



Analyse de champs de vitesse par FTLE à partir de la méthode des moments : validation théorique et expérimentale

Yasser Hussein

► To cite this version:

Yasser Hussein. Analyse de champs de vitesse par FTLE à partir de la méthode des moments : validation théorique et expérimentale. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers; Ecole nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique, 2016. Français. NNT : 2016ESMA0009 . tel-01399055

HAL Id: tel-01399055

<https://theses.hal.science/tel-01399055>

Submitted on 18 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE
MÉCANIQUE ET D'AÉROTECHNIQUE**

(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

École Doctorale :
Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Énergétique et Aéronautique

Secteur de Recherche :
Énergétique, Thermique et Combustion

Présentée par :

Yasser HUSSEIN

**Analyse de champs de vitesse par *FTLE* à partir de la
méthode des moments : validation théorique et expérimentale**

Directeur de thèse : BA Malick

Co-encadrants de thèse : THOMAS Lionel et PONS Frédéric

Soutenue le 04 novembre 2016
devant la Commission d'Examen

JURY

MORTAZAVI Iraj	Professeur des Universités, CNAM, Paris	Rapporteur
LUBIN Pierre	Professeur des Universités, ENSCBP, Bordeaux	Rapporteur
HUBERSON Serge	Professeur des Universités, Université de Poitiers	Examineur
BA Malick	Professeur des Universités, ISAE-ENSMA, Poitiers	Examineur

Remerciements

Ce manuscrit conclut mon travail de doctorat réalisé au sein du laboratoire Pprime, je tiens en ces quelques lignes à exprimer ma reconnaissance envers tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ces travaux.

J'exprime en premier lieu ma gratitude à BA Malick, THOMAS Lionel et PONS Frédéric respectivement directeur et co-encadrants de thèse, pour leur encadrement et leurs conseils. Merci Malick pour ton amitié, ta gentillesse et ta disponibilité. Merci Frédéric pour ta rigueur pendant la thèse qui contribue toujours à l'avancement des travaux. Merci Lionel pour ton indéfectible soutien, tes discussions, tes avis éclairés et tes idées novatrices.

Je remercie LUBIN Pierre et MORTAZAVI Iraj d'avoir eu la gentillesse d'être rapporteurs de cette thèse. Je tiens à remercier aussi HUBERSON Serge d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse. Merci également Serge de m'avoir accueilli au laboratoire LEA en stage de Master 2 et permis de travailler sur ce sujet intéressant et passionnant ainsi que pour vos conseils scientifiques et votre présence pendant les moments difficiles.

Je tiens à remercier les membres du laboratoire de Mathématique LMA à Poitiers . Je remercie particulièrement EMAMIRAD Hassan pour sa gentillesse pendant le Master 2. J'exprime ma gratitude à BOUAZIZ Abderrazak, qui n'a jamais cessé de me soutenir, m'encourager et de m'aider pendant la rédaction de la thèse.

Mes remerciements vont aussi à l'Université de Damas en Syrie qui, malgré la situation économique très difficile et les conditions catastrophiques que connaît le pays, a financé mes études.

J'adresse mes sincères remerciements à mes deux professeurs de l'université de Damas : ALHUSSEINY Daid pour son soutien et son encouragement et ASSAF Mohamad pour son amitié.

Evidemment, je remercie les thésards, Rabah, Hicham, Adrien, Laurent, Riadh, Mustafa, Badreddine au LEA et Hamza, Selvan à l'ENSMA pour la très bonne ambiance qui y règne. Je remercie également Blandine pour m'avoir aidé en français pendant la rédaction de la thèse.

Je tiens également à remercier les informaticiens et les secrétaires pour leur disponibilité et leur gentillesse qui nous a permis de travailler dans de bonnes conditions.

J'adresse toute ma gratitude à ma famille, à mes parents, à mes frères et à mes sœurs pour leurs pensées et leurs affections qui me donnent la force de continuer même quand les difficultés me semblent insurmontables.

Enfin, aucun mot ne peut exprimer ma reconnaissance à mon épouse, Dima, pour sa présence à mes côtés, pour les sacrifices qu'elle a faits, pour soutien de tous les jours et pour les jolies souvenirs. Je la remercie pour nos enfants, Sham et Ghaïs, pour le bonheur qu'ils me procurent au fil des jours. Je vous aime !

Résumé

Avec le développement de la technologie, les mesures des champs de vitesse instantanée sont disponibles maintenant. Il s'en suit une augmentation de l'intérêt de l'analyse lagrangienne des données. Un outil central pour analyser les écoulements est l'exposant de Lyapunov à temps fini (*FTLE*). Il permet d'identifier les structures cohérentes lagrangiennes *LCS* qui apparaissent comme des crêtes du champ de *FTLE*. Les *LCS* sont des quasi barrières de transport et séparent le domaine fluide en régions aux propriétés dynamiques différentes. Cependant, la méthodologie de calcul actuelle des *FTLE* exige l'évaluation numérique d'un grand nombre de trajectoires de particules fluides sur un maillage cartésien ou adaptatif qui est superposé aux champs de vitesses simulées ou mesurées.

Dans ce travail de thèse, nous proposons une nouvelle méthode de calcul du champ de l'exposant de Lyapunov à temps fini *FTLE*. Pour cela, nous utilisons la méthode des moments d'ordre 2 qui permet d'évaluer au cours du temps la dispersion des particules distribuées uniformément dans un domaine circulaire ou elliptique. Nous appelons ce nouveau champ scalaire, champ de *M-FTLE*. Nous validons cette approche, théoriquement en tout point du domaine fluide en comparant *M-FTLE* et *FTLE* et aussi en faisant la comparaison sur des exemples classiques (champ de vitesse linéaire, circulaire ou hyperbolique) et sur un exemple numérique (champ de vitesse du double gyre).

Cette méthode est alors appliquée sur des données expérimentales du champ de vitesse du mascaret, obtenues au sein l'institut 'Pprime' par vélocimétrie par image de particules *PIV*.

Mots-clés : *FTLE*, *LCS*, méthode des moments, structure cohérente, écoulement instantané, mascaret.

Abstract

With the development of technology, instantaneous flow fields coming from experiments or numerical simulation are available now. It has been followed by a rise of interest for the Lagrangian analysis of such data. One central tool to analyze the flow fields is the Finite Time Lyapunov Exponent (*FTLE*). It allows to the identify of the Lagrangian Coherent Structures (*LCS*) which appear as ridges in the *FTLE* fields. The *LCS* are quasi transport bareers and separatte the fluid domain into regions which have different dynamic properties. However, the computation methodology currently used in order to obtain the *FTLE* requires numerical evalution of a large number of fluid particle trajectories on cartesian or adaptive meshes that are superimposed on the original data grid.

In this thesis, we propose a new method for calculating the Finite Time Lyapunov Exponent *FTLE* fields. For this, we use the method of second-order moments which allows to evaluate over time the dispersion of particles uniformly distributed in a circular or elliptical domain. We call this new scalar field, the *M-FTLE* field. We validate this approach theoretically, at every point of the fluid domain by comparing *FTLE* and *M-FTLE* and also by the comparison of the classic examples (linear velocity field, circular and hyperbolic) and a numerical example (velocity field of double gyre). This method is then applied on experimental measurements of tidal bore velocity fields, obtained within the institute 'Pprime' by using a measurement technique called particle image velocimetry (*PIV*).

Keywords : *FTLE*, *LCS*, moments method, Coherent structure, unsteady flow, Tidal bore.

Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xvii
Introduction	1
1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE	7
1.1 Introduction aux systèmes dynamiques linéaires et non linéaires	7
1.1.1 Systèmes différentiels et flots (flux)	8
1.1.1.1 Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions :	8
1.1.1.2 Le flot d'un système différentiel :	8
1.1.1.3 Systèmes dynamiques	9
1.1.1.4 Orbites et ensembles invariants	9
1.1.2 Linéarisation des systèmes stationnaires	11
1.1.2.1 Système linéaire	11
1.1.2.2 Théorème de Hartman-Grobman :	11
1.1.2.3 Variétés invariantes	12
1.1.2.4 Exemples :	12
1.2 Notion de structure cohérente	16
1.2.1 Méthodes eulérienne d'identification des structures cohérentes .	16
1.2.1.1 Une vorticité maximale	17
1.2.1.2 Critère Q	17
1.2.1.3 Critère λ_2	18
1.2.1.4 Les critères Γ_1 et Γ_2	18
1.2.1.5 Critère $\mathbf{M}_z$	19
1.2.1.6 L'intensité de rotation	19
1.2.2 Méthodes lagrangienne d'identification des structures cohérentes	22
1.2.2.1 Visualisation d'un champ de vitesse (LIC)	22
1.2.2.2 Champ d'Exposants de Lyapunov à temps fini ($FTLE$)	24
1.2.2.3 Définition du champ de $FTLE$	25
1.2.2.4 Algorithme de calcul pour les $FTLE$ classique :	27
1.2.2.5 Exposant de Lyapunov localisé à temps fini ($L-FTLE$) :	29
1.2.2.6 Exposant de Lyapunov à taille finie ($FSLE$)	32
1.2.2.7 Exemple analytique :	33
1.2.3 Le champ de $FTLE$ calculé à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius	34
1.2.3.1 Opérateur de Perron-Frobenius :	35

1.2.3.2	Définition du <i>FTLE</i> à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius	36
1.2.3.3	Méthode de calcul du champ <i>FTLE</i> à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius	36
1.2.4	Les structures cohérentes lagrangiennes (<i>LCS</i>)	40
1.2.4.1	Courbure de crêtes, dérivées secondes des crêtes et Calcul des <i>LCS</i>	41
1.2.4.2	Les barrières de transport	44
2	Les méthodes numériques	49
2.1	Intégration numérique des systèmes dynamiques	49
2.1.1	Principe général des méthodes numériques	49
2.1.2	Méthodes à pas constant	50
2.1.3	Méthodes basées sur la série de Taylor	50
2.1.3.1	Méthode d'Euler	51
2.1.3.2	Méthodes de Taylor d'ordre plus élevé	52
2.1.4	Runge-Kutta	54
2.1.4.1	Runge-Kutta d'ordre 2	54
2.1.4.2	Runge-Kutta d'ordre 4	55
2.1.4.3	Conclusion	55
2.2	Interpolation	56
2.2.1	Principe général	56
2.2.2	L'élément fini sur des quadrangles	57
2.3	Application	59
2.3.1	Cas des écoulements stationnaires	59
2.3.1.1	Calcul de la vitesse locale par interpolation à partir du champ vitesse mesuré en 2D	59
2.3.1.2	Calcul du gradient du champ vitesse mesuré par interpolation en 2D	61
2.3.1.3	Calcul la vitesse locale et leurs gradients par interpolation du champ vitesse mesuré en 3D	62
3	Loi de transport d'une densité de probabilité	65
3.1	Grandeurs statistiques	65
3.1.1	Densité de probabilité associée à la distribution de traceur . . .	65
3.1.2	Position moyenne	65
3.1.3	Matrice des moments d'ordre 2	66
3.1.4	Caractéristiques géométriques à l'ordre 2	66
3.1.4.1	Calcul des caractéristiques de l'ellipse à partir de $\mathbf{P}$ en dimension 2 :	66
3.1.4.2	Exemple simple en 2D :	71
3.1.5	Calcul des caractéristiques de l'ellipsoïde à partir de $\mathbf{P}$ en dimension 3	73
3.2	Transport de la matrice des moments	76
3.2.1	Hypothèse de faible dispersion	76
3.2.2	Équation de transport du volume	77
3.2.3	Équation de transport d'un point matériel	77
3.2.4	Équation de transport de la position moyenne	77
3.2.5	Équation de transport des moments d'ordre 2	77
3.3	Exemples	78

3.3.1	Exemple (1) : Champ de vitesse linéaire en deux dimensions . .	78
3.3.1.1	Choix des conditions initiales :	78
3.3.1.2	La trajectoire	78
3.3.1.3	Évolution de la matrice des moments d'ordre 2	79
3.3.1.4	Caractéristiques de l'ellipse	79
3.3.2	Exemple (2) : Champ de vitesse cylindrique en trois dimensions	82
3.3.2.1	Choix des conditions initiales :	83
3.3.2.2	La trajectoire	83
3.3.2.3	Évolution de la matrice des moments d'ordre 2	83
3.3.2.4	Caractéristiques de l'ellipsoïde	90
3.3.3	Exemple(3) : Champ de vitesse de Hill	94
3.3.3.1	Les moments d'ordre 2	95
3.3.3.2	Caractéristiques de l'ellipse	96
3.4	Transport particulaire	100
3.4.1	Transport d'un scalaire passif :	100
3.4.2	Advection par l'écoulement	100
3.4.3	Description Lagrangienne du mouvement	102
3.4.4	Équation de transport d'un vecteur	102
3.4.5	Tenseur des dilatations :	103
3.4.5.1	Tenseur de dilatation de Cauchy-Green à gauche : . . .	104
3.5	Advection/diffusion	106
3.5.1	Équation de transport des moments d'ordre 2 d'une densité gaussienne	106
3.5.2	Exemple : champ de vitesse linéaire	108
3.5.2.1	Évolution de la matrice des moments d'ordre 2	108
3.5.2.2	Caractéristiques de l'ellipse	110
3.5.3	Exemple : champ de vitesse hyperbolique	114
3.5.3.1	La trajectoire	114
3.5.3.2	Évolution de la matrice des moments d'ordre 2	114
3.5.3.3	Caractéristiques de l'ellipse	115
3.6	Conclusion	118
4	Le <i>FTLE</i> à partir d'une méthode des moments <i>M-FTLE</i>	119
4.1	Définition des <i>M-FTLE</i> :	119
4.1.1	Exemple(1) : Calcul du champ de <i>M-FTLE</i> pour un champ de vitesse linéaire en 2D	122
4.1.2	Exemple(2) : Calcul du champ de <i>M-FTLE</i> pour un champ de vitesse de Hill en 2D	123
4.2	Validation de la méthode	126
4.2.1	Exemples(1) : La vitesse hyperbolique	126
4.2.1.1	Calcul <i>M-FTLE</i>	126
4.2.1.2	Calcul <i>FTLE</i>	126
4.2.2	Exemples(2) : Champ de vitesse à symétrie cylindrique	128
4.2.2.1	Calcul des <i>M-FTLE</i>	128
4.2.2.2	Calcul du <i>FTLE</i>	129
4.2.3	Exemples(3) :Le double-gyre instationnaire	131
4.2.3.1	Champ de vitesse stationnaire	132
4.2.3.2	Champ de vitesse instationnaire	139
4.3	Conclusion	143

5	Application à des données analytiques et expérimentales	145
5.1	Soliton	145
5.1.1	Solution de Boussinesq (solution du 1 ^{er} ordre)	146
5.1.2	Cas stationnaire	147
5.1.2.1	Choix des conditions initiales	147
5.1.2.2	La trajectoire	147
5.1.2.3	Évolution de la matrice des moments d'ordre 2	150
5.1.2.4	Le champ M -FTLE	150
5.2	Mascaret	153
5.2.1	Montage expérimental	153
5.2.2	Les champs de M -FTLE	155
5.2.2.1	Cas du nombre de Froude $Fr = 1.29$	156
5.2.2.2	Cas du nombre de Froude $Fr = 1.46$	169
5.3	Conclusion	181
6	Conclusion et perspectives	183
	Bibliographie	185

Table des figures

1	Illustrant de la procédure pour le calcul de $\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)$. On prend $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ deux particules adjacentes à l'instant initial t_0 , on calcule les trajectoires de ces particules à l'instant t_0+T . Donc la norme de la distance $\delta(t_0+T)$ qui sépare $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ à l'instant t_0+T s'exprime sous l'équation $\max_{\delta(t_0)} \ \delta(t_0+T)\ = \exp(T \sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)) \ \delta(t_0)\ $	2
2	Comparaison de la détection lagrangienne en (a) et eulérienne selon le critère Q en (b) dans un canal turbulent pleinement développé. La figure est tirée de Green <i>et al.</i> [2007].	3
3	Illustrant de la procédure pour le calcul de M -FTLE.	5
1.1	Des variétés stable E^s et instable E^u pour quelque systèmes linéaires.	14
1.2	Variétés invariantes du système (1.6), où la variété instable $W^u = \{(x, y) : y = x^2\}$ et la variété stable $W^s = \{(x, y) : x = 0\}$	15
1.3	Ligne de courant obtenue d'après les équations 1.21 pour $\lambda_r = 0.3$, $\lambda_{cr} = -1$ et $\lambda_{ci} = 20$ [88].	20
1.4	Champs non bruités ; (a) Vorticité Instantanée, (b) champ de λ_2 , (c) Champ de Γ_2 (seuillage à 55 %) [87].	21
1.5	Champs bruités ; (a) Vorticité Instantanée, (b) champ de λ_2 , (c) Champ de Γ_2 (seuillage à 55 %) [87].	21
1.6	Visualisation d'un champ de vecteur 2D circulaire en utilisant l'algorithme <i>LIC</i> . Un bruit blanc (a), le champ de vitesse circulaire (b) et <i>LIC</i> du bruit blanc en fonction du champ vectoriel (c).	23
1.7	Illustration du calcul numérique de la trajectoire d'un point pour voir Δs_i	24
1.8	Processus de convolution pour <i>LIC</i> . Pour calculer un pixel de la texture finale (c), on intègre une trajectoire de part et d'autre du pixel (b) et on fait une moyenne pondérée des intensités des pixels traversés dans la texture d'entrée.	24
1.9	Illustration de l'algorithme de calcul du gradient de la déformation. Positions des quatre points $\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j+1)}(t_0)$ et $\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0)$ à l'instante t_0 et ces points transportent par un écoulement au $\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0+T)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0+T)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j+1)}(t_0+T)$ et $\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0+T)$ à l'instante t_0+T pour calculer le gradient de la déformation.	28
1.10	Illustration de la grille principale (cercles rouge) et la grille auxiliaire (cercles bleus) utilisés dans le calcul de la dérivée du flot dans la définition du tenseur Cauchy-Green (équation 1.26)	29

1.11	Illustration de la procédure pour le calcul les L - $FTLE$. (a) Transport de deux points voisins séparées par un vecteur $\delta(t_0)$ par un écoulement pendant un pas de temps dt . (b) L'évolution temporelle de la déviation $\delta(t)$ dans un champ de vitesse où $\delta_{i+1} = \delta(t + (i + 1) dt)$	31
1.12	Illustration du calcul la séparation de temps $\tau(X_0; \delta, r)$. Pour cela, on prend deux particules initialement voisines en $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ où $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 = r_0 = \delta_0$ et on cherche le temps nécessaire $\tau(X_0; \delta, r)$ pour obtenir la distance imposé entre les deux particules lors du transport égale à r	33
1.13	Image d'un ensemble B par une transformation non singulière S ou $B \cap S^{-1}(B) \simeq \emptyset$	36
1.14	Calcul numérique de la moyenne des ensembles B_i et $\varphi_{t_0}^t(B_i)$. L'ensemble B approximé par N points est mis en correspondance de à l'ensemble $\varphi_{t_0}^t(B)$. On note que $(\bar{\mu}^i, \bar{\lambda}^i) \neq \varphi_{t_0}^t(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$	37
1.15	Illustration du calcul de la covariance de l'ensemble B_i par l'opérateur Perron-Frobenius. La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme $\frac{1}{\mu(B_i)}$ supportée sur l'ensemble B_i est mis en correspondance de la fonction de densité $\mathcal{P}_{t_0}^t(B_i)$ qui est approchée par trois fonctions de densité uniforme $\frac{1}{\mu(B_i)} (\mathcal{P}_{t_0}^t)_{im}$, $\frac{1}{\mu(B_i)} (\mathcal{P}_{t_0}^t)_{il}$ et $\frac{1}{\mu(B_i)} (\mathcal{P}_{t_0}^t)_{ik}$ supportée sur l'ensemble B_m , B_l et B_k	39
1.16	Deux points de chaque côté d'un variété stable divergent après un laps de temps suffisant.	41
1.17	Le champ $FTLE$ avec la première $LCS = \{(s, 0) ; s \in [-2, -\frac{2}{3}]\}$ en (a) et la première $LCS = \{(s, 0) ; s \in [1, 2]\}$ en (b).	43
1.18	La longueur de $\nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$ sur la normale et le tangentiel.	45
1.19	La LCS hyperbolique est une ligne qui maximise le cisaillement dans le direction tangentielle.	46
1.20	La LCS parabolique est une ligne qui maximise le cisaillement dans le direction tangentielle.	47
1.21	La LCS elliptique est une ligne fermé qui maximise le cisaillement dans le direction tangentielle.	47
1.22	Les LCS dans l'écoulement du double-gyre. LCS elliptiques sont en vert. Le champ de $FTLE$ est montré en arrière-plan. [113]	47
2.1	Méthode d'Euler. Comparaison de la solution exacte de l'équation (2.6) avec les approximations par la méthode d'Euler.	51
2.2	Méthode basées sur la série de Taylor avec en (a) $h = 0.4$ et en (b) $h = 0.04$	53
2.3	Comparaison de la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 (vert) avec la série de taylor d'ordre 2 (blue) avec $h = 0.10$ et la solution exacte (rouge).	54
2.4	Comparaison de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (les points vert) et la série de Taylor d'ordre 4 (blue) avec $h = 0.4$ et la solution exacte (rouge).	55
2.5	Éléments constitutifs d'un maillage.	56
2.6	Élément fini $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_K)$ de référence (à gauche) et élément fini (K, P, Σ_K) affine-équivalent (à droite)	58
2.7	Un réseau cartésien régulier. On note que le lien entre les éléments du maillage cartésien un vide ou un sommet ou un côté.	59
2.8	Une maille du réseau cartésien	60
2.9	Transformation du carré unité en quadrangle quelconque en réseau	60

2.10	Transformation du carré unité en quadrangle quelconque en réseau . . .	63
3.1	Repères et notation utilisées pour caractériser la géométrie de l'ellipse.	68
3.2	Représentation des différentes valeurs possibles de l'angle de rotation φ de l'ellipse en fonction du signe de P_{11} et $P_{20} - P_{02}$. (a) $P_{11} > 0$ et $P_{20} - P_{02} > 0$, (b) $P_{11} < 0$ et $P_{20} - P_{02} > 0$, (c) $P_{11} > 0$ et $P_{20} - P_{02} < 0$, et (d) $P_{11} < 0$ et $P_{20} - P_{02} < 0$	70
3.3	Représentation graphiques des ellipses associées aux matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le repère orthonormal. Un cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon $r = 2$ (où le rayon du cercle est égal au demi-grand axe de l'ellipse) (jaune) et le grand axe (bleu).	72
3.4	Définition des angles d'Euler et des rotations associées, (a) repère globale $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et repère des vecteurs propres $(\vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3)$, (b) une rotation autour de $\vec{W}_3$, on obtient un repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{W}_3)$ et $\theta = (\vec{W}_1, \vec{i}_1)$, (c) une rotation autour de $\vec{j}_1$, on obtient un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}_1)$, et (d) une rotation autour de $\vec{i}$, on obtient un repère $(O, \vec{x}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\psi = (\vec{j}_1, \vec{j})$	76
3.5	Évolution les moments d'ordre 2 d'un disque de centre $\mathbf{x}_0(2, 2)$ dans un écoulement linéaire.	80
3.6	Évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps.	81
3.7	Transport d'un disque dans l'écoulement linéaire.	81
3.8	Évolution temporelle des moments du disque de centre $\mathbf{x}_0(5, 0, 0)$ dans un écoulement cylindrique.	92
3.9	Évolution de l'angle de rotation autour oz d'un disque dans un écoulement cylindrique.	93
3.10	Comparaison entre $P_{11} - P_{22}$ et P_{12} , qui détermine l'évolution de l'angle de rotation $\theta(t)$	93
3.11	Évolution d'un distribution du domaine contenant le domaine contenant le traceur de support ellipsoïdal de centre $\mathbf{x}_0(5, 0, 0)$ dans un écoulement cylindrique. Le jaune indique le domaine contenant le traceur au temps initial, le rouge marque l'évolution de l'ellipse et le vert la trajectoire de la position moyenne du domaine contenant le traceur.	94
3.12	Le vortex de Hill.	95
3.13	L'évolution des moments d'ordre 2, P_{x^2} , P_{y^2} et, P_{xy} pour le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$	96
3.14	L'évolution des moments d'ordre 2, P_{x^2} , P_{y^2} et P_{xy} pour le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0((1.5, 3.5))$	97
3.15	Évolution d'un domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$ en (a), l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe du traceur en (b), l'évolution temporelle de l'angle de rotation du traceur en (c) et comparaison entre $P_{11} - P_{22}$ et P_{12} , qui détermine l'évolution de l'angle de rotation.	98
3.16	Comparasion de la forme du domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$ et de différents rayons r_0 correspondants à $P_0 = P_{x^2}(t = 0) = P_{y^2}(t = 0) \in \{ 10^{-1} \text{ en (a), } 10^{-2} \text{ en (b), } 10^{-3} \text{ en (c) } \}$ avec $r_0 = \sqrt{4 P_0}$ reconstruite à partir de la méthode des moments d'ordre 2 à celle du domaine contenant le traceur obtenue par transport de particules dans un écoulement de Hill.	99

3.17	Évolution d'un domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ en (a), l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe du traceur en (b), l'évolution temporelle de l'angle de rotation du traceur en (c) et comparaison entre $P_{11} - P_{22}$ et P_{12} , qui détermine l'évolution de l'angle de rotation.	99
3.18	Comparasion de la forme du domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ et de différents rayons r_0 correspondants à $P_0 = P_{x^2}(t = 0) = P_{y^2}(t = 0) \in \{10^{-1} \text{ en (a)}, 10^{-2} \text{ en (b)}, 10^{-3} \text{ en (c)}\}$ avec $r_0 = \sqrt{4 P_0}$ reconstruite à partir de la méthode des moments d'ordre 2 à celle du domaine contenant le traceur obtenue par transport de particules dans un écoulement de Hill.	100
3.19	La convection dans un écoulement où la vitesse est uniforme.	101
3.20	La convection dans un écoulement où la vitesse est $\mathbf{u} = (0.2 y^2 + 0.8, 0)$	101
3.21	La convection dans un écoulement où la vitesse est hyperbolique.	102
3.22	Transport d'un point par un écoulement.	102
3.23	Transport d'un vecteur par un écoulement.	103
3.24	Transport de deux vecteurs par un écoulement.	104
3.25	Évolution des moments d'ordre 2 d'un traceur de particules.	110
3.26	Évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps.	111
3.27	Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse avec le temps.	112
3.28	Évolution du domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0(2, 2)$ dans l'écoulement linéaire avec diffusion à différents nombres de Péclet Pe	113
3.29	Évolution les moments centrés d'ordre 2 d'un distribution du domaine le traceur de centre $\mathbf{x}_0(0, 15)$	115
3.30	Évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps d'un domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0(0, 15)$	116
3.31	Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse avec le temps d'un domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0(0, 15)$	116
3.32	Évolution d'un domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0$ dans l'écoulement hyperbolique avec diffusion au nombre de Péclet $Pe = 1$	117
4.1	Évolution de la matrice des moments d'ordre 2.	120
4.2	Exemple de dilatation d'un disque de rayon $a(t_0)$ de centre $x(t_0)$ situé sur la ligne de LCS	121
4.3	Le champ de $M-FTLE$ du champ de vitesse de Hill pour un temps d'intégration positif (a) : $T = 1$ s, (b) : $T = 2$ s, (c) : $T = 5$ s, (d) : $T = 7.5$ s.	124
4.4	Le champ de $M-FTLE$ du champ de vitesse de Hill pour un temps d'intégration négatif (a) : $T = -1$ s, (b) : $T = -2$ s, (c) : $T = -5$ s, (d) : $T = -7.5$ s.	124
4.5	Les lignes matérielles répulsives et attractives en (a). La LCS pour un temps d'intégration T de 10s en (b) et de -10 s en (c).	125
4.6	La fonction du champ $M-FTLE$ par rapport à r_0 au temps d'intégration $T = 10$ s.	131
4.7	Le champ de vitesses du double-gyre associé à ce système stationnaire pour $A = 1$	132
4.8	Le champ de $FTLE$ de la champ de vitesse du double-gyre stationnaire au temps d'intégration (a) : $T = 1$ s, (b) : $T = 2.5$ s, (c) : $T = 5$ s, (d) : $T = 7.5$ s, (e) : $T = 10$ s, (f) : $T = 15$ s.	133

4.9	(a) Les trajectoires pour quelques paires de particules voisines pour un temps d'intégration $T = 1s$, (b) Le champ de $FTLE$ à partir le tenseur de Cauchy-Green au temps d'intégration $T = 2.5s$	134
4.10	Le champ $M-FTLE$ du champ de vitesse de la double-gyre stationnaire au temps d'intégration (a) : $T = 1s$, (b) : $T = 2.5s$, (c) : $T = 5s$, (d) : $T = 7.5s$, (e) : $T = 10s$, (f) : $T = 15s$	136
4.11	Comparison des champs $M-FTLE$ et $FTLE$ du champ de vitesse de la double-gyre stationnaire à certains temps d'intégration. Le champ du $FTLE$ en (a) : $T = 1s$, (c) : $T = 5s$, (e) : $T = 5s$ le champ du $M-FTLE$ en (b) : $T = 1s$, (d) : $T = 5s$, (f) : $T = 10s$	137
4.12	Évolution du disque de centre en (a)(0.4,0.2) et (1.1,0.1), (b) (1,0.6) à l'écoulement du double-gyre stationnaire.	138
4.13	Le champ de vitesse du double-gyre, diamètre variable pour $\epsilon = 0.25$. .	139
4.14	Comparison des champs $M-FTLE$ et $FTLE$ du champ de vitesse du double-gyre instationnaire à certains temps d'intégration. Le champ de $FTLE$ en (a) : $T = 1s$, (c) $T = 2.5s$ (e) $T = 5s$, (g) $T = 10s$ et (i) $T = 15s$. Le champ de $FTLE$ en (b) $T = 1s$, (d) $T = 2.5s$ (f) $T = 5s$, (h) $T = 10s$ et (j) $T = 15s$	140
4.15	Les champs de $M-FTLE$ et de $FTLE$ pour le double-gyre instationnaire pour $\epsilon = 0.25$, au temps d'intégration $T = 10s$ pour un rayon du disque initial en (a) et (b) $r_0 = 0.05$, (c) et (d) $r_0 = 0.01$, (e) et (f) $r_0 = 0.0005$, (g) et (h) $r_0 = 0.001$	141
4.16	Illustration de choisir le cercle et des points initiaux pour calculer les valeurs de $M-FTLE$ et de $FTLE$	142
4.17	(a) Les valeurs de $M-FTLE$ et de $FTLE$ pour deux points $\mathbf{x}_0(0.6,0.7)$ en (a) et $\mathbf{x}_0(1.1,0.2)$ en (b) au temps d'intégration $T = 10s$. On note que la valeur de $M-FTLE$ d'un point est constante par rapport le rayon du domaine contenant le traceur (i.e. indépendamment du rayon du domaine contenant de traceur), et les valeurs de $FTLE$ converge vers les valeurs de $M-FTLE$ quand le rayon diminue.	142
5.1	Soliton de l'équation KDV.	146
5.2	Les deux compantes (u, v) du champ de vitesse de l'écoulement stationnaire d'un Soliton les lignes de courant.	148
5.3	Visualisation du champ de vitesse de l'écoulement du Soliton par génération de texture en utilisant l'algorithme LIC à partir d'un bruit blanc. Pour un temps d'intégration $T = 0.8s$, sur un maillage cartésien régulier contenant 360000 pixels(600×600).	148
5.4	La trajectoire du centre du traceur avec une condition initiale $\mathbf{x}_0(0.2,0.2)$.149	
5.5	L'évolution des moments d'ordre 2, les moments P_{x^2}, P_{y^2} sont représentés en (a). La figure (b) est un zoom pour abscisses $[5 : 7.5]$ d'intérêt de la figure (a). Le moment P_{xy} est représenté en (c), la figure (d) est un zoom de la figure (c), d'abscisses $[5 : 7.5]$	149

5.6	L'évolution d'un traceur par deux méthodes : méthode des moments d'ordre 2 en rouge en (b), (c) et (d) et méthode de transport les points de la frontière du domaine contenant le traceur en vert en (b), (c) et (d) et pour représenter le déformation du traceur on prend un cercle de même centre que l'ellipse et de rayon égale à celui du traceur initial en bleu. Et (a) représente le transport du traceur dans l'écoulement. En (e) l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse et (f) l'évolution temporelle de l'angle de rotation.	151
5.7	Le champ de M - $FTLE$ au temps d'intégration $T = 0.5s$ en (a) et $T = 1s$ en (b) pour un diamètre $r_0 = \sqrt{4} \bar{P}_0$ où le moment initial $P_0 = P_{x^2}(t = 0) = P_{y^2}(t = 0) = 10^{-5}$	152
5.8	Schématisation de la génération du mascaret.	154
5.9	Illustration de la grille principale (cercles rouges et lignes vertes) et la grille auxiliaire (cercles bleus et lignes noir) utilisés dans le calcul des valeurs de M - $FTLE$. On peut choisir $r_0 = a \, dx$ où $a \in]0 : 1[$, pour cet exemple, on choisit $r_0 = 0.25 \, dx = 2$	155
5.10	Champs de vecteurs vitesse et iso contours de la composante longitudinale U des vitesses du mascaret à différents instants au passage du front pour $Fr = 1.29$, en (a) $t = 10.2 \, s$, (b) $t = 10.6 \, s$, (c) $t = 11 \, s$ et (d) $t = 11.4 \, s$.([50])	156
5.11	Les LIC sur un bruit blanc pour décrire des champs vitesses expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1.29$ à différents instants au passage du front, pour un temps d'intégration $T = 8 \, s$ et sur un maillage cartésien régulier contenant $507 \, 123$ pixels(841×603)	159
5.12	Lignes de courant et critère Q pour décrire les champs de vitesses expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1.29$ à différents instants au passage du front. .	160
5.13	Champs de M - $FTLE$ calculés avec la méthode des moments d'ordre 2 avec un temps d'intégration $T = 2 \, s$, pour des champs de vitesse du mascaret pour $Fr = 1.29$	161
5.14	Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. Avant l'arrivée du mascaret, on prend la position $\mathbf{x}_0(200, 250)$ (au milieu du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2 \, s$, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2 \, s$ et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.	162
5.15	Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. Avant l'arrivée du mascaret, on prend la position $\mathbf{x}_0(770, 60)$ (au fond du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire de $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2 \, s$, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2 \, s$ et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.	163

5.16	Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. À l'arrivée du mascaret (figure 5.13(d)), on prend en bas de la zone de couche de mélange la position $\mathbf{x}_0(800, 435)$, dans la zone la position $\mathbf{x}_0(800, 446)$ et en haut de la zone la position $\mathbf{x}_0(800, 460)$ qui sont les centres initiaux des domaines contenant le traceur. La trajectoire issue des trois positions.	164
5.17	Évolution des moments P_{x^2} , P_{y^2} et P_{xy} des trois positions (voir figure 5.16).	165
5.18	Évolution temporelle du demi-petit axe et du demi-grand axe des trois position (voir figure 5.16). Évolution temporelle du domaine initial contenant le traceur pour ces trois cas.	166
5.19	Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. À l'arrivée du mascaret (figure 5.13(d)), on prend la position $\mathbf{x}_0(500, 200)$ (au milieu du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de la position $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.	167
5.20	Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. À l'arrivée du mascaret (figure 5.13(d)), on prend la position $\mathbf{x}_0(500, 80)$ (au fond du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de la position $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.	168
5.21	Champs de vecteurs vitesse et iso contours de la composante longitudinale U des vitesses d'écoulement au passage du mascaret à différents instants au passage du front ; $Fr = 1,46$, (a) $t = 10,2$ s, (b) $t = 10,6$ s, (c) $t = 11$ s et (d) $t = 11,4$ s.([50])	171
5.22	Les LIC sur un bruit blanc pour décrire des champ vitesses expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1,46$ à différents instants au passage du front, pour un temps d'intégration $T = 8$ s et sur un maillage cartésien régulier contenant 641601 (801×801) pixels.	172
5.23	Les champs de critère Q pour décrire les champs de vitesse expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1,46$ à différents instants au passage du front avec des lignes de courant.	173
5.24	Champs de $M-FTLE$ calculés à partir des vitesses expérimentales du mascaret pour $Fr = 1.46$ à différents instants au passage du front, pour un temps d'intégration $T = 2$ s et sur un maillage cartésien régulier contenant 160000 nœuds.	174

5.25	Le nombre de Froude $Fr = 1.46$. Avant l'arrivée du mascaret, on prend la position $\mathbf{x}_0(150, 200)$ (au milieu du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de $\mathbf{x}_0$ sur la figure (5.24(a)) pour un temps d'intégration $T = 2$ s. (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.	175
5.26	Avant l'arrivée du mascaret, au fond du canal, dans la couche limite, les trajectoire des positions initiales du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}(150, 36 + 2i)$; $i = 25$. on note les trajectoires des particules dans la couche limite sont plus courtes par rapport aux trajectoires qui sont au dessus.	176
5.27	Le nombre de Froude $Fr = 1.46$. Avant l'arrivée du mascaret (sur la figure (5.24(a))), on prend la position $\mathbf{x}_0(150, 50)$ (au fond du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s. (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.	177
5.28	À l'arrivée du mascaret, les trajectoires des positons initiales du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}(950, 280 + 4i)$; $i = 20$. Les points dans la zone de couche de mélange.	178
5.29	Évolution temporelle pour des traceurs de particules sous un écoulement de type mascaret et les trajectoires de ses centres. Si le centre $\mathbf{x}_0(940, 315)$ en (b), $\mathbf{x}_0(940, 325)$ en (c), $\mathbf{x}_0(940, 330)$ en (d), $\mathbf{x}_0(940, 335)$ en (e), $\mathbf{x}_0(940, 340)$ en (f), $\mathbf{x}_0(940, 345)$ en (g). La couleur jaune pour domaine initial contenant le traceur, bleue pour l'ellipse qu'il décrit l'évolution de la matrice des moment d'ordre 2 dans le transport, rouge pour le cercle de centre de l'ellipse et de rayon du domaine initial. La trajectoire est représentée en vert.	179
5.30	Évolution temporelle pour des traceurs de particules dans un écoulement de type mascaret et les trajectoires de ses centres. Si le centre $\mathbf{x}_0(950, 37)$ en (b), $\mathbf{x}_0(950, 54)$ en (c), $\mathbf{x}_0(950, 70)$ en (d) et $\mathbf{x}_0(950, 79)$ en (e). La couleur noir pour le domaine initial contenant le traceur, rouge pour l'ellipse qu'il décrit l'évolution de la matrice des moment d'ordre 2 dans le transport , violette pour le cercle de centre de l'ellipse et de rayon du domaine initial. La trajectoire est représentée en bleue.	180

Liste des tableaux

3.1	Tableau des caractéristiques de l'angle de rotation φ de l'ellipse en fonction des moments d'ordre 2.	69
5.1	Paramètres des trois mascarets étudiés.	154

Introduction

L'analyse expérimentale et les simulations numériques d'un écoulement jouent un rôle central pour la compréhension du comportement de l'écoulement turbulent. Les ensembles de données qui en résultent sont très complexes et ne peuvent être analysés sans l'extraction de caractéristiques appropriées et d'outils de la représentation. C'est le cas par exemple des écoulements instationnaires, où les nombreuses méthodes d'analyse classique ne parviennent pas à représenter les structures correctement. Il n'est pas facile de définir clairement l'emplacement des points hyperboliques et des variétés stables et instables qui leur sont associés puisque ces points apparaissent, disparaissent, varient en intensité et se déplacent au cours du temps. L'analyse de l'écoulement de ces fluides peut être effectuée selon deux approches qui seront développées au chapitre un de ce manuscrit :

- L'approche eulérienne : elle consiste à observer l'évolution temporelle de la vitesse du fluide à certaines positions fixes dans l'espace. En général l'approche eulérienne est construite à partir des invariants du tenseur local du gradient de vitesse, qui est donc basé sur des informations obtenues à un instant donné. Ces techniques (vorticité, critères : Q , λ_2 , Δ , Γ_1 , Γ_2 , $\mathbf{M}_z$) sont couramment utilisées pour localiser les centres des tourbillons. La structure cohérente eulérienne est généralement identifiée grâce à son centre, Strawn et al. [76] définissent le centre d'un tourbillon comme étant un maximum local du module de la vorticité, mais cette définition présente l'inconvénient majeur de ne pas faire la distinction entre cisaillement et tourbillon. Le critère λ_2 proposé par Hussain [75] consiste à chercher les valeurs propres du tenseur symétrique du tenseur gradient de vitesse. Les zones à valeurs propres négatives correspondent à des régions à pression minimale locale due au mouvement tourbillonnaire. La technique du discriminant proposée par Chong et al. [80] définit les régions ayant des valeurs propres complexes comme centre tourbillonnaire. Les méthodes Γ_1 et Γ_2 ont été développés par Graftieaux et al. [77] et Michard et al. [78]. Enfin la définition d'un tourbillon donné par le critère $\mathbf{M}_z$, Haller [81] provient de considérations lagrangiennes mais utilise des quantités eulériennes.
- L'approche lagrangienne : consiste à décrire l'évolution temporelle de l'état d'un fluide en suivant la trajectoire de certains éléments de ce fluide. Dans le cas des écoulements dépendants du temps, il est plus naturel d'opter pour une description lagrangienne, c'est-à-dire de décrire directement la trajectoire des particules. Toutefois, si cette approche a l'avantage de décrire correctement le trajet emprunté par une parcelle de fluide sur une longue période de temps, une image montrant la trajectoire de plusieurs particules devient rapidement difficile à interpréter étant donné la nature chaotique de ces trajectoires. Des paramètres la-

grangiens, comme l'exposant de Lyapunov, permettent de surmonter cette limite dans le cas où l'on s'intéresse à la dynamique lagrangienne dans le but de décrire des structures cohérentes d'un écoulement qui peuvent agir en tant que barrières de transport. Dans ce cas, l'exposant de Lyapunov mesure le taux de convergence ou de divergence de deux trajectoires initialement choisies très proches l'une de l'autre. L'exposant de Lyapunov à temps fini (finite-time Lyapunov exponent) *FTLE* et l'exposant de Lyapunov à taille finie (finite-size Lyapunov exponent) *FSLE* sont des versions calculables de cet exposant à partir de trajectoires réelles ou simulées.

L'exposant de Lyapunov est largement utilisé dans les théories des systèmes dynamiques, cependant son usage pour un temps fini *FTLE* n'a été introduit que récemment par Haller (2001). L'approche consiste à suivre les trajectoires de deux particules du fluide initialement adjacentes et de baser l'exposant sur la distance qui les sépare après un temps donné. On considère au temps t_0 un point $\mathbf{x}_0$ et un point $\mathbf{y}_0$ distincts tel que $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \delta(t_0)$. Ces deux points sont transportés par un écoulement de sorte que, après un temps T (voir Figure 1), l'exposant de Lyapunov à temps fini soit donné par :

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \max_{\delta(t_0)} \left[\frac{1}{|T|} \ln \left(\frac{\|\delta(t_0 + T)\|}{\|\delta(t_0)\|} \right) \right] \quad (1)$$

En effectuant cette opération pour plusieurs points d'un domaine on obtient un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini.

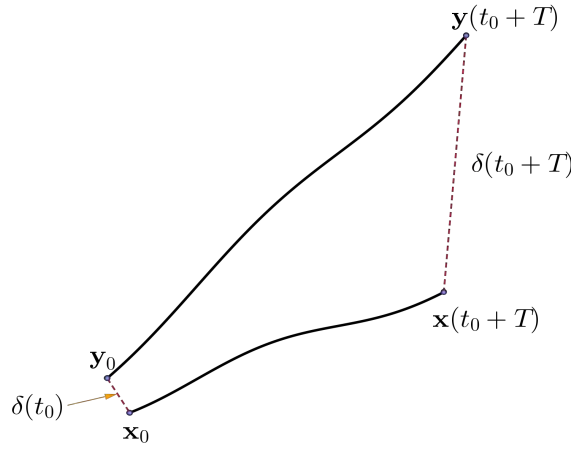


FIGURE 1 – Illustrant de la procédure pour le calcul de $\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)$. On prend $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ deux particules adjacentes à l'instant initial t_0 , on calcule les trajectoires de ces particules à l'instant $t_0 + T$. Donc la norme de la distance $\delta(t_0 + T)$ qui sépare $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ à l'instant $t_0 + T$ s'exprime sous l'équation $\max_{\delta(t_0)} \|\delta(t_0 + T)\| = \exp(|T| \sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)) \|\delta(t_0)\|$.

Le calcul des exposants de Lyapunov à temps fini *FTLE* permet la détection de certaines structures cohérentes lagrangiennes et la description de l'évolution spatio-temporelle de ces structures cohérentes. Green *et al.*[2007] ont appliqué cette stratégie à la détection des structures tourbillonnaires en turbulence de paroi. La figure 2 compare la technique lagrangienne reliée au champ *FTLE* avec la détection eulérienne basée sur le critère Q . On remarque que les deux méthodes sont qualitativement similaires. L'identification par le maximum local du coefficient de Lyapunov pour des périodes de

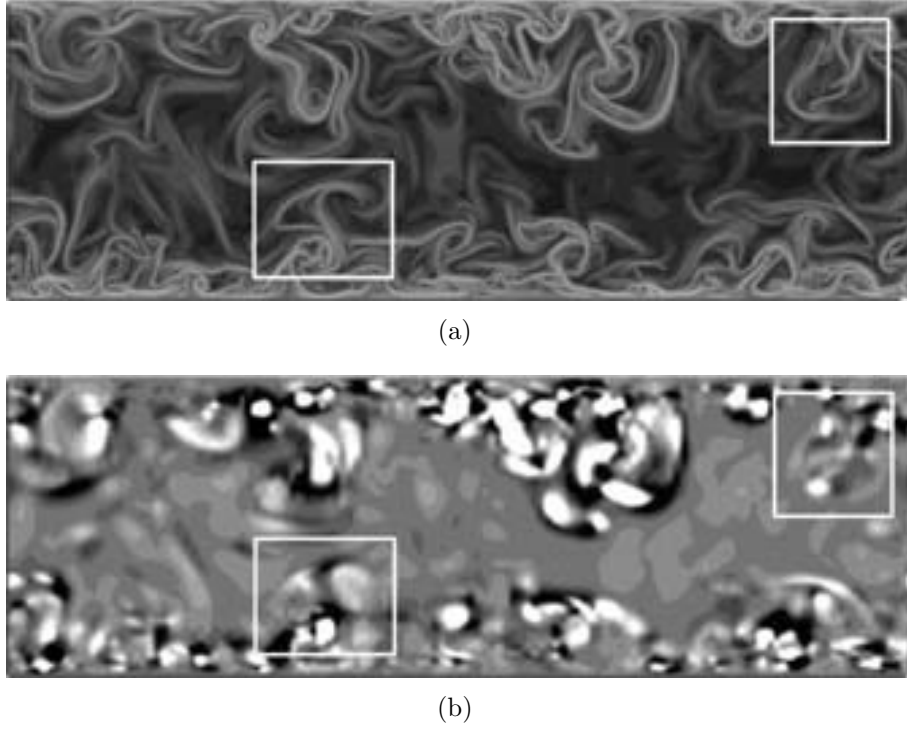


FIGURE 2 – Comparaison de la détection lagrangienne en (a) et eulérienne selon le critère Q en (b) dans un canal turbulent pleinement développé. La figure est tirée de Green *et al.*[2007].

temps fini fournit davantage de détails fins en comparaison du critère Q , en particulier en terme de définition des frontières des structures.

L'exposant de Lyapunov à taille (size) finie (*FSLE*) a été défini par Aurell *et al.*[1997]. L'approche consiste à suivre les trajectoires de deux particules initialement adjacentes et de baser l'exposant sur la durée minimum nécessaire pour obtenir la distance imposée entre les deux particules lors du transport. Cette méthode est une alternative particulièrement populaire en océanographie (A.J.Maiana *et al.*[2002] et F.d'Ovidio *et al.*[2004]). Il semble que la préférence pour *FTLE* ou *FSLE* est davantage basée sur la tradition d'une communauté scientifique particulière mais ne découle pas d'une évaluation des deux approches. Les comparaisons directes entre les *FTLE* et les *FSLE* ont été faites par Boffetta *et al.*[2001] et par Sadlo et Peikert[2007].

Haller and Yuan (2000) ont montré que le transport des particules est fortement dépendant de la topologie des structures cohérentes du fluide (Lagrangian Coherent Structure, *LCS*) qu'ils définissent pour un écoulement périodique comme extrema du champ d'exposant de Lyapunov. Par extension, Haller (2001) définit les structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*) comme les crêtes du champ de *FTLE*. Shadden *et al.*[2005] ont fourni une théorie qui explique les propriétés de mélange et de transport des *LCS*. Les *LCS* peuvent être considérer comme des barrières de transport et apparaissent comme des structures qui séparent des régions aux propriétés dynamiques différentes dans l'écoulement. P.Tallapragada et S.Rose [2012] ont récemment proposé de calculer des structure cohérentes lagrangiennes par la recherche d'ensembles quasi-invariants. Branicki et Wiggins [2010] ont montré l'utilité des *LCS* pour quantifier le mélange par dynamique des lobes. Ces frontières sont a priori dépendantes du temps, et sont advectées par l'écoulement.

Dans ce travail de thèse, on présente une nouvelle méthode de calcul du champ de *FTLE*. Cette méthode utilise une linéarisation locale de l'écoulement et est basée sur la méthode des moments d'ordre 2. Ce nouveau champ scalaire est appelé champ de *M-FTLE*. Cette méthode est comparée avec la méthode du calcul du champ *FTLE* de Shadden et al.[2005]. On a remarqué aussi que notre méthode est proche de la méthode de P.Tallapragada et S.Rose [2012], mais différente dans la méthodologie de calcul. On présente donc, succinctement ci-dessous, les trois méthodologies de calcul qui seront développées par la suite dans ce manuscrit :

- Shadden et al.[2005] ont décrit une méthodologie pour le calcul d'exposant de Lyapunov à temps fini sur des maillages cartésiens réguliers. Les coordonnées initiales des particules transportées par l'écoulement à partir du temps initial t_0 jusqu'au temps $t_0 \pm T$ sont positionnées aux nœuds de la grille et leurs coordonnées au temps $t_0 \pm T$ déterminent le champ de déplacement. L'utilisation d'un maillage cartésien facilite le calcul des composantes du tenseur de Cauchy-Green, obtenues à partir du gradient spatial du champ de déplacement. Les dérivées spatiales sont estimées directement à l'aide d'approximations par différences finies de deuxième ordre. La plus grande valeur propre de ce tenseur est ensuite utilisée pour construire l'exposant de Lyapunov à chaque nœud de la grille et c'est ce champ scalaire que l'on nomme le champ de *FTLE*

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|T|} \ln \left(\sqrt{\lambda_{max}} \right) \quad (2)$$

où, λ_{max} est la plus grande valeur propre du tenseur de Cauchy-Green.

- P.Tallapragada et S.Rose [2012] ont développé une nouvelle méthode de calcul de l'exposant de Lyapunov à temps fini. Cette méthodologie, est basée sur des méthodes probabilistes et évite la linéarisation du flot et la mesure d'étirement d'éléments linéaires. Pour calculer l'exposant de Lyapunov sur un compact, on effectue une partition du domaine en réunion disjointe d'un nombre fini d'ensembles (boîtes), de même mesure (on peut prendre un maillage cartésien régulier). Chaque boîte contient un nombre fixe de particules qui sont transportées par l'écoulement. La densité de probabilité initialement portée par chaque boîte est la densité de loi uniforme. Sous l'action du flux, cette fonction de densité de probabilité est transformée par l'opérateur de Perron-Frobenius associé. On considère I_0 la matrice de covariance de la fonction de densité de probabilité à l'instant initial t_0 et I la matrice de covariance de la densité de probabilité à l'instant t qui est le résultat de la transformation par l'opérateur de Perron-Frobenius dans une boîte. Soit $\lambda_{max}(I)$ la plus grande valeur propre de la matrice I . La valeur de *FTLE* sur une boîte B est donnée par :

$$\sigma_I(B, t_0, t) = \frac{1}{|t - t_0|} \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}(I)}{\lambda_{max}(I_0)}} \right) \quad (3)$$

Si on peut répéter cette procédure pour toutes les boîtes dans le domaine, on obtient le champ de *FTLE*.

- Pour calculer la valeur de *M-FTLE* au point $\mathbf{x}_0$ on considère un domaine circulaire de centre $\mathbf{x}_0$ et de rayon r_0 . Soit E_t l'espace susceptible d'être occupé par le domaine à l'instant t . La distribution de particules sera considérée comme uniforme et de valeur unitaire. Pour caractériser la dispersion des particules, des

grandeurs statistiques sont utilisées : la position moyenne qui est déterminée par les moments d'ordre 1, $\langle x_i \rangle = \int_{E_t} x_i p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ et la dispersion qui est alors caractérisée par la matrice des moments centrés d'ordre 2 $\langle x_i x_j \rangle = \int_{E_t} (x_i - \langle x_i \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle) p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$.

L'évolution de la matrice des moments centrés d'ordre 2 est donnée par une équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dP_{ij}}{dt} &= L_{ip} P_{pj} + L_{jp} P_{pi} \\ P_{ij}(t_0) &= \frac{r_0^2}{4} I_{ij} \end{cases} \quad (4)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{L} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{L}^T \\ \mathbf{P}(t_0) &= \frac{r_0^2}{4} \mathbf{I} \end{cases} \quad (5)$$

où $\mathbf{L} = (L_{ij})$ est le tenseur de gradient de vitesse, $\mathbf{I} = (I_{ij})$ est la matrice identité et $\mathbf{P} = (P_{ij})$ est la matrice des moments d'ordre 2 à l'instant t . Soit $\lambda_{max}(\mathbf{P}(t))$ la plus grande valeur propre de $\mathbf{P}(t)$. La valeur de M -FTLE au point $\mathbf{x}_0$ au temps d'intégration T est donnée par ((Figure 3)) :

$$M_{\sigma_{t_0}}^{t_0+T} = \frac{1}{|T|} \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}(\mathbf{P}(t_0 + T))}{\lambda_{max}(\mathbf{P}(t_0))}} \right) \quad (6)$$

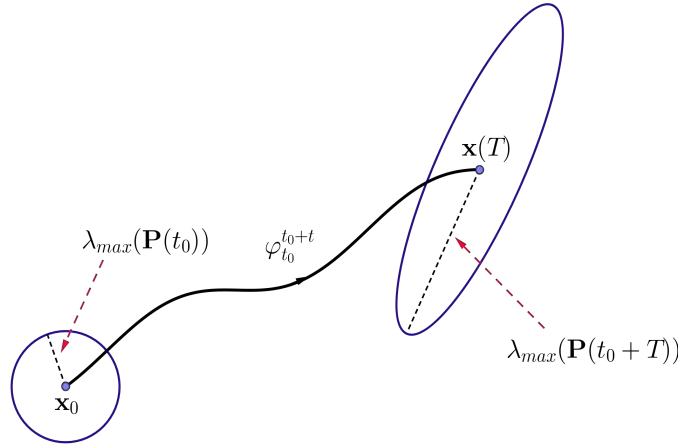


FIGURE 3 – Illustrant de la procédure pour le calcul de M -FTLE.

Dans ce travail, nous montrons que notre définition du champ scalaire de M -FTLE est équivalente à la définition du champ scalaire de $FTLE$ classique (à partir du tenseur Cauchy-Green). Notre méthode est basée sur la matrice des moments d'ordre 2 (on utilise la distribution continue) et sur l'évolution de cette matrice au cours temps, alors que la méthode de P.Tallapragada est basée sur la matrice de covariance de la densité de probabilité (utilisant la distribution discrète) et l'opérateur de Perron-Frobenius. On note que les deux méthodes sont basées sur des méthodes probabilistes mais ne sont pas basées sur la même méthodologie pour le calcul du champ de $FTLE$.

Ce rapport de thèse est divisé en cinq chapitres :

- Le premier chapitre** est une revue de la littérature scientifique portant sur le sujet. L'objectif de ce premier chapitre est de poser quelques bases nécessaires à la compréhension de ce document. La première section est consacrée aux systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. On y présente notamment les systèmes linéaires et variétés invariantes. Dans la seconde section, on présente les outils d'analyse eulérienne et lagrangienne qu'on a évoqués précédemment et plus particulièrement les définitions des champs de *FTLE*, *L-FTLE* et *FSLE* et les méthodes de calcul de *FTLE* à partir du tenseur de Cauchy-green et l'opérateur de Perron-Frobenius. on aborde aussi la définition de *LCS*. Enfin pour visualiser le champ de vitesse on présente un outil la *LIC* (convolution de ligne intégrale).
- Le deuxième chapitre** est consacré à l'intégration numérique des systèmes dynamiques. On y présente quelques algorithmes d'intégration (méthodes d'Euler, Runge-Kutta 2 et 4). La dernière section est consacrée à l'approche d'interpolation qui a été mise en œuvre dans cette thèse pour calculer les champs de vitesse et leurs gradients de vitesse dans un champ de vitesse expérimental.
- Le troisième chapitre** est consacré aux méthodes probabilistes utilisées, la méthode de transport des moments. Dans le cas d'une densité uniforme cette méthode est appliquée sur quelques exemples analytiques (champ de vitesse linéaire, champ de vitesse cylindrique, champ de Hill). Enfin, on étudie le cas de densité gaussienne pour des problèmes plus généraux d'advection-diffusion avec une application au champ de vitesse linéaire.
- Le quatrième chapitre** définit une nouvelle méthode de calcul de l'exposant de Lyapunov à temps fini *FTLE* à partir de la méthode des moments d'ordre 2 exposée au chapitre précédent. Ce nouveau champ scalaire construit est appelée *M-FTLE*. Plus précisément La première section est consacrée à la définition du *M-FTLE* à partir d'une méthode des moments d'ordre 2. La seconde section présente une validation mathématique de cette méthode en comparant pour un point du domaine *FTLE* et *M-FTLE*, ainsi que des exemples analytiques simples (champ de vitesse linéaire, circulaire, hyperbolique) et un exemple numérique (champ de vitesse du double-gyre). Ces calculs de *M-FTLE* sont alors comparés aux résultats présents dans la littérature obtenus avec l'approche classique *FTLE*.
- Le cinquième chapitre** présente deux applications de notre méthode de calcul de *M-FTLE* : la première à partir de données analytiques du champ de vitesse de soliton (qui est un modèle simplifier du mascaret) et la seconde, à partir de données expérimentales obtenues dans notre laboratoire¹, issues de mesures par *PIV* résolues en temps d'un mascaret. L'objectif de cet exemple porte sur la détection des structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*) pour le mascaret à partir du champ de *M-FTLE*. On recherche les *LCS* en deux endroits : au fond du canal, dans la couche limite pour un temps d'intégration donné, et dans la partie haute de l'écoulement où l'on observe une compétition et un chevauchement entre l'écoulement principal et le ressaut se propageant en sens inverse. On s'intéresse dans cet exemple aux cas de nombres de Froude $Fr = 1.29$, $Fr = 1.46$ et $Fr = 1.55$ représentatifs des trois régimes répertoriés du phénomène. Pour cet exemple expérimental, une visualisation de l'écoulement par *LIC* est aussi proposée ainsi qu'une application du critère Q .

1. Institut Pprime, CNRS Université de Poitiers, 86962, Futuroscope, France

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Ce chapitre est une revue de la littérature scientifique portant sur le sujet. L'objectif de ce premier chapitre est de poser quelques bases nécessaires à la compréhension de ce document. La première section est consacrée aux systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. On y présente notamment les systèmes linéaires et variétés invariantes (stables et instables). Dans la seconde section, on présente des méthodes eulériennes et lagrangiennes d'identification des structures cohérentes et les définitions des champs de *FTLE*, *L-FTLE* et *FSLE*, et les méthodes de calcul de *FTLE* à partir du tenseur de Cauchy-green et l'opérateur de Perron-Frobenius.

1.1 Introduction aux systèmes dynamiques linéaires et non linéaires

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps ([20], [21], [22] et [23]). On suppose que l'état d'un système, à un instant donné, peut être représenté par un élément $\mathbf{x}$ d'un espace d'état X . L'espace X est de dimension finie (un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement une variété différentiable). L'évolution du système est décrite par un système différentiel sur X qu'on écrira

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad ; \quad \mathbf{x} \in X \quad (1.1)$$

Où $\mathbf{f}$ est un champ de vecteurs défini à chaque instant dans un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement une variété différentiable). Cette fonction procure pour chaque point $\mathbf{x}$ de X et chaque instant une quantité vectorielle de dimension n , telle qu'une force ou une vitesse. Dans le cadre de cette thèse, on se restreindra aux champs de vecteurs bidimensionnels, c'est à dire au cas où $n = 2$ et $X \subset \mathbb{R}^2$. Si la quantité vectorielle est fixe au cours du temps (i.e. $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$), le champ de vecteurs est dit *stationnaire*, l'équation (1.1) devient :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbf{x} \in X \quad (1.2)$$

Dans le cas contraire on parle de champ de vecteurs *non stationnaire* (ou *instationnaire*), auquel cas ses valeurs dépendent du temps et on définit alors f tel que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de temps, $a \leq t \leq b$. Ainsi, les équations ((1.1)) et (1.2) représente un système d'équations différentielles ordinaires (*EDO*).

1.1.1 Systèmes différentiels et flots (flux)

On considère le système (1.1) et on suppose que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. On suppose que la fonction f est de classe C^∞ sur X . Alors (1.1) représente un système de n équations différentielles ordinaires

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, n$$

Certains types de systèmes sont d'un grand intérêt pour les applications. Entre autres, si f est une application linéaire on dit que le système est *linéaire* (i.e. $\mathbf{f}(x, t) = A(t) \mathbf{x}$ où, $A(t)$ est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$). On obtient alors le système linéaire :

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

Dans le cas contraire, on parle de système *non-linéaire*.

1.1.1.1 Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions :

Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable

$$t \longmapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ dans X , telle que pour tout $t \in I$ on ait

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$$

Le domaine X est appelé *l'espace des phases*.

Soit $\mathbf{a} \in X$, on appelle *problème de Cauchy* ou problème à valeur initiale la recherche de solutions du système (1.1) satisfaisant la condition initiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a}$. Donc, le problème de Cauchy est :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si $\mathbf{f}$ est continue et si elle vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable (Il existe $L > 0$ tel que, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ et $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$, on ait : $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leq L |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$), alors le problème de Cauchy admet une solution unique $x(t)$ pour toute valeur initiale.

1.1.1.2 Le flot d'un système différentiel :

Définition 1.1. *Le flot du système différentiel (1.1) est la famille à un paramètre d'applications $\{\varphi_{t_0}^{t_0+t}\}_{t \in I}$ de X dans lui-même avec $I = [-T, T] \subset \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{a}), \quad \text{pour tout } a \in X$$

où $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{a})$ est l'unique solution du problème de Cauchy (1.4).

On a alors :

Théorème 1.1. *L'application $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ est différentiable sur X . Le flot $\{\varphi_{t_0}^{t_0+t}\}_{t \in I}$ avec $I = [-T, T]$ vérifie les propriétés suivantes :*

- $\varphi_{t_0}^{t_0} = I_d$ où I_d est l'identité de X .
- $\varphi_{t_0+t_1}^{t_0+t_2} \circ \varphi_{t_0}^{t_0+t_1} = \varphi_{t_0}^{t_0+t_2}$ pour tout $t_1, t_2 \in I$ (Loi de composition)

Du théorème précédent on déduit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ est un difféomorphisme de X et que

$$(\varphi_{t_0}^{t_0+t})^{-1} = \varphi_{t_0+t}^{t_0}$$

Bien que l'on ait, par définition, $\varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{a})$, pour tout $t \in I$ et tout $\mathbf{a} \in X$, il ne faut pas confondre le flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{a})$ et la solution $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{a})$. Conceptuellement

- Pour chaque $\mathbf{a} \in X$, la solution $\mathbf{x}(\cdot; t_0, \mathbf{a}) : X \rightarrow X$ donne l'état du système $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{a})$ pour tout $t \in I$, tel que $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$.
- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, le flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t} : X \rightarrow X$ donne l'état du système $\varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{a})$ à l'instant t , pour tout $\mathbf{a} \in X$.

Pour un système linéaire stationnaire (1.25), le flot est donné par

$$\varphi_0^t(\mathbf{a}) = \varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{a}) = e^{tA} \mathbf{a}$$

La matrice exponentielle e^{tA} est définie par la série

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

1.1.1.3 Systèmes dynamiques

Jusqu'à présent nous avons utilisé le vocable "système dynamique" dans un sens informel pour désigner un système physique qui évolue dans le temps. Formellement, on peut définir un système dynamique de la manière suivante.

Définition 1.2. Soit X un espace métrique. Un système dynamique sur X est la donnée d'une famille à un paramètre d'homéomorphismes $\varphi_{t_0}^{t_0+t} : X \rightarrow X$ vérifiant les conditions $\varphi_{t_0}^{t_0} = I_d$ et $\varphi_{t_0+t_1}^{t_0+t_2} \circ \varphi_{t_0}^{t_0+t_1} = \varphi_{t_0}^{t_0+t_2}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Dans la littérature, un tel système dynamique est souvent appelé *système dynamique continu*. Le terme système dynamique discret désigne la donnée d'une famille d'applications $\{g^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ engendrée par les itérations d'un homéomorphisme $g : X \rightarrow X$, c'est-à-dire $g^2 = g \circ g$ et g^{-1} est l'inverse de g .

Du Théorème (1.1), on déduit que le flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ associé au système (1.1) sur X est un système dynamique sur X . Ainsi le système (1.1) définit un système dynamique φ_t et vice versa. Le flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ engendre un système dynamique discret défini par $g = \varphi_{t_0}^{t_0+t}$, où t est une valeur fixée du temps.

1.1.1.4 Orbites et ensembles invariants

Définition 1.3. Étant donné un système (1.1) et le flot associé $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ sur X , l'orbite d'un point $\mathbf{x}_0 \in X$ est l'ensemble

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in X : \exists t \in I, \mathbf{x} = \varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0)\}$$

Les points d'équilibre (ou états stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés du système.

Définition 1.4. Un point $\mathbf{x}_0$ est dit point d'équilibre du système (1.1), s'il satisfait $f(\mathbf{x}_0) = 0$ ou bien de manière équivalente si $\varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ pour tout $t \in I$. Dans le cas contraire on dit que le point $\mathbf{x}_0$ est ordinaire.

De la définition (1.3) on déduit que l'orbite d'un point d'équilibre est réduite au point lui-même :

$$\gamma(x_0) = \{x_0\}$$

Par contre l'orbite d'un point ordinaire est une courbe lisse qui admet en chaque point x le vecteur $f(x)$ comme vecteur tangent. Parmi les points ordinaires on distingue les points périodiques et les points récurrents.

Définition 1.5. *Un point ordinaire $\mathbf{x}_0$ est dit périodique, s'il existe $T > 0$ tel que $\varphi_{t_0+T}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Un point ordinaire x_0 est dit récurrent si pour tout voisinage V de $\mathbf{x}_0$ et tout $T \in \mathbb{R}$ il existe $t > T$ tel que $\varphi_{t_0+t}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) \in V$.*

Si le système possède un point périodique $\mathbf{x}_0$, alors la solution correspondante $\mathbf{x}(\cdot, \mathbf{x}_0)$ est périodique. Si le système possède un point récurrent $\mathbf{x}_0$, alors la solution correspondante $\mathbf{x}(\cdot, \mathbf{x}_0)$ repasse arbitrairement près de $\mathbf{x}_0$ pour des temps suffisamment grands.

Définition 1.6. *Une orbite $\gamma(\mathbf{x}_0)$ telle qu'il existe deux points d'équilibre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ vérifiant $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} \varphi_{t_0+t}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}$ et $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow -\infty} \varphi_{t_0+t}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}$ est dite orbite hétérocline si $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ et orbite homocline si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.*

Définition 1.7. *Dans le cas stationnaire, un ensemble $S \subset X$ est dit **invariant** par le flot $\varphi_{t_0+t}^{t_0+t}$ sur X (ou bien par le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ correspondant) si pour tout $\mathbf{x} \in S$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_{t_0+t}^{t_0+t}(\mathbf{x}) \in S$. Si S vérifie la propriété $\varphi_{t_0+t}^{t_0+t}(\mathbf{x}) \in S$ pour tout $\mathbf{x} \in S$ et tout $t > 0$, alors on dit que S est **positivement invariant**.*

Si S est invariant et $\mathbf{x} \in S$ alors l'orbite $\gamma(\mathbf{x})$ est incluse dans S . Par conséquent un ensemble invariant est une réunion d'orbites.

Dans le cas stationnaire on peut obtenir des ensembles invariants de la manière suivante. Soit $Z : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On note

$$\dot{Z}(\mathbf{x}) = \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$$

la dérivée de la fonction Z dans la direction du champ de vecteurs f . Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de Z et se note $L_f Z$. Soit φ_t le flot du système (1.1) on a

$$\dot{Z}(x) = \frac{d}{dt} Z(\varphi_{t_0+t}^{t_0+t}(\mathbf{x})) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in X$$

Proposition 1.1. *S'il existe une fonction $Z : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\dot{Z}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) Z(\mathbf{x})$ où $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors les sous-ensembles de X définis par $Z > 0$, $Z = 0$ et $Z < 0$ sont invariants par le système (1.1).*

Proposition 1.2. *Si un ensemble positivement invariant M est homéomorphe à la boule de $\mathbb{R}^n$ alors il y a au moins un point d'équilibre dans M .*

Ce résultat est une conséquence du théorème du point fixe de Brouwer. En effet, pour tout n , le flot $\varphi_{1/n}$ possède un point fixe $\mathbf{x}_n$. Par compacité, la suite $(\mathbf{x}_n)$ admet une sous-suite qui converge vers un point d'équilibre $\mathbf{x}$ dans M .

1.1.2 Linéarisation des systèmes stationnaires

La première étape dans l'étude qualitative d'un système consiste en l'étude du système au voisinage de ses points d'équilibre. Considérons un système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sur X et soit $\mathbf{a}$ un point d'équilibre (ainsi $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$). Le système linéaire

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}, \quad \text{avec} \quad A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right) \quad (1.5)$$

s'appelle *le linéarisé du système* au point $\mathbf{a}$.

1.1.2.1 Système linéaire

Étant donné un système linéaire $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$, on considère les valeurs propres λ de la matrice A , qui sont complexes et non distinctes en général, et les sous-espaces vectoriels caractéristiques associés E_λ . On définit

$$\text{le sous espace stable} \quad E^s = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda < 0} E_\lambda$$

$$\text{le sous espace instable} \quad E^u = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda > 0} E_\lambda$$

$$\text{le sous espace central} \quad E^c = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda = 0} E_\lambda$$

Alors

$$w \in E^s \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{t_0}^{t_0+t}(w) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} w = 0$$

$$w \in E^u \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{t_0}^{t_0+t}(w) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} w = 0$$

Par conséquent toutes les solutions issues de conditions initiales dans le sous-espace stable sont attirées vers l'origine tandis que celles issues de conditions initiales dans le sous-espace instable sont repoussées par l'origine. En particulier, lorsque $E^s = \mathbb{R}^n$ toutes les solutions tendent vers l'origine, qui est appelée un puits, et lorsque $E^u = \mathbb{R}^n$ toutes les solutions proviennent de l'origine qui est appelée une source. Si ni E^s , ni E^u n'est réduit à $\{0\}$, et que $E^c = \{0\}$ l'origine est appelée un point selle.

1.1.2.2 Théorème de Hartman-Grobman :

On se propose de comparer, au voisinage d'un point d'équilibre $\mathbf{a}$, les solutions du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, et celles de son linéarisé (1.5).

Définition 1.8. Le point d'équilibre $\mathbf{a}$ du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est dit hyperbolique lorsque toute valeur propre de la matrice $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ a une partie réelle non nulle.

Définition 1.9. Deux flots $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ et $\psi_{t_0}^{t_0+t}$ sont dits topologiquement équivalents dans des voisinages de points d'équilibre, s'il existe un homéomorphisme h qui envoie le point d'équilibre du premier flot sur le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est-à-dire $h \circ \varphi_{t_0}^{t_0+t} = \psi_{t_0}^{t_0+t} \circ h$.

Théorème 1.2. (Hartman-Grobman) Considérons un système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, de flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$. Si $\mathbf{a}$ est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage V de $\mathbf{a}$ sur lequel le flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$ est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en $\mathbf{a}$.

En d'autres termes le théorème signifie que dans le voisinage V d'un point d'équilibre, les orbites d'un système peuvent être déformées continûment dans les orbites de son linéarisé. En particulier, si toutes les valeurs propres du linéarisé ont une partie réelle strictement négative, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \rightarrow \infty$. De la même manière, lorsque toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement positive, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \rightarrow -\infty$. Cette remarque justifie la définition suivante.

Définition 1.10. *Un point d'équilibre $\mathbf{a}$ d'un système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est appelé un puits (resp. une source) si toutes les valeurs propres de la matrice $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ ont une partie réelle strictement négative (resp. positive). Un point d'équilibre hyperbolique qui n'est ni un puits, ni une source est appelé un point selle.*

1.1.2.3 Variétés invariantes

La variété stable $W^s(\mathbf{a})$ d'un point d'équilibre $\mathbf{a}$ du système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est une variété différentiable qui est tangente en $\mathbf{a}$ au sous-espace stable E^s du linéarisé (1.5) en $\mathbf{a}$ et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers $\mathbf{a}$ quand $t \rightarrow \infty$, i.e.

$$W^s(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x}_0 \in X \quad : \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}\}$$

De même la variété instable $W^u(\mathbf{a})$ du point d'équilibre $\mathbf{a}$ est une variété différentiable qui est tangente en $\mathbf{a}$ au sous espace instable E^u et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers $\mathbf{a}$ quand $t \rightarrow -\infty$.

$$W^u(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x}_0 \in X \quad : \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}\}$$

Enfin la variété centrale W^c est une variété tangente en au sous-espace central E^c . Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en $\mathbf{a}$. Il y a unicité des variétés stable W^s et instable W^u , par contre il y a une infinité de variétés centrales.

1.1.2.4 Exemples :

Exemple (1) :

On considère le système sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre. On l'écrit sous la forme matricielle

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, et les vecteurs propres correspondants sont $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, les variétés stable et instable (Figure 3.22) sont :

$$W^s = E^s = \{(x, y) \quad : \quad x = 0\}$$

$$W^u = E^u = \{(x, y) \quad : \quad y = 0\}$$

Exemple (2) :

(I) On considère le système sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre et la variété stable (Figure 1.1(b)) est

$$W^s = E^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

(II) On considère le système sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre, et la variété instable (Figure 1.1(c)) est

$$W^u = E^u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

Exemple (3) :

On considère le système sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + 8y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{cases}$$

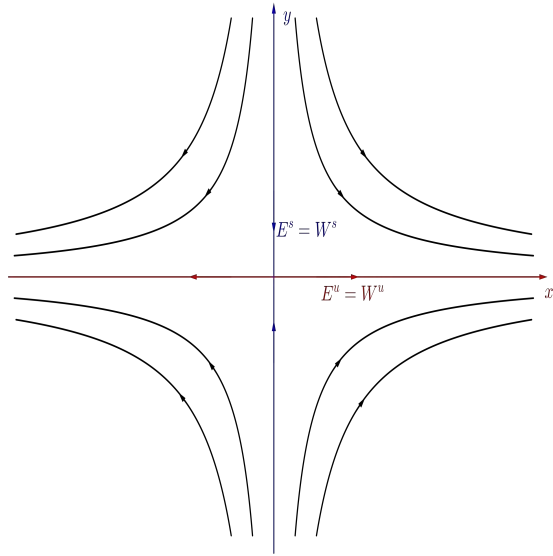
On l'écrit sous la forme matricielle

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

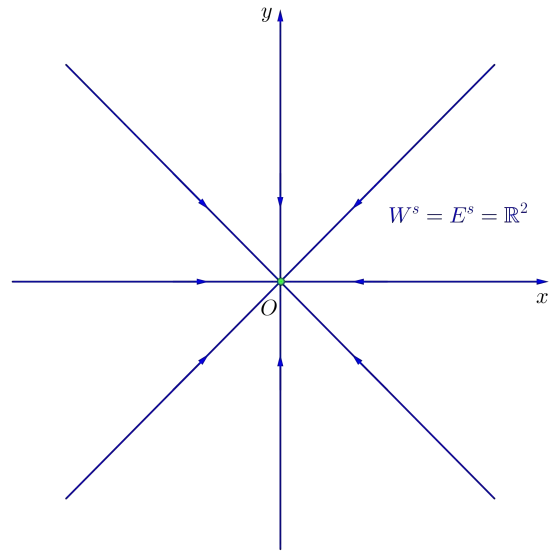
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$, et les vecteurs propres correspondant sont $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, les variétés stable W^s et instable W^u (Figure 1.1(d)) sont

$$W^s = E^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{2}x\}$$

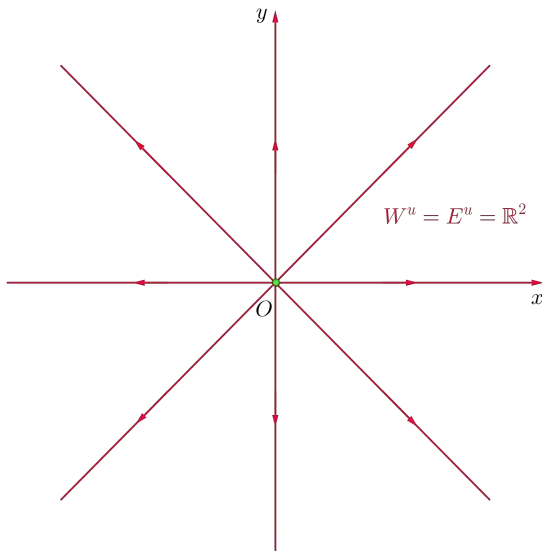
$$W^u = E^u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = +\frac{1}{2}x\}$$



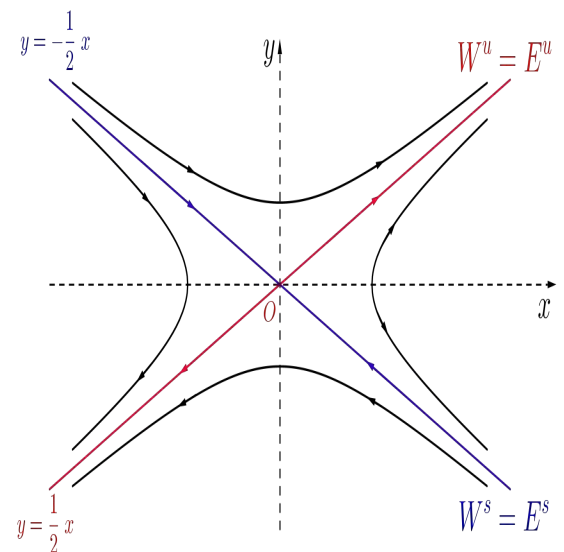
(a) Les variétés invariantes de l'exemple (1)



(b) Les variétés invariantes de l'exemple (2-I)



(c) Les variétés invariantes de l'exemple (2-II)



(d) Les variétés invariantes de l'exemple (3)

FIGURE 1.1 – Des variétés stable E^s et instable E^u pour quelque systèmes linéaires.

Exemple (4) :

On considère le système sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y + 3x^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

L'origine est un point d'équilibre. Le linéarisé en ce point d'équilibre est

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Comme dans l'exemple (1),

$$\begin{aligned} E^s &= \{(x, y) : x = 0\} \\ E^u &= \{(x, y) : y = 0\} \end{aligned}$$

Pour calculer la solution du système, on suppose que y est de la forme $s(x)$: on a alors, $\dot{y} = s'(x)\dot{x}$ et donc $xs'(x) + s(x) - 3x^2 = 0$. Dont la solution est $s(x) = x^2$. La fonction $Z(x, y) = y - x^2$ vérifie $\dot{Z} = -Z$ ($\dot{Z} = \dot{y} - 2x\dot{x} = -y + 3x^2 - 2x^2 = -y + x^2 = -Z$). Ainsi d'après la proposition 1.1, la parabole $y = x^2$ est un ensemble invariant et on obtient les variétés stable W^s et instable W^u (Figure 2.2)

$$\begin{aligned} E^u &= \{(x, y) : y = 0\} \quad , \quad W^u = \{(x, y) : y = x^2\} \\ W^s &= E^s = \{(x, y) : x = 0\} \end{aligned}$$

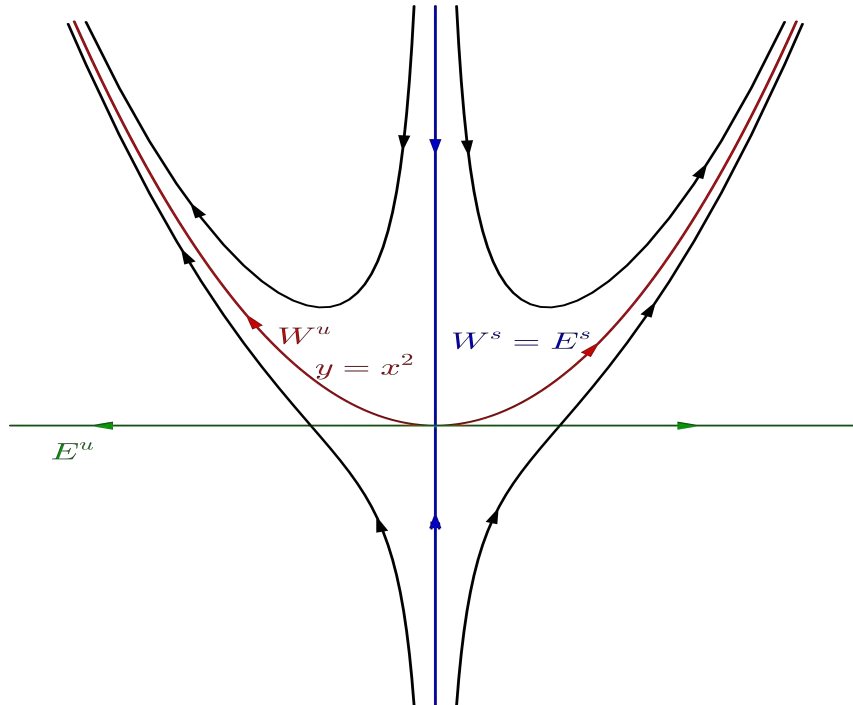


FIGURE 1.2 – Variétés invariantes du système (1.6), où la variété instable $W^u = \{(x, y) : y = x^2\}$ et la variété stable $W^s = \{(x, y) : x = 0\}$.

1.2 Notion de structure cohérente

Depuis l'identification par Brown et Roshko [71] en (1974), de structures jouant un rôle majeur dans le mélange d'un écoulement turbulent, la recherche de structures cohérentes a été un des principaux axes d'étude en mécanique des fluides. Dans cette section, on va présenter des méthodes eulérienne et lagrangienne pour de détection de structures cohérentes. Ces structures cohérents permettent d'identifier les frontières matérielles et apportent des éclaircissements sur les mécanismes du mélange au sein de l'écoulement considéré.

1.2.1 Méthodes eulérienne d'identification des structures cohérentes

La notion de structure cohérente est apparue dans les années 70 grâce à des observations expérimentales telle que la visualisation d'une couche de mélange par Brown et Roshko [71] en (1974). Cette découverte revêt une importance capitale dans la mesure où elle introduisait une forme d'organisation dans le chaos structurel de la turbulence. Toutefois, malgré quatre décennies d'intenses recherches, il n'existe, à l'heure actuelle, aucun consensus sur la définition d'une structure cohérente comme en témoigne la diversité des définitions sélectionnées par Lumley [72] en (1990) et synthétisées ici :

- Hussain : "Une structure cohérente est un domaine où le rotationnel instantané présente un fort niveau de corrélation spatiale."
- Perry : "Une structure cohérente est un motif récurrent de l'écoulement. Cela n'implique pas la notion d'ordre, les échelles de vitesse, de longueur peuvent être aléatoires, mais le motif doit avoir des caractéristiques d'orientation fixes grâce auxquelles il devient identifiable."
- Kline : "Les structures cohérentes sont des événements récurrents qui sont essentiels à la dynamique (production des tensions de Reynolds, dissipation d'énergie cinétique de turbulence...)"
- Stull : "Les structures cohérentes sont des entités qui assurent un transport (de quantité de mouvement, de scalaire...) de type non diffusif sur des distances finies."
- Wygnanski : "Les structures cohérentes sont les modes prédominants d'instabilité."

Il est également utile de mentionner que dans sa recherche d'une définition objective, Haller [81] définit un tourbillon comme un tube matériel dans lequel les particules fluide ne sont pas alignées avec les directions suggérées par les vecteurs propres du gradient de vitesse. Le critère d'identification associé à cette définition est basé sur une méthode dérivative d'ordre élevé. Cependant, pour avoir un niveau de précision suffisant, cette méthode demande un maillage très raffiné.

Dans cette section, on va présenter les différentes techniques d'identification de structures cohérentes (vorticité, critères : Q , λ_2 , Δ , Γ_1 et Γ_2). La structure cohérente eulérienne est généralement identifiée grâce à son centre, Strawn et al.[76] définissent le centre d'un tourbillon comme étant un maximum local du module de la vorticité. L'analyse par vorticité a été pendant longtemps l'unique technique de post-traitement. En se basant sur les gradients de champ de vitesse, elle présente l'inconvénient majeur de ne pas faire la distinction entre cisaillement et tourbillon. Le critère λ_2 proposé par Hussain [75] consiste à chercher les valeurs propres du tenseur symétrique du tenseur gradient de vitesse. Les zones à valeurs propres négatives correspondent à des régions

à pression minimale locale dû au mouvement tourbillonnaire. La technique du discriminant proposée par Chong et al. [80] définit les régions ayant des valeurs propres complexes comme centre tourbillonnaire. Les méthodes Γ_1 et Γ_2 ont été développés par Graftieux et al. [77] et Michard et al. [78]. Elles se basent sur le critère Γ_1 ou moment angulaire normé et le critère Γ_2 . Ces techniques sont capables de localiser le centre et la limite du tourbillon en considérant uniquement la topologie de champ de vitesse indépendamment de son intensité.

1.2.1.1 Une vorticité maximale

La vorticité est un vecteur utilisé pour mesurer le taux de rotation de l'écoulement. Sa direction spécifie l'axe de rotation de l'écoulement. Elle est définie par

- Pour écoulement en bidimensionnel :

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1.7)$$

Avec, $\vec{u} = (u, v)$ est le vecteur vitesse, ∇ est l'opérateur gradient.

- Pour écoulement tridimensionnel :

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (1.8)$$

Avec, $\vec{u} = (u, v, w)$ est le vecteur vitesse.

1.2.1.2 Critère Q

Le critère Q proposé par Hunt et al. [74], définit les tourbillons comme étant la région où l'écoulement est dominé par le tenseur rotation. Par conséquent, les structures tourbillonnaires sont identifiées par une représentation des iso-valeurs de Q positives alors que leurs centres sont identifiés par les valeurs maximales de Q . Le critère Q est défini en 2D par :

$$Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (1.9)$$

Où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ω : Terme rotation du tenseur de gradient de vitesse.

S : Terme de cisaillement du tenseur de gradient de vitesse.

Une région positive de Q met en exergue une zone où le taux de rotation est supérieur au taux de déformation et traduit la présence d'un tourbillon. Au contraire, une région négative de Q indique une zone de cisaillement.

1.2.1.3 Critère λ_2

Ce critère consiste à chercher les valeurs propres du tenseur symétrique $S^2 + \Omega^2$. En 2D, on peut montrer que [79] :

$$\lambda_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.10)$$

Les zones où les valeurs propres sont négatives ($\lambda_2 < 0$) correspondent à des régions à pression minimale locale due au mouvement tourbillonnaire. Le centre de tourbillon est identifié par l'extremum de la fonction λ_2 . Pour un écoulement incompressible et en 2D, $Q = -\lambda_2$.

1.2.1.4 Les critères Γ_1 et Γ_2

Les critères Γ_1 et Γ_2 sont différents des techniques précédentes basées sur le tenseur de gradient des vitesses. Ces techniques défini seulement en 2D et utilisent la topologie du champ de vitesse. La fonction scalaire adimensionnelle normalisée Γ_1 ($-1 < \Gamma_1 < 1$) est définie en un point fixe P par :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{S} \int_{M \in S} \frac{(\overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{U_M}) \cdot \overrightarrow{U_z}}{\|\overrightarrow{PM}\| \|\overrightarrow{U_M}\|} dS \quad (1.11)$$

S : surface d'intégration occupée par l'éventuel tourbillon.

M : un point de l'étendu S .

$\overrightarrow{U_z}$: Vecteur normal au plan de mesure .

La fonction adimensionnelle Γ_1 se simplifie comme suit :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{S} \int_{M \in S} \sin(\theta_M) dS \quad (1.12)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{N} \sum_S \sin(\theta_M) \quad (1.13)$$

θ_M étant l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{U_M}$ et $\overrightarrow{PM}$.

N est le nombre de nœuds de la surface d'intégration qui entourent le point P .

Cette fonction procure un moyen pour quantifier la topologie des lignes des courant de l'écoulement à la proximité du point P ainsi que le signe de rotation du tourbillon. Généralement, au voisinage du centre d'un tourbillons Γ_1 atteint une valeur très proche de 1.

Graftieaux et al.[77] ont amélioré ce critère pour le rendre invariant par transformation galiléenne. La fonction scalaire adimensionnelle normalisée $|\Gamma_2|$, représente une amélioration de Γ_1 . Elle est définie en un point fixe P par :

$$\Gamma_2 = \frac{1}{S} \int_{M \in S} \frac{(\overrightarrow{PM} \wedge (\overrightarrow{U_M} - \overrightarrow{U_P})) \cdot \overrightarrow{U_z}}{\|\overrightarrow{PM}\| \|\overrightarrow{U_M}\|} dS \quad (1.14)$$

$\overrightarrow{U_P} = \frac{1}{S} \int_{M \in S} U dS$: La vitesse locale de convection.

Généralement, au voisinage du centre d'un tourbillon $|\Gamma_2|$ atteint une valeur très proche de 1.

1.2.1.5 Critère $\mathbf{M}_z$

Haller[81] considère le problème d'identification des structure tourbillonnaire selon le principe d'objectivité dans un changement de repère $\mathbf{y} = \mathbf{T}(t) \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, où $\mathbf{T}(t)$ est un tenseur propre orthogonal qui dépend du temps et $\mathbf{b}(t)$ est un vecteur de translation instationnaire. La définition d'un tourbillon donné par Haller [81] provient de considérations lagrangiennes mais utilise des quantités eulériennes. Haller [81] montre que les trajectoires sont hyperboliques si le tenseur d'accélération de $\mathbf{S} = [S_{ij}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$:

$$\mathbf{M}_\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \mathbf{S} + (\nabla \mathbf{S}) \mathbf{J} + \mathbf{S} (\nabla \mathbf{J}) + (\nabla \mathbf{J})^t \mathbf{S} \quad (1.15)$$

est défini positif sur une surface Z de déformation nulle $\mathbf{S} = 0$ se déplaçant avec l'écoulement. Cet ensemble particulier est noté $\mathbf{M}_{\mathbf{S}Z}$. Les trajectoires hyperboliques sont responsables de l'étirement et du repliement. Les tourbillons sont les trajectoires pour lesquelles le tenseur $\mathbf{M}_\mathbf{S}$, qui est par ailleurs objectif, est indéfini. La zone où le tenseur précédent est indéfini correspondent par conséquent aux structures cohérentes d'après Haller[81].

1.2.1.6 L'intensité de rotation

Ce concept a été introduit par Chong et al.[80] puis relié aux autres critères d'identification de tourbillons ($Q, \lambda_2, \dots$) par Chakraborty et al.[86]. L'utilisation de "l'intensité de rotation" est une approche basée sur une analyse locale du tenseur gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$. Les valeurs propres du tenseur $\nabla \mathbf{u}$ résultent de l'équation caractéristique, $\det [\nabla \mathbf{u} - \lambda \mathbf{I}]$ où $\mathbf{I}$ est la matrice unitaire. L'équation caractéristique pour un écoulement 3D peut se mettre sous la forme :

$$\lambda^3 + P \lambda^2 + Q \lambda + R = 0 \quad (1.16)$$

où P , Q et R sont les trois invariants de $\nabla \mathbf{u}$ définis par :

$$\begin{aligned} P &= -\nabla \cdot \mathbf{u} \\ Q &= \frac{1}{2} [(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \text{tr}(\nabla \mathbf{u}^2)] \\ R &= -\det(\nabla \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, ce qui conduit à $P = 0$, l'équation caractéristique devient :

$$\lambda^3 + Q \lambda + R = 0 \quad (1.18)$$

Le tenseur $\nabla \mathbf{u}$ possède une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées lorsque le discriminant Δ associé à l'équation caractéristique 1.18 est positif :

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} R \right)^2 + \left(\frac{1}{3} Q \right)^3 > 0 \quad (1.19)$$

Le critère Δ consiste à considérer qu'il existe une structure cohérente aux points où $\Delta > 0$, c'est à dire aux points où il existe des valeurs propres complexes conjuguées de $\nabla \mathbf{u}$. En effet, on peut dans ce cas noter les trois valeurs propres λ_r , $\lambda_{cr} + i \lambda_{ci}$ et $\lambda_{cr} - i \lambda_{ci}$ et les trois vecteurs propres associés $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_{cr} + i \mathbf{v}_{ci}$ et $\mathbf{v}_{cr} - i \mathbf{v}_{ci}$ et écrire

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_{cr} & \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{cr} & \lambda_{ci} \\ 0 & -\lambda_{ci} & \lambda_{cr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_{cr} & \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.20)$$

Les trajectoires des particules dans le système de coordonnées (x_r, x_{cr}, x_{ci}) curvilinéaires de vecteurs directeurs $(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{cr}, \mathbf{v}_{ci})$ sont :

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x_r(0) \exp(\lambda_r t) \\ x_{cr}(t) &= \exp(\lambda_{cr} t) [x_{cr}(0) \cos(\lambda_{ci} t) + x_{ci}(0) \sin(\lambda_{ci} t)] \\ x_{ci}(t) &= \exp(\lambda_{cr} t) [x_{cr}(0) \cos(\lambda_{ci} t) - x_{ci}(0) \sin(\lambda_{ci} t)] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Nous pouvons voir d'après ces équations que la composante x_r ne suit qu'un mouvement monotone, tandis que les composantes x_{cr} et x_{ci} sont quasi-périodiques avec une pulsation λ_{ci} . La figure 1.3 représente une ligne de courant obéissant à ces équations. λ_r détermine le taux d'étirement ou de compression de l'écoulement suivant l'axe du tourbillon, λ_{cr} donne le taux de croissance/décroissance du "rayon" du tourbillon et λ_{ci} détermine "l'intensité" de rotation autour du cœur du tourbillon.

Zhou et al. (1999) suggèrent d'utiliser une iso-surface calculée à partir d'une valeur de λ_{ci} égale à environ 2% de la valeur maximale atteinte dans l'écoulement (pour un écoulement de type couche limite turbulente). Considérons la projection des trajectoires d'une particule dans le plan $(\mathbf{v}_{cr}, \mathbf{v}_{ci})$. L'équation 1.21 montre que la période d'une recirculation est $2\pi/\lambda_{ci}$. Deux particules qui sont initialement séparées de d_0 dans le plan $(\mathbf{v}_{cr}, \mathbf{v}_{ci})$, après N recirculation sont séparées une distance d_f donnée par :

$$\frac{d_f}{d_0} = \exp(2\pi N \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_{ci}}) \quad (1.22)$$

On peut remarquer que la valeur $\lambda_{cr}/\lambda_{ci} = 0$ correspond à $d_f = d_0$, qui n'est autre qu'une trajectoire parfaitement circulaire, alors que $\lambda_{cr}/\lambda_{ci}$ positif (négatif) traduit un mouvement spiral qui diverge (ou converge) dans le plan du tourbillon. Chakraborty et al.[86] utilisent ces arguments pour raffiner la détection $\lambda_{ci} > \alpha$ en combinant avec un critère supplémentaire basé sur $\lambda_{cr}/\lambda_{ci}$.

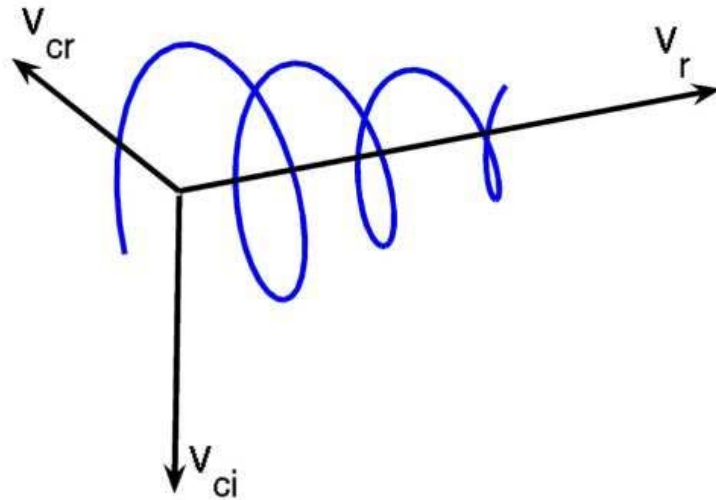


FIGURE 1.3 – Ligne de courant obtenue d'après les équations 1.21 pour $\lambda_r = 0.3$, $\lambda_{cr} = -1$ et $\lambda_{ci} = 20$ [88].

Dans ce paragraphe, plusieurs outils mathématiques ont été proposés pour l'identification et la caractérisation des structures tourbillonnaires. Le plus répandu est la vorticité. C'est l'outil le plus simple, il est très souvent utilisé mais il est aussi reconnu

pour sa sensibilité vis-à-vis d'une couche de cisaillement. Ainsi, Cucitore et al.[81], ont montré que la vorticité n'est pas appropriée pour l'identification des tourbillons, car elle ne fait pas de distinction entre le cisaillement du fluide et un vrai mouvement rotatif lié à un tourbillon. De ce fait, d'autres critères ont été suggérés pour remédier à ce problème, par exemple les critère Q [74] et λ_2 [74].

Kolàr [83] présente les limites du critère λ_2 pour la détection et la caractérisation des structures tourbillonnaires; le critère λ_2 ne permet pas de détecter le minimum de pression le long d'une structure tourbillonnaire mais plutôt dans un plan perpendiculaire à l'axe du vortex. Pour mieux cerner l'efficacité d'un critère donné de détection de vortex, nous avons introduit du bruit dans un champ analytique étalon initial. Nous avons représenté les champs de vorticité ω , les champ λ_2 et Γ_2 (Fig.1.4 et Fig.1.5) calculés à partir d'un champ de vitesse analytique étalon, le champ de Taylor Green.

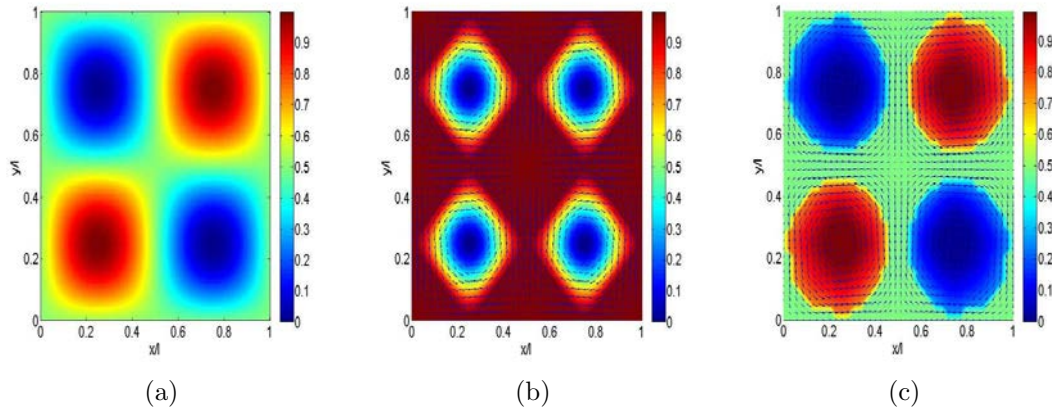


FIGURE 1.4 – Champs non bruités; (a) Vorticité Instantanée, (b) champ de λ_2 , (c) Champ de Γ_2 (seuillage à 55 %) [87].

Les critères λ_2 et la vorticité ont montré leur limite dans la détection des vortex dans ce type d'écoulement comme montré par les figures 1.4 et 1.5. Ceci prouve l'intérêt du critère intégral (Γ_2), pour la détection et la caractérisation des vortex. Aloui et al[84]. ont utilisé le critère Γ_2 et on montré que ce critère permet de faire apparaître les structures tourbillonnaires qui sont noyées dans l'écoulement notamment dans les milieux confinés.

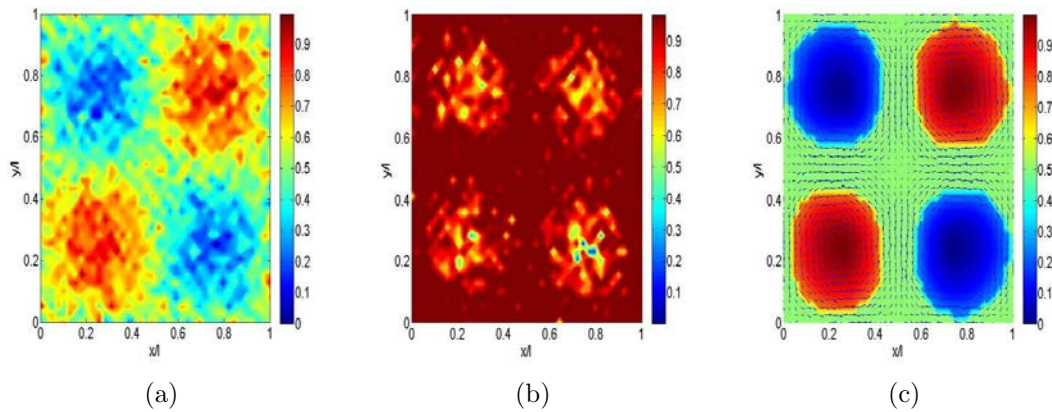


FIGURE 1.5 – Champs bruités; (a) Vorticité Instantanée, (b) champ de λ_2 , (c) Champ de Γ_2 (seuillage à 55 %) [87].

La notion de tourbillon se heurte à la problématique de définition précise d'un tourbillon. De nombreuses définitions ont été attribuées à ce qu'est une structure tourbillonnaire cohérente et plusieurs algorithmes de détection ont été associés à ces définitions (Haller [81]). Globalement, un vortex est une zone où il y a un mouvement de rotation d'une multitude de particules matérielles autour d'un centre commun (définition de Lugt, d'après [81]). La vorticité peut donner un niveau de mouvement de rotation, mais un niveau d'iso-vorticité pour délimiter un tourbillon peutêtre imprécis dans le sens où un fort niveau de vorticité peut aussi être associé à une zone de cisaillement. De plus, l'identification de grandes structures cohérentes par la vorticité peut être fortement perturbée par la turbulence de petite échelle. Une méthode de détection qui permet de limiter ces perturbations dues à la turbulence de petite échelle a été employée ici. Elle est issue du travail de Graftieaux et al.[84].

1.2.2 Méthodes lagrangienne d'identification des structures cohérentes

Plus récemment, Haller (2000, 2001, 2002), Shadden et al.[2005] et Lekien et al.[2007] se sont intéressés à l'application des méthodes de la théorie des systèmes dynamiques aux problèmes de transport lagrangien et de mélange dans un écoulement. Ils ont mis en évidence dans des champs d'écoulement évoluant dans le temps, des structures invariantes et des structures lagrangiennes cohérentes qui définissent, dans une zone d'étude, des régions avec des comportements dynamiques différents et qui, par conséquent, influencent le transport. L'approche lagrangienne pour ces invariants dans un écoulement est liée aux structures qui se dessinent avec l'advection de traceurs passifs. C'est pourquoi les structures cohérentes issues de l'étude des trajectoires des particules dans un fluide sont qualifiées de lagrangiennes. Les structures lagrangiennes cohérentes identifiées sont des invariants stables ou instables responsables de l'étirement ou du confinement des particules. Le squelette formé par ces invariants joue ainsi un rôle clé dans le transport des particules.

Dans cette section, on va présenter des outils de visualisation des propriétés de l'écoulement. Au début, on va montrer la méthode de convolution de ligne intégrale (*LIC*) pour visualiser un champ de vitesse. Puis, on va présenter des définition d'exposants de Lyapunov à temps fini *FTLE* , exposant de Lyapunov localisé à temps fini (*L-FTLE*) et exposants de Lyapunov à taille finie (*FSLE*).

1.2.2.1 Visualisation d'un champ de vitesse (*LIC*)

Pour visualiser un champ de vitesse, on va utiliser la méthode de convolution de ligne intégrale (*LIC*). Cette méthode a été utilisée dans cette thèse pour visualiser les champs de vitesse. La technique de *LIC* permet de visualiser un champ de vitesse grâce à une image du bruit blanc dont on trace le chemin dans l'image en fonction du champ de vecteur. La *LIC* a été historiquement introduite par Cabral et Leedom [67] en 1993. puis améliorée et étendue par la suite ([68], [69] et [70]).

La *convolution* est une opération courante en traitement d'image.   tant donnée une image d'entrée, chaque valeur des pixels de l'image de sortie est calculée comme une moyenne pondérée des valeurs d'une petite région de pixels de l'image d'entrée. La pondération utilisée pour multiplier les valeurs des pixels d'entrée est définie par une fonction appelée *noyau de convolution*.

Le principe de la *LIC* consiste à choisir une trajectoire passant par le pixel à calculer

comme support du noyau de convolution. Soit D un compact, $\mathbf{u} : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ un champ de vecteur (voir la figure 1.6).

On prend un maillage cartésien et une image d'entrée (généralement un bruit blanc).

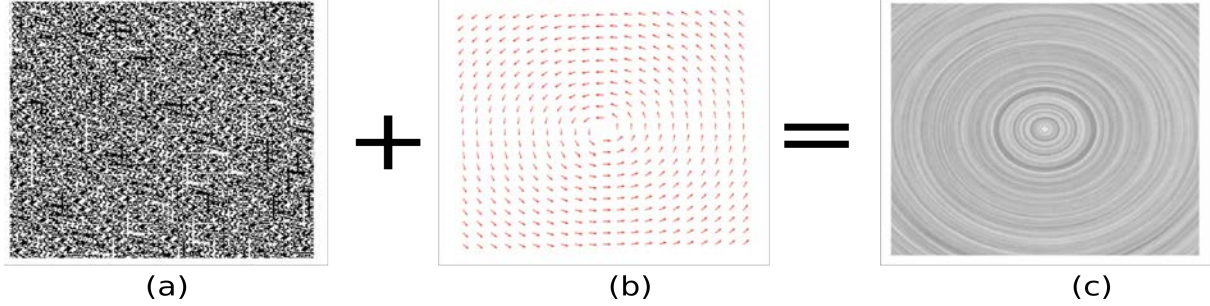


FIGURE 1.6 – Visualisation d'un champ de vecteur 2D circulaire en utilisant l'algorithme *LIC*. Un bruit blanc (a), le champ de vitesse circulaire (b) et *LIC* du bruit blanc en fonction du champ vectoriel (c).

La trajectoire support est intégrée dans les deux directions à partir de la position du pixel courant dans le champ de vecteur. La valeur des pixels d'entrée se trouvant sur la trajectoire est multipliée au cours de l'intégration par un coefficient de pondération calculé comme l'intégrale exacte de la fonction k du noyau de convolution. Ces coefficients de pondération peuvent être exprimés de la façon suivante :

$$h_i = \int_{s_i}^{s_i + \Delta s_i} k(w) dw$$

où Δs_i est la taille (longueur) du $i^{\text{ème}}$ pas d'intégration, s_i est la distance parcourue après i pas (voir Figure 1.7).

$$s_0 = 0 \quad \text{et} \quad s_i = s_{i-1} + \Delta s_{i-1}$$

et $k(w)$ est la fonction de Hanning. On prend

$$k(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} w\right) \quad (1.23)$$

avec L la longueur de la trajectoire (dans ce travail, on choisit L selon le nombre de pas de temps, comme nombre de pas de temps = $50 * dt$).

En utilisant le résultat de l'intégration h_i comme variable de pondération, on peut calculer les résultats de la convolution pour chaque pixel comme (voir Figure 1.8) :

$$I^{\text{out}}(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^l I^{\text{in}}(P_i) h_i + \sum_{i=0}^{l'} I^{\text{in}}(P'_i) h'_i}{\sum_{i=0}^l h_i + \sum_{i=0}^{l'} h'_i} \quad (1.24)$$

où

$I^{\text{out}}(x, y)$ est la valeur du pixel de sortie en (x, y) ,

$I^{\text{in}}(P_i)$ est la valeur du pixel du bruit blanc d'entrée au point P_i ,

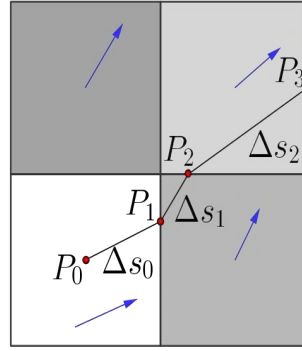


FIGURE 1.7 – Illustration du calcul numérique de la trajectoire d'un point pour voir Δs_i .

P_i est la position au $i^{\text{ème}}$ pas d'intégration de la trajectoire dans la direction positive,
 P'_i est la position au $i^{\text{ème}}$ pas d'intégration de la trajectoire dans la direction négative,
 $P_0 = (x, y)$

l et l' sont les nombre de pas de temps suivant les directions positive et négative respectivement,

h_i et h'_i sont des variables de pondération décrites ci-dessus.

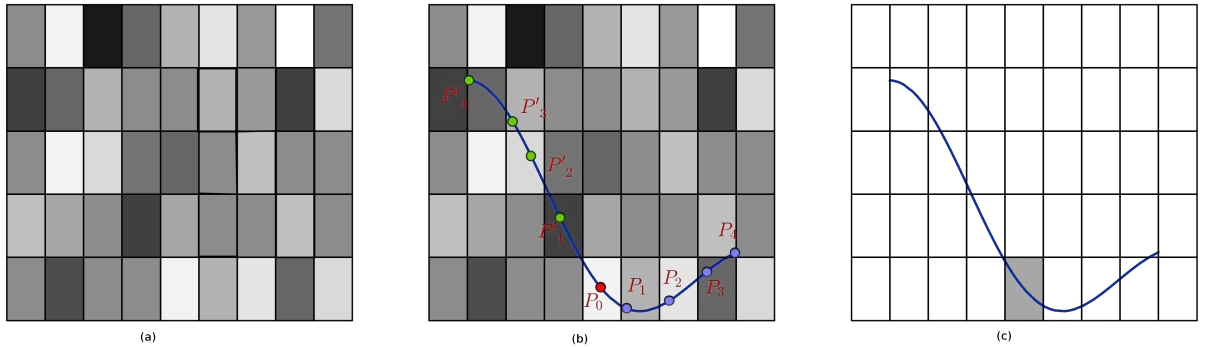


FIGURE 1.8 – Processus de convolution pour *LIC*. Pour calculer un pixel de la texture finale (c), on intègre une trajectoire de part et d'autre du pixel (b) et on fait une moyenne pondérée des intensités des pixels traversés dans la texture d'entrée.

On prend un exemple simple d'un noyau de convolution bidimensionnel supporté par un champ de vitesse circulaire. La figure (1.6) montre une image obtenue avec l'algorithme *LIC* à partir d'un bruit blanc pour des valeurs de L différentes, où la convolution de la figure (1.6(a)) dont les pixels ont des valeurs aléatoires (bruit blanc) donnera l'image de même taille de la figure (1.6(b)).

1.2.2.2 Champ d'Exposants de Lyapunov à temps fini (*FTLE*)

Miller et al [4] ont utilisé, en 1997, les propriétés hyperboliques d'un champ de vitesses périodique, à travers sa fonction courant pour identifier les variétés stable et instable du flot, et étudier la dynamique. De là, Haller a formalisé dès l'année suivante

[10] l'identification de structures hyperboliques par l'étude du champ de vitesses d'un système à deux dimensions, lorsqu'un point de stagnation est présent. Le caractère contraignant bi-dimensionnel a été ensuite levé par Haller lui-même [8, 9], puis généralisé par Lekien et al. [6] à des systèmes de dimension quelconque. La méthode initialement proposée par Haller est reprise comme méthode de référence dans la littérature [3, 5, 1]. L'identification des variétés repose sur le calcul de l'exposant de Lyapunov à temps fini (*FTLE*). Ce champ scalaire $\sigma_{t_0}^{t_0+T}(x)$ mesure la divergence matérielle, i.e. la façon dont les trajectoires divergent entre t_0 et t_0+T où T est arbitraire. Le but initial du *FTLE* est d'analyser des écoulements dont le champ de vitesses est connu. Le *FTLE* est utilisé dans la théorie des systèmes dynamiques pour identifier des tourbillons et des structures cohérentes.

1.2.2.3 Définition du champ de *FTLE*

On considère une trajectoire d'état initial $\mathbf{x}_0$ à l'instant initial t_0 , notée $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ appartenant au compact D inclus dans $\mathbb{R}^n$ (en pratique, $n \in \{2, 3\}$). Cette trajectoire est solution du système dynamique défini par le champ de vitesse $u(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

On considère le champ de vitesse au moins C^0 en temps et C^2 en espace. La solution peut être exprimée grâce au flot $\varphi_{t_0}^{t_0+t}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}^{t_0+t} &: D \longrightarrow D \\ \mathbf{x}_0 &\longmapsto \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Par la suite, pour lever toute ambiguïté avec l'écoulement considéré, le flot φ sera nommé flot dynamique. Une particule fluide est donc advectée par le flot dynamique, de sa position initiale $\mathbf{x}_0$ au temps t_0 jusqu'à sa position finale $\mathbf{x}$ au temps $t_0 + t$

$$\varphi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_0+t} \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau(\mathbf{x}_0, t_0), \tau)) d\tau$$

Considérons à l'instant t_0 , un point $\mathbf{x}_0$ et un point $\mathbf{y}_0$, distincts, tels que $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \delta(t_0)$. Ces deux points sont transportés par un écoulement de sorte que, après un temps d'intégration T ,

$$\mathbf{x}(t_0 + T) = \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{y}(t_0 + T) = \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{y}_0)$$

Donc la perturbation $\delta(t_0 + T)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \delta(t_0 + T) &= \mathbf{y}(t_0 + T) - \mathbf{x}(t_0 + T) \\ &= \varphi_{t_0}^{T+t_0}(\mathbf{y}_0) - \varphi_{t_0}^{T+t_0}(\mathbf{x}_0) \\ &= \varphi_{t_0}^{T+t_0}(\mathbf{x}_0 + \delta(t_0)) - \varphi_{t_0}^{T+t_0}(\mathbf{x}_0) \\ &= \frac{d\varphi_{t_0}^{T+t_0}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \delta(t_0) + O(\|\delta(t_0)\|^2) \end{aligned}$$

Le terme en $\| \delta(t_0) \|^2$ peut être négligé puisque la perturbation initiale est le précises avant quelque part. En appliquant la norme euclidienne standard sur $\delta x(t_0 + T)$, on obtient .

$$\begin{aligned} \| \delta(t_0 + T) \|^2 &= \langle \delta(t_0 + T), \delta(t_0 + T) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \delta(t_0), \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \delta(t_0) \right\rangle \\ &= \left\langle \delta(t_0), \left(\frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right)^* \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \delta(t_0) \right\rangle \end{aligned}$$

où $\langle , \rangle$ désigne un produit scalaire et M^* est la transposée de M .

$$\| \delta(t_0 + T) \| = \sqrt{\left\langle \delta(t_0), \left(\frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right)^* \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \delta(t_0) \right\rangle} \quad (1.25)$$

La matrice symétrique,

$$\mathcal{C} = \left(\frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right)^* \frac{d\varphi_{t_0}^{t_0+T}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \quad (1.26)$$

est une version pour un temps fini du tenseur de *Cauchy-Green*.

Définition 1.11. *Le tenseur de Cauchy-Green est un tenseur de déformation indépendant de la rotation. En coordonnées cartésiennes, il s'écrit sous la forme compacte suivante :*

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{x}_0) e_i \otimes e_j$$

$$\mathcal{C}_{ij}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \Big|_{x_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \Big|_{x_0}$$

C'est un tenseur symétrique d'ordre 2 avec des valeurs propres réelles et positives. La plus grande et la plus petite des valeurs propres de Δ sont respectivement $\lambda_{max}(\mathbf{x}_0)$ et $\lambda_{min}(\mathbf{x}_0)$. Les composantes du tenseur de Cauchy-Green sont de classe C^1 .

On peut réécrire l'équation (1.25)

$$\| \delta(t_0 + T) \| = \sqrt{\langle \delta_0, \mathcal{C} \delta_0 \rangle} \quad (1.27)$$

On voit que la perturbation après un temps $t_0 + T$ est devenue maximale lorsque la perturbation initiale est choisie de sorte qu'elle soit alignée avec le vecteur propre associé à la valeur propre maximale du tenseur de Cauchy-Green. Lorsque c'est le cas l'équation (1.27) devient :

$$\max \| \delta(t_0 + T) \| = \sqrt{\lambda_{max}(\mathcal{C})} \| \delta_0 \|^2$$

Ce qui peut être écrit sous la forme suivante

$$\max \| \delta(t_0 + T) \| = e^{|T| \sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)} \| \delta_0 \|^2$$

où,

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \log \left(\sqrt{\lambda_{max}(\mathcal{C})} \right) \quad (1.28)$$

Cette dernière équation est la définition de l'exposant de Lyapunov maximal pour un temps fini associé à un temps d'intégration T pour un point $\mathbf{x}_0$ au temps t_0 . Par construction, le champ scalaire $\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)$, $\forall x_0 \in D$ donne une mesure locale de la divergence matérielle. Un $|\lambda|$ plus petit que 1 dans (1.28), ou, de manière équivalente, un valeur de $\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)$ négative indique que la perturbation va décroître. Au contraire, si $|\lambda|$ est plus grand que 1 ou si le valeur de $\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)$ est positive, alors l'écart va croître.

1.2.2.4 Algorithme de calcul pour les *FTLE* classique :

Shadden et al.[2005] ont décrit une méthodologie pour le calcul le champ d'exposant de Lyapunov à temps fini sur des maillages cartésiens réguliers. Les coordonnées initiales des particules transportées par l'écoulement à partir du temps initial t_0 jusqu'au temps $t_0 \pm T$ sont positionnées aux nœuds de la grille et leurs coordonnées au temps $t_0 \pm T$ déterminent le champ de déplacement. L'utilisation d'un maillage cartésien facilite le calcul des composantes du tenseur de Cauchy-Green, obtenues à partir du gradient spatial du champ de déplacement. Les dérivées spatiales sont estimées directement à l'aide d'approximations par différences finies de deuxième ordre. La plus grande valeur propre de ce tenseur est ensuite utilisée pour construire l'exposant de Lyapunov en chaque nœud de la grille et c'est ce champ scalaire que l'on nomme le champ *FTLE*

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|T|} \log \left(\sqrt{\lambda_{max}(\mathcal{C})} \right)$$

où, $\lambda_{max}(\mathcal{C})$ est la plus grande valeur propre du tenseur de Cauchy-Green.

Pour obtenir numériquement des champs de *FTLE* à partir d'un champ de vitesse, il faut d'abord calculer la position au temps $t_0 + T$ de chaque particule transportée par le champ de vitesse, $\mathbf{x}(t_0 + T) = \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)$. On construit ensuite le tenseur de Cauchy-Green. Pour ce faire, considérons un point $\mathbf{x}_{(i,j)}(x_{(i,j)}, y_{(i,j)})$ pour lequel on veut calculer le *FTLE* et quatre points adjacents (la Figure 1.9) :

On veut calculer le gradient de cette itération :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0 + T) - \mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0 + T) &= \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0) - \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0)) \\ &= \varphi_{t_0}^{t_0+T}(x_{(i,j)}(t_0) + \delta_x) - \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0) - \delta_x) \\ &\simeq 2 \left(\frac{\partial \varphi_{t_0}^{t_0+T}}{\partial x} \delta_x \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \vec{j} \right) \delta_x \end{aligned}$$

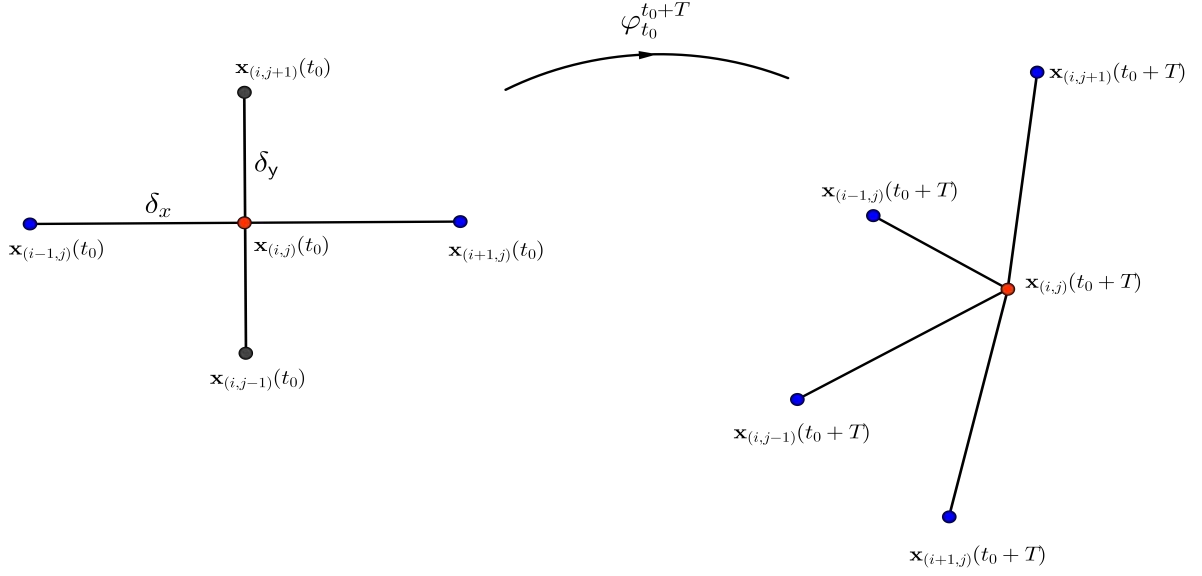


FIGURE 1.9 – Illustration de l'algorithme de calcul du gradient de la déformation. Positions des quatre points $\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j+1)}(t_0)$ et $\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0)$ à l'instante t_0 et ces points transportent par un écoulement au $\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0+T)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0+T)$, $\mathbf{x}_{(i+1,j+1)}(t_0+T)$ et $\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0+T)$ à l'instante t_0+T pour calculer le gradient de la déformation.

$$\text{où, } \delta x_0 = \frac{\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0) - \mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0+T) - \mathbf{x}_{(i,j-1)}(t_0+T) &= \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0)) - \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i,j-1)}(t_0)) \\ &= \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0 + \delta_y)) - \varphi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_{(i,j)}(t_0 - \delta_y)) \\ &\simeq 2\left(\frac{\partial \varphi_{t_0}^{t_0+T}}{\partial \mathbf{x}} \delta_y\right) \\ &= 2\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \vec{j}\right) \delta_y \end{aligned}$$

$$\text{où, } \delta_y = \frac{\mathbf{y}_{(i+1,j)}(t_0) - \mathbf{y}_{(i-1,j)}(t_0)}{2}. \text{ Alors,}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0+T) - \mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0+T) &= 2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \delta_x \\ \mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0+T) - \mathbf{x}_{(i,j-1)}(t_0+T) &= 2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \delta_y \\ \mathbf{y}_{(i+1,j)}(t_0+T) - \mathbf{y}_{(i-1,j)}(t_0+T) &= 2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \delta_x \\ \mathbf{y}_{(i,j+1)}(t_0+T) - \mathbf{y}_{(i,j-1)}(t_0+T) &= 2 \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \delta_y \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} &= \frac{\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0 + T) - \mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0 + T)}{2\delta_x} = \frac{\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0 + t) - \mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0 + t)}{\mathbf{x}_{(i+1,j)}(t_0) - \mathbf{x}_{(i-1,j)}(t_0)} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} &= \frac{\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0 + T) - \mathbf{x}_{(i,j-1)}(t_0 + T)}{2\delta_y} = \frac{\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0 + t) - \mathbf{x}_{(i,j-1)}(t_0 + t)}{\mathbf{x}_{(i,j+1)}(t_0) - \mathbf{x}_{(i,j-1)}(t_0)} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} &= \frac{\mathbf{y}_{(i+1,j)}(t_0 + T) - \mathbf{y}_{(i-1,j)}(t_0 + T)}{2\delta_x} = \frac{\mathbf{y}_{(i+1,j)}(t_0 + t) - \mathbf{y}_{(i-1,j)}(t_0 + t)}{\mathbf{y}_{(i+1,j)}(t_0) - \mathbf{y}_{(i-1,j)}(t_0)} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} &= \frac{\mathbf{y}_{(i,j+1)}(t_0 + T) - \mathbf{y}_{(i,j-1)}(t_0 + T)}{2\delta_y} = \frac{\mathbf{y}_{(i,j+1)}(t_0 + t) - \mathbf{y}_{(i,j-1)}(t_0 + t)}{\mathbf{y}_{(i,j+1)}(t_0) - \mathbf{y}_{(i,j-1)}(t_0)}\end{aligned}$$

Le gradient est donné par :

$$\frac{d\varphi_{t_0+t}^{t_0+t}}{dx}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Les scalaires optionnels δ_x et δ_y sont compris entre 0 et 0.5 pour spécifier un espacement de grille auxiliaire. Par défaut est $\delta_x = \delta_y = 10^{-2}$ (voir figure 1.10).

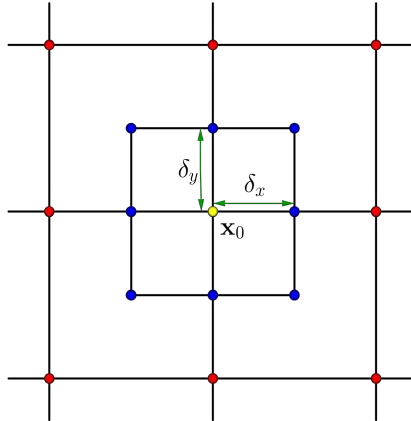


FIGURE 1.10 – Illustration de la grille principale (cercles rouge) et la grille auxiliaire (cercles bleus) utilisés dans le calcul de la dérivée du flot dans la définition du tenseur Cauchy-Green (équation 1.26)

On peut ensuite obtenir le tenseur de Cauchy-Green en multipliant ce gradient par sa transposée. La valeur propre maximale de ce tenseur permet ensuite de calculer le *FTLE* à partir de l'équation (1.28).

1.2.2.5 Exposant de Lyapunov localisé à temps fini (*L-FTLE*) :

Kasten et al (2009) [11] ont décrit une méthodologie pour le calcul de l'exposant de Lyapunov localisé à temps fini sur des maillages cartésiens réguliers. La définition de la *L-FTLE* utilise la matrice jacobienne le long de la trajectoire comme générateur de la séparation et n'utilise que des propriétés d'écoulement le long de la trajectoire. On considère que la trajectoire est $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ où $\mathbf{x}_0$ est l'état initial et t_0 , l'instant initial t_0 . La déviation des trajectoires des particules infiniment proches (initiées

à $(\mathbf{x}_0 + \delta_0, t_0)$; $\delta_0 \rightarrow 0$) sont régies par le Jacobien de la vitesse le long de $\mathbf{x}(t)$.

On prend à l'instant t un point A et un point B distincts tels que $|\overrightarrow{AB}| = \delta(t)$. Ces deux points sont transportés par un écoulement de sorte que, après un pas de temps dt , C et D (Figure 1.11(a)), A est transporté en C et B est transporté en D . On note que :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

Donc l'évolution temporelle de la déviation $\delta(t)$ dans un champ de vitesse est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta(t + dt) &= -\mathbf{u}(\mathbf{x})dt + \delta(t) + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta(t)) dt \\ \delta(t + dt) - \delta(t) &= [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta(t)) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] dt \end{aligned}$$

Alors, quand $\delta(t) \rightarrow 0$

$$d\delta(t) = \nabla \mathbf{u} \delta(t) dt$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \nabla \mathbf{u}|_{\mathbf{x}(t)} \delta(t)$$

Pour une petite valeur du pas de temps dt , la variation de vitesse peut être approximée en utilisant un développement limité à l'ordre 1 en $\delta(t)$. Ceci n'est valable que pour des petites perturbations. On peut passer aussi :

$$L_{t_0} = \nabla \mathbf{u}|_{\mathbf{x}(t_0)}, \quad \delta(t_0) = \delta_0, \quad \text{et } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Alors,

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = L_{t_0} \delta(t_0)$$

Donc,

$$\delta(t) = \delta(t_0) e^{L_{t_0}(t-t_0)}$$

Pour calculer $\delta(t_0 + T)$, on divise l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en N sous-intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ avec $k \in \{0, N-1\}$ où $T = N dt$; $dt = t_{k+1} - t_k$ (Figure 1.11(b)), alors,

$$\delta(t_0 + T) = \left(\prod_{i=0}^{N-1} e^{L_{t_i} dt} \right) \delta(t_0)$$

On pose

$$\Psi_T(\mathbf{x}(T; (\mathbf{x}_0, t_0))) = \prod_{i=0}^{N-1} e^{L_{t_i} dt}$$

Définition 1.12. *L'exposant de Lyapunov localisé à temps fini (L-FTLE) est :*

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{T} \ln(\|\Psi_T(\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0))\|_\lambda) \quad (1.29)$$

Remarque 1.1. Calcul de la norme $\|\cdot\|_\lambda$ de la fonction $\Psi_T(X(t))$:

Soient $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ les vecteurs propres de la matrice L_0 et λ_1 et

λ_2 les valeurs propres correspondantes. On pose $S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Alors

$$L_0 = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

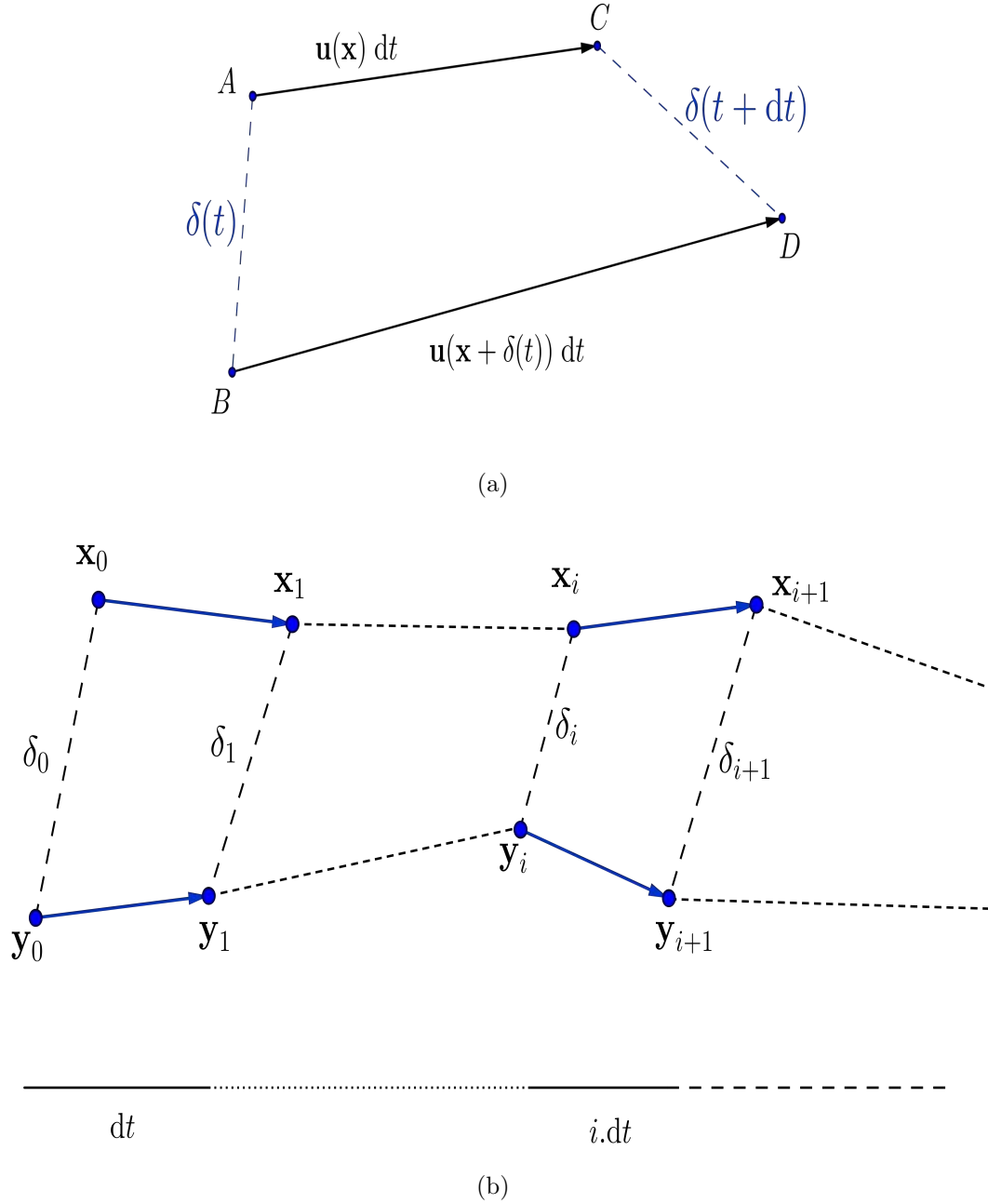


FIGURE 1.11 – Illustration de la procédure pour le calcul des L -FTLE. (a) Transport de deux points voisins séparés par un vecteur $\delta(t_0)$ par un écoulement pendant un pas de temps dt . (b) L'évolution temporelle de la déviation $\delta(t)$ dans un champ de vitesse où $\delta_{i+1} = \delta(t + (i + 1) dt)$

D'où

$$e^{L_0 t} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Mais,

$$\Psi_T(\mathbf{x}(t)) = \prod_{i=0}^{N-1} e^{L_i dt}$$

alors,

$$\Psi_T(\mathbf{x}(t)) = \prod_{i=0}^{N-1} S_i \begin{pmatrix} e^{\lambda_{1,i} t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{2,i} t} \end{pmatrix} S_i^{-1}$$

La norme $\|\cdot\|_\lambda$ de la $\Psi_T(\mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0))$ est donnée par :

$$\|\Psi_T(\mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0))\|_\lambda = \sqrt{\lambda_{\max}}.$$

avec, $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de $(\Psi_T(\mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0)))^t \Psi_T(\mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0))$

1.2.2.6 Exposant de Lyapunov à taille finie (*FSLE*)

L'exposant de Lyapunov à taille (size) fini (*FSLE*) à été défini récemment par Aurell et al. [29]. L'approche consiste à suivre les trajectoires de deux particules initialement adjacentes et à baser l'exposant sur la séparation de temps qui est le minimum de temps nécessaire pour obtenir la distance imposée entre les deux particules lors du transport. Cette méthode est une alternative particulièrement populaire en océanographie (A.J.Maiana et al. [25] et F.d'Ovidio et al. [24] et [30]). Il semble que la préférence pour les *FTLE* ou les *FSLE* est davantage basée sur la tradition d'une communauté scientifique particulière mais ne découle pas d'une évaluation des deux approches. Des comparaisons directes entre *FTLE* et *FSLE* ont été faites par Boffetta et al. [26] et par Sadlo et Peikert [27], et ils trouvent que, si calibré de façon appropriée, les *FTLE* et les *FSLE* donnent des résultats similaires. Boffetta fait valoir que les *FTLE* ne sont pas capables de reconnaître les structures pertinentes, à savoir les frontières de mélange entre le chaos et à grande échelle. Haller et Karrasch [28] ont proposé pour calculer le champ de *FSLE* l'utilisation de l'exposant de Lyapunov à temps infinitésimal.

Dans cette section, nous allons montrer qu'une évaluation de la séparation du flot $\varphi_{t_0}^t$ est fournie par les exposants de Lyapunov à taille finie (*FSLE*).

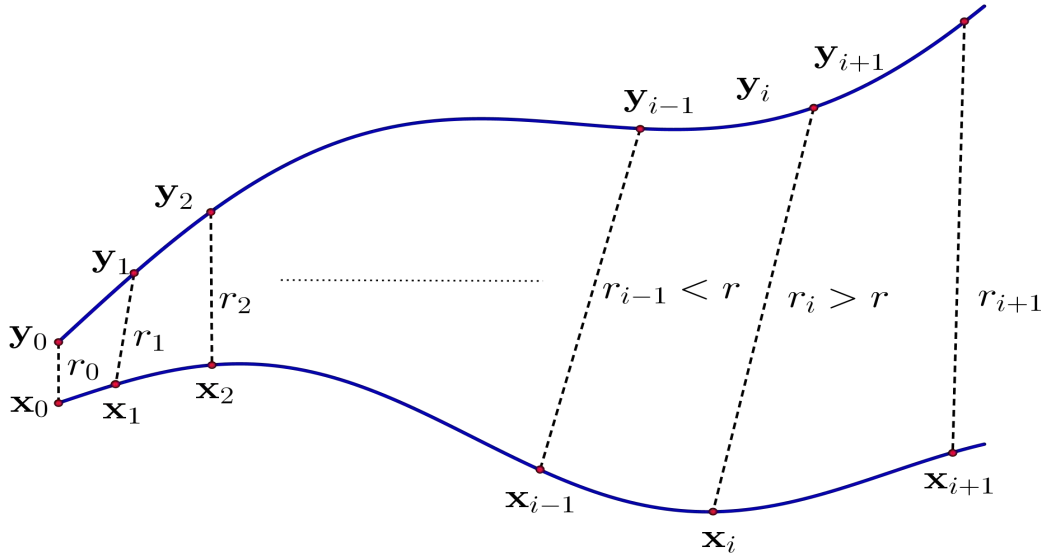
Définition 1.13. Soient $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ deux particules distantes de $\delta_0 > 0$ à l'instant t_0 et r un réel strictement positif.

On appelle séparation de temps, notée $\tau(\mathbf{x}_0; \delta_0, r)$ (Figure 1.12), le réel défini par

$$\tau(\mathbf{x}_0; \delta_0, r) = \min_{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0| = \delta_0} \{ |t - t_0|, \quad t > t_0 \quad ; \quad |\varphi_{t_0}^{t+t_0}(\mathbf{y}_0) - \varphi_{t_0}^{t+t_0}(\mathbf{x}_0)| = r\delta_0 \}$$

On définit le champ de l'exposant de Lyapunov à taille finie (*FSLE*) par :

$$\sigma_s(\mathbf{x}_0; \delta_0, r) = \frac{\log(r)}{\tau(\mathbf{x}_0; \delta_0, r)} \quad (1.30)$$



$\tau(\mathbf{x}_0; \delta_0, r) = i * dt$ avec dt le pas de temps et $r_0 = \delta_0$.

FIGURE 1.12 – Illustration du calcul la séparation de temps $\tau(X_0; \delta, r)$. Pour cela, on prend deux particules initialement voisines en $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{y}_0$ où $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 = r_0 = \delta_0$ et on cherche le temps nécessaire $\tau(X_0; \delta, r)$ pour obtenir la distance imposé entre les deux particules lors du transport égale à r .

1.2.2.7 Exemple analytique :

Soit le champ de vitesse hyperbolique :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ax \\ \dot{y} &= ay \end{cases}$$

On va calculer le tenseur de Cauchy-Green :

– Calcul de la trajectoire pour un point $\mathbf{x}_0(x_0, y_0)$ au temps initial t_0 . On a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax \\ \frac{dy}{dt} &= ay \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)}$$

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$$

i.e,

$$\varphi_{t_0}^t(x_0) = \begin{pmatrix} x_0 e^{-a(t-t_0)} \\ y_0 e^{a(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

– Calcul du tenseur de Cauchy-Green. Par définition, on a

$$\Delta(x(t_0)) = \sum_{i,j=1}^2 \Delta_{ij}(x(t_0)) e_i \otimes e_j \quad \text{avec} \quad \Delta_{ij}(x(t_0)) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \Big|_{x_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \Big|_{x_0}$$

Alors,

$$\Delta_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} = e^{-2a(t-t_0)}$$

$$\Delta_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} = 0$$

$$\Delta_{21} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} = 0$$

$$\Delta_{22} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} = e^{2a(t-t_0)}$$

Donc,

$$\Delta = \begin{pmatrix} e^{-2a(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2a(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

La plus grande valeur propre de Δ

$$\lambda_{\max}(\Delta) = \begin{cases} e^{2a(t-t_0)} & \text{si } a > 0 \\ e^{-2a(t-t_0)} & \text{si } a < 0 \end{cases} = e^{2|a|(t-t_0)}$$

Alors, la séparation temporelle est :

$$\tau(\mathbf{x}_0; \delta_0, r) = \min_{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0| = \delta_0} \{|t - t_0|, \quad t > t_0 \quad ; \quad |\varphi_{t_0}^{t+t_0}(\mathbf{y}_0) - \varphi_{t_0}^{t+t_0}(\mathbf{x}_0)| = r\delta_0\}$$

$$\begin{aligned} r^2 \delta_0^2 &= |\varphi_{t_0}^{t+t_0}(\mathbf{y}_0) - \varphi_{t_0}^{t+t_0}(\mathbf{x}_0)|^2 \simeq \left| \frac{d\varphi_{t_0}^{t+t_0}}{dx}(\delta_0) \right|^2 \\ &\simeq \delta_0^2 \left| \frac{d\varphi_{t_0}^{t+t_0}}{dx} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right|^2 \\ &\simeq \delta_0^2 \lambda_{\max}(\Delta) = \delta_0^2 e^{2|a|(t-t_0)} \end{aligned}$$

Alors, $r^2 = e^{2|a|\tau}$ donc, $\tau(\mathbf{x}_0; \delta_0, r) = \frac{\log(r)}{|a|}$

Le champ de *FSLE* est donné par

$$\sigma_s(\mathbf{x}_0; \delta_0, r) = \frac{\log(r)}{\tau(\mathbf{x}_0; \delta, r)} = \frac{\log(r)}{\log(r)/|a|} = |a|.$$

1.2.3 Le champ de *FTLE* calculé à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius

Une approche probabiliste pour le transport dans les systèmes dynamiques, développée dans la dernière décennie, utilise l'opérateur de Perron-Frobenius (A.Lasota et al.[31]), pour identifier les ensembles quasi invariants (almost invariant sets), (M.Dellnitz et al.[32], G.Froyland et al.[33]).

P.Tallapragada et S.Rose ([35],[37]) ont développé une nouvelle méthode de calcul de l'exposant de Lyapunov à temps fini et ont fait un lien entre les ensembles quasi invariant et les sous-ensembles contenant des valeurs de $FTLE$ presque nulles. Cette méthodologie, basée sur des méthodes probabilistes, évite la linéarisation du flot et la mesure d'étirement d'éléments linéaires. Avant de présenter la méthode de calcul, on va poser quelques définitions de base qui aident à la compréhension de cette méthode.

1.2.3.1 Opérateur de Perron-Frobenius :

Définition 1.14. La fonction $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur X si

$$\int_X |f(x)| d\mu < +\infty$$

On note $L^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \ ; \ \int_X |f(x)| d\mu < +\infty\}$ l'espace des fonctions intégrables sur X .

Définition 1.15. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ une espace mesurable. La transformation $S : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$ est mesurable si

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A} \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.16. La transformation mesurable $S : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$ est non-singulière si

$$\mu(S^{-1}(A)) = 0 \text{ pour tout } A \in \mathcal{A} \text{ telle que } \mu(A) = 0.$$

Définition 1.17. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable. Si $S : X \rightarrow X$ est une transformation non singulière, l'unique opérateur $\mathcal{P} : L^1 \rightarrow L^1$ défini par

$$\int_A \mathcal{P}f(x) d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f(x) d\mu \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}. \quad (1.31)$$

est appelé l'opérateur de Perron-Frobenius associé à S .

Définition 1.18. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable. Soit $S : X \rightarrow X$ (voir la figure 1.13) une transformation non singulière. L'ensemble $B \subset X$ est un ensemble quasi-invariant si le ratio

$$\rho_\mu(B) = \text{Prob}_\mu\{S(x) \in B \ ; \ x \in B\} = \frac{\mu(B \cap S^{-1}(B))}{\mu(B)} \quad (1.32)$$

est proche de l'unité. i.e.

$$\rho_\mu(B) = \frac{\mu(B \cap S^{-1}(B))}{\mu(B)} \simeq 1 \quad (1.33)$$

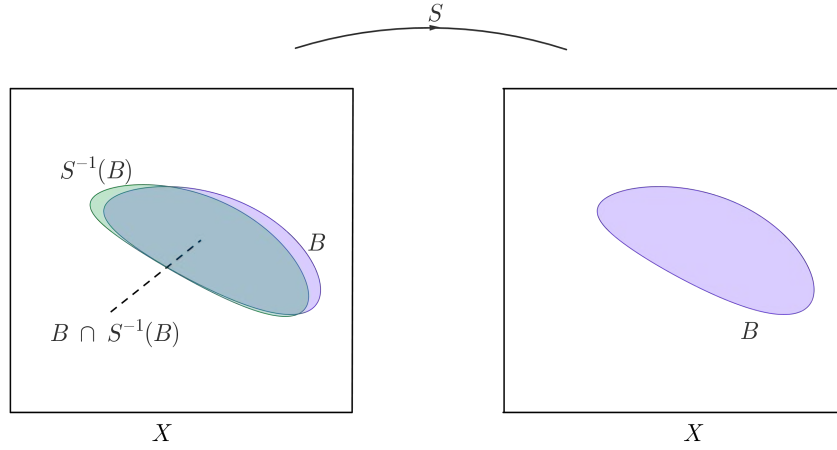


FIGURE 1.13 – Image d'un ensemble B par une transformation non singulière S ou $B \cap S^{-1}(B) \simeq \emptyset$.

1.2.3.2 Définition du $FTLE$ à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius

Soit $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact. On considère le flot $\varphi_{t_0}^t : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ ($\varphi_{t_0}^t$ est une transformation non singulière). On prend un ensemble $B \subset M$. L'ensemble B est suivi par l'évolution d'un vecteur $\mathbf{x}(x, y)$ définie par une fonction de densité de probabilité qui est la densité de loi uniforme et définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu(B)} \chi_B(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(B)} & \text{si } \mathbf{x} \in B \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin B \end{cases}$$

La matrice de covariance de la densité de probabilité g est définie par $I = (I_{ij})$; $i, j \in \{1, 2\}$ avec $I_{ij} = E[(x_i - \bar{x}_i)(y_j - \bar{y}_j)]$ où $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est la valeur moyenne d'un vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ et $E[\cdot]$ est l'espérance qui est définie par $E[\mathbf{x}] = [\int x f(x, y) d\mu, \int y f(x, y) d\mu]$. Sous l'action du flux $\varphi_{t_0}^t$, cette fonction de densité de probabilité f est transformée par l'opérateur de Perron-Frobenius $\mathcal{P}_{t_0}^t f$ associé à $\varphi_{t_0}^t$.

Définition 1.19. On considère $I(f)$ la matrice de covariance de f sur B à l'instant initial t_0 et $I(\mathcal{P}_{t_0}^t f)$ la matrice de covariance de $\mathcal{P}_{t_0}^t f$ à l'instant t . Soit $\lambda_{\max}(I)$ la plus grande valeur propre de I . Alors, la valeur du $FTLE$ sur B , noté σ_I est définie par :

$$\sigma_I(B, t_0, t) = \frac{1}{2|t_0 - t|} \ln \left(\frac{\lambda_{\max}(I(\mathcal{P}_{t_0}^t f))}{\lambda_{\max}(I(f))} \right) \quad (1.34)$$

Définition 1.20. Soit $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact. On considère le flot $\varphi_{t_0}^t : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. On prend un ensemble $B \subset M$. La cohérence de l'ensemble B pendant $[t_0, t]$ est $\sigma_I(B, t_0, t)$.

Définition 1.21. L'ensemble B est un ensemble quasi-cohérent pendant $[t_0, t]$ si

$$\sigma_I(B, t_0, t) \simeq 0 \quad (1.35)$$

1.2.3.3 Méthode de calcul du champ $FTLE$ à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius

Dans cet paragraphe on va présenter deux méthodes pour calculer le champ $FTLE$, basées sur des méthodes probabilistes.

Pour calculer le champ de $FTLE$ à partir de l'opérateur de Perron-Frobenius, on divise le domaine de calcul M en réunion disjointe d'un nombre fini de boîtes identiques $B_1, \dots, B_N$ de même mesure, (par exemple un maillage cartésien régulier), puis on calcule la valeur de $\sigma_I(B_i, t_0, t)$ pour chaque boîte B_i où $i \in \{1, \dots, N\}$. Pour cela on suppose qu'à l'instant t_0 chaque boîte B_i contient un nombre fixe de particules N . Chaque point de B_i a une mesure discrète égale à 1. Ainsi la boîte B_i a une mesure discrète égale à N . La densité de probabilité initialement $f_{(i)}$ (à l'instant t_0) portée par chaque boîte est une densité uniforme :

$$f_{(i)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu(B_i)} \chi_{B_i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(B_i)} = \frac{1}{N} & \text{si } \mathbf{x} \in B_i \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin B_i \end{cases}$$

Soit $(\overline{x^{(i)}}, \overline{y^{(i)}})$ la valeur moyenne de la boîte B_i où $(\overline{x^{(i)}}, \overline{y^{(i)}}) = \frac{1}{N} (\sum_{j=1}^N x_j^{(i)}, \sum_{j=1}^N y_j^{(i)})$.

La matrice de covariance $I(f)$ de la densité de probabilité initiale (à l'instant t_0) est donnée par :

$$I(f_{(i)}) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N (x_j^{(i)} - \overline{x^{(i)}})^2 & \sum_{j=1}^N (x_j^{(i)} - \overline{x^{(i)}})(y_j^{(i)} - \overline{y^{(i)}}) \\ \sum_{j=1}^N (x_j^{(i)} - \overline{x^{(i)}})(y_j^{(i)} - \overline{y^{(i)}}) & \sum_{j=1}^N (y_j^{(i)} - \overline{y^{(i)}})^2 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

L'ensemble $\varphi_{t_0}^t(B_i)$ est l'ensemble des points $\varphi_{t_0}^t(x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ où, $j \in \{1, \dots, N\}$. La fonction de densité de probabilité est transportée par l'opérateur de perron-Frobenius correspondant à $\varphi_{t_0}^t$ et à support dans $\varphi_{t_0}^t(B_i)$ (Figure 1.14).

La matrice de covariance $I(\mathcal{P}_{t_0}^t f)$ de la densité de probabilité à l'instant t est donnée

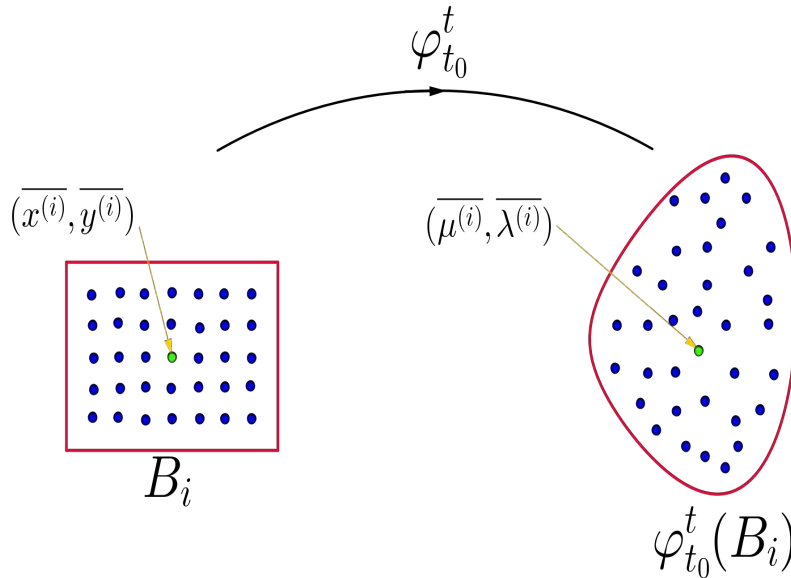


FIGURE 1.14 – Calcul numérique de la moyenne des ensembles B_i et $\varphi_{t_0}^t(B_i)$. L'ensemble B approximé par N points est mis en correspondance de à l'ensemble $\varphi_{t_0}^t(B)$. On note que $(\overline{\mu^i}, \overline{\lambda^i}) \neq \varphi_{t_0}^t(\overline{x^i}, \overline{y^i})$.

par :

$$I(\mathcal{P}_{t_0}^t f_{(i)}) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N (\mu_j^{(i)} - \overline{\mu^{(i)}})^2 & \sum_{j=1}^N (\mu_j^{(i)} - \overline{\mu^{(i)}})(\lambda_j^{(i)} - \overline{\lambda^{(i)}}) \\ \sum_{j=1}^N (\mu_j^{(i)} - \overline{\mu^{(i)}})(\lambda_j^{(i)} - \overline{\lambda^{(i)}}) & \sum_{j=1}^N (\lambda_j^{(i)} - \overline{\lambda^{(i)}})^2 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

où, $\varphi_{t_0}^t(x_j^{(i)}, y_j^{(i)}) = (\mu_j^{(i)}, \lambda_j^{(i)})$ et $(\overline{\mu^{(i)}}, \overline{\lambda^{(i)}}) = \frac{1}{N} (\sum_{j=1}^N \varphi_{t_0}^t(x_j^{(i)}), \sum_{j=1}^N \varphi_{t_0}^t(y_j^{(i)}))$ est la valeur moyenne de l'ensemble $\varphi_{t_0}^t(B_i)$.

On peut facilement calculer les grandes valeurs propres des matrices $I(f_{(i)})$ (voir 1.36) et $I(\mathcal{P}_{t_0}^t f_{(i)})$ (voir 1.37), alors la valeur de $FTLE$ pour la boîte B_i à l'instant t est donnée par l'équation 1.34.

On note que la méthodologie de calcul précédent n'a pas utilisé l'opérateur de Perron-Frobenius, mais elle est basée sur la description de la position finale des particules à l'instant t . Pour recalculer la matrice de covariance $I(\mathcal{P}_{t_0}^t f_{(i)})$ par l'opérateur de Perron-Frobenius, on divise l'intervalle $[t_0, t]$ en k sous-intervalles $[t_0, t_1], \dots, [t_{m-1}, t_m]$ où, $t_k - t_{k-1} = h$ et $t_m = t$. Donc,

$$\mathcal{P}_{t_0}^t = \mathcal{P}_{t_0}^{t_m} = \mathcal{P}_{t_{m-1}}^{t_m} \circ \mathcal{P}_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} \circ \dots \circ \mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$$

On définit une projection de $f_{(i)}$ par

$$\begin{aligned} \pi : L^1 &\longrightarrow \text{Vect}\{B_1, \dots, B_N\} \\ f_{(i)} &\longmapsto \pi f_{(i)} = \sum_{j=1}^N c_j \chi(B_j) \end{aligned}$$

où,

$$c_j = \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} f_{(i)} d\mu = \begin{cases} \frac{1}{\mu(B_i)} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On note que, $\pi f_{(i)} = b^{(i)}(t_0) = [0, \dots, 0, \frac{1}{\mu(B_i)}, 0, \dots, 0]$ est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i -ème composante égale à $\frac{1}{\mu(B_i)}$.

Sous l'action du flux $\varphi_{t_{k-1}}^{t_k}$, cette fonction de densité de probabilité $f_{(i)}$ est transformée par l'opérateur de Perron-Frobenius associé à $\mathcal{P}_{t_{k-1}}^{t_k} f$. Donc, le vecteur $b^i(t_{k-1})$ est transportée par l'opérateur Perron-Frobenius en vecteur $b^i(t_k)$. Cela est donné par :

$$b^i(t_k) = P_{t_k}^{t_{k-1}} b^i(t_{k-1})$$

où $P_{t_k}^{t_{k-1}}$ est une matrice de transition stochastique dont les coefficients sont donnés par :

$$(P_{t_k}^{t_{k-1}})_{ij} = \frac{\mu(B_i \cap (\varphi_{t_k}^{t_{k-1}})^{-1}(B_j))}{\mu(B_j)}$$

Donc le vecteur $b^i(t_k)$ est obtenu à partir du vecteur $b^i(t_0)$ en répétant la méthode précédente k fois.

Par exemple, supposons que l'image de la boîte B_i se trouve dans les boîtes B_m, B_l, B_k

(Figure 1.15). Alors $\varphi_{t_0}^{t_k}(B_i) = (\varphi_{t_0}^{t_k}(B_i) \cap B_m) \cup (\varphi_{t_0}^{t_k}(B_i) \cap B_l) \cup (\varphi_{t_0}^{t_k}(B_i) \cap B_k)$.
Ce qui donne que

$$b^{(i)}(t_k) = \frac{1}{\mu(B_i)} [0, \dots, 0, (P_{t_0}^{t_k})_{im}, 0, \dots, 0, (P_{t_0}^{t_k})_{il}, 0, \dots, 0, (P_{t_0}^{t_k})_{ik}, 0, \dots, 0]$$

La matrice de covariance $I(\mathcal{P}_{t_0}^{t_k} f_{(i)})$ est donnée par :

$$I(\mathcal{P}_{t_0}^{t_k} f_{(i)}) = \frac{1}{\mu(B_i)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N ((\bar{\zeta}_1^j - \bar{\xi}_1^i)^2 (P_{t_0}^{t_k})_{ij}) & \sum_{j=1}^N ((\bar{\zeta}_1^j - \bar{\xi}_1^i)(\bar{\zeta}_2^j - \bar{\xi}_2^i) (P_{t_0}^{t_k})_{ij}) \\ \sum_{j=1}^N ((\bar{\zeta}_1^j - \bar{\xi}_1^i)(\bar{\zeta}_2^j - \bar{\xi}_2^i) (P_{t_0}^{t_k})_{ij}) & \sum_{j=1}^N ((\bar{\zeta}_2^j - \bar{\xi}_2^i)^2 (P_{t_0}^{t_k})_{ij}) \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

où, $(\bar{\zeta}_1^j, \bar{\zeta}_2^j)$ est la valeur moyenne de la boîte B_j et $(\bar{\xi}_1^i, \bar{\xi}_2^i) = \sum_{j=1}^N ((\bar{\zeta}_1^j, \bar{\zeta}_2^j) (P_{t_0}^{t_k})_{ij})$.

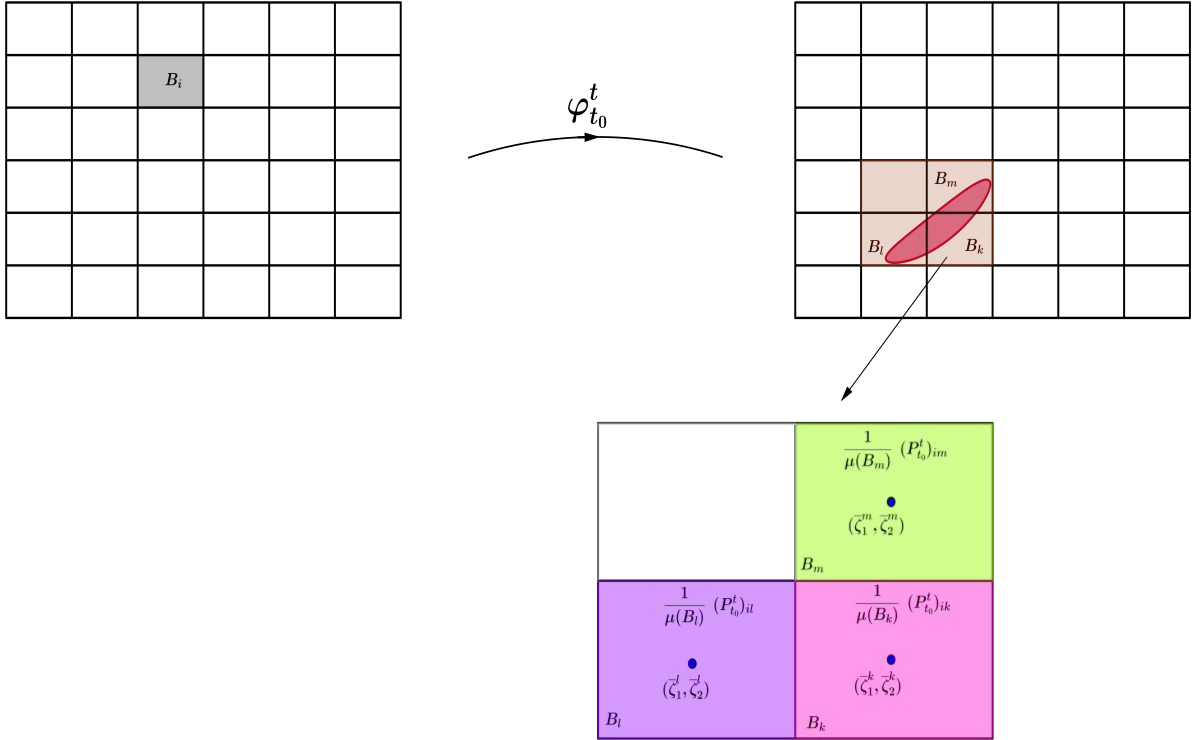


FIGURE 1.15 – Illustration du calcul de la covariance de l'ensemble B_i par l'opérateur Perron-Frobenius. La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme $\frac{1}{\mu(B_i)}$ supportée sur l'ensemble B_i est mis en correspondance de la fonction de densité $\mathcal{P}_{t_0}^t(B_i)$ qui est approchée par trois fonctions de densité uniforme $\frac{1}{\mu(B_i)} (\mathcal{P}_{t_0}^t)_{im}$, $\frac{1}{\mu(B_i)} (\mathcal{P}_{t_0}^t)_{il}$ et $\frac{1}{\mu(B_i)} (\mathcal{P}_{t_0}^t)_{ik}$ supportée sur l'ensemble B_m , B_l et B_k .

On calcule les grandes valeurs propres de les matrices $I(f_{(i)})$ (voir 1.36) et $I(\mathcal{P}_{t_0}^t f_{(i)})$ (voir 1.38), Alors la valeur de $FTLE$ pour la boîte B_i à l'instant t est donnée par l'équation 1.34. Si on peut répéter cette procédure pour toutes les boîtes dans la domaine, on obtient le champ de $FTLE$.

1.2.4 Les structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*)

Les notations de l'exposant de Lyapunov pour des temps finis (*FTLE*), de l'exposant de Lyapunov pour des tailles finis (*FSLE*) et exposant de Lyapunov localisé à temps finis (L-*FTLE*) permettent de formaliser la détection lagrangiennes structures cohérentes. dans cette section on va présents les définitions et propriétés des lagrangienne structure cohérentes *LCS*. Le calcul de Structures Lagrangiennes Cohérentes (*LCS*) est de plus en plus utilisé en mécanique des fluides pour déterminer la structure d'un écoulement. Les *LCS* sont des structures qui séparent des régions aux propriétés dynamiques différentes dans les écoulement en mécanique des fluides. La théorie des *LCS* a été élaborée au cours des quinze dernières années et son application a permis d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes physiques.

Haller [8] en (2001) a démontré que les variétés invariantes d'un écoulement périodique ont comme conséquence la création d'extrema dans le champ des exposants de Lyapunov. Par extension aux régimes apériodiques, les structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*) sont définies comme les crêtes du champ de *FTLE*.

Shadden et al.[3] ont fourni une théorie qui explique les propriétés de mélange et de transport des *LCS* agissant comme des ligne matérielles révélant ainsi la topologie des écoulements, et ils ont montré que le flux à travers les *LCS* est négligeable lorsque deux conditions sont respectées : les crêtes sont bien définies, et le temps d'intégration pour le calcul des *FTLE* est suffisamment long. Lorsque ces deux critères sont respectés, les *LCS* peuvent être considérés comme des barrières de transport. Le calcul des *FTLE* nécessite de déterminer les trajectoires que des particules fluide sur un intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$ de temps, qui peut être positif ou négatif, L'exploration en temps positif permet de révéler les variétés localement répulsives dans l'écoulement. En effet, selon l'équation

$$\max_{\delta_0} (||\delta \mathbf{x}(T)||) = \exp (|T| \sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)) ||\delta_0||$$

deux particules proches sont bien repoussées lorsque le champ de *FTLE* est localement maximal. Dans le cas contraire, lorsque le temps d'intégration T est rétrograde, on regarde les particules dont les trajectoires divergent dans un temps négatif, c'est-à-dire des particules qui convergent en temps positif. Les structures identifiées sont donc des variétés localement attractives dans l'écoulement. La figure(1.16) montre schématiquement un exemple d'une ligne attractive et d'une ligne répulsive. Ces lignes d'intérêt sont appelées *LCS* et correspondent à des maxima locaux des $\sigma_{t_0}^T(x_0)$. Green et al.[14] ont appliqué cette stratégie à la détection des structures tourbillonnaires dans de la turbulence de paroi.

Comme le champ de *FTLE* est de classe C^2 en espace, les crêtes du champ sont bien définies. Les crêtes sont donc elles-même de classe C^1 en espace. Par conséquent, les structures cohérentes lagrangiennes sont des sous-ensembles ouverts du domaine de calcul et sont bien des ensembles spatialement définis, i.e, des structures de la dynamique de l'écoulement. Comme le champ *FTLE* est de classe C^1 en temps, ces crêtes le sont également. Par conséquence, les *LCS* sont résilient par rapport (vis-à-vis) au temps. Les structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*) sont une généralisation des variétés stable et instable d'un point hyperbolique (Kent [15], des tores de Kolmogorov-Arnold-Moser ("KAM tori") Boffetta et al.[26]), pour les systèmes non-autonomes. Autrement dit, ce sont des structures qui séparent des régions aux propriétés dynamiques différentes dans des écoulements en mécanique des fluides.

P.Tallapragada et S.Rose ([35],[37]) ont récemment proposé de calculer des structures cohérentes lagrangiennes par la recherche d'ensembles invariants. Soit $M \subset \mathbb{R}^2$

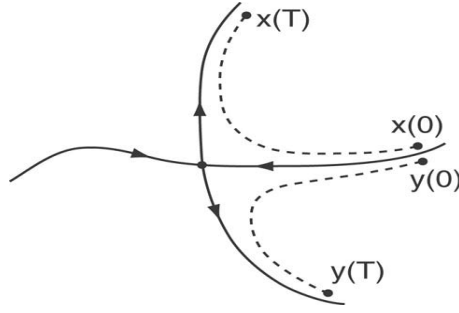


FIGURE 1.16 – Deux points de chaque côté d’une variété stable divergent après un laps de temps suffisant.

un compact et le flot $\varphi_{t_0}^t : M \rightarrow M$. on prend un ensemble $B \subset M$. La cohérence de l’ensemble B pendant $[t_0, t]$ est donnée par la fonction $\sigma_I : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sigma_I(B, t_0, t) = \frac{\mu(B \cap (\varphi_{t_0}^t)^{-1}(B))}{\mu(B)}$. soit $\sigma_I(B, t_0, t)$ le champ scalaire des valeurs de cohérence, et C la surface de ce champ. Les ensembles cohérents sont les ”vallées” du graphe de σ_I , qui sont naturellement séparées les uns des autres par des crêtes du graphe. Ces crêtes peuvent coïncider avec les structures cohérentes lagrangiennes *LCS*.

Branicki et Wiggins [16] ont montré l’utilisabilité des *LCS* pour quantifier le mélange par dynamique des lobes. Ces frontières sont a priori dépendantes du temps, et sont advectées par l’écoulement.

Lapeyre et al.(2002) montre que, pour un écoulement concernant uniquement les simulation numérique, incluant la turbulence 2D, les gradients des concentrations de traceurs passifs s’orientent vers les vecteurs de Lyapunov pour des temps finis *FSLE*, alors que celles Voth et al.[17] ont appliqués cette propriété en application expérimental sont limitées aux écoulement 2D où à la turbulence quasi-2D générée dans les écoulement en rotation. D’Ovidio et al.[30] ont été observés cette propriété sur des données océaniques réelles. Mathur et al.[19] et Koh et Legras.[18] ont présenté des résultats sur le tourbillon polaire stratosphérique avec l’exposant de Lyapunov non pas en temps fini mais en dimension finie.

1.2.4.1 Courbure de crêtes, dérivées secondes des crêtes et Calcul des *LCS*

Définition 1.22. (La courbure de crête) Soit $z = \sigma(x, y)$ le champ scalaire de *FTLE*, et $\mathcal{C}$ la surface de *FTLE*. Soit $\pi : \mathcal{C} \rightarrow D$ (où D la domaine de calcul) la projection orthogonale et $T_{\tilde{p}}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point $\tilde{p}$. La courbure de crête du graphe $\mathcal{C}$ est une fonction injective $c :]a, b[\rightarrow D$ satisfaisant les deux conditions suivantes pour tout $s \in]a, b[$:

- (I) Les directions de $c'(s)$ et $\nabla \sigma(c(s))$ sont parallèles.
- (II) $\mathcal{C}$ est une surface orientée de $\mathbb{R}^3$. Soit $p = c(s), \tilde{p} = \sigma(p) \in \mathcal{C}$. On note k_p^u et k_p^l la plus grande et la plus petite de courbures principales de $\mathcal{C}$ au point $\tilde{p}$. Alors $k_p^l < 0$ et $T_{\tilde{p}}(u_p^l)$ est normale à $c(s)$ où u_p^l est la tangente correspondant de la plus petite des courbures principales.

Définition 1.23. La dérivée seconde crête de $\sigma(x, y)$ est une fonction injective $c :]a, b[\rightarrow D$ satisfaisant les deux conditions suivantes pour chaque $\forall s \in]a, b[$

- (I) Les directions de $c'(s)$ et $\nabla \sigma(c(s))$ sont parallèles.

$$(II) \sum(\vec{n}, \vec{n}) = \min_{\|\vec{u}\|=1} \sum(\vec{u}, \vec{u}) < 0$$

où, $\vec{n}$ est le vecteur normal unité à la courbe $c(s)$ et $\sum(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^t \nabla^2 \sigma(c(s)) \vec{x}$.

Shadden et al.[2005] ont montré que l'ensemble des dérivées secondes crêtes (second derivative ridge) est un sous-ensemble de l'ensemble des courbures crêtes (curvature ridge). Il définissent les structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*) comme étant les dérivées seconde crêtes.

Exemple analytique :

On considère le champ *FTLE* à une temps d'intégration T donné par

$$\sigma_{t_0+T}(x, y) = \frac{3x^2 - x - 2}{1 + y^2} ; (x, y) \in [-2, 2]^2 \quad (1.39)$$

Afin de déterminer les structures cohérentes Lagrangiennes (*LCS*), on doit chercher la courbure crête de la surface du *FTLE*. Pour cela, on doit chercher la dérivée seconde crête. On cherche la fonction $c :]a, b[\subset [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]^2$ qui satisfait les deux conditions de la définition précédente.

On prend $c : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]^2$ définie par $c(s) = (s, 0)$, $s \in [-2, 2]$.

1. On a ,

$$\nabla \sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6x - 1}{1 + y^2} \\ \frac{-2y(3x^2 - x - 2)}{(1 + y^2)^2} \end{bmatrix}$$

Alors,

$$\nabla \sigma(c(s)) = \begin{bmatrix} 6s - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad // \quad c'(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } s \in [-2, 2]$$

i.e. les directions de $c'(s)$ et $\nabla \sigma(c(s))$ sont parallèles. Les directions de $c'(s)$ et $\nabla \sigma(c(s))$ sont parallèles.

2. Le long de $c(s)$ la vecteur normal $\vec{n}(s) = (0, \mp 1)$, $s \in [-2, 2]$.

$$\nabla^2 \sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{1 + y^2} & \frac{-2y(6x - 1)}{(1 + y^2)^2} \\ \frac{-2y(6x - 1)}{(1 + y^2)^2} & \frac{(3x^2 - x - 2)(1 + y^2)(-2 + 8y^2)}{(1 + y^2)^2} \end{bmatrix}$$

Alors,

$$\nabla^2 \sigma(c(s)) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2(3s^2 - s - 2) \end{bmatrix}$$

$$\sum(\vec{n}, \vec{n}) = \vec{n}^t \nabla^2 \sigma(c(s)) \vec{n}$$

$$= [0 \quad \mp 1] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2(3s^2 - s - 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \end{bmatrix}$$

$$= -2(\mp 1)^2(3s^2 - s - 2)$$

$$= -2(3s^2 - s - 2)$$

Alors, $\sum(\vec{n}, \vec{n}) = -2(3s^2 - s - 2)$

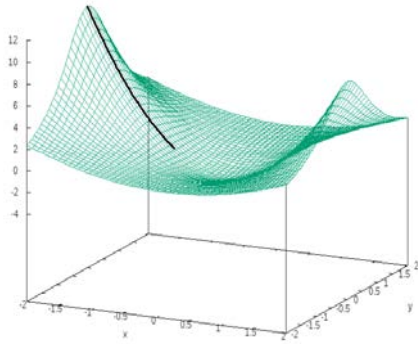
On veut calculer $\sum(\vec{u}, \vec{u})$, où $\vec{u}$ un vecteur arbitraire tel que, $\|\vec{u}\| = 1$, on suppose que $\vec{u} = (a, \sqrt{1-a^2})$,

$$\begin{aligned} \sum(\vec{u}, \vec{u}) &= \vec{u}^t \nabla^2 \sigma(c(s)) \vec{u} \\ &= [a \ \sqrt{1-a^2}] \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2(3x^2 - x - 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \sqrt{1-a^2} \end{bmatrix} \\ &= 6a^2 - 2(\sqrt{1-a^2})^2(3s^2 - s - 2) \\ &= -2(3s^2 - s - 2) + \underbrace{2a^2(3s^2 - s + 1)}_{\substack{>0 \\ >0, \forall s \in \mathbb{R}}} \end{aligned}$$

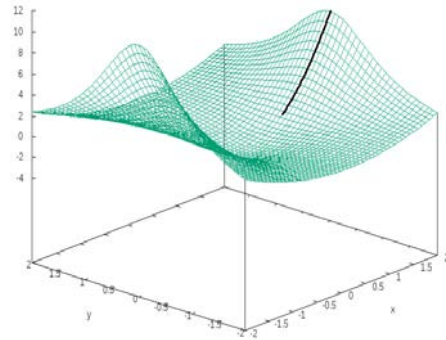
La fonction $\sum(\vec{u}, \vec{u})$ atteint son minimum et ce minimum est négatif quand $a = 0$ et $3s^2 - s - 2 > 0$ (i.e. $\vec{u} = (0, 1) = \vec{n}$) (Figure 1.17).

Par conséquent, ce champ contient deux LCS distinctes

$$LCS = \{(s, 0) \ ; \ s \in [-2, -\frac{2}{3}[\cup]1, 2]\}$$



(a)



(b)

FIGURE 1.17 – Le champ $FTLE$ avec la première $LCS = \{(s, 0) \ ; \ s \in [-2, -\frac{2}{3}[\cup]1, 2]\}$ en (a) et la première $LCS = \{(s, 0) \ ; \ s \in]-2, -\frac{2}{3} \cup]1, 2]\}$ en (b).

1.2.4.2 Les barrières de transport

Haller et Beron-Vera [96] en (2012) ont développé une théorie unifiée des barrières de transport pour les systèmes dynamique non-autonomes bidimensionnelles. Ils cherchent les barrières de transport comme des lignes matérielles d'étirement minimal. Ces barrières, ligne de contrainte et ligne de cisaillement (Shear), peuvent être trouvées comme les trajectoires d'équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre 1.

On considère une trajectoire d'état initial $\mathbf{x}_0$ à l'instant initial t_0 , notée $\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))$ appartenant au compact D inclus dans $\mathbb{R}^2$. Cette trajectoire est solution du système dynamique défini par le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t, (\mathbf{x}_0, t_0)) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.40)$$

On considère le champ de vitesse au moins dans C^0 en temps et C^2 en espace. La solution peut être exprimée grâce au flot $\varphi_{t_0}^{t+t_0}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}^t &: D \longrightarrow D \\ \mathbf{x}_0 &\longmapsto \mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0)) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Soit $\mathcal{C}_{t_0}^t = \left(\frac{d\varphi_{t_0}^t}{d\mathbf{x}} \right)^* \left(\frac{d\varphi_{t_0}^t}{d\mathbf{x}} \right)$ le tenseur de Cauchy-Green. Soient λ_i les valeurs propres du tenseur de Cauchy-Green et ξ_i les vecteurs propres unitaires correspondant tels que

$$\mathcal{C}_0^t \xi_i = \lambda_i \xi_i, \quad |\xi_i| = 1, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

On considère une courbe paramétrée de conditions initiales :

$$\gamma_0 = \{\mathbf{x}_0 = r(s) \subset D \quad : \quad s \in [s_1, s_2]\}$$

avec ses points d'extrémité $a = r(s_1)$ et $b = r(s_2)$. Les points sont transporté par l'écoulement et la courbe transportée γ_t est donnée par

$$\gamma_t = \varphi_{t_0}^{t+t_0}(\gamma_0) \quad (1.42)$$

Soit $\mathbf{x}_0 \in \gamma_0$ et $\mathbf{n}_0$ et $\mathbf{t}_0$ la normale et la tangente à γ_0 en point $\mathbf{x}_0$. À l'instant t , la normale et la tangente en $\mathbf{x}(t)$ données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{t} = \frac{\varphi_{t_0}^t \mathbf{t}_0}{|\varphi_{t_0}^t \mathbf{t}_0|} \\ \mathbf{n}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{n} = \Omega \mathbf{t}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.43)$$

La normale $\mathbf{n}_0$ en $\mathbf{x}_0$ évolue dans le temps et elle est donnée par

$$\frac{d\mathbf{n}_0}{dt} = \nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$$

Soit $\rho_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ la longueur de la projection de $\nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$ sur la normale en $\mathbf{x}(t)$ et $\sigma_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ la longueur de la projection de $\nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$ sur la tangente en $\mathbf{x}(t)$ (voir Figure 1.18).

$$\rho_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0 \quad (1.44)$$

$$\sigma_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) = \mathbf{t}_0 \cdot \nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0 \quad (1.45)$$

On se réfère à $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ comme le taux de répulsion selon la normale pour γ_t à le long de la trajectoire $\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))$. Si $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) > 1$ alors γ_t a été globalement répulsive entre t_0 et $t_0 + T$ le long de trajectoire d'origine $\mathbf{x}_0$. De même, si $\rho_{t_0}^t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) < 1$ alors γ_t a été globalement attractive entre t_0 et $t_0 + T$ le long de trajectoire d'origine $\mathbf{x}_0$.

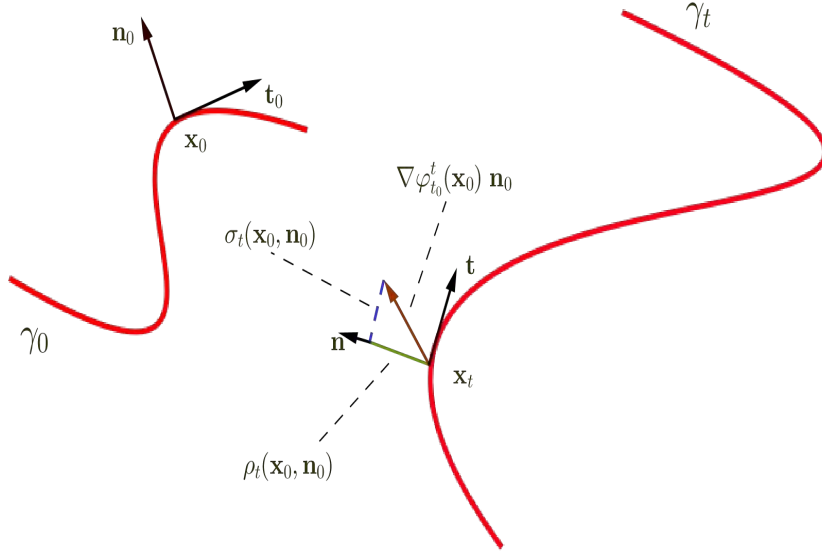


FIGURE 1.18 – La longueur de $\nabla \varphi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}_0$ sur la normale et le tangentiel.

Haller [95] définit la *LCS* hyperbolique à partir du taux de répulsion selon la normale $\rho_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ comme suit

- La ligne matérielle normalement répulsive sur $[t_0, t_0 + T]$ est un segment de ligne matérielle γ_t compact sur laquelle le taux de répulsion selon la normale satisfait :

♣ $\rho_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) > 1$.

♣ $\rho_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0) > |\sigma_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)|$.

pour tout point initial $\mathbf{x}_0 \in \gamma_0$ et le vecteur tangent unitaire $\mathbf{t}_0$ en $\mathbf{x}_0$ de la courbe γ_t . La seconde inégalité exige que l'augmentation possible de tangentiel selon $\mathcal{M}(t)$ est inférieure à l'augmentation de normale selon γ_t sur $[t_0, t_0 + T]$.

- La *LCS* répulsive sur $[t_0, t_0 + T]$ est la ligne matérielle normalement répulsive dont le taux de répulsion selon la normale $\rho_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0)$ admet en chaque point un maximum non-dégénéré le long de la γ_0 parmi toutes les lignes matérielles à proximité.
- La *LCS* attractive sur $[t_0, t_0 + T]$ est définie comme la *LCS* répulsive sur $[t_0 + T, t_0]$.

Définition 1.24. La *LCS* hyperbolique sur $[t_0, t_0 + T]$ est une *LCS* répulsive ou une *LCS* attractive sur le même intervalle de temps.

Géométriquement la *LCS* hyperbolique d'un système dynamique sur un intervalle de temps $[t_0, t]$ est une ligne matérielle γ_t dont la position initiale γ_0 satisfait les conditions d'hyperbolicité (voir figure (1.19)) :

•

$$r(s_1) \neq r(s_2) \quad (1.46)$$

- Les directions de $r'(s_1)$ et $r'(s_2)$ satisfaisant :

$$r'(s) // \xi_1(r(s)) \quad \text{ou} \quad r'(s) // \xi_2(r(s)) \quad (1.47)$$

avec $s \in [s_1, s_2]$.

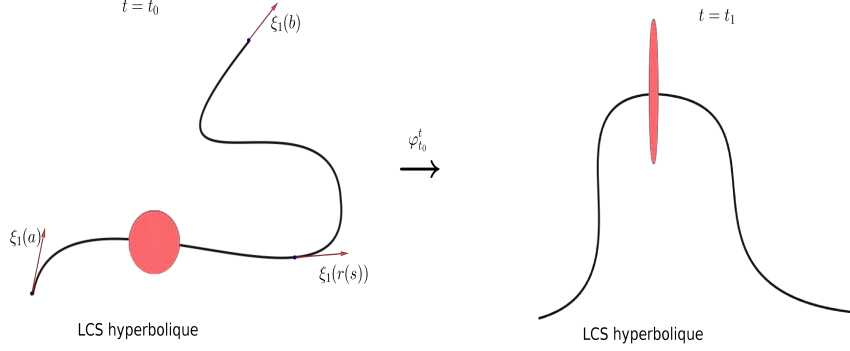


FIGURE 1.19 – La *LCS* hyperbolique est une ligne qui maximise le cisaillement dans le direction tangentielle.

Définition 1.25. La *LCS* parabolique d'une système dynamique (1.41) sur un intervalle de temps $[t_0, t]$ est une ligne matérielle γ_t dont la position initiale γ_0 satisfait les conditions (voir figure (1.20)) :

- $r(s_1) \neq r(s_2)$
- Les directions de $r'(s_1)$ et $r'(s_2)$ satisfaisant :

$$r'(s) = \eta_{\pm}(r(s)) \quad (1.48)$$

où $s \in [s_1, s_2]$ et $\eta_{\pm}$ le lagrangien normalisé de cisaillement du champ de vecteur $\eta_{\pm}$ est donné par

$$\eta_{\pm} = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}} \xi_1 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}} \xi_2 \quad (1.49)$$

avec les signes plus (moins) se référant à la direction de cisaillement maximale (minimale) dans l'intervalle $[\xi_1, \xi_2]$.

Définition 1.26. La *LCS* elliptique est une *LCS* parabolique fermée [97], [114] (voir figure (1.21)).

La figure (1.22) présente un exemple de *LCS* dans l'écoulement du double-gyre. Les *LCS* elliptique sont en vert et le champ de *FTLE* est montré en arrière-plan [113].

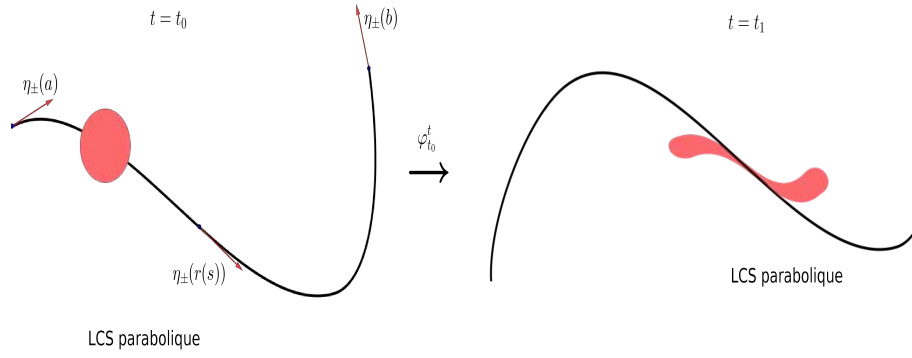


FIGURE 1.20 – La *LCS* parabolique est une ligne qui maximise le cisaillement dans le direction tangentielle.

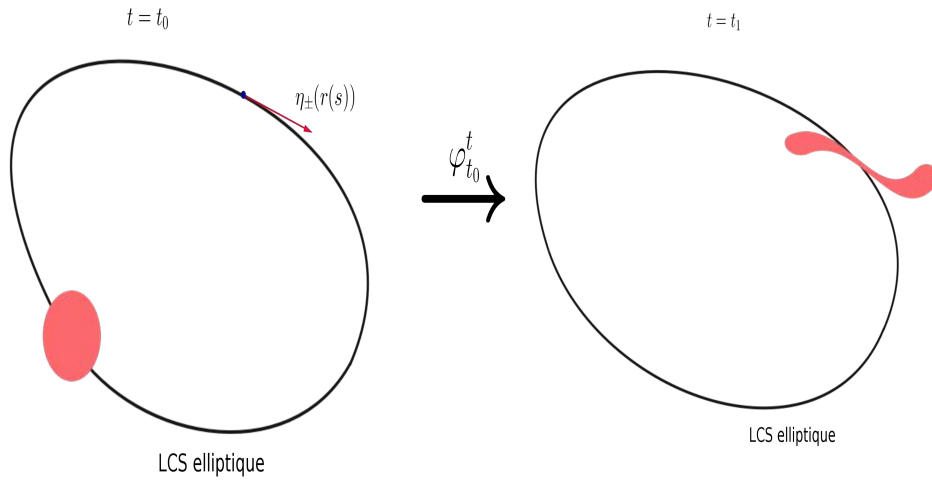


FIGURE 1.21 – La *LCS* elliptique est une ligne fermé qui maximise le cisaillement dans le direction tangentielle.

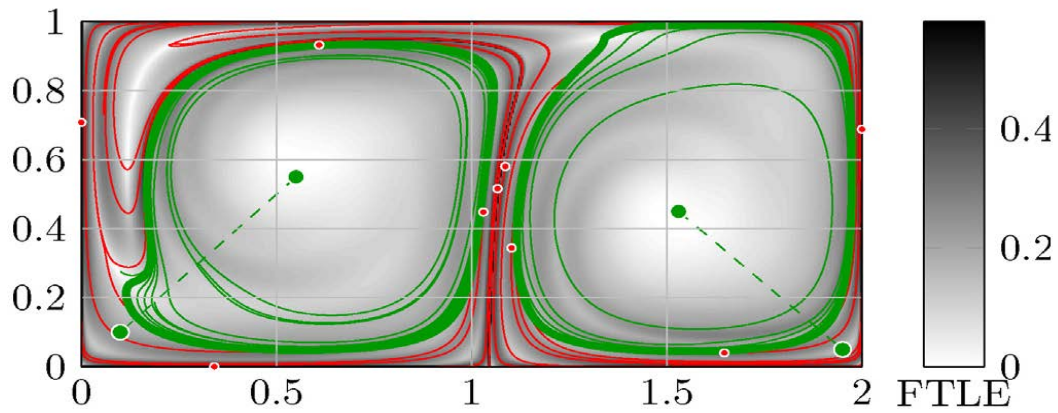


FIGURE 1.22 – Les *LCS* dans l'écoulement du double-gyre. *LCS* elliptiques sont en vert. Le champ de *FTLE* est montré en arrière-plan. [113]

En conséquence, on peut dire que il y a trois types de LCS : tout d'abord, il existe des LCS hyperboliques (variétés stables et instables) qui maximisent ou minimisent la répulsion. Ce sont des lignes de courant du champ de vecteurs propres du tenseur de Cauchy-Green. Les LCS paraboliques (jets) sont des lignes qui maximisent le cisaillement. Ce sont des lignes de courant associées au champ donnés par la formule (1.49). Les LCS elliptiques (qui généralisent la notion de noyaux de KAM) sont des LCS paraboliques fermées.

On note que, les crêtes du champ de $FTLE$ ne sont pas complètement satisfaisantes pour représenter ces LCS . Si on prend, l'exemple simple d'un champ de vitesse hyperbolique $\mathbf{u}(a\,x, a\,y)$ où $a \in \mathbb{R}^*$, les valeurs de $FTLE$ sont constantes et égales à $|a|$, c'est à dire qu'il n'y a pas de crêtes de $FTLE$ alors que la courbe d'équation $y = 0$ est une LCS hyperbolique répulsive et la courbe d'équation $x = 0$ est une LCS hyperbolique attractive.

Les méthodes numériques

Dans ce chapitre consacré à l'intégration numérique des systèmes dynamiques. On y présente quelques algorithmes d'intégration Méthodes : les méthodes d'Euler, Runge-Kutta 2 et 4. La dernière section est consacrée à l'approche d'interpolation qui a été mise en œuvre dans cette thèse pour calculer les champs de vitesse et leurs gradients dans un champ de vitesses expérimental.

2.1 Intégration numérique des systèmes dynamiques

La très grande majorité des systèmes dynamiques ne peuvent pas être traités analytiquement (même en partie). Leur étude nécessite donc le passage par des simulations numériques nécessitant l'intégration des équations de la dynamique. Dans cette section, on donne quelques algorithmes d'intégration. Avant cela, donnons quelques définitions importantes.

2.1.1 Principe général des méthodes numériques

La solution exacte d'une équation différentielle du type

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

(problèmes de Cauchy) est une fonction continue où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Dans tout ce qui suit, il faut garder à l'esprit que dans le cas le plus général, $\mathbf{x}$ est un vecteur colonne, et $f(t, \mathbf{x}(t))$ est un "vecteur" dont les "éléments" sont des fonctions. Néanmoins, afin de simplifier la discussion, nous ne considérons dans les exemples que des équations simples à une seule fonction inconnue). Pour obtenir une approximation numérique de la solution $\mathbf{x}(t)$ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points t_i , pour $i = 0, 1, \dots, n$. La solution numérique discrète obtenue aux points t_i est notée $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$.

L'écart entre deux abscisses, noté $\mathbf{h}$, est appelé pas de discrétisation. Ce pas, dans les méthodes les plus simples, est constant, mais il peut être judicieux de travailler avec un pas variable $\mathbf{h}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$. Des critères principaux gouvernent le choix d'une méthode :

- La consistance, qui est la propriété qui assure que la solution exacte de l'équation discrétisée tende vers la solution exacte de l'équation continue lorsque le pas de discrétisation $\mathbf{h}$ tend vers 0.

- La stabilité, qui concerne le comportement de la solution approchée discrète et la propagation des erreurs d'arrondis dans le cas d'un calcul réel pour un pas de discrétisation fixé. Le schéma est stable si la solution discrète reste bornée quel que soit le nombre de pas de discrétisation.
- L'ordre, qui mesure la précision du schéma ou erreur de troncature ϵ faite en remplaçant l'équation différentielle exacte $\mathbf{x}(t_n)$ par son approximation $\mathbf{x}_n$. Soit $\epsilon_n = |x(t_n) - x_n| = \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^p)$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. L'ordre de précision de la méthode est donnée par l'entier p .
- Convergence et taux de convergence, Une méthode est convergente si, lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, la solution numérique tend vers la solution exacte de l'équation continue. Une méthode est convergente à l'ordre l si et seulement si $\lim_{i \rightarrow \infty} \max_i |\epsilon_i| = \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^l)$.

2.1.2 Méthodes à pas constant

La formulation générale des méthodes à un pas explicite est :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 & \text{donné} \\ t_{n+1} &= t_n + h \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \Phi(t_n, \mathbf{x}_n, h) \end{cases} \quad (2.2)$$

Où Φ est une fonction telle que $\Phi(t_n, \mathbf{x}_n, h) = f(t_n, \mathbf{x}_n)$ et $\Phi(t, \mathbf{x}, 0) = f(t, \mathbf{x})$.

La formulation générale des méthodes à un pas implicite est :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 & \text{donné} \\ t_{n+1} &= t_n + h \\ x_{n+1} &= x_n + \Phi(t_n, x_n, x_{n+1}, h) \end{cases} \quad (2.3)$$

L'obtention de la solution à chaque abscisse nécessite la résolution d'une équation.

2.1.3 Méthodes basées sur la série de Taylor

Les méthodes basées sur la série de Taylor se prêtent bien à des traitements numériques. Commençons par subdiviser l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en N sous intervalles de même longueur h et appelons t_n les points de subdivision. Nous avons donc :

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad t_n = t_0 + nh \quad \text{pour} \quad n = 0, \dots, N$$

Le développement de la série de Taylor de $x(t_{n+1})$ jusqu'à l'ordre m autour du point t_n s'écrit :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx^{(1)}(t_n) + \frac{h^2}{2!}x^{(2)}(t_n) + \dots + \frac{h^m}{m!}x^{(m)}(t_n) + \mathcal{O}(h^{m+1}) \quad (2.4)$$

L'ordre du schéma est égal au degré du polynôme pour lequel l'intégration est exacte plus un.

2.1.3.1 Méthode d'Euler

Si on arrête la série de Taylor à l'ordre 1 on obtient :

$$x(t_{n+1}) \simeq x(t_n) + hx^{(1)}(t_n) \quad (2.5)$$

L'application de cette formule pour calculer les $x(t_n)$ est connue sous le nom "méthode d'Euler". On remarque que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de $\mathcal{O}(h^2)$. Il est clair qu'on peut augmenter la précision de cette méthode en diminuant la taille de h , mais un h petit implique qu'on doit évaluer la fonction un grand nombre de fois ce qui est coûteux en temps d'exécution. Qui plus est, un grand nombre d'évaluations de la fonction peut provoquer un cumul des erreurs numériques commises par la machine.

Exemple :

Dans ce problème, il n'y a qu'une seule fonction inconnue $x(t)$. Ce problème est suffisamment simple pour que l'on puisse trouver une solution analytique. Prenons comme condition limite $(0, 1)$ i.e. $x(t_0 = 0) = 1$, pour l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = (2t - 1)(x(t) - 2)^2 \quad (2.6)$$

la solution exacte de (2.6) avec la condition limite $(0, 1)$ est :

$$x(t) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{t^2 - t + 1} \quad (2.7)$$

Soit $t \in [0, 2]$. On essaye d'abord avec $N = 20$ intervalles ($h = \frac{2}{20} = 0.1$), on peut comparer graphiquement la solution générée par la méthode d'Euler avec la solution exacte.

On peut améliorer la solution d'Euler en diminuant h (i.e. en augmentant le nombre d'intervalles). On voit sur la figure (2.1) une comparaison des solutions de $x'(t) = (2t - 1)(x(t) - 2)^2$ par la méthode d'Euler pour $N = 10$, $N = 20$ et $N = 50$ pour $t \in [0, 2]$.

On remarque qu'ici la solution donnée par la méthode Euler s'approche de la solution

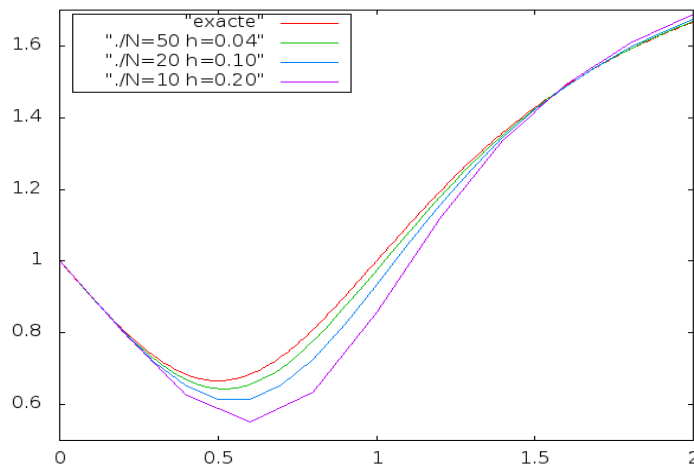


FIGURE 2.1 – Méthode d'Euler. Comparaison de la solution exacte de l'équation (2.6) avec les approximations par la méthode d'Euler.

exacte pour les grands t . Ce phénomène est une propriété de l'équation différentielle particulièrement simple que nous étudions ici, et non une propriété générale des solutions par la méthode d'Euler.

2.1.3.2 Méthodes de Taylor d'ordre plus élevé

En considérant l'équation 2.4, et en augmentant le nombre de termes dans la série de Taylor, on s'attend à une amélioration de la solution numérique. Pour ceci, nous avons besoin des dérivées d'ordre supérieur à 1. On peut les obtenir en dérivant l'équation différentielle de base :

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= f(t, x(t)) \\ x^{(2)}(t) &= \frac{d}{dt} f(t, x(t)) \\ x^{(3)}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(t, x(t)) \\ &\vdots \\ x^{(m)}(t) &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} f(t, x(t)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

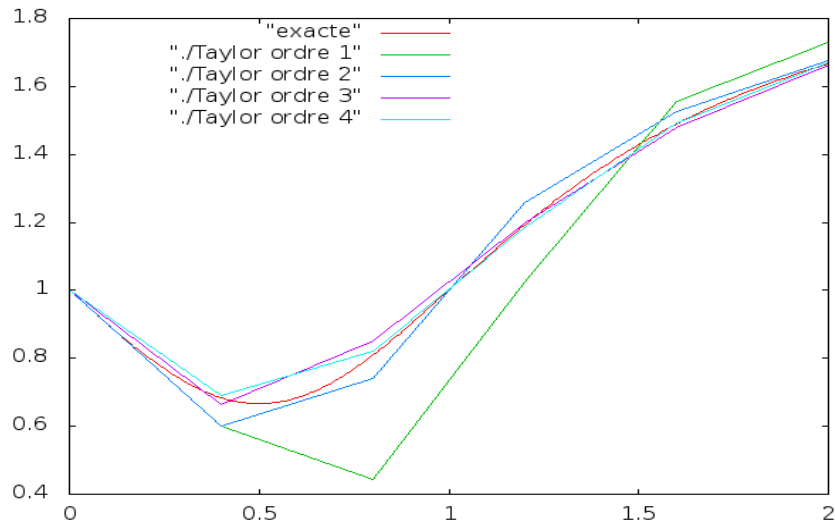
Le développement de Taylor (2.4), nous montre que l'erreur commise par une méthode de Taylor d'ordre m est un $\mathcal{O}(h^{m+1})$. Néanmoins, il est incorrect de penser que plus m est grand mieux c'est, puisque les calculs à chaque étape deviennent plus lourds au fur et à mesure que m augmente.

Pour notre équation $x'(t) = (2t - 1)(x(t) - 2)^2$ traitée dans les exemples précédents, ce procédé pour déterminer les $x^{(m)}$ avec $m > 1$ est facile :

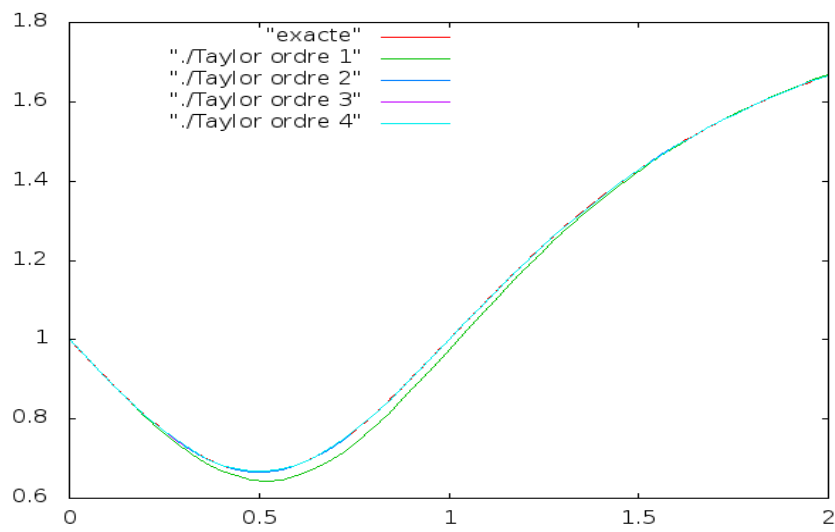
$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= (2t - 1)(x(t) - 2)^2 \\ x^{(2)}(t) &= 2(x - 2)^2 + 2(2t - 1)^2(x - 2)^3 \\ x^{(3)}(t) &= 12(2t - 1)(x - 2)^3 + 6(2t - 1)^3(x - 2)^4 \\ x^{(4)}(t) &= 24(x - 2)^3 + 72(2t - 1)^2(x - 2)^4 + 24(2t - 1)^4(x - 2)^5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le résultat apparaît sur la *figure(2.2)*. On voit qu'à partir de l'ordre 2 de la série de Taylor, on ne voit plus de différence entre les approximations basées sur la méthode de Taylor et la solution exacte à l'échelle de la figure, alors que la différence entre l'approximation d'Euler et la solution exacte est considérable. On peut essayer de faire apparaître les différences entre les calculs à différents ordres de la série de Taylor en augmentant le nombre de pas assez de $h = 0.40$ à $h = 0.04$.

Le résultat apparaît sur la figure (2.2). On constate que même avec ce pas assez grand, les 5 valeurs calculées par la méthode de Taylor à l'ordre 4 restent sur la courbe de la solution exacte.



(a)



(b)

FIGURE 2.2 – Méthode basées sur la série de Taylor avec en (a) $h = 0.4$ et en (b) $h = 0.04$.

2.1.4 Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta tire les avantages des méthodes de Taylor tout en gardant la simplicité d'exécution de la méthode d'Euler. En pratique, Runge-Kutta remplace l'évaluation analytique des ordres $x^m(t)$, $m > 1$, par des dérivées numériques obtenues en évaluant la fonction $f(t, x(t))$ à différents endroits afin d'obtenir presque les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode de Taylor.

2.1.4.1 Runge-Kutta d'ordre 2

Rappelons la méthode d'Euler

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h f(t_n, x(t_n)) \quad (2.9)$$

La méthode d'Euler permet ainsi de calculer $x(t_n + h)$ en fonction de $x(t_n)$ et la dérivée en $x(t_n)$ (par l'équation 2.5). Cette méthode n'est pas symétrique par rapport à l'intervalle puisqu'elle ne fait pas intervenir l'information sur la dérivée en fin d'intervalle, i.e. $f(t_n, x(t_{n+1}))$ n'intervient pas.

La méthode Runge-Kutta est plus symétrique puisqu'elle revient à évaluer numériquement la dérivée au centre de l'intervalle. Les équations de cette méthode sont :

$$\begin{cases} k_1 &= h f(t_n, x(t_n)) \\ k_2 &= h f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n) + \frac{k_1}{2}) \end{cases}$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + k_2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (2.10)$$

Comme la méthode d'Euler, les méthodes de Runge-Kutta peuvent être appliquées à une fonction arbitraire. Il y a quasi-équivalence entre la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 et la méthode de Taylor d'ordre 2. On peut rapidement vérifier que leur comportement au niveau numérique est similaire. Pour notre exemple, $x' = (2t - 1)(x - 2)^2$, nous comparons sur la Figure(2.3) les résultats des deux méthodes en utilisant un grand pas, $h = 0.1$.

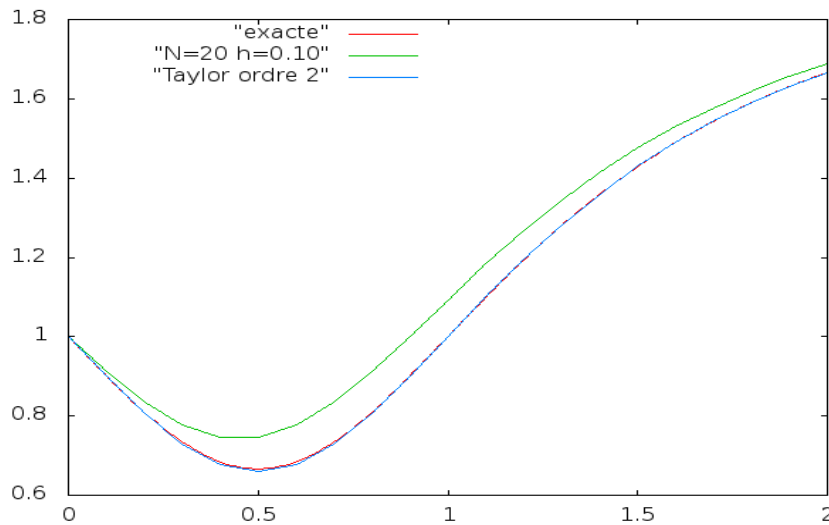


FIGURE 2.3 – Comparaison de la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 (vert) avec la série de Taylor d'ordre 2 (blue) avec $h = 0.10$ et la solution exacte (rouge).

2.1.4.2 Runge-Kutta d'ordre 4

La formule de Runge-Kutta à l'ordre 4 est :

$$\begin{cases} k_1 = h f(t_n, x(t_n)) \\ k_2 = h f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n) + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n) + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h f(t_n + h, x(t_n) + k_3) \end{cases}$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) \quad (2.11)$$

On montre maintenant sur la figure(2.4) qu'en pratique, Runge-Kutta à l'ordre 4 donne presque les mêmes résultats que la méthode de Taylor d'ordre 4.

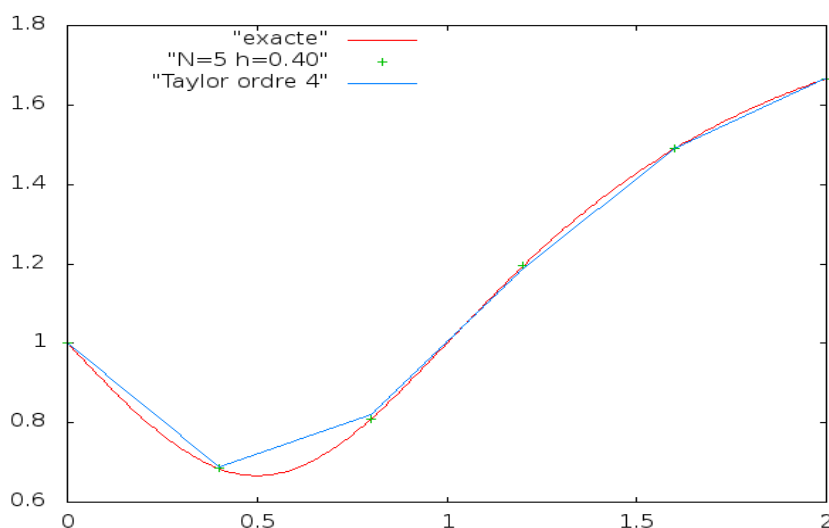


FIGURE 2.4 – Comparaison de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (les points vert) et la série de Taylor d'ordre 4 (blue) avec $h = 0.4$ et la solution exacte (rouge).

2.1.4.3 Conclusion

On a expliqué, analysé, et comparé trois méthodes de résolution numérique d'équations différentielles : la méthode d'Euler, la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 et la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. On peut noter que la méthode d'Euler est simple d'utilisation et à la portée de "tous" et rapide d'exécution mais elle permet l'approche de la fonction qu'avec une faible précision pour un pas donné. Pour augmenter la précision une solution serait de prendre un pas très petit, mais cela ralentirait donc son exécution. Pour les méthodes Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4, les calculs, la complexité de l'implémentation et la précision augmentent avec leur ordre (respectivement 2 et 4), mais la rapidité d'exécution diminue d'autant plus que l'ordre est grand. On a utilisé la solution analytique pour l'exemple d'équation différentielle et les comparer à la solution numérique. Dans ce travail, on a utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour calculer la solution des équations différentielles.

2.2 Interpolation

Dans cette section, on va présenter brièvement les caractéristiques principales de l'élément fini **Q1** dans $\mathbb{R}^2$. La généralisation à $\mathbb{R}^n$ se déduisant directement des propriétés dans $\mathbb{R}^2$. Nous rappelons tout d'abord la notion générale d'élément fini de Lagrange avant de s'intéresser à l'élément fini appelé **Q1**. Puis, on applique cette méthode pour calculer la vitesse et le gradient de vitesse à un point à partir des points où la valeur de la vitesse est connue.

2.2.1 Principe général

Définition 2.1. On appelle maillage une partition d'un domaine donné par un ensemble de sous-domaines. Ces sous-domaines sont appelés cellules (ou mailles). Les mailles sont formées par un ensemble de sommets (ou nœuds) reliés entre eux par des arêtes (voir Figure 2.5). L'ensemble des mailles forme ainsi le maillage.

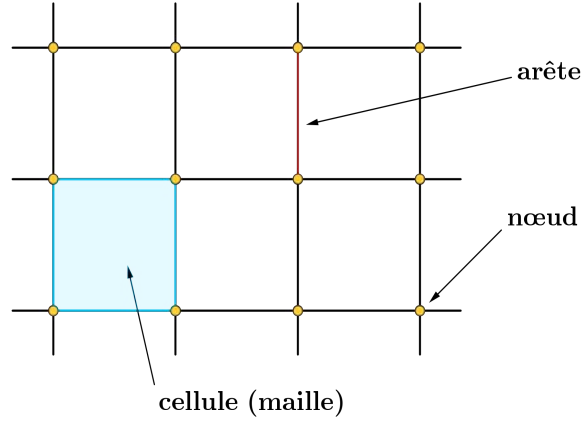


FIGURE 2.5 – Éléments constitutifs d'un maillage.

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{T}$ un maillage de X . Pour tout élément (maille) K de $\mathcal{T}$, on note Σ_K l'ensemble de ses nœuds. On suppose que chaque élément a N_l nœuds $\Sigma_K = \{a_1, \dots, a_{N_l}\}$, qui ne sont pas forcément ses sommets. On note P un espace de dimension finie constitué de polynômes, qui définit la méthode d'éléments finis choisie.

Définition 2.2. L'ensemble Σ_K est dit P -unisolvant si et seulement si, étant donnés N_l scalaires réels quelconques $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq N_l}$, il existe une unique fonction $f \in P$ telle que :

$$f(a_j) = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N_l$$

Définition 2.3. Lorsque l'ensemble Σ_K est P -unisolvant, le triplet (K, P, Σ_K) est appelé élément fini de Lagrange.

Étant donné un élément fini de Lagrange (K, P, Σ_K) , il existe donc pour tout entier i , $1 \leq i \leq N_l$, une fonction f_i et une seule telle que

$$f_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N_l$$

où δ est le symbole de Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Les fonctions f_i sont appelées fonctions de base locales. Plus généralement, pour tout

$v : K \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $f \in P$ interpolant v sur Σ_K , c'est-à-dire vérifiant

$$f(a_j) = v(a_j), \quad 1 \leq j \leq N_l$$

En effet, il suffit de prendre $f = \sum_{i=1}^{N_l} v(a_i) f_i$.

Définition 2.4. (*Interpolée*) Soit (K, P, Σ_K) un élément fini de Lagrange, et soit $v \in C(K, \mathbb{R})$ (i.e. $c : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue). L'interpolée de v est la fonction $\Pi_v \in P$ définie par :

$$\Pi_v = \sum_{i=1}^{N_l} v(a_i) f_i$$

et Π_v est dit le P -interpolé de Lagrange de v sur Σ_K .

On va à présent pouvoir générer une famille d'éléments finis à partir d'un élément fini de Lagrange de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_K)$. Soit F une application de $\hat{K}$ dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que

$$K = F(\hat{K})$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, connexe et d'intérieur non vide.

Théorème 2.1. On suppose que l'application F est injective. Soit $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_K)$ un élément fini de Lagrange, alors le triplet (K, P, Σ_K) défini par

$$\begin{aligned} K &= F(\hat{K}) \\ P &= f : K \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \circ F \in \hat{P} \\ \Sigma_K &= F(\hat{\Sigma}_K) \end{aligned}$$

est un élément fini de Lagrange.

Définition 2.5. Deux éléments finis de Lagrange $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_K)$ et (K, P, Σ_K) sont dits équivalents s'il existe une bijection F de $\hat{K}$ sur K vérifiant le théorème(2.1). De plus, lorsque la bijection F est une application affine les éléments finis sont dits affine-équivalents.

2.2.2 L'élément fini sur des quadrangles

On s'intéresse à l'élément fini 2-parallélotope de type (1) suivant

1. K est un rectangle de côtés parallèles aux axes.
2. $\Sigma_K = \{a_j\}_{1 \leq j \leq 4}$ est l'ensemble des sommets de K .
3. L'espace $P = \{\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \in \mathbf{Q1}\}$.

où $\mathbf{Q1} = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(x, y) = a + bx + cy + dxy, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$. Cet élément fini de Lagrange est alors appelé élément fini (K, P, Σ_K) . On prend comme élément fini de référence le carré $\hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$, et comme nœuds les coins de ce carré :

$$\hat{a}_1 = (0, 0), \hat{a}_2 = (1, 0), \hat{a}_3 = (1, 1), \hat{a}_4 = (0, 1)$$

Fonctions de bases locales

Les fonctions de base locales sur l'élément fini de référence $\hat{K}$ sont définies par $\hat{\phi}_i \in \hat{P}$

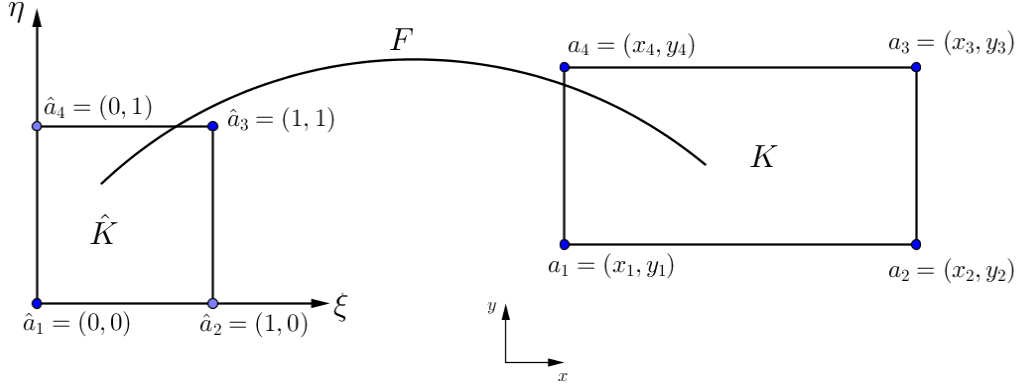


FIGURE 2.6 – Élément fini $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_K)$ de référence (à gauche) et élément fini (K, P, Σ_K) affine-équivalent (à droite)

tel que $\hat{\phi}_i(\hat{a}) = \delta_{ij}$, ce qui détermine les $\hat{\phi}_i$. Si on note (ξ, η) le système de coordonnées locales relatif à l'élément fini de référence, les fonctions de base $\{\hat{\phi}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta) \\ \hat{\phi}_2 &= \xi(1 - \eta) \\ \hat{\phi}_3 &= \xi\eta \\ \hat{\phi}_4 &= (1 - \xi)\eta\end{aligned}$$

Soit (x, y) le système de coordonnées locales relatif à un élément fini (K, P, Σ_K) et (x_i, y_i) les coordonnées des points $\{a_i\}_{1 \leq i \leq 4}$. La transformation affine

$$F : (\xi, \eta) \in \hat{K} = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow (x, y) \in K = [x_1, x_2] \times [y_1, y_4]$$

qui permet de passer de l'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}_K)$ à un élément (K, P, Σ_K) est donnée par :

$$(x, y) = F(\xi, \eta) = ((x_2 - x_1)\xi + x_1, (y_4 - y_1)\eta + y_1) \quad (2.12)$$

Simplement, on constate que

$$F^{-1}(x, y) = (\xi, \eta) = \left(\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}, \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} \right) \quad (2.13)$$

Les fonctions de base $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ d'un élément fini (K, P, Σ_K) sont alors définies par :

$$\phi_i = \hat{\phi}_i \circ F^{-1}$$

$$\phi_i(x, y) = \hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y)) = \hat{\phi}_i\left(\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}, \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)}\right)$$

D'où

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(1 - \frac{y - y_1}{y_4 - y_1}\right) \\ \phi_2(x, y) &= \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(1 - \frac{y - y_1}{y_4 - y_1}\right) \\ \phi_3(x, y) &= \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_4 - y_1}\right) \\ \phi_4(x, y) &= \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y - y_1}{y_4 - y_1}\right)\end{aligned}$$

2.3 Application

L'objectif de cette application est de présenter l'approche d'interpolation qui a été mise en œuvre dans cette thèse pour calculer les champs de vitesse et leurs gradients de vitesse dans un champ de vitesse expérimental stationnaire et instationnaire.

2.3.1 Cas des écoulements stationnaires

On va calculer les champs de vitesse et leurs gradients de vitesse dans un champ de vitesse expérimental stationnaire en bidimensionnelle et tridimensionnel.

2.3.1.1 Calcul de la vitesse locale par interpolation à partir du champ vitesse mesuré en 2D

Soit D ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière ∂D rectangle. On peut construire un recouvrement de D par des rectangles (comme réseau cartésien régulier) K_i comme indiqué dans la figure(2.7)

$$\bigcup_{i=1}^N K_i = D$$

si $i \neq j$, $K_i \cap K_j$ est un vide ou un sommet ou un côté (voir figure(2.7))

$$\begin{cases} K_{n_1} \cap K_{n_2} &= \phi \\ K_{i_1} \cap K_{i_2} &= \text{un sommet} \\ K_{j_1} \cap K_{j_2} &= \text{un côté} \end{cases}$$

Soit un champ de vitesse défini aux nœuds de ce réseau et un point χ à l'intérieur

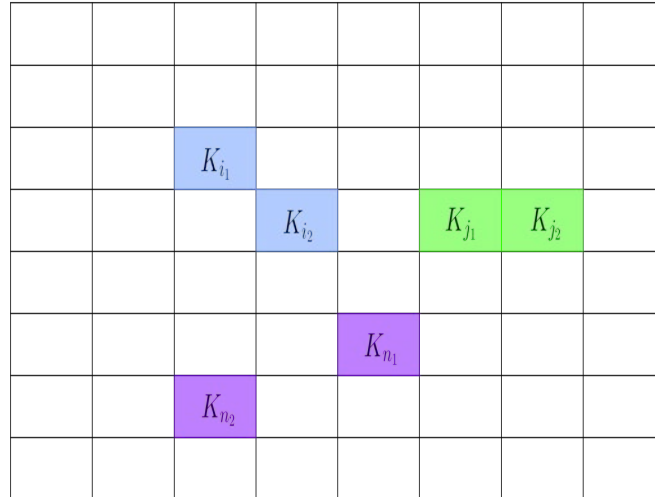


FIGURE 2.7 – Un réseau cartésien régulier. On note que le lien entre les éléments du maillage cartésien un vide ou un sommet ou un côté.

d'une maille.

Les sommets de cette maille sont numérotés 1, 2, 3, 4 comme indiqué dans la figure (2.8). Dans ces conditions, on peut calculer la vitesse au point χ par la méthode des

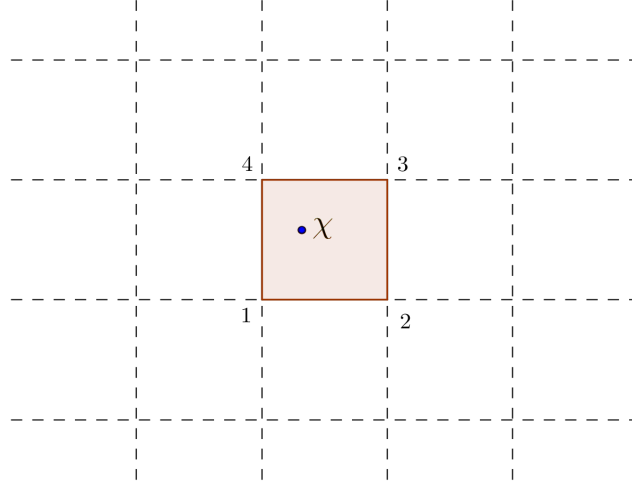


FIGURE 2.8 – Une maille du réseau cartésien

éléments finis de Lagrange **Q1** sur quadrangle.

On prend comme élément fini de référence le carré $\hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$, et comme nœuds les coins de ce carré :

$$\hat{a}_1 = (0, 0), \hat{a}_2 = (1, 0), \hat{a}_3 = (1, 1), \hat{a}_4 = (0, 1)$$

On prend comme espace de polynômes

$$P = \{f : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \in \mathbf{Q1}\}$$

où

$$\mathbf{Q1} = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(\hat{x}, \hat{y}) = a_{00} + a_{10}\hat{x} + a_{01}\hat{y} + a_{11}\hat{x}\hat{y}\}$$

La transformation affine de $\hat{K}$ dans K , Figure(2.9), est donnée par

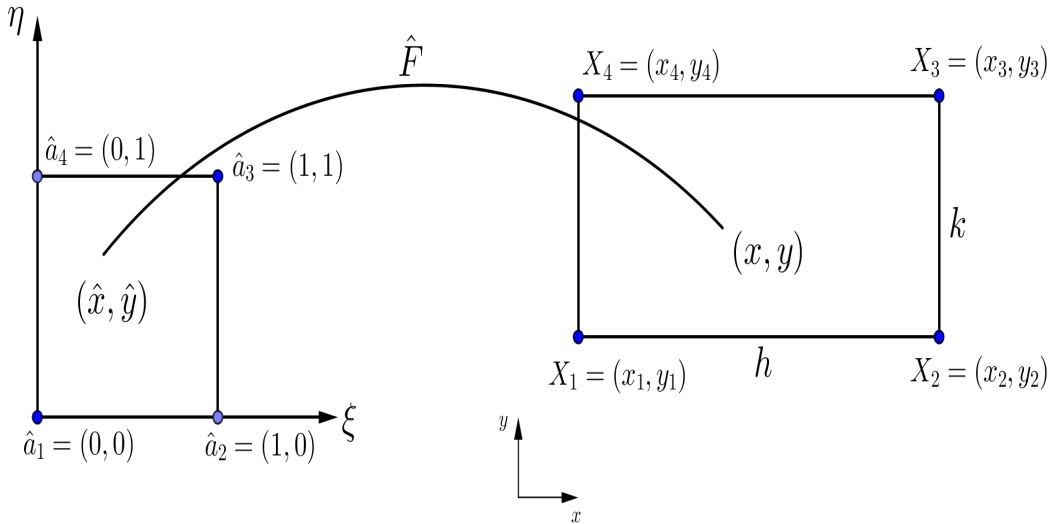


FIGURE 2.9 – Transformation du carré unité en quadrangle quelconque en réseau

$$\hat{F}(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y) = (x_1 + h\hat{x}, y_1 + k\hat{y}) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}(0,0) &= X_1 = (x_1, y_1) \\
\hat{F}(1,0) &= X_1 = (x_2, y_2) \\
\hat{F}(1,1) &= X_1 = (x_3, y_3) \\
\hat{F}(0,1) &= X_1 = (x_4, y_4)
\end{aligned}$$

Les coordonnées du champ de vitesse cherché sont sous la forme de deux polynômes de type :

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) = a_{00} + a_{10}\hat{x} + a_{01}\hat{y} + a_{11}\hat{x}\hat{y} \\
v(x, y) &= \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) = b_{00} + b_{10}\hat{x} + b_{01}\hat{y} + b_{11}\hat{x}\hat{y}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

les coefficients de ces polynômes doivent vérifier

$$\begin{aligned}
\hat{u}(0,0) = u_1, \quad \hat{u}(1,0) = u_2, \quad \hat{u}(1,1) = u_3, \quad \hat{u}(0,1) = u_4 \\
\hat{v}(0,0) = v_1, \quad \hat{v}(1,0) = v_2, \quad \hat{v}(1,1) = v_3, \quad \hat{v}(0,1) = v_4
\end{aligned}$$

pour la première équation, on trouve

$$\begin{aligned}
\hat{u}(0,0) = u_1 = a_{00} & \implies a_{00} = u_1 \\
\hat{u}(1,0) = u_2 = a_{00} + a_{10} & \implies a_{10} = u_2 - u_1 \\
\hat{u}(1,1) = u_3 = a_{00} + a_{01} & \implies a_{01} = u_3 - u_1 \\
\hat{u}(0,1) = u_4 = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11} & \implies a_{11} = u_4 - u_2 - u_3 + u_1
\end{aligned}$$

On a par l'équation (2.14) $\hat{x} = \frac{x - x_1}{h}$ et $\hat{y} = \frac{y - y_1}{k}$. Alors,

$$u(x, y) = a_{00} + a_{10}\left(\frac{x - x_1}{h}\right) + a_{01}\left(\frac{y - y_1}{k}\right) + a_{11}\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\left(\frac{y - y_1}{k}\right) \tag{2.16}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\hat{v}(0,0) = v_1 = b_{00} & \implies b_{00} = v_1 \\
\hat{v}(1,0) = v_2 = b_{00} + b_{10} & \implies b_{10} = v_2 - v_1 \\
\hat{v}(1,1) = v_3 = b_{00} + b_{01} & \implies b_{01} = v_3 - v_1 \\
\hat{v}(0,1) = v_4 = b_{00} + b_{10} + b_{01} + b_{11} & \implies b_{11} = v_4 - v_2 - v_3 + v_1
\end{aligned}$$

Alors,

$$v(x, y) = b_{00} + b_{10}\left(\frac{x - x_1}{h}\right) + b_{01}\left(\frac{y - y_1}{k}\right) + b_{11}\left(\frac{x - x_1}{h}\right)\left(\frac{y - y_1}{k}\right) \tag{2.17}$$

2.3.1.2 Calcul du gradient du champ vitesse mesuré par interpolation en 2D

Calculer le gradient du champ de vitesse suivent simplement à dériver le champ de vitesse interpolé. On obtient alors :

$$\text{grad}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{h}(a_{10} + a_{11}\hat{y}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = \frac{1}{k}(a_{01} + a_{11}\hat{x}) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{h}(b_{10} + b_{11}\hat{x}) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \frac{1}{k}(b_{01} + b_{11}\hat{y})\end{aligned}$$

Alors, le gradient de vitesse est donné par :

$$\text{grad}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h}(a_{10} + a_{11}(\frac{y-y_1}{k})) & \frac{1}{k}(a_{01} + a_{11}(\frac{x-x_1}{h})) \\ \frac{1}{h}(b_{10} + b_{11}(\frac{y-y_1}{k})) & \frac{1}{k}(b_{10} + b_{11}(\frac{x-x_1}{h})) \end{pmatrix}$$

2.3.1.3 Calcul la vitesse locale et leurs gradients par interpolation du champ vitesse mesuré en 3D

Soit D ouvert de $\mathbb{R}^3$ de frontière ∂D cube. On prend une recouvrement de D par un réseau cartésien régulier K_i comme indiqué dans la figure(2.10).

Soit un champ de vitesse défini aux nœuds de ce réseau et un point χ à l'intérieur d'un cube. Les sommets de ce cube sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 comme indiqué dans la figure(2.10). Dans la même procédure de l'interpolation en 2D, on trouve que les coordonnées du champ de vitesse $\mathbf{u}(u, v, w)$ au point χ sont donnés par :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= a_{000} + a_{100} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) + a_{010} \left(\frac{y-y_1}{k} \right) + a_{001} \left(\frac{z-z_1}{l} \right) \\ &+ a_{110} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{y-y_1}{k} \right) + a_{101} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right) \\ &+ a_{011} \left(\frac{y-y_1}{k} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right) + a_{111} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{y-y_1}{k} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x, y, z) &= b_{000} + b_{100} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) + b_{010} \left(\frac{y-y_1}{k} \right) + b_{001} \left(\frac{z-z_1}{l} \right) \\ &+ b_{110} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{y-y_1}{k} \right) + b_{101} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right) \\ &+ b_{011} \left(\frac{y-y_1}{k} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right) + b_{111} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{y-y_1}{k} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(x, y, z) &= c_{000} + c_{100} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) + c_{010} \left(\frac{y-y_1}{k} \right) + c_{001} \left(\frac{z-z_1}{l} \right) \\ &+ c_{110} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{y-y_1}{k} \right) + c_{101} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right) \\ &+ c_{011} \left(\frac{y-y_1}{k} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right) + c_{111} \left(\frac{x-x_1}{h} \right) \left(\frac{y-y_1}{k} \right) \left(\frac{z-z_1}{l} \right)\end{aligned}$$

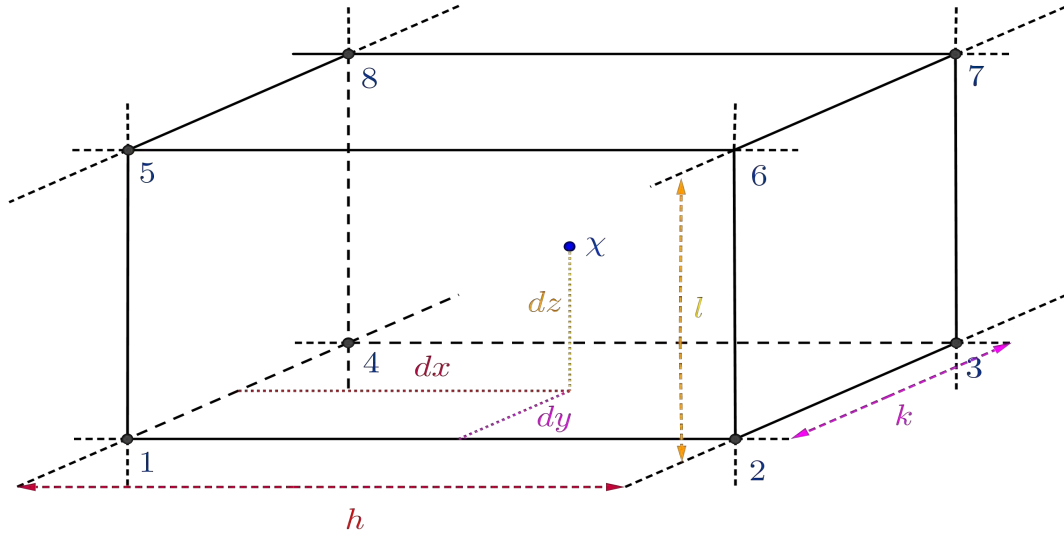


FIGURE 2.10 – Transformation du carré unité en quadrangle quelconque en réseau

avec,

$$\begin{aligned}
 a_{000} &= u_1 \\
 a_{100} &= u_2 - u_1 \\
 a_{010} &= u_4 - u_1 \\
 a_{001} &= u_5 - u_1 \\
 a_{110} &= u_3 - u_2 - u_4 + u_1 \\
 a_{101} &= u_6 - u_5 - u_2 + u_1 \\
 a_{011} &= u_8 - u_5 - u_4 + u_1 \\
 a_{111} &= u_7 - u_6 - u_8 - u_3 + u_2 + u_4 + u_5 - u_1 \\
 b_{000} &= v_1 \\
 b_{100} &= v_2 - v_1 \\
 b_{010} &= v_4 - v_1 \\
 b_{001} &= v_5 - v_1 \\
 b_{110} &= v_3 - v_2 - v_4 + v_1 \\
 b_{101} &= v_6 - v_5 - v_2 + v_1 \\
 b_{011} &= v_8 - v_5 - v_4 + v_1 \\
 b_{111} &= v_7 - v_6 - v_8 - v_3 + v_2 + v_4 + v_5 - v_1
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 c_{000} &= w_1 \\
 c_{100} &= w_2 - w_1 \\
 c_{010} &= w_4 - w_1 \\
 c_{001} &= w_5 - w_1 \\
 c_{110} &= w_3 - w_2 - w_4 + w_1 \\
 c_{101} &= w_6 - w_5 - w_2 + w_1 \\
 c_{011} &= w_8 - w_5 - w_4 + w_1 \\
 c_{111} &= w_7 - w_6 - w_8 - w_3 + w_2 + w_4 + w_5 - w_1
 \end{aligned}$$

Loi de transport d'une densité de probabilité

Dans ce chapitre, on cherche à caractériser la dispersion d'un traceur transporté dans un écoulement. Les moments permettent de représenter une distribution quelconque dans un support quelconque. Cependant, par souci de simplicité, on s'intéressera au cas d'une distribution de domaine contenant le traceur de support initialement circulaire et évoluant en elliptique du fait des cisaillements rencontrés sur sa trajectoire. De plus, la distribution de traceur sera considérée comme uniforme et de valeur unitaire, sauf mention contraire. Ainsi, seuls les moments d'ordres inférieurs ou égaux à 2 seront nécessaires pour décrire entièrement la distribution d'un tel traceur. Pour caractériser la dispersion des traceurs, des grandeurs statistiques sont utilisées. On va s'intéresser ici à des écoulements de fluide incompressibles dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ avec $n \in \{2, 3\}$ dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Cet écoulement est décrit par la densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sur $D \times [0, T]$, avec $\mathbf{x}$ le vecteur position et t le temps.

3.1 Grandeurs statistiques

3.1.1 Densité de probabilité associée à la distribution de traceur

Si E_t représente l'espace susceptible d'être occupé par le domaine contenant le traceur à l'instant t , en utilisant la conservation de la masse fluide, on en déduit que :

$$m_t = m = \int_{E_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

À chaque position du domaine contenant le traceur dans E_t , on associe la densité de probabilité $p(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)/m$.

3.1.2 Position moyenne

La position moyenne $\langle x_i \rangle$ est déterminée par les moments d'ordre 1 :

$$\langle x_i \rangle = \int_{E_t} x_i p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.2)$$

3.1.3 Matrice des moments d'ordre 2

La matrice des moments centrés d'ordre 2 est définie de la façon suivante :

$$\langle x_i x_j \rangle = \int_{E_t} (x_i - \langle x_i \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle) p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.3)$$

On note que, la matrice des moments d'ordre 2 est symétrique et définie positive. Par conséquent, elle peut être représentée par un ellipsoïde en dimension 3 ou par une ellipse en dimension 2 et caractérisée par des axes et des angles de rotation.

3.1.4 Caractéristiques géométriques à l'ordre 2

3.1.4.1 Calcul des caractéristiques de l'ellipse à partir de $\mathbf{P}$ en dimension 2 :

Les caractéristiques de l'ellipse sont calculées à partir de $\mathbf{P}$ la matrice des moments d'ordre 2, où :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{20} & P_{11} \\ P_{11} & P_{02} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On considère tout d'abord une ellipse $\mathcal{P}$ d'axes de longueurs $2a$ et $2b$, confondus avec les axes du repère et centrée à l'origine. On suppose que $\rho(\mathbf{x}, t)$ comme la fonction caractéristique $\chi(\mathbf{x}, t)$, i.e.

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \text{ellipse} \\ 0 & \text{si } \text{non} \end{cases}$$

, donc : $p(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)/m = 1/m$. L'aire de l'ellipse est égale à $\pi a b$ et la position moyenne est confondue avec l'origine du repère.

On peut calculer les moments d'ordre 2 de la distribution de traceur. On paramètre l'ellipse par $\mathcal{P} = \{(x, y) : x = r a \cos(\theta), y = r b \sin(\theta), \text{ où } r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Le jacobien J associé au changement de variables est donné par

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos(\theta) & -a r \sin(\theta) \\ b \sin(\theta) & b r \cos(\theta) \end{vmatrix} = a b r$$

Donc, le changement de variables à appliquer est $dx dy = a b r dr d\theta$.

On note $\mathbf{P}^{(1)}$ la matrice des moments d'ordre 2 de l'ellipse $\mathcal{P}$ où les coefficients de la matrice $\mathbf{P}^{(1)}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_{11}^{(1)} &= \frac{1}{\pi a b} \iint_{\mathcal{P}} x y dx dy \\ &= \frac{1}{\pi a b} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (a r \cos(\theta)) (b r \sin(\theta)) |J| dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi a b} a^2 b^2 \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\theta) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{20}^{(1)} &= \frac{1}{\pi a b} \iint_{\mathcal{P}} x^2 \, dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi a b} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (a r \cos(\theta)) (a r \cos(\theta)) |J| \, dr d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi a b} a^3 b \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
 &= \frac{a^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{02}^{(1)} &= \frac{1}{\pi a b} \iint_{\mathcal{P}} y^2 \, dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi a b} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (b r \sin(\theta)) (b r \sin(\theta)) |J| \, dr d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi a b} a b^3 \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \\
 &= \frac{b^2}{4}
 \end{aligned}$$

Alors, la matrice des moments d'ordre 2 est donnée par :

$$\mathbf{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}$$

Si on considère à présent que l'ellipse a tourné d'un angle φ , on peut utiliser le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}
 x^{(1)} &= x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) \\
 y^{(1)} &= -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)
 \end{aligned}$$

On peut alors calculer les moments dans le nouveau repère :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{20}^{(1)} & 0 \\ 0 & P_{02}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_{20}^{(1)} \cos^2(\varphi) + P_{02}^{(1)} \sin^2(\varphi) & (P_{02}^{(1)} - P_{20}^{(1)}) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ (P_{02}^{(1)} - P_{20}^{(1)}) \sin(\varphi) \cos(\varphi) & P_{02}^{(1)} \cos^2(\varphi) + P_{20}^{(1)} \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{cases} P_{20} = P_{20}^{(1)} \cos^2(\varphi) + P_{02}^{(1)} \sin^2(\varphi) \\ P_{11} = (P_{02}^{(1)} - P_{20}^{(1)}) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ P_{02} = P_{02}^{(1)} \cos^2(\varphi) + P_{20}^{(1)} \sin^2(\varphi) \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{cases} P_{20}^{(1)} = \frac{a^2}{4} = P_{20} \cos^2(\varphi) + P_{02} \sin^2(\varphi) + 2 P_{11} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) \\ P_{02}^{(1)} = \frac{b^2}{4} = P_{02} \cos^2(\varphi) + P_{20} \sin^2(\varphi) - 2 P_{11} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) \\ P_{11}^{(1)} = 0 = (P_{02} - P_{20}) \sin(\varphi) \cos(\varphi) + P_{11} (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \end{cases}$$

On peut résoudre facilement ces équations, et on obtient :

$$\begin{cases} \tan(2\varphi) = \frac{2 P_{11}}{P_{20} - P_{02}} \\ \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2} \left(P_{20} + P_{02} + \sqrt{(P_{20} - P_{02})^2 + 4(P_{11})^2} \right) \\ \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2} \left(P_{20} + P_{02} - \sqrt{(P_{20} - P_{02})^2 + 4(P_{11})^2} \right) \end{cases} \quad (3.5)$$

Donc, on peut caractériser l'ellipse Figure(3.1) par la matrice symétrique et définie positive $\mathbf{P}$ (la matrice des moments d'ordre 2)

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 P_{11}}{P_{20} - P_{02}} \right) \\ a = \sqrt{2 \left(P_{20} + P_{02} + \sqrt{(P_{20} - P_{02})^2 + 4(P_{11})^2} \right)} \\ b = \sqrt{2 \left(P_{20} + P_{02} - \sqrt{(P_{20} - P_{02})^2 + 4(P_{11})^2} \right)} \end{cases} \quad (3.6)$$

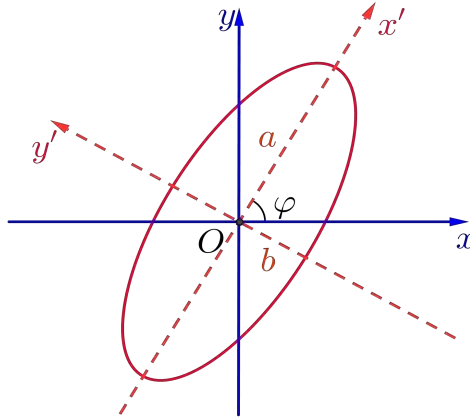


FIGURE 3.1 – Repères et notation utilisées pour caractériser la géométrie de l'ellipse.

Interprétation de ces moments :

1. Le moment P_{20} représente l'élongation du traceur selon la direction x .
2. Le moment P_{02} représente l'élongation du traceur selon la direction y .

3. Le moment P_{11} définit l'orientation du traceur par rapport à l'axe horizontal :

- ♣ Si $P_{11} > 0$ alors l'angle de rotation entre Ox et Ox' est $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (On voit que, si $P_{20} > P_{02}$ alors $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et si $P_{20} < P_{02}$ alors $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$). On parle alors d'orientation positive.
- ♣ Si $P_{11} < 0$ alors l'angle de rotation entre Ox et Ox' est $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ (On voit que, si $P_{20} > P_{02}$ alors $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ et si $P_{20} < P_{02}$ alors $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$). On parle alors d'orientation négative.

Le tableau(3.1) représente les caractéristiques de l'ellipse à partir de la matrice des moments d'ordre 2 :

P_{11}	$P_{20}-P_{02}$	2φ	φ	caractéristique géométrique
+	+	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \frac{\pi}{4}]$	Figure(3.2(a))
-	+	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[-\frac{\pi}{4}, 0]$	Figure(3.2(b))
+	-	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$	Figure(3.2(c))
-	-	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$	Figure(3.2(d))

TABLE 3.1 – Tableau des caractéristiques de l'angle de rotation φ de l'ellipse en fonction des moments d'ordre 2.

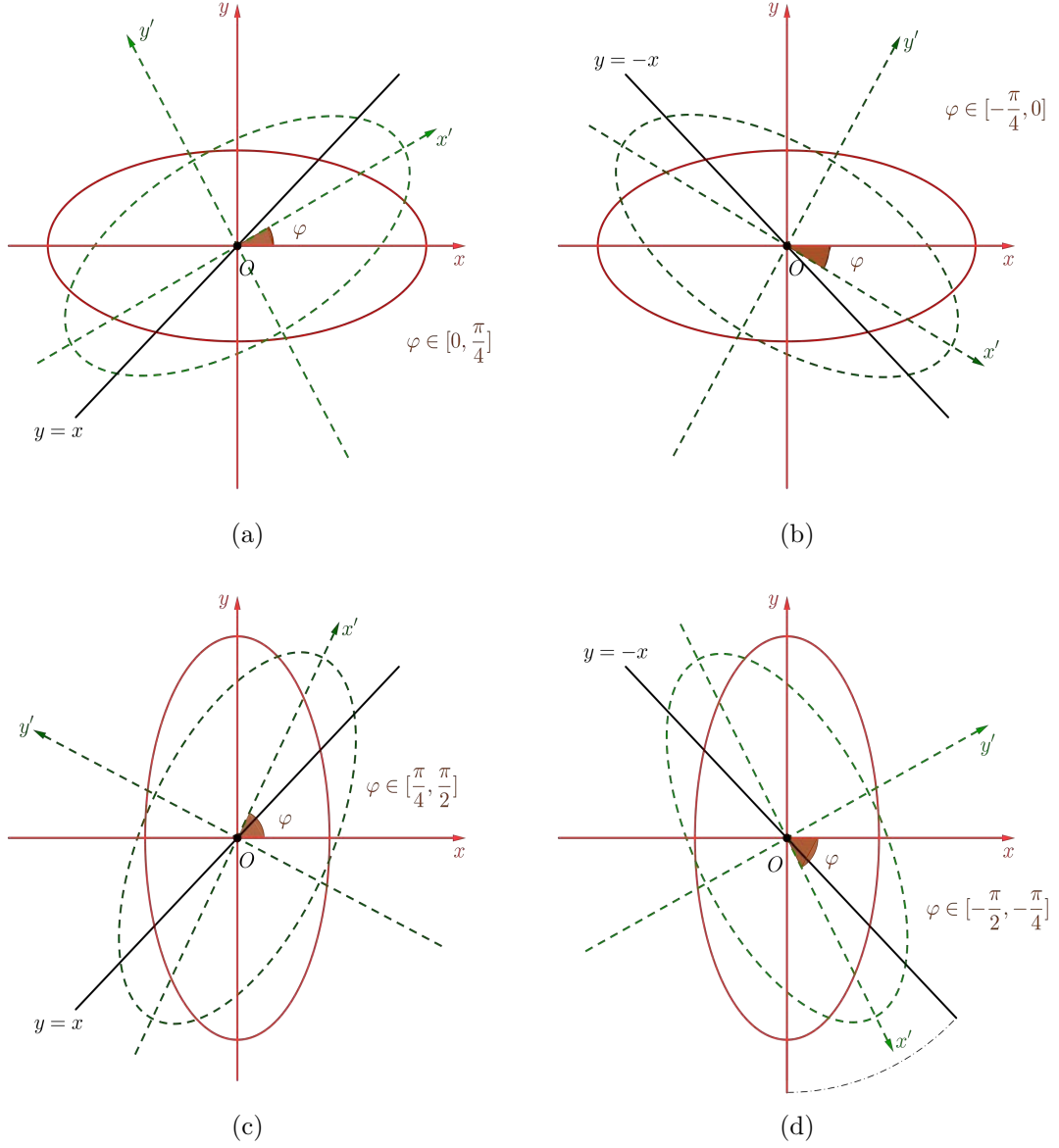


FIGURE 3.2 – Représentation des différentes valeurs possibles de l'angle de rotation φ de l'ellipse en fonction du signe de P_{11} et $P_{20} - P_{02}$. (a) $P_{11} > 0$ et $P_{20} - P_{02} > 0$, (b) $P_{11} < 0$ et $P_{20} - P_{02} > 0$, (c) $P_{11} > 0$ et $P_{20} - P_{02} < 0$, et (d) $P_{11} < 0$ et $P_{20} - P_{02} < 0$.

3.1.4.2 Exemple simple en 2D :

On va identifier les caractéristiques géométriques des matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où les matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ sont données par :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{13}{16} & \frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{3\sqrt{3}}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix} & \mathbf{P}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{13}{16} & -\frac{3\sqrt{3}}{16} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^{(3)} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{3\sqrt{3}}{16} & \frac{13}{16} \end{pmatrix} & \mathbf{P}^{(4)} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & -\frac{3\sqrt{3}}{16} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{16} & \frac{13}{16} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On prend la matrice $\mathbf{P}^{(4)}$. On note que $\mathbf{P}^{(4)}$ est une matrice symétrique d'ordre 2 et définie positive, donc on peut lui associer une ellipse en dimension 2. À partir des équations(3.5), l'angle de la rotation est donné par :

$$\tan(2\varphi) = \frac{2P_{11}}{P_{20} - P_{02}} = \frac{2(-\frac{3\sqrt{3}}{16})}{\frac{7}{16} - \frac{13}{16}} = \sqrt{3}$$

On note que, $P_{11} < 0$ et $P_{20} - P_{02} < 0$, donc à partir du tableau(3.1), $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.
Le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{4} &= \frac{1}{2} \left(P_{20} + P_{02} + \sqrt{(P_{20} - P_{02})^2 + 4(P_{11})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{16} + \frac{13}{16} + \sqrt{(\frac{7}{16} - \frac{13}{16})^2 + 4(-\frac{3\sqrt{3}}{16})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{16} + \sqrt{\frac{36}{256} + \frac{108}{256}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{16} + \frac{12}{16} \right) = 1\end{aligned}$$

donc, $a^2 = 4$ et $a = 2$.

Et le demi-petit axe de l'ellipse :

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{4} &= \frac{1}{2} \left(P_{20} + P_{02} - \sqrt{(P_{20} - P_{02})^2 + 4(P_{11})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{16} - \frac{12}{16} \right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc, $b^2 = 1$ et $b = 1$.

Donc, on identifie les caractéristiques géométriques de la matrice $\mathbf{P}^{(4)}$ par les axes $a = 2$ et $b = 1$ et l'angle de rotation $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (figure3.3(d)).

De la même façon, on trouve :

- ♣ Les caractéristiques géométriques de l'ellipse associée à la matrice $\mathbf{P}^{(1)}$ sont données par : $a = 2$, $b = 1$ et l'angle de rotation $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (figure 3.3(a)).
- ♣ Les caractéristiques géométriques de l'ellipse associée à la matrice $\mathbf{P}^{(2)}$ sont données par : $a = 2$, $b = 1$ et l'angle de rotation $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (figure 3.3(b)).
- ♣ Les caractéristiques géométriques de l'ellipse associée à la matrice $\mathbf{P}^{(3)}$ sont données par : $a = 2$, $b = 1$ et l'angle de rotation $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (figure 3.3(c)).

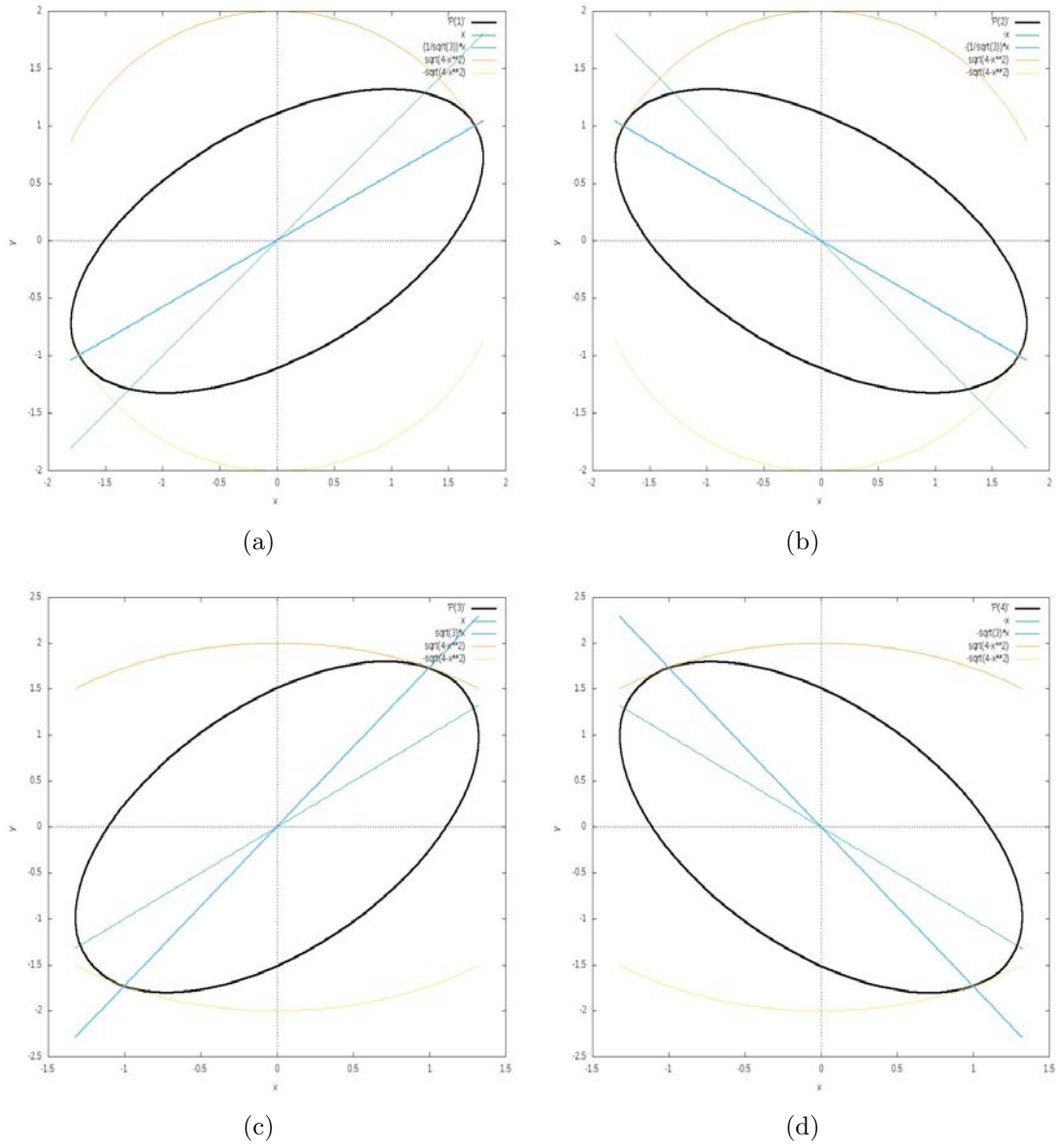


FIGURE 3.3 – Représentation graphique des ellipses associées aux matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dans le repère orthonormal. Un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $r = 2$ (où le rayon du cercle est égal au demi-grand axe de l'ellipse) (jaune) et le grand axe (bleu).

3.1.5 Calcul des caractéristiques de l'ellipsoïde à partir de $\mathbf{P}$ en dimension 3

Pour le calcul des caractéristiques de l'ellipsoïde à partir de $\mathbf{P}$, la matrice des moments d'ordre 2

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

on considère tout d'abord un ellipsoïde, dont les axes de demi-longueur respectives a , b et c sont confondus avec les axes du repère, et centrée à l'origine. On suppose que $\rho = 1$ à l'intérieur de l'ellipsoïde. Le volume de l'ellipsoïde est égal à $\frac{3}{4}\pi abc$ et la position moyenne est confondue avec l'origine du repère.

On peut calculer les moments d'ordre 2 de la distribution du traceurs. L'ellipse est paramétrée par $\mathcal{P} = \{(x, y, z) : x = ar \cos(\theta) \sin(\phi), y = br \sin(\theta) \sin(\phi), z = cr \cos(\phi) \text{ où } r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]\}$. Le jacobien J associé au changement de variables est donné par :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos(\theta) \sin(\phi) & -ar \sin(\theta) \sin(\phi) & ar \cos(\theta) \cos(\phi) \\ b \sin(\theta) \sin(\phi) & br \cos(\theta) \sin(\phi) & br \sin(\theta) \cos(\phi) \\ c \cos(\phi) & 0 & -cr \sin(\phi) \end{vmatrix} = abc r^2$$

Donc le changement de variables est $dx dy dz = abc r^2 dr d\theta d\phi$.

On trouve :

$$\begin{aligned} P_{11}^{(1)} &= \frac{3}{4\pi abc} \int_{\mathcal{P}} x^2 dx dy dz \\ &= \frac{3}{4\pi abc} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (ar \cos(\theta) \sin(\phi))^2 abc r^2 \sin(\phi) dr d\theta d\phi \\ &= \frac{3}{4\pi abc} a^3 bc \int_0^1 r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi \\ &= \frac{a^2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12}^{(1)} = P_{21}^{(1)} &= \frac{3}{4\pi abc} \int_{\mathcal{P}} xy dx dy dz \\ &= \frac{3}{4\pi abc} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (ar \cos(\theta) \sin(\phi))(br \sin(\theta) \sin(\phi)) abc r^2 \sin(\phi) dr d\theta d\phi \\ &= \frac{3}{4\pi abc} a^2 b^2 c \int_0^1 r^4 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta}_{=0} \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{13}^{(1)} &= P_{31}^{(1)} = \frac{3}{4\pi a b c} \int_{\mathcal{P}} x z \, dx dy dz \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a r \cos(\theta) \sin(\phi)) (c r \cos(\phi)) a b c r^2 \sin(\phi) \, dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} a^2 b c^2 \int_0^1 r^4 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta}_{=0} \int_0^\pi \sin^2(\phi) \cos(\phi) \, d\phi = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{23}^{(1)} &= P_{32}^{(1)} = \int_{\mathcal{P}} y z \, dx dy dz \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (b r \sin(\theta) \sin(\phi)) (c r \cos(\phi)) a b c r^2 \sin(\phi) \, dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} a^2 b c^2 \int_0^1 r^4 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \, d\theta}_{=0} \int_0^\pi \sin^2(\phi) \cos(\phi) \, d\phi = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{22}^{(1)} &= \frac{3}{4\pi a b c} \int_{\mathcal{P}} y^2 \, dx dy dz \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (b r \sin(\theta) \sin(\phi))^2 a b c r^2 \sin(\phi) \, dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} a b^3 c \int_0^1 r^4 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \, d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\phi) \, d\phi}_{\frac{4}{3}} \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} \frac{4\pi}{15} a b^3 c = \frac{b^2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{33}^{(1)} &= \frac{3}{4\pi a b c} \int_{\mathcal{P}} z^2 \, dx dy dz \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (c r \cos(\phi))^2 a b c r^2 \sin(\phi) \, dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} a b c^3 \int_0^1 r^4 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos^2(\phi) \sin(\phi) \, d\phi}_{\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{3}{4\pi a b c} \frac{4\pi}{15} a b c^3 = \frac{c^2}{5}
 \end{aligned}$$

Donc la matrice des moments d'ordre 2 pour une ellipsoïde $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$\mathbf{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{5} \end{pmatrix}$$

Pour l'obtention des angles, la démarche est plus complexe en dimension 3. On doit diagonaliser la matrice $\mathbf{P}$. Les valeurs propres donnent les longueurs des axes de l'ellipsoïde, et les vecteurs propres leurs directions.

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 (où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) les valeurs propres de la matrice des moments $\mathbf{P}$, et $\vec{W}_1, \vec{W}_2$ et $\vec{W}_3$ les vecteurs propres correspondant et qui forment une base orthonormée :

$$\vec{W}_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{W}_2 = \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{W}_3 = \begin{pmatrix} w_{31} \\ w_{32} \\ w_{33} \end{pmatrix}$$

Maintenant soit R la matrice ayant ces vecteurs propres comme colonnes :

$$R = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$R^{-1}\mathbf{P}R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1$$

Pour calculer les angles de rotation, il suffit de calculer les angles d'Euler en passant du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère $(O, \vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3)$ par trois rotations successives (Figure 3.4(a)).

Rotation autour de $\vec{W}_3$: pour amener $\vec{W}_1$ sur $\vec{i}_1$ la projection orthogonale du vecteur $\vec{i}$ sur le plan $(O, \vec{W}_1, \vec{W}_2)$, (Figure 3.4(b)).

On obtient un repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{W}_3)$, et $\theta = (\vec{W}_1, \vec{i}_1)$.

Rotation autour de $\vec{j}_1$: pour amener $\vec{i}_1$ sur $\vec{i}$. On obtient un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

On remarque que $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}_1)$, (Figure 3.4(c)).

Rotation autour de $\vec{i}$: pour amener le plan $(O, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ sur le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$

On remarque que, $\psi = (\vec{j}_1, \vec{j}) = (\vec{k}_1, \vec{k})$, (Figure 3.4(d)).

Calcul des angles (θ, ϕ, ψ) : On remarque que,

$$\vec{i}_1 = \frac{\vec{i} - (\vec{i} \cdot \vec{W}_3) \vec{W}_3}{\|\vec{i} - (\vec{i} \cdot \vec{W}_3) \vec{W}_3\|}$$

Alors,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\vec{W}_1 \wedge \vec{i}_1}{\vec{W}_1 \cdot \vec{i}_1}\right)$$

On a $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}_1)$, donc l'angle φ est donné par

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\vec{i} \wedge \vec{i}_1}{\vec{i} \cdot \vec{i}_1}\right)$$

On a $\psi = (\vec{j}_1, \vec{j})$, où $\vec{j}_1 = \frac{\vec{i}_1 \wedge \vec{W}_3}{\|\vec{i}_1 \wedge \vec{W}_3\|}$, donc

$$\psi = \arctan\left(\frac{\vec{j}_1 \wedge \vec{j}}{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}}\right)$$

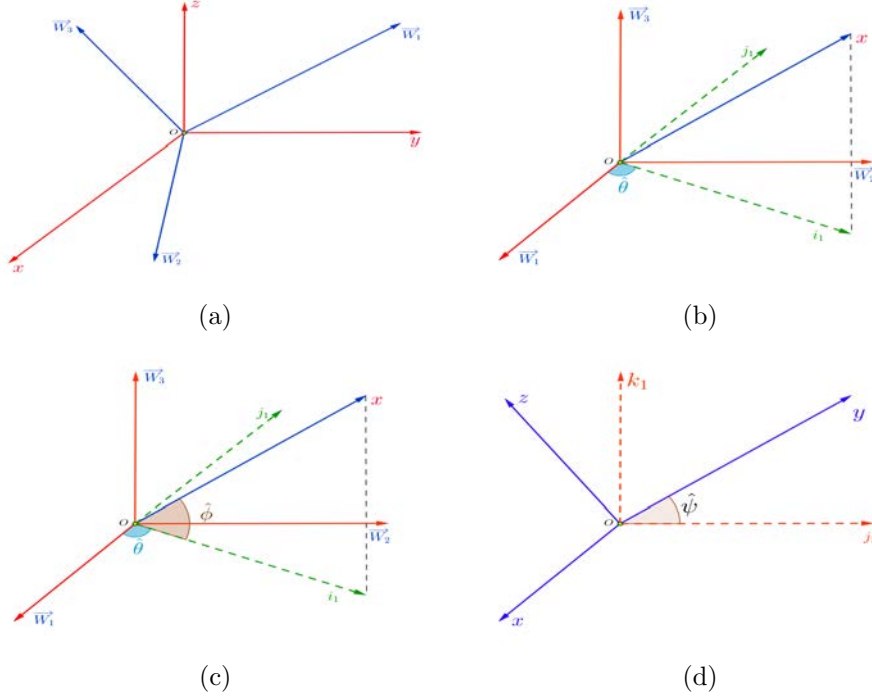


FIGURE 3.4 – Définition des angles d'Euler et des rotations associées, (a) repère globale $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et repère des vecteurs propres $(\vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3)$, (b) une rotation autour de $\vec{W}_3$, on obtient un repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{W}_3)$ et $\theta = (\vec{W}_1, \vec{i}_1)$, (c) une rotation autour de $\vec{j}_1$, on obtient un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}_1)$, et (d) une rotation autour de $\vec{i}$, on obtient un repère $(O, \vec{x}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\psi = (\vec{j}_1, \vec{j})$.

3.2 Transport de la matrice des moments

On considère que les domaines contenant des traceurs sont plongés dans un champ de vitesse incompressible $\mathbf{u}$.

3.2.1 Hypothèse de faible dispersion

Dans ce travail, on ne s'intéresse qu'à des faibles dispersions de traceurs. On fait l'hypothèse que la fluctuation des axes de l'ellipsoïde est faible devant le rayon moyen et le rayon moyen doit être petit également.

On peut alors développer le champ de vitesse au voisinage du point moyen $\langle x \rangle$. On note $x'_i = x_i - \langle x \rangle$ la fluctuation de position. On trouve :

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i(\langle \mathbf{x} \rangle, t) + u_{i,p}(\langle \mathbf{x} \rangle, t)x'_p + u_{i,pq}(\langle \mathbf{x} \rangle, t)x'_p x'_q + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}'\|^2) \quad (3.7)$$

3.2.2 Équation de transport du volume

L'écoulement étant supposé incompressible et le milieu homogène, on en déduit que la densité du domaine contenant le traceur à l'instant t dans E_t est uniforme, égale à $\frac{1}{\nu_t}$ à l'intérieur de l'ellipse où ν_t est le volume de E_t .

3.2.3 Équation de transport d'un point matériel

Soit $M(x, y, z)$ un point matériel. L'équation de transport d'un point matériel par un champ de vitesse est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

3.2.4 Équation de transport de la position moyenne

On obtient l'équation de transport de la position moyenne en dérivant la position moyenne par rapport au temps,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x_i \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{E_t} x_i p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{m} \int_{E_t} x_i \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(\rho(\mathbf{x}, t)) \right) + u_i \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \int_{E_t} u_i p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \langle u_i \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

La position moyenne est transportée par la vitesse moyenne. On peut introduire le développement de Taylor de la vitesse donné par 3.7. On obtient :

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = u_i(\langle \mathbf{x} \rangle, t) + u_{i,p}(\langle \mathbf{x} \rangle, t) \langle x'_p \rangle + u_{i,pq}(\langle \mathbf{x} \rangle, t) \langle x'_p x'_q \rangle + \mathcal{O}(\langle x'_p x'_q x'_r \rangle) \quad (3.10)$$

Remarque 3.1. Si on néglige le terme lié au hessien de la vitesse, une représentation géométrique sous forme d'ellipse est cohérente. Le champ de vitesse est alors linéarisé et une surface elliptique restera elliptique au cours du temps.

3.2.5 Équation de transport des moments d'ordre 2

L'équation de transport des moments d'ordre 2 s'obtient aisément :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x'_i x'_j \rangle}{dt} &= \left\langle \frac{dx'_i}{dt} x'_j \right\rangle + \left\langle x'_i \frac{dx'_j}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle [u_{i,p}(\langle \mathbf{x} \rangle, t) x'_p + \mathcal{O}(\langle x'_i x'_p \rangle)] x'_j \right\rangle + \left\langle [u_{j,p}(\langle \mathbf{x} \rangle, t) x'_p + \mathcal{O}(\langle x'_j x'_p \rangle)] x'_i \right\rangle \\ &= u_{i,p}(\langle \mathbf{x} \rangle, t) \langle x'_p x'_j \rangle + u_{j,p}(\langle \mathbf{x} \rangle, t) \langle x'_p x'_i \rangle + \mathcal{O}(\langle x'_i x'_j x'_p \rangle) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si on note $L_{ij} = u_{i,j}(\langle \mathbf{x} \rangle, t)$ le tenseur gradient des vitesses au point moyen, et P_{ij} la matrice des moments d'ordre 2, on obtient :

$$\frac{dP_{ij}}{dt} \simeq L_{ip} P_{pj} + L_{jp} P_{pi} \quad (3.12)$$

et sous forme matricielle :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} \simeq \mathbf{L} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{L}^T \quad (3.13)$$

où, $\mathbf{L}^T$ est la transposée de la matrice $\mathbf{L}$.

3.3 Exemples

3.3.1 Exemple (1) : Champ de vitesse linéaire en deux dimensions

On considère un écoulement permanent défini dans un repère (o, x, y) par le champ de vitesse suivant :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u = a + b y \\ v = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Le gradient de vitesse est donné par :

$$L = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On note que le fluide est incompressible ($\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$).

3.3.1.1 Choix des conditions initiales :

À l'instant initial $t_0 = 0$, le domaine contenant le traceur a pour centre $\mathbf{x}_0(2, 2)$ et pour $r_0 = 2$ et la matrice $\mathbf{P}_0$ des moments d'ordre 2 est égale à I .

3.3.1.2 La trajectoire

La trajectoire $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ de la position moyenne est obtenue en résolvant le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\langle x \rangle}{dt} = a + b y \\ \frac{d\langle y \rangle}{dt} = 0 \\ \langle x(0) \rangle = 2 \\ \langle y(0) \rangle = 2 \end{cases}$$

On trouve facilement :

$$\begin{cases} \langle x(t) \rangle = (a + b) t + x_0 = (a + b) t + 2 \\ \langle y(t) \rangle = y_0 = 2 \end{cases}$$

3.3.1.3 Évolution de la matrice des moments d'ordre 2

L'équation de transport de la matrice des moments d'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{L}^T$$

L'écoulement incompressible, donc $L_{11} + L_{22} = 0$ et cela donne :

$$\begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = 2(L_{11}P_{11} + L_{12}P_{12}) \\ \frac{dP_{22}}{dt} = 2(L_{22}P_{22} + L_{21}P_{12}) \\ \frac{dP_{12}}{dt} = L_{21}P_{11} + L_{12}P_{22} \end{cases}$$

Dans notre cas, le système devient :

$$\begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = 2bP_{12} \\ \frac{dP_{22}}{dt} = 0 \\ \frac{dP_{12}}{dt} = \frac{dP_{21}}{dt} = bP_{22} \end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales, on en déduit immédiatement que :

$$\begin{cases} P_{11} = \frac{r_0^2}{4}(b^2t^2 + 1) \\ P_{22} = \frac{r_0^2}{4} \\ P_{12} = \frac{r_0^2}{4}bt \end{cases}$$

Dans le cas $b = 0.1$, $a = 0$ avec un rayon de disque $r_0 = 2$, on a :

$$\begin{cases} P_{11} = 0.01t^2 + 1 \\ P_{22} = 1 \\ P_{12} = 0.1t \end{cases}$$

La figure (3.5) représente l'évolution des moments d'ordre 2.

- ♣ Remarque sur les moments P_{11} et P_{22} : on observe que le moment P_{22} est constant tandis que le moment P_{11} augmente. Ce qui correspond au cas où il y a seulement élongation selon x et pas selon y .
- ♣ Quant au moment croisé P_{12} on observe que toutes les valeurs de P_{12} sont positives, ce qui correspond à une orientation positive.

3.3.1.4 Caractéristiques de l'ellipse

L'angle est donné par l'équation (3.6). On a :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2P_{11}}{P_{20} - P_{02}}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2(0.1t)}{0.01t^2 + 1 - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2}{0.1t}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{20}{t}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

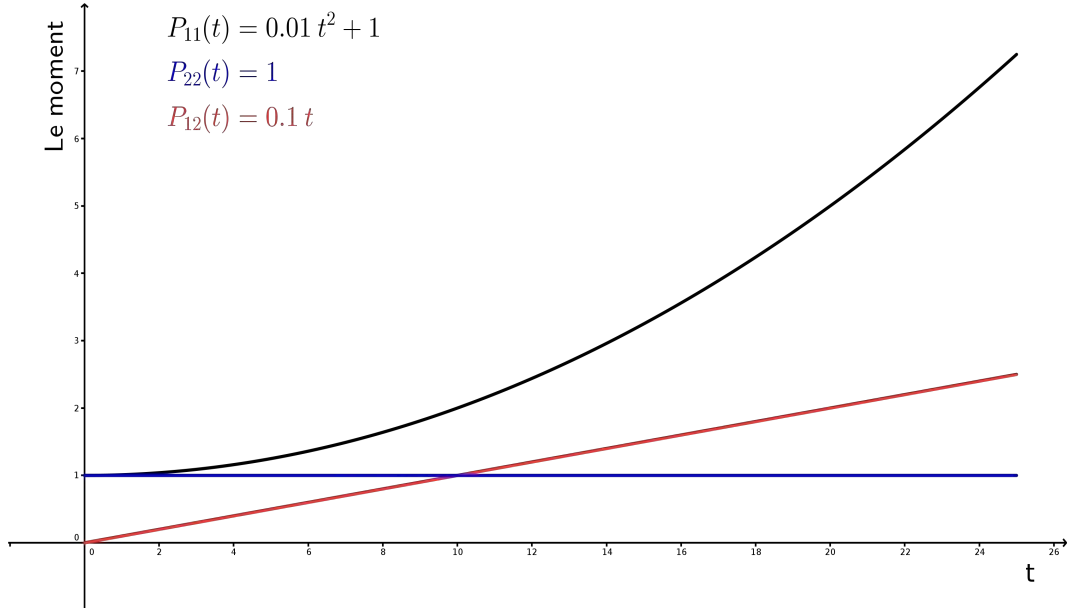


FIGURE 3.5 – Évolution les moments d'ordre 2 d'un disque de centre $\mathbf{x}_0(2, 2)$ dans un écoulement linéaire.

Dans la figure(3.6) l'ellipse commence à s'étirer dans la direction donnée par le vecteur propre de la partie symétrique du tenseur des vitesses. L'angle $\theta(t)$ de la direction principale par rapport à l'axe ox :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = \frac{\pi}{4}$$

et l'orientation est positive ($P_{12} > 0$). L'angle diminue jusqu'à 0 (elle s'aligne progressivement avec la trajectoire).

Le demi-grand axe est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} &= \frac{1}{2} \left(0.01 t^2 + 1 + 1 + \sqrt{(0.01 t^2 + 1 - 1)^2 + 4 (0.1 t)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(0.01 t^2 + 2 + \sqrt{10^{-4} t^4 + 4 \cdot 10^{-2} t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(0.01 t^2 + 2 + 0.1 t \sqrt{0.01 t^2 + 4} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$a = \sqrt{2 \left(0.01 t^2 + 2 + 0.1 t \sqrt{0.01 t^2 + 4} \right)}$$

Le demi-petit axe est donné par :

$$b = \sqrt{2 \left(0.01 t^2 + 2 - 0.1 t \sqrt{0.01 t^2 + 4} \right)}$$

Quand t est grand, l'ellipse s'étire de façon proportionnelle au temps.

La figure(3.7) représente un disque de centre $\mathbf{x}_0(3, 3)$ transporté dans l'écoulement.

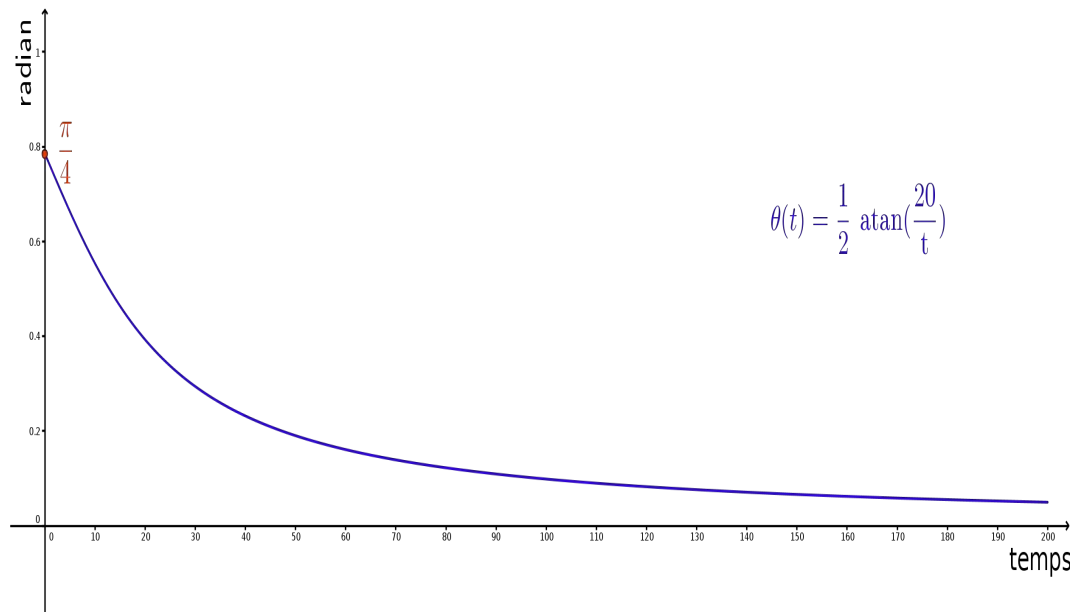


FIGURE 3.6 – Évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps.

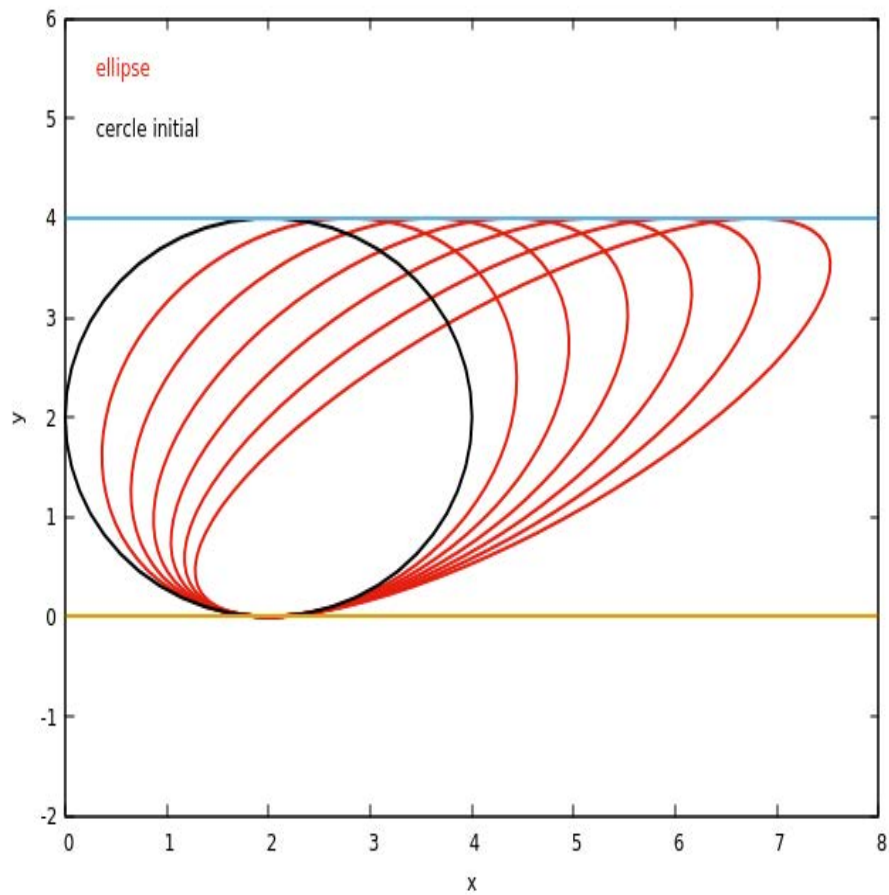


FIGURE 3.7 – Transport d'un disque dans l'écoulement linéaire.

3.3.2 Exemple (2) : Champ de vitesse cylindrique en trois dimensions

On considère un écoulement permanent défini dans un repère (o, x, y, z) par le champ de vitesse suivant :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u &= -\omega y \\ v &= \omega x \\ w &= W \end{cases} \quad (3.17)$$

où, $W \in \mathbb{R}$ et $\omega = \omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{u}_0)}{\partial r}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Calcul du gradient de vitesse

On dérive les composantes de vitesse par rapport aux positions,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\omega y) = -y \frac{\partial \omega}{\partial x} = -y \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{xy}{r} \omega' \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}(\omega y) = -\omega - y \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\omega - y \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -\omega - \frac{y^2}{r} \omega' \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\omega x) = \omega + x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega + y \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \omega + \frac{x^2}{r} \omega' \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = x \frac{\partial \omega}{\partial y} = x \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \omega' \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Donc, le gradient de vitesse est donné par :

$$\mathbf{L} = \nabla u = \begin{pmatrix} -\frac{xy}{r} \omega' & -\omega - \frac{y^2}{r} \omega' & 0 \\ \omega + \frac{x^2}{r} \omega' & \frac{xy}{r} \omega' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que, $\frac{xy}{r} = \frac{r}{2} \sin(2\theta)$, $\frac{x^2}{r} = \frac{r}{2} (1 - \cos(2\theta))$ et $\frac{y^2}{r} = \frac{r}{2} (1 + \cos(2\theta))$. Donc, on peut écrire le gradient de vitesse :

$$\mathbf{L} = \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(\omega + \frac{\omega' r}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\Omega}$$

Soit $\mathbf{S}$ la matrice de la partie symétrique de $\mathbf{L}$, $S = \frac{L+L^t}{2}$, on trouve :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{xy}{r} \omega' & \frac{x^2 - y^2}{r} \omega' & 0 \\ \frac{x^2 - y^2}{r} \omega' & \frac{xy}{r} \omega' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2.1 Choix des conditions initiales :

On choisit une répartition initiale dans une boule de rayon r_0 située en $\mathbf{x}_0(5, 0, 0)$. La matrice de $\mathbf{P}$ est égale à $\frac{r_0^2}{5}$ fois la matrice identité (i.e, $\mathbf{P}_0 = \frac{r_0^2}{5} \mathbf{I}$).

3.3.2.2 La trajectoire

La trajectoire pour un état initial $\mathbf{x}_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant initiale t_0 est donné par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\omega \langle y \rangle \\ \frac{d\langle y \rangle}{dt} = \omega \langle x \rangle \\ \frac{d\langle z \rangle}{dt} = W \end{cases}$$

On trouve facilement que la trajectoire du point pour notre condition initiale est donnée par :

$$\begin{cases} \langle x(t) \rangle &= r_0 \cos(\theta(t)) \\ \langle y(t) \rangle &= r_0 \sin(\theta(t)) \\ \langle z(t) \rangle &= W t + z_0 \end{cases}$$

où $\theta(t) = \omega(t - t_0) + \theta_0$ avec $\theta_0 = \arctan(\frac{y_0}{x_0})$.

3.3.2.3 Évolution de la matrice des moments d'ordre 2

L'équation de transport de la matrice des moments d'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{L} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{L}^T \quad (3.18)$$

Pour faciliter le calcul de la matrice $\mathbf{P}$, on peut utiliser la matrice mobile $\mathbf{P}^l$ (où $\mathbf{P}^l$ est la matrice des moments d'ordre 2 dans le repère local). On a

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{V}} \delta x \otimes \delta x d\mathcal{V} \quad (3.19)$$

et

$$\mathbf{P}^l = \int_{\mathcal{V}} \delta X \otimes \delta X d\mathcal{V} \quad (3.20)$$

Mais $\delta X = R \delta x$, où R est la matrice des vecteurs propres de la matrice S . On remarque que,

$$\begin{aligned} P_{ij}^l &= \delta X_i \delta X_j \\ &= R_{pi} \delta x_i R_{qj} \delta x_j \\ &= R_{pi} R_{qj} \delta x_i \delta x_j \\ &= R_{pi} R_{qj} P_{ij} \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbf{P}^l = R \mathbf{P} R^t = R \mathbf{P} R^{-1} \quad (3.21)$$

et

$$\mathbf{P} = R^{-1} 2\mathbf{P}^l 2R \quad (3.22)$$

L'équation de transport de la matrice mobile est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}^l}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{V}} \delta X \otimes \delta X d\mathcal{V} \right] \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{d\delta X}{dt} \otimes \delta X + \delta X \otimes \frac{d\delta X}{dt} \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[(\dot{R}\delta x + R \frac{d\delta x}{dt}) \otimes \delta X + \delta X \otimes (\dot{R}\delta x + R \frac{d\delta x}{dt}) \right] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} [(\dot{R} + RL)\delta x \otimes \delta X + \delta X \otimes (\dot{R} + RL)\delta x] d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \underbrace{[(\dot{R} + RL)R^{-1} \delta X \otimes \delta X + \delta X \otimes (\dot{R} + RL)R^{-1} \delta X]}_Q d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} [Q \delta X \otimes \delta X + \delta X \otimes Q \delta X] d\mathcal{V} \\ &= Q P_l + P_l Q^t \end{aligned}$$

Calcul de la matrice Q :

Pour calculer la matrice $\mathbf{Q}$, on doit déterminer la matrice R des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{S}$. On a

$$Q = (\dot{R} + RL) R^{-1} = (\dot{R} + R(S + \Omega)) R^{-1} = \dot{R} R^{-1} + R S R^{-1} + R \Omega R^{-1}$$

– **Calcul des valeurs propres de S**

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{S} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\sin(2\theta) - \lambda & \cos(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= ((-\sin(2\theta(t)) - \lambda)(\sin(2\theta(t)) - \lambda) - \cos^2(2\theta(t)))\lambda \\ &= (\lambda^2 - 1)\lambda \end{aligned}$$

$\mathbf{S}$ admet donc trois valeurs propres : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$.

– **Calcul des vecteurs propres de S**

Soit $\vec{V}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $\mathbf{S}$ correspondant à λ_i . Alors,

$$(-\sin(2\theta) - \lambda_i)x_i + \cos(2\theta)y_i = 0$$

$$\lambda_i z_i = 0$$

et $|\vec{V}_i| = 1$, i.e.

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1$$

Quand $\lambda_1 = -1$:

On trouve que,

$$x_2 = \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta) - 1} y_2 \quad (3.23)$$

et

$$y_2 = \sqrt{\frac{(\sin(2\theta) - 1)^2}{2 - 2\sin(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta)}{2}} \quad (3.24)$$

alors,

$$x_2 = \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta) - 1} \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta)}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta)}{2}} \quad (3.25)$$

alors,

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta(t))}{2}} \\ \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta(t))}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Quand $\lambda_2 = 1$:

On trouve que,

$$x_1 = \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta) + 1} y_1$$

et

$$y_1 = \sqrt{\frac{(\sin(2\theta) + 1)^2}{2 + 2\sin(2\theta)}} = \sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta)}{2}}$$

alors,

$$x_1 = \sqrt{1 - \frac{\sin(2\theta) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta)}{2}}$$

alors,

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta)}{2}} \\ \sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta)}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quand $\lambda_3 = 0$:

On a $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et $|\vec{V}_1| = 1$ donc,

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, la matrice R des vecteurs propres de $\mathbf{S}$ est

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta(t))}{2}} & -\sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta(t))}{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta(t))}{2}} & \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta(t))}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note que, R est une matrice orthogonale c'est à dire $R^{-1} = R^t$. Pour simplifier, on pose

$$m = \sqrt{\frac{1 - \sin(2\theta(t))}{2}} \quad , \quad p = \sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta(t))}{2}}$$

Alors,

$$R = \begin{pmatrix} m & -p & 0 \\ p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} m & p & 0 \\ -p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– **Calcul des dérivées de R**

On peut calculer la dérivée de R ,

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m & -p & 0 \\ p & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut calculer la dérivée de p et m :

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{\dot{\theta}(t)}{\sqrt{2}} \frac{-\cos(2\theta(t))}{\sqrt{1 - \sin(2\theta(t))}} & \frac{dp}{dt} &= \frac{\dot{\theta}(t)}{\sqrt{2}} \frac{\cos(2\theta(t))}{\sqrt{1 + \sin(2\theta(t))}} \\ &= d \frac{\dot{\theta}(t) - \cos(2\theta(t))\sqrt{1 + \sin(2\theta(t))}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2(2\theta(t))}} & &= \frac{\dot{\theta}(t) \cos(2\theta(t))\sqrt{1 - \sin(2\theta(t))}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2(2\theta(t))}} \\ &= \frac{\dot{\theta}(t) - \cos(2\theta(t))\sqrt{1 + \sin(2\theta(t))}}{\sqrt{2} |\cos(2\theta(t))|} & &= \frac{\dot{\theta}(t) - \cos(2\theta(t))\sqrt{1 - \sin(2\theta(t))}}{\sqrt{2} |\cos(2\theta(t))|} \\ &= \dot{\theta}(t) \sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta(t))}{2}} & &= -\dot{\theta}(t) \sqrt{\frac{1 + \sin(2\theta(t))}{2}} \\ &= \dot{\theta}(t)p & &= -\dot{\theta}(t)m \end{aligned}$$

Donc $\dot{R}$, la dérivée de la matrice R , est donnée par :

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} p & m & 0 \\ -m & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– **Calcul $\dot{R} R^{-1}$** :

$$\begin{aligned} \dot{R} R^{-1} &= \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} p & m & 0 \\ -m & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & p & 0 \\ -p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \\ &= \dot{\theta} \begin{pmatrix} pm - mp & p^2 + m^2 & 0 \\ -p^2 - m^2 & pm - mp & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

– **Calcul $R S R^{-1}$** :

$$\begin{aligned}
 R S R^{-1} &= \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} m & p & 0 \\ -p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -p & 0 \\ p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} (p^2 - m^2) \sin(2\theta) - 2mp \cos(2\theta) & -2mp \sin(2\theta) + (p^2 - m^2) \cos(2\theta) & 0 \\ -2mp \sin(2\theta) + (p^2 - m^2) \cos(2\theta) & (m^2 - p^2) \sin(2\theta) + 2mp \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

– Calcul $R \Omega R^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 R \Omega R^{-1} &= \left(\omega + \frac{\omega' r}{2} \right) \begin{pmatrix} m & -p & 0 \\ p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & p & 0 \\ -p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\omega + \frac{\omega' r}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc, on trouve que la matrice Q est donnée par :

$$Q = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\omega + \frac{\omega' r}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$Q = \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a l'équation de transport :

$$\frac{dP^l}{dt} = Q P^l + P^l Q^t$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{dP^l}{dt} &= \frac{\omega' r}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11}^l & P_{12}^l & P_{13}^l \\ P_{21}^l & P_{22}^l & P_{23}^l \\ P_{31}^l & P_{32}^l & P_{33}^l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11}^l & P_{12}^l & P_{13}^l \\ P_{21}^l & P_{22}^l & P_{23}^l \\ P_{31}^l & P_{32}^l & P_{33}^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\omega' r}{2} \begin{pmatrix} 2(P_{11}^l - P_{21}^l) & (P_{11}^l - P_{22}^l) & P_{13}^l - P_{23}^l \\ (P_{11}^l - P_{22}^l) & 2(P_{21}^l - P_{22}^l) & P_{13}^l - P_{23}^l \\ P_{31}^l - P_{32}^l & P_{31}^l - P_{32}^l & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{11}^l}{dt} &= 2(P_{11}^l - P_{21}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{12}^l}{dt} &= (P_{11}^l - P_{22}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{22}^l}{dt} &= 2(P_{21}^l - P_{22}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{13}^l}{dt} &= (P_{13}^l - P_{23}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{23}^l}{dt} &= (P_{13}^l - P_{23}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{31}^l}{dt} &= (P_{31}^l - P_{32}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{32}^l}{dt} &= (P_{31}^l - P_{32}^l) \frac{\omega' r}{2} \\ \frac{dP_{33}^l}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Solution des équations différentielles

On note que $\frac{dP_{13}^l}{dt} = \frac{dP_{23}^l}{dt}$. Il est facile d'intégrer cette équation, cela donne $P_{13}^l(t) = P_{23}^l(t) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$, la condition initiale $P_{13}^l(0) = P_{23}^l(0) = 0$ détermine la constant $c_1 = 0$ et on obtient $P_{13}^l(t) = P_{23}^l(t)$. Alors, $\frac{dP_{13}^l}{dt} = \frac{dP_{23}^l}{dt} = 0$, donc $P_{13}^l(t) = P_{23}^l(t) = 0$.

De la même façon, $P_{32}^l = P_{31}^l = 0$. L'équation $\frac{dP_{33}^l}{dt} = 0$ est facile à intégrer, on trouve $P_{33}^l(t) = P_{33}^l(0) = 1$.

Pour les trois premières équations, on voit que :

$$\dot{P}_{11}^l + \dot{P}_{22}^l - 2\dot{P}_{12}^l = 0$$

Il est facile d'intégrer cette équation, cela donne

$$P_{11}^l(t) + P_{22}^l(t) - 2P_{12}^l(t) = c_2$$

la condition initiale $P_{11}^l(0) = P_{22}^l(0) = 1$ et $P_{12}^l(0) = 0$ détermine la constante $c_2 = 2$ et on obtient

$$P_{11}^l(t) + P_{22}^l(t) - 2P_{12}^l(t) = 2 \quad (3.27)$$

D'autre part, on note que

$$\dot{P}_{11}^l - \dot{P}_{22}^l = 2 (P_{11}^l + P_{22}^l - 2P_{12}^l) \frac{\omega' r}{2}$$

et à partir de l'équation(3.27) :

$$\dot{P}_{11}^l - \dot{P}_{22}^l = 2 (2) \frac{\omega' r}{2} = 2 \omega' r$$

Il est facile d'intégrer cette équation et on a alors :

$$P_{11}^l(t) - P_{22}^l(t) = 2 \omega' r t = 4at \quad (3.28)$$

pour faciliter, on pose $a = \frac{\omega' r}{2}$ donc,

$$P_{11}^l(t) - P_{22}^l(t) = 4 a t \quad (3.29)$$

Mais

$$\dot{P}_{12}^l(t) = (P_{11}^l - P_{22}^l)a$$

Donc, à partir de l'équation(3.29), on obtient

$$\dot{P}_{12}^l(t) = 4 a^2 t$$

et en l'intégrant on a alors :

$$P_{12}^l(t) = 2a^2 t^2 + c_3, \quad c_3 = 0$$

A partir des équations (3.27) et (3.29) et de la valeur de $P_{12}^l(t)$ on trouve que,

$$P_{11}^l(t) = 2a^2 t^2 + 2at + 1 \quad \text{et} \quad P_{22}^l(t) = 2a^2 t^2 - 2at + 1$$

La matrice mobile P_l est donnée par :

$$P_l = \begin{pmatrix} 2a^2 t^2 + 2at + 1 & 2a^2 t^2 & 0 \\ 2a^2 t^2 & 2a^2 t^2 - 2at + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À partir de l'équation (3.22), on pourra calculer $\mathbf{P}(t)$ la matrice des moments d'ordre 2. Donc la matrice $\mathbf{P}(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \begin{pmatrix} m & p & 0 \\ -p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a^2 t^2 + 2at + 1 & 2a^2 t^2 & 0 \\ 2a^2 t^2 & 2a^2 t^2 - 2at + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -p & 0 \\ p & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= m^2(2a^2 t^2 + 2at + 1) + mp(2a^2 t^2) + pm(2a^2 t^2) + p^2(2a^2 t^2 - 2at + 1) \\ &= (m^2 + 2mp + p^2)(2a^2 t^2) + (m^2 - p^2)(2at) + (m^2 + p^2) \\ &= 2a^2 t^2(1 - \cos(2\theta(t))) - 2at \sin(2\theta(t)) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{12}(t) &= -pm(2a^2t^2 + 2at + 1) - p^2(2a^2t^2) + m^2(2a^2t^2) + pm(2a^2t^2 - 2at + 1) \\
 &= (m^2 - p^2)(2a^2t^2) + -2pm(2at) \\
 &= 2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{22}(t) &= p^2(2a^2t^2 + 2at + 1) - mp(2a^2t^2) - pm(2a^2t^2) + m^2(2a^2t^2 - 2at + 1) \\
 &= (m^2 - 2mp + p^2)(2a^2t^2) + (p^2 - m^2)(2at) + (m^2 + p^2) \\
 &= 2a^2t^2(1 + \cos(2\theta(t))) + 2at \sin(2\theta(t)) + 1
 \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}(t)$ est égale

$$\begin{pmatrix} 2a^2t^2(1 - \cos(2\theta(t))) - 2at \sin(2\theta(t)) + 1 & 2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t))) & 0 \\ 2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t))) & 2a^2t^2(1 + \cos(2\theta(t))) + 2at \sin(2\theta(t)) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

avec, $a = \frac{\omega' r}{2}$ dans le cas où $\mathbf{u}_0 = r$, $a = -\frac{1}{2r}$.

3.3.2.4 Caractéristiques de l'ellipsoïde

Pour le calcul des caractéristiques de l'ellipsoïde, il faut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice des moments $\mathbf{P}(t)$.

Calcul des valeurs propres de $\mathbf{P}(t)$:

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{P}(t)$ est

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) &= \det(\mathbf{P}(t) - \lambda I) \\
 &= (1 - \lambda)((2a^2t^2 + 1 - \lambda)^2 - [2at(at \cos(2\theta(t)) - \sin(2\theta(t))])^2 \\
 &\quad - 4a^2t^2(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t)))^2) \\
 &= (1 - \lambda)(4a^4t^4 + 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 4a^2t^2\lambda + 2a^2t^2 \\
 &\quad - 4a^2t^2(a^2t^2 \cos^2(2\theta(t)) - 2at \sin(2\theta(t)) \cos(2\theta(t)) + \sin^2(2\theta(t))) \\
 &\quad - 4a^2t^2(a^2t^2 \sin^2(2\theta(t)) - 2at \sin(2\theta(t)) \cos(2\theta(t)) + \cos^2(2\theta(t)))) \\
 &= (1 - \lambda)(4a^4t^4 + 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 4a^2t^2\lambda + 2a^2t^2 - 4a^4t^4 - 2a^2t^2) \\
 &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - (2 + 4a^2t^2)\lambda + 1)
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{P}(t)$ sont les racines de l'équation

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - (2 + 4a^2t^2)\lambda + 1) = 0$$

Ce sont donc,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 1 \\
 \lambda_2 &= 1 + 2a^2t^2 + 2at\sqrt{1 + a^2t^2} \\
 \lambda_3 &= 1 + 2a^2t^2 - 2at\sqrt{1 + a^2t^2}
 \end{aligned}$$

mais, $a = -\frac{1}{2r}$ donc,

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{t^2}{2r^2} - \frac{t}{2r^2} \sqrt{4r^2 + t^2}$$

$$\lambda_3 = 1 + \frac{t^2}{2r^2} + \frac{t}{2r^2} \sqrt{4r^2 + t^2}$$

Le demi-grand axe de l'ellipsoïde est donné par :

$$\frac{a'^2}{5} = 1 + 2a^2t^2 + 2at\sqrt{1 + a^2t^2} \quad (3.31)$$

Le demi-petit axe de l'ellipsoïde est donné par :

$$\frac{b'^2}{5} = 1 + 2a^2t^2 - 2at\sqrt{1 + a^2t^2} \quad (3.32)$$

Le demi-axe moyen de l'ellipsoïde est donné par :

$$\frac{c'^2}{5} = 1 \quad (3.33)$$

Calcul des angles de rotation de l'ellipsoïde :

Pour le calcul des angles de rotation, il suffit de calculer les angles d'Euler en passant du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère des vecteurs propres $(O, \vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3)$ par trois rotations successives.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$. Il vérifie l'équation

$$\begin{pmatrix} 2a^2t^2(1 - \cos(2\theta(t))) - 2at \sin(2\theta(t)) & 2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t))) & 0 \\ 2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t))) & 2a^2t^2(1 + \cos(2\theta(t))) + 2at \sin(2\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (2a^2t^2(1 - \cos(2\theta(t))) + 2at \sin(2\theta(t)))x + (2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t))))y &= 0 \\ (2at(\cos(2\theta(t)) - at \sin(2\theta(t))))x + (2a^2t^2(1 + \cos(2\theta(t))) - 2at \sin(2\theta(t)))y &= 0 \end{aligned}$$

alors, $x = y = 0$ donc le vecteur propre est $(0, 0, 1)$

Puisque le vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$ est $\vec{k} = (0, 0, 1)$, il y a une rotation de l'ellipsoïde dans le plan (O, x, y) donc, il y a un angle donné (comme les moments d'ordre 2 en 2D) par

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2P_{12}}{P_{11} - P_{22}}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-\cos(2\theta(t)) + at \sin(2\theta(t))}{\sin(2\theta(t)) + at \cos(2\theta(t))}\right)$$

Cas de condition initiale $\mathbf{x}_0(5, 0, 0)$

On trouve $r_0 = 5$, donc $a = -\frac{1}{2r_0} = -\frac{1}{10} = -0.1$ et $\theta(t) = \omega(t - t_0) + \theta(t)_0$. Mais $\omega = \frac{1}{r} = 0.2$, alors $\theta(t) = 0.2t$. La matrice $\mathbf{P}(t)$ des moments d'ordre 2 est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0.02t^2(1 - \cos(0.4t)) + 0.2t \sin(0.4t) + 1 & -0.2t \cos(2t) - 0.02t^2 \sin(0.4t) & 0 \\ -0.2t \cos(2t) - 0.02t^2 \sin(0.4t) & 0.02t^2(1 + \cos(0.4t)) - 0.2t \sin(0.4t) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{P}(t)$ est donnés par,

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1 + 0.02t^2 - 0.2t \sqrt{1 + 0.01t^2}$$

$$\lambda_3 = 1 + 0.02t^2 + 0.2t \sqrt{1 + 0.01t^2}$$

les angles de rotation sont $\psi = 0$, $\phi = 0$ et

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{10 \cos(0.4t) + t \sin(0.4t)}{-10 \sin(0.4t) + t \cos(0.4t)}\right)$$

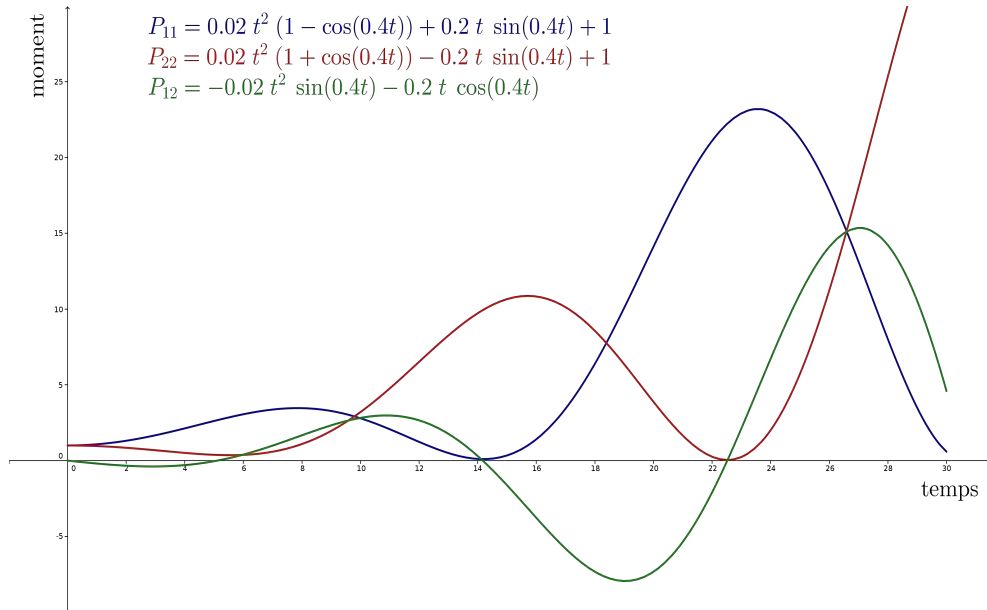


FIGURE 3.8 – Évolution temporelle des moments du disque de centre $\mathbf{x}_0(5, 0, 0)$ dans un écoulement cylindrique.

La figure (3.8) présente l'évolution des moments d'ordre 2.

- ♣ Sur les moments P_{11} , P_{22} et P_{33} . On observe que le moment P_{33} est constant, donc il n'y a pas de dilatation selon z . Pour les moments P_{11} et P_{22} , dans un premier temps le moment P_{22} diminue tandis que le moment P_{11} augmente, ce qui correspond à une contraction selon y et une elongation selon x , l'effet inverse se produit ensuite et ainsi de suite.

- ♣ Quant aux moments croisés xz et yz (P_{13} et P_{23}), on a $P_{13} = P_{23} = 0$, ce qui signifie que les angles des rotation φ et ψ sont nuls.
- ♣ Quant au moment croisé xy (P_{xy}), dans une première phase les valeurs sont négatives et représentent donc une orientation négative. Dans une seconde phase, les valeurs sont positives et représentent donc une orientation positive et ainsi de suite.
 Pour étudier la rotation de l'ellipse au cours de transport, on calcule $P_{11} - P_{22}$ et on compare les résultat obtenu avec P_{12} . Dans les figures(3.10 et 3.9) on trouve que l'ellipse commence avec un angle $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = -\frac{\pi}{4}$ (où $\theta(t)$ est l'angle de la direction principale par rapport à l'axe ox) et l'angle augmente jusqu'à 0 avec une orientation négative ($P_{12} < 0$). Puis, l'angle augment jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et l'orientation est positive. Ensuite, l'angle augmente entre $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ avec une orientation négative. La figure(3.11) présente la projection dans le plan (o, x, y) de l'ellipsoïde transporté par l'écoulement.

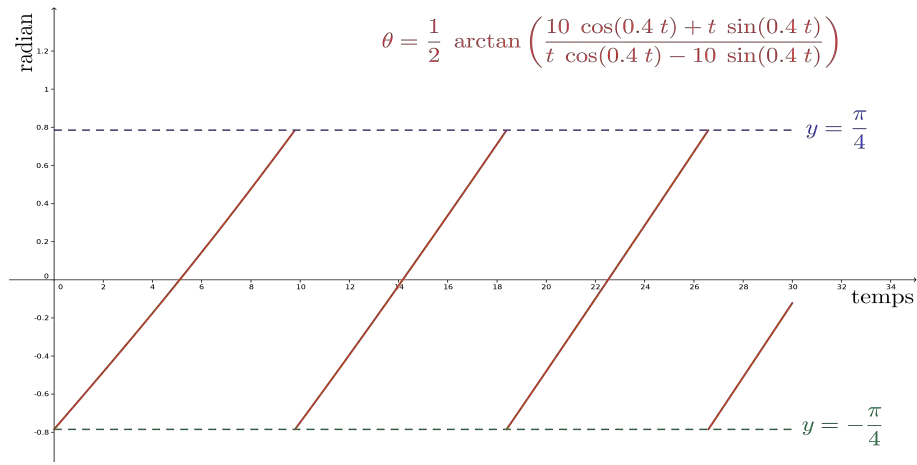


FIGURE 3.9 – Évolution de l'angle de rotation autour oz d'un disque dans un écoulement cylindrique.

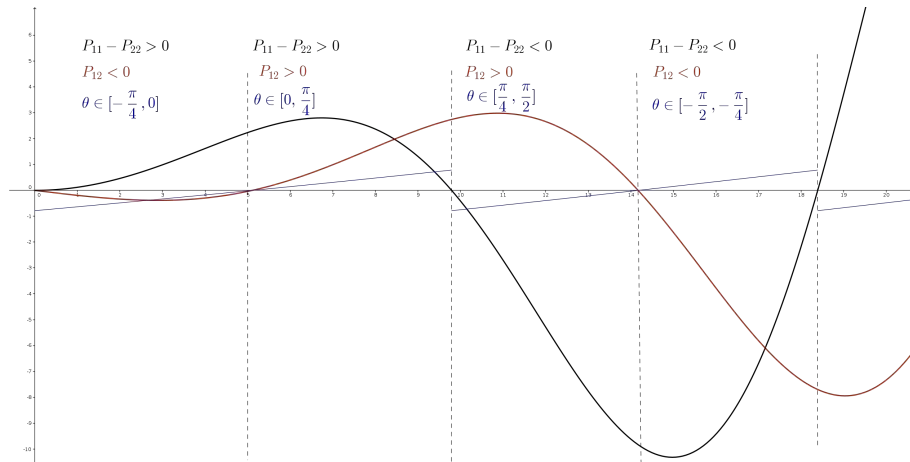


FIGURE 3.10 – Comparaison entre $P_{11} - P_{22}$ et P_{12} , qui détermine l'évolution de l'angle de rotation $\theta(t)$.

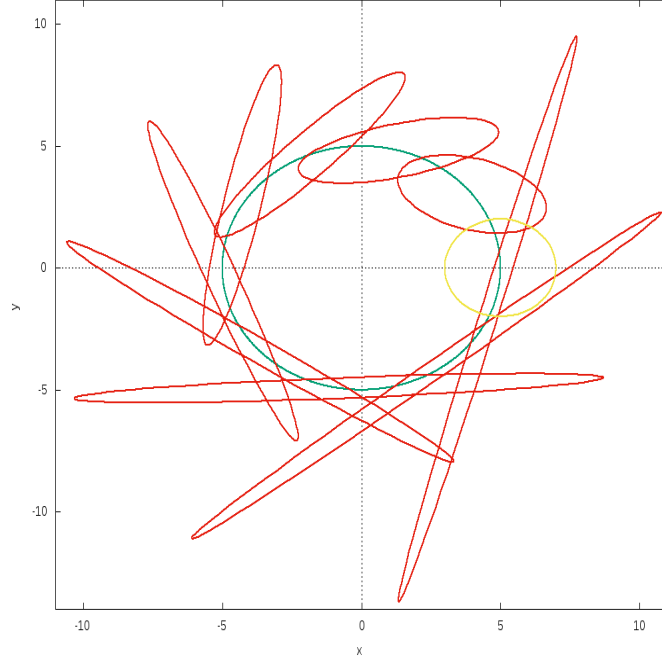


FIGURE 3.11 – Évolution d'un distribution du domaine contenant le domaine contenant le traceur de support ellipsoïdal de centre $\mathbf{x}_0(5, 0, 0)$ dans un écoulement cylindrique. Le jaune indique le domaine contenant le traceur au temps initial, le rouge marque l'évolution de l'ellipse et le vert la trajectoire de la position moyenne du domaine contenant le traceur.

3.3.3 Exemple(3) : Champ de vitesse de Hill

Le vortex de Hill [56], dans un fluide visqueux incompressible, représente le cas limite dans lequel la vorticité est distribuée en volume à l'intérieur d'une sphère de rayon R . A titre d'exemple, on cite la chute à vitesse constante ($-U$) d'une goutte d'eau dans de l'huile.

La fonction de courant pour cet écoulement est donnée en coordonnées cylindriques (e_r, e_θ, e_z) par :

$$\psi(r, \theta, z) = \begin{cases} \frac{3}{4} U r^2 \left(1 - \frac{r^2 + z^2}{R^2}\right) & \text{si } r^2 + z^2 < R^2 \\ -\frac{1}{2} U r^2 \left[1 - R^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] & \text{si } r^2 + z^2 > R^2 \end{cases} \quad (3.34)$$

les composantes de la vitesse (u_r, u_θ, u_z) se déduisent directement de l'équation de continuité par la relation entre la fonction de courant et les vitesses :

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Donc, les composantes de la vitesse sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{R^2} \right) \\ v = \frac{3}{2} U \frac{zr}{R^2} \end{array} \right. & \text{si } r^2 + z^2 < R^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} u = U \left(\frac{R^2}{r^2 + z^2} \right)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{2z^2 - r^2}{2R^2} - 1 \right] \\ v = \frac{3}{2} U \frac{zr}{R^2} \left(\frac{R^2}{r^2 + z^2} \right)^{\frac{5}{2}} \end{array} \right. & \text{si } r^2 + z^2 > R^2 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

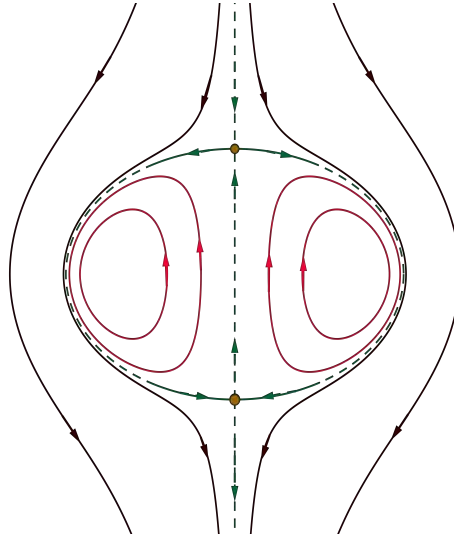


FIGURE 3.12 – Le vortex de Hill.

sur le domaine D défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x \leq 5 \text{ et } -5 \leq y \leq 5\}$$

voir la figure(3.12)

3.3.3.1 Les moments d'ordre 2

On considère un domaine contenant le traceur de forme circulaire de centre $\mathbf{x}_0(x_0, y_0)$ et de rayon r_0 , à l'intérieur duquel la distribution des particules est uniforme. À l'instant initial $t_0 = 0$, la matrice des moments d'ordre 2 est $\mathbf{P}(0) = \frac{r_0^2}{4} I$, avec $r_0 \in \mathbb{R}^+$, où I est la matrice identité. Pour étudier l'évolution la matrice des moments d'ordre 2 et les caractéristiques de l'ellipse au cours du transport par l'écoulement, on va prendre deux positions du centre : $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$ située à l'intérieur de la sphère et $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ située à l'extérieur de la sphère.

♣ Le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$

La Figure (3.13(a)) représente l'évolution temporelle des moments P_{x^2} et P_{y^2} . On observe, dans un premier temps, que le moment P_{y^2} diminue tandis que le moment

P_{x^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon y et une élongation selon x . Ensuite, les moments P_{x^2} et P_{y^2} augmentent, ce qui correspond à des élongations selon x et y . Ensuite, le moment P_{y^2} augmente tandis que le moment P_{x^2} diminue, ce qui correspond à contraction selon x et une élongation selon y . La Figure (3.13(b)) représente l'évolution du moment P_{xy} . On observe que, dans un premier temps le moment P_{xy} diminue, ce qui représente une rotation dans le sens horaire du domaine contenant le traceur de particules, ensuite le moment P_{xy} augmente avec un dépassement de la valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique.

♣ **Le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$**

La Figure (3.14(a)) représente l'évolution des moments d'ordre 2, P_{x^2} et P_{y^2} . On observe que, dans un premier temps le moment P_{y^2} diminue tandis que le moment P_{x^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon y et une élongation selon x . L'effet inverse se produit ensuite avec un dépassement des valeurs initiales. Ensuite le moment P_{y^2} diminue tandis que le moment P_{x^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon y et une élongation selon x . Ensuite, les moments P_{x^2} et P_{y^2} augmentent, ce qui correspond à une élongation selon x et y . Ensuite, les moments P_{x^2} et P_{y^2} conservent ces valeurs. La Figure (3.14(b)) représente l'évolution du moment P_{xy} , elle est divisée en trois phases. Une première phase de diminution qui représente une rotation dans le sens horaire du domaine contenant le traceur de particules. Une seconde phase d'augmentation avec un dépassement de valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique. Et enfin une phase de nouvelle diminution.

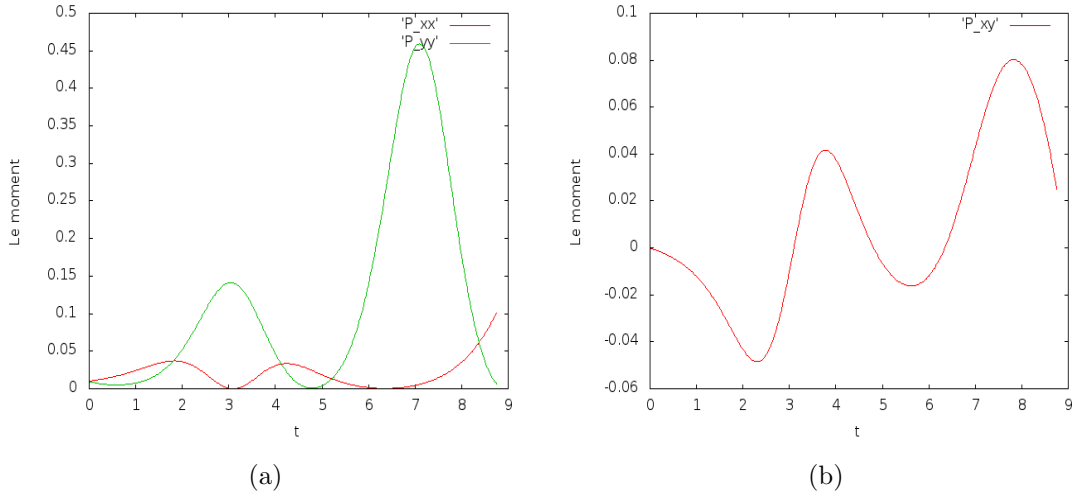


FIGURE 3.13 – L'évolution des moments d'ordre 2, P_{x^2} , P_{y^2} et, P_{xy} pour le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$

3.3.3.2 Caractéristiques de l'ellipse

♣ **Le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$**

Pour étudier la rotation de l'ellipse dans le transport, on calcule $P_{11} - P_{22}$ et on compare avec P_{12} . Dans la Figure(3.15(c)), on trouve que, l'ellipse commence par un angle $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = -0,236985043 \text{ rad} = -13,57^\circ$ (où $\theta(t)$ est l'angle de la direction principale par rapport à l'axe Ox) et une orientation négative

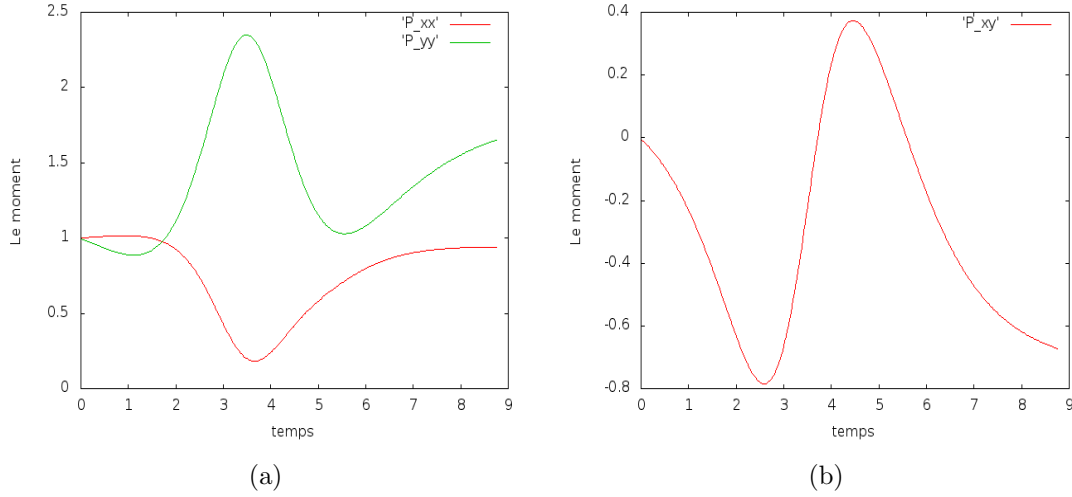


FIGURE 3.14 – L'évolution des moments d'ordre 2, P_{x^2} , P_{y^2} et P_{xy} pour le centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0((1.5, 3.5))$

($P_{12} < 0$), ensuite l'angle diminue jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$. Ensuite les valeurs de θ continuent à décroître jusqu'à atteindre $-\frac{\pi}{2}$. Comme ces valeurs sont prises à π près, et notre représentation on peut supposer que $\theta(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La Figure(3.15(b)) représente l'évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse. On remarque que l'ellipse se dilate, se rétrécit, puis se restaure, et le même processus se poursuit dans le temps.

La Figure(3.15(a)) représente l'évolution du domaine contenant le traceur des particules de forme circulaire de centre $\mathbf{x}_0(0.5, 0.5)$ par la méthode des moments et par la méthode de transport des points. On observe que la méthode des moments d'ordre 2 (le développement de Taylor à l'ordre 1 de la vitesse) ne permet pas une bonne représentation du comportement du domaine contenant le traceur des particules transportées dans un écoulement parce que, le champ de vitesse est non-linéaire. Pour la comparaison de la forme du domaine contenant le traceur reconstruite à partir de la méthode des moments d'ordre 2 à celle du domaine contenant le traceur obtenue par transport de particules dans un écoulement de Hill (équation 5.3). La figure(3.16) représente trois régions contenant les trois domaines contenant les traceurs de particules de forme circulaire de centre $\mathbf{x}_0(0.5, 0.5)$ et de rayons différents correspondant à $P_0 = P_{x^2}(t=0) = P_{y^2}(t=0) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ avec $r_0 = \sqrt{4P_0}$, obtenues par la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4 avec le pas de temps $dt = 0,025$ et le temps d'intégration $T = 7,5$ s. Avec la méthode des moments, le traceur ne peut pas se déformer. Au contraire, avec le transport des particules, le traceur se courbe naturellement pour suivre l'écoulement, et se déforme moins quand le diamètre de traceur est plus petit.

♣ Le centre de traceur $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$

Avec la même méthodologie, on observe que l'ellipse s'oriente initialement selon un angle limite $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = -0,5453 \text{ rad} = -31,32^\circ$ et une orientation négative ($P_{12} < 0$). Ensuite l'angle diminue jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$. Puis, la direction principale change et l'angle de rotation est égale $\frac{\pi}{2}$, l'angle diminue jusqu'à $\theta = 1,29 \text{ rad} = 73,8811^\circ$ figure(3.15(c)) avec l'orientation positive. Puis, l'angle augmente jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. Puis, la direction principale change et l'angle de rotation est égale $-\frac{\pi}{2}$, l'angle diminue

jusqu'à $\theta = -1,0076 \text{ rad} = -57,708^\circ$ et puis l'angle reste constant.

La figure(3.17(b)) représente l'évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse. On note que, l'ellipse se dilate puis se rétrécit, puis se restaure et le même processus se poursuit dans le temps. La figure(3.17(a)) représente l'évolution du traceur de forme circulaire de centre $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ par la méthode des moments et méthode de transport des points.

La figure (3.18) représente trois région content les trois traceurs de particule de forme circulaire de centre $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ et de diamètres différents r_0 correspondant à $P_0 = P_{x_2}(t = 0) = P_{y_2}(t = 0) \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ avec $r_0 = \sqrt{4 P_0}$. Avec la méthode des moments le traceur ne peut pas se déformer, et au contraire, avec le transport des particules, le traceur se courbe naturellement pour suivre l'écoulement. Il se déforme moins quand le diamètre du traceur est plus petit.

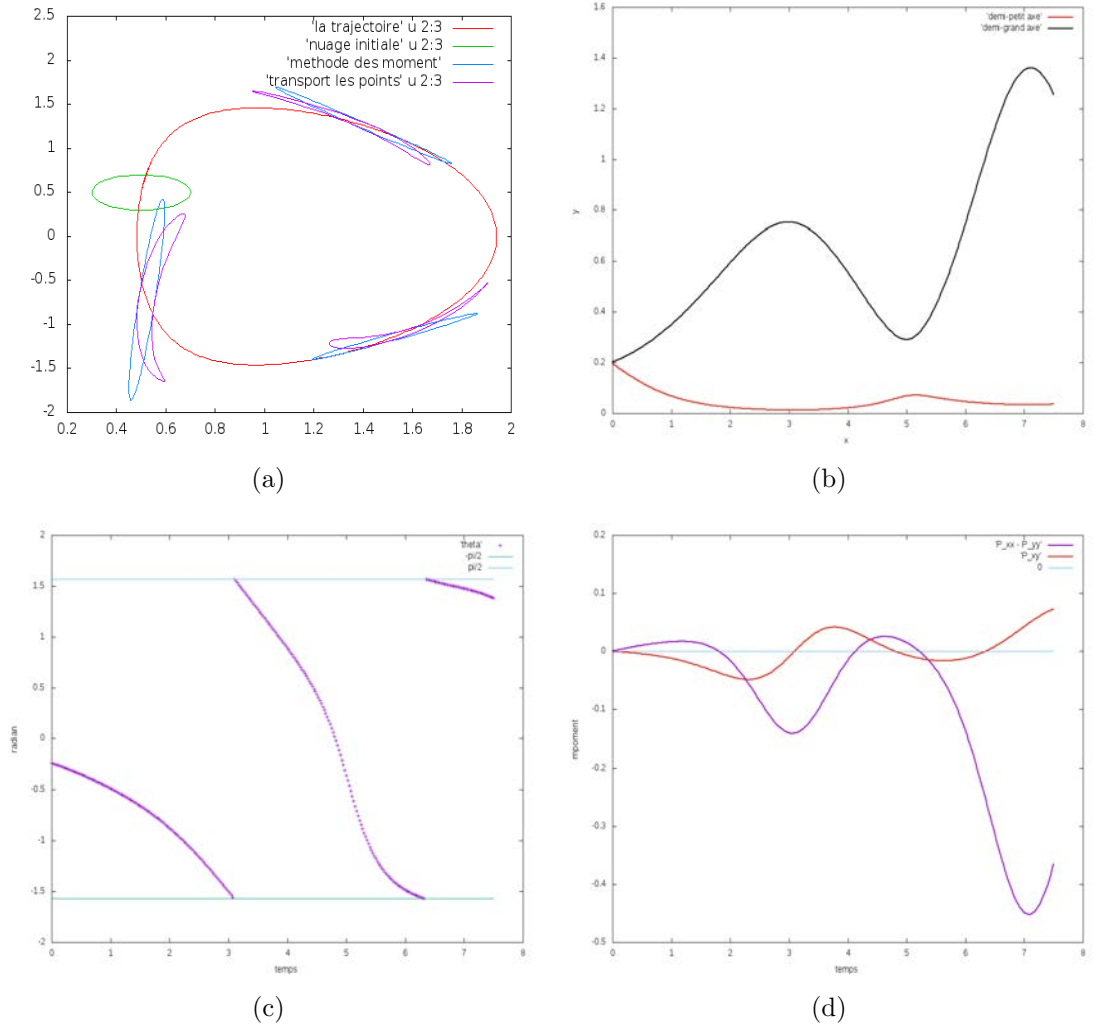


FIGURE 3.15 – Évolution d'un domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$ en (a), l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe du traceur en (b), l'évolution temporelle de l'angle de rotation du traceur en (c) et comparaison entre $P_{11} - P_{22}$ et P_{12} , qui détermine l'évolution de l'angle de rotation.

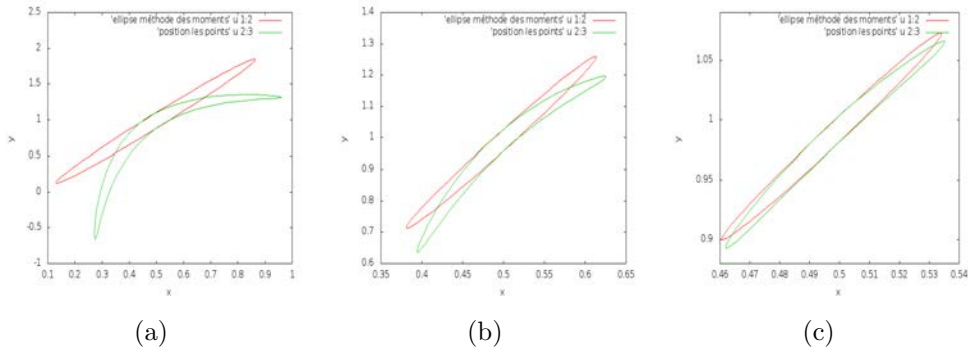


FIGURE 3.16 – Comparason de la forme du domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(0.5, 1)$ et de différents rayons r_0 correspondants à $P_0 = P_{x^2}(t = 0) = P_{y^2}(t = 0) \in \{10^{-1}$ en (a), 10^{-2} en (b), 10^{-3} en (c) $\}$ avec $r_0 = \sqrt{4 P_0}$ reconstruite à partir de la méthode des moments d'ordre 2 à celle du domaine contenant le traceur obtenue par transport de particules dans un écoulement de Hill.

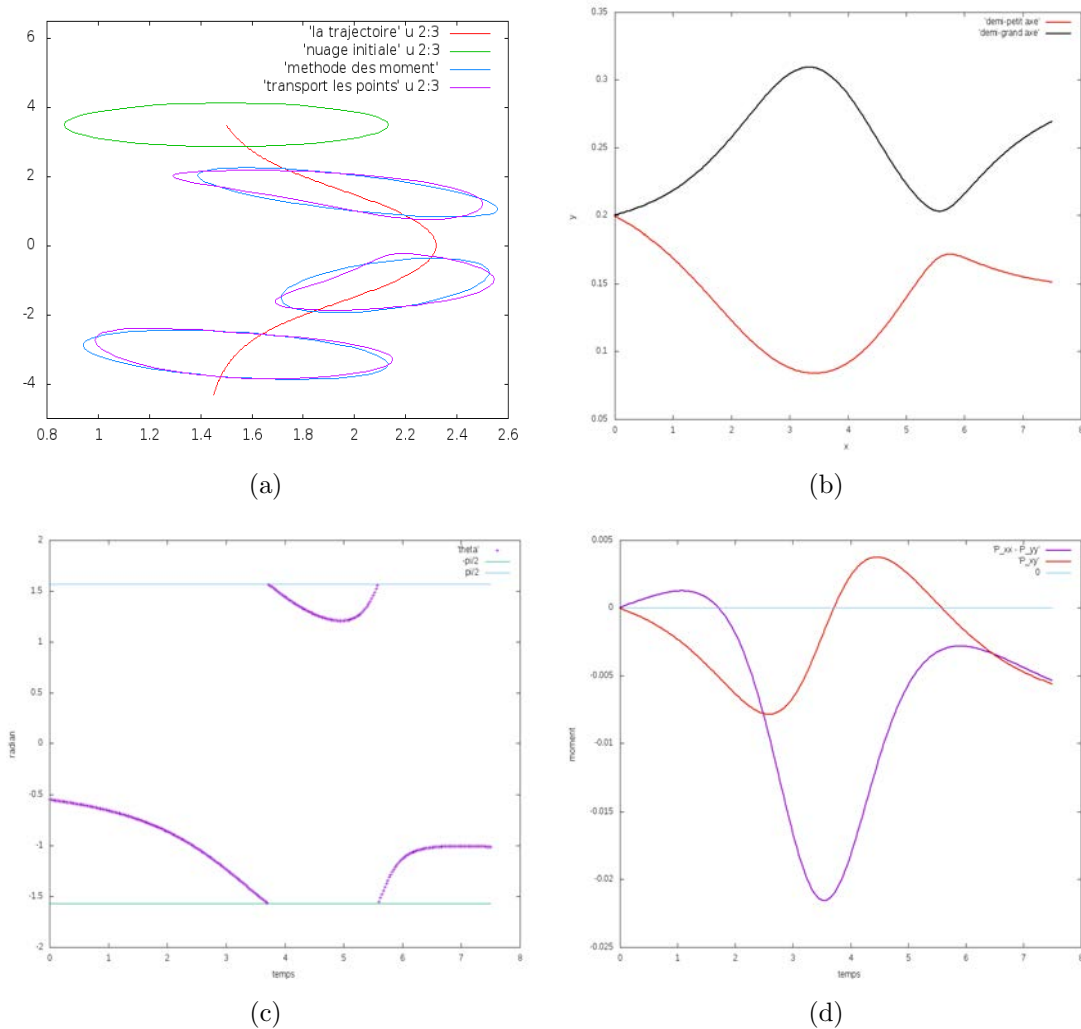


FIGURE 3.17 – Évolution d'un domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ en (a), l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe du traceur en (b), l'évolution temporelle de l'angle de rotation du traceur en (c) et comparaison entre $P_{11} - P_{22}$ et P_{12} , qui détermine l'évolution de l'angle de rotation.

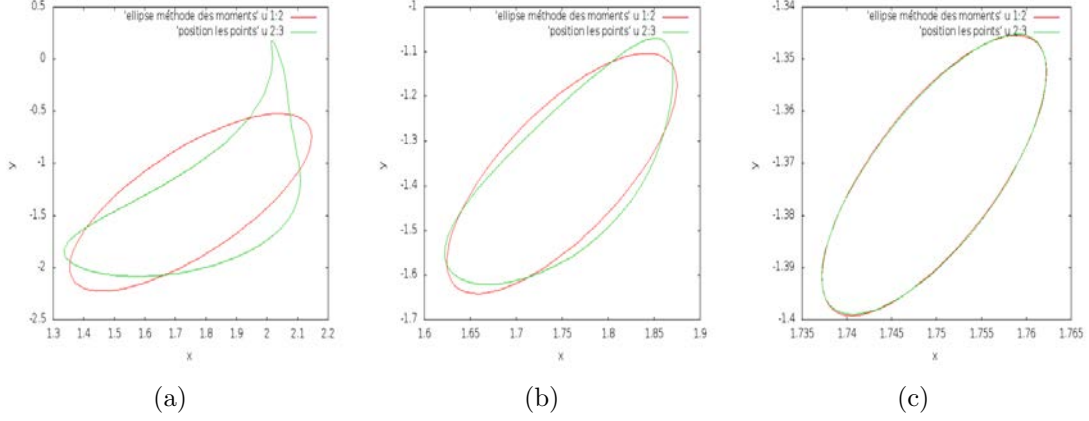


FIGURE 3.18 – Comparasion de la forme du domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(1.5, 3.5)$ et de différents rayons r_0 correspondants à $P_0 = P_{x^2}(t=0) = P_{y^2}(t=0) \in \{10^{-1} \text{ en (a)}, 10^{-2} \text{ en (b)}, 10^{-3} \text{ en (c)}\}$ avec $r_0 = \sqrt{4 P_0}$ reconstruite à partir de la méthode des moments d'ordre 2 à celle du domaine contenant le traceur obtenue par transport de particules dans un écoulement de Hill.

3.4 Transport particulaire

Dans cette section, on va présenter le transport d'une particule pour comparer entre la méthode des moments d'ordre 2 et la méthode des particules par tenseur de Cauchy-Green.

3.4.1 Transport d'un scalaire passif :

Le champ scalaire passif est représenté par $f(x, t)$ (le scalaire est dit passif si sa présence n'influe pas sur l'écoulement), l'équation qui gouverne l'évolution d'un champ scalaire passif f est l'équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = D \nabla^2 f \quad (3.36)$$

avec D le coefficient de diffusion.

Si le fluide est au repos, l'équation 3.36 se réduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \nabla^2 f \quad (3.37)$$

Dans la situation d'advection pure, l'évolution du champ scalaire est donnée par

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0.$$

Le terme d'advection n'a pas d'effet de lissage sur le champ scalaire, mais seulement un effet de transport qui déplace des quantités de scalaire d'un endroit à un autre dans le fluide.

3.4.2 Advection par l'écoulement

L'advection correspond au transport des particules par un écoulement. On présent maintenant des exemples concrets dans lesquels nous considérons uniquement les effets

de l'advection.

On considère un traceur de particules de forme circulaire, à l'intérieur duquel la concentration est uniforme.

- ♣ Si ce traceur est placé à l'instant t_0 dans un écoulement où *la vitesse est uniforme* $\mathbf{u} = (1, 0)$ Figure(3.19), alors ce la distribution de traceur va être translaté par le fluide dans la même direction que la vitesse $\mathbf{u}$.

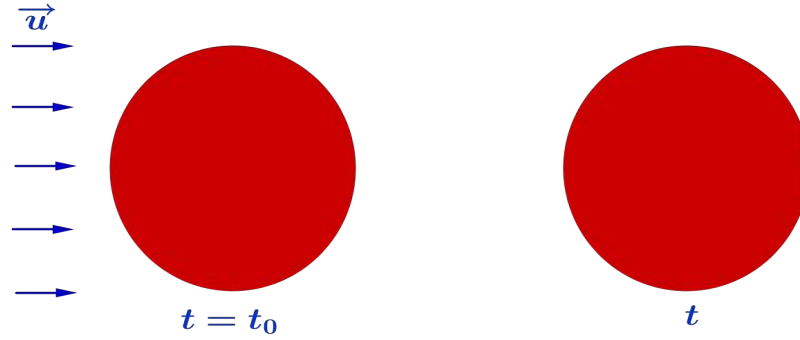


FIGURE 3.19 – La convection dans un écoulement où la vitesse est uniforme.

- ♣ Si ce domaine contenant le traceur est placé à l'instant t_0 dans un écoulement où *la vitesse n'est pas uniforme* $\mathbf{u} = (0.2y^2 + 0.8, 0)$ (Figure 3.20), on constate alors que la distribution du domaine contenant le traceur se déplace en se déformant sous l'action de cisaillement. En effet, certaines parties du traceur se déplacent plus rapidement que d'autres ce qui contribue à étirer le traceur.

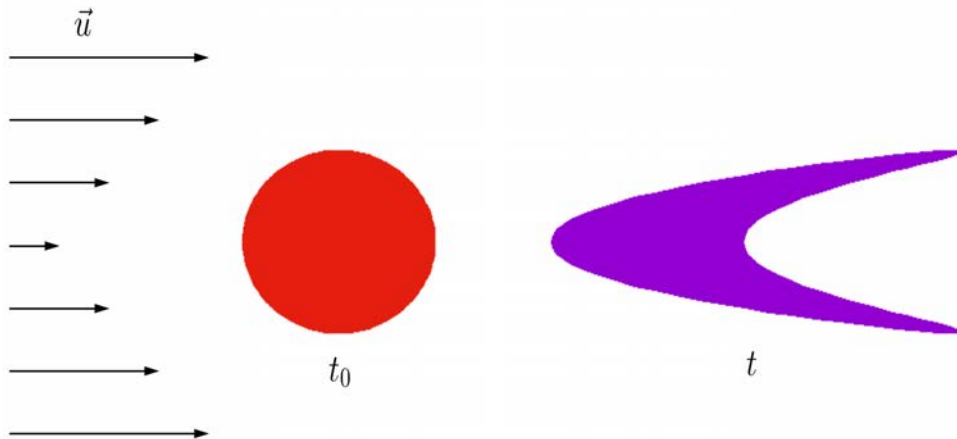


FIGURE 3.20 – La convection dans un écoulement où la vitesse est $\mathbf{u} = (0.2y^2 + 0.8, 0)$.

- ♣ Si ce domaine contenant le traceur est placé à l'instant t_0 dans un écoulement où *les lignes de courant divergent*, par exemple pour contourner un obstacle Figure(3.21), dans ce cas, l'effet de divergence conduit à un étirement du traceur dans la direction transversale et à une contraction dans la direction longitudinale.

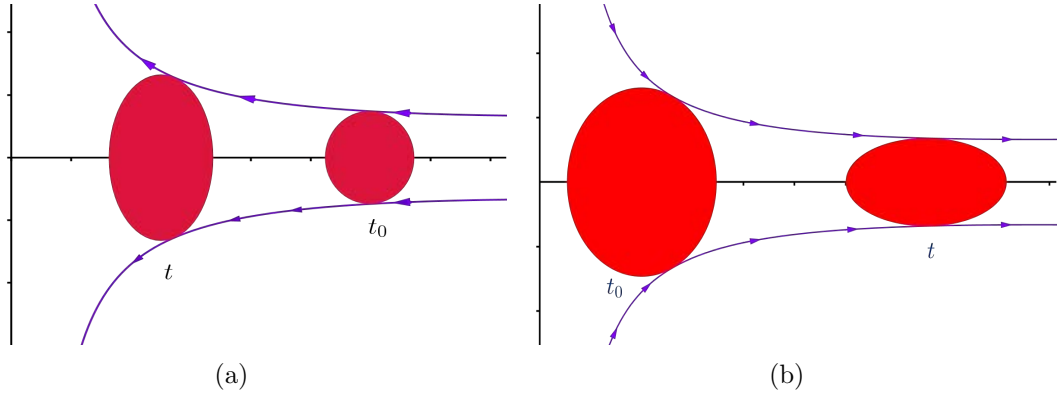


FIGURE 3.21 – La convection dans un écoulement où la vitesse est hyperbolique.

3.4.3 Description Lagrangienne du mouvement

On adoptera une approche Lagrangienne pour décrire le mouvement du système. Les coordonnées matérielles (indépendantes du temps) que nous avons notées $\mathbf{X}$ correspondent au vecteur position dans la configuration de référence Ω_0 , et les coordonnées spatiales $\mathbf{x}$ correspondent au vecteur position dans la configuration de référence $\Omega(t)$.

On introduit la fonction ϕ telle que

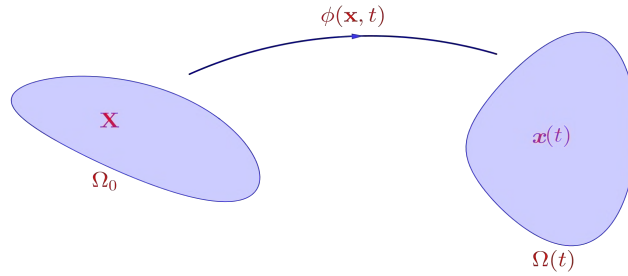


FIGURE 3.22 – Transport d'un point par un écoulement.

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$$

En formulation Lagrangienne, on s'attache à décrire le mouvement des points matériels en fonction de deux variables indépendantes $\mathbf{x}$ et t .

On obtient le tenseur gradient de déformation, noté F et la vitesse matérielle $\vec{v}$:

$$F = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}}|_t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}|_t$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{\mathbf{x}}$$

3.4.4 Équation de transport d'un vecteur

Soit une région "infinitésimale" entourant le point matériel M se trouvant en M_0 à l'instant initial t_0 et en M_t à l'instant t . On calcule la transformation de cette région. Soit $\mathbf{X}$ les coordonnées de M_0 , et soit M'_0 un point proche de M_0 de coordonnées

$\mathbf{X} + d\mathbf{X}$. Soient $\mathbf{x}$ est les coordonnées de M_t ($\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$) et $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ les coordonnées de M'_t (voir figure 3.23). On note $\mathbf{r}_0 = d\mathbf{X}, \mathbf{r} = d\mathbf{x}$.

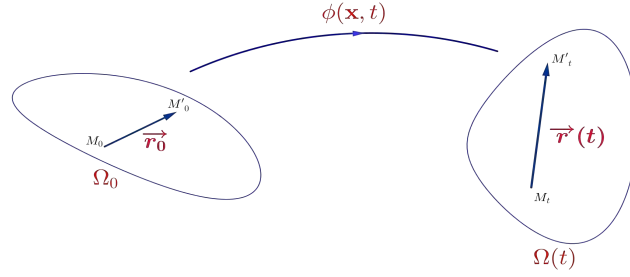


FIGURE 3.23 – Transport d'un vecteur par un écoulement.

On peut calculer $\mathbf{r}$ par la série de Taylor de $\phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$ à l'ordre 1 autour du point $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \phi(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{X} + \mathcal{O}(\|d\mathbf{X}\|^2) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{r}_0 + \mathcal{O}(\|\mathbf{r}_0\|^2) \\ &= F \mathbf{r}_0 + \mathcal{O}(\|\mathbf{r}_0\|^2) \end{aligned}$$

Si $\|\mathbf{r}_0\|$ est très petit, nous pouvons négliger la quantité $\mathcal{O}(\|\mathbf{r}_0\|^2)$, alors

$$\mathbf{r}(t) = F \mathbf{r}_0 \quad (3.38)$$

Évolution temporelle d'un vecteur :

L'évolution d'un vecteur $\mathbf{r}(t)$ autour du point M_t en fonction de sa variation au cours du temps est

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(F \mathbf{r}_0) = \dot{F} \mathbf{r}_0 = \dot{F} F^{-1} \mathbf{r} = L \mathbf{r}$$

avec $L = \dot{F} F^{-1}$ le tenseur gradient des vitesses de déplacement. Donc,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = L \mathbf{r} \quad (3.39)$$

3.4.5 Tenseur des dilatations :

On va s'intéresser ici au voisinage d'un point matériel M , en considérant deux vecteurs infinitésimaux $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{r}'(t)$ dans $\Omega(t)$, de positions initiales respectives $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}'_0$ dans Ω_0 (voir figure 3.24).

On constate que, au cours de la transformation, le produit scalaire de ces deux vecteurs évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) \rangle &= \langle F \mathbf{r}_0, F \mathbf{r}'_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_0, F^T F \mathbf{r}'_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_0, C \mathbf{r}'_0 \rangle \end{aligned}$$

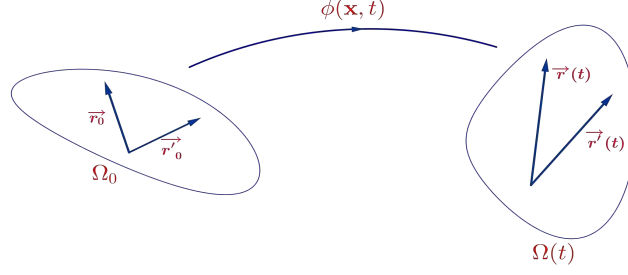


FIGURE 3.24 – Transport de deux vecteurs par un écoulement.

Avec $C = F^T F$.

Le tenseur C est appelé *tenseur des dilatations*. On peut remarquer que, dans le cas d'une rotation de corps (sans déformation), le tenseur F satisfera donc la condition $F^T F = I$, où I est le tenseur identité du second ordre. Le tenseur des dilatations devient dans ce cas le tenseur identité. Ce tenseur caractérise donc la déformation du corps.

Propriétés du tenseur des dilations de Cauchy-Green :

♣ C est symétrique (i.e égal à son transposé)

$$C^T = (F^T F)^T = F^T (F^T)^T = F^T F = C$$

♣ La forme bilinéaire $\langle \mathbf{r}_0, C \mathbf{r}_0 \rangle$ est définie positive. En effet

$$\det(C) = \det(F^T F) = (\det(F))^2 > 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{r}_0, C \mathbf{r}_0 \rangle = \|\mathbf{r}(t)\|^2$$

♣ Évolution temporelle du tenseur de Cauchy-Green :

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{d}{dt}(F^T F) \\ &= \frac{dF^T}{dt} F + F^T \frac{dF}{dt} \\ &= F^T L^T F + F^T L F \\ &= F^T (L^T + L) F \end{aligned} \tag{3.40}$$

3.4.5.1 Tenseur de dilatation de Cauchy-Green à gauche :

Calculons le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}'_0$ en fonction des vecteurs $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{r}'(t)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0(t) \rangle &= \langle G \mathbf{r}(t), G \mathbf{r}'(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}(t), G^T G \mathbf{r}'(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}(t), c \mathbf{r}'(t) \rangle \end{aligned}$$

Avec, $G = F^{-1}$.

On définit le *tenseur du Cauchy-Green à gauche* par :

$$B = F F^T \tag{3.41}$$

L'inverse du tenseur de Cauchy-Green à gauche permettra de calculer les dilatations en nous basant sur la configuration actuelle :

$$c = B^{-1} = (F F^T)^{-1} = (F^T)^{-1} F^{-1} = (F^{-1})^T F^{-1} = G^T G$$

Donc,

$$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0(t) \rangle = \langle \mathbf{r}(t), c \mathbf{r}'(t) \rangle$$

Avec, $c = B^{-1} = G^T G$.

Évolution temporelle du tenseur Cauchy-Green à gauche :

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{d}{dt}(F F^T) \\ &= \\ &= \frac{dF}{dt} F^T + F \frac{dF^T}{dt} \\ &= \\ &= L F F^T + F F^T L^T \\ &= \\ &= L B + B L^T \end{aligned} \tag{3.42}$$

Proposition 3.1. Soient $\rho(\mathbf{x}, t)$ la distribution des particules situées à l'intérieur du traceur étudié dans un écoulement, E_t l'espace susceptible d'être occupé par le traceur, $\mathbf{P}(t)$ la matrice des moments d'ordre 2 où $P_{ij} = \iint_{\sigma} x_i x_j \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ et $F = (F_{lk})_{i,j \in I}$ avec $I = \{1, 2\}$ le tenseur gradient de déformation. Les coefficients de la matrice des moments d'ordre 2 seront notés :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \iint_{\sigma} x_i x_j \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \iint_{\sigma} x_{0l} F_{il} x_{0k} F_{jk} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= F_{il} F_{jk} \iint_{\sigma} x_{0l} x_{0k} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= F_{il} F_{jk} P_{lk}(0) \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbf{P}(t) = F \mathbf{P}(0) F^T \tag{3.43}$$

Si la forme étudiée est de forme circulaire, $P(0) = \frac{r_0^2}{4} \mathbf{I}$ alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= F \frac{r_0^2}{4} \mathbf{I} F^T \\ &= \frac{r_0^2}{4} F F^T \\ &= F_1 F_1^T \end{aligned} \tag{3.44}$$

La matrice des moments d'ordre 2 représente le tenseur de Cauchy-Green à gauche, donc, l'inverse de la matrice des moments d'ordre 2 permettra de calculer les dilatations du traceur de forme circulaire au cours du transport.

3.5 Advection/diffusion

Dans cette section, est présenté le transport d'un traceur de particules avec diffusion. Précédemment, seule une distribution uniforme de la concentration en particules au sein du traceur a été considérée. Ici la distribution des particules est gaussienne. Cette distribution est intéressante car c'est la fonction de Green de l'opérateur de diffusion.

3.5.1 Équation de transport des moments d'ordre 2 d'une densité gaussienne

Soit un domaine contenant le traceur de particules de forme circulaire, de centre $\mathbf{x}_c(x_c, y_c)$ et de rayon r_0 , à l'intérieur duquel la distribution des particules est gaussienne :

$$C(x, y, t) = A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right)$$

Où :

$\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}(t)$, où $\mathbf{P}$ est la matrice des moments d'ordre 2,

$\delta \mathbf{x} = (x - x_c, y - y_c)$ un vecteur où (x_c, y_c) est le vecteur des moments d'ordre 1,

$\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}$ est la forme quadratique.

Ce domaine contenant le traceur est transporté par l'écoulement, et l'équation de transport de la concentration C est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}(C) = D \Delta C \quad (3.45)$$

Où :

Δ est l'opérateur Laplacien,

D est le coefficient de diffusivité (en m^2/s).

On a $\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}(t)$ donc, la matrice $\mathbf{M}$ est une matrice symétrique définie positive.

Calcul de $\frac{\partial C}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \dot{A}(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) \left[-\dot{\mathbf{x}}_c \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x} - \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_c + \delta \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{M}} \delta \mathbf{x} \right] \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \dot{A}(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) \left[-\dot{\mathbf{x}}_c \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{M}} \delta \mathbf{x} \right] \end{aligned}$$

Calcul de $\mathbf{u} \cdot \nabla(C)$:

On peut introduire le développement de Taylor de la vitesse par : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{L} \vec{\delta x}$ où $\mathbf{L}$ est le gradient de vitesse. donc $\mathbf{u} \cdot \nabla(C) = \mathbf{u}_c \cdot \nabla(C) + \mathbf{L} \delta \mathbf{x} \cdot \nabla(C)$

$$\nabla(C) = \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x}$$

Donc,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(C) = -\frac{1}{2} A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) [\mathbf{u}_c \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x} + \mathbf{L} \delta \mathbf{x} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x}]$$

Calcul de ΔC

$$\begin{aligned} \Delta C &= \operatorname{div}(\nabla(C)) \\ &= \operatorname{div}\left(-\frac{1}{2} A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x}\right) \\ &= A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) \left[-\operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \frac{1}{4} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x} \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x}\right] \end{aligned}$$

Mais $\mathbf{M}$ est une matrice symétrique, donc $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$ et

$$\Delta C = A(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x}\right) \left[-\operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}^2 \delta \mathbf{x}\right]$$

En substituant les expressions $\frac{\partial C}{\partial t}$, $\mathbf{u} \cdot \nabla(C)$ et ΔC obtenues dans l'équation (3.45) et on divise par $A(t) \exp(-\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \delta \mathbf{x})$. On obtient :

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \operatorname{tr}(\mathbf{M}) D - \frac{1}{2} (-\dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{u}_c) \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x} - \frac{1}{2} \delta \mathbf{x} \cdot [\dot{\mathbf{M}} + \mathbf{L}^* \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{L} + 2 D \mathbf{M}^2] \delta \mathbf{x} = 0$$

qui doit être vérifiée quel que soit $\delta \mathbf{x}$. Donc,

A l'ordre 0 :

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = -\operatorname{tr}(\mathbf{M}) D, \quad (3.46)$$

A l'ordre 1 :

$$-\frac{1}{2} (-\dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{u}_c) \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{M}^*) \delta \mathbf{x} = 0$$

mais $\delta \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, donc

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{u}_c \quad (3.47)$$

On trouve que, L'équation de transport du centre du domaine contenant le traceur d'une densité gaussienne est donnée par l'équation (3.47).

A l'ordre 2 :

$$\dot{\mathbf{M}} + \mathbf{L}^* \mathbf{M} + \mathbf{M} \mathbf{L} + 2 D \mathbf{M}^2 = 0 \quad (3.48)$$

Mais $\mathbf{P} = \mathbf{M}^{-1}$ donc, $\mathbf{P} \mathbf{M} = \mathbf{I}$ alors, $\dot{\mathbf{P}} \mathbf{M} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{M}} = 0$ et $\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}^{-1}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= -\mathbf{P} (-\mathbf{L}^* \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{L} - 2 D \mathbf{M}^2) \mathbf{M}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{L}^* \underbrace{\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1}}_{=\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{M}}_{=\mathbf{I}} \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{M}^{-1}}_{=\mathbf{P}} + 2 D \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{M}}_{=\mathbf{I}} \underbrace{\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1}}_{=\mathbf{I}} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{L}^* + \mathbf{L} \mathbf{P} + 2 D \mathbf{I} \end{aligned}$$

L'équation de transport de la matrice des moments d'ordre 2 d'une densité gaussienne est donnée par :

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{L}^* + \mathbf{L} \mathbf{P} + 2 D \mathbf{I} \quad (3.49)$$

3.5.2 Exemple : champ de vitesse linéaire

On considère un traceur de particules placé à l'instant t_0 dans un écoulement où la vitesse donnée par : $\mathbf{u} = (a y, 0)$ avec une distribution interne gaussienne de particules. Alors, la distribution de traceur va être transportée et déformée par le fluide.

3.5.2.1 Évolution de la matrice des moments d'ordre 2

L'évaluation de la matrice des moments d'ordre 2 est donnée par l'équation (3.49). Donc

$$\begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = 2(L_{11}P_{11} + L_{12}P_{12}) + 2D \\ \frac{dP_{22}}{dt} = 2(L_{22}P_{22} + L_{21}P_{12}) + 2D \\ \frac{dP_{12}}{dt} = L_{21}P_{11} + L_{12}P_{22} \end{cases}$$

où, D est le coefficient de diffusivité (en m^2/s). Simplement, on constate que

$$\begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = 2a P_{12} + 2D \\ \frac{dP_{22}}{dt} = 2D \\ \frac{dP_{12}}{dt} = a P_{22} \end{cases}$$

La solution de ces équations différentielles est :

$$\begin{cases} P_{11}(t) = 2a \left(\frac{1}{3} D t^3 + \frac{1}{2} P_{22}(t_0) t^2 \right) + P_{12}(t_0) t + 2D t + P_{11}(t_0) \\ P_{22}(t) = 2D t + P_{22}(t_0) \\ P_{12}(t) = a (D t^2 + P_{22}(t_0) t) + P_{12}(t_0) \end{cases}$$

On prend la matrice initiale des moments d'ordre 2, $\mathbf{P}(t_0) = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{cases} P_{11}(t) = \frac{2}{3} a^2 D t^3 + a^2 \sigma_0^2 t^2 + 2D t + \sigma_0^2 \\ P_{22}(t) = 2D t + \sigma_0^2 \\ P_{12}(t) = a D t^2 + a \sigma_0^2 t \end{cases}$$

On divise par σ_0^2 , on obtient des moments centrés

$$\begin{cases} \frac{P_{11}}{\sigma_0^2} = \frac{2}{3} \frac{a^2 D}{\sigma_0^2} t^3 + a^2 t^2 + 2 \frac{D}{\sigma_0^2} t + 1 \\ \frac{P_{22}}{\sigma_0^2} = 2 \frac{D}{\sigma_0^2} t + 1 \\ \frac{P_{12}}{\sigma_0^2} = \frac{a D}{\sigma_0^2} t^2 + a t \end{cases}$$

On pose $\tau = a t$ donc,

$$\begin{cases} \frac{P_{11}}{\sigma_0^2} = \frac{2}{3} \frac{D}{a \sigma_0^2} \tau^3 + \tau^2 + 2 \frac{D}{a \sigma_0^2} \tau + 1 \\ \frac{P_{22}}{\sigma_0^2} = 2 \frac{D}{a \sigma_0^2} \tau + 1 \\ \frac{P_{12}}{\sigma_0^2} = \frac{D}{a \sigma_0^2} \tau^2 + \tau \end{cases}$$

mais le nombre de Péclet $Pe = \frac{a \sigma_0^2}{D}$ (qui représente le rapport du transfert par convection sur le transfert par diffusion). Alors, les moments d'ordre 2, sont donnés par :

$$\begin{cases} \frac{P_{11}}{\sigma_0^2} = \frac{2}{3 Pe} \tau^3 + \tau^2 + \frac{2}{Pe} \tau + 1 = 1 + \tau^2 + \frac{2}{Pe} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \\ \frac{P_{22}}{\sigma_0^2} = \frac{2}{Pe} \tau + 1 = 1 + \frac{2 \tau}{Pe} \\ \frac{P_{12}}{\sigma_0^2} = \frac{D}{a \sigma_0^2} \tau^2 + \tau = \tau + \frac{\tau^2}{Pe} \end{cases}$$

La matrice des moments centrés d'ordre 2 est donnée par

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \tau^2 + \frac{2}{Pe} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) & \tau + \frac{\tau^2}{Pe} \\ \tau + \frac{\tau^2}{Pe} & 1 + \frac{2 \tau}{Pe} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

La figure 3.25 représente les moments pour $Pe = 1$.

- ♣ Remarque sur les moments $\tilde{P}_{11}$ et $\tilde{P}_{22}$ (voir figure 3.25) : on observe que les moments $\tilde{P}_{11}$ et $\tilde{P}_{22}$ augmentent. Ce qui correspond au cas où il y a élongation selon x et selon y .
- ♣ Quant au moment croisé P_{12} (voir figure 3.25) on observe que toutes les valeurs de $\tilde{P}_{12}$ sont positives, ce qui correspond à une orientation positive.

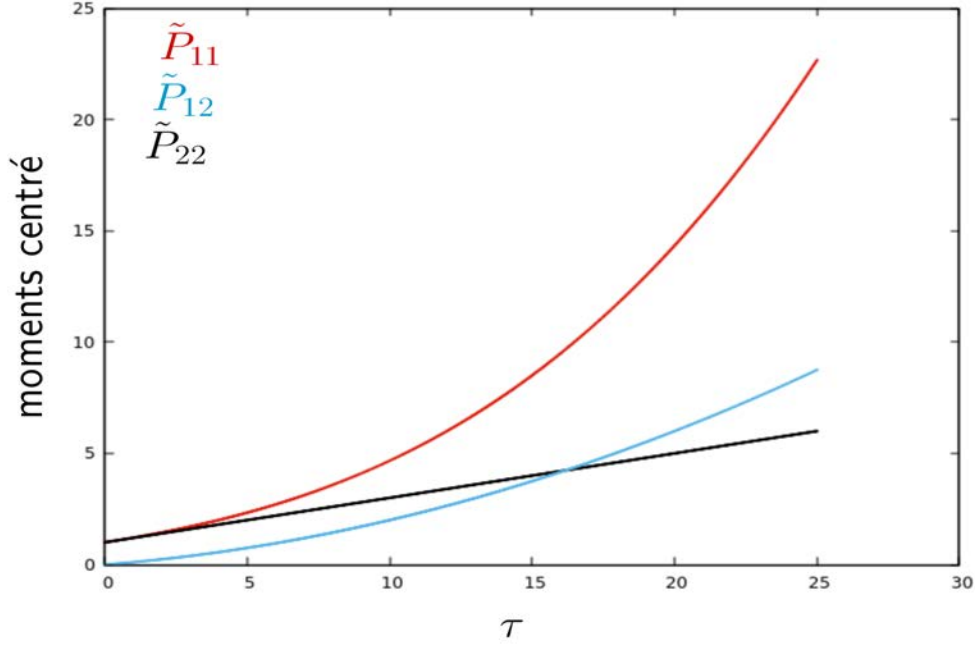


FIGURE 3.25 – Évolution des moments d'ordre 2 d'un traceur de particules.

3.5.2.2 Caractéristiques de l'ellipse

L'angle est donné par l'équation (3.6). On a :

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \tilde{P}_{12}}{\tilde{P}_{11} - \tilde{P}_{22}} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2(\tau + \tau^2)}{\tau^2 + \frac{2}{3} \frac{\tau^3}{Pe}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{6 Pe + 6 \tau}{3 Pe \tau + 2 \tau^2} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{6 + 6 \tau}{3 \tau + 2 \tau^2} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

La figure(3.26) présente l'évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps. on note que l'ellipse commence à s'étirer dans la direction donnée par le vecteur propre de la partie symétrique du tenseur des vitesses. L'angle $\theta(\tau)$ de la direction principale par rapport à l'axe ox , varie entre $\frac{\pi}{4}$ pour τ qui tend vers 0 et 0 pour τ qui tend vers $+\infty$.

Les valeurs propres de la matrice des moments centrés $\tilde{\mathbf{P}}$ sont données par :

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{22} \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \text{ avec } \Delta = (\tilde{P}_{11} - \tilde{P}_{22})^2 + 4 (\tilde{P}_{12})^2$$

On a

$$\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{22} = 2 + \tau^2 + \frac{2}{Pe} \left(2 \tau + \frac{\tau^3}{3} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\tau^2 + \frac{2}{3} \frac{\tau^3}{Pe} \right)^2 + 4 \left(\tau + \frac{\tau^2}{Pe} \right)^2 \\ &= \tau^2 (4 + \tau^2) + \frac{4 \tau^3}{Pe} \left(2 + \frac{\tau^2}{3} \right) + \frac{4 \tau^4}{Pe^2} \left(1 + \frac{\tau^2}{9} \right) \end{aligned}$$

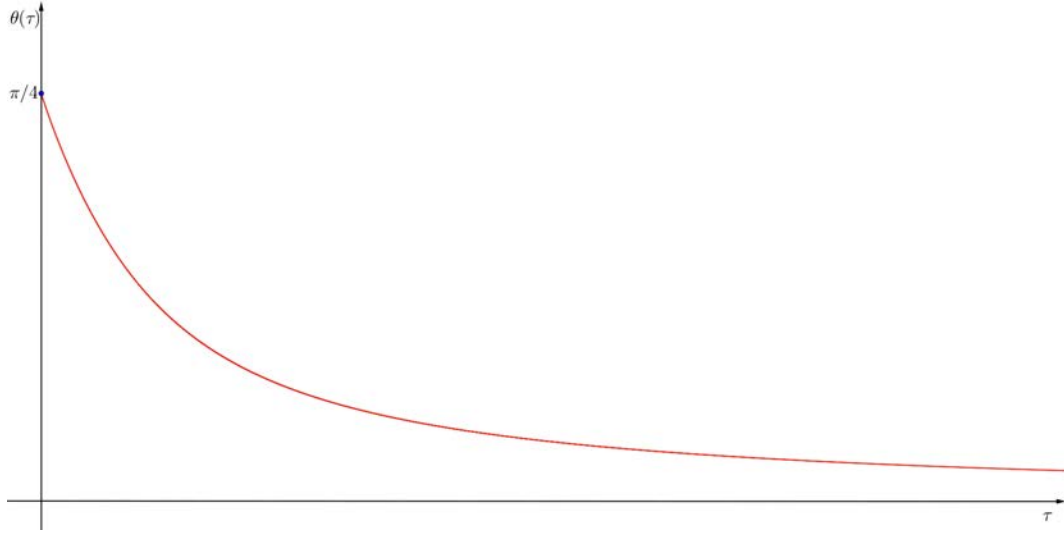


FIGURE 3.26 – Évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps.

Alors,

$$\tilde{\lambda}_{\max, \min} = 1 + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau}{Pe} \left(2 + \frac{\tau^2}{3} \right) \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} (4 + \tau^2) + \frac{\tau^3}{Pe} \left(2 + \frac{\tau^2}{3} \right) + \frac{\tau^4}{Pe^2} \left(1 + \frac{\tau^2}{9} \right)}$$

On note que au voisinage de $\tau = 0$:

$$\tilde{\lambda} \sim 1 + \frac{2\tau}{Pe} \pm \sqrt{\tau^2 + \frac{2\tau^2}{Pe}} \sim 1 + \frac{2\tau}{Pe} \pm \tau \sim 1 + \tau \left(\frac{2}{Pe} \pm 1 \right)$$

au voisinage de $\tau \rightarrow \infty$:

On peut écrire Δ comme :

$$\Delta = \frac{4\tau^6}{9Pe^2} + \frac{4\tau^5}{3Pe} + \left(1 + \frac{4}{Pe} \right) \tau^4 + \frac{8\tau^3}{Pe} + 4\tau^2$$

alors, on peut écrire $\sqrt{\Delta}$ par

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \left(\frac{4\tau^6}{9Pe^2} + \frac{4\tau^5}{3Pe} + \left(1 + \frac{4}{Pe} \right) \tau^4 + \frac{8\tau^3}{Pe} + 4\tau^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\tau^3}{3Pe} \left(1 + \frac{3Pe}{\tau} + \frac{9 + 9Pe^2}{\tau^2} + \frac{18Pe}{\tau^3} + \frac{9Pe^2}{\tau^4} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant la série de Taylor :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \frac{\tau^3}{3Pe} \left(1 + \frac{3Pe}{2\tau} + \frac{4(9 + \frac{9Pe^2}{4}) - 9Pe^2}{8\tau^2} + \frac{27Pe^3 - 12Pe(9 + \frac{9Pe^2}{4}) + 144Pe}{16\tau^3} + \dots \right) \\ &= \frac{\tau^3}{3Pe} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{3\tau}{4Pe} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Alors,

$$\tilde{\lambda}_{\min} \sim 1 + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau}{Pe} \left(2 + \frac{\tau^2}{3} \right) - \frac{\tau^3}{3Pe} - \frac{\tau^2}{2} - \frac{3\tau}{4Pe} - \frac{3}{4} \sim \frac{2\tau}{Pe} - \frac{3\tau}{4Pe} - \frac{3}{4} \sim \frac{5\tau}{4Pe} + \frac{1}{4}.$$

$$\tilde{\lambda}_{\max} \sim 1 + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau}{Pe} \left(2 + \frac{\tau^2}{3} \right) + \frac{\tau^3}{3 Pe} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{3 \tau}{4 Pe} + \frac{3}{4} \sim \frac{2 \tau^3}{3 Pe}$$

Donc, au voisinage de $\tau = 0$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_{\min} \sim 1 \\ \tilde{\lambda}_{\max} \sim 1 \end{cases} \quad (3.52)$$

au voisinage de $\tau \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_{\min} \sim \frac{5 \tau}{4 Pe} + \frac{1}{4} \\ \tilde{\lambda}_{\max} \sim \frac{2 \tau^3}{3 Pe} \end{cases} \quad (3.53)$$

On trouve que pour un temps très grand, le petit axe évolue avec de la diffusion pure (proportionnel à t), et le grand axe évolue en t^3 et non plus en t^2 .

La figure(3.27) présente l'évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse. On note que la dilatation l'ellipse selon x et y se poursuit dans le temps. La figure(3.28) présente l'évolution d'une distribution du domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(2, 2)$ dans l'écoulement linéaire avec diffusion à différents nombres de Péclet Pe . On retrouve bien que pour $Pe \ll 1$, la diffusion l'emporte sur la convection, et que pour $Pe \gg 1$, c'est l'inverse.

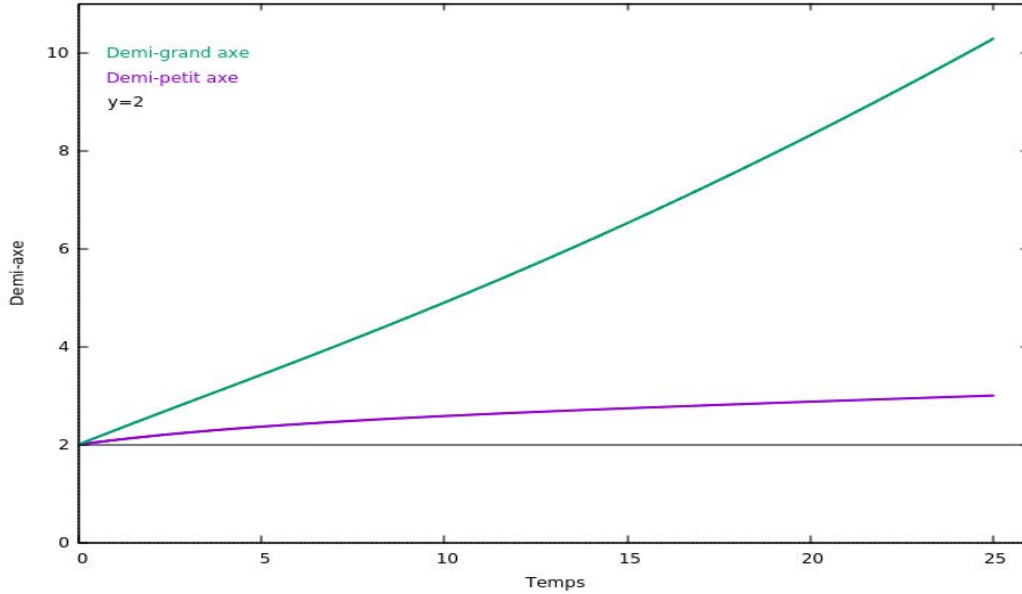
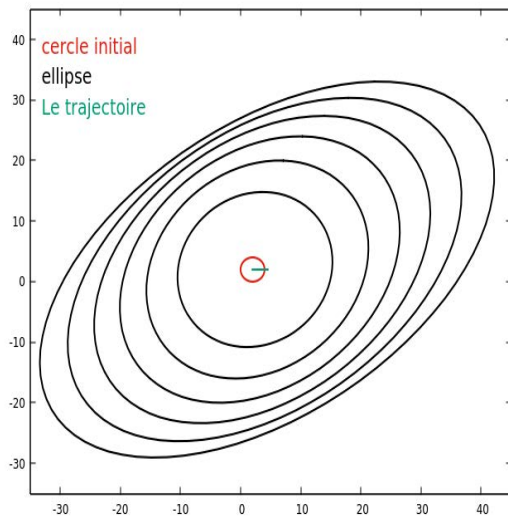
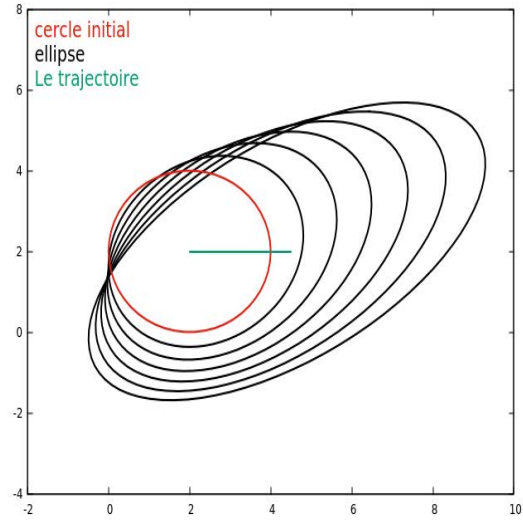


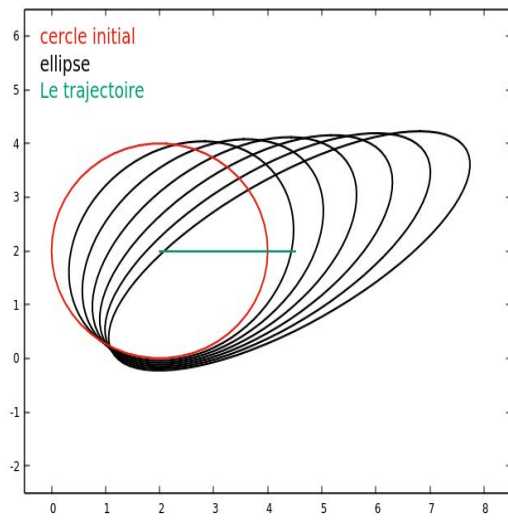
FIGURE 3.27 – Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse avec le temps.



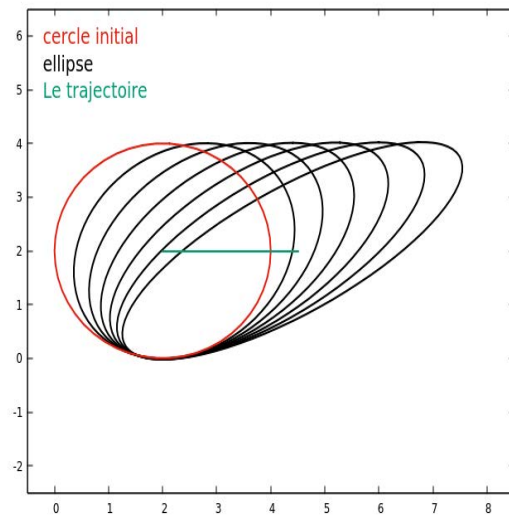
(a) le nombres de Péclet $Pe = 0.1 \ll 1$



(b) le nombres de Péclet $Pe = 1$



(c) le nombres de Péclet $Pe = 10$



(d) le nombres de Péclet $Pe = 100 \gg 1$

FIGURE 3.28 – Évolution du domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0(2, 2)$ dans l'écoulement linéaire avec diffusion à différents nombres de Péclet Pe .

3.5.3 Exemple : champ de vitesse hyperbolique

On considère un écoulement permanent défini dans un repère (o, x, y) par le champ de vitesse suivant :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u &= a x \\ v &= -a y \end{cases} \quad (3.54)$$

Le gradient de vitesse est donné par :

$$L = \nabla u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

3.5.3.1 La trajectoire

La trajectoire $\mathbf{x}_c(t) = (x_c(t), y_c(t))$ de la position moyenne est obtenue en résolvant l'équation (3.47). On trouve facilement :

$$\begin{cases} x_c(t) &= x_{c0} \exp(a t) \\ y_c(t) &= y_{c0} \exp(-a t) \end{cases} \quad (3.56)$$

3.5.3.2 Évolution de la matrice des moments d'ordre 2

L'équation de transport des moments d'ordre 2 est donnée par (3.49). Alors

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} + 2D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{P}} &= \begin{pmatrix} 2 a P_{11} + 2 D & 0 \\ 0 & -2 a P_{22} + 2 D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On divise par σ_0^2 , on obtient des moments centrés

$$\begin{cases} \tilde{P}_{11} = \frac{2 a P_{11}}{\sigma_0^2} + \frac{2 D}{\sigma_0^2} \\ \tilde{P}_{22} = \frac{-2 a P_{22}}{\sigma_0^2} + \frac{2 D}{\sigma_0^2} \\ \tilde{P}_{12} = 0 \end{cases}$$

En introduisant le nombre de Péclet $Pe = \frac{a \sigma_0^2}{D}$. Alors, les moments centrés d'ordre 2 sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{P}}_{11} = 2 a \left(\tilde{P}_{11} + \frac{1}{Pe} \right) \\ \dot{\tilde{P}}_{22} = -2 a \left(\tilde{P}_{11} - \frac{1}{Pe} \right) \\ \dot{\tilde{P}}_{12} = 0 \end{cases}$$

On trouve facilement :

$$\begin{cases} \tilde{P}_{11}(t) = \left(1 + \frac{1}{Pe}\right) \exp(2 a t) - \frac{1}{Pe} \\ \tilde{P}_{22}(t) = \left(1 - \frac{1}{Pe}\right) \exp(-2 a t) + \frac{1}{Pe} \\ \tilde{P}_{12}(t) = 0 \end{cases}$$

En posant $\tau = a t$ donc,

$$\begin{cases} \tilde{P}_{11}(\tau) = \left(1 + \frac{1}{Pe}\right) \exp(2 \tau) - \frac{1}{Pe} \\ \tilde{P}_{22}(\tau) = \left(1 - \frac{1}{Pe}\right) \exp(-2 \tau) + \frac{1}{Pe} \\ \tilde{P}_{12}(\tau) = 0 \end{cases}$$

L'évolution les moments centrés est donnée sur la figure 3.29 pour $Pe = 1$.

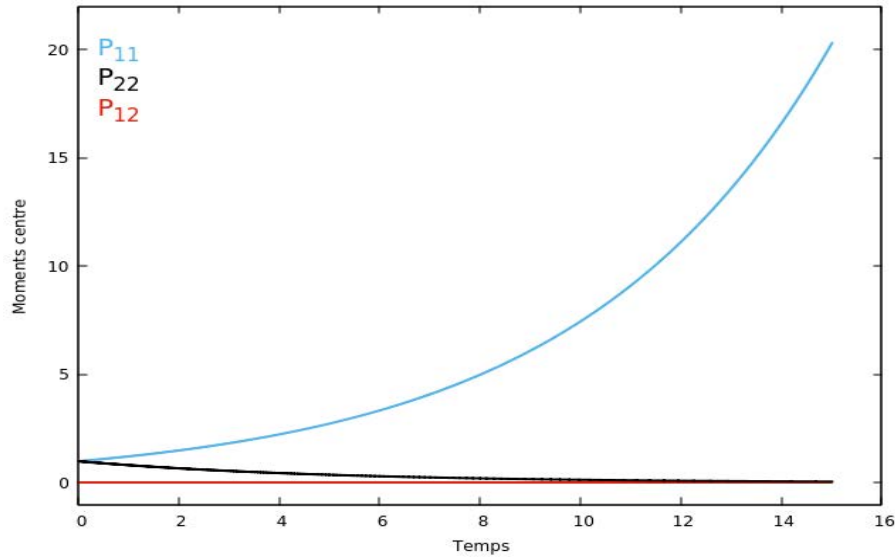


FIGURE 3.29 – Évolution les moments centrés d'ordre 2 d'un distribution du domaine le traceur de centre $\mathbf{x}_0(0, 15)$.

3.5.3.3 Caractéristiques de l'ellipse

L'angle est donné par l'équation (3.6). On a (figure 3.30) :

$$\theta(\tau) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \tilde{P}_{12}}{\tilde{P}_{11} - \tilde{P}_{22}} \right) = \frac{1}{2} \arctan(0) = 0 \quad (3.57)$$

On a la matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ des moments centrés d'ordre 2 est une matrice diagonale alors, les

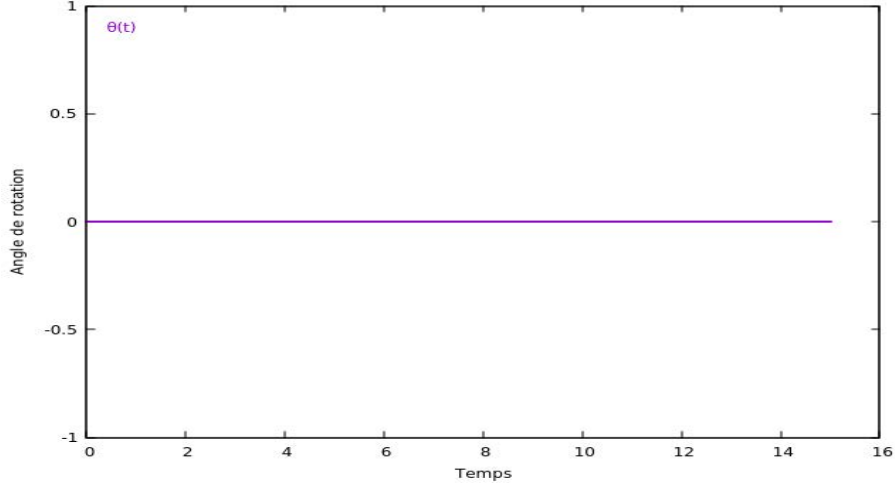


FIGURE 3.30 – Évolution de l'angle de rotation de l'ellipse avec le temps d'un domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0(0, 15)$.

valeurs propres de $\tilde{\mathbf{P}}$ sont : $\tilde{\lambda}_{\min} = \tilde{P}_{22}$ et $\tilde{\lambda}_{\max} = \tilde{P}_{11}$. Alors,

$$\lambda_{\max} = \tilde{P}_{11} = \left(1 + \frac{1}{Pe}\right) \exp(2\tau) - \frac{1}{Pe} \sim \left(1 + \frac{1}{Pe}\right) \exp(2\tau)$$

$$\lambda_{\min} = \tilde{P}_{22} = \left(1 - \frac{1}{Pe}\right) \exp(2\tau) + \frac{1}{Pe} \sim \frac{1}{Pe}$$

On retrouve pour un temps très grand, pour le petit axe, l'échelle de Batchelor (proportionnel à Pe).

La figure (3.31) présente l'évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse. On note que, l'ellipse se dilate selon x et y se poursuit dans le temps. La figure (3.32) présente l'évolution d'une distribution du domaine le traceur de centre $\mathbf{x}_0$ dans l'écoulement hyperbolique avec diffusion au nombre de Péclet $Pe = 1$.

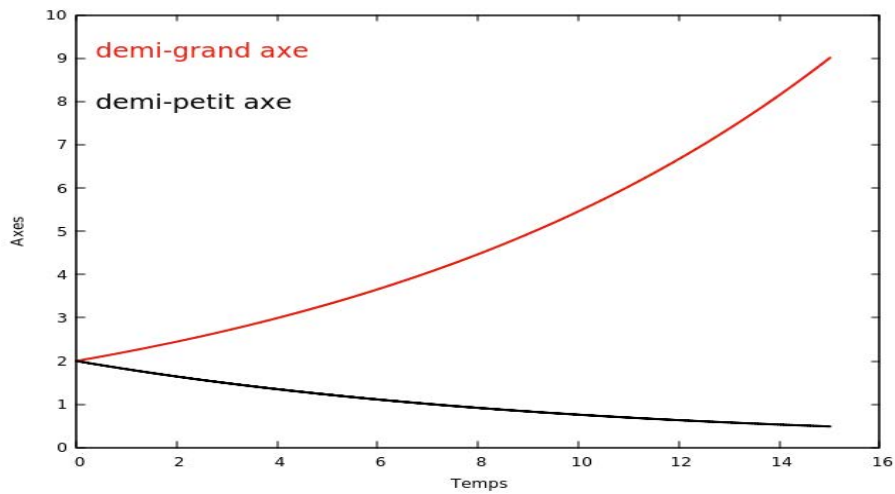


FIGURE 3.31 – Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse avec le temps d'un domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0(0, 15)$.

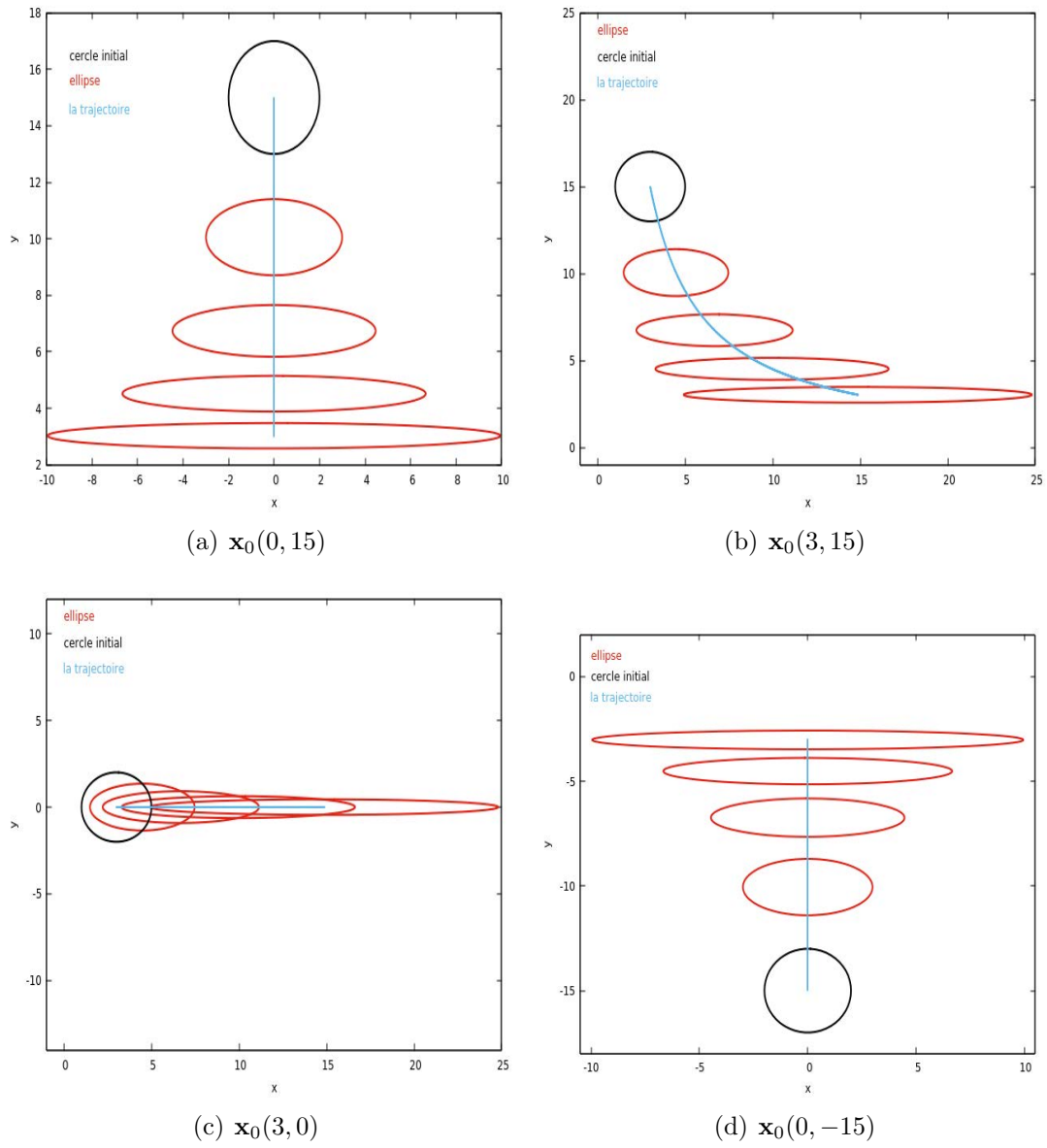


FIGURE 3.32 – Évolution d'un domaine contenant le traceur de centre initial $\mathbf{x}_0$ dans l'écoulement hyperbolique avec diffusion au nombre de Péclet $Pe = 1$.

3.6 Conclusion

La méthode des moments présentée ici est un nouvel outil permettant d'obtenir des résultats pour comprendre comment un traceur de forme circulaire se transporte dans un écoulement. On peut déterminer les caractéristiques géométriques de l'ellipse (ellipsoïde) à partir de la matrice des moments d'ordre 2 en dimension 2 et 3.

On trouve que dans les écoulements linéaires, les résultats sont identiques aux résultats de transport des particules. Cependant, dans des écoulements tourbillonnaires, il y a des différences dues aux déformations de l'ellipse. On constate que cette variation devient petite lorsque le rayon diminue. On est dans le cadre linéaire.

La matrice des moments d'ordre 2 représente le tenseur de Cauchy-Green à gauche, donc, l'inverse de la matrice des moments d'ordre 2 permettra de calculer les dilatations du traceur de forme circulaire au cours du transport.

Le transport des moments peut être généralisé au cas où on introduit de la diffusion, en restant dans le cadre des petites déformations (champ de vitesse linéarisé localement).

Le *FTLE* à partir d'une méthode des moments *M-FTLE*

Dans ce chapitre, on définit une nouvelle méthode de calcul de l'exposant de Lyapunov à temps fini *FTLE*, utilisant une linéarisation locale de l'écoulement. Cette nouvelle définition est appelée *M-FTLE*. Une comparaison entre ces deux définitions est effectuée. La première section est consacrée à la définition du *M-FTLE*. La seconde section présente une validation mathématique de cette méthode, ainsi que des exemples analytiques simples (champ de vitesse linéaire, circulaire, hyperbolique) et un exemple numérique (champ de vitesse du double-gyre). Ces résultats sont alors comparés aux résultats présents dans la littérature obtenus avec l'approche classique.

4.1 Définition des *M-FTLE* :

Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et un sous-ensemble $D \subset U$. Ce sous-ensemble peut représenter soit le domaine de calcul, soit le domaine où les mesures des champs de vitesse sont effectuées. On considère donc le domaine du fluide $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, borné et simplement connexe. Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ un champ de vitesse qui est fonction de la variable d'espace $\mathbf{x} \in D$ et de la variable temporelle t . On suppose que $\mathbf{u}$ est de classe C^2 pour tout $\mathbf{x} \in D$ et qu'il existe un instant t_0 et un intervalle $|\tau| > 0$ tels que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est de classe C^0 par rapport au temps t dans l'intervalle $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$. On suppose également que toutes les trajectoires partant de $\mathbf{x}_0$ dans D au temps t_0 ne sortent pas de U pour tout temps t dans $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$. Cette hypothèse permet d'intégrer $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en temps sur $[t_0, t_0 + T]$ pour des valeurs de T positive ou négative telles que $|T| \leq \tau$. Pour calculer le champ de *FTLE* à partir de la matrice des moments d'ordre 2 au point $\mathbf{x}_0$ pour le temps d'intégration T , on considère une distribution de particules de forme circulaire, de centre $\mathbf{x}_0$ et de rayon r_0 , à l'intérieur de laquelle la concentration, c'est-à-dire la distribution de particules, est uniforme.

À l'instant initial t_0 , la distribution de particules a pour centre $\mathbf{x}_0$ et pour rayon r_0 et la matrice P_0 des moments d'ordre 2 est égale à $\frac{r_0^2}{4} I$ où I est la matrice identité. Le traceur est transporté par l'écoulement. À l'instant $t_0 + T$, la matrice $\mathbf{P}(t)$ des moments d'ordre 2 est évaluée par l'équation de transport :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{L} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{L}^T$$

où $\mathbf{L}$ est le tenseur de gradient de vitesse.

La matrice $\mathbf{P}(t)$ est symétrique, donc on peut représenter cette matrice par une ellipse (voir Figure(4.1)).

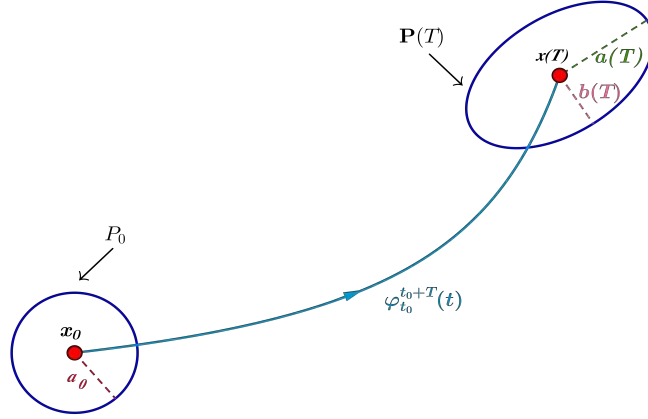


FIGURE 4.1 – Évolution de la matrice des moments d'ordre 2.

Soit $\lambda_{\max}(\mathbf{P})$ la plus grande valeur propre de $\mathbf{P}$, et $a(\mathbf{P})$ la demi-longueur du plus grand axe de l'ellipse représentant $\mathbf{P}$. Alors, le *FTLE* obtenu à partir de la matrice des moments d'ordre 2 au point $\mathbf{x}_0$ est donné par :

$$M_{\sigma_{t_0}^{t_0+T}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|T|} \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t_0 + T))}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t_0))}} \right) \quad (4.1)$$

Ou

$$M_{\sigma_{t_0}^{t_0+T}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|T|} \ln \left(\frac{a(\mathbf{P}(t_0 + T))}{a(\mathbf{P}(t_0))} \right) \quad (4.2)$$

Avec, $a(\mathbf{P}(t_0 + T))$ le demi-grand axe de l'ellipse à l'instant $t_0 + T$ et $a(\mathbf{P}(t_0))$ le rayon du cercle à l'instant initial t_0 .

Théorème 4.1. *La définition du champ scalaire de M-FTLE donnée par l'équation (4.1) est équivalente à la définition du champ scalaire de FTLE classique.*

Démonstration. On prend les mêmes hypothèses que dans la définition ci-dessus. Soit F le tenseur gradient de déformation et C le tenseur de Cauchy-Green (de plus grande valeur propre $\lambda_{\max}(C)$).

On a déjà trouvé au chapitre 3, à l'équation (3.44), que la matrice des moments d'ordre 2 est donnée par :

$$\mathbf{P}(t) = \frac{r_0^2}{4} FF^T$$

avec, F^T la transposée de F . Donc, $\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t)) = \frac{r_0^2}{4} \lambda_{\max}(FF^T)$, mais $\lambda_{\max}(C) = \lambda_{\max}(FF^T)$, alors, la plus grande valeur propre de la matrice des moments d'ordre 2 est donnée par :

$$\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t)) = \frac{r_0^2}{4} \lambda_{\max}(C)$$

Le $FTLE$ classique à la position initiale $\mathbf{x}_0$ et au temps d'intégration $t_0 + T$, est donné par :

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \ln(\sqrt{\lambda_{max}(C)})$$

mais la plus grande valeur propre du tenseur Cauchy-Green est liée à la plus grande valeur propre de la matrice des moments d'ordre 2 par :

$$\lambda_{max}(C) = \frac{4}{r_0^2} \lambda_{max}(\mathbf{P}(t))$$

donc

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \ln\left(\sqrt{\frac{4}{r_0^2} \lambda_{max}(\mathbf{P}(t))}\right)$$

mais $\lambda_{max}(\mathbf{P}(t_0)) = \frac{r_0^2}{4}$. Le $FTLE$ est donc donné par :

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_{max}(\mathbf{P}(t))}{\lambda_{max}(\mathbf{P}(t_0))}}\right) = M_{\sigma_{t_0}}^{t_0+T}$$

□

Le champ scalaire qui résulte du M - $FTLE$ représente une mesure normalisée du taux de croissance du plus grand axe de l'ellipse du traceur de forme initialement circulaire après un intervalle de temps fini T . Il permet d'identifier les lignes matérielles répulsives lorsque le temps d'intégration est positif ($T > 0$), et les lignes matérielles attractives lorsque le temps d'intégration est négatif ($T < 0$). La figure (4.2) présente un exemple d'une ligne attractive et d'une ligne répulsive. Ces lignes d'intérêt sont appelées LCS et correspondent à des maxima locaux de $M_{\sigma_{t_0}}^{t_0+T}(\mathbf{x})$.

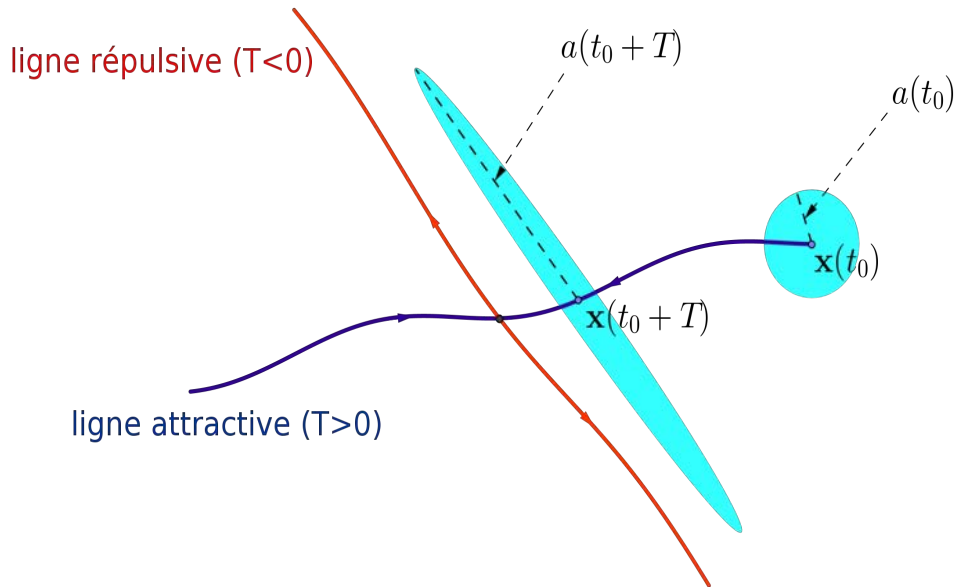


FIGURE 4.2 – Exemple de dilatation d'un disque de rayon $a(t_0)$ de centre $x(t_0)$ situé sur la ligne de LCS .

4.1.1 Exemple(1) : Calcul du champ de *M-FTLE* pour un champ de vitesse linéaire en 2D

On considère un domaine contenant le traceur de forme circulaire de rayon r_0 , à l'intérieur duquel la distribution des particules est uniforme et à l'instant initial t_0 la matrice des moments d'ordre 2, $\mathbf{P}(0) = \frac{r_0^2}{4}I$ où I la matrice identité. Dans cet exemple on prend $\mathbf{P}(0) = I$. Ce domaine contenant le traceur est placé à l'instant initial t_0 dans un écoulement de vitesse $\vec{\mathbf{u}} = (by + a, 0)$ avec $b \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$. La matrice des moments d'ordre 2 à l'instant t est alors donnée par :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} b^2(t-t_0)^2 + 1 & b(t-t_0) \\ b(t-t_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la plus grande valeur propre de $\mathbf{P}(t)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\mathbf{P}(t) - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} b^2(t-t_0)^2 + 1 - \lambda & b(t-t_0) \\ b(t-t_0) & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (2 + b^2(t-t_0)^2)\lambda + 1 \end{aligned}$$

$$f(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (2 + b^2(t-t_0)^2)\lambda + 1 = 0$$

Les valeurs propres de $\mathbf{P}(t)$ sont :

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{P}(t)) = \frac{1}{2}(2 + b^2(t-t_0)^2 \pm \sqrt{b^4(t-t_0)^4 + 4b^2(t-t_0)^2})$$

Donc,

$$\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t)) = \frac{1}{2} \left(2 + b^2(t-t_0)^2 + \sqrt{b^4(t-t_0)^4 + 4b^2(t-t_0)^2} \right)$$

Le champ de *M-FTLE*, du champ de vitesse $\vec{\mathbf{u}} = (by + a, 0)$ au temps d'intégration $t_0 + T$ est donné par :

$$\begin{aligned} M_{\sigma_{t_0}^{t_0+T}}(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2T} \ln \left(\frac{\lambda_{\max}(t_0 + T)}{\lambda_{\max}(t_0)} \right) \\ &= \frac{1}{2T} \ln \left(\frac{1}{2} (2 + b^2 T^2 + \sqrt{b^4 T^4 + 4b^2 T^2}) \right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

On note que les valeurs du champ de *M-FTLE* sont indépendantes de la position initiale.

4.1.2 Exemple(2) : Calcul du champ de M - $FTLE$ pour un champ de vitesse de Hill en 2D

Si ce domaine contenant le traceur est positionné à l'instant initial t_0 dans un écoulement de vitesse de Hill [56] (voir figure 3.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{R^2} \right) \\ v = \frac{3}{2} U \frac{z r}{R^2} \end{array} \right. \quad \text{si} \quad r^2 + z^2 < R^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} u = U \left(\frac{R^2}{r^2 + z^2} \right)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{2z^2 - r^2}{2R^2} - 1 \right] \\ v = \frac{3}{2} U \frac{z r}{R^2} \left(\frac{R^2}{r^2 + z^2} \right)^{\frac{5}{2}} \end{array} \right. \quad \text{si} \quad r^2 + z^2 > R^2 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

sur le domaine D défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 4 \text{ et } -4 \leq y \leq 4\}$$

Le champ de M - $FTLE$ ($FTLE$ avec la méthode des moments d'ordre 2) est calculé à partir de cet écoulement analytique et est présenté à la Figure(4.3). On a calculé les trajectoires des particules et les moments d'ordre 2 par une méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps $dt = 0,025$ où la matrice initiale des moments d'ordre 2 est $\mathbf{P}(0) = 10^{-4} I$. Ces champs ont été calculés avec un temps total d'intégration $T = 1$ s (Figure(4.3(a))), $T = 2$ s (Figure(4.3(b))), $T = 5$ s (Figure(4.3(c))) et $T = 7,5$ s (Figure(4.3(d))), et ont été calculés avec un temps d'intégration négatif $T = -1$ s (Figure(4.4(a))), $T = -2$ s (Figure(4.4(b))), $T = -5$ s (Figure(4.4(c))) et $T = -7,5$ s Figure(4.4(d)). Le nombre de nœuds est 401×401 . L'échelle de couleur est normalisée par rapport à la valeur de M - $FTLE$ la plus élevée.

Lorsque le temps d'intégration est positif, le champ de M - $FTLE$ identifie les lignes matérielles répulsives. Lorsque le temps d'intégration est négatif, le champ de M - $FTLE$ identifie les lignes matérielles attractives (Figure 4.5(a)). Les LCS , révélées par les plus grandes valeurs du $FTLE$, s'affinent peu à peu en augmentant T . Les figure(4.5(b) et 4.5(c)) présentent la LCS qui définit la frontière entre l'intérieur de la sphère et l'extérieur. À l'intérieur de la sphère, il y a une ligne qui sépare deux tourbillons. Donc, les LCS séparent les régions de l'écoulement avec un comportement qualitativement différent.

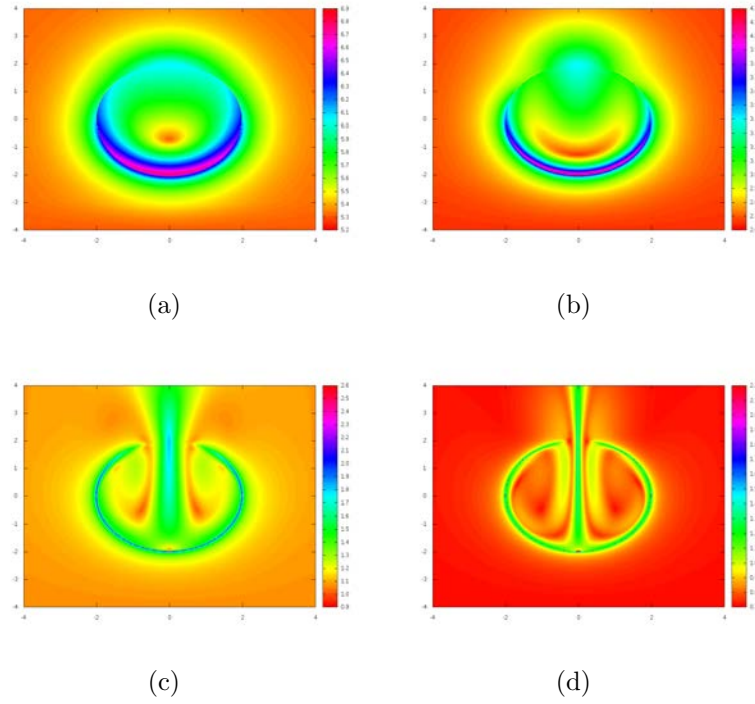


FIGURE 4.3 – Le champ de $M-FTLE$ du champ de vitesse de Hill pour un temps d'intégration positif (a) : $T = 1$ s, (b) : $T = 2$ s, (c) : $T = 5$ s, (d) : $T = 7.5$ s.

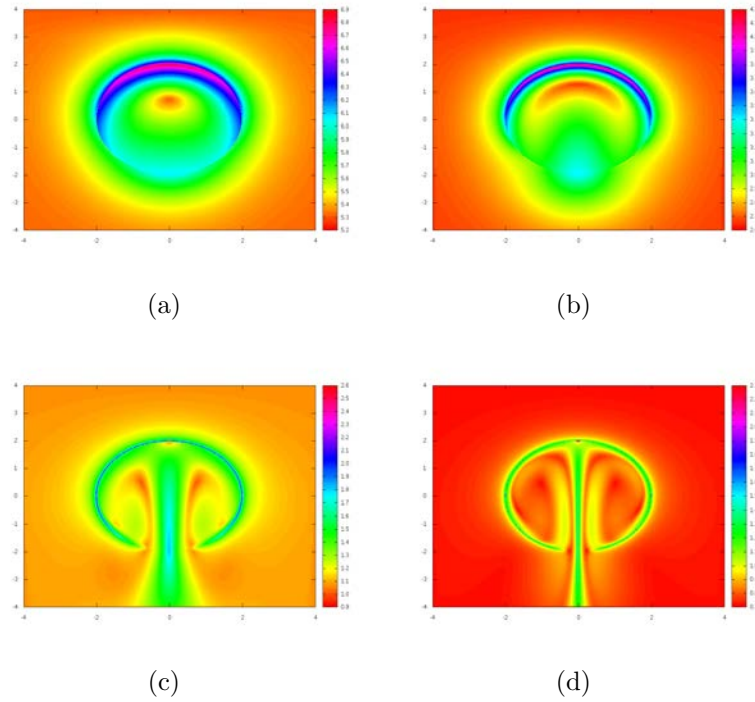
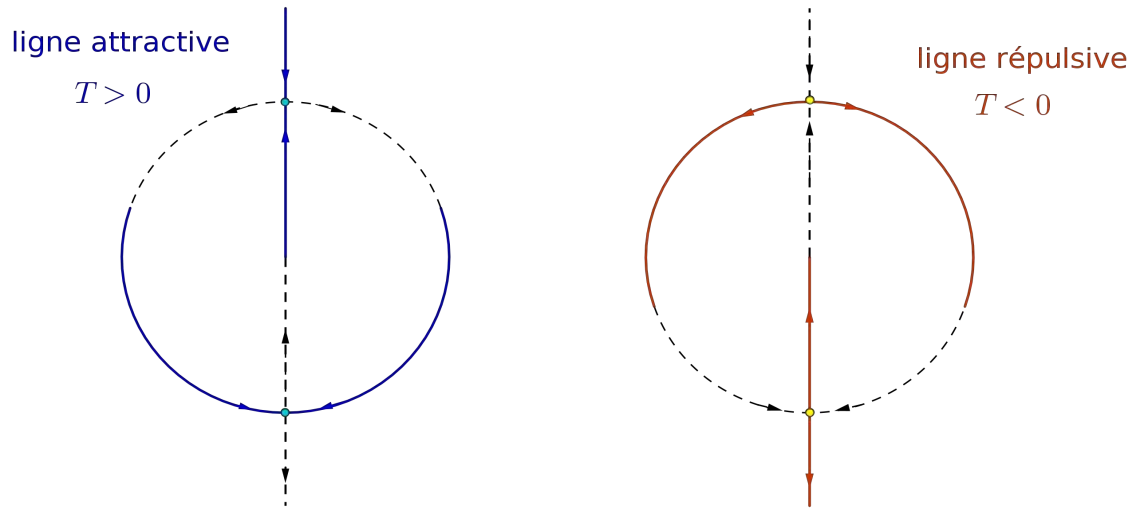
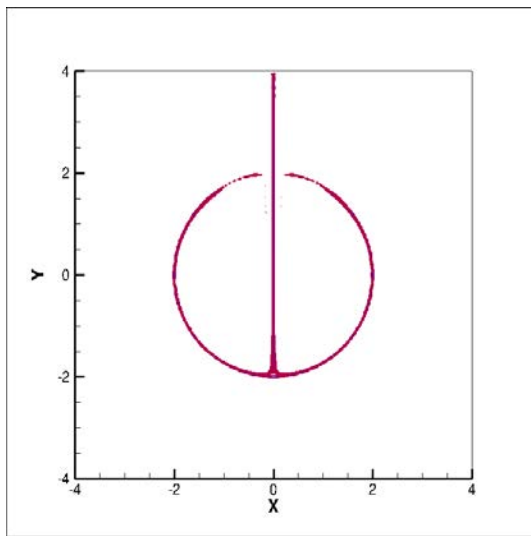


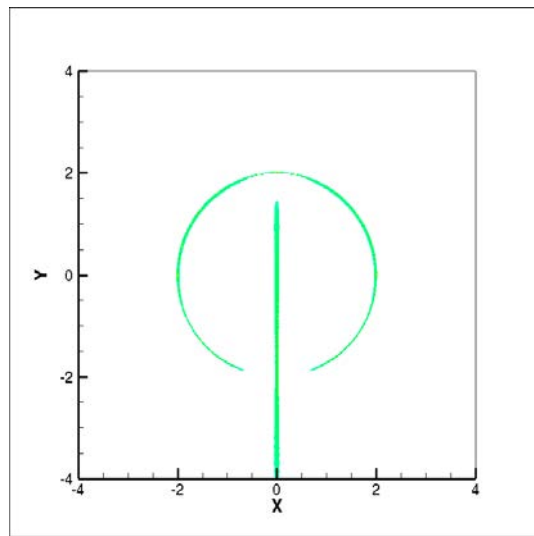
FIGURE 4.4 – Le champ de $M-FTLE$ du champ de vitesse de Hill pour un temps d'intégration négatif (a) : $T = -1$ s, (b) : $T = -2$ s, (c) : $T = -5$ s, (d) : $T = -7.5$ s.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.5 – Les lignes matérielles répulsives et attractives en (a). La LCS pour un temps d'intégration T de 10s en (b) et de -10 s en (c).

4.2 Validation de la méthode

Pour valider la nouvelle méthode de calcul de *FTLE* obtenues à partir de la matrice des moments d'ordre 2, on va donner des exemples calculés de deux façons différentes : les *FTLE* à partir du tenseur de Cauchy-Green et *M-FTLE* (obtenues à partir de la matrice des moments d'ordre 2).

On considère une distribution de traceur de forme circulaire de rayon r_0 , à l'intérieur de laquelle la distribution des particules est uniforme, et à l'instant initial t_0 la matrice des moments d'ordre 2, $\mathbf{P}(0) = \frac{r_0^2}{4}I$ où I est la matrice identité. Dans ces exemples on prend $\mathbf{P}(0) = I$ (i.e. $r_0 = 2$).

4.2.1 Exemples(1) : La vitesse hyperbolique

4.2.1.1 Calcul *M-FTLE*

La fonction de courant d'un écoulement hyperbolique est donnée par :

$$\psi(x, y; t) = axy, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

les composantes u et v de la vitesse sont obtenues par :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -ax \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = ay \end{aligned}$$

Si ce traceur est placé à l'instant initial t_0 dans cet écoulement de vitesse $\vec{u} = (-ax, ay)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, la matrice des moments d'ordre 2 à l'instant t est donnée par :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} e^{2a(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-2a(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = e^{\mp 2a(t-t_0)}$$

Donc,

$$\lambda_{\max} = e^{2|a|(t-t_0)}$$

Le champ de *M-FTLE* du champ de vitesse $\vec{u} = (-ax, ay)$ au temps d'intégration $t_0 + T$ est donné par :

$$\begin{aligned} M_{\sigma_{t_0}^{t_0+T}}(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2T} \ln \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t_0 + T))}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(t_0))} \right) \\ &= \frac{1}{2T} \ln (e^{2|a|(t_0+T-t_0)}) = |a|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2.1.2 Calcul *FTLE*

Pour calculer le champ de *FTLE*, on va calculer la plus grande valeur propre du tenseur de Cauchy-Green.

- Calcul de la trajectoire pour un point $X_0(x_0, y_0)$ au temps initial t_0 . On a

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax \\ \frac{dy}{dt} &= ay\end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)}$$

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$$

i.e.

$$\varphi_{t_0}^t(x_0) = \begin{pmatrix} x_0 e^{-a(t-t_0)} \\ y_0 e^{a(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

- Calcul du tenseur de Cauchy-Green. Par définition, on a

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}(t_0)) = \sum_{i,j=1}^2 \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{x}(t_0)) e_i \otimes e_j \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{x}(t_0)) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \Big|_{x_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_0}$$

Alors,

$$\mathcal{C}_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} = e^{-2a(t-t_0)}$$

$$\mathcal{C}_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} = 0$$

$$\mathcal{C}_{21} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} = 0$$

$$\mathcal{C}_{22} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} = e^{2a(t-t_0)}$$

Donc,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} e^{-2a(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2a(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

On en déduit, $\lambda_{\max}(\Delta) = e^{2|a|t}$, et l'exposant de Lyapunov à temps fini (*FTLE*) en temps d'intégration T est alors donné par

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \ln(\sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{C})}) = \frac{1}{|T|} \ln\left(\sqrt{e^{2|a|(t_0+T-t_0)}}\right) = |a|$$

On note que :

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) = M_{\sigma_{t_0}^{t_0+T}}(\mathbf{x}_0) = |a|$$

4.2.2 Exemples(2) : Champ de vitesse à symétrie cylindrique

4.2.2.1 Calcul des *M-FTLE*

Si ce traceur est placé à l'instant initial t_0 dans un écoulement du champ de vitesse à symétrie cylindrique

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u &= -\omega y \\ v &= \omega x \\ w &= W \end{cases} \quad (4.6)$$

où, $W \in \mathbb{R}$ et $\omega = \omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{u}_0)}{\partial r}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La matrice des moments d'ordre 2 (3.30) à l'instant t est donnée par :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} 2a^2(t-t_0)^2(1-\cos(2\theta)) - 2a(t-t_0)\sin(2\theta) + 1 & 2a(t-t_0)(\cos(2\theta) - a(t-t_0)\sin(2\theta)) & 0 \\ 2a(t-t_0)(\cos(2\theta) - a(t-t_0)\sin(2\theta)) & 2a^2(t-t_0)^2(1+\cos(2\theta)) + 2a(t-t_0)\sin(2\theta) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec, $a = \frac{\omega' r}{2}$ où $\mathbf{u}_0 = r$, $a = -\frac{1}{2r}$. Et $\theta = \theta(t) = \omega(t-t_0) + \theta_0$.

Calcul de la plus grande valeur propre de $\mathbf{P}(t)$:

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{P}(t) - \lambda I) =$$

$$\begin{vmatrix} 2a^2(t-t_0)^2(1-\cos(2\theta)) - 2a(t-t_0)\sin(2\theta) + 1 - \lambda & 2a(t-t_0)(\cos(2\theta) - a(t-t_0)\sin(2\theta)) & 0 \\ 2a(t-t_0)(\cos(2\theta) - a(t-t_0)\sin(2\theta)) & 2a^2(t-t_0)^2(1+\cos(2\theta)) + 2a(t-t_0)\sin(2\theta) + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - 1)(2a^2(t-t_0)^2(1-\cos(2\theta)) - 2a(t-t_0)\sin(2\theta) + 1 - \lambda) \\ &\quad (2a^2(t-t_0)^2(1+\cos(2\theta)) + 2a(t-t_0)\sin(2\theta) + 1 - \lambda) \\ &\quad - 4a^2(t-t_0)^2(\cos(2\theta) - a(t-t_0)\sin(2\theta))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - 1)(4a^4(t-t_0)^4 + 1 + \lambda^2 + 4a^2(t-t_0)^2 - 2\lambda - 4\lambda a^2(t-t_0)^2 \\ &\quad - 4a^4(t-t_0)^4 \cos^2(\theta) - 8a^3(t-t_0)^3 \sin(\theta) \cos(\theta) - 4a^2(t-t_0)^2 \sin^2(\theta) \\ &\quad - 4a^4(t-t_0)t^4 \sin^2(\theta) - 8a^3(t-t_0)^3 \sin(\theta) \cos(\theta) - 4a^2(t-t_0)^2 \cos^2(\theta)) \end{aligned}$$

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2(1 + a^2(t-t_0)^2)\lambda + 1)$$

$$f(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2(1 + a^2(t-t_0)^2)\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2(1 + \frac{1}{2} \frac{(t-t_0)^2}{r^2})\lambda + 1) = 0$$

Les valeurs propres de $\mathbf{P}(t)$ sont :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{(t-t_0)^2}{r^2} \pm \frac{(t-t_0)}{r} \sqrt{4 + \frac{(t-t_0)^2}{r^2}} \right) \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Donc, la plus grande valeur propre de $\mathbf{P}(t)$ est donnée par :

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{(t-t_0)^2}{r^2} + \frac{(t-t_0)}{r} \sqrt{4 + \frac{(t-t_0)^2}{r^2}} \right)$$

Le champ de M - $FTLE$ du champ de vitesse à symétrie cylindrique au temps d'intégration T est donné par :

$$\begin{aligned} M_{\sigma_0}^T(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2T} \ln \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(T))}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(0))} \right) \\ &= \frac{1}{2T} \ln \left(\frac{1}{2} \left(2 + \frac{T^2}{r^2} + \frac{T}{r} \sqrt{4 + \frac{T^2}{r^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Au temps d'intégration $T = 10$ s le champ de M - $FTLE$ est donné par :

$$M_{\sigma_0}^T(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{20} \ln \left(1 + \frac{50}{r^2} + \frac{10}{r} \sqrt{1 + \frac{25}{r^2}} \right) \quad (4.8)$$

La Figure(4.6) représente la fonction du champ de $FTLE$ par rapport à r_0 au temps d'intégration $T = 10$ s.

4.2.2.2 Calcul du $FTLE$

Pour calculer le champ $FTLE$, on va calculer la plus grande valeur propre du tenseur de Cauchy-Green.

– La trajectoire pour un état initial $\mathbf{x}_0(x_0, y_0)$ à l'instant initial t_0 est

$$\begin{cases} x(t) &= r_0 \cos(\theta(t)) \\ y(t) &= r_0 \sin(\theta(t)) \\ z(t) &= Wt + z_0 \end{cases}$$

$$\varphi_{t_0}^t(X_0, t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(\theta(t)) \\ r_0 \sin(\theta(t)) \\ Wt + z_0 \end{pmatrix}$$

avec $\theta(t) = \omega(t - t_0) + \theta_0$, $\omega = \omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{u}_0)}{\partial r}$ et $\theta_0 = \text{Arctan}(\frac{y_0}{x_0})$.

$$\theta(t) = \frac{1}{r_0}(t - t_0) + \text{Arctan}(\frac{y_0}{x_0})$$

– Calcul du tenseur de Cauchy-Green $\mathcal{C}$. Par définition,

$$\mathcal{C}(x(t_0)) = \sum_{i,j=1}^2 \mathcal{C}_{ij}(x(t_0)) e_i \otimes e_j \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}_{ij}(x(t_0)) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \Big|_{x_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \Big|_{x_0}$$

On note que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta(t)} \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_0} \\ &= \frac{x_0}{r_0} \cos(\theta(t)) + \frac{1}{r_0} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \sin(\theta(t)) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta(t)} \frac{\partial \theta(t)}{\partial y_0} \\ &= \frac{y_0}{r_0} \cos(\theta(t)) - \frac{1}{r_0} \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right) \sin(\theta(t)) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta(t)} \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_0} \\ &= \frac{x_0}{r_0} \sin(\theta(t)) - \frac{1}{r_0} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \cos(\theta(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta(t)} \frac{\partial \theta(t)}{\partial y_0} \\
 &= \frac{y_0}{r_0} \sin(\theta(t)) + \frac{1}{r_0} \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right) \cos(\theta(t)) \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_0} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_0} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_0} = 0 \\
 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z_0} &= 1
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \\
 &= \left(\frac{x_0}{r_0} \cos(\theta(t)) + \frac{1}{r_0} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \sin(\theta(t)) \right)^2 \\
 &= \frac{x_0^2}{r_0^2} + \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right)^2 \\
 \mathcal{C}_{12} = \Delta_{21} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \\
 &= \left(\frac{x_0}{r_0} \cos(\theta(t)) + \frac{1}{r_0} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \sin(\theta(t)) \right) \\
 &\quad \left(\frac{y_0}{r_0} \cos(\theta(t)) - \frac{1}{r_0} \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right) \sin(\theta(t)) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{x_0}{r_0} \sin(\theta(t)) - \frac{1}{r_0} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \cos(\theta(t)) \right) \\
 &\quad \left(\frac{y_0}{r_0} \sin(\theta(t)) + \frac{1}{r_0} \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right) \cos(\theta(t)) \right) \\
 &= \frac{x_0 y_0}{r_0^2} - \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right) \\
 \mathcal{C}_{22} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \\
 &= \left(\frac{y_0}{r_0} \sin(\theta(t)) + \frac{1}{r_0} \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right) \cos(\theta(t)) \right)^2 \\
 &= \frac{y_0^2}{r_0^2} + \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right)^2 \\
 \mathcal{C}_{13} &= \mathcal{C}_{23} = \mathcal{C}_{31} = \mathcal{C}_{32} = 0 \\
 \mathcal{C}_{33} &= 1
 \end{aligned}$$

Alors, le tenseur de Cauchy-Green Δ est :

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{13} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{23} \\ \mathcal{C}_{31} & \mathcal{C}_{32} & \mathcal{C}_{33} \end{pmatrix}$$

On veut maintenant calculer les valeurs propres de Δ :

$$\begin{aligned}
 \det(\mathcal{C} - \lambda I) &= \frac{1}{r_0^4} (x_0^2 + \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right)^2 - \lambda) (y_0^2 + \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right)^2 - \lambda) (1 - \lambda) \\
 &\quad - \frac{1}{r_0^4} (x_0 y_0 - \left(\frac{x_0}{r_0} (t - t_0) + y_0 \right) \left(-\frac{y_0}{r_0} (t - t_0) + x_0 \right))^2 (1 - \lambda) \\
 &= (\lambda^2 - (2 + \frac{(t - t_0)^2}{r_0^2}) \lambda + 1) (1 - \lambda)
 \end{aligned}$$

$$\text{Alors, } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{(t-t_0)^2}{r_0^2} \pm \frac{(t-t_0)}{r_0} \sqrt{4 + \frac{(t-t_0)^2}{r_0^2}} \right)$$

Donc,

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{(t-t_0)^2}{r_0^2} + \frac{(t-t_0)}{r_0} \sqrt{4 + \frac{(t-t_0)^2}{r_0^2}} \right) ; \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Le champ de $FTLE$ du champ de vitesse circulaire est donné par

$$\sigma_{t_0}^{t_0+T}(x_0) = \frac{1}{2|T|} \ln \left(\frac{1}{2} \left(2 + \frac{T^2}{r_0^2} + \frac{T}{r_0} \sqrt{4 + \frac{T^2}{r_0^2}} \right) \right) ; \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

On note que,

$$\sigma_0^T(\mathbf{x}_0) = M_{\sigma_0}^T(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2|T|} \ln \left(\frac{1}{2} \left(2 + \frac{T^2}{r_0^2} + \frac{T}{r_0} \sqrt{4 + \frac{T^2}{r_0^2}} \right) \right)$$

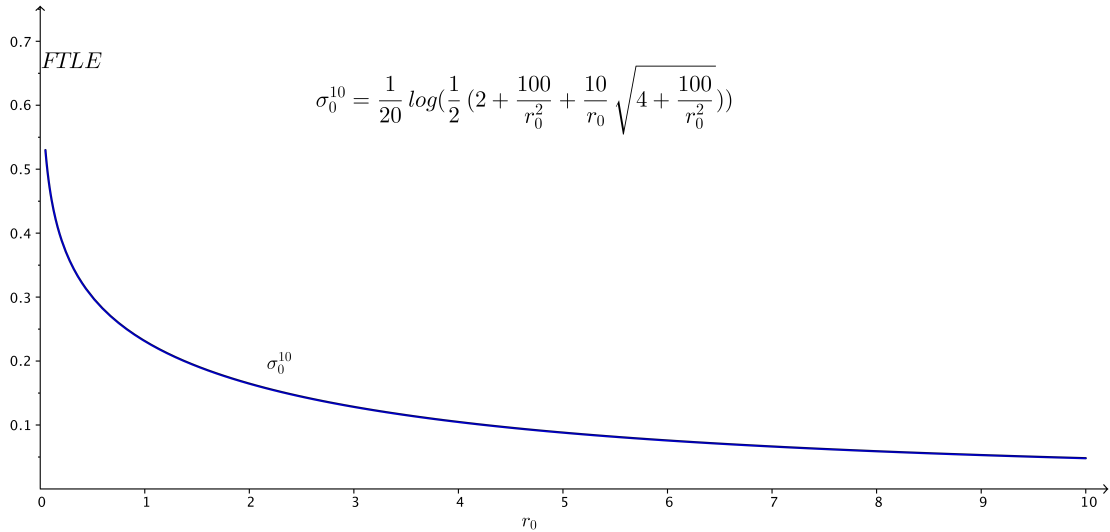


FIGURE 4.6 – La fonction du champ M - $FTLE$ par rapport à r_0 au temps d'intégration $T = 10$ s.

4.2.3 Exemples(3) :Le double-gyre instationnaire

Cet exemple est maintenant un classique dans le domaine des structures lagrangiennes cohérentes. Introduit par *Shadden et al. (2005)*, cet exemple a été depuis repris par de nombreux auteurs pour comparer des méthodes de calculs entre elles. Ici, on va calculer le champ de $FTLE$ et le champ de M - $FTLE$, et comparer, entre elles, les deux méthodes de calcul.

Il est caractérisé par deux tourbillons. Le champ de vitesse est défini comme suit par la fonction de courant, avec $\mathbf{x} = (x, y)$ représentant la position de l'observation et $u(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t)$ les composantes du champ de vitesse :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \sin(\pi f(\mathbf{x}, t)) \sin(\pi y) \quad (4.9)$$

avec, $f(\mathbf{x}, t) = \epsilon \sin(\omega t) x^2 + (1 - 2 \epsilon \sin(\omega t)) x$, donnant les composantes de vitesse :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\pi A \sin(\pi f(\mathbf{x}, t)) \cos(\pi y) \\ v(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \pi A \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\pi f(\mathbf{x}, t)) \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \epsilon \sin(\omega t) x - 2 \epsilon \sin(\omega t) + 1$.

Sur le domaine D défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in [0, 2] \times [0, 1]\}$$

On note que, cet exemple offre l'avantage d'avoir des vitesses frontières tangentes au bord du domaine D . Avec ces données, aucune trajectoires partant de $\mathbf{x}_0 \in D$ à l'instant initial t_0 ne sort de D , et ce pour tout temps t . On va présenter deux types de champ de vitesse : un champ de vitesse stationnaire ($t = 0$) et un champ de vitesse instationnaire.

4.2.3.1 Champ de vitesse stationnaire

La fonction de courant d'une double-gyre est donnée par :

$$\psi(x, y; t) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Les composantes u et v sont alors données par :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\pi A \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \pi A \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned}$$

Le champ de vitesse associé à ce système stationnaire est présenté Figure 4.7

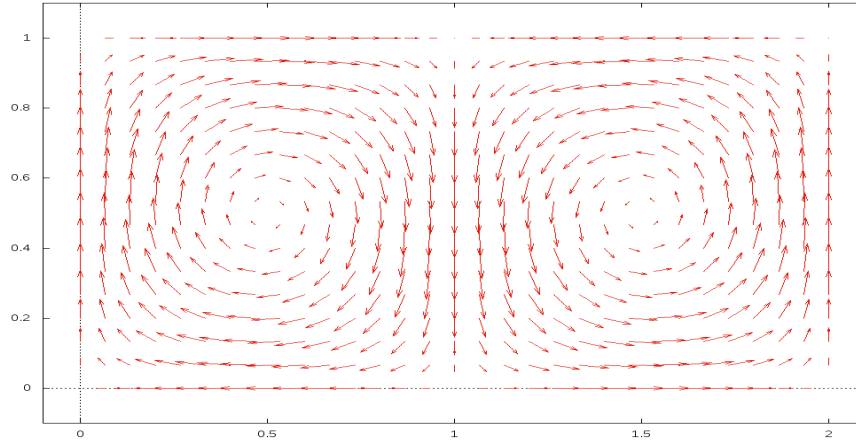


FIGURE 4.7 – Le champ de vitesses du double-gyre associé à ce système stationnaire pour $A = 1$.

● Calcul du *FTLE*

Le champ de *FTLE* à partir du tenseur de Cauchy-Green (Shadden, al(2005)) est calculé à partir de cet écoulement analytique et est présenté à la Figure(4.8). On a calculé les trajectoires des particules par une méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps $dt = 0,025$. Ces champs ont été calculés avec un temps total d'intégration $T = 1$ s (Figure(4.8(a))), $T = 2,5$ s (Figure(4.8(b))), $T = 5$ s (Figure(4.8(c))), $T = 7,5$ s (Figure(4.8(d))), $T = 10$ s (Figure(4.8(e))) et $T = 15$ s (Figure(4.8(f))). La constante $A = 0,1$, une résolution de 600×300 , l'échelle de couleur est normalisée par rapport à la valeur de *FTLE* la plus élevée. Le champ de *FTLE* obtenu isole les deux gyres qui sont séparés par une crête de valeurs élevées de *FTLE*. Au centre de chacun des gyres, les valeurs du *FTLE* sont faibles. Cela signifie que, après un temps donné T , toutes les particules à l'intérieur d'un des deux gyres seront faiblement distantes les unes des autres.

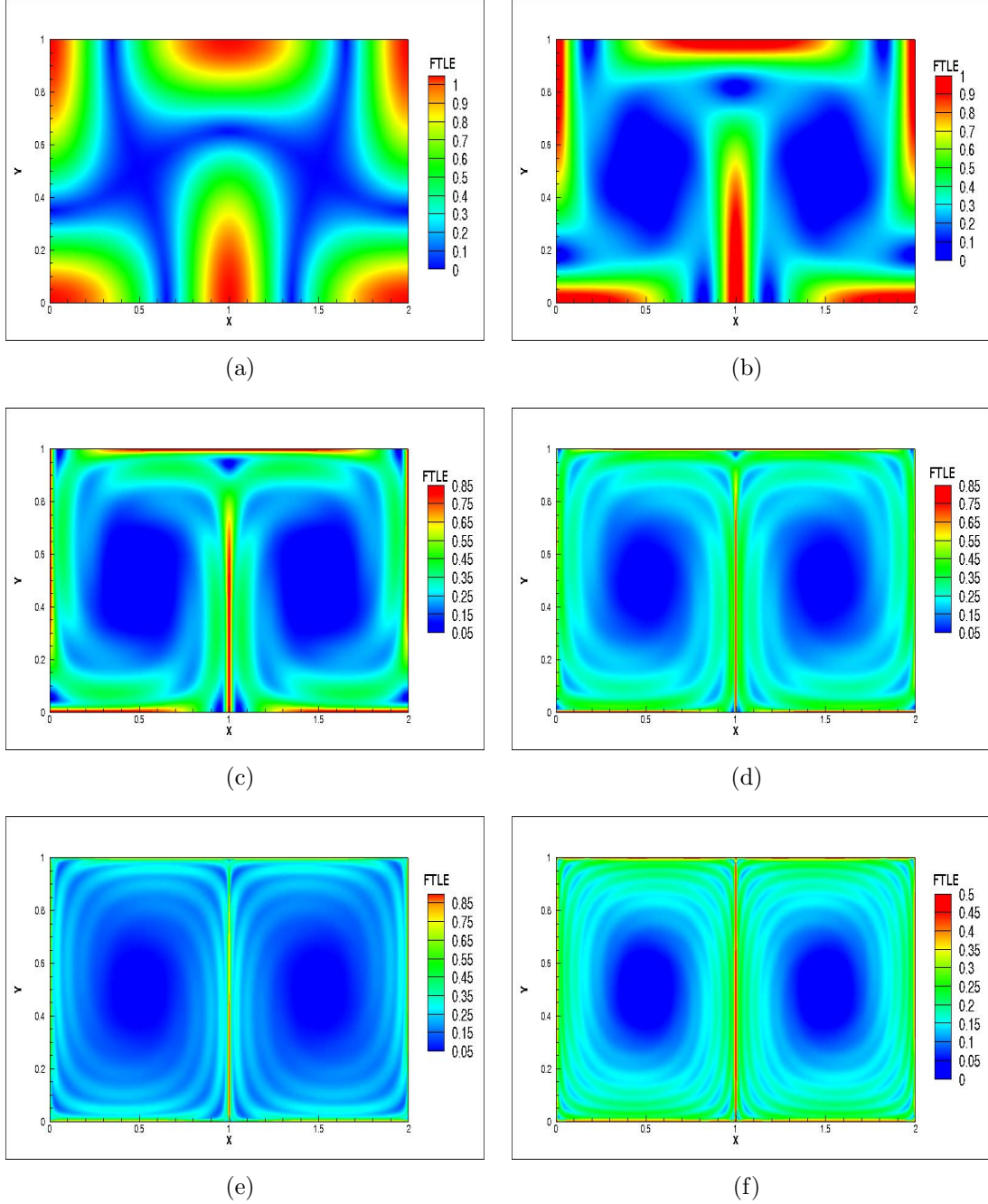


FIGURE 4.8 – Le champ de $FTLE$ de la champ de vitesse du double-gyre stationnaire au temps d'intégration (a) : $T = 1$ s, (b) : $T = 2.5$ s, (c) : $T = 5$ s, (d) : $T = 7.5$ s, (e) : $T = 10$ s, (f) : $T = 15$ s.

En revanche, l'ensemble des particules se trouvant initialement de part et d'autre d'une frontière (crête) verront la distance initiale avec les particules voisines dans l'autre gyre augmenter considérablement. Pour cela, on a calculé les trajectoires pour quelques paires de particules voisines pour un temps d'intégration $T = 1s$ (où $\|HG\| = \|AB\| = \|CD\| = \|EF\| = \|MN\| = \|OP\| = 0.05$). On note que, le taux de séparation entre les paires de particules varie de paire pour durer, où si le taux de séparation augmente, la valeur du *FTLE* augmente. Ceci explique les couleurs figurant à la Figure(4.9).

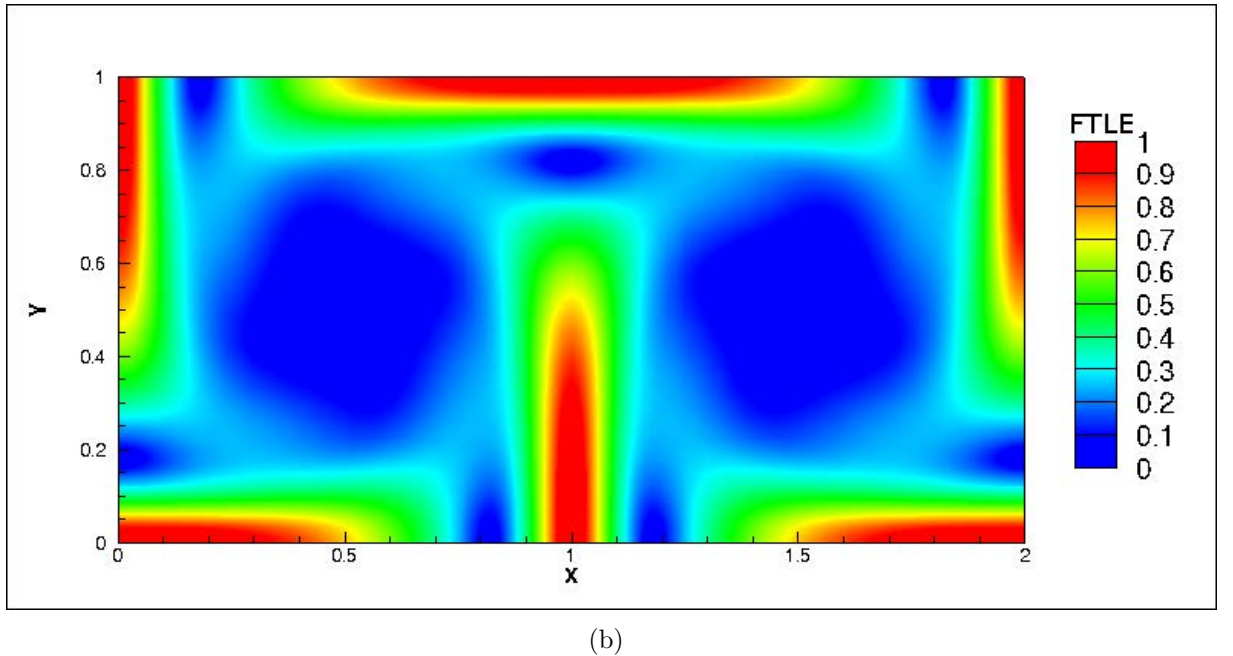
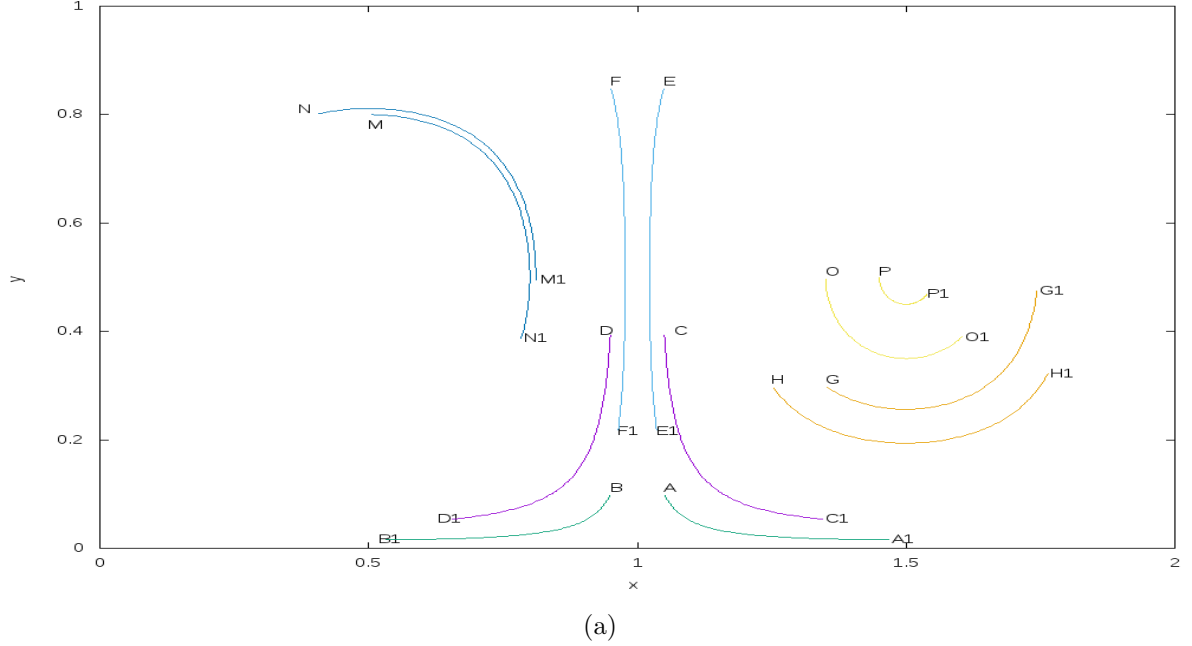


FIGURE 4.9 – (a) Les trajectoires pour quelques paires de particules voisines pour un temps d'intégration $T = 1s$, (b) Le champ de *FTLE* à partir le tenseur de Cauchy-Green au temps d'intégration $T = 2.5s$.

• Calcul du *M-FTLE*

Le champ de *M-FTLE* (*FTLE* avec la méthode des moments d'ordre 2) est calculé à partir de cet écoulement analytique et est présenté à la Figure(4.10). On a

calculé les trajectoires des particules et les moments d'ordre 2 par une méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps $dt = 0.025$ où la matrice initiale des moments d'ordre 2 est la matrice identité $\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces champs ont été calculés avec un temps total d'intégration $T = 1$ s (Figure(4.10(a))), $T = 2.5$ s (Figure(4.10(b))), $T = 5$ s (Figure(4.10(c))), $T = 7.5$ s (Figure(4.10(d))), $T = 10$ s (Figure(4.10(e))) et $T = 15$ s (Figure(4.10(f))), une résolution de 600×300 , l'échelle de couleur est normalisée par la valeur de $M\text{-}FTLE$ la plus élevée.

À partir des Figures(4.8, 4.10), on note que le champ de $FTLE$ et le champ de $M\text{-}FTLE$ donnent la même forme de visualisation mais il y a des différences entre ces valeurs. C'est évident sur la figure(4.11) où cette figure présente les champs de $FTLE$ et de $M\text{-}FTLE$ au temps d'intégration $T = 1$ s, $T = 5$ s et $T = 10$ s.

On se pose alors la question sur la raison de cette différence entre la valeur de $FTLE$ et $M\text{-}FTLE$. Pour cela, on va étudier le transport d'un disque de rayon $r_0 = 0.05$ situé en (x_0, y_0) ((0.4, 0.2), (1.1, 0.1) et (1, 0.6)) dans cet écoulement. On choisit une répartition initiale dans un disque de rayon r . La matrice initiale de $\mathbf{P}$ est égale $\frac{r_0^2}{4}$ la matrice identité. On a calculé l'évolution de la frontière du disque exact et l'ellipse à partir de la matrice des moments d'ordre 2 à la figure(4.12). Au regard de la figure(4.12), on peut noter que pendant le transport, il y a déformation (torsion) du disque et si le disque s'approche du centre d'un des gyres, la déformation diminue.

Contrairement aux exemples précédents (les champs de vitesse linéaires), cet exemple présente un système dynamique non-linéaire. On trouve que le champ de $M\text{-}FTLE$ donne une bonne visualisation des données comparé au champ de $FTLE$ mais n'a pas les même valeurs. Cependant, quand le rayon du disque initial est plus petit, les valeurs sont proches.

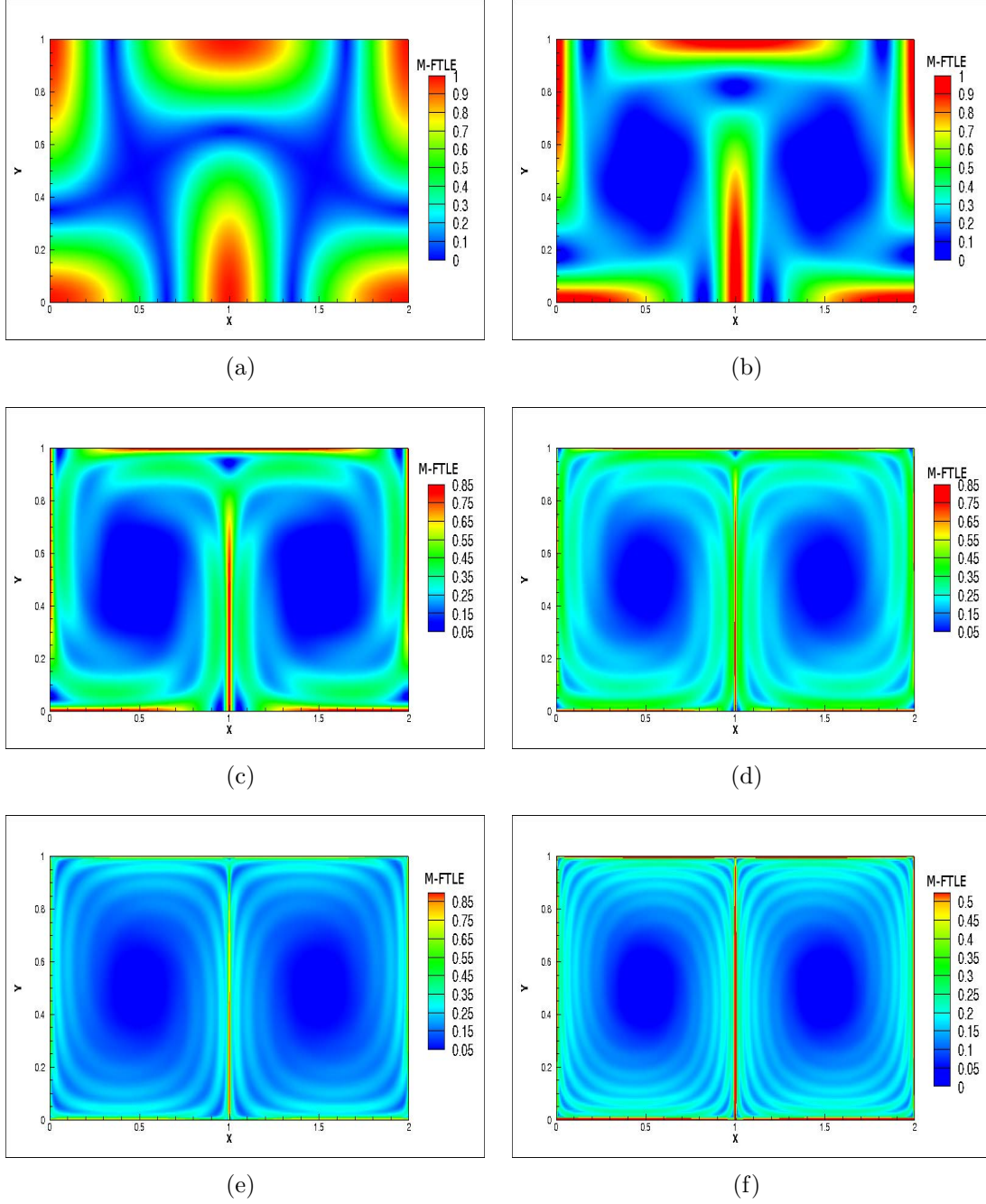


FIGURE 4.10 – Le champ $M-FTLE$ du champ de vitesse de la double-gyre stationnaire au temps d'intégration (a) : $T = 1$ s, (b) : $T = 2.5$ s, (c) : $T = 5$ s, (d) : $T = 7.5$ s, (e) : $T = 10$ s, (f) : $T = 15$ s.

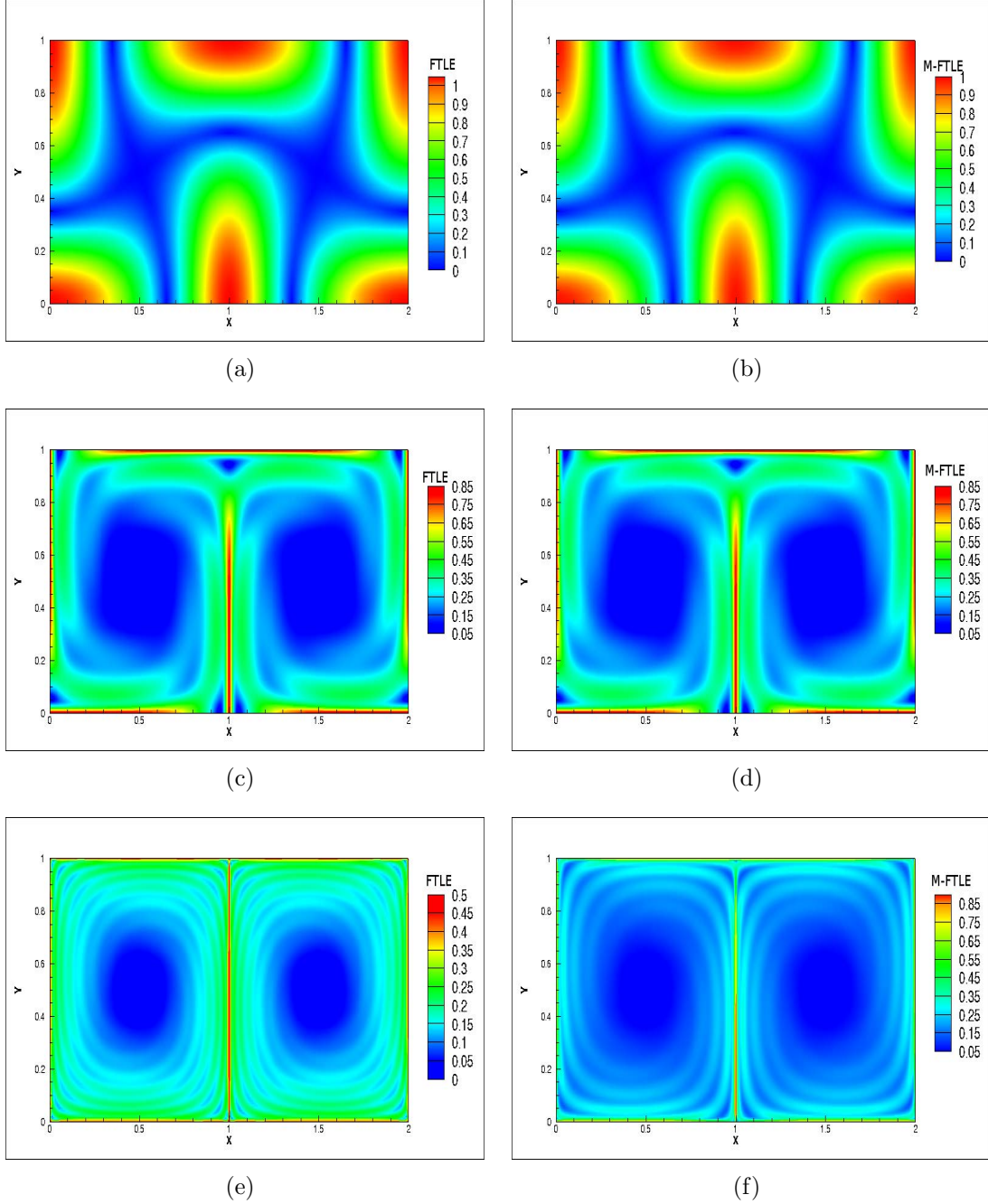


FIGURE 4.11 – Comparaison des champs M - $FTLE$ et $FTLE$ du champ de vitesse de la double-gyre stationnaire à certains temps d'intégration. Le champ du $FTLE$ en (a) : $T = 1$ s, (c) : $T = 5$ s, (e) : $T = 5$ s le champ du M - $FTLE$ en (b) : $T = 1$ s, (d) : $T = 5$ s, (f) : $T = 10$ s.

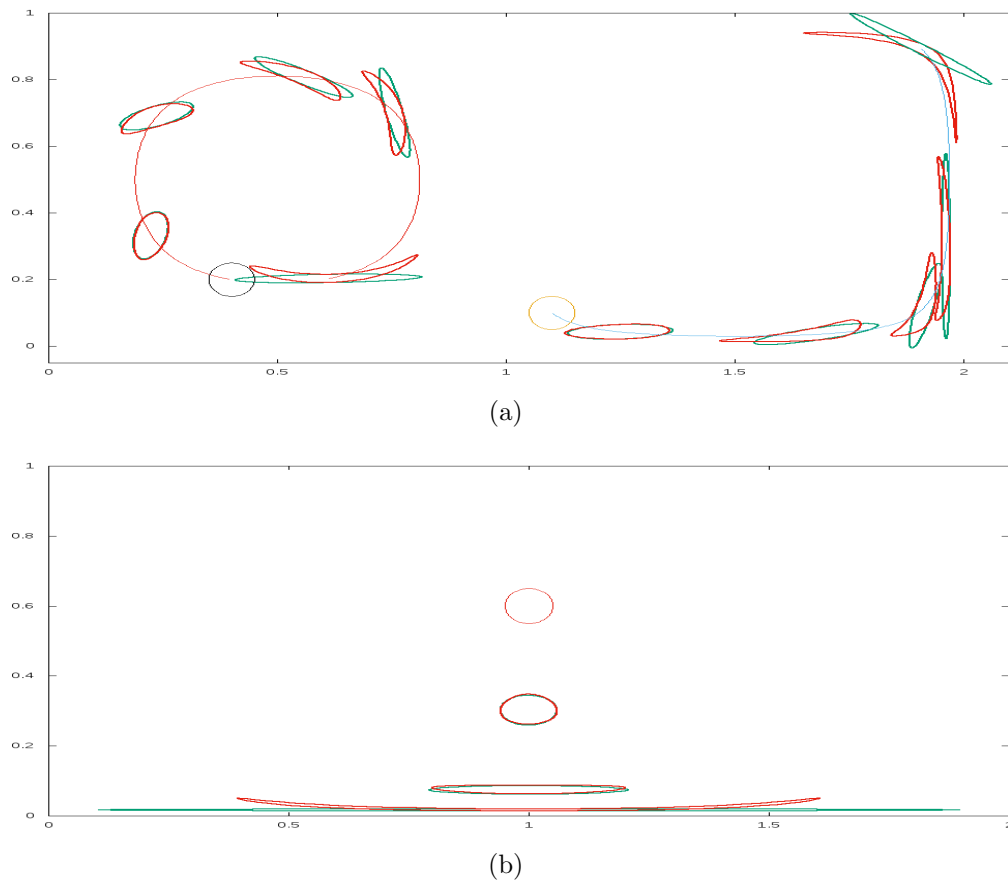


FIGURE 4.12 – Évolution du disque de centre en (a) $(0.4, 0.2)$ et $(1.1, 0.1)$, (b) $(1, 0.6)$ à l'écoulement du double-gyre stationnaire.

4.2.3.2 Champ de vitesse instationnaire

Dans ce cas, ce système est très similaire à celui du double-gyre en cas stationnaire, à la différence qu'ici le système est légèrement perturbé par l'ajout d'une fonction dépendante du temps. Le champ de vitesse du double-gyre est connu a priori, et défini par l'équation(4.10) avec les paramètres $A = 0.1$, $\omega = 0.2 \pi$ et $\epsilon = 0.25$ Figure(4.13).

Afin de pouvoir comparer notre méthode de calcul du champ de *FTLE* avec des travaux

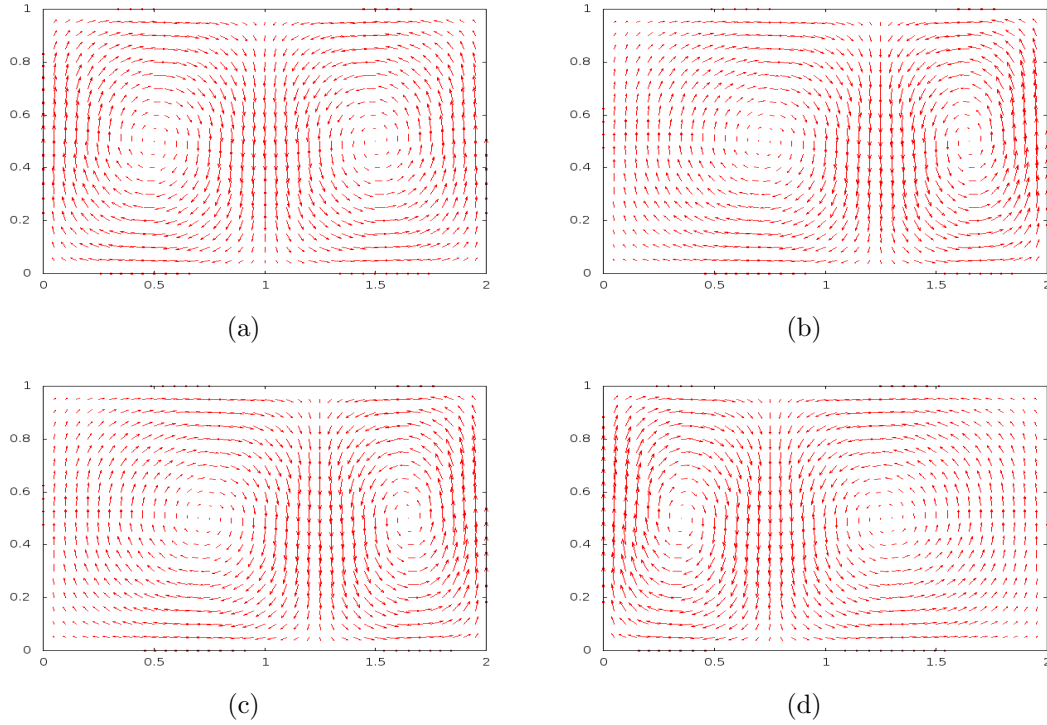


FIGURE 4.13 – Le champ de vitesse du double-gyre, diamètre variable pour $\epsilon = 0.25$

issus de la littérature, on a calculé le champ *M-FTLE* sur un maillage cartésien régulier avec 500000 nœuds (1000 par 500) avec la méthode de Shadden et al.(2005).

La figure(4.14) présente quelques exemples de champs de *FTLE* et de champs de *M-FTLE*. Ces champs ont été calculés avec un temps total d'intégration $T = 1$ s, $T = 2.5$ s, $T = 5$ s, $T = 10$ s, $T = 15$ s (Figures(4.14(a),4.14(c),4.14(e),4.14(g),4.14(i))) pour les champs de *FTLE* calculés à partir du tenseur de Cauchy-Green et Figures(4.14(b), 4.14(d), 4.14(f), 4.14(h), 4.14(j)) pour les *FTLE*. Les champs de *M-FTLE* ont été calculés par pas de temps $dt = 0.025$. L'échelle de couleur est normalisée par rapport la valeur de *FTLE* et *M-FTLE* la plus élevée. Les structures lagrangiennes cohérentes *LCS* sont révélées par les plus grandes valeurs du *FTLE*. Il est évident d'après la figure(4.14) que notre méthode donne la même visualisation de champ de *FTLE* classique et le champ *FTLE* a la même structure de crête lorsqu'il est calculé par notre méthode. La figure(4.15) présente quelques exemples de champ de *M-FTLE* obtenus pour différents valeurs r_0 du disque initial au temps d'intégration $T = 10$ s. On note que si le rayon est plus petit figure(4.17(a) et 4.17(b)) les résultats sont proches des résultats de la figure(4.14(g)).

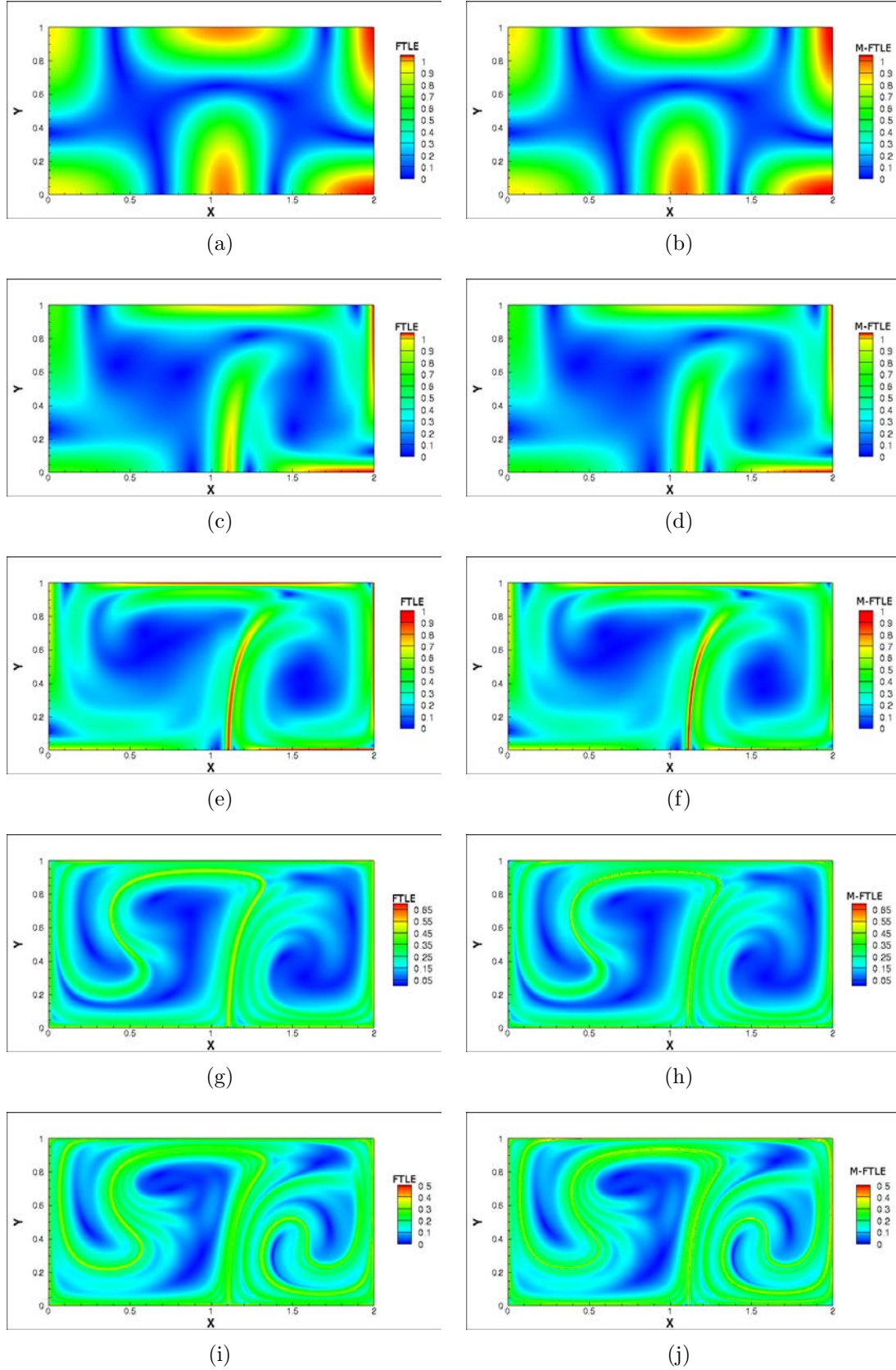


FIGURE 4.14 – Comparaison des champs $M-FTLE$ et $FTLE$ du champ de vitesse du double-gyre instationnaire à certains temps d'intégration. Le champ de $FTLE$ en (a) : $T = 1$ s, (c) $T = 2.5$ s (e) $T = 5$ s, (g) $T = 10$ s et (i) $T = 15$ s. Le champ de $FTLE$ en (b) $T = 1$ s, (d) $T = 2.5$ s (f) $T = 5$ s, (h) $T = 10$ s et (j) $T = 15$ s.

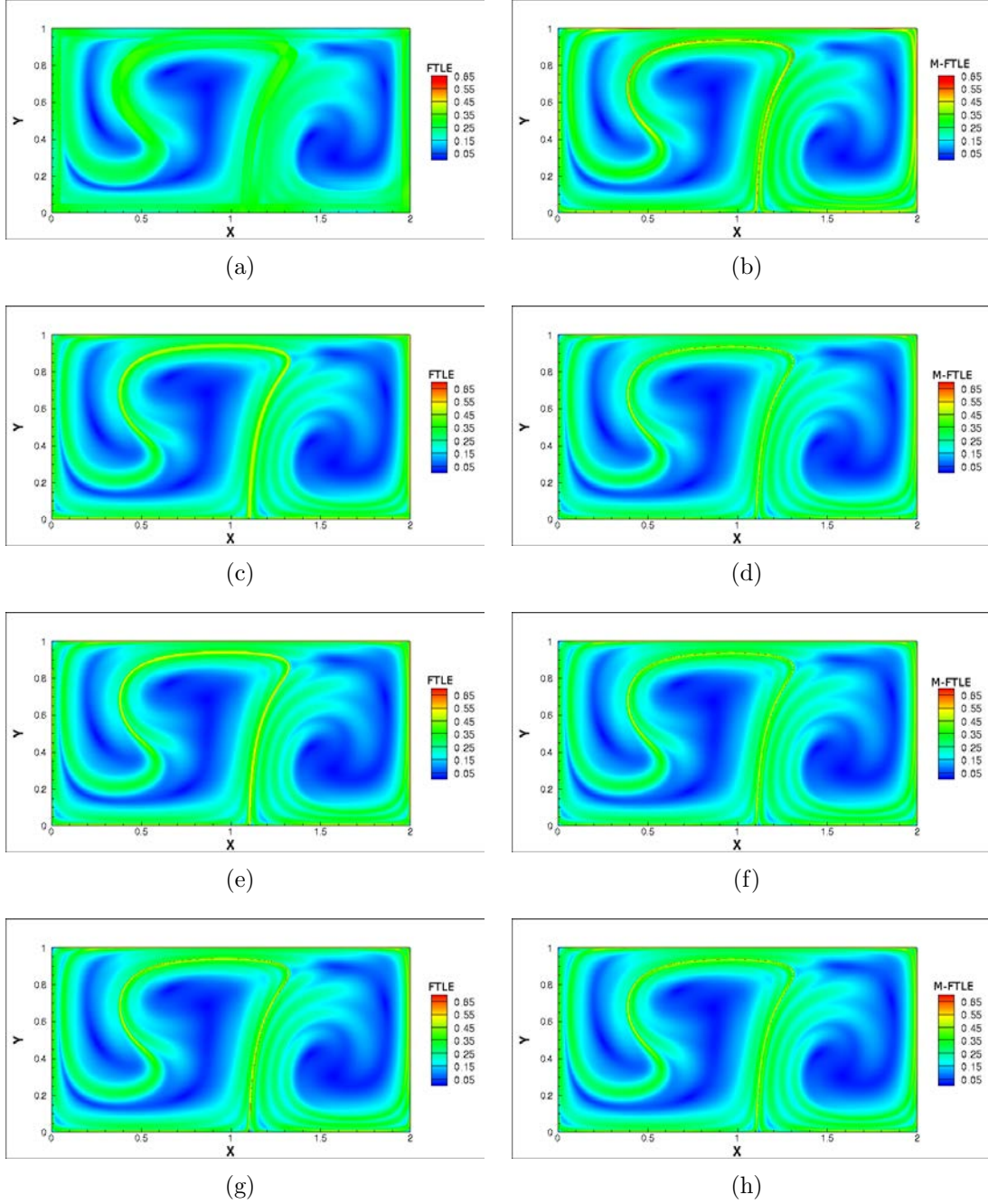


FIGURE 4.15 – Les champs de $M-FTLE$ et de $FTLE$ pour le double-gyre instationnaire pour $\epsilon = 0.25$, au temps d'intégration $T = 10$ s pour un rayon du disque initial en (a) et (b) $r_0 = 0.05$, (c) et (d) $r_0 = 0.01$, (e) et (f) $r_0 = 0.0005$, (g) et (h) $r_0 = 0.001$.

Pour étudier le lien entre les valeurs de *M-FTLE* et de *FTLE* obtenu à partir du tenseur de Cauchy-Green, on prend deux points $\mathbf{x}_0(0.6, 0.7)$ en (a) et $\mathbf{x}_0(1.1, 0.2)$, on calcule les valeurs de *M-FTLE* et *FTLE* au temps d'intégration $T = 10$ s. Pour calculer les valeurs de *M-FTLE*, on prend un domaine de forme circulaire contenant le traceur de centre x_0 et de rayon r_0 , donc la matrice initiale des moments d'ordre 2 est donnée par : $\mathbf{P}_0 = \frac{r_0^2}{4} \mathbf{I}$, où $\mathbf{I}$ la matrice identité. Pour calculer les valeurs de *FTLE* obtenus à partir du tenseur de Cauchy-Green, on prend quatre points adjacents de x_0 , numérotés 1, 2, 3, 4 comme indiqué dans la figure (4.16). le cercle et les points sont transportés par l'écoulement. La figure (4.17) présente les fonctions de *M-FTLE* et *FTLE* de r_0 , On trouve que la valeur *M-FTLE* d'un point est constante par rapport au rayon du domaine contenant le traceur (i.e. indépendamment du rayon du domaine contenant le traceur), et les valeurs de *FTLE* converge vers les valeurs de *M-FTLE* si le rayon r_0 est plus petit. Donc, on peut dire que la méthode de *M-FTLE* est une méthode précise robuste pour calculer l'exposant de Lyapunov à temps fini pour les champs de vitesse non-linéaires.

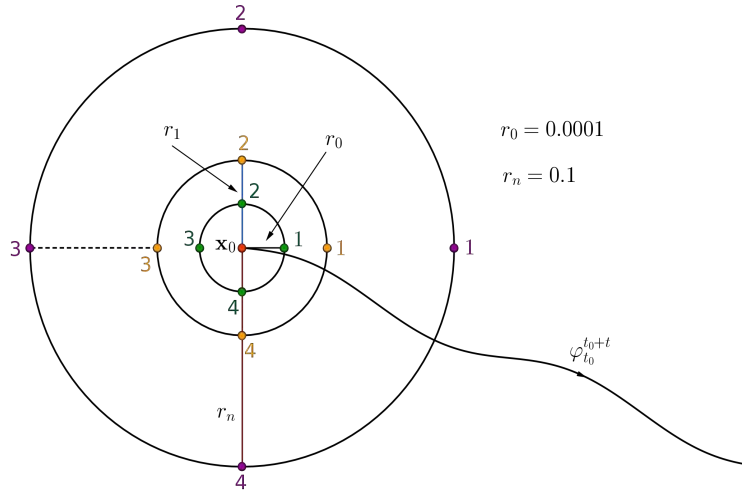


FIGURE 4.16 – Illustration de choisir le cercle et des points initiaux pour calculer les valeurs de *M-FTLE* et de *FTLE*.

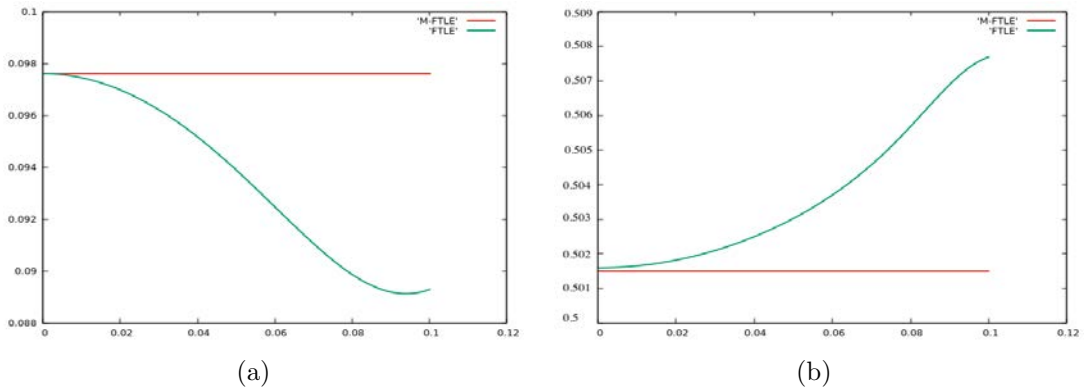


FIGURE 4.17 – (a) Les valeurs de *M-FTLE* et de *FTLE* pour deux points $\mathbf{x}_0(0.6, 0.7)$ en (a) et $\mathbf{x}_0(1.1, 0.2)$ en (b) au temps d'intégration $T = 10$ s. On note que la valeur de *M-FTLE* d'un point est constante par rapport le rayon du domaine contenant le traceur (i.e. indépendamment du rayon du domaine contenant de traceur), et les valeurs de *FTLE* converge vers les valeurs de *M-FTLE* quand le rayon diminue.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour calculer le champ de $FTLE$ à partir des moments d'ordre 2, est présentée et s'appelle $M-FTLE$. Elle présente une méthodologie assez générale pour être utilisée dans les systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires (linéarisation), stationnaires et instationnaires, (où elle offre un avantage de calcul significatif en éliminant les intégrations de longues périodes). On a prouvé que la définition du champ scalaire de $M-FTLE$ est équivalente à la définition du champ scalaire de $FTLE$ classique, théorème(4.1). On a présenté trois exemples pour valider notre méthode : 2 exemples théoriques avec un champ de vitesse hyperbolique et un champ de vitesse elliptique et un exemple numérique avec un champ de vitesse du double-gyre. On a comparé les résultats avec les résultats de $FTLE$ calculés à partir du tenseur de Cauchy-Green. On trouve que le champ de $M-FTLE$ donne la même topologie que le champ de $FTLE$ mais pas les mêmes valeurs. Donc, on peut dire, la méthode de $M-FTLE$ est une méthode précise robuste pour calculer l'exposant de Lyapunov à temps fini origine pour les champ de vitesse non-linéaire. Nous vérifions dans ce cas notre calcul ($M-FTLE$) est plus stable que le calcul par la méthode du tenseur de Cauchy-Green.

Application à des données analytiques et expérimentales

Dans ce chapitre, on va présenter deux applications de notre méthode de calcul de *M-FTLE* : la première à partir de données analytiques du champ de vitesse de soliton et la seconde, expérimentale, issue de mesures par *PIV* résolues en temps d'un mascaret, obtenues dans notre laboratoire à partir de paramètres contrôlés pour mieux comprendre la génération et la propagation des mascarets dans les estuaires. La *PIV* est une technique basée sur un traitement d'images de particules dispersées dans un écoulement ; elle est la seule fournissant des champs de vecteurs instantanés, ce qui la rend particulièrement adaptée à l'étude des écoulements instationnaires. Bien que la procédure pour le calcul des *M-FTLE* à partir de champs expérimentaux soit similaire à celle utilisée dans les autres exemples de champs de vitesse analytiques, les données mesurées présentent des caractéristiques difficiles à reproduire à l'aide d'exemples analytiques. Par exemple, les solutions analytiques ne peuvent pas représenter des écoulements instationnaires complexes, tels que la dynamique tourbillonnaire et la turbulence, où les fréquences temporelles et spatiales des fluctuations de vitesse varient sur plusieurs échelles.

Par ailleurs, dans des situations concrètes, le champ de vitesse est limité au domaine de calcul D et les trajectoires des particules s'arrêtent brusquement lorsqu'elles atteignent les frontières, pouvant créer des artefacts.

5.1 Soliton

Dans cette section, on présente une application du calcul de champ de *M-FTLE* pour un écoulement analytique simulant un Soliton. L'objectif de cet exemple est d'essayer d'expliquer certains éléments du mascaret.

Un **soliton** est une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non-linéaire et dispersif. Russell [49] en (1844) est le premier à avoir observé une onde solitaire. Il observa une vague qui se propageait dans un canal en conservant sa forme et sa vitesse. Depuis, le phénomène de soliton est largement documenté, et son importance est remarquable, dans de nombreux domaines de la physique. Plusieurs solutions analytiques peuvent être trouvées dans la littérature (Boussinesq [43], McCowan [47], Grimshaw [45], Fenton [44], Lee et al.[46]). L'équilibre entre dispersion et non linéarité permet à cette vague d'eau peu profonde de conserver sa forme. L'équation de Korteweg-De Vries (KDV), initialement obtenue par Korteweg de Vries (KDV) (1895) (voir 5.1), s'écrit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \eta(x, t) \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

d : hauteur moyenne du fluide,

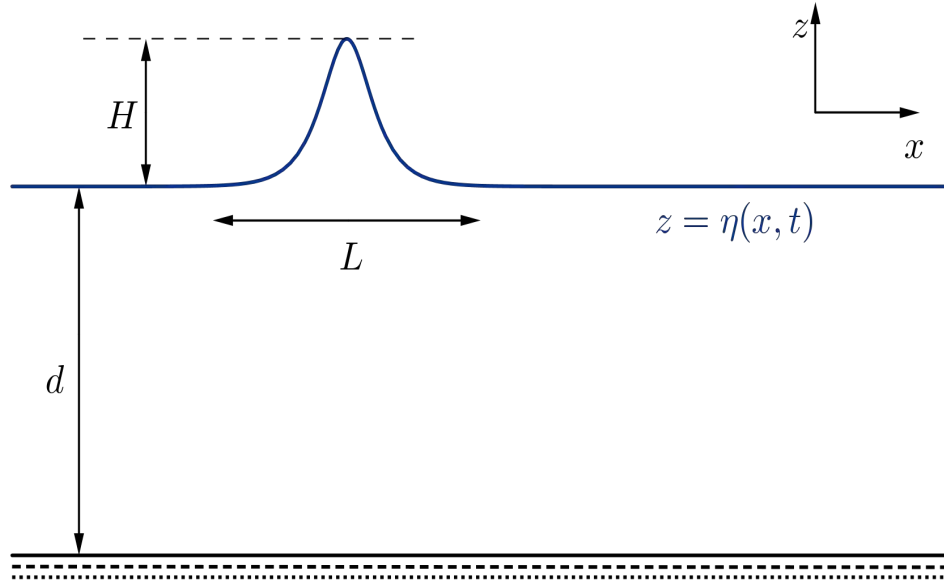


FIGURE 5.1 – Soliton de l'équation KDV.

η : équation de la surface,

H : amplitude caractéristique de l'onde hydrodynamique,

L : Longueur d'onde caractéristique dans la direction x .

On considère un fluide parfait et incompressible et un écoulement irrotationnel décrit par l'équation d'Euler, l'équation de conservation de la masse, la condition cinématique à la surface eau/air, la condition à la limite au fond, la condition à la limite physique à la surface (on néglige l'effet de la tension superficielle car le rayon de courbure de la surface est très grand), les conditions initiales, la condition sur la hauteur moyenne H de la couche de liquide ondes en eau peu profonde, et la condition de non divergence de la solution obtenue.

On se place dans le cas d'un mouvement bidimensionnel : toutes les variables du système sont indépendantes de la coordonnée z , et la vitesse n'a pas de composante selon y . Pas de condition aux limites latérales si on choisit une condition initiale qui correspond bien au problème bidimensionnel.

5.1.1 Solution de Boussinesq (solution du 1^{er} ordre)

La forme de la vague initiale, la forme à l'instant t , la vitesse de propagation et le champ de vitesse (u, v les composantes de la vitesse) peuvent être calculés à partir de la théorie du premier ordre d'onde solitaire (Boussinesq, 1871 [43]). Une solution connue de l'équation de KDV est une onde solitaire qui s'écrit :

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}(x - x_0 - ct)\right) \quad (5.2)$$

où x_0 est la position initiale de la crête de la vague. La vitesse de propagation est définie par :

$$c = \sqrt{g(d + H)}$$

Dans la suite, il sera considéré que η est une fonction d'une variable x' ,

$$\eta = \eta(x'(x, t)) \quad \text{où} \quad x'(x, t) = x - x_0 - ct$$

Les composantes de la vitesse sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{u}{\sqrt{gd}} &= \epsilon[\eta_* - \frac{1}{4}\epsilon\eta_*^2 + \frac{d^2}{3c^2}(1 - \frac{3}{2}\frac{z^2}{d^2})\frac{\partial^2\eta_*}{\partial t^2}] \\ \frac{v}{\sqrt{gd}} &= z\epsilon[(1 - \frac{1}{2}\epsilon\eta_*)\frac{\partial\eta_*}{\partial t} + \frac{d^2}{3c^2}(1 - \frac{z^2}{2d^2})\frac{\partial^3\eta_*}{\partial t^3}]\end{aligned}\quad (5.3)$$

Avec, $\epsilon = \frac{H}{d}$, $\eta_* = \frac{\eta}{H}$, $x'_* = \frac{x'}{d}$, $\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{d}}$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\eta_*}{\partial t} &= 2\frac{c}{d}\alpha \frac{\sinh(\alpha x'_*)}{\cosh^3(\alpha x'_*)} \\ \frac{\partial^2\eta_*}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{d^2}\alpha^2 \frac{2\cosh^2(\alpha x'_*) - 3}{\cosh^4(\alpha x'_*)} \\ \frac{\partial^3\eta_*}{\partial t^3} &= 24\frac{c^3}{d^3}\alpha^3 \frac{\sinh(\alpha x'_*) [\cosh^2(\alpha x'_*) - 3]}{\cosh^5(\alpha x'_*)}\end{aligned}$$

5.1.2 Cas stationnaire

Dans ce cas, on va étudier le soliton pour $t = 0$. Donc l'écoulement défini par le champ de vitesse (voir la figure 5.2) :

$$\begin{aligned}\frac{u}{\sqrt{gd}} &= \epsilon[\eta_* - \frac{1}{4}\epsilon\eta_*^2] \\ \frac{v}{\sqrt{gd}} &= 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

avec, $\epsilon = \frac{H}{d}$, $\eta_* = \frac{\eta}{H} = \text{sech}\left(\sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{d^3}}(x - x_0)\right)$, $d = 0.302$, $H = 0.03322$ et $x_0 = 5$ sur le domaine D défini par :

$$D = (x, y) \in \mathbb{R}^2; (0 \leq x \leq 10) \text{ et } (0 \leq y \leq 0.4)$$

La figure(5.3) montre une image obtenue avec l'algorithme *LIC* à partir d'un bruit blanc pour différents instants au passage du front où le temps d'intégration $T = 80 \, dt$, sur un maillage cartésien régulier contenant 360000 pixels(600×600).

5.1.2.1 Choix des conditions initiales

À l'instant $t_0 = 0$, on prend un traceur de forme circulaire ayant pour centre $\mathbf{x}_0(0.2, 0.2)$ et pour rayon r_0 et la matrice des moments d'ordre 2 est égale à βI . Le scalaire r_0 est inférieur à $H = 0,03322$ donc, $\beta < \frac{H^2}{4} = 0,000276 = 2.8 \times 10^{-4}$. Dans ce travail, on choisit $r_0 = 0,02$ alors, $\beta = 10^{-4}$.

5.1.2.2 La trajectoire

La trajectoire $\mathbf{x}(t)$ du centre du traceur, obtenue en résolvant les équations 5.4 avec une condition initiale $\mathbf{x}_0(0.2, 0.2)$ est représentée sur la Figure(5.4). On a calculé la trajectoire de ce point par une méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4.

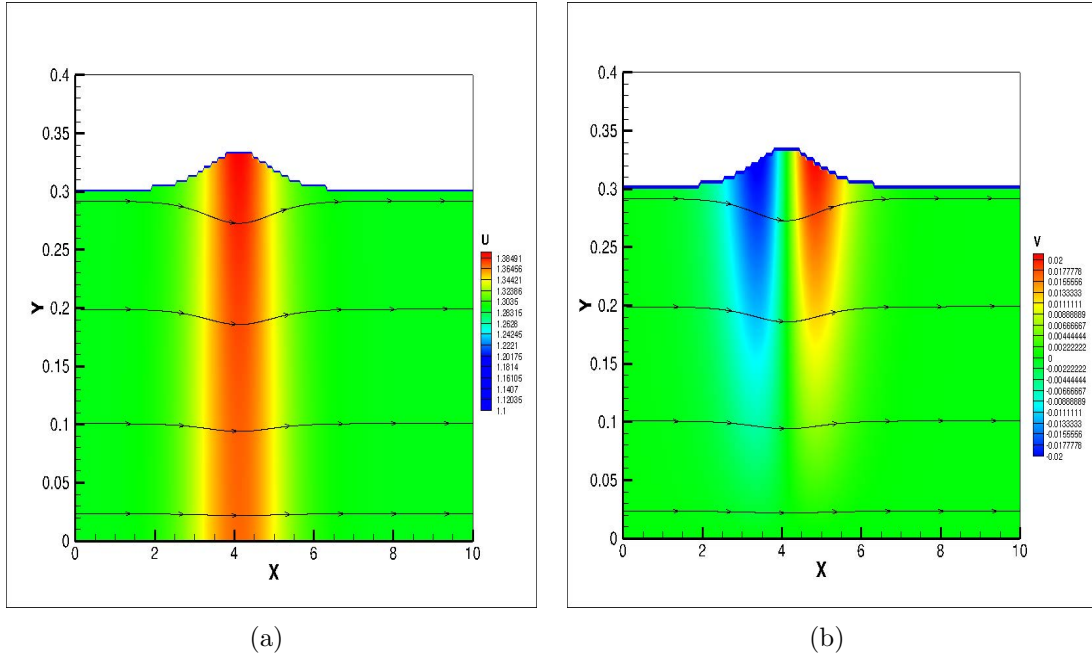


FIGURE 5.2 – Les deux compoantes (u, v) du champ de vitesse de l'écoulement stationnaire d'un Soliton les lignes de courant.

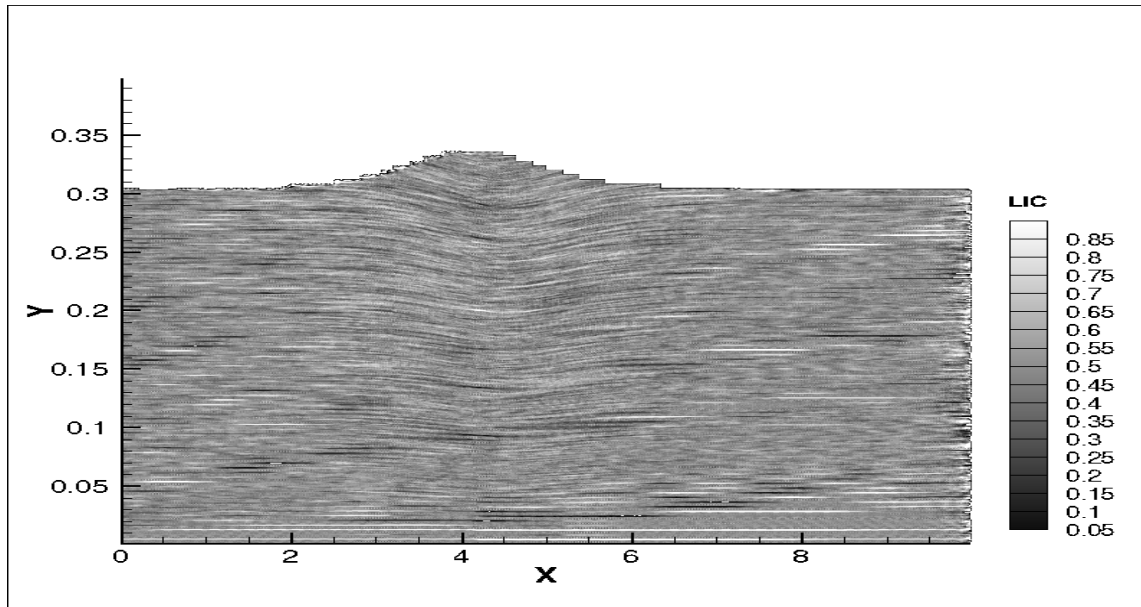


FIGURE 5.3 – Visualisation du champ de vitesse de l'écoulement du Soliton par génération de texture en utilisant l'algorithme *LIC* à partir d'un bruit blanc. Pour un temps d'intégration $T = 0.8$ s, sur un maillage cartésien régulier contenant 360000 pixels(600×600).

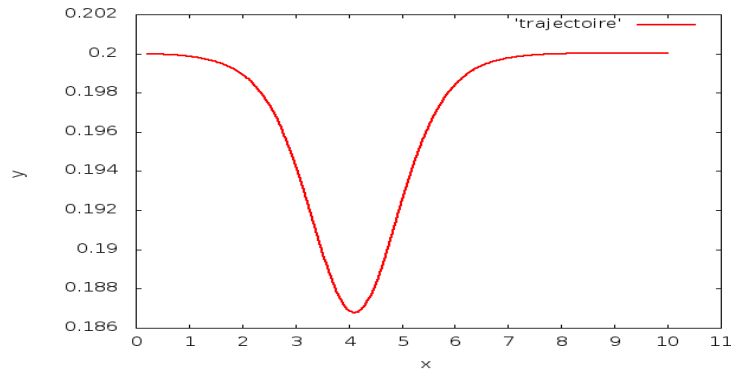


FIGURE 5.4 – La trajectoire du centre du traceur avec une condition initiale $\mathbf{x}_0(0.2, 0.2)$.

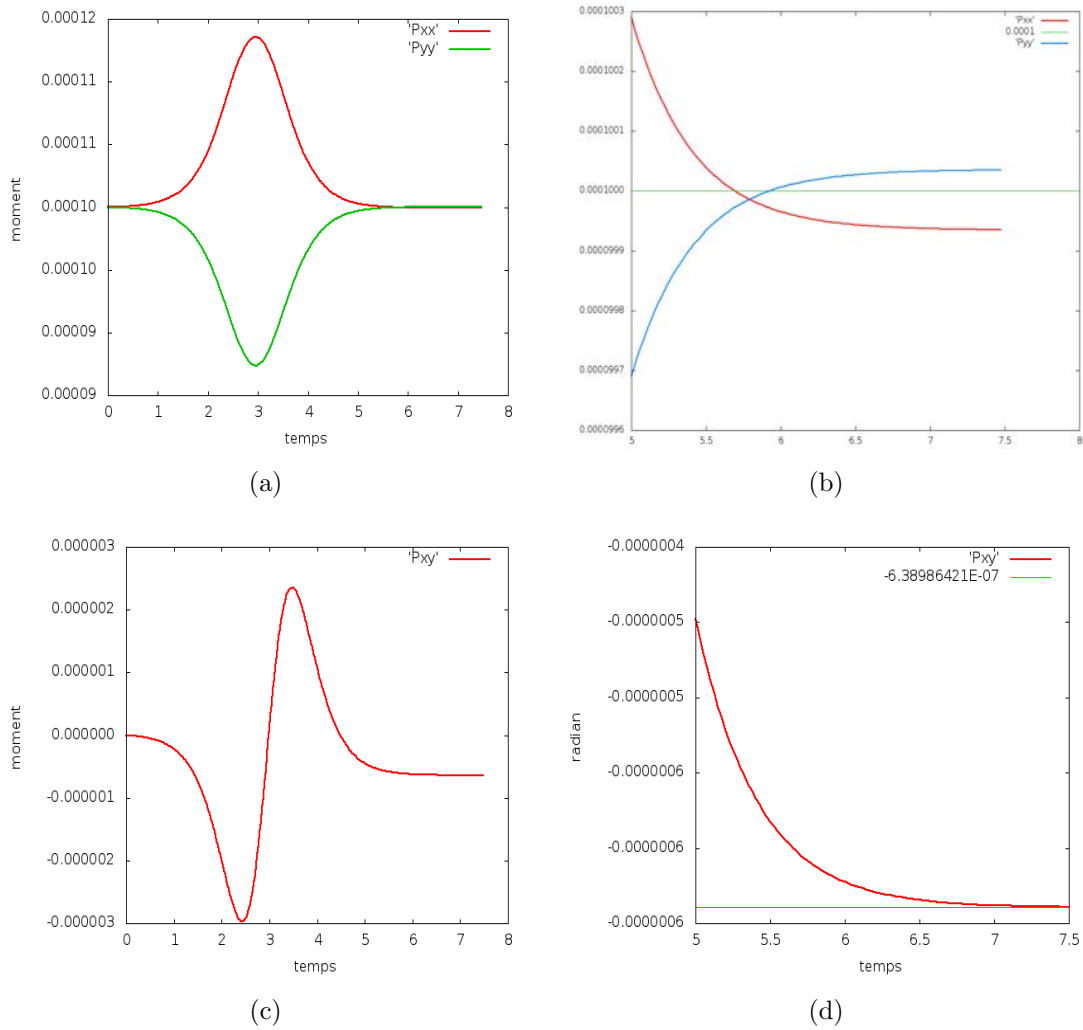


FIGURE 5.5 – L'évolution des moments d'ordre 2, les moments P_{x^2}, P_{y^2} sont représentés en (a). La figure (b) est un zoom pour abscisses $[5 : 7.5]$ d'intérêt de la figure (a). Le moment P_{xy} est représenté en (c), la figure (d) est un zoom de la figure (c), d'abscisses $[5 : 7.5]$.

5.1.2.3 Évolution de la matrice des moments d'ordre 2

On a calculé les moments d'ordre 2 par une méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps $dt = 0.025$. La Figure (5.5) représente l'évolution des coefficients de la matrice des moments $\mathbf{P}(t)$ d'ordre 2.

- Sur les moments P_{x^2} , P_{y^2} (Figure 5.5(a)), on observe deux phases. Dans un premier temps, les moments P_{y^2} diminuent tandis que les moments P_{x^2} augmentent, ce qui correspond à une contraction selon y et une elongation selon x . L'effet inverse se produit ensuite. Les deux moments finissent par prendre deux valeurs qu'ils conservent dans la suite, où la valeur de P_{x^2} est inférieure à la valeur de $P_{x^2}(0)$ et la valeur de P_{y^2} est supérieur à valeur de $P_{y^2}(0)$ (voir figure 5.5(b)).
- Quant à l'évolution du moment croisé xy (P_{xy}) (Figure 5.5(c)), elle comporte trois phases : une première phase de diminution qui représente une rotation dans le sens horaire du traceur de particules ; une seconde phase d'augmentation avec un dépassement de la valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique ; et enfin une nouvelle phase de diminution pour atteindre une valeur proche de environ zero qu'il conserve dans la suite (où l'écoulement est uniforme) (voir figure 5.5(d)).

On représente sur la Figure (5.6) l'évolution du traceur par la méthode des moments et par la méthode de transport particulaire (chapitre 3). On observe que la méthode des moments d'ordre 2 permet une bonne représentation du comportement du traceur des particules transportées dans un écoulement.

Avant qu'il atteigne la vague, le traceur, transporté par l'écoulement, a une forme circulaire. Quand il passe sous la vague, le traceur commence à s'étirer, prenant une forme elliptique, la figure(5.6(e)) représente l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe de cette ellipse ; on constate que le rapport entre le grand axe et le petit axe augmente dans une première phase puis commence à diminuer. À la sortie de la vague, il a une forme elliptique, qu'il conservera dans la suite de l'écoulement. La Figure (5.6(f)) représente l'évolution temporelle de l'angle θ entre le grand axe et l'axe Ox .

5.1.2.4 Le champ M -FTLE

Pour calculer le champ M -FTLE, on prend un maillage cartésien régulier sur D avec 40 000 nœuds (200 fois 200) et on calcule la valeur de M -FTLE pour chaque nœud du maillage. La Figure (5.7) présente deux exemples de champs M -FTLE obtenus pour deux temps d'intégration $T = 0.5s$ et $T = 1s$. On observe que dans le champ de M -FTLE donne des valeurs maximales le long de la surface libre. On observe aussi que les valeurs de M -FTLE sont constantes sur le côté de la vague et augmentent quand les points s'approchent de la vague. Dans la zone de la vague $x \in [2.2, 5.5]$, les valeurs de M -FTLE augmentent avec y . Donc les valeurs de M -FTLE atteignent leur maximum lors du passage de la vague, puis elles commencent à diminuer. On remarque qu'il n'y a pas de LCS.

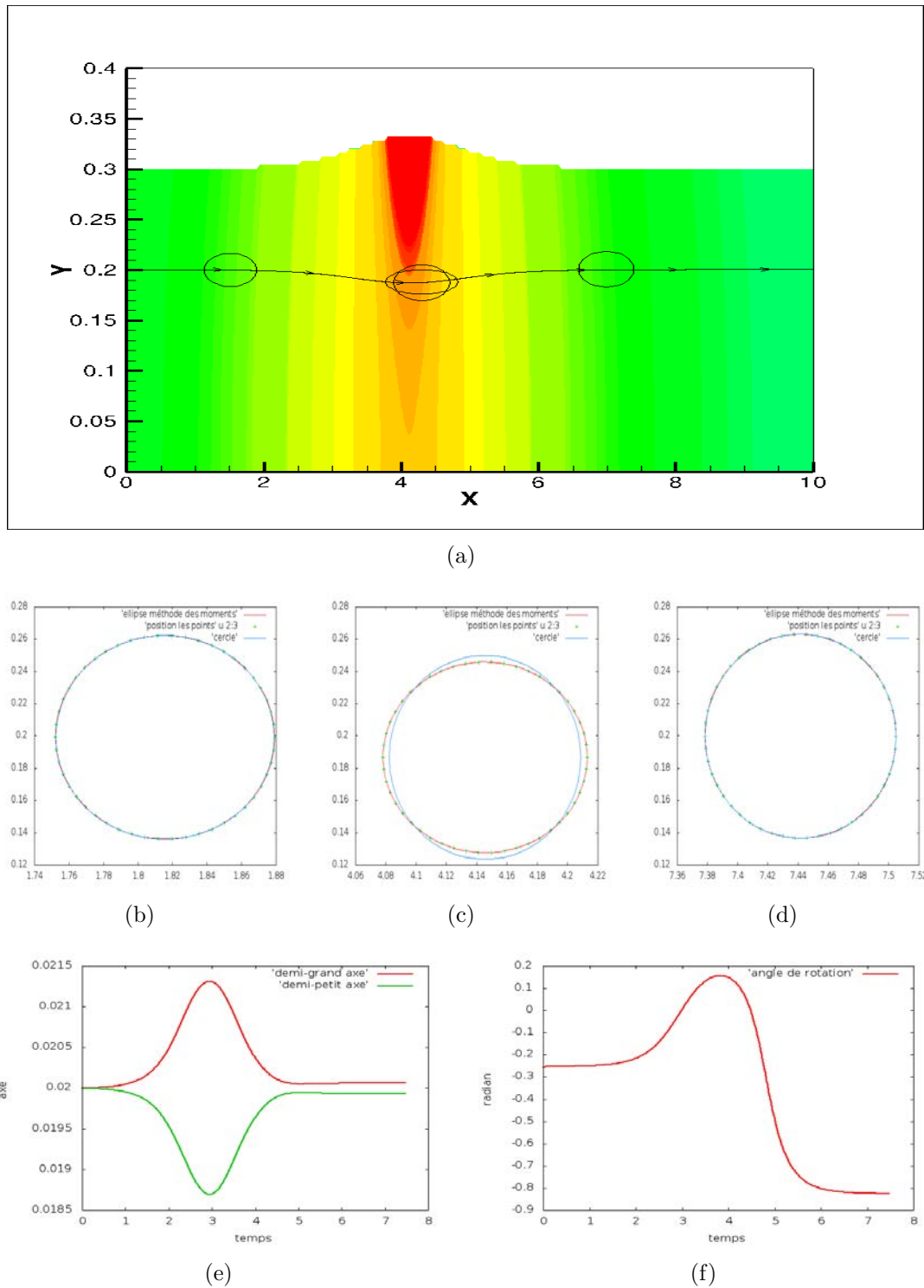
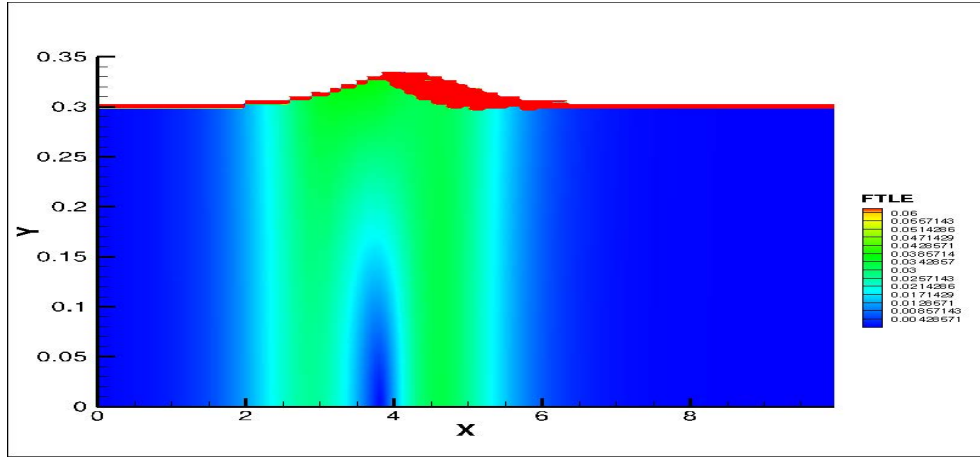
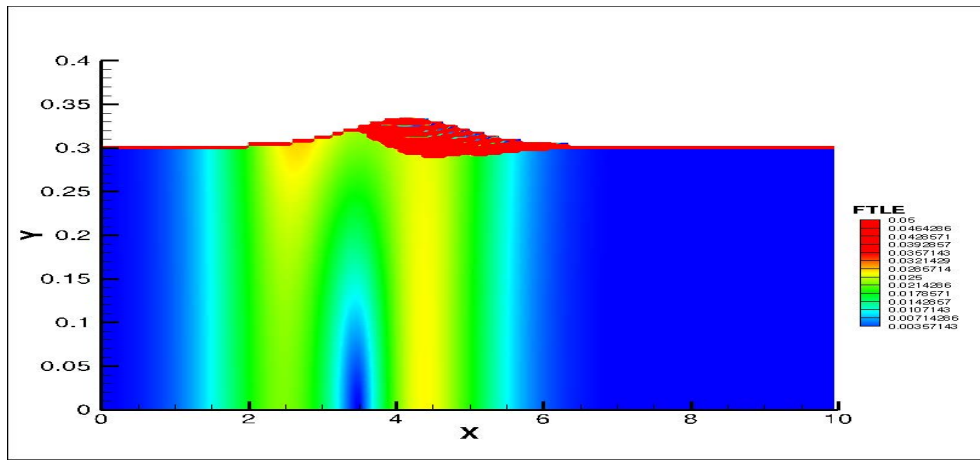


FIGURE 5.6 – L'évolution d'un traceur par deux méthodes : méthode des moments d'ordre 2 en rouge en (b), (c) et (d) et méthode de transport les points de la frontière du domaine contenant le traceur en vert en (b), (c) et (d) et pour représenter la déformation du traceur on prend un cercle de même centre que l'ellipse et de rayon égale à celui du traceur initial en bleu. Et (a) représente le transport du traceur dans l'écoulement. En (e) l'évolution temporelle du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse et (f) l'évolution temporelle de l'angle de rotation.



(a)



(b)

FIGURE 5.7 – Le champ de M -FTLE au temps d'intégration $T = 0.5s$ en (a) et $T = 1s$ en (b) pour un diamètre $r_0 = \sqrt{4 P_0}$ où le moment initial $P_0 = P_{x^2}(t = 0) = P_{y^2}(t = 0) = 10^{-5}$

5.2 Mascaret

Une définition rigoureuse du terme mascaret est nécessaire, afin de délimiter notre champ d'étude. Dans ce travail, la définition utilisée est celle de (Bonneton et al., 2011 [51], Chanson, 2011 [52], Lubin et al., 2010 [53], Mouaze et al., 2010 [54], Wolanski et al., 2004 [55]) : *Le **mascaret** est un ressaut hydraulique en translation créé par la marée montante, se propageant à contre courant au sein d'un fleuve et induisant une élévation soudaine de la hauteur d'eau moyenne et éventuellement l'apparition d'un train d'oscillations immédiatement après, appelées éteules.*

Depuis de nombreuses années, le mascaret, encore appelé ressaut mobile ou par d'autres terminologies en fonction des régions et des pays, fait l'objet de nombreuses études (Chanson, 2011 [52]). En France, ce phénomène peut se voir en Gironde, dans la baie du Mont St Michel et également il y a quelques années sur la Seine, lorsque les débits des fleuves sont faibles et en présence d'une grande marée. Des approches théoriques, de terrain, en laboratoire ou numériques, ont été entreprises pour expliquer ce phénomène.

Dans cet exemple, on a utilisé des ensembles de données de champs de vitesse obtenus au sein l'institut Pprime [50]. Les mascarets sont alors générés dans un canal à l'aide d'une porte qui se ferme très rapidement, souvent partiellement. Le courant est alors bloqué de manière soudaine, le niveau d'eau augmente au niveau de la porte et une vague se propageant en sens opposé au courant se crée. Cet exemple est basé sur des mesures *PIV* résolues en temps d'un mascaret, obtenues dans notre laboratoire¹, à partir de paramètres contrôlés, pour mieux comprendre la génération et la propagation des mascarets dans les estuaires. L'objectif de cet exemple porte sur la détection des Structures Cohérentes Lagrangiennes (*LCS*) pour le mascaret à partir du champ de *M-FTLE*. On recherche les *LCS* en deux endroits : au fond du canal, dans la couche limite pour un temps d'intégration donné, où les vitesses sont faibles et les trajectoires ne forment pas des tourbillons, et dans la partie haute de l'écoulement où l'on observe une compétition et un chevauchement entre l'écoulement principal et le ressaut se propageant en sens inverse.

5.2.1 Montage expérimental

Les expériences [50] ont été réalisées dans un canal horizontal à surface libre de 8m de long et de section rectangulaire (largeur $B = 0,4$ m, hauteur $H = 0,6$ m). Le circuit fonctionne en circuit fermé à l'aide d'une pompe à rotor excentré pour une gamme de débit variant de 0 à 60 l/s. L'eau est introduite dans le canal au travers d'un convergent via des crépines, deux grilles d'homogénéisation et un nid d'abeilles qui favorise l'orientation de l'écoulement. Le dispositif de génération du ressaut mobile est assuré par la fermeture rapide d'une porte verticale appelée ici guillotine. En fonction des réglages, celle-ci peut autoriser un débit de fuite plus ou moins important dépendant de la hauteur de fuite h . La vitesse initiale V_1 et la hauteur h_1 de l'écoulement sont ajustées au moyen d'un débitmètre et éventuellement d'une seconde guillotine de réglage de hauteur G représentée sur la Figure 5.8.

La fermeture de la porte se fait en 0.1s environ et avec une vitesse moyenne de descente de 1.25 m/s. Elle génère une onde qui remonte vers l'amont du canal. Pour mesurer la formation et l'évolution de cette onde au cours du temps, plusieurs sondes acoustiques Microsonic mic+25/IU/TC sont placées dans la zone d'étude située à 1,2 m de la sortie du convergent. Elles permettent de relever la position de la surface libre et de mesurer la vitesse du ressaut. Dans cette zone d'étude, le ressaut se déplace à une vitesse constante U .

Le nombre de Froude Fr est calculé à partir de la vitesse amont V_1 , la vitesse de propagation U de l'onde pour un observateur placé dans le repère du laboratoire, la hauteur d'eau h_1 avant le passage de l'onde (voir Figure 5.8) et g est l'accélération de pesanteur. Ce nombre de Froude, utilisé pour classifier les mascarets, doit prendre en compte la vitesse de translation (Chanson, 2011 [52]). Il est formulé dans l'équation

1. Institut Pprime, CNRS Université de Poitiers, 86962, Futuroscope, France

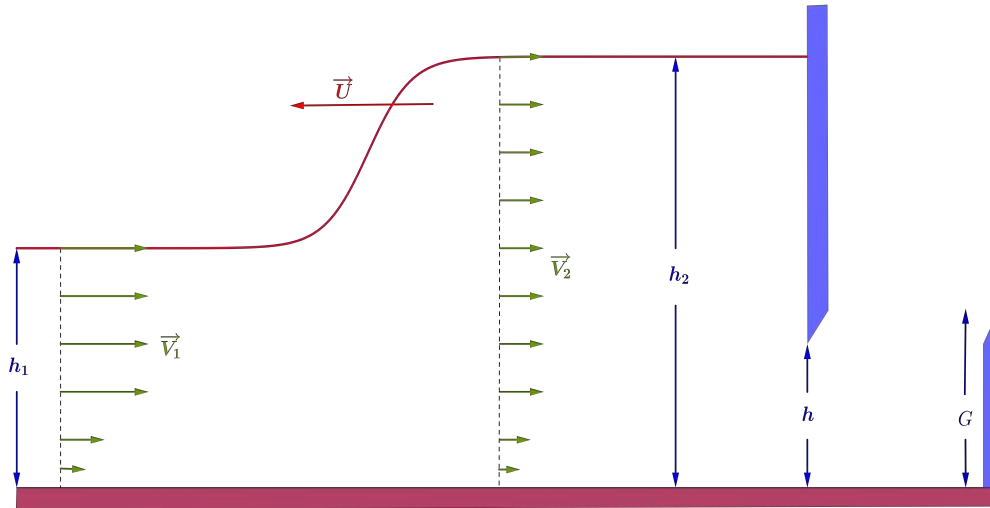


FIGURE 5.8 – Schématisation de la génération du mascaret.

(5.5)

$$Fr = \frac{V_1 + U}{\sqrt{h_1 \times g}} \quad (5.5)$$

Les mascarets peuvent alors être classés en trois catégories suivant leur nombre de Froude :

- $FR \leq 1.3$: les mascarets sont ondulants sans déferlement. Ils sont composés d'une vague de front et d'une succession d'éteules plus petites.
- $1.3 < FR \leq 1.6$: les mascarets sont transitoires avec un déferlement au niveau du front et de certaines éteules.
- $1.6 < FR$: les mascarets sont déferlants. Ils ne sont composés que d'une seule vague déferlante au niveau du front.

On s'intéresse dans cet exemple aux cas de nombres de Froude $Fr = 1.29$ et $Fr = 1.46$ représentatifs des deux régimes répertoriés du phénomène, le canal ne permet pas d'étudier le mascaret déferlant. Ceux-ci sont résumés dans le Tableau 5.1

	Cas 1	Cas 2
Fr	1.29	1.46
$h_1(mm)$	96.5	75
$V_1(m/s)$	0.650	0.581
$h(mm)$	35	5
$U(m/s)$	0.601	0.670
$G(mm)$	0	0

TABLE 5.1 – Paramètres des trois mascarets étudiés.

5.2.2 Les champs de $M\text{-}FTLE$

On va calculer les champs de $M\text{-}FTLE$ sur un maillage cartésien régulier comportant 160 000 nœuds (400 par 400) avec un temps d'intégration $T = 2$ s, pour des champs de vitesse du mascaret à différents instants au passage du front. Pour cela, on calcule les valeurs de $M\text{-}FTLE$ en chaque nœud du maillage à l'instant initial t_0 . On prend un traceur de forme circulaire de centre $\mathbf{x}_0$ et de rayon r_0 à l'intérieur duquel la distribution des particules est uniforme. La matrice des moments d'ordre 2 est égale à $\beta \mathbf{I}$ avec $\beta = \frac{r_0^2}{4}$. Par exemple, si on prend $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, le rayon de cercle initial est égale $r_0 = 2$ (voir la figure 5.9). (Quand on calcule les champs de $M\text{-}FTLE$, l'évolution temporelle de la matrice des moments d'ordre 2 et le transport des particules on suppose que $t_0 = 0$ à l'instant considéré).

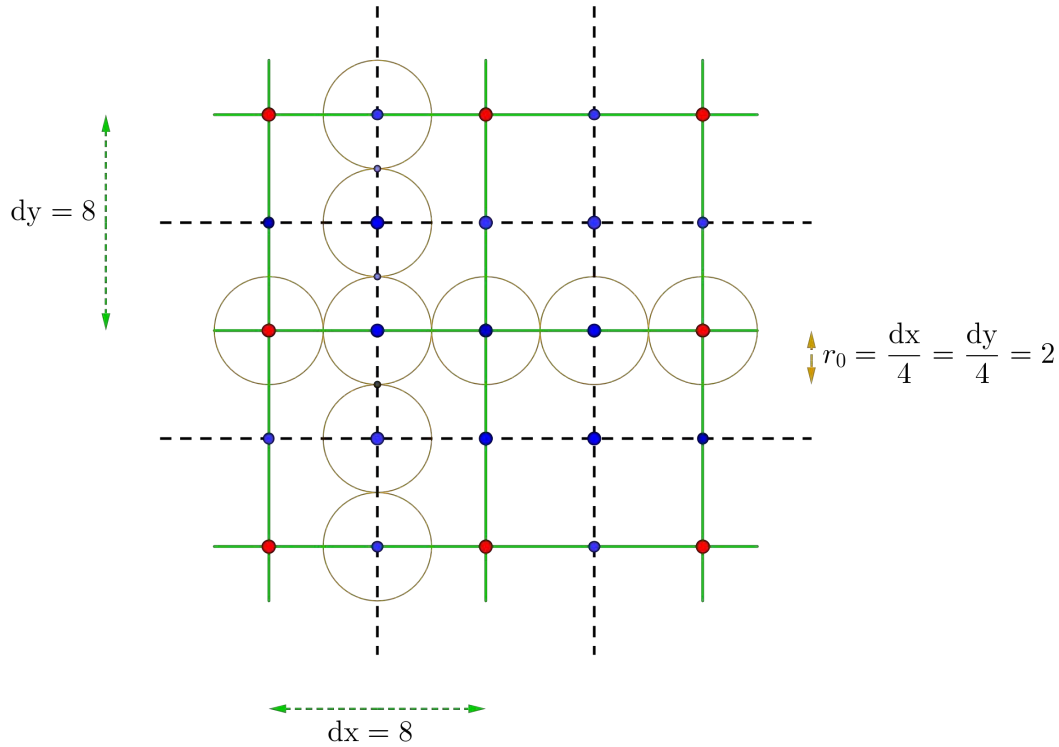


FIGURE 5.9 – Illustration de la grille principale (cercles rouges et lignes vertes) et la grille auxiliaire (cercles bleus et lignes noir) utilisés dans le calcul des valeurs de $M\text{-}FTLE$. On peut choisir $r_0 = a \, dx$ où $a \in]0 : 1[$, pour cet exemple, on choisit $r_0 = 0.25 \, dx = 2$.

5.2.2.1 Cas du nombre de Froude $Fr = 1.29$

Pour le nombre de Froude $Fr = 1.29$, la Figure(5.10) représente des champs de vitesse lors du passage du mascaret à différents instants au passage du front : $t = 10,2 s$, $t = 10,6 s$, $t = 11 s$ et $t = 11,4 s$ [50].

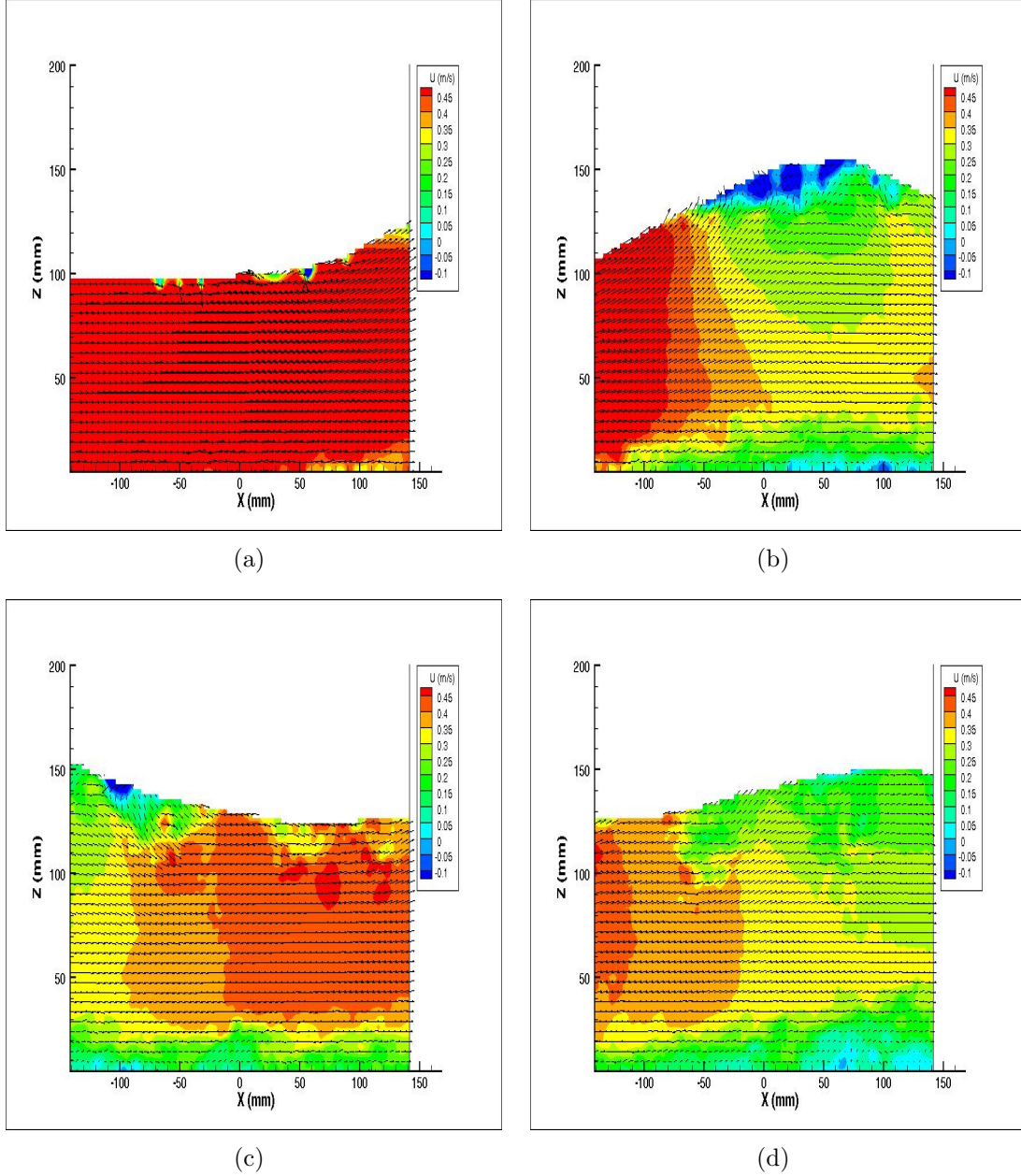


FIGURE 5.10 – Champs de vecteurs vitesse et iso contours de la composante longitudinale U des vitesses du mascaret à différents instants au passage du front pour $Fr = 1.29$, en (a) $t = 10.2 s$, (b) $t = 10.6 s$, (c) $t = 11 s$ et (d) $t = 11.4 s$. ([50])

La figure(5.11) montre une image obtenue avec l'algorithme *LIC* à partir d'un bruit blanc pour différents instants au passage du front où le temps d'intégration est $T = 80 dt$, sur un maillage cartésien régulier contenant 507 123 pixels (841×603). Avant l'arrivée du mascaret, on voit que l'écoulement initial est uniforme (voir figure 5.11(a)). A l'arrivée du mascaret, a été observé une ligne de séparation (la zone de mélange) en haut de l'écoulement où a lieu la rencontre entre l'écoulement principal et le ressaut se propageant en sens inverse, et des zones de recirculation (les zones de faible vitesses) au fond de canal (voir figure 5.11(d)).

Les lignes de courant ainsi que le critère Q sont présentés sur la figure(5.12) pour différents instants au passage du front. Avant l'arrivée du mascaret, on voit que les valeurs du critère Q sont presque égales à zéro, sauf des valeurs à proximité de la surface libre sur la figure (5.12(a)). A l'arrivée du mascaret, en haut de canal, une zone de Q négative indique qu'une zone de cisaillement a lieu à la rencontre entre l'écoulement principal et le ressaut se propageant en sens inverse sur les figures (5.12(b), 5.12(c)), les lignes de courant matérialisent des tourbillons au fond de canal (dans la couche limite) sur les figures (5.12(d), 5.12(e), 5.12(f)).

La Figure(5.13) représente quelques exemples de champ $M\text{-}FTLE$ obtenus pour différents instants au passage du front et pour le temps d'intégration $T = 2$ s.

♣ La Figure(5.13(a)) représente le champ de $M\text{-}FTLE$ avant l'arrivée du mascaret. On observe que :

- Les valeurs $M\text{-}FTLE$ sont maximales près de la surface libre.
- Au milieu, les valeurs de $M\text{-}FTLE$ sont très faibles parce que l'écoulement initial est uniforme. Si on prend un domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(250, 200)$ et de rayon $r_0 = 4$, on note que la trajectoire s'incurve vers le haut et le niveau d'eau monte (figure 5.14(a)). L'évolution du moment P_{x^2} diminue tandis que le moment P_{y^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon x et une elongation selon y (voir Figure 5.14(b)). L'évolution du moment P_{xy} est divisé en deux phases. Une première phase d'augmentation avec un dépassement de la valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique. Une seconde phase de diminution qui représente une rotation dans le sens horaire du traceur de particules, mais la rotation est très faible (Figure 5.14(c)). Sur la Figure(5.14(d)), en observant les évolutions du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse, on peut voir que le changement de cercle initial est presque négligeable lors du transport (voir Figure 5.14(e)).
- Au fond du canal, dans la couche limite, de la même manière que lors de la discussion précédente, on note une augmentation des valeurs de $M\text{-}FTLE$ de certaines zones. Si on prend la position initiale du traceur $\mathbf{x}_0(770, 60)$ (voir Figure 5.15), on note que la trajectoire du centre de domaine est tourbillon faible (Figure 5.15(a)). L'évolution du moment P_{x^2} diminue tandis que le moment P_{y^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon x et une elongation selon y et l'effet inverse se produit ensuite (voir Figure 5.15(b)). L'évolution du moment P_{xy} augmente avec un dépassement de valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique (voir Figure 5.15(c)). Sur la Figure(5.15(d)) on voit l'évolution du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse. Sur la Figure(5.15(e)) est présentée la déformation de la région contenant le traceur. Dans les zones où les valeurs de $M\text{-}FTLE$ sont maximales, il y a de petits tourbillons.

♣ Les Figures 5.13(b), 5.13(c), 5.13(d) et 5.13(e) présentent le champ de $M\text{-}FTLE$ à l'arrivée du mascaret. On observe l'apparition de plus grandes valeurs de $M\text{-}FTLE$ là où l'écoulement principal et le ressaut s'affrontent.

- Dans le domaine $D = [700, 950] \times [380, 500]$ de la Figure(5.13(d)), on note que les plus fortes valeurs de $M\text{-}FTLE$ divisent la zone en deux régions de vitesses différentes (couche de mélange). On prend trois positions initiales des centres des domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_0(800, 435)$ en bas de la zone de couche de mélange, $\mathbf{x}_0(800, 446)$ dans la zone de couche de mélange et $\mathbf{x}_0(800, 460)$ en haut de la zone de couche de mélange et on prend le rayon initial du domaine contenant le traceur $r_0 = 1$. On note que :
 - ♦ Les trajectoires des centres initiaux des domaines contenant le traceur s'incurvent vers le haut en haut de la zone de couche de mélange (figure 5.16(c)), s'enroulent dans celle-ci, figure(5.16(b)) et s'incurvent vers le bas (figure 5.16(a)).

- ◆ Le moment P_{x^2} pour les trois positions initiales est presque constant, tandis que le moment P_{y^2} dans la zone de couche de mélange, augmente, ce qui correspond globalement à une élongation selon y (Figure 5.17(c)). En bas de la zone de couche de mélange les valeurs de P_{x^2} et P_{y^2} sont presque constantes. On peut voir que le changement de cercle initial est presque négligeable lors du transport (Figure 5.17(a)). En haut de la zone de couche de mélange, la valeur P_{y^2} diminue, ce qui correspond à une élongation faible selon x et une contraction selon y (Figure 5.17(e)).
- ◆ L'évolution du moment P_{xy} des trois positions initiales diminue ce qui représente une rotation dans le sens horaire du traceur de particules mais la rotation est très faible (figure 5.17(b), 5.17(d), 5.17(f)).

Sur les figures (5.18(a), 5.18(c), 5.18(e)) on voit que l'évolution du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse. Les figures 5.18(b), 5.18(d), 5.18(f)) présentent les domaines contenant le traceur dans les trois positions initiales, au temps d'intégration $T = 2$ s, avec un cercle de même centre d'ellipse et de rayon égal au rayon initial du domaine contenant le traceur.

- Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont très faibles parce que l'écoulement initial est resté uniforme. Si on prend le centre du traceur $\mathbf{x}_0(500, 250)$ et le rayon $r_0 = 1$, on remarque les éléments suivants : la trajectoire s'incurve vers le haut, le niveau d'eau monte (Figure 5.19(a)). L'évolution du moment P_{x^2} diminue tandis que le moment P_{y^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon x et une élongation selon y (Figure 5.19(b)). L'évolution du moment P_{xy} diminue qui représente une rotation dans le sens horaire du traceur de particules, mais la rotation est très faible (Figure 5.19(c)) et on voit cela sur la Figure 5.19(c) qui représente l'évolution temporelle de l'angle de rotation. Sur la Figure 5.19(d), on voit les évolutions du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse. On peut voir que, le changement du domaine contenant le traceur lors du transport, au temps d'intégration $T = 2$, est presque négligeable.
- Au fond du canal, dans la couche limite, on note l'apparition d'une augmentation des valeurs de $M-FTLE$ dans certaines zones. Dans ces zones il y a de petits tourbillons. Si on prend le centre du traceur $\mathbf{x}_0(500, 80)$ et le rayon $r_0 = 1$, on note que la trajectoire du centre du domaine est elliptique (figure 5.20(a)). L'évolution du moment P_{x^2} diminue tandis que le moment P_{y^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon x et une élongation selon y et l'effet inverse se produit ensuite (figure 5.20(b)). L'évolution du moment P_{xy} augmente avec un dépassement de valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique (Figure 5.20(c)). On voit cela sur la Figure (5.20(c)) qui représente l'évolution temporelle de l'angle de rotation. La Figure (5.20(d)) voit l'évolution du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse. sur la Figure (5.20(f)) présente la déformation du domaine contenant la traceur au temps d'intégration $T = 2$ s.

- ♣ Les Figures 5.13(f), 5.13(g), 5.13(h), 5.13(i) présentent le champ $M-FTLE$ au passage de la première vague du mascaret. En haut, on observe l'apparition d'une zone de grandes valeurs du $M-FTLE$ vers le haut à la largeur de la base à la vague. Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont très faibles parce que l'écoulement est resté uniforme. Au fond du canal, dans la couche limite, on note l'apparition de fortes valeurs dans certaines zones où il y a de petits tourbillons.
- ♣ Les Figures 5.13(j), 5.13(k), 5.13(l) présente le champ $M-FTLE$ entre deux vagues du mascaret, En haut, on observe que les plus fortes valeurs sont près de la surface libre. Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont faibles mais on note une augmentation faible des valeurs de certaines zones.

on trouve une Structure Cohérente de Lagrangienne LCS parabolique dans la zone de mélange.

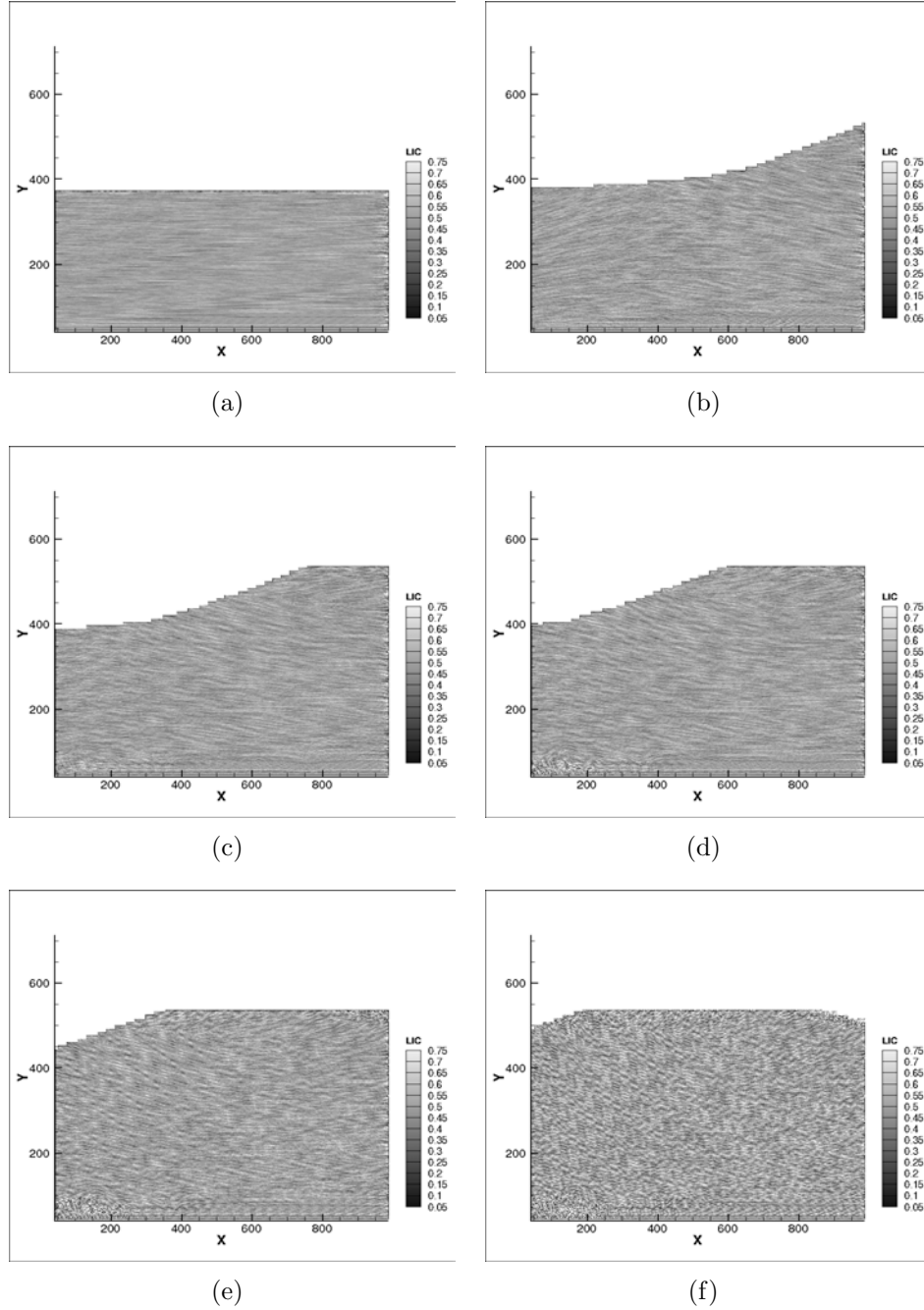


FIGURE 5.11 – Les LIC sur un bruit blanc pour décrire des champ vitesses expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1.29$ à différents instants au passage du front, pour un temps d'intégration $T = 8$ s et sur un maillage cartésien régulier contenant 507 123 pixels (841×603)

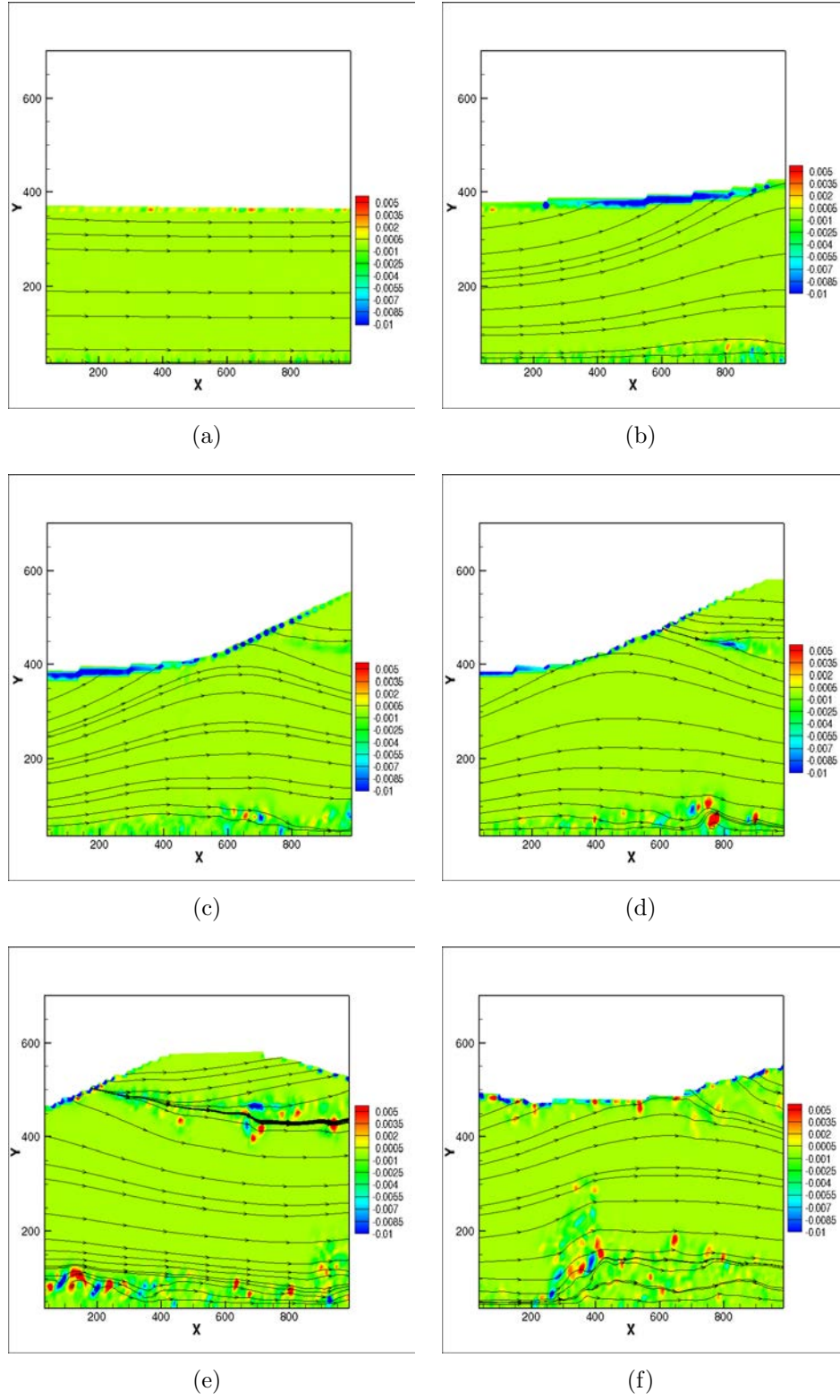


FIGURE 5.12 – Lignes de courant et critère Q pour décrire les champs de vitesses expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1.29$ à différents instants au passage du front.

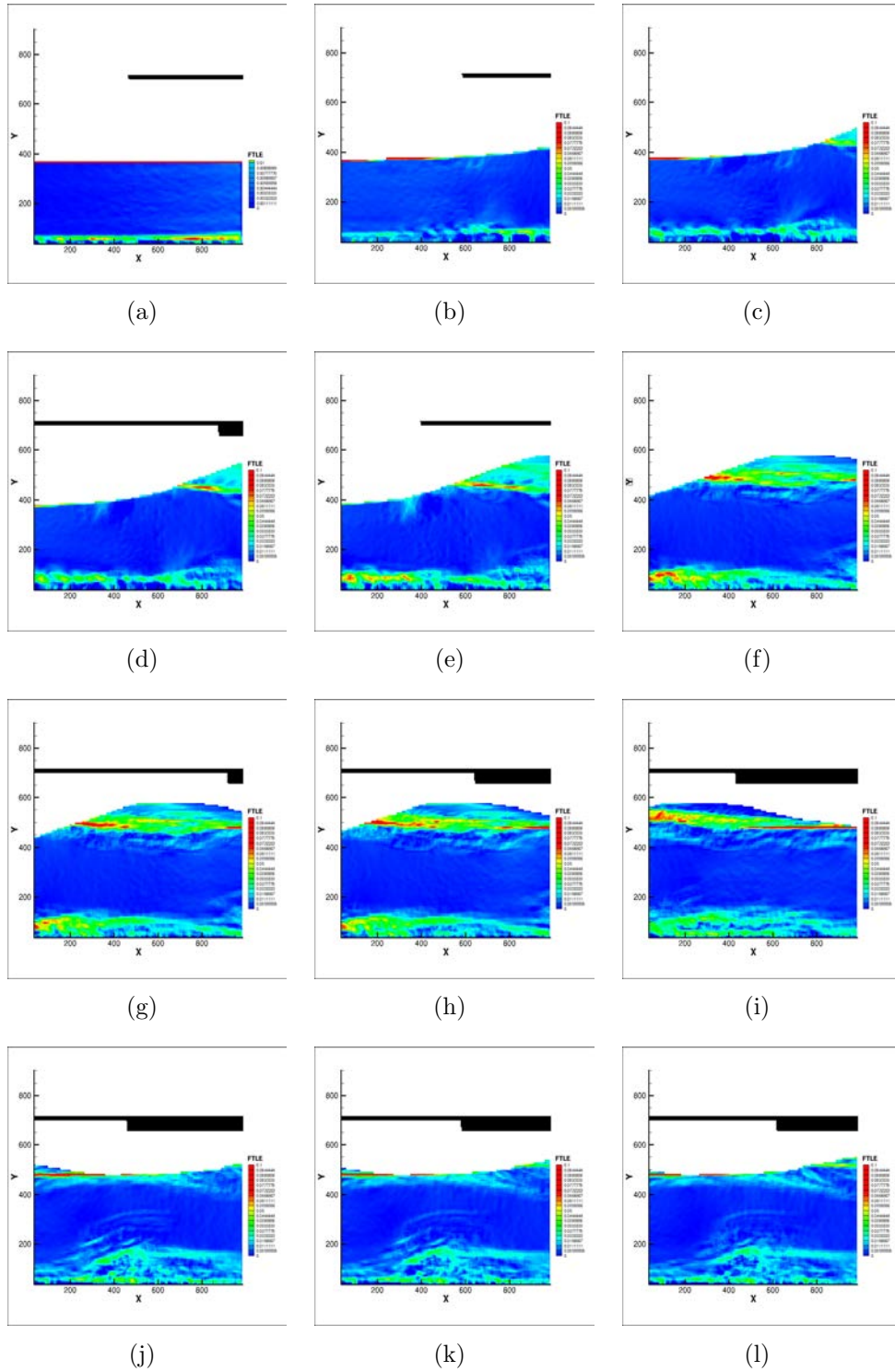


FIGURE 5.13 – Champs de M - $FTLE$ calculés avec la méthode des moments d'ordre 2 avec un temps d'intégration $T = 2$ s, pour des champs de vitesse du mascaret pour $Fr = 1.29$.

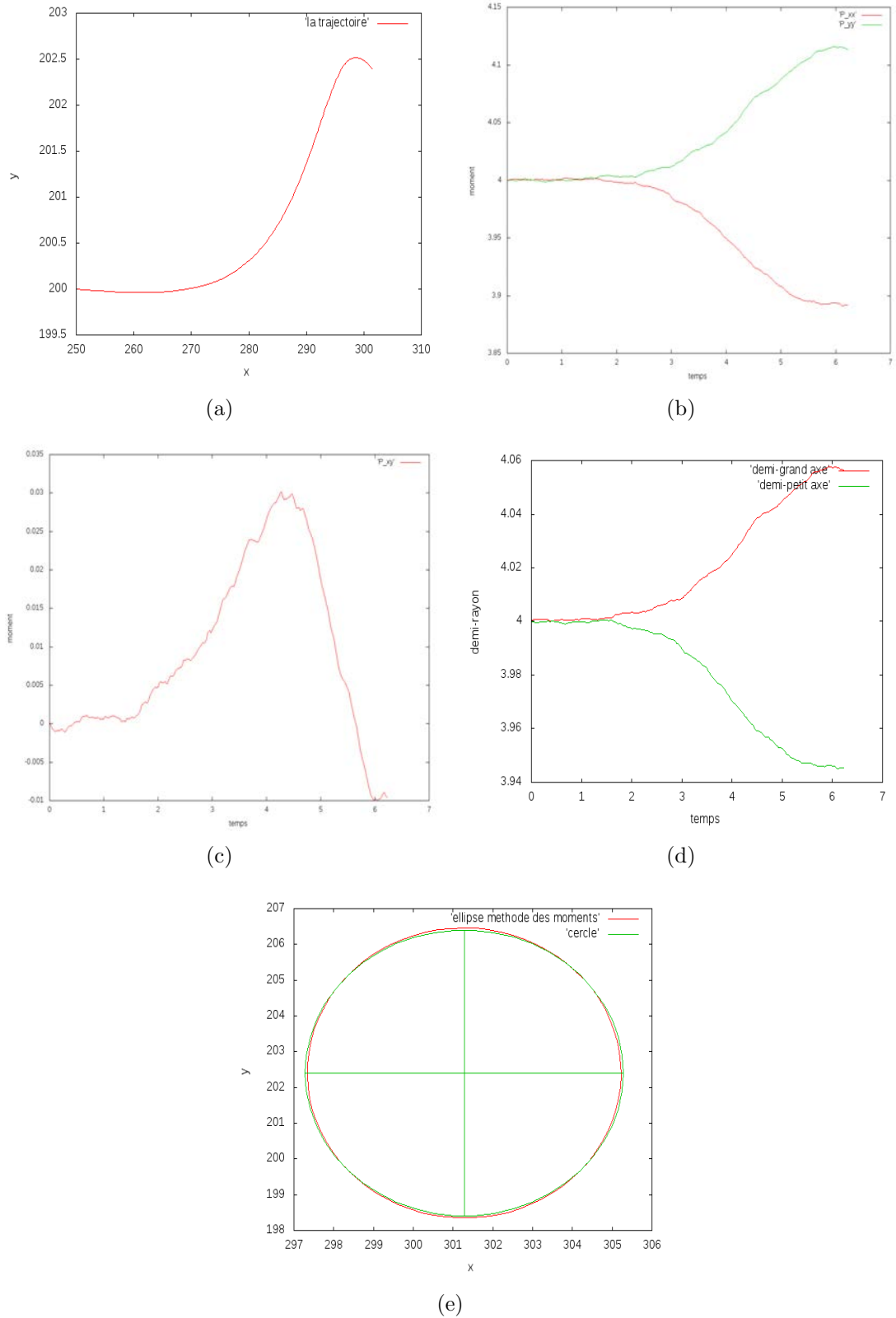


FIGURE 5.14 – Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. Avant l'arrivée du mascaret, on prend la position $\mathbf{x}_0(200, 250)$ (au milieu du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.

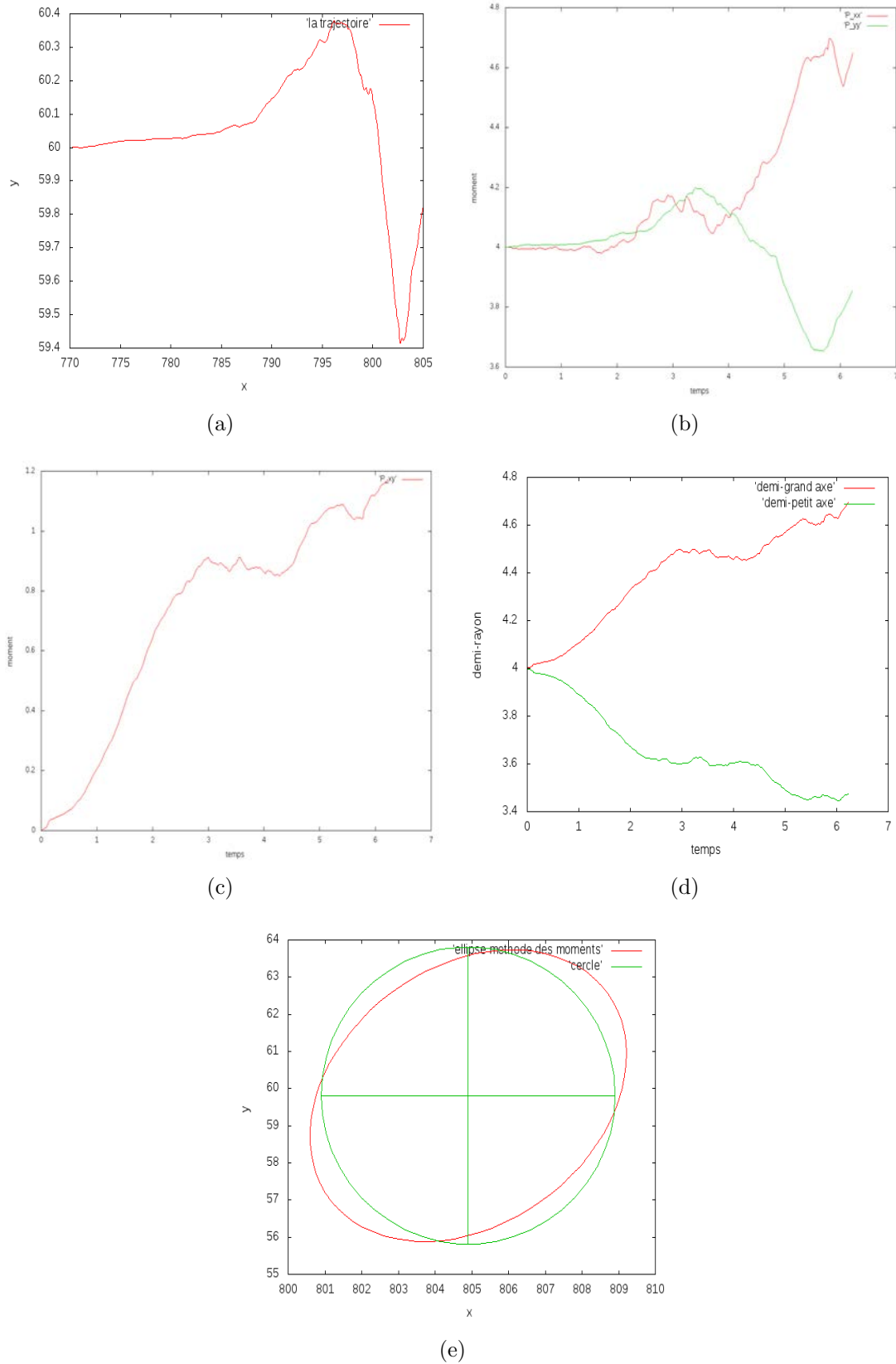


FIGURE 5.15 – Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. Avant l'arrivée du mascaret, on prend la position $\mathbf{x}_0(770, 60)$ (au fond du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire de $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.

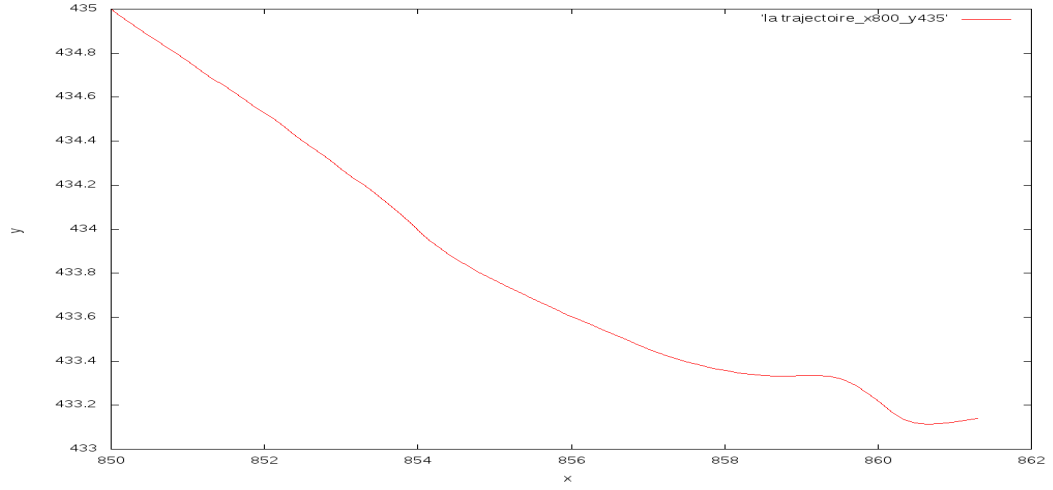
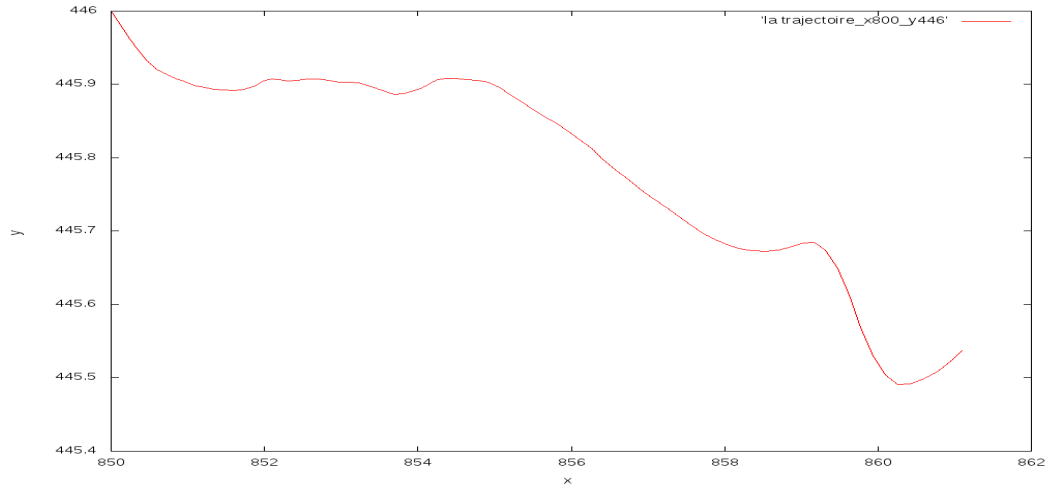
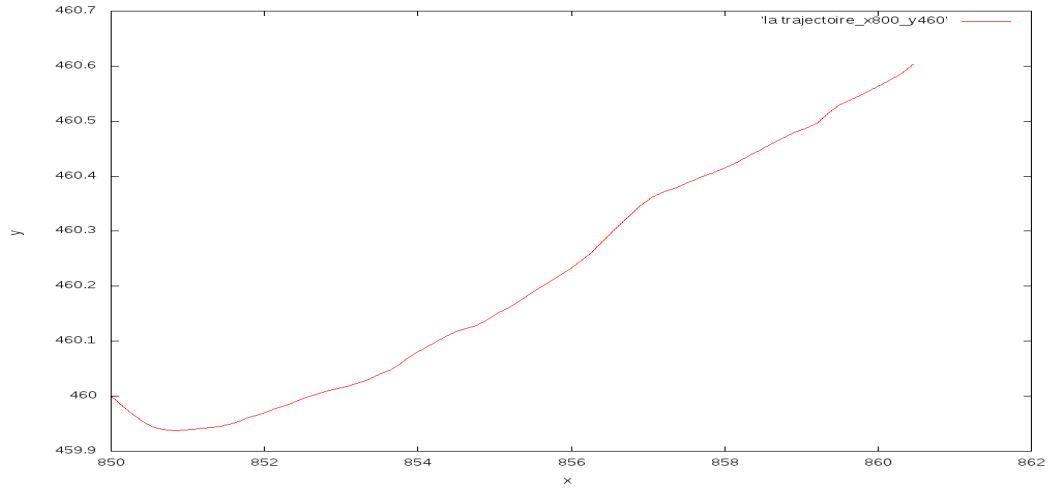
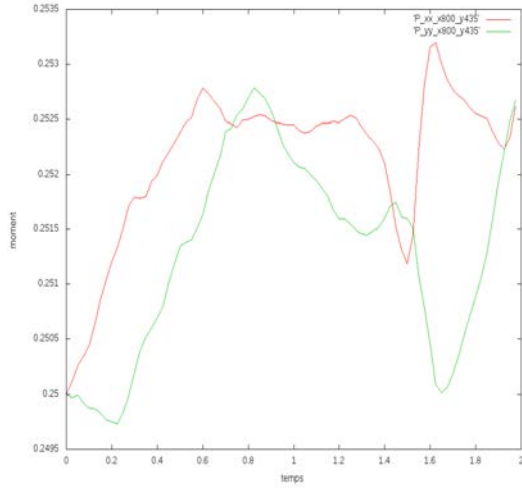
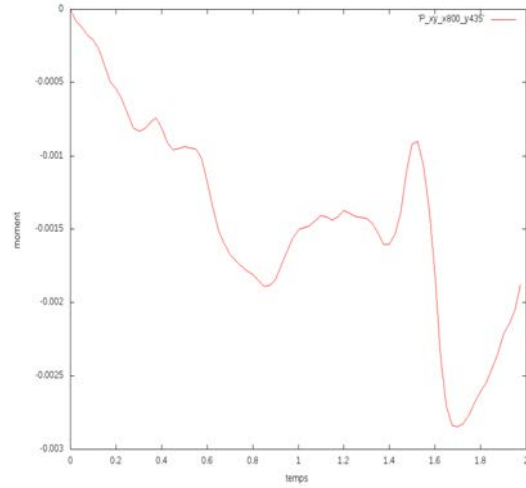

 (a) La positon initiale $\mathbf{x}(800, 435)$

 (b) La positon initiale $\mathbf{x}(800, 446)$

 (c) La positon initiale $\mathbf{x}(800, 460)$

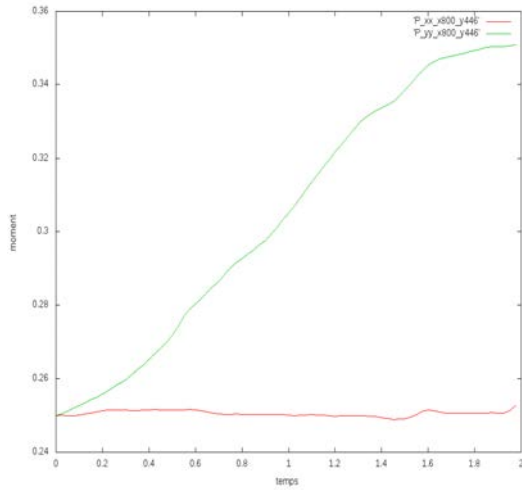
FIGURE 5.16 – Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. À l'arrivée du mascaret (figure 5.13(d)), on prend en bas de la zone de couche de mélange la position $\mathbf{x}_0(800, 435)$, dans la zone la position $\mathbf{x}_0(800, 446)$ et en haut de la zone la position $\mathbf{x}_0(800, 460)$ qui sont les centres initiaux des domaines contenant le traceur. La trajectoire issue des trois positions.



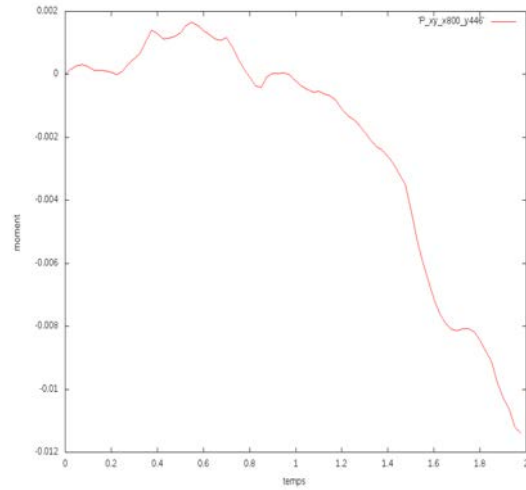
(a) Évolution des moments P_{x^2} , P_{y^2} de la position $\mathbf{x}(800, 435)$



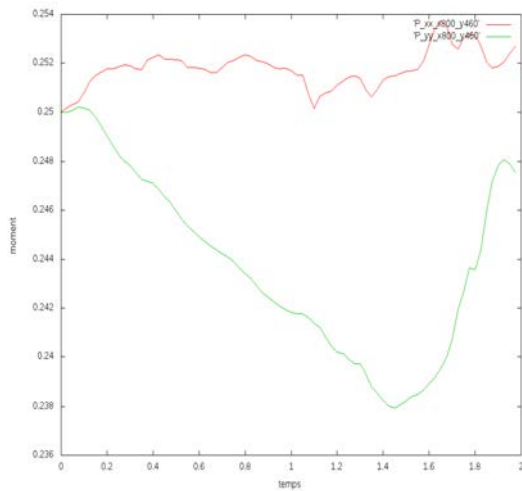
(b) Évolution du moment P_{xy} de la position $\mathbf{x}(800, 435)$



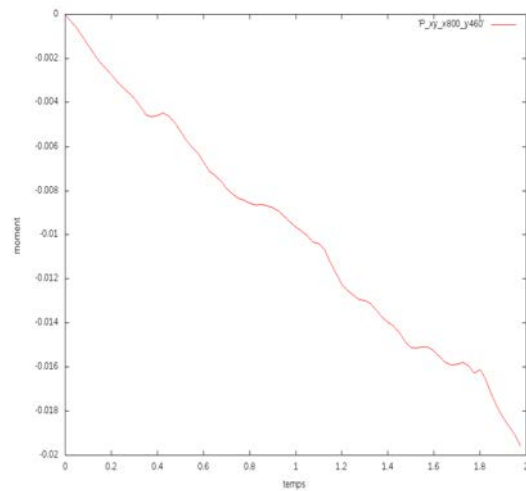
(c) Évolution des moments P_{x^2} , P_{y^2} de la position $\mathbf{x}(800, 446)$



(d) Évolution du moment P_{xy} de la position $\mathbf{x}(800, 446)$

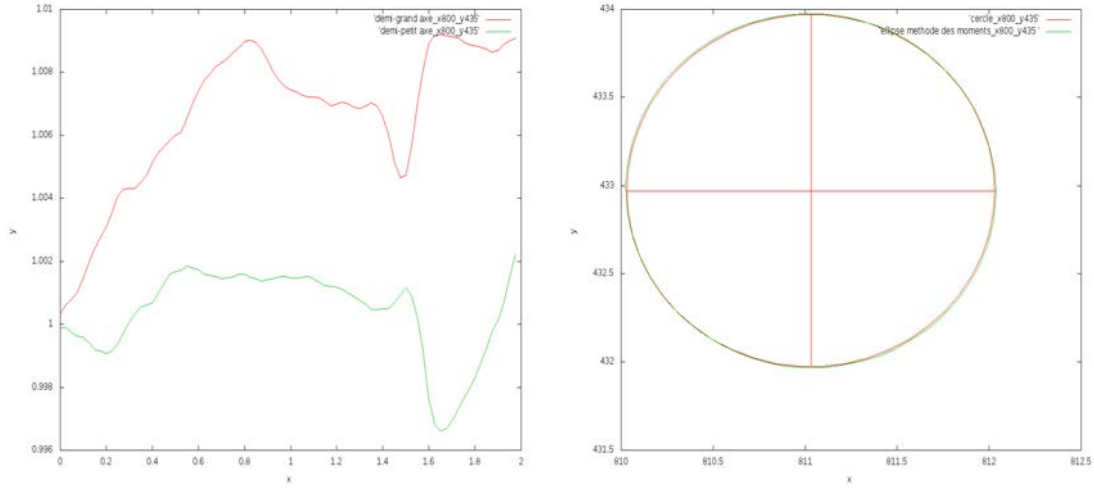


(e) Évolution des moments P_{x^2} , P_{y^2} de la position $\mathbf{x}(800, 460)$

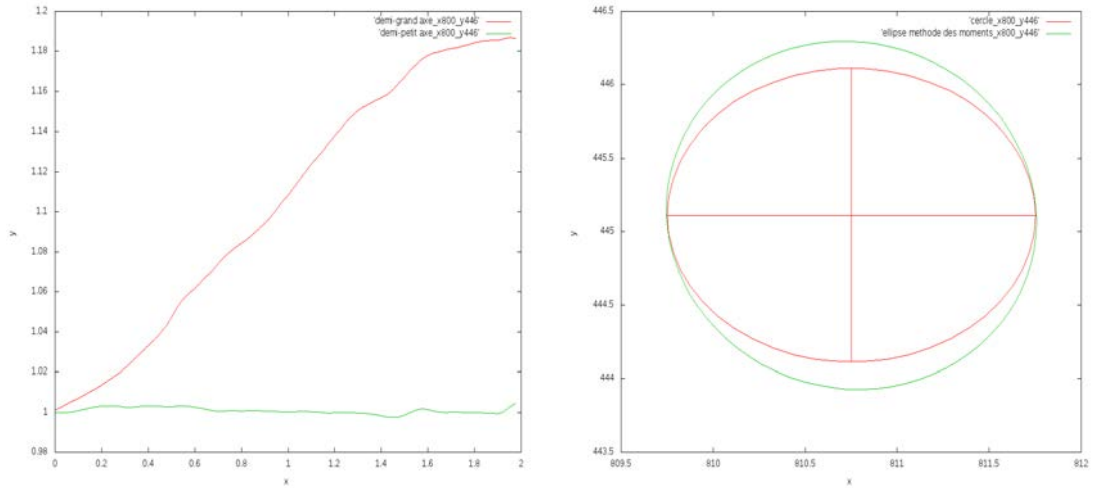


(f) Évolution du moment P_{xy} de la position $\mathbf{x}(800, 460)$

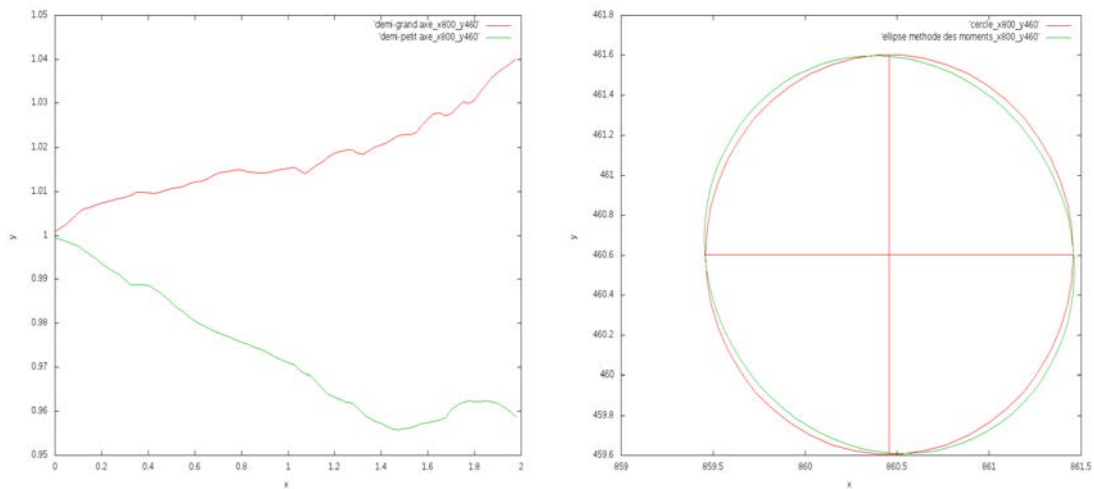
FIGURE 5.17 – Évolution des moments P_{x^2} , P_{y^2} et P_{xy} des trois positions (voir figure 5.16).



(a) Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de la position $x(800, 435)$ (b) Évolution du domaine contenant le traceur de la position $x(800, 435)$



(c) Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de la position $x(800, 446)$ (d) Évolution du domaine contenant le traceur de la position $x(800, 446)$



(e) Évolution du demi-grand axe et du demi-petit axe de la position $x(800, 460)$ (f) Évolution du domaine contenant le traceur de la position $x(800, 460)$

FIGURE 5.18 – Évolution temporelle du demi-petit axe et du demi-grand axe des trois position (voir figure 5.16). Évolution temporelle du domaine initial contenant le traceur pour ces trois cas.

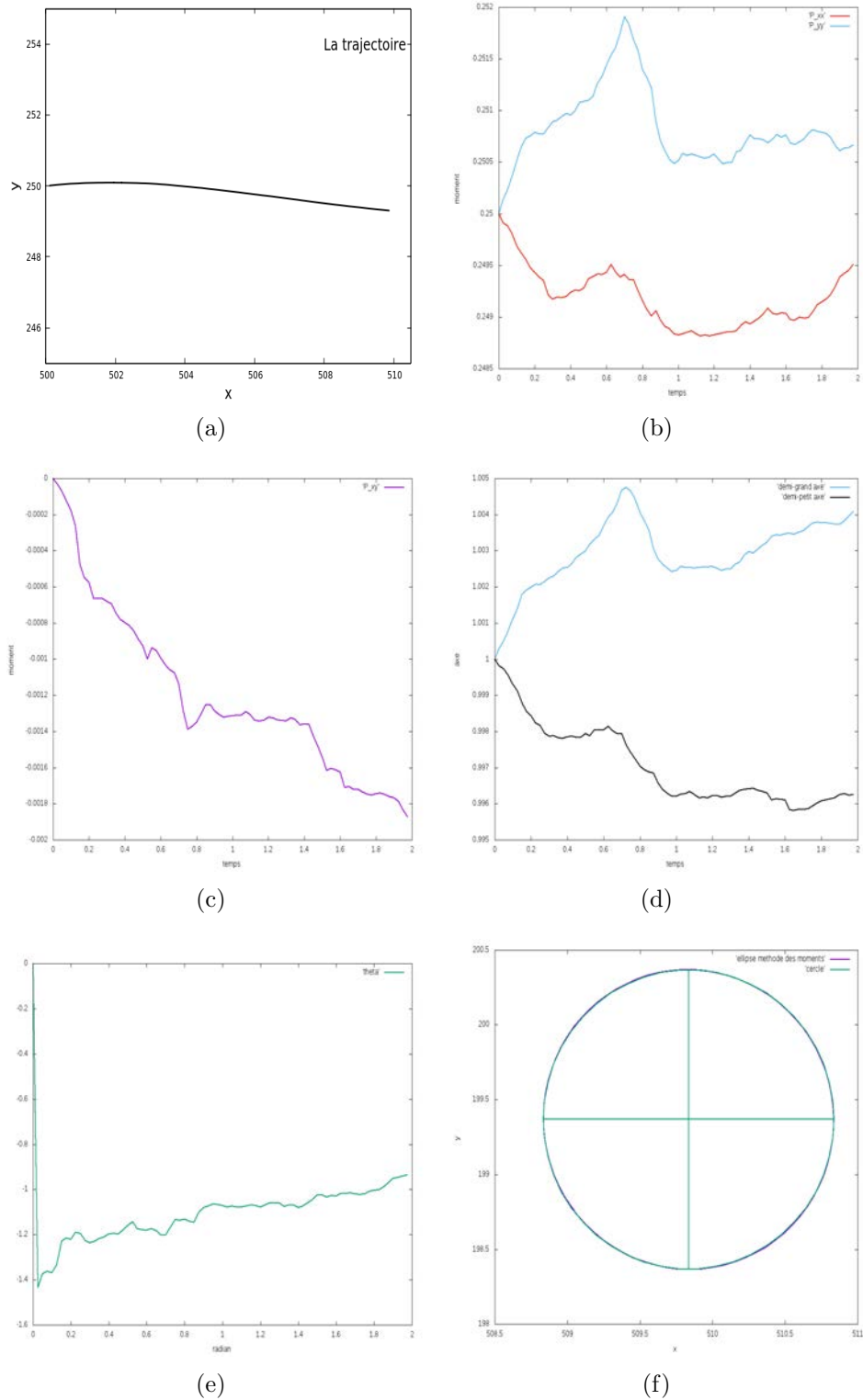


FIGURE 5.19 – Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. À l’arrivée du mascaret (figure 5.13(d)), on prend la position $\mathbf{x}_0(500, 200)$ (au milieu du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de la position $\mathbf{x}_0$ pour un temps d’intégration $T = 2$ s, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l’angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d’intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.

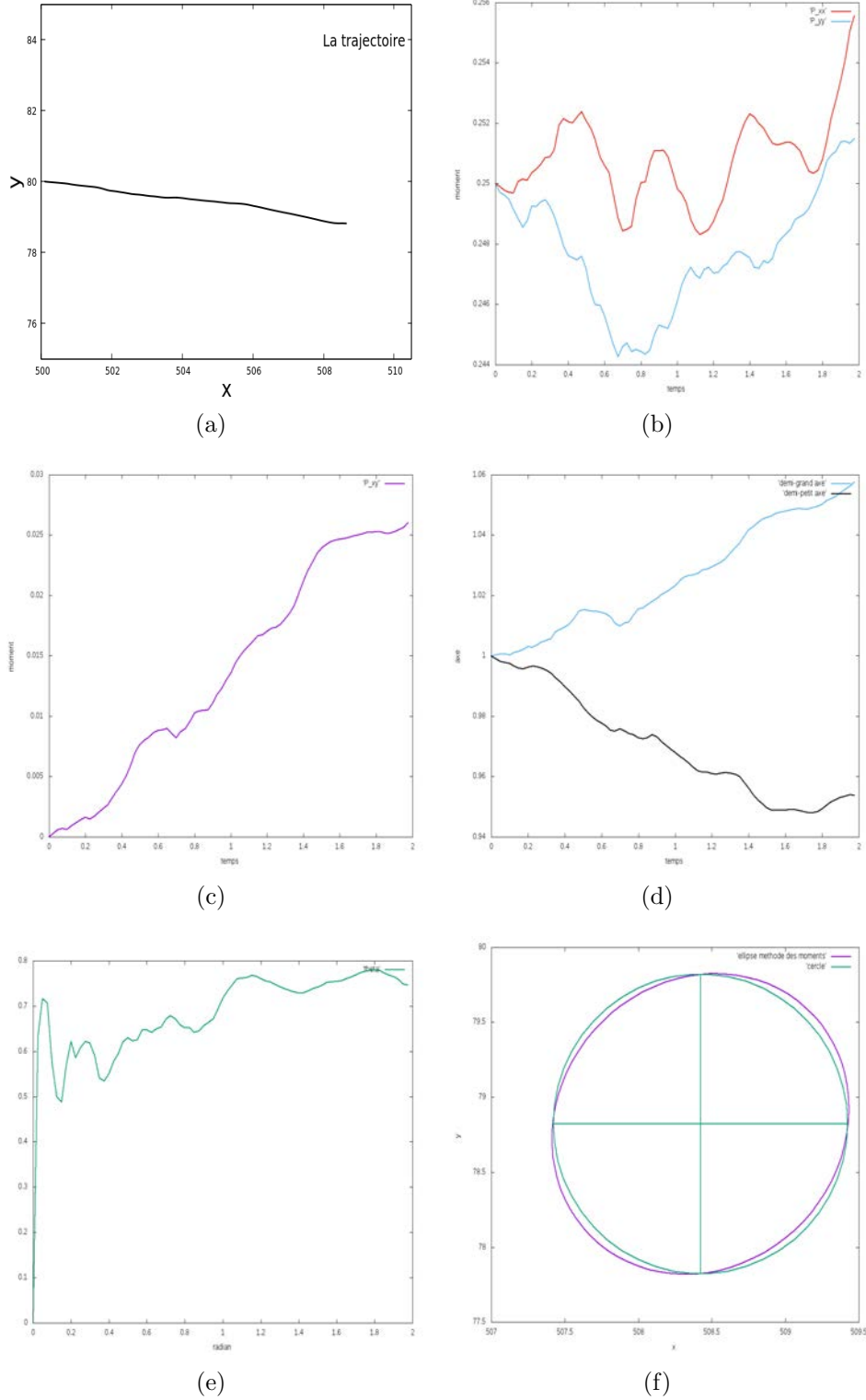


FIGURE 5.20 – Le nombre de Froude $Fr = 1.29$. À l'arrivée du mascaret (figure 5.13(d)), on prend la position $\mathbf{x}_0(500, 80)$ (au fond du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de la position $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s, (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.

5.2.2.2 Cas du nombre de Froude $Fr = 1.46$

Pour le mascaret ayant un nombre de Froude de 1.46, on constate que les éteules ont quasiment disparu et que la variation d'amplitude après le passage du front est vraiment minime, même si les champs de vitesse varient avec le temps (voir la Figure 5.21). L'organisation du mascaret intermédiaire pour un $Fr = 1.46$ reste assez proche du mascaret ondulant. Le passage du mascaret génère un fort ralentissement de l'écoulement et la région de décélération est plus verticale. L'impact sur la couche limite est plus important et une inversion générale du courant apparaît sur le radier (fond du canal).

La figure(5.22) montre une image obtenue avec l'algorithme LIC à partir d'un bruit blanc pour différents instants au passage du front où le temps d'intégration $T = 80 \, dt$ s, sur un maillage cartésien régulier contenant 641601 pixels(801×801). Avant l'arrivée du mascaret, on voit que l'écoulement initial est uniforme (voir figure 5.22(a)). A l'arrivée du mascaret, a été observées une ligne de séparation (la zone de mélange) en haute de l'écoulement où a lieu la rencontre entre l'écoulement principal et le ressaut se propageant en sens inverse et des zones de recirculation, au fond de canal il y a des zones de recirculation (les zones de faible vitesses) au fond de canal (voir figure 5.22(d)).

Les lignes de courant ainsi que le critère Q sont présentés sur la figure(5.23) pour différents instants au passage du front. Avant l'arrivée du mascaret, on voit que les valeurs du critère Q sont presque égales à zéro, sauf des valeurs à proximité de la surface libre sur la figure (5.12(a)). A l'arrivée du mascaret, en haut(zone de mélange) du canal et au fond du canal (dans la couche limite) les lignes de courant matérialisent des tourbillons sur les figures (5.12(b), 5.12(c), 5.12(d), 5.12(e), 5.12(f)) où les régions positives de Q mettent en exergue une zone où le taux de rotation est supérieur au taux de déformation et traduit la présence d'un tourbillon.

La figure(5.24) présente quelques exemples de champs M - $FTLE$ avec la méthode des moments d'ordre 2, pour un temps d'intégration $T = 2 \, s$ (pas de temps $dt = 0.025 \, s$) et sur un maillage cartésien régulier contenant 160 000 nœuds (400 par 400).

♣ La Figure(5.24(a)) présente le champ de M - $FTLE$ avant l'arrivée du mascaret.

- On voit que les M - $FTLE$ sont maximales près de la surface libre.
- Au milieu, On remarque que les valeurs de M - $FTLE$ sont faibles parce que l'écoulement initial est uniforme. Si on prend un domaine de forme circulaire contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(150, 200)$ et de rayon $r_0 = 1$, on remarque les éléments suivants :
 - La trajectoire s'incurve vers le haut, le niveau d'eau monte (Figure 5.25(a)).
 - L'évolution du moment P_{x^2} diminue tandis que le moment P_{y^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon x et une élongation selon y et l'effet inverse se produit ensuite (Figure 5.25(b)).
 - L'évolution du moment P_{xy} , est divisé en deux phases. Une première phase de diminution qui représente une rotation dans le sens horaire du traceur de particules. Une seconde phase d'augmentation avec un dépassement de valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique, mais l'angle de rotation est très petit (Figure 5.25(c)).
 - Sur la figure(5.25(e)) on observe que les évolutions du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse. On note que la déformation du domaine circulaire contenant le traceur est presque négligeable lors du transport (voir figure(5.25(f))).
- Au fond du canal, dans la couche limite, on note une augmentation de valeurs de M - $FTLE$ parce que, les trajectoire sont plus courtes par rapport aux trajectoires qui se trouvent au centre de l'écoulement : on constate ça sur la Figure (5.26) où on considère des positions initiales du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}(150, 36 + 2i) ; i = 25$.
Si on prend un domaine contenant le traceur de centre $\mathbf{x}_0(150, 50)$ et de rayon $r_0 = 1$, on remarque les éléments suivants :
 - La trajectoire du centre du domaine est un tourbillon de faible intensité (Figure 5.27(a)).

- L'évolution du moment P_{x^2} augmente et le moment P_{y^2} augmente, ce qui correspond à une contraction selon y et à une élongation selon x et l'effet inverse se produit ensuite (figure 5.27(b)).
- L'évolution du moment P_{xy} d'augmentation (Figure 5.27(c)) avec un dépassement de valeur initiale, ce qui exprime une rotation dans le sens trigonométrique (Figure 5.27(d)).
- Sur la figure(5.27(e)) on observe l'évolution du demi-petit axe et du demi-grand axe de l'ellipse. Sur la figure 5.27(f) et présenté la déformation du domaine contenant le traceur. Au fond du canal, les fortes valeurs de $M-FTLE$ divisent le fond en deux régions de vitesses différentes.

♣ Les Figures(5.24(b), 5.24(c)) présentent le champ $M-FTLE$ à l'arrivée du mascaret. On observe l'apparition de plus grandes valeurs du $M-FTLE$ parce que le front du mascaret en surface présente une vitesse négative, qui génère dans la couche supérieure des structures tourbillonnaires comme dans une couche de mélange (Figure 5.28).

Dans le domaine $D = [650, 950] \times [200, 400]$ sur la figure(5.24(b)). On note que, les plus fortes valeurs de $M-FTLE$ divisent la zone en deux régions de vitesses différentes (couche de mélange) où les particules en haut de la zone de couche sont transportées dans le sens inverse de l'écoulement principal.

On prend des positions du centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_{i_0}(x_0, y_0)$ où $x_0 = 940 + 10 i$ et $y_0 = 330 + 5 j$ (où $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, \dots, 12$) (Dans $[940 : 970] \times [330 : 390]$). On veut étudier l'évolution temporelle de ces domaines dans cette zone (voir Figure 5.29). On note qu'il y a dans la couche supérieure des structures tourbillonnaires comme dans une couche de mélange parce que le front du mascaret en surface présente une vitesse négative (Figures 5.29(d), 5.29(e), 5.29(f), 5.29(g)).

Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont faibles parce que l'écoulement initial est resté uniforme. Au fond du canal, dans la couche limite, on note l'apparition de fortes valeurs de $M-FTLE$ dans certaines zones. Dans ces zones, il y a des petits tourbillons. La figure(5.30) présente l'évolution temporelle des domaines initiaux contenant les traceurs et les trajectoires des centres de ces domaines et on voit des petits tourbillons dans la zone de couche limite (on prend des positions du centre du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}_{i_0}(x_0, y_0)$ où $x_0 = 940 + 10 i$ et $y_0 = 40 + 5 j$ où $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, \dots, 12$).

♣ Les Figures 5.24(d), 5.24(f) présentent le champ de $M-FTLE$ au passage de la première vague du mascaret. En haut, on n'observe pas d'apparition d'une zone de grandes valeurs du $M-FTLE$, parce que la hauteur de vague h est très petite. Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont très faibles parce que l'écoulement initial est resté uniforme. Au fond du canal, dans la couche limite, de la même façon, on note une augmentation de valeurs dans certaines zones qui semblent former de petits tourbillons.

♣ La Figure(5.24(e)) présente le champ de $M-FTLE$ entre deux vagues du mascaret. En haut, on observe que le niveau d'eau monte le front de mascaret. Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont faibles mais on note l'apparition d'une légère augmentation dans certaines zones.

on observe que des bouffées turbulentes viennent contaminer l'écoulement central uniforme et un épaississement des couche limite. On ne trouve pas de structure cohérente de lagrangienne LCS .

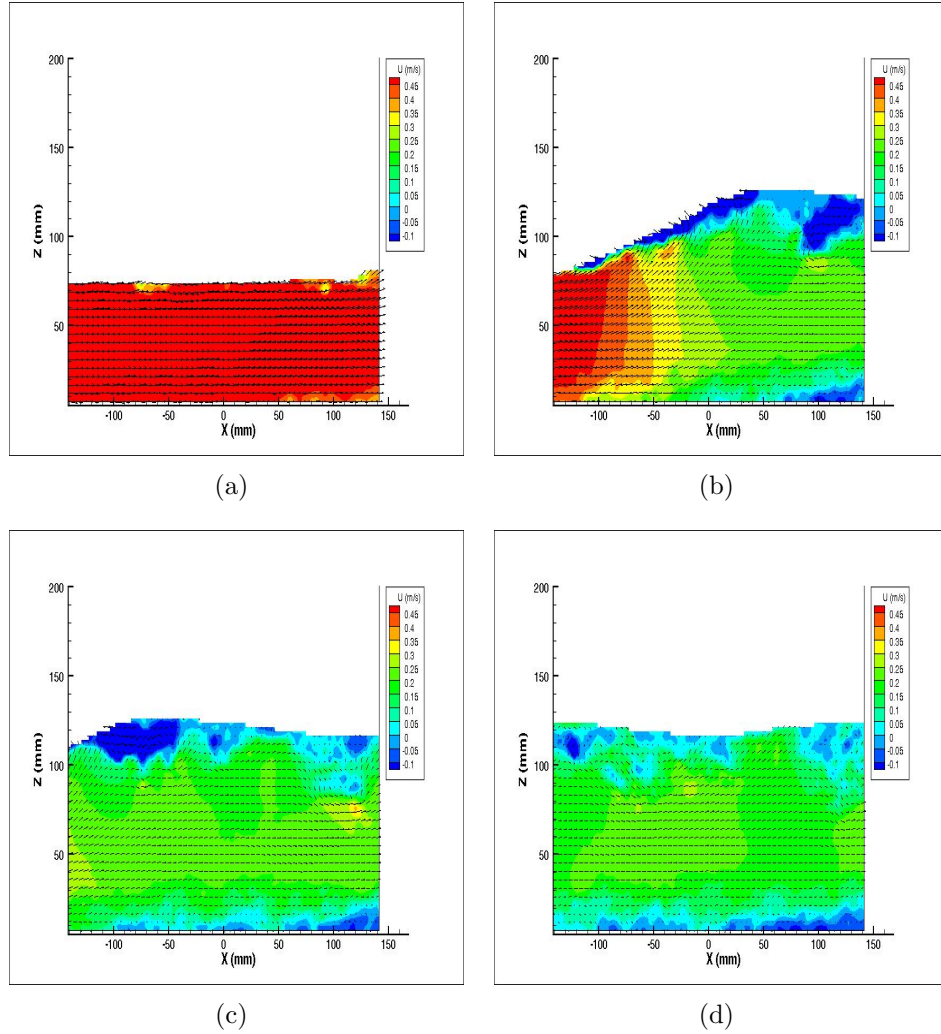


FIGURE 5.21 – Champs de vecteurs vitesse et iso contours de la composante longitudinale U des vitesses d'écoulement au passage du mascaret à différents instants au passage du front ; $Fr = 1,46$, (a) $t = 10,2$ s, (b) $t = 10,6$ s, (c) $t = 11$ s et (d) $t = 11,4$ s. ([50])

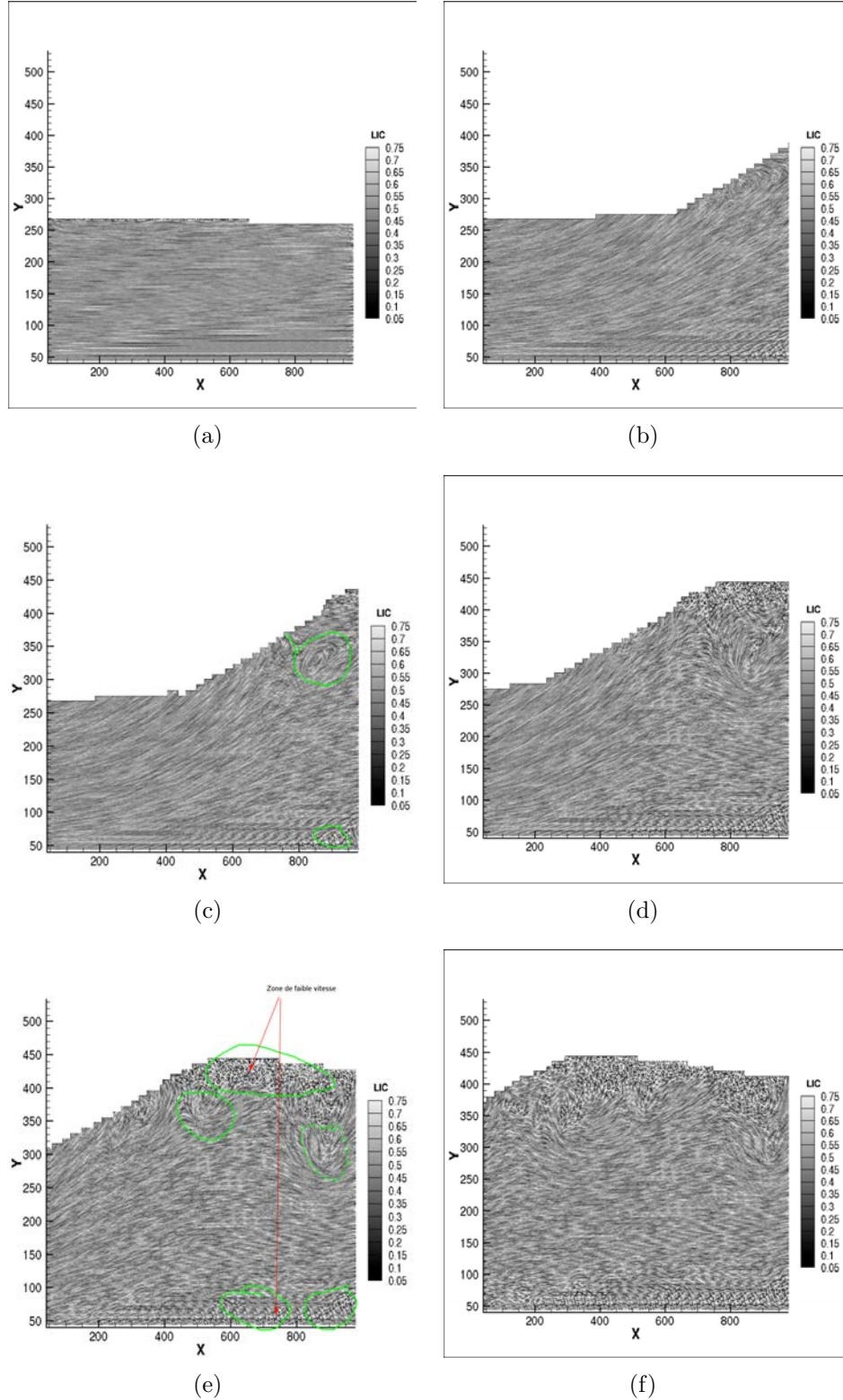


FIGURE 5.22 – Les *LIC* sur un bruit blanc pour décrire des champ vitesses expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1,46$ à différents instants au passage du front, pour un temps d'intégration $T = 8\text{ s}$ et sur un maillage cartésien régulier contenant 641601 (801×801) pixels.

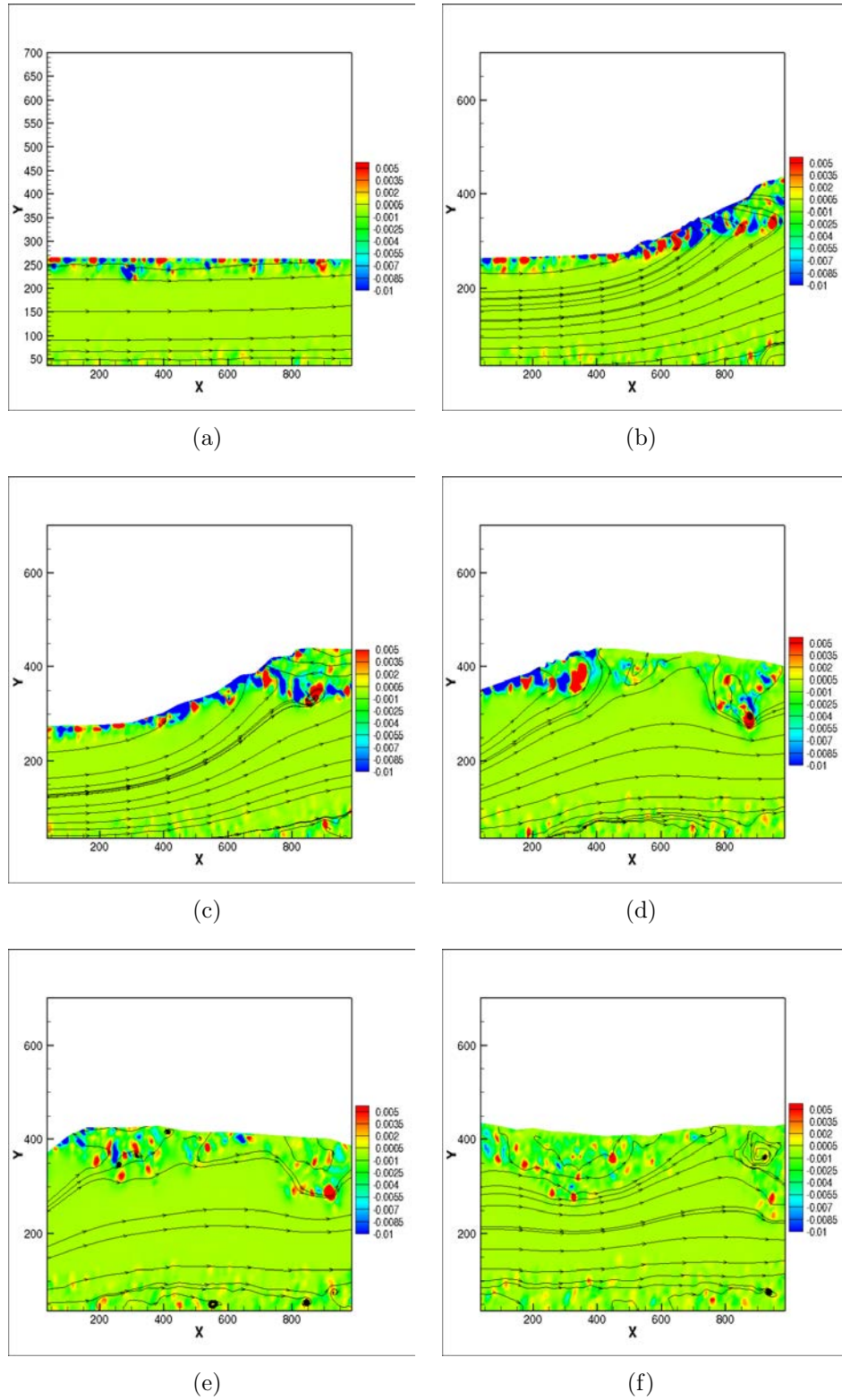


FIGURE 5.23 – Les champs de critère Q pour décrire les champs de vitesse expérimentaux du mascaret pour $Fr = 1,46$ à différents instants au passage du front avec des lignes de courant.

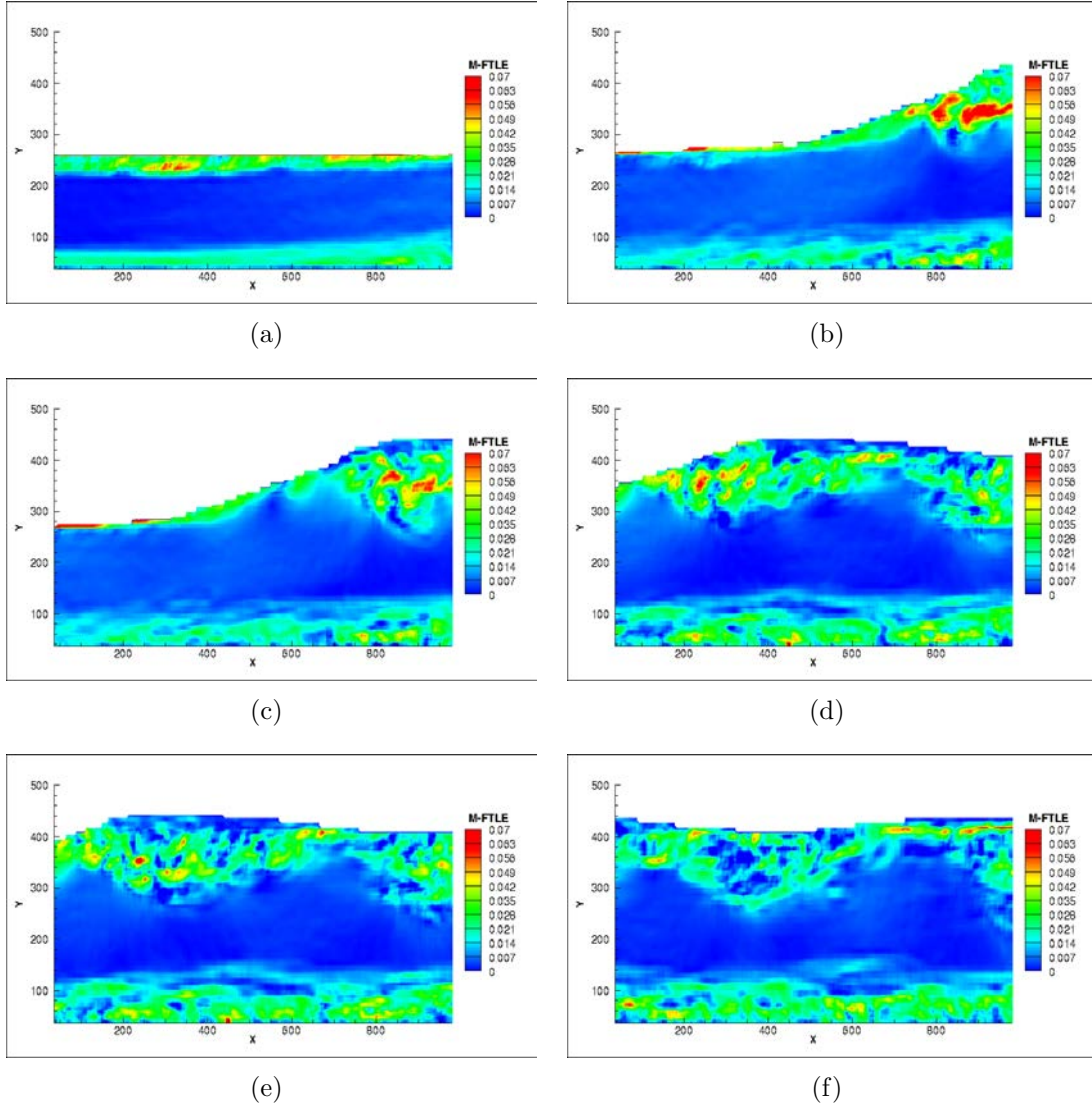


FIGURE 5.24 – Champs de M -FTLE calculés à partir des vitesses expérimentales du mascaret pour $Fr = 1.46$ à différents instants au passage du front, pour un temps d'intégration $T = 2$ s et sur un maillage cartésien régulier contenant 160000 nœuds.

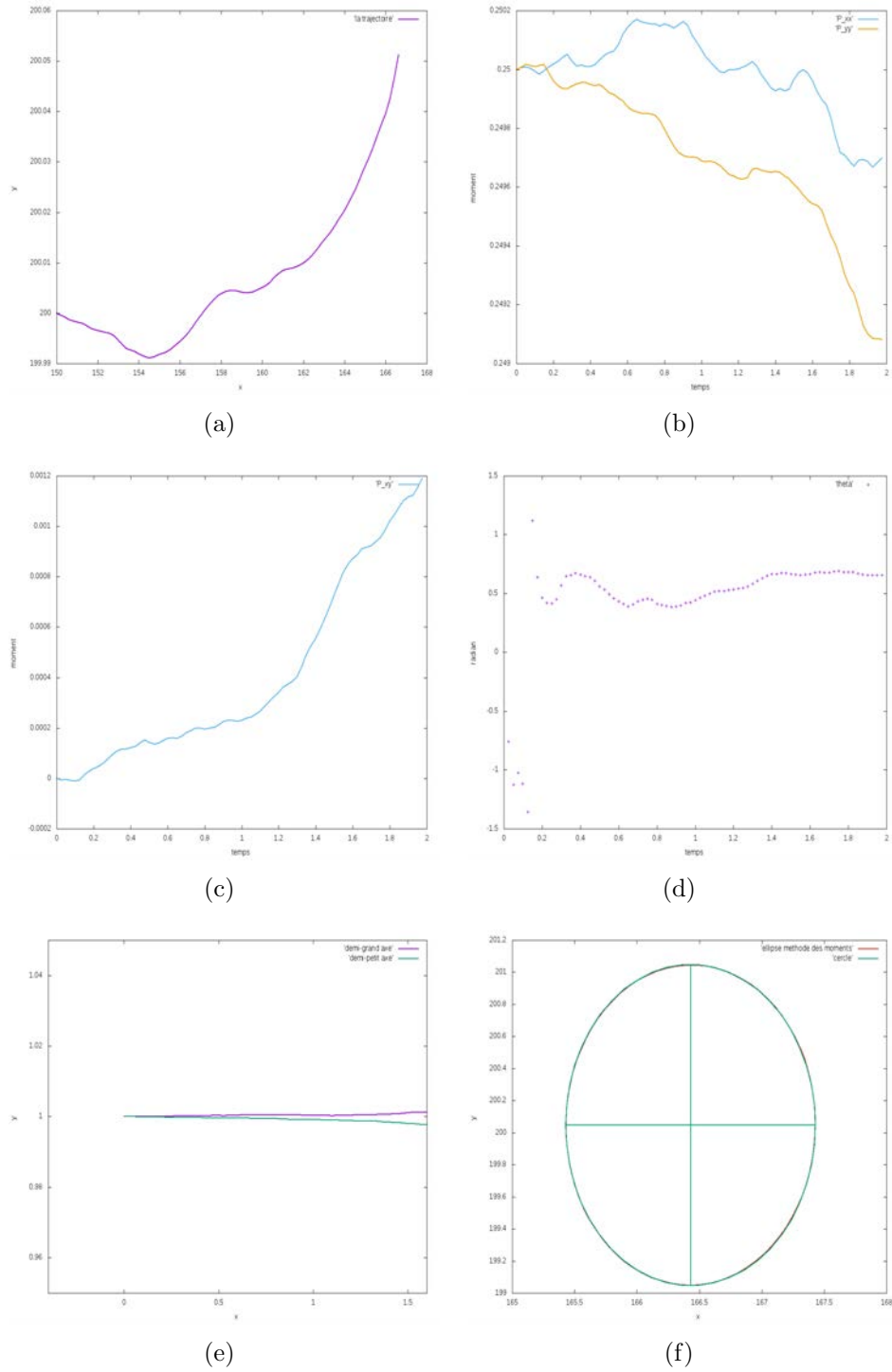


FIGURE 5.25 – Le nombre de Froude $Fr = 1.46$. Avant l'arrivée du mascaret, on prend la position $\mathbf{x}_0(150, 200)$ (au milieu du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de $\mathbf{x}_0$ sur la figure (5.24(a)) pour un temps d'intégration $T = 2$ s. (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.

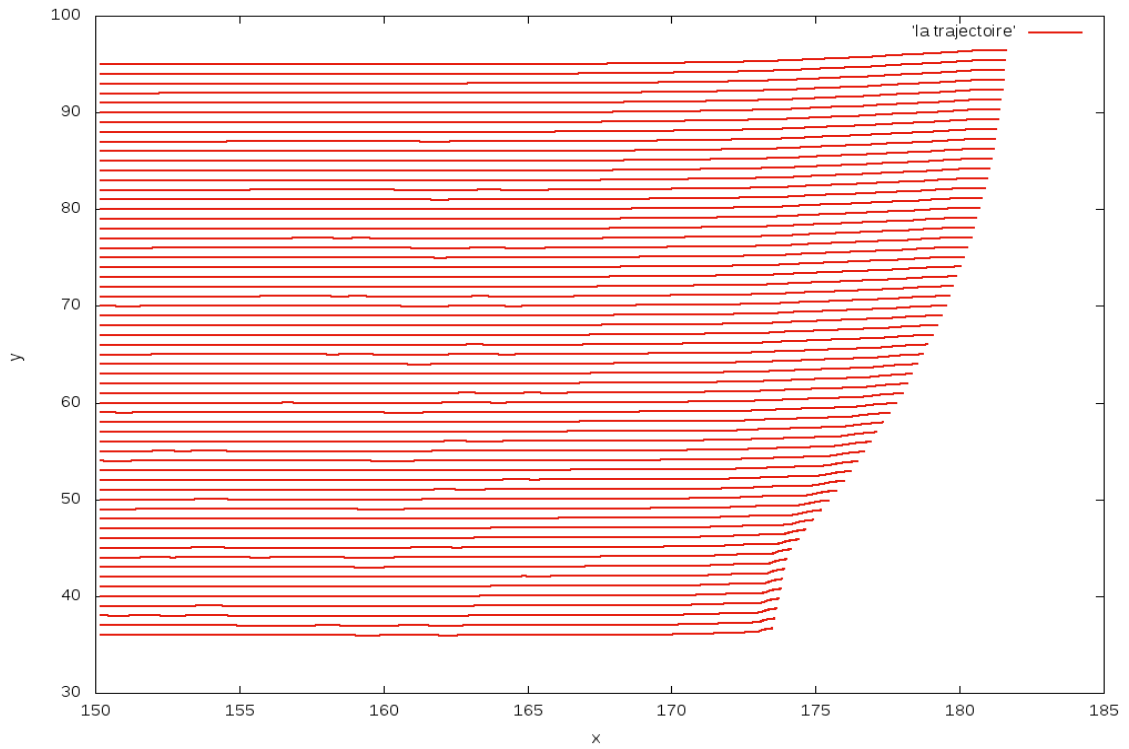


FIGURE 5.26 – Avant l’arrivée du mascaret, au fond du canal, dans la couche limite, les trajectoire des positions initiales du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}(150, 36 + 2i)$; $i = 25$. on note les trajectoires des particules dans la couche limite sont plus courtes par rapport aux trajectoires qui sont au dessus.

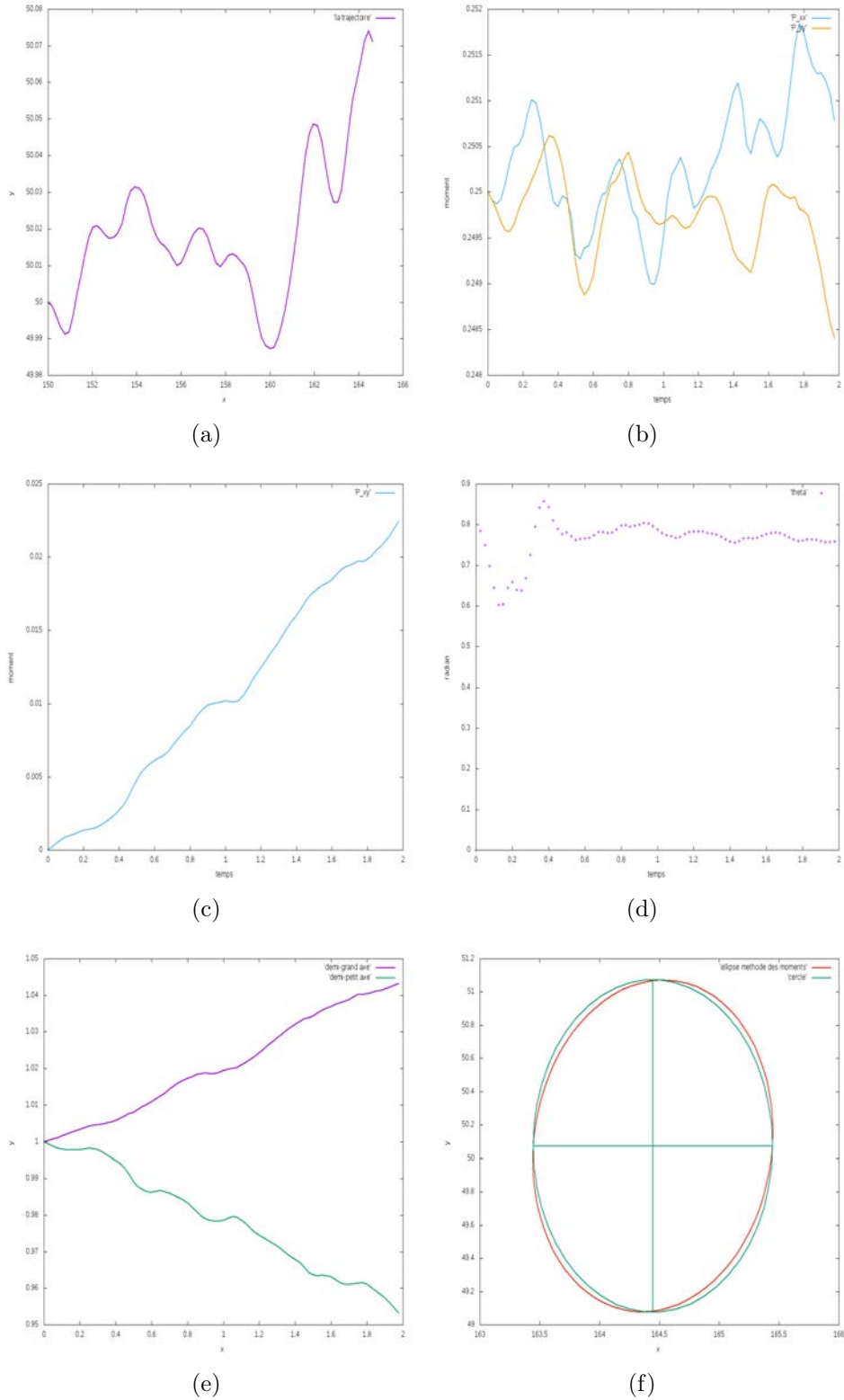


FIGURE 5.27 – Le nombre de Froude $Fr = 1.46$. Avant l'arrivée du mascaret (sur la figure (5.24(a))), on prend la position $\mathbf{x}_0(150, 50)$ (au fond du canal) qui est le centre du domaine initial contenant le traceur. (a) La trajectoire issue de $\mathbf{x}_0$ pour un temps d'intégration $T = 2$ s. (b) Évolution des moments P_{x^2} et P_{y^2} . (c) Évolution du moment P_{xy} . (d) Évolution du demi-grand axe et demi-petit axe du domaine initial contenant le traceur. (e) Évolution de l'angle de rotation du domaine initial contenant le traceur. (f) Le domaine contenant le traceur au temps d'intégration $T = 2$ s et un cercle de même centre de domaine et de même rayon que celui du domaine initial contenant le traceur.

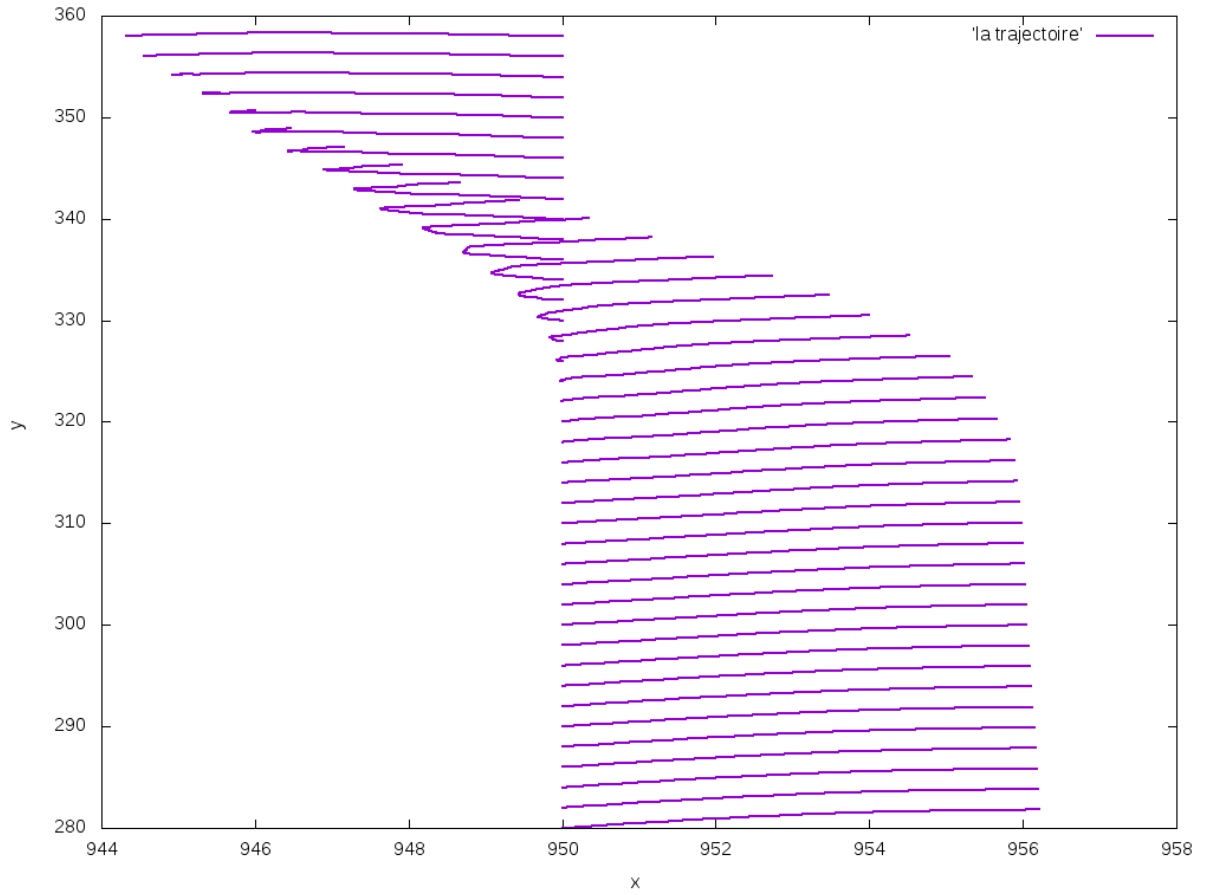
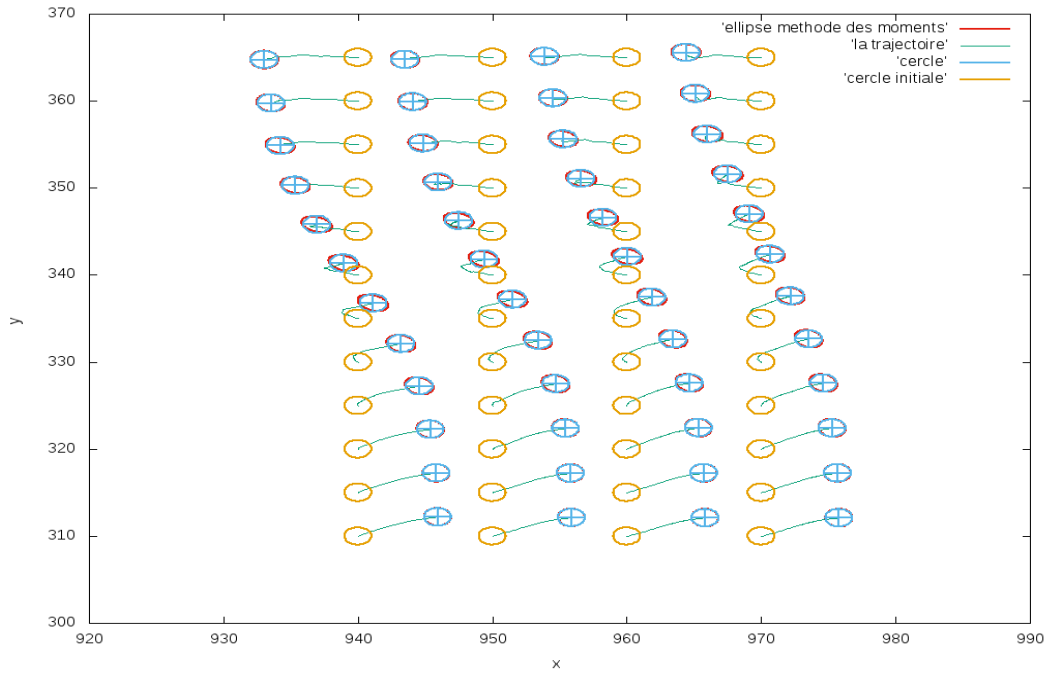
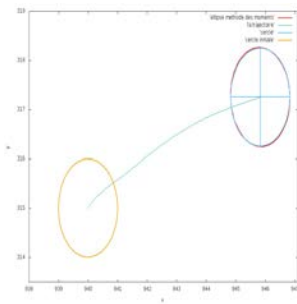


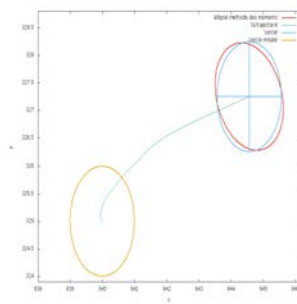
FIGURE 5.28 – À l'arrivée du mascaret, les trajectoires des positons initiales du domaine contenant le traceur $\mathbf{x}(950, 280 + 4i)$; $i = 20$. Les points dans la zone de couche de mélange.



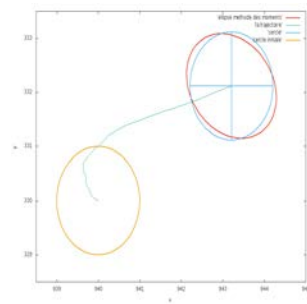
(a)



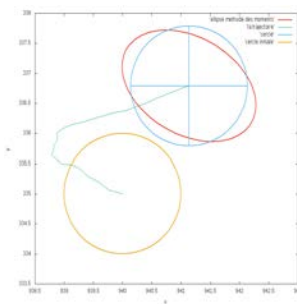
(b)



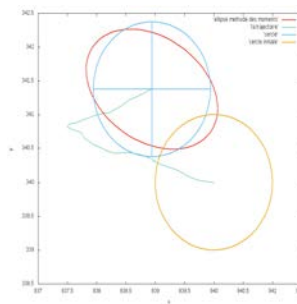
(c)



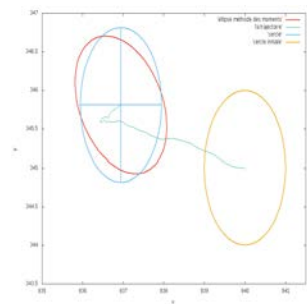
(d)



(e)

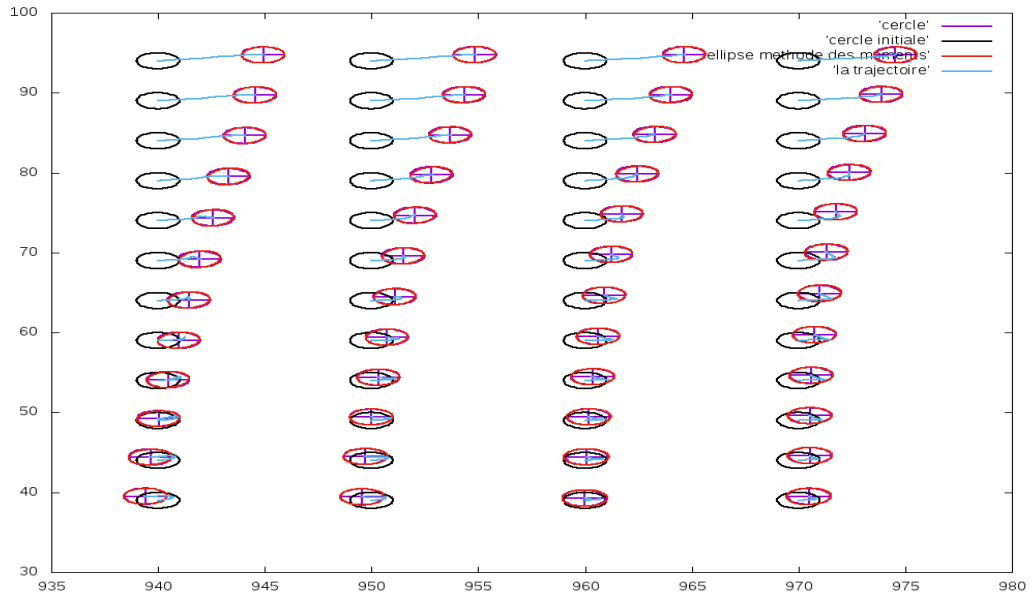


(f)

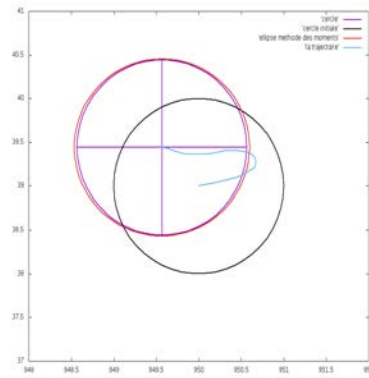


(g)

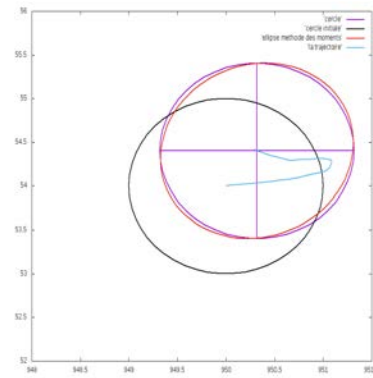
FIGURE 5.29 – Évolution temporelle pour des traceurs de particules sous un écoulement de type mascaret et les trajectoires de ses centres. Si le centre $\mathbf{x}_0(940, 315)$ en (b), $\mathbf{x}_0(940, 325)$ en (c), $\mathbf{x}_0(940, 330)$ en (d), $\mathbf{x}_0(940, 335)$ en (e), $\mathbf{x}_0(940, 340)$ en (f), $\mathbf{x}_0(940, 345)$ en (g). La couleur jaune pour domaine initial contenant le traceur, bleu pour l'ellipse qu'il décrit l'évolution de la matrice des moment d'ordre 2 dans le transport, rouge pour le cercle de centre de l'ellipse et de rayon du domaine initial. La trajectoire est représentée en vert.



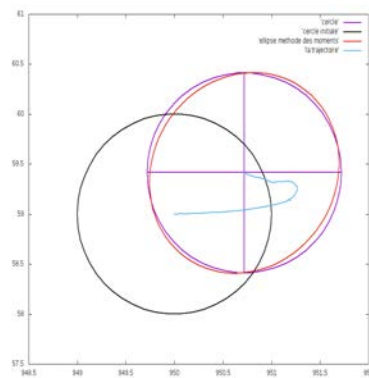
(a)



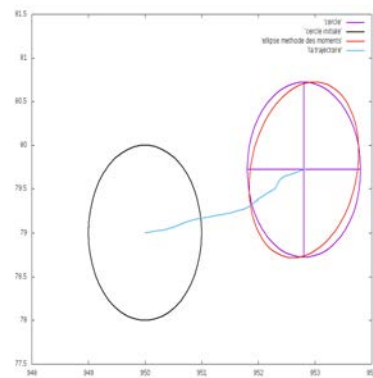
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURE 5.30 – Évolution temporelle pour des traceurs de particules dans un écoulement de type mascaret et les trajectoires de ses centres. Si le centre $\mathbf{x}_0(950, 37)$ en (b), $\mathbf{x}_0(950, 54)$ en (c), $\mathbf{x}_0(950, 70)$ en (d) et $\mathbf{x}_0(950, 79)$ en (e). La couleur noir pour le domaine initial contenant le traceur, rouge pour l'ellipse qu'il décrit l'évolution de la matrice des moment d'ordre 2 dans le transport, violette pour le cercle de centre de l'ellipse et de rayon du domaine initial. La trajectoire est représentée en bleue.

5.3 Conclusion

Les résultats concernent l'identification des structure d'écoulement de mascaret (nombres de Froude $Fr = 1, 29$) à l'aide de l'exposant de Lyapunov à temps fini $FTLE$ à partir des moments d'ordre 2. Avant le passage du front du ressaut, le mouvement des particules est rectiligne et uniforme. Le champ de $M-FTLE$ est également uniforme sauf au fond de canal. Dans la couche limite, les trajectoires sont courtes parce que les vitesses sont faibles et semblent former de petits tourbillons, donc les valeurs de $M-FTLE$ augmentent. Au niveau du front, on observe une élévation et un ralentissement des particules et l'apparition d'une zone de couche de mélange sous la surface libre.

Pour un nombre de Froude $Fr = 1, 46$, le front du mascaret en surface présente une vitesse négative qui génère dans la couche supérieure des structures tourbillonnaires comme dans une couche de mélange, donc les valeurs de $FTLE$ sont maximales près de la surface libre. Au milieu, les valeurs de $M-FTLE$ sont faibles parce que l'écoulement initial est uniforme. Au fond de canal, les valeurs de $M-FTLE$ sont maximales parce que, dans la couche limite, se produit localement une inversion du sens de l'écoulement donc les trajectoires semblent former de petits tourbillons.

On observe que les plus grandes valeurs de $M-FTLE$ se situent au voisinage de la surface libre et des zones de couche de mélange ($Fr = 1, 29$) ou des structures tourbillonnaires ($Fr = 1, 46$) où la génération d'une couche de mélange tourbillonnaire entre l'écoulement incident et la partie supérieure de l'écoulement réfléchi. Au fond du canal, on observe des zones de tourbillons.

Dans cette exemple, on trouve un Structure Cohérente de Lagrangienne LCS parabolique dans la zone de mélange pour $Fr = 1, 29$. Pour $Fr = 1, 46$, on trouve : il y a des bouffées turbulentes viennent contaminer l'écoulement central uniforme et un épaississement des couche limite. On ne trouve pas de structure cohérente de lagrangienne LCS . Les couches de mélange au fond et en haut de l'écoulement sont la cause de les fortes valeurs de $M-FTLE$.

Conclusion et perspectives

Ce travail de doctorat a été l’occasion d’étudier l’approche lagrangienne pour visualiser et identifier les structures cohérentes dans un écoulement instationnaire. Les écoulements étudiés peuvent être soit numériques, soit expérimentaux. Les exposants de Lyapunov à temps fini sont bien connus dans l’étude des systèmes dynamiques. Ils montrent la croissance asymptotique des perturbations infinitésimales et permettent d’identifier les structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*). Cependant, la méthodologie de calcul actuelle des *FTLE* exige l’évaluation numérique d’un grand nombre de trajectoires de particules fluides sur un maillage cartésien ou adaptatif qui est superposé aux champs de vitesses simulés ou mesurés. À partir des années 2000, le calcul des champs de *FTLE* pour d’identification des structures cohérentes lagrangiennes (*LCS*) a émergé dans les œuvres de Wiggins, Haller, Marsden, Lekien et Shadden.

Le travail de cette thèse, a été de définir une nouvelle méthode pour le calcul du champ de *FTLE* d’un écoulement. Pour cela, au chapitre trois nous avons développé la méthode de transports des moments pour un domaine contenant des traceurs passifs (particules fluides). Cela a permis en étudiant l’évolution temporelle des moments centrés d’ordre 2, et en l’assimilant géométriquement ces domaines à des ellipses en (2D) ou ellipsoïde en (3D), de donner une nouvelle définition des *FTLE*, au chapitre quatre, les *M-FTLE*, qui permettent de quantifier l’étirement de ces domaines au cours du temps. Nous avons validé cette approche, en montrant théoriquement que notre champ de *M-FTLE* correspondait au champ de *FTLE* calculé à partir du tenseur de Cauchy-Green [3]. Nous l’avons comparé numériquement au *FTLE* pour des exemples de champs de vitesses classiques de la littérature (champ de vitesse linéaire, hyperbolique, double-gyre), et nous avons montré sa stabilité vis-à-vis du rayon du domaine circulaire initial.

Cette méthode de calcul a été appliquée, au chapitre cinq, à des données de champ de vitesse expérimental du mascaret obtenu par *PIV* au sein l’institut Pprime. Elle a permis d’identifier les zones de mélange de l’écoulement, en particulier dans la partie haute de l’écoulement où a lieu la rencontre entre l’écoulement principal et le ressaut se propageant en sens inverse. Au fond du canal, on a visualisé la couche limite et la zone de tourbillons.

Notre calcul de *FTLE*, à partir de la méthode des moments d’ordre 2, a l’avantage pour le calcul en un point, de transporter ce point et un moment centré autour de ce point (En 2D, pour utiliser la méthode de *M-FTLE*, on a besoin de résoudre les cinq équations différentielles (deux pour la trajectoire et trois pour les moments), tandis que la méthode de *FTLE* a besoin de résoudre les dix équations différentielles). Alors que la méthode de calcul classique nécessite le transport d’au moins quatre points pour évaluer le tenseur de Cauchy-Green. De plus, notre méthode est stable vis-à-vis du rayon du domaine circulaire initial.

Perspectives

Passage 3D : On a calculé le champ de M - $FTLE$ dans des écoulement à deux dimensions. La suite logique serait de calculer le champ de M - $FTLE$ sur des écoulements en trois dimensions.

Maillage adaptatif : Dans les endroits où l'écoulement est plus complexe, où le champ d'exposants de Lyapunov connaît des variations très violentes. Un maillage régulier ne nous permet pas d'avoir des résultats précis à moins d'appliquer la précision nécessaire à la capture des crêtes à tout le domaine, provoquant une explosion du temps de calcul. C'est là que l'adaptation de maillage entre en jeu. L'idée est de concentrer le nombre de mailles là où c'est réellement nécessaire, là où le problème mérite notre attention et notre temps de calcul. il serait très intéressant de calculer le champ de M - $FTLE$ sur un maillage adaptatif.

Transport/diffusion : Nous avons commencé à aborder ce sujet à la fin du chapitre trois, mais sans le développer par la suite. Mais il serait très intéressant de calculer le champ de M - $FTLE$ pour des problèmes d'advection/diffusion.

Moments d'ordre supérieur : l'étude du transport de ces moments nous donnera des informations supplémentaires sur la courbure (torsion) et les non-linéarités.

Écoulement compressible : étude des écoulements compressibles mais cela nécessite de nouvelles équations de transport pour calculer le champ de M - $FTLE$.

Particules solides : stabilité du trajectoire de particules solides avec une inertie, décrite par les équations de *Maxey-Ryley*.

Bibliographie

- [1] PHILIPPE Miron. *Adaptation anisotrope sur des structures lagrangiennes cohérentes en mécanique des fluides*. Mémoire de maîtrise ès Sciences Appliquées de l'École Polytechnique de Montréal, 2012.
- [2] D.V. Anosov and V.I. Arnold. *Dynamical system I, ordinary Differential Equation and Smooth Dynamical systems*. Encyclopedia of mathematical sciences, Espringer-Verlay, 1983.
- [3] S.C. Shadden, F. Lekien, and J.E.Marsden. *Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows*. Physica D : Nonlinear Phenomena, 212(3-4) :271–304, 2005.
- [4] P. Miller, C. Jones, A. Rogerson and L. Pratt. *Quantifying transport in numerically generated velocity fields*. Physica D, 110, 105–122, 1997.
- [5] F. Lekien, S.C. Shadden and J. Marsden. *Lagrangian coherent structures in n-dimensional systems*. Journal of Mathematical Physics 48, 2007.
- [6] F. Lekien, C. Coulliette, A. Mariano, E. Ryan, L. Shay, G. Haller and J. Marsden. *The correlation between surface drifters and coherent structures based on high-frequency radar data in monterey bay*. Deep-Sea Research Part Ii-Topical Studies in Oceanography, 56 (3–5), 161–172, 2009.
- [7] G. Haller. *Lagrangian coherent structures from approximate velocity data*. Physics of Fluids, 14 (6), 1851–1861, 2002.
- [8] G. Haller. *Lagrangian structures and the rate of strain in a partition of two-dimensional turbulence*. Physics of Fluids A, 13, 3368–3385, 2001.
- [9] G. Haller. *Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields*. CHAOS, 10 (1), 99–108, 2000).
- [10] G. Haller and A. Poje. *Finite time transport in a periodic flows*. Physica D : Nonlinear phenomena 119, 3, 352 - 380 (1998).
- [11] J. Kasten, C. Petz, I. Hotz, B. Noack and H.-C. Hege. *Localized finite-time Lyapunov exponent for unsteady flow analysis*. Magnor, M., Rosenhahn, B., Theisel, H. (eds.) Vision Modeling and Visualization, vol.1, pp. 265–274, 2009.
- [12] M. Dellnitz and O. Junge. *On the approximation of complicated dynamical behavior*. SIAM J Numer Anal; 36 : 491-515, 1998.
- [13] A. Lasota and MC. Macke. *Fractals and noise. Stochastic aspects of dynamics*. Springer-Verlag, 1994.
- [14] M.A. Green, C.W. Rowley, and G. Haller. *Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence*. J. Fluid Mech., 572, 111 – 120, doi :10.1017/S0022112006003648, 2007.
- [15] S. Kent. *Lagrangian Coherent Structures : Generalizing Stable and Unstable Manifolds to Non-Autonomous Dynamical Systems*. Spring, 2008.

-
- [16] M. Branicki and S. Wiggins. *Finite-time Lagrangian transport analysis : Stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories and finite-time Lyapunov exponents*. Nonlin. Processes Geophys., 17(1), 1–36, doi :10.5194/npg-17-1-2010.
 - [17] G.A. Voth, G. Haller and J.P. Gollub. *Experimental measurements of stretching fields in fluid mixing*. Nonlin. Processes Geophys., 17(1), 1–36, doi :10.5194/npg-17-1-20Phys, Rev. Lett. 88 (254501), 2002.
 - [18] T.Y. Koh and B. Legras. *Hyperbolic lines and the stratospheric polar vortex*. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 12 (2), 382–394, 2002.
 - [19] M. Mathur, G. Haller, T. Peacock, J.E. Ruppert-Felsot and H.L. Swinney. *Uncovering the Lagrangian skeleton of turbulence*. Phys. Rev. Lett. 98 :144502 (2007)
 - [20] J. BARROW-GREEN. *Poincaré and the Three-Body Problem. History of Mathematics* ,11, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1997.
 - [21] A. CHENCINER. *De la Mécanique Céleste la théorie des Systèmes Dynamiques, aller et retour*, Épistémologie des systèmes dynamiques, Paris, 1999.
 - [22] B. Hasselblatt. *Introduction aux systèmes dynamiques et applications à un modèle cosmologique*, Ency. Math. App.54, Camb. Univ. Press, 1995.
 - [23] T. Sari. *Introduction aux systèmes dynamiques et applications à un modèle cosmologique*, in *Géométries et Dynamiques*, K. Sadallah et A. Zeghib (editeurs), Hermann Travaux en Cours 70, 259-274, 2008.
 - [24] F. d'Ovidio, V. Fernández, E. Hernández-García and C. López, *Mixing structures in the Mediterranean Sea from finite-size Lyapunov exponents*. Geophys. Res. Lett.31(17), L17203-1–L17203-4, doi :10.1029/2004GL020328, 2004.
 - [25] A.J. Mariano, A. Griffa, T.M. Özgökmen and E. Zambianchi. *Lagrangian analysis and predictability of coastal and ocean dynamics*. J. Atmos. Ocean. Technol.19(7), 1114–1126, 2002.
 - [26] G. Boffetta, G. Lacorata, G. Redaelli and A. Vulpiani. *Detecting barriers to transport : a review of different techniques*. Physica D159, 58–70, 2001.
 - [27] F. Sadlo and R. Peikert. *Efficient visualization of lagrangian coherent structures by filtered AMR ridge extraction*. IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.13(5), 1456–1463 (2007).
 - [28] D. Karrasch, G. Haller. *Do Finite-Size Lyapunov Exponents Detect Coherent Structures ?* . (2013). [http ://arxiv.org/abs/1307.7888](http://arxiv.org/abs/1307.7888).
 - [29] E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin and A. Vulpiani. *Predictability in the large : an extension of the concept of Lyapunov exponent*. Journal of Physics A : Mathematical and General,30(3),4, doi :10.1088/0305-4470/30/1/003, 1997.
 - [30] F. d'Ovidio, J. Isern-Fontanet, C. Lopez, E. Hernández-Garcia and E. Ladona. *Comparison between Eulerian diagnostics and Finite-Size Lyapunov Exponents computed from altimetry in the Algerian basin*. Deep-Sea Research I, 56 :15–31, 2009.
 - [31] A. Lasota and M. C. Mackey. *Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*. Springer-Verlag, second edition, 1994.
 - [32] M. Dellnitz and O. Junge. *On the approximation of complicated dynamical behavior*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 36 :491–515, 1998.
 - [33] G. Froyland and K. Padberg. *Almost-invariant sets and invariant manifolds - Connecting probabilistic and geometric descriptions of coherent structures in flows*. Physica D, 236 (16) :1839-1863, 2009.
 - [34] P. Tallapragada and S. Ross. *Schmale. Lagrangian coherent structures are associated with fluctuations in airborne microbial populations*. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science , (21), 033122, 2011.
 - [35] P. Tallapragada and S. Ross. *A geometric and probabilistic description of coherent sets*. Preprint, Submitted to SIAM Journal of Dynamical Systems, 2011.

- [36] P. Tallapragada and S. Ross. *A set oriented definition of the finite-time Lyapunov exponents and coherent sets*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(5), 1106-1126, 2012.
- [37] P. Tallapragada and S. Rose. *A set oriented definition of finite-time Lyapunov exponents and coherent sets*. Elsevier, 2012.
- [38] Froyland G. Statistically. *optimal almost-invariant sets*. Physica D 2005 ;200 :205–19
- [39] Froyland G, Lloyd S, Santitissadeekorn N. *Coherent sets for nonautonomous dynamical systems*. Physica D 2010 ;239 :1527–41.
- [40] Froyland G, Santitissadeekorn N, Monahan A. *Transport in time-dependent dynamical systems : finite time coherent sets*. Chaos 2010 ;20 :043116
- [41] Froyland G, Santitissadeekorn N, Monahan A. *Optimally coherent sets in geophysical flows : a new approach to delimiting the stratospheric polar vortex*. Phys. Rev. E 2010 ;82 :056311.
- [42] Froyland G. Statistically. *optimal almost-invariant sets*. Physica D 2005 ;200 :205–19
- [43] J.Boussinesq. *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*. C. R. Acad. Sci. Paris, 755. (1871)
- [44] J.Fenton . *A ninth-order solution for the solitary wave*. Journal of Fluid Mechanics,53, 257-271.(1972)
- [45] R.Grimshaw. *The solitary wave in water of variable depth*. Part 2. Journal of Fluid Mechanics, 46, 611-622. (1971)
- [46] Lee, J.-J., Skjelbreia, J. E., Raichlen, F. and *Measurements of velocities in solitary waves*. J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., WW2(108), 200-218. (1982)
- [47] J.McCowan. *On the solitary wave*. Philosophy Magazine, 32(5), 45-58. (1891)
- [48] M.Tanaka. *The stability of solitary waves*. Physics of Fluids,29, 650-655. (1986)
- [49] Russell,J.S.(1845). *Report on Waves*. Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844, (pp311-390, PlatesXLVII-LVII). London.
- [50] L.David, L.Chatellier, D.Callaud, G.Rousseaux, L.Thomas , *Etude du mascaret en laboratoire*. 14ème CONGRÈS FRANCOPHONE DE TECHNIQUES LASER (CFTL2014) MARSEILLE, (15–19 Septembre 2014)
- [51] P.Bonneton, J.Van de Loock, J-P.Parisot, N.Bonneton, A.Sottolichio, G. Detandt, B.Castelle, V.Mariou et N.Pochon, *On the occurrence of tidal bores – the garonne river case*. Journal of Coastal Research, 64 :1–4, 2011. (Cit  en pages 19 et 28.)
- [52] H. Chanson : *Current knowledge in tidal bores and their environmental, ecological and cultural impacts*. Environmental Fluid Mechanics, 11 :77–98, 2011. (Cit  en pages 19 et 24.)
- [53] P. Lubin, S. Glockner et H. Chanson : *Numerical simulation of a weak breaking tidal bore*. Mechanics Research Communications. 37 :119–121, 2010. (Cit  en page 19.)
- [54] D. Mouaze, H. Chanson et B. Simon : *Field measurements in the tidal bore of the s lune river in the bay of mont saint michel (september 2010)*. Rap. tech., University Of Queensland, 2010. (Cit  en pages 19 et 29.)
- [55] E. Wolanski, D. Williams, S. Spagnola et H. Chanson : *Undular tidal bore dynamics in the daly estuary, northern australia*. Estuarine, Coastal and Shelf Science, 60 :629–636, 2004. (Cit  en pages 19 et 25.)
- [56] Hill. *On a Spherical Vortex* . Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A (1887-1895). 1894-01-01. 185 :213–245

-
- [57] A. D. Taylor. *Conformal map transformations for meteorological modelers*. Computers and Geosciences, 23 :63-75, (1997).
 - [58] K. Ide, D. Small, and S. Wiggins. *Distinguished hyperbolic trajectories in time dependent fluid flows : Analytical and computational approach for velocity fields as data sets*. Nonlinear Processes in Geophysics, 9 :237-263, 2002.
 - [59] S. Wiggins. *Chaotic transport in dynamical systems, Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, first edition, 1993.
 - [60] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Texts in Applied Mathematics. Springer, second edition, 2003.
 - [61] G.Froyland and K.Padberg. *Almost-invariant sets and invariant manifolds - Connecting probabilistic and geometric descriptions of coherent structures in flows*. Physica D, 236 (16) :1839-1863, (2009).
 - [62] Froyland G. Statistically. *optimal almost-invariant sets*. Physica D 2005 ;200 :205-19
 - [63] Froyland G, Lloyd S, Santitissadeekorn N. *Coherent sets for nonautonomous dynamical systems*. Physica D 2010 ;239 :1527-41.
 - [64] Froyland G, Santitissadeekorn N, Monahan A. *Transport in time-dependent dynamical systems : finite time coherent sets*. Chaos 2010 ;20 :043116
 - [65] Froyland G, Santitissadeekorn N, Monahan A. *Optimally coherent sets in geophysical flows : a new approach to delimiting the stratospheric polar vortex*. Phys. Rev. E 2010 ;82 :056311.
 - [66] Froyland G. Statistically. *optimal almost-invariant sets*. Physica D 2005 ;200 :205-19
 - [67] B. Cabral and L. Leedom. *Imaging vector field using line convolution*. Dans computer Graphics (Proceedings de SIGGRAPH'93), page 263-272. ACM Press, 1993.
 - [68] L.K. Forsell and S.D. Cohen. *Using Line Integral Convolution for Flow Visualization : Curvilinear Grids, Variable Speed Animation, and Unsteady Flows*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1(2), pages 133-141, 1995.
 - [69] H.W. Shen and D.L. Kao. *UFLIC : a Line Integral Convolution Algorithm for Visualizing Unsteady Flows*. Yagel et H. Hagen, Editeurs (Proceedings de IEEE Visualization'97', pages 317-322, IEEE Press, 19-24 Octobre, 1997.
 - [70] B. Jobard. *Visualisation de champs de vecteurs bidimensionnels à base de streamlines*. Thèse de doctorat en informatique, Université du Littoral Côte d'Opale, 2000.
 - [71] G.L. Brown and A. Roshko. *On density effects and large structure in turbulent mixing-layers*. Journal of Fluid Mechanics, 64(4) :775-816, 1974.
 - [72] J.L. Lumley. *Whither turbulence ? turbulence at the crossroads*. Lecture Notes in Physics, volume 357. Springer-Verlag, 1990.
 - [73] A. Hussain. *Coherent Structures - Reality and Myth*. Physics of Fluids, 26(10) :2816-2850, 1983.
 - [74] J. Hunt, A. Wray and P. Moin. *Eddies, Stream, and Convergence Zones in Turbulent Flows*. Rapport Technique CTR-S88 :193, Center for Turbulence Research, (1988).
 - [75] J. Jeong and F. Hussain. *On the identification of vortex*. Journal of Fluid Mechanics, 285 :69-94, (1995).
 - [76] R.C. Strawn, D.N. Kenwright, and J. Ahmad. *Computer Visualisation of Vortex wake Systems*. AIAA Journal, 37(4), 511-512, 1999.
 - [77] M.Michard, L.Graiteaux and N.Grosjean . *Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows*. Measurement Science and Technology, 12, 1422-1429.(2001).

- [78] M. Michard, Th. Favelier. *Développement d'un critère d'identification de structures tourbillonnaires adapté aux mesures de vitesse par PIV*. 9-ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser, Bruxelles (Belgique), 14-17 septembre, D9, 2004.
- [79] K. Ismail. *Identification des structures et calcul des trajectoires dans des écoulements turbulents*. mémoire de mastère ENIM. (2004).
- [80] M.S. Chong , A.E. Perry , B.J. Cantwel. *A general classification of three- Dimensional flow field*, Phys. Fluids, A2, 765, 1990.
- [81] G. Haller. *An objective definition of a vortex*. J. Fluid. Mech., 525 :1–26, 2005.
- [82] R. Cucitore, M. Quadrio and A. Baron. *On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex*. Eur. J. Mech. B/Fluids 18, 261–282. 1999.
- [83] V.Kolàr. *Vortex identification : New requirements and limitations*. Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol.28, Issue 4, 638-652. 2007.
- [84] F. Aloui, F. Réhimi, N. Ait Mouheb, S. Ben Nasrallah et L. Doubriez. *Étude expérimentale de la dynamique des structures tourbillonnaires cohérentes générées par un obstacle de forme cylindrique ou carrée centré entre deux plans parallèles horizontaux*. 10 ème Congrès Francophone de Techniques Laser, CFTL10, 19-22 septembre, Toulouse, France. 2006.
- [85] L. GRAFTIEAUX, M. MICHARD and N. GROSJEAN. *Combining piv, pod and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows*. Measurement Science and Technology 12, 1422–1429. 2001.
- [86] P. Chakraborty, S. Balachandar and R. Adrian. *On the relationships between local vortex identification schemes*. J. Fluid Mech. 535, 189–214. 2005.
- [87] A. Koched, M. Pavageau et F. Aloui. *Détection expérimentale de structures tourbillonnaires au sein d'un jet plan en impact*. 19-ème Congrès Français de Mécanique. Marseille, 24-28 août 2009.
- [88] Y. HALLEZ. *Mélange gravitationnel de fluides en géométrie confinée*. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, Dynamique des Fluides , 2007.
- [89] M. Farazmand and G. Haller. *Computing Lagrangian Coherent Structures from their variational theory*. Chaos, 22 :013128, 2012.
- [90] M. Farazmand and G. Haller. *Attracting and repelling Lagrangian coherent structures from a single computation*. Chaos, 23 :023101, 2013.
- [91] M. Farazmand, D. Blazeovski et G. Haller. *Shearless transport barriers in unsteady two-dimensional flows and maps*. Physica D, 278-279 :44-57, 2014.
- [92] M. Farazmand and G. Haller. *The Maxey-Riley equation : Existence, uniqueness and regularity of solutions*. J. Nonlinear Analysis-B, 2014. In press.
- [93] M. Farazmand and G. Haller. *How coherent are the vortices of two- dimensional turbulence ?* arXiv preprint arXiv :1402.4835, 2014.
- [94] A. Hadjighasem, M. Farazmand and G. Haller. *Detecting invariant manifolds, attractors, and generalized KAM tori in aperiodically forced mechanical systems*. Nonlinear Dynamics, 73(1-2) :689-704, 2013.
- [95] G. Haller. *A variational theory of hyperbolic Lagrangian Coherent Structures*. Physica D, 240 :574-598, 2011
- [96] G. Haller and F.J. Beron-Vera. *Geodesic theory of transport barriers in two-dimensional flows*. Physica D, 241(20) :1680-1702, 2012.
- [97] G. Haller and F.J. Beron-Vera. *Coherent Lagrangian vortices : The black holes of turbulence*. J. Fluid Mech., 731, R4, 2013.
- [98] D. Blazeovski and G. Haller. *Hyperbolic and elliptic transport barriers in three-dimensional unsteady flows*. submitted, 2013.

-
- [99] T. Ma and E.M. Bollt. *Differential geometry perspective of shape coherence and curvature evolution by finite-time non-hyperbolic splitting*. arXiv preprint arXiv :1311.5457, 2013.
 - [100] A. Lasota and M.C. Mackey. *Chaos, fractals, and noise : stochastic aspects of dynamics*, volume 97. Springer, 1994.
 - [101] G. Froyland. *An analytic framework for identifying finite-time coherent sets in time-dependent dynamical systems*. Physica D, 250 :1-19, 2013.
 - [102] T. Ma and E.M. Bollt. *Relatively coherent sets as a hierarchical partition method*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 23(07), 2013.
 - [103] M.Budisic, R.Mohr, and I.Mezic. *Applied Koopmanism*. Chaos, 22 :047510, 2012.
 - [104] M. Budisic and I. Mezic. *Geometry of the ergodic quotient reveals coherent structures in flows*. Physica D : Nonlinear Phenomena, 241(15) :1255-1269,2012.
 - [105] E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani. *Predictability in the large : an extension of the concept of Lyapunov exponent*. Journal of Physics A : Mathematical and General, 30(1) :1, 1997.
 - [106] G. Haller. *Lagrangian coherent structures from approximate velocity data*. Physics of Fluids (1994-present), 14(6) :1851-1861, 2002.
 - [107] M. Mathur, G. Haller, T. Peacock, J. E. Ruppert-Felsot, and H. L.Swinney. *Uncovering the Lagrangian skeleton of turbulence*. Physical Review Letters, 98(14) :144502, 2007.
 - [108] A.M. Mancho, S. Wiggins, J. Curbelo, and C. Mendoza. *Lagrangian descriptors : A method for revealing phase space structures of general time dependent dynamical systems*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013.
 - [109] I.I. Rypina, S.E. Scott, L.J. Pratt, M.G. Brown and T.Tel. *Investigating the connection between complexity of isolated trajectories and Lagrangian coherent structures*. Nonlinear Processes in Geophysics, 18(6), 2011.
 - [110] V. Pérez-Munuzuri and F. Huhn. *Path-integrated Lagrangian measures from the velocity gradient tensor*. Nonlinear Processes in Geophysics, 20(6), 2013.
 - [111] I. Mezic, S. Loire, V.A. Fonoberov, and P. Hogan. *A new mixing diagnostic and Gulf oil spill movement*. Science, 330(6003) :486-489, 2010.
 - [112] F. Lekien and S. Ross. *The computation of finite-time Lyapunov exponents on unstructured meshes and for non-Euclidean manifolds*. Chaos, 20 :017505, 2010.
 - [113] K. Onu, F. Huhn and G. Haller, *LCS Tool : A Computational platform for Lagrangian coherent structures*, J. of Computational Science, 7 (2015) 26-36 .
 - [114] D. Oettinger, D. Blazeviski and G. Haller, *Global variational approach to elliptic transport barriers in three dimensions*. Chaos 26 (2016) 033114.

Résumé

Avec le développement de la technologie, les mesures des champs de vitesse instationnaire sont disponibles maintenant. Il s'en suit une augmentation de l'intérêt de l'analyse lagrangienne des données. Un outil central pour analyser les écoulements est l'exposant de Lyapunov à temps fini (*FTLE*). Il permet d'identifier les structures cohérentes lagrangiennes *LCS* qui apparaissent comme des crêtes du champ de *FTLE*. Les *LCS* sont des quasi barrières de transport et séparent le domaine fluide en régions aux propriétés dynamiques différentes. Cependant, la méthodologie de calcul actuelle des *FTLE* exige l'évaluation numérique d'un grand nombre de trajectoires de particules fluides sur un maillage cartésien ou adaptatif qui est superposé aux champs de vitesses simulées ou mesurées.

Dans ce travail de thèse, nous proposons une nouvelle méthode de calcul du champ de l'exposant de Lyapunov à temps fini *FTLE*. Pour cela, nous utilisons la méthode des moments d'ordre 2 qui permet d'évaluer au cours du temps la dispersion des particules distribuées uniformément dans un domaine circulaire ou elliptique. Nous appelons ce nouveau champ scalaire, champ de *M-FTLE*. Nous validons cette approche, théoriquement en tout point du domaine fluide en comparant *M-FTLE* et *FTLE* et aussi en faisant la comparaison sur des exemples classiques (champ de vitesse linéaire, circulaire ou hyperbolique) et sur un exemple numérique (champ de vitesse du double gyre).

Cette méthode est alors appliquée sur des données expérimentales du champ de vitesse du mascaret, obtenues au sein l'institut Pprime par vélocimétrie par image de particules *PIV*.

Mots-clés : *FTLE*, *LCS*, méthode des moments, structure cohérente, écoulement instationnaire, mascaret.

Abstract

With the development of technology, instantaneous flow fields coming from experiments or numerical simulation are available now. It has been followed by a rise of interest for the Lagrangian analysis of such data. One central tool to analyze the flow fields is the Finite Time Lyapunov Exponent (*FTLE*). It allows to the identify of the Lagrangian Coherent Structures (*LCS*) which appear as ridges in the *FTLE* fields. The *LCS* are quasi transport bareers and separatte the fluid domain into regions which have different dynamic properties. However, the computation methodology currently used in order to obtain the *FTLE* requires numerical evalution of a large number of fluid particle trajectories on cartesian or adaptive meshes that are superimposed on the original data grid.

In this thesis, we propose a new method for calculating the Finite Time Lyapunov Exponent *FTLE* fields. For this, we use the method of second-order moments which allows to evaluate over time the dispersion of particles uniformly distributed in a circular or elliptical domain. We call this new scalar field, the *M-FTLE* field. We validate this approach theoretically, at every point of the fluid domain by comparing *FTLE* and *M-FTLE* and also by the comparison of the classic examples (linear velocity field, circular and hyperbolic) and a numerical example (velocity field of double gyre).

This method is then applied on experimental measurements of tidal bore velocity fields, obtained within the institute Pprime by using a measurement technique called particle image velocimetry (*PIV*).

Keywords : *FTLE*, *LCS*, moments method, Coherent structure, unsteady flow, Tidal bore.