker}(H^{d-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})), \\
\mathrm{Coker}(H^{d-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),
\end{gathered}$$

sont majorés par C_ℓ. En particulier, les quatre groupes précédents sont de $(C_\ell!)$-torsion. On en déduit que :

$$|\mathrm{Coker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq |{}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})/C_\ell!|,$$
$$|\mathrm{Ker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq C_\ell |H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})/\ell^s|,$$

d'où l'existence d'une contante D_ℓ telle que, pour tout $s \geq 0$:

$$\begin{gathered}
|\mathrm{Coker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq D_\ell, \\
|\mathrm{Ker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq D_\ell.
\end{gathered}$$

On en déduit que les groupes :

$$\begin{gathered}
\mathrm{Ker}(\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to \varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})), \\
\mathrm{Coker}(\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to \varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),
\end{gathered}$$

sont finis. Cela montre que les parties divisibles de $(\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})))^D$ et de $(\varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})))^D$ sont isomorphes. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la partie divisible de $(\varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})))^D$ est isomorphe à celle de $H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})$, et donc à celle de $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})_{tors})$ car A et A^t sont isogènes. $\square$

Lemme 3.14. *Pour chaque entier naturel $r < d-1$, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1}))$ sont (non canoniquement) isomorphes. Pour $r = d-1$ et $r = d$, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ sont (non canoniquement) isomorphes.*

Démonstration. Soit $r \geq 0$. D'après [Ogg62], on a un isomorphisme $H^1(k^{nr}, A) \cong (\varprojlim_m {}_mA^t(k^{nr}))^D$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A)) &= H^r(k_{d-1}, (\varprojlim_m {}_mA^t(k^{nr}))^D) \\ &\cong \varinjlim_m H^r(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr})^D) \\ &\cong \varinjlim_m H^{d-r}(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr}))^D \\ &\cong (\varprojlim_m H^{d-r}(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.13, les parties divisibles de $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ et de $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})_{tors}) \cong H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ sont isomorphes.
On remarque maintenant que l'on a la suite exacte :

$$0 \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1}) \to F_{d-1}(k^s_{d-1}) \to 0,$$

où A^0_{d-1} désigne la composante connexe du neutre dans A_{d-1}. Il existe donc un $\mathrm{Gal}(k^s_{d-1}/k_{d-1})$-module fini F tel que :

$$0 \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to F \to 0.$$

On en déduit que les parties divisibles des groupes de torsion de type cofini $H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ sont (non canoniquement) isomorphes.
Supposons maintenant que $r < d-1$. On a une suite exacte :

$$0 \to U_{d-1}(k^s_{d-1}) \times T(k^s_{d-1}) \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1}) \to B_{d-1}(k^s_{d-1}) \to 0,$$

qui montre que $A^0_{d-1}(k^s_{d-1})$ est divisible. On en déduit que $A^0_{d-1}(k^s_{d-1})/A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}$ est uniquement divisible, et donc que $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ est isomorphe à $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1}))$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 3.15. *Pour chaque entier $r > 0$, on a un isomorphisme $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$. De plus, les parties divisibles de $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ et $H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$ sont isomorphes.*

Démonstration. Comme l'extension k^{nr}/k est non ramifiée par définition, on sait que $A(k^{nr}) = \mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et que le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1})$ est surjectif de noyau uniquement divisible. On en déduit que $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$.
Il suffit alors d'exploiter la suite exacte $0 \to A^0_{d-1} \to A_{d-1} \to F_{d-1} \to 0$ pour montrer que les parties divisibles des groupes $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ et $H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$ sont isomorphes. □

Théorème 3.16. *On a, pour $r \geq 2$:*

$$\beta_{r,\ell} \leq \binom{d+1}{r} \left(\sum_{e\geq 0} \rho_{e-1} + 2 \dim B_{-1} \right).$$

Pour $r = 1$:

$$\beta_{r,\ell} \leq \sum_{e\geq 0} (d+1-e)\rho_{e-1} + 2(d+1) \dim B_{-1}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur $d + r$.
Pour $d + r = 0$ (c'est-à-dire $d = -1$ et $r = 1$), le théorème est évident.
Soit $s \geq 0$ tel que le théorème est vrai pour r et d tels que $r+d \leq s$. Soient $r \geq 1$ et $d \geq -1$ des entiers tels que $d+r = s+1$. La suite spectrale $H^r(k_{d-1}, H^s(k^{nr}, A)) \Rightarrow H^{r+s}(k, A)$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})) \to H^r(k, A) \to H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A)) \to ....$$

Étudions les termes $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ et $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$.

- D'après le lemme 3.15, la partie divisible de $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ est isomorphe à celle de $H^r(k_{d-1}, A^0_{d-1})$. De plus, la suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A^0_{d-1} \to B_{d-1} \to 0$ montre l'exactitude de :

$$H^r(k_{d-1}, T_{d-1}) \to H^r(k_{d-1}, A^0_{d-1}) \to H^r(k_{d-1}, B_{d-1}),$$

  et on a vu dans la proposition 1.11 que $\lambda_r(k_{d-1}, n, T_{d-1})) = \frac{|{}_nH^r(k_{d-1},T_{d-1})|}{|H^r(k_{d-1},T_{d-1})/n|}$ vaut $n^{\binom{d}{r}\rho_{d-1}}$ si $r > 1$ et 1 si $r = 1$.
- Supposons que $r < d$. Alors, d'après le lemme 3.14, la partie divisible de $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ est isomorphe à celle de $H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1})$, et le groupe $H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1})$ s'insère dans une suite exacte :

$$H^{d-r+1}(k_{d-1}, T_{d-1}) \to H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}) \to H^{d-r+1}(k_{d-1}, B_{d-1}),$$

  où $\lambda_{d-r+1}(k_{d-1}, n, T_{d-1})) = n^{\binom{d}{r-1}\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.11.
- D'après le lemme 3.14, la partie divisible de $H^{d-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ est isomorphe à celle de $H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$. L'exactitude de la suite

$$0 \to T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to 0$$

  entraîne l'exactitude de la suite :

$$H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}) \to H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}) \to H^1(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}),$$

  où on a $\lambda_1(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})) = n^{d\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.12. Pour calculer $\lambda_1(k_{d-1}, n, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}))$, on remarque que l'on a une suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \arrow[r] & B_{d-1}(k_{d-1}) \arrow[r] & D \arrow[d] \\ & 0 & H^1(k_{d-1}, B_{d-1}) \arrow[l] & H^1(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où $D = H^0(k_{d-1}, B_{d-1}(k_{d-1}^s)/B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})$ est uniquement divisible. Donc, en utilisant le corollaire 3.10, le nombre $\lambda_1(k_{d-1}, n, B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}))$ divise la quantité $n^{\sum_{e=0}^{d-1} e\rho_{e-1}}\lambda_1(k_{d-1}, n, B_{d-1})$.

- D'après le lemme 3.14, la partie divisible de $H^d(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ est isomorphe à celle de $A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors}$. L'exactitude de la suite $0 \to T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to 0$ entraîne l'exactitude de la suite :

$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors},$$

où on a l'égalité $\lambda_0(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})) = n^{\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.9 et où le nombre $\lambda_0(k_{d-1}, n, B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}))$ divise $n^{\sum_{e=0}^{d-1} \rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}}$ d'après le corollaire 3.10.

On obtient donc, par hypothèse de récurrence :

- si $r = 1$:

$$\beta_{1,\ell} \leq \sum_{e=0}^{d-1}(d-e)\rho_{e-1} + 2d\dim B_{-1} + \rho_{d-1} + \sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}$$

et donc :

$$\beta_{1,\ell} \leq \sum_{e\geq 0}(d+1-e)\rho_{e-1} + 2(d+1)\dim B_{-1}.$$

- si $1 < r < d$:

$$\begin{aligned}\beta_{r,\ell} \leq & \binom{d}{r}\rho_{d-1} + \binom{d}{r}\left(\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right) \\ & + \binom{d}{r-1}\rho_{d-1} + \binom{d}{r-1}\left(\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right)\end{aligned}$$

et donc :

$$\beta_{r,\ell} \leq \binom{d+1}{r}\left(\sum_{e\geq 0}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right).$$

- pour $r = d$:

$$\begin{aligned}\beta_{d,\ell} \leq & \rho_{d-1} + \left(\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right) \\ & + d\rho_{d-1} + \sum_{e=0}^{d-1}e\rho_{e-1} + \sum_{e=0}^{d-1}(d-e)\rho_{e-1} + 2d\dim B_{-1}\end{aligned}$$

et donc :

$$\beta_{d,\ell} \leq (d+1)\left(\sum_{e\geq 0}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right).$$

• pour $r = d+1$:

$$\beta_{d+1,\ell} \leq \rho_{d-1} + \sum_{e=0}^{d-1} \rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}$$
$$\leq \sum_{e\geq 0} \rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}.$$

□

Corollaire 3.17. *Si* $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$*, alors* $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$ *et* $\beta_{r,\ell} = 0$ *pour tout* $r \geq 0$ *et tout premier* ℓ*.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du théorème 3.16 et du corollaire 3.10. □

3.4 Nullité des $\beta_{r,\ell}$

Théorème 3.18. *Soit* ℓ *un nombre premier. Supposons que* $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$*. Alors* $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_{d-1} = 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur d.

• Dans le cas $d = 0$, le théorème est évident puisqu'on a $\beta_{0,\ell}^{tors} = 2\dim B_{-1} + \rho_{-1}$ d'après le corollaire 3.10.

• Supposons maintenant la propriété démontrée au rang $d-1$. Montrons-la au rang d. On suppose donc que k est d-local et que $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$. On a $A(k)_{tors} \cong \mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k)_{tors} \cong A_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ puisque le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k) \to A_{d-1}(k_{d-1})$ est surjectif à noyau uniquement divisible. Par conséquent, l'hypothèse $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$ entraîne que la partie ℓ-primaire de $A_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ est finie. Comme la suite $0 \to T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to 0$ est exacte, on a une suite de cohomologie :

$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}).$$

On en déduit que la partie ℓ-primaire de $T_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ et le noyau du morphisme $B_{d-1}(k_{d-1})\{\ell\} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})\{\ell\}$ sont finis. Étant donné que $\lambda_0(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}) = n^{\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.9, on en déduit que $\rho_{d-1} = 0$. En utilisant que le noyau de $B_{d-1}(k_{d-1})\{\ell\} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})\{\ell\}$ est fini et en remarquant que $\lambda_1(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}) = n^{d\rho_{d-1}} = 1$ d'après la proposition 1.12, on obtient que $B_{d-1}(k_{d-1})\{\ell\}$ est fini. Par hypothèse de récurrence, cela impose que $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_{d-2} = 0$, ce qui achève la preuve.

□

Corollaire 3.19. *(i) Soit* ℓ *un nombre premier. Supposons que* $\beta_{d+1,\ell} = 0$*. Alors* $\beta_{r,p} = 0$ *pour tout entier* r *et tout premier* p*.*

(ii) Supposons que $\dim B_{-1} = 0$ *et que* $\rho_r = 0$ *pour tout entier* r*. Alors* $\dim B_{-1}^* = 0$ *et* $\rho_r^* = 0$ *pour tout* r*.*

Démonstration. (i) Cela découle immédiatement du théorème 3.18 et des corollaires 3.17 et 3.8.
(ii) D'après le corollaire 3.17, $\beta_{d+1,\ell}$ est nul pour tout premier ℓ. On déduit alors du lemme 3.7 que $\beta^t_{d+1,\ell}$ est nul pour tout premier ℓ. Le théorème 3.18 et le corollaire 3.8 permettent donc de conclure. □

Remarque 3.20. Plus généralement, la propriété que $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$ est préservée par les isogénies.

3.5 Le noyau de $H^d(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$

Dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^d(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient d'établir quelques propriétés préliminaires :

Lemme 3.21. *Pour chaque $r \geq 0$, on a un isomorphisme $H^r(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d) \to H^r(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} H^r(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "\cong"] & H^r(k,A) \\ H^r(k^{nr}/k, A(k^{nr})) \arrow[ur, "Inf"'] & \end{tikzcd}.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.7. □

Proposition 3.22. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$.*
(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles.
(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d^*))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 2.8. □

Lemme 3.23. *On obtient un isomorphisme :*

$$\iota_\ell : H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},A))\{\ell\} \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

par composition des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},A))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr},A)) \\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) \\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.9. □

Comme dans 2.10, nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 3.24. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$. On appelle* ***ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de*** *A le groupe :*

$$H^d_{nrs}(k,A,\ell) := (\iota_\ell \circ \varphi)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d^*))^D) \subseteq H^d(k,A)\{\ell\}$$

où $\varphi : H^d(k,A) \to H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},A))$ désigne le morphisme induit par la suite spectrale $H^r(k^{nr}/k, H^s(k^{nr},A)) \Rightarrow H^{r+s}(k,A)$. On a alors une suite exacte :

$$0 \to \frac{H^d(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d)}{\delta(H^{d-1}(\mathcal{O}_k,R^1g_*A))}\{\ell\} \to H^d_{nrs}(k,A,\ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d^*))^D \to 0$$

où $\delta : H^{d-1}(\mathcal{O}_k,R^1g_*A) \to H^d(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d)$ est le morphisme de bord provenant de la suite spectrale $H^r(\mathcal{O}_k,R^sg_*A) \Rightarrow H^{r+s}(k,A)$.

Théorème 3.25. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$, la partie ℓ-primaire du noyau de $H^d(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ est $H^d_{nrs}(k,A,\ell)$.*

Démonstration. La preuve est très similaire à celle du théorème 2.12. Il suffit de remarquer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr},A)) & & \\
H^d(k,A)\{\ell\} \arrow[urr] \arrow[ddd] & & & & \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},{}_{\ell^r}A)) \arrow[ull, "\cong"'] \arrow[ddd, "\cong"] \\
 & & \varinjlim_r H^d(k,{}_{\ell^r}A) \arrow[ull] \arrow[urr] \arrow[d] & & \\
 & & (\varprojlim_r H^1(k,{}_{\ell^r}A^t))^D \arrow[dll] \arrow[drr] & & \\
(H^0(k,A^t)^{(\ell)})^D \arrow[drr, equal] & & & & (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k,{}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D \arrow[dll] \\
 & & (H^0(k^{nr}/k,A^t(k^{nr}))^{(\ell)})^D & &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $\varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},{}_{\ell^r}A)) \to \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k,{}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D$ est obtenu par composition des isomorphismes

$$\begin{aligned}\varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},{}_{\ell^r}A)) &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k,{}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D.\end{aligned}$$

□

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^d_{nrs}(k,A) := \bigoplus_{\ell \wedge |F_{d-1}|=1} H^d_{nrs}(k,A,\ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^d_{nrs}(k,A,\ell)$ si ℓ ne divise pas $|F_{d-1}|$, triviale sinon.

4 Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))(u)$

Supposons dans cette partie que $d \geq 1$ et que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$. Soient A une variété abélienne sur le corps des fonctions $K = k(X)$ de la courbe X et A^t sa variété abélienne duale. Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de dualité à la Cassels-Tate pour A : plus précisément, nous voulons déterminer, sous certaines hypothèses géométriques et modulo divisibles, le dual du groupe de Tate-Shafarevich $Ш^1(A)$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on adopte des notations analogues à celles de la section 3.2 pour la variété abélienne $A_v = A \times_K K_v$ sur le corps $d+1$-local K_v (on prendra garde au fait que K_v n'est pas d-local). Ainsi, on introduit les schémas en groupes $\mathcal{A}_{v,i}, A_{v,i}, F_{v,i}, U_{v,i}, T_{v,i}, B_{v,i}$ pour $i \in \{0,1,...,d+1\}$ et les schémas en groupes $A_{v,-1}, F_{v,-1}, U_{v,-1}, T_{v,-1}, B_{v,-1}$.
Notons aussi U un ouvert de bonne réduction de A, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\mathcal{A}^t$ le schéma abélien dual.
Fixons maintenant un nombre premier ℓ et faisons l'hypothèse suivante :

(H 4.1)$_\ell$ *pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
- *ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,*
- *la variété abélienne $B_{v,-1}$ et le tore $T_{v,-1}$ sont nuls et les tores $T_{v,d},...,T_{v,0}$ sont anisotropes.*

Remarque 4.2. Étant donnée une variété abélienne A, l'hypothèse précédente est vérifiée pour presque tout ℓ. Par conséquent, les résultats que nous allons montrer sont vrais pour presque tout ℓ.

Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que la variété abélienne $B_{v,-1}$ et le tore $T_{v,-1}$ sont nuls et les tores $T_{v,d},...,T_{v,0}$ sont anisotropes. Pour chaque ouvert V de U, on introduit les groupes suivants :

$$Ш^1_{nr}(V,A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A) \to \prod_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A) \times \prod_{v\in V^{(1)}} \frac{H^1(K_v,A)}{H^1_{nr}(K_v,A))}\right),$$

$$Ш^{d+1}_{nrs}(A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^{d+1}(K,A^t) \to \prod_{v\in Z} H^{d+1}(K_v,A^t) \times \prod_{v\in X^{(1)}\setminus Z} \frac{H^{d+1}(K_v,A^t)}{H^{d+1}_{nrs}(K_v,A^t)}\right),$$

où $H^1_{nr}(K_v, A^t)$ désigne $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}_v) = H^1(K_v^{nr}/K_v, A(K_v^{nr}))$ et $H^{d+1}_{nrs}(K_v, A^t)$ a été défini dans la section 3.5.

Fixons V un ouvert non vide de U.

Lemme 4.3. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Le groupe $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.17. □

Lemme 4.4. *Il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^d(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \to H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

Ici, $H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t\{\ell\})$ et $H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A})$ désignent $\varinjlim_n H^{d+1}(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A}^t)$ et $\varprojlim_n H^2_c(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ respectivement.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.18. □

Lemme 4.5. *Il existe un accouplement canonique :*

$$H^1(V, \mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{d+2}_c(V, T_\ell \mathcal{A}^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.19. □

De plus, d'après la formule de Barsotti-Weil et la nullité de $\underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, on a un accouplement canonique $\mathcal{A}^t \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A} \to \mathbb{G}_m[1]$ qui induit donc un accouplement :

$$H^1(V, \mathcal{A}) \times H^{d+1}_c(V, \mathcal{A}^t) \to H^{d+3}_c(V, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Posons maintenant :

$$D^1(V, \mathcal{A}) = \mathrm{Im}(H^1_c(V, \mathcal{A}) \to H^1(V, \mathcal{A})) = \mathrm{Ker}(H^1(V, \mathcal{A}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A)),$$

$$D^{d+1}_{nrs}(V, \mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}\left(H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t) \to \bigoplus_{v \in Z \setminus V} H^{d+1}(K_v, A^t) \oplus \bigoplus_{v \in X \setminus (V \cup Z)} \frac{H^{d+1}(K_v, A^t)}{H^{d+1}_{nrs}(K_v, A^t))}\right).$$

Ce sont bien sûr des groupes de torsion de type cofini.

Lemme 4.6. *L'application naturelle $H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A)$ induit un isomorphisme $D^1(V, \mathcal{A}) \cong Ш^1_{nr}(V, A)$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.20. □

Afin d'établir un théorème de dualité pour les groupes de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour les groupes $D^1(V,\mathcal{A})$ et $D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)$:

Proposition 4.7. *Il existe un accouplement canonique :*

$$\overline{D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 2.21, à condition d'utiliser les sections 3.3 et 3.5. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.8. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 4.1)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. D'après la proposition 4.7 et le lemme 4.6, on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1_{nr}(V,A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour $V \subseteq V'$ deux ouverts de U, on remarque que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\}$ et $Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$ sont des sous-groupes du groupe de torsion de type cofini $Ш^1_{nr}(U,A)\{\ell\}$ tels que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} \subseteq Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$. On en déduit qu'il existe un ouvert non vide V_0 de U tel que, pour tout ouvert non vide V de V_0, on a $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} = Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\}$. Cela implique que $Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$.
Par ailleurs, on remarque qu'étant donnés deux ouverts non vides $V \subseteq V'$ de V_0, si $x \in D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)$, alors :

- pour $v \in Z \setminus V'$, la restriction de x à $H^{d+1}(K_v,A^t)$ est nulle ;
- pour $v \in (Z \cap V') \setminus V$, la restriction de x à $H^{d+1}(K_v,A^t)$ est dans l'image de $H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\mathcal{A}^t)$, et donc dans $H^{d+1}_{nrs}(K_v,A^t)$, qui est nul car $v \in Z$ d'après la section 3.3 ;
- pour $v \in X \setminus (V' \cup Z)$, la restriction de x à $H^{d+1}(K_v,A^t)$ est dans $H^{d+1}_{nrs}(K_v,A^t)$;
- pour $v \in V' \setminus (V \cup Z)$, la restriction de x à $H^{d+1}(K_v,A^t)$ est dans l'image de $H^{d+1}(\mathcal{O}_v,\mathcal{A}^t)$, et donc dans $H^{d+1}_{nrs}(K_v,A^t)$.

Par conséquent, la restriction $H^{d+1}(V',\mathcal{A}^t) \to H^{d+1}(V,\mathcal{A}^t)$ induit un morphisme $D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t) \to D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)$, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] \arrow[d] & D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] & D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] & \overline{D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \varinjlim_{V \subseteq V_0} D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}$, en passant à la limite inductive, on obtient que la restriction $\overline{D^{d+1}_{nrs}(V_0, \mathcal{A}^t)\{\ell\}} \to \overline{Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\}}$ induit un isomorphisme $\overline{D^{d+1}_{nrs}(V_0, \mathcal{A}^t)\{\ell\}} \xrightarrow{\sim} \overline{Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\}}$. On obtient donc un accouplement non dégénéré de groupes finis :

$$\overline{Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\}} \times \overline{Ш^1(A)\{\ell\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Corollaire 4.9. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 4.1)$_\ell$ et on note $i^t : Ш^{d+1}(A^t) \hookrightarrow Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)$ l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré à gauche de groupes finis :*

$$Ш^{d+1}(A^t)\{\ell\}/(i^t)^{-1}(Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\}_{div}) \times \overline{Ш^1(A)\{\ell\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du corollaire 2.25. □

Question : Quel est le noyau à droite dans l'accouplement précédent ?

5 Variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))$

On suppose dans cette section que $d \geq 2$ et que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique, p étant un nombre premier fixé. Soit A une variété abélienne sur k. On introduit, pour $i \in \{1, 2, ..., d\}$, les notations $\mathcal{A}_i, A_i, F_i, U_i, T_i, B_i$ analogues à celles du début de la section 3.2, de telle sorte que $\mathcal{A}_i$ est défini sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ et A_i, F_i, U_i, T_i, B_i sont définis sur k_i. On note aussi ρ_i le rang du tore T_i pour $i \in \{1, ..., d\}$.
On note A_0 la fibre spéciale de $\mathcal{A}_1$. La composante connexe du neutre A_0^0 de A_0 s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to U_0 \times_{k_0} T_0 \to A_0^0 \to B_0 \to 0$$

où U_0 est un groupe abélien unipotent, T_0 est un tore et B_0 est une variété abélienne sur k_0.
Par ailleurs, si M est un module galoisien sur un corps E, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de E et i un entier, on notera $M\{\ell\}(i) = \varinjlim_r {}_{\ell^r}M \otimes \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(i)$. En tant que groupe abélien, il est isomorphe à $M\{\ell\}$. Par abus de notation, quand G est un groupe algébrique commutatif sur E, on écrira $G\{\ell\}(i)$ au lieu de $G(E^s)\{\ell\}(i)$.

5.1 Dualité modulo divisibles

Posons ${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$ pour chaque entier naturel n non nul et notons $\tilde{A} = \varinjlim_n {}_{(n)}\tilde{A}$.

Remarque 5.1. En tenant compte de la formule de Barsotti-Weil, il serait plus naturel de considérer $\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$ au lieu de $\tilde{A}$. Il se trouve en fait que ces deux faisceaux coïncident, comme le montre l'annexe à la fin de ce texte.

La multiplication par n sur le faisceau de n-torsion $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$ étant injective, $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$ est nul. Cela fournit un morphisme naturel dans la catégorie dérivée ${}_{(n)}\tilde{A} \to \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))[1]$, d'où un morphisme :

$$A \otimes^{\mathbf{L}} {}_{(n)}\tilde{A} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)[1],$$

induisant un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{d-r}(k, {}_{(n)}\tilde{A}) \to H^{d+1}(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

En passant à la limite inductive sur n, on obtient un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{d-r}(k, \tilde{A}) \to H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lemme 5.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. On a l'égalité :*

$${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{Hom}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$$

et la multiplication par n sur $\tilde{A}$ induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to {}_{(n)}\tilde{A} \to \tilde{A} \to \tilde{A} \to 0.$$

Démonstration. La suite exacte courte $0 \to {}_nA \to A \to A \to 0$ induit une suite exacte :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to {}_{(n)}\tilde{A} \to {}_{(n)}\tilde{A}.$$

Comme $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = 0$, on en déduit que :

$${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1).$$

Cela impose aussi que $\tilde{A} = \varinjlim_n {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$. Comme $A^t(k^s)_{tors}$ est divisible, cela montre immédiatement que la multiplication par n sur $\tilde{A}$ induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to {}_{(n)}\tilde{A} \to \tilde{A} \to \tilde{A} \to 0.$$

□

Cela montre que ${}_{(n)}\tilde{A}$ est la n-torsion de $\tilde{A}$. On notera donc par la suite ${}_n\tilde{A}$ au lieu de ${}_{(n)}\tilde{A}$.

Remarque 5.3. En fait, on a montré que $\tilde{A}\{\ell\} = A^t\{\ell\}(d-1)$ pour chaque premier ℓ.

Corollaire 5.4. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k, \tilde{A}))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k, A) \to (H^{d-r}(k, \tilde{A})/n)^D$ est surjectif.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^{r-1}(k,A)/n & \longrightarrow & H^r(k,{}_nA) & \longrightarrow & {}_nH^r(k,A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & ({}_nH^{d+1-r}(k,\tilde{A}))^D & \longrightarrow & H^{d+1-r}(k,{}_n\tilde{A})^D & \longrightarrow & (H^{d-r}(k,\tilde{A})/n)^D & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

où le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le lemme précédent et le théorème I.2.17 de [Mil06]. On en déduit que le morphisme $H^{r-1}(k,A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k,\tilde{A}))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,\tilde{A})/n)^D$ est surjectif. □

Notation 5.5. Pour $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et M un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module discret tel que ${}_nH^r(k,M)$ et $H^r(k,M)/n$ sont finis, on note $\lambda_r(k,n,M) = \frac{|{}_nH^r(k,M)|}{|H^r(k,M)/n|}$.

Proposition 5.6. *Pour $r \in \mathbb{Z}$, il existe des familles d'entiers $(\beta_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^t_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^*_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^{tors}_{0,\ell})_\ell$ et $(\beta^{t,tors}_{0,\ell})_\ell$ indexées par les nombres premiers telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\lambda_r(k,n,A) = \prod_\ell \ell^{\beta_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_r(k,n,A^t) = \prod_\ell \ell^{\beta^t_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_r(k,n,\tilde{A}) = \prod_\ell \ell^{\beta^*_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{tors}_{0,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A^t(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{t,tors}_{0,\ell} v_\ell(n)}.$$

Lorsque $r \geq 1$, les $\beta_{r,\ell}$, les $\beta^t_{r,\ell}$, les $\beta^*_{r,\ell}$, les $\beta^*_{0,\ell}$, les $\beta^{tors}_{0,\ell}$ et les $\beta^{t,tors}_{0,\ell}$ sont positifs. Pour $r < 0$, les entiers $\beta_{r,\ell}$, $\beta^t_{r,\ell}$ et $\beta^*_{r,\ell}$ sont nuls.

Démonstration. Les trois dernières égalités sont évidentes car $A(k)_{tors}$ et $A^t(k)_{tors}$ sont de torsion de type cofini. Montrons les deux premières. Pour $r \geq 1$, elles sont évidentes, puisque les groupes $H^r(k,A)$ et $H^r(k,A^t)$ sont de torsion de type cofini. Le cas $r = 0$ découle alors des formules suivantes (qui découlent de la proposition 1.5) :

$$1 = \chi(k,{}_nA) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r},$$
$$1 = \chi(k,{}_nA^t) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A^t)^{(-1)^r}.$$

□

Théorème 5.7. *Pour $r \geq 1$, le noyau du morphisme $H^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,\tilde{A})^\wedge)^D$ est un groupe de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. Soit $s \in \{-1, 0, ..., d+1\}$. On calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de ${}_nA$ pour chaque n :

$$\begin{aligned}
1 &= \chi(k, {}_nA) \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=s+1}^{d+1} |H^r(k, {}_nA)|^{(-1)^r} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} |H^r(k, {}_n\tilde{A})|^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} \lambda_r(k,n,\tilde{A})^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,\tilde{A})/n|^{(-1)^{s+1}} \\
&= |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,\tilde{A})/n|^{(-1)^{s+1}} \cdot \prod_\ell \ell^{(-1)^{s+1}\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)},
\end{aligned}$$

où $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^*_{r,\ell}$. Par conséquent, si $s \geq 1$ et si N_s désigne le noyau de $H^s(k,A) \to (H^{d-s}(k,\tilde{A})^\wedge)^D$, on obtient :

$$|{}_nN_s| = \frac{|{}_nH^s(k,A)|}{|H^{d-s}(k,\tilde{A})/n|} = \prod_\ell \ell^{\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)}.$$

D'après le lemme 1.3, cela prouve que N_s est divisible. □

En reprenant les notations de la preuve précédente, on a alors :

$$N_s \cong \bigoplus_\ell (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\gamma_{s,\ell}},$$

et nous voulons calculer les $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^*_{r,\ell}$. Avant de passer à la suite, il est utile d'établir des équations reliant les différentes variables que nous avons introduites $(\beta_{r,\ell}, \beta^*_{r,\ell}, \beta^t_{r,p}, \beta^{tors}_{0,\ell}, \beta^{t,tors}_{0,\ell}, \gamma_{r,\ell})$.

Proposition 5.8. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\beta_{r,\ell})_r$ et $(\beta^*_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\left\{ \begin{array}{c}
\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell} \quad \forall r \in \{-1\} \cup \{1, 2, ..., d+1\} \\
\gamma_{0,\ell} = \beta^{tors}_{0,\ell} \\
\beta_{r,\ell} = \beta^*_{d+1-r,\ell} \quad \forall r \in \{2, 3, ..., d+1\} \\
\beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta^*_{d,\ell} - \beta^*_{d+1,\ell} \\
\beta^{tors}_{0,\ell} = \beta^*_{d+1,\ell} \\
\sum_{r=0}^{d+1}(-1)^r\beta_{r,\ell} = 0 \\
\beta_{r,\ell} = \beta^*_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq d+2
\end{array} \right.$$

Démonstration. Exactement comme dans la démonstration du théorème 5.7, on a pour chaque $r \in \{-1, 0, 1, ..., d+1\}$ la relation :

$$1 = |{}_nH^r(k,A)|^{(-1)^r} |H^{d-r}(k,\tilde{A})/n|^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_\ell \ell^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell} v_\ell(n)}$$

avec $\gamma_{r,\ell} = \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{s,\ell} + \sum_{s=0}^{d-r}(-1)^{d+r-s}\beta^*_{s,\ell}$. Cela montre immédiatement que :
- $\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}$ pour $r \in \{1, 2, ..., d-1\} \cup \{-1, d+1\}$,
- $\beta_{0,\ell}^{tors} = \gamma_{0,\ell}$,
- $\beta_{d,\ell} = \gamma_{d,\ell}$ car $\tilde{A}$ est de torsion,

ce qui achève la preuve. □

Remarque 5.9. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à la preuve tout à fait analogue de la proposition 3.6.

5.2 Étude hors de p

On fixe un nombre premier ℓ différent de p.

Conditions suffisantes pour la nullité des $\beta_{r,\ell}$

On procède de manière similaire à la section 3. On commence par des énoncés analogues à ceux des lemmes 3.14 et 3.15.

Lemme 5.10. *Pour chaque entier naturel r et chaque entier i, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ sont (non canoniquement) isomorphes. En particulier, l'un est fini si, et seulement si, l'autre l'est.*

Démonstration. Soit $r \geq 0$. On a un isomorphisme

$$H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)) \cong (\varprojlim_s {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i))^D.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) &= H^r(k_{d-1}, (\varprojlim_s {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i))^D) \\
&\cong \varinjlim_s H^r(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i)^D) \\
&\cong \varinjlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(d-1-i))^D \\
&\cong (\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(d-1-i)))^D.
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant un résultat analogue à celui du lemme 3.13 (dont la preuve est identique quitte à introduire des décalages), les parties divisibles de $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}(i)))$ et de

$$H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(d-1-i)) \cong H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$$

sont isomorphes.
On remarque maintenant que l'on a la suite exacte :

$$0 \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1}) \to F_{d-1}(k^s_{d-1}) \to 0,$$

où A^0_{d-1} désigne la composante connexe du neutre dans A_{d-1}. Il existe donc un $\mathrm{Gal}(k^s_{d-1}/k_{d-1})$-module fini F tel que la suite suivante est exacte :

$$0 \to A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i) \to A_{d-1}\{\ell\}(d-1-i) \to F\{\ell\}(d-1-i) \to 0.$$

On en déduit que les parties divisibles des groupes de type cofini $H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ sont (non canoniquement) isomorphes. $\square$

Lemme 5.11. *Pour chaque entier $r \geq 0$, on a un isomorphisme $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(i))$.*

Démonstration. Comme l'extension k^{nr}/k est non ramifiée par définition, on sait que $A(k^{nr}) = \mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et que le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1})$ est surjectif de noyau uniquement divisible par ℓ. On en déduit que $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(i))$. $\square$

On est maintenant en mesure d'établir la proposition qui fournit des conditions suffisantes pour que les groupes de cohomologie de $A\{\ell\}(i)$ soient finis.

Proposition 5.12. *Soient r un entier naturel et i un entier tels que $r-i-1 \notin \{-1,0,1\}$. Le groupe $H^r(k, A\{\ell\}(i))$ est fini.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur d.
Pour $d = 0$, c'est la proposition 1.22.
Soit d un entier naturel tel que la proposition est vraie au rang $d-1$. Montrons la proposition au rang d. La suite spectrale $H^r(k_{d-1}, H^s(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) \Rightarrow H^{r+s}(k, A\{\ell\}(i))$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i))) \to H^r(k, A\{\ell\}(i)) \to H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) \to ....$$

Étudions les termes $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)))$ et $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$.

- D'après le lemme 5.11, la partie divisible de $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)))$ est isomorphe à celle de $H^r(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(i))$. De plus, la suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A^0_{d-1} \to B_{d-1} \to 0$ montre l'exactitude de :
$$H^r(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(i)) \to H^r(k_{d-1}, A^{d-1}_0\{\ell\}(i)) \to H^r(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(i)),$$
et on a vu dans la proposition 1.16(ii) que $\lambda_r(k_{d-1}, n, T_{d-1}\{\ell\}(i))$ vaut 1 car $r-i-1 \notin \{0,1\}$. Comme $H^r(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(i))$ est fini par hypothèse de récurrence, on conclut que $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)))$ est fini.
- D'après le lemme 5.10, la partie divisible de $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ est isomorphe à celle de $H^{d+1-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$, et $H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ s'insère dans une suite exacte :
$$\begin{array}{c} H^{d-r+1}(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(d-1-i)) \\ \downarrow \\ H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i)) \\ \downarrow \\ H^{d-r+1}(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1-i)), \end{array}$$

où $\lambda_{d-r+1}(k_{d-1}, n, T_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))) = 1$ d'après la proposition 1.16(ii) car $r-i-1 \not\in \{0,-1\}$. Comme $H^{d-r+1}(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ est fini par hypothèse de récurrence, on conclut que $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ est fini.

On en déduit que $H^r(k, A\{\ell\}(i))$ est fini. □

Remarque 5.13. De manière tout à fait analogue, on peut montrer que :
- si $\rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$, alors $H^r(k, A\{\ell\}(i))$ est fini quels que soient r et i ;
- si $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$, alors $H^1(k, A)\{\ell\}$ est fini ;
- pour $i \neq -1$, le groupe $H^0(k, A\{\ell\}(i))$ est fini.

Nous pouvons à présent établir le théorème suivant qui montre la nullité des $\beta_{r,\ell}$ sous certaines hypothèses.

Théorème 5.14. *Soit $\ell \neq p$ un nombre premier.*
(i) Pour $r \in \{3, ..., d+1\}$, on a $\beta_{r,\ell} = 0$.
(ii) Si $\rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$, alors $\beta_{2,\ell} = 0$.
(iii) Si $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$, alors $\beta_{1,\ell} = 0$.
(iv) On a $\sum_{s=0}^{d+1}(-1)^s\beta_{s,\ell} = 0$, $\beta_{0,\ell} = -\sum_{e=1}^{d-1} e\rho_e$ et $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$.

Démonstration. (i) C'est un corollaire immédiat de la proposition 5.12 car $H^r(k, A)\{\ell\} \cong H^r(k, A(k^s)\{\ell\})$.
(ii) C'est un corollaire immédiat de la remarque 5.13 car $H^2(k, A)\{\ell\} \cong H^2(k, A(k^s)\{\ell\})$.
(iii) C'est un corollaire immédiat de la remarque 5.13.
(iv) La preuve est analogue à celles des propositions 5.8 et 3.9 et du corollaire 3.10 en utilisant la proposition 1.14 et la remarque 1.15, ainsi que le lemme I.3.3 et le corollaire I.3.4 de [Mil06].

□

Corollaire 5.15. *La quantité $\sum_{e=1}^{d-1} e\rho_e$ est invariante par isogénie. En particulier, elle prend la même valeur pour A et A^t.*

Conditions nécessaires pour la nullité des $\beta_{r,\ell}$

Dans cette section, nous allons donner des réciproques partielles au théorème 5.14. Nous avons d'abord besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme 5.16. *Soit $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Si $H^1(k_{d-1}, A_{d-1}^0\{\ell\}(i))$ est fini, alors il en est de même de $H^1(k_r, B_r\{\ell\}(i))$ et de $H^1(k_r, A_r^0\{\ell\}(i))$ pour $0 \leq r \leq d-1$. En particulier, cela est vrai si l'on suppose que $H^1(k, A\{\ell\}(i))$ (au lieu de $H^1(k_{d-1}, A_{d-1}^0\{\ell\}(i))$) est fini.*

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence descendante en remarquant $H^2(k_r, T_r\{\ell\}(i))$ est fini pour chaque r d'après la proposition 1.16(ii). □

Lemme 5.17. *Supposons que $H^1(k_r, A_r^0\{\ell\}(-1))$ soit fini pour $0 \leq r \leq d-2$. Alors $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur s que $\rho_s = 0$

- Par hypothèse et d'après la proposition 1.22, les groupes $H^1(k_0, A_0^0\{\ell\}(-1))$ et $H^0(k_0, B_0\{\ell\}(-1))$ sont finis. Il en est donc de même de $H^1(k_0, T_0\{\ell\}(-1))$. Donc $\rho_0 = 0$.
- Soit $s \leq d-2$ tel que $\rho_0 = ... = \rho_{s-1} = 0$. Montrons $\rho_s = 0$. Le groupe $H^1(k_s, A_s^0\{\ell\}(-1))$ est fini. De plus, d'après la remarque 5.13, il en est de même de $H^0(k_s, B_s\{\ell\}(-1))$ puisque $\rho_0 = ... = \rho_{s-1} = 0$. Donc $H^1(k_s, T_s\{\ell\}(-1))$ est fini et $\rho_s = 0$.

□

Théorème 5.18. *Supposons $d \geq 2$. Soit $\ell \neq p$ un nombre premier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\rho_{d-1} = \rho_{d-2} = ... = \rho_0 = 0$ *;*
(ii) $\beta_{d,\ell} = \beta_{d-1,\ell} = ... = \beta_{2,\ell} = 0$ *;*
(iii) $\beta_{2,\ell} = 0$.

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ a déjà été prouvée. Montrons donc que $(ii) \Rightarrow (i)$.
D'après les propositions 1.16(ii) et 5.12, les deux groupes $H^3(k_{d-1}, T_{d-1}(k^s)\{\ell\})$ et $H^3(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s)\{\ell\})$ sont finis. Il en est donc de même de $H^3(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s)\{\ell\})$ et de $H^3(k_{d-1}, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\})$ d'après le lemme 5.10.
Par ailleurs, le groupe $H^2(k, A)\{\ell\}$ est fini car $\beta_{2,\ell} = 0$. Par conséquent, en exploitant la suite spectrale de Hochschild-Serre, on déduit que $H^1(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ est fini. Le lemme 5.10 montre alors la finitude de $H^{d-1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1))$. Comme $H^d(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ est fini (proposition 1.16(ii)), on en déduit qu'il en est de même de $H^{d-1}(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ et donc de $H^{d-2}(k_{d-2}, H^1(k^{nr}_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1)))$ (suite spectrale de Hochschild-Serre et dimension cohomologique de k_{d-2}). Toujours avec le lemme 5.10, on obtient la finitude de $H^1(k_{d-2}, A^0_{d-2}\{\ell\}(-1))$. Le lemme 5.16 montre alors que $H^1(k_r, A_r^0\{\ell\}(-1))$ est fini pour $r \leq d-2$, et avec le lemme 5.17, on obtient $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$.
Reste à montrer que $\rho_{d-1} = 0$. Pour ce faire, on remarque que, d'après la remarque 5.13, le groupe $H^d(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ est fini car $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$. Comme $H^d(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ est aussi fini, il en est de même de $H^d(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ et donc de $H^0(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ d'après le lemme 5.10. On en déduit la finitude de $H^2(k_{d-1}, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ (suite spectrale de Hochschild-Serre et nullité de $\beta_{2,\ell}$) et donc aussi celle de $H^2(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})\{\ell\})$ (lemme 5.11). Le groupe $H^1(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})\{\ell\})$ est fini car $\rho_0 = ... = \rho_{d-2}$ (remarque 5.13). Il en est donc de même de $H^2(k_{d-1}, T_{d-1}(k^s_{d-1})\{\ell\})$, et $\rho_{d-1} = 0$ (proposition 1.16(ii)). □

Remarque 5.19. Plaçons-nous dans le cas où $k = \mathbb{Q}_p((t))$ (et $d = 2$). Dans l'article [Koy00], Y. Koya construit un complexe C de $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-modules pour lequel la multiplication par ℓ^s induit un triangle distingué $({}_{\ell^s}A)' \to C \to C \to ({}_{\ell^s}A)'[1]$ quel que soit l'entier naturel s. Son théorème principal (théorème 1.1) implique que $H^0(k, C)\{\ell\}$ et $H^1(k, C)\{\ell\}$ sont finis quelle soit la variété abélienne A sur k. De plus, sa preuve repose très fortement sur la proposition 4.1, qui impose que, pour chaque $s \geq 0$, on a $|H^0(k, C)/\ell^s| = |{}_{\ell^s}H^0(k, C)|$. Cela montre que la fonction $s \mapsto |H^0(k,C)/\ell^s|$ est bornée. Or on remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{|{}_{\ell^s}H^1(k,C)|}{|{}_{\ell^s}H^2(k,A)|} &= \frac{|{}_{\ell^s}H^1(k,C)|}{|H^1(k,({}_{\ell^s}A)')|}\frac{|H^1(k,({}_{\ell^s}A)')|}{|H^2(k,{}_{\ell^s}A)|}\frac{|H^2(k,{}_{\ell^s}A)|}{|{}_{\ell^s}H^2(k,A)|}\\ &= \frac{|H^1(k,A)/\ell^s|}{|H^0(k,C)/\ell^s|}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $H^2(k,A)\{\ell\}$ est fini, quelle que soit la variété abélienne A. En utilisant le théorème 5.18, cela impose que $\rho_1 = 0$ pour toute variété abélienne A. Mais cela est clairement faux : par exemple, la courbe elliptique $y^2 = x^3 + x^2 + t$ vérifie $\rho_1 = 1$. On en déduit que, parmi le théorème 1.1 et la proposition 4.1 de [Koy00], au moins l'un des deux énoncés est faux. En particulier, la preuve du théorème 1.1 de [Koy00] semble erronée et difficile à rattraper.

5.3 Étude en p

Les résultats sont plus imprécis que dans le paragraphe précédent, puisque nous ne savons pas calculer les parties p-primaires des groupes de cohomologie d'un tore.

Cas général

Voici une condition suffisante pour que les $\beta_{r,p}$ soient nuls :

Proposition 5.20. *Supposons que :*

$$\dim B_1 = \dim T_1 = \dim T_2 = ... = \dim T_{d-1} = 0.$$

Alors $\beta_{r,p} = 0$ pour tout entier r.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 5.14. Elle est en fait beaucoup plus facile ! □

Quelques précisions dans le cas $d = 2$

Dans ce paragraphe, on suppose $d = 2$.

Proposition 5.21. *On a :* $\frac{|H^0(k,A)/n|}{|{}_nH^0(k,A)|} = n^{\rho_1} p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]\cdot(\dim T_1 + \dim B_1)\cdot v_p(n)}$.

Démonstration. On a $H^0(k,A) = A(k) = \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_k)$. On dispose en plus d'une suite exacte $0 \to D \to \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_k) \to A_1(k_1) \to 0$, où D est uniquement divisible (car k_1 est de caractéristique nulle). Le lemme du serpent fournit alors des isomorphismes ${}_nH^0(k,A) \cong {}_nH^0(k_1,A_1)$ et $H^0(k,A)/n \cong H^0(k_1,A_1)/n$. On obtient donc $\frac{|H^0(k,A)/n|}{|{}_nH^0(k,A)|} = \frac{|H^0(k_1,A_1)/n|}{|{}_nH^0(k_1,A_1)|}$. Les suites $0 \to A_1^0 \to A_1 \to F_1 \to 0$ et $0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0$ montrent que :

$$\begin{aligned}\frac{|H^0(k,A)/n|}{|{}_nH^0(k,A)|} &= \frac{|H^0(k_1,A_1^0)/n|}{|{}_nH^0(k_1,A_1^0)|}\\ &= \frac{|H^0(k_1,T_1)/n|}{|{}_nH^0(k_1,T_1)|}\frac{|H^0(k_1,B_1)/n|}{|{}_nH^0(k_1,B_1)|}\\ &= n^{\rho_1} p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]\cdot(\dim T_1 + \dim B_1)\cdot v_p(n)},\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de la proposition 1.14(iii) et du théorème de structure de Mattuck (lemme 3.3 de [Mil06]). □

Théorème 5.22. *On a :*

$$\beta_{0,p} - \beta_{1,p} + \beta_{2,p} - \beta_{3,p} = 0$$
$$\beta_{0,p} = -\rho_1 - [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim T_1 + \dim B_1),$$

Si $\dim B_1 = 0$*, alors* $\beta_{1,p} = \beta_{3,p} = 0$.

Démonstration. Les preuves sont analogues à celle du corollaire 3.10 et à celle du théorème 5.18. □

Corollaire 5.23. *On a* $\dim U_1 = \dim U_1^*$*. En particulier, si* A *a réduction purement additive, alors il en est de même de* A^t*.*

Démonstration. Comme A et A^t sont isogènes, on a $\beta_{0,p} = \beta_{0,p}^*$, d'où :

$$\rho_1 + [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim T_1 + \dim B_1) = \rho_1^* + [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim T_1^* + \dim B_1^*).$$

On en déduit que :

$$\rho_1 + [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim A - \dim U_1) = \rho_1^* + [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim A^t - \dim U_1^*).$$

Or, $\rho_1 = \rho_1^*$ d'après le corollaire 5.15, et bien sûr $\dim A = \dim A^t$. Cela montre que $\dim U_1 = \dim U_1^*$. □

Remarque 5.24. Dans le corollaire précédent, on pourrait bien sûr remplacer A^t par n'importe quelle variété abélienne isogène à A.

5.4 Le noyau de $H^d(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$

Exactement comme dans la section 5.1, on peut montrer que :

Théorème 5.25. *Pour chaque* $r \geq 0$*, il existe un morphisme naturel surjectif* $H^r(k, \tilde{A}) \to (H^{d-r}(k, A)^\wedge)^D$ *dont le noyau est de torsion de type cofini divisible.*

Il se trouve que, dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^d(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient de poser $\tilde{\mathcal{A}} = g_* \tilde{A}$ où $g : \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ désigne l'immersion ouverte, et d'établir quelques propriétés préliminaires :

Lemme 5.26. *(i) Le morphisme naturel* $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d) \to H^1(k, A)$ *est injectif d'image le sous-groupe* $H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ *de* $H^1(k, A)$*.*

(ii) Le faisceau $\tilde{\mathcal{A}}$ *est de torsion. De plus, pour chaque* $n \geq 1$*, on a l'égalité* ${}_n\tilde{\mathcal{A}} = {}_n\mathcal{A}_d^* \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$*.*

(iii) On a un isomorphisme $H^d(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^d(k^{nr}/k, \tilde{A}(k^{nr}))$ *faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} H^d(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "\cong"] & H^d(k, \tilde{A}) \\ H^d(k^{nr}/k, \tilde{A}(k^{nr})) \arrow[ur, "Inf"'] & \end{tikzcd}.$$

Démonstration. Les preuves de (i) et (iii) sont analogues à celle du lemme 2.7. Le fait que $\tilde{\mathcal{A}}$ est de torsion est évident, et pour montrer que ${}_n\tilde{\mathcal{A}} = {}_n\mathcal{A}_d^* \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$, il suffit d'écrire :

$${}_n\tilde{\mathcal{A}} = g_*({}_n\tilde{A}) = g_*({}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)) = g_*({}_nA^t) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1) = {}_n\mathcal{A}_d^* \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1).$$

□

Proposition 5.27. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$ (mais pouvant être éventuellement égal à p).*

(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $H^0(k^{nr}, \tilde{A})$ sont ℓ-divisibles.

(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D.$$

Démonstration. (i) On prouve que $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles exactement de la même manière que dans la proposition 2.8. De plus, on remarque que :

$$H^0(k^{nr}, \tilde{A}) = \varinjlim_n H^0(k^{nr}, {}_n\tilde{A}) \cong \varinjlim_n H^0(k^{nr}, {}_nA^t) = A^t(k^{nr})_{\text{tors}},$$

car k^{nr} contient toutes les racines de l'unité. On en déduit que $H^0(k^{nr}, \tilde{A})$ est ℓ-divisible.

(ii) La preuve est analogue à celle de la proposition 2.8.

□

L'assertion (i) de la proposition précédente permet notamment d'obtenir un isomorphisme :

$$\varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A})) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, \tilde{A})).$$

Comme dans la définition 3.24, nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 5.28. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$ (mais éventuellement égal à p). On appelle **ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de $\tilde{A}$** le groupe :*

$$H^d_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) := (\iota_\ell \circ \varphi)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d))^D) \subseteq H^d(k, \tilde{A})\{\ell\}$$

où $\varphi : H^d(k, \tilde{A}) \to H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, \tilde{A}))$ désigne le morphisme induit par la suite spectrale $H^r(k^{nr}/k, H^s(k^{nr}, \tilde{A})) \Rightarrow H^{r+s}(k, \tilde{A})$ et ι_ℓ l'isomorphisme composé :

$$\begin{aligned} H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, \tilde{A}))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, \tilde{A})) \\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A})) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A(k^{nr})(1-d))^D) \\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \to \frac{H^d(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}})}{\delta(H^{d-2}(\mathcal{O}_k, R^1 g_* \tilde{A}))}\{\ell\} \to H^d_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d))^D \to 0$$

où $\delta : H^{d-2}(\mathcal{O}_k, R^1 g_* \tilde{A}) \to H^d(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}})$ *est le morphisme de bord provenant de la suite spectrale* $H^r(\mathcal{O}_k, R^s g_* \tilde{A}) \Rightarrow H^{r+s}(k, \tilde{A})$*.*

Remarque 5.29. Soit ℓ un nombre premier *différent de* p et ne divisant pas $|F_{d-1}|$. Supposons de plus que $\rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_{d-3} = 0$. Dans ce contexte, on a $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d)\{\ell\} \cong H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))\{\ell\} \cong H^1(k_{d-1}, A_{d-1})\{\ell\} \cong H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1})\{\ell\}$. Comme $H^1(k_{d-1}, T_{d-1})\{\ell\}$ et $H^1(k_{d-1}, B_{d-1})\{\ell\}$ sont finis (voir remarque 5.13 pour la finitude de $H^1(k_{d-1}, B_{d-1})\{\ell\}$), la suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A^0_{d-1} \to B_{d-1} \to 0$ impose que $H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1})\{\ell\}$ est fini. Cela montre la finitude de $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d)\{\ell\}$ et donc la nullité de $T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d)$. Par conséquent :

$$H^d_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell) = \mathrm{Im}(H^d(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^d(k, \tilde{A}))\{\ell\} = H^d_{nr}(k, \tilde{A})\{\ell\}$$

où $H^d_{nr}(k, \tilde{A}) := \mathrm{Im}(H^d(\mathcal{O}_k, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^d(k, \tilde{A}))$. Ainsi, il est vraiment nécessaire de parler du groupe de cohomologie non ramifié symétrisé uniquement dans le cas $\ell = p$. Mais il est quand même utile d'introduire ce groupe quel que soit ℓ pour deux raisons : d'une part, dans le théorème qui suit, c'est avec le groupe de cohomologie non ramifié symétrisé qu'on identifie naturellement le noyau du morphisme de la dualité locale ; d'autre part, cela permet de donner des énoncés vrais pour tout ℓ.

Théorème 5.30. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$ (éventuellement égal à p), la partie ℓ-primaire du noyau de $H^d(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$ est $H^d_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell)$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du théorème 3.25. □

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^d_{nrs}(k, \tilde{A}) := \bigoplus_{\ell \wedge |F_{d-1}|=1} H^d_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^1_{nrs}(k, \tilde{A}, \ell)$ si ℓ ne divise pas $|F_{d-1}|$, triviale sinon.

6 Variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))(u)$

On suppose maintenant que $d \geq 1$ et que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique, p étant un nombre premier fixé. Soient A une variété abélienne sur $K = k(X)$ et $\tilde{A} = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = \varinjlim_n {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)$. Le but de ce paragraphe est d'établir, sous de bonnes hypothèses géométriques sur A, des théorèmes de dualité entre certains groupes de Tate-Shafarevich de A et $\tilde{A}$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on adopte des notations analogues à celles de la section 3.2 pour la variété abélienne $A_v = A \times_K K_v$ sur le corps $d+1$-local K_v (on prendra garde au fait que K_v n'est pas d-local). Ainsi, on introduit les schémas en groupes $\mathcal{A}_{v,i}, A_{v,i}, F_{v,i}, U_{v,i}, T_{v,i}, B_{v,i}$ pour $i \in \{0, 1, ..., d+1\}$.

6.1 Approche sans les groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés

On se donne un entier $r_0 \in \{0, 1, ..., d+1\}$ et un nombre premier ℓ différent de $p = \mathrm{Car}(k_0)$ et on fait les hypothèses suivantes :

(H 6.1)
- *si $r_0 = d$, alors les tores $T_{v,0}, ..., T_{v,d}$ sont anisotropes pour toute place $v \in X^{(1)}$;*
- *si $r_0 = d+1$, alors les tores $T_{v,0}, ..., T_{v,d-1}$ sont anisotropes pour toute place $v \in X^{(1)}$.*

Remarque 6.2. Ces hypothèses sont assez restrictives puisqu'elles portent sur toutes les places $v \in X^{(1)}$ et pas uniquement sur les places de mauvaise réduction (voir remarque 6.10). Dans le paragraphe suivant, on pourra s'affranchir de ces hypothèses grâce aux groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés.

Soit maintenant U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\tilde{\mathcal{A}} = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1))$. En procédant comme dans le lemme 5.2, on montre pour chaque $n > 0$ que :

$$ {}_n\tilde{\mathcal{A}} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = \underline{\mathrm{Hom}}_U({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) = {}_n\mathcal{A}^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) $$

et que la multiplication par n sur $\tilde{\mathcal{A}}$ est surjective.

Lemme 6.3. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(U, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Pour $r > 1$, le groupe $H^r_c(U, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. La preuve est tout à fait analogue à celle du lemme 2.17. □

Lemme 6.4. *Pour $r \geq 0$, il existe des suites exactes :*

$$ 0 \to H^r(U, \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \to H^{r+1}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \to H^{r+1}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \to 0, $$

$$ 0 \to H^r_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to H^{r+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}}) \to T_\ell H^{r+1}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to 0. $$

Ici, $H^{r+1}(U, \mathcal{A}\{\ell\})$ et $H^{r+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}})$ désignent $\varinjlim_n H^{r+1}(U, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ et $\varprojlim_n H^2_c(U, {}_{\ell^n}\tilde{\mathcal{A}})$ respectivement.

Démonstration. La preuve est identique à celle du lemme 2.18. □

Lemme 6.5. *Pour chaque $r \geq 0$, il existe un accouplement canonique :*

$$ H^r(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{d+3-r}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} $$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.19. □

La multiplication par n sur $\underline{\mathrm{Hom}}_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1))$ est en même temps injective et nulle, donc $\underline{\mathrm{Hom}}_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = 0$. Comme de plus $H^{d+3}_c(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (lemme 1.3 du chapitre 1), on a pour chaque $n > 0$, un accouplement :

$$H^r(U, {}_n\tilde{\mathcal{A}}) \times H^{d+2-r}_c(U, \mathcal{A}) \to H^{d+3}_c(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) \to H^{d+3}_c(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En passant à la limite inductive sur n, on obtient un accouplement :

$$H^r(U, \tilde{\mathcal{A}}) \times H^{d+2-r}_c(U, \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Posons maintenant, pour chaque $r \geq 0$:

$$D^r(U, \tilde{\mathcal{A}}) = \mathrm{Im}(H^r_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K, \tilde{A})).$$

Ce groupe est de torsion de type cofini.

Lemme 6.6. *Soit $r \geq 0$. Il existe V_0 un ouvert non vide de U tel que, pour tout ouvert V de V_0, le morphisme $H^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K, \tilde{A})$ induit un isomorphisme :*

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \cong Ш^r(K, \tilde{A}).$$

Démonstration. On remarque que, si $V \subseteq V'$ sont des ouverts dans U, alors $D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \subseteq D^r(V', \tilde{\mathcal{A}})$. Comme $D^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$ est de torsion de type cofini, il existe V_0 un ouvert non vide de U tel que, pour tout V contenu dans V_0, on a :

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) = D^r(V_0, \tilde{\mathcal{A}}).$$

Un tel V_0 convient. □

Afin d'établir un théorème de dualité pour le groupe de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour le groupe $D^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$:

Proposition 6.7. *On suppose (H 6.1). On pose*

$$D^{d+2-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A}) = Ker(H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^{d+2-r_0}(K_v, A)).$$

Il existe alors un accouplement canonique :

$$\overline{D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})}\{\ell\} \times \overline{D^{d+2-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

Lemme 6.8. *La suite :*

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r_0-1}(K_v, \tilde{A})^{(\ell)} \to H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. On a $\tilde{\mathcal{A}} = \varinjlim_n {}_n\tilde{\mathcal{A}}$, et donc, en utilisant la proposition 2.3 du chapitre 1, on a une suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X^{(1)}} H^{r_0-1}(K_v, \tilde{A}) \to H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to 0.$$

Cela étant établi, la preuve est analogue à celle du lemme 2.22. □

Démonstration. (De la proposition 6.7)
Rappelons que, d'après le lemme 6.5, nous disposons d'un accouplement non dégénéré :

$$H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{r_0+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}})) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

d'où un isomorphisme $H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \to (H^{r_0+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}}))^D$. On dispose aussi d'un accouplement :

$$H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A}) \times H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui induit un accouplement :

$$H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \times H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Ainsi on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^{d+1-r_0}(U, \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (T_\ell H^{r_0+1}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}))^D \arrow[r] & (H^{r_0+1}_c(U, T_\ell\tilde{\mathcal{A}}))^D \arrow[r] & (H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^{d+2-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in X^{(1)}} H^{d+2-r_0}(K_v, A)\{\ell\} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & (D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^{r_0}_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \prod_{v \in X^{(1)}} (H^{r_0-1}(K_v, \tilde{A})^{(\ell)})^D \end{tikzcd}$$

En procédant exactement comme dans la proposition 2.21 et en utilisant les sections 5.1 et 5.2 ainsi que l'hypothèse (H 6.1), on montre alors que l'on a un accouplement non dégénéré :

$$\overline{D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})}\{\ell\} \times \overline{D^{d+2-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de conclure :

Théorème 6.9. *On rappelle que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' un corps p-adique et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 6.1). Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes de torsion :*

$$\overline{Ш^{r_0}(K, \tilde{A})}_{non-p} \times \overline{Ш^{d+2-r_0}(K, A)}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, $Ш^{r_0}(K, \tilde{A})$ et $Ш^{d+2-r_0}(K, A)$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la proposition 6.7 et du lemme 6.6 en passant à la limite sur U. $\square$

Remarque 6.10. • Les hypothèses de (H 6.1) concernent toutes les places de $X^{(1)}$. On ne peut pas restreindre ces hypothèses aux places de mauvaise réduction de A puisqu'on ne sait pas si l'ouvert V_0 du lemme 6.6 peut être choisi égal à U. Ce problème vient en particulier du fait que le corps K est de dimension cohomologique 3 et que, même si $v \in X^{(1)}$ est une place de bonne réduction, le groupe $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ peut être non nul !

- Même si le théorème est une dualité modulo divisibles, dans la preuve, on a besoin d'une dualité locale qui n'est pas modulo divisibles. C'est pourquoi nous sommes amenés à faire les hypothèses (H 6.1).

Remarque 6.11. Toute variété abélienne sur K vérifie les hypothèses du théorème lorsque $r_0 = 0$. Dans ce cas, le théorème affirme que la partie divisible de $Ш^{d+2}(K, A)$ est p-primaire.

Exemple 6.12. Dans le cas où k est p-adique et $K = k(u)$, si on se donne $f(u) \in K^\times$, la courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + f(u)$ vérifie les hypothèses du théorème pour $r_0 \in \{1, 2\}$.

6.2 Approche avec les groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés

Soient ℓ un nombre premier (éventuellement égal à p) et U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction. Faisons l'hypothèse suivante :

(H 6.13)$_\ell$
- *si $\ell \neq p$, pour chaque $v \in X \backslash U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
  - *ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,*
  - *les tores $T_{v,d-1}, ..., T_{v,0}$ sont anisotropes.*
- *si $\ell = p$, pour chaque $v \in X \backslash U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
  - *ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,*
  - *les groupes algébriques $T_{v,d}, ..., T_{v,1}$ et $B_{v,1}$ sont triviaux.*

Remarque 6.14. Cette hypothèse est nettement moins forte que l'hypothèse de la section précédente. Elle ne concerne que les places de mauvaise réduction et est vérifiée pour presque tout ℓ.

On note Z l'ensemble suivant :
- si $\ell \neq p$, alors Z désigne l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que les tores $T_{v,d-1}, ..., T_{v,-1}$ sont anisotropes,
- si $\ell = p$, alors Z désigne l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que les groupes algébriques $T_{v,d}, ..., T_{v,1}$ et $B_{v,1}$ sont triviaux.

On introduit le groupe suivant :

$$Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A}) := \mathrm{Ker}\left(H^{d+1}(K,\tilde{A}) \to \prod_{v\in Z} H^{d+1}(K_v,\tilde{A}) \times \prod_{v\in X^{(1)}\setminus Z} H^{d+1}(K_v,\tilde{A})/H^{d+1}_{nrs}(K_v,\tilde{A})\right).$$

En procédant exactement de la même manière que dans la section 4, on peut établir le théorème et le corollaire suivants :

Théorème 6.15. *On rappelle que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' un corps p-adique et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 6.13)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A})\{\ell\}} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Corollaire 6.16. *On rappelle que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' un corps p-adique et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 6.13)$_\ell$ et on note $\tilde{i} : Ш^{d+1}(\tilde{A}) \hookrightarrow Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A})$ l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré à gauche de groupes finis :*

$$Ш^{d+1}(\tilde{A})\{\ell\}/\tilde{i}^{-1}(Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A})\{\ell\}_{div}) \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Question : Quel est le noyau à droite dans l'accouplement précédent ?

Remarque 6.17. Dans le cas où k est un corps p-adique, en utilisant le paragraphe 5.3, il est possible de remplacer l'hypothèse (H 6.13)$_p$ par l'hypothèse légèrement plus faible suivante :

« pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :
- ∘ ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,
- ∘ la variété abélienne $B_{v,1}$ est triviale. »

7 Quelques remarques sur la finitude des groupes de Tate-Shafarevich

Le but de cette section est de donner, pour $k = \mathbb{C}((t))$ ou $k = \mathbb{Q}_p$, des exemples de variétés abéliennes sur K pour lesquelles on peut déterminer si le premier groupe de Tate-Shafarevich est fini ou pas. Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème 3.1 de [Tat66], dont nous rappelons l'énoncé (adapté à notre situation) :

Théorème 7.1. *(théorème 3.1 de [Tat66])*
On rappelle que K est le corps des fonctions de X. Soit Y une surface régulière sur k munie d'un morphisme propre $f : Y \to X$ à fibres de dimension 1. On suppose que les fibres géométriques de f sont connexes, et que la fibre générique est lisse. Si f admet une section, $Br\, X$ est un sous-groupe de $Br\, Y$ et on a un isomorphisme $Ш^1(K, J) \cong Br\, Y/Br\, X$ où J désigne la jacobienne de la fibre générique de f.

7.1 Cas où $k = \mathbb{C}((t))$

On se place dans le cas où $k = \mathbb{C}((t))$.

Cas où Y est un produit

Soient C une courbe projective lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$ et $Y = C \times_k X$. On note J_C (resp. J_X) la jacobienne de C (resp. X) sur k. D'après le théorème 7.1, le groupe $\text{Ш}^1(K, J_C \times_k K)$ est égal à $\text{Br}\ Y/\text{Br}\ X$. Par ailleurs, nous savons que $\text{Br}_1\ Y = H^1(k, \text{Pic}\ Y_{\overline{k}})$ car $\text{Br}\ k = 0$. D'après la proposition 1.7 de [SZ14], le morphisme naturel $H^1(k, \text{Pic}\ C_{\overline{k}}) \times H^1(k, \text{Pic}\ X_{\overline{k}}) \to H^1(k, \text{Pic}\ Y_{\overline{k}})$ a un noyau et un conoyau finis. Écrivons la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to J_C(\overline{k}) \to \text{Pic}\ C_{\overline{k}} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

$$0 \to J_X(\overline{k}) \to \text{Pic}\ X_{\overline{k}} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$\mathbb{Z} \to H^1(k, J_C) \to H^1(k, \text{Pic}\ C_{\overline{k}}) \to 0.$$

$$\mathbb{Z} \to H^1(k, J_X) \to H^1(k, \text{Pic}\ X_{\overline{k}}) \to 0.$$

Les noyaux des morphismes surjectifs $H^1(k, J_C) \to H^1(k, \text{Pic}\ C_{\overline{k}})$ et $H^1(k, J_X) \to H^1(k, \text{Pic}\ X_{\overline{k}})$ sont donc finis. On en déduit que les parties divisibles de $\text{Br}_1\ Y/\text{Br}\ X \cong H^1(k, \text{Pic}\ Y_{\overline{k}})/H^1(k, \text{Pic}\ X_{\overline{k}})$ et $H^1(k, J_C)$ sont égales. Par conséquent, d'après le théorème de Ogg (théorème 1.19), si J_C n'a pas réduction purement additive, alors $\text{Ш}^1(K, J_C \times_k K)_{div} \neq 0$. La réciproque est vraie par exemple si X est de genre 0, puisque dans ce cas, la partie divisible de $\text{Br}\ Y_{\overline{k}}$ est nulle d'après la section 2.9 de [SZ14].

Cas où Y est de dimension de Kodaira $-\infty$

Soit Y une surface projective lisse sur k de dimension de Kodaira $-\infty$. Le cas où Y est une fibration en coniques sur une courbe est inintéressant, puisque la jacobienne de la fibre générique est triviale.
Supposons donc que Y est une surface de del Pezzo (cf section 24 de [Man86]) vérifiant les hypothèses du théorème 7.1. On note J la jacobienne de la fibre générique de $Y \to X$. Soit L une extension finie de k telle que $Y \times_k L$ est rationnelle. Alors, par un argument de restriction-corestriction, $\text{Br}\ Y$ est fini, et donc $\text{Ш}^1(K, J)_{div} = 0$.
Remarquons finalement qu'il existe bien des surfaces de del Pezzo Y vérifiant les hypothèses du théorème 7.1. Par exemple, il suffit de choisir $Y_0/\mathbb{C}$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en les points base d'un pinceau de cubiques et $Y = Y_0 \times_{\mathbb{C}} k$ puisque, dans ce cas, Y est une surface jacobienne sur $\mathbb{P}^1_k$.

Cas où Y est de dimension de Kodaira 0

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le cas où Y est une surface projective lisse minimale sur k de dimension de Kodaira 0. La classification de telles surfaces montre que Y est un twist d'une surface abélienne, une surface bielliptique, une surface K3 ou une surface d'Enriques.

Surfaces abéliennes. Supposons que X soit une courbe elliptique et soit Y le produit de X par une courbe elliptique E. Dans ce cas, Y est une surface abélienne fibrée au-dessus de X. Si E n'a pas réduction purement additive, alors, d'après l'étude menée dans le paragraphe 7.1, $Ш^1(K, E \times_k K)_{div} \neq 0$. Le cas où E a réduction purement additive est plus difficile, puisque $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X$ est fini et il faut donc s'intéresser au groupe de Brauer transcendant $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}(Y \times_k \overline{k}))$.

Surfaces bielliptiques. Soit $Y = (E_1 \times_k E_2)/G$ une surface bielliptique, avec E_1 et E_2 deux courbes elliptiques et G un sous-groupe fini de E_1 agissant sur E_2 de sorte que $E_2/G \cong \mathbb{P}^1_k$. Le morphisme $\pi : Y \to E_1/G$ est alors une fibration elliptique isotriviale, de fibre E_2. On prend $X = E_1/G$ et on suppose que la fibration a une section. Comme le genre géométrique de Y est nul, la dualité de Serre montre que $H^2(X_{\overline{k}}, \mathcal{O}_{X_{\overline{k}}}) = 0$, et donc que le groupe $\mathrm{Br}(Y \times_k \overline{k})$ est fini. De plus, comme $\mathrm{Alb}\, Y = E_1/G = X$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}} \to \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}} \to N \to 0$$

où N désigne un groupe abélien de type fini. On déduit que $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X = H^1(k, \mathrm{Pic}\, Y_{\overline{k}})/H^1(k, \mathrm{Pic}\, X_{\overline{k}})$ est fini. Cela montre que $\mathrm{Br}\, Y/\mathrm{Br}\, X$ est fini, et il en est donc de même de $Ш^1(K, J)$ où J désigne la jacobienne de la fibre générique de π.

Surfaces K3. Supposons que $X = \mathbb{P}^1_k$. Soient Y_0 une surface K3 sur $\mathbb{C}$ telle que $Y = Y_0 \times_{\mathbb{C}} k$ est une surface elliptique sur X avec une section. On note $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$ et $\rho = \mathrm{rg}(NS(Y_0)) = \mathrm{rg}(NS(\overline{Y}))$. Comme la variété d'Albanese de Y est triviale, le groupe $\mathrm{Br}_1\, Y$ est fini. Concernant le groupe de Brauer transcendant de Y, comme $\mathrm{Br}\, Y_0 \cong \mathrm{Br}\, \overline{Y}$, on a $\mathrm{Br}\, \overline{Y} = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y})$. Or $(\mathrm{Br}\, \overline{Y})_{div} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{22-\rho}$. Étant donné que $\rho \leq 20$, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y})_{div} \neq 0$. Le théorème 7.1 permet alors de conclure que $Ш^1(K, J)_{div} \neq 0$ où J est la jacobienne de la fibre générique de $Y \to X$. On remarquera que dans cette situation, la non nullité de $Ш^1(K, J)_{div}$ n'est pas expliquée par le groupe de Brauer algébrique de Y.
Reste à rappeler qu'il existe bel et bien des surfaces K3 sur $\mathbb{C}$ qui sont des surfaces jacobiennes :

- toutes les surfaces K3 avec $\rho \geq 13$ sont jacobiennes (lemme 12.22 de [SS10]) ;
- pour $\rho < 13$, dans la section 3.2 de [HS11], Hulek et Schütt construisent une famille de surfaces K3 qui sont des surfaces jacobiennes et qui vérifient $\rho \geq 10$;
- d'après [CD89], la surface jacobienne d'une surface K3 elliptique est une surface K3 de même rang de Picard, et toute surface K3 avec $\rho \geq 5$ est elliptique.

Surfaces d'Enriques. Si Y est une surface d'Enriques, c'est toujours une surface elliptique, mais elle ne possède jamais de section, ce qui ne permet donc pas d'appliquer le théorème 7.1.

Remarque 7.2. Si Y est une surface projective lisse sur k de dimension de Kodaira 1, alors Y est automatiquement une surface elliptique, mais pas forcément jacobienne. Si Y est de type général, alors Y n'est pas une surface elliptique.

7.2 Cas où $k = \mathbb{Q}_p$

Soient p et ℓ des nombres premiers distincts. On se place dans le cas où k un corps p-adique. Soient C une courbe projective lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$ et $Y = C \times_k X$. On note J_C (resp. J_X) la jacobienne de C (resp. X) sur k. Comme dans le paragraphe précédent, on montre que la partie divisible de $(\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X)\{\ell\}$ est toujours triviale. En particulier, si X est de genre 0, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)\{\ell\}_{div} = 0$ (et ce résultat reste vrai si $C(k) = \emptyset$ par un argument de restriction-corestriction). Par contre, si $J_C \neq 0$, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)\{p\}_{div} \neq 0$.

Question : Si X est de genre 0, est-ce que toute jacobienne J sur K vérifie $Ш^1(K, J)\{\ell\}_{div} = 0$?

Annexe : Le faisceau $\tilde{A}$

En tenant compte de la formule de Barsotti-Weil, il serait naturel de considérer $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$ au lieu de $\tilde{A}$ dans les sections 5 et 6. Il se trouve en fait que ces deux faisceaux coïncident. Pour le voir, il faut utiliser certains travaux de Breen :

Proposition 7.3. *Soient l un corps de caractéristique nulle et X un l-schéma séparé. Soit $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur X. Soient r un entier différent de 1, i un entier quelconque et n un entier naturel non nul.*
(i) On a :

$$\underline{Ext}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) = \underline{Ext}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) = 0.$$

(ii) Le faisceau $\underline{Ext}^1_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ est de torsion.
(iii) On a :

$$\underline{Ext}^1_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) = \varinjlim_n \underline{Ext}^1_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)).$$

Démonstration. (i) • Montrons d'abord que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$ est nul.

- Pour $r = 0$, la multiplication par n est injective sur $\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$. Ce faisceau étant de n-torsion, il est nul.
- Supposons $r \geq 2$. On a une suite exacte :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)).$$

Or, en calculant les tiges de $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$, on voit immédiatement que $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) = 0$. Donc le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$ est n-divisible. Étant de n-torsion, il est nul.

On remarque alors que la nullité de $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$ implique que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ est sans torsion pour $r \neq 1$. Or, comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)$ est de torsion, en utilisant les résultats de [Bre69] (en particulier la méthode décrite dans le paragraphe 6 et le complexe 5.13), on déduit que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ est de torsion. Cela achève la preuve.

(ii) Cela découle de [Bre69] (en particulier la méthode décrite dans le paragraphe 6 et le complexe 5.13).

(iii) D'après (i), on a une suite exacte :

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \to 0.$$

L'assertion (ii) permet alors de conclure.

□

4

Dualité et principe local-global sur des anneaux locaux henséliens de dimension 2

0 Introduction

0.1 Contexte et motivations

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, un corps p-adique, ou encore $\mathbb{C}((t))$. Considérons $K_0 = k((x,y))$ le corps des séries de Laurent à deux variables sur k. On rappelle que K_0 est le corps des fractions de $k[[x,y]]$, un anneau local de dimension 2. Le corps K_0 est strictement contenu dans $k((x))((y))$ et, contrairement à $k((x))((y))$, son comportement est similaire à celui d'un corps global. Le but de ce dernier chapitre de la thèse est d'obtenir des théorèmes de dualité arithmétique sur K_0 (et ses extensions finies), puis de les appliquer à l'étude des points rationnels sur les K_0-variétés algébriques. La principale difficulté que nous devons gérer consiste à établir une dualité d'Artin-Verdier sur un tel corps puisqu'elle demande de travailler avec des schémas singuliers (typiquement on doit considérer la clôture intégrale de $\mathbb{C}[[x,y]]$ dans une extension finie de $\mathbb{C}((x,y))$). C'est un phénomène que l'on ne rencontrait pas dans les chapitres précédents portant sur les corps de fonctions de courbes, puisque dans ces cas-là la dualité d'Artin-Verdier découlait assez formellement de la dualité de Poincaré et d'un théorème de dualité pour le corps de base.

Les motivations pour se pencher sur une telle question sont multiples. Tout d'abord, les corps de la forme $k((x,y))$ ont récemment intéressé plusieurs auteurs (Colliot-Thélène, Gille, Hu, Ojanguren, Parimala, Saito, Suresh...). Citons notamment l'article [CTPS16], dans lequel Colliot-Thélène, Parimala et Suresh introduisent certaines obstructions au principe local-global sur $\mathbb{C}((x,y))$ et se demandent si ce sont les seules pour les espaces principaux homogènes sous des tores. Nous répondrons affirmativement à cette question dans le présent chapitre. Ensuite, les corps de la forme $\mathbb{C}((x,y))$ interviennent de manière importante dans les travaux de Harbater, Hartmann et Krashen dans lesquels ils utilisent des techniques de patching pour étudier le principe local-global sur certains corps de fonctions de courbes (voir par exemple [HHK14]). Il est donc naturel de penser que, si l'on veut comprendre les résultats qu'ils obtiennent avec les techniques de dualité, il convient de commencer par se pencher sur les questions de dualité pour $\mathbb{C}((x,y))$. Finalement, il est probablement nécessaire de comprendre le corps $\mathbb{C}((x,y))$ avant de s'intéresser aux corps de fonctions de surfaces complexes, pour lesquels rien n'est connu actuellement du point de vue de la dualité arithmétique.

0.2 Rappels et notations supplémentaires

Faisceaux. Pour F un faisceau sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ (ou $\underline{\mathrm{Hom}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \mathrm{Hom}_U(F|_U, G|_U)$. De même, pour $n>0$ et pour F un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ (ou $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) le foncteur qui à un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \mathrm{Hom}_{U,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F|_U, G|_U)$. Ainsi :

$$\mathrm{Hom}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Groupes abéliens}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-) : \text{Faisceaux de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\text{-modules sur } X \to \text{Faisceaux sur } X.$$

On remarquera que les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$ peuvent être différents. On notera $\underline{\mathrm{Ext}}^*_X(F,-)$ (resp. $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$) les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,-)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(F,-)$).

Tiges. Si F est un faisceau sur un schéma X et v est un point de X, on note $F_{\overline{v}}$ la tige de F en v : c'est un module galoisien sur le corps résiduel de X en v.

Courbes sur un corps algébriquement clos. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et Y une courbe projective réduite connexe sur k. La normalisation de Y est, par définition, la réunion disjointe des normalisations des composantes irréductibles de Y. Si $\tilde{Y}$ est la normalisation de Y, le lemme 7.5.18(b) de [Liu02] donne une suite exacte :

$$0 \to (k^\times)^t \to \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, \tilde{Y} \to 0,$$

pour un certain entier naturel t. De plus, toujours d'après le lemme 7.5.18(b) de [Liu02], on a $t = \mu - c + 1$ où c est le nombre de composantes irréductibles de Y et $\mu = \sum_{y \in Y(k)} (m_y - 1)$, l'entier m_y désignant le nombre de points de $\tilde{Y}$ qui sont au-dessus de y. Par ailleurs, d'après le théorème 7.4.39 de [Liu02], le groupe $\mathrm{Pic}\, \tilde{Y}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{|Y^{(0)}|} \oplus A$, où A est un groupe abélien divisible tel que, si l'on note g_v le genre de la composante irréductible de Y de point générique v pour chaque $v \in Y^{(0)}$, on a ${}_nA \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2 \cdot \sum_{v \in Y^{(0)}} g_v}$ pour chaque $n>0$. Dans le cas où

$k = \mathbb{C}$, le groupe A est isomorphe à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2\cdot\sum_{v\in Y^{(0)}} g_v}$. Comme $k^\times$ est divisible, la suite exacte précédente est scindée, d'où :

$$\text{Pic } Y \cong (k^\times)^t \oplus \mathbb{Z}^{|Y^{(0)}|} \oplus A.$$

Graphes. On utilisera notamment les notions de graphe biparti et nombre cyclomatique d'un graphe. Par graphe biparti on entend graphe de nombre chromatique 2 au sens du deuxième paragraphe du chapitre IV de [Ber63]. Le nombre cyclomatique est défini dans le premier paragraphe du chapitre IV de [Ber63].

0.3 Les corps étudiés

Soient k un corps et R_0 une k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R_0 \otimes_k k^s$ est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k. Par exemple, R_0 pourrait être le complété ou l'hensélisé d'une surface complexe normale en un de ses points fermés. Soient K_0 le corps des fractions de R_0 et $\mathfrak{m}_0$ l'idéal maximal de R_0. Posons $\mathcal{X}_0 = \text{Spec } R_0$ et $X_0 = \mathcal{X}_0 \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$. Le schéma $\mathcal{X}_0$ est, en général, singulier, alors que X_0 est un schéma de Dedekind (non affine).

Supposons donnés $\tilde{\mathcal{X}}_0$ un schéma régulier intègre de dimension 2 et un morphisme projectif surjectif $f_0 : \tilde{\mathcal{X}}_0 \to \mathcal{X}_0$ induisant un isomorphisme entre $f_0^{-1}(X_0)$ et X_0. Si f_0 n'est pas un isomorphisme, la fibre spéciale $f_0^{-1}(\mathfrak{m}_0)$ de f_0 est une k-courbe en général réductible. Chaque $v \in (\tilde{\mathcal{X}}_0)^{(1)}$ définit une valuation discrète de rang 1 sur K_0. On note alors $K_{0,v}$ le complété correspondant de K_0 et $k(v)$ son corps résiduel. Si $v \notin f_0^{-1}(\mathfrak{m}_0)$, le corps $k(v)$ est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel k. Si $v \in f_0^{-1}(\mathfrak{m}_0)$, le corps $k(v)$ est le corps des fonctions de la composante irréductible de $f_0^{-1}(\mathfrak{m}_0)$ correspondant à v.

Dans le cas où k est algébriquement clos de caractéristique nulle, le corps K_0 est de dimension cohomologique 2, et les $k(v)$ sont de dimension cohomologique 1. De plus, si $v \notin f_0^{-1}(\mathfrak{m}_0)$, le groupe de Galois absolu de $k(v)$ est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$ et, d'après l'exemple I.1.10 de [Mil06], pour chaque module galoisien fini F sur $k(v)$, on a une dualité parfaite de groupes finis :

$$H^0(k(v), F) \times H^1(k(v), \underline{\text{Hom}}(F, k(v)^{s,\times})) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Dans ce contexte, la remarque 2.3 de [CTPS16] fournit une suite exacte :

$$0 \to \text{Br } K_0 \to \bigoplus_{v\in(\tilde{\mathcal{X}}_0)^{(1)}} \text{Br } K_{0,v} \to \bigoplus_{v\in(\tilde{\mathcal{X}}_0)^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

à condition de remarquer que l'application résidu $H^2(K_{0,v}, \mu_n) \to H^1(k(v), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (définie dans l'appendice du chapitre II de [Ser02]) est un isomorphisme.

Pour terminer, on rappelle aussi que, dans le cas où k est séparablement clos, l'indice et l'exposant pour les K_0-algèbres simples centrales coïncident et que la conjecture de Serre II vaut pour K_0. On pourra aller voir le théorème 1.4 de [CTGP04].

0.4 Organisation du chapitre

Ce dernier chapitre de la thèse est constitué de 3 parties. Dans la première section, on établit une dualité de type Artin-Verdier sur le schéma X_0 dans le cas où k est algébriquement clos de caractéristique nulle. Plus précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème 0.1. *(Corollaire 1.27)*
Supposons que k soit algébriquement clos de caractéristique 0. Soient $j : U \hookrightarrow X_0$ une immersion ouverte avec U non vide et F un schéma en groupes fini étale sur U de n-torsion et de dual de Cartier $F' = \underline{Hom}_U(F, \mu_n)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}(X_0, j_!F) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1).$$

Ici, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$ désigne $\mathrm{Hom}(\mu_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, qui, quitte à choisir une racine primitive n-ième de l'unité, est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La preuve du théorème fait l'objet de la totalité de la première section. La principale difficulté consiste à comprendre la cohomologie de $\mathbb{G}_m$ sur la normalisation de R_0 dans une extension finie de son corps des fractions, puisque cela demande de travailler avec des schémas singuliers, même lorsque R_0 est régulier. Ces problèmes sont résolus dans la proposition 1.8.

Dans la deuxième section, nous appliquons la dualité d'Artin-Verdier précédente pour obtenir des théorèmes de dualité de type Poitou-Tate pour les modules finis et les tores sur le corps K_0 lorsque k est un corps algébriquement clos, un corps fini ou encore le corps $\mathbb{C}((t))$. Les principaux résultats sont les théorèmes 2.5 et 2.8.

Finalement, dans la troisième section, nous appliquons les théorèmes de dualité précédents pour étudier les obstructions au principe local-global et à l'approximation faible. Plus précisément, dans les théorèmes 3.2 et 3.4, nous comprenons les obstructions au principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes sur $\mathbb{C}((x, y))$ (par rapport aux places associées aux points de codimension 1 de Spec $\mathbb{C}[[x, y]]$) ainsi que pour les torseurs sous des tores sur $\mathbb{F}_q((x, y))$, $\mathbb{C}((t))((x, y))$ ou $\mathbb{Q}_p((x, y))$. Ce sont précisément ces deux théorèmes (3.2 et 3.4) qui répondent à la question posée à la fin de l'article [CTPS16]. Ils impliquent aussi la proposition suivante :

Proposition 0.2. *(Proposition 3.5)*
Soit k un corps fini de caractéristique p et considérons un tore stablement rationnel T sur $K_0 = k((x, y))$. Soit Y un espace principal homogène sous T qui devient trivial sur une extension finie de K_0 de degré non divisible par p. Alors Y vérifie

le principe local-global par rapport aux places associées aux points de codimension 1 de Spec $k[[x,y]]$.

Remarque 0.3. Une proposition analogue à la précédente est vraie sur un corps de la forme $\mathbb{Q}_p(x)$ (corollaire 5.7 de [HSz16]), mais pas sur un corps de la forme $\mathbb{C}((t))(x)$ (exemple 2.9 de [CTH15]).

À la toute fin du chapitre, dans le théorème 3.7, nous nous penchons sur l'approximation faible pour les tores sur $\mathbb{C}((x,y))$, $\mathbb{C}((t))((x,y))$ ou encore sur $\mathbb{Q}_p((x,y))$.

Le lecteur remarquera que certaines preuves en fin de chapitre sont similaires à des preuves pouvant être trouvées dans la littérature, auquel cas elles ne sont qu'esquissées.

1 Dualité d'Artin-Verdier

Dans toute cette section, on supposera que k est algébriquement clos de caractéristique 0. Le but est de construire pour chaque entier $r \in \mathbb{Z}$ et chaque faisceau constructible F sur un ouvert non vide U de X_0 un accouplement :

$$AV : \mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}(X_0, j_!F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(où $j : U \hookrightarrow X_0$ désigne l'immersion ouverte) et de démontrer qu'il s'agit d'un accouplement parfait de groupes finis. Nous allons suivre le même schéma de preuve que pour le théorème classique d'Artin-Verdier sur les corps de nombres (voir la section II.3 de [Mil06]). Cependant, pour ce faire, il est nécessaire de commencer par comprendre la cohomologie du faisceau $\mathbb{G}_m$ sur les ouverts de X_0. Et cela est nettement plus compliqué que dans le cas des corps de nombres parce qu'il faut gérer les singularités de $\mathcal{X}_0$. C'est une des principales nouveautés apportées par ce travail.

Remarque 1.1. • Dans le cas $K_0 = \mathbb{C}((x,y))$, on pourrait penser que l'on n'a pas besoin de gérer des singularités, puisque $\mathbb{C}[[x,y]]$ est régulier. Cependant, dans la preuve du théorème d'Artin-Verdier, on a besoin de pouvoir remplacer K_0 par des extensions finies, et la clôture intégrale de $\mathbb{C}[[x,y]]$ dans une extension finie de $\mathbb{C}((x,y))$ est, en général, singulière.

- Dans les articles [HSz16] et [CTH15] et dans le premier chapitre de cette thèse, la dualité d'Artin-Verdier ne posait pas trop de difficultés puisqu'elle découlait assez formellement de la dualité de Poincaré et d'une dualité sur le corps de base. C'est une différence majeure entre ce travail et les travaux antérieurs portant sur les théorèmes de dualité sur des corps de fonctions de courbes.
- Il y a très peu de résultats dans la littérature de dualités à la Artin-Verdier dans des cas où il faille considérer des singularités. On peut citer la section II.6 de [Mil06], mais la situation considérée et les preuves sont très différentes de celles du présent chapitre.

1.1 Préliminaire : deux lemmes d'algèbre linéaire

Dans ce paragraphe, on établit deux lemmes d'algèbre linéaire sur les graphes, qui seront très utiles par la suite.

Lemme 1.2. *Soit A un groupe abélien. Soit Γ un graphe fini connexe non orienté biparti. On note $V = V_1 \sqcup V_2$ l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes. Pour $v \in V$, on note $I(v)$ l'ensemble des arêtes ayant v pour extrémité. Soit $(a_v)_{v \in V} \in A^V$ tel que :*

$$\sum_{v \in V_1} a_v = \sum_{v \in V_2} a_v.$$

Alors il existe $(x_e)_{e \in E} \in A^E$ tel que, pour tout $v \in V$, on a :

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = a_v.$$

Démonstration. Considérons un sous-ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ tel que le sous-graphe Γ' de Γ dont l'ensemble des sommets est V et celui des arêtes est E' soit un arbre connexe. En posant $x_e = 0$ pour $e \in E'$, on se ramène à prouver le lemme pour Γ' au lieu de Γ. On peut donc supposer que Γ est un arbre.
On procède alors par récurrence sur $|V|$. Si $|V| = 1$, le résultat est évident. Soit maintenant $n \geq 1$ et supposons le résultat prouvé dans le cas $|V| = n$. Supposons que $|V| = n+1$. Soit Γ' le sous-graphe de Γ obtenu en enlevant une feuille $v_0 \in V$ et l'unique arête $e_0 \in E$ qui lui est incidente. Soit v_1 l'autre extrémité de e_0 et considérons la famille $(b_v)_{v \in V \setminus \{v_0\}}$ définie par $b_v = a_v$ pour $v \notin \{v_0, v_1\}$ et $b_{v_1} = a_{v_1} - a_{v_0}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une famille $(x_e)_{e \in E \setminus \{e_0\}}$ telle que, pour chaque $v \in V \setminus \{v_0\}$, on a :

$$\sum_{e \in I(v) \setminus \{e_0\}} x_e = b_v.$$

On pose $x_{e_0} = a_{v_0}$. On a alors, pour tout $v \in V$:

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = a_v.$$

□

Lemme 1.3. *On reprend les notations du lemme précédent. Soit c le nombre cyclomatique (ou premier nombre de Betti) de Γ. On rappelle que $c = |E| - |V| + 1$. Pour $v \in V$, on note $N(v)$ l'ensemble des voisins de v. Lorsque S est un ensemble, on note Σ_S le morphisme somme $\bigoplus_{s \in S} A \to A$. On pose :*

$$\Theta_A(\Gamma) := \left(\bigoplus_{v \in V_1} Ker\, \Sigma_{N(v)} \right) \cap \left(\bigoplus_{v \in V_2} Ker\, \Sigma_{N(v)} \right) \subseteq \bigoplus_E A.$$

(i) Soit $e_0 \in E$ une arête de Γ telle que le sous-graphe de Γ obtenu en enlevant e_0 est connexe. Notons $p^{\Gamma}_{e_0} : \bigoplus_E A \to A$ la projection sur la composante indexée par e_0. Alors la restriction de $p^{\Gamma}_{e_0}$ à $\Theta_A(\Gamma)$ est surjective et scindée.
(ii) Le groupe $\Theta_A(\Gamma)$ est isomorphe à A^c.

Démonstration. (i) Procédons par récurrence sur c.
- Supposons que $c = 1$. Soit Γ' l'unique sous-graphe cyclique de Γ. On remarque alors immédiatement que $\Theta_A(\Gamma) = \Theta_A(\Gamma') \cong A$ et que $p^{\Gamma}_{e_0}|_{\Theta_A(\Gamma)}$ s'identifie à l'identité sur A.
- Soit $c_0 \geq 1$ et supposons le résultat prouvé pour $c = c_0$. Supposons que Γ est de nombre cyclomatique $c_0 + 1$. Comme Γ est de nombre cyclomatique au moins 2, il existe une arête e_1 telle que le sous-graphe de Γ obtenu en enlevant les arêtes e_0 et e_1 est connexe. Soit alors Γ' le sous-graphe de Γ obtenu en enlevant l'arête e_1. Par hypothèse de récurrence, $p^{\Gamma'}_{e_0}|_{\Theta_A(G')}$ est un morphisme surjectif et scindé. On en déduit immédiatement que $p^{\Gamma}_{e_0}|_{\Theta_A(\Gamma)}$ l'est aussi.

(ii) Procédons par récurrence sur c.
- Supposons que $c = 0$, c'est-à-dire que Γ est un arbre. Soit $(x_e)_{e \in E} \in \Theta_A(\Gamma)$. On remarque alors que, si f une feuille de Γ et si e_f est l'unique arête de Γ ayant f pour extrémité, alors $x_{e_f} = 0$. Une récurrence simple sur le nombre de sommets de Γ permet donc de conclure que $x_e = 0$ pour tout $e \in E$, autrement dit, que $\Theta_A(\Gamma) = 0$.
- Soit $c_0 \geq 0$ et supposons le résultat prouvé pour $c = c_0$. Supposons que Γ est de nombre cyclomatique $c_0 + 1$. Considérons alors un sous-graphe Γ' de Γ, connexe, de nombre cyclomatique c_0, obtenu à partir de Γ en enlevant une arête e_0. On remarque alors immédiatement que l'on a une suite exacte :

$$0 \to \Theta_A(\Gamma') \to \Theta_A(\Gamma) \to A$$

  où le morphisme $\Theta_A(\Gamma) \to A$ est induit par la projection $p^{\Gamma}_{e_0}$. Par conséquent, en utilisant (i) et l'hypothèse de récurrence, on obtient des isomorphismes :

$$\Theta_A(\Gamma) \cong \Theta_A(\Gamma') \oplus A \cong A^{c_0+1}.$$

□

1.2 Résolution des singularités

Soient K une extension finie de K_0 et $\mathcal{O}_K$ la normalisation de R_0 dans K. Comme l'anneau R_0 est local hensélien excellent de dimension 2, il en est de même de $\mathcal{O}_K$ (scholie 7.8.3(ii) de [Gro65] et proposition 18.5.9(i) de [Gro67]). On note alors $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ et on pose $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et $X = \mathcal{X} \setminus \{\mathfrak{m}\}$. On notera aussi $\eta = \mathrm{Spec}\, K$ et $g : \eta \hookrightarrow X$ le point générique de X.

Considérons un morphisme de schémas $f : \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ vérifiant les hypothèses suivantes :
- $\tilde{\mathcal{X}}$ est intègre régulier de dimension 2 et f est projectif ;
- $f : f^{-1}(X) \to X$ est un isomorphisme ;

- $f^{-1}(\mathfrak{m})$ est un diviseur à croisements normaux de $\mathcal{X}$ (au sens de la définition 9.1.6 de [Liu02]).

Un tel morphisme existe d'après [Lip78]. On pose alors $Y = f^{-1}(\mathfrak{m})$ muni de la structure réduite. Ainsi, Y est une k-courbe réduite qui n'est pas forcément irréductible, mais dont les composantes irréductibles sont lisses. Pour $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \backslash X^{(1)} = Y^{(0)}$, on désigne par Y_v la k-courbe projective lisse correspondant à v. On note g_v le genre de cette dernière.

Par ailleurs, à la courbe Y on associe le graphe biparti Γ suivant :
- sommets : $V = V_1 \sqcup V_2$, où $V_1 = Y^{(0)}$ est l'ensemble des (points génériques des) composantes irréductibles de Y et V_2 est l'ensemble des points fermés de Y qui sont intersection de deux composantes irréductibles de Y ;
- arêtes : E est l'ensemble des couples $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ tels que $v_2 \in Y_{v_1}$.

Soit c_Γ le nombre cyclomatique du graphe Γ. On pose finalement :

$$n_X = 2 \sum_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \backslash X^{(1)}} g_v + c_\Gamma.$$

A priori, la quantité n_X dépend de f, mais nous verrons dans la suite qu'en fait elle ne dépend que de X.

Remarque 1.4. Usuellement ce n'est pas le graphe Γ qu'on associe à Y mais le graphe $\Gamma_{\text{réd}}$ défini par :
- sommets : $V_{\text{réd}} = Y^{(0)}$;
- arêtes : $E_{\text{réd}}$ est l'ensemble des couples $(v_1, v_2) \in V_{\text{réd}}^2$ tels que Y_{v_1} et Y_{v_2} s'intersectent.

Le graphe Γ est obtenu à partir de $\Gamma_{\text{réd}}$ est rajoutant un sommet sur chaque arête. En particulier, les deux graphes ont même nombre cyclomatique.

1.3 Les modules Λ et Υ

On rappelle que, pour $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)}$ et $w \in Y_v^{(1)}$, le corps $k(Y_v)_w$ est isomorphe à $k((t))$. Son groupe de Galois absolu est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}$, et donc on a un isomorphisme naturel $H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On peut alors considérer le morphisme naturel :

$$\phi : \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \backslash X^{(1)}} H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

induit par les morphismes de restriction :

$$H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

pour $v \in Y^{(0)}$ et $w \in Y_v^{(1)}$. On pose $\Lambda = \text{Coker } \phi$ et $\Upsilon = \text{Ker } \phi$.

Lemme 1.5. *Le morphisme somme* $\Sigma : \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *induit un isomorphisme* $\Lambda \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Démonstration. Le morphisme ϕ est induit par les morphismes :

$$\phi_v : H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

Or, d'après le théorème 2.7 du chapitre 1 dans le cas $d = -1$, on a une suite exacte :

$$H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\phi_v} \bigoplus\nolimits_{w \in Y_v^{(1)}} H^1(k(Y_v)_w, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Cela montre immédiatement que Σ induit un morphisme surjectif :

$$\Lambda \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Reste à prouver qu'il est injectif. Pour ce faire, on se donne $\alpha = (\alpha_w)_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \in \text{Ker } \Sigma$ et on considère le graphe biparti Γ. Pour $v_1 \in V_1$, on pose $a_{v_1} = -\sum_{w \in Y_{v_1}^{(1)} \setminus V_2} \alpha_w$. Pour $v_2 \in V_2$, on pose $a_{v_2} = \alpha_{v_2}$. Comme $(\alpha_w) \in \text{Ker } \Sigma$, on vérifie immédiatement que :

$$\sum_{v \in V_1} a_v = \sum_{v \in V_2} a_v.$$

De plus, le graphe Γ est connexe d'après le principe de connexité de Zariski (corollaire 5.3.16 de [Liu02]). Par conséquent, le lemme 1.2 montre qu'il existe $(x_e)_{e \in E} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^E$ tel que, pour tout $v \in V$, on a :

$$\sum_{e \in I(v)} x_e = a_v.$$

Pour $v_1 \in V_1$, on considère la famille $y_{v_1} = (y_{v_1,w})_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}}$ définie par :
- $y_{v_1,w} = 0$ si $w \notin Y_{v_1}$;
- $y_{v_1,w} = \alpha_w$ si $w \in Y_{v_1} \setminus V_2$;
- $y_{v_1,w} = x_{(v_1,w)}$ si $(v_1, w) \in E$.

On remarque alors que, pour chaque $v_1 \in V_1$, on a $\sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} y_{v_1,w} = 0$. Par conséquent, la suite exacte (4.1) montre que $y \in \text{Im}(\phi_{v_1})$. Comme $\sum_{v \in V_1} y_v = \alpha$, on en déduit que $\alpha \in \text{Im}(\phi)$ et Σ induit bien un isomorphisme $\Lambda \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

Lemme 1.6. *Le groupe abélien Υ est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$.*

Démonstration. En reprenant les notations du lemme précédent et en utilisant la suite (4.1), on remarque que l'on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Ker } \phi_v \to \Upsilon \to \Theta \to 0,$$

où :

$$\Theta = \text{Ker}\left(\Sigma : \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Ker}\left(\Sigma : \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \to \bigoplus_{w \in \mathcal{X}^{(1)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right).$$

Or :

- pour $v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}$, le morphisme ϕ_v s'identifie au morphisme :

$$H^1(k(Y_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{w \in Y_v^{(1)}} H^0(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

  induit par les résidus (dont on peut trouver la définition dans l'appendice du chapitre II de [Ser02]), et donc Ker $\phi_v = H^1(Y_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2g_v}$;
- le groupe abélien Θ est en fait $\Theta_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(\Gamma)$ et donc, d'après le lemme 1.3, il est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_\Gamma}$.

On en déduit que $\Upsilon \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$. □

1.4 Accouplement d'Artin-Verdier

Fixons un ouvert U de X non vide, ainsi qu'un faisceau constructible F sur U. Soit $j : U \to X$ l'immersion ouverte et posons $H^r_c(U, F) = H^r(X, j_!F)$ pour $r \geq 0$. Par convention, $H^r_c(U, F)$ est le groupe trivial lorsque $r < 0$. Si $D(U)$ désigne la catégorie dérivée bornée des faisceaux sur le petit site étale de U, en identifiant $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}_{D(U)}(F, \mathbb{G}_m[r])$, on obtient un accouplement naturel :

$$AV : \mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m).$$

Remarque 1.7. Nous travaillons avec le corps K (au lieu du corps K_0) parce que, même si les extensions finies de K_0 vérifient les mêmes hypothèses que K_0 et même si le théorème 0.1 ne fait intervenir que le corps K_0, nous démontrerons le théorème 0.1 en prouvant par récurrence qu'il est vrai pour toutes les extensions finies de K. En fait, l'accouplement du théorème 0.1 coïncidera avec l'accouplement AV dans le cas $K = K_0$ une fois que l'on aura identifié $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ à $H^r(U, F')$ et $H^3_c(U, \mathbb{G}_m)$ à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Montrons maintenant que $H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Proposition 1.8. ***(Cohomologie de $\mathbb{G}_m$)***
(i) On a une suite exacte :

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to Br(K) \to \bigoplus_{v \in U^{(1)}} Br(K_v) \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

De plus, $H^r(U, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r > 3$.
(ii) On a une suite exacte :

$$Br\, K \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} Br\, K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

où le morphisme $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} Br\, K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est obtenu par composition du morphisme $\bigoplus_{v \in X^{(1)}} Br\, K_v \to \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induit par le complexe de Bloch-Ogus suivi du morphisme somme $\sum : \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(iii) Le groupe $H^3_c(U, \mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(iv) Le groupe Br X est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$.
(v) Pour tout entier naturel non nul m, les groupes ${}_m Pic\ X$ et $Pic\ X/m$ sont finis et on a :

$$\frac{|{}_m Pic\ X|}{|Pic\ X/m|} = m^{n_X}.$$

Remarque 1.9. En particulier, n_X ne dépend que de X.

Démonstration. (i) On dispose d'une suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to \mathbb{G}_m \to g_*\mathbb{G}_m \to \mathrm{Div}_U \to 0,$$

où $g : \eta \hookrightarrow U$ désigne l'inclusion du point générique et Div_U le faisceau des diviseurs sur U (le lecteur pourra trouver sa définition dans l'exemple II.3.9 de [Mil06]). La suite exacte longue associée s'écrit :

$$... \to H^r(U, \mathbb{G}_m) \to H^r(U, g_*\mathbb{G}_m) \to H^r(U, \mathrm{Div}_U) \to ...$$

Si i_v désigne l'immersion fermée Spec $(k(v)) \hookrightarrow U$, on a $\mathrm{Div}_U = \bigoplus_{v \in U^{(1)}} i_{v*}\mathbb{Z}$, et donc, comme i_v est un morphisme fini :

$$H^r(U, \mathrm{Div}_U) = \bigoplus_{v\in U^{(1)}} H^r(U, i_{v*}\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{v\in U^{(1)}} H^r(k(v), \mathbb{Z}).$$

Par ailleurs, pour $s > 0$, la tige de $R^s g_*\mathbb{G}_m$ en un point géométrique $\overline{\eta}$ d'image η est $H^s(K^s, \mathbb{G}_m) = 0$ et, pour $v \in U \setminus \{\eta\}$, la tige de $R^s g_*\mathbb{G}_m$ en un point géométrique $\overline{v}$ d'image v est $H^s(K_v^{nr}, \mathbb{G}_m)$, qui vaut 0 pour $s = 1$ d'après le théorème de Hilbert 90 et qui vaut 0 pour $s > 1$ parce que K_v^{nr} est un corps de dimension cohomologique au plus 1 (exemple II.3.3.c de [Ser02]). On en déduit que $R^s g_*\mathbb{G}_m = 0$. La suite spectrale de Leray :

$$H^r(U, R^s g_*\mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{r+s}(K, \mathbb{G}_m)$$

fournit alors des isomorphismes $H^r(U, g_*\mathbb{G}_m) \cong H^r(K, \mathbb{G}_m)$. Par conséquent, on obtient la suite exacte :

$$0 \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v\in U^{(1)}} \mathrm{Br}(K_v) \to H^3(U, \mathbb{G}_m) \to 0$$

ainsi que la trivialité de $H^r(U, \mathbb{G}_m)$ pour $r > 3$ puisque K est de dimension cohomologique 2.

(ii) Le schéma $\tilde{\mathcal{X}}$ étant régulier, d'après la remarque 2.3 de [CTPS16], il existe une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Br}\ K \to \bigoplus_{v\in\tilde{\mathcal{X}}^{(1)}} \mathrm{Br}\ K_v \to \bigoplus_{w\in\tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{4.2}$$

On obtient alors une suite exacte :

$$\mathrm{Br}\ K \to \bigoplus_{v\in X^{(1)}} \mathrm{Br}\ K_v \to \Lambda \to 0,$$

où $\Lambda \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'après le lemme 1.5.

(iii) Avec (i), la propriété (ii) montre alors que :
- si $U = X$, alors $H^3_c(X, \mathbb{G}_m) = H^3(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
- si $U \neq X$, alors Br K se surjecte sur $\bigoplus_{v \in U^{(1)}} \text{Br } K_v$ et donc $H^3(U, \mathbb{G}_m) = 0$. Cela permet d'obtenir une suite exacte :

$$H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in X \setminus U} \text{Br } K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Il suffit alors d'écrire la suite exacte de localisation (proposition 3.1.(1) de [HSz16]) :

$$0 \to H^2_c(U, \mathbb{G}_m) \to H^2(U, \mathbb{G}_m) \to \bigoplus_{v \in X \setminus U} \text{Br } K_v \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \to 0$$

pour conclure que $H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(iv) D'après (i), on a une suite exacte :

$$0 \to H^2(X, \mathbb{G}_m) \to \text{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \text{Br}(K_v) \to H^3(X, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

En exploitant la suite (4.2), on obtient alors une suite exacte :

$$0 \to \text{Br } X \to \bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} \setminus X^{(1)}} \text{Br } K_v \to \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3(X, \mathbb{G}_m) \to 0.$$

Donc, d'après le lemme 1.6, on a Br $X = \Upsilon \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{n_X}$.

(v) Si $j : X \hookrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ désigne l'immersion ouverte et $\text{Div}^Y_{\tilde{\mathcal{X}}}$ le faisceau des diviseurs de $\tilde{\mathcal{X}}$ à support dans $Y = f^{-1}(\mathfrak{m})$ (c'est-à-dire le faisceau associé au préfaisceau qui à un morphisme étale $\varphi : T \to \tilde{\mathcal{X}}$ associe le groupe des diviseurs de $\tilde{\mathcal{X}}$ à support dans $\varphi^{-1}(Y)$), la suite exacte $0 \to \mathbb{G}_m \to j_*\mathbb{G}_m \to \text{Div}^Y_{\tilde{\mathcal{X}}} \to 0$ induit une suite exacte longue :

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(\tilde{\mathcal{X}})^\times \to \mathcal{O}_X(X)^\times \to \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} \mathbb{Z} \to \text{Pic } \tilde{\mathcal{X}} \to \text{Pic } X \to 0.$$

Comme $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_K$ est hensélien et la caractéristique résiduelle de K est nulle, le lemme de Hensel montre que $\mathcal{O}_X(X)^\times$ est divisible. Par conséquent, le morphisme $\mathcal{O}_X(X)^\times \to \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} \mathbb{Z}$ est nul, et on a une suite exacte :

$$0 \to \bigoplus_{v \in Y^{(0)}} \mathbb{Z} \to \text{Pic } \tilde{\mathcal{X}} \to \text{Pic } X \to 0 \tag{4.3}$$

et un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(\tilde{\mathcal{X}})^\times \cong \mathcal{O}_X(X)^\times.$$

Cela entraîne en particulier que le groupe $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(\tilde{\mathcal{X}})^\times$ est divisible. Comme le groupe de Brauer de $\tilde{\mathcal{X}}$ est trivial (d'après le corollaire 1.10 de [CTOP02]), la suite exacte de Kummer $1 \to \mu_m \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$ fournit des isomorphismes :

$$_m\text{Pic } \tilde{\mathcal{X}} \cong H^1(\tilde{\mathcal{X}}, \mu_m) \cong H^1(Y, \mu_m) \cong {}_m\text{Pic } Y,$$
$$(\text{Pic } \tilde{\mathcal{X}})/m \cong H^2(\tilde{\mathcal{X}}, \mu_m) \cong H^2(Y, \mu_m) \cong (\text{Pic } Y)/m.$$

Nous devons donc calculer Pic Y. Comme cela a été rappelé au début du chapitre, il existe un groupe abélien divisible A tel que ${}_mA \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2\cdot\sum_{v\in Y^{(0)}} g_v}$ pour chaque $m > 0$ et :

$$\text{Pic } Y \cong (k^\times)^t \oplus \mathbb{Z}^{|Y^{(0)}|} \oplus A.$$

En notant m_y le nombre de points de la normalisation de Y qui sont au-dessus de y pour chaque $y \in Y(k)$, l'entier t est égal à $\mu - c + 1$ où c est le nombre de composantes irréductibles de Y et $\mu = \sum_{y\in Y(k)}(m_y - 1)$. Dans notre situation, $m_y = 2$ si y est intersection de deux composantes de Y et $m_y = 1$ sinon. Par conséquent, en termes du graphe Γ, on a $\mu = |V_2|$, $c = |V_1|$ et $t = |V_2| - |V_1| + 1$. Comme les sommets de Γ qui sont dans V_2 sont tous de degré 2, on a $|E| = 2|V_2|$, et donc la formule d'Euler pour les graphes montre que $t = |V_2| - |V_1| + 1 = -|V| + |E| + 1 = c_\Gamma$. On obtient ainsi que :

$$\text{Pic } Y \cong (k^\times)^{c_\Gamma} \oplus \mathbb{Z}^{|Y^{(0)}|} \oplus A. \tag{4.4}$$

On déduit alors de (4.3) et (4.4) que, pour tout $m > 0$, les groupes ${}_m\text{Pic } X$ et $\text{Pic } X/m$ sont finis, et que :

$$\begin{aligned}
\frac{|{}_m\text{Pic } X|}{|\text{Pic } X/m|} &= m^{|Y^{(0)}|}\cdot\frac{|{}_m\text{Pic } \tilde{\mathcal{X}}|}{|\text{Pic } \tilde{\mathcal{X}}/m|} && \text{(d'après (4.3))}\\
&= m^{|Y^{(0)}|}\cdot\frac{|{}_m\text{Pic } Y|}{|(\text{Pic } Y)/m|}\\
&= m^{|Y^{(0)}|}\cdot m^{c_\Gamma - |Y^{(0)}| + 2\sum_{v\in Y^{(0)}} g_v} && \text{(d'après (4.4))}\\
&= m^{n_X}.
\end{aligned}$$

□

Maintenant que nous avons prouvé que $H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dans la proposition 1.8, l'accouplement AV introduit au début de ce paragraphe 1.4 donne, pour chaque entier $r \in \mathbb{Z}$, un accouplement naturel :

$$AV : \text{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.10. *On rappelle que k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et que R_0 est une k-algèbre commutative, locale, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_0$, géométriquement intègre (ie $R_0 \otimes_k k^s$ est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2, de corps résiduel k et de corps des fractions K_0. On rappelle aussi que F est un faisceau constructible sur un ouvert non vide U de la normalisation X de $X_0 = Spec\ R_0 \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$ dans une extension finie K de K_0. L'accouplement*

$$AV : Ext^r_U(F, \mathbb{G}_m) \times H^{3-r}_c(U, F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est un accouplement parfait de groupes finis.

Pour ce faire, on introduit le morphisme :

$$\alpha^r(U, F) : \text{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m) \to H^{3-r}_c(U, F)^D$$

induit par l'accouplement AV.

1.5 Le cas d'un faisceau à support dans un fermé strict

À partir d'ici et jusqu'à la section 1.12, les preuves vont être très similaires à celles du paragraphe II.3 de [Mil06]. On commence par s'intéresser au cas où le support de F est contenu dans un fermé strict de U.

Lemme 1.11. *Supposons que F est à support dans un fermé strict Z de U. Alors, pour tout $r \geq 0$,*

$$\bigoplus_{v \in Z} Ext_v^{r-1}(i_v^* F, \mathbb{Z}) \cong Ext_U^r(F, \mathbb{G}_m),$$

où, pour $v \in Z$, i_v désigne l'immersion fermée $Spec(k(v)) \hookrightarrow U$.

Démonstration. Nous disposons d'une suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to \mathbb{G}_m \to g_* \mathbb{G}_m \to \mathrm{Div}_U \to 0$$

avec $\mathrm{Div}_U = \bigoplus_{v \in U^{(1)}} i_{v*}\mathbb{Z}$. On obtient alors une suite exacte longue :

$$... \to \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}_U^r(F, g_*\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathrm{Div}_U) \to ... \tag{4.5}$$

- D'une part, comme dans la preuve de la proposition 1.8, pour $s > 0$ le faisceau $R^s g_* \mathbb{G}_m$ est nul. Cela implique que la suite spectrale

  $$\mathrm{Ext}_U^r(F, R^s g_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathrm{Ext}_K^{r+s}(g^* F, \mathbb{G}_m)$$

  (obtenue à partir de la suite spectrale $\mathrm{Ext}_U^r(F, R^s g_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow \mathrm{Ext}_U^{r+s}(F, \mathbb{R} g_* \mathbb{G}_m)$ en identifiant $\mathrm{Ext}_U^{r+s}(F, \mathbb{R} g_* \mathbb{G}_m)$ avec $\mathrm{Ext}_K^{r+s}(g^* F, \mathbb{G}_m)$) induit des isomorphismes $\mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}_K^r(g^* F, \mathbb{G}_m)$. Or $g^* F = 0$. Donc $\mathrm{Ext}_U^r(F, g_* \mathbb{G}_m) = 0$.
- D'autre part :

  $$\mathrm{Ext}_U^r(F, \mathrm{Div}_U) = \bigoplus_{v \in U^{(1)}} \mathrm{Ext}_U^r(F, i_{v*}\mathbb{Z}) = \bigoplus_{v \in U^{(1)}} \mathrm{Ext}_v^r({i_v}^* F, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}_v^r({i_v}^* F, \mathbb{Z}),$$

  car $i_v^* F = 0$ pour $v \in Z$.

Par conséquent, à l'aide de la suite (4.5), on obtient des isomorphismes :

$$\bigoplus_{v \in Z} \mathrm{Ext}_v^{r-1}(i_v^* F, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}_U^r(F, \mathbb{G}_m)$$

pour $r \geq 0$. □

Proposition 1.12. *Supposons que F est à support dans un fermé strict Z de U. Alors $\alpha^r(U, F)$ est un isomorphisme de groupes finis pour tout entier r.*

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration précédente. Nous avons des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m) &\cong \bigoplus_{v\in Z} \mathrm{Ext}^{r-1}_v(i_v^*F,\mathbb{Z}) && (4.6)\\
&\cong \bigoplus_{v\in Z} \mathrm{Ext}^{r-1}_{k(v)}(F_{\overline{v}},\mathbb{Z}) && (4.7)\\
&\cong \bigoplus_{v\in Z} \mathrm{Ext}^{r-2}_{k(v)}(F_{\overline{v}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) && (4.8)\\
&\cong \bigoplus_{v\in Z} H^{r-2}(k(v),\mathrm{Hom}(F_{\overline{v}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) && (4.9)
\end{aligned}$$

$$H^r_c(U,F)\cong H^r(Z,i^*F)\cong \bigoplus_{v\in Z} H^r(v,i_v^*F)\cong \bigoplus_{v\in Z} H^r(k(v),F_{\overline{v}}),$$

où (4.6) découle du lemme précédent, (4.8) découle de l'annulation de $\mathrm{Ext}^{r-2}_{k(v)}(F_{\overline{v}},\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Ext}^{r-1}_{k(v)}(F_{\overline{v}},\mathbb{Q})$, et (4.9) découle de la suite spectrale des Ext. À travers ces isomorphismes, l'accouplement :

$$\mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m)\times H^{3-r}_c(U,F)\to H^3_c(U,\mathbb{G}_m)\cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

s'identifie à l'accouplement naturel :

$$\bigoplus_{v\in Z} H^{r-2}(k(v),\mathrm{Hom}(F_{\overline{v}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\times \bigoplus_{v\in Z} H^{3-r}(k(v),F_{\overline{v}})\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

qui est bien un accouplement parfait de groupes finis (exemple I.1.10 de [Mil06]). □

1.6 Changement d'ouvert

Nous allons maintenant voir que, si V désigne un ouvert de U, alors $\alpha^r(U,F)$ est un isomorphisme pour tout entier r si, et seulement si, $\alpha^r(V,F|_V)$ l'est.

Lemme 1.13. *Soit $0\to F'\to F\to F''\to 0$ une suite exacte de faisceaux constructibles sur U. Supposons que $\alpha^r(U,F'')$ est un isomorphisme pour tout entier r. Alors $\alpha^r(U,F')$ est un isomorphisme pour tout entier r si, et seulement si, $\alpha^r(U,F)$ est un isomorphisme pour tout entier r.*

Démonstration. Supposons que $\alpha^r(U,F')$ est un isomorphisme pour tout entier r. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{r-1}_U(F',\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^r_U(F'',\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^r_U(F',\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^{r+1}_U(F'',\mathbb{G}_m) \arrow[d, "\cong"] \\
(H^{4-r}_c(U,F'))^D \arrow[r] & (H^{3-r}_c(U,F''))^D \arrow[r] & (H^{3-r}_c(U,F))^D \arrow[r] & (H^{3-r}_c(U,F'))^D \arrow[r] & (H^{2-r}_c(U,F''))^D
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par les α^r. Le lemme des cinq permet de conclure que $\alpha^r(U,F)$ est un isomorphisme pour tout entier r. La réciproque est analogue. □

Proposition 1.14. *Soit V un ouvert non vide de U. Alors $\alpha^r(U,F)$ est un isomorphisme pour tout entier r si, et seulement si, $\alpha^r(V,F|_V)$ l'est.*

Démonstration. Nous disposons d'une immersion ouverte $j : V \hookrightarrow U$ et d'une immersion fermée $i : U \setminus V \hookrightarrow U$, et donc d'une suite exacte de faisceaux sur U :

$$0 \to j_!j^*F \to F \to i_*i^*F \to 0.$$

D'après la proposition 1.12, $\alpha^r(U, i_*i^*F)$ est un isomorphisme pour tout r, et donc, d'après le lemme précédent, $\alpha^r(U,F)$ est un isomorphisme pour tout r si, et seulement si, $\alpha^r(U, j_!j^*F)$ l'est.
Or $\mathrm{Ext}^r_U(j_!j^*F, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^r_V(j^*F, \mathbb{G}_m)$ et $H^r_c(U, j_!j^*F) \cong H^r_c(V, j^*F)$. À travers ces isomorphismes, $\alpha^r(U, j_!j^*F)$ s'identifie à $\alpha^r(V, j^*F)$. On en déduit immédiatement le résultat. □

Remarque 1.15. La proposition 1.12 et la démonstration précédente montrent aussi que :
- $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ est fini si, et seulement si, $\mathrm{Ext}^r_V(F, \mathbb{G}_m)$ l'est ;
- pour $r \geq 4$, le groupe $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ est nul si, et seulement si, $\mathrm{Ext}^r_V(F, \mathbb{G}_m)$ l'est ;
- $H^r_c(U,F)$ est fini si, et seulement si, $H^r_c(V,F)$ l'est.

Par ailleurs, la suite exacte :

$$\bigoplus_{v \in X\setminus U} H^{r-1}(K_v, F) \to H^r_c(U,F) \to H^r(U,F) \to \bigoplus_{v \in X\setminus U} H^r(K_v, F)$$

montre que $H^r(U,F)$ est fini si, et seulement si, $H^r_c(U,F)$ l'est.

1.7 Propriétés de finitude

Nous allons maintenant établir que $H^r_c(U,F)$ et $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$ sont bien finis.

Lemme 1.16. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, les groupes $H^r(U, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $Ext^r_U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ sont finis.*

Démonstration. Les suites exactes de faisceaux :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$
$$0 \to \mu_m \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0$$

fournissent des suites exactes longues :

$$... \to \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \to H^r(X, \mathbb{G}_m) \to H^r(X, \mathbb{G}_m) \to ...$$
$$... \to H^r(X, \mu_m) \to H^r(X, \mathbb{G}_m) \to H^r(X, \mathbb{G}_m) \to ...$$

Or, d'après la proposition 1.8, les groupes ${}_mH^r(X, \mathbb{G}_m)$ et $H^r(X, \mathbb{G}_m)/m$ sont finis pour tout $r \in \mathbb{N}$. Comme $\mu_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, on en déduit que $H^r(X, \mu_m) \cong H^r(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ sont finis. La remarque 1.15 permet alors de conclure. □

Proposition 1.17. *Rappelons que U est un ouvert non vide de X et que F est un faisceau constructible sur U. Soit $r \in \mathbb{N}$.*
(i) Le groupe $H^r_c(U,F)$ est fini.
(ii) Le groupe $Ext^r_U(F,\mathbb{G}_m)$ est fini.

Démonstration. (i) Soit V un ouvert non vide de U sur lequel F est localement constant. Considérons un morphisme fini étale $V' \to V$ tel que V' est connexe et $F|_{V'}$ est constant. On remarque alors que V' est la normalisation de V dans une extension finie L de K. Si l'on note $G = \text{Gal }(L/K)$, on dispose alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^r(G, H^s(V', F|_{V'})) \Rightarrow H^{r+s}(V, F|_V).$$

Or $H^s(V', F|_{V'})$ est fini pour $s \geq 0$ d'après le lemme 1.16. Par conséquent, $H^r(V, F|_V)$ est fini pour tout $r \geq 0$. La remarque 1.15 permet alors de conclure.
(ii) En reprenant les notations de (i), on a une suite spectrale :

$$H^r(G, \text{Ext}^s_{V'}(F|_{V'}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \text{Ext}^{r+s}_V(F|_V, \mathbb{G}_m).$$

Or $\text{Ext}^s_{V'}(F|_{V'}, \mathbb{G}_m)$ est fini pour $s \geq 0$ d'après le lemme 1.16. Par conséquent, $\text{Ext}^r_V(F|_V, \mathbb{G}_m)$ est fini pour tout $r \geq 0$. La remarque 1.15 permet alors de conclure.

□

1.8 Annulation de $H^r_c(U,F)$ pour $r \geq 4$

Lemme 1.18. *On a $H^r(U,F) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Démonstration. Soit V un ouvert de U et écrivons la suite exacte de localisation :

$$... \to H^r(U,F) \to H^r(V,F) \to H^{r+1}_{U\setminus V}(U,F) \to ...$$

Le théorème d'excision montre que :

$$H^r_{U\setminus V}(U,F) = \bigoplus_{v \in U\setminus V} H^r_v(\mathcal{O}^h_v, F).$$

Or, pour $v \in U \setminus V$, on dispose de la suite exacte de localisation :

$$... \to H^{r-1}(K^h_v, F) \to H^r_v(\mathcal{O}^h_v, F) \to H^r(\mathcal{O}^h_v, F) \to ...$$

Par dimension cohomologique, si $r \geq 4$, les groupes $H^{r-1}(K^h_v, F)$ et $H^r(\mathcal{O}^h_v, F)$ sont nuls. Il en est donc de même du groupe $H^r_v(\mathcal{O}^h_v, F)$. Par conséquent, pour $r \geq 4$, la restriction $H^r(U,F) \to H^r(V,F)$ est un isomorphisme. En notant $g : \text{Spec } K \hookrightarrow U$, on en déduit que :

$$H^r(U,F) \cong H^r(K, g^*F) = 0$$

car K est de dimension cohomologique 2. □

Corollaire 1.19. *On a $H^r_c(U,F) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent en remplaçant U par X et F par $j_!F$. □

1.9 Annulation de $\mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m)$ pour $r \geq 4$

Lemme 1.20. *Supposons F localement constant. Le faisceau $\underline{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m)$ est de torsion pour $r=0$ et nul pour $r \geq 1$.*

Démonstration. Calculons les tiges de $\underline{\mathrm{Ext}}^r_U(F,\mathbb{G}_m)$:

- en $\overline{\eta}$, $\underline{\mathrm{Ext}}^r_U(F,\mathbb{G}_m)_{\overline{\eta}} = \mathrm{Ext}^r(F_{\overline{\eta}}, K^{s\times})$. Ce groupe est de $|F_{\overline{\eta}}|$-torsion pour $r=0$, et il est nul pour $r \geq 1$ puisque $K^{s\times}$ est un groupe abélien divisible.
- en $\overline{v}$ pour $v \in U$ différent de η, $\underline{\mathrm{Ext}}^r_U(F,\mathbb{G}_m)_{\overline{v}} = \mathrm{Ext}^r_{\mathbb{Z}}(F_{\overline{v}}, \mathcal{O}_v^{nr\times})$. Comme avant, ce groupe est de $|F_{\overline{\eta}}|$-torsion pour $r=0$, et il est nul pour $r \geq 1$ puisque $\mathcal{O}_v^{nr\times}$ est un groupe abélien divisible.

Le lemme en découle immédiatement. □

Lemme 1.21. *On a $Ext^r_U(F,\mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \geq 4$.*

Démonstration. En utilisant la remarque 1.15, on peut supposer que F est localement constant. Le lemme précédent montre alors que la suite spectrale

$$H^r(U, \underline{\mathrm{Ext}}^s_U(F,\mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}_U(F,\mathbb{G}_m)$$

dégénère en des isomorphismes $\mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m) \cong H^r(U, \underline{\mathrm{Hom}}_U(F,\mathbb{G}_m))$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_U(F,\mathbb{G}_m)$ étant de torsion, il est limite inductive filtrante de faisceaux constructibles. On déduit alors du lemme 1.18 que pour $r \geq 4$ le groupe $\mathrm{Ext}^r_U(F,\mathbb{G}_m)$ est nul. □

1.10 Décomposition de F

Proposition 1.22. *Soit V un ouvert non vide de U tel que $F|_V$ est localement constant. Soit L une extension finie de K telle que la normalisation $\pi_V : V_n \to V$ de V dans L est étale et $F|_{V_n}$ est constant. Soit $\pi_U : U_n \to U$ la normalisation de U dans L. Soit $m > 0$ tel que $mF = 0$. Il existe alors un faisceau F_n constructible constant sur U_n de m-torsion, un faisceau F_f constructible sur U à support fini et un morphisme injectif $F \hookrightarrow \pi_{U*}F_n \oplus F_f$.*

Démonstration. On choisit pour F_n le faisceau constant sur U_n défini par le groupe abélien fini $F(V_n)$. Comme $F|_{V_n}$ est contant, on remarque que $F_n = j_{n*}j_n^*\pi_U^*F$, où $j_n : V_n \to U_n$ désigne l'immersion ouverte. Par adjonction, on obtient donc un morphisme $F \to \pi_{U*}F_n$. Comme π_V est étale, le support du noyau de ce morphisme est contenu dans $U \setminus V$. Il suffit donc de trouver un faisceau F_f constructible sur U à support dans $U \setminus V$ et un morphisme $F \to F_f$ tel que le support du noyau soit contenu dans V. Si l'on note $i : U \setminus V \hookrightarrow U$, on choisit $F_f = i_*i^*F$, le morphisme $F \to F_f$ étant le morphisme d'adjonction. □

1.11 Comportement vis-à-vis de la normalisation

Nous allons maintenant étudier le comportement du morphisme α^r vis-à-vis de la normalisation. Soit L une extension finie galoisienne de K. Soit U_n la normalisation de U dans L et notons π le morphisme fini $U_n \to U$. Considérons l'application norme $N_{U_n/U} : \pi_* \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ (voir par exemple le lemme II.3.9(a) de [Mil06]). Si π est étale, $\pi_* = \pi_!$ et $N_{U_n/U}$ s'identifie au morphisme d'adjonction $\pi_! \pi^* \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$.

Lemme 1.23. *Soit $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible sur U_n. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, la composée*

$$N^r(\mathcal{F}_n) : \mathcal{E}xt^r_{U_n}(\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \to \mathcal{E}xt^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \pi_*\mathbb{G}_m) \to \mathcal{E}xt^r_U(\pi_*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m),$$

où le premier morphisme est induit par le foncteur exact π_* et le second par la norme $N_{U_n/U}$, est un isomorphisme.

Démonstration. Soit V_n un ouvert de U_n sur lequel la restriction de π est étale, et notons $j_n : V_n \hookrightarrow U_n$ l'immersion ouverte et $i_n : Z_n = U_n \setminus V_n \hookrightarrow U_n$ l'immersion fermée (Z_n étant muni de la structure réduite). Nous allons montrer que $N^r(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n)$ et $N^r(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n)$ sont des isomorphismes, ce qui impliquera que $N^r(\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme grâce à la suite exacte $0 \to j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n \to i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n \to 0$.

- D'une part, comme $\pi \circ j_n$ est étale, on dispose d'isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}^r_{V_n}(j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Ext}^r_{V_n}(j_n^*\mathcal{F}_n, (\pi \circ j_n)^*\mathbb{G}_m)) \cong \mathrm{Ext}^r_U(\pi_* j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m).$$

  Or $\mathrm{Ext}^r_{U_n}(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Ext}^r_{V_n}(j_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m)$. Cela montre immédiatement que $N^r(j_{n!}j_n^*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.
- D'autre part, si l'on note $Z = \pi(Z_n)$, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z_n & \xrightarrow{i_n} & U_n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z & \xrightarrow{i} & U. \end{array}$$

  Ainsi, en utilisant le lemme 1.11 et en tenant compte du fait que π_Z est fini étale :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^r_{U_n}(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m) &\cong \mathrm{Ext}^{r-1}_{Z_n}(i_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^{r-1}_{Z_n}(i_n^*\mathcal{F}_n, \pi_Z^*\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{Ext}^{r-1}_Z(\pi_{Z*}i_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^r_U(\pi_* i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n, \mathbb{G}_m), \end{aligned}$$

  et donc $N^r(i_{n*}i_n^*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.

□

Proposition 1.24. *Soient $\mathcal{F}_n$ un faisceau constructible sur U_n et $r \in \mathbb{Z}$. Alors $\alpha^r(U_n, \mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\alpha^r(U, \pi_*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Supposons $U \neq X$. Comme π est fini, on dispose d'un isomorphisme $H^3_c(U, \pi_*\mathbb{G}_m) \to H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m)$. Notons $\mathrm{Nm}_{U_n/U}$ la composée :

$$H^3_c(U_n, \mathbb{G}_m) \to H^3_c(U, \pi_*\mathbb{G}_m) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m)$$

le deuxième morphisme étant induit par $N_{U_n/U}$. Ce morphisme s'insère dans un diagramme cubique :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[dd, equal] \\
\bigoplus_{w\in X_n\setminus U_n} \mathrm{Br}(L_w) \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, "\text{Cores}"] & & H^3_c(U_n,\mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\bigoplus_{v\in X\setminus U} \mathrm{Br}(K_v) \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] & & H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où X_n est la normalisation de X dans L et toutes les faces du cube, à l'exception de la face droite, sont commutatives. Cela entraîne que la face droite est aussi commutative. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{U_n}(\mathcal{F}_n,\mathbb{G}_m) \arrow[d, "N^r(\mathcal{F}_n)", "\cong"'] & \times & H^{3-r}_c(U_n,\mathcal{F}_n) \arrow[r] & H^3_c(U_n,\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Nm}_{U_n/U}", "\cong"'] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^r_{U}(\pi_*\mathcal{F}_n,\mathbb{G}_m) & \times & H^{3-r}_c(U,\pi_*\mathcal{F}_n) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

et donc $\alpha^r(U_n,\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\alpha^r(U,\pi_*\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme.

Si $U=X$, on choisit U' un ouvert strict de X. On a alors un diagramme cubique :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[dd, equal] \\
H^3_c(U'_n,\mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dd, "\mathrm{Nm}_{U'_n/U'}"] & & H^3_c(U_n,\mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
H^3_c(U',\mathbb{G}_m) \arrow[ur] \arrow[rr, "\cong"] & & H^3_c(U,\mathbb{G}_m) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où toutes les faces, à l'exception de la face droite, sont commutatives. On en déduit la commutativité de la face droite. Il est maintenant possible de conclure exactement de la même manière que sous l'hypothèse $U \neq X$.

$\square$

1.12 Propriété d'hérédité

Proposition 1.25. *Soit $r_0 \leq 3$ un entier. Supposons que $\alpha^r(X,\mathcal{F})$ soit un isomorphisme pour toute extension finie K de K_0, pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $r > r_0$.*

(i) Supposons $r_0 \neq 3$. Pour toute extension finie K de K_0 et pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est surjectif.

(ii) On ne suppose plus que $r_0 \neq 3$. On suppose par contre que pour toute extension finie K de K_0 et pour tout $m > 0$, $\alpha^{r_0}(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Alors

pour toute extension finie K de K_0 et pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X, le morphisme $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

Démonstration. (i) Soient K une extension finie de K_0 et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. Fixons $c \in H^{3-r_0}(X,\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{I}$ un faisceau flasque de torsion muni d'une injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$. Le faisceau $\mathcal{I}$ est la limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles, parmi lesquels se trouve $\mathcal{F}$. Par conséquent, comme $H^{3-r_0}(X,\mathcal{I}) = 0$, il existe un sous-faisceau constructible $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{I}$ contenant $\mathcal{F}$ et tel que l'image de c dans $H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_0)$ est nulle. Soit $\mathcal{F}_1$ le conoyau de l'injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_0$. Nous obtenons alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ext}_X^{r_0+1}(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m))^D \arrow[r] & (\mathrm{Ext}_X^{r_0+1}(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m))^D \arrow[r] & (\mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F},\mathbb{G}_m))^D \arrow[r] & (\mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m))^D \\
H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_0) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "(\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_0))^D"] & H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "(\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_1))^D"] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[u, "(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}))^D"'] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_0) \arrow[u, "(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_0))^D"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}))^D(c) = 0$, alors $c = 0$. On en déduit que $(\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}))^D$ est injectif, d'où le résultat.

(ii) On reprend les mêmes notations qu'au début de (i). Soit $m > 0$ tel que $m\mathcal{F} = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est constructible, on peut trouver un ouvert non vide V de X et un recouvrement étale fini connexe $V_n \to V$ tel que $\mathcal{F}|_{V_n}$ est constant. On remarque alors que V_n est la normalisation de V dans une extension finie L de K. Notons $\pi_X : X_n \to X$ la normalisation de X dans L. D'après la proposition 1.22, il existe alors un faisceau $\mathcal{F}_n$ constructible constant sur X_n de m-torsion, un faisceau $\mathcal{F}_f$ constructible sur X à support fini et un morphisme injectif $\mathcal{F} \hookrightarrow \pi_{X*}\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_f$. On note $\mathcal{F}_0 = \pi_{X*}\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{F}_f$. D'après la proposition 1.12, on sait que $\alpha^r(X,\mathcal{F}_f)$ est un isomorphisme pour tout r. De plus, comme par hypothèse $\alpha^{r_0}(X_n,\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $m'|m$, il en est de même de $\alpha^{r_0}(X_n,\mathcal{F}_n)$: la proposition 1.24 entraîne alors que $\alpha^{r_0}(X,\pi_{X*}\mathcal{F}_n)$ est un isomorphisme. Par conséquent, $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_0)$ est un isomorphisme.
Notons $\mathcal{F}_1$ le conoyau de l'injection $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_0$. Nous obtenons alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_X^{r_0+1}(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m) \arrow[d, "\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_0)"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_X^{r_0+1}(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0+1}(X,\mathcal{F}_1)"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F},\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})"'] & \mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F}_0,\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_0)"', "\cong"] & \mathrm{Ext}_X^{r_0}(\mathcal{F}_1,\mathbb{G}_m) \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_1)"'] \\
H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_0)^* & H^{2-r_0}(X,\mathcal{F}_1)^* \arrow[l] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F})^* \arrow[l] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_0)^* \arrow[l] & H^{3-r_0}(X,\mathcal{F}_1)^* \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par chasse au diagramme, $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est surjectif. Cela étant vrai pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$, $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F}_1)$ est aussi surjectif. Une nouvelle chasse au diagramme permet de conclure que $\alpha^{r_0}(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

□

1.13 Preuve de la dualité d'Artin-Verdier

Nous sommes à présent en mesure d'établir le théorème d'Artin-Verdier pour K_0. Pour ce faire, on prouve :

Proposition 1.26. *Pour toute extension finie K de K_0, pour tout faisceau constructible F sur X et pour tout $r_0 \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\alpha^{r_0}(X,F)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On procède par étapes :

A. Pour $r_0 > 3$:

Le lemme 1.21 entraîne immédiatement que $\alpha^{r_0}(X, F)$ est un isomorphisme.

B. Pour $r_0 = 3$:

Soit K une extension finie de K_0. Soit $m > 0$ un entier. La suite exacte courte de faisceaux $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$ induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$... \to \mathrm{Ext}^r_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \to H^r(X, \mathbb{G}_m) \to H^r(X, \mathbb{G}_m) \to ... \tag{4.10}$$

Comme Br X est divisible et $H^3(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'après la proposition 1.8, on déduit que $\mathrm{Ext}^3_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \cong \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. D'autre part, $H^0(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Vu à travers ces isomorphismes, l'accouplement d'Artin-Verdier devient $(x, y) \mapsto x\tilde{y}$ pour $x \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\tilde{y} \in \mathbb{Z}$ un relèvement quelconque de y. Cela impose que $\alpha^3(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. La proposition 1.25(ii) entraîne alors immédiatement que $\alpha^3(X, F)$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible F sur X.

C. Pour $r_0 = 2$:

Soit K une extension finie de K_0. Soit $m > 0$ un entier. D'après la proposition 1.25(i), $\alpha^2(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif. Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que $H^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ ont même cardinal.
La suite exacte (4.10) impose que

$$|\mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)| = |\mathrm{Pic}(X)/m\mathrm{Pic}(X)||{}_m\mathrm{Br}(X)|.$$

D'autre part, la suite exacte de Kummer montre que :

$$|H^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = |\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}_K^{\times,m}||{}_m\mathrm{Pic}(X)| = |{}_m\mathrm{Pic}(X)|$$

car $\mathcal{O}_K^\times$ est divisible. Donc, en utilisant la proposition 1.8 :

$$\frac{|H^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{|\mathrm{Ext}^2_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)|} = \frac{|{}_m\mathrm{Pic}(X)|}{|\mathrm{Pic}(X)/m\mathrm{Pic}(X)|} \cdot |{}_m\mathrm{Br}(X)|^{-1} = \frac{m^{n_X}}{m^{n_X}} = 1.$$

Par conséquent, $\alpha^2(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. La proposition 1.25(ii) permet alors de déduire que $\alpha^2(X, F)$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible F sur X.

D. Pour $r_0 = 1$:

Soit K une extension finie de K_0. Soit $m > 0$ un entier. D'après la proposition 1.25(i), $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjective. Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer que $H^2(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)$ ont même cardinal.
La suite exacte (4.10) impose que

$$|\mathrm{Ext}^1_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)| = |\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}_K^{\times,m}||{}_m\mathrm{Pic}(X)| = |{}_m\mathrm{Pic}(X)|.$$

D'autre part, la suite exacte de Kummer montre que :

$$|H^2(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = |\mathrm{Pic}(X)/m\mathrm{Pic}(X)||{}_m\mathrm{Br}(X)|.$$

Donc, en utilisant la proposition 1.8 :

$$\frac{|H^2(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{|\mathrm{Ext}^1_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)|} = \frac{|\mathrm{Pic}(X)/m\mathrm{Pic}(X)|}{|_m\mathrm{Pic}(X)|} \cdot |_m\mathrm{Br}(X)| = \frac{m^{n_X}}{m^{n_X}} = 1.$$

Par conséquent, $\alpha^1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. La proposition 1.25(ii) permet alors de déduire que $\alpha^1(X, F)$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible F sur X.

E. Pour $r_0 = 0$:
Soit K une extension finie de K_0. Soit $m > 0$ un entier. D'après la proposition 1.25(i), $\alpha^0(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjective. Comme Br X est divisible et $H^3(X, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'après la proposition 1.8, la suite de Kummer montre que :

$$|H^3(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = m = |\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m)|.$$

Par conséquent, $\alpha^0(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. La proposition 1.25(ii) permet alors de déduire que $\alpha^0(X, F)$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible F sur X.

F. Pour $r_0 < 0$:
Le corollaire 1.19 entraîne immédiatement que $\alpha^{r_0}(X, F)$ est un isomorphisme puisque $H^{3-r_0}_c(X, F)$ est nul.

□

Les propositions 1.14 et 1.17 permettent alors d'obtenir le théorème 1.10. On en déduit le corollaire :

Corollaire 1.27. *Soit F un faisceau constructible localement constant sur U. Notons $F' = \underline{Hom}_U(F, \mathbb{G}_m)$. Il existe alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$H^r(U, F') \times H^{3-r}_c(U, F) \to H^3_c(U, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Il suffit d'identifier $H^r(U, F')$ et $\mathrm{Ext}^r_U(F, \mathbb{G}_m)$. Cela a été fait dans le lemme 1.21. □

Remarque 1.28. Dans le cas où k est séparablement clos de caractéristique $p > 0$, le corollaire précédent reste vrai à condition de supposer que F est de n-torsion avec n non divisible par p. On attire en particulier l'attention sur le fait que, si k est séparablement clos mais non algébriquement clos, le corps $k(t)$ est encore de dimension cohomologique 1 puisque la cohomologie étale est invariante par extension purement inséparable.

2 Théorèmes de dualité arithmétique

On ne suppose plus k séparablement clos et on note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Dans toute la suite du chapitre, on supposera qu'il existe des entiers $d \geq -1$ et $p \in \{0\} \cup \mathbb{P}$ tels que :

- $\mathrm{Car}(k) \in \{0, p\}$;
- le corps k est de dimension cohomologique $d+1$;
- pour chaque entier naturel non nul n, on a un isomorphisme $H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte que, pour $m|n$, le morphisme naturel $H^{d+1}(k, \mu_m^{\otimes d}) \to H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d})$ s'identifie au morphisme qui envoie la classe de 1 dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur la classe de n/m dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
- pour tout $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module fini M d'ordre n non divisible par p, pour $0 \leq r \leq d+1$, le cup-produit induit un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, \mathrm{Hom}(M, \mu_n^{\otimes d})) \to H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

On dira que k est **un corps (p, d)-bon pour la dualité**.

Exemple 2.1. Un corps séparablement clos de caractéristique p est $(p, -1)$-bon pour la dualité. Un corps fini de caractéristique p est $(p, 0)$-bon pour la dualité d'après l'exemple I.1.10 de [Mil06]. Un corps ℓ-adique est $(0, 1)$-bon pour la dualité d'après le corollaire I.2.3 de [Mil06]. En procédant comme dans la preuve du théorème I.2.17 de [Mil06], on peut montrer qu'un corps de valuation discrète complet de corps résiduel (p, d)-bon pour la dualité est $(p, d+1)$-bon pour la dualité. Par exemple, les corps d-locaux sont (p, d)-bons pour la dualité si l'on choisit pour p la caractéristique du corps 1-local correspondant.

On rappelle que R_0 désigne une k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R_0 \otimes_k k^s$ est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k. On note toujours K_0 son corps des fractions, $\mathfrak{m}_0$ son idéal maximal, $\mathcal{X}_0$ le schéma Spec R_0 et X_0 le schéma $\mathcal{X}_0 \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$. Le but de cette section est d'établir des théorèmes de dualité de type Poitou-Tate pour les modules finis et les tores sur K_0.

Remarque 2.2. En comparant tous les résultats qui vont suivre à ceux des articles [HSz16], [HSSz15] et [CTH15] ainsi qu'à ceux des deux premiers chapitres de cette thèse, on remarquera que le corps K_0 se comporte de manière très similaire au corps des fonctions d'une courbe sur un corps $(p, d+1)$-bon pour la dualité. Par exemple, en ignorant les phénomènes liés à la caractéristique positive, $\mathbb{C}((x, y))$ se comporte comme $\mathbb{C}((x))(y)$ et $\mathbb{F}_p(t)$, et $\mathbb{F}_p((x, y))$ et $\mathbb{C}((t))((x, y))$ se comportent comme $\mathbb{Q}_p(x)$ et $\mathbb{C}((t))((x))(y)$.

2.1 Dualité d'Artin-Verdier et descente galoisienne

Lemme 2.3. *La k^s-algèbre $\overline{R_0} = R_0 \otimes_k k^s$ est locale, intègre, normale, hensélienne, excellente, de dimension 2, de corps résiduel k^s.*

Démonstration. Comme R_0 est géométriquement intègre, $\overline{R_0}$ est intègre. Ainsi, pour chaque extension finie l de k, la l-algèbre $R_0 \otimes_k l$ est intègre. De plus, c'est une extension finie étale de R_0. Par conséquent, comme R_0 est local normal hensélien excellent, il en est de même de $R_0 \otimes_k l$. On vérifie immédiatement que l'idéal maximal de $R_0 \otimes_k l$ est $\mathfrak{m}_l = \mathfrak{m}_0 \otimes_k l$ et que le corps résiduel de $R_0 \otimes_k l$ est l. On déduit alors de la proposition 1 de l'appendice de [Bou06] et du corollaire 4.4 de [Mar79] que $\overline{R_0}$ est un anneau local normal hensélien excellent d'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_0 \otimes_k k^s$ et de corps résiduel k^s. Finalement, l'injection $R_0 \hookrightarrow \overline{R}_0$ étant plate, le théorème 4.3.12 de [Liu02] montre que $\dim\ \overline{R_0} = \dim\ R_0 = 2$. □

Théorème 2.4. *On rappelle que k est un corps (p,d)-bon pour la dualité. Soient U un ouvert de X_0 et F un schéma en groupes fini étale abélien sur U de n-torsion, avec n non divisible par p. Notons $F' = Hom(F, \mu_n^{\otimes(d+2)})$. Le groupe $H_c^{d+4}(U, \mu_n^{\otimes(d+2)})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'accouplement naturel :*

$$H^r(U,F) \times H_c^{d+4-r}(U,F') \to H_c^{d+4}(U, \mu_n^{\otimes(d+2)}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

est un accouplement parfait de groupes finis.

Démonstration. Notons G le groupe de Galois absolu de k. Comme k est un corps (p,d)-bon pour la dualité, on montre exactement comme dans le théorème 1.1 du chapitre 1 que l'on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(M^\bullet, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))[d+1] \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_G M^\bullet, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

pour chaque complexe $M^\bullet$ de G-modules discrets de n-torsion borné inférieurement. Par ailleurs, d'après le théorème 1.27 et le lemme précédent, si l'on note $\overline{U} = U \times_k k^s$ et $\overline{F}$ la restriction de F à $\overline{U}$, on a des accouplements parfaits G-équivariants de groupes finis :

$$H^r(\overline{U}, \overline{F}) \times H_c^{3-r}(\overline{U}, \mathrm{Hom}(\overline{F}, \mu_n)) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1).$$

Comme dans le théorème 1.1 du chapitre 1, cela fournit un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens :

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\overline{U},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\overline{F}, \mu_n) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_c(\overline{U}, \overline{F}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1))[-3].$$

On conclut alors exactement de la même manière que la proposition 2.1 du premier chapitre. □

2.2 Dualité de Poitou-Tate pour les modules finis

Soit F un $\mathrm{Gal}(K_0^s/K_0)$-module fini d'ordre n non divisible par p. Notons $F' = \mathrm{Hom}(F, \mu_n^{\otimes(d+2)})$, et posons, pour $r \in \{1,2,...,d+3\}$:

$$Ш^r(K_0, F) = \mathrm{Ker}\left(H^r(K_0,F) \to \prod_{v \in X_0^{(1)}} H^r(K_{0,v}, F) \right).$$

Théorème 2.5. *Pour $r \in \{1,2,...,d+3\}$, il existe un accouplement parfait de groupes finis :*

$$Ш^r(K_0,F) \times Ш^{d+4-r}(K_0,F') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Remarque 2.6. Plaçons-nous dans le cas $k=\mathbb{C}$, $p=0$, $d=-1$. Bien sûr, on aurait pu définir les groupes de Tate-Shafarevich en tenant compte de toutes les valuations discrètes de rang 1 de K_0 :

$$\text{Ш}^r_{tot}(K_0,F) := \operatorname{Ker}\left(H^r(K_0,F)\to\prod_{v\in\Omega_{K_0}} H^r(K_{0,v},F)\right),$$

où Ω_{K_0} désigne toutes les valuations discrètes de rang 1 de K_0. Cependant, on ne peut pas espérer une dualité parfaite de la forme :

$$\text{Ш}^1_{tot}(K_0,F)\times\text{Ш}^2_{tot}(K_0,F')\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

puisque $\text{Ш}^2_{tot}(K_0,\mu_n)$ est toujours nul (théorème 1.2 de [Hu14]) alors que $\text{Ш}^1_{tot}(K_0,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ peut être non nul (théorème 5 de [Jaw01]). Par ailleurs, ce dernier point montre que dans le théorème 2.5, les groupes de Tate-Shafarevich qui apparaissent ne sont pas toujours nuls.

Nous allons maintenant brièvement expliquer comment on obtient le théorème 2.5, la preuve étant analogue à celle du théorème 2.4 du premier chapitre. Soit U un ouvert non vide de X_0. Considérons un schéma en groupes fini étale sur U prolongeant F : on le notera toujours F. Posons :

$$D^r_{sh}(U,F) = \operatorname{Ker}\left(H^r(U,F)\to\prod_{v\in X_0^{(1)}} H^r(K_v,F)\right),$$
$$\mathcal{D}^{d+4-r}(U,F') := \operatorname{Im}\left(H^{d+4-r}_c(U,F')\to H^{d+4-r}(K_0,F')\right).$$

Proposition 2.7. *(i) Il existe un ouvert non vide U_0 de U tel que $\mathcal{D}^{d+4-r}(V,F')=\text{Ш}^{d+4-r}(K_0,F')$ pour chaque ouvert non vide $V\subseteq U_0$.*
(ii) La suite $\bigoplus_{v\in X_0^{(1)}} H^{d+3-r}(K_{0,v},F')\to H^{d+4-r}_c(U,F')\to\mathcal{D}^{d+4-r}(U,F')\to 0$ est exacte.

Démonstration. (i) Si $V\subseteq V'$ sont des ouverts non vides de U, on a $\mathcal{D}^{d+4-r}(V,F')\subseteq\mathcal{D}^{d+4-r}(V',F')$. Comme $\mathcal{D}^{d+4-r}(U,F')$ est fini, il existe un ouvert non vide U_0 de U tel que $\mathcal{D}^{d+4-r}(V,F')=\mathcal{D}^{d+4-r}(U_0,F')$ pour chaque ouvert non vide $V\subseteq U_0$. Par ailleurs, pour $V\subseteq V'$ des ouverts non vides de U, on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{v\notin V'} H^{d+3-r}(K_{0,v},F') \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+4-r}_c(V',F') \arrow[r] & H^{d+4-r}(V',F') \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\notin V'} H^{d+4-r}(K_{0,v},F') \\
\bigoplus_{v\notin V} H^{d+3-r}(K_{0,v},F') \arrow[r] & H^{d+4-r}_c(V,F') \arrow[r] \arrow[u] & H^{d+4-r}(V,F') \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin V} H^{d+4-r}(K_{0,v},F'). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

En prenant $V'=U_0$, une simple chasse au diagramme permet de montrer que U_0 convient.

(ii) Ce n'est qu'une chasse au diagramme dans le diagramme de (i).

□

On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^r_{sh}(U,F) \arrow[r] \arrow[d] & H^r(U,F) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \prod_{v\in X_0^{(1)}} H^r(K_{0,v},F) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}^{d+4-r}(U,F')^D \arrow[r] & H_c^{d+4-r}(U,F')^D \arrow[r] & \prod_{v\in X_0^{(1)}} H^{d+3-r}(K_{0,v},F')^D.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le théorème 1.27. Pour voir que le morphisme vertical de droite est un isomorphisme, il suffit d'appliquer le même méthode que Milne dans le théorème I.2.17 de [Mil06] et d'utiliser que k est un corps (p,d)-bon pour la dualité. On obtient alors un isomorphisme $D^r_{sh}(U,F) \cong \mathcal{D}^{d+4-r}(U,F')^D$. Il suffit de passer à la limite sur U pour obtenir le théorème 2.5.

2.3 Dualité de Poitou-Tate pour les tores

Théorème 2.8. *Soit T un K_0-tore de module de caractères $\hat{T}$ et de tore dual T'.*
(i) Supposons $d=-1$ (par exemple k séparablement clos). On a des accouplements parfaits de groupes finis :

$$\text{Ш}^1(K_0,\hat{T})_{non-p} \times \overline{\text{Ш}^2(K_0,T)}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$\text{Ш}^1(K_0,T)_{non-p} \times \overline{\text{Ш}^2(K_0,\hat{T})}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) Supposons que $d=0$ (par exemple $k=\mathbb{C}((t))$ ou k fini). On a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\text{Ш}^1(K_0,T)_{non-p} \times \overline{\text{Ш}^2(K_0,T')}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Les preuves sont semblables à celle du théorème 2.5.
(i) La preuve est en tous points analogue à celle des théorèmes 7.1 et 7.2 de [CTH15]. Rappelons brièvement les grandes étapes de la preuve du premier accouplement, le second étant obtenu de manière très similaire. Pour simplifier, on suppose que $p=0$.
Soit ℓ un nombre premier. On considère $\mathcal{T}$ un tore étendant T sur un ouvert non vide U de X_0. Pour $v\in X_0^{(1)}$, un argument identique à celui de la proposition 3.4 de [CTH15] montre que l'accouplement naturel :

$$H^1(K_{0,v},\hat{T}) \times H^1(K_{0,v},T) \to H^2(K_{0,v},\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est un accouplement parfait de groupes finis. De plus, le théorème 2.4 permet de prouver que, pour V ouvert non vide de U, l'accouplement naturel

$$H^1(V,\hat{\mathcal{T}}) \times H^2_c(V,\mathcal{T}) \to H^3_c(V,\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

induit un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(V,\hat{\mathcal{T}})^{(\ell)}\{\ell\} \times H^2_c(V,\mathcal{T})\{\ell\}^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, en introduisant pour chaque ouvert non vide V de U les groupes :

$$D^1_{sh}(V,\hat{\mathcal{T}}) = \mathrm{Ker}\left(H^1(V,\hat{\mathcal{T}}) \to \prod_{v\in X_0^{(1)}} H^1(K_{0,v},\hat{T})\right),$$
$$\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T}) = \mathrm{Im}\left(H^2_c(V,\mathcal{T}) \to H^2(K_0,T)\right),$$

et en utilisant la suite exacte de localisation (proposition 3.1.(1) de [HSz16]), on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1_{sh}(V,\hat{\mathcal{T}})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(V,\hat{\mathcal{T}})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \prod_{v\in X_0^{(1)}} H^1(K_{0,v},\hat{\mathcal{T}})\{\ell\} \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T})\{\ell\}}^D \arrow[r] & \overline{H^2_c(V,\mathcal{T})\{\ell\}}^D \arrow[r] & \prod_{v\in X_0^{(1)}} H^1(K_{0,v},\mathcal{T})\{\ell\}^D.
\end{tikzcd}$$

Cela montre que $D^1_{sh}(V,\hat{\mathcal{T}})\{\ell\}$ et $\overline{\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T})\{\ell\}}$ sont duaux l'un de l'autre. Reste à identifier ces deux groupes à des groupes de Tate-Shafarevich :

- on montre aisément (comme dans le lemme 7.3 de [CTH15]) que le morphisme $H^1(V,\hat{\mathcal{T}}) \to H^1(K_0,\hat{T})$ est injectif et donc que $D^1_{sh}(V,\hat{\mathcal{T}}) = Ш^1(K_0,\hat{T})$;
- le groupe $\mathcal{D}^2(U,\mathcal{T})$ est abélien de torsion de type cofini, et pour $V \subseteq V' \subseteq U$ des ouverts non vides, on a $\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{D}^2(V',\mathcal{T})$. Grâce au lemme 3.7 de [HSz16], on peut alors trouver un ouvert non vide U_0 de U (dépendant de ℓ) tel que, pour tout ouvert non vide V de U_0, on ait $\mathcal{D}^2(V,\mathcal{T})\{\ell\} = \mathcal{D}^2(U_0,\mathcal{T})\{\ell\}$. Une chasse au diagramme montre alors que $\mathcal{D}^2(U_0,\mathcal{T})\{\ell\} = Ш^2(K_0,T)\{\ell\}$.

Cela achève la preuve.

(ii) La preuve est très similaire à celle du théorème 4.4 de [HSz16] et à celle du théorème 3.10 du chapitre 1. Il n'y a qu'une seule différence : comme X_0 n'est pas une variété lisse sur un corps, on ne sait pas s'il existe un accouplement $\mathbb{Z}(1) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}(2)$ dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur X_0 qui soit compatible avec le morphisme naturel $\mu_n \otimes^{\mathbf{L}} \mu_n[1] \to \mu_n^{\otimes 2}[1]$. Mais on peut voir dans la preuve du théorème 3.10 du chapitre 1 que l'on a en fait uniquement besoin d'un accouplement $\mathbb{Z}(1) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$. Et un tel accouplement existe bien puisque, pour chaque $n \geq 1$, d'après la proposition 1 de [Kah92], on a un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$\mathbb{Z}(1) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \cong (\mathbb{G}_m \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{G}_m)[-2] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2).$$

Une fois que l'on dispose de cet accouplement, on montre (ii) avec le même type d'arguments que (i).

□

Remarque 2.9. • Dans (ii), si k est un corps fini, le groupe $Ш^2(K_0,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{non}-p}$ est nul et donc le groupe $Ш^2(K_0,T')$ est fini et on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$Ш^1(K_0,T)_{\mathrm{non}-p} \times Ш^2(K_0,T')_{\mathrm{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour prouver la nullité de $Ш^2(K_0, \mathbb{G}_m)_{\text{non}-p}$, il suffit de procéder comme dans la preuve de la proposition 3.4(2) de [HSz16], en remplaçant la dualité de Lichtenbaum par le théorème 0.11 de [Sai86].

- Il est aussi possible d'obtenir un théorème pour d quelconque. Pour ce faire, il faut poser $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d+1)$, comme dans la section 3 du premier chapitre. On peut alors obtenir des accouplements parfaits de groupes finis :

$$Ш^{d+2}(K_0, \tilde{T})_{\text{non}-p} \times \overline{Ш^2(K_0, T)}_{\text{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$Ш^1(K_0, T)_{\text{non}-p} \times \overline{Ш^{d+3}(K_0, \tilde{T})}_{\text{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

La preuve est identique à celle du théorème 3.10 du chapitre 1.

Pour les applications arithmétiques (en particulier le théorème 3.2), il sera utile d'avoir aussi un théorème de dualité pour certains complexes de tores à deux termes :

Théorème 2.10. *Supposons $d = -1$ (par exemple k séparablement clos). Soit G un groupe de type multiplicatif sur K. Soit $\rho : T_1 \to T_2$ un morphisme de tores algébriques sur K à noyau fini. Soient G le complexe $[T_1 \to T_2]$ où T_1 est en degré -1 et T_2 en degré 0, et $\tilde{G}$ le complexe $[\hat{T}_2 \to \hat{T}_1]$ où $\hat{T}_2$ est placé en degré -1 et $\hat{T}_1$ en degré 0. On a alors un accouplement parfait de groupes finis :*

$$Ш^1(K_0, G)_{non-p} \times \overline{Ш^1(K_0, \tilde{G})}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. La preuve est tout à fait analogue à celle du corollaire 4.18(ii) du chapitre 1, et les idées sont similaires à celles du théorème 2.8. On se contente donc d'esquisser la preuve, en supposant (pour simplifier) que $p = 0$.

Soit U un ouvert non vide de X_0 sur lequel T_1 (resp. T_2) s'étend en un tore $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) et ρ s'étend en un morphisme $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$, aussi noté ρ. Soient $\mathcal{G}$ le complexe $[\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2]$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ le complexe $[\hat{\mathcal{T}}_2 \to \hat{\mathcal{T}}_1]$. Fixons ℓ un nombre premier. En utilisant le théorème 2.4, on peut alors montrer qu'il y a un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(U, \mathcal{G})\{\ell\}^{(\ell)} \times H^1_c(U, \tilde{\mathcal{G}})^{(\ell)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{4.11}$$

Introduisons maintenant les groupes :

$$\mathcal{D}^1(U, \tilde{\mathcal{G}}) = \mathrm{Im}\left(H^1_c(U, \tilde{\mathcal{G}}) \to H^1(K_0, \tilde{G})\right),$$
$$D^1_{sh}(U, \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}\left(H^1(U, \mathcal{G}) \to \prod_{v \in X_0^{(1)}} H^1(K_{0,v}, G)\right).$$

En combinant la dualité parfaite (4.11) avec une dualité locale, on montre que l'on a un morphisme surjectif à noyau divisible $D^1_{sh}(U, \mathcal{G})\{\ell\} \to \overline{\mathcal{D}^1(U, \tilde{\mathcal{G}})\{\ell\}}^D$. Or on peut prouver que, si U est suffisamment petit, on a $\mathcal{D}^1(U, \tilde{\mathcal{G}}\{\ell\} = Ш^1(K_0, \tilde{G})\{\ell\}$. Du coup, en passant à la limite sur U, on obtient un isomorphisme :

$$\overline{Ш^1(K_0, G)\{\ell\}} \cong \overline{Ш^1(K_0, \tilde{G})\{\ell\}}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que le groupe $Ш^1(K_0, G)\{\ell\}$ est fini (car ρ est à noyau fini). $\square$

3 Applications arithmétiques

On suppose toujours que k est un corps (p,d)-bon pour la dualité et on rappelle que R_0 désigne une k-algèbre commutative, locale, géométriquement intègre (ie $R_0 \otimes_k k^s$ est intègre), normale, hensélienne, excellente, de dimension 2 et de corps résiduel k. On note toujours K_0 son corps des fractions, $\mathfrak{m}_0$ son idéal maximal, $\mathcal{X}_0$ le schéma Spec R_0 et X_0 le schéma $\mathcal{X}_0 \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$. Le but de cette section est d'utiliser les théorèmes de dualité de type Poitou-Tate de la section précédente pour étudier le principe local-global et l'approximation faible sur K_0.

3.1 Principe local-global dans le cas $k = k^s$ et Car$(k) = 0$

Supposons que k soit algébriquement clos de caractéristique 0. En particulier, k est un corps $(-1,0)$-bon pour la dualité. Soient H un K_0-groupe linéaire réductif connexe et Y un espace principal homogène sous H tel que, pour chaque $v \in X_0^{(1)}$, on a $Y(K_{0,v}) \neq \emptyset$. D'après la proposition 1.8(ii), on a une suite exacte :

$$\mathrm{Br}K_0 \to \bigoplus_{v \in X_0^{(1)}} \mathrm{Br}\ K_{0,v} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0. \tag{4.12}$$

En considérant un modèle géométriquement intègre $\mathcal{Y}$ de Y sur un ouvert non vide U de X_0, on peut définir un accouplement analogue à l'accouplement de Brauer-Manin pour les corps de nombres :

$$\begin{aligned}[.,.] : Y(\mathbb{A}_{K_0}) \times \mathrm{Br}(Y) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((P_v)_v, \alpha) &\mapsto \theta\left((\alpha(P_v))_v\right),\end{aligned}$$

où :

$$Y(\mathbb{A}_{K_0}) = \varinjlim_{V \subseteq U} \prod_{v \in V^{(1)}} \mathcal{Y}(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v \in X_0 \setminus V} Y(K_{0,v}).$$

Ici, V décrit les ouverts non vides de U et $\mathcal{O}_v$ désigne le complété de l'anneau local de X_0 en v. Notons :

$$\text{Б}(Y) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Y) \to \prod_{v \in X_0^{(1)}} \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Y \times_{K_0} K_{0,v})).$$

Toujours en utilisant la suite exacte (4.12), on remarque que $[.,.]$ induit un accouplement :

$$[.,.] : Y(\mathbb{A}_{K_0}) \times \text{Б}(Y) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et que $Y(K_0)$ est contenu dans l'orthogonal de $\text{Б}(Y)$ dans $Y(\mathbb{A}_{K_0})$: cela définit une obstruction au principe local-global pour Y, que l'on appellera **obstruction de Brauer-Manin associée à** $\text{Б}(Y)$.

On remarque que, pour $\alpha \in \text{Б}(Y)$, la valeur de $[(P_v), \alpha]$ ne dépend pas du choix du point adélique $(P_v) \in Y(\mathbb{A}_{K_0})$. Comme on dispose d'un isomorphisme canonique $Б(Y) \to Б(H)$ (voir le lemme 5.2(iii) de [BvH09]), cela permet de définir un accouplement :

$$\begin{aligned} \mathrm{BM} : Ш^1(H) \times Б(H) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ([Y], \alpha) &\mapsto [(P_v), \alpha] \end{aligned}$$

où $(P_v) \in Y(\mathbb{A}_{K_0})$ est un point adélique quelconque.

Par ailleurs, notons H^{ss} le sous-groupe dérivé de H et H^{sc} son revêtement universel, qui est semi-simple simplement connexe. Soit T un tore maximal de H. Notons $T^{(sc)}$ l'image réciproque de T par le morphisme composé $\rho : H^{sc} \to H^{ss} \to H$ et $G = [T^{(sc)} \to T]$. Comme dans la section 2 de l'article [Bor98] de Borovoi, pour L une extension de K_0, on définit la cohomologie galoisienne abélienne de H par $H^r_{\mathrm{ab}}(L, H) = H^r(L, G)$. Elle est munie de morphismes d'abélianisation ab^1_L : $H^1(L, H) \to H^1_{\mathrm{ab}}(L, H)$ (voir section 3 de [Bor98]).

Proposition 3.1. *Pour chaque $v \in X_0^{(1)}$, le morphisme $ab^1_{K_{0,v}}$ est bijectif. Il en est de même du morphisme $ab^1_{K_0}$.*

Démonstration. D'après les théorèmes 1.4 et 1.5 de [CTGP04], K_0 et $K_{0,v}$ sont des corps de caractéristique 0, de dimension cohomologique 2, tels que indice et exposant coïncident pour les algèbres simples centrales, et sur lesquels la conjecture de Serre II vaut. Il suffit donc de procéder comme dans le corollaire 5.4.1 de [Bor98] pour obtenir l'injectivité et d'invoquer le théorème 5.1(i) et l'exemple 5.4(vi) de [GA12] pour obtenir la surjectivité. □

Le noyau du morphisme $T^{(sc)} \to T$ étant fini, le théorème 2.10 fournit un accouplement parfait de groupes finis de type Poitou-Tate :

$$\mathrm{PT} : Ш^1(K_0, G) \times \overline{Ш^1(K_0, \tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $\tilde{G}$ est le complexe $[\hat{T}_2 \to \hat{T}_1]$ dans lequel $\hat{T}_2$ est placé en degré -1 et $\hat{T}_1$ en degré 0. Nous disposons d'isomorphismes permettant de comparer cet accouplement à l'accouplement de Brauer-Manin :

- d'après la proposition 3.1, les morphismes d'abélianisation induisent une bijection $\mathrm{ab}^1 : Ш^1(K_0, H) \to Ш^1(K_0, G)$,
- d'après le corollaire 2.20 et le théorème 4.8 de [BvH09], les groupes $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(H)$ et $H^1(K_0, \tilde{G})$ sont isomorphes, ce qui induit un isomorphisme $B : Б(H) \to Ш^1(K_0, \tilde{G})$.

On peut alors montrer, comme dans la proposition 3.6 du chapitre 2, que l'on a un diagramme commutatif au signe près :

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{BM} : & Ш^1(K_0, H) & \times & \overline{Б(H)} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ab}^1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B} & & \Big\| \\ \mathrm{PT} : & Ш^1(K_0, G) & \times & \overline{Ш^1(K_0, \tilde{G})} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{array}$$

On en déduit le théorème :

Théorème 3.2. *Supposons que k soit algébriquement clos de caractéristique 0. Soit H un groupe réductif connexe sur K_0. L'accouplement de Brauer-Manin :*

$$Ш^1(K_0, H) \times \overline{Б(H)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

induit une bijection $Ш^1(K_0, H) \cong \overline{Б(H)}^D$. En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin associée à $Б(Y)$ est la seule obstruction pour les espaces principaux homogènes sous H.

Cela répond affirmativement à la question de J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala et V. Suresh posée à la toute fin de l'article [CTPS16] dans le cas (b) lorsque k est de caractéristique nulle. Plus précisément, si Y est un espace principal homogène sous H pour lequel il existe une famille $(P_v) \in \prod_{v \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(1)}} Y(K_{0,v})$ telle que pour tout $A \in Б(Y)$:

$$(\partial_v(A(P_v)))_{v \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(1)}} \in \mathrm{Ker} \left(\bigoplus_{v \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(1)}} H^1(k(v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \stackrel{\partial_{v,w}}{\to} \bigoplus_{w \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(2)}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right),$$

alors pour chaque $w \in \tilde{\mathcal{X}}^{(2)}$, on a

$$\sum_{v \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(1)}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) = 0$$

et donc

$$\sum_{w \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(2)}} \sum_{v \in \tilde{\mathcal{X}}_0^{(1)}} \partial_{v,w}(\partial_v(A(P_v))) = 0.$$

Ici, $\tilde{\mathcal{X}}_0$ désigne une désingularisation de $\mathcal{X}_0$ comme dans la section 1.2 et les ∂_v et $\partial_{v,w}$ désignent les applications résidus. En identifiant $Б(H)$ et $Б(Y)$, l'égalité précédente prouve que $[Y] \in Ш^1(K_0, H)$ est dans l'orthogonal de $Б(H)$ pour l'accouplement du théorème 3.2 : on en déduit que Y a un point rationnel.

3.2 Principe local-global dans le cas général

On ne fait plus d'hypothèse sur d ni sur p. Ainsi, le corps k peut être séparablement clos de caractéristique positive, fini, ℓ-adique, ou encore $\mathbb{C}((t))$. Soient T un tore sur K_0 et Y un espace principal homogène sous T tel que $Y(\mathbb{A}_{K_0}) \neq \emptyset$ et qui devient trivial sur une extension finie de K_0 de degré non divisible par p. La théorie de Bloch-Ogus (rappelée par exemple dans le paragraphe 2 de [CTPS16]) fournit un complexe :

$$H^{d+3}(K_0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\mathrm{non}-p} \to \bigoplus_{v \in X_0^{(1)}} H^{d+3}(K_{0,v}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\mathrm{non}-p} \stackrel{\vartheta}{\to} H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))_{\mathrm{non}-p}. \quad (4.13)$$

Comme dans le paragraphe précédent, en identifiant les groupes $H^{d+1}(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))_{\text{non}-p}$ et $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{non}-p}$, on peut alors définir un accouplement à la Brauer-Manin :

$$\begin{aligned}[.,.]: Y(\mathbb{A}_{K_0}) \times H^{d+3}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p} &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\\ ((P_v)_v,\alpha) &\mapsto \vartheta\left((\alpha(P_v))_v\right).\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}H^{d+3}_{\text{lc}}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)) = \text{Ker}(&H^{d+3}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))/\text{Im}(H^{d+3}(K_0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)))\\ &\to \prod_{v\in X_0^{(1)}} H^{d+3}(Y_{K_{0,v}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))/\text{Im}(H^{d+3}(K_{0,v},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)))\end{aligned}$$

où $Y_{K_{0,v}}$ désigne $Y\times_{K_0}K_{0,v}$. En utilisant de nouveau le complexe (4.13), on remarque que l'accouplement $[.,.]$ induit un accouplement :

$$[.,.]: Y(\mathbb{A}_{K_0}) \times H^{d+3}_{\text{lc}}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et que $Y(K)$ est contenu dans l'orthogonal de $H^{d+3}_{\text{lc}}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p}$. De plus, pour $\alpha\in H^{d+3}_{\text{lc}}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p}$, la quantité $[(P_v),\alpha]$ est indépendante du choix du point adélique $(P_v)\in Y(\mathbb{A}_{K_0})$. L'accouplement $[.,.]$ induit donc un morphisme :

$$\rho_Y: H^{d+3}_{\text{lc}}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Proposition 3.3. *Soit :*

$$PT: Ш^1(K_0,T)_{non-p} \times \overline{Ш^{d+3}(K_0,\tilde{T})}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

l'accouplement parfait de la remarque 2.9. Il existe un morphisme

$$\tau: Ш^{d+3}(K_0,\tilde{T})_{non-p} \to H^{d+3}_{lc}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{non-p}$$

tel que l'on ait $\rho_Y\circ\tau = PT([Y],\cdot)$.

Démonstration. La preuve est analogue à la partie 5 de [HSz16]. On se contente de rappeler brièvement la construction de τ.
Notons $\overline{Y}=Y\times_{K_0}K_0^s$. La suite spectrale

$$H^p(K_0,H^q(\overline{Y},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)))\Rightarrow H^{p+q}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))$$

induit un morphisme :

$$H^{d+2}(K_0,H^1(\overline{Y},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)))\to H^{d+3}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2)).$$

Comme dans le lemme 5.2 de [HSz16], on a un isomorphisme de modules galoisiens $H^1(\overline{Y},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p}\cong\hat{T}\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)_{\text{non}-p}$. On obtient donc un morphisme :

$$H^{d+2}(K_0,\hat{T}\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))_{\text{non}-p}\to H^{d+3}(Y,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p}.$$

D'après le lemme 3.1 du chapitre 1, les groupes $H^{d+2}(K_0, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1))$ et $H^{d+3}(K_0, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1))$ sont triviaux. En exploitant le triangle distingué

$$\hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d+1) \to \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d+1) \to \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1) \to \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d+1)[1],$$

on montre alors que $H^{d+2}(K_0, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))_{\text{non}-p} \cong H^{d+3}(K_0, \tilde{T})_{\text{non}-p}$, ce qui fournit un morphisme :

$$H^{d+3}(K_0, \tilde{T})_{\text{non}-p} \to H^{d+3}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p}.$$

En passant aux éléments localement triviaux, on obtient un morphisme :

$$\text{Ш}^{d+3}(K_0, \tilde{T})_{\text{non}-p} \to H^{d+3}_{\text{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+2))_{\text{non}-p}.$$

C'est le morphisme τ. $\square$

La proposition précédente entraîne alors le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Soient T un tore sur K_0 et Y un espace principal homogène sous T tel que $Y(\mathbb{A}_{K_0}) \neq \emptyset$ et qui devient trivial sur une extension finie de K_0 de degré non divisible par p. Si ρ_Y est trivial, alors $Y(K_0) \neq \emptyset$.*

Comme dans le paragraphe 3.1, en prenant $d = -1$, cela répond affirmativement à la question de J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala et V. Suresh posée à la toute fin de l'article [CTPS16] dans le cas (b) lorsque k est de caractéristique quelconque.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons qu'en utilisant la remarque 2.9 et en procédant comme dans le corollaire 5.7 de [HSz16], on peut obtenir la proposition :

Proposition 3.5. *Supposons k fini de caractéristique p et considérons un tore stablement rationnel T sur K_0. Soit Y un espace principal homogène sous T tel que $Y(\mathbb{A}_{K_0}) \neq \emptyset$ et qui devient trivial sur une extension finie de K_0 de degré non divisible par p. Alors Y vérifie le principe local-global.*

Démonstration. Comme T est stablement rationnel, il existe une résolution de T :

$$0 \to T' \to R \to S \to 0$$

où R et S sont des tores quasi-triviaux (proposition 6 de [CTS77]). Or la remarque 2.9 impose que $\text{Ш}^2(K_0, R)_{\text{non}-p}$ est trivial. On en déduit que $\text{Ш}^2(K_0, T')_{\text{non}-p} = 0$, et le théorème 2.8 permet de conclure que $\text{Ш}^1(K_0, T)_{\text{non}-p} = 0$. $\square$

3.3 Approximation faible

On suppose dans ce paragraphe que $p = 0$. En particulier, k est de caractéristique nulle. Pour M un $\text{Gal}(K_0^s/K_0)$-module discret, on note $\text{Ш}^2_\omega(K_0, M)$ l'ensemble des éléments de $H^2(K_0, M)$ dont la restriction à $H^2(K_{0,v}, M)$ est triviale pour presque tout $v \in X_0^{(1)}$. On rappelle la définition 2.1 du chapitre 2 :

Définition 3.6. *Soit T un K_0-tore. On dit que T vérifie* ***l'approximation faible*** *si $T(K_0)$ est dense dans $\prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v})$, où le groupe $T(K_{0,v})$ est muni de la topologie v-adique pour chaque v. On dit que T vérifie* ***l'approximation faible faible*** *(resp.* ***l'approximation faible faible dénombrable****) s'il existe une partie finie (resp. dénombrable) S_0 de $X_0^{(1)}$ telle que, pour toute partie finie S de $X_0^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K_0)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_{0,v})$.*

Exactement comme dans la section 9 de [CTH15], dans la section 3 de [HSSz15] ou encore dans la section 2 du deuxième chapitre de cette thèse, on peut comprendre l'obstruction à l'approximation faible :

Théorème 3.7. *Soit T un K_0-tore de module de caractères $\hat{T}$ et de tore dual T'. On note $\overline{T(K_0)}$ l'adhérence de $T(K_0)$ dans $\prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v})$.*
(i) Supposons $d=-1$ (par exemple $k=\mathbb{C}$). On a la suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K_0)} \to \prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v}) \to (\text{Ш}^2_\omega(K_0,\hat{T}))^D \to (\text{Ш}^2(K_0,\hat{T}))^D \to 0.$$

Le tore T vérifie toujours l'approximation faible faible, et il vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $\text{Ш}^2(K_0,\hat{T}) = \text{Ш}^2_\omega(K_0,\hat{T})$.
(ii) Supposons que $d=0$ (par exemple $k=\mathbb{C}((t))$). On a la suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K_0)} \to \prod_{v\in X_0^{(1)}} T(K_{0,v}) \to (\text{Ш}^2_\omega(K_0,T'))^D \to (\text{Ш}^2(K_0,T'))^D \to 0.$$

Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $\text{Ш}^2(K_0,T') = \text{Ш}^2_\omega(K_0,T')$. Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion $\text{Ш}^2_\omega(K_0,T')$ est de type cofini. Le tore T vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion $\text{Ш}^2_\omega(K_0,T')$ est dénombrable.

Démonstration. (Esquisse). Voici les grandes étapes pour (i) :
1. Pour F un $\text{Gal}(K_0^s/K_0)$-module fini, on établit une suite exacte :

$$H^1(K_0,F') \to \mathbb{P}^1(K_0,F') \to H^1(K_0,F)^D$$

où $F' = \text{Hom}(F,\mu_n)$ et $\mathbb{P}^1(K_0,F')$ est le produit restreint des $H^1(K_{0,v},F')$ pour $v\in X^{(1)}$ par rapport aux $H^1(\mathcal{O}_v,F')$.
2. En dualisant la suite exacte précédente, on montre que, pour F un $\text{Gal}(K_0^s/K_0)$-module fini et S une partie finie de $X_0^{(1)}$, on a une suite exacte :

$$H^1(K_0,F) \to \prod_{v\in S} H^1(K_{0,v},F) \to \text{Ш}^1_S(K_0,F')^D \to \text{Ш}^1(K_0,F')^D \to 0,$$

où $\text{Ш}^1_S(K_0,M) = \text{Ker}\left(H^1(K_0,M) \to \prod_{v\in X_0^{(1)}\setminus S} H^1(K_{0,v},M)\right)$ pour chaque module galoisien M.

3. L'exploitation de la suite exacte précédente avec $F = \mu_n$ permet de montrer que $Ш^2_S(K_0, \mathbb{Z}) = Ш^2(K_0, \mathbb{Z})$. D'après le théorème 2.8, c'est un groupe de torsion de type cofini divisible. De plus, l'égalité $Ш^2_S(K_0, \mathbb{Z}) = Ш^2(K_0, \mathbb{Z})$ permet de vérifier que le théorème est vrai pour les tores quasi-triviaux.
4. Comme le théorème est vrai pour les tores quasi-triviaux, le lemme d'Ono (théorème 1.5.1 de [Ono61]) permet de supposer que T admet une résolution :

$$0 \to F \to R \to T \to 0$$

avec F fini et R tore quasi-trivial. Cela donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & R(K_0) \arrow[r] \arrow[d] & T(K_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K_0, F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \prod_{v \in S} R(K_{0,v}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in S} T(K_{0,v}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in S} H^1(K_{0,v}, F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ш^2_S(K_0, \hat{R})^D \arrow[r] & Ш^2_S(K_0, \hat{T}) \arrow[r] & Ш^1_S(K_0, F') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux premières lignes sont bien sûr exactes, et on peut montrer que la troisième l'est aussi grâce à l'étape 3. En utilisant encore l'étape 3, une chasse au diagramme permet d'établir une suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K_0)_S} \to \prod_{v \in S} T(K_{0,v}) \to (Ш^2_S(K_0, \hat{T}))^D,$$

où $\overline{T(K_0)_S}$ désigne l'adhérence de $T(K_0)$ dans $\prod_{v \in S} T(K_{0,v})$. En passant à la limite projective sur S, on obtient l'exactitude de :

$$0 \to \overline{T(K_0)} \to \prod_{v \in X_0^{(1)}} T(K_{0,v}) \to (Ш^2_\omega(K_0, \hat{T}))^D.$$

5. L'exactitude de

$$\prod_{v \in X_0^{(1)}} T(K_{0,v}) \to (Ш^2_\omega(K_0, \hat{T}))^D \to (Ш^2(K_0, \hat{T}))^D \to 0$$

s'obtient en dualisant la suite exacte :

$$0 \to Ш^2(K_0, \hat{T}) \to Ш^2_\omega(K_0, \hat{T}) \to \bigoplus_{v \in X_0^{(1)}} H^2(K_{0,v}, \hat{T}).$$

6. De la suite exacte :

$$0 \to \overline{T(K_0)} \to \prod_{v \in X_0^{(1)}} T(K_{0,v}) \to (Ш^2_\omega(K_0, \hat{T}))^D \to (Ш^2(K_0, \hat{T}))^D \to 0$$

on déduit que T vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $Ш^2(K_0, \hat{T}) = Ш^2_\omega(K_0, \hat{T})$. et qu'il vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si,

$Ш^2(K_0, \hat{T})$ est d'indice fini dans $Ш^2_\omega(K_0, \hat{T})$. En utilisant une résolution flasque de T, on peut montrer que $Ш^2_\omega(K_0, \hat{T}) = Ш^2_{S_T}(K_0, \hat{T})$, où S_T désigne l'ensemble des places $v \in X_0^{(1)}$ de mauvaise réduction de T. Ainsi, $Ш^2(K_0, \hat{T})$ est toujours d'indice fini dans $Ш^2_\omega(K_0, \hat{T})$ et T vérifie l'approximation faible faible.

□

Remarque 3.8. • La preuve de (ii) est similaire.

• Comme dans la remarque 2.9, on pourrait obtenir un résultat pour l'approximation faible dans le cas où d est quelconque en faisant intervenir les complexes de Bloch.

Bibliographie

[Ber63] Claude Berge. *Théorie des graphes et ses applications*, deuxième édition. Dunod, Paris, 1963.

[Blo86] Spencer Bloch. Algebraic cycles and higher K-theory. *Adv. in Math.*, 61(3) :267–304, 1986.

[Bor98] Mikhail Borovoi. Abelian Galois cohomology of reductive groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 132(626) :viii+50, 1998.

[BvH09] Mikhail Borovoi and Joost van Hamel. Extended Picard complexes and linear algebraic groups. *J. reine angew. Math.*, 627 :53–82, 2009.

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert and Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Bou06] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9*. Springer, Berlin, 2006 (reprint of the 1983 original).

[Bre69] Lawrence Breen. Extensions of abelian sheaves and Eilenberg-MacLane algebras. *Invent. Math.*, 9 :15–44, 1969.

[BT87] François Bruhat et Jacques Tits. Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(3) :671–698, 1987.

[Che94] Vladimir Chernousov. A remark on the $(\bmod 5)$-invariant of Serre for groups of type E_8. *Mat. Zametki*, 56(1) :116–121, 157, 1994.

[Che10] Vladimir Chernousov. On the kernel of the Rost invariant for E_8 modulo 3. In *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, volume 18 of *Dev. Math.*, pages 199–214. Springer, New York, 2010.

[CT95] Jean-Louis Colliot-Thélène. *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture* in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*. Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1995.

[CT03] Jean-Louis Colliot-Thélène Points rationnels sur les fibrations. In *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)*. Bolyai Soc. Math. Stud., 12 :171–221, Springer, Berlin, 2003.

[CT08] Jean-Louis Colliot-Thélène. Résolutions flasques des groupes linéaires connexes. *J. reine angew. Math.*, 618 :77–133, 2008.

[CTGP04] Jean-Louis Colliot-Thélène, Philippe Gille, and Raman Parimala. Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields. *Duke Math. J.*, 121(2) :285–341, 2004.

[CTH15] Jean-Louis Colliot-Thélène and David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(6) :1475–1516, 2015.

[CTOP02] Jean-Louis Colliot-Thélène, Manuel Ojanguren and Raman Parimala. Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional Henselian rings and Brauer groups of related schemes. In *Algebra, arithmetic and geometry, Mumbai, 2000*, R. Parimala (editor), Part I, Narosa Publishing House, 185–217, 2002.

[CTPS12] Jean-Louis Colliot-Thélène, Raman Parimala, and Venapally Suresh. Patching and local-global principles for homogeneous spaces over function fields of p-adic curves. *Comment. Math. Helv.*, 87(4) :1011–1033, 2012.

[CTPS16] Jean-Louis Colliot-Thélène, Raman Parimala, and Venapally Suresh. Lois de réciprocité supérieures et points rationnels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368(6) :4219–4255, 2016.

[CTS77] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. La R-équivalence sur les tores. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10 :175–229, 1977.

[CTS87] Jean-Louis Colliot-Thélène et Jean-Jacques Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles II. *Duke Mathematical Journal*, 54 :375–492, 1987.

[CD89] François R. Cossec and Igor V. Dolgachev. *Enriques surfaces I.* Progress in Mathematics 76, Birkhäuser, Boston, 1989.

[Del77] Pierre Deligne. *Cohomologie étale.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2, Avec la collaboration de Jean-François Boutot, Alexander Grothendieck, Luc Illusie et Jean-Louis Verdier.

[Dem11] Cyril Demarche. Suites de Poitou-Tate pour les complexes de tores à deux termes. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1) :135–174, 2011.

[DT83] Jean-Claude Douai et Chedly Touibi. Courbes définies sur les corps de séries formelles et loi de réciprocité. *Acta Arith.*, 42(1) :101–106, 1982/83.

[DT85] Jean-Claude Douai et Chedly Touibi. Courbes définies sur les corps de séries formelles et loi de réciprocité, Errata. *Acta Arith.*, 46 :197, 1985.

[FK88] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Volume 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Fu11] Lei Fu. *Etale cohomology theory*, volume 13 of *Nankai Tracts in Mathematics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[Fuc70] László Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, Academic Press, New York-London, 1970.

[Gar01] Ryan Skip Garibaldi. The Rost invariant has trivial kernel for quasi-split groups of low rank. *Comment. Math. Helv.*, 76(4) :684–711, 2001.

[Gei04] Thomas Geisser. Motivic cohomology over Dedekind rings. *Math. Z.*, 248(4) :773–794, 2004.

[Gei05] Thomas Geisser. Motivic cohomology, K-theory and topological cyclic homology. In *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, pages 193–234. Springer, Berlin, 2005.

[GL00] Thomas Geisser and Marc Levine. The K-theory of fields in characteristic p. *Invent. Math.*, 139(3) :459–493, 2000.

[GL01] Thomas Geisser and Marc Levine. The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky. *J. reine angew. Math.*, 530 :55–103, 2001.

[GP08] Philippe Gille and Arturo Pianzola. Isotriviality and étale cohomology of Laurent polynomial rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(4) :780–800, 2008.

[GA09] Cristian D. González-Avilés. Arithmetic duality theorems for 1-motives over function fields. *J. reine angew. Math.*, 632 :203–231, 2009.

[GA12] Cristian D. González-Avilés. Quasi-abelian crossed modules and nonabelian cohomology. *J. Algebra*, 369 :235–255, 2012.

[Gro61] Alexander Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 11, 1961.

[Gro65] Alexander Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 24, 1965.

[Gro67] Alexander Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 32, 1967.

[Gro70] Alexander Grothendieck. *Schémas en groupes (SGA 3).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151, 152, 153. Springer-Verlag, Berlin, 1970. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64, Dirigé par Michel Demazure and Alexander Grothendieck. Avec la collaboration de M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre.

[Gro72a] Alexander Grothendieck. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305. Springer-Verlag, Berlin, 1972-1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par Michael Artin, Alexander Grothendieck et Jean-Louis Verdier. Avec la collaboration de Pierre Deligne et Bernard Saint-Donat.

[Gro72b] Alexander Grothendieck. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I (SGA 7 I).* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, Springer-Verlag, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim.

[Har94] David Harari. Méthode des fibrations et obstruction de Manin. *Duke Math. J.*, 75 :221–260, 1994.

[HSSz15] David Harari, Claus Scheiderer and Tamás Szamuely. Weak approximation for tori over p-adic function fields. *Int. Math. Res. Not.*, 10 :2751–2783, 2015.

[HSz05] David Harari and Tamás Szamuely. Arithmetic duality theorems for 1-motives. *J. reine angew. Math.*, 578 :93–128, 2005.

[HSz08] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for 1-motives. *Duke Math. J.*, 143(3) :531–557, 2008.

[HSz16] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for tori over p-adic function fields. *Journal of Algebraic Geometry*, 25 :571-605, 2016.

[HHK09] David Harbater, Julia Hartmann, and Daniel Krashen. Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras. *Invent. Math.*, 178(2) :231–263, 2009.

[HHK14] David Harbater, Julia Hartmann, and Daniel Krashen. Local-global principles for Galois cohomology. *Comment. Math. Helv.*, 89(1) :215–253, 2014.

[HHK15] David Harbater, Julia Hartmann, and Daniel Krashen. Local-global principles for torsors over arithmetic curves. *Amer. J. Math.*, 137(6) :1559–1612, 2015.

[HR79] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, volume 115 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1979.

[Hu14] Yong Hu. A cohomological Hasse principle over two-dimensional local rings. 2014. Prépublication sur `http://www.math.unicaen.fr/~hu/publications.html`.

[HS11] Klaus Hulek and Matthias Schütt. Enriques surfaces and Jacobian elliptic K3 surfaces. *Mathematische Zeitschrift*, 268(3-4) :1025–1056, 2011.

[ILO14] Luc Illusie, Yves Laszlo, et Fabrice Orgogozo. Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. *Astérisque*, No. 363-364, Société Mathématique de France (Paris), 2014. Séminaire à l'École Polytechnique 2006–2008. Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng.

[Izq14a] Diego Izquierdo. Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs. 2014. À paraître dans *Math. Z.*.

[Izq14b] Diego Izquierdo. Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs II. 2014. Prépublication sur `http://www.eleves.ens.fr/home/izquierd/`.

[Izq15a] Diego Izquierdo. Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs I. *J. Number Theory*, 157 :250–270, 2015.

[Izq15b] Diego Izquierdo. Variétés abéliennes sur les corps de fonctions de courbes sur des corps locaux. 2015. Prépublication sur `http://www.eleves.ens.fr/home/izquierd/`.

[Izq16] Diego Izquierdo. Dualité et principe local-global sur des corps locaux de dimension 2. 2016. Prépublication sur `http://www.eleves.ens.fr/home/izquierd/`.

[Jaw01] Piotr Jaworski. On the strong Hasse principle for fields of quotients of power series rings in two variables. *Math. Z.*, 236(3) :531–566, 2001.

[Kah92] Bruno Kahn. The decomposable part of motivic cohomology and bijectivity of the norm residue homomorphism. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 of *Contemp. Math.*, pages 79-87. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Kah12] Bruno Kahn. Classes de cycles motiviques étales. *Algebra & Number Theory*, 6(7) :1369–1407, 2012.

[Kat79] Kazuya Kato. A generalization of local class field theory by using K-groups I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 26(2) :303–376, 1979.

[Kat86] Kazuya Kato. A Hasse principle for two-dimensional global fields. *J. reine angew. Math.*, 366 :142–183, 1986. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène.

[Kat00] Kazuya Kato. Existence theorem for higher local fields. In *Invitation to higher local fields (Münster, 1999)*, volume 3 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 165–195. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000.

[Kol88] Victor A. Kolyvagin. Finiteness of $E(\mathbf{Q})$ and $\mathrm{SH}(E, \mathbf{Q})$ for a subclass of Weil curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 52(3) :522–540,670–671, 1988.

[Koy00] Yoshihiro Koya. On a duality theorem of abelian varieties over higher dimensional local fields. *Kodai Math. J.*, 2 :297–308, 2000.

[Lan52] Serge Lang. On quasi algebraic closure. *Ann. of Math. (2)*, 55 :373–390, 1952.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[LT58] Serge Lang and John Tate. Principal homogeneous spaces over abelian varieties. *American Journal of Mathematics*, 80 :659–684, 1958.

[Lip69] Joseph Lipman. Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 36 :195–279, 1969.

[Lip78] Joseph Lipman. Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math. (2)*, 107(1) :151–207, 1978.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Man71] Yuri I. Manin. Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, Gauthier-Villars, Paris, 401–411, 1971.

[Man86] Yuri I. Manin. *Cubic forms*, Second edition, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Algebra, geometry, arithmetic ; Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[Mar79] Jean Marot. Limite inductive plate de P-anneaux. *Journal of Algebra*, 57(2) :484–496, 1979.

[Mat55] Arthur Mattuck. Abelian varieties over p-adic ground fields. *Ann. of Math. (2)*, 62 :92–119, 1955.

[Mil80] James S. Milne. *Étale cohomology*, volume 33 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Mil86] James S. Milne. *Abelian varieties*. In *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), p.103–150. Springer, New York, 1986.

[Mil06] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.

[MS82] James S. Milne and Kuang-yen Shih. Conjugates of Shimura varieties. In *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Math.*, pages 280–356. Springer-Verlag, 1982.

[Nag57] Masayoshi Nagata. Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.*, 30 :237–241, 1957.

[NS89] Yu P. Nesterenko and Andrei A. Suslin. Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(1) :121–146, 1989.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

[Ogg62] Andrew P. Ogg. Cohomology of abelian varieties over function fields. *Ann. of Math. (2)*, 76 :185–212, 1962.

[Ono61] Takashi Ono. Arithmetic of algebraic tori. *Ann. of Math. (2)*, 74 :101–139, 1961.

[Oor66] Frans Oort. *Commutative group schemes*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[Par10] Raman Parimala. Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional fields. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I*, pages 339–361. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[Rio13] Joël Riou. La conjecture de Bloch-Kato (d'après M. Rost & V. Voevodsky). *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 1073, 2013.

[Rub87] Karl Rubin. Tate-Shafarevich groups and L-functions of elliptic curves with complex multiplication. *Invent. Math.*, 89(3) :527–559, 1987.

[San81] Jean-Jacques Sansuc. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. reine angew. Math.*, 327 :12–80, 1981.

[Sai86] Shuji Saito. Arithmetic on two-dimensional local rings. *Invent. Math.*, 85(2) :379–414, 1986.

[SvH03] Claus Scheiderer and Joost van Hamel. Cohomology of tori over p-adic curves. *Math. Ann.*, 326(1) :155–183, 2003.

[SS10] Matthias Schütt and Tetsuji Shioda. Elliptic surfaces. In *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, Adv. Stud. Pure Math., 60 :51—160, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Sem16] Nikita Semenov. Motivic construction of cohomological invariants. *Comment. Math. Helv.*, 91(1) :163–202, 2016.

[Ser92] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups*, Second edition, 1964 lectures given at Harvard University. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1500, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ser02] Jean-Pierre Serre. *Galois cohomology*, in *Springer Monographs in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Sha72] Stephen S. Shatz. *Profinite groups, arithmetic, and geometry.* Annals of Mathematics Studies, No. 67, Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972.

[Sko99] Alexei Skorobogatov. Beyond the Manin obstruction. *Invent. Math.*, 135(2) :399–424, 1999.

[SZ14] Alexei N. Skorobogatov and Yuri G. Zarhin. The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties. *J. Eur. Math. Soc.*, 16 :749–768, 2014.

[SJ06] Andrei A. Suslin and Seva Joukhovitski. Norm varieties. *J. Pure Appl. Algebra*, 206(1-2) :245–276, 2006.

[SV00] Andrei A. Suslin and Vladimir Voevodsky. Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 548 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 117–189. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Tam94] Günter Tamme. *Introduction to étale cohomology.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Tat58] John Tate. WC-groups over p-adic fields. *Séminaire Bourbaki*, année 1957/1958, exposé 156.

[Tat63] John Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 288–295. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.

[Tat66] John Tate. On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. *Séminaire Bourbaki*, année 1964/1966, exposé 306.

[Tot92] Burt Totaro. Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory. *K-Theory*, 6(2) :177–189, 1992.

[Voe11] Vladimir Voevodsky. On motivic cohomology with $\mathbf{Z}/l$-coefficients. *Ann. of Math. (2)*, 174(1) :401–438, 2011.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

université PARIS-SACLAY
École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions

Mots-clefs : corps de fonctions, dualité arithmétique, groupes algébriques, principe local-global, torseurs, approximation faible, cohomologie galoisienne, corps locaux supérieurs, anneaux locaux de dimension 2.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'arithmétique de certains corps de fonctions. Nous cherchons à établir dans un premier temps des théorèmes de dualité arithmétique sur ces corps, pour les appliquer ensuite à l'étude des points rationnels sur certaines variétés algébriques.

Dans les trois premiers chapitres, nous travaillons sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps local supérieur (comme $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p((t))$, $\mathbb{C}((t))$ ou $\mathbb{C}((t))((u))$). Dans le premier chapitre, nous établissons sur un tel corps des théorèmes de dualité arithmétique « à la Poitou-Tate » pour les modules finis, les tores, et même pour certains complexes de tores. Nous montrons aussi l'existence, sous certaines hypothèses, de certaines portions des suites exactes de Poitou-Tate correspondantes. Ces résultats sont appliqués dans le deuxième chapitre à l'étude du principe local-global pour les algèbres simples centrales, de l'approximation faible pour les tores, et des obstructions au principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes. Dans le troisième chapitre, nous nous penchons sur les variétés abéliennes et établissons des théorèmes de dualité arithmétique « à la Cassels-Tate ». Cela demande aussi de mener une étude fine des variétés abéliennes sur les corps locaux supérieurs.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous travaillons sur les corps des fractions de certaines algèbres locales normales de dimension 2 (typiquement $\mathbb{C}((x,y))$ ou $\mathbb{F}_p((x,y))$). Nous établissons d'abord un théorème de dualité en cohomologie étale « à la Artin-Verdier » dans ce contexte. Cela nous permet ensuite de montrer des théorèmes de dualité arithmétique en cohomologie galoisienne « à la Poitou-Tate » pour les modules finis et les tores. Nous appliquons finalement ces résultats à l'étude de l'approximation faible pour les tores et des obstructions au principe local-global pour les torseurs sous des groupes linéaires connexes.

Duality and local-global principle over function fields

Keywords : function fields, arithmetic duality, algebraic groups, local-global principle, torsors, weak approximation, Galois cohomology, higher-dimensional local fields, 2-dimensional local rings.

In this thesis, we are interested in the arithmetic of some function fields. We first want to establish arithmetic duality theorems over those fields, in order to apply them afterwards to the study of rational points on algebraic varieties.

In the first three chapters, we work on the function field of a curve defined over a higher-dimensional local field (such as $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p((t))$, $\mathbb{C}((t))$ or $\mathbb{C}((t))((u))$). In the first chapter, we establish "Poitou-Tate type" arithmetic duality theorems over such fields for finite modules, tori and even some complexes of tori. We also prove the existence, under some hypothesis, of parts of the corresponding Poitou-Tate exact sequences. These results are applied in the second chapter to the study of the local-global principle for central simple algebras, of weak approximation for tori, and of obstructions to local-global principle for torsors under connected linear algebraic groups. In the third chapter, we are interested in abelian varieties and we establish "Cassels-Tate type" arithmetic duality theorems. To do so, we also need to carry out a precise study of abelian varieties over higher-dimensional local fields.

In the fourth and last chapter, we work on the field of fractions of some 2-dimensional normal local algebras (such as $\mathbb{C}((x,y))$ or $\mathbb{F}_p((x,y))$). We first establish in this context an "Artin-Verdier type" duality theorem in étale cohomology. This allows us to prove "Poitou-Tate type" arithmetic duality theorems in Galois cohomology for finite modules and tori. In the end, we apply these results to the study of weak approximation for tori and of obstructions to local-global principle for torsors under connected linear algebraic groups.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France