



Une méthode topologique pour la recherche d'ensembles invariants de systèmes continus et à commutation

Sameh Mohamed

► To cite this version:

Sameh Mohamed. Une méthode topologique pour la recherche d'ensembles invariants de systèmes continus et à commutation. Autre [cs.OH]. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLN043 . tel-01397773

HAL Id: tel-01397773

<https://theses.hal.science/tel-01397773>

Submitted on 16 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLN043



THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEUR DE PARIS-SACLAY

ÉCOLE DOCTORALE N° 580
Dénomination de l'école doctorale

Spécialité de doctorat : Mathématiques et Informatique

Par

Mr Sameh MOHAMED

Une méthode topologique pour la recherche d'ensembles invariants de systèmes
continus et à commutation

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 17 Octobre 2016 :

Composition du Jury :

M^r MROZEK Marian, Professeur, Université Jagellonne, Cracovie, Président
M^r ASARIN Eugene, Professeur, Université Paris Diderot, Rapporteur
M^{me} DANG Thao, Directrice de recherche, Verimag CNRS, Rapporteur
M^r GHORBAL Khalil, Chargé de recherche, INRIA , Examineur
M^r FRIBOURG Laurent, Directeur de recherche, ENS Cachan LSV CNRS, Directeur de thèse
M^r GOUBAULT Éric, Professeur, École Polytechnique, Co-directeur de thèse
M^{me} PUTOT Sylvie, Professeur, École Polytechnique, Co-directrice de thèse

Titre : Une méthode topologique pour la recherche d'ensembles invariants de systèmes continus et à commutation

Mots clés : Ensembles invariants, Noyaux de viabilité, Topologie, Propriété de Wazewski, Indice de Conley

Résumé : On cherchera dans cette thèse à prouver l'existence d'ensembles invariants pour des systèmes continus et l'existence de noyaux de viabilité pour des systèmes à commutation (dépendant de l'espace ou du temps) dans des sous-ensembles de l'espace des phases. Ces objets sont des plus importants dans la théorie des systèmes dynamiques, ils peuvent être décrit de manière informelle comme étant des ensembles qui, lorsque le système dynamique y entre, il y restera à tout jamais. Pour prouver l'existence de tels ensembles on utilisera une propriété topologique dite propriété (ou principe) de Wazewski. On présentera alors premièrement une méthode effective permettant l'application ce principe à des systèmes continus. Puis nous généraliserons cette méthode pour la rendre applicable à des systèmes à commutation.

Title : A topological method for finding invariant sets of continuous and switched systems

Keywords : Invariant sets, Viability kernel, Switched systems, Topology, Wazewski, Conley Index

Abstract : We aim at proving the existence of invariants sets for continuous systems and viability kernels for (time-dependent and state-dependent) switched systems in compact subsets of the phase space. They are of the most important objects of dynamical systems theory. They can be described informally by saying that they are sub- sets such that, if the dynamical system goes inside, it will remain inside forever. For proving the existence of such sets we will use a to- pological property named the Wazewski property (or principle). We will firstly present an effective method for applying this principle for continuous systems and then we will generalize this first method in order to make it applicable also for switched systems.

Sameh MOHAMED : *UNE MÉTHODE TOPOLOGIQUE POUR LA RECHERCHE D'ENSEMBLES INVARIANTS DE SYSTÈMES CONTINUS ET À COMMUTATION*, Sur une application effective du principe de Wazewski, © 17 Octobre 2016

À ma famille.

PUBLICATIONS

RAPPORT DE RECHERCHE :

Synthesis of robust boundary control for systems governed by semi-discrete differential equations

L. Fribourg, É. Goubault, S. Mohamed, S. Putot and R. Soulat
Research Report LSV-14-03, Laboratoire Spécification et Vérification,
ENS Cachan, France, February 2014

CONFÉRENCES :

Le Chapitre 2 a fait l'objet de la publication suivante :

A Topological Method for Finding Invariant Sets of Continuous Systems

L. Fribourg, É. Goubault, S. Mohamed, M. Mrozek and S. Putot
Proceedings of the 9th International Workshop on Reachability Problems RP 2015

Et le Chapitre 3 a fait l'objet de la publication suivante :

A Topological Method for Finding Invariant Sets of Switched Systems

L. Fribourg, É. Goubault, S. Mohamed and S. Putot
Proceedings of the 19th ACM International Conference on Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC 2016

SOUMIS A UN JOURNAL :

A Topological Method for Finding Invariant Sets of Continuous Systems

L. Fribourg, É. Goubault, S. Mohamed, M. Mrozek and S. Putot
Journal of Information and Computation - Elsevier

*Les grandes choses dérivent souvent des petites,
Et c'est ainsi que l'étang se forme goutte à goutte.*

— Proverbes arabes

REMERCIEMENTS

J'aimerais avant tout adresser mes premiers remerciements à ma *famille* qui m'a toujours soutenu et poussé à continuer mes études. Arriver jusqu'à là aurait été impossible sans eux. J'adresse toute ma gratitude en particulier à mes *parents* qui ont souvent été le moteur de mes efforts.

En second lieu, j'aimerais remercier mes amis, dont deux particulièrement qui sont en fait plus des frères que des amis, à *Amine* et *Othman* qui ont suivi toutes les étapes de cette thèse. Ils l'ont parfois vécu comme si c'était la leur et ils m'ont toujours aidé à me relever des nombreuses difficultés que j'ai pu rencontré durant ces trois dernières années.

Bien-sûr je remercie aussi mes directeurs de thèse, merci à *Laurent* de m'avoir accepté pour cette thèse. Merci à *Eric* et *Sylvie* d'avoir accepté que je me dirige vers la théorie de Conley, de m'avoir guidé quand il le fallait, de m'avoir laissé mon indépendance quand il le fallait, de m'avoir mis une pression saine quand il le fallait et de m'avoir appris que "*la recherche est souvent très incrémentale*".

Je souhaite remercier *Thao Dang* et *Eugene Asarin* d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Merci à *Marian Mrozek* de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire dans cette magnifique ville qu'est Cracovie, d'avoir accepté d'être mon examinateur et le président du jury. Merci aussi à *Khalil Ghorbal* qui, sans le savoir a été un exemple pour moi, et qui a aussi accepté d'être examinateur.

Enfin, merci à *Marwa*, *Maha*, *Soumaya*, *Safa*, *Hana*, *Mohamed* et le meilleur pour la fin, à mon grand amour : *Nour*.

TABLE DES MATIÈRES

I	INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE	1
O	PROBLÉMATIQUE	3
1	INTRODUCTION	7
1.1	Systèmes dynamiques continus	7
1.1.1	Équations différentielles	8
1.1.2	Solutions classiques	8
1.2	Systèmes à commutation	9
1.3	Des solutions moins classiques	11
1.3.1	Solutions de Carathéodory	11
1.3.2	Régularisation de Filippov	13
1.4	Ensembles invariants	15
1.4.1	Orbite	15
1.4.2	Problématique de la thèse	16
1.5	Stabilité	17
1.5.1	Fonctions de Lyapunov	18
1.5.2	De la stabilité à l'invariance	19
1.5.3	Quelques spécificités des systèmes à commutation	20
1.6	Recherche des fonctions de Lyapunov	22
1.6.1	Méthode LMI	22
1.6.2	Méthode SOS	24
1.7	Recherche de région d'attraction	26
1.7.1	Méthode de Zubov	27
1.8	Une caractérisation simple des invariants par leur bord	28
II	LA RECHERCHE D'INVARIANTS	31
2	RECHERCHE D'ENSEMBLES INVARIANTS POUR DES SYS-	
	TÈMES CONTINUS	33
2.0.1	Contenu du chapitre et travaux connexes	33
2.1	Introduction à l'indice de Conley	36
2.1.1	Rappel de quelques notions de topologie algé-	
	brique	37
2.1.2	Principe de Ważewski	39
2.1.3	Indice de Conley	40
2.2	Blocs isolants : des conditions algébriques	43
2.2.1	Conditions sur les dérivées de Lie pour l'obten-	
	tion de blocs isolants	47
2.2.2	De la vérification de la vacuité d'ensembles à la	
	résolution d'équations	50
2.2.3	Algorithme de vérification de bloc isolant	51
2.3	Une condition combinatoire simple pour prouver l'exis-	
	tence d'invariants	53
2.4	Expérimentations	56

3	RECHERCHE D'INVARIANTS POUR DES SYSTÈMES À COM- MUTATION	61
3.0.1	Contenu du chapitre et travaux connexes	61
3.1	Introduction	62
3.2	Inclusions différentielles et viabilité	63
3.2.1	Quelques faits basiques	63
3.2.2	Inclusions différentielles polynomiales convexes, dans des ensembles semi-algébriques convexes et compacts	66
3.3	Viabilité d'inclusions différentielles dans des patrons convexes	68
3.3.1	Viabilité : une première approche topologique .	68
3.3.2	Viabilité dans un patron à une face	70
3.3.3	Viabilité pour des patrons généraux	73
3.4	Viabilité et invariants de systèmes à commutation dé- pendant du temps	83
3.5	Viabilité et invariants de systèmes à commutation dé- pendant de l'état	87
3.6	Expérimentations	95
3.6.1	Un système différentiel incertain	95
3.6.2	Boost DC-DC Converter	95
3.6.3	Système à commutation décentré	97
3.6.4	Ensemble sortant non connexe	99
III	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	101
4	CONCLUSION	103
	BIBLIOGRAPHIE	107

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1	Schéma du convertisseur boost DC-DC	10
FIGURE 2	Exemple de représentation de la dynamique décrite ci-dessus	13
FIGURE 3	Attracteur étrange de Lorenz - (lien image) . .	17
FIGURE 4	Exemple tiré de [43] où la commutation entre deux systèmes stables (l'un en trait plein et l'autre en pointillés - deux sous-figures de gauche) peut mener à un système stable comme instable (sous-figures de droite).	20
FIGURE 5	Exemple tiré de [43] où la commutation entre deux systèmes instables (l'un en trait plein et l'autre en pointillés - deux sous-figures de gauche) peut mener à un système stable comme instable (sous-figures de droite).	20
FIGURE 6	Exemple de dynamique avec un variété stable et une autre instable.	29
FIGURE 7	Exemple d'équivalence homotopique : la pomme et la lettre i ont le même type d'homotopie ¹ . .	38
FIGURE 8	Les deux figures de gauche représentent des exemples rétracts par déformation (le sous ensemble A étant la partie rouge) et les deux figures de droite ne sont pas des rétracts par déformation	39
FIGURE 9	Les trois points fixes et l'ensemble sortant (en rouge) du système de l'Exemple 5.	41
FIGURE 10	Illustration des différentes transformations du bloc isolant (où l'ensemble sortant est représenté en rouge) de l'Exemple 4 pour arriver à son indice de Conley.	42
FIGURE 11	Représentation du graphe $G^\sharp$ pour l'Exemple 5	56
FIGURE 12	Espace des phase et ensemble sortant pour l'Exemple 13	57
FIGURE 13	Quelques comparaisons	58
FIGURE 14	Espace des phase pour la dynamique de Van Der Pol et patron contenant un invariant non vide	59
FIGURE 15	Stratification d'un patron parallélépipède. . .	75
FIGURE 16	Le champ de vecteurs $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est entrant en $B_{(2,4)}$	77
FIGURE 17	Illustration des Lemmes 5 et 6 sur les Exemples 21, 22	79

FIGURE 18	Illustration du fait qu'on ne peut pas trouver de surface $\mathcal{S}$ (ne s'intersectant pas aux intersections des faces du patron) telle que $B^-(F)$ ne soit pas connexe lorsque $B^-(f_+) \cap B^-(f_-)$ l'est. Dans les deux cas représentés $B^-(F)$ est l'union des parties rouges ($B^-(f_-)$), bleues ($B^-(f_+)$) et noires ($B^-(f_-) \cap B^-(f_+)$).	93
FIGURE 19	Flots de l'Exemple 24 avec la surface de commutation S	97
FIGURE 20	$B^-(F) = \emptyset$ pour le patron $(c_0, \delta_1, \delta_2) = (0.4, 0.1, 0.15)$. 98	
FIGURE 21	Boîtes entre les points d'équilibre des deux systèmes.	98
FIGURE 22	Champs de vecteurs f_1 et f_2 , avec $B^-(F)$ en trait plein.	99
FIGURE 23	Les deux composantes connexes de l'ensemble sortant sont en rouge - Exemple 27	100

Première partie

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE



PROBLÉMATIQUE

Avant une introduction plus formelle, qui fera appel au formalisme mathématiques et qui sera faite dans le chapitre suivant, nous présentons tout d'abord ici les questions auxquelles tente de répondre cette thèse.

LA RECHERCHE D'ENSEMBLES INVARIANTS

Un des objets d'étude des plus importants dans la théorie des systèmes dynamiques est l'étude des *invariants* et en particulier des *invariants positifs* dans une certaine région¹. Pour faire simple un ensemble invariant est un ensemble dans lequel, lorsque le système y entre, il y restera à jamais. On peut penser par exemple aux orbites autour de la terre, qui, lorsque y entre un satellite, il y restera indéfiniment si aucune action hormis les forces naturelles n'est exercée dessus.

Ainsi généralement, lors de l'étude d'un système dynamique, on cherche à savoir s'il existe un invariant dans une certaine région de l'espace des phases. Pour les systèmes aux dynamiques les moins complexes, on peut calculer directement l'*ensemble invariant dit maximal*. Cet ensemble est, comme son nom l'indique, l'ensemble invariant le plus grand (au sens de l'inclusion) contenu dans la région de l'espace des phases étudiée.

Cependant, même pour des dynamiques à petite dimension, le calcul exact des invariants est parfois impossible. Cela peut être illustré par exemple avec la dynamique bien connue de Van Der Pol, pour laquelle il existe un cycle limite qui ne peut être décrit par un ensemble semi-algébrique [56].

Pour de telles dynamiques on ne peut qu'espérer avoir de l'information sur l'ensemble invariant maximal non vide. Et bien évidemment l'information première qu'on aimerait obtenir est déjà l'*existence de l'invariant maximal*. Après s'être assuré de l'existence d'autres infor-

1. En informatique on dit généralement *invariant* pour parler *invariant positif*. Dans la suite on utilisera la même terminologie, c'est à dire qu'on parlera d'invariants pour dire invariants positifs car comme nous allons le préciser par la suite : l'existence de l'un est en fait équivalente à l'existence de l'autre à l'intérieur des ensembles compacts, et c'est exactement dans ce cadre que nous nous situerons tout au long de cette thèse.

mations peuvent être demandées telles que la nature de cette invariant (point fixe, cycle limite, etc), ou encore la manière dont il est structurer (par exemple formé d'un attracteur, d'un repulseur et d'une orbite (hétéroclinique) entre les deux).

L'EXISTENCE D'INVARIANTS PAR WAŻEWSKI

C'est à ces dernières questions que tente de répondre la théorie de l'*indice de Conley* [17]. En effet, cette dernière fait appelle aux outils de la topologie algébrique afin de calculer un "indice" associé à une région de l'espace des phases. Cet indice donne de l'information sur l'ensemble invariant maximal de la région associée.

Ainsi, par exemple, lorsque l'indice de Conley n'est pas trivial ou de manière équivalente lorsque la *propriété dite de Ważewski* est satisfaite, c'est qu'il existe un ensemble invariant maximal non vide dans la région étudiée. On se contentera dans cette thèse, de vouloir appliquer la propriété de Ważewski pour prouver l'existence d'invariants maximaux.

DES CRITÈRES CALCULABLES POUR L'APPLICATION DE WAŻEWSKI À DES SYSTÈMES CONTINUS

Cependant le calcul de l'indice de Conley ne peut se faire dans n'importe quelle région. En effet, cette indice ne peut se calculer uniquement dans des ensembles ayant des certaines propriétés spécifiques à leur bord, ces ensembles se nomment des blocs isolants. Et une des principales difficultés à l'application de cette théorie puissante qu'est la théorie de l'indice de Conley est de trouver ces blocs isolants. On cherchera alors premièrement dans cette thèse à donner des conditions calculables pour vérifier que des ensembles sont des blocs isolants.

L'autre difficulté lorsqu'on étudie bien la dynamique dans un bloc isolant est le fait de montrer que l'indice de Conley n'est pas trivial. On cherchera alors là encore à donner des conditions calculables pour prouver la non trivialité de cette indice.

DES CRITÈRES CALCULABLES POUR L'APPLICATION DE WAŻEWSKI À DES SYSTÈMES À COMMUTATION

La deuxième partie de la thèse se consacrera à l'étude de l'existence des ensembles invariants maximaux pour des systèmes à commuta-

tions. Ces systèmes ayant plusieurs solutions dans la plupart des cas, il faudra alors utiliser une nouvelle définition des ensembles invariants maximaux qu'on appelle noyaux de viabilité.

On utilisera alors une version de la propriété de Ważewski pour les inclusions différentielles, et on cherchera à étendre les conditions calculables précédentes à ces nouveaux systèmes, cela pour des commutations dépendant du temps, et de l'espace.

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous introduirons l'ensemble des outils des systèmes dynamiques qui nous permettront de présenter de manière plus formelle notre problématique. Puis nous présenterons brièvement l'ensemble des techniques actuellement utilisées pour tenter de résoudre ce problème.

1.1 SYSTÈMES DYNAMIQUES CONTINUS

Avec son mémoire *sur les courbes définies par une équation différentielle*, publié entre 1881 et 1886, Henri Poincaré a ouvert la voie à une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la *résolution* mais à une étude plus topologique des solutions, en particulier de leurs propriétés asymptotiques.

Ainsi, depuis ce temps, la théorie des systèmes dynamiques a pour objet l'étude du comportement qualitatifs des trajectoires d'un champ de vecteurs sur une variété (espace des phases en physique par exemple). Dans ce cadre il est commun de voir être traités les problèmes suivants :

- le comportement limite des solutions (*caractère asymptotique*);
- la stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales (*caractère chaotique*);
- la stabilité des solutions par rapport à des perturbations portant sur l'équation différentielle (*caractère robuste*).

Étant donné le cadre déterministe dans lequel nous nous situerons, les systèmes étudiés pourront être complètement caractérisés à partir d'un point initial dans *l'espace* et du *temps* qu'ils ont parcouru après avoir traversé ce point, cette information sera contenue dans la notion de *flot*, qui est décrite comme suit :

Définition 1 ([35]). Un *flot* est une application continue

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi_t(x)\end{aligned}$$

telle que $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n = \text{Id}$ et qui satisfait la propriété de semi-groupe :

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R}.$$

On dit aussi que φ est un *système dynamique à temps continu* ou simplement *système dynamique*. Remarquons que puisque :

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \text{Id}$$

chaque application φ_t est inversible et a pour application réciproque $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Dans de nombreuses situations concrètes, la variable t représente le temps et $x = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système donné. Cependant, dans la plupart des cas, φ n'est pas connu explicitement, il est défini comme solution d'une équation différentielle qui traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres.

L'existence de notre système dynamique est alors conditionnée par l'existence d'une solution du système différentiel que nous traiterons. Rappelons ci-dessous, différentes notions de solutions qui donnent lieux à des flots.

1.1.1 Équations différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une application qu'on appelle *champ de vecteur*. On considère l'équation différentielle pour tout couple $(t, x) \in U$:

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

que l'on peut réécrire en terme de fonctions composantes, c'est à dire

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n)$$

L'équation (1) apparaît alors comme un *système différentiel* du premier ordre à n fonctions inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

1.1.2 Solutions classiques

Définition 2 ([35]). Une *solution classique de (1)* sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $t \in I$:

- $(t, x(t)) \in U$
- $\dot{x} = f(t, x(t))$

Étant donné un point $(0, x_0) \in U$, le *problème de Cauchy* suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

est équivalent lorsque f est continue à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad (3)$$

on peut alors constater que si cette équation admet une solution : $\varphi_t(x_0) := x(t)$ définit bien un flot.

Pour que le système admette une solution classique, il est en général demandé à la fonction $f(t, x)$ d'être *lipschitzienne* en x , on rappelle que :

Définition 3 ([35]). La fonction $f(t, x)$ est *k-lipschitzienne* en x si pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(x_0, r_0)$ tel que :

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in C_0 : \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

En effet, nous pouvons alors invoquer le théorème bien connu suivant :

Théorème 1 ([35]). Soit $f(t, x)$ une application continue dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On fait alors l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

- Il existe une fonction continue $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto f(t, x)$ soit $k(t)$ -lipschitzienne
- Il existe des fonctions continues $c, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que l'application $x \mapsto f(t, x)$ satisfasse une croissance linéaire à l'infini du type :

$$\|f(t, x)\| \leq c(t) + k(t)\|x\|$$

Alors il existe une solution $x(t)$ au problème (2) définie sur tout $\mathbb{R}$.

1.2 SYSTÈMES À COMMUTATION

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons à une classe particulière de systèmes dynamiques. Ces systèmes sont appelés des *systèmes à commutation*, ils sont composés d'une famille de sous-systèmes à dynamique continue de type équation différentielle et d'une loi logique qui indique un sous-système actif. Plus formellement :

Définition 4 ([43]). Un *système à commutation* est défini par :

$$\dot{x}(t) = f_\sigma(t, x(t))$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système
- $f_i(\cdot, \cdot)$, $\forall i \in \mathcal{I} := \{1, 2, \dots, N\}$ sont des champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système.
- $\sigma \in \mathcal{I}$ représente le *signal de commutation*

Le signal de commutation $\sigma \in \mathcal{I}$, spécifie le sous-système actif, ce choix peut être lié à un critère temporel (*time-dependent*) on notera alors $\sigma(t)$, à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état (*state-dependent*) noté $\sigma(x)$, à un paramètre extérieur ou alors il peut être complètement arbitraire (*arbitrary switching*).

Ces systèmes ont un intérêt grandissant car ils permettent de modéliser des évolutions ou phénomènes très différents au sein d'un même système. L'horizon des domaines d'applications est très large, il contient notamment : l'électronique, l'aéronautique, la biologie, la finance etc..., en voici deux exemples.

En mécanique, on distingue les lois de mouvements rectilignes et les lois de mouvements circulaires ; on pourra alors la modéliser la trajectoire d'une voiture à l'aide de deux champs de vecteurs différents (qui représenteront respectivement le véhicule en mouvement rectiligne et circulaire).

En finance, le prix d'un portefeuille d'actions évoluera au cours du temps d'une certaine manière en temps normal et d'une autre manière (complètement différente) en temps de crise. On pourra alors modéliser le prix sur le marché là encore, via deux dynamiques.

On étudiera en particulier l'exemple du **Convertisseur Boost DC-DC** suivant :

Exemple 1 ([35]). Cet exemple est tiré de [8], il représente un circuit électrique (cf. Figure 1) qui convertit une tension continue en une autre tension continue de plus forte valeur, il est particulièrement utilisé en électronique de puissance.

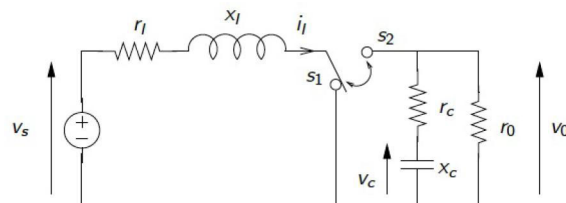


FIGURE 1 – Schéma du convertisseur boost DC-DC

Le fonctionnement d'un convertisseur Boost peut être divisé en deux phases distinctes selon l'état de l'interrupteur :

- Une phase d'accumulation d'énergie : lorsque l'interrupteur est en position s_1 (état passant), cela entraîne l'augmentation du courant dans l'inductance donc le stockage d'une quantité d'énergie sous forme d'énergie magnétique et la charge est déconnectée de l'alimentation.
- Lorsque l'interrupteur est en position s_2 , l'inductance se trouve alors en série avec le générateur et sa force électromagnétique s'additionne à celle du générateur (effet survolteur). Le courant traversant l'induc-

tance traverse ensuite le condensateur x_c et la charge r_0 . Il en résulte un transfert de l'énergie accumulée dans l'inductance vers la capacité.

On représente l'état du système par $x(t) = [i_l(t) \ v_c(t)]^T$ où i_l est l'intensité du courant dans l'inductance et $v_c(t)$ le voltage du condensateur. Les dynamiques associées au système en fonction que l'interrupteur est en position s_1 ou s_2 sont de la forme $\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma$ ($\sigma = 1, 2$) avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{r_l}{x_l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_c} \frac{1}{r_0 + r_c} \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} \frac{v_s}{x_l} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_l} (r_l + \frac{r_0 \cdot r_c}{r_0 + r_c}) & -\frac{1}{x_l} \frac{r_0}{r_0 + r_c} \\ \frac{1}{x_c} \frac{r_0}{r_0 + r_c} & -\frac{1}{x_c} \frac{1}{r_0 + r_c} \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} \frac{v_s}{x_l} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On reprendra les valeurs de [8] suivantes : $x_c = 70$, $x_l = 3$, $r_c = 0.005$, $r_l = 0.05$, $r_0 = 1$, $v_s = 1$. L'un des objectifs des électroniciens en général est de stabiliser l'état de ce système indéfiniment dans une certaine zone. Cela se pourra se faire à l'aide de la construction d'un invariant comme nous le verrons.

1.3 DES SOLUTIONS MOINS CLASSIQUES

Le problème qui survient lorsqu'on considère ce type de systèmes c'est que même si l'on suppose (ce que l'on fera) que tous les champs de vecteurs f_i sont des applications qui satisfont les hypothèses du Théorème 1, puisque le signal σ commute (de manière discontinue) l'existence d'une solution et donc du flot qui lui est associé n'est plus assurée.

Fort heureusement, il existe des conditions plus souples donnant lieux à des solutions (moins classiques) pour des systèmes à commutation représentant aussi bien des flots. Nous présentons ci-dessous les deux les plus utilisées.

1.3.1 Solutions de Carathéodory

Définition 5 ([21]). Une fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée une **solution au sens de Carathéodory** du problème de Cauchy (2) si x est absolument continue, et x satisfait l'équation différentielle (1) presque partout ou de manière équivalente (3) pour tout t ainsi que la condition initiale de (2).

Cette notion est donc proche de celle de solution classique. Elle est susceptible d'être utilisée lorsque la signal de commutation dépend du temps et que le nombre de commutations est fini dans tout intervalle fini de temps (la mesure des sauts de discontinuité est alors nulle).

Nous avons alors le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2 ([21]). Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les *conditions de Carathéodory* suivantes :

- $f(t, x)$ est continue en x pour chaque t fixé,
- $f(t, x)$ est mesurable en t pour chaque x fixé,
- il existe une fonction positive et intégrable $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\|f(t, x)\| \leq m(t)$ pour tout $(t, x) \in \mathcal{U}$,

alors il existe une solution de Carathéodory au problème de Cauchy (2) pour toute condition initiale dans $\mathcal{U}$.

Si de plus, il existe une fonction intégrable $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq l(t)\|x - y\|$ pour tout $(t, x), (t, y) \in \mathcal{U}$, alors la solution est unique.

Si nous reprenons les systèmes donnés par le convertisseur Boost dans l'Exemple 1, que l'on suppose que l'interrupteur évolue uniquement en fonction du temps (soit arbitrairement, soit commandé de manière spécifique) et que les commutations interviennent de manière finie dans un intervalle fini de temps (i.e σ est constante par morceaux). Il est alors aisé de vérifier que ce système satisfait toutes les hypothèses du Théorème 2 et qu'il admet donc une unique solution de Carathéodory. Comme ces équations différentielles sont linéaires nous pouvons même certifier que la dynamique du système est décrite par le flot :

$$\varphi_{t_n}^{i_n}(\dots \varphi_{t_2}^{i_2}(\varphi_{t_1}^{i_1}(\varphi_{t_0}^{i_0}(x_0))))$$

pour un signal de commutation qui serait :

- la dynamique i_0 (décrite par φ^{i_0}) durant un temps t_0
- puis la dynamique i_1 (décrite par φ^{i_1}) durant un temps t_1
- ...
- puis la dynamique i_n durant un temps t_n

et où

$$\varphi_t^i(x_0) = x_0 e^{A_i t} + \int_0^t e^{s A_i} B_i ds$$

Cependant, il arrive fréquemment lorsqu'on traite des systèmes qui commutent en fonction de leur état de les voir commuter une infinité de fois dans un intervalle fini de temps. Le système prend alors un comportement qui n'est plus décrit par un unique champs de vecteur $f_i, i \in \mathcal{I}$ durant un temps non négligeable, en voici un exemple :

Exemple 2. Reprenons l'Exemple 1 en supposant à présent que le signal est paramétré par l'espace, pour faire simple séparons l'espace d'état en deux à l'aide d'une fonction $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$— R_1 := \{S \geq 0\}$$

$$— R_2 := \{S \leq 0\}$$

d'où $R_1 \cap R_2 = \{S = 0\}$, et on définit alors le système à commutation par :

$$\dot{x} = A_i x + B_i \text{ si } x \in R_i, \forall i = 1, 2$$

on trouvera l'illustration de ce système sur la Figure 2 ci-dessous :

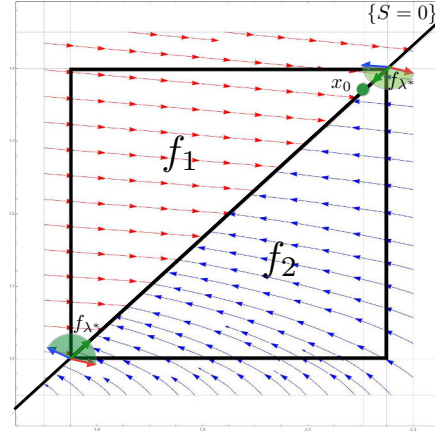


FIGURE 2 – Exemple de représentation de la dynamique décrite ci-dessus

On constate alors que si le système démarre proche de la surface séparatrice $\{S = 0\}$, le système ne cessera de commuter à chaque instant, passant d'un sous-système à l'autre en *glissant* sur la surface c'est ce que l'on appelle un *sliding mode* (on étudiera plus en profondeur ce comportement dans les chapitres suivants). Lorsque le système adopte ce nouveau comportement, nous ne pouvons alors plus le représenter uniquement par f_1 ou f_2 et ceci sur un intervalle de temps de mesure non nulle.

Nous avons donc besoin d'une notion plus souple, une notion qui nous permettrait de donner sens au comportement décrit plus haut. C'est ce qui fait l'objet de la section suivante.

1.3.2 Régularisation de Filippov

Soit $F(t, x) : U \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, la fonction F associe à chaque couple (t, x) un ensemble. On dira alors que :

Définition 6 ([5]). $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est *solution de l'inclusion différentielle* ci-dessous

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

si pour presque tout $t : \dot{x}(t) \in F(t, x)$

Les *inclusions différentielles* interviennent très souvent en théorie du contrôle et permettent plus généralement de modéliser des systèmes non déterministes. La *théorie de la viabilité* a pour objectif l'étude des solutions des inclusions différentielles, et on a en particulier le théorème classique d'existence suivant :

Théorème 3 ([5]). *Si pour tout $x : F(x)$ est non vide, bornée, fermée, convexe et F est semi-continue supérieurement i.e.*

$$\lim_{y \rightarrow x} \sup_{a \in F(y)} \left(\inf_{b \in F(x)} \|a - b\| \right) = 0$$

alors l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$ admet au moins une solution au sens de Filippov.

Pour pouvoir appliquer ce nouvel outil à l'Exemple 2 nous avons besoin de la régularisation suivante :

Définition 7 ([21]). *Soient une partition de $\mathbb{R}^n = \cup_i R_i$, avec $R_i \subset \bar{R}_i^\circ$ et le système à commutation décrit par la dynamique*

$$f(x) = f_i(x) \text{ si } x \in R_i$$

*On appellera **régularisation de Filippov** ou **régularisation convexe** de ce système la fonction suivante :*

$$F(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in R_i^\circ \\ \{\sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j f_j(x) \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j = 1\} & \text{si } \mathcal{J} \text{ le plus grand ensemble tel que } x \in \cap_{j \in \mathcal{J}} R_j \end{cases}$$

Ainsi si les fonctions f_i de notre système à commutation sont continues, d'après le Théorème 3 il nous est toujours possible de trouver une solution dans la régularisation de Filippov du système lorsque signal est paramétré par l'espace.

Dans l'Exemple 2 cette régularisation se traduit par l'inclusion différentielle

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) := A_1 x + B_1 & \text{si } x \in \{S > 0\} \\ f_2(x) := A_2 x + B_2 & \text{si } x \in \{S < 0\} \\ \{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \mid \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\} & \text{si } x \in \{S = 0\} \end{cases}$$

Les cônes verts de la Figure 2 représentent cette régularisation ; on constate alors qu'une trajectoire qui glisserait sur la surface $\{S = 0\}$ est bien susceptible d'être considérée comme solution de ce système.

Il nous est ainsi possible de faire face à tous les cas de figure d'un système à commutation.

1.4 ENSEMBLES INVARIANTS

A présent que l'on sait qu'il est toujours possible d'avoir une solution (peu importe le sens) qui donnera lieu à un flot aux systèmes à commutation, présentons la notion d'orbite afin de définir les ensembles invariants et présenter notre problématique.

1.4.1 Orbite

Définition 8 ([40]). Soit φ un flot de $\mathbb{R}^n$, alors pour un point $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que :

- $\delta^+(x) = \delta_\varphi^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\}$ est la **semi-orbite positive** de x ,
- $\delta^-(x) = \delta_\varphi^-(x) = \{\varphi_t(x) : t \leq 0\}$ est la **semi-orbite négative** de x ,
et
- $\delta(x) = \delta_\varphi(x) = \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\} = \delta^+(x) \cup \delta^-(x)$ est l'**orbite** de x .

Les ensembles $\delta^+(x)$, $\delta^-(x)$ et $\delta(x)$ sont connexes (en tant qu'images d'un ensemble connexe par une application continue). Le **portrait de phase** est la figure formée par l'ensemble des orbites. Du point de vue topologique, une orbite peut être :

- un point d'équilibre ou point fixe (zéro du champ de vecteurs f),
- une orbite *périodique* (dans ce cas l'orbite est homéomorphe à un cercle),
- l'image d'une solution injective.

A présent on peut définir les ensembles invariants comme suit :

Définition 9 ([40]). Soit φ un flot de $\mathbb{R}^n$. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit :

- **invariant positif** par φ si $\forall x \in S, \delta^+(x) \subset S$.
- **invariant négatif** par φ si $\forall x \in S, \delta^-(x) \subset S$.
- **invariant** par φ si $\forall x \in S, \delta(x) \subset S$.

Cette notion est fondamentale en théorie des systèmes dynamiques et on peut trouver des exemples très parlants même dans la vie de tous les jours. Pensons par exemple à la terre qui tourne autour du soleil, il existe donc une ellipse autour du soleil qui est un ensemble invariant pour le système terrestre (on parle dans ce cas de cycle limite).

Nous parlerons d'ensembles *invariants* au lieu de *invariants par φ* lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

En général, il est surtout demandé de rechercher les invariants dans des ensembles spécifiques, ce qui donne lieu aux définitions suivantes :

Définition 10 ([40]). Soit B un ensemble dans $\mathbb{R}^n$, on définit respectivement l'**invariant positif maximal**, l'**invariant négatif maximal**, et l'**invariant maximal** dans B comme suit :

- $\text{Inv}^+(B, \varphi) := \{x \in N \mid \delta^+(x) \subset B\}$
- $\text{Inv}^-(B, \varphi) := \{x \in N \mid \delta^-(x) \subset B\}$
- $\text{Inv}(B, \varphi) := \{x \in N \mid \delta(x) \subset B\}$

Dans cette thèse on étudiera l'existence d'invariants maximaux ce qui est équivalent à l'existence d'invariants dans l'ensemble étudié, donc on parlera souvent d'existence d'invariants plutôt que d'existence d'invariants maximaux.

On trouvera parfois dans la littérature le terme d'*invariant contrôlé* pour parler d'un ensemble invariant pouvant être construit grâce au contrôle qu'on a sur le système. Dans le cas des systèmes à commutation c'est lorsqu'on a nous même le choix du signal, et l'existence d'un invariant maximal (contrôlé) dans une région N équivaut à l'existence d'un signal de commutation permettant de rester dans N indéfiniment.

Dans le cas où il peut exister plusieurs solutions (comme pour les inclusions différentielles) on a alors deux types d'invariants possibles :

Définition 11 ([5]). Soit $\Delta(x_0)$ l'ensemble des trajectoires passant par x_0 . Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit :

- *invariant fort* si $\forall x \in S, \forall \delta \in \Delta(x) : \delta(x) \subset S$.
- *invariant faible* si $\forall x \in S, \exists \delta \in \Delta(x) : \delta(x) \subset S$.

Ces définitions s'étendent au cas où l'on traite uniquement des trajectoires positives (respectivement négatives), on parlera alors d'invariants forts ou faibles positifs (respectivement négatifs). Dans la littérature on fait le plus souvent l'étude des invariants maximaux faibles positifs qu'on appelle aussi **noyaux de viabilité** [5].

1.4.2 Problématique de la thèse

Les ensembles invariants sont en général compliqués comme en témoignent le cas des *attracteurs étranges* dont on donne un exemple ci-dessous.

Exemple 3. Le *modèle de Lorenz*, est une modélisation simplifiée de phénomènes météorologiques basée sur la mécanique des fluides. Ce modèle est un système dynamique tridimensionnel qui engendre un comportement chaotique dans certaines conditions.

Son système différentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \beta x_3. \end{aligned}$$

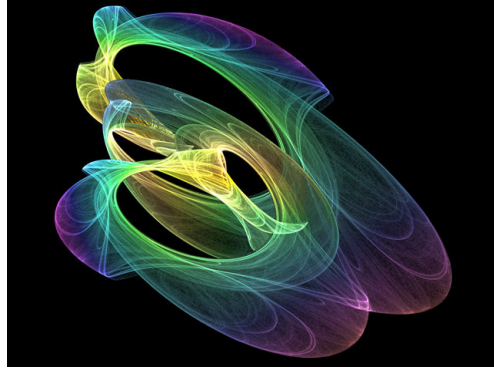


FIGURE 3 – Attracteur étrange de Lorenz - [\(lien image\)](#)

où σ, ρ, β sont des paramètres du système. Il est bien connu des dynamiciens que ce système admet un invariant "étrange", c'est à dire avec une forme peu commune, cet invariant est représenté ci-dessus dans la Figure 3.

Comme nous le montre l'exemple précédent, sans même parler de système à commutation, lorsque nous considérons des dynamiques non linéaires, nous ne pouvons pas, en général, espérer obtenir la forme exacte des invariants. Nous nous fixerons donc des objectifs plus réalisables.

AINSI, NOUS SOUHAITONS DANS LE CADRE DE CETTE THÈSE, PROUVER DE MANIÈRE AUTOMATISÉE L'EXISTENCE D'ENSEMBLES INVARIANTS MAXIMAUX POUR LES SYSTÈMES CONTINUS ET DE NOYAUX DE VIABILITÉ POUR LES SYSTÈMES À COMMUTATION.

La manière la plus classique de trouver ces invariants est de passer par la stabilité et les fonctions de Lyapunov.

1.5 STABILITÉ

Reprenons le problème de Cauchy (2) et supposons qu'il existe une unique solution à ce problème décrite par le flot φ . Soit x_e un point d'équilibre du système c'est à dire $\forall t, \varphi_t(x_e) = x_e$.

Si tout mouvement d'un système issu d'un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre x_e demeure au voisinage de ce point, alors x_e est dit *stable au sens de Lyapunov* (ou juste stable). Plus formellement, on a les définitions suivantes :

Définition 12 ([40]). Le point d'équilibre x_e est :

— **stable** si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|x - x_e\| \leq \eta(\varepsilon) \implies \|\varphi_t(x) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0;$$

- *instable* s'il n'est pas stable ;
- *attractif* si :

$$\exists \delta > 0, \|x - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi_t(x) - x_e\| = 0$$

- *répulsif* si :

$$\exists \delta > 0, \|x - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi_t(x) - x_e\| = 0$$

- *asymptotiquement stable* s'il est stable et attractif.
- *exponentiellement stable* s'il est stable et si $\exists \alpha, \beta, \delta > 0$ tels que :

$$\|x - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|\varphi_t(x) - x_e\| \leq \alpha e^{-\beta t}$$

- *globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS)* si de n'importe quel point initial les système converge vers le point d'équilibre x_e , i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi_t(x) - x_e\| = 0$$

Toutes ces notions se généralisent à un ensemble invariant, disons M , en remplaçant ci-dessus $\|\varphi_t(x) - x_e\|$ par $d(\varphi_t(x), M)$ où :

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

1.5.1 Fonctions de Lyapunov

Le théorème central d'Alexandre Lyapunov dit que la solution d'une équation différentielle de type (1) est stable en un point d'équilibre x_e si il existe une fonction vérifiant certaines conditions précises, liées à la fonction f et à x_e . On considérera sans perte de généralité, par la suite que $x_e = 0$.

Théorème 4 ([40]). Soit le système (1) et $x(t)$ sa solution. Si il existe une *fonction dite de Lyapunov*, i.e, une fonction $V : (t, x) \mapsto V(t, x)$ continûment différentiable qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $t \in \mathbb{R}$:

- $V(t, x) > 0$ si $x \neq 0$
et $V(t, 0) = 0$
- $\dot{V}(t, x(t)) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x) \right\rangle \leq 0$ si $x \neq 0$

alors 0 est un point d'équilibre stable. Si la deuxième inégalité est stricte alors l'origine est en fait asymptotiquement et exponentiellement stable.

La fonction de Lyapunov rappelle l'énergie potentielle qui permet d'obtenir la stabilité d'un système physique. Et, le problème de la stabilité se ramène donc à chercher une telle fonction.

Nous constaterons ci-dessous que pour des systèmes linéaires, nous ramenons le problème de stabilité à un problème d'inégalité matricielle. Rappelons qu'on dit d'une matrice symétrique M qu'elle est *semi-définie positive* ou simplement positive lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x^T M x \geq 0$ ce que l'on notera $M \succeq 0$. Si pour tout vecteur non nul x , on a $x^T M x > 0$ on dira que M est *définie positive* ou simplement strictement positive, ce que l'on notera $M \succ 0$.

Si nous considérons un système dynamique linéaire, pour simplifier autonome, qu'on écrira :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4)$$

Le théorème de Lyapunov devient :

Théorème 5 ([40]). *Le point d'équilibre 0 est stable pour la dynamique donnée par (4) si il existe une matrice $P \succeq 0$ vérifiant l'équation dite de Lyapunov*

$$-(A^T P + P A) \succeq 0 \quad (5)$$

La vérification de l'existence d'une telle matrice s'effectuera dans la Section 1.6.1.

1.5.2 De la stabilité à l'invariance

D'aucuns pourraient se demander pourquoi passer par la stabilité puisqu'il existe manifestement des invariants instables. Avant tout car généralement, on recherche les ensembles invariants pour s'assurer que le système que l'on traite reste dans une certaine zone.

Cependant dans la pratique, nous n'avons bien sûr pas l'information exacte (avec une précision infinie) sur l'état du système, et il en va de même sur le contrôle de celui-ci. Pour ces raisons, il est évidemment plus souhaitable de trouver des invariants qui soient stables, ceci afin de palier les incertitudes sur l'état du système ou encore s'assurer que les forces extérieures qui agissent sur le système et que l'on néglige dans le modèle n'affecteront pas le comportement asymptotique de ce dernier.

Puis la stabilité, qui peut revenir comme on a pu le voir à l'existence d'une fonction de Lyapunov montre implicitement l'existence d'un ensemble invariant. En effet, il est aisé de constater que si V est une fonction de Lyapunov de notre système alors les lignes de niveau de la fonction $V_{\leq \varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \varepsilon\}$ sont des ensembles positivement invariants.

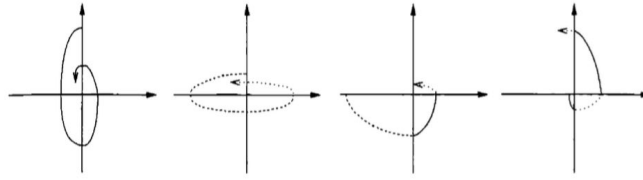


FIGURE 4 – Exemple tiré de [43] où la commutation entre deux systèmes stables (l'un en trait plein et l'autre en pointillés - deux sous-figures de gauche) peut mener à un système stable comme instable (sous-figures de droite).

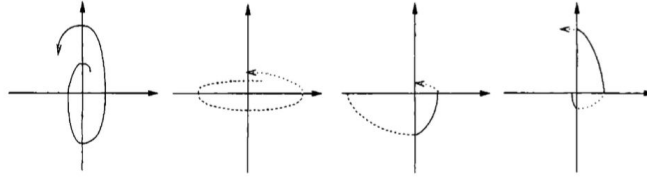


FIGURE 5 – Exemple tiré de [43] où la commutation entre deux systèmes instables (l'un en trait plein et l'autre en pointillés - deux sous-figures de gauche) peut mener à un système stable comme instable (sous-figures de droite).

Ainsi si on arrive à trouver une fonction de Lyapunov pour notre système, nous serons capable de trouver de manière constructive des invariants.

1.5.3 Quelques spécificités des systèmes à commutation

Cependant l'étude de la stabilité des systèmes à commutation est complètement dépendante comme on peut l'imaginer du choix de notre signal de commutation. En effet : plusieurs exemples dans la littérature montrent qu'on peut construire un signal de commutation entre deux sous-systèmes stables tel que le système à commutation soit instable et inversement nous pouvons commuter entre deux dynamiques instables afin que notre système à commutation soit stable, voir les Figures 4 et 5.

De plus la stabilité s'étudie selon le cadre dans lequel nous nous trouvons : signal arbitraire, non arbitraire dépendant du temps ou de l'espace.

1.5.3.1 Signal arbitraire : Fonction de Lyapunov Commune

Il est assez simple de constater dans le cas d'un signal arbitraire que si les sous-systèmes décrits par les champs de vecteurs f_i partagent une *fonction de Lyapunov commune* (Common Lyapunov Func-

tion - CLF) alors le système à commutation est stable quel que soit le signal, on parlera alors de **stabilité uniforme** pour le système commuté. On a de plus le théorème suivant :

Théorème 6 ([43]). *Si le système est **globalement uniformément asymptotiquement stable** (GUAS), i.e pour tout signal le système à commutation est asymptotiquement stable, que les fonctions $f_i(x)$ sont bornés et localement lipschitziennes, alors les sous systèmes partagent une fonction de Lyapunov commune.*

Dans le cas où les sous-systèmes sont linéaires de la forme $f_i = A_i x$ on a le théorème suivant :

Théorème 7 ([43]). *Si les sous-systèmes du système commuté possèdent une fonction de Lyapunov commune de la forme $V(x) = x^T P x$ telle que P est une matrice symétrique définie positive et vérifie la condition*

$$-(PA_i + A_i P^T) \succ 0, \forall i \in \mathcal{J}$$

alors, le point d'équilibre 0 est GUAS.

1.5.3.2 Stabilisation en fonction du temps : Fonctions de Lyapunov Multiples

L'intérêt d'une fonction de Lyapunov commune est que son existence fournit une condition suffisante de stabilité. Comme son existence n'est pas toujours garantie, il est possible de chercher des fonctions de Lyapunov individuelles pour chaque sous-système et d'imposer ensuite des conditions sur la loi de commutations pour assurer la stabilité du système commuté. Ceci est assuré par le théorème suivant :

Théorème 8 ([43]). *Soient les fonctions de Lyapunov V_i avec $i \in \mathcal{J}$ des champs de vecteurs respectivement f_i . Considérons le couple des instants de commutation (t_i, t_j) . Supposons qu'il existe une famille de fonctions continues W_i telle que $W_i > 0$ pour tout $x \neq 0$ et $W_i(0) = 0$ avec la propriété que pour tout couple d'instant de commutation (t_i, t_j) , $i < j$ pour le mode $p \in \mathcal{J}$ tel que $\sigma(t_i) = \sigma(t_j) = p$ et $\sigma(t_k)$ pour tout $t_i < t_k < t_j$ on a :*

$$V_p(x(t_j)) - V_p(x(t_i)) \leq -W_p(x(t_i))$$

alors le système à commutation est asymptotiquement stable.

Si une fonction de Lyapunov commune est difficile à élaborer ou n'existe pas, il est toujours possible d'analyser la stabilité d'un système commuté à l'aide des fonctions de Lyapunov multiples. Cependant, cette analyse nécessite la connaissance des valeurs des fonctions de Lyapunov aux instants de commutations *ce qui implique une connaissance de l'état à ces instants*, chose qui est généralement impossible pour des systèmes autres que linéaires.

1.5.3.3 Stabilisation en fonction de l'espace : Pseudo-fonctions de Lyapunov

Pour certains systèmes commutés où la loi de commutation dépend de l'état, il est judicieux de caractériser les commutations par des partitions de l'espace d'état $R_i = \{(t, x) \mid \sigma(t, x) = i\}$. La stabilité de ce genre de système se fait à travers la détermination d'une fonction appelée pseudo-fonction de Lyapunov (*Lyapunov-like function*) où sa dérivée le long des solutions des sous-systèmes est négative seulement dans les régions R_i où ses sous-systèmes sont actifs.

Définition 13 ([43]). Une *pseudo-fonction de Lyapunov* pour le sous-système décrit par le champs de vecteurs f_i avec un point d'équilibre est une fonction qui satisfait les conditions d'une fonction de Lyapunov pour ce système dans $R_i \subset \mathbb{R}^n$.

Ces fonctions sont utiles et amènent au théorème suivant :

Théorème 9 ([43]). Si pour chaque séquence de commutation S , il existe des pseudo-fonctions de Lyapunov V_i associées respectivement aux champs de vecteurs f_i sur R_i alors le système commuté est stable.

On peut remarquer que la différence entre les fonctions de Lyapunov multiples et les pseudo-fonctions de Lyapunov réside dans le fait que ces dernières ont des conditions moins fortes que les premières. En effet, pour les pseudo-fonctions, les conditions sont satisfaites seulement dans certaines régions alors que les fonctions multiples doivent être valides pour tout l'espace d'état.

D'importantes recherches ont été faites pour trouver ces fonctions de Lyapunov, nous en présentons une partie ci-dessous. Cette présentation sera faite pour des fonctions de Lyapunov simples, mais ces méthodes s'étendent aux fonctions de Lyapunov communes, multiples et pseudo-Lyapunov.

1.6 RECHERCHE DES FONCTIONS DE LYAPUNOV

Nous commencerons par donner une méthode de recherche de fonctions de Lyapunov *quadratiques pour des systèmes linéaires* qu'on appelle *méthode LMI* (*Linear Matrix Inequality*) ; puis sa généralisation à des fonction de Lyapunov *polynomiales* grâce à la *méthode SOS*.

1.6.1 Méthode LMI

Le terme LMI qui veut dire *Linear Matrix Inequality* en voici la définition :

Définition 14 ([58]). Une *inégalité matricielle linéaire* en la variable $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une expression de la forme

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n \succeq 0 \quad (6)$$

où $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$ sont des matrices symétriques.

Résoudre un problème LMI consiste à trouver x qui satisfait l'inégalité (6) ou déterminer qu'il n'existe pas de solution. De nombreux problèmes d'optimisation en théorie du contrôle, identification de système, traitement du signal ou encore statistiques peuvent être formulés grâce à des LMI. Ce qu'il est important de savoir, c'est qu'il existe des méthodes numériques de résolution des LMI très performantes [54] pour déterminer notamment la solution lorsqu'elle existe, ou pour effectuer une optimisation convexe sous contrainte LMI. Ces optimisations généralisent les problèmes d'optimisation linéaire, c'est ce qu'on appelle l'optimisation semi-définie positive.

Définition 15 ([58]). *L'Optimisation Semi-Définie Positive ou SDP (SemiDefinite Programming en anglais) est une méthode qui permet de résoudre les problèmes du type :*

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x = \sum c_i x_i \\ \text{tel que} \quad & F(x) := F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n \succeq 0 \\ & Ax = b. \end{aligned} \quad (7)$$

De nombreux solveurs existent, on peut citer LMI-Tools, LMI Control Toolbox et SeDuMi. Notons aussi l'outil YALMIP qui permet de définir un problème LMI et de le résoudre avec n'importe quel solveur pré-installé.

1.6.1.1 Application à la stabilité des systèmes linéaires

Prouver que l'origine est stable ou pas pour le système (4) revient à résoudre un problème LMI. Pour mieux constater cela, voici à titre d'exemple la reformulation de ce problème en dimension 2 :
Si on considère que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

alors on recherche les trois paramètres : x_1, x_2 et x_3 dont dépend la matrice P qui satisfont :

— La condition de positivité de P qui s'écrit :

$$P = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

— L'inégalité de Lyapunov qui elle, se réécrit :

$$\begin{aligned} F(x) &= -(A^T P + P A) \\ &= -(x_1 \begin{pmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & 2a_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + x_3 \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ a_3 & 2a_4 \end{pmatrix}) \succeq 0, \end{aligned}$$

Donc on fait face à deux problèmes LMI qui se transforment en un seul de plus grande dimension par la relation suivante :

$$F^1(x) \succeq 0, \dots, F^k(x) \succeq 0 \iff \mathbf{Diag}(F^1(x), \dots, F^k(x)) \succeq 0$$

Il est aisé de voir que même les problèmes de stabilité de systèmes à commutations linéaires se transforment eux aussi en problème LMI.

C'est ainsi que pour les systèmes linéaires, il est possible de synthétiser des fonctions de Lyapunov en résolvant un problème LMI [13]. Cependant, la découverte de fonctions de Lyapunov pour des systèmes non linéaires s'est avérée être beaucoup plus difficile dans la pratique. L'utilisation des LMI pour trouver des fonctions pour des systèmes non linéaires a été étudiée par exemple par Tibken [69], cela nécessite de linéariser en particulier autour du point d'équilibre.

Cependant, il a été observé que certaines formes de fonctions de Lyapunov seraient mieux adaptées pour de tels systèmes [26]. Celles-ci prendraient la forme de fonctions rationnelles par exemple, ce qui implique d'utiliser des inégalités matricielles bilinéaires ou polynomiales (BMI et PMI) plutôt que des LMI.

Bien que les techniques de résolution BMIs ont été largement étudiées, les résoudre coûte algorithmiquement plus cher que les LMI [34]. Voyons ci-dessous une des techniques d'optimisations permettant de retrouver des fonctions de Lyapunov polynomiales.

1.6.2 Méthode SOS

La recherche de fonction de Lyapunov polynomiales revient à s'intéresser à la caractérisation des polynômes positifs sur $\mathbb{R}^n$ (ou une variété semi-algébrique). On sait depuis longtemps maintenant qu'un polynôme est positif si et seulement si il est somme de carrés de fractions rationnelles, et qu'une bonne approximation des polynômes positifs est les sommes de carrés de polynômes (voir par exemple [42]).

Ainsi, l'extension naturelle de la méthode LMI est celle qui remplace les fonctions quadratiques (de type $x^T M x$) par les sommes de carrés de polynômes, dont on rappelle la définition :

Définition 16 ([42]). Un polynôme $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de degré $2d$ est une *somme de carrés de polynômes* (sum-of-square en anglais ou SoS) s'il existe $p_1, p_2, \dots, p_m$ des polynômes de degré au plus d tels que

$$p(x) = \sum_{i=1}^m (p_i(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Une importante proposition qui fait le lien avec la méthode LMI est la suivante :

Proposition 1 ([42]). Un polynôme $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de degré $2d$ est une somme de carrés de polynômes si et seulement si

$$p(x) = [x]_d^T M [x]_d$$

avec $M \succeq 0$ une matrice positive et $[x]_d$ un vecteur formé par les monômes de degré inférieur à d .

En effet en plus de retomber sur la même forme que les fonctions quadratiques, cette proposition permet de résoudre numériquement le problème de savoir si un polynôme est une somme de carrés de polynômes, en se fixant un degré et en faisant appel à la méthode LMI (problème SDP).

1.6.2.1 Application à la stabilité de systèmes polynomiaux

Rappelons que d'après le Théorème 4 prouver la stabilité peut se faire par la recherche d'un fonction V qu'on supposera polynomiale et qui satisfait deux contraintes de positivité que sont :

- V est fonction *polynomiale positive*
- $-\dot{V}(x(t))$ est une fonction *polynomiale positive*

Or ce problème n'étant pas traitable numériquement, on relaxe alors le problème pour chercher une fonction de Lyapunov qui ait les même propriétés que ci-dessus sauf qu'au lieu de *polynomiale positive* on remplacera par *somme de carrés de polynômes*.

Comme dit précédemment ce genre de problème se résout en fait comme un SDP et il existe une multitude de solveurs pouvant effectuer ce travail (cf. par exemple SOS Tools ou encore Yalmip); il en est de même pour la stabilité des systèmes à commutation.

Finalement il existe aussi d'autres méthodes permettant de retrouver dans certains cas des fonctions de Lyapunov rationnelles et transcendantes [27, 74].

Malgré toutes ces techniques, qui fonctionnent sur des systèmes linéaires ou polynomiaux après relaxation, nous ne sommes pas assurés de trouver des fonctions de Lyapunov pour des systèmes généraux, et malgré tout, les méthodes numériques utilisées restent coûteuses. De plus, un résultat récent a montré entre autre que tester la

stabilité d'un système polynomial est en fait NP-difficile [3]!

Voilà pourquoi certains auteurs ont proposé d'autres méthodes afin de déterminer une région d'attraction plutôt que d'utiliser des fonctions de Lyapunov, voir par exemple [33]. Le problème d'automatisation de la recherche d'une bonne région (maximale) d'attraction (autour d'un point d'équilibre) pour des systèmes non-linéaires a beaucoup été étudié durant les dernières années. Des contributions notables ont été réalisées, incluant la méthode Zubov qui utilise une équation différentielle partielle pour trouver une région maximale d'attraction ainsi qu'une fonction de Lyapunov associée à cette région [74], nous en présentons brièvement les grandes lignes ci-dessous.

1.7 RECHERCHE DE RÉGION D'ATTRACTION

Supposons que x_e soit un point d'équilibre attractif du système (1) alors :

Définition 17 ([40]). *La région d'attraction $\Omega(x_e)$ est définie par*

$$\Omega(x_e) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = x_e\}$$

Certaines propriétés de cet ensemble sont bien connues : $\Omega(x_e)$ est ouvert, connexe et positivement invariant. Une représentation analytique de cet ensemble peut rarement être obtenue ; c'est pourquoi on tente en général uniquement d'approcher cette région, c'est ce qui est appelé l'estimation de région d'attraction.

Bien sûr pour retrouver ces régions, on peut utiliser les théorèmes de Lyapunov sur la stabilité asymptotique ou en encore le *principe d'invariance de LaSalle* suivant :

Théorème 10 ([40]). *Supposons qu'il existe une fonction continûment différentiable définie positive $V : x \rightarrow V(x)$ et un ensemble*

$$V_{\leq \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \varepsilon\},$$

inclus dans D , tel que $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in V_{\leq \varepsilon}$. Soit M le plus grand sous-ensemble positivement invariant de l'ensemble $E = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$. Alors, si $V_{\leq \varepsilon}$ est compact (ce qui est le cas si ε est suffisamment petit), M est attractif pour l'ensemble $V_{\leq \varepsilon}$, i.e. tout mouvement qui commence dans $V_{\leq \varepsilon}$ tend vers M .

Nous pouvons donc réutiliser l'arsenal des méthodes de recherche de fonctions de Lyapunov précédemment présenté avec cependant quelques modifications à faire (essentiellement remplacer certaines propriétés de semi-définie positivité par de la définie positivité).

1.7.1 Méthode de Zubov

La méthode dite de Zubov se différencie en imposant une expression à $\dot{V}$ dans un ensemble S , elle est essentiellement basée sur le théorème suivant :

Théorème 11 ([74]). *Soit S un ensemble contenant l'origine 0 en son intérieur, alors S est la région d'attraction de 0 si et seulement si, il existe deux fonctions scalaires $V(x)$ et $h(x)$ avec les propriétés suivantes :*

- V est continue et définie positive dans un ensemble S telle qu'elle satisfait dans cet ensemble

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ 0 < V(x) < 1 \quad , \quad \forall x \neq 0; \end{aligned}$$

- h est définie pour tout x fini, h est continue et positive pour tout $x \neq 0$ et telle que $h(0) = 0$; et

$$\forall \gamma_2 > 0, \exists \gamma_1 > 0, \alpha_1 > 0 \text{ tels que } V(x) > \gamma_1, h(x) > \alpha_1, \text{ si } \|x\| \geq \gamma_2$$

- pour $x \in S$ nous avons

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = -h(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2} \quad (8)$$

- si $x \rightarrow \partial S$ ou $\|x\| \rightarrow +\infty$ dans le cas où S est non-borné, nous avons $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = 1$

Par un choix judicieux de h , la fonction V peut être aussi lisse (au sens de la différentiabilité) que f . En particulier on a le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Si f est continûment différentiable, alors*

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = -h(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}$$

a au plus une solution continûment différentiable satisfaisant la condition initiale $V(0) = 0$. Pour que cette solution existe il suffit que

$$\int_0^\infty h(\varphi(t, x_0)) dt < \infty$$

pour tout x_0 suffisamment petit.

En général on veut une expression analytique de V , ce qui est compliqué à obtenir car la fonction de Lyapunov est obtenue en résolvant l'équation aux dérivées partielles -EDP- de l'Equation (8) ce qui limite l'utilisation de cette méthode.

Cependant, on peut tout de même approcher la région d'attraction en obtenant une approximation de V , la méthode classique étant de

passer par une discrétisation.

Une autre approche que celle de Zubov, mais néanmoins connexe a été proposée par Vannelli qui, par une méthode itérative d'algèbre linéaire basée sur une répétition de résolution d'équations permet de découvrir la région maximale d'attraction à travers une fonction de Lyapunov rationnelle [71].

Très récemment, dans un autre style, il est apparu une nouvelle méthode de recherche de région d'attraction pour des systèmes contrôlés en passant par des méthodes d'optimisations dans l'espace des mesures, cela grâce à l'équation de Liouville. Après relaxation cela se résout alors par SDP [33].

On peut cependant trouver un point en commun à ces méthodes (permettant de prouver la stabilité ou de trouver une région de d'attraction) c'est que par l'intermédiaire une certaine fonction V nous sommes capable de donner la *frontière* d'un invariant (positif).

1.8 UNE CARACTÉRISATION SIMPLE DES INVARIANTS PAR LEUR BORD

En fait, il est possible de caractériser assez simplement un invariant par rapport à son bord. En effet considérons l'ensemble S , on constate que :

- φ rentre dans S lorsqu'il part de $\partial S \iff S$ est un invariant positif,
- φ sort de S lorsqu'il part de $\partial S \iff S$ est un invariant négatif,
- ∂S est invariant $\iff S$ est un invariant.

En partant de ce principe, certains ont essayé de trouver directement les invariants *positifs* de systèmes à commutation avec une forme déjà prédéfinie qu'on appelle *patron* ou *template* [47, 60, 64]. Par exemple : considérons un système dans le plan, et cherchons à trouver un invariant de forme rectangulaire dans l'ensemble $\{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$.

On peut alors définir le patron rectangulaire T grâce aux quatre inégalités :

$$T(c_1, c_2) := \{x \leq c_1, -x \leq c_1, y \leq c_2, -y \leq c_2\}, \quad c_1, c_2 \in [0, 1]$$

Le but étant alors de trouver les coefficients c_1, c_2 de manière à ce que sur chaque face (représentant le bord) le flot soit rentrant, ce qui peut se traiter grâce à des méthodes d'itération sur les politiques [64].

Il est pour l'instant difficile d'imaginer que l'on pourra traiter avec cela autre chose que des systèmes linéaires car cela veut dire en particulier qu'on sait inférer de manière assez précise la forme de l'invariant (par exemple on infère un polyèdre si le patron est linéaire dont on connaît approximativement le nombre de faces représenté par le nombre d'équations définissant le patron) et qu'il ne nous reste plus qu'à trouver les bons coefficients.

De plus beaucoup d'invariants, non moins intéressants, ne sont ni attractifs, ni même stables. Dans ce cas, il n'est plus possible même pour des systèmes très simples d'étudier (ou d'approcher) les invariants par les méthodes classiques, comme nous le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 4. Considérons le système linéaire associé au champ de vecteurs :

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Le champ de vecteurs de ce système est représenté sur la Figure 6.

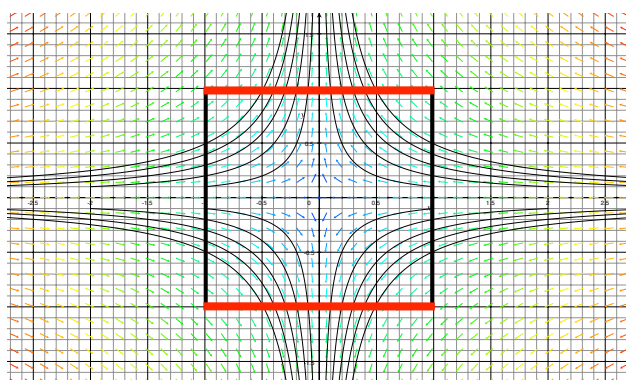


FIGURE 6 – Exemple de dynamique avec un variété stable et une autre instable.

Il est facile de constater que si l'on considère un compact B d'intérieur non vide qui contient l'origine, alors pour ce système :

- $B \cap \{x = 0\}$ est l'invariant maximal positif dans B
- $B \cap \{y = 0\}$ est l'invariant maximal négatif dans B
- $(0, 0)$ est un point fixe (intersection entre les deux précédentes variétés)

Dans la Figure 6 nous avons considéré le compact B comme étant le carré de rayon 1, et avons représenté les parties du bord sur lesquels le flot ne rentre pas dans B en rouge.

Malgré le fait que ce système soit très simple, on constate qu'il nous est impossible de trouver un compact (d'intérieur non vide) qui, lorsque le flot part de son bord rentre dans l'intérieur de ce compact.

Ainsi, dans la grande majorité des cas nous nous confronterons à des ensembles qui mêlent à la fois flot rentrant et flot sortant au bord des ensembles étudiés. D'où la nécessité de développer des méthodes pouvant traiter ce genre de cas, c'est ce que nous ferons dans les chapitres suivants.

Pour cela on utilisera la théorie de l'indice de Conley qu'on présentera en premier lieu et qui nous donnera des conditions suffisantes à l'existence d'ensembles invariants maximaux même dans le cas de figure présenté dans l'exemple précédent.

Deuxième partie

LA RECHERCHE D'INVARIANTS

RECHERCHE D'ENSEMBLES INVARIANTS POUR DES SYSTÈMES CONTINUS

Dans ce chapitre nous présenterons une nouvelle méthode pour prouver l'existence d'ensembles invariants de systèmes dynamiques classiques dans une région donnée de l'espace d'état.

On considérera tout le long de ce chapitre un système décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) \tag{9}$$

où x est un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ est un vecteur polynomial, c'est à dire, $\forall i = 1, \dots, n$, f_i appartient à l'anneau des polynômes multivariés qu'on notera $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. D'après le Théorème 1, l'équation différentielle étudiée admet bien une (unique) solution pour chaque condition initiale x_0 , qu'on notera $\varphi(\cdot, x_0)$. Tout cela est cependant extensible à des champs de vecteurs non autonome, c'est à dire de la forme $\dot{x} = f(t, x)$ (il suffira d'ajouter une dimension au système -le temps).

2.0.1 Contenu du chapitre et travaux connexes

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la plupart des méthodes utilisées pour retrouver des ensembles invariants sont les méthodes qui consistent à prouver la stabilité de Lyapunov. Récemment, certains auteurs ont proposé d'utiliser des fonctions de Lyapunov linéaires [60] et quadratiques [2] *par morceaux*, inspirés à la fois par l'interprétation abstraite de programme [61] et par de récents résultats en théorie des systèmes hybrides [6, 62].

Si ces méthodes, basées sur des *patrons* sont traitables numériquement, elles sont limitées par le fait qu'elles recherchent la forme exacte des invariants (positifs) ; ces derniers doivent être en particulier convexes, ce qui n'est pas toujours le cas, et ceci même pour des systèmes simples comme nous l'avons vu précédemment (voir Exemple 3).

Nous proposons dans ce chapitre une méthode, elle aussi basée sur des patrons, cependant, au lieu de considérer des fonctions de Lyapunov plus compliquées, nous assouplissons les conditions classiques. Rappelons que parmi ces conditions figure la suivante : afin qu'un patron (donné par une fonction de Lyapunov linéaire, quadratique

ou encore par des polynômes par morceaux plus généraux) soit un invariant positif, on impose au flot d'être rentrant sur tout le bord. Cette condition, qui peut être formulée comme une condition de négativité de certaines dérivées de Lie (une notion qu'on définira en Section 2.2) est très restrictive, et parfois ne nous permet pas de retrouver des invariants, même simples, comme nous l'avons vu dans l'Exemple 4.

Les invariants pouvant être très compliqués, nous n'avons parfois nul besoin de les décrire avec précision, on relâchera ainsi l'hypothèse précédente, en ne demandant qu'à certaines parties du bord de notre ensemble d'avoir un flot rentrant. Cette nouvelle méthode s'appuie la propriété topologique de Ważewski, qui donne des conditions suffisantes à l'existence d'un invariant dans le patron. Ce dernier pourra ainsi être interprété comme une sur-approximation de l'ensemble invariant.

Considérons l'exemple suivant :

Exemple 5. Prenons la dynamique étudiée dans l'Exemple 2.8 de [49], qui est décrite par le champ de vecteur suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y + (x^2 - 1) \left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Ce système a plusieurs invariants dans l'ensemble $B = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ (voir Figure 9) : il admet en particulier trois points fixes $(-1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ et $(1, 0)$ dans le carré B .

Pour ce système, il serait difficile de trouver un patron linéaire par morceaux tel que le système soit rentrant sur chacune des faces du patron. Nous verrons qu'avec notre méthode, il est en fait facile de prouver que le carré B contient au moins un invariant.

L'idée principale de ce chapitre est que même si l'ensemble invariant d'un système dynamique non linéaire peut être très compliqué à représenter, et donc à trouver (par exemple grâce à une fonction de Lyapunov explicite), il existe un critère *topologique* qui permet de déduire l'existence d'un invariant non vide dans une région donnée de l'espace d'état.

Notons que tous les invariants ne contiennent pas un point tel que le système dynamique converge vers ce point (région attractive). Pensons par exemple au théorème de Poincaré-Bendixson [40] et rappelons qu'il se peut, par exemple, que l'invariant soit un cycle limite ou un ensemble récurrent plus compliqué.

Si nous ne sommes intéressés que par la convergence vers un certain point, nous pouvons alors utiliser les méthodes classiques décrites dans le Chapitre 1 ou encore trouver un voisinage de l'équilibre (à condition de le connaître), qui soit un invariant positif. Cela se fait en général, grâce à l'étude des valeurs propres de la linéarisation de la dynamique autour du point d'équilibre.

Pour des dynamiques asymptotiques plus compliquées, et des invariants plus complexes, nous comptons sur les notions de la théorie de l'indice de Conley [49], que nous énonçons rapidement dans la Section 2.1. Les notions clés ici seront :

- (a) la notion de bloc isolant : ensemble qui satisfait certaines propriétés topologiques,
- (b) le théorème de Wazewski, qui donne une condition suffisante à l'existence d'un invariant non vide à l'intérieur d'un bloc isolant.

Plusieurs approches ont été développées durant les dernières années permettant de calculer des *ensembles isolants* ainsi que l'indice de Conley de ces ensembles, cependant la grande majorité sont appliquées à la discrétisation (en temps) des systèmes dynamiques étudiés [53, 68]. En effet, la plupart des approches qui étudient des systèmes continus en temps réduisent le problème à l'étude d'une dynamique discrète en se basant sur des sur-approximations "rigoureuses" (approche par méthodes d'intervalles).

Dans ce travail, nous généralisons l'approche basée sur les *patrons* de [60], conçue à l'origine pour des systèmes linéaires, pour trouver des conditions algébriques afin que le *patron* soit un bloc isolant. Ceci est fait dans la Section 2.2, dans laquelle nous donnons une condition suffisante pour que le patron donné par des inégalités polynomiales soit un bloc isolant. Cette condition s'exprimera comme une suite de conditions sur les dérivées de Lie sur les polynômes constituant les faces du patron, qui généralisent les conditions données dans [66].

La principale difficulté est en fait de nature topologique : une grande partie de la Section 2.2 concerne la preuve de la fermeture de ce qu'on appelle l'*ensemble sortant* du patron, sous la dynamique donnée par l'Equation 9, i.e. l'ensemble des points du bord qui quittent directement le patron est fermé. C'est une des conditions nécessaires pour que le patron soit un bloc isolant.

Notons que notre *bloc isolant paramétré* est un cas particulier de C^∞ bloc isolant à coins de [38], qui sont aussi puissants que les fonctions de Lyapunov (généralisées) pour trouver les ensembles inva-

riants (Théorème 2.4 de [38]).

Notons aussi que ces blocs isolants sont *robustes* : ils restent des blocs isolants pour tout flot assez proche du flot étudié (Théorème 3.5 de [38]), ce qui les rend plus robustes numériquement. Ils sont aussi proches en un certain sens des ensembles polyfaciaux [65] (ensembles décomposé en *faces entrantes* -i.e. le flot entre à l'intérieur de l'ensemble à partir de tout point de la face- et en *faces sortantes* -i.e. le flot sort à l'extérieur de l'ensemble à partir de tout point de la face-) attribués à Ważewski dans son papier originel [72].

Nous remarquerons alors, que les conditions que nous avons données pour qu'un patron soit un bloc isolant peuvent être résolues numériquement, en particulier grâce à la programmation semi-définie positive [42] en utilisant le théorème de *nichtnegativstellensatz* de Stengle et même, dans la plupart des cas, juste le théorème de *positivstellensatz* de Putinar [57], qui donne des conditions moins complexes algorithmiquement. Cela fait une seconde différence majeure avec [66] où c'est une méthode basée sur les techniques par intervalles qui est utilisée.

Finalement, nous vérifierons des conditions plus simples sur les blocs isolants que le reste des conditions du principe de Ważewski pour assurer l'existence d'un invariant non vide. Ces dernières seront de nature combinatoire et seront traitées dans la Section 2.2.3. Nous terminerons par une discussion de l'application de l'algorithme sur quelques exemples de la littérature dans la Section 2.4. Ces premiers résultats obtenus avec notre implémentation sur *Matlab* restent coûteux, mais nous parlerons en conclusion du chapitre de quelques possibilités d'améliorations de l'algorithme.

2.1 INTRODUCTION À L'INDICE DE CONLEY

La théorie de l'indice de Conley est une théorie topologique qui permet, entre autre, de caractériser l'invariant maximal d'un ensemble spécial B dit *bloc isolant* à partir du comportement du flot sur le bord de cet ensemble.

Un point subtil est le fait que la méthode est conçue pour trouver des ensembles invariants maximaux S dans des compacts (condition nécessaire pour être un bloc isolant), et pas tout à fait pour des invariants positifs. Cependant, il est en réalité connu que dans un ensemble compact, l'existence d'un type d'invariant (classique, positif ou négatif) entraîne l'existence des autres types d'invariants [9, 65].

Pour pouvoir parler d'indice de Conley ou énoncer le principe de Ważewski, nous devons rappeler quelques notions de topologie algébrique.

2.1.1 Rappel de quelques notions de topologie algébrique

La topologie algébrique, est une branche des mathématiques appliquant les outils de l'algèbre à l'étude des espaces topologiques. L'idée fondamentale est de pouvoir associer à tout espace topologique des objets algébriques (nombre, groupe, espace vectoriel, ...), de sorte qu'à deux espaces homéomorphes soient associées deux structures isomorphes. De tels objets sont appelés des invariants algébriques.

Une des notions fondamentale de la topologie algébrique est l'homotopie, c'est cette notion qui servira à définir le principe de Ważewski et plus généralement l'indice de Conley.

2.1.1.1 Homotopie

L'homotopie formalise la notion de déformation continue d'un objet à un autre. Deux lacets sont dits homotopes lorsqu'il est possible de passer continûment de l'un à l'autre. Ce concept se généralise à bien d'autres objets que des lacets. Plus formellement :

Définition 18 ([31]). Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x) \text{ et } H(x, 1) = g(x)$$

On dit alors que H une **homotopie** de f à g .

De manière imagée, en représentant le segment $[0, 1]$ verticalement, la tranche inférieure donne f , la tranche supérieure donne g et les tranches intermédiaires des fonctions qui font passer continûment de f à g . On définit même une notion un peu plus générale : l'homotopie relative à un sous-espace.

Définition 19 ([31]). Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f et homotope à g relativement à A s'il existe une application continue $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x), \quad (10)$$

$$\forall a \in A, \forall t \in I, H(a, t) = f(a) = g(a). \quad (11)$$

On dit alors que H une **homotopie relative** à A de f à g .

La relation d'homotopie relativement à A est une **relation d'équivalence** sur l'ensemble des fonctions continues de X dans Y . Cela donne sens aux définitions suivantes :

Définition 20 ([31]). Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On dit que f est une **équivalence d'homotopie** s'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à l'application identité sur $X : \text{id}_X$, et $f \circ g$ soit homotope à id_Y . S'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$, on dira que X a le même **type d'homotopie** que Y .

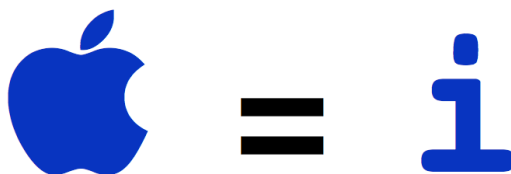


FIGURE 7 – Exemple d'équivalence homotopique : la pomme et la lettre i ont le même type d'homotopie ¹.

Si X et Y sont des espaces homotopiquement équivalents (même type d'homotopie), alors :

- si X est connexe par arc alors il en est de même pour Y .
- si X est simplement connexe alors Y l'est aussi.
- Les groupes d'homologie et de cohomologie de X et Y sont isomorphes.
- si X et Y sont connexes par arc, alors les groupes fondamentaux de X et Y sont isomorphes.

L'homotopie fournit ainsi des informations sur la nature topologique d'un espace. Une bande circulaire d'un plan ne peut être équivalente (au sens de l'homéomorphisme), à un disque. Dans un disque, tout lacet est homotope à un point (c'est ce qu'on appelle un espace contractile). Dans une bande circulaire, ce n'est pas le cas.

Définition 21 ([31]). Soient X un espace topologique et A un sous-espace. On appelle **rétraction par déformation** de X sur A toute application continue $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\forall x \in X : F(x, 0) = x \text{ et } F(x, 1) \in A$$

$$\forall a \in A, \forall t \in [0, 1] : F(a, t) = a$$

On dit que A est un **rétract par déformation** de X s'il existe une rétraction par déformation de X sur A .

1. image tirée de :

<http://mathematica.stackexchange.com/questions/59463/homotopy-visualization>



FIGURE 8 – Les deux figures de gauche représentent des exemples rétracts par déformation (le sous ensemble A étant la partie rouge) et les deux figures de droite ne sont pas des rétracts par déformation

Une rétraction par déformation est donc un cas particulier d'équivalence d'homotopie.

On peut à présent énoncer le principe de Ważewski.

2.1.2 Principe de Ważewski

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ un compact, en étudiant le flot dans B on peut décomposer le bord ∂B en trois parties $\partial B = B^- \cup B^0 \cup B^+$ qu'on définit comme suit :

Définition 22 ([17]).

— **Ensemble Sortant :**

$$B^- := \{x \in \partial B \mid \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in]0, \epsilon] \varphi_t(x) \notin B\}$$

— **Ensemble Rentrant :**

$$B^+ := \{x \in \partial B \mid \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in]0, \epsilon] \varphi_t(x) \in \text{Int}B\}$$

— **Ensemble Tangent :** $B^0 := \partial B - (B^+ \cup B^-)$

La notion essentielle pour pouvoir appliquer le principe de Ważewski est la suivante :

Définition 23 ([72]). *Un ensemble de Ważewski est un ensemble compact B , dont l'ensemble sortant B^- est fermé.*

Les ensembles de Ważewski ne contiennent pas toujours des ensembles invariants. Cependant, il existe une condition topologique simple sur ces ensembles qui implique l'existence d'invariants non vides à l'intérieur, c'est le résultat essentiel sur lequel repose notre travail, que l'on appelle le *principe de Ważewski* :

Théorème 12 ([72]).

Propriété de Ważewski

Soit B un ensemble de Ważewski. Si son ensemble sortant B^- n'est pas un rétract par déformation de B alors il existe un invariant non vide dans $\text{Int}B$.

Pour la méthode que nous développerons dans les sections suivantes, nous nous contenterons d'utiliser une caractéristique topologique bien plus faible qui est le nombre de composantes connexes. En effet une condition suffisante pour que le sous-ensemble B^- ne soit pas un rétract par déformation de B est que les deux ensembles n'aient pas le même nombre de composantes connexes.

Nous renvoyons le lecteur vers [72] pour une preuve du principe de Ważewski, mais donnons quand même une idée intuitive de cette dernière. S'il n'existe pas de rétract entre B et B^- , c'est qu'en particulier le flot (qui peut être vu comme une homotopie puisque c'est une fonction continue en (x, t)) ne peut pas envoyer tous les points de B vers B^- . En d'autres termes, il existe au moins un point dans B dont la trajectoire (image du flot) ne passera pas par B^- et donc appartient à un invariant.

Il est simple d'après la remarque précédente de constater que le résultat peut s'appliquer de la même manière en remplaçant B^- par B^+ . Cela revient à regarder le flot opposé, ce qui n'a pas d'impact sur l'existence de l'invariant.

Ce résultat est le premier à nous donner de l'information sur un invariant à partir de l'étude du bord d'un voisinage. Il a ensuite été généralisé par Conley pour donner naissance à ce qu'on appelle l'indice de Conley.

2.1.3 Indice de Conley

De même que pour le principe de Ważewski, nous avons besoin de définir des ensembles spéciaux dans lesquels nous étudierons les invariants.

Définition 24. *Un ensemble compact B est un **bloc isolant** si*

- (a) *L'ensemble sortant B^- est fermé*
- (b) $\forall T > 0, \{x \in B \mid \varphi([-T, T], x) \subseteq B\} \subseteq \text{int} B$

Exemple 6. *Pour l'Exemple 5, nous verrons que le carré $B = [-2, 2] \times [-2, 2]$ de la Figure 9 contient un ensemble invariant. Sur cette figure, B^- est représenté par les quatre segments rouges, sur chaque face, et nous prouverons (Exemple 10) que B^- est fermé, de sorte que B est un bloc isolant pour ce système. Notons en outre que c'est une notion robuste : tout ensemble s'écrivant $B = [-a, a] \times [-b, b]$ avec $a > 1$ et $b > 1$, est un bloc isolant.*

La combinaison de (a) et (b) dans la Définition 24 garantit qu'il n'y a aucune *tangence interne* au bord de B . Quand seulement la condition

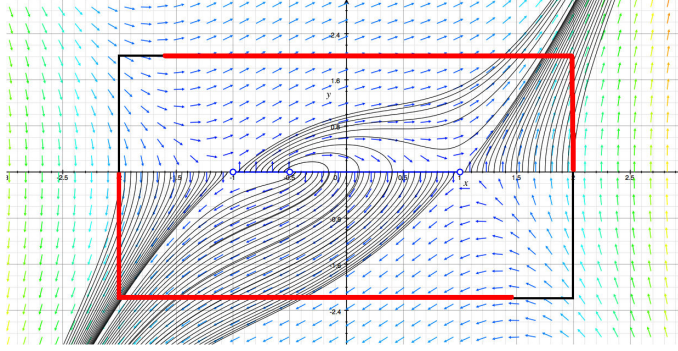


FIGURE 9 – Les trois points fixes et l'ensemble sortant (en rouge) du système de l'Exemple 5.

(b) est satisfaite, B est appelé un voisinage isolant, en réalité on a la définition suivante :

Définition 25. *Un ensemble compact B est un **voisinage isolant** si*

$$\text{Inv}(B, \varphi) \subseteq \text{int}B$$

Une difficulté majeure en dynamique topologique computationnelle est la construction de blocs isolants, ainsi c'est la construction de voisinage isolant (plus simple mais moins pratique pour le calcul de l'indice de Conley) qui est en général étudiée.

Constatons que les blocs isolants sont des cas particuliers d'ensembles de Ważewski, et on peut donc appliquer le principe du même nom sur ces nouveaux ensembles. Cependant contrairement à des ensembles de Ważewski généraux ils ont la particularité d'avoir un bord uniquement composé de l'ensemble sortant et de l'ensemble rentrant.

Les blocs isolants sont intéressants car, d'une part, il en existe pour chaque invariant borné, de l'autre, c'est une notion robuste [38]. En effet, si B est un bloc isolant pour un flot φ alors il l'est aussi pour tout flot (uniformément) assez proche de φ .

Dans notre cas, même si nous allons uniquement appliquer le principe de Ważewski pour prouver l'existence d'invariants comme dans l'Exemple suivant :

Exemple 7. *Nous avons vu dans l'Exemple 6 que nous avons un ensemble carré B à l'ensemble sortant B^- fermé et composé de deux composantes connexes. Clairement B^- n'est pas un rétract par déformation de B , puisque B^- est fait de deux composantes connexes, et B d'une seule, d'où l'existence d'un invariant par la propriété de Ważewski.*

Nous chercherons cependant des conditions permettant la vérification des blocs isolants car cela nous offre aussi la possibilité de

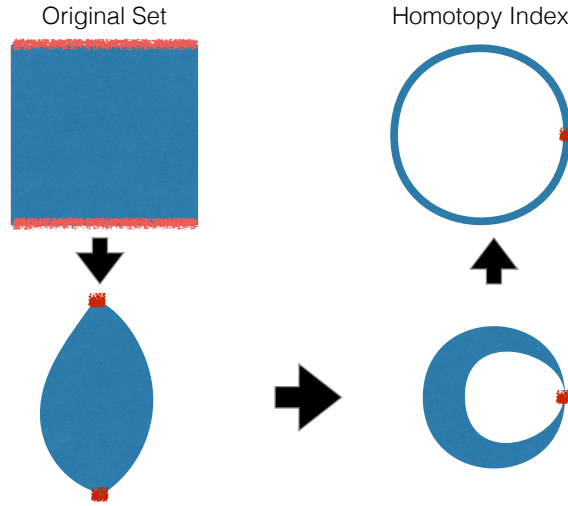


FIGURE 10 – Illustration des différentes transformations du bloc isolant (où l'ensemble sortant est représenté en rouge) de l'Exemple 4 pour arriver à son indice de Conley.

calculer l'indice de Conley pour de futurs travaux.

L'indice de Conley est un invariant topologique algébrique qui fournit de l'information sur le comportement qualitatif des orbites dans l'invariant maximal d'un ensemble (lorsqu'il existe) : orbites périodiques, attracteurs, répulseurs, comportement chaotiques, ... (voir par exemple [50–52]).

Finalement, l'indice d'homotopie de Conley est défini comme suit :

Définition 26 ([17]). Soit B un bloc isolant, l'**indice de Conley homotopique** de cet ensemble est donné par le type d'homotopie de B/B^- c'est à dire le type d'homotopie du bloc isolant dont l'ensemble sortant est "contracté en un point".

Cet indice est bien défini, existe toujours et est unique pour un bloc isolant donné.

Exemple 8. La Figure 10 ci-dessous illustre que l'indice de Conley de l'Exemple 4 est le cercle (pointé).

Ainsi, dans l'Exemple 10 ci-dessus (par Ważewski) on sait que l'invariant est non vide (puisque l'indice de Conley est non trivial). Mais de plus, on constate en fait, que pour n'importe quelle dimension si l'on considère un bloc isolant autour d'un point fixe hyperbolique, on obtiendra toujours le même indice de Conley (cela fait l'objet du Théorème 3.13 de [30]). On pourra penser par exemple au cube en dimension trois, où les faces du haut et du bas composent l'ensemble

sortant. Nous pouvons donc par le biais de l'indice de Conley, classer les ensembles invariants.

Si on souhaite être plus précis sur le type d'invariant, on peut le décomposer en sous-parties sur lesquelles nous allons recalculer l'indice de Conley. On peut réitérer la procédure sur chaque sous-partie pour être de plus en plus fin. Cette décomposition s'appelle la *la décomposition de Morse* [30].

L'indice de Conley reste une notion très abstraite et on constate qu'il est difficile de calculer cet indice (de manière formelle ou numérique). C'est pourquoi, on choisit habituellement de travailler avec l'indice d'homologie de Conley, qui est défini comme la cohomologie de l'espace B/B^- . Malgré le fait que l'homologie est plus traitable numériquement, cet indice n'en reste pas moins un challenge à calculer.

Plusieurs approches ont été développées durant les dernières années afin de calculer de manière algorithmique les blocs isolants. Cependant à notre connaissance la quasi-totalité d'entre elles dérivent des méthodes développées pour les *systèmes dynamiques discrets* [53, 68], appliquées sur des approximations (rigoureuses) des systèmes continus. Ces approximations sont coûteuses en temps de calcul.

À l'aide de cette propriété de Ważewski et inspirés par les méthodes de recherche de fonctions de Lyapunov nous présentons une nouvelle manière de rechercher des blocs isolants.

2.2 BLOCS ISOLANTS : DES CONDITIONS ALGÈBRIQUES

Dans cette section, nous donnons un critère simple pour qu'un ensemble compact B , représenté par des inéquations polynomiales (*patron polynomiale*), soit un bloc isolant pour la dynamique donnée par l'Equation 9.

Notons que bien que la méthode peut être définie pour des patrons polynomiaux, qu'on décrira plus formellement ci-dessous. La notion de bloc isolant étant robuste, elle permet l'utilisation de patrons très simples en général (décrit par des fonctions linéaires) comme nous le verrons dans les exemples.

Définition 27. Un *patron polynomiale* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble défini pour un vecteur $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, par m inégalités polynomiales :

$$(P) \quad \begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) \leq c_1 \\ \dots \\ p_m(x_1, \dots, x_n) \leq c_m \end{cases}$$

Nous appelons P_i^c la *face du patron* B donnée par

$$P_i^c = \{(x_1, \dots, x_n) \mid p_i(x_1, \dots, x_n) = c_i\} \cap B$$

qui peut être dégénérée (vide) ou non. Dans ce qui suit, nous supposons que chaque face de B n'est pas dégénérée.

Nous appelons *patrons polynomiaux minimaux*, les patrons B dont le bord ∂B est (égal et pas juste inclus comme c'est en général le cas) à :

$$\partial B = \bigcup_{i=1}^s \{x \mid p_i(x) = c_i, p_j(x) \leq c_j \ \forall j \neq i\}$$

Pour $x \in \partial B$, nous noterons $I(x)$ l'ensemble (non vide) maximal des indices dans $1, \dots, m$ tel que pour tout $i \in I(x)$, $p_i(x) = c_i$.

Donnons à présent la définition des dérivées de Lie, qu'on utilisera juste après.

Définition 28 ([40]). La *dérivée de Lie* de $h \in \mathbb{R}[x]$ le long du champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_n)$ est définie comme suit :

$$\mathcal{L}_f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i = \langle f, \nabla h \rangle$$

Les dérivées d'ordres supérieurs sont définies par la récurrence suivante : $\mathcal{L}_f^{k+1}(h) = \mathcal{L}_f(\mathcal{L}_f^{(k)}(h))$ avec $\mathcal{L}_f^0(h) = h$.

Pour un système dynamique polynomial, seul un nombre fini de dérivées de Lie est nécessaire pour générer toutes les dérivées d'ordres supérieurs.

En effet, soit $h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, on peut construire récursivement une chaîne d'idéaux ascendante de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ en ajoutant les dérivées de Lie successives de h à la liste des générateurs :

$$\langle h \rangle \subseteq \langle h, \mathcal{L}_f^1(h) \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle h, \mathcal{L}_f^1(h), \dots, \mathcal{L}_f^{(N)}(h) \rangle$$

Puisque l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[x]$ est Noethérien [41], cette chaîne d'idéaux croissante a nécessairement une longueur finie : l'idéal maximal est appelé le *radical d'idéal différentiel* (differential radical idéal) de h et sera noté $\sqrt[n]{\langle h \rangle}$. Son ordre est le plus petit N tel que :

$$\mathcal{L}_f^{(N)}(h) \in \langle h, \mathcal{L}_f^{(1)}(h), \dots, \mathcal{L}_f^{(N-1)}(h) \rangle \quad (12)$$

Il n'est pas étonnant de voir que cette notion a déjà été employée pour caractériser les invariants de systèmes dynamiques [23].

Introduisons de manière informelle la notion de *Base de Gröbner* qui nous sera utile par la suite.

Définition 29. Une base de Gröbner d'un idéal I de l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un ensemble de générateurs de cet idéal, vérifiant certaines propriétés supplémentaires. Plusieurs méthodes existent pour calculer les bases de Gröbner [1].

Les bases de Gröbner ont le grand avantage de ramener l'étude des idéaux polynomiaux à l'étude des idéaux monomiaux (c'est-à-dire formés de monômes), plus faciles à exploiter.

Le rang N est calculable grâce à la notion précédente. Si nous notons N_i l'ordre du radical d'idéal différentiel $\sqrt[\varepsilon]{\langle p_i \rangle}$, alors pour la face i nous devons calculer les dérivées de Lie successives jusqu'à N_i . Cela peut être réalisé en testant si la base de Gröbner engendrée par les dérivées change. En effet, deux idéaux sont égaux si ils ont la même base de Gröbner réduite (généralement les logiciels de calcul formel calculent les bases de Gröbner réduites) [1].

Si nous notons par $\mathcal{G}(\{g_1, \dots, g_n\})$ la base de Gröbner de $\{g_1, \dots, g_n\}$, le premier n tel que

$$\mathcal{G}(\{\mathcal{L}_f^{(0)}(p_i), \dots, \mathcal{L}_f^{(n)}(p_i)\}) = \mathcal{G}(\{\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i), \dots, \mathcal{L}_f^{(n+1)}(p_i)\})$$

est égal à N_i .

On peut observer qu'une borne supérieure pour N_i dans certains cas peut être utilisée au lieu de calculer les bases de Gröbner, voir [63].

Exemple 9. Si on reprend la dynamique de l'Exemple 5 et la première face P_1^c du patron

$$\{p_1 = -x, p_2 = x, p_3 = -y, p_4 = y\}$$

avec $\{c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 2, c_4 = 2\}$ i.e

$$P_1^c = \{-x = 2, x \leq 2, -y \leq 2, y \leq 2\}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{(1)}(p_1) &= -y, \\ \mathcal{G}(\{\mathcal{L}_f^{(0)}(p_1), \mathcal{L}_f^{(1)}(p_1)\}) &= \{-x, -y\}, \\ \mathcal{L}_f^{(2)}(p_1) &= -y - (x^2 - 1) \left(x + \frac{1}{2}\right), \\ \mathcal{G}(\{\mathcal{L}_f^{(0)}(p_1), \mathcal{L}_f^{(1)}(p_1), \mathcal{L}_f^{(2)}(p_1)\}) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Donc nous pouvons en déduire que $N_1 = 3$.

A présent, dans le but de trouver des blocs isolants, nous aurons besoin de trouver et prouver des conditions topologiques sur les ensembles sortants, voir Définition 24. Pour des patrons polynomiaux, nous aurons besoin du Lemme 1 suivant :

Lemme 1. Soit x_0 un point du bord ∂B d'un patron polynomial minimal B . Alors x_0 appartient à l'ensemble sortant B^- de B si et seulement si, pour un certain $i_0 \in I(x)$,

$$\exists k_0 > 0, \left(\mathcal{L}_f^{(k_0)}(p_{i_0}) > 0 \wedge \forall k, 0 < k < k_0, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_{i_0}) = 0 \right)$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \partial B$: il existe au moins un indice i_0 tel que $p_{i_0}(x_0) = c_{i_0}$. Nous savons que $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ est analytique [15], ce qui rend $g : t \rightarrow p_{i_0} \circ \varphi(t, x_0)$ analytique aussi, et nous pouvons écrire son développement de Taylor autour d'un petit voisinage de 0 comme suit :

$$p_{i_0} \circ \varphi(t, x_0) = p_{i_0}(x_0) + \frac{dg}{dt}(0)t + \frac{1}{2!} \frac{d^2g}{dt^2}(0)t^2 \dots \quad (13)$$

On note que :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \sum_{j=1}^n f_j(\varphi(t, x_0)) \frac{\partial p_{i_0}}{\partial x_j}(\varphi(t, x_0)) \\ &= \mathcal{L}_f^{(1)}(p_{i_0})(\varphi(t, x_0)) \end{aligned}$$

et plus généralement, on peut prouver par récurrence sur l que :

$$\frac{d^{(l+1)}g}{dt^{(l+1)}}(t) = \mathcal{L}_f^{(l+1)}(\varphi(t, x_0)) \quad (14)$$

puisque par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{d^{(l+1)}g}{dt^{(l+1)}}(t) &= \frac{d}{dt} \left(t \rightarrow \mathcal{L}_f^{(l)}(\varphi(t, x_0)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n f_j(\varphi(t, x_0)) \frac{\partial \mathcal{L}_f^{(l)}}{\partial x_j} \\ &= \mathcal{L}_f^{(1)}(\mathcal{L}_f^{(l)})(\varphi(t, x_0)) \end{aligned}$$

qui est $\mathcal{L}_f^{(l+1)}(\varphi(t, x_0))$ par Definition 28. Par l'Equation 14 :

$$\frac{d^{(l+1)}g}{dt^{(l+1)}}(0) = \mathcal{L}_f^{(l+1)}(x_0)$$

et en remplaçant ces dérivées dans le développement de Taylor de l'Equation 13 on trouve :

$$g(t) = c_{i_0} + \mathcal{L}_f^{(1)}(p_{i_0})(x_0)t + \frac{1}{2!} \mathcal{L}_f^{(2)}(p_{i_0})(x_0)t^2 \dots \quad (15)$$

La conclusion suit immédiatement en remarquant que pour un petit voisinage de 0, et pour tout temps strictement positif t dans ce voisinage, $g(t) > g(0) = p_{i_0}(x_0)$, donc $\varphi(t, x_0)$ est en dehors de B , par minimalité de B , ce qui signifie que x_0 est dans l'ensemble sortant B^- de B . $\square$

2.2.1 Conditions sur les dérivées de Lie pour l'obtention de blocs isolants

Rappelons qu'afin qu'un patron B soit un bloc isolant, il faut, d'après la Définition 24, vérifier que l'ensemble sortant B^- est fermé.

Théorème 13.**Conditions suffisantes pour la fermeture de l'ensemble sortant**

Soient B un ensemble compact minimal paramétré par les inégalités (P) et N_i l'ordre des radicaux différentiels d'idéaux $\sqrt[p_i]{\langle p_i \rangle}$ (i.e l'indice défini par l'Equation 12) pour le système dynamique de l'Equation 9. Si pour chaque face P_i^c du patron B , pour tout $k \in \{1, \dots, N_i - 2\}$,

$$(H_k^i) : \{x \in P_i^c \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \\ \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) < 0\} = \emptyset$$

et

$$(H^i) : \{x \in P_i^c \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) = 0\} = \emptyset$$

alors B^- est fermé et égal à $\bigcup_{i=1}^m \{x \in P_i^c \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \geq 0\}$.

Démonstration. Nous commençons par montrer la relation suivante, pour tout i dans $0, \dots, m$ et tout k dans $0, \dots, N_i - 3$:

$$\begin{aligned} & \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \\ & \quad \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) \geq 0\} = \\ & \bigcup \left\{ \begin{array}{l} \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \\ \quad \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) > 0\} \\ \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \\ \quad \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) = 0, \mathcal{L}_f^{(k+2)}(p_i)(x) \geq 0\} \\ \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \\ \quad \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) = 0, \mathcal{L}_f^{(k+2)}(p_i)(x) < 0\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

et pour $k = N_i - 2$:

$$\begin{aligned} & \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) = 0, \\ & \quad \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) \geq 0\} = \\ & \bigcup \left\{ \begin{array}{l} \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) > 0\} \\ \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) = 0\} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si nous posons, pour i dans $0, \dots, m$ et $k = 0, \dots, N_i - 1$:

$$\begin{aligned} P_k^i &= \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) \geq 0\} \\ Q_k^i &= \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) > 0\} \\ R_k^i &= \{x \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0, \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) < 0\} \end{aligned}$$

Nous avons alors, pour i dans $0, \dots, m$ et $k = 1, \dots, N_i - 2$,

$$P_k^i = Q_k^i \cup P_{k+1}^i \cup R_{k+1}^i \quad (16)$$

Puisque N_i est l'indice du radical différentiel d'idéal $\sqrt[\ell]{\langle p_i \rangle}$, nous savons que

$$Q_{N_i-1}^i = \emptyset, R_{N_i-1}^i = \emptyset$$

puisque :

$$\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) = 0 \implies \mathcal{L}_f^{(N_i)}(p_i)(x) = 0$$

Étant donné les hypothèses, nous savons aussi que pour $k = 1, \dots, N_i - 2$, $R_k^i = \emptyset$, et $P_{N_i-1}^i = \emptyset$. Ce qui veut dire que

$$P_k^i = \bigcup_{j=k}^{N_i-2} Q_j^i \quad (17)$$

Par le Lemme 1, x est dans $B^- \cap P_i^c$ si et seulement si il appartient à $\bigcup_{j=0}^{\infty} Q_j^i = \bigcup_{j=0}^{N_i-2} Q_j^i$. Ce dernier ensemble est, par l'équation ci-dessus, égal à

$$P_0^i = \{x \in P_i^c \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \geq 0\},$$

qui est l'image inverse par une application continue de l'ensemble fermé $[0, \max_i \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(P_i^c)]$ (puisque P_i^c est compact dans $\mathbb{R}^n$).

Nous pouvons alors remarquer que l'ensemble sortant B^- est l'union de $B^- \cap P_i^c$, pour tout $i = 1, \dots, m$, chacun d'eux étant fermé, leur union est alors aussi fermée.

Notons à présent que $p_i = c_i \wedge \mathcal{L}_f^1(p_i) = 0 \dots \wedge \mathcal{L}_f^{N_i-1}(p_i) = 0$ est équivalent à dire que toutes les solutions de l'équation différentielle sont constantes sur la face décrite par p_i . Cela implique que la face P_i^c n'est pas sortante, et que l'ensemble sortant relatif à P_i^c est trivialement fermé (puisque vide).

Cela signifie que, pour vérifier qu'un patron est un bloc isolant, nous avons seulement besoin de vérifier que pour tout $k \in \{1, \dots, N_i - 2\}$, :

$$\begin{aligned} p_i = c_i \wedge (p_j \leq c_j)_{j \neq i} \wedge \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0 \\ \implies \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) \geq 0 \end{aligned}$$

(18)

□

Remarque 1. Le critère utilisé dans [66] implique strictement (H_k^i) .

Finalement, pour qu'un patron polynomial B soit un bloc isolant, nous avons besoin de montrer (condition (b) de la Définition 24) qu'il n'y a pas de tangence interne du flot sur le bord. Pour cela on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.

Conditions suffisantes pour l'inexistence de tangence interne

Soit B un patron polynomial minimal. Il satisfait la condition (b) de la Définition 24 si pour chaque face P_i^c :

$$\{x \in P_i^c \mid \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(N_i-1)}(p_i)(x) = 0\} = \emptyset \quad (19)$$

et pour tout $k \in \{0, \dots, N_i - 1\}$, aucun $x \in P_i^c$ ne peut satisfaire la suite suivante d'égalités et d'inégalités :

$$\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(2k-1)}(p_i)(x) = 0, \mathcal{L}_f^{(2k)}(p_i)(x) < 0 \quad (20)$$

Démonstration. La seule façon de ne pas satisfaire la condition (b) de la Définition 24 lorsque (19) est satisfait est d'avoir un point sur le bord x de l'ensemble invariant, qui serait une tangence interne sur ∂B .

D'après le développement de Taylor que nous avons utilisé dans la preuve du Lemme 1, dans un petit voisinage de $t = 0$, et pour des temps positifs nous avons :

$$p_i(\varphi(t, x_0)) = p_i(x_0) + \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x_0)t + \frac{1}{2!}\mathcal{L}_f^{(2)}(p_i)(x_0)t^2 + \dots$$

$$p_i(\varphi(-t, x_0)) = p_i(x_0) - \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x_0)t + \frac{1}{2!}\mathcal{L}_f^{(2)}(p_i)(x_0)t^2 \dots$$

si la première dérivée de Lie non nulle est paire comme supposé dans le Lemme, le flot sera tangent en x_0 à la manière d'une parabole. Cette tangence sera interne si la dérivée non nulle est négative, externe dans le cas contraire, d'où le résultat. □

Remarque 2. Ces conditions sont clairement satisfaites lorsque les conditions du Théorème 13 le sont.

2.2.2 De la vérification de la vacuité d'ensembles à la résolution d'équations

La question qu'on peut se poser à présent est : comment vérifier les conditions du Théorème 13. Comment tester que tous ces ensembles sont vides ? En réalité, c'est à ce genre de question que répond la théorie de la *géométrie (semi-)algébrique réelle*, et c'est donc en son sein que nous trouverons la réponse.

En effet, cette théorie est centrée autour de l'étude des ensembles semi-algébriques, qui, on le rappelle sont des ensembles de la forme

$$\mathbb{K} = \{f_1 = 0, \dots, f_p = 0, f_{p+1} \geq 0, \dots, f_q \geq 0, f_{q+1} \neq 0, \dots, f_r \neq 0\}$$

où les fonctions f_i pour $i = 1, \dots, r$ sont des polynômes. On utilisera en particulier à plusieurs reprises les deux théorèmes clés de cette théorie que sont le *Nichtnegativstellensatz* et le *Positivstellensatz*.

Pour les énoncer commençons par définir quelques notations : soient $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $\Sigma(x)$ l'ensemble des sommes de carrés de polynômes et pour tout ensemble $J \subset \{1, \dots, m\}$ on notera par f_J le polynôme $f_J(x) := \prod_{j \in J} f_j(x)$ avec la convention que $f_\emptyset = 1$. On note l'ensemble :

$$P(F) := \left\{ \sum_{J \subset \{1, \dots, m\}} q_J f_J : q_J \in \Sigma(x) \right\}$$

parfois appelé *preordering* par les géomètres algébristes.

Théorème 14 ([42]).

Nichtnegativstellensatz et Positivstellensatz de Stengle

Soit $f \in \mathbb{R}[x]$ et soit

$$\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$$

- (a) **Nichtnegativstellensatz** $f \geq 0$ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $l \in \mathbb{N}$, et $g, h \in P(F)$ tels que $fg = f^{2l} + h$.
- (b) **Positivstellensatz** $f > 0$ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $g, h \in P(F)$ tels que $fg = 1 + h$.
- (c) **Nullstellensatz** $f = 0$ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $l \in \mathbb{N}$, et $g \in P(F)$ tels que $f^{2l} + g = 0$.

Le théorème précédent est une généralisation du lemme de Farkas qui permet de vérifier si un polyèdre i.e un ensemble de la forme $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \text{ (où } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^m)\}$ est vide ou non.

Si on sait dès le départ que l'ensemble $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ est compact, on gagnera un grand avantage algorithmique à utiliser le théorème suivant :

Théorème 15 ([42]).

Positivstellensatz de Putinar

Soit l'ensemble compact suivant :

$$\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

et soit un $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{i_0} \geq 0\}$ soit compact.

Alors $f \in \mathbb{R}[x]$ est strictement positive sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe des sommes de carrés positifs $g_j \in \Sigma(x)$, pour $j = 1, \dots, m$ tels que :

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^m f_j g_j,$$

Comparé au Théorème 14 ce dernier a l'avantage d'avoir un nombre de polynômes "inconnus" linéaire en le nombre de polynômes définissant $\mathbb{K}$, ce qui est une amélioration crucial d'un point de vue calculatoire.

2.2.3 Algorithme de vérification de bloc isolant

L'algorithme que nous allons développer maintenant repose donc sur la vérification de la condition (H_k^i) du Théorème 13.

Cette condition peut être vérifiée en utilisant les méthodes d'optimisations de *sommes de carrés de polynômes (SOS)* en passant par le théorème Nichtnegativstellensatz de Stengle, ceci pour k allant de 1 à $N_i - 2$, et pour chaque face i du patron. Cela se fait comme suit : nous déterminons des polynômes α_j ($j = 0, \dots, k$), des sommes de carrés de polynômes $\beta_{S,\mu}$ ($S \subseteq \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$, $\mu \in \{0, 1\}$) et un entier l , tel que

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{L}_f^{(j)} + \sum_{S \subseteq \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}} \beta_{S,\mu} G_{S,\mu} + \left(\mathcal{L}_f^{(k+1)} \right)^{2l} = 0 \quad (21)$$

où $G_{S,\mu} = (-\mathcal{L}_f^{(k+1)})^\mu \prod_{s \in S} (c_s - p_s)$ pour tout $S \subseteq \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ et $\mu \in \{0, 1\}$ avec la convention que $\mathcal{L}_f^0(p_i) = c_i - p_i$.

De manière pratique, cela se fait en bornant le degré des polynômes α_j et $\beta_{S,\mu}$ que nous cherchons, et en considérant des valeurs pour l

assez faibles (dans tous nos exemples, nous avons pris $l = 1$). D'où la Proposition suivante, qui est au cœur de notre algorithme :

Proposition 2. *Pour chaque face P_i^c , si pour tout $k = 1, \dots, N_i - 2$, il existe des polynômes α_j ($j \in \{0, \dots, k\}$) et des sommes de carrés de polynômes $\beta_{S,\mu}$ ($S \subseteq \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ où $\mu \in \{0, 1\}$) tels que l'Equation 21 est satisfaite, alors le patron B^- est un bloc isolant.*

Pour obtenir des résultats plus rapides, dans la plupart des cas, nous commençons, pour un k (et un i) donné, puis au lieu de résoudre (H_k^i) par l'Equation 21, on cherche à prouver la propriété suivante qui plus simple à prouver (en passant par Putinar) que (18) :

$$p_i = c_i \wedge (p_j \leq c_j)_{j \neq i} \wedge \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)(x) = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)(x) > 0$$

Si nous obtenons une solution, alors nous pouvons arrêter de tester les (H_k^i) avec des valeurs pour k plus grandes puisqu'elles sont trivialement satisfaites.

Nous pouvons tester si l'équation ci-dessus est vraie en utilisant le théorème de *positivstellensatz* de Putinar [57] qui est moins coûteux que le *nichtnegativstellensatz* de Stengle, et qui s'arrête aussi potentiellement avant d'atteindre $k = N_i - 2$.

Une condition suffisante pour cela soit vrai est de trouver des polynômes α_l ($l = 1, \dots, k$), γ_i et des sommes de carrés de polynômes β_j $j = 1, \dots, m$, $j \neq i$ tels que

$$\mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{L}_f^{(j)}(p_i) + \beta_0 + \sum_{j=1, j \neq i}^m \beta_j (c_j - p_j) + \gamma_i (p_i - c_i) \quad (22)$$

Pour chaque entier $D > 0$ fixé, que nous choisissons comme borne supérieure pour le degré des polynômes α_l , γ_i et β_j , cela peut être testé par programmation semi-définie positive (voir [44] et son amélioration [45] pour une discussion sur le degré maximal pour ces problèmes).

Notons que notre version du *positivstellensatz* de Putinar est une condition nécessaire et suffisante pour la stricte positivité de $\mathcal{L}_f^{(k+1)}(p_i)$ sur le sous ensemble de P_c^i . Concernant la condition $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{i_0} \geq 0\}$ compact où dans notre cas on devrait avoir :

$$f_{i_0} \in \{c_1 - p_1, \dots, c_m - p_m, \\ \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i), \dots, \mathcal{L}_f^{(k)}(p_i), \\ -\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i), \dots, -\mathcal{L}_f^{(k)}(p_i)\}$$

il est en général d'usage d'imposer une nouvelle inégalité fictive $p_{m+1} = N - \sum_{i=1}^n x_i^2$ pour un certain N assez grand pour que $p_{m+1}(x) \geq 0$ pour tout $x \in B$.

Ce N existe toujours puisque B est compact, donc borné, en particulier pour la norme ℓ_2 , de cette manière on peut donc toujours choisir $f_{i_0} = p_{m+1}(x)$ de manière à pouvoir rentrer dans le cadre du théorème.

Notons aussi que lorsque les p_i sont linéaires (dans ce cas, B est dit patron linéaire [61]) nous n'avons pas besoin d'ajouter $\gamma_i(p_i - c_i)$ dans l'Equation 22 puisque nous pouvons juste substituer la valeur d'une coordonnée x_u dans les autres, en utilisant l'équation affine $p_i = c_i$ dans le reste de l'Equation 22. Cela simplifie le problème à résoudre puisqu'on perd une dimension et diminue le nombre de polynômes à trouver.

Exemple 10. Reprenons dans l'Exemple 5 la face P_1^c , et tentons de prouver (H_1^1) par exemple. Une condition suffisante est de trouver des polynômes α, γ (pour les conditions d'égalité) et des sommes de carrés de polynômes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ (pour les conditions d'inégalités) tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{(2)}(p_1) &= \alpha \mathcal{L}_f^{(1)}(p_1) + \beta_1 + \beta_2(c_2 - p_2) \\ &+ \beta_3(c_3 - p_3) + \beta_4(c_4 - p_4) + \gamma(p_1 - c_1) \end{aligned}$$

qui est trivialement satisfaite lorsque $\alpha = 1, \beta_1 = \frac{9}{2}, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ et $\gamma = ((\frac{1}{2} + x)(2 - x) - 3)$. En utilisant Yalmip avec le solveur SdP SeDuMi sous Matlab nous trouvons des solutions bien plus compliquées.

2.3 UNE CONDITION COMBINATOIRE SIMPLE POUR PROUVER L'EXISTENCE D'INVARIANTS

Nous supposons dans cette section que les hypothèses du Théorème 13 sont satisfaites.

Même si nous avons trouvé un patron minimal B avec un ensemble sortant fermé, i.e un bloc isolant, il se peut que l'ensemble invariant à l'intérieur soit vide. Nous utilisons la propriété de Ważewski, Théorème 12, pour s'assurer qu'il est non vide.

Il est difficile en général, de tester lorsque B^- est un rétract par déformation de B ou non. Nous utiliserons donc des conditions suffisantes qui garantissent que B^- n'est pas un rétract par déformation de B , dans le cas plus simple où B est contractile (i.e. il existe une rétraction par déformation de B en n'importe lequel de ses points).

Nous savons que les ensembles sortants sur chaque face P_i^c sont donnés comme les points x de P_i^c tels que $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \geq 0$ pourvu que (H_k^i) soient satisfaites.

Définissons G comme le graphe dont les nœuds sont les P_i^c pour lesquels $P_i^c \cap B^-$ est non vide et dont les arêtes sont données par les paires (P_i^c, P_j^c) des faces de B , telles que la condition $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \geq 0 \wedge \mathcal{L}_f^{(1)}(p_j)(x) \geq 0$ est satisfaite sur $P_i^c \cap P_j^c$ (lorsque cet ensemble n'est pas vide).

Si G n'est pas connexe, alors l'ensemble sortant B^- est trivialement non connexe aussi, car G a un nombre de composantes inférieur ou égal à celui de B^- (il peut être strictement inférieur si certains $P_i^c \cap B^-$ ne sont pas connexes). Mais B est connexe puisque il est contractile. Dans ce cas B^- ne peut pas être un rétract par déformation de B . C'est ce que nous avons utilisé dans l'Exemple 7 pour prouver qu'il existe un ensemble invariant à l'intérieur de B .

Notons qu'on peut faire la même chose pour le complémentaire de l'ensemble sortant (i.e l'ensemble rentrant). Combinés, et ceci par la dualité d'Alexander [32], ces deux tests sont assez informatifs puisque le nombre de composantes connexes de l'ensemble rentrant donne de l'information sur le premier groupe de cohomologie de l'ensemble de sortie en dimension $n = 3$.

Cela conduit à la Proposition 3, qui utilise le Théorème de positivstellensatz une fois encore en tant que méthode algorithmique pour déterminer la connexité de (l'abstraction de) G .

Proposition 3. Soit $G^\#$ le graphe dont les nœuds sont donnés par les faces P_i^c du patron considéré et tels qu'il existe x dans $p_i(x) = c_i$ et

$$\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = \beta_0 + \sum_{k=1, k \neq i}^m \beta_k(c_k - p_k) + \gamma_i(c_i - p_i)$$

(où β_0, β_k sont sommes de carrés de polynômes et γ_i des polynômes), et dont les arêtes sont données par les paires de faces (P_i^c, P_j^c) telles qu'il existe un x avec $p_i(x) = c_i, p_j(x) = c_j$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \times \mathcal{L}_f^{(1)}(p_j)(x) = & \beta'_0 + \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^m \beta'_k(c_k - p_k) \\ & + \gamma_i(c_i - p_i) + \gamma_j(c_j - p_j) \end{aligned}$$

(où β'_0, β'_k sont sommes de carrés de polynômes et γ_i des polynômes).

Alors si $G^\#$ n'est pas connexe et que le patron est un bloc isolant alors il contient en son intérieur un ensemble invariant non vide.

Démonstration. Nous construisons un graphe $G^\sharp$, qui est a priori un graphe qui a moins de nœuds que G mais plus d'arêtes. Par conséquent un $G^\sharp$ qui n'est pas connexe implique un G non connexe et que l'ensemble invariant à l'intérieur du patron (qui est par hypothèse un bloc isolant) est non vide.

La face P_i^c est l'un des nœuds du graphe G si $\exists x \in P_i^c$ tel que $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \geq 0$. Nous résolvons cela par le théorème de positivstellensatz de Putinar : il existe x avec $p_i(x) = c_i$ et

$$\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) = \beta_0 + \sum_{k=1, k \neq i}^m \beta_k(c_k - p_k) + \gamma_i(c_i - p_i)$$

(où β_0, β_k sont des sommes de carrés de polynômes et γ_i des polynômes). Nous obtenons comme cela potentiellement un sous ensemble des nœuds de G .

Pour produire les arêtes de G , nous avons besoin de montrer qu'il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $p_i(x) = c_i, p_j(x) = c_j, \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \geq 0$ et $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_j)(x) \geq 0$. Puisqu'on a besoin de produire un sur-ensemble de l'ensemble des arêtes de G , nous utilisons le positivstellensatz de Putinar pour potentiellement trouver x tel que $p_i(x) = c_i, p_j(x) = c_j$, et

$$\mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \times \mathcal{L}_f^{(1)}(p_j)(x) \geq 0,$$

i.e. nous devons résoudre (en la variable x) $p_i(x) = c_i, p_j(x) = c_j$, et

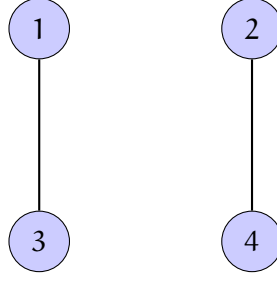
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{(1)}(p_i)(x) \times \mathcal{L}_f^{(1)}(p_j)(x) = & \beta'_0 + \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^m \beta'_k(c_k - p_k) \\ & + \gamma_i(c_i - p_i) + \gamma_j(c_j - p_j) \end{aligned}$$

(où β'_0, β'_k sont des SoS et γ_i de polynômes). $\square$

Algorithmiquement, avant la relaxation classique SdP pour résoudre le positivstellensatz, nous utilisons un simple algorithme de parcours de graphe en profondeur pour calculer les composantes connexe de $G^\sharp$.

Exemple 11. *Considérons encore l'Exemple 5. Chacune des quatre faces de B est un nœud de $G^\sharp$. Les faces sont respectivement données par*

$$\begin{aligned} \{(-2, y) \mid -2 \leq y \leq 2\} & \quad (\text{face } P_1^c) \\ \{(2, y) \mid -2 \leq y \leq 2\} & \quad (\text{face } P_2^c) \\ \{(x, -2) \mid -2 \leq x \leq 2\} & \quad (\text{face } P_3^c) \\ \{(x, 2) \mid -2 \leq x \leq 2\} & \quad (\text{face } P_4^c) \end{aligned}$$

FIGURE 11 – Représentation du graphe $G^\#$ pour l'Exemple 5

On a par conséquent les intersections suivantes :

$$\begin{aligned} P_1^c \cap P_3^c &= \{(-2, -2)\} \\ P_1^c \cap P_4^c &= \{(-2, 2)\} \\ P_2^c \cap P_3^c &= \{(2, -2)\} \\ P_3^c \cap P_4^c &= \{(2, 2)\} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc placer une arête entre P_1^c et P_3^c si et seulement si $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_1)(-2, -2) = 2$ et $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_3)(-2, -2) = \frac{13}{2}$ sont toutes les deux positives - ce qui est vrai; nous pouvons placer entre P_1^c et P_4^c si et seulement si $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_1)(-2, 2) = -2$ et $\mathcal{L}_f^{(1)}(p_4)(-2, 2) = \frac{5}{2}$ sont toutes deux positives - ce qui est faux; et de la même manière nous n'avons pas d'arête entre P_2^c et P_3^c , et une arête entre P_2^c et P_4^c , voir Figure 11.

Nous en concluons que B^- a (au moins) deux composantes connexes, et qu'il existe donc à l'intérieur du carré B un ensemble invariant non vide.

2.4 EXPÉRIMENTATIONS

Les expériences que nous présentons ci-dessous ont été réalisées grâce à un algorithme qui a été implémenté en Matlab, à l'aide du kit *Symbolic Math Toolbox* pour calculer les dérivées successives de Lie, et *MuPaD* pour calculer les *bases de Gröbner*. Les programmes SoS sont résolus grâce au solveur de programmes SdP *SeDumi* et *Yalmip*.

Les temps d'exécution de l'algorithme sur ces exemples classiques présentés dans la Figure 13 sont donnés pour un MacBook Air (Processeur) 1,3 GHz Intel Core i5, (Mémoire) 4 GB 1600 MHz DDR3 et exprimés en secondes comme suit : $t_{\text{Gröbner}}$ est le temps nécessaire pour trouver le radical différentiel d'idéal pour une face donnée. Nous indiquons aussi sur la Figure 13 l'ordre du radical différentiel d'idéal dans la colonne " N_i " et le degré maximal correspond à la base de Gröbner.

Exemple 12. C'est l'exemple qu'on a traité tout le long de ce chapitre, Exemple 5 de la Section 2.0.1. Juste à titre de comparaison, si nous avons appliqué directement le *nichtnegativstellensatz* de Stengle, le temps qu'aurait

pris l'algorithme pour prouver la fermeture de l'ensemble sortant aurait été de 130 secondes, un contraste frappant avec les (près de) 6 secondes (pour les quatre faces) du positivstellensatz de Putinar.

Exemple 13. Il est défini par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y - x + \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

(Exemple 4 de [12], avec une fonction de Lyapunov quadratique), nous étudions la dynamique dans ensemble carré paramétré par les coefficients suivants $c = (2.4, 2.4, 2.4, 2.4)^\top$. Nous sommes capables de montrer, en utilisant la méthode de la Proposition 3, que ce carré contient un invariant non vide.

L'ensemble sortant est représenté en rouge/gras dans la Figure 12 : nous voyons que le graphe $G^\sharp$ associé sera constitué de deux composantes connexes ce qui assure que le carré B contient un invariant notamment positif, contenant le point d'équilibre $(0, 0)$.

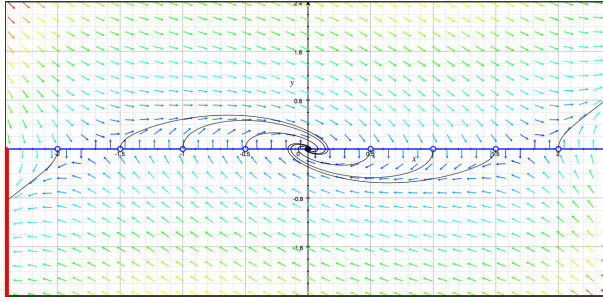


FIGURE 12 – Espace des phase et ensemble sortant pour l'Exemple 13

Exemple 14. Il est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{1}{10}x + y - x^3 \\ \dot{y} &= -x - \frac{1}{10}y \\ \dot{z} &= 5z \end{cases}$$

(Exemple 4.1, page 21, de [66]). Il a trois points fixes $A = (-1, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, et $C = (0, 1, -1)$, et des dynamiques plutôt compliquées entre les voisinages de ces points.

La seule face que nous considérons est la sphère de rayon $\frac{1}{5}$ centrée en p_2 , et définie par l'équation $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{25}$. Il peut être montré que l'ensemble sortant a deux composantes connexes, mais la Proposition 3 ne parvient pas à le montrer, car le patron n'est composé que d'une seule face.

Ceci peut être en réalité résolu en décomposant notre ensemble en deux hémisphères, l'une avec $z \geq -1$, et l'autre avec $z \leq -1$. Notre méthode alors

Ex.	Face	t Gröbner	d° G-base	N _i	t SoS optim
Exemple 12	Face 1 ($-x$)	0.16	3	3	1.47
	Face 2 (x)	0.16	3	3	1.35
	Face 3 ($-y$)	0.17	3	3	1.57
	Face 4 (y)	0.16	3	3	1.49
Exemple 13	Face 1 (x)	0.15	2	3	1.2
	Face 2 ($-x$)	0.15	2	3	1.2
	Face 3 (y)	0.16	2	3	1.3
	Face 4 ($-y$)	0.16	2	3	1.3
Exemple 14	Face 1	0.35	3	4	3.7
Exemple 15	Face 1	1.53	7	4	4.93
Exemple 16	Face 1 (y)	0.17	5	3	1.67
	Face 2 ($-y$)	0.1.7	5	3	1.53
	Face 3 ($y - 1.02x$)	0.19	5	3	1.57
	Face 4 ($-(y - 1.02x)$)	0.16	5	3	1.63
	Face 5 ($y + 2x$)	0.16	5	3	1.47
	Face 6 ($-(y + 2x)$)	0.16	5	3	1.52

FIGURE 13 – Quelques comparaisons

montre qu'une composante connexe de l'ensemble sortant se trouve dans le premier hémisphère et la deuxième dans l'autre hémisphère : $G^\sharp$ n'est alors pas connexe, et donc contient un invariant non vide. Notons que l'approche directe par SoS ne semble trouver que des polynômes de degrés ≥ 3 [66].

Exemple 15. Nous considérons la même dynamique que pour l'Exemple 14 (i.e. Exemple 4.1 de [66]), mais en utilisant un patron ellipsoïde 4-normé centré au point $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ dont les axes principaux (vecteurs) pointent en x , y , et z sont de tailles respectivement $\frac{3}{2}$, 1, et 1. Cela peut se décrire par la face définie par l'équation $(\frac{2}{3}x)^4 + (y - \frac{1}{2})^4 + (z + \frac{1}{2})^4 = 1$.

L'ensemble sortant est connexe, cependant il n'est pas simplement connexe : cela peut se voir en remarquant que l'ensemble rentrant a deux composantes connexes. Mais comme pour l'Exemple 14, la Proposition 3 ne peut aider à les distinguer puisque le patron n'est composé que d'une face.

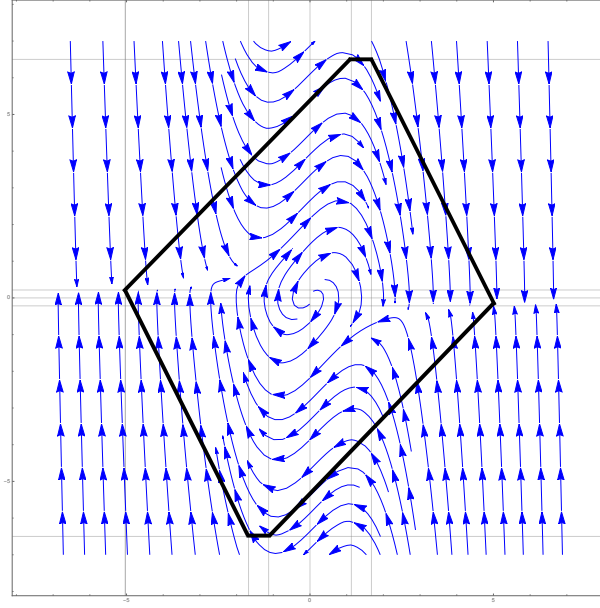


FIGURE 14 – Espace des phase pour la dynamique de Van Der Pol et patron contenant un invariant non vide

Exemple 16. La dynamique de Van der Pol est définie par

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases}$$

où nous considérerons le cas où $\mu = 1$. Son opposée, nommée Reverse Van der Pol est définie par les opposés du côté droit des équations (i.e. le flot est renversé, ou le temps est inversé).

Il est bien connu que ces dynamiques ont des cycles limites qui sont particulièrement difficiles à décrire, ils ne peuvent même pas être décrit par des courbes algébriques [56]. En contraste avec [11] nous montrons ici que nous pouvons étudier les invariants de ces dynamiques à l'aide de simples patrons. Nous pouvons par exemple considérer le patron défini par les polynômes

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= y \\ p_2(x, y) &= -y \\ p_3(x, y) &= y - 1.02x \\ p_4(x, y) &= -(y - 1.02x) \\ p_5(x, y) &= y + 2x \\ p_6(x, y) &= -(y + 2x) \end{aligned}$$

et les coefficients $c = (6.5, 6.5, 5.35, 5.35, 9.85, 9.85)^T$.

Nous pouvons démontrer que pour la dynamique de Van der Pol ce polygone a des faces toutes rentrantes (i.e un ensemble sortant vide). Ce polygone est donc en soit un invariant positif (bien que, encore une fois, les ensembles

invariants dans ce patron - le cycle limite et le point fixe répulsif au centre - sont difficiles à décrire, et même par des équations algébrique).

Notons que grâce à la robustesse des blocs isolants, ce polygone reste un bloc isolant pour des μ prenant leur valeur entre 1 et 0.95.

De la même manière, on peut prouver que pour la dynamique Reverse Van der Pol, l'ensemble sortant est tout le bord du patron et que c'est donc un invariant négatif. On peut, en particulier, par la propriété de Wazewski montrer qu'il existe aussi un invariant positif à l'intérieur. En fait, le point fixe répulsif pour la dynamique de Van der Pol devient un point fixe attractif pour le Reverse Van der Pol, l'invariant maximal dans le patron que nous considérons est le cycle limite au bord non algébrique.

RECHERCHE D'INVARIANTS POUR DES SYSTÈMES À COMMUTATION

3.0.1 Contenu du chapitre et travaux connexes

Dans ce chapitre, nous revisitons le problème de la recherche d'invariants contrôlés (viabilité), pour une classe d'inclusions différentielles, ceci, en utilisant une méthode topologique basée sur la propriété de Wazewski.

Des problèmes similaires ont été examinés dans la littérature : par exemple, dans [4, 37, 39, 46, 70], les auteurs calculent un invariant contrôlé contenu dans un ensemble B via un *algorithme itératif*. L'algorithme est initialisé avec B et itérativement enlève les trajectoires qui peuvent sortir en choisissant certaines dynamiques. Si l'algorithme converge vers un point fixe, l'ensemble final est l'invariant maximal contrôlé contenu dans B . En général, l'algorithme ne converge pas, et seule une approximation de l'invariant maximal contrôlé est trouvée, cet ensemble est aussi invariant mais n'est cependant pas maximal.

Une approche alternative est la synthèse de *gardes des transitions* ou le réglage des valeurs des paramètres de *surfaces de commutation* afin de minimiser une fonction intégrale de coûts (voir par exemple [10]).

Dans [24, 29], les auteurs créent un système de transition à partir d'un système dynamique hybride en partitionnant l'espace des phases et en introduisant des transitions entre des partitions qui reflètent les dynamiques et les propriétés d'invariance du système hybride. La relation entre le système hybride et le nouveau système de transition est appelé *bisimulation*, et un contrôleur pour le système original peut être synthétisé à partir de la bisimulation.

Dans [18], les auteurs utilisent des programmes de sommes de carrés de polynômes (SOS) pour synthétiser des lois de commutation qui garantissent que des contraintes de sûreté sur les états sont satisfaites. Ils considèrent des systèmes hybrides avec un nombre fini de modes dans lequel l'évolution de l'état est gouverné par une inclusion différentielle, et ils synthétisent des gardes qui déclenchent les transitions entre les modes. Les gardes sont supposées être des ensembles semi-algébriques, i.e. une garde est un sous ensemble de l'espace d'état (continu) qui satisfait une collection d'inégalités et d'égalités polyno-

miales.

De plusieurs façons la méthode qu'on propose généralise l'approche par le théorème de viabilité qui lui même est une généralisation de l'approche par les fonctions de Lyapunov pour des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires.

Nous donnons un critère calculable basé sur des méthodes SoS/SdP pour une classe d'inclusions différentielles pour avoir un noyau de viabilité à l'intérieur d'une région donnée. Nous utilisons ensuite cette méthode pour prouver l'existence d'ensembles invariants (contrôlés) pour des systèmes à commutation à l'intérieur d'ensembles décrits par un patron polynomial, considérant à la fois des systèmes ayant des commutations dépendant du temps (*time-dependent switching*) et des commutations dépendant de l'espace (*state-dependent switching*).

Une implémentation Matlab a là aussi été réalisée et a permis la démonstration de l'efficacité de cette méthode à travers plusieurs exemples de la littérature.

3.1 INTRODUCTION

Afin de comprendre et de contrôler les systèmes dynamiques gouvernés par des équations différentielles, il est important de savoir situer les régions de l'espace des phases qui contiennent des ensembles invariants, i.e, des ensembles invariants sous l'action du système dynamique.

Une méthode, basée sur la propriété de Wazewski a déjà été présentée dans le chapitre précédent et nous étendrons ici ce travail en considérant le cas de *systèmes à commutation*. Les systèmes à commutation sont des systèmes dynamiques hybrides qui combinent à la fois dynamique discrète et dynamique continue. Ces systèmes sont de plus en plus utilisés pour des applications industrielles telles que pour l'électronique de puissance, ceci, en raison de leur polyvalence et la facilité de leur mise en œuvre.

Rappelons qu'un système à commutation est défini par une famille de dynamiques continues et d'un signal de commutation qui change le mode d'opération du système d'une dynamique à une autre.

Nous utilisons ici des méthodes topologiques afin de garantir la présence d'ensembles invariants à l'intérieur d'ensembles patrons pour différentes classes de signal de commutation : paramétré par le temps

et par l'espace. Commençons d'abord par définir quelques outils de base.

3.2 INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES ET VIABILITÉ

3.2.1 Quelques faits basiques

Considérons l'inclusion différentielle générale :

$$\dot{x} \in F(x) \quad (23)$$

où F est une fonction "multivaluée" de $\mathbb{R}^n$ vers $\wp(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'une fonction $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une *solution* de l'Equation (23) si x est une fonction absolument continue et qui satisfait presque partout t dans $\mathbb{R}$, $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ (voir [5]).

En général, il peut exister plusieurs solutions à une telle inclusion différentielle. Tout au long de ce chapitre nous noterons $S_F(x_0)$ l'ensemble de toutes les solutions (absolument continues) de l'Equation (23).

Ce qui nous permettra de vérifier l'existence d'au moins une trajectoire est la vérification de certaines propriétés sur la fonction multivaluée, on peut faire le parallèle entre la fonction que nous présentons ci-dessous et les fonctions de Lipschitz qui assurent l'existence des solutions pour les équations différentielles ordinaires.

Définition 30 ([5]). *La fonction multivaluée $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Marchaud si F est semi-continue supérieurement (s.c.s.) avec des valeurs compactes convexes et une croissance linéaire (i.e. il existe une constante $c > 0$ telle que $|F(x)| := \sup\{|y| \mid y \in F(x)\} \leq c(1 + |x|)$, pour tout x).*

Nous savons de [5] que lorsque F est une fonction de Marchaud, alors l'inclusion différentielle (23) a (au moins) une solution telle que $x(t_0) = x_0$ (pour tout x_0) et pour tout intervalle de temps suffisamment petit $[t_0, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. L'existence globale, pour tout $t \in \mathbb{R}$ peut être montrée lorsque F "n'explose" pas (i.e. il n'existe pas de t^* fini tel que $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow t^*$).

A présent, comme nous souhaitons étudier l'existence d'invariants pour des systèmes modélisés par des inclusions différentielles, il nous faut établir un formalisme pour cela. En effet, considérer des inclusions différentielles implique le fait d'avoir potentiellement une multitude de trajectoires associées à chaque point initial. Et donc la définition d'ensemble invariant en devient moins claire. Ainsi, nous pourrions au moins considérer les deux définitions suivantes :

- M est ensemble invariant si et seulement si pour chaque $x_0 \in M$ toutes les trajectoires partant de x_0 reste dans M .
- M est ensemble invariant si et seulement si pour chaque $x_0 \in M$ au moins une des trajectoires partant de x_0 reste dans M .

En réalité dans la littérature [5] on trouvera le nom d'*invariant fort* pour la première définition et *invariant faible* pour la deuxième.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous placerons dans le cadre de la *théorie de la Viabilité* [5], qui étudie la dernière définition d'invariant proposée qu'on nomme aussi *noyaux de viabilité*.

Définition 31 ([5]). Soit B un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Une trajectoire de l'inclusion différentielle (23), $t \rightarrow x(t)$, est dite être **via**ble (dans B) lorsque pour tout t , $x(t) \in B$. Le **noyau de viabilité** de l'Equation (23) dans B noté $\text{Viab}_F(B)$ est, l'ensemble des conditions initiales $x_0 \in B$ tels qu'il existe une solution de $S_F(x_0)$ qui restera pour toujours dans B .

Étant donné un ensemble fermé $B \subset \mathbb{R}^n$, nous étudions le problème d'existence de trajectoires viables pour l'inclusion différentielle (23).

Autrement dit : $\text{Viab}_F(B) \neq \emptyset$?

Ou encore, existe-t-il un point x_0 dans B et $x(\cdot) \in S_F(x_0)$ tels que $\forall t \geq 0, x(t) \in B$?

Il est bien connu que ce problème admet un réponse positive pour tous les $x_0 \in B$ et toutes les trajectoires, lorsque le bord de B est une courbe de niveau d'une fonction de Lyapunov associée à l'inclusion différentielle [22]. Mais trouver de telles fonctions de Lyapunov est généralement difficile.

Le *théorème de viabilité* est une légère relaxation de cette approche, afin de prouver qu'il existe une trajectoire qui restera dans B , alors que toutes les trajectoires peuvent ne pas rester à l'intérieur de B .

Notons par $C_B(x)$ le cône contingent de Bouligand en x [5], qui, dans le cas où B est un sous ensemble fermé convexe de $\mathbb{R}^n$ est juste la fermeture du cône tangent de B en x , $C_B(x) = \bigcup_{h>0} \left\{ \frac{b-x}{h} \mid b \in B \right\}$.

Théorème 16 ([5]). Considérons une fonction de Marchaud $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \wp(\mathbb{R}^n)$ et un ensemble fermé convexe $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Supposons que $\forall x \in B$, $F(x) \cap C_B(x) \neq \emptyset$, alors $\text{Viab}_F(B) = B$, i.e. il existe toujours une trajectoire pour l'inclusion différentielle (23) en partant de n'importe quel point de B , qui restera dans B .

L'idée derrière ce théorème est que si pour tout x dans B , il y a toujours un vecteur dans $F(x)$ qui pointe vers l'intérieur de B , alors

en choisissant ce champs de vecteurs nous resterons toujours dans B .

Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette approche en utilisant une caractérisation plus fine de *l'ensemble sortant* pour l'inclusion différentielle F .

Définition 32. Soit F une fonction multivaluée (ou non), alors on notera *l'ensemble sortant de F* :

$$B^-(F) := \{x_0 \in \partial B \mid \forall x \in S_F(x_0) : x \text{ quitte } B \text{ immédiatement}\},$$

Ici, "*immédiatement*" signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a $0 < t < \varepsilon$ tel que $x(t) \notin B$.

On prendra soin de remarquer qu'ici l'ensemble sortant est défini à partir des points sur le bord qui font sortir *toutes* les trajectoires (et non pas que quelques unes) partant de ces derniers.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4 ([14]).

Propriété de Ważewski pour les inclusions différentielles

Soit B un sous ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et F une fonction de Marchaud. Si l'ensemble $B^-(F)$ est fermé et non connexe, alors $\text{Viab}_F(B) \neq \emptyset$.

Ceci nous fournit une généralisation du Théorème 16, en effet, ce dernier est en fait un cas particulier où $B^-(F)$ est vide, donc fermé (et à la fois ouvert) ainsi que non connexe.

On constate aussi et surtout que ce dernier résultat ressemble fortement à la propriété de Ważewski (de plus telle qu'on l'a utilisé dans le chapitre précédent, c'est à dire en considérant uniquement la connexité plutôt que la rétraction). On dira dans la suite que de ce dernier résultat qu'il est la *propriété de Ważewski pour les inclusions différentielles*.

La viabilité étant une généralisation de la propriété d'invariance, elle peut être utilisée pour vérifier certaines propriétés de systèmes dynamiques soumis à de l'aléa, donc des incertitudes (Section 3.6.1) ou des systèmes contrôlés (e.g. Section 24).

Certaines méthodes existent [19, 59] et permettent d'approximer le noyau de viabilité en passant d'abord par une discrétisation (en temps) du système puis en calculant une approximation de l'image de l'ensemble considéré par la fonction multi-valuée, et en gardant

l'intersection entre l'image et l'ensemble. On réitère ce processus jusqu'à tomber sur un point fixe. C'est en quelque sorte une adaptation de ce qui est fait pour la recherche d'invariants pour les dynamiques discrètes [4, 37, 39, 46, 70].

Mais là encore, à l'instar des invariants pour les systèmes différentiels, le noyau de viabilité peut avoir des formes très étranges, ce qui le rend parfois non calculable à l'aide des méthodes existantes. Notre but est donc seulement de prouver l'existence d'un noyau de viabilité dans une certaine région fixée.

Une application de cette méthode, serait par exemple, de savoir qu'un système dynamique paramétré (avec des paramètres incertains dans U) est viable à l'intérieur de B , ce qui signifie que le système est *contrôlable* avec un paramètre dans U .

De même pour un système à commutation arbitraire : si on prouve qu'un noyau de viabilité existe dans B , alors on sait qu'il existe une stratégie de commutation permettant de stabiliser le système, i.e, le système est contrôlable.

Ainsi, dans la suite, nous nous concentrerons sur la dérivation de conditions sur l'inclusion différentielle permettant de montrer la fermeture et la non connexité de l'ensemble sortant. Ceci nous permettra d'appliquer la Proposition 4 afin de prouver l'existence de loi de commutations pour des systèmes à commutation permettant de rester dans la région de l'espace des phases considérée.

3.2.2 Inclusions différentielles polynomiales convexes, dans des ensembles semi-algébriques convexes et compacts

3.2.2.1 Inclusions différentielles polynomiales convexes

Pour le reste du chapitre, on se restreindra au cas où F est donné comme la fermeture du convexifié d'un ensemble fini de champs de vecteurs polynomiaux $f_1, \dots, f_q$:

$$F(x) = \overline{\text{co}}(f_1, \dots, f_q) \quad (24)$$

où $\text{co}(y_1, \dots, y_q)$ est la combinaison convexe de q vecteurs $y_1, \dots, y_q$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\overline{A}$ l'adhérence de A dans $\mathbb{R}^n$.

Cette considération n'est pas faite par hasard, car en réalité nous aimerions prouver l'existence d'invariants pour des systèmes à commutation décrits par plusieurs champs de vecteurs $(f_1, \dots, f_q)$. Et

comme nous allons le voir plus tard approche parfaitement (autant qu'on le souhaite) les solutions du système à commutation associé.

Pour tous tels $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ on écrira $f_\lambda = \sum_{i=1}^q \lambda_i f_i$ de manière à ce que $F(x)$ peut être identifié par l'ensemble des $f_{\lambda(x)}$, où λ est continue.

Ces inclusions différentielles ont des propriétés intéressantes qui permettent notamment d'appliquer les résultats que nous avons récapitulé dans la Section 3.2.1 :

Lemme 3. *Les fonctions F de la forme donnée à l'Equation (24) sont des fonction de Marchaud.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ il existe η_i tels que pour tout y dans la boule ouverte de rayon η_i et de centre x qu'on notera $O(x, \eta_i)$, on a $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Alors pour tout y dans la boule de centre x et de rayon $\min_{i=1, \dots, q} \eta_i$:

$$\begin{aligned}
 \sup_{\substack{f(y) \in F(y), \\ f(x) \in F(x)}} |f(y) - f(x)| &= \sup_{\substack{\alpha_i \text{ s.t. } \sum_i \alpha_i = 1, \\ \beta_i \text{ s.t. } \sum_i \beta_i = 1}} \left| \sum_i \alpha_i f_i(y) - \sum_i \beta_i f_i(x) \right| \\
 &= \sup_{\substack{\alpha_i \text{ s.t. } \sum_i \alpha_i = 1, \\ \beta_i \text{ s.t. } \sum_i \beta_i = 1}} \left| \sum_i \alpha_i f_i(y) - \sum_i \alpha_i f_i(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_i \alpha_i f_i(x) - \sum_i \beta_i f_i(x) \right| \\
 &= \sup_{\substack{\alpha_i \text{ s.t. } \sum_i \alpha_i = 1, \\ \beta_i \text{ s.t. } \sum_i \beta_i = 1}} \left| \sum_i \alpha_i f_i(y) - \sum_i \alpha_i f_i(x) \right| \\
 &\leq \sup_{\alpha_i \text{ s.t. } \sum_i \alpha_i = 1} \sum_i \alpha_i |f_i(y) - f_i(x)| \\
 &< \sup_{\alpha_i \text{ s.t. } \sum_i \alpha_i = 1} \sum_i \alpha_i \varepsilon = \varepsilon
 \end{aligned}$$

d'où $F(y) \subset F(x) + \varepsilon O(0, 1)$ i.e. F est semi-continue supérieurement.

F a de plus, une croissance linéaire car :

$$\begin{aligned}
 \sup\{|y| \mid y \in F(x)\} &\leq \sup_{\lambda_i \text{ s.t. } \sum_i \lambda_i = 1} \sum_i \lambda_i |f_i(x)| \\
 &\leq \max_i |f_i(x)| \\
 &= \max_i |f_i(x) - f_i(0) + f_i(0)| \\
 &\leq \max_i |f_i(x) - f_i(0)| + |f_i(0)| \\
 &\leq \max_i \{k_i |x| + |f_i(0)|\} \\
 &\leq c(1 + |x|)
 \end{aligned}$$

avec $c = \max_i \max(k_i, |f_i(0)|)$. Les deux dernières lignes se justifient par le fait que les f_i sont des fonctions polynomiales et donc en particulier Lipschitzienne (avec des constantes de Lipschitz notées k_i).

De plus par définition, F a pour images des ensembles fermés et convexes. ce qui suffit à prouver que F est bien de fonction de Marchaud. $\square$

3.2.2.2 Ensembles semi-algébriques convexes compacts

On se restreindra ici à prouver la viabilité dans des *patrons* (polynomiales) compacts et convexes $B \subset \mathbb{R}^n$, définis pour certains vecteurs $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, par m inégalités polynomiales :

$$(P) \quad \begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) \leq c_1 \\ \dots \\ p_m(x_1, \dots, x_n) \leq c_m \end{cases}$$

Nous considérerons ici encore, des *patrons minimaux*, on le rappelle, qui sont tels que leur bord ∂B est égal à :

$$\partial B = \bigcup_{i=1}^m \{x \mid p_i(x) = c_i, p_j(x) \leq c_j \ \forall j \neq i\}$$

3.3 VIABILITÉ D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES DANS DES PATRONS CONVEXES

3.3.1 Viabilité : une première approche topologique

Il y a une première façon de caractériser $B^-(F)$ pour des inclusions différentielles de la forme considérée dans cette section, et cela en utilisant de façon assez directe les résultats du chapitre précédent :

Théorème 17. *Considérons l'inclusion différentielle (24). Soit B un patron polynomial minimal défini par un ensemble d'inégalités (P) et notons N_i^j les radicaux d'idéaux différentiels $\sqrt[k]{\langle p_i \rangle}$ le long des champs de vecteurs f_j .*

Si pour chaque face $B_i = \{p_i(x) = c_i, \forall j \neq i, p_j(x) \leq c_j\}$ du patron B l'hypothèse (H_i) ci-dessous est vérifiée :

— *pour tout $x \in B_i$, tout $k \in \{1, \dots, N_i^j - 2\}$, tout $\lambda \in \mathbb{R}^q$, et tout (x, λ) :*

$$\left(\sum_{u=1}^q \lambda_u = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0 \& \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(k)}(p_i)(x) = 0 \right) \\ \implies \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(k+1)}(p_i)(x) \geq 0$$

— *En notant l'ensemble suivant A_i :*

$$\left\{ (x, \lambda) \mid \sum_{u=1}^q \lambda_u = 1, \lambda_u \geq 0, \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(1)}(p_i)(x) = \dots = \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(N_i^j-1)}(p_i)(x) = 0 \right\},$$

$B_i \cap A_i$ est vide.

Alors $B^-(F)$ est fermé et égal à

$$\bigcup_{i=1}^m \bigcap_{\substack{\sum_{u=1}^q \lambda_u = 1 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0}} \{x \in B_i \mid \mathcal{L}_{f_\lambda}(p_i)(x) \geq 0\}$$

Si de plus $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors $\text{Viab}_F(B) \neq \emptyset$.

Démonstration. C'est une application directe du Lemme 13 : en demandant que pour chaque λ , f_λ a un ensemble sortant fermé. $B^-(F)$ est alors fermé comme intersection d'ensembles fermés. La formule de $B^-(F)$ est alors bien-sûr donnée comme l'intersection des ensembles sortants pour les f_λ . $\square$

Notons à présent que (H_i) peut être vérifiée à l'aide d'une relaxation SoS [42] dans l'anneau des polynômes multivariés $\mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_q, x_1, \dots, x_n]$, comme pour le chapitre précédent.

En effet, $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(v)}(p_i)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_q, x_1, \dots, x_n]$, ce qui se montre par récurrence sur v de la manière suivante :

- $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(0)}(p_i) = p_i$ est par définition un polynôme dans $\mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_q, x_1, \dots, x_n]$
- $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(k+1)}(p_i) = \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(1)}(\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(k)}(p_i))$. Par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(k)}(p_i)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_q, x_1, \dots, x_n]$, appelons le g . Maintenant $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(k+1)}(p_i) = \mathcal{L}_{f_\lambda}^{(1)}(g)$ qui est $\langle \nabla g, f_\lambda \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \lambda_j \frac{\partial g}{\partial x_i} f_j$, donc à nouveau un polynôme.

Mais cela serait une manière trop coûteuse de résoudre notre problème. En effet, ce que dit le théorème précédent c'est que $B^-(F)$ est fermé lorsque $B^-(f_\lambda)$ est fermé pour tout λ . Comme le montre l'exemple suivant, c'est une condition bien trop stricte pour pouvoir être appliquée en général.

Exemple 17 (Exemple 2.7 de [67]). *Considérons le système à commutation suivant :*

$$f_1(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x - y^3 \end{pmatrix} \quad f_2(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x - y^3 \end{pmatrix}$$

On pourra voir les champs de vecteurs sur la Figure 16.

Nous considérons alors l'inclusion différentielle dans $\mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \overline{\text{co}}(f_1, f_2)$ et le patron $B = [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ donné par $p_1 = -x$, $p_2 = x$, $p_3 = -y$, $p_4 = y$ et $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.5$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_1}(p_1) &= y & \mathcal{L}_{f_2}(p_1) &= -y \\ \mathcal{L}_{f_1}(p_2) &= -y & \mathcal{L}_{f_2}(p_2) &= y \\ \mathcal{L}_{f_1}(p_3) &= -x + y^3 & \mathcal{L}_{f_2}(p_3) &= x + y^3 \\ \mathcal{L}_{f_1}(p_4) &= x - y^3 & \mathcal{L}_{f_2}(p_4) &= -x - y^3 \end{aligned}$$

Par exemple, pour $p_1(x) = c_1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, nous avons $\mathcal{L}_{f_\lambda}(p_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)y = (1 - 2\lambda_2)y$ qui est nulle pour :

- $y = 0$ ce qui implique $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(2)}(p_1) = \frac{1}{2}(1 - 2\lambda_2)^2$;
- $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ d'où dans ce cas $\mathcal{L}_{f_\lambda}^{(2)}(p_1) = (1 - 2\lambda_2)y^3 = 0$.

Par conséquent, le deuxième critère de (H_i) pour $i = 1$ dans le Théorème 17 n'est pas satisfait. Mais on peut facilement vérifier que la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$ est fonction commune de Lyapunov (faible), et que donc le système à commutation est uniformément stable [67].

Nous montrerons par la suite une méthode topologique plus fine qui puisse prouver l'existence de trajectoires viables dans B .

3.3.2 Viabilité dans un patron à une face

Dans cette section, nous caractérisons encore $B^-(F)$ pour F avec la forme donnée dans l'Equation (23), quand B est défini par une seule face (par exemple, quand B est une ellipse).

Lemme 4.

$$B^-(F) = \bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} B^-(f_\lambda)$$

Par conséquent, si le patron B est défini par un unique polynôme p_1 ,

$$B^-(F) = \bigcap_{i=1}^q B^-(f_i)$$

Démonstration. Avant tout constatons que

$$B^-(F) = \bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} B^-(f_\lambda) \subset \bigcap_{i=1}^q B^-(f_i)$$

Il ne nous reste donc qu'à montrer l'autre inclusion.

Prenons maintenant $x_0 \in \bigcap_{i=1}^q B^-(f_i)$. Ce point appartient forcément au bord de B , défini par l'équation $p_1 = c_1$. Considérons la solution u de l'inclusion différentielle (24) telle que $u(0) = x_0$. Il existe donc des fonctions dépendant du temps $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, q$) tel que $\sum_{j=1}^q \lambda_j = 1$ et $\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(t) f_i(u(t))$.

Dans un petit voisinage autour de o , on peut écrire le développement de Taylor de la fonction $g = p_1 \circ u$:

$$g(t) = c_1 + \mathcal{L}_f^{(1)}(p_1)(x_0)t + \frac{1}{2!} \mathcal{L}_f^{(2)}(p_1)(x_0)t^2 \dots \quad (25)$$

où $f(u(t)) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(t) f_i(u(t))$. Les dérivées de Lie de la formule précédente ne dépendent que de $f(u(0)) = f(x_0)$ et par linéarité du produit scalaire :

$$g(t) = c_1 + \sum_{i=1}^q \lambda_i(0) \mathcal{L}_{f_i}^{(1)}(p_1)(x_0)t + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^q \lambda_i(0) \mathcal{L}_{f_i}^{(2)}(p_1)(x_0)t^2 \dots$$

Mais puisque $x_0 \in B^-(f_i)$ pour tout $i = 1, \dots, q$, la première dérivée non nulle de u le long de f_i est strictement positive, c'est donc aussi le cas pour toute combinaison convexe de ces derniers (avec les coefficients $\lambda_j(0)$). D'où dans un petit voisinage de o , et pour tout temps strictement positif t dans ce voisinage, $g(t) > g(0) = p_1(x_0)$, et donc $u(t)$ est en dehors de B , par minimalité de B .

Il suit que $x_0 \in B^-(F)$. D'où $\bigcap_{i=1}^q B^-(f_i) \subseteq B^-(F)$. Cela implique aussi, que x_0 est sortant pour le champ $\sum_{i=1}^q \lambda_i(0) f_i$. □

Dans le cas d'un patron à une face B , on peut donc raffiner le Théorème 17 au résultat suivant :

Théorème 18. *Considérons l'inclusion différentielle (24). Soit B un patron polynomial minimal convexe et compact défini par l'ensemble des d'inégalités (P) et soit N_1^j l'ordre du radical d'idéal différentiel $\sqrt[N_1^j]{\langle p_1 \rangle}$ le long de f_j .*

Si pour la seule face B_1 du patron B , pour tout $j = 1, \dots, q$ les hypothèses (H_j) suivantes sont vérifiées :

— $\forall k \in \{1, \dots, N_1^j - 2\}$, les ensembles suivants sont vides :

$$\{x \in B_1 \mid \mathcal{L}_{f_i}^{(1)}(p_1)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_j}^{(k)}(p_1)(x) = 0, \forall i \neq j, \mathcal{L}_{f_i}^{(1)}(p_1) \geq 0, \mathcal{L}_{f_j}^{(k+1)}(p_1)(x) < 0\}$$

— les ensembles suivants sont vides :

$$\{x \in B_1 \mid \forall i \neq j, \mathcal{L}_{f_i}^{(1)}(p_1) \geq 0, \mathcal{L}_{f_i}^{(1)}(p_1)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_j}^{(N_1^j-1)}(p_1)(x) = 0\}$$

Alors $B^-(F)$ est fermé et égal à

$$\{x \in B_1 \mid \bigcap_{j=1}^q \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_1)(x) \geq 0\}$$

Si de plus $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors $\text{Viab}_F(K) \neq \emptyset$.

Démonstration. Par le Lemme 13, les conditions (H_j) assurent que les ensembles $B^-(f_j)$ sont fermés dans l'ensemble (fermé) $L_j = \{x \mid \forall k \neq j, \mathcal{L}_{f_k}^{(1)}(p_1) \geq 0\}$ et que

$$B^-(f_j) = \{x \in B_1 \cap L_j \mid \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_1)(x) \geq 0\}$$

Par le Lemme 4, $B^-(F) = B^-(f_1) \cap \dots \cap B^-(f_q)$, par conséquent

$$B^-(F) = \bigcap_{j=1}^q \{x \in B_1 \cap L_j \mid \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_1)(x) \geq 0\} \quad (26)$$

$$= \{x \in B_1 \mid \bigcap_{j=1}^q \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_1)(x) \geq 0\} \quad (27)$$

d'où la formule pour $B^-(F)$.

D'après le Lemme 4 encore, cela implique que $B^-(F)$ est fermé, en tant que intersection finie d'ensembles fermés. Par le Lemme 3, nous savons que F est une fonction de Marchaud. Puisque, B est fermé et convexe, par la Proposition 4 nous savons donc que si $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors $\text{Viab}_F(K) \neq \emptyset$. $\square$

3.3.2.1 Algorithme (A)

Nous pouvons vérifier les conditions du Théorème 18, de la même manière que pour le Théorème 13, c'est à dire en utilisant les sommes de carrés positifs [42] et le Théorème de Stengle du nichtnegativstellensatz, pour des k croissant, allant de 1 à $N_1^j - 2$, et pour chaque champ de vecteurs f_j .

Il nous faut donc déterminer les polynômes α_n ($n = 0, \dots, k$), les sommes de carrés de polynômes $\beta_{S,\mu}$ ($S \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, q\}, \mu \in \{0, 1\}$) et un entier l , tels que :

$$\sum_{n=0}^k \alpha_n \mathcal{L}_{f_j}^{(n)} + \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, q\} \\ \mu \in \{0, 1\}}} \beta_{S,\mu} G_{S,\mu} + \left(\mathcal{L}_{f_j}^{(k+1)} \right)^{2l} = 0 \quad (28)$$

où $G_{S,\mu} = (-\mathcal{L}_{f_j}^{(k+1)})^\mu \prod_{s \in S} \mathcal{L}_{f_s}^{(1)}$ pour tout $S \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, q\}, \mu \in \{0, 1\}$ et la convention que $\mathcal{L}_{f_j}^0(p_1) = c_1 - p_1$.

De manière pratique cela se fait en limitant le degré des polynômes α_n et $\beta_{s,\mu}$ qu'on recherche, et en choisissant des petites valeurs pour l (dans tous nos exemples, on choisira $l = 1$), le problème peut donc être résolu par un programme semi défini positif (SDP). Là encore on peut utiliser le Théorème de positivstellensatz de Putinar qui bien moins coûteux algorithmiquement.

Un exemple d'application du Théorème 18 afin de prouver l'existence d'une trajectoire viable dans un patron à une face (une boule) sera donné dans la Section 3.6.4.

3.3.3 Viabilité pour des patrons généraux

En général, on n'a pas le même type de résultat lorsque le bord de B est défini par plusieurs faces et donc plusieurs polynômes p_i , comme illustré dans l'exemple suivant :

Exemple 18. *Considérons l'Exemple 17. On a :*

— $B^-(f_1)$ égal à

$$[-0.5, 0[\times \{-0.5\} \cup [0, 0.5[\times \{0.5\} \cup \{0.5\} \times [-0.5, 0[\cup \{-0.5\} \times]0, 0.5]$$

— $B^-(f_2)$ égal à

$$[-0.5, 0[\times \{0.5\} \cup]0, 0.5] \times \{-0.5\} \cup \{-0.5\} \times [-0.5, 0[\cup \{0.5\} \times]0, 0.5]$$

D'où :

$$B^-(f_1) \cap B^-(f_2) = \{(-0.5, -0.5), (-0.5, 0.5), (0.5, 0.5), (0.5, -0.5)\}$$

Mais pour chacun des quatre points précédents, il y a toujours un champ de vecteur dans $F(x, y) = \overline{co}(f_1(x, y), f_2(x, y))$ qui pointe strictement vers l'intérieur du patron B .

Par exemple, pour le point $(0.5, 0.5)$, on a :

$$\mathcal{L}_{f_\lambda}(p_2) = 0.5(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \mathcal{L}_{f_\lambda}(p_4) = 0.5(\lambda_1 - \lambda_2)x - \frac{1}{8}$$

Prenons par exemple $\lambda_1 = \frac{9}{16}$, $\lambda_2 = \frac{7}{16}$, les solutions pour $\frac{9}{16}f_1 + \frac{7}{16}f_2$ sont entrantes dans B . On a la même chose pour les trois autres points : ceci est représenté dans la Figure 16.

Il s'en suit que $B^-(f_\lambda)$ est vide pour $\lambda = (\frac{9}{16}, \frac{7}{16})$, d'où $B^-(F)$ est vide (par le Lemme 4), et par conséquent : $B^-(F) \neq B^-(f_1) \cap B^-(f_2)$.

La seule vraie différence entre l'étude menée sur une face et celle menée sur plusieurs faces est celle qui doit être faite à l'intersection des faces. C'est d'ailleurs là où cela a posé problème dans l'exemple précédent.

En effet si l'on considère uniquement l'intérieur d'une face, il n'y a aucun problème à réutiliser le Théorème 18 comme nous le verrons plus tard. Dans la suite de l'étude sur les patrons généraux, nous aurons donc besoin de faire la distinction entre les différentes parties du patron, en particulier :

- l'intérieur des faces,
- et l'intersections des faces.

3.3.3.1 Stratification

La décomposition d'une structure en sous-structures (et l'application récursive de cette même décomposition) est généralement appelée *stratification*. Et c'est ce qu'on va utiliser par la suite pour notre étude.

Soit B un patron polynomial minimal convexe et compact, cet ensemble est un espace qu'on peut appeler "stratifiable"¹.

En effet, on rappelle qu'on note B_i la i -ème face du patron B donnée par

$$B_i = \{x \mid p_i(x) = c_i\} \cap B,$$

et, pour tout multi-indice $\mathbf{k} \in \{(k_1, \dots, k_i) \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq m\}$, $B_{\mathbf{k}}$ la $\mathbf{k}$ -face de B sera donnée par

$$B_{\mathbf{k}} = \{x \mid p_{k_1}(x) = c_{k_1}, \dots, p_{k_i}(x) = c_{k_i}\} \cap B$$

On note $\overset{\circ}{B}_i$ l'intérieur de la i -face, donnée par

$$\overset{\circ}{B}_i = \{x \mid p_i(x) = c_i \ \& \ \forall j \neq i, p_j(x) < c_j\}$$

et pour tout multi-indice $\mathbf{k} \in \{(k_1, \dots, k_i) \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq m\}$, $\overset{\circ}{B}_{\mathbf{k}}$ sera nommé l'intérieur de la $\mathbf{k}$ -face de B et sera donné par

$$\overset{\circ}{B}_{\mathbf{k}} = \{x \mid p_{k_1}(x) = c_{k_1}, \dots, p_{k_i}(x) = c_{k_i} \ \& \ \forall j \notin \mathbf{k}, p_j(x) < c_j\}$$

Bien évidemment ces ensembles peuvent être vides, en particulier à partir d'une certaine taille de multi-indice ces ensembles seront toujours vides. De plus, pour les ensembles qui sont des points (exemple des 8 points extrêmes dans l'exemple présenté ci-dessous), l'ensemble défini ci-dessus ne représente pas formellement (au sens topologique) l'intérieur du point (censé être vide) mais le point lui même.

Pour mieux comprendre ces notations, en voici un exemple concret sur une simple structure cubique.

1. Il est en réalité bien connu que les ensembles semi-algébriques définissent une stratification de Whitney, cependant nous ne ferons pas usage de la théorie correspondante, donc nous n'en parlerons pas afin de garder la présentation la plus simple possible.

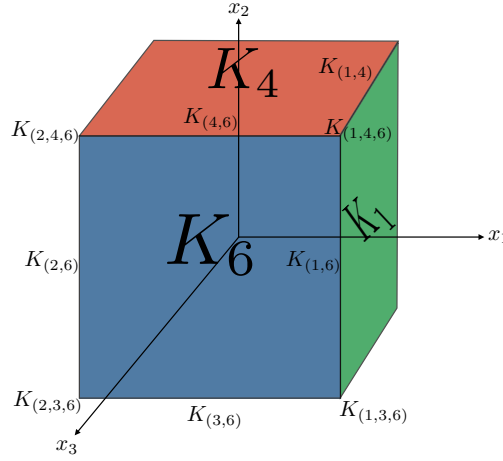


FIGURE 15 – Stratification d'un patron parallélépipède.

Exemple 19. Considérons le patron B dans $\mathbb{R}^3$ donné par $p_1(x) = x_1$, $p_2(x) = -x_1$, $p_3(x) = -x_2$, $p_4(x) = x_2$, $p_5(x) = -x_3$, $p_6(x) = x_3$ et $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 1$.

Géométriquement, B est le cube $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, stratifié en

- 6 faces : $\overset{\circ}{B}_1, \dots, \overset{\circ}{B}_6$,
- 12 arêtes : $\overset{\circ}{B}_{(1,3)}, \overset{\circ}{B}_{(1,4)}, \overset{\circ}{B}_{(1,5)}, \overset{\circ}{B}_{(1,6)}, \overset{\circ}{B}_{(2,3)}, \overset{\circ}{B}_{(2,4)}, \overset{\circ}{B}_{(2,5)}, \overset{\circ}{B}_{(2,6)}, \overset{\circ}{B}_{(3,5)}, \overset{\circ}{B}_{(3,6)}, \overset{\circ}{B}_{(4,5)}, \overset{\circ}{B}_{(4,6)}$.
- 8 points extrêmes : $\overset{\circ}{B}_{(1,3,5)}, \overset{\circ}{B}_{(1,3,6)}, \overset{\circ}{B}_{(2,3,5)}, \overset{\circ}{B}_{(2,3,6)}, \overset{\circ}{B}_{(1,4,5)}, \overset{\circ}{B}_{(1,4,6)}, \overset{\circ}{B}_{(2,4,5)}, \overset{\circ}{B}_{(2,4,6)}$.

comme représenté dans la Figure 15.

On a une caractérisation complète de l'ensemble sortant pour F dans B , qui est en effet plus complexe que celle donnée en Lemme 4.

On note $\mathcal{B}_k^-(F) = B^-(F) \cap \overset{\circ}{B}_k$: l'intersection de $B^-(F)$ avec l'intérieur de la face B_k . On a alors le résultat suivant qui fait la distinction de l'ensemble sortant à l'intérieur des faces et

Proposition 5. Supposons que B est un patron polynomial minimal convexe et compact défini par l'ensemble d'inégalité (P) , et considérons l'inclusion différentielle (23). $B^-(F)$ est défini par ses intersection avec toutes les faces (itérées) de B :

- pour tout $i = 1, \dots, m$,

$$\mathcal{B}_i^-(F) = \bigcap_{j=1}^q \mathcal{B}_i^-(f_j)$$

- pour tout multi-indice $k = (k_1, \dots, k_i)$ de cardinal au moins 2

$$\mathcal{B}_k^-(F) = \bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} \mathcal{B}_k^-(f_\lambda).$$

Démonstration. La majorité de la preuve est la même que le Lemme 4 : seulement elle se décompose en deux parties :

- lorsque x appartient à $\overset{\circ}{B}_i$, on utilise exactement la caractérisation du Lemme 4, puisque localement, l'appartenance à B ne dépend uniquement de la face générée à partir de p_i .
- Pour traiter les points à l'intersection de plusieurs faces, disons, dans $\overset{\circ}{B}_k$ pour le multi-indice k , localement c'est équivalent à considérer le patron B_k . La deuxième condition de la Proposition demande donc à tous les champs de vecteurs f_λ dans l'inclusion différentielle $F = \overline{co}(f_1, \dots, f_q)$ d'être sortant pour être sortant de $B^-(F)$ dans $\overset{\circ}{B}_k$.

□

Voici un exemple d'application de la Proposition précédente :

Exemple 20. Reprenons l'Exemple 18. D'après les calculs des dérivées de Lie faits dans l'Exemple 17, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2^-(f_1) &= \{0.5\} \times [-0.5, 0[\\ \mathcal{B}_2^-(f_2) &= \{0.5\} \times]0, 0.5]\end{aligned}$$

Par la Proposition 5, on a donc :

$$\mathcal{B}_2^-(F) = \mathcal{B}_2^-(f_1) \cap \mathcal{B}_2^-(f_2) = \emptyset \text{ et}$$

$$\mathcal{B}_{(2,4)}^-(F) = \bigcap_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1} \mathcal{B}_{(2,4)}^-(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \emptyset$$

car la paire $(\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{9}{16}, \frac{7}{16})$ trouvée dans l'Exemple 18 fait rentrer dans B par le champ de vecteurs $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ en la face $B_{(2,4)} = (0.5, 0.5)$.

Les autres coins du carré B peuvent être de la même manière, et on en conclut donc que $B^-(F) = \emptyset$. La Figure 16 illustre le champs entrant $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ en $B_{(2,4)}$.

Malheureusement, la formule pour $B^-(F)$ donnée dans la Proposition 5 est encore trop peu commode, au moins pour deux raisons :

- Premièrement, même si la caractérisation de $\mathcal{B}_i^-(F)$ dans le style du chapitre précédent est simple (pour tout $i = 1, \dots, m$), il est difficile de caractériser $\mathcal{B}_k^-(F)$ dès lors que le cardinal de k est plus grand que un.
- Deuxièmement, on doit prouver que $B^-(F)$ est fermé afin de pouvoir appliquer la Proposition 4 et prouver que $Viab_F(K) \neq \emptyset$. La seule caractérisation simple que nous avons est trop faible : si pour tous les multi-indices k , $\mathcal{B}_k^-(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout i, j $\mathcal{B}_i^-(f_j)$ est fermé, alors $B^-(F)$ est fermé.

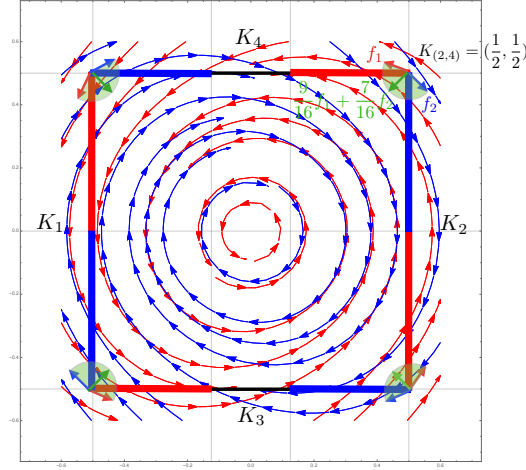


FIGURE 16 – Le champ de vecteurs $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est entrant en $B_{(2,4)}$.

Il nous faut donc un critère simple de fermeture de $B^-(F)$ et c'est ce que nous allons donner par la suite.

L'idée est de tester la fermeture de l'ensemble sortant sur toutes les faces à la manière de la Proposition 5 et de tester lorsque l'intersection des faces est entièrement sortante ou entièrement rentrante. Dans ce cas, on peut facilement tester lorsque l'ensemble sortant est fermé en regardant seulement l'intersection avec la fermeture de chaque face B_i . Puis nous allons utiliser un critère simple pour décider lorsque l'intersection des faces est entièrement sortante ou rentrante grâce aux Lemmes 5 et 6. Finalement, on traduira simplement les conditions sur les dérivées de Lie en terme de positivstellensatz dans le Théorème 19.

La proposition suivante montre formellement ce qui a été dit plus haut.

Pour tous les multi-indices $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_j)$, on écrira $B_{\mathbf{k}}^-(f_i)$ pour l'ensemble sortant sur l'ensemble (pas nécessairement compact) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p_{k_1}(x) \leq c_{k_1}, \dots, p_{k_j}(x) \leq c_{k_j}\}$ sous le flot f_i , intersecté avec $B_{\mathbf{k}}$.

Proposition 6. Une condition suffisante pour que $B^-(F)$ soit fermé est :

- Pour tout $i = 1, \dots, m$, $\bigcap_{j=1}^q B_i^-(f_j)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$
- Pour tout multi-indice $\mathbf{k}$ de cardinalité au moins deux,

$$\bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} B_{\mathbf{k}}^-(f_{\lambda})$$

est soit vide soit égale à toute la face (itérée) $B_{\mathbf{k}}$.

Remarque 3. Un principe important de la preuve est le suivant : les points qui sont dans la fermeture des faces B_i mais pas dans sont intérieur : $x \in B_i \setminus \overset{\circ}{B}_i$ sont dans l'union des faces (itérées) B_k avec $i \in k$, où la cardinalité de k est d'au moins deux.

Démonstration. Prouver que $B^-(F)$ est fermé dans B est équivalent à montrer que $B \setminus B^-(F)$ est ouvert dans B , donc montrer que pour tout x dans B privé de $B^-(F)$, il existe un voisinage autour de x dans B ne s'intersectant pas avec $B^-(F)$. Ce qui veut dire que $B \setminus B^-(F)$ est un ouvert dans B autrement dit sont complémentaire $B^-(F)$ est fermé.

Soit alors $x \in B \setminus B^-(F)$, puisque $B = \cup_i B_i$, il existe i tel que $x \in B_i \setminus B^-(F)$. D'après la Remarque 3 : les points qui sont dans B_i mais pas dans $B_i \cap B^-(F)$ sont :

- soit dans $\overset{\circ}{B}_i$,
- soit dans $B_i \setminus \overset{\circ}{B}_i$ qui sont dans les faces (itérées) B_k avec $i \in k$ où k a une cardinalité au moins égale à 2.

Dans le premier cas, par le premier item de la Proposition 5, ces points ne sont pas dans $\bigcap_{j=1}^q B_i^-(f_j)$ qui est fermé par hypothèse, donc il existe un voisinage ouvert autour de x qui n'intersecte pas $B_i \cap B^-(F)$.

Dans le second cas, à cause du second item de la Proposition 5, de tels points x sont dans B_k mais pas dans

$$\bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} B_k^-(f_\lambda)$$

qui est soit vide soit égal à B_k . Trivialement, cela signifie que nous pouvons trouver un voisinage ouvert autour de x qui n'intersecte pas l'ensemble vide, ou ce cas n'arrive jamais. $\square$

Là encore il nous reste à vérifier la deuxième condition de la Proposition 6 qui paraît difficile, cependant, comme nous allons le voir ci-dessous, cela peut être fait de manière combinatoire, en considérant des cas simples.

Lemme 5. Considérons un point $x \in \overset{\circ}{B}_k$ pour un certain multi-indice $k = (1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq m)$. Supposons qu'il existe j dans $\{1, \dots, i\}$ tel que pour tout u dans $\{1, \dots, q\}$, $x \in B_{k_j}^-(f_u)$.

Alors x est dans l'ensemble sortant de F sur B , et donc en particulier sur la face B_k :

$$x \in \bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} B_k^-(f_\lambda).$$

Démonstration. Par hypothèse, on sait que pour ce $j \in \{1, \dots, i\}$, x est dans l'ensemble sortant pour tous les champs de vecteurs f_u ($u =$

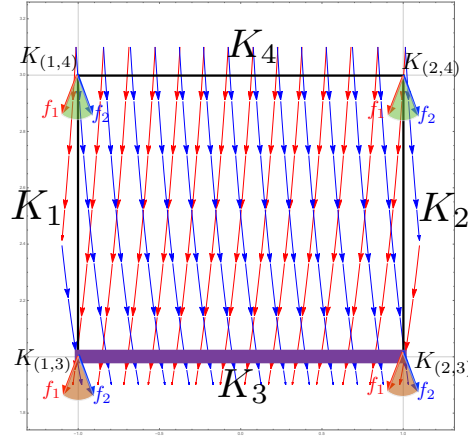


FIGURE 17 – Illustration des Lemmes 5 et 6 sur les Exemples 21, 22

$1, \dots, q$) pour la face patron B_{k_i} . Donc, x est dans l'ensemble sortant dans l'ensemble formée d'une seule face B_{k_i} pour toute combinaison convexe f_λ des champs de vecteurs $f_1, \dots, f_q$. Puisque B est convexe, x est dans l'ensemble sortant de B pour toute combinaison convexe f_λ . $\square$

Exemple 21. *Considérons encore la dynamique de l'Exemple 17, dans le carré $B = [-1, 1] \times [2, 3]$. Un simple calcul utilisant les dérivées de Lie montre que :*

$$\begin{aligned} B_3^-(f_1) &= [-1, 1] \times \{2\}, \\ B_3^-(f_2) &= [-1, 1] \times \{2\} \\ B_j^-(f_i) &= \emptyset \text{ pour tout } i = 1, 2 \text{ } j \neq 3 \end{aligned}$$

La Figure 17 illustre cet exemple, où $B^-(F) = [-1, 1] \times \{2\}$ est représenté par un trait gras.

Puisque

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}_{(1,3)} &= \{(-1, 2)\} \in B_3^-(f_1) \cap B_3^-(f_2), \text{ et} \\ \overset{\circ}{B}_{(2,3)} &= \{(1, 2)\} \in B_3^-(f_1) \cap B_3^-(f_2), \end{aligned}$$

le Lemme 5 s'applique et on sait que :

$$\begin{aligned} B_{(1,3)}^-(F) &= \{(-1, 2)\}, \\ B_{(2,3)}^-(F) &= \{(1, 2)\}. \end{aligned}$$

Pour appliquer la Proposition 6, on a besoin aussi de savoir si les deux autres faces (itérées) $B_{(1,4)} = \{(-1, 3)\}$ et $B_{(2,4)} = \{(1, 3)\}$ sont entrantes ou sortantes. Ceci est l'objectif du Lemme suivant.

On note à partir de maintenant $B^T(F)$, le sous ensemble du bord du patron B pour lequel il existe une solution pour l'inclusion différentielle (Équation 23) qui entre immédiatement dans B . Notons que $B^T(F)$ est dans le complémentaire de $B^-(F)$.

Pour tout multi-indice $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_i)$, de manière similaire à ce que nous avons fait pour $B^-(F)$, nous noterons aussi $B_{\mathbf{k}}^T(f_i)$ pour de tels ensembles rentrant pour le patron $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p_{k_1}(x) \leq c_{k_1}, \dots, p_{k_i}(x) \leq c_{k_i}\}$ sous le flot f_i , intersecté avec $B_{\mathbf{k}}$. On a alors un résultat dual au Lemme 5 :

Lemme 6. *Considérons un point $x \in \overset{\circ}{B}_{\mathbf{k}}$ pour un certain multi-indice $\mathbf{k} = (1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq m)$. Supposons qu'il existe u dans $\{1, \dots, q\}$ tel que pour tout j dans $\{1, \dots, i\}$, $x \in B_{k_j}^T(f_u)$.*

Alors $x \in B^T(F)$, et donc :

$$x \notin B_{\mathbf{k}}^-(F) = \bigcap_{\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1} B_{\mathbf{k}}^-(f_{\lambda}).$$

Démonstration. On peut constater que $B_{k_j}^T(f_u) = B_{k_j}^+(f_u)$ et que donc par hypothèse nous avons

$$x \in B_{\mathbf{k}}^+(f_u) \subset B^+(f_u) \subset B^T(F).$$

□

Exemple 22. Reprenons l'Exemple 21.

Concentrons nous sur la face $B_{(1,4)} = \{(-1, 3)\}$, on voit que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_2}(p_1)(-1, 3) &= -3 < 0, \\ \mathcal{L}_{f_2}(p_4)(-1, 3) &= -26 < 0, \end{aligned}$$

d'où par le Lemme 6, $B_{(1,4)} = (-1, 3) \in B_{(1,4)}^T(F)$ est entrant et $B_{(1,4)}^-(F) = \emptyset$.

De manière similaire, on trouve $B_{(2,4)}^-(F) = \emptyset$, à présent la Proposition 6 peut s'appliquer et on prouve que $B^-(F) = [-1, 1] \times \{2\}$ est fermé.

Cette situation est illustrée sur la Figure 17, où sur les coins, où les flots toujours sortant sont représenté en orange (en $B_{(1,3)}$ et $B_{(2,3)}$), et ceux qui ont une possibilité d'entrer en vert (en $B_{(1,4)}$ et $B_{(2,4)}$).

L'avantage de la Proposition 6 et les Lemmes 5, 6, c'est qu'ils peuvent se traduire simplement en un problème de décision polynomial. On assemblera ainsi ces résultats et leur traduction en problème de décision polynomiale comme à la manière des théorème précédent d'existence de d'ensemble invariant dans le théorème suivant.

Théorème 19.**Conditions pour l'existence d'un noyau de viabilité non vide**

Considérons l'inclusion différentielle de l'Equation 24. Soit B un patron polynomial minimal convexe et compact défini par l'ensemble d'inégalités (P) et soit N_i^j l'ordre du radical d'idéal différentiel $\sqrt[\mathcal{L}]{\langle p_i \rangle}$ le long de f_j . Supposons qu'on ait :

- Pour toutes les faces i , tout $j = 1, \dots, q$, et tout $l = 1, \dots, N_i^j - 2$, on a $(H_{i,j,l})$:

$$(p_i(x) = c_i \ \& \ \forall k \neq i, \ p_k(x) \leq c_k \ \& \ \mathcal{L}_{f_j}(p_i) = 0, \dots, \\ \mathcal{L}_{f_j}^{(l)}(p_i) = 0 \ \& \ \forall v \neq j, \ \mathcal{L}_{f_v}(p_i) \geq 0) \Rightarrow \mathcal{L}_{f_j}^{(l+1)}(p_i)(x) \geq 0$$

et l'ensemble suivant est vide (H_{i,j,N_i^j-1}) :

$$\{x \in B_i \mid \forall k \neq i, \ \mathcal{L}_{f_k}^{(1)}(p_i) \geq 0 \ \& \\ \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_j}^{(N_i^j-1)}(p_i)(x) = 0\}$$

- Pour tout multi-indice k dans $\{1, \dots, m\}$, de cardinalité plus grande ou égale à 2,
- il existe $l = 1, \dots, i$ tel que nous avons $(H_{l,k}^+)$:

$$(p_{k_1}(x) = c_{k_1} \ \& \ \dots \ \& \ p_{k_i}(x) = c_{k_i} \ \& \\ \forall k \neq \{k_1, \dots, k_i\}, \ p_k(x) \leq c_k) \\ \Rightarrow (\mathcal{L}_{f_1}(p_{k_l})(x) > 0 \ \& \ \dots \ \& \ \mathcal{L}_{f_q}(p_{k_l})(x) > 0)$$

- ou il existe $j = 1, \dots, q$ tel que $(H_{j,k}^-)$:

$$(p_{k_1}(x) = c_{k_1} \ \& \ \dots \ \& \ p_{k_i}(x) = c_{k_i} \\ \forall k \neq \{k_1, \dots, k_i\}, \ p_k(x) \leq c_k) \\ \Rightarrow (\mathcal{L}_{f_j}(p_{k_l})(x) < 0 \ \& \ \dots \ \& \ \mathcal{L}_{f_j}(p_{k_i})(x) < 0)$$

Alors $B^-(F)$ est fermé et est égal à $\bigcup_{i=1}^m \{x \in B_i \mid \bigwedge_{j=1}^q \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_i)(x) \geq 0\}$.

De plus, si $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors $\text{Viab}_F(B) \neq \emptyset$.

Pour des raisons de lisibilité, nous ne donnons qu'un résultat ne faisant intervenir dans la plupart du temps que les dérivées premières. Bien sûr ce n'est pas le résultat le plus précis que nous pouvons obtenir, sa généralisation aux dérivées successives de Lie étant presque direct.

On pourra voir le théorème précédent comme une extension du Théorème 13 aux inclusions différentielles de la forme de l'Equa-

tion 24.

Les conditions $(H_{i,j,l})$ assurent qu'à tout point de tangence du flot f_j , sur une face B_i , d'ordre l , qui est aussi dans l'ensemble sortant d'un flot f_v , une certaine $(l+1)$ ème dérivée de Lie est positive, ce qui signifie que le flot f_j à ce point est encore sortant – cela assure la fermeture de l'ensemble sortant sur cette face. Les conditions $(H_{l,k}^+)$ (resp. $(H_{l,k}^-)$) assurent que l'ensemble sortant sur B_k est la face (itérée) entière (resp. vide).

Démonstration. La preuve s'effectue de la manière suivante : nous savons que $B^-(F)$ est fermé sous les conditions de la Proposition 6. Pour le premier item de l'hypothèse de la Proposition 6, on utilise la caractérisation du Théorème 13 du chapitre suivant, les conditions $(H_{i,j,l})$ à chaque ordre l , pour chaque face i et toutes les tangences potentielles des champs de vecteurs f_j , sont alors dégagées.

De plus, en utilisant le Lemme 5 on peut décider lorsque une face B_k est entièrement sortante, cela traduit $(H_{l,k}^+)$: tous les champs de vecteurs de f_1 à f_q sont sortants par rapport à face B_l qui contient B_k .

De même, en utilisant le Lemme 6 on peut décider lorsqu'une face B_k est rentrante, en imposant qu'elle soit complètement dans $B^+(F)$. La condition $(H_{j,k}^-)$ traduit alors le second item de l'hypothèse de la Proposition 6 : si il existe un champ de vecteurs f_j qui est entrant sur toutes les faces de B_{k_1} à B_{k_i} en leurs points d'intersection, alors B_k ne contient aucun sortant pour l'inclusion différentielle F .

Finalement, $B^-(F)$ est donné comme union sur la fermeture des faces B_i d'intersection d'ensembles sortants pour le face générée par p_i pour tous les champs de vecteurs $f_1, \dots, f_q$ puisque, sur les faces itérées B_k de la face B_i , si les ensembles sortants (pour tout $j = 1, \dots, q$) $B_i^-(f_j)$ intersecte B_k alors $B_k^-(f_j)$ est la face entière B_k et par le Lemme 5 ceci est égal à $B_k^-(F)$. $\square$

ALGORITHME (B) De la même manière que pour le Théorème 18, on peut vérifier les conditions du Théorème 19 en utilisant l'optimisation SoS [42] et le nichtnegativstellensatz de Stengle, pour des k ascendant de 1 à $N_i^j - 2$ et j de 1 à q .

Par exemple pour $(H_{i,j})$ ceci se fait comme suit. On détermine les polynômes α_n ($n = 0, \dots, k$), les SoS $\beta_{S_1, S_2, \mu}$ ($S_1 \subseteq \{1, \dots, i-1, i+$

$1, \dots, m\}$, $S_2 \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, q\}$, $\mu \in \{0, 1\}$ et un entier l , tels que

$$\sum_{n=0}^k \alpha_n \mathcal{L}_{f_j}^{(n)} + \sum_{\substack{S_1 \subseteq \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\} \\ S_2 \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, q\}}} \beta_{S_1, S_2, \mu} G_{S_1, S_2, \mu} + \left(\mathcal{L}_{f_j}^{(k+1)} \right)^{2l} = 0 \quad (29)$$

où $G_{S_1, S_2, \mu} = (-\mathcal{L}_{f_j}^{(k+1)})^\mu \prod_{s_1 \in S_1} (c_s - p_s) \prod_{s_2 \in S_2} \mathcal{L}_{f_{s_2}}^{(1)}$ pour tout $S_1 \subseteq \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$, $S_2 \subseteq \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, q\}$ et $\mu \in \{0, 1\}$ avec la convention que $\mathcal{L}_{f_j}^0(p_i) = c_i - p_i$. Cela peut une fois de plus se tester par un programme semi-défini positif.

En pratique, on utilise généralement une condition suffisante $(H_{i,j})$, qui implique tous les $(H_{i,j,l})$:

$$(p_i(x) = c_i \ \& \ \forall k \neq i, \ p_k(x) \leq c_k \ \& \ \mathcal{L}_{f_j}(p_i) = 0 \ \& \ \forall l \neq j, \ \mathcal{L}_{f_l}(p_i) \geq 0) \implies \mathcal{L}_{f_j}^{(2)}(p_i)(x) > 0$$

et qui peut être vérifiée bien plus rapidement en utilisant le positivstellensatz de Putinar.

Remarque 4. Même si en pratique ce n'est pas ce qu'il y a de plus efficace : lorsque les conditions $(H_{l,k}^+)$ ou $(H_{l,k}^-)$ ne sont pas satisfaites, on peut encore utiliser la caractérisation de la Proposition 6 traduite comme dans le Théorème 17, en un problème de décision polynomial sur les variables (x, λ) . On illustrera cela dans l'Exemple 24.

Dans la section suivante, nous allons expliquer comment le Théorème 19 peut être appliqué pour prouver l'existence de solutions viables pour des systèmes à commutations où le signal de commutation pourra dépendre du temps (Section 3.4) ou de l'espace (Section 3.5).

3.4 VIABILITÉ ET INVARIANTS DE SYSTÈMES À COMMUTATION DÉPENDANT DU TEMPS

Rappelons d'abord quelques notions liées aux *systèmes à commutation dépendant du temps* (voir, e.g., [43]). On considérera le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x) \quad (30)$$

Où les f_i , $i \in Q = \{1, \dots, q\}$ sont une famille de champs de vecteurs polynomiaux (donc localement Lipschitziens). On appellera l'ensemble

Q les *modes* et σ le signal de commutation (ne dépendant que du temps).

Soit G une fonction multi-valuée définie sur tous les points x de $\mathbb{R}^n$ par $G(x) = \{f_1(x), \dots, f_q(x)\}$. Cette fonction prend ses valeurs dans un ensemble fermé et est localement-Lipschitzienne, donc d'après [5], l'inclusion différentielle correspondante

$$\dot{x} \in G(x) \quad (31)$$

a des solutions sur un intervalle de temps fini. Rappelons que les solutions d'une telle inclusion différentielle sont les fonctions absolument continues qui satisfont $\dot{x}(t) \in G(x(t))$ presque partout. De telles fonctions définissent les trajectoires d'un système à commutation dépendant du temps avec q modes $f_1, \dots, f_q$.

Une manière classique d'étudier le système à commutation (31) est de considérer à sa place l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$ où F est défini par (24).

En effet, cela provient en grande partie du théorème de Filippov-Ważewski que nous rappelons ci-dessous, qui est en fait une généralisation du contrôle bang-bang pour les équations différentielles contrôlés. Et qui établit que toutes les solutions de l'Equation (24) peuvent être approximées par les solutions de l'Equation (31) avec la même valeur initiale, au moins dans un intervalle de temps compact, et sous de simples hypothèses.

Théorème 20 (Filippov-Ważewski, [5]). *Soit F une fonction Lipschitzienne multivaluée de $O(x_0, r)$, la boule ouverte centrée en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r . Soit $x : [-T, T] \rightarrow O(x_0, r)$ une solution de l'inclusion différentielle :*

$$\dot{x}(t) \in \overline{\text{co}}(G(x(t)))$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$ et qui pour tout $t \in [-T, T]$, $x(t) \in \mathring{B}(x_0, r)$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y : [-T, T] \rightarrow O(x_0, r)$ une solution de

$$\dot{y}(t) \in G(y(t))$$

avec la condition initiale $y(0) = x_0$, telle que :

$$\forall t \in [-T, T], \|y(t) - x(t)\|_1 \leq \varepsilon.$$

Cependant nous allons en fait avoir besoin d'un peu plus que ce théorème classique si nous souhaitons utiliser les résultats des sections précédentes à des systèmes à commutations dépendant du

temps. En effet, ce dernier résultat bien que très utile n'est pas adapté à des horizons de temps infinis.

Des moyens d'étendre le théorème précédent à des horizons de temps infinis existent, et cela en gardant un contrôle sur les trajectoires du système à commutation, par rapport aux trajectoires de l'inclusion différentielle correspondante, au détriment d'avoir éventuellement une légère perturbation de la condition initiale [36].

On se restreint à la version à "horizon infini" de Filippov-Ważewski, où nous étudions l'inclusion différentielle $F = \overline{\text{co}}(f_1, \dots, f_q)$ sur $\mathbb{R}^n$, qui est autonome (qui ne dépend pas du temps).

Dans ce qui suit, on notera par $O(x, R)$ la boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ de centre x et de rayon R (distance usuelle euclidienne), et d_H la distance d'Hausdorff.

Théorème 21. [36] Soit $0 < T \leq \infty$. Supposons que la fonction multivaluée $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \wp(\mathbb{R}^n)$ est mesurable borélienne sur les sous ensembles de $\mathbb{R}^n$. Supposons aussi que pour tout $R > 0$ il existe $k_R \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\xi, \eta \in O(0, R)$,

$$d_H(G(\xi), G(\eta)) \leq k_R |\xi - \eta|$$

et qu'il existe $\alpha_R \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $\xi \in O(0, R)$,

$$\sup\{|\zeta| : \zeta \in G(\xi)\} \leq \alpha_R$$

Fixons $\xi \in X$ et soit $z \in [0, T) \rightarrow X$ une solution de $\dot{x} \in \overline{\text{co}}(G(x))$, $x(0) = \xi$. Soit $r = [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant $r(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Alors il existe $\eta^0 \in O(\xi, r(0))$ et une solution $x = [0, T) \rightarrow X$ de $\dot{x} \in G(x)$, $x(0) = \eta^0$ qui satisfait

$$|z(t) - x(t)| \leq r(t) \quad \forall t \in [0, T)$$

D'après le lemme suivant nous considérons bien un système qui rentre dans le cadre du Théorème précédent.

Lemme 7. Le système à commutation (31) satisfait les hypothèses du Théorème 21.

Démonstration. Premièrement G est mesurable parce que c'est une fonction continue presque partout dans $\mathbb{R}^n$ (discontinue seulement au moment des commutations). Puisque les f_i sont polynomiales, elle sont en particulier Lipschitziennes. Si on note k_i les constantes de Lipschitz respectives des fonctions f_i on sait que :

$$d_H(G(\xi), G(\eta)) \leq \max_{i=1, \dots, q} \{k_i\} |\xi - \eta|$$

Maintenant pour $\forall R > 0$ et chaque $\eta \in O(0, R)$:

$$\begin{aligned}
 \sup\{|\zeta| : \zeta \in G(\xi)\} &= \max_{i=1, \dots, q} |f_i(\xi)| \\
 &\leq \max_{i=1, \dots, q} |f_i(\xi) - f_i(0)| + |f_i(0)| \\
 &\leq \max_{i=1, \dots, q} \{k_i |\xi| + |f_i(0)|\} \\
 &\leq \max_{i=1, \dots, q} \{k_i R + |f_i(0)|\}
 \end{aligned}$$

□

Grâce au résultat précédent, nous sommes maintenant en position d'utiliser le Théorème 21 pour l'inclusion différentielle $\overline{co}(f_1, \dots, f_q)$.

Théorème 22.

Invariants pour des systèmes à commutation dépendant du temps

Considérons le système à commutation dépendant du temps de l'Equation (31). Soit B un patron polynomial minimal compact défini par l'ensemble d'inégalité (P) et soit N_i^1 l'ordre de radical différentiel d'idéal $\sqrt[p_i]{\langle p_i \rangle}$ le long de f_j .

Sous les mêmes conditions que le Théorème 19, $B^-(F)$ est fermé et égal à

$$\bigcup_{i=1}^m \{x \in B_i \mid \bigwedge_{j=1}^q \mathcal{L}_{f_j}^{(1)}(p_i)(x) \geq 0\}$$

Si de plus $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors pour tout ensemble ouvert $\hat{B}$ strictement contenant B , $\text{Viab}_G(\hat{B}) \neq \emptyset$, i.e. : il existe une solution viable de (31) dans $\hat{B}$.

Démonstration. Par le Théorème 19 nous savons qu'il existe au moins une trajectoire δ de $\dot{x} \in \overline{co}(G(x))$ inclus dans B . Par le Lemme 7 et le Théorème 21 nous savons que pour tout $r > 0$ il existe une trajectoire δ_r de $\dot{x} \in G(x)$ d'une distance au plus r de δ . Soit donc $\hat{B}$ n'importe quel ouvert contenant strictement B , par compacité de B , il existe $r > 0$ tel que $\bigcup_{x \in B} O(x, r) \subseteq \hat{B}$, d'où $\delta_r \subseteq \hat{B}$ et $\text{Viab}_G(\hat{B}) \neq \emptyset$. □

Exemple 23. Considérons une fois de plus le système à commutation défini par les champs de vecteurs de l'Exemple 17. De l'Exemple 21, nous savons que le patron $B = [-1, 1] \times [2, 3]$, $B^-(F) = [-1, 1] \times \{2\}$. Mais cet ensemble sortant est connexe, et le Théorème 22 ne peut s'appliquer.

Il est en fait clair qu'il n'y a pas de signal permettant de stabiliser F dans B : toute trajectoire infinie du flot convexifié entre f_1 et f_2 soit ne s'intersecte pas avec B , soit traverse B (i.e., entre dans B puis ressort), comme on peut

le voir dans la Figure 17.

Considérons à présent le même système, mais dans l'ensemble carré $B = [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. On sait de l'Exemple 20 que $B^-(F) = \emptyset$ et que le Théorème 22 s'applique.

On peut donc en conclure qu'il existe un signal de commutation dépendant du temps qui stabilise F à l'intérieur d'un carré e.g.

$$B_\epsilon =]-0.5 - \epsilon, 0.5 + \epsilon[\times]-0.5 - \epsilon, 0.5 + \epsilon[$$

($\epsilon > 0$), en choisissant de manière appropriée f_1 ou f_2 pendant un certain temps.

En réalité, on sait qu'il existe un signal trivial : les deux systèmes f_1 et f_2 se stabilisent dans B (c'est clair à partir de la Figure 16). Notons cependant que le critère topologique donné dans la section précédente est trop faible pour conclure, puisque les deux ensembles sortants $B^-(f_1)$ et $B^-(f_2)$ ne sont pas fermés.

Dans la section suivante nous allons donner un critère d'existence d'invariants pour des systèmes à commutation dépendant de l'espace.

3.5 VIABILITÉ ET INVARIANTS DE SYSTÈMES À COMMUTATION DÉPENDANT DE L'ÉTAT

Très souvent les systèmes à commutation ne dépendent pas seulement du temps, mais aussi de l'état du système (voir [43]).

Supposons que nous avons une partition de $\mathbb{R}^n$ qui sont un nombre fini ou infini de régions de fonctionnement définies par le biais d'une famille de surfaces de commutation ou gardes. Un système à commutation dépendant de l'état est défini par ces régions de fonctionnement, et dans l'intérieur de chacune de ces régions un système dynamique continu est appliqué. Lorsque la trajectoire d'un système rencontre une surface de commutation, l'état continu change de mode.

Par simplicité, nous supposons à partir de maintenant qu'il y a uniquement deux modes et une surface de commutation. La généralisation se fait aisément.

Considérons un système à commutation dépendant de l'espace, décrit par une surface de commutation $\mathcal{C}^1$ qu'on nommera $\mathcal{S}$, donnée par l'équation $s(x) = 0$ séparant $\mathbb{R}^n$ en deux composantes connexes $\mathcal{S}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) > 0\}$ et $\mathcal{S}_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) < 0\}$, et deux sous-

systèmes $\dot{x} = f_i(x)$, $i = +, -$, chacun s'applique sur une composante de $\mathcal{S}$ comme suit :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ f_-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Nous nous appuyons sur la définition de Filippov d'une solution à de tels systèmes :

Définition 33. [43] Pour un système à commutation $\mathcal{H}$ donné, défini par l'Equation 32, une fonction $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de $\mathcal{H}$ si elle est absolument continue et satisfait l'inclusion différentielle $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où F est une fonction multivaluée définie comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} \{f_-(x)\} & \text{si } x \in \mathcal{S}_- \\ \{f_+(x)\} & \text{si } x \in \mathcal{S}_+ \\ \overline{\text{co}}\{f_+(x), f_-(x)\} & \text{si } x \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Comme pour le Lemme 3, la fonction F de la Définition 33 est une fonction de Marchaud Lipschitzienne, donc l'inclusion différentielle qu'elle définit admet des solutions sur un intervalle de temps fini (voir [21], Chapitre 2).

On applique encore le Théorème 21 et obtenons un théorème similaire au Théorème 22 :

Le but de cette section étant de donner des conditions nécessaires à l'existence d'un ensemble invariant dans le patron B pour ce système.

Premièrement, observons que :

Lemme 8. Soit B_i la face d'un patron B fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$, alors :

(1) Si la surface $\mathcal{S}$ n'intersecte aucune k -face (avec $|k| \geq 2$) telle que $i \in k$ alors :

$$B_i^-(F) = \{B_i^-(f_+) \cap \{s < 0\}\} \cup \{B_i^-(f_-) \cap \{s > 0\}\} \\ \cup \{B_i^-(f_+) \cap B_i^-(f_-) \cap \{s = 0\}\}$$

(2) Sinon, soit k_s la plus grande k -face au sens de l'inclusion (avec $|k| \geq 2$) telle que $i \in k$ qui s'intersecte avec $\mathcal{S}$ alors :

$$B_i^-(F) = \{B_i^-(f_+) \cap \{s < 0\}\} \cup \{B_i^-(f_-) \cap \{s > 0\}\} \\ \cup \bigcap_{0 \leq \lambda \leq 1} \{B_{k_s}^-(\lambda f_+ + (1 - \lambda)f_-) \cap \{s = 0\}\}$$

Démonstration. Observons que la surface $\{s = 0\}$ sépare le bord du patron en deux parties $\partial B \cap \{s < 0\}$ et $\partial B \cap \{s > 0\}$ où la solution du système à commutation existe sur chacune de ses parties, est bien définie dans le sens classique et est unique. On constate de plus que l'ensemble sortant est y est respectivement égal à $\{B^-(f_+) \cap \{s < 0\}\}$

et $\{B^-(f_-) \cap \{s > 0\}\}$.

Pour le reste, on peut remarquer que

$$B_i \cap \{s = 0\} = \begin{cases} \{B_i^-(f_+) \cap B_i^-(f_-) \cap \{s = 0\}\} & \text{dans le cas (1)} \\ \bigcap_{0 \leq \lambda \leq 1} \{B_k^-(\lambda f_+ + (1 - \lambda)f_-) \cap \{s = 0\}\} & \text{dans le cas (2)} \end{cases}$$

Puisqu'on considère que s est un polynôme : $B' = B \cap \{s \leq 0\} \cap \{-s \leq 0\}$, peut être vue comme un nouveau patron, qui est donc défini par au moins trois faces. On sait que sur ce nouvel ensemble, la dynamique est définie par l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in \overline{co}\{f_+(x), f_-(x)\}$$

La conclusion suit de la caractérisation de l'ensemble sortant donnée par le Lemme 4 appliqué à ce nouveau patron B' et à l'inclusion différentielle $\dot{x} \in \overline{co}\{f_+(x), f_-(x)\}$. $\square$

On a donc en particulier le résultat suivant qui découle immédiatement du Lemme précédent :

Proposition 7. *Une condition suffisante pour que $B^-(F)$ soit fermé est :*

- Pour tout $i = 1, \dots, m$: $B_i^-(f_+) \cap \{s > 0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$,
- Pour tout $i = 1, \dots, m$: $B_i^-(f_-) \cap \{s < 0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$,
- (1) Pour tout $i = 1, \dots, m$: $B_i^-(f_+) \cap B_i^-(f_-) \cap \{s = 0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$
- (2) Pour tout multi-indice k dans $\{1, \dots, m\}$ de cardinalité au moins deux,

$$\bigcap_{0 \leq \lambda \leq 1} B_k^-(\lambda f_+ + (1 - \lambda)f_-) \cap \{s = 0\}$$

est soit vide soit égale à toute la face (itérée) B'_k .

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Lemme 8 et d'invoquer le fait qu'une union finie de fermés est un fermé. $\square$

Étudions d'un peu plus près ce résultat. Remarquons premièrement que c'est une condition suffisante et non nécessaire. En effet il est simple de donner un contre-exemple (en "emboîtant" les différentes parties de l'ensemble sortant pour en faire un fermé). Considérons par exemple B comme étant le carré de rayon un, avec $s = y$, c'est à dire que $\mathcal{S}$ représente l'axe (des abscisses) $y = 0$. Supposons en outre que

- $B^-(f_+) \cap \{s > 0\}$ est égal à $\{-1\} \times]0, 1]$
- $B^-(f_-) \cap \{s < 0\}$ est égal à $\{-1\} \times [-1, 0[$
- $B^-(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}$ est égal à $(-1, 0)$

donc $B^-(F) = \{-1\} \times [-1, 1]$ est fermé.

On pourrait croire que la fermeture des ensembles sortants $B^-(f_+)$ et $B^-(f_-)$ dans respectivement $\{s \geq 0\}$ et $\{s \leq 0\}$ est suffisante à

montrer que $B^-(F)$ est fermé. Cependant ce n'est pas vrai, en effet là encore on peut trouver un contre-exemple. Reprenons par exemple le carré de rayon 1, avec $s = y$, et cette fois-ci :

- $B^-(f_+) \cap \{s \geq 0\}$ est égal à $\{-1\} \times [0, 1]$
- $B^-(f_-) \cap \{s \leq 0\}$ est égal à $\{1\} \times [0, 1]$
- $B^-(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\} = \emptyset$ est vide

donc $B^-(F) = \{-1\} \times]0, 1] \cup \{1\} \times]0, 1]$ n'est pas fermé.

On remarque aussi que la Proposition 7 décompose l'ensemble sortant $B^-(F)$ en trois composantes connexes répartis respectivement dans les ensembles $\{s < 0\}$, $\{s > 0\}$ et $\{s = 0\}$. En effet les parties de l'ensemble sortant (si elles existent) qui sont dans les ouverts $\{s < 0\}$ et $\{s > 0\}$ sont (strictement) inclus dans ces ensembles puisque $B_i^-(f_+) \cap \{s > 0\}$ et $B_i^-(f_-) \cap \{s < 0\}$ sont supposés fermés dans des ouverts (non connexes) et ne permettent donc pas d'intersection entre les trois composantes de l'ensemble sortant.

Ci-dessous nous donnons un résultat permettant de prouver à l'aide de la Proposition précédente l'existence d'un invariant pour les systèmes à commutation. On réutilisera de nouveau le patron $B' = B \cap \{s \leq 0\} \cap \{-s \leq 0\}$ où le système est décrit par l'inclusion différentielle $\dot{x} \in \overline{\text{co}}\{f_+(x), f_-(x)\}$ et où il est donc possible de faire appel aux résultats précédents, et cela en particulier pour montrer la fermeture de l'ensemble sortant sur ce nouveau patron.

Théorème 23.

Invariants pour des systèmes à commutation dépendant de l'état

Considérons un système à commutation dépendant de l'état défini par l'Equation (32). Soit B un patron polynomial compact défini par un ensemble d'inégalités (P) , et soient N_i^+ (resp. N_i^-) l'ordre du radical d'idéal différentiel $\sqrt[\ell]{\langle p_i \rangle}$ le long de f_+ (resp. f_-).

Sous les conditions suivantes :

- (1) Pour toutes les faces $i = 1, \dots, m$ et tout $l = 1, \dots, N_i^+ - 2$, on a $(H_{i,l,+})$:

$$(p_i(x) = c_i \ \& \ \forall k \neq i, p_k(x) \leq c_k \ \& \ s > 0, \ \& \ \mathcal{L}_{f_+}(p_i) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_+}^{(l)}(p_i) = 0) \Rightarrow \mathcal{L}_{f_+}^{(l+1)}(p_i)(x) \geq 0$$

et l'ensemble suivant est vide $(H_{i,+})$:

$$\{x \in B_i \mid s > 0 \ \& \ \mathcal{L}_{f_+}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_+}^{(N_i^+-1)}(p_i)(x) = 0\}$$

(2) Pour toutes les faces $i = 1, \dots, m$ et tout $l = 1, \dots, N_i^- - 2$, on a $(H_{i,l,-})$:

$$(p_i(x) = c_i \ \& \ \forall k \neq i, \ p_k(x) \leq c_k \ \& \ s < 0, \ \& \ \mathcal{L}_{f_-}(p_i) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_-}^{(l)}(p_i) = 0) \Rightarrow \mathcal{L}_{f_-}^{(l+1)}(p_i)(x) \geq 0$$

et l'ensemble suivant est vide $(H_{i,-})$:

$$\{x \in B_i \mid s > 0 \ \& \ \mathcal{L}_{f_-}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_-}^{(N_i^- - 1)}(p_i)(x) = 0\}$$

(3) les hypothèses du Théorème 19 sont satisfaites sur $B \cap \{s = 0\}$.

$B^-(F)$ est fermé.

Si de plus $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors $\text{Viab}_F(\hat{B}) \neq \emptyset$ (où $\hat{B}$ est n'importe quel ouvert contenant strictement B), i.e. il existe un signal de commutation dépendant de l'espace qui rend une solution viable (32) dans $\hat{B}$.

Démonstration. D'après le Théorème 13 le premier item montre la fermeture des ensembles $B_i^-(f_+) \cap \{s > 0\}$, et le deuxième montre la fermeture des $B_i^-(f_-) \cap \{s < 0\}$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Le dernier item quant à lui, par le Théorème 22 prouve que $B^-(\overline{\text{co}}\{f_+(x), f_-(x)\})$ est fermé dans $B \cap \{s = 0\}$. Ainsi d'après la Proposition précédente $B^-(F)$ est fermé. $\square$

Bien sûr là encore nous pouvons utiliser les Lemmes 5 et 6 ce qui permet d'obtenir une preuve plus souple de l'hypothèse (3) du Théorème précédent. Cependant les hypothèses (1) et (2) sont plus difficiles que nos hypothèses habituelles, cela à cause des termes $s > 0$ et $s < 0$ dans les ensembles dont il faut vérifier la vacuité. Mais si la vérification est toujours possible via nichtnegativstellensatz de Stengle, cela ne nous permet plus d'utiliser le positivstellensatz de Putinar, algorithmiquement cela est donc plus difficile à vérifier.

Pour palier ce problème de complexité, nous présentons ci-dessous, un autre style de résultat prouvant la fermeture de l'ensemble sortant, ce dernier fait appel en particulier à l'ensemble rentrant qu'on note B^+ et ses hypothèses sont algorithmiquement moins difficiles à vérifier.

Lemme 9. Supposons que S ne s'intersecte pas avec les intersections de faces B_k . Supposons de plus que $B^-(f_+)$ et $B^-(f_-)$ sont fermés et que $\{s = 0\} \cap \partial B \subset (B^-(f_+) \cap B^-(f_-)) \cup (B^+(f_+) \cap B^+(f_-))$ alors $B^-(F)$ est fermé.

Démonstration. Avant tout, remarquons que :

$$\begin{aligned} \{s = 0\} \cap \partial B &\subset (B^-(f_+) \cap B^-(f_-)) \cup (B^+(f_+) \cap B^+(f_-)) \\ &\iff \\ \{s = 0\} \cap (B^-(f_+) \cap B^+(f_-)) &= \emptyset \text{ et } \{s = 0\} \cap (B^+(f_+) \cap B^-(f_-)) = \emptyset \\ &\text{de plus} \\ \{s = 0\} \cap (B^-(f_+) \cap B^0(f_-)) &= \emptyset \text{ et } \{s = 0\} \cap (B^0(f_+) \cap B^-(f_-)) = \emptyset \end{aligned}$$

Dons d'après les hypothèses :

$$\begin{aligned} B^-(f_+) \cap \{s \leq 0\} &= (B^-(f_+) \cap \{s < 0\}) \cup (B^-(f_+) \cap \{s = 0\}) \\ &= (B^-(f_+) \cap \{s < 0\}) \\ &\cup (B^-(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &\cup (B^-(f_+) \cap B^+(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &\cup (B^-(f_+) \cap B^0(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &= (B^-(f_+) \cap \{s < 0\}) \\ &\cup (B^-(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^-(f_-) \cap \{s \geq 0\} &= (B^-(f_-) \cap \{s > 0\}) \\ &\cup (B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &= (B^-(f_-) \cap \{s > 0\}) \\ &\cup (B^+(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &\cup (B^-(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &\cup (B^0(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \\ &= (B^-(f_-) \cap \{s > 0\}) \\ &\cup (B^-(f_+) \cap B^-(f_-) \cap \{s = 0\}) \end{aligned}$$

ce qui implique $B^-(F) = (B^-(f_+) \cap \{s \leq 0\}) \cup (B^-(f_-) \cap \{s \geq 0\})$ or, puisque $B^-(f_+)$ et $B^-(f_-)$ sont fermés, alors $B^-(F)$ l'est aussi d'après le Lemme 8. $\square$

L'avantage de ce dernier résultat, c'est qu'il ne lui faut pour être appliqué que la fermeture de deux ensembles ainsi qu'une troisième vérification :

$$\{s = 0\} \cap \partial B \subset (B^-(f_+) \cap B^-(f_-)) \cup (B^+(f_+) \cap B^+(f_-)) \quad (33)$$

qui comme nous le verrons dans le Théorème suivant peut se faire facilement.

Remarquons tout de même que sous les conditions du Lemme 9 et lorsque $B^-(f_+) \cap B^-(f_-)$ est connexe, on ne peut pas trouver de surface S (ne s'intersectant pas aux intersections des faces du patron)

telle que $B^-(F)$ ne soit pas connexe. Voici une illustration afin de mieux le visualiser :

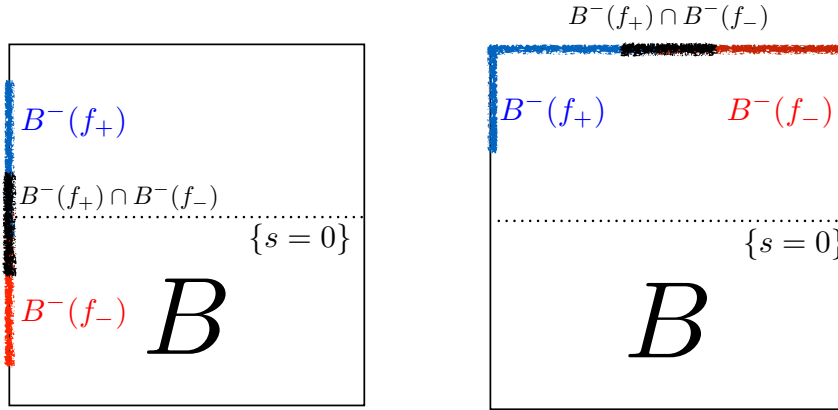


FIGURE 18 – Illustration du fait qu'on ne peut pas trouver de surface S (ne s'intersectant pas aux intersections des faces du patron) telle que $B^-(F)$ ne soit pas connexe lorsque $B^-(f_+) \cap B^-(f_-)$ l'est. Dans les deux cas représentés $B^-(F)$ est l'union des parties rouges ($B^-(f_-)$), bleues ($B^-(f_+)$) et noires ($B^-(f_-) \cap B^-(f_+)$).

Ce résultat nous dit que si les deux flots ont des ensembles sortants fermés qu'il est possible de séparer en deux en passant par l'intérieur des faces alors il existe un invariant dans $\hat{B}$. C'est d'ailleurs ce qui est assez intuitif et naturel finalement, c'est à dire placer la séparatrice de manière à ce que les flots aient des directions opposées.

Ci-dessous on présente le Théorème qui montre la manière d'utiliser algébriquement le résultat précédent.

Théorème 24.

Invariants pour des systèmes à commutation dépendant de l'état (2)

Considérons un système à commutation dépendant de l'état défini par l'Equation (32). Soit B un patron polynomial compact défini par un ensemble d'inégalités (P) , et soient N_i^+ (resp. N_i^-) l'ordre du radical d'idéal différentiel $\sqrt[p_i]{p_i}$ le long de f_+ (resp. f_-).

Sous les conditions suivantes :

(1) Pour toutes les faces $i = 1, \dots, m$ et tout $l = 1, \dots, N_i^+ - 2$, on a $(H_{i,l,+})$:

$$(p_i(x) = c_i \ \& \ \forall k \neq i, \ p_k(x) \leq c_k \ \& \ \mathcal{L}_{f_+}(p_i) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_+}^{(l)}(p_i) = 0) \Rightarrow \mathcal{L}_{f_+}^{(l+1)}(p_i)(x) \geq 0$$

et l'ensemble suivant est vide $(H_{i,+})$:

$$\{x \in B_i \mid \mathcal{L}_{f_+}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_+}^{(N_i^+-1)}(p_i)(x) = 0\}$$

(2) Pour toutes les faces $i = 1, \dots, m$ et tout $l = 1, \dots, N_i^- - 2$, on a $(H_{i,l,-})$:

$$(p_i(x) = c_i \ \& \ \forall k \neq i, \ p_k(x) \leq c_k \ \& \ \mathcal{L}_{f_-}(p_i) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_-}^{(l)}(p_i) = 0) \Rightarrow \mathcal{L}_{f_-}^{(l+1)}(p_i)(x) \geq 0$$

et l'ensemble suivant est vide $(H_{i,-})$:

$$\{x \in B_i \mid \mathcal{L}_{f_-}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_-}^{(N_i^--1)}(p_i)(x) = 0\}$$

(3) Pour toutes les $i = 1, \dots, m$, les ensembles suivants sont vides :

$$\begin{aligned} \{s = 0, \mathcal{L}_{f_-}(p_i)(x) \geq 0, \mathcal{L}_{f_+}(p_i)(x) \leq 0\} \\ \{s = 0, \mathcal{L}_{f_-}(p_i)(x) \leq 0, \mathcal{L}_{f_+}(p_i)(x) \geq 0\} \end{aligned}$$

$B^-(F)$ est fermé.

Si de plus $B^-(F)$ n'est pas connexe, alors $\text{Viab}_F(\hat{B}) \neq \emptyset$ (où $\hat{B}$ est n'importe quel ouvert contenant strictement B), i.e. il existe un signal de commutation dépendant de l'espace qui rend une solution viable (32) dans $\hat{B}$.

Démonstration. D'après le Théorème 13 les deux premiers items montrent que $B^-(f_+)$ et $B^-(f_-)$ sont fermés et égaux à :

$$\begin{aligned} B^-(f_-) &= \bigcup_{i=1}^m \{\mathcal{L}_{f_-}(p_i)(x) \geq 0\} \\ B^-(f_+) &= \bigcup_{i=1}^m \{\mathcal{L}_{f_+}(p_i)(x) \geq 0\} \end{aligned}$$

Ce qui satisfait en particulier les deux premières hypothèses du Lemme 9 (fermeture de $B^-(f_+)$ et $B^-(f_-)$). En particulier on a aussi :

$$\begin{aligned} B_i^-(f_-) &= \{\mathcal{L}_{f_-}(p_i)(x) \geq 0\} \\ B_i^-(f_+) &= \{\mathcal{L}_{f_+}(p_i)(x) \geq 0\} \end{aligned}$$

Aussi, on a :

$$B_i^0(f_-) = \{x \in B_i \mid \mathcal{L}_{f_-}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_-}^{(N_i^- - 1)}(p_i)(x) = 0\}$$

et

$$B_i^0(f_+) = \{x \in B_i \mid \mathcal{L}_{f_+}^{(1)}(p_i)(x) = 0, \dots, \mathcal{L}_{f_+}^{(N_i^+ - 1)}(p_i)(x) = 0\}$$

Donc d'après la remarque faite dans la démonstration du Lemme 9 l'item (3) permet de satisfaire la dernière hypothèse de ce même Lemme et donc $B^-(F)$ est fermé. $\square$

Pour terminer ce chapitre, présentons quelques expérimentations.

3.6 EXPÉRIMENTATIONS

3.6.1 Un système différentiel incertain

Nous considérons une perturbation du système discuté dans le chapitre précédent :

$$f_\epsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + y - x/10 + \epsilon \\ -x - y/10 + \epsilon \\ 5z + \epsilon \end{pmatrix}$$

et nous prenons comme inclusion différentielle $F(x, y, z) = \{f_\epsilon \mid -0.05 \leq \epsilon \leq 0.05\}$. On considère le patron est donné par l'unique face $p_1 = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2$ and $c_1 = 1/25$. Nous utilisons le Théorème 17 et son instanciation en l'Algorithm (A).

Avec notre implémentation Matlab, la fermeture de l'ensemble sortant pour l'inclusion différentielle est prouvé en 348 secondes. Cet ensemble a deux composantes connexes d'où l'existence d'une trajectoire viable dans le patron considéré.

3.6.2 Boost DC-DC Converter

Exemple 24. Reprenons l'Exemple 24 du Boost DC-DC convertisseur. On utilise pour l'expérimentation les valeurs numériques de [25] pour A_1 et A_2 , $x_c = 70$, $x_l = 3$, $r_c = 0.005$, $r_l = 0.05$, $r_0 = 1$, $v_s = 1$. On obtient alors $b = (\frac{1}{3} \ 0)^T$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.0167 & 0 \\ 0 & -0.0142 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.0183 & -0.3317 \\ 0.0142 & -0.0142 \end{pmatrix}$$

et on étudie ce système dans le rectangle $K = [1.55, 2.15] \times [1.0, 1.4]$, qui correspond au patron $p_1 = x$, $p_2 = -x$, $p_3 = y$, $p_4 = -y$ with $c_1 = 2.15$, $c_2 = -1.55$, $c_3 = 1.4$, $c_4 = -1$.

COMMUTATIONS DÉPENDANT DU TEMPS Les dérivées de Lie pour chaque dynamique et chaque face, pour le patron B, sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_1}(p_1) &= -.017x + .3 & \mathcal{L}_{f_2}(p_1) &= -.018x - .33y + .3 \\ &> 0 & &< 0 \\ \mathcal{L}_{f_1}(p_2) &= -\mathcal{L}_{f_1}(p_1) < 0 & \mathcal{L}_{f_2}(p_2) &= -\mathcal{L}_{f_2}(p_1) > 0 \\ \mathcal{L}_{f_1}(p_3) &= -.014y < 0 & \mathcal{L}_{f_2}(p_3) &= .014x - .014y > 0 \\ \mathcal{L}_{f_1}(p_4) &= -\mathcal{L}_{f_1}(p_3) > 0 & \mathcal{L}_{f_2}(p_4) &= -\mathcal{L}_{f_2}(p_3) < 0 \end{aligned}$$

Les conditions du Théorème 22 sont satisfaites, en utilisant la version plus simple de l'Algorithm B, pour toutes les faces B_i : ici on peut constater qu'on peut considérer uniquement les dérivées à l'ordre un. Cela se vérifie en 12.22 seconds avec notre implémentation Matlab.

Les conditions du Théorème 22 ne sont pas satisfaites sur les deux points extrêmes $B_{(1,3)} = (1.55, 1.0)$ et $B_{(2,4)} = (2.15, 1.4)$ où on utilise la caractérisation plus complexe de la Proposition 6 comme expliquée dans l'Algorithme (B). Cela permet de montrer que ces deux points ne font pas partie de l'ensemble sortant (voir aussi la Figure 19).

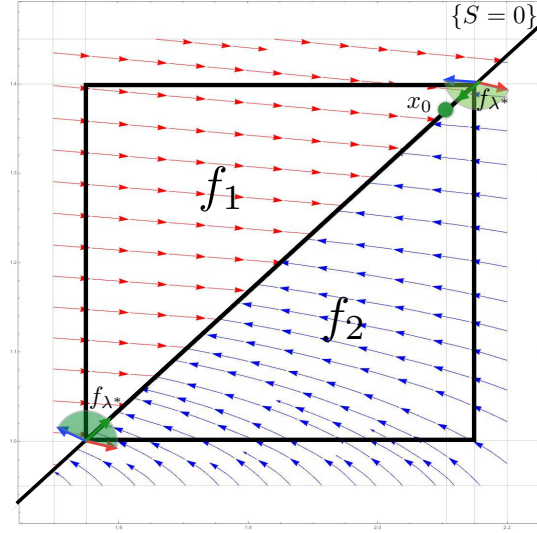
Par conséquent $B^-(F) = \emptyset$ et il existe une solution viable solution dans tout ouvert contenant B.

COMMUTATIONS DÉPENDANT DE L'ESPACE On considère le même système avec une surface de commutation S donnée par la fonction affine passant entre les coins $(1.55, 1.0)$ et $(2.15, 1.4)$ i.e. $\{s(x) = y - 2x/3 - 1/30 = 0\}$, où f_1 s'applique dans $\{s(x) > 0\}$ et f_2 dans $\{s(x) < 0\}$ (voir Figure 19).

Ici encore, on peut montrer que $B^-(F)$ est vide en utilisant le Théorème 23. Il est clair en effet que pour tous les points de $\{s < 0\} \cap \partial B$ et $\{s > 0\} \cap \partial B$ sont entrant et satisfont les conditions du Théorème 23.

Pour les coins situés sur S, c'est moins trivial (similaire à ce qu'il arrive pour le cas où le signal dépend du temps) puisque f_1 et f_2 sont tous les deux sortant. Mais il y a des valeurs de λ pour qui le flot f_λ est entrant.²

2. En réalité, la surface S peut être vue comme une "sliding" surface, i.e. il existe une solution qui reste dessus indéfiniment : cette stratégie fait converger tous les points commençant dans B vers le point d'équilibre $(2.10648, 1.37098)$, représenté par le point x_0 vert sur la Figure 19.

FIGURE 19 – Flots de l'Exemple 24 avec la surface de commutation S

3.6.3 Système à commutation décentré

Exemple 25. Considérons le systèmes à commutation décentré défini par

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_A & -1/E \\ E & -\rho_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_B & -1 \\ 1 & -\rho_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (35)$$

L'ensemble invariant de ce système est étudié dans [55].

On considère ici que $(x_c, y_c) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$, $\rho_A = 0.5$, $\rho_B = 0.4$, $E = 0.5$, $\phi = 0$. Les flots pour ces deux systèmes sont représentés dans la Figure 21.

On choisit des patrons carrés centrés en l'axe x , défini par $p_1 = x$, $p_2 = -x$, $p_3 = y$, $p_4 = -y$ et $c_1 = c_0 + \delta_1$, $c_2 = -c_0 + \delta_1$, $c_3 = c_4 = \delta_2$ (voir Figure 21).

On calcule les dérivées de Lie de premier ordre pour chaque dynamique et chaque face, on voit que pour les carrés dont des ensembles sortants $B^-(F)$ sont vides, ce qui implique d'après le Théorème 22 que le système peut être maintenu dans tous les carrés en utilisant une loi de commutation appropriée.

Par exemple le système peut être contrôlé dans les carrés définis par $(c_0 = 0.4, \delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.15)$ (voir Figure 20) et $(c_0 = 0.55, \delta_1 = 0.05, \delta_2 = 0.15)$, donc de façon assez précise.

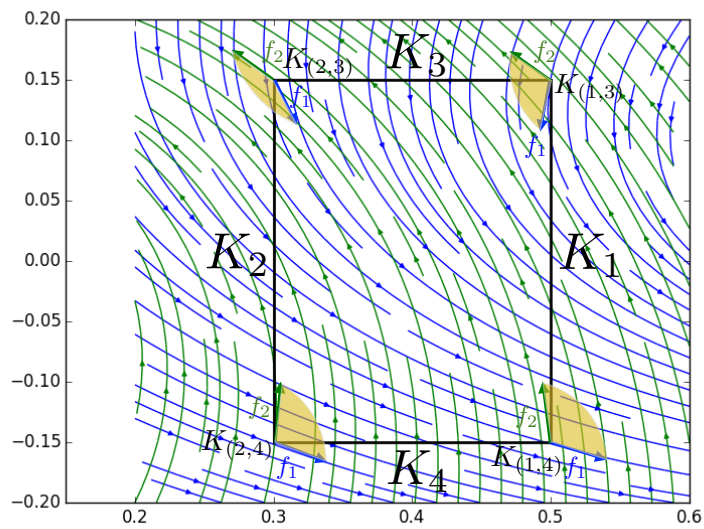


FIGURE 20 – $B^-(F) = \emptyset$ pour le patron $(c_0, \delta_1, \delta_2) = (0.4, 0.1, 0.15)$.

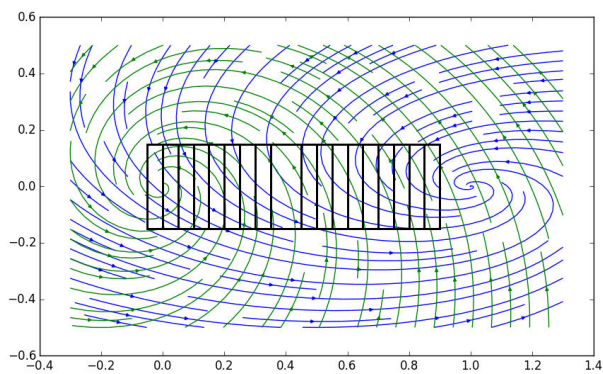
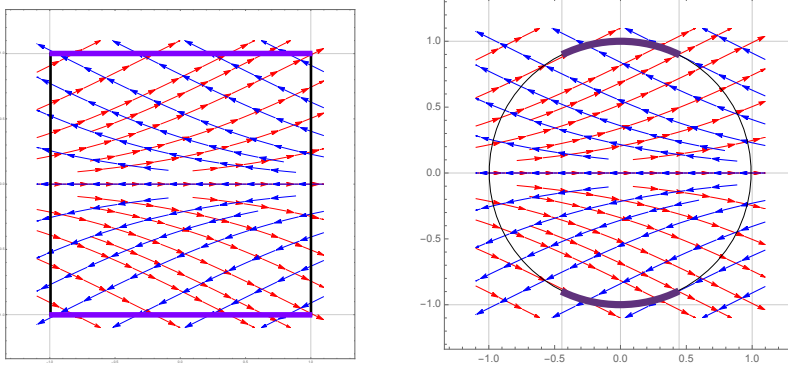


FIGURE 21 – Boîtes entre les points d'équilibre des deux systèmes.

FIGURE 22 – Champs de vecteurs f_1 et f_2 , avec $B^-(F)$ en trait plein.

3.6.4 Ensemble sortant non connexe

Exemple 26. On considère le système à commutation défini par

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y^2 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

PATRON CARRÉ On considère le patron $p_1 = -x$, $p_2 = x$, $p_3 = -y$, $p_4 = y$ avec $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$. En calculant les dérivées de Lie sur le patron carré, on peut déduire d'après le Théorème 22 et, par l'Algorithme (B), la fermeture de l'ensemble sortant en 22 seconds sur Matlab, $B^-(F) = [-1, 1] \times \{-1\} \cup [-1, 1] \times \{1\}$, qui est fermé et non connexe (à gauche sur la Figure 22).

PATRON BOULE Prenons maintenant la boule unité comme patron : $p = x^2 + y^2$ et $c = 1$. Le calcul des dérivées de Lie sur ce patron on en déduit en utilisant le Théorème 22 et l'Algorithme (B) en 8.6 secondes en utilisant notre implémentation Matlab que l'ensemble sortant

$B^-(F) = \{(x, y) \in [-0.445042, 0.445042] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$, est fermé et n'est pas connexe (à droite sur la Figure 22). Donc la boule comme le carré contient une trajectoire viable pour une certaine stratégie de commutation.

Exemple 27. Considérons maintenant la généralisation suivante de l'exemple précédent, de dimension 3 :

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y^2 + z^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - y^2 - z^2 \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 + x^2 + z^2 \\ z \end{pmatrix}, f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -1 - x^2 - z^2 \\ z \end{pmatrix}$$

PATRON BOULE On utilise le patron boule défini par $p = x^2 + y^2 + z^2$ et $c = 1$. Par l'application du Théorème 22, avec les deux premières dérivées de Lie grâce à l'Algorithme (B), nous trouvons en 68.5 seconds avec notre implémentation Matlab que l'ensemble sortant est fermé.

Il est de plus composé de deux composantes connexes (voir Figure 23, les composantes sont en rouge)

$$\begin{aligned} K &= [-0.445042, 0.445042] \times [-0.445042, 0.445042] \times [-1, 1] \\ B^-(F) &= \{(x, y, z) \in K \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \end{aligned}$$

Il existe donc un signal permettant de stabiliser ce système de quatre EDO non linéaires dans la boule unité de dimension 3.

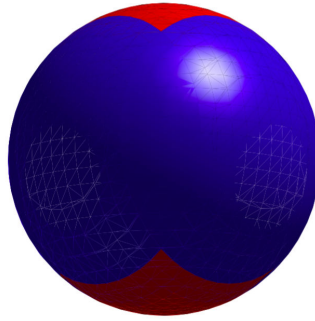


FIGURE 23 – Les deux composantes connexes de l'ensemble sortant sont en rouge - Exemple 27

Troisième partie

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons traité le problème de la preuve de l'existence d'invariants maximaux (contrôlés) dans des régions données (patrons) pour des systèmes continus et des systèmes à commutation. Pour cela nous avons fait appel à la théorie de l'indice de Conley et plus particulièrement de la propriété de Ważewski, qui, la plupart du temps a uniquement été utilisée dans le cadre de systèmes discrets [48].

Comme nous l'avons déjà énoncé, des problèmes similaires ont été examinés dans la littérature (voir Sections 2.0.1 et 3.0.1) et avec lesquels il faudrait se comparer formellement. Cependant, on peut dire rapidement que bien que tous ces travaux ont des objectifs similaires au nôtre, ils utilisent des techniques telles que le calcul de fonction de Lyapunov, la bisimulation, l'itération jusqu'au point fixe, qui diffèrent de notre approche topologique. En outre, ils traitent généralement seulement des modes linéaires ou affines alors que notre méthode est adaptée aux systèmes avec des dynamiques *polynomiales*.

Notons également que, comme mentionné ci-dessus, notre méthode basée sur la propriété de Ważewski généralise l'approche de Lyapunov, et peut traiter des exemples qui auraient été très difficiles à obtenir avec des fonctions de Lyapunov. Ainsi le Chapitre 2 offre des critères moins restrictifs pour trouver des ensembles invariants maximaux pour des systèmes continus. Ces critères sont ensuite généralisés pour pouvoir traiter des systèmes à commutation dans le Chapitre suivant.

Des critères basés sur des méthodes SoS/Sdp ont été données, et des expérimentations ont été réalisées avec succès sur une variété d'exemples de la littérature, incluant des système avec incertitude, des systèmes à commutation dépendant du temps, et des systèmes à commutation dépendant de l'espace.

Nous pensons que cette approche apporte une nouvelle lumière sur un problème important, à savoir la localisation des ensembles invariants de systèmes continus et à commutation.

Notons que cette approche permet de trouver des ensembles invariants la plupart du temps en prouvant la fermeture de l'ensemble sortant. En effet la propriété de Ważewski peut être appliquée à des

ensemble de Ważewski, qui sont des ensembles fermés et dont les ensembles sortants sont aussi fermés. Cependant l'avantage dans notre méthode est qu'en plus la nature de l'invariant découvert peut être décrit plus précisément, cela grâce à la caractérisation donnée par son indice de Conley (calculable grâce au fait que l'ensemble considéré est en réalité aussi un bloc isolant), ce qui permet par exemple de faire la différence entre un point fixe stable ou un cycle limite.

Une première amélioration possible de cette méthode serait de généraliser le critère combinatoire de la Section 2.2.3. Rappelons que ce critère permet de prouver la non rétraction du patron en l'ensemble sortant en passant par la non connexité de l'ensemble sortant. Ceci est en fait uniquement la première étape du lemme du nerf [73]. Il pourrait donc y avoir un intérêt à aller un peu plus loin et utiliser les autres possibilités offertes par ce résultat plus général.

Il y a aussi plusieurs manières d'améliorer les algorithmes présentés, notamment les parties sur les calculs des bases de Gröbner et les programmes SoS/SdP. Nous pouvons par exemple, à la place des méthodes SoS, utiliser les méthodes plus simples mais qui restent néanmoins précises de sous-approximation [28] et sur-approximation [20] de l'image par une fonction polynomiale d'un carré.

Pour en donner une illustration simple prenons le cas d'une face carré. Supposons qu'on puisse calculer une sur-approximation de l'image des polynômes, et une sur-approximation des zéros des polynômes (quitte à avoir un maillage du domaine). Un algorithme qui remplacerait les programmes SoS/SdP serait alors le suivant :

- (i) Calculer la sur-approximation de l'image du zéro de la dérivée de Lie par la dérivée de Lie d'un ordre au dessus
- (ii) — Si la sur-approximation est complètement positive alors on sait que le flot est sortant sur toute la partie dont on calcule l'image.
 - Si la sur-approximation est négative et le flot est complètement rentrant sur la partie dont on calcule l'image.
 - Si la sur-approximation s'intersecte avec zéro alors on reprend (i) en considérant la dérivée de Lie supérieure jusqu'à ne plus atterrir dans ce cas.
- (iii) Si toutes les images des dernières approximations des zéros des dérivées de Lie sont positives alors l'ensemble sortant est fermé.

Des méthodes d'éliminations de quantificateurs peuvent aussi être utiles à l'amélioration de nos algorithmes en utilisant par exemple la Décomposition Cylindrique Algébrique [7].

Il est aussi naturel de considérer des patrons *paramétrés* d'une forme donné, et de déterminer quelles sont les valeurs de ces paramètres qui permettent la satisfaction de nos critères : cela permettrait par exemple la *construction* de blocs isolants ou directement de patrons contenant des invariants.

Cela pourrait se faire en modifiant les problèmes SoS que nous avons utilisé pour trouver des solutions à nos inégalités polynomiales, en problèmes d'optimisations qui fourniront un moyen de trouver les vecteurs c définissant les faces de nos patrons afin qu'ils soient des blocs isolants, au lieu de simplement vérifier les hypothèses pour un vecteur c donné. Pour des problèmes de contrôle finis ou réguliers, un ensemble fini de paramètres définissant un contrôle de stabilisation peut également être trouvée de cette façon.

On pourrait exactement de la même manière traiter du problème de la synthèse de gardes avec les conditions données à la fin du Chapitre 3 pour trouver la bonne répartition des régions d'application des différentes dynamiques afin de faire exister un invariant maximal.

On pourrait aussi étudier les *invariants forts* [5]. Des conditions un peu plus fortes ont été données dans [14], celles-ci permettent de faire appel à une généralisation de Ważewski qui donne des conditions suffisantes à l'existence d'invariants forts. Cette fois-ci l'ensemble sortant considéré n'est plus l'ensemble qui fait sortir toutes les solutions mais devient l'ensemble de tous les points du bord pour lesquels au moins une solution sort. Nous pourrions alors travailler avec les mêmes outils et adapter nos méthodes pour pouvoir appliquer cette autre version de Ważewski et prouver l'existence d'invariants forts.

Une autre application future serait de faire de la synthèse de contrôle. En effet, on pourrait trouver des conditions sur le bord pour obtenir un invariant non vide dans l'ensemble de l'espace des phases considéré en choisissant la bonne dynamique pour chaque partie du bord.

Pour finir, comme travail futur, on pourrait envisager d'appliquer des critères topologiques plus fins basées sur l'indice de Conley, puisque comme nous l'avons dit plus haut, notre approche permet de trouver des blocs isolants ce qui à la base de la théorie de l'indice de Conley. Ces critères plus fins permettraient alors de déterminer la nature de l'invariant localisé (point fixe stable ou instable, cycle limite, chaos, ...), en réitérant la méthode sur l'invariant même on pourrait ainsi obtenir la décomposition de Morse [16] et de la sorte couvrir un spectre plus large de l'analyse topologique des systèmes dynamiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] William W. ADAMS et Philippe LOUSTAUNAU. *An introduction to Grobner bases*. Graduate studies in mathematics. American mathematical society, 1994.
- [2] A. ADJÉ et P.-L. GAROCHE. « Automatic Synthesis of Piecewise Linear Quadratic Invariants for Programs ». In : *Proceedings of VMCAI*. 2015, p. 99–116.
- [3] Amir Ali AHMADI et Pablo A. PARRILO. « Stability of Polynomial Differential Equations : Complexity and Converse Lyapunov Questions ». In : *CoRR* abs/1308.6833 (2013). URL : <http://arxiv.org/abs/1308.6833>.
- [4] E. ASARIN, O. BOURNEZ, D. THAO, O. MALER et A. PNUELI. « Effective synthesis of switching controllers for linear systems ». In : *Proc. of the IEEE* 88.7 (2000), p. 1011–1025. ISSN : 0018-9219.
- [5] Jean-Pierre AUBIN et Arrigo CELLINA. *Differential Inclusions, Set-Valued Maps And Viability Theory*. Grundle. der Math. Wiss. 264. Springer, 1984.
- [6] A. BACCIOTTI et L. MAZZI. « Stability of dynamical polysystems via families of Liapunov functions ». In : *Jour. Nonlin. Analysis* (2007).
- [7] Saugata BASU, Richard POLLACK et Marie-Françoise ROY. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 2006.
- [8] A.G. BECCUTI, G. PAPAFOOTIΟΥ et M. MORARI. « Optimal Control of the Boost dc-dc Converter ». In : *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*. 2005, p. 4457–4462. DOI : [10.1109/CDC.2005.1582864](https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582864).
- [9] N.P. BHATIA et O. HÁJEK. *Local Semi-dynamical Systems*. Lecture notes in mathematics 90. Springer, 1969.
- [10] M. BOCCADORO, Y. WARDI, M. EGERSTEDT et E. VERRIEST. « Optimal control of switching surfaces in hybrid dynamical systems ». In : *Discrete Event Dynamical Systems* 15 (2005), p. 433–448.
- [11] E. BOCZKO, W. D. KALIES et K. MISCHAIKOW. « Polygonal approximation of flows ». In : *Topology and its applications* 154 (2007).
- [12] Olivier BOUISSOU, Alexandre CHAPOUTOT, Adel DJABALLAH et Michel KIEFFER. « Computation of Parametric Barrier Functions for Dynamical Systems using Interval Analysis ». In : *IEEE CDC 2014*. 2014.

- [13] S. BOYD, L. EL HHAOU, E. FERON et V. BALAKRISHNAN. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. T. 15. Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, PA : SIAM, 1994. ISBN : 0-89871-334-X.
- [14] P. CARDALIAGUET. « Conditions suffisantes de non-vacuité du noyau de viabilité ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* 314 (1992), p. 797–800.
- [15] D. C. CAROTHERS, G. EDGAR PARKER, S. J. SOCHACKI et P. G. WARNE. « Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations ». In : *Electronic Journal of Differential Equations* 2005.40 (2005), p. 1–17.
- [16] C. CONLEY. *Isolated invariant sets and the Morse Index*. 1978.
- [17] C. CONLEY. « Isolated invariant sets and the Morse Index ». In : *A.M.S CBMS Lecture Notes* 38 (1978).
- [18] S. COOGAN et M. ARCAK. « Guard synthesis of hybrid systems using sum of squares programming ». In : *Conference on Decision and Control*. 2012.
- [19] J. Ninin D. MONNET L. Jaulin. « Computing a guaranteed approximation of the viability kernel ». In : *SMART* (2015).
- [20] Thao DANG et Romain TESTYLIER. « Reachability Analysis for Polynomial Dynamical Systems Using the Bernstein Expansion ». In : *Reliable Computing* 17 (2012), p. 128–152.
- [21] Aleksej Fedorovič FILIPPOV. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Mathematics and its applications. Kluwer, 1988.
- [22] Grzegorz GABOR et Marc QUINCAMPOIX. « On Existence of Solutions to Differential Equations or Inclusions Remaining in a Prescribed Closed Subset of a Finite-Dimensional Space ». In : *Journal of Differential Equations* 185 (2002), p. 483–512.
- [23] Khalil GHORBAL et André PLATZER. « Characterizing Algebraic Invariants by Differential Radical Invariants ». In : *TACAS*. 2014, p. 279–294.
- [24] A. GIRARD et G.J. PAPPAS. « Approximated bisimulation relations for constrained linear systems ». In : *Automatica* 43 (2007), p. 1307–1317.
- [25] A. GIRARD, G. POLA et P. TABUADA. « Approximately bisimilar symbolic models for incrementally stable switched systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 55 (2010), p. 116–126.
- [26] E. GOUBAULT, J.-H. JOURDAN, S. PUTOT et S. SANKARANARAYANAN. « Finding Non-Polynomial Positive Invariants and Lyapunov Functions for Polynomial Systems through Darboux Polynomials ». In : *American Control Conference*. 2014.

- [27] Eric GOUBAULT, Jacques-Henri JOURDAN, Sylvie PUTOT et Sriram SANKARANARAYANAN. « Finding non-polynomial positive invariants and lyapunov functions for polynomial systems through Darboux polynomials ». In : *American Control Conference, ACC 2014, Portland, OR, USA, June 4-6, 2014*. 2014, p. 3571–3578. DOI : [10.1109/ACC.2014.6859330](https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6859330). URL : <http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2014.6859330>.
- [28] Eric GOUBAULT, Olivier MULLIER, Sylvie PUTOT et Michel KIEFFER. « Inner approximated reachability analysis ». In : *HSCC*. 2014, p. 163–172.
- [29] E. HAGHVERDI, P. TABUADA et G.J. PAPPAS. « Bisimulation relations for dynamical, control, and hybrid systems ». In : *Theor. Comput. Sci.* 342 (2005).
- [30] *Handbook of Dynamical Systems Volume 2*. 2002.
- [31] A. HATCHER. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. URL : <http://books.google.it/books?id=BjKs86kosqgC>.
- [32] Michiel HAZEWINDEL. « Alexander duality ». In : *Encyclopaedia of Mathematics*, 2002 (2002).
- [33] D. HENRION et M. KORDA. *Convex computation of the region of attraction of polynomial control systems*. 2013.
- [34] D. HENRION et J. B. LASSERRE. « Inner approximations for polynomial matrix inequalities and robust stability regions ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.6 (2012), p. 1456–1467.
- [35] John Hamal HUBBARD et Beverly Henderson WEST. *Differential equations : a dynamical systems approach*. Texts in applied mathematics. New York : Springer, 1995. ISBN : 0-387-97286-2. URL : <http://opac.inria.fr/record=b1102846>.
- [36] Brian INGALLS, Eduardo D. SONTAG et Yuan WANG. « An Infinite-Time Relaxation Theorem for Differential Inclusions ». In : *Proceedings of the AMS* 131.2 (2002).
- [37] S. JHA, S. GULWANI, S.A. SESHIA et A. TIWARI. « Synthesizing switching logic for safety and dwell-time requirements ». In : *ACM/IEEE Int. Conf. on Cyber-Physical Systems*. 2010.
- [38] F. Wesley Wilson JR. et J. A. YORKE. « Lyapunov functions and isolating blocks ». In : *Journal of Differential Equations* (1973).
- [39] A.A. JULIUS et A.J. van der SCHAFT. « The maximal controlled invariant set of switched linear systems ». In : *Conference on Decision and Control*. IEEE, 2002.
- [40] H.K. KHALIL. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002. ISBN : 9780130673893. URL : http://books.google.fr/books?id=t_d1QgAACAAJ.
- [41] S. LANG. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2002.

- [42] Jean-Bernard LASSERRE. *Moments, positive polynomials and their applications*. T. 1. World Scientific, 2009.
- [43] Daniel LIBERZON. *Switching in Systems and Control*. Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhauser, 2003.
- [44] Henri LOMBARDI. « Une borne sur les degrés pour le théorème des zéros réels effectifs ». In : *Real Algebraic Geometry*. T. 1524. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1992, p. 323–345. ISBN : 978-3-540-55992-4.
- [45] Henri LOMBARDI, Daniel PERRUCCI et Marie-Françoise ROY. *An elementary recursive bound for effective Positivstellensatz and Hilbert 17-th problem*. 2014.
- [46] J. LYGEROS, C. TOMLIN et S. SASTRY. « Controllers for reachability specifications for hybrid systems ». In : *Automatica* 35 (1999), p. 349–370.
- [47] N.S. Nedialkov M. NEHER K.R. Jackson. « On Taylor model based integration of ODEs ». In : *SIAM J. Numer. Anal* (2007), 236–262.
- [48] Tomasz Kaczynski et MARIAN MROZEK. « Conley index for discrete multivalued dynamical systems ». In : (1997).
- [49] K. MISCHAIKOW et M. MROZEK. « Conley Index Theory ». In : *Handbook of Dynamical Systems II* (2002).
- [50] Konstantin MISCHAIKOW et Marian MROZEK. *Chaos in Lorenz equations : a computer assisted proof. Part II : Details*. 1998.
- [51] R. MOECKEL. « Sturm’s Algorithm and Isolating Blocks ». In : *Journal of Symbolic Computation* 40 (4-5 2005), p. 1242–1255.
- [52] M. MROZEK et P. PILARCZYK. « The Conley Index and Rigorous Numerics for Attracting Periodic Orbits ». In : *Variational and Topological Methods in the Study of Nonlinear Phenomena*. Sous la dir. de V. BENCI, G. CERAMI, M. DEGIOVANNI, D. FORTUNATO, F. GIANNONI et A. M. MICHELETTI. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 2002, p. 65–74. ISBN : 978-1-4612-0081-9. DOI : [10.1007/978-1-4612-0081-9_5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0081-9_5). URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0081-9_5.
- [53] Marian MROZEK. « Index Pairs Algorithms ». In : *Foundations of Computational Mathematics* 6.4 (2006), p. 457–493.
- [54] Y. NESTEROV et A. NEMIROVSKY. « Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming ». In : *SIAM* (1994).
- [55] P. NILSSON, U. BOSCAIN, M. SIGALOTTI et J. NEWLING. « Invariant sets of defocused switched systems ». In : *Conference of Decision and Control*. 2013.
- [56] K. ODANI. « The Limit Cycle of the van der Pol Equation Is Not Algebraic ». In : *Journal of Differential Equations* 115 (1995), p. 146–152.

- [57] Mihai PUTINAR. « Positive polynomials on compact semi-algebraic sets ». In : *Indiana University Mathematics Journal* 42.3 (1993), p. 969–984.
- [58] E. Feron S. BOYD L. El Ghaoui et V. BALAKRISHNAN. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphie, Pennsylvanie : SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [59] Patrick SAINT-PIERRE. « Approximation of the viability kernel ». In : *Applied Mathematics and Optimization* 29.2 (1994), p. 187–209. ISSN : 1432-0606. DOI : [10.1007/BF01204182](https://doi.org/10.1007/BF01204182). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01204182>.
- [60] Sriram SANKARANARAYANAN, Thao DANG et Franjo IVANCIC. « A Policy Iteration Technique for Time Elapse over Template Polyhedra ». In : *HSCC*. 2008, p. 654–657.
- [61] Sriram SANKARANARAYANAN, Henny B. SIPMA et Zohar MANNA. « Scalable Analysis of Linear Systems Using Mathematical Programming ». In : *VMCAI*. T. 3385. LNCS. Springer, 2005.
- [62] Robert SHORTEN, Fabian WIRTH, Oliver MASON, Kai WULFF et Christopher KING. « Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems ». In : *SIAM Rev.* 49.4 (2007), 545—592.
- [63] Guillermo Moreno SOCÍAS. « Length of Polynomial Ascending Chains and Primitive Recursiveness ». In : *Math. Scand.* 71 (1992).
- [64] Thao Dang SRIRAM SANKARANARAYANAN et Franjo IVANČIĆ. « Symbolic model checking of hybrid systems using template polyhedra ». In : *TACAS* (2008).
- [65] Roman SRZEDNICKI. « Ważewski Method and Conley Index ». In : *Handbook of Differential Equations*. T. 1. Elsevier, 2004.
- [66] T. STEPHENS et T. WARNER. *Rigorous validation of isolating blocks for flows and their Conley indices*. Rapp. tech. IMA Preprint Series #2424, mai 2014.
- [67] Zhendong SUN et Shuzhi Sam GE. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. Springer, 2011.
- [68] Andrzej SZYMCAK. « A combinatorial procedure for finding isolating neighbourhoods and index pairs ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics* 127 (05 1997), p. 1075–1088.
- [69] B. TIBKEN. « Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via LMIs ». In : *IEEE CDC*. T. 4. IEEE Press, 2000, 3860–3864 vol.4.
- [70] C. TOMLIN, J. LYGEROS et S. SASTRY. « A game theoretic approach to controller design for hybrid systems ». In : *Proceedings of the IEEE*. 2000.

- [71] A. VANNELLI et M. VIDYASAGAR. « Maximal lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems ». In : *Automatica* 21.1 (1985), p. 69 –80.
- [72] T. WAŻEWSKI. « Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires ». In : *Ann. Soc. Polon. Math.* 10.25 (1947), p. 279–313.
- [73] Volkmar WELKER, Gunter M. ZIEGLER et Rade T. ŽIVALJEVIĆ. « Homotopy colimits – comparison lemmas for combinatorial applications. » In : *J. Reine Angew. Math.* 509 (1999), p. 117–149.
- [74] V.I. ZUBOV et A.M. LIAPUNOV. *Methods of A. M. Lyapunov and Their Application*. Translation series. U.S. Atomic Energy Commission, 1961.