



HAL
open science

Modélisation du transport de particules dans un écoulement de Stokes à effet cliquet

Mounia Makhoul

► **To cite this version:**

Mounia Makhoul. Modélisation du transport de particules dans un écoulement de Stokes à effet cliquet. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université d'Avignon, 2016. Français. NNT : 2016AVIG0507. tel-01400160

HAL Id: tel-01400160

<https://theses.hal.science/tel-01400160>

Submitted on 30 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée à l'université d'Avignon et de Pays de Vaucluse pour obtenir
le grade de docteur en sciences : Mécanique —————

Modélisation du transport de particules dans un écoulement de Stokes à effet cliquet

Mounia MAKHOUL
11 Juillet 2016

Laboratoire d'accueil : *EMMAH*
Formation doctorale : ...

Membres du jury :

Premier rapporteur	<i>Pr. Philippe Fraunié</i> - président
Deuxième rapporteur	<i>Pr. Alain Bergeon</i>
Premier examinateur	<i>Édouard Canot</i>
Codirecteur de thèse	<i>Dr. Philippe BELTRAME</i>
Directeur de thèse	<i>Pr. Maminirina JOELSON</i>

Table des matières

Introduction	5
1 Etat de l'art	8
1.1 Motivation et applications	8
1.2 Du mouvement Brownien au transport directionnel	12
1.2.1 Les principaux systèmes à cliquets standards	15
1.2.2 Les rôles des effets spatial et temporel	18
1.2.3 Exemple d'effet cliquet spatial	19
1.3 Transport directionnel déterministe	20
1.4 Force hydrodynamique et interactions	21
2 Transport d'une particule ponctuelle : ratchet flow	27
2.1 Présentation du problème	28
2.2 Cas limites	31
2.3 Méthode de continuation et bifurcations	32
2.4 Cas symétrique	36
2.4.1 Symétrie de parité \mathcal{S} du système	36
2.4.2 Branches périodiques	37
2.4.3 Émergence de dynamique non-bornée	41
2.4.4 Transport périodique	44
2.5 Cas asymétrique	51
3 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné	60
3.1 Modèle numérique associé	61
3.1.1 Equations et adimensionnement	61
3.1.2 Les champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$	67
3.2 Résolution numérique	71
3.2.1 Formulation intégrale	71
3.2.2 Passage en coordonnées cylindriques	71
3.2.3 Implémentation numérique	75
3.2.4 Discrétisation	76
3.3 Calcul des intégrales	80
3.3.1 Intégrales régulières	81

3.3.2	Traitement des intégrales singulières	81
3.3.3	Vérification du choix des paramètres de discrétisation	83
3.4	Validation et calcul des champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$	85
3.4.1	Comparaison avec les expressions analytiques	88
3.4.2	Calcul de γ et U_{eq} pour une particule sphérique	91
3.4.3	Calcul de γ et U_{eq} pour une particule ellipsoïdale	97
4	Transport d'une particule : friction ratchet	101
4.1	Pompage asymétrique	102
4.2	Effet de la géométrie du pore	104
4.2.1	Existence de solution de transport	104
4.2.2	Domaine d'existence de solutions de transport	109
4.3	Effet de la taille de la particule	112
4.3.1	Influence du paramètre ϵ	114
4.4	Particule ellipsoïdale	116
	Conclusion	119
A	Pompage de petite amplitude	123
B	Calcul de la force de traînée	125
B.1	Adimensionnement de l'équation de l'écoulement	125
B.2	Existence et Unicité de la solution	126
B.3	Passage en coordonnées cylindriques	127
B.4	Formulation intégrale du problème incident	128
B.5	Intégrales singulières	129
	Bibliographie	131

Glossaire

- \vec{n} : vecteur normale sortant du fluide vers la surface
- n_r : la composante suivant l'axe des r du vecteur normal
- n_z : la composante suivant l'axe des z du vecteur normal
- ∂_r : dérivée partielle par rapport à r
- ∂_z : dérivée partielle par rapport à z
- S^e : la surface d'entrée du canal
- S^s : la surface de sortie du canal
- S^L : la surface latérale du canal
- S^p : la surface de la particule
- d dans le chapitre 2 désigne l'asymétrie du pore
- β : l'asymétrie du pompage dans chapitre 4

Introduction

L'étude des écoulements micro-fluidiques trouve différentes applications en biologie, chimie et dans l'industrie. En particulier, le transport de particules dans des milieux poreux présente un grand intérêt pour la séparation des molécules à travers les membranes poreuses, et également a un fort potentiel de développement industriel dans les systèmes de filtration. Le travail présenté dans cette thèse consiste à modéliser ces transports de particules en tenant compte des caractéristiques des particules, du régime d'écoulement de fluide qui les transporte et de l'effet de confinement qui pourrait être lié par exemple à la prise en compte d'une structure d'un milieu poreux. Le phénomène de transport que nous étudions est basé sur le mécanisme d'effet cliquet qui apparaît quand on soumet le système à un pompage alternatif dans le temps. L'effet cliquet est issu d'un modèle hydrodynamique déterministe et est induit par des effets non-linéaires. Il diffère, donc, des modèles de transport par effet cliquet classique basé sur le rôle primordial du mouvement brownien qui apporte une énergie supplémentaire au transport par le biais de l'agitation thermique. Afin de chercher les conditions minimales d'un transport par effet cliquet déterministe, nous considérons un écoulement de Stokes où le mouvement de la particule est gouvernée par un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires. La non-linéarité du problème provient uniquement de la force de traînée exercée sur la particule. L'étude de la dynamique de la particule est effectuée en utilisant la méthode de continuation qui permet de suivre la solution périodique selon le paramètre désiré et d'identifier les types de bifurcation ainsi que les lieux de ces points critiques.

Dans la première partie du travail, après une revue des approches existantes du problème, nous avons traité le cas d'une particule ponctuelle avec comme hypothèse principale que la taille de la particule est négligeable devant à la taille caractéristique du tube et que les effets du bord du tube

sont donc considérés négligeables. Dans ce cas, l'effet cliquet est dû uniquement à la variation de l'écoulement et le coefficient de traînée étant constant (la force de Stokes exercée sur une particule sphérique dans un écoulement uniforme est employée). Nous avons montré l'existence de transport pour deux grandeurs du coefficient de traînée, γ : (a) γ autour de 10 et (b) γ autour de 100. Pour ces deux grandeurs, des bifurcations se produisent et conduisent à des solutions de transport. Les scénarios de bifurcations observés sont différents et induisent des mécanismes de transport différents. Cette étude est détaillée dans le chapitre 2.

Cependant, les résultats précédents montrent que le transport n'a lieu que pour des tailles de particules non-négligables par rapport au rayon moyen du tube et donc le coefficient de traînée ne vérifie plus la loi de Stokes. Pour cela, nous déterminons dans une seconde partie la résultante des contraintes exercées sur une particule de taille quelconque en tenant compte des bords du tube.

Ce calcul est réalisé en utilisant la formulation intégrale de frontière : le champ de vitesse en un point de l'écoulement est déterminé par une intégrale sur les frontières du domaine. Les contraintes sont solutions d'équations intégrales sur les surfaces de frontières uniquement. L'implémentation numérique est réalisée en utilisant la méthode de collocation menant à un système linéaire carré. Les éléments de la matrice associée à ce système sont donc des intégrales qui peuvent comporter une singularité faible ou forte. Pour traiter les singularités, nous avons développé une méthode de régularisation qui permet de les évaluer avec précision.

L'équation du mouvement de la particule est, comme dans la première partie, gouvernée par un système d'équations différentielles ordinaires. Cependant, cette fois-ci, les non-linéarités et donc l'effet cliquet n'est pas seulement dû à la variation du champ de vitesse mais aussi à la variation spatiale du coefficient de traînée. Auparavant, nous présentons la méthode de calcul de la force de traînée exercée sur la particule, ainsi nous examinons l'influence sur ce terme de paramètres géométrique tels que le rapport entre le rayon de la particule et celui du canal, le rapport entre le rayon de la particule et la longueur d'un pore, la courbure du pore et ainsi que le cas d'une particule ellipsoïdale est traité.

Dans la dernière partie du travail, nous exploitons ces nouveaux coefficients et nous étudions la dynamique de la particule en utilisant la méthode de continuation. Nous suivons les solutions pé-

riodiques et nous identifions les seuils de transport selon les différents paramètres géométriques et physiques du problème, comme la force, l'asymétrie du pompage et son intensité.

Chapitre 1

Etat de l'art

1.1 Motivation et applications

Comprendre les phénomènes de transport de particules dans un fluide constituent depuis longtemps un enjeu de recherche à part entière dans le domaine de la physique et plus particulièrement dans celui de la mécanique. Au-delà de l'intérêt scientifique apporté par les questionnements sur ce sujet, l'importance de ces phénomènes de transport se justifie aussi par l'existence d'une large variété d'applications dans divers domaines telle que la chimie industrielle, la biochimie, le domaine médical ou encore le génie civil. La compréhension de ces phénomènes de transport et leur contrôle par l'intermédiaire de dispositifs microfluidiques a contribué au développement de progrès techniques importants. Par exemple dans le domaine de la chimie analytique et bioanalytique, ces progrès se sont traduits en termes d'amélioration de la vitesse d'analyse, de la méthode de séparation et aussi par l'automatisation des procédures industrielles [1].

D'une manière générale, il est intuitivement admis que ces phénomènes de transport diffèrent les uns des autres suivant l'échelle de taille des particules à transporter. De ce fait, les transports de particules à l'échelle nano et microscopique, ont fait séparément l'objet de divers travaux de recherche, consacrés à la mise en évidence des principaux effets responsables du transport c'est à dire de l'apparition d'un mouvement dans une direction privilégiée. Bien évidemment, les applications potentielles associées à ces différents processus de transport en dépendent spécifiquement.

Plus concrètement, nous pouvons illustrer cela avec les processus de séparation et de filtration qui consistent à contrôler le transport des particules pour séparer ou isoler une partie de la population.

A l'échelle microscopique, *i.e.* pour une taille (caractérisée généralement par le diamètre) de particule variant entre $10^{-2}\mu m$ et $10^2\mu m$, le transport a été employé pour réaliser des applications environnementales et biologiques comme par exemple lors la séparation de cellules pour la thérapie contre le cancer ($> 20\mu m$) dans des dispositifs microfabriqués, utilisant une force mécanique ou une force dielectrophorétique [2]. D'autres applications qu'on pourra citer concernent l'élimination des résidus formés de colloïdes ($\approx 1\mu m$) et de supracolloïdes ($\approx 100\mu m$) dans les effluents des eaux usées ou encore la filtration des bactéries pathogènes comme la *E. coli O157 :H7* de l'eau [3]. Notons que dans ces études, les auteurs mettent en avant que les traitements des particules (les cellules et les colloïdes) sont directement liés à leurs tailles spécifiques.

Plus récemment, les tentatives d'appliquer des procédures de filtration à des nano-particules, (*i.e.*, de tailles plus petites que $100nm$) ont sensiblement augmenté. En effet, dotées de diverses propriétés physico-chimiques très attractives ces particules forment une classe de nouveaux matériaux devenue incontournable dans diverses applications technologiques et industrielles. L'utilisation de nano-particules, se développe rapidement dans des domaines aussi variés que les secteurs des produits cosmétique, pharmaceutique et vestimentaire mais également dans les domaines de la micro-électronique et l'industrie des ordinateurs. En dépit de leurs avantages indéniables, ces nano-particules sont maintenant connues pour être potentiellement nocives sur la santé humaine [4, 5, 6]. En effet, de part leurs petites tailles, ces particules peuvent pénétrer le corps à travers la peau, les poumons ou le tractus intestinal et se déposer ainsi dans divers organes causant une réaction biologique défavorable susceptible de modifier les propriétés physico-chimiques de la matière vivante [7]. D'autre part, les nano-particules constituent aussi une source de pollution nouvelle pour l'environnement. Ce sont ces risques qui naturellement ont mis en avant le besoin de filtrer les nano-particules disséminées dans les fluides. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, les traitements des nano-particules se passent généralement dans le cadre des milieux poreux et les mécanismes mis en jeu mettent en avant des processus physico-chimiques telles que la variation de la teneur en eau du milieu poreux ou l'évolution de la force ionique du fluide plus que l'inertie mécanique.

Dans ce cadre, on peut trouver dans la littérature différents travaux qui traitent de l'étude des phénomènes de transport de nano/micro- particules dans un contexte expérimental contrôlé (dans

des dispositifs microfluidiques). Les résultats cités rapportent que les phénomènes de transport dépendent de plusieurs paramètres physiques, en particulier les paramètres géométriques de la particule (la forme, la taille) mais aussi également du tube contenant le mélange fluide-particules (la forme, le rapport des dimensions du tube par rapport à la taille de la particule). Les transports observés dépendent aussi du type de l'écoulement du fluide (régime d'écoulement, vitesse). De même, ces transports peuvent dépendre de l'existence d'une force extérieure appliquée sur le système, dans ce cas le type de force et son intensité peuvent jouer un rôle primordial.

De manière générale, le principe de séparation des particules repose sur le fait que des particules de tailles différentes possèdent différentes vitesses. Ce qui a pour conséquence que deux populations de tailles différentes vont atteindre deux points d'équilibre différents permettant de les récupérer séparément.

Ce principe (dit "*membrane-free filtration*") diffère de la méthode de filtration classique par membrane par le fait qu'il est effectif pour une gamme illimitée de tailles de particules et paraît ainsi plus adapté aux diverses applications existantes ([2],[8],[1, 3]). L'exploitation de ce principe a conduit à développer deux méthodes de filtration dites active ou passive.

La première méthode utilisée était la filtration active. Elle correspond à l'utilisation d'une force extérieure (de nature mécanique ou électrophorétique). Le travail de Giddings *et al.* [9, 10] illustre la faisabilité de cette méthode en filtrant et en séparant des particules de différentes tailles en milieu infini par l'utilisation de force diélectrophorétique.

La deuxième méthode dite passive ne fait pas appel à une force extérieure. Cette méthode fait suite au travail de Pamme [11] sur la nécessité d'une filtration sans force extérieure pour les bioséparations. La filtration passive met en oeuvre le phénomène de migration inertielle des particules. Ce phénomène a été mis en oeuvre une première fois par Serge et Silberberg [12, 13], ils ont montré qu'une population de particules de sphères rigides macroscopiques peut s'équilibrer à $0,6R$ dans un tube de rayon R . Par la suite, la méthode de filtration passive a été réalisée avec succès dans différentes formes géométriques en employant des formes asymétriques serpentes [14], des microcanaux spirales [15]. En particulier [16] ont utilisé un simple dispositif microfluidique avec un

microcanal rectangulaire permettant une filtration passive des particules, basée sur le principe de la migration inertielle, autrement dit induite par la force de portance inertielle exercée sur la particule. Ces études montrent que le nombre des positions d'équilibre dépendent de la forme du tube et que les particules de même taille s'équilibrent à la même position. Par ailleurs, ces positions d'équilibre dépendent aussi du rapport entre la taille de la particule et la dimension caractéristique du contenant [14, 16, 17, 18]. Ceci est lié au fait que la résultante des contraintes du fluide sur la particule dépend de la taille de la particule [14, 16]. D'autres résultats sur la filtration passive ont été également discutés. [17] montre que la distance à laquelle s'équilibre une particule dépend du nombre de Reynolds (Re) de l'écoulement. En particulier, il montre qu'en augmentant la vitesse de l'écoulement, les positions d'équilibre s'approchent plus du bord du contenant [17].

De nombreux travaux s'intéressent au transport des particules dans un écoulement sous le régime de Stokes, *i.e.* quand les effets inertiels du fluide sont négligeables et le nombre de Reynolds est assez petit. Les particules sont dans un espace semi borné ou confinées par des bords rigides. Dans ces cas, la force de traînée peut jouer un rôle important dans le transport de la particule et peut dominer la force de portance (c'est le cas par exemple pour un problème axisymétrique avec des particules légères) et par conséquent le phénomène de migration inertielle n'est plus possible. Rappelons ici que l'estimation de la force de traînée sur une particule constitue en général un problème difficile et ne se résout pas de manière analytique sauf dans les cas les plus simples comme celui d'une particule sphérique rigide en milieu infini (Stokes 1851). Afin de déterminer l'impact de ces obstacles sur la force de traînée et donc sur le mouvement des particules, des méthodes numériques ou semi-analytiques doivent être menées. C'est le cas par exemple, des travaux de Brenner[19], qui examinent le mouvement d'une particule sphérique solide perpendiculaire à une unique surface rigide (domaine semi-infini) ou des approximations asymptotiques sont proposées.

Pour compléter ce paragraphe, notons que le cas du transport de particules dans des géométries étroites et périodiques, sous un régime de Stokes constitue la configuration étudiée dans ce travail de thèse. Une méthode de filtration dans une telle configuration présente de nombreuses applications possibles par exemple la réalisation de processus industriel de dépollution passif.

Ainsi réaliser et contrôler des phénomènes de transport de particules dans un fluide est d'un grand

intérêt académique mais aussi correspond à des enjeux technologiques, de santé et d'environnement. Ce travail de thèse s'inscrit dans ce contexte et vise à contribuer à la compréhension du phénomène du transport. Dans ce cadre, le développement d'une modélisation pour décrire les observations est un enjeu fondamental. Dans le paragraphe suivant nous allons donner un aperçu synthétique des grandes lignes des approches employées dans la littérature pour décrire ces transports de particules.

1.2 Du mouvement Brownien au transport directionnel

Historiquement, l'exemple le plus célèbre de mouvement de particules, fut le mouvement aléatoire d'une "*grosse*" particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les "*petites*" molécules du fluide environnant. Ces molécules de fluide sont animées de mouvements incessants associés à l'énergie d'agitation thermique. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la "*grosse*" particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown. La description physique la plus élémentaire du phénomène fait intervenir les deux hypothèses suivantes, d'une part entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante, d'autre part la grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi. Sous ces hypothèses, deux approches théoriques parallèles et complémentaires ont été développées. La première repose sur une description mathématique basée sur le caractère aléatoire du mouvement en introduisant la notion de marche aléatoire de chaque particule qui aboutit à plus grande échelle à la construction d'un modèle du mouvement Brownien tandis que la deuxième approche "plus mécaniste" est basée sur l'application de la loi de la mécanique dans un cadre aléatoire sous la forme des équations de Langevin. Dans son approche mécaniste, Langevin tient compte de l'impact du milieu fluide sur la particule sous la forme d'une force de viscosité et d'inertie en ne négligeant pas la masse de la particule. Ce qui diffère de l'approche purement stochastique qui met en avant la description de la particule comme un objet mathématique dit particule brownienne. On peut dire que dans les deux approches, la conclusion principale fut la description du transport comme un phénomène de diffusion. On rajoutera aussi que

compte tenu du caractère très irrégulier des mouvements observés l'approche stochastique apparaît tout à fait naturelle et adaptée.

Parmi les résultats importants sur le mouvement Brownien, nous retiendrons que le mouvement Brownien est caractérisé par des trajectoires continues mais non-dérivables partout ce qui d'une certaine façon traduit l'irrégularité du mouvement. Par ailleurs, pour un mouvement Brownien, le déplacement est statistiquement nul c'est à dire qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble, contrairement à un vent ou un courant. Plus précisément à un instant donné, la somme vectorielle des vitesses de toutes les particules s'annule (il n'y a donc pas de mouvement d'ensemble) et si l'on suit une particule donnée au cours du temps, le barycentre de sa trajectoire est son point de départ, elle *virevolte* autour du même point.

En ce qui nous concerne, ce dernier point indique qu'il ne peut pas y avoir un transport directionnel de particules dans le mouvement Brownien standard. En d'autres termes, par essence même, le mouvement Brownien ne peut pas à lui tout seul expliquer les observations que nous avons rapportées dans le paragraphe précédent. Néanmoins, comme nous allons le voir, il constitue un élément indispensable dans la construction d'une catégorie de modèle de transport directionnel.

Comme on vient de le dire, la nature du mouvement Brownien repose sur l'hypothèse d'homogénéité du système chaotique c'est à dire qu'aucune direction privilégiée ne peut exister. Pour briser cette propriété, l'idée consiste à imposer un effet "cliquet" (ou en anglais "ratchet"). L'ingrédient minimal à la construction d'un système "cliquet", indispensable au déplacement d'ensemble de ces particules est l'existence simultanée d'agitations thermiques (donc du mouvement Brownien standard) et d'un potentiel microscopique spatialement périodique et asymétrique. Plus concrètement, un système "cliquet" se définit donc comme un dispositif microscopique capable de transporter des particules en absence de toute force macroscopique.

Pour mieux éclairer cette idée d'effet cliquet, considérons le mouvement d'une particule brownienne de masse m astreinte à se déplacer suivant l'axe des x et soumise à un potentiel périodique. Ce mouvement est décrit par l'équation de la mécanique de Langevin donnant l'évolution de la

coordonnée $x(t)$:

$$m\ddot{x} + V'(x) = -\eta\dot{x} + \xi(t) \quad (1.1)$$

où $V'(x)$ est le gradient d'une énergie potentielle V et η représente le coefficient de frottement visqueux. L'effet de l'énergie de fluctuations thermiques des molécules du fluide est représenté par un bruit blanc gaussien $\xi(t)$, de moyenne nulle (centré), dont la fonction d'autocorrélation est de la forme :

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\eta kT \delta(t - t')$$

où k est la constante de Boltzmann et T la température. En négligeant le terme d'inertie $m\ddot{x}$ dans l'équation (1.1), ce qui est justifié pour une particule brownienne, on obtient le modèle minimal donné par Feynman pour un système de type "cliquet" :

$$\eta\dot{x} = -V'(x) + \xi(t) \quad (1.2)$$

Les premières investigations sur ce type de système ont été réalisées par Feynman dans les années soixante. Le dispositif imaginé par celui-ci est une construction élémentaire permettant d'une part d'expliquer comment il est possible d'extraire un travail mécanique à partir d'un ensemble de deux réservoirs thermiques de températures différentes et d'autre part de quantifier le travail fourni.

Le dispositif de Feynman, représenté sur la figure ci-dessous, est formé d'un axe à l'une des extrémités duquel est fixée une roue à palettes plongée dans le réservoir le plus chaud. L'autre extrémité, placée dans le bain froid, est équipée d'une roue crantée munie d'un cliquet anti-retour. Le bombardement aléatoire des molécules du gaz sur les palettes du premier bain engendre un mouvement aléatoire de rotation de l'axe : de l'agitation thermique. L'asymétrie introduite par la roue crantée et son cliquet impose un sens de rotation unique à l'axe.

De manière plus conceptuelle, Richard Feynman [20], a introduit un exemple qui illustre le second principe de la thermodynamique qui énonce l'impossibilité de produire un travail utile à partir d'un unique bain thermique à l'équilibre. Feynman montre que son dispositif en équilibre thermique (le tout à la température $T_1=T_2$) ne peut pas produire de l'énergie mécanique. Par ailleurs, pour obtenir de l'effet "cliquet" il faut donc casser la symétrie du potentiel $V(x)$ de l'équation (1.2), qui joue dans ce dispositif le rôle de la roue crantée de Feynman, ce qui peut se faire évidemment

de différentes façons. Notons donc qu'au-delà du système minimal de Feynman (ou "Feynman ratchet"), il existe plusieurs types de systèmes "cliquets" qui assurent cette fonction.

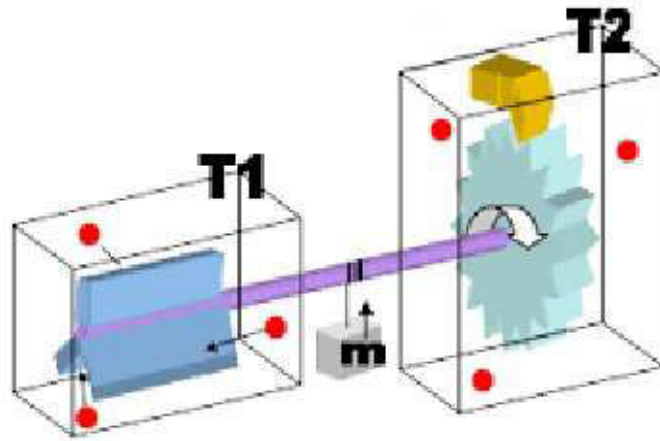


FIGURE 1.1 – Le dispositif de Feynman : la production de travail utile se traduit par le transport directionnel de la masse m

1.2.1 Les principaux systèmes à cliquets standards

La littérature recense quelques classes de systèmes "cliquets" qui ont été mis en oeuvre expérimentalement et/ou numériquement pour reproduire des transports directionnels. Dans l'ensemble, ces systèmes suivent le principe énoncé par Feynman. Nous donnons ici un résumé des principaux exemples.

– *Le Rocking ratchets*

Dans cette classe de "cliquets", une modulation périodique en temps est superposée au potentiel, ce qui revient en fait à modifier le potentiel périodiquement dans le temps. L'équation générique du modèle est alors de la forme :

$$\eta \dot{x} = -V'(x) + y(t) + \xi(t) \quad (1.3)$$

où $y(t)$ est une fonction périodique du temps. Harada et Yoshikawa [21] ont proposé un potentiel asymétrique et périodique spatialement qui subit une translation sinusoïdale ($V(x, t) =$

$V(x - A\sin(\omega t))$). Dans leur expérience, le potentiel créé de manière optique est utilisé pour induire le déplacement de micro-perles de polystyrene (diametre = $0.2\mu m$). Toujours dans cette famille, citons le "ratchet inertiel ou hamiltonien" [22, 23] qui est décrit par l'équation générique :

$$m\ddot{x} + V'(x) = -\eta\dot{x} + y(t) \quad (1.4)$$

où le rôle du bruit thermique est joué par le mouvement de la particule qui est chaotique si le potentiel remplit certaines conditions [23]. Cette technique permet la séparation de particules de masses notablement différentes [22]. D'autres études sur le rocking ratchet ont montré qu'il est possible de générer ces effets ratchets avec inertie[23, 24], et sans inertie[25, 26].

– *Le flashing ratchets*

On les appelle aussi "fluctuating potential ratchets". Dans ce cas, le potentiel est interrompu périodiquement [27][28]. Le modèle pour ce type de systèmes s'exprime sous la forme suivante :

$$\eta\dot{x} = -V'(x(t))[1 + f(t)] + \xi(t) \quad (1.5)$$

où $f(t)$ est une fonction qui permet l'interruption périodique du potentiel en prenant les valeurs -1 ou $+1$.

Le mécanisme de l'effet cliquet dans ce cas s'explique avec le scénario suivant : si le potentiel est éteint ($f(t) = 0$), les particules sont diffusées sans contrainte dans l'espace. Quand le potentiel est allumé ($f(t) = 1$), les particules vont se déplacer vers le minima du potentiel le plus proche et y restent coincées jusqu'à ce que le potentiel soit re-éteint. A ce moment, de nouveau une diffusion globale des particules se produit. En imposant périodiquement ce scénario, nous pouvons produire une migration directionnelle des particules. Notons que ce résultat reste vrai si la commutation du potentiel ($f(t)$) était une variable aléatoire de type Bernoulli avec une probabilité identique pour l'événement succès et échec [29].

Un système de ce type a été employé par Faucheux et Libchaber [30] pour séparer des particules de silice de différents diamètres ($1.5\mu m$ et de $2.5\mu m$) en suspension dans l'eau. Du fait de leurs coefficients de diffusion différents, le déplacement des deux types de particules par effet ratchet est différent, ce qui permet donc leur séparation. Plus généralement le "flashing ratchet" est utilisé de façon privilégiée pour la séparation de particules [31, 32] et en particulier pour des particules de taille comparable aux structures biologiques telles que virus, cellule ou chromosomes [33].

Des travaux plus spécifiques utilisant ce même type de "ratchet" portent sur la possibilité de réaliser un transport dirigé de particules quantiques [34].

Notons ici que ce type d'effet cliquet avec un potentiel oscillant constitue le cas de configuration que nous allons étudier dans ce travail de thèse. En effet, nous allons reprendre l'utilisation d'un potentiel périodique qui ne commute pas parfaitement entre les cycles "on" et "off", contrairement aux études de [33, 35] utilisant un potentiel alternativement et parfaitement éteint et allumé.

– *Le diffusion ratchets*

Ce type d'effet cliquet est obtenu à partir du modèle le plus simple de ratchet ((1.2)) en introduisant une modulation périodique en temps des fluctuations thermiques (par exemple une modulation de la température). L'équation modèle du "diffusion ratchets" s'écrit alors [36] :

$$m\ddot{x} + V'(x(t)) = -\eta\dot{x} + \sqrt{2D(t)}\xi(t) \quad (1.6)$$

ici $D(t)$ représente un coefficient de diffusion auquel on impose une condition de périodicité en temps $D(t) = D(t + 2\pi/\omega)$. L'étude théorique de "diffusion ratchets" [36] montre que le courant de particules browniennes est fonction de la fréquence ω de modulation des fluctuations thermiques. Il présente un maximum pour une fréquence de modulation de l'ordre de $\frac{1}{\eta}$ et reste très faible aux basses et hautes fréquences. Ce qui permet donc une sélectivité du transport directionnel obtenu. Notons aussi que Reimann et al. ont également montré

que, moyennant la transformation de variable : $y(t) = x(t)[D(t)]^{-1/2}$, ce type de ratchets se ramène à un "flashing ratchets" [36].

– *Le correlation ratchets*

Le principe du corrélation ratchet repose sur l'interaction entre deux bruits blancs ayant des fonctions d'autocorrélation d'échelle de temps différentes [37][38][39]. L'équation modèle de ce type de ratchet s'écrit :

$$\eta\dot{x} = -V'(x(t)) + \xi(t) + \zeta(t) \quad (1.7)$$

ici, $\zeta(t)$ représente un second bruit blanc centré (de moyenne nulle) et dont le temps caractéristique τ de la fonction d'autocorrélation doit être très grand devant celui de $\xi(t)$.

Le transport directionnel obtenu dépend de la durée et de l'intensité de la corrélation entre $\xi(t)$ et $\zeta(t)$.

Dans ce cas, l'action conjuguée de l'asymétrie du potentiel et de la durée de corrélation permet sous certaines conditions d'induire un changement de la direction de transport qui se produit pour une valeur particulière du temps τ [40].

1.2.2 Les rôles des effets spatial et temporel

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les différentes classes d'effet cliquets ont été construites en exploitant des modulations temporelles du potentiel ou en générant une force extérieure qui varie temporellement. Ce recours à l'effet temporel ne constitue pas une limitation pour obtenir des effets cliquet. En effet, d'autres études montrent que l'effet ratchet peut être obtenu sous l'une des deux conditions suivantes :

- (i) un potentiel spatio-asymétrique et une force tempo-symétrique
- (ii) un potentiel spatio-symétrique et une force tempo-asymétrique [38, 41, 42][43, 44, 45, 46].

Dans ce travail de thèse, nous allons exploiter ces deux possibilités. Dans un premier temps, un pompage est symétrique et un potentiel spatialement asymétrique seront considérés (Voir cha-

pitre 2). Ensuite, le potentiel sera considéré symétrique et le pompage sera temporellement asymétrique (voir chapitre 4). Pour mieux illustrer le rôle de l'effet spatial, nous allons rapporter dans le paragraphe qui suit, des exemples d'effet cliquet utilisant une asymétrie spatiale du potentiel.

1.2.3 Exemple d'effet cliquet spatial

Auto-déplacement de gouttelettes

Dans leur étude, Linke *et al.* [47] considèrent un dispositif ratchet pour étudier le mouvement d'une gouttelette placée sur une surface à une température très élevée par rapport au point d'ébullition du liquide (température de Leidenfrost, par exemple entre 200°C et 300°C pour l'eau sur une surface plate). La surface utilisée est une surface asymétrique et périodique, comme une pièce de laiton en forme de dent de scie. Cette topologie constitue un ingrédient essentiel du dispositif ratchet. En effet, elle permet d'imposer une asymétrie du potentiel de gravité. Le deuxième ingrédient qu'a besoin un tel dispositif pour bien fonctionner, est le bruit thermique, et ici il est imposé par le gradient thermique vertical qui a lieu entre la surface et la gouttelette. Linke *et al.* lors de leur expérience détaillée dans [47], ont observé que la gouttelette se déplace sur la surface à une vitesse d'environ 5cm/s sur une distance de 1m. Dans le même papier Linke *et al.* [47], ont montré que ces

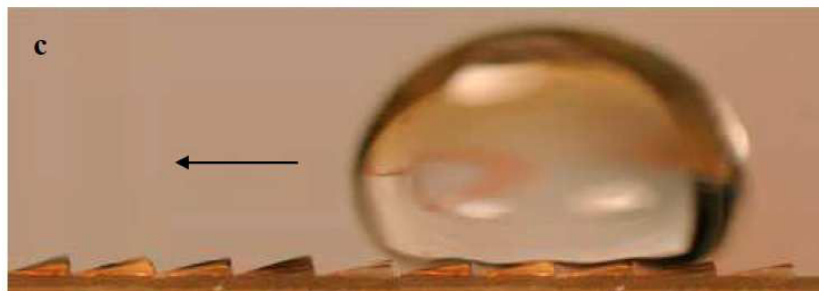


FIGURE 1.2 – Photo d'une gouttelette d'eau placée sur une surface métallique chauffée à 460°C. Cette figure est tirée de [48].

résultats s'obtiennent avec d'autres liquides : l'azote, l'acétone, le méthanol, l'éthanol, et l'hexadécane. Dans leur conclusion, ils énoncent que ce phénomène de transport directionnel repose sur la nécessité de combiner le déséquilibre (le gradient thermique vertical) et l'asymétrie spatiale.

1.3 Transport directionnel déterministe

Dans la section précédente, nous avons montré l'utilisation de l'approche stochastique pour modéliser des effets cliquets. Historiquement, ce type d'approche a été adopté en faisant appel au mouvement Brownien qui comme on l'a vu, constitue un ingrédient principal à la construction d'un système ratchet en apportant le bruit qui représente l'agitation thermique, l'énergie associée au chaos moléculaire. D'autre part, les récents progrès en matière de systèmes dynamiques nonlinéaires et déterministes ouvrent des possibilités nouvelles sur la modélisation des états chaotiques. Différents travaux ont été effectués dans ce cadre pour construire des effets cliquets en utilisant une base déterministe. On peut citer par exemple les récents travaux de Marte *et al.* (2014) [49] qui modélise un effet ratchet inertiel avec un potentiel spatio-asymétrique et une force extérieure temporellement périodique. Des choix judicieux de la forme du potentiel et de la force extérieure ont permis aux auteurs d'aboutir à des solutions chaotiques pour les trajectoires des particules. Dans un travail antérieur, Saikia et Mahato (2010)[50] ont montré que l'utilisation d'un coefficient de viscosité spatialement inhomogène équivaut à prendre un potentiel asymétrique et ainsi permettre d'accéder aussi à un effet cliquet. Dans ce même travail, Sakia et Mahato ont étudié l'impact de la prise en compte de l'agitation thermique d'un mouvement Brownien dans leur modèle. Ils ont montré qu'avec ou sans le mouvement Brownien, leur modèle permet d'accéder à un effet cliquet. Des approches mélangeant l'usage du mouvement Brownien et des lois physiques déterministes ont été mises en oeuvre. Dans ce cadre, une tentative de prise en compte des interactions hydrodynamiques entre les particules Browniennes et le fluide a été développée très récemment par Fornès (2015) [51]. Dans ce travail, Fornès affirme que la prise en compte de ces interactions hydrodynamiques améliore sensiblement l'effet cliquet que subissent les particules. De même, Margareti *et al.* (2012) [52] ont étudié l'impact de la présence d'obstacles et l'effet d'un confinement représenté par un pore à section variable sur un modèle de flashing ratchet. Ces résultats suggèrent l'importance du rôle des phénomènes hydrodynamiques dans le cadre déterministe. Notre travail s'inscrit dans le cadre d'une approche déterministe du transport. Le modèle mis en oeuvre prend en compte la masse de la particule, la force de traînée due à la viscosité, l'effet de

confinement à l'intérieur d'un pore axisymétrique de section variable. Comme il a été dit plus haut, nous cherchons à modéliser un effet cliquet de type flashing ratchet en imposant une variation périodique de pression à l'intérieur du pore. Quelques travaux antérieurs donnent des indications sur des études menées dans une configuration similaire. En particulier, les calculs effectués par Kettner *et al.* [53] pour étudier la dépendance de la direction du mouvement des particules de même taille par rapport à l'amplitude de la pression (cas d'un forçage sinusoïdal). Ils ont aussi étudié l'effet de la taille de la particule sur la direction de son mouvement. Ces résultats sont en accord avec les observations de l'expérience de Matthias et Muller [35]. Cette expérience met en relief aussi le rôle de la géométrie du pore sur la direction de transport : en effet, les variations de diamètre remplace le potentiel variable des ratchet décrits précédemment. De plus, ils ont observé un phénomène de renversement de courant en changeant l'amplitude du forçage.

Dans les sections qui suivent, nous allons rappeler quelques résultats relatifs à la force hydrodynamique qui agit sur la particule. Comme on va le voir, les résultats connus montrent que cette force est primordiale dans la dynamique de la particule. Par conséquent, nous présenterons une technique générale d'estimation de cette force utilisant la méthode des intégrales de frontière.

1.4 Force hydrodynamique et interactions

Au-delà de son importance dans l'étude des mécanismes de transport de particules, l'estimation de la force hydrodynamique est primordiale. En effet, une force hydrodynamique trop importante entrainera la déformation voire même la désintégration des matériaux dispersés dans le fluide. Ce phénomène est rencontré dans plusieurs applications industrielles et d'ingénierie, comme par exemple la fragmentation de particules coagulées [54, 55], et l'éclatement des gouttes de liquide dans le processus d'emulsification [56, 57].

On montre que le confinement affecte l'interaction hydrodynamique entre les particules suspendues [58]. De même il affecte aussi l'interaction hydrodynamique entre le bord confinant et la particule en suspension [59]. Les travaux reportés dans [60] et [61] l'importance des effets du bord du tube confinant sur le mouvement d'une particule dans des écoulements newtoniens et non newtoniens

respectivement. En particulier, le confinement augmente la force de traînée que subit la particule [62, 63, 64]. Par conséquent, pour une exacte description du comportement de la particule dans des dispositifs microfluidiques, la force de friction doit être estimée.

L'étude d'une telle force peut représenter une difficulté considérable, elle dépend d'autres paramètres du problème. Mis à part dans le cas particulier d'une particule sphérique rigide en translation dans un écoulement infini où l'on a la formule classique de Stokes, le calcul de la force hydrodynamique (ou encore la force de Stokes) fait appel à des développements semi-analytiques ou des résolutions purement numériques. En utilisant une méthode de perturbation, Brenner [60], a établi analytiquement la résistance d'une particule rigide de forme géométrique arbitraire suspendue dans un écoulement quasi-statique et supposé au repos à l'infini. Il a aussi estimé cette force pour un écoulement cisailé, [65]. Plus tard, Brenner [66] a étendu ce résultat pour un écoulement arbitraire. Oberbeck et Antonde [67] ont étudié numériquement avec une méthode de Lattice-Boltzmann l'effet des bords sur la force de Stokes agissant sur une sphère en mouvement de translation uniforme à l'extérieur de l'axe de révolution d'un cylindre. Leurs résultats numériques corroborent les résultats expérimentales d'Ambari [68], qui a montré que la force est minimale quand la particule est sur l'axe du cylindre et qu'elle croît rapidement en approchant la paroi. En outre, Happel et Byrne [69], ont travaillé sur la caractérisation de la force, le moment et le gradient de pression générés par la présence ou le mouvement d'une particule sphérique ou une suspension périodique de particules dans un tube cylindrique.

Par ailleurs, comme la plupart des études ont été consacrées pour le cas d'une particule sphérique, la force de traînée d'une particule ellipsoïdale ont fait le sujet de plusieurs travaux de recherche. Blaser dans [70], a utilisé les formules analytiques développées par Oberbeck *et al.* [67] et Jeffery *et al.* [71] pour estimer la force de friction exercée par une particule ellipsoïdale immergée dans un écoulement uniforme, dans un écoulement de cisaillement simple, et dans un écoulement bidimensionnel forcé. D'autres études se sont concentrées aussi sur le calcul de la force hydrodynamique d'une particule en mouvement. Par exemple, dans le cadre de la modélisation biomécanique, Chen and Skalak dans [72] ont calculé la force appliquée sur des particules ellipsoïdales allongées (le

grand axe est perpendiculaire à l'axe du tube) et aplaties (grand axe est suivant l'axe du tube) et le tube a été considéré circulaire.

En définissant le confinement, noté ici λ , par le rapport entre la taille de la particule et la taille caractéristique du tube, une expression analytique pour la force de traînée, F_{drag} , existait d'abord dans le cas d'une particule sphérique placée au centre d'un tube cylindrique [62] :

$$F_{drag} = 6\pi\eta_f r_p (k_1 u - k_2 v) \quad (1.8)$$

avec η_f est la viscosité dynamique du fluide, v la vitesse de la particule et u est la vitesse du fluide initial (non perturbé par le mouvement de la sphère) au centre de la sphère et les deux coefficients k_1 et k_2 ne dépendent que de λ . Le premier, k_1 est obtenu pour une sphère supposée au repos dans un fluide de vitesse u ($u \neq 0, v = 0$), alors que le deuxième, k_2 est obtenu pour une particule en mouvement à la vitesse v dans un fluide au repos ($u = 0, v \neq 0$)[62] :

$$k_1 = \frac{1 - \frac{2}{3}\lambda^2 - 0.20217\lambda^5}{1 - 2.105\lambda + 2.0865\lambda^3 - 1.7068\lambda^5 + 0.72603\lambda^6} \quad (1.9)$$

$$k_2 = \frac{1 - 0.758557\lambda^5}{1 - 2.105\lambda + 2.0865\lambda^3 - 1.7068\lambda^5 + 0.72603\lambda^6} \quad (1.10)$$

Les auteurs de [62] montrent que ces corrélations sont vraies pour $\lambda \leq 0.8$. On remarque que ces coefficients correspondent à ceux de Stokes, *i.e.* $k_1 = 1$ et $k_2 = 1$, pour une particule non confinée ($\lambda = 0$) et en mouvement de translation à une vitesse v dans un écoulement supposé uniforme à l'infini de vitesse u . Plus tard, le coefficient de traînée, k_2 , a été développé par Bungay et Brenner [73] et par Paine et Scherr [74] pour un confinement qui peut prendre la valeur $\lambda = 0.9$. La Fig. 1.3 tirée de [75], présente ces deux coefficients pour différents valeurs du confinement λ établis par les trois études cités ci dessus. On remarque que les valeurs de k_2 de [73] et [74] concordent, en revanche, elles diffèrent de [62]. Une récente étude numérique menée par Al Quddus *et al.* [76] a étendu cette étude numériquement pour $\lambda = 0.95$.

Plus tard, Ilic *et al.* montre dans [63] que cette expression peut être généralisée pour le cas d'un tube carré, en multipliant le rayon de la sphère par la racine carrée de l'aire du tube carré. Récemment, les auteurs de [75] ont montré que cette même expression peut être également généralisée pour le

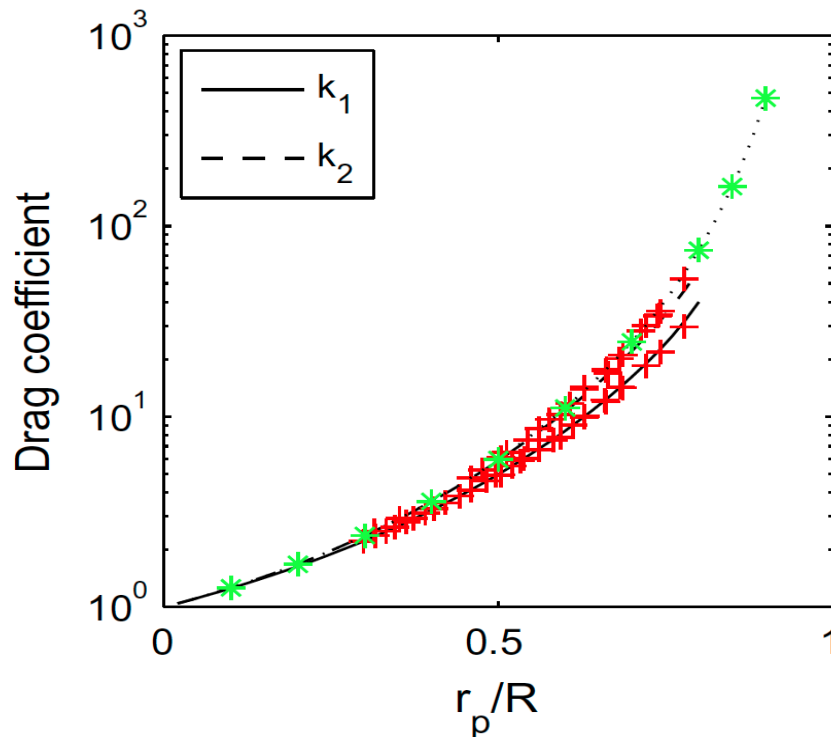


FIGURE 1.3 – Cette figure présente les deux coefficients k_1 et k_2 de la force de traînée expérimentée par une sphère de rayon d_p confinée dans un cylindre d rayon R . Les symboles "x" rouges représentent les valeurs de k_1 et k_2 obtenues numériquement par [75]. Les lignes continues et discontinues présentent respectivement les valeurs obtenues analytiquement par Haberman *et al.* [62]. On remarque que ces valeurs numériques et analytiques sont bien en accord. La ligne pointillée représente le coefficient k_2 de Bungay et Brenner [73]. On remarque ainsi que les valeurs numériques de ces derniers se coïncident avec celles de Al Qudus [76] représentés par les "*" verts.

cas d'un tube rectangulaire.

Ces études précédentes montrent que la force de traînée dépend de nombreux facteurs dont notamment la géométrie de la particule et du tube, le type de l'écoulement, ainsi que la taille relative de la particule. Ainsi, les bords de la paroi ont une incidence décisive sur la force.

Afin de pouvoir traiter une configuration générale nous proposons une méthode de calcul numérique de la force de traînée exercée sur une particule axisymétrique de géométrie et de taille arbitraires, en suspension dans un écoulement fluide à travers un canal axisymétrique dont le diamètre varie périodiquement. L'écoulement sera caractérisé par un très faible nombre de Rey-

nolds, et le confinement n'est pas négligeable. Afin de mener cette étude nous utilisons la méthode des équations intégrales de frontières. Nous adressons une comparaison de ce qui a été déjà fait, et plus particulièrement la force de traînée exercée sur une particule sphérique dans un écoulement de Poiseuille à travers un tube cylindrique.

Equations intégrale de Frontières

Il existe une grande variété de méthodes numériques pour aborder les problèmes d'interactions fluide-solide. En particulier, on peut citer la méthode des éléments finis comme dans [77], la méthode des frontières immergées [78] et aussi l'équation intégrale de frontières. La méthode des équations intégrales de frontières est basée sur la théorie du potentiel hydrodynamique visqueux introduit par Ladyzhnskaya et elle explicite les résultats du théorème de Green. Elle a été appliquée pour résoudre différents problèmes en génie, en élastostatique et en thermodynamique, également en dynamiques des fluides et surtout dans le cadre d'utilisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes. Un des avantages de l'utilisation de cette méthode est que la dimension du problème est réduite d'une dimension, les variables du problème en tout point du domaine sont exprimées en termes de certaines quantités évaluées uniquement sur la surface du domaine. Par voie de conséquence, les variables d'un écoulement tridimensionnel peuvent être examinées en analysant seulement la surface qui limite le domaine de l'écoulement. De plus, si le problème présente une propriété d'axisymétrie, les variables sont exprimées en fonction des quantités sur le contour d'une coupe plane du domaine à travers l'axe de symétrie. L'équation intégrale de frontière formulant les équations linéaires de Stokes existe en diverses formes exprimant (a) la vitesse, (b) les contraintes, et (c) la pression comme une intégrale de la vitesse et les contraintes sur la surface du domaine. Un autre avantage des intégrales de frontières est que les contraintes sur la particules sont obtenues directement contrairement à certaines formulations éléments finis où l'on obtient le champ de vitesse et de pression et donc les contraintes visqueuses sont obtenues en prenant le gradient des vitesses. Cette opération de dérivation discrète ajoute des erreurs numériques dans l'estimation des contraintes.

Au cours des dernières années, la méthode a connu beaucoup d'évolutions. Par exemple, Kohr dans

[79] présente une formulation intégrale de frontières pour calculer la perturbation d'un écoulement incident infini liée à la présence d'une sphère solide ou d'une goutte visqueuse. Jeffrey et George [71] ont appliqué cette formulation pour calculer la perturbation du champ de vitesse d'un écoulement de Poiseuille en présence d'une sphère. Plus récemment, et afin de calculer l'écoulement de Stokes d'un fluide supposé au repos, dans un tube de géométrie quelconque autour d'une particule rigide, Pozrikidis [80] a évalué tout d'abord la force et son moment exercés sur la particule. Cette étude numérique a été faite en utilisant la formulation intégrale de frontières.

Plusieurs problèmes d'écoulements visqueux de Stokes présentent des propriétés de symétrie comme par exemple l'analyse d'un écoulement visqueux entre deux cylindres concentriques en rotation à différentes vitesses angulaires (problème de Couette-Taylor), ou deux plateaux en rotation autour d'un axe commun (utilisée par fois pour déterminer les propriétés rhéologiques de fluide) et enfin l'écoulement autour et à travers des corps de révolution. L'utilisation de l'équation intégrale de frontière permet de résoudre ce genre de problèmes dès que les quantités sur le bord du domaine sont déterminées. Puisque notre problème est axisymétrique, on va introduire la formulation intégrale de frontières qui décrit le problème, *i.e* la formulation correspondante au problème de Stokes, et présenter un calcul réduit et bien adapté aux problèmes axisymétriques. Dans le chapitre 3, nous introduisons la formulation intégrale de frontières qui décrit le problème abordé dans cette thèse, *i.e* la formulation correspondante au problème décrit plus haut. Notons que des intégrales singulières apparaissent dans cette formulation. Un traitement spécifique est proposé pour les calculer. Finalement, des résultats numériques mettant en évidence les effets de taille et l'impact de la géométrie sont présentés et discutés (voir le chapitre 3).

Chapitre 2

Transport d'une particule ponctuelle : ratchet flow

Récemment, de nombreuses études ont été menées pour identifier le rôle des propriétés du ratchet dans la correction du mouvement brownien d'une particule, et plus particulièrement dans le transport d'une ou plusieurs particules ou leur séparation. En utilisant des simulations numériques de l'équation de Langevin, les auteurs de [81] ont pu expliquer comment un mouvement brownien peut être transformé en un mouvement dans une direction privilégiée, et comment la direction du mouvement peut être contrôlée en changeant les valeurs de quelques paramètres, comme par exemple l'amplitude du pompage, l'asymétrie spatiale du pore. En distinguant entre "rocking ratchet" et "flashing ratchet", les auteurs de [82] ont étudié l'effet du type du ratchet sur la vitesse moyenne du mouvement d'une ou plusieurs particules. Dans toutes ces études stochastiques, l'inertie de la particule a été négligée. Dans une étude expérimentale plus récente [83] il est mis en évidence que les fluctuations thermiques semblent très faibles par rapport à la trainée agissant sur la particule. Ainsi, nous nous intéressons à un problème complémentaire en étudiant le mouvement d'une particule déterministe avec une inertie non nulle. Nous proposons un modèle 1D minimaliste où la particule est ponctuelle (mais d'inertie non nulle) se déplace sur l'axe du canal et est soumise seulement à la force de Stokes. Notre but est de mieux comprendre les mécanismes non-linéaires à l'origine d'un possible transport. Noter que la non-linéarité provient uniquement de la variation spatiale du champ de vitesse et que donc nous avons appelé ce modèle *ratchet flow* dans [84]. Le modèle met en jeu un faible nombre de paramètres adimensionnels : le coefficient de

trainée de la particule et trois autres paramètres liés au champ de vitesse : la vitesse moyenne de l'écoulement u_m , le contraste de vitesse et l'asymétrie de l'écoulement. Nous portons une attention particulière sur le rôle jouée par la symétrie du problème dans l'existence d'un transport. Ainsi après la mise en équation du problème, nous étudions le transport dans un cas symétrique, puis dans un cas asymétrique. Nous verrons que cela revient à considérer deux ordres de grandeur de la trainée.

2.1 Présentation du problème

Le problème que nous proposons de traiter est complémentaire de [53]. Dans le cadre d'une particule rigide au sein d'un écoulement d'un fluide visqueux de viscosité μ à travers un tube périodique axisymétrique. Chaque section périodique forme ce qu'on appelle un pore. Un exemple de profil du pore est donné par la figure Fig. 2.1. De plus, on suppose que le fluide est soumis à un pompage sinusoïdal. En supposant que le fluide est quasi-statique, alors l'écoulement sans la particule a un mouvement synchronisé avec le pompage et donc on peut séparer les variables d'espace et de temps. Par exemple, le champ de vitesse sur l'axe s'écrira sous la forme

$$U(z, t) = u_0(z) \sin 2\pi t \quad (2.1)$$

Une particule dans ce canal peut se déplacer que sur l'axe et est considérée comme ponctuelle. Cela revient à négliger les effets du bord du canal sur les contraintes exercées sur la particule. La force F résulte des forces de pression et des contraintes visqueuses agissant sur la particule. Puisque nous considérons la particule comme ponctuelle alors elle est proportionnelle à la vitesse relative de la particule

$$F(z) = -\gamma(\dot{z} - u_0(z) \sin(2\pi t)) \quad (2.2)$$

où le coefficient de frottement $\gamma[kg/s]$ est donnée par la loi de Stokes

$$\gamma = 6\pi\mu R \quad (2.3)$$

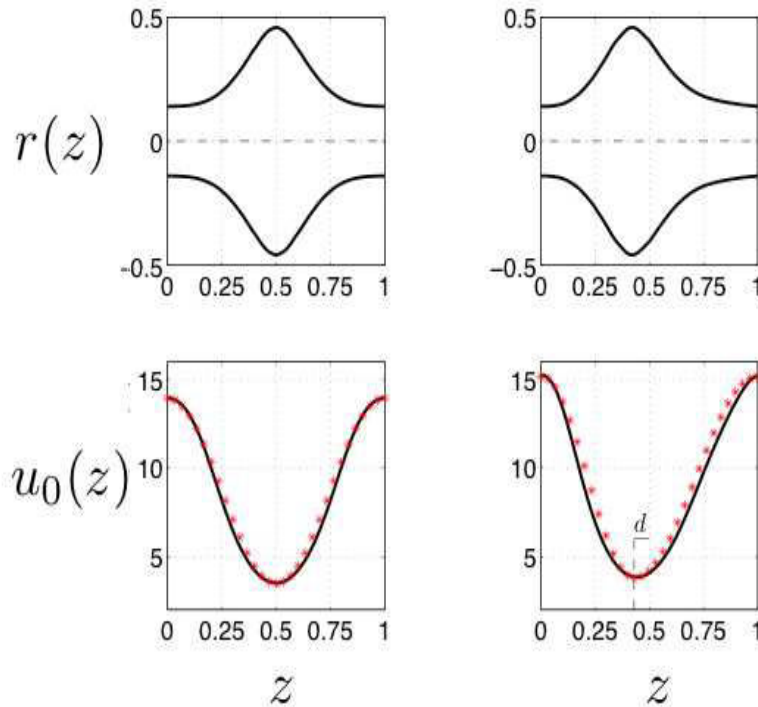


FIGURE 2.1 – Les figures en haut représentent le profil du pore considéré dans ce chapitre et les figures en bas représentent le champs de vitesse sur l’axe du pore est donné par la formule Eq. (2.6). Les figures à gauche correspondent à un pore symétrique ($\beta = 0$), et celles à droite correspondent à un pore asymétrique ($\beta = -0.1$).

où R est le rayon de la particule sphérique. L’équation du mouvement est alors obtenu en appliquant la relation fondamentale de la dynamique d’une particule à l’abscisse $z(t)$ de masse m :

$$m\ddot{z}(t)\vec{e}_z = F(z(t))\vec{e}_z \quad (2.4)$$

Si on dimensionne les longueurs x par la longueur du pore L , le temps par la période T , et γ par m/T , d’après les équations (2.4) et (2.2), la trajectoire d’une particule est régie par l’équation :

$$\ddot{z} = -\gamma (\dot{z} - u_0(z) \sin(2\pi t)) . \quad (2.5)$$

Nous avons gardé les mêmes notations pour les grandeurs adimensionnelles, puisque par la suite de ce chapitre nous n’utiliserons que des variables sans dimension.

Le champ de vitesse u_0 est solution de l'équation de Stokes sans particule. Le calcul de ce champ de vitesse sera traité dans le prochain chapitre. Nous proposons de construire un champ de vitesse analytique pour des raisons de simplicité. Contrairement à de nombreux articles sur les problèmes de ratchet, nous ne choisissons par un champ de vitesse biharmonique. En effet, ce type de champ utilisé pour obtenir des profils asymétriques peut faire apparaître deux maxima locaux. Or nous montrons dans le chapitre suivant que pour des pores avec un seul maximum, il y a aussi un maximum pour le champ de vitesse. En outre, dans la section suivante, nous montrons que l'ajout d'extrema dans le champ u_0 augmente le nombre de solutions périodiques possibles. Ainsi, ce choix compliquerait le problème inutilement. Afin de construire un champ de vitesse avec un seul maximum et qui peut être asymétrique nous concaténons deux portions de sinusoidales :

$$u_0(z) = u_m + au_m \left(\cos \left(\pi \frac{z}{1/2+d} \right) \mathbb{1}_{[0;1/2+d]}(z) + \cos \left(\pi \frac{z-1}{1/2-d} \right) \mathbb{1}_{]1/2-d;1]}(z) \right) \quad (2.6)$$

où $\mathbb{1}_I(z)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle I : elle vaut 1 si z est dans l'intervalle et zéro sinon. Si $d = 0$, on retrouve un profil de vitesse sinusoidal et qui est symétrique. Quand d est quelconque alors le minimum de la vitesse est en $1/2+d$. On choisit d dans l'intervalle $] -0.5; 0.5[$. Cependant une asymétrie trop proche de ± 0.5 donnerait un profil avec un fort gradient de vitesse. Ce qui n'est pas compatible avec d'un faible nombre de Reynolds. Nous considérons donc l'étude des dynamiques pour $|d| < 0.4$. Finalement, il est à noter qu'un champ de vitesse pour d est obtenu pour $-d$ en effectuant la réflexion z en $-z$. Donc, sans perte de généralité on peut s'intéresser au cas $d \geq 0$.

Bien que ce champ de vitesse ait été choisi essentiellement pour des raisons de simplicité, on peut trouver des formes de pore qui donne approximativement ce porfil. Un exemple est donné Fig. 2.1 pour $d = 0$ et $d \simeq -0.07$. On peut remarquer que les extrema du champ de vitesse pour un cas asymétrique ne correspondent pas exactement aux extrema du profil du pore.

En notant $s = (z, v = \dot{z}, t)$, cette équation différentielle ordinaire du second ordre non-linéaire peut s'écrire comme un système d'évolution de la forme

$$\dot{s} = F(s, t) \quad (2.7)$$

Soit de manière plus explicite :

$$\dot{z} = v \quad (2.8a)$$

$$\dot{v} = \gamma u_0(z) \sin(2\pi t) - \gamma v \quad (2.8b)$$

$$\dot{t} = 1 \quad (2.8c)$$

Les composantes de F sont des fonctions régulières et Lipchitziennes. Ce problème est donc un problème de Cauchy bien posé : il admet une et une unique solution pour une condition initiale donnée (z_0, v_0, t_0) . De plus, la vitesse et l'accélération du centre de la particule sont toujours bornées, ce qui est compatible avec un écoulement de Stokes. En revanche, malgré la simplicité de l'équation, il n'est pas possible de déterminer si les trajectoires sont bornées ou non.

2.2 Cas limites

L'analyse des cas limites ne montre aucune évidence de l'existence d'un transport. Nous détaillons par la suite ces cas limites.

Tube uniforme ($a = 0$).

Si le canal est uniforme, alors le champ $U_{eq}(z) = U_0$ est constant et l'Eq. (2.5) devient linéaire :

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} = \gamma U_0 \sin(2\pi t) \quad (2.9)$$

Il n'existe évidemment plus d'effet ratchet et la solution converge exponentiellement avec un temps de relaxation $\tau = 1/\gamma$ vers une solution de même période mais déphasée et d'amplitude A

$$A = \frac{U_0}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \frac{(2\pi)^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}} \quad (2.10)$$

Ce résultat bien que valable seulement pour $a = 0$, nous donne un ordre de grandeur des solutions périodiques. Puisqu'on s'intéressera à des particules d'inertie large ($\gamma \gg 1$), l'amplitude des solutions périodique est environ

$$A \simeq \frac{\langle U_{eq}(z) \rangle}{2\pi} = \frac{u_m}{2\pi} \quad (2.11)$$

Faible amplitude d'oscillation : $u_m \ll 1$.

Si la faible valeur efficace de la différence de pression du pompage est faible alors par linéarité de l'équation de Stokes, l'amplitude u_m du champ de vitesse est faible aussi. D'après le précédent paragraphe cela implique une oscillation de faible amplitude de la particule. Cette situation est analogue à la force pondéromotrice agissant sur des particules chargées plongées dans un champ électromagnétique périodique en temps et espace. Il est alors possible de montrer que les particules s'accumulent autour d'un extremum du potentiel [85, 86]. Dans notre cas, on montre un résultat analogue dans l'appendice A, à savoir, la particule converge vers une solution de période 1 centrée à l'un des minima du champ de vitesse U_{eq} . Plus précisément, à chaque extremum de U_{eq} correspond une solution périodique centrée en ce point et dont la stabilité dépend si c'est un maximum (instable) ou un minimum (stable). Ces résultats sont valides quelque soit la valeur du contraste a . Par conséquent, pour le profil de vitesse Eq. (2.6), il y a une solution périodique instable en $x = 0$ notée s_0 et une solution stable en $x = 1/2 + \beta$ (minimum de u_0), notée s_m .

Très faible inertie.

Si l'inertie est nulle, la particule suit une trajectoire Lagrangienne du fluide vérifiant

$$\dot{z} = u_0(z) \sin(2\pi t), \quad (2.12)$$

et est donc périodique. Pour une inertie $\epsilon = 1/\gamma$ suffisamment petite, est-il possible de montrer ou d'infirmer l'existence d'une solution de transport? Après avoir essayé des méthodes de perturbation analogues à celles employées dans le paragraphe précédent, nous n'avons pu obtenir de réponse à cette équation. Il est donc nécessaire d'explorer numériquement les solutions de l'ODE (2.5). Cependant, en plus de l'intégration temporelle, nous proposons d'employer la méthode de continuation appliquée aux solutions s_0 et s_m .

2.3 Méthode de continuation et bifurcations

La méthode de continuation permet de suivre certaines solutions en variant les paramètres du problème. Elle s'applique en particulier aux solutions stationnaires et périodiques. Il est possible

aussi de suivre des connexions homoclines ou hétéroclines. Le principe est, connaissant une solution de départ, de déterminer une nouvelle solution pour des paramètres voisins. Dans notre cas, les solutions de départ seront s_0 ou s_m d'un des cas limites. La recherche d'un état périodique pour un problème autonome se ramène à la résolution d'un problème aux limites (Boundary Value Problem) où la position z et la vitesse $v = \dot{z}$ doivent être périodiques (voir [87] pour plus de détails). Si le système dépend explicitement du temps comme cela a lieu pour notre système (2.5), il faut se ramener à un système autonome. La solution naturelle serait d'ajouter la variable t dans l'espace des phases qui vérifierait l'équation d'évolution $\dot{t} = 1$. Cependant, la solution (x, v, t) ne serait plus périodique. Ainsi, lorsque le forçage est sinusoïdal, on ajoute un ensemble d'équations différentielles ordinaires qui convergent vers un oscillateur harmonique. C'est la démarche que nous avons adopté, ainsi le système de départ devient un problème autonome à quatre dimensions

$$\dot{x} = v \quad (2.13a)$$

$$\dot{v} = \gamma u_0(x, a, d)\sigma - \gamma v \quad (2.13b)$$

$$\dot{\sigma} = 2\pi\zeta + \sigma(1 - \zeta^2 - \sigma^2) \quad (2.13c)$$

$$\dot{\zeta} = -2\pi\sigma + \zeta(1 - \zeta^2 - \sigma^2) \quad (2.13d)$$

où les équations (2.13(c) et (d)) forment un oscillateur non-linéaire qui convergent vers l'unique attracteur périodique : $\sigma(t) = \sin(2\pi t + \phi)$ et $\zeta(t) = \cos(2\pi t + \phi)$ avec ϕ une phase arbitraire [88]. Ainsi, toute orbite périodique du système Eq. (2.13) est bien solution du problème Eq. (2.5). La stabilité des solutions périodiques est déterminée en calculant les multiplicateurs de Floquet. S'ils sont à l'intérieur du cercle unité du plan complexe alors la solution est linéairement stable sinon elle est instable. Il est à noter qu'il existe toujours un multiplicateur de Floquet égal à un lié à l'invariance de translation dans le temps (système autonome). Une bifurcation a lieu lorsqu'un multiplicateur traverse le cercle unité. Détaillons brièvement les bifurcations qui apparaîtront dans les divers scénarios de transport.

Dans un premier temps on rappelle les trois principales bifurcations d'un état stationnaire :

- Bifurcation col-nœud (en anglais : « saddle-node ») ou bifurcation tangente. Lorsque la valeur propre est réelle, c'est la bifurcation générique : une solution cesse d'exister à un point

de retournement. La branche de retour est instable. Ainsi, avant la bifurcation, il y a toujours deux branches dont l'une stable et l'autre instable. Il existe des situations où les deux branches sont instables, mais l'une d'elles a une direction instable supplémentaire.

- Bifurcation fourche (en anglais : « pitchfork »). Elle a lieu si d'une part, la valeur propre est réelle et s'il existe une symétrie de type réflexion. Lors d'une bifurcation fourche super-critique, une solution perd sa stabilité et deux autres solutions stables émergent. Elle donne ainsi naissance à deux solutions asymétriques mais copies l'une de l'autre par la réflexion, c'est un exemple typique de brisure spontanée de symétrie.
- Bifurcation de Andronov-Hopf. Contrairement aux précédentes, elle a lieu si les valeurs propres sont complexes conjuguées, la solution bifurquée a une fréquence supplémentaire d'oscillation : on obtient donc une dynamique avec deux fréquences. Si les deux fréquences ne sont pas commensurables, alors on obtient des solutions quasi-périodiques.

Lorsqu'il s'agit d'une bifurcation d'une orbite périodique, on retrouve les trois bifurcations décrites précédemment. Le nom peut changer légèrement. La bifurcation Saddle-Node s'appelle aussi *Fold limit Cycle Bifurcation* ou *Fold Bifurcation*. La bifurcation pitchfork garde le même nom. En revanche, la bifurcation de Hopf est connue sous le nom de *Neimark-Sacker Bifurcation* ou *Torus Bifurcation*. Cette dernière appellation désigne en fait la géométrie dans l'espace des phases de la solution bifurquée. En effet, après la bifurcation, une nouvelle fréquence d'oscillation apparaît en plus de celle de l'orbite périodique, c'est donc une dynamique à deux fréquences qui est sur un tore. Si dans le cas générique où les deux fréquences sont incommensurables, alors la dynamique est quasi-périodique. La situation la plus simple correspond à un tore dans un espace de dimension 3, on parle alors de 2-torus bifurcation.

Il existe une bifurcation supplémentaire propre aux orbites périodiques qui est le doublement de période ou *period-doubling en anglais* ou en encore *flip bifurcation*. Comme pour la bifurcation fourche, l'orbite périodique devient instable au passage de la bifurcation et deux autres branches de solutions stables émergent. Ces solutions ont une période qui est doublée. Les deux solutions sont déduites l'une de l'autre par une translation temporelle d'une période. Cette bifurcation est généralement accompagnée d'une cascade de doublement de période amenant une dynamique chaotique.

C'est un scénario de route vers le chaos.

Cette analyse de bifurcation a été effectuée avec l'aide d'outils numériques. Nous employons le logiciel AUTO libre d'accès qui est couramment utilisé dans l'analyse numérique de bifurcations et la continuation des orbites périodiques [89]. Dans les diagrammes de bifurcations chaque point représente la norme $\|s\|$ d'une solution s T -périodique. Sa norme est définie comme la vitesse quadratique moyenne de la particule :

$$\|s\| = \left[\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (2.14)$$

Ainsi sa norme ne dépend pas de la position de la particule et deux solutions translatées par une période spatiale ont même norme.

Les méthodes de continuation sont cruciales pour comprendre l'origine du transport. En effet, l'intégration numérique ne nous renseigne que très peu sur le seuil d'existence du transport. En effet, lorsque le transport est intermittent, il existe une longue phase où la dynamique semble périodique et l'intégration temporelle ne permet pas de distinguer une dynamique bornée durant un long intervalle de temps d'un transport intermittent. Un autre avantage de l'analyse des bifurcations est de mieux comprendre la nature de la solution bifurquée. Ce qui, par exemple, nous renseigne sur le comportement asymptotique de la vitesse de transport proche de la bifurcation. De plus, cela permet de mettre en évidence des comportements universels qui pourraient avoir lieu dans d'autres domaines de la physique.

Dans le modèle proposé dans ce chapitre, il y a quatre paramètres sans dimension qui contrôlent la dynamique. Deux paramètres sont propres à la géométrie du pore et donc au profil de de vitesse : le contraste de vitesse a et l'asymétrie d de ce profil. Le paramètre γ correspond à la traînée de la particule. Un dernier paramètre propre au pompage est la vitesse moyenne u_m du profil de vitesse. Dû à l'adimensionnement, la fréquence de pompage n'apparaît pas directement mais est proportionnelle à γ . En étudiant les bifurcations issues des branches s_0 et s_m , on espère retracer les différents scénarios possibles menant au transport.

Puisque nous savons que les cas limites γ infini ou $u_m \ll 1$ ou bien $a = 0$, il n'y a pas de transport, un premier but de ce chapitre est de déterminer les ordres de grandeurs de ces paramètres

pour qu'un transport soit possible. Une autre question ouverte concerne le rôle de la symétrie de parité dans l'existence d'un transport. Quand on adopte un point de vue statistique l'effet ratchet est évidemment associé à l'asymétrie. Cependant, pour des ratchets déterministes, la question est plus délicate. Il peut exister des solutions de transport même stable pour une condition initiale donnée comme le montre l'étude [90] dans le contexte d'un rocking ratchet avec un fort amortissement (γ petit). Les auteurs font notamment le lien entre le phénomène de renversement de courant et une faible perturbation de la symétrie de parité du problème : pour une faible asymétrie, en variant un autre paramètre du problème (comme la fréquence) la direction du transport change. D'autres groupes soulignent un rôle différent de la symétrie dans le renversement de courant pour des problèmes avec une faible inertie. L'asymétrie est à l'origine du transport et donc un renversement de courant a lieu en variant ce paramètre. Ainsi le rôle de l'asymétrie semble différent selon l'inertie. Afin de mieux comprendre son rôle, on va distinguer le transport résultant d'une brisure spontanée de symétrie de celui obtenu par brisure forcée ($d \neq 0$) de symétrie.

2.4 Cas symétrique

2.4.1 Symétrie de parité \mathcal{S} du système

Si la géométrie des pores est symétrique, le champ de vitesse solution du problème linéaire Eq. (3.5) est aussi symétrique et donc $d = 0$. Ainsi le problème d'évolution Eq. (2.5) est équivariant par symétrie spatio-temporelle notée \mathcal{S} :

$$F(\mathcal{S}(s, t)) = -F(s, t) \text{ avec } \mathcal{S}(s, t) = s(-s, t + 1/2) \quad (2.15)$$

Cette symétrie \mathcal{S} correspond à une symétrie centrale dans le plan (z, v) suivi d'une translation d'une demi-période dans le temps. La propriété d'équivariance implique que toute trajectoire $z(t)$ solution de Eq. (2.5) la trajectoire $-z(t + 1/2)$ est aussi solution du problème. Il existe une autre symétrie de réflexion $\mathcal{S}_{1/2}$ centrée en $z = 1/2$ par lequel le problème est équivariant. En fait, \mathcal{S} et $\mathcal{S}_{1/2}$ définissent la même symétrie si on introduit la solution relative $\bar{s} = (\bar{z}, v) \in S^1 \times \mathbb{R}$ correspond à définir de manière cyclique la position $\bar{z} := z \text{ mod } 1$, i.e. \bar{z} appartient au cercle unité S^1 . Dans ce

contexte, une solution (\bar{s}, t) est symétrique ssi elle est invariante par l'action de \mathcal{S} dans $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{S}(\bar{s}, t) = (\bar{s}, t) \iff \forall t : \bar{z}(t + 1/2) = -\bar{z}(t) \quad (2.16)$$

Une solution symétrique a les propriétés suivantes : i) elle est de période 1, i.e. synchronisée avec le pompage, et ii) sa position moyenne sur une période $\langle \bar{z} \rangle$ est soit 0 ou $1/2$. La première propriété découle directement de sa définition. De l'Eq. (2.16), on déduit $z(t + 1/2) = -z(t) + n$, où $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $z(t)$ est continue, n doit être constant. Donc, on a aussi $z(t + 1) = -z(t + 1/2) + n$. Des deux égalités on en déduit la périodicité. La seconde propriété résulte de l'intégration temporelle sur une période Eq. (2.16). Nous obtenons alors : $\langle \bar{z} \rangle = -\langle \bar{z} \rangle \pmod{1}$. Cette équation a deux solutions : $\langle \bar{z} \rangle = 0$ ou $1/2$. Donc, il y a deux types de solution, l'une centrée à l'entrée du pore ($\bar{z} = 0$), correspondant à la vitesse maximale, et le second au milieu du pore $\bar{z} = 1/2$ ce qui correspond au minimum de vitesse. Si $u_m \ll 1$, on reconnaît les solutions s_0 et s_m trouvées précédemment. Par conséquent, sous cette hypothèse s_0 est un point selle et s_m est un noeud et la trajectoire de la particule reste confinée près du milieu du pore. Dans la suite, on considère, dans une première partie, le cas symétrique avec $d = 0$ puis, dans une seconde partie, dans la section suivante, nous étudierons les solutions de transport dans le cas asymétrique considéré comme perturbation du cas symétrique.

2.4.2 Branches périodiques

En accord avec les résultats analytiques, les diagrammes de bifurcation pour u_m petit montrent que la particule converge vers la solution périodique s_m . De plus, on n'observe pas de bifurcation pour différentes valeurs des paramètres tant que u_m reste autour de l'unité. On explore ainsi les branches de solutions pour des valeurs plus grandes de u_m qui sont représentées dans le diagramme de bifurcation Fig. 2.2 pour $\gamma = 100$ et $a = 0.65$.

Nous remarquons que ce diagramme possède une forme serpentine : les deux solutions s_0 et s_m se croisent régulièrement pour des valeurs de u_m qui sont approximativement des multiples de la longueur du pore. Lorsque ces deux solutions sont proches l'une de l'autre, elles échangent de stabilité. Le diagramme montre que pour $u_m = u_{pl}^{(1)} = 4.84$ la solution s_m devient instable tandis

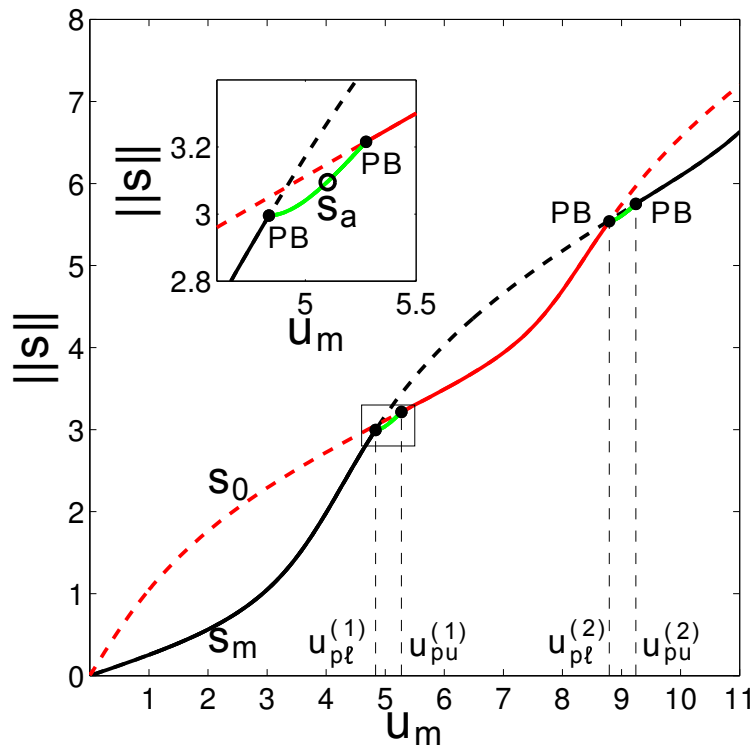


FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation des deux solutions périodiques s_0 (en rouge) et s_m (en noir). La ligne continue désigne la branche stable et la ligne pointillée désigne la branche instable de la solution. Les points en gras noir indiquent les points de bifurcation de fourche (Pitchfork bifurcation) notés PB sur le schéma. Les évolutions de ces trois solutions en ces points sont présentées dans Fig. 2.3. $\gamma = 100$ et $a = 0.65$.

que la solution s_0 devient stable pour $u_m = u_{pu}^{(1)} = 5.27$. Pour u_m entre $u_{pl}^{(1)}$ et $u_{pu}^{(1)}$ une nouvelle solution qui est asymétrique et stable apparaît après bifurcation de fourche, et que nous notons s_a . Cette solution est, en fait, dédoublée : s_a^+ et s_a^- et symétriques, *i.e.* $s_a^+ = \mathcal{S}(s_a^-)$. Donc, nous noterons simplement s_a dans cette section. La branche s_a connecte les deux solutions s_m et s_0 aux deux $u_{pl}^{(1)}$ et $u_{pu}^{(1)}$, et donc il existe toujours une solution périodique stable pour toute valeur de u_m .

Nous représentons les évolutions des trois solutions s_0 , s_m aux points de bifurcations $u_{pl}^{(1)}$ et $u_{pu}^{(1)}$, et la solution s_a au point $u_m = 5.1$ dans Fig. 2.3.a et leurs évolutions aux points $u_{pl}^{(2)}$, $u_{pu}^{(2)}$ et $u_m = 9$ dans la figure Fig. 2.3.b. Ces deux figures mettent en lumière le lien entre l'amplitude de la solution et sa stabilité. Plus précisément, si le pic de la trajectoire est dans le voisinage de l'entrée du pore ($z = 0$) alors la solution est instable, s'il est dans le voisinage du milieu du pore alors la solution est instable. Cette règle est valable indifféremment pour s_0 et s_m .

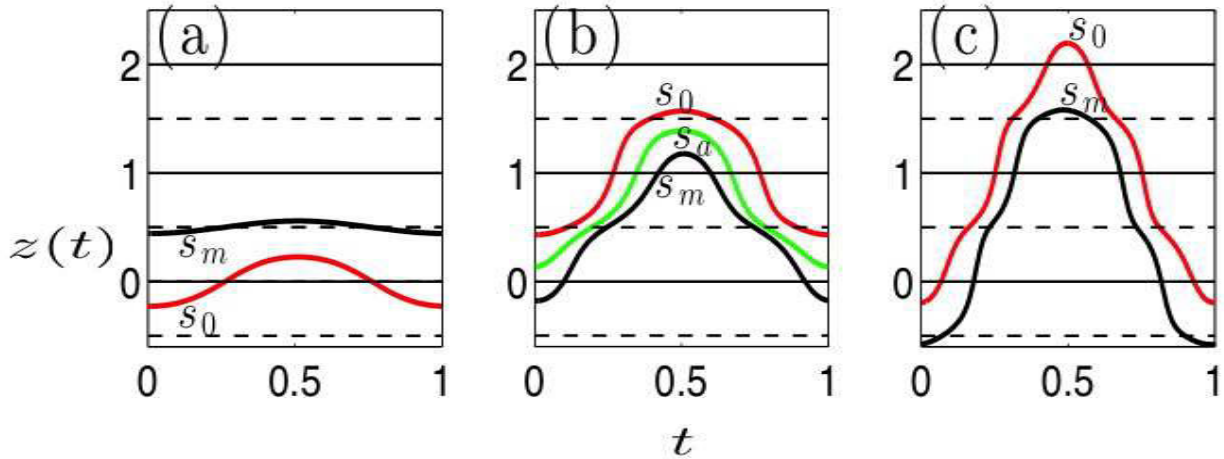


FIGURE 2.3 – Évolutions temporelles des solutions aux points de bifurcation indiqués sur Fig. 2.2. (a) : les profils de s_0 en $u_m = u_{pl}^{(1)}$, de s_m en $u_m = u_{pu}^{(1)}$ et de s_a en $u_m = 5.1$. (b) (a) : les profils de s_0 en $u_m = u_{pl}^{(2)}$, de s_m en $u_m = u_{pu}^{(2)}$. $\gamma = 100$ et $a = 0.65$.

Cette brisure de symétrie ne permet pas de mettre en évidence un transport puisqu'il existe toujours un attracteur périodique. D'autres valeurs du contraste a ont donné des résultats similaires tant que γ est de l'ordre de la centaine. Par la suite on considère une inertie plus grande telle que γ de l'ordre de la dizaine. Le diagramme de bifurcation Fig. 2.4 montre la même structure serpentée des branches symétriques avec les branches asymétriques qui rappellent des barreaux. Cette structure appelée *snake-and-ladders* est couramment rencontrée dans la littérature comme dans l'équation Swift-Hohenberg [91]. Le point commun entre ces études et le présent problème est la symétrie spatiale : symétrie de translation et parité.

Le diagramme de bifurcation met en évidence que pour chaque branche s_a , deux bifurcations de doublement de période ont lieu. Ils sont notés u_{1l} pour la plus petite valeur et u_{1u} pour la plus grande. Ces deux bifurcations sont connectées par la branche de période double (Courbe bleue dans Fig. 2.4(b)). Cette dernière possède aussi deux bifurcations de doublement de période. Il apparaît ainsi une cascade de doublement de période au voisinage de u_{1l} et de u_{1m} . La cascade issue de u_{1l} a un comportement similaire pour un système dynamique discret à une dimension où le rapport entre deux bifurcations consécutives tend vers la constante de Feigenbaum $\delta \approx 4.669$. Ainsi

la cascade s'accumule en un point noté u_L dans Fig. 2.4(b). En revanche, il est plus difficile de déterminer le point d'accumulation de la cascade issu de u_{1m} , car il est "masqué" par la branche s_m stable qui émerge de u_{fs} . D'après la loi d'auto-similarité de Feigenbaum, la fin de la cascade est estimée proche de u_{1u} et en tout cas inférieur u_{fs} . Une trajectoire chaotique mais bornée est observée pour $u_m > u_L$ ou $u_m < u_{fs}$ qui forment un attracteur étrange dans l'espace des phases. Ce scénario de route vers le chaos est typique pour les oscillateurs non linéaires avec dissipation et une force externe qui dépend du temps [92]. Sur les branches bifurquées de période 2^n d'autres cascades ont lieu. Sans rentrer dans le détail de ce scénario complexe, on décrit les premières bifurcations des branches de période 2 et 4. Leur comportement qualitatif permettra de mieux comprendre la solution de transport périodique décrite dans les sections suivantes.

La branche de période 2 issue de $u_{1\ell}$ forme un Z à deux points de retournement définissant trois sous-branches (B_1) , (B_2) , et (B_3) Fig. 2.5. La branche (B_1) connecte le point de doublement de période $u_{1\ell}$ au premier point de retournement u_{fu} , (B_2) connecte les deux bifurcations u_{fu} et $u_{f\ell}$ et (B_3) connecte ce dernier au point u_{1u} bifurcation de la branche s_a . Dans la section suivante nous allons mettre en évidence l'influence le lien de (B_2) dans l'existence du transport périodique. Nous traçons l'évolution temporelle des solutions de ces trois branches : l'évolution de (B_1) et (B_2) en $u_m = 8.65$ est présentée dans Fig. 2.5.a, et l'évolution de (B_2) et (B_3) en $u_m = 10.62$ est présentée dans Fig. 2.5.b. Ces deux figures montrent que la trajectoire des solutions de (B_2) durant la première période ($t \in [0, ; 1]$) est clairement différente de celle durant la seconde période ($t \in [1, ; 2]$), et plus particulièrement la différence entre leurs valeurs maximales n'est pas négligeable. Par contre, la trajectoire durant la première période $[0; 1]$ d'une solution de (B_1) ou de (B_3) n'est que légèrement différent de la trajectoire durant la seconde période.

Notons que la solution 2-périodique n'est pas instable sur l'intervalle $[u_L; u_{fs}]$ entier. En effet, une bifurcation saddle-node se produit en $u_m = u_{f\ell}$ (voir Fig. 2.4.b), par suite la solution regagne sa stabilité et elle reste stable jusqu'à la réapparition d'une bifurcation de doublement de période dans son voisinage où une branche de période 4 apparaît et ainsi la branche 2-périodique redevient instable. La différence relative entre ces deux bifurcations (saddle-note et doublement de période) est d'ordre de 10^{-6} , *i.e.* la longueur du domaine de stabilité de la solution est de l'ordre 10^{-6} .

Ce scénario se reproduit pour toutes les branches de solutions 4-, 8-périodiques (voir Fig. 2.4b) : ces branches présentent des points de retournement aux voisinages desquels des bifurcations de doublement de période ont lieu. Il est remarquable que les valeurs des bifurcations saddle-nodes de toutes ces branches ont lieu pour des valeurs très similaires. En conséquence, loin de ces zones de stabilité, les solutions 2^n -périodiques sont instables. Dans ces régions d'instabilité des dynamiques non bornées ont lieu. Dans la section suivante, nous nous intéressons à identifier la transition de la trajectoire bornée à non bornée.

A cause de la périodicité du système, des copies symétriques de cet attracteur étrange ont lieu aussi. Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer l'existence des dynamiques non bornées due à l'apparition d'une crise de fusionnement : tous les attracteurs se fusionnent pour former un unique attracteur étrange.

2.4.3 Émergence de dynamique non-bornée

Comme nous allons déjà mentionné, après la cascade de doublement de période un attracteur étrange et borné apparaît. A cause de la symétrie de translation, des copies translattées d'une longueur de pore existent aussi. La représentation dans l'espace des phases (z, v) révèle qu'il est globalement symétrique par \mathcal{S} . C'est-à-dire que si (\bar{z}, v) est un point de l'attracteur alors $(-\bar{z}, -v)$ l'est aussi. Cependant, on remarque que $\bar{z}(t + 1/2) \neq -\bar{z}(t)$ et par conséquent, la périodicité temporelle est détruite tandis que la symétrie de parité $(\bar{z}, v) \rightarrow (-\bar{z}, v)$ est préservée. Cette restauration partielle de la symétrie est certainement due à une crise appelée *merging crisis* où deux copies d'attracteurs asymétriques fusionnent en un seul pour donner naissance à un attracteur symétrique comme décrit dans [93]. La présentation de la section de Poincaré de l'attracteur dans Fig. 2.6 montre que l'attracteur borné est inclus dans une longueur de pore. En s'éloignant de la bifurcation (u_m croissant), la taille de l'attracteur s'agrandit jusqu'à les attracteurs consécutifs sont proches les uns des autres. A une valeur critique $u_m = u_{uB} = 8.5198$, les attracteurs fusionnent. Par périodicité spatiale, l'attracteur résultant n'est plus borné. Il s'ensuit une dynamique intermittente et non-bornée : la trajectoire est proche durant une longue durée proche de l'attracteur borné "fantôme" et durant un temps beaucoup plus bref il passe à un autre attracteur fantôme contigu

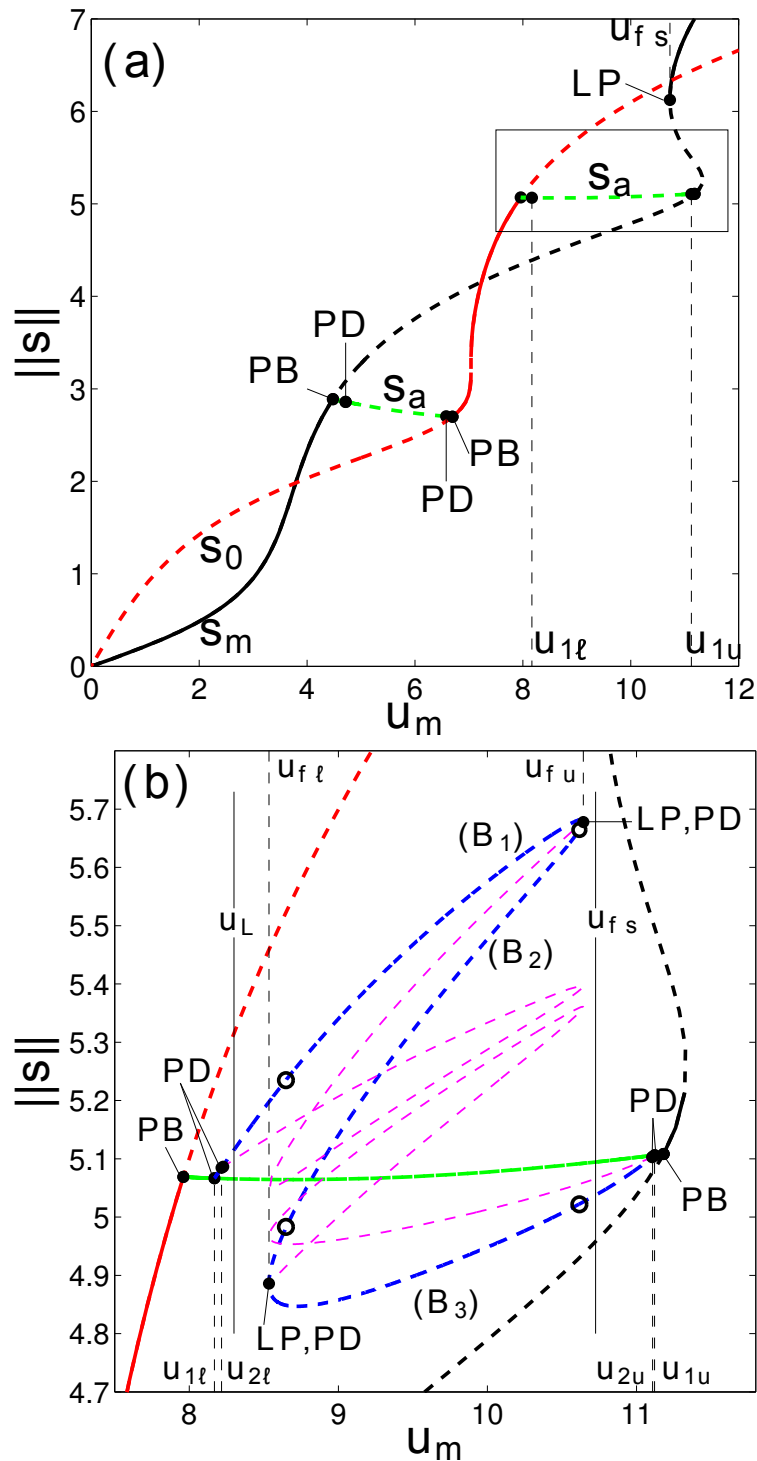


FIGURE 2.4 – Diagramme de bifurcation des solutions périodiques en fonction de la valeur moyenne de la vitesse, u_m , pour $a = 0.65$ et $\gamma = 10$. La valeur de u_m varie dans l'intervalle $[7, 12]$. Comme dans Fig. 2.2 les solutions périodiques de période 1 s_0 et s_m sont présentées respectivement en rouge et noir, et les points de bifurcation de Pitchfork sont présentés par PB. Les solutions 2-périodiques et 4-périodique sont présentées en (bleu) et en violet respectivement. Les points PD signifient les points de bifurcation de doublement de période et les LP ceux de type saddle-node (bifurcation tangente). Le point u_L correspond au point final de la cascade de doublement de période qui a commencé en u_{1u} avec aussi la production des dynamiques chaotiques. Les points $u_{f\ell}$ et u_{fu} correspondent aux points de bifurcation tangente. Les cercles sur les trois branches (B_1) , (B_2) , (B_3) correspondent aux solutions présentés dans Fig. 2.5.

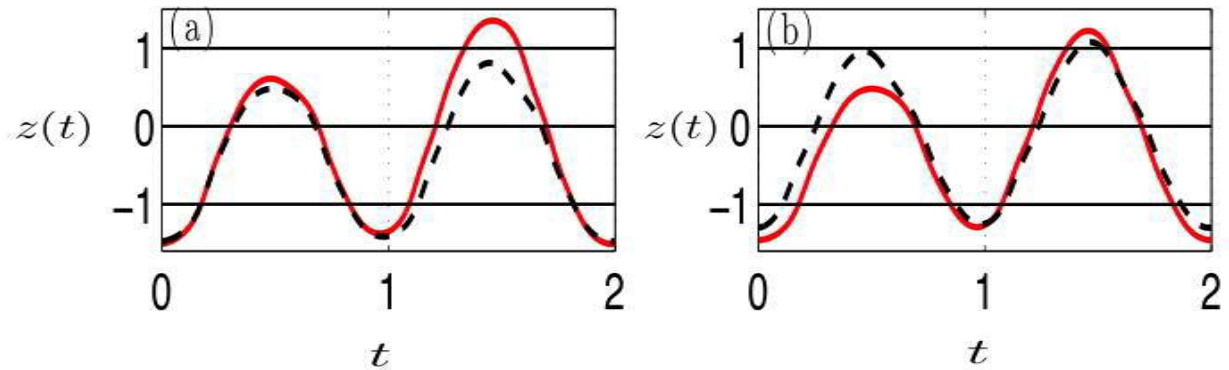


FIGURE 2.5 – (a) : évolution des deux branches (B_1) (ligne pointillée noire) et (B_2) (ligne continue rouge) en $u_m = 8.65$. (b) : évolution des deux branches (B_3) (ligne pointillée noire) et (B_2) (ligne continue rouge) en $u_m = 10.62$.

(Fig. 2.7). Une direction de la dynamique ne peut pas être déterminée, ce qui est consistant avec le fait que les attracteurs avant la crise possédaient la symétrie de parité. La durée des phases bornées de la dynamique est irrégulière (Fig. 2.7). Néanmoins, elle diminue lors le paramètre u_m s'éloigne de la crise.

En augmentant encore plus la valeur de u_m , la durée des phases de transport devient plus grande

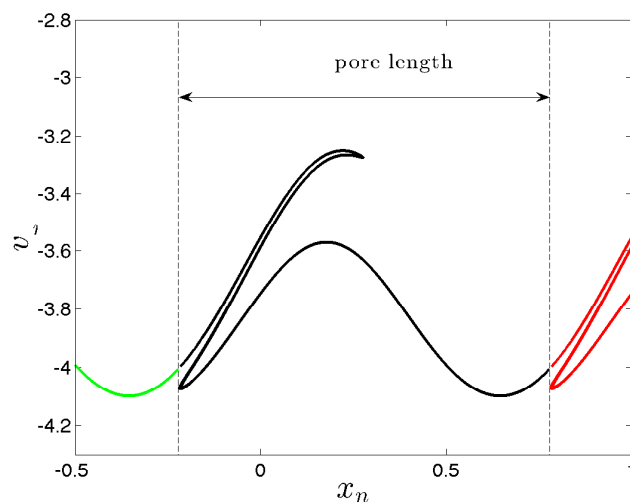


FIGURE 2.6 – Cette figure présente la section de poincaré z_n, v_n avec $n \in \mathcal{N}$ de l'attracteur étrange pour $u_m = 8.519$, la valeur de u_m où la crise de fusionnement de tous les attracteurs se fusionnent. Un attracteur est présenté par la ligne noire.

que la durée des phases de dynamique bornée. Ceci est illustré par la figure Fig. 2.7 et Fig. 2.8 qui présentent les positions stroboscopiques z_n de la particule et les positons relatifs \bar{z}_n . En s'approchant d'une certaine valeur de u_m , les phases de transport deviennent presque périodiques comme suggéré par les plateaux de la dynamique relative dans la Fig. 2.8. Ainsi, on a une dynamique de transport qui ressemble à un transport régulier mais entrecoupées de courtes phases chaotiques.

Notons qu'en partant de u_{fu} et en diminuant u_m un scénario similaire au précédent se produit : une transition de dynamiques bornées en non bornées existe $u_m = 10.65$ et ensuite une transition en un transport périodique se produit en $u_m = 10.6169$. Un schéma représentant toutes ces bifurcations

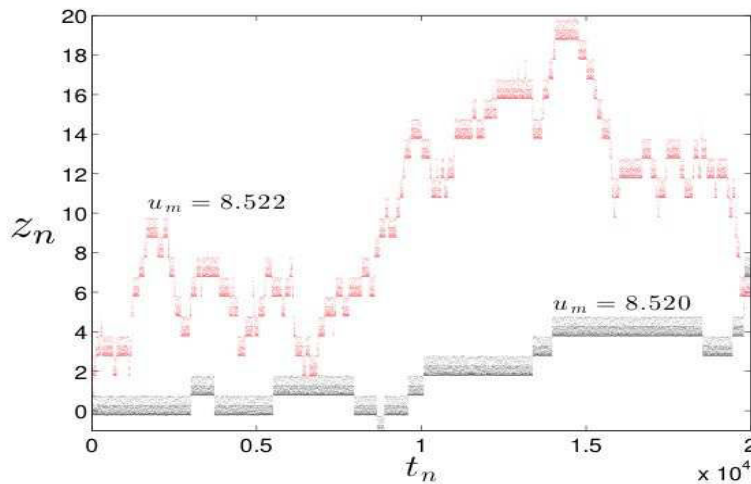


FIGURE 2.7 – Cette figure présente des dynamiques stroboscopiques de la particule pour des valeurs de u_m au delà de u_{uB} pour laquelle la crise de fusionnement a eu lieu.

et transitions commençant par les solutions périodiques et terminant par la solution de transport synchronisé est illustré dans Fig. 2.12.

2.4.4 Transport périodique

Dans cette section nous étudions les solutions de transport périodiques qui émergent deux bifurcations u_{fl}^t et u_{fu}^t . Dans le repère relatif en translation à la vitesse $c = \pm 1$, la trajectoire est périodique. En d'autres termes, durant une période la particule se déplace d'une période spatiale

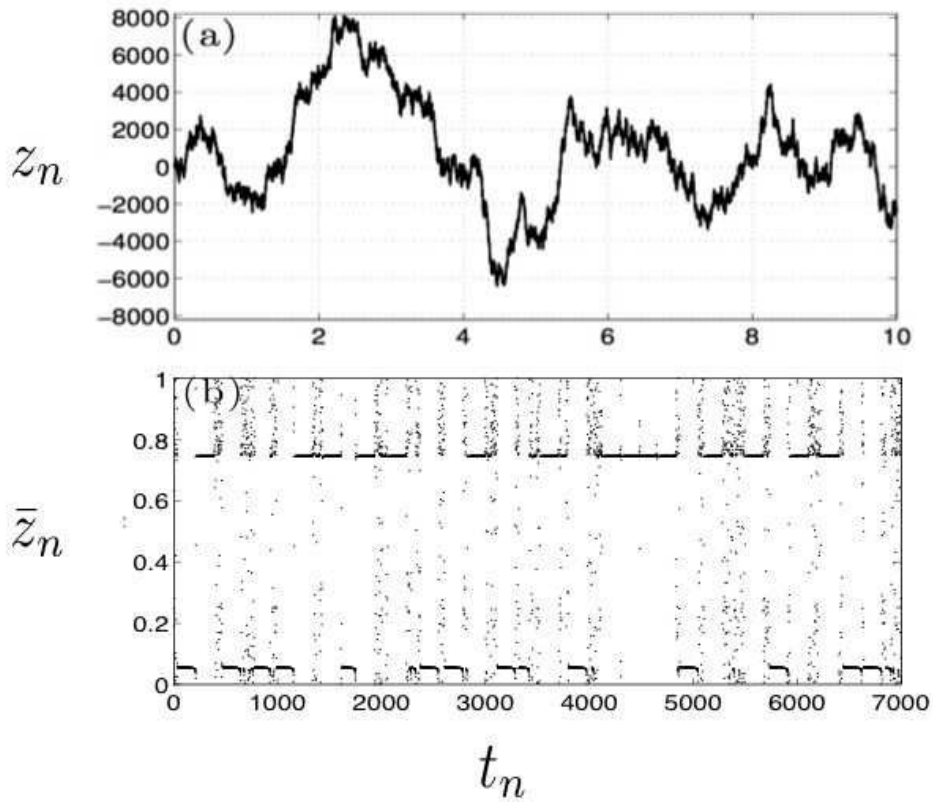


FIGURE 2.8 – Nous présentons la dynamique stroboscopique z_n et la position stroboscopique relative $\bar{z}_n = z_n \bmod 1$ de la particule pour une valeur de u_m proche de u_{uB} ($u_m = 8.64835$).

à droite (si $c = +1$) ou à gauche (si $c = -1$). On dénomme cette solution transport périodique. Nous notons que si une solution de transport existe dans un sens, une solution de transport existe alors dans le sens opposé. Ceci est dû à l'équivariance du problème par la symétrie \mathcal{S} de l'équation Eq. (2.4.1). Si nous désignons par s_t^+ la solution de transport à droite (dans le sens des z croissants), alors la position de la particule correspondante se décompose en une solution périodique z_p^+ et une solution linéaire ct avec c vaut 1 :

$$z_t^+ = z_p^+ + t \quad (2.17)$$

et son symétrique $s_t^- = \mathcal{S}(s_t^+)$ est la solution dans la direction gauche (dans le sens des z décroissants). En effet :

$$\begin{aligned} z_t^- &= -z_t^+(t + 1/2) \\ &= -z_p^+(t + 1/2) - t - 1/2 \\ &= z_p^-(t) - t \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pour le problème symétrique, il suffit d'étudier la solution dans un seul sens et ainsi le signe de la solution est omis dans la suite de cette section. La solution de transport z_t étant associée de manière univoque à une solution périodique z_p , il est possible d'appliquer les méthodes de continuation pour ces solutions. En effet, la partie périodique de la solution z_p est solution de l'EDO suivante :

$$\ddot{z}_p + \gamma \dot{z}_p = \gamma [u_m(1 + av_0(z_p + t)) \sin(2\pi t) - c] \quad (2.19)$$

La constante c joue un rôle similaire qu'une force constante (*tilting force*) impliquant un biais dans un problème de ratchet [29, 94]. La continuation de z_p , la solution de Eq. (2.4.4) selon le paramètre u_m montre la présence d'une solution qui a la forme d'un 8, composée de deux branches que nous notons (T_1) et (T_2) et qui sont reliées par les deux bifurcations tangentes qui ont lieu en $u_m = u_{f\ell}^t$ et $u_m = u_{fu}^t$. (Voir Fig. 2.9). Par conséquent, pour chaque direction (dans le sens des z croissants et décroissants) et pour les mêmes valeurs de u_m , deux solutions de transport coexistent. La première branche, (T_1) , est toujours instable tandis que la seconde (T_2) est initialement stable près des bifurcations tangentes. Cette branche perd sa stabilité via une bifurcation de doublement de période définissant trois régions de stabilité de (T_2) . La première est délimitée par $u_{f\ell}^t$ et la bifurcation de doublement de période qui a lieu en $u_{1\ell}^{t1}$, la deuxième par les deux bifurcations de doublement de période u_{1u}^{t1} et $u_{1\ell}^{t2}$, et la troisième est un voisinage étroit de la bifurcation u_{fu} . Dans la Fig. 2.10, nous présentons les dynamiques des deux solutions, l'une stable et l'autre instable, qui coexistent à $u_m = 9$. Ces deux solutions sont indiquées par deux cercles dans la Fig. 2.9.

Les quatre bifurcations de doublement de période donnent naissance à deux branches de période 2 (courbes bleues dans Fig. 2.9). On observe alors une cascade de doublement de période similaire à la section précédente. La cascade suit une loi d'auto-similarité et aboutit à une dynamique chaotique de z_p qui reste bornée dans le repère relatif. En conséquence, dans l'intervalle de paramètre

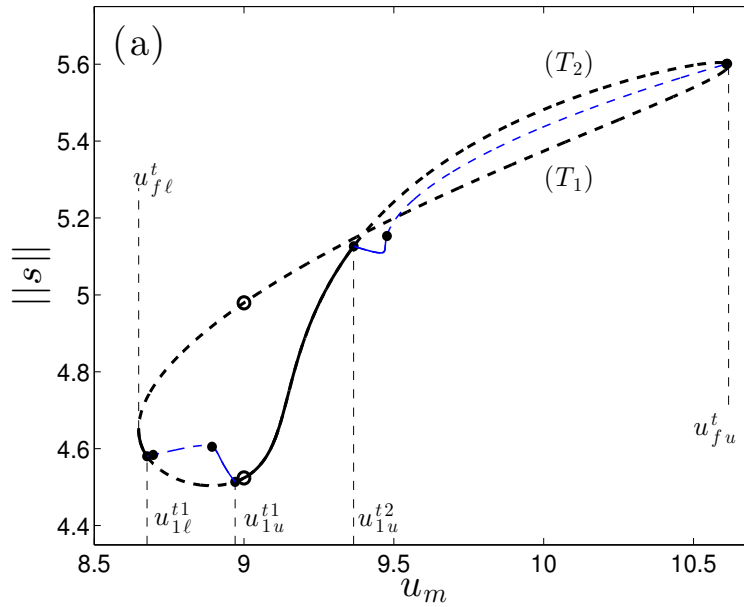


FIGURE 2.9 – Cette figure présente le diagramme de bifurcation selon le paramètre u_m de la solution périodique z_p . Cette solution de période 1 est délimitée par deux bifurcations tangentes $u_{fl}^t=8.6483$ et $u_{fu}^t=10.6169$. Les cercles présentent les solutions présentées dans la figure Fig. 2.10. Les bifurcations de doublement de période sont indiquées par PD. La couleur bleue désigne une solution 2-périodique. Une branche stable est présentée par une ligne continue et une solution instable par une ligne pointillée. $\gamma = 10$ et $a = 0.65$.

qui va du domaine stable de z_p à cet attracteur étrange "borné", la vitesse de transport est $c = \pm 1$. On dit alors que la vitesse est bloquée (*locked velocity*) ou que le transport est synchronisé. Ainsi la dynamique peut être chaotique mais le transport est synchronisé avec le fluide. Ce transport synchronisé est détruit par une crise. Après la crise la dynamique n'est plus bornée dans le repère relatif. Comme l'attracteur issu de cette crise semble symétrique, on avance l'hypothèse qu'il apparaît par une crise entre attracteurs de directions opposées (symétrique par \mathcal{S}). C'est ce que confirme la dynamique $z_p(t)$ où l'on observe une alternance entre des épisodes de transport à gauche et à droite (Fig. 2.11) et dont la vitesse $c(t)$ définie par

$$c(t) = \frac{z(t)}{t} \quad (2.20)$$

semble fluctuer autour de zéro (Fig. 2.11). Ce qui est consistant avec l'hypothèse d'une crise entre attracteurs symétriques. Ainsi, on a une discontinuité de la vitesse du transport lors du passage de la crise : avant on a un transport synchronisé avec $|c| = 1$ puis après on n'a plus de transport ($c \simeq 0$)

mais une dynamique qui ressemble à un phénomène diffusif.

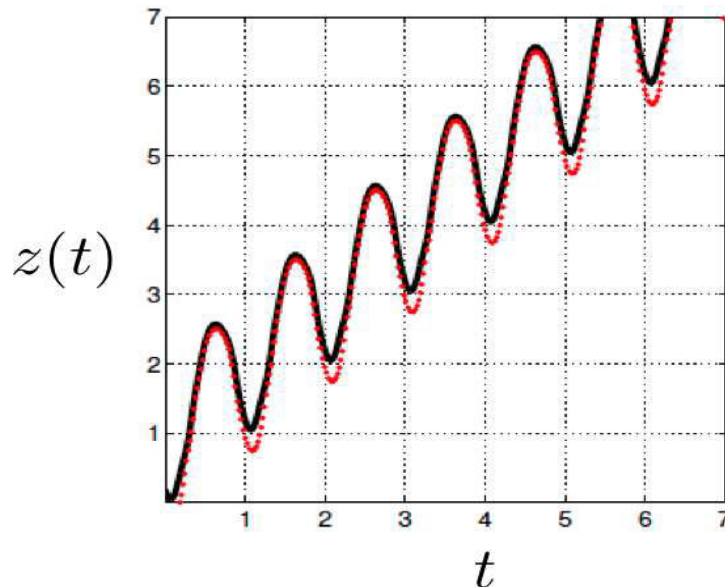


FIGURE 2.10 – Evolution temporelle de la solution de transport s_t^+ stable (ligne continue noire) et celle qui est instable (ligne pointillée rouge) pour $u_m = 9$.

Les scénarios décrivant les transitions des solutions périodiques s_0 et s_m menant, d'une part, à une dynamique non bornée, puis, d'autre part, au transport via des brisures spontanées de symétrie sont résumés dans la Fig. 2.12.

Rôle des solutions n-périodiques dans l'existence de transport

Les mécanismes de transport ne montrent pas de bifurcation directe entre les solutions 2-périodiques et le transport périodique. Néanmoins dans cette sous-section, nous montrons qu'une propriété qualitative des solutions de doublement de période peut être un bon indicateur de l'émergence du transport synchronisé. Afin de comprendre le rôle des solutions 2-périodiques, nous représentons l'évolution de la dynamique de la solution de transport ainsi que les solutions 2-périodiques pour les mêmes paramètres. En se plaçant, au seuil d'émergence de la solution de transport périodique, $u_m = u_{fu}^t$, il existe trois solutions 2-périodiques. On choisit la solution de la branche (B2), c'est-à-dire celle qui présente la plus grande différence entre ses maxima d'après la discussion de la

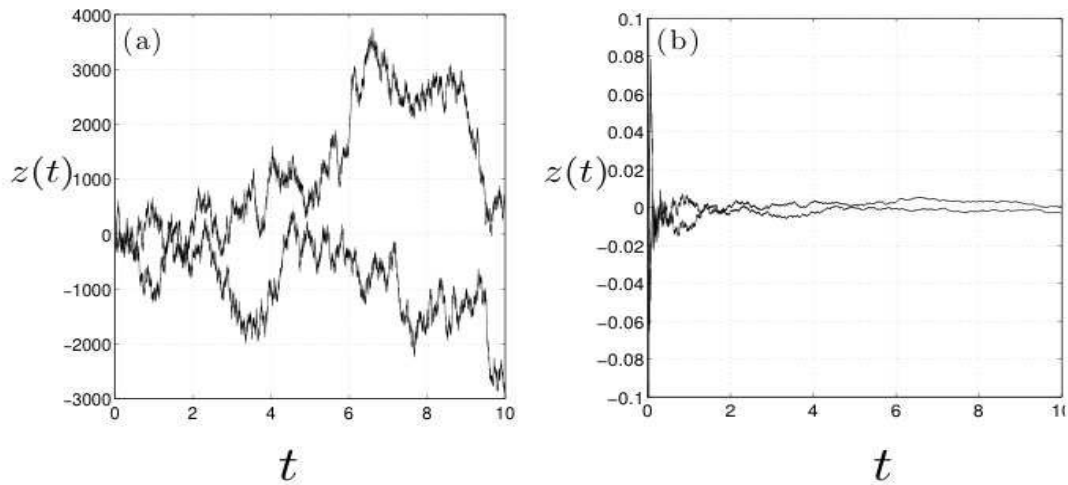


FIGURE 2.11 – La figure gauche présente la dynamique $z(t)$ de la particule pour une valeur de u_m appartenant à l’intervalle où la vitesse n’est plus bloquée à 1 ($u_m = 8.8$) pour deux valeurs initiales différentes. La figure droite présente la vitesse $c(t)$ de la particule correspondante à la dynamique présentée dans la figure gauche.

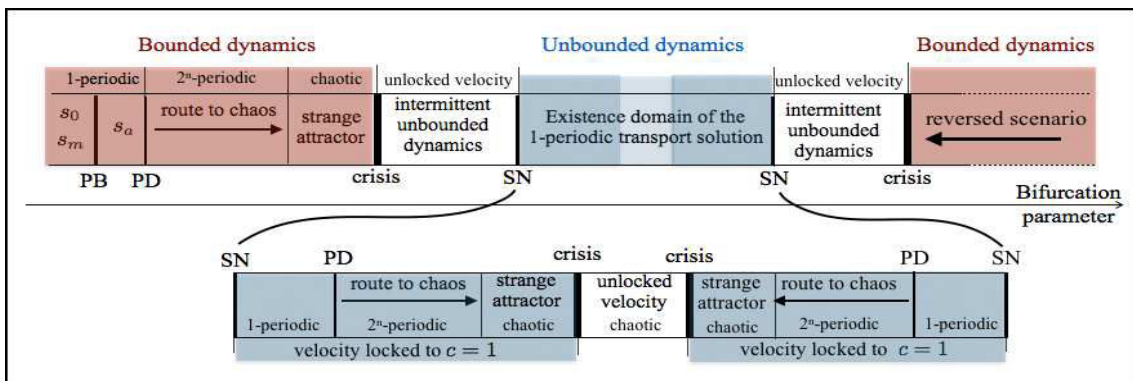


FIGURE 2.12 – Cette figure résume les différentes transitions et bifurcations qu’a eues les deux solutions périodiques et menant à une solution de transport synchronisée.

Section (2.4.2). Cette solution notée $z_2^{(0)}$ est représentée par un cercle dans le diagramme de bifurcation Fig. 2.4(b) et est localisée proche du point de retournement de (B_2) . De plus, dans Fig. 2.13 nous représentons aussi les copies de $z_2^{(0)}$, notées $z_2^{(n)}$, obtenues par une translation en temps de n périodes et en espace de n période aussi $z_2^{(n)}(t) = z_2^{(0)}(t + n) + n, n \in \mathbb{Z}$. Les périodicités spatiale et temporelle assurent l’existence de ces copies. Fig. 2.13 révèle que les trajectoires de deux orbites

consécutives $z_2^{(n)}(t)$ et $z_2^{(n+1)}(t)$ sont proches pour t autour de $0.4 + 2n, n \in \mathbb{Z}$. Pour cet instant $t \simeq 0.4$, la vitesse (pente de $z_2^{(n)}(t)$) est maximale et la position de la particule est environ $\bar{z} \simeq 0.6$. Parce-que les pentes de deux solutions sont approximativement égales, les trajectoires sont proches dans l'espace des phases. Si la solution 2-périodique est instable, une trajectoire proche de $z_2^{(0)}$ peut "s'échapper" de son voisinage et glisser vers le voisinage de $z_2^{(1)}$ à $t \simeq 0.4$ comme le montre la Fig. 2.13. La solution de transport z_t est proche de $z_2^{(2)}$ dans l'intervalle de temps $[0; 0.4]$ puis se rapproche progressivement de $z_2^{(1)}$. A cause des périodicités spatiales et temporelle, ce scénario se répète entre $z_2^{(1)}$ et $z_2^{(2)}$ donnant naissance à un transport synchronisé avec $c = 1$ exactement. La pertinence du rôle joué par la branche (B_2) est appuyé par le fait que son domaine d'existence $([u_{f\ell}; u_{fu}])$ in Fig. 2.4(b)) correspond presque à celui de la solution de transport $([u_{f\ell}^t; u_{fu}^t])$ in Fig. 2.9). En fait, les autres branches (B_1) et (B_3) ont de faibles variations du maximum durant deux périodes et ainsi deux copies de solutions issues de ces branches ont des trajectoires qui restent éloignées. Il en découle que la proximité entre deux copies d'orbites 2-périodiques est un élément clé pour l'existence du transport synchronisé.

Ce raisonnement peut se généraliser pour des transport périodiques tels que $c = 1/q$ avec $q \in \mathbb{Z}$. Par exemple, on peut trouver un lien similaire entre une solution de transport $c = 1/2$ et une branche de solution 3-périodique. En représentant l'évolution temporelle d'une solution 3-périodique $z_3(t)$ et ses copies $z_3^{(n)} = z_3(t + 2n) + n, n \in \mathbb{Z}$ translatées de 2 périodes temporelles et d'une période spatiale. La solution de transport reste proche de la solution 3-périodique z_3 durant deux périodes, puis glisse vers la copie $z_3^{(1)}$ et ainsi de suite. Il faut donc exactement deux périodes pour avancer d'un pore et donc la vitesse est $c = 1/2$.

Zone d'existence d'une solution synchronisée

Pour conclure, nous déterminons le domaine d'existence de la solution de transport périodique dans le plan (γ, u_m) (Fig. 2.14). Pour une traînée donnée γ , le transport périodique existe dans une intervalle de u_m . Cet intervalle diminue lorsque γ augmente et lorsque γ est plus grand qu'environ 12.7, il n'y existe plus de solution de transport. Il y a donc un lien simple entre amplitude du forçage (u_m) et un transport. De plus, bien que une diminution de la traînée γ implique une plage d'exis-

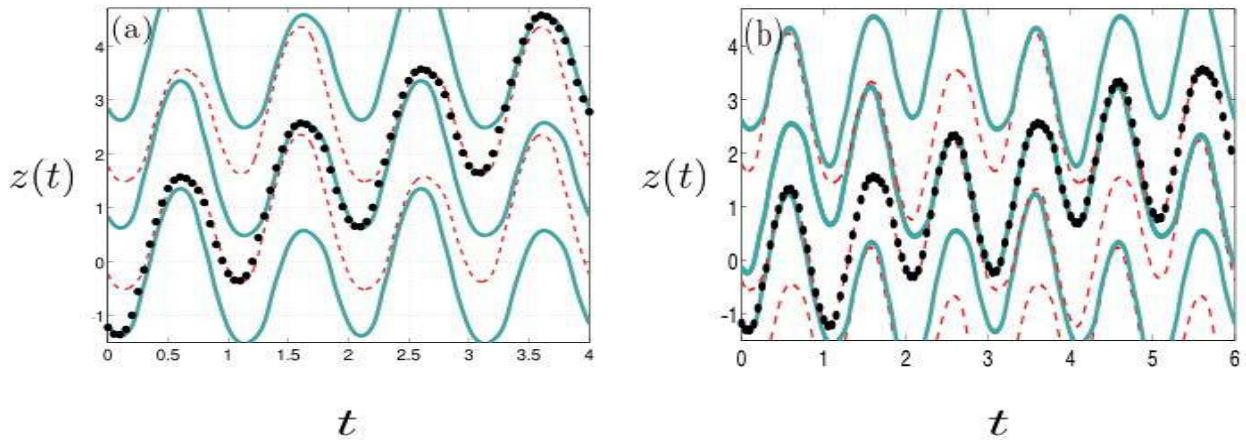


FIGURE 2.13 – (a) Evolution de la solution de transport synchronisée, avec $c = +1$ (en points noirs), et la solution 2-périodiques ainsi que ses copies (lignes continue et pointillée) en $u_m = u_{fu}^t$ qui appartient à la branche (B_2) . Les lignes continues (pointillées) représentent les solutions $z_2^{(2p)}$ ($z_2^{(2p+1)}$) qui sont copies de la solution $z_2^{(0)}$ et espacées de cette dernière de $2p$ ($2p + 1$) périodes. La figure (b) représente les évolutions temporelles de la solution 3-périodique et ses copies (lignes continue et pointillée) et la solution de transport de période $c = 1/2$, en $u_m = 9$. Une ligne continue est une copie espacée d'une période spatiale et décalée de deux périodes temporelles d'une ligne pointillée.

tence plus grande selon u_m , le domaine de stabilité, en revanche, diminue. Il est, en effet, constitué de filaments lorsque γ diminue, ce qui n'est pas sans rappeler les figures du domaine d'existence des transports synchronisés présentées dans [95] dans un contexte de ratchet faiblement amortis (trainée petite). Notre approche avec la méthode de continuation montre que le domaine d'existence de la solution périodique n'est pas réduit au domaine d'existence mais une région plus large existe. La plage d'existence du coefficient de traînée ne semble pas compatible avec l'hypothèse d'une particule ponctuelle, c'est-à-dire, que les contraintes du fluide sur la particule ne sont pas influencées par les bords du canal. Nous étudions dans la prochaine section le cas asymétrique.

2.5 Cas asymétrique

Dans [84], on a étudié plus en détails, la perturbation due à une asymétrie du pore et donc de l'écoulement ($d \neq 0$) pour γ autour de 10. Cette asymétrie permet d'obtenir un courant effectif, c'est-à-dire que si on considère les conditions initiales de la particule comme une variable aléa-

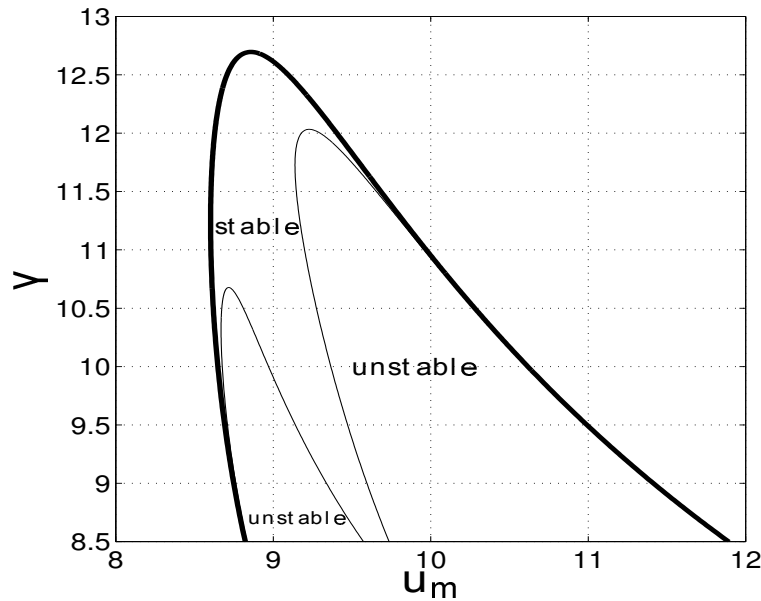


FIGURE 2.14 – Zone d’existence de la solution de transport synchronisée (de vitesse $c = \pm 1$) dans le plan (u_m, γ) . Elle est limitée par les bifurcations tangentes qui sont représentées par la ligne en gras. Les lignes fines représentent les transitions entre solutions stables et solutions instables et qui sont des bifurcations de doublement de période.

toire, on obtient donc un courant non-nul. De plus, les diagrammes de bifurcation et les scénarios ne sont pas modifiés. Cependant, dans le cas asymétrique s_t^+ et s_t^- sont deux solutions différentes ($\mathcal{S}(s_t^+) \neq s_t^-$) et donc leur domaine d’existence sont différents. Il existe alors des plages de paramètres différentes pour lesquelles seulement l’une des deux solutions existe impliquant un renversement de courant comme expliqué dans l’introduction et dans [95]. Cependant, le domaine d’existence des solutions synchronisées dans le cas asymétrique est similaire au cas symétrique, c’est-à-dire que les solutions existent seulement pour une traînée autour de 10.

Dans cette section nous étudions les scénarios de bifurcation en variant le paramètre d’asymétrie d pour une traînée environ de $\gamma = 100$. Avant d’étudier le cas asymétrique et afin de déterminer dans quelles plages de valeurs du contraste de vitesse a le transport a lieu, nous commençons par tracer le diagramme de bifurcation avec comme paramètre a pour $\gamma = 100$, $u_m = 9$ et $d = 0$ Fig. 2.15.

Comme dans le diagramme de bifurcation Fig. 2.2, les seules solutions qui existent sont s_0 , s_m et s_a . De $a = 0$, émergent les deux solutions symétriques s_0 (instable) et s_m (stable). Elles

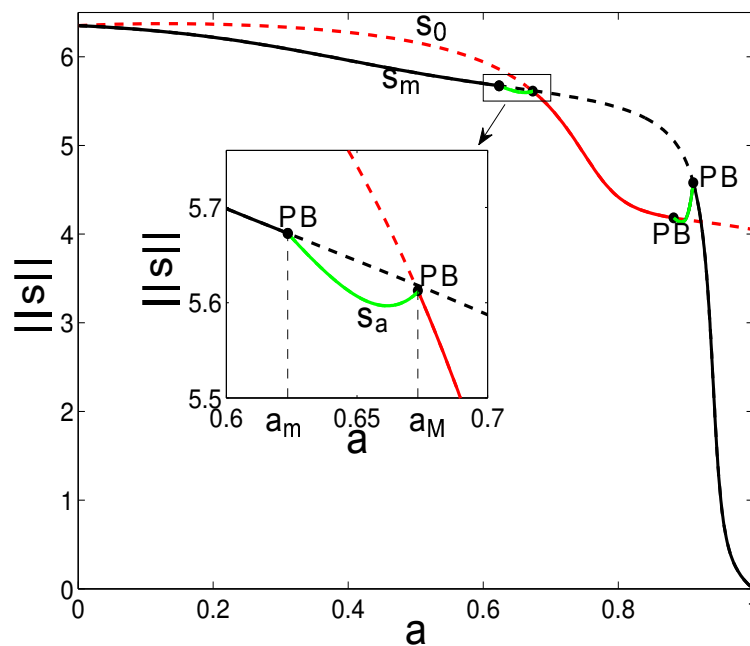


FIGURE 2.15 – Diagramme de bifurcation qui montre la continuation selon le contraste de vitesse, a , des deux solutions 1-périodiques s_0 (en rouge), s_m (en noir) et s_a (en vert). Les points désignent la bifurcation de fourche. La ligne continue (pointillée) indique que la solution est stable (instable).

échantent leur stabilité via deux bifurcations fourches qui sont notées sur la figure par PB. Entre ces deux points de bifurcation, les deux branches s_0 et s_m sont connectées par la branche asymétrique s_a . Ce phénomène a lieu pour a autour de 0.65 (intervalle noté $[a_m; a_M]$ et de 0.9).

Maintenant, nous fixons une valeur du contrast a (les autres paramètres étant identiques) et nous faisons varier l'asymétrie d de l'écoulement. Pour toute valeur de a plus petite que la valeur critique $a_c = 0.507 < a_m$ la continuation selon d des deux solutions s_0 et s_m montrent qu'aucune bifurcation se produit et que ces deux solutions ne changent pas de stabilité. Par conséquent, une solution de transport reste encore impossible. En revanche, pour une valeur de $a > a_c$ la figure Fig. 2.16 montre qu'il existe une certaine valeur de d qu'on note d_f pour laquelle une bifurcation tangente se produit pour laquelle les deux solutions fusionnent en une seule solution. Cette même figure montre que si a appartient à l'intervalle $[a_m, a_M]$, la solution asymétrique s_a se divise en deux solutions que nous notons s_a^- et s_a^+ . Ces quatre branches se terminent en deux bifurcations tangentes notées d_{f1} et d_{f2} (voir Figs. 2.16c à d). Une première correspond à l'annihilation de s_0 avec s_a^+ et la seconde correspond à l'annihilation de s_m avec s_a^- . Finalement pour $a > a_M$, il ne reste plus que

les branches s_0 et s_m et donc une seule bifurcation tangente. Il est à noter que la seconde plage de paramètre pour laquelle la solution s_a bifurque pour des valeurs irréalistes du contraste de vitesse, car le gradient de vitesse serait grand ce qui n'est pas consistant avec un écoulement rampant.

En remarquant que, pour $d < d_f$, les branches de solutions périodiques ont toujours une direction stable, on peut réduire le problème à une dimension. Pour simplifier, on considère le cas où s_a n'existe pas, les deux solutions s_0 et s_m sont connectées via deux connexions hétéroclines entre la branche instable et la branche stable. Dans le schéma Fig. 2.17 on a représenté les positions moyennes des solutions périodiques. Lorsqu'on atteint la valeur critique d_f alors les deux positions moyennes sont confondues. Cependant, il existe une connexion hétérocline entre deux copies consécutives de la solution périodique séparée par une longueur de pore. A cause de la périodicité spatiale, toutes les connexions sont dans le même sens (Fig. 2.17). Finalement, pour $d > d_f$, toutes les orbites périodiques disparaissent laissant apparaître un possible transport dans le sens des connexions hétéroclines à la bifurcation. Il est important de noter que ce type de bifurcation ne peut avoir lieu dans le cas symétrique. En effet, les positions moyennes de s_0 et s_m sont des invariants et donc ne peuvent pas être égales.

L'intégration temporelle corrobore le scénario précédent en montrant l'existence d'un transport lent lorsque $d > d_f$. La représentation stroboscopique à chaque période de la position de la particule présente la forme d'un escalier descendant dont les plateaux correspondent aux oscillations de la particule proche de celles de la solution périodique au seuil $d = d_f$ (Fig. 2.18). Les plateaux deviennent plus larges si d s'approche de d_f , et la vitesse de dérive c est proportionnelle à la racine carrée de la différence entre d et d_f : $(d - d_f)^{\frac{1}{2}}$. On obtient donc un transport intermittent.

Ce scénario de transport est analogue à celui mis en évidence dans un tout autre contexte : il s'agit du phénomène de désancrage (*depinning*) d'une goutte sur un substrat aux propriétés de mouillage périodiques [96, 97]. Le mouvement intermittent appelé *stick-slip* est intermittent et régulier comme pour notre cas. De plus, le comportement asymptotique de la vitesse de transport proche du seuil est la même loi de puissance. La bifurcation à l'origine de ce transport de goutte implique aussi des connexions hétéroclines à un point-selle, c'est ce qui s'appelle une bifurcation *SNIPER* pour *Saddle-Node Infinite PERiod*. Néanmoins, dans notre cas, à cause du forçage périodique, la transi-

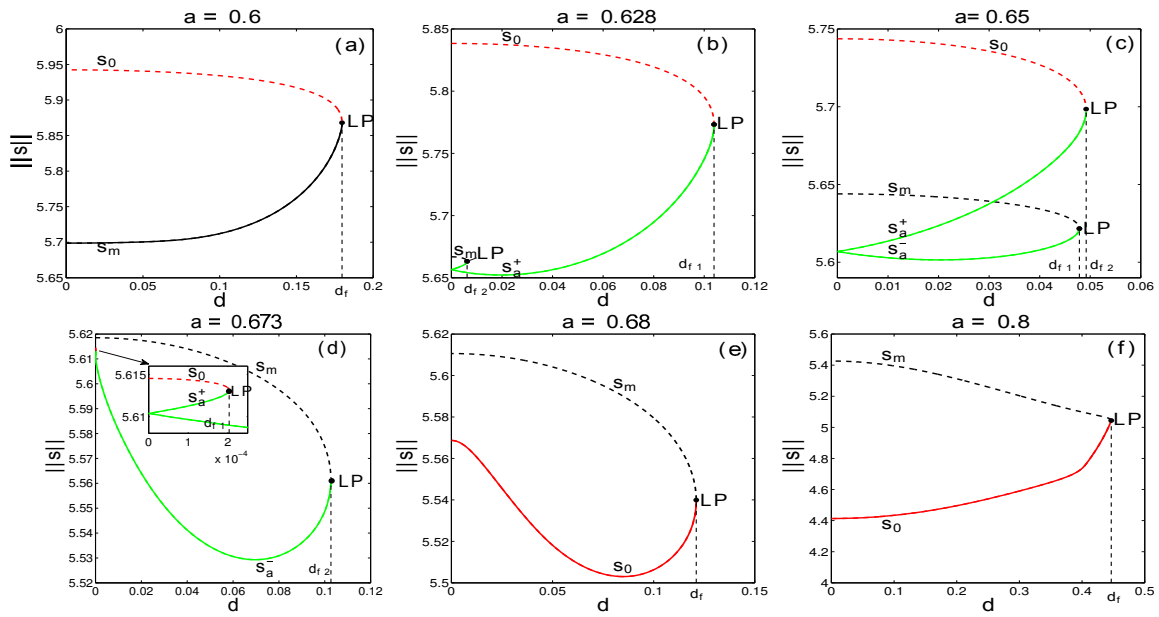


FIGURE 2.16 – Continuation à partir du cas symétrique ($d = 0$) des branches s_0 (en rouge), s_m (en noir) et s_a (en vert) en variant le paramètre d et pour de différentes valeurs de a . Dans les figures (a), (e), et (f) les deux branches s_0 et s_m se terminent par un point limite (LP) en d_f . Dans (b), (c), et (d), en présence de s_a deux bifurcations limites existent en d_{f1} et d_{f2} . Ligne continue (pointillée) désigne une solution stable (instable).

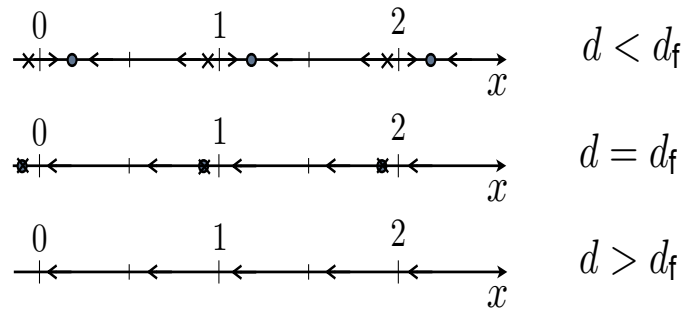


FIGURE 2.17 – Représentation schématique de la transition intermittente de type I. Cette figure montre les positions moyennes de la solution périodique selon l’axe des z pour $d \leq d_f$. Les croix (cercles) désignent la position moyenne de la solution instable (stable). Les flèches sur l’axe des z indiquent le sens de la connection hétéroclinique entre les deux solutions.

tion est interprétée comme étant une bifurcation intermittente de type-I. Ce type de bifurcation a été introduit par Pomeau et Manneville dans [98] en étudiant le modèle de Lorenz. C’est une transition qui peut-être décrite comme un système dynamique discret à une dimension où les valeurs z_n seraient les positions discrètes de la particule à chaque période. L’application de retour (*return map*)

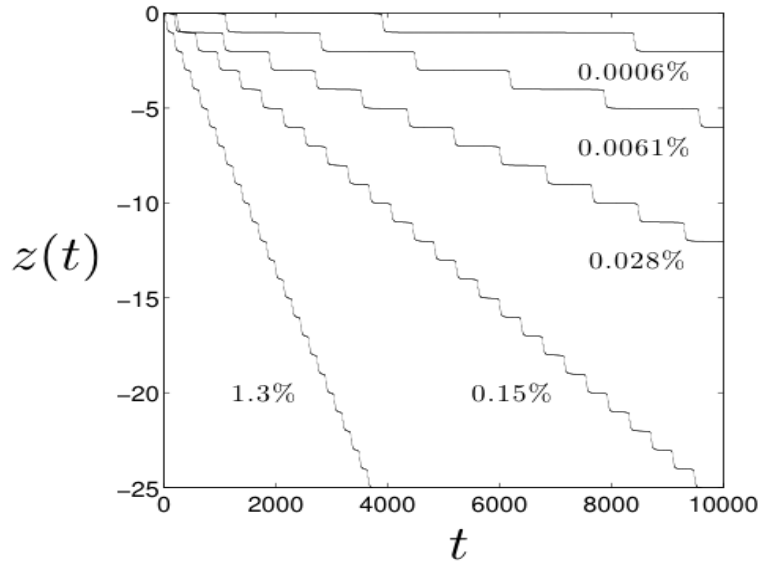


FIGURE 2.18 – Position stroboscopique z_n de la dynamique au temps discrétisé $t_n = n$ pour $a = 0.6$ et différentes valeurs de d supérieures à la valeur de d_f . Le pourcentage sous chaque graphe indique le pourcentage de la variation relative de d ($(d - d_f)/d_f$). Les plateaux signifient que la particule oscille et puis elle se déplace d'un pore.

(z_{n+1}, z_n) forme une courbe qui coupe la bissectrice en deux points si $d < d_f$. Les deux points fixes correspondent aux solutions périodiques s_0 et s_m . Au point critique $d = d_f$, elle est tangente puis pour $d > d_f$, il n'y a plus d'intersection entre la courbe et la bissectrice. On montre alors que, si $d > d_f$, la dynamique passée près du point fixe suit une loi de puissance en $-1/2$. Ainsi, on retrouve la loi en puissance $1/2$ de la vitesse de transport.

Cette bifurcation de type-I est généralement associée à des intermittences chaotiques, or ici la dynamique est particulièrement régulière ainsi que la longueur des plateaux semble constante. Il existe une seconde différence concernant la dimension deux au lieu de 1, de notre application, *i.e.*, la position, z_n et la vitesse v_n à l'instant t_n ($z_{n+1} = f_x(z_n, v_n)$ et $v_{n+1} = f_v(z_n, v_n)$). Néanmoins, pour γ large, dans cette équation l'aspect bidimensionnel peut être négligé. En effet, l'intégration sur une période de temps entre $t_n = n$ et $t_{n+1} = (n+1)$ de l'Eq. (2.5) donne :

$$z_{n+1} - z_n = \int_n^{n+1} u_0(z(t)) \sin(2\pi t) dt - \frac{1}{\gamma}(v_{n+1} - v_n) \quad (2.21)$$

mais comme γ est grand, le terme $\frac{1}{\gamma}(v_{n+1} - v_n)$ devient négligeable. On retrouve alors le même

scénario que le modèle unidimensionnel proposé par Pomeau et Manneville dans [98] et décrit dans le paragraphe précédent. De plus, en remarquant que la différence $z_{n+1} - z_n$ reste petite et de signe constant si $d > d_f$, on en déduit que la suite z_n est monotone, ce qui explique la régularité de la dynamique.

Notons que lorsque les deux bifurcations tangentes, d_{f1} et d_{f2} , ont lieu, le transport intermittent a lieu pour $d > \max(d_{f1}, d_{f2})$. Cependant si $d_{f1} \approx d_{f2} \approx 0.05$ comme c'est le cas pour Fig. 2.16c alors la dynamique stroboscopique montrent un escalier avec deux types de marche (Fig. 2.19). Chaque plateau correspond à un point fixe avant la bifurcation et ainsi la dynamique passe près de ces deux points fixes "fantômes".

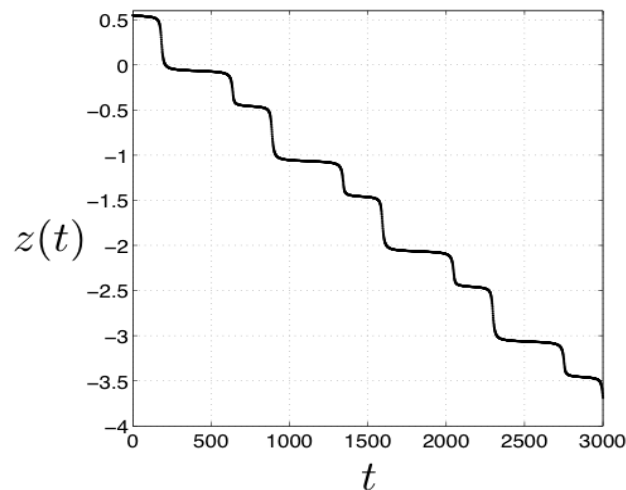


FIGURE 2.19 – Evolution de la position stroboscopique z_n de la particule pour $d = 0.0494$ supérieure à d_{f2} . Chaque plateau correspond à des oscillations de la particule autour un des deux points fixes d_{f1} et d_{f2} .

Pour terminer cette section, nous notons que les simulations numériques montrent que toutes les dynamiques sont attirées par la solution de transport qui constitue l'unique attracteur. La vitesse du transport reste négative et sa valeur absolue est une fonction croissante de d . La valeur maximale que peut atteindre cette dernière ne dépasse pas 0.1, par exemple pour $a = 0.65$, $u_m = 9$, et $d = 0.4$ (la plus large valeur de d qu'on eut considérer), on obtient $c = -0.0654$ qui reste assez petite par rapport à la vitesse du transport synchronisé. On a tracé le lieu de points des seuils de transport (voir Fig. 2.20) dans le plan (γ, d_f) . D'autres simulations montrent que la dérive existe même pour

des valeurs de γ plus larges ($\gamma = 500$) et ceci est montré dans la Fig. 2.20 qui présente les lieux des points de bifurcation tangente dans le plan (γ, d_f) . ce type de transport intermittent se produit pour des valeurs grandes de γ et pas pour γ inférieur à 50, contrairement au transport synchronisé qui existe que pour une valeur de γ autour de la dizaine. En respectant la condition que d doit être plus petit que 0.4, nous déduisons de la Fig. 2.20 que pour $u_m = 5$, le domaine d'existence de la dérive en fonction de γ se restreint sur $\gamma \in [80; 120]$.

En conclusion, un transport γ autour de la centaine a lieu dans le cas asymétrique. L'asymétrie est nécessaire pour obtenir la bifurcation intermittent de type I contrairement au cas symétrique où c'est une brisure spontanée de symétrie qui est à l'origine de l'existence de solution de transport. De plus, en remarquant que le cas $d < 0$ se déduit du cas $d > 0$ en prenant la solution opposée, alors que le signe d détermine le sens du transport. En effet pour $d > 0$, le transport est toujours vers la gauche et pour $d < 0$, il sera donc toujours vers la droite. Cette situation est exactement celle décrite par [99] et qui correspond à des ratchet tels que la vitesse du transport est unique. Dans ce cas, les auteurs montrent que le renversement de courant est obtenu en faisant varier le paramètre à l'origine de la brisure forcée de la parité, qui est d dans notre cas. Pour une certaine classe de ratchet, les auteurs trouvent une fonction sinusoidale du transport, ce qui n'est pas notre cas. De plus, ce dernier article n'explique pas l'origine du transport. Nous avons montré que c'est dû à une bifurcation intermittente.

Ce qui est remarquable d'un point de vue quantitatif, c'est que nous avons trouvé un transport pour une inertie faible ($\gamma = 100$ et $\gamma = 500$) qui peut avoir lieu même pour une légère asymétrie du flot $d = 0.05$. Ces faibles valeurs d'inertie nous indique que c'est un possible transport dans notre contexte. Cependant, dans le chapitre suivant, nous montrons que ces valeurs d'inertie correspondent toujours à des particules qui ne sont pas de taille négligeable par rapport au canal. Nous devons tenir compte de l'effet des bords du canal sur les contraintes exercées par le fluide sur la particule.

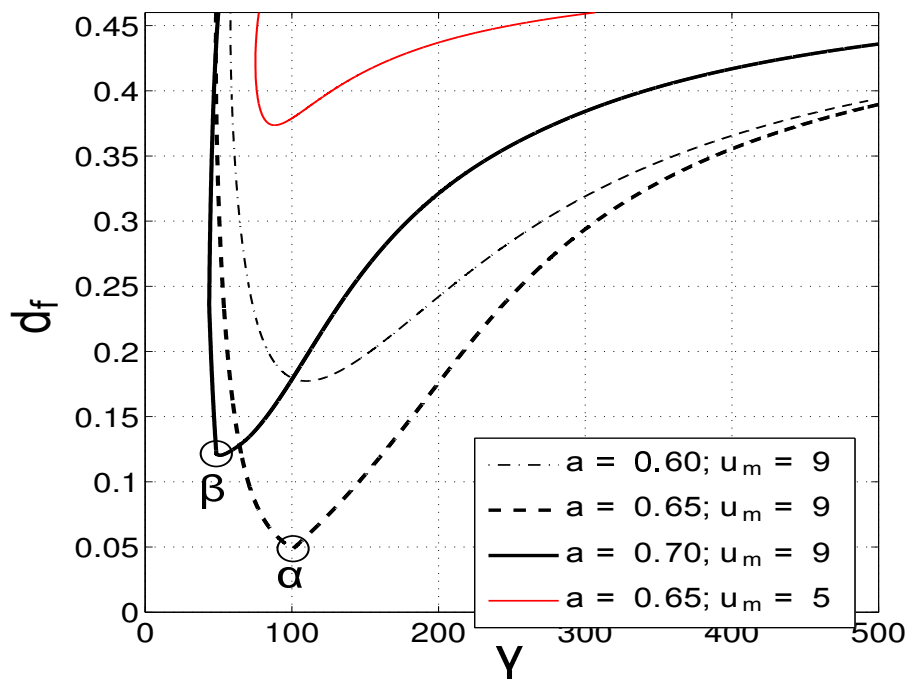


FIGURE 2.20 – Les points de bifurcation intermittente de type-I dans le plan (γ, d_f) pour différentes valeurs de a et u_m . Les domaines au-dessus des courbes désignent les domaines d'existence du transport intermittent pour les valeurs de a et u_m citées sur le graphe. Tandis que les domaines au dessous de ces courbes désignent que toutes les dynamiques convergent vers les solutions 1-périodique. Les cercles α et β sont les coins qui signifient la présence de deux bifurcations intermittentes proches.

Chapitre 3

Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence différents mécanismes de transport qui ont lieu pour un coefficient de trainée autour de 10 ou de 100 et inférieure à 500. Cette valeur maximale ne peut être atteinte pour des particules d'un rayon négligeable par rapport au rayon moyen du tube. D'après l'état de l'art établi au premier chapitre, la loi de Stokes donnant la force de trainée n'est plus valide et il n'existe pas de résultat analytique pour un tube de section variable. Les effets du bord du canal doivent être pris en compte dans l'évaluation des contraintes sur la particule.

Pour cela, nous allons d'abord décrire la modélisation et la mise en équations du problème. Notamment, la dynamique de la particule est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires où deux champs doivent être calculés. L'un, noté $U_{eq}(z)$, est relatif au champ de vitesse du fluide sans particule et l'autre, noté $\gamma(z)$ est relatif au coefficient de trainée local. Ensuite, nous détaillons la résolution numérique associée à ce problème. La méthode des équations intégrales de frontière correspondante à l'écoulement de Stokes est employée pour calculer la force sur la particule. Cette méthode exige le calcul des intégrales élémentaires régulières et singulières.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : Dans la Section (3.1), nous présentons la mise en équation du problème. La formulation intégrale associée, ainsi que l'implémentation numérique sont détaillées dans la Section (3.2). Une méthode de calcul des intégrales singulières est montrée dans la Section (3.3) et le choix des valeurs des paramètres utilisés dans la l'implémentation numérique est rapporté dans la Section (3.3.3). Finalement, dans une dernière section 3.4, nous analysons

l'effet de la géométrie du tube et de la particule sur les champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ et donc sur la force de traînée.

3.1 Modéle numérique associé

3.1.1 Equations et adimensionnement

A la différence des études reportées dans la littérature, associées à un pompage symétrique avec un effet "ratchet" lié à la périodicité et l'asymétrie spatiale (asymétrie du pore), nous considérons un pore symétrique, et nous montrons que l'effet "ratchet" peut être obtenu par la périodicité du tube et de l'asymétrie temporel du pompage. Nous notons que d'autres études faites ont montré qu'un effet ratchet peut être obtenu si la symétrie spatiale est conservée et la force est temporellement asymétrique [38, 41]. En fait, l'équivalence entre les deux approches provient du fait que dans les deux cas la symétrie \mathcal{S} de parité est brisée.

Ainsi, nous considérons un pore dont la variation du rayon, $r(z)$, est une fonction sinusoïdale et donc symétrique par rapport au centre du pore. Le rayon du pore est donné par l'équation :

$$r(z) = \frac{r_{min}}{2} \left[\alpha + 1 + (\alpha - 1) \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \right] \quad (3.1)$$

où r_{min} est le rayon minimal du pore et L est sa longueur. Nous notons par α la courbure du pore : le rapport entre le rayon maximal (R_{max}) et le rayon minimal (r_{min}), avec $\alpha \geq 1$, et $\alpha = 1$ correspond à un tube cylindrique uniforme. On note, S^e la surface d'entrée du tube, S^s sa surface de sortie, S^ℓ sa surface latérale, et S^p la surface de la particule. Cette forme de pores va être utilisée pour étudier les mécanismes de transport reportés dans le dernier chapitre de cette thèse. La géométrie du problème est illustrée à la Fig. 3.1. Notons que d'autres formes de pores peuvent être également considérées. Par exemple, dans le chapitre précédent, la forme géométrique est choisie pour que le champ de vitesse $U_{eq}(z)$ soit sinusoïdal (Fig. 2.1).

Avant de considérer un flot quasi-statique, nous introduisons l'équation de Navier-Stokes décrivant l'écoulement dans le cas général :

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \right] &= -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

62 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

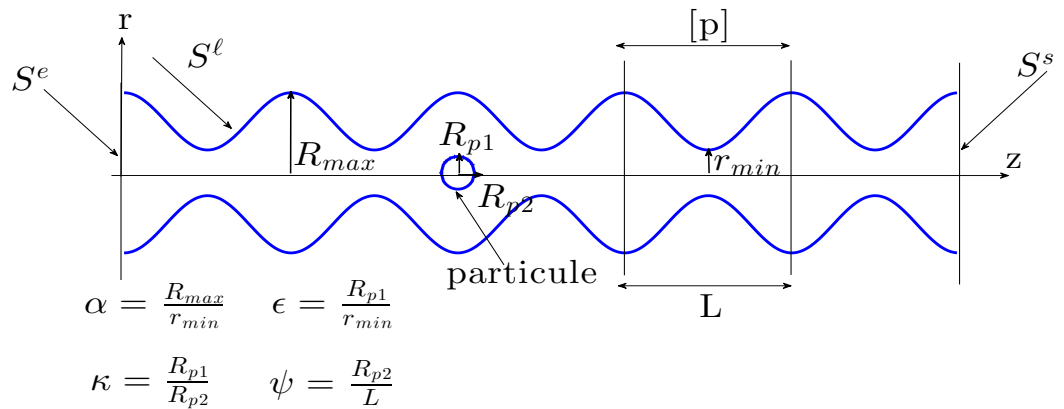


FIGURE 3.1 – Illustrations des profils géométriques du tube et de la particule.

avec :

- ρ : la densité du fluide
- \vec{u} : le champs de vitesse
- t : le temps
- p : la pression
- μ : la viscosité dynamique du fluide
- \vec{f} : une force extérieure qui peut être le poids.

Dans notre travail, l'écoulement est soumis à un pompage extérieur périodique de période T et est induit par un gradient de pression entre l'entrée et la sortie du tube. Le type et l'expression du pompage, que nous notons $A(t)$, sont donnés dans le chapitre 4. Dans l'équation (3.2), les forces extérieures sont négligées et les variables sont adimensionnées : les longueurs sont divisées par la longueur du pore L , le temps par T qui est la période du pompage, la pression par la différence de pression entre l'entrée et la sortie du pore notée $[p]$ et enfin la vitesse par la vitesse caractéristique du fluide v_c . Nous choisissons comme vitesse caractéristique la vitesse du fluide dans un écoulement

de Poiseuille pour le rayon r_{min} . On trouve ainsi

$$v_c = -\frac{[p]r_{min}^2}{4\mu L} \quad (3.3)$$

L'équation de Navier-Stokes avec ce dimensionnement s'écrit alors :

$$\underbrace{\frac{\rho L^2}{\mu T}}_{St \cdot Re \ll 1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\rho v_c L}{\mu}}_{Re \ll 1} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = -\left(\frac{2L}{r_{min}}\right)^2 \vec{\nabla} \hat{p} + \Delta \vec{u}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.4)$$

où le nombre de Reynolds défini par $Re = \rho v_c L / \mu$ et le nombre de Strouhal donné par $St = \frac{L}{Tv_c}$ apparaissent. Ce dernier nombre est propre aux problèmes ayant un forçage périodique. Les valeurs caractéristiques sont choisies pour que le nombre de Reynolds Re ainsi que le produit $St \cdot Re$ soient négligeables. Cela signifie que les forces visqueuses dominent les forces inertielles et que le temps de relaxation du fluide est négligeable par rapport à la période T du pompage. Par exemple, si nous reprenons les valeurs typiques employées dans les études expérimentales et théoriques récentes de Kettner *et al.* dans [53] et de Matthias *et al.* dans [35], tels que L soit de l'ordre de μm et T varie entre $10^{-4}s$ et $10^{-2}s$, alors pour un écoulement d'un liquide de masse volumique et de viscosité équivalentes à celles de l'eau, le nombre de Reynolds est entre 10^{-4} et 10^{-2} . Notons qu'une discussion sur les valeurs du nombre dimensionnel est abordée dans le chapitre 4. Dans ce contexte les termes à gauche de l'équation (3.2) peuvent être négligés. Cet adimensionnement nous ramène à l'équation d'un écoulement quasi-statique :

$$-\vec{\nabla} p + \Delta \vec{u} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.5)$$

Dans toute la suite de notre travail, pour alléger l'écriture, nous omettons le symbole chapeau qui spécifie les variables dimensionnées. D'un point de vue physique, sous ces approximations, l'équation (3.5), signifie que les termes visqueux sont prédominants sur les termes d'inertie et que l'écoulement s'adapte instantanément à la variation de la pression $p(\vec{y}, t)$, où \vec{y} désigne un point du tube. En présence du pompage sinusoïdal de période T , le champs de pression s'écrit donc :

$$p(\vec{y}, t) = p_0(\vec{y})A(t) \quad (3.6)$$

64 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

Ainsi, sous l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, une fois qu'on a déterminé le champ de vitesse $u_0(\vec{y})$ relié au champ de pression $p_0(\vec{y})$ par :

$$\vec{\nabla} p_0 = \Delta \vec{u}_0 \quad (3.7)$$

le champs de vitesse, $\vec{u}(\vec{y}, t)$, en tout point \vec{y} et à chaque instant t est donné par :

$$\vec{u}(\vec{y}, t) = u_0(\vec{y})A(t) \quad (3.8)$$

Grâce à la linéarité du problème, afin d'obtenir les contraintes sur la particule, on calcule tout d'abord les champ de vitesse et de pression (u^0, p^0) de l'écoulement incident, *i.e* sans la particule, puis le champ de perturbation (u^d, p^d) dû à la présence de la particule. Comme dans le chapitre précédent et dans [35, 53], on considère un grand nombre de pore, et donc le champs de vitesse incident u^0 peut être supposé périodique.

On démontre que si $[p]$ est la différence de pression entre la surface d'entrée et celle de la sortie d'un pore,

$$[p] = p_0(r, z) - p_0(r, z + L) \quad (3.9)$$

alors $[p]$ est indépendante de r et z . En effet, d'après l'équation (3.5) qui traduit l'équilibre entre les effets de pression et les effets visqueux, et d'après la condition de périodicité du champs de vitesse on en déduit que le gradient de pression est aussi périodique. Ce qui donne :

$$\frac{\partial p_0}{\partial r}(r, z) = \frac{\partial p_0}{\partial r}(r, z + L) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z}(r, z) = \frac{\partial p_0}{\partial z}(r, z + L) \quad (3.11)$$

Par la suite, on conclut que :

$$\frac{\partial}{\partial r} (p_0(r, z) - p_0(r, z + L)) = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (p_0(r, z) - p_0(r, z + L)) = 0 \quad (3.13)$$

Problème initial

Nous désignons par écoulement initial, ou écoulement incident, l'écoulement du fluide à travers le tube en absence de la particule. Le tube est considéré suffisamment long ; et donc cet écoulement est considéré comme périodique et est décrit par les équations adimensionnelles de Stokes ayant pour conditions aux limites : (i) la condition de non glissement sur la surface latérale du tube, S^ℓ , et (ii) la condition de périodicité du champs de vitesse entre les deux extrémités du pore, S^e et S^s . Ainsi (u^0, p^0) désignent les champs de vitesse et de pression incidents, alors ils sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 -\vec{\nabla} p^0 + \Delta \vec{u}^0 &= 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^0 &= 0 \\
 \vec{u}^0 &= \vec{0} \text{ sur } S^\ell \\
 \vec{u}^0(r, 0) &= \vec{u}^0(r, L)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dans l'Annexe (B.2), la formulation variationnelle du problème montre que pour chaque valeur

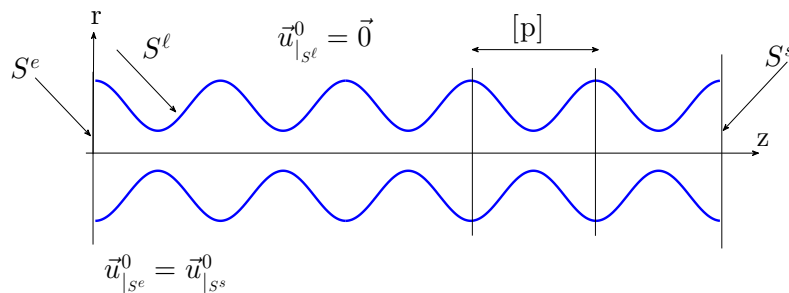


FIGURE 3.2 – Illustrations des conditions aux limites du problème concernant l'écoulement incident (à gauche) et celui de l'écoulement de perturbation (à droite).

de la différence de pression, $[p]$, le problème admet une unique solution. Et de plus si (u^0, p^0) est solution du problème pour $[p] = 1$, alors en raison de la linéarité du problème, $([p]u_0, [p]p_0)$ est

solution du problème pour $[p]$. Et donc, il s'agit de résoudre ce problème pour $[p] = 1$ et multiplier la solution obtenue par la valeur de $[p]$ souhaitée. La résolution numérique de ce problème est détaillée dans la Section (3.2). Elle permet d'avoir les contraintes exercées par le fluide sur les trois surfaces du tube. Ce résultat permet par la suite de calculer le champs de vitesse de l'écoulement incident sur la surface de la particule. Ce champs de vitesse va être ensuite utilisé dans la Section (3.1.2).

Problème de perturbation

Nous définissons l'écoulement de perturbation comme l'écoulement qui est perturbé par la présence de la particule, c'est-à-dire, la différence entre l'écoulement en présence d'une particule et l'écoulement incident. Par linéarité, et afin de simplifier le calcul, nous choisissons d'étudier cet écoulement à la place de l'écoulement final, l'écoulement résultant perturbé par la particule. Ce choix est aussi motivé par le fait que les conditions aux limites sur les deux surface S^e et S^s sont nulles et que donc l'énergie du système est fini. Les champs de vitesse et de perturbation de ce problème sont notés par (u^d, p^d) , avec :

$$\vec{u}^d = \vec{u}^f - \vec{u}^0 \quad (3.15)$$

$$\vec{p}^d = \vec{p}^f - \vec{p}^0 \quad (3.16)$$

où (u^f, p^f) sont les champs de vitesse et de pression de l'écoulement à travers le tube et en présence de la particule. Nous supposons que l'écoulement initial n'est pas perturbé, *i.e* le champs de perturbation est considéré nul sur S^e et S^s . De manière analogue au problème incident l'écoulement vérifie la condition de non glissement sur S^ℓ , et la surface de la particule également. En résumé, les variables u^d et p^d sont solutions du problème suivant :

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} p^d + \Delta \vec{u}^d &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^d &= 0 \\ \vec{u}^d &= \vec{0} \text{ sur } S^\ell \\ \vec{u}^d(r, 0) &= \vec{u}^d(r, L) = \vec{0} \\ \vec{u}^d &= \vec{u}^p - \vec{u}^{0p} \text{ sur } S^p \end{aligned} \quad (3.17)$$

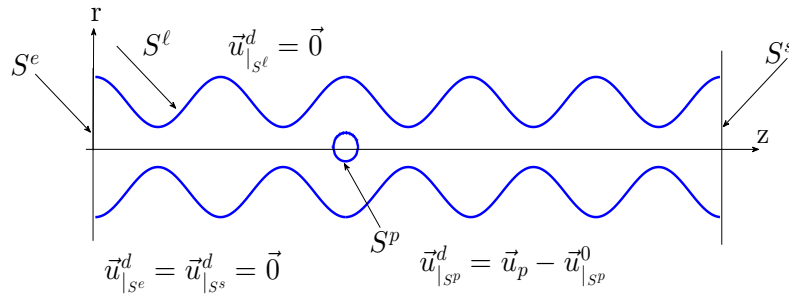


FIGURE 3.3 – Illustrations des conditions aux limites du problème concernant l'écoulement incident (à gauche) et celui de l'écoulement de perturbation (à droite).

où u^p est la vitesse de la particule et u^{0p} est la vitesse de l'écoulement incident sur la surface de la particule.

3.1.2 Les champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$

La force de trainée pour une taille arbitraire de la particule et une forme variable du tube doit être évaluée numériquement. Cependant, un calcul à chaque pas de temps de cette force durant l'intégration temporelle de la dynamique serait très coûteux en ressource CPU. La linéarité du problème nous permet d'affirmer que cette force dépend linéairement de la vitesse. En fait, nous montrons par la suite que cette force s'exprime de manière analogue à loi de Stokes Eq. (2.2) où deux champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ interviennent.

En effet, par la linéarité des équations, la force de friction, \vec{F} , agissant sur la surface de la particule peut se décomposer en deux termes \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (3.18)$$

où \vec{F}_1 est la contribution due à l'écoulement initial non perturbé, tandis que \vec{F}_2 exprime l'effet de l'écoulement perturbé. Le premier terme, \vec{F}_1 , peut être écrit comme suit :

$$\vec{F}_1 = \int_{S^p} \bar{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS \quad (3.19)$$

où $\bar{\bar{\sigma}}$ désigne un tenseur des contraintes exercées sur la surface de la particule et \vec{n} est le vecteur normal sortant du fluide. D'après les équations de Stokes, $\bar{\bar{\sigma}}$ dépend linéairement de la pression et du champ de vitesse :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{I} + \mu(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T) \quad (3.20)$$

En utilisant la formule de Green, et d'après la première équation du système (3.14) qui montre l'équilibre entre les forces de pression et les forces visqueuses, il est possible de montrer que \vec{F}_1 s'annule :

$$\vec{F}_1 = \int_{S^p} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{S^p} \nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} \, dS \quad (3.21)$$

$$= \int_{S^p} -\vec{\nabla} p^0 + \Delta \vec{u}^0 \, dS = \int_{S^p} \vec{0} \, dS \quad (3.22)$$

$$= \vec{0} \quad (3.23)$$

Ce résultat traduit simplement qu'à chaque instant le fluide est à l'équilibre. Le mouvement de la particule provient donc uniquement de la contribution \vec{F}_2 issus des contraintes de l'écoulement perturbé. Grâce à la linéarité du problème, cette dernière peut s'écrire de nouveau sous la forme de deux contributions. La première contribution met en évidence l'influence du mouvement de la particule dans le fluide, et la deuxième révèle l'effet de l'écoulement initial.

Autrement dit, le problème perturbé est résolu comme la combinaison de deux problèmes avec différentes conditions aux limites sur la surface de la particule et que nous notons (u^{d1}, p^{d1}) et (u^{d2}, p^{d2}) . Premièrement, on prend $u^{d1}=u^p$ (la particule est en mouvement dans un fluide supposé au repos), et deuxièmement $u^{d2}=-u^{0p}$ (particule est au repos dans un fluide en mouvement). Ces deux variables sont solutions des deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} p^{d1} + \Delta u^{\vec{d}1} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot u^{\vec{d}1} &= 0 \\ u^{\vec{d}1} &= \vec{0} \text{ sur } S^\ell \\ u^{\vec{d}1}(r, 0) &= u^{\vec{d}1}(r, L) = \vec{0} \\ u^{\vec{d}1} &= \vec{u}^p \text{ sur } S^p \\ p^{d1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

et

$$\begin{aligned}
-\vec{\nabla} p^{d2} + \Delta u^{\vec{d}2} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot u^{\vec{d}2} &= 0 \\
u^{\vec{d}2} &= \vec{0} \text{ sur } S^\ell \\
u^{\vec{d}2}(r, 0) &= u^{\vec{d}2}(r, L) = \vec{0} \\
u^{\vec{d}2} &= -u^{0p} \text{ sur } S^p \\
p^{d2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

La résolution du problème Eq. (3.24) permet de déterminer une résultante des contraintes proportionnelle à u_p et est négative. Nous appelons $-\gamma(z)$ ce coefficient de proportionnalité avec $\gamma(z) > 0$. La seconde contribution est écrite comme le produit $\gamma(z)U_{eq}(z)$. Puisque la somme des deux problèmes est équivalente au problème perturbé Eq. (3.17) alors la résultante \vec{F}_2 est la somme des deux précédentes contributions et donc

$$\hat{F}_2 = \hat{\gamma}(z) \left(u^p - \hat{U}_{eq}(z) \right) \vec{e}_z \tag{3.26}$$

où z désigne la position du centre de la particule et $\gamma(z)$ désigne le coefficient de la force de friction exercée sur la particule en un point z . Les deux champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ sont calculés après avoir obtenus simultanément le vecteur des contraintes et le vecteur vitesse de l'écoulement incident sur le bord du domaine ainsi que sur la surface de la particule. Notons que si la particule est petite par rapport à la grandeur caractéristique de l'écoulement alors le champ $U_{eq}(z)$ correspond à la vitesse du fluide $u_0(z)$ sur l'axe et $\gamma(z)$ devient constant et est le coefficient de frottement dans la loi de Stokes. On retrouve ainsi l'expression de Stokes.

Cette valeur de F_2 est adimensionnelle (correspond aux valeurs adimensionnelles de x , t , et u), et alors la valeur dimensionnelle est obtenue en multipliant cette dernière par le coefficient $\frac{L^2 \mu}{T}$. En effet, les valeurs de $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ sont obtenus en sommant les vecteurs contraintes adimensionnels sur la surface de la particule, qui sont solutions des deux problèmes Eq. (3.24) et Eq. (3.25). Nous

30 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

les notons respectivement t^{d1} et t^{d2} . Ces deux vecteurs de contraintes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_{S_p} t^{d1} dS_y = \int_{S_p} \bar{\bar{\sigma}}^{d1} \cdot \vec{n} dS_y \\ &= \int_{S_p} \left[-p^{d1} \bar{\bar{I}} + (\nabla \vec{u}^{d1} + (\nabla \vec{u}^{d1})^T) \right] \cdot \vec{n} dS_y\end{aligned}\quad (3.27)$$

et

$$\begin{aligned}U_{eq} &= \int_{S_p} t^{d2} dS_y = \int_{S_p} \bar{\bar{\sigma}}^{d2} \cdot \vec{n} dS_y \\ &= \int_{S_p} \left[-p^{d2} \bar{\bar{I}} + (\nabla \vec{u}^{d2} + (\nabla \vec{u}^{d2})^T) \right] \cdot \vec{n} dS_y\end{aligned}\quad (3.28)$$

Ensuite, et afin d'obtenir ces deux coefficients en grandeurs dimensionnelles, nous multiplions la pression et son gradient par les valeurs caractéristiques μ/T et $1/L$ respectivement. Dans l'expression de γ le champs de vitesse est multiplié par L/T , mais dans l'expression de U_{eq} le champs de vitesse est multiplié par L/T et puis par $[p]T/\mu$ puisque la condition aux limites de la vitesse dépend de la vitesse initiale et qui dépend de la différence de pression. De plus, l'intégrale est multipliée par L^2 , puisque on intègre sur la surface. Par conséquent, la valeur adimensionnelle de la force F_2 est donnée par :

$$F_2 = \frac{L^2 \mu}{T} \gamma(z) \left(u^p - [p] \frac{T}{\mu} U_{eq}(z) \right) \quad (3.29)$$

Finalement, nous établissons l'équation de la dynamique de la particule dimensionnelle :

$$m \ddot{z} = \frac{L^2 \mu}{T} \hat{F}_2 \quad (3.30)$$

en divisant l'équation la masse m de la particule et ensuite l'accélération par L/T^2 , l'équation ci-dessus devient :

$$\ddot{z} = \frac{LT\mu}{m} \gamma(z) \left(u^p - \frac{[p]T}{\mu} U_{eq}(z) \right) \quad (3.31)$$

Nous notons qu'un des avantages d'exprimer la dynamique de la particule sous la forme de cette dernière expression est de pouvoir montrer séparément les deux effets agissant sur la dynamique de la particule. Le premier effet est dû aux caractéristiques de l'écoulement et à la masse de la

particule, il est exprimé par les deux coefficients $\frac{LT\mu}{m}$ et $\frac{pT}{\mu}$. Le deuxième effet qui exprime l'effet de la géométrie, la taille du tube et celle de la particule, est donné par les deux champs γ et U_{eq} . Une comparaison de l'Eq. (3.31) permet de voir la prise en compte des effets liés au confinement, à la forme et la taille du pore et celle de la particule.

3.2 Résolution numérique

3.2.1 Formulation intégrale

Rappelons que l'objectif principal de ce chapitre est de calculer les deux coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ qui apparaissent dans l'équation (3.26). Pour cela, nous commençons par calculer l'écoulement non perturbé (u^0, p^0) à travers le tube sans la particule et puis calculer le champs de perturbation (u^d, p^d) . Ces champs sont solutions des systèmes (3.14) et (3.17). Notons qu'afin de simplifier les notations, les exposants $(^{(0)})$ et $(^{(d)})$ seront supprimés par la suite.

On rappelle aussi que l'écoulement est rampant. Il est caractérisé par un nombre de Reynolds très petit, donc le champs de vitesse et le champ de pression peuvent être décrits par la représentation intégrale de l'écoulement de Stokes.

Connaissant la solution élémentaire correspondante au problème de Stokes "*Stokeslet*", les auteurs dans [100, 101] présentent une formulation intégrale pour ce problème :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int_{\partial\Omega} \vec{t}(\vec{y}) \vec{\bar{U}}(\vec{x}, \vec{y}) - \vec{u}(\vec{y}) \vec{\bar{T}}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.32)$$

où \vec{t} et \vec{u} représentent le vecteur contraintes et le vecteur vitesse respectivement avec $\vec{t}(\vec{y}) = \vec{\sigma}(\vec{y}) \cdot \vec{n}(\vec{y})$.

À cause de l'hypothèse d'axisymétrie par rapport à l'axe longitudinal du canal, il est recommandé d'utiliser les coordonnées cylindriques pour la description numérique du problème.

3.2.2 Passage en coordonnées cylindriques

Le passage en coordonnées cylindriques permet de gagner une dimension, *i.e.* réduire le nombre des inconnus de 6 à 4. En effet, au lieu de calculer $u = [u_1, u_2, u_3]$ et $t = [t_1, t_2, t_3]$, nous calculons que $u = [u_r, u_z]$ et $t = [t_r, t_z,]$ puisque $u_\phi=t_\phi=0$.

3 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

Tout d'abord, on considère les deux produits dans l'équation (3.32) et on remplace les deux vecteurs vitesse et contraintes de la base cartésienne qu'on note respectivement \vec{u}_{cart} et \vec{t}_{cart} par leurs correspondants dans la base cylindrique qu'on note \vec{u}_{cyl} et \vec{t}_{cyl} , sachant que :

$$\begin{aligned}\vec{u}_{cart} &= P^T \times \vec{u}_{cyl} \\ \vec{t}_{cart} &= P^T \times \vec{t}_{cyl}\end{aligned}$$

où P est la matrice de passage de la base cartésienne à la base cylindrique, et P^T est son transposé. Ainsi, l'équation (3.32) devient :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int_{\partial\Omega} [\bar{\bar{U}}(\vec{x}, \vec{y}) P^T \vec{t}_{cyl}(\vec{y}) - \bar{\bar{T}}(\vec{x}, \vec{y}) P^T \vec{t}_{cyl}(\vec{y})] dS y \quad (3.33)$$

et il reste donc à calculer les tenseurs dans la base cylindrique, $U(x, y)P^T$ et $T(x, y)P^T$. En notant M la matrice d'ordre 3 définie par :

$$M_i^k = (y_i - x_i)(y_k - x_k) \quad (3.34)$$

les tenseurs U et T s'écrivent en fonction de M de la façon suivante :

$$\bar{\bar{U}} = \frac{1}{8\pi d} [\bar{\bar{I}} + \frac{M}{d^2}] \quad (3.35)$$

$$\bar{\bar{T}} = -\frac{3}{4\pi} [\frac{M}{d^5}] [d \cdot \vec{n}] \quad (3.36)$$

où d désigne la distance entre le point source \vec{x} et le point d'observation \vec{y} , et $\bar{\bar{I}}$ est la matrice unité.

Par conséquent, les deux produits de l'équation (3.33) deviennent :

$$U(\vec{x}, \vec{y})P^T t_{cyl}(\vec{y}) = \frac{1}{8\pi} \left[t_r(\vec{y}) \begin{pmatrix} A_r(\vec{x}, \vec{y}) \\ A_z(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} + t_z(\vec{y}) \begin{pmatrix} B_r(\vec{x}, \vec{y}) \\ B_z(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} \right] \quad (3.37)$$

$$T(\vec{x}, \vec{y})P^T u_{cyl}(\vec{y}) = \frac{3}{4\pi r^5} \left[u_z(\vec{y}) \begin{pmatrix} C_r(\vec{x}, \vec{y}) \\ C_z(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} + u_r(\vec{y}) \begin{pmatrix} D_r(\vec{x}, \vec{y}) \\ D_z(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} \right] \quad (3.38)$$

Les expressions de ces composantes $A_r, A_z, B_r, C_r, C_z, D_r, D_z$ sont données dans l'annexe (voir Section (B.3)). D'après l'équation (3.20), le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2u_{r,r} & 0 & u_{r,z} + u_{z,r} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_{z,r} + u_{r,z} & 0 & -p + 2u_{z,z} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Finalement, on peut exprimer les composantes cylindriques du vecteur contraintes, (t_r, t_z) , sur une surface donnée en fonction de la pression et la vitesse :

$$\begin{pmatrix} t_r \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-p + 2\partial_r u_r)n_r + (\partial_z u_r + \partial_r u_z)n_z \\ (\partial_z u_r + \partial_r u_z)n_r + (-p + 2\partial_z u_z)n_z \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$U_k^i(\vec{x}, \vec{y})$ et $T_k^i(\vec{x}, \vec{y})$ désignent respectivement les tenseurs vitesse et contraintes associés à la solution élémentaire du problème et sont donnés par :

$$U_i^k(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{8\pi|\vec{y} - \vec{x}|} \left[\delta_{ik} + \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \right] \quad (3.41)$$

$$T_i^k(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k)}{|\vec{y} - \vec{x}|^5} n_j(\vec{y}) \quad (3.42)$$

avec δ_{ik} est le symbole de Kronecker. Physiquement, $U_k^i(\vec{x}, \vec{y})$ (resp. $T_k^i(\vec{x}, \vec{y})$) la i^{eme} composante du vecteur vitesse (resp. vecteur contrainte) au point \vec{y} due à une force ponctuelle unitaire appliquée en \vec{x} dans la direction k . Des informations plus détaillées sur la formulation intégrale pour un écoulement de Stokes et la solution élémentaire associée peuvent être consultées dans [100, 101].

On remarque que les termes $U_k^i(\vec{x}, \vec{y})$ et $T_k^i(\vec{x}, \vec{y})$ sont singuliers suivant $|\vec{y} - \vec{x}|^{-1}$ et $|\vec{y} - \vec{x}|^{-2}$ respectivement en $\vec{x}=\vec{y}$ et que cette formulation intégrale (3.32) n'est exacte que pour un point \vec{x} qui n'est pas situé sur le bord du domaine (sur les bords du tube et la particule).

Pour pallier à cela, nous utilisons le fait que les forces de pression et visqueuses soient à l'équilibre, ce qui permet de déduire une forme régularisée de l'équation (3.32), *i.e.* une formulation qui ne contient que des intégrales faiblement singulières. La formulation ci-dessous peut être employée pour tout \vec{x} situé soit à l'intérieur du domaine et soit sur son bord :

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{u}(\vec{y}) - \vec{u}(\vec{x})) \vec{T}(\vec{x}, \vec{y}) - \vec{t}(\vec{y}) \vec{U}(\vec{x}, \vec{y}) dS_y = \vec{0} \quad (3.43)$$

Les étapes pour obtenir les coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ sont les suivantes :

1. Considérer le problème sans la particule : il est supposé périodique ce qui signifie que la différence de pression est constante entre les deux extrémités d'un pore.

34 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

- Calculer le champ de vitesse et simultanément le vecteur contrainte sur les surfaces extrêmes et latérale du pore en utilisant l'Eq. (3.43). Un exemple pour un tel calcul est montré à la Fig. 3.14 pour différents paramètres géométriques du tube et de la particule.
 - Calculer le champ de vitesse incident sur la surface de la particule en utilisant l'Eq. (3.32). Plus généralement, cette équation permet d'obtenir le champs de vitesse en tout point du domaine. La figure en haut de la Fig. 3.4 montre les variations des deux composantes dimensionnelles du champs de vitesse en coordonnées cylindriques selon l'axe longitudinal de l'axe z et l'axe radial r . Tandis que, la figure en dessous montre la variation des deux compsanes du champs de vitesse incident dans le pore et également la variation de sa norme. On voit bien que le champs de vitesse s'annule sur le bord et qu'il est symétrique par rapport au centre du pore. De plus, nous remarquons que sa norme est maximale au centre (région rouge) et diminue en s'approchant de la surface (région bleue). En fonction de z les deux composantes du champs de vitesse, $U_r^0(r, z)$ et $U_z^0(r, z)$, ont la forme d'un potentiel utilisé pour des problèmes de "ratchet", et en tant qu'une fonction de r , la valeur absolue de la composante $U_r^0(r, z)$ est maximale au centre du pore.
2. Supposer que loin de la particule, en particulier sur les extrêmes du canal, l'écoulement n'est plus perturbé.
 3. Supposer que la condition aux bords de l'écoulement de perturbation vaut $u^d = u^p$ d'une part et calculer le coefficient $\gamma(z)$ avec d'autre part la condition $u^d = u^0$. Ensuite calculer le coefficient $U_{eq}(z)$ en utilisant l'Eq. (3.43).

Afin de calculer ces inconnues, la méthode de collocation va être employée. Cette méthode nécessite, une discrétisation des surfaces du canal : S^e , S^s , S^ℓ , et la surface de la particule S^p en des éléments de frontières élémentaires, ainsi une discrétisation des inconnus en des valeurs nodales. Finalement, elle consiste à évaluer l'équation intégrale aux points de collocations et ceci conduit à un système linéaire d'équations.

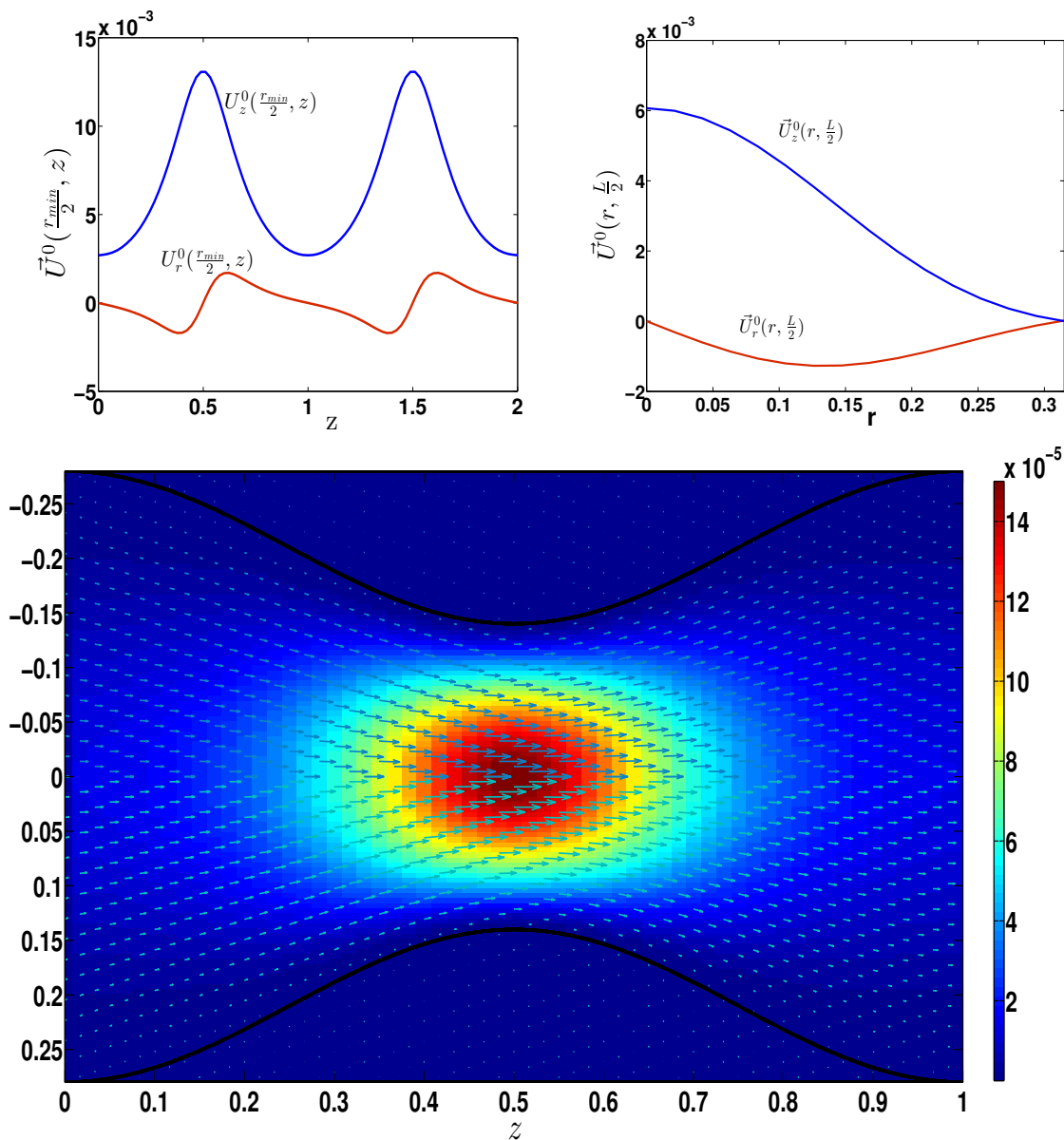


FIGURE 3.4 – A gauche de la figure en haut : les deux composantes en coordonnées cylindriques du champs de vitesse, $U_r^0(r_{min}/2, z)$ (en rouge) et $U_z^0(r_{min}/2, z)$ (en bleu) comme une fonction de z pour un r fixé, $r = r_{min}/2$. Et à droite de la figure en haut : les deux composantes cylindriques du champs de vitesse, $U_r^0(r, L/2)$ (en rouge) et $U_z^0(r, L/2)$ (en bleu) comme une fonction de r pour un z fixé, $z = L/2$. $\alpha = 3.5$, et $r_{min} = 0.14$. En dessous, nous présentons les deux composantes du champs de vitesse incident dans le pore ainsi que la variation de sa norme.

3.2.3 Implémentation numérique

Concernant l'implémentation numérique, on emploiera la même démarche pour toute les étapes. Nous détaillons ainsi seulement la première étape, les autres étaient menées de manière analogue.

Tout d'abord, on exprime le vecteur des contraintes sur S^s , \vec{t}^s , en fonction du vecteur contrainte sur S^e , \vec{t}^e :

$$\begin{pmatrix} t_r^s(r, z) \\ t_z^s(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_r^e(r, z) \\ -t_z^e(r, z) + [p] \end{pmatrix}$$

D'après les hypothèses ci-dessus, comme étant une fonction de la pression, t_z^e est constant. Comme la pression est définie à une constante près, alors sans perdre de généralité, on impose $t_z^e = 0$. On démontre qu'à cause de la symétrie spatiale du domaine, la vitesse radiale selon l'axe des r s'annule sur S^e et S^s ($u_r(r, 0) = u_r(r, 0)$). D'après la section (B.4) de l'annexe la formulation intégrale correspondante au problème incident s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} & \int_{S^e} u_z^e \begin{pmatrix} D_r^e - D_r^s \\ D_z^e - D_z^s \end{pmatrix} + t_r^e \begin{pmatrix} A_r^e - A_r^s \\ A_z^e - A_z^s \end{pmatrix} dS_y - \int_{S^\ell} t_r^\ell \begin{pmatrix} A_r^\ell \\ A_z^\ell \end{pmatrix} + t_z^\ell \begin{pmatrix} B_r^\ell \\ B_z^\ell \end{pmatrix} dS_y \\ &= [p] \int_{S^s} \begin{pmatrix} B_r^s \\ B_z^s \end{pmatrix} dS_y \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dans l'équation (3.44), les inconnues qu'on doit calculer, à la première étape, sont u_z^e , t_r^e , t_z^ℓ , et t_r^ℓ : u_z^e est la composante du vecteur vitesse suivant l'axe des z sur S^e , t_r^e est la composante radiale du vecteur contraintes sur S^e , et t_z^ℓ , et t_r^ℓ sont respectivement les deux composantes suivant les axes r et z du vecteur contraintes sur S^ℓ .

Concernant le problème de perturbation, les conditions aux limites sont données par l'équation (3.17) et la formulation intégrale correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{S^e} t_r^\ell \begin{pmatrix} A_r^\ell \\ A_z^\ell \end{pmatrix} + t_z^\ell \begin{pmatrix} B_r^\ell \\ B_z^\ell \end{pmatrix} dS_y - \int_{S^p} t_r^p \begin{pmatrix} A_r^p \\ A_z^p \end{pmatrix} + t_z^p \begin{pmatrix} B_r^p \\ B_z^p \end{pmatrix} dS_y \\ &= \int_{S^p} u_r^p \begin{pmatrix} C_r^p \\ C_z^p \end{pmatrix} + u_z^p \begin{pmatrix} D_r^p \\ D_z^p \end{pmatrix} dS_y \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.2.4 Discrétisation

Pour l'implémentation numérique, on commence par discrétiser le domaine et on rappelle que la formulation intégrale nécessite de discrétiser justement le bord du domaine, *i.e* les deux sections

d'entrée et de sortie, la surface latérale du canal, et la surface de la particule. Les deux sections S^e et S^s du canal, sont discrétisées chacune avec N_1 éléments : $S^e = \bigcup_{e=1}^{e=N_1} E_e$ et $S^s = \bigcup_{e=1}^{e=N_1} E_e$. On discrétise la surface latérale avec N_2 éléments, $S^\ell = \bigcup_{e=1}^{e=N_2} E_e$ et la surface de la particule par N_3 , $S^p = \bigcup_{e=1}^{e=N_3} E_e$. Puis, on écrit l'équation intégrale sous la forme d'une somme d'intégrales élémentaires. Comme le problème est axisymétrique, et bidimensionnel, les éléments de frontières sont des segments définis chacun par deux noeuds. Ensuite, on discrétise les inconnues avec le formalisme de la méthode des éléments finis, ceci conduit au calcul des inconnues aux points d'interpolation. Pour simplifier, on choisit comme points d'interpolation les mêmes que ceux utilisés pour la discrétisation géométrique. Pour chacun de ces points, N_k , on associe une fonction d'interpolation $M_k(y)$, puis on approche les inconnues en utilisant des fonctions de forme d'ordre 1 :

$$u_i(y) = M_k(y)u_i(N_k) + M_{k+1}(y)u_i(N_{k+1}) \text{ si } y \in E_k = [y^k, y^{k+1}] \quad (3.46)$$

où $u_i(y^k)$, pour $k = 1, \dots, N_e + 1$, sont les $(N_e + 1)$ valeurs nodales qu'on va calculer. Dans la Section (3.3.3), nous montrons que une approximation d'ordre 1 est suffisante.

Par la suite, la méthode de collocation est introduite afin de construire le problème discrétisé. Elle consiste à forcer l'équation intégrale à être vérifiée en tout point de collocation, \vec{x} , il en résulte un système linéaire de la forme

$$AX = B \quad (3.47)$$

Comme il est nécessaire d'avoir au moins le même nombre d'équations que d'inconnus, donc le cas le plus simple serait de considérer les points d'interpolation comme points de collocation. En appliquant cette idée on peut extraire un système linéaire carré de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} E_e & E_e & E_l & E_l \\ L_e & L_e & L_l & L_l \\ E_e & E_e & E_l & E_l \\ L_e & L_e & L_l & L_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_r^e \\ u_z^e \\ t_z^L \\ t_r^L \end{pmatrix} = [p] B_p \quad (3.48)$$

où :

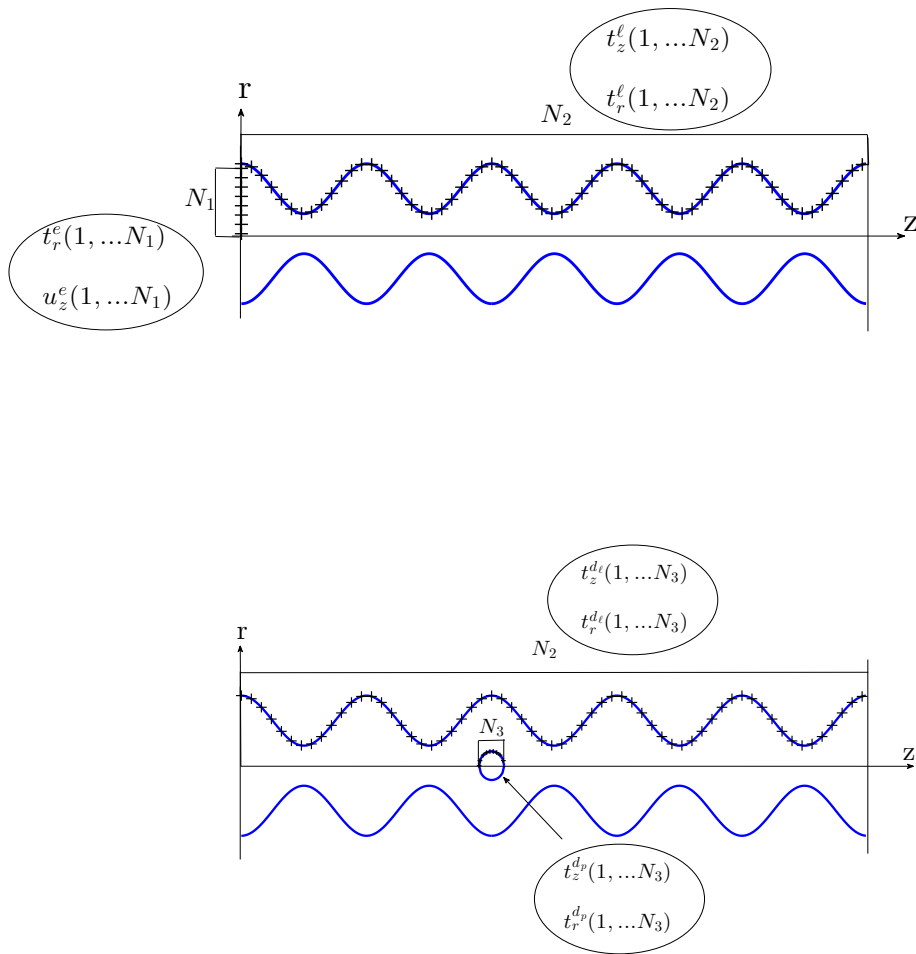


FIGURE 3.5 – Cette figure présente la discrétisation du domaine sans la particule (en haut) et avec la particule(en bas).

- E_e est une matrice d'ordre $N_1 \times N_1$ qui désigne l'influence de la surface d'entrée sur les surfaces d'entrée et de sortie.
- E_l est une matrice d'ordre $N_1 \times N_2$, et ces éléments expriment l'influence de la surface d'entrée sur la surface latérale.
- L_e est une matrice d'ordre $N_2 \times N_1$ qui désigne l'influence de S^l sur S^e et S^s .
- L_l est une matrice d'ordre $N_2 \times N_2$ qui montre l'influence de la surface latérale sur elle même.

- Le second terme du côté gauche du système correspond au vecteur des inconnues (valeurs nodales) contenant les composantes cylindriques du champ de vitesse et des contraintes sur une S^e et S^ℓ . C'est un vecteur de dimension $2 \times N_1 + 2 \times N_2$.
- Le terme du côté droit du système, B_p , est un vecteur de dimension $2 \times N_1 + 2 \times N_2$. Les intégrales sur la surface de sortie sont multipliées par la différence de pression $[p]$.

D'après la géométrie du tube (voir la figure 3.5), on voit qu'il y a un coin qui connecte la surface latérale (S^L) à la surface d'entrée (S^e), également un autre qui la connecte à sa surface de sortie (S^s). Chacun supporte deux valeurs nodales différentes, dans ce cas là, on ajoute au système final une équation assurant la continuité des vecteurs contraintes en ce point (le coin) :

$$t^i \cdot n^j = t^j \cdot n^i \quad \text{pour } i=r,z \text{ et } j=r,z \quad (3.49)$$

Une fois, le système ci-dessus est résolu, *i.e.* obtenir des contraintes incidentes sur la surface du tube, on peut calculer la vitesse de l'écoulement incident agissant sur la surface de la particule et ceci en utilisant l'équation (3.32). Par la suite, ayant ce champs de vitesse, on peut calculer la force de traînée exercée sur la particule, *i.e.* calculer les coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ qui apparaissent dans l'équation (3.26). L'implémentation numérique de ces deux derniers calculs est faite de la même manière détaillée ci-dessus. La surface de la particule est partitionnée en N_3 éléments de frontières, et le vecteur des contraintes sur sa surface est de longueur $2 \times N_3$. Les résultats numériques des coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ sont présentés dans la section suivante.

le système système recouvrant la nouvelle discrétisation s'écrit comme le suivant :

$$\begin{pmatrix} L_\ell & L_\ell & L_p & L_p \\ P_\ell & P_\ell & P_p & P_p \\ L_\ell & L_\ell & L_p & L_p \\ P_\ell & P_\ell & P_p & P_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_z^\ell \\ t_r^\ell \\ t_z^p \\ t_r^p \end{pmatrix} = C_p \quad (3.50)$$

- L_ℓ est une matrice $N_2 \times N_2$, elle désigne l'influence de S^ℓ sur elle même, L_p est une matrice $N_2 \times N_3$, elle exprime l'influence de S^ℓ sur S^p , P_ℓ est une matrice $N_3 \times N_2$ qui désigne l'influence de S^p sur S^ℓ , et P_p est $N_3 \times N_3$ et est relative à l'influence de la surface de la particule sur elle - même.

80 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

- Le second terme du côté gauche du système correspond au vecteur des inconnus (valeurs nodales) contenant les composantes cylindriques des contraintes sur S^ℓ et S^p . C est un vecteur de dimension $2 \times N_2 + 2 \times N_3$.
- Le terme du côté droit du système, C_p , est un vecteur de dimension $2 \times N_2 + 2 \times N_3$. Il est relatif au champ de vitesse sur la surface de la particule : u_p pour calculer le coefficient γ ou u_0 pour calculer le coefficient U_{eq} .

On remarque qu'il n'y a pas des sous matrices en relation avec les surfaces d'entrée et sortie du canal, et ceci traduit le fait que l'écoulement de perturbation est supposé nul loin de la particule et en particulier sur ces deux surfaces.

Nous validons cette implémentation numérique avec le cas asymptotique d'un écoulement de Poiseuille dans un cylindre ($\alpha = 1$).

Ce code de calcul que nous avons développé nous permet également de calculer le champ de vitesse dans le canal en présence de la particule.

On note que les éléments des matrices d'influence sont des intégrales élémentaires. Ces intégrales sont singulières si le point de collocation \vec{x} appartient à l'élément d'intégration $E_k = [y^k, y^{k+1}]$, et régulières sinon. Les intégrales régulières sont calculées en utilisant les formules de quadrature de Gauss et dans le cas des intégrales singulières une méthode spécifique est introduite dans la section suivante.

3.3 Calcul des intégrales

Afin de calculer les intégrales élémentaires constituant les matrices et les vecteurs du système discrétisé, nous distinguons d'abord trois types d'intégrales (a) intégrales régulières (non singulières, si le point de collocation n'appartient pas à l'élément d'intégration), (b) intégrales quasi-singulières (si le point de collocation n'appartient pas à l'élément d'intégration mais il appartient à un élément qui est y adjacent), et (c) intégrales faiblement singulières (si le point de collocation appartient à l'élément d'intégration et l'intégrale est singulière comme $|\vec{y} - \vec{x}|^{-1}$).

L'évaluation des intégrales régulières est basée, comme en éléments finis, sur la quadrature de

Gauss.

3.3.1 Intégrales régulières

Les intégrales régulières sont évaluées par des formules de quadrature de Gauss. Le principe de ces méthodes est d'établir une relation linéaire entre les valeurs discrètes de la fonction à intégrer et la valeur de l'intégrale. Plus précisément, l'approximation d'une intégrale d'une fonction régulière $f(x)$ sur le segment $[a,b]$ est donnée par la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (3.51)$$

où $(x_i)_{i=1,\dots,N}$ sont les zéros de polynômes orthogonaux (Legendre, Hermite, Tchebychev, ..) affectés des poids $(w_i)_{i=1,\dots,N}$. Leurs valeurs sont déterminées pour une valeur donnée de N . On note que cette formule d'ordre N est exacte pour des polynômes de degré $\leq 2N - 1$:

$$\forall k \leq 2N - 1 \quad \int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=1}^N w_i x_i^k \quad (3.52)$$

Le choix de la famille de polynôme et donc des poids dépend de la fonction à intégrer. Les différentes quadratures sont détaillées dans les livres de Davis et Rabinowitz [102] et de Stroud et Secrest [103]. Nous employons la quadrature de Gauss-Legendre où les points $(x_i)_{i=1,\dots,N}$ sont les racines des polynômes de Legendre L_n et les poids w_i sont donnés par :

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{[nL_{n-1}(x_i)]^2} \quad (3.53)$$

$L_n(x)$ est le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre défini par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.54)$$

3.3.2 Traitement des intégrales singulières

Une intégrale élémentaire est dite singulière si \vec{x} appartient à l'élément de frontière d'intégration. Dans le passé, une grande variété de travaux a été faite pour traiter les intégrales singulières. On choisit l'approche développée par Guiggiani *et al.* dans [104] qui a l'avantage d'être générique.

8 Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

L'utilisation de l'équation régularisée, donnée par l'Eq. (3.43), permet d'avoir à traiter que des intégrales faiblement singulières.

La technique de calcul des intégrales faiblement singulières est basée sur l'introduction de système de coordonnées polaires, qu'on note dans la suite (ρ, α) , centré au point singulier.

On commence par démontrer, en utilisant le développement de Taylor, que la distance, d , entre le point de collocation et le point d'intégration, peut s'écrire comme suit :

$$d^2(z, \theta) = (z - z_c)^2 + (r(z) - r(z_c))^2 + 2r(z_c)r(1 - \cos \theta) \quad (3.55)$$

Puis on effectue le changement de variables suivant :

$$(1 + H(z_c)^2)(z - z_c) = \rho \cos \alpha \quad (3.56)$$

$$(r(z_c)\theta) = \rho \sin \alpha \quad (3.57)$$

qui permet d'écrire $\rho(z, \theta)$ comme suit :

$$\rho(z, \theta) = \sqrt{(1 + H(z_c)^2)(z - z_c)^2 + (r(z_c)\theta)^2} \quad (3.58)$$

La fonction $r(z)$ qui apparaît dans (3.58) désigne le rayon du pore, et H est sa dérivée. Le couple (z, θ) forme les coordonnées cylindriques du point d'intégration, et $(z_c, \theta = 0)$ sont ceux du point de collocation. L'idée principale de cette méthode est d'isoler le noyau du tenseur $U_i^k(z, \theta)$ et de l'exprimer en fonction des nouvelles variables ρ et α :

$$U_i^k(z, \theta) = \frac{f(\alpha)}{\rho(z, \theta)} + b(z, \theta) \quad (3.59)$$

avec $b(z, \theta)$ une fonction bornée qu'on peut calculer en utilisant une des formules de quadrature de Gauss. Nous utilisons la méthode de Gauss-Legendre détaillée précédemment. En ce qui concerne le premier terme de gauche de l'équation (3.59), le terme singulier est remplacé en utilisant un changement de variable polaire impliquant ρ et α et qui fait apparaître ρ au numérateur. Par conséquent, ce terme devient régulier et la fonction $f(\alpha)$ est également calculée en utilisant une la quadrature de Gauss-Legendre.

Dans l'annexe (B.5), on détaille la régularisation de chaque fonction suivant l'équation (3.59).

3.3.3 Vérification du choix des paramètres de discrétisation

Nous avons noté que les simulations numériques sont effectuées avec une approximation d'ordre 1 et que les surfaces du domaine (S^e , S^s , S^ℓ , et S^p), sont discrétisées respectivement avec N_1 , N_2 , et N_3 points. Dans cette section, nous établissons le choix des valeurs de ces paramètres.

Choix de l'ordre d'approximation

Cette section présente une vérification du choix de l'ordre d'approximation utilisé pour interpoler les inconnus de l'équation intégrale modélisant le problème à l'aide de la méthode des éléments de frontières. La méthode des éléments de frontière est basée sur l'utilisation des noeuds et des fonctions de forme. Dans un problème 3-D axisymétrique, nous utilisons des éléments curvilignes pour discrétiser le bord domaine. L'interpolation est isoparamétrique, c'est-à-dire, que tous les inconnus ($u_z^e, t_r^e, t_z^e, t_r^\ell, t_z^\ell$) du problème incident et ($t_z^\ell, t_r^\ell, t_z^p, t_r^p$) du problème de perturbation, sont interpolés en utilisant le même ordre de discrétisation. Nous implémentons deux types d'éléments pour le problème incident : des éléments de type P_1 , des segments avec des fonctions linéaires et deux noeuds (les extrémités des segments élémentaires), et des éléments de type P_2 , des segments avec des fonctions quadratiques et trois noeuds (les extrémités des segments élémentaires et leurs milieux).

Avec la numérotation des noeuds de la figure (3.6), les fonctions de forme locales sur l'élément E_i pour les éléments P_1 sont définies par :

$$\begin{cases} \Phi_{k|E_i} \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow \Phi_{k|E_i}(z) = az + b \\ \Phi_k(z_l) = \delta_{kl} \end{cases} \quad k, l \in 1, 2$$

et les fonctions de forme locales sur l'élément E_i pour les éléments P_2 sont définies par :

$$\begin{cases} \Phi_{k|E_i} \in \mathcal{P}_2 \Rightarrow \Phi_{k|E_i}(z) = az^2 + bz + c \\ \Phi_k(z_l) = \delta_{kl} \end{cases} \quad k, l \in 1, 2, 3$$

sachant qu'un point du segment E_i peut être repéré :

$$z \in [z_i, z_{i+1}] \rightarrow z = \sum_{k=1}^2 \Phi_k(z) \quad \text{dans le cas de } P_1 \quad (3.60)$$

$$z \in [z_i, z_{i+1}] \rightarrow z = \sum_{k=1}^3 \Phi_k(z) \quad \text{dans le cas de } P_2 \quad (3.61)$$

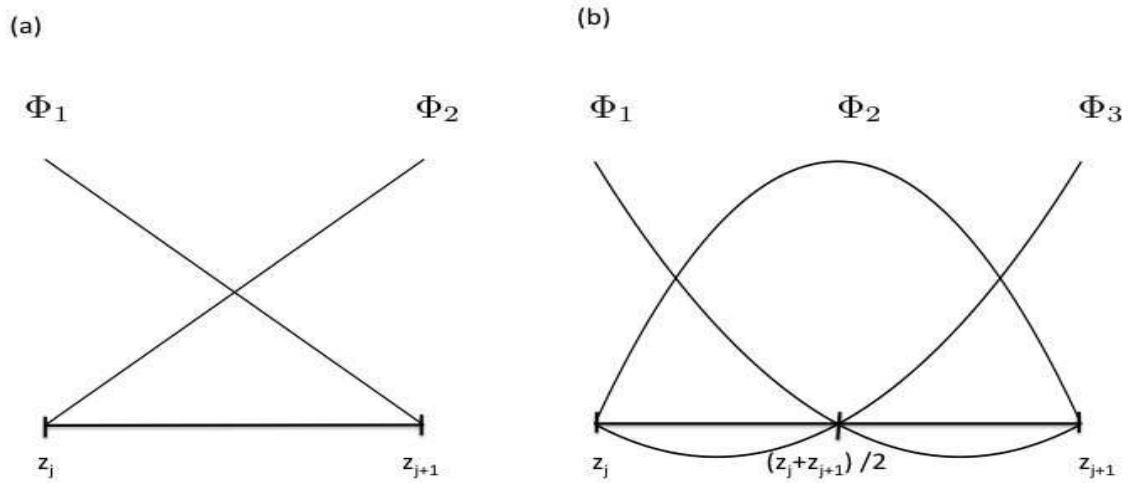


FIGURE 3.6 – Eléments et fonctions de forme locales de type P_1 (a) et de type P_2 (b) sur l'élément z_j et z_{j+1} .

également, la valeur approchée d'une fonction f en un point $z \in E_i$ est donnée par :

$$f(z) = \sum_{k=1}^2 f(z^k) \Phi_k(z) \text{ dans le cas de } P_1 \quad (3.62)$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^3 f(z^k) \Phi_k(z) \text{ dans le cas de } P_2 \quad (3.63)$$

et on appelle les $f(z^k)$ les valeurs nodales de f , qui peuvent désigner les inconnues du problème. Les simulations numériques faites pour calculer les contraintes incidentes d'un écoulement de Poiseuille sur la surface d'un cylindre montrent que l'approximation des inconnus à l'ordre 1 est suffisante. Nous présentons dans la Fig. 3.8, les erreurs relatives des résultats des simulations effectuées avec des fonctions de formes linéaires (d'ordre 1) d'une part, et des fonctions de forme quadratiques (d'ordre 2) d'autre part par rapport à la solution analytique. La Fig. 3.8 montre les résultats obtenus en approchant les inconnus avec des fonctions de forme d'ordre 1 comme dans l'équation (3.62) et avec des fonctions de formes d'ordre 2 comme dans l'équation (3.63). On remarque que les deux solutions convergent vers la solution analytique. On peut donc choisir les fonctions de formes linéaires pour une précision équivalente de la solution. Elles sont plus faciles à implémenter et nécessitent moins de temps CPU.

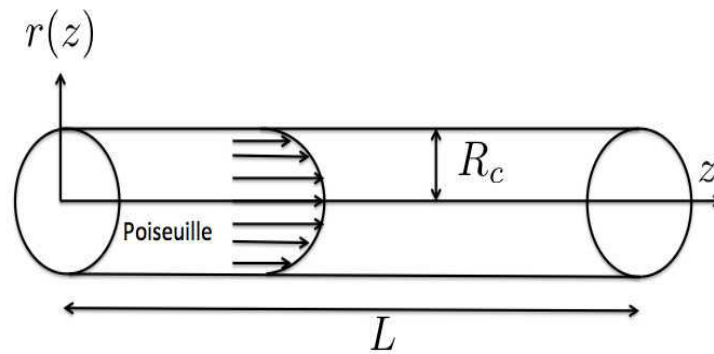


FIGURE 3.7 – Profil de l'écoulement de Poiseuille dans un cylindre de rayon R_c et de longueur L .

Nous avons aussi vérifié que cette convergence est également réalisée dans le cas des pores à diamètre variable. En effet dans la section suivante, nous présentons des figures qui montrent qu'on obtient les mêmes résultats en utilisant l'approximation des équations (3.62) et (3.63).

Choix du pas de discrétisation

Dans ce paragraphe, on veut vérifier le choix du pas de discrétisation. De la même manière que précédemment, on le vérifie pour l'écoulement de Poiseuille avec le pas utilisé dans les simulations, et puis on le vérifie en utilisant des maillages plus fins. La Fig. 3.9 montre les erreurs relatives de la solution numérique obtenue avec les pas de discrétisation $h_1=0.03$ et $h_2=0.06$ points également avec $h_1=0.015$ et $h_2=0.03$ par rapport à la solution analytique de l'écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R_c et de longueur L . Cette solution est donnée par l'Eq. (3.64). La Fig. 3.9 montre que les erreurs dans les deux cas sont de l'ordre $\mathcal{O}(10^{-4})$ pour les contraintes radiales sur S^e (t_r^e), et d'ordre $\mathcal{O}(10^{-5})$ pour les contraintes sur S^ℓ , t_z^ℓ et t_r^ℓ . Concernant le champs de vitesse sur S^e , u_z^e , l'erreur relative est même d'ordre plus bas, $\mathcal{O}(10^{-6})$. Suite à ces résultats, toutes les simulations sont faites avec $N_1=N_2=15$ points.

3.4 Validation et calcul des champs $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de simulations numériques. Nous mettons en évidence les effets de bord : effets latéraux et effets radiaux, sur la force de traînée exercée

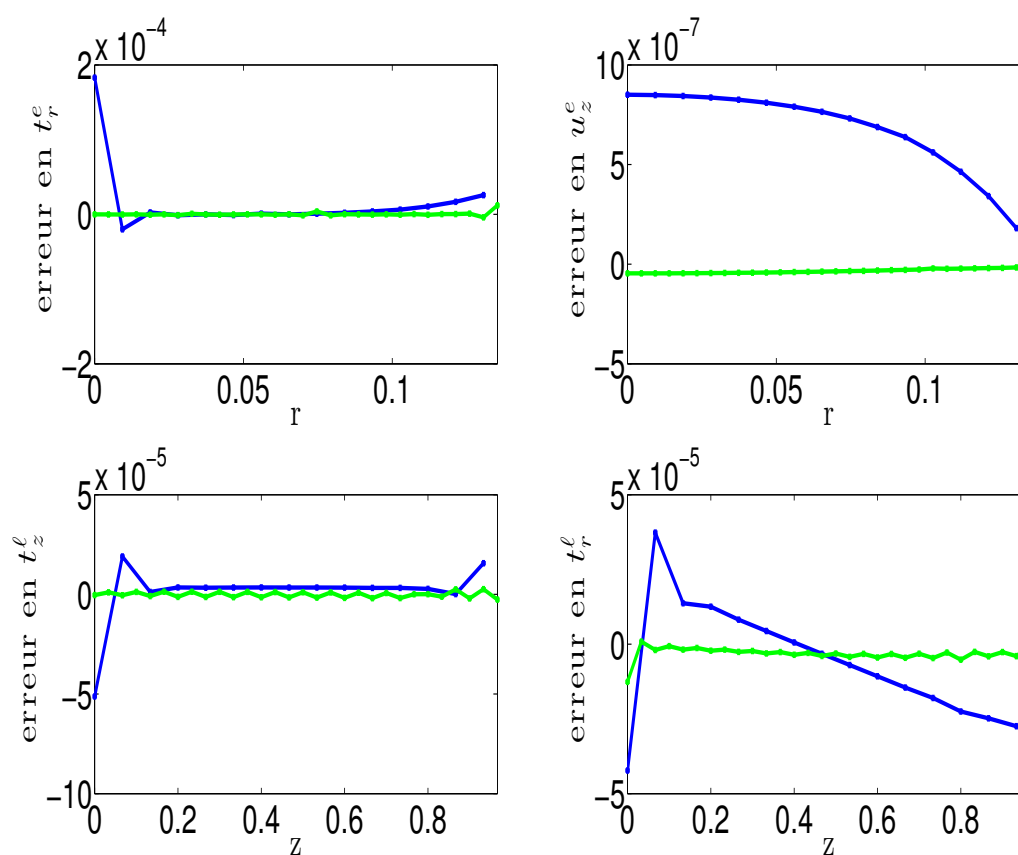


FIGURE 3.8 – Erreur relative par rapport à la solution analytique de l’écoulement de Poiseuille, de la solution obtenue en utilisant des fonctions de type P_1 (en bleu) et celle obtenue en utilisant des fonctions de type P_2 (en vert).

sur la particule. On examine ici, les cas d’une particule sphérique et d’une particule ellipsoïdale. En outre, dans le cas d’une ellipsoïde, on s’intéresse à l’influence de l’aspect de la particule selon si le grand axe de la particule est (a) parallèle, ou (b) perpendiculaire à l’axe du tube. On montre dans la suite, que cette force augmente avec le confinement de l’écoulement. Dans le but d’avoir une analogie avec la formule générale de la force de Stokes, la force est écrite sous la forme d’une somme de deux contributions, comme déjà mentionnée dans l’équation (3.18), *i.e* le coefficient de traînée noté $\gamma(z)$ et le champs de vitesse équivalent noté $U_{eq}(z)$.

Dans une première section, on teste notre code avec des résultats analytique pour le flot de Poiseuille et pour une particule sphérique en suspension dans un tube cylindrique. Puis dans la seconde

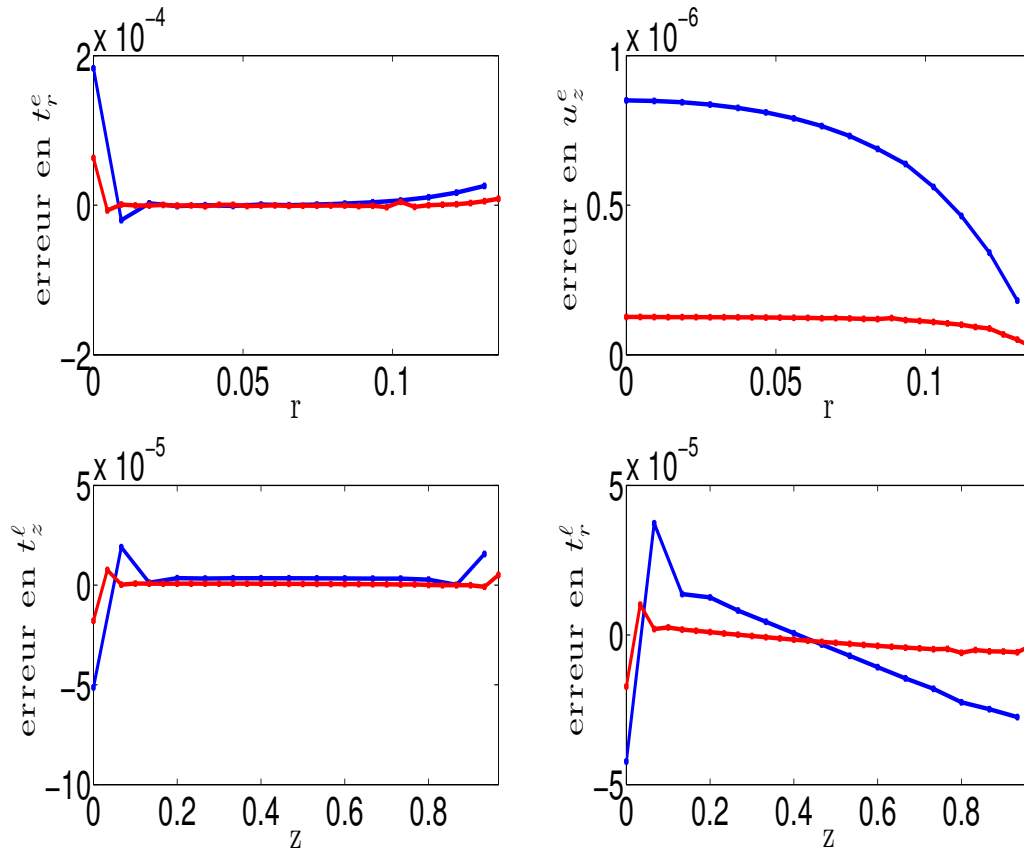


FIGURE 3.9 – Erreur relative de la solution numérique calculée avec $h_1=0.03$ et $h_2=0.06$ (en bleu) et $h_1=0.015$ et $h_2=0.03$ (en rouge) par rapport à la solution analytique de l'écoulement de Poiseuille donnée par l'Eq. (3.64).

section, les variations des coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ d'une particule sphérique dans le cas du canal à diamètre variable et périodique sont analysés. On examine aussi les effets des deux rapports (a) le rayon de la particule sur le rayon minimal du tube et (b) le rayon de la particule sur la longueur d'un des pores constituant le tube. Enfin, on traite l'influence de l'orientation d'une particule ellipsoïdale sur la force. A cet effet, soient R_{p1} et R_{p2} les deux rayons de la particule, selon l'axe des r et l'axe des z respectivement. On introduit les paramètres géométriques suivants : $\epsilon = R_{p1}/r_{min}$, $\psi = R_{p2}/L$ et $\kappa = R_{p1}/R_{p2}$, avec κ vaut 1 dans le cas d'une sphère et on traite les variations des deux coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ en fonction de ces derniers paramètres géométriques. Notamment, pour U_{eq} on fera apparaître le contraste de vitesse qui s'est révélé être primordial pour l'existence

du transport dans le chapitre 2.

3.4.1 Comparaison avec les expressions analytiques

Flot incident

On commence par présenter les résultats numériques qui concernent l'écoulement incident et dont on a besoin pour obtenir les deux coefficients de la force de traînée. Comme on a déjà précisé dans les sections précédentes, afin de calculer la force hydrodynamique exercée par le fluide sur la particule, nous calculons d'abord les contraintes exercées par le fluide incident, *i.e* sans la particule, sur les trois surfaces du bords du pore, S^e , S^s , et S^ℓ . On rappelle que les inconnus incidents sont, la composante normale du vecteur vitesse sur α^e , u_z^e , la composante radiale du vecteur contraintes, t_r^e , et les deux composantes du vecteur contrainte sur la surface latérale S^ℓ , notés t_z^ℓ et t_r^ℓ . Des simulations ont été faites, afin de valider le code et comparer les résultats à un écoulement dont on connaît son expression analytique. Pour cela, on considère un tube cylindrique de rayon r_{min} et de longueur L et dont le diamètre est constant et égal à $R_c = r_{min}$. Ici r_{min} est égal à 0.14 et $L = 1$ en valeur adimensionnelle.

On donne ci-dessous les expressions analytiques des inconnus $(u_z^e, t_r^e, t_z^\ell, t_r^\ell)$ correspondantes à l'écoulement de Poiseuille :

$$\begin{aligned} t_r^e(r, 0) &= \frac{r}{2} \\ u_z^e(r, 0) &= \frac{(R_c^2 - r^2)}{2} \\ t_z^\ell(R_c, z) &= -\frac{R_c}{2} \\ t_r^\ell(R_c, z) &= z - p_e \end{aligned} \tag{3.64}$$

où p_e est la pression à l'entrée du tube et qui imposée d'être nulle. La Fig. 3.8 et la Fig. 3.9 montrent que les résultats numériques sont en accord avec les résultats analytiques.

Coefficients γ et U_{eq}

Nous considérons tout d'abord le cas simple de la force exercée sur une sphère soumise à un écoulement de Poiseuille à travers un tube cylindrique. Nous comparons nos résultats numériques aux développements analytiques des deux coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ développés par les auteurs de [62, 69, 74]. Ces expressions concernent la force de traînée exercée par une sphère dans un écoulement de Poiseuille semi-infini, *i.e.* loin de la particule, l'écoulement est considéré comme non perturbé par la présence de la particule. Elles montrent l'effet du bord latéral du cylindre sur la particule et également l'effet de la taille de la particule sur la force de traînée. Ces expressions ne dépendent que du rapport des rayons du cylindre et de la particule que nous notons dans la suite par ϵ ($\epsilon = R_p/R_c$). Par ailleurs, ces expressions possèdent leurs plages de validité selon la valeur de ϵ .

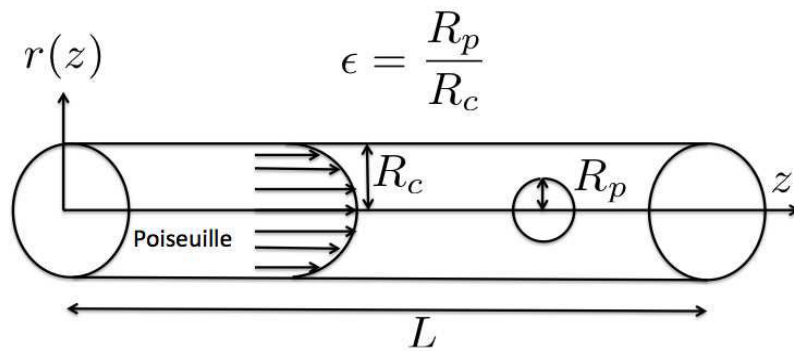


FIGURE 3.10 – C

Par exemple, les expressions développées par Happel *et al.* [69] et données par les deux équations suivantes sont valides que pour $\epsilon \leq 0.3$:

$$\gamma/\gamma_0 = \frac{1}{1 - 2.105\epsilon + 2.087/\epsilon^3} \quad (3.65)$$

$$U_{eq}/U_0 = \frac{1 - 2/3\epsilon^2}{1 - 2.105\epsilon + 2.087/\epsilon^3} \quad (3.66)$$

où γ_0 est la force de traînée de Stokes qu'exerce un fluide en mouvement supposé être uniforme à l'infini sur une sphère ; U_0 définit l'écoulement de Stokes incident le long de l'axe du tube. Le calcul numérique convient avec cette expression analytique pour ϵ assez petit. En particulier, les formules Eq. (3.65) et Eq. (3.66) montrent que la force de Stokes augmente si la paroi du tube et

la particule sont plus proches, *i.e.*, que pour un rayon du cylindre fixé, la force de traînée augmente avec le rayon de la particule. La formule analytique des deux coefficients γ et U_{eq} données ci-dessus restent vraies pour une valeur de ϵ suffisamment petite ($\epsilon \leq 0.2$) (. En revanche, l'écart entre

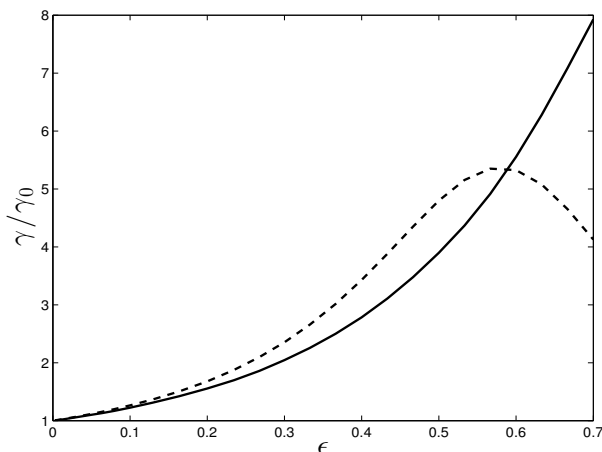


FIGURE 3.11 – Comparaison entre notre résultat numérique présenté par la courbe solide, et le résultat numérique des Eq. (3.65) et Eq. (3.66) présenté par la ligne pointillée. Le rayon du cylindre vaut 0.14 et la valeur de ϵ varie entre 0.005 et 0.7.

l'approximation analytique donnée par Eq. (3.65) et la valeur numérique devient non-négligeable pour $\epsilon > 0.2$ (Eq. (3.65)). Dans la plage $0.2 < \epsilon < 0.55$ l'approximation analytique sur-estime la valeur de la traînée. De plus, vers $\epsilon \simeq 0.35$, la courbe analytique a un point d'inflexion puis décroît. Ces derniers résultats sont en contradiction avec les résultats numériques où γ est non seulement une fonction croissante, mais aussi convexe.

Pour des valeurs de ϵ plus larges que 0.2, d'autres expressions analytiques ont été établies plus tard. Par exemple, nous reprenons ici l'expression donnée par les auteurs de [62] et qui peut être utilisée pour des valeurs de $\epsilon \leq 0.8$:

$$\gamma/\gamma_0 = \frac{1 - \frac{2}{3}\epsilon^2 - 0.20217\epsilon^5}{1 - 2.105\epsilon + 2.0865\epsilon^3 - 1.7068\epsilon^5 + 0.72603\epsilon^6} \quad (3.67)$$

$$U_{eq}/U_0 = \frac{1 - 0.758557\epsilon^5}{1 - 2.105\epsilon + 2.0865\epsilon^3 - 1.7068\epsilon^5 + 0.72603\epsilon^6} \quad (3.68)$$

Nous vérifions que l'estimation numérique des deux coefficients γ et U_{eq} détaillée dans le chapitre précédent coïncide avec des valeurs analytiques données par les Eq. (3.67) et Eq. (3.68).

Dans la suite on va étudier, l'effet du bord sur la force dans le cas d'un tube à diamètre sinusoïdal décrit par (3.1). Nous étudions, dans un premier temps, l'effet de la géométrie (courbure) du pore, et puis dans un seconde temps, nous examinons les effets du rayon de la particule par rapport au rayon minimal du tube, et également par rapport à la longueur du pore.

3.4.2 Calcul de γ et U_{eq} pour une particule sphérique

Effets de la courbure du pore

Dans ce paragraphe, afin d'étudier l'effet de la géométrie du tube, on fixe tous les paramètres géométriques, r_{min} , ϵ , ψ , et κ ($\kappa = 1$) et on fait varier la courbure du pore définie par α dans (3.1). Dans les présentes simulations numériques r_{min} vaut 0.14, ϵ vaut 0.35, ψ vaut 0.1 et κ vaut 1 et les valeurs de α sont 2, 3.5, et 4. Les profils des pores sont présentés dans la figure 3.12.

Nous calculons, tout d'abord, les contraintes incidentes dont leur connaissance permet d'obtenir le

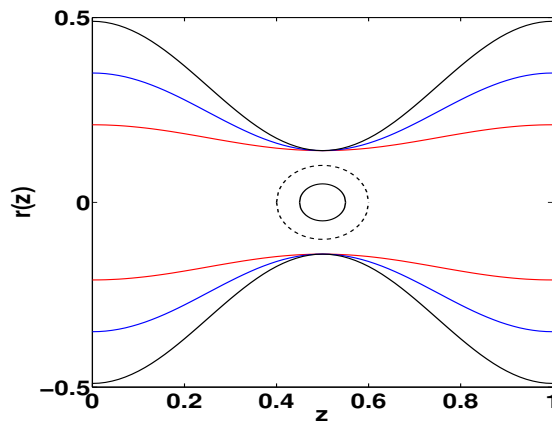


FIGURE 3.12 – Cette figure présente les profils des pores pour différentes valeurs de α , $\alpha = 1.5$ (en rouge), 2.5 (en bleu), et 3.5 (en noir). Les deux cercles correspondent avec deux particules correspondantes à $\epsilon = 0.35$ (cercle solide) et $\epsilon = 0.7$ (cercle pointillé).

champ de vitesse incident sur la surface de la particule (Voir figure (3.14)). D'après la condition de périodicité du champ de vitesse et donc du gradient de pression, la pression $p(z)$ peut être décomposée en la somme d'une fonction linéaire ($-\frac{p}{L}z$) et d'une fonction périodique alternée

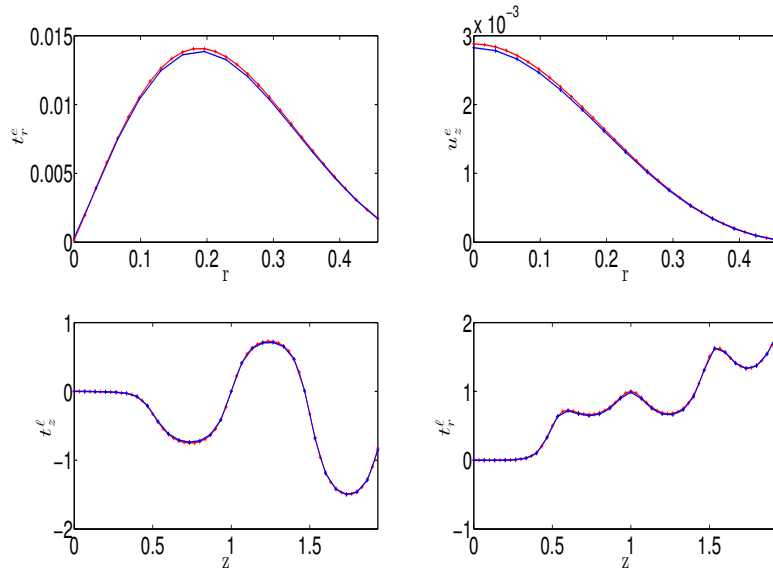


FIGURE 3.13 – Cette figure présente les contraintes exercées par l’écoulement incident sur les trois surfaces d’un tube constitué de deux pores et le champ de vitesse sur S^e pour $\alpha = 3.5$ et $r_{min} = 0.14$. Nous présentons les résultats obtenus pour $h_1=0.03$ et $h_2=0.06$ (en bleu) et $h_1=0.015$ et $h_2=0.03$.

$(-\mathcal{P}^\ell(z)) :$

$$p^\ell(z) = -\frac{[p]}{L}z - \mathcal{P}^\ell(z) \quad (3.69)$$

Ensuite, d’après les expressions analytiques du vecteur contrainte en coordonnées cylindriques établis à l’Eq. (3.40), les deux composantes t_r^ℓ et t_z^ℓ sur la surface latérale se décomposent de la manière suivante :

$$t_r^\ell(z) = \left(\frac{[p]}{L}z\right) n_r(z) + \mathcal{P}_1(z) \quad (3.70a)$$

$$t_z^\ell(z) = \left(\frac{[p]}{L}z\right) n_z(z) + \mathcal{P}_2(z) \quad (3.70b)$$

où $\mathcal{P}_1(z)$ et $\mathcal{P}_2(z)$ sont ainsi deux fonctions périodiques et alternées. On note que $n_r(z)$ qui est la composante selon r du vecteur normal est une fonction périodique, paire et strictement positive tandis que $n_z(z)$ qui est sa composante selon z est périodique, impaire et est positif sur une demi-période du pore et donc négatif sur la deuxième moitié. Notons finalement que \mathcal{P}_ϵ s’annule nécessaire en z demi-entier, car pour des raisons de symétrie $t_z^\ell(z)$ s’annule.

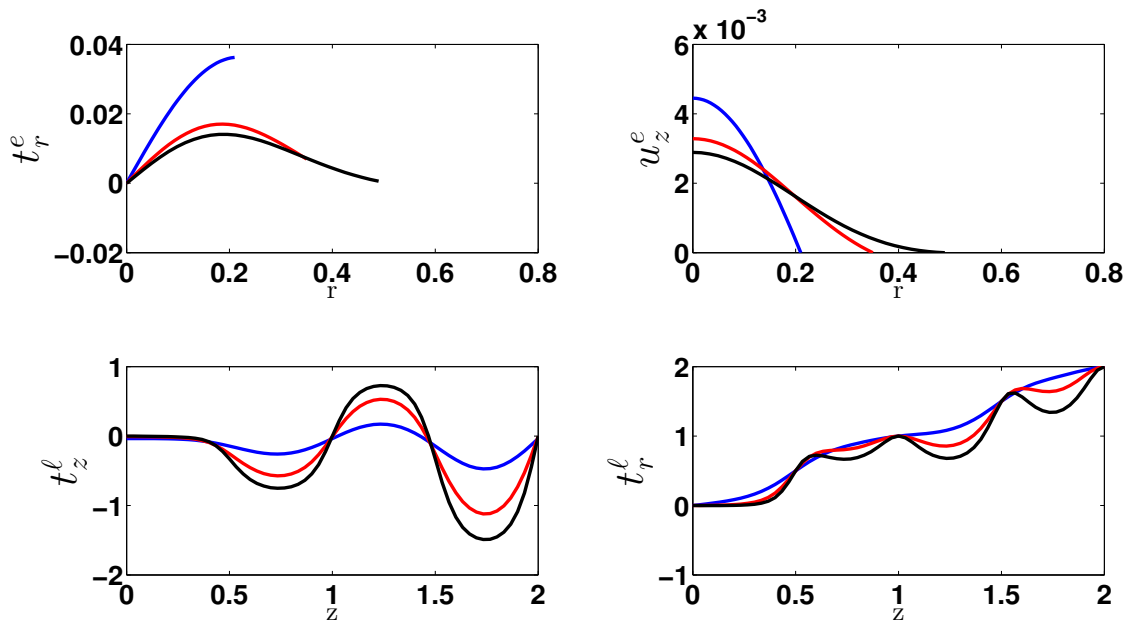


FIGURE 3.14 – Cette figure présente les contraintes exercées par l'écoulement incident sur les trois surfaces d'un tube constitués de deux pores pour différentes valeurs de la cambrure α , $\alpha = 1.5$ (bleu), $\alpha = 2.5$ (rouge), et $\alpha = 3.5$ (noir). Ici $r_{min} = 0.14$.

La représentation des contraintes Fig. 3.14 corrobore ces expressions et ces résultats. La composante t_z^l est une fonction dont les oscillations augmentent d'amplitude linéairement. De plus, elle change de signe toutes les demi-périodes en s'annulant aux demi-périodes ou périodes. L'amplitude des oscillations de t_r^l augmente aussi, en revanche, à chaque période sa valeur augmente régulièrement. La différence de comportement entre les deux composantes des contraintes vient des composantes normales n_r et n_z . Puisque $n_r(0) = n_z(L) = 1$, la valeur de t_r^l augmente de $[p]$ à chaque période spatiale. Nous remarquons ainsi que t_z^l change de signe sur une période et ceci est lié au changement de signe de n_z^l . Ainsi, bien que les contraintes incidentes ne soient pas périodiques, elles peuvent être calculées sur un seul pore et leurs valeurs sur les autres pores sont déduites par les relations Eq. (3.70).

La Fig. 3.14 montre que plus α est plus grande (la section S^e est plus large) plus le maximum du champ de vitesse sur S^e est petit, c'est une conséquence de l'incompressibilité du fluide. Les trois champs de vitesse s'annulent sur le bord (condition de non glissement), et leurs variations selon

$r (\partial_r u_z^e)$ varie aussi avec α . Par conséquent, d'après l'expression analytique de t_r^e donnée dans l'Eq. (3.40) la valeur de $t_r^e(r, 0)$ augmente quand α est plus petite (voir Fig. 3.14 en haut à gauche). Concernant les contraintes sur la surface S^ℓ , nous remarquons que leurs amplitudes varient avec la courbure du pore α : plus α est grande plus l'intensité de ces deux fonctions est grande. Notons que les contraintes sont calculées avec une approximation d'ordre 1, et avec $h_1=0.03$ et $h_2=0.06$. Les mêmes résultats sont obtenus en utilisant des fonctions de forme d'ordre 2 ou en utilisant un maillage plus fin ($h_1=0.015$ et $h_2=0.03$).

Ayant ces contraintes et en utilisant l'Eq. (3.32), on peut calculer le champ de vitesse de l'écoulement incident en tout point intérieur au pore et surtout sur la surface de la particule en chaque position du centre de la particule, z_p . Dans la Fig. 3.4, on présente les variations des deux composantes en coordonnées cylindriques du champ de vitesse en un point r fixé en fonction de z . On remarque que la composante radiale u_r est une fonction impaire de z qui s'annule à l'entrée, au milieu et à la sortie du pore. Tandis que la composante u_z est une fonction paire dont le minimal correspond à la région la plus large et le maximal correspond à la région la plus étroite du pore. On remarque aussi que les extrêmes de ces deux composantes varient avec la cambrure du pore. On montre aussi les variations des deux composantes u_r et u_z en un point z fixé et en fonction de r et pour les trois différentes valeurs de α .

Dans la Fig. 3.15, les variations des deux coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$, sont présentées. On remarque premièrement que les maxima de ces deux derniers sont atteints dans la région la plus étroite du pore, tandis que leurs minima sont atteints dans la région la plus large. Ces résultats sont dans le même contexte que celui d'un cylindre : plus le canal est étroit plus la force augmente. Deuxièmement, on note que le coefficient $\gamma(z)$, dû au mouvement de la particule dans l'écoulement supposé au repos à travers le pore, est plus grande pour une cambrure plus petite en tout point z_p : ceci est dû au fait que pour une cambrure plus petite, en une position fixée du centre de la particule, la région est plus étroite et donc la force est plus grande. Ceci est aussi vérifiée pour une cambrure fixée, le maximum est obtenu dans la région la plus étroite tandis que le minimum est obtenu dans la région la plus large. Concernant l'autre coefficient $U_{eq}(z)$, qui est dû à l'effet du champ de vitesse de l'écoulement incident à travers le pore et en présence de la particule supposée au repos, on re-

marque que dans la région la plus étroite, pour une cambrure plus petite la valeur de $U_{eq}(z)$ est plus grande, par contre dans la région la plus étroite c'est le contraire qui est vrai et ceci est interprété comme conséquence de l'incompressibilité du fluide, car U_{eq} représente un mesure du champ de vitesse moyen du fluide dans la région de la particule. Le même type de résultat est obtenu pour une particule de rayon plus grand correspondant à $\epsilon = 0.7$. (voir la Fig. 3.16).

Dans le chapitre 2, nous avons mis en évidence que le transport n'avait lieu que pour des valeurs de contraste de vitesse a suffisant grand, concrètement supérieures à 0.5. Il paraît assez raisonnable, que le contraste des champs $U_{eq}(z)$ et $\gamma(z)$ soient aussi déterminants pour l'existence d'un transport. Nous introduisons donc la variation relative d'un champ Q définie par le coefficient C_Q :

$$C_Q = \frac{Q_{max} - Q_{min}}{Q_{max} + Q_{min}} \quad (3.71)$$

où Q_{max} et Q_{min} désignent le maximal et le minimal de la quantité Q respectivement. On remarque que la valeur de $C_{U_{eq}}$ augmente avec la cambrure du pore, α , tandis que les variations relatives de $\gamma(z)$ sont légèrement différentes pour les différentes valeurs de α . Par contre c'est la magnitude de $\gamma(z)$ qui est plus grande pour une valeur de α plus petite. En particulier, dans le cas d'un pore cylindrique ($\alpha = 1$), puisque le diamètre est constant les variations relatives des deux coefficients sont nulles. De plus, la valeur de γ est plus large dans le cas d'un cylindre de rayon $R_c = r_{min}$ que les trois valeurs maximales de $\gamma(z)$ de la Fig. 3.15, et la valeur de cette dernière est plus faible que les trois valeurs minimales pour $R_c = R_{max}$.

Ces résultats mettent en évidence l'effet de la géométrie du pore sur la force exercée de traînée exercée par l'écoulement du fluide sur la particule.

Effets de la taille de particule.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à aux tailles relatives de la particule par rapport, d'une part, au rayon du pore, et d'autre part, à sa longueur.

Dans un premier temps, ainsi on fait varier ϵ et tous autres les paramètres géométriques sont fixés. On calcule la force exercée sur une sphère vérifiant $\epsilon = 0.35$ et de $\epsilon = 0.7$, dans un pore de rayon minimal $r_{min} = 0.14$ et de courbure $\alpha = 3.5$. Nous employons les contraintes de l'écoulement

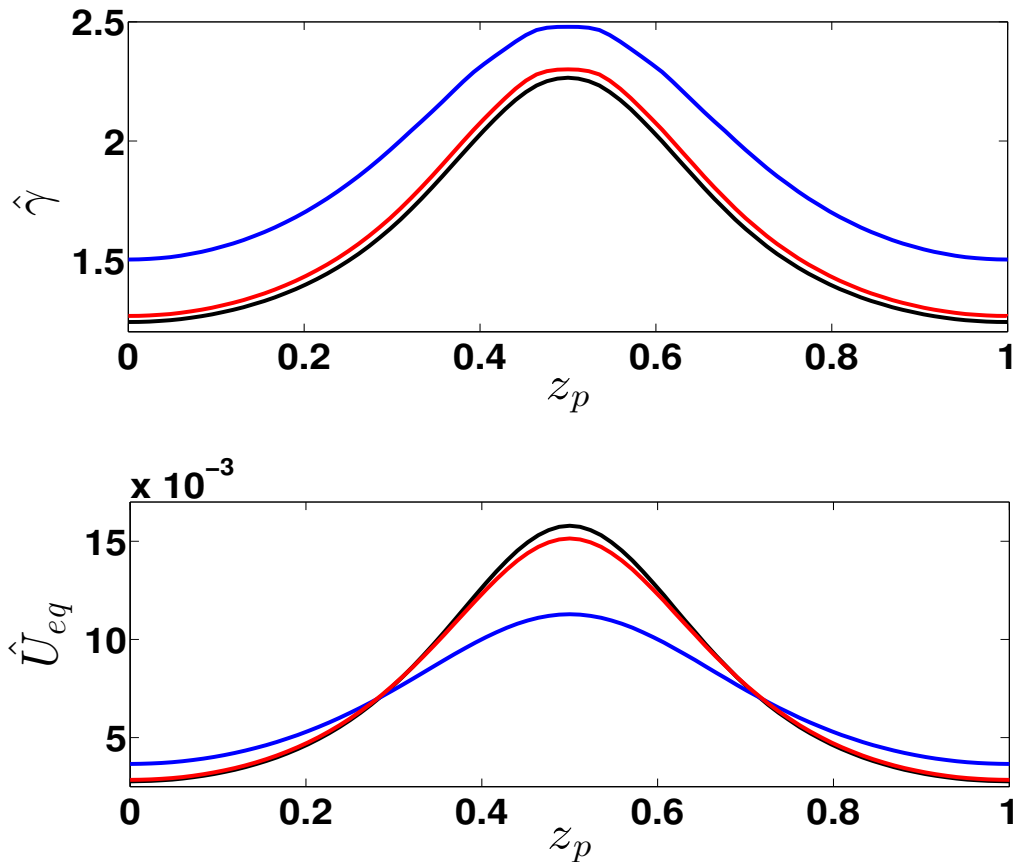


FIGURE 3.15 – On montre les variations spatiales des deux coefficients $\gamma(z)$ (en haut) et $U_{eq}(z)$ (en bas) pour une particule de rayon $R_p = 0.05$, *i.e.* $\epsilon = 0.35$ et pour différentes courbures du pore : pour $\alpha = 2$ en bleu, pour $\alpha = 3.5$ en rouge et pour $\alpha = 4$ en noir.

incident pour $\alpha = 3.5$ présentés en rouge dans la figure (3.14) pour calculer le champ de vitesse incident sur la surface d'une particule de rayon vérifiant $\epsilon = 0.7$. Les variations des deux coefficients $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ pour $\alpha = 0.3$ (respectivement $\epsilon = 0.7$) sont montrées dans la figure (3.14.a) (respectivement (3.14.b)). Nous remarquons que le contraste du champ de vitesse équivalent est légèrement plus petit pour une particule plus grande. Ce résultat est attendu puisque ce champ de vitesse correspond à un effet moyen du champ de vitesse sur la surface de la particule. Concernant la variation de $\gamma(z)$, sa valeur augmente d'une façon considérable avec le rayon de la particule : le rapport entre deux forces de traînée pour deux particules de différents rayons varie de 3 à 4 (Voir la figure (3.16)).

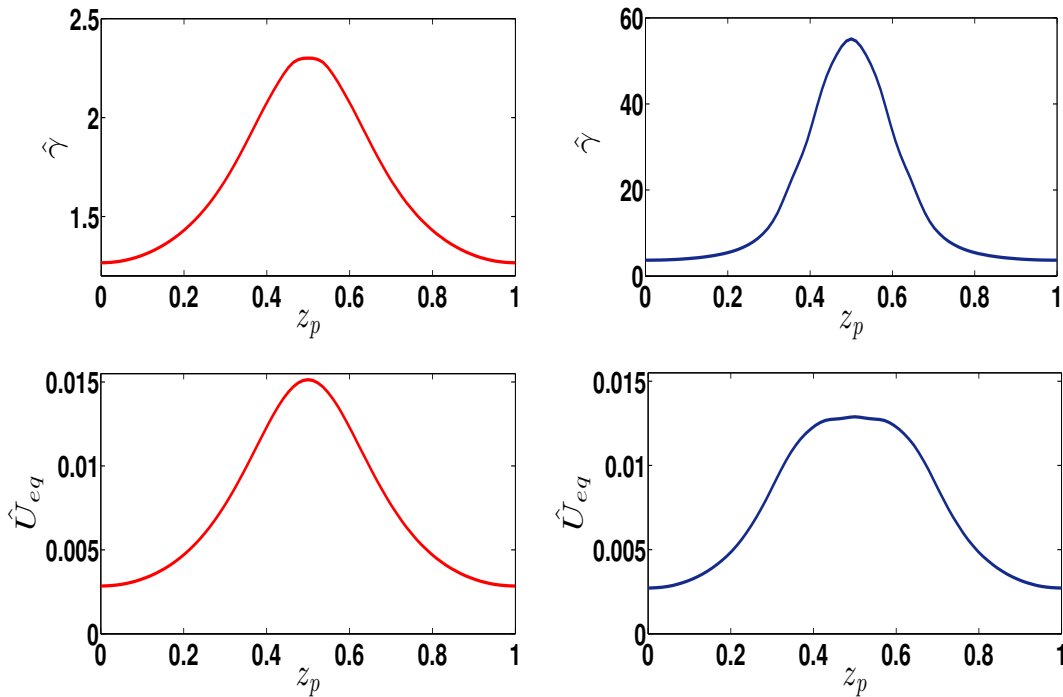


FIGURE 3.16 – Dans cette figure, nous montrons les variations spatiales des deux coefficients $\gamma(z)$ (en haut) et $U_{eq}(z)$ (en bas) pour $\epsilon = 0.35$ (à gauche) et $\epsilon = 0.7$ (à droite). Ici, $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 1.4$ et $\kappa = 1$.

Ensuite, dans le présent paragraphe, on va examiner l'influence de la longueur du pore sur la force exercée sur la particule. Pour cela on calcule la force exercée sur une particule sphérique avec $\psi = 0.25$ d'une part et avec $\psi = 0.05$. On garde les mêmes valeurs de ϵ qui est égal à 0.3571, de la cambrure du pore $\alpha = 4$ et bien sûr $\kappa = 1$ puisqu'il s'agit d'une particule sphérique. Les simulations numériques montrent que les variations relatives des deux coefficients sont légèrement différentes, par contre leurs intensités sont considérablement plus grandes pour une valeur de ψ plus grande. Dans la figure (3.17) on voit que la force de traînée ($\gamma(z)$) et le champ de vitesse équivalent ($U_{eq}(z)$) pour $\psi=0.25$ sont presque trois fois plus grands que ceux qui correspondent à $\psi=0.05$.

3.4.3 Calcul de γ et U_{eq} pour une particule ellipsoïdale

Dans cette section, on calcule la force exercée par le fluide sur une particule ellipsoïdale, *i.e* le paramètre géométrique κ est différent de 1, et que les deux rayons R_{p1} et R_{p2} sont différents.

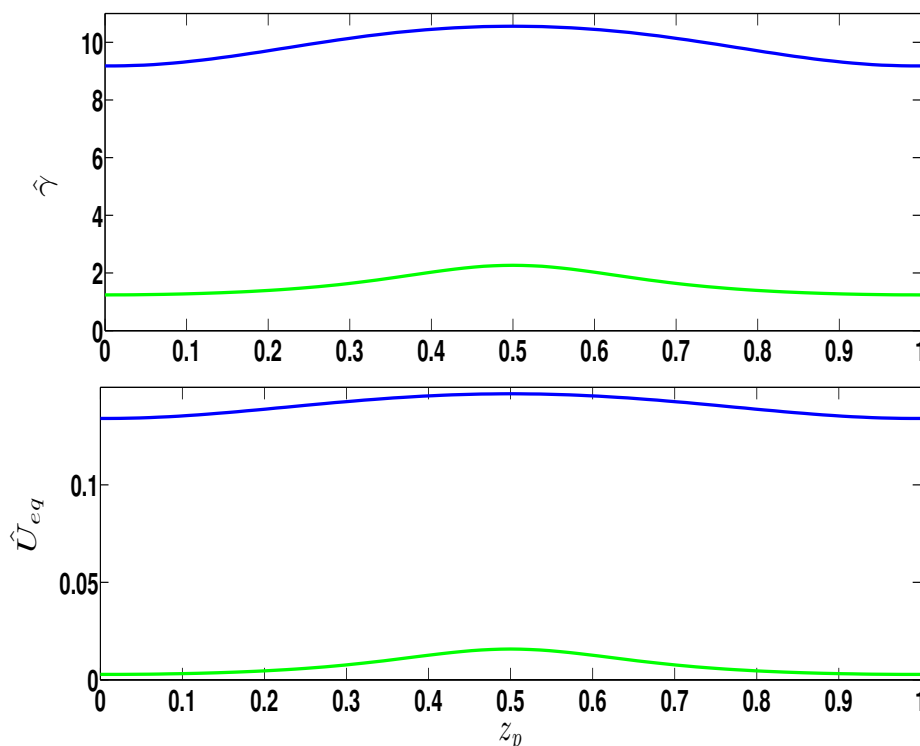


FIGURE 3.17 – Dans cette figure, on montre les variations spatiales des deux coefficients $\gamma(z)$ (en haut) et $U_{eq}(z)$ (en bas) pour $\psi = 0.25$ (courbe bleue) et $\psi = 0.05$ (courbe verte). Ici, $\alpha = 4$, $\epsilon = 0.35$ et $\kappa = 1$.

On dit que la particule est perpendiculaire à l'écoulement si le paramètre κ est plus grand que 1 et que la particule est parallèle à l'écoulement si κ est plus petit que 1. Ici, on va présenter les deux coefficients, $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ pour $\kappa = 0.5$. Ces simulations ont été motivées par la théorie qu'a discutée Blaser et Stefan dans [70]. Ces deux derniers ont montré que la force exercée par le fluide varie avec l'orientation de l'ellipsoïde par rapport à l'écoulement. Dans notre étude, nous allons nous focaliser sur une ellipsoïde dont le grand axe est parallèle à l'axe du tube comme présenté dans la Fig. 3.18.a.

Nous considérons un pore de rayon $r_{min} = 0.14$ et de courbure $\alpha = 3.5$. Les deux coefficients $\hat{\gamma}(z)$ et $\hat{U}_{eq}(z)$ correspondants à une ellipsoïde de rayons $R_1 = 0.05$ et $R_2 = 0.1$, *i.e.* $\kappa = 0.5$, sont présentés dans la Fig. 3.18.b. Comme dans le cas d'une particule sphérique, ces deux coefficients sont minimaux dans la région la plus large du pore et maximaux dans la région la plus étroite. Dans le tableau 3.1, nous comparons les contrastes des deux coefficients C_γ et $C_{U_{eq}}$ à ceux d'une sphère

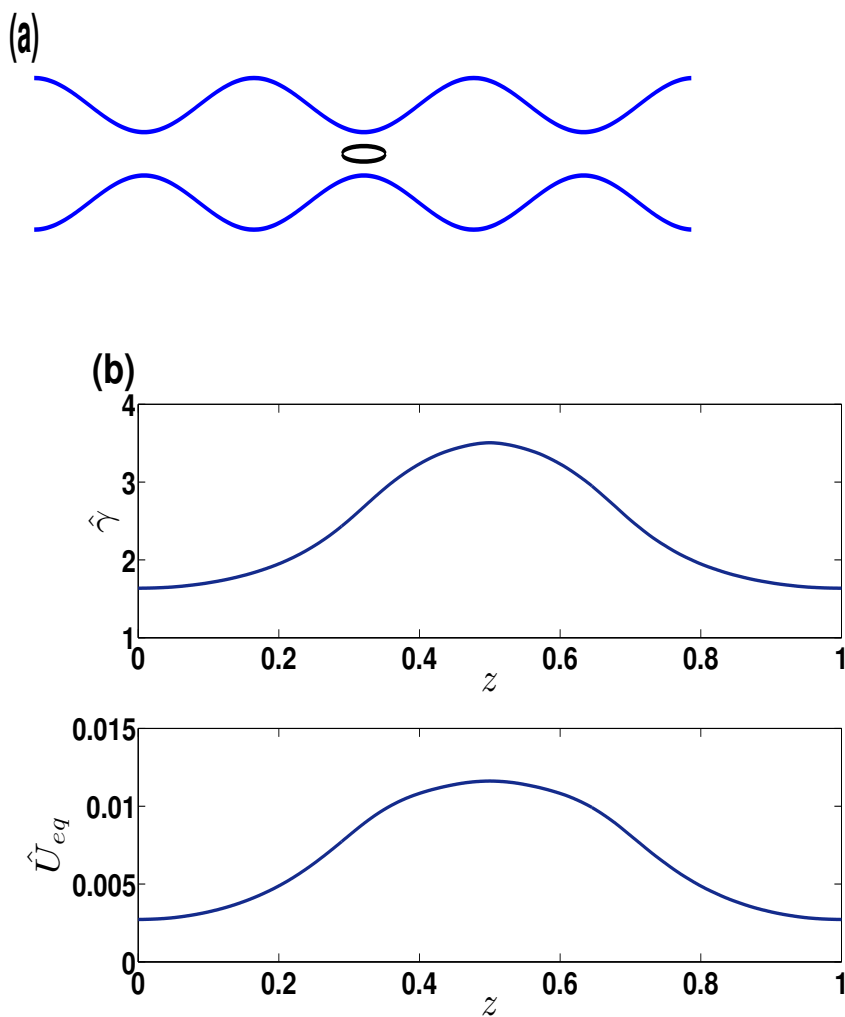


FIGURE 3.18 – Une particule ellipsoïdale de rayons $R_1 = 0.05$ et $R_2 = 0.1$: allongée selon l'axe du tube.

de rayon $R_p = R_1 = 0.05$ et d'une autre de rayon $R_p = R_2 = 0.1$.

Les simulations numériques reportées dans ce chapitre et basées sur la méthode des éléments de frontières nous permet d'estimer quantitativement de la force de traînée exercée sur une particule sphérique et ellipsoïdale de tailles quelconques supposées être en mouvements de translation dans un écoulement à travers un tube périodique. En effet de résultats numériques n'existent que dans le

Modélisation des contraintes sur une particule dans un écoulement confiné

Rayons	$R_1 = R_2 = 0.05$	$R_1 = R_2 = 0.1$	$R_1 = 0.05, R_2 = 0.1$
C_γ	0.2950	0.8735	0.3636
$C_{U_{eq}}$	0.6837	0.6518	0.6203
$\min(\gamma)$	1.2664	3.6921	1.6360
$\min(U_{eq})$	0.0028	0.0027	0.0027

TABLE 3.1 – Ce tableau représente une comparaison des contrastes des deux coefficients γ et U_{eq} pour différentes tailles et formes de particules.

cas d'un tube à diamètre constant. Nous avons montré que la force de traînée peut être caractérisée par deux quantités : le coefficient de traînée, $\gamma(z)$ et le champ de vitesse équivalent, U_{eq} . Les deux quantités dépendent de la position de la particule. Nous les avons examinés pour différentes courbures du pore et différentes tailles de la particule et nous avons montré que $\gamma(z)$ augmente avec le confinement. Néanmoins la connaissance de ces deux coefficients permet d'effectuer une étude plus générale du modèle reporté dans le chapitre précédent.

Dans le chapitre suivant, aussi avec la méthode de continuation et les outils de bifurcation nous allons utiliser ces coefficients et identifier les mécanismes de transport de particule de taille et formes quelconques.

Chapitre 4

Transport d'une particule : friction ratchet

Dans ce chapitre, nous allons identifier les différents mécanismes de transport d'une particule de taille comparable à la taille du pore : les effets du bord du tube sur les contraintes exercées sur la particule sont considérées. D'après le chapitre précédent, l'équation du mouvement d'une telle particule diffère peu de celui d'une particule ponctuelle. En effet, on retrouve l'équation d'une particule avec un coefficient de trainée $\gamma(z)$ dans un champ de vitesse $U_{eq}(z)$. La seule différence notable d'un point de vue du modèle mathématique est que γ dépende de z . Ainsi, nous allons comparer les mécanismes de transport traités dans ce chapitre à ceux trouvés pour γ constante et $U_{eq}(z)$ donné par $u_0(z)$ (Eq. (2.6)), reportés dans le chapitre 2. En particulier, nous montrerons l'effet du confinement, ainsi que les effets des paramètres géométriques sur le transport, *i.e.* les effets des deux coefficients γ et U_{eq} . Cette étude serait menée de la même manière que dans le chapitre 2, en utilisant les méthodes continuation pour suivre les branches périodiques et leurs bifurcations. A notre connaissance, dans la littérature concernant les problèmes de ratchet, un tel problème n'est pas traité. En revanche, on retrouve des problèmes appelés *friction ratchet* qui induisent un transport par une variation du coefficient de trainée dans un autre contexte [29, 105]. Dans le cas présent : nous avons la combinaison d'un friction ratchet et d'un ratchet flow. Cet ensemble constitue ce qu'on appelle un flot de Stokes à effet cliquet.

4.1 Pompage asymétrique

Dans le chapitre 2, nous avons identifié les différents mécanismes de transport d'une particule à travers un tube de géométrie périodique et soumis à un pompage sinusoïdal. La particule a été considérée suffisamment petite pour employer le coefficient de traînée de Stokes (la particule n'est pas confinée). Deux mécanismes principaux ont été identifiés selon l'ordre de grandeur de γ . Pour une valeur de γ modérée ($\gamma = 10$) un mécanisme de transport par brisure spontanée de symétrie a eu lieu (due à la dissipation visqueuse) a donné naissance à une dynamique non-bornée chaotique. Puis par un phénomène de synchronisation un transport rapide : avance d'un pore durant une période prend place. Cet ordre de grandeur du coefficient de traînée adimensionnel est peu compatible avec l'hypothèse d'un écoulement de Stokes. Ainsi, on va plutôt s'intéresser au second mécanisme qui a lieu pour des valeurs plus grandes de γ (autour de 100). Ce mécanisme est induit par la brisure forcée de la symétrie du problème, donnant lieu à un transport régulier et intermittent de type-I. Dans le chapitre 2, l'asymétrie du système est spatiale, *i.e.* la géométrie du pore est considérée asymétrique. Cependant, il existe d'autres choix, car c'est la symétrie spatio-temporelle \mathcal{S} qui doit être brisée. Ainsi, un pompage de va-et-viens asymétrique peut briser cette symétrie. C'est ce choix qu'on a adopté. En effet, il offre plus de souplesse pour une réalisation expérimentale ou une application industrielle, car il est évidemment plus aisé de changer la manière de pomper que de changer la forme des pores ! Nous considérons, dans ce chapitre, une forme de pore symétrique et un pompage asymétrique obtenu par la concaténation de deux fonctions :

$$A(t) = \mathbb{1}_{[0;\beta]} + \cos\left(2\pi\frac{t-\beta}{1-\beta}\right) \mathbb{1}_{] \beta, 1]} - \beta \quad (4.1)$$

avec $\beta \in [0, 1]$ est le paramètre d'asymétrie. En effet, si $\beta = 0$ le pompage est sinusoïdal, sinon le pompage est constant durant l'intervalle de temps $[0; \beta]$ suivi d'un va-et-viens sinusoïdal. Au plus β augmente, au plus le va-et-viens est rapide tandis que le pompage durant la première phase est long et de faible intensité : $1 - \beta$. Si $\beta = 1$, le pompage est nul donc il n'y a plus de forçage ! On s'attend à trouver du transport pour des valeurs intermédiaires de β autour de 0.5. Il est important de noter que bien que la fonction $A(t)$ soit paire par rapport à un axe (en $t = \beta + \frac{1-\beta}{2}$), la symétrie \mathcal{S} est bien brisée, car $A(t + 1/2) \neq -A(t)$.

Finalement, l'équation de la dynamique de la particule avec le dimensionnement du chapitre précédent s'écrit :

$$\ddot{z} = \frac{LT\mu}{m}\hat{\gamma}(z)\left(\dot{z} + \frac{[p]T}{\mu}\hat{U}_{eq}(z)A(t)\right) \quad (4.2)$$

ou :

$$\ddot{z} = \gamma(z)\left(\dot{z} + U_{eq}(z)A(t)\right) \quad (4.3)$$

avec

$$\gamma(z) = \frac{LT\mu}{m}\hat{\gamma}(z) = C_1\hat{\gamma}(z) \quad (4.4)$$

$$U_{eq}(z) = \frac{[p]T}{\mu}\hat{U}_{eq}(z) = C_2\hat{U}_{eq}(z) \quad (4.5)$$

Les deux fonctions $\hat{\gamma}(z)$ et $\hat{U}_{eq}(z)$ sont déterminés par la méthode détaillée dans le chapitre 3. Ces deux fonctions dépendent uniquement de la géométrie (taille et forme) du pore et de celle de la particule, alors que les deux autres coefficients $C_1 = \frac{LT\mu}{m}$ et $C_2 = \frac{[p]T}{\mu}$ ne dépendent que des propriétés de l'écoulement ($[p]$, T , μ) et de la masse m de la particule. Ces nombres sont déterminants pour estimer les nombres de Reynolds et de Strouhal et donc de la consistance des solutions de transport trouvées avec le modèle quasi-statique.

Pour des profils de pore, donc de profils $\hat{\gamma}(z)$ et $\hat{U}_{eq}(z)$, nous cherchons le type de pompage, c'est-à-dire les valeurs de β , pour lesquelles un transport a lieu. Puis, nous explorons le domaine d'existence dans le plan de paramètre C_1 et C_2 . Dans une première section, nous effectuons cette démarche pour une particule sphérique où nous explorons l'influence de la géométrie du pore (courbure, rayon minimal) sur le transport et son domaine d'existence. Ensuite, dans les sections suivantes, nous nous intéressons à l'influence de la particule comme sa taille ou sa forme ellipsoïdale sur l'effet ratchet.

Par comparaison avec le second chapitre, nous avons que la moyenne de U_{eq} est égale à u_m . Donc, nous nous attendons à trouver un transport pour une valeur moyenne autour de 5 et 10. En ce qui concerne γ , nous ne comparons pas avec la valeur moyenne de $\gamma(z)$ mais plutôt son minimum noté $\min(\gamma)$. En effet, dans le goulot d'étranglement du canal la valeur de $\gamma(z)$ peut être très grande si

le rayon de la particule est pratiquement le rayon de ce goulot. Donc une valeur moyenne peut être grande bien que la particule peut avoir une traînée plus faible dans un large canal. Dans la partie la plus large du pore, la traînée est minimale et est plus proche de celle donnée par Stokes, ce qui motive notre choix. D'après le chapitre 2, nous considérons l'ordre de grandeur de $\min(\gamma)$ autour de 100.

4.2 Effet de la géométrie du pore

4.2.1 Existence de solution de transport

Dans cette section, nous mettons en évidence l'existence de solution de transport pour une plage d'asymétrie de pompage. Puis, nous évaluons l'effet de la géométrie du pore sur l'existence de la solution de transport. Pour cela, nous fixons la taille de la particule, *i.e.* nous fixons ϵ , et nous évaluons les solutions de transport pour différentes valeurs de la courbure du pore, α . De manière analogue au chapitre 2, nous commençons par analyser le cas symétrique. Nous rappelons que pour cette valeur de γ ($\gamma = 100$), trois solutions périodiques et symétriques co-existent et une solution de transport ne peut pas exister dans le cas où le système est symétrique (pore et pompage symétriques). La continuation de ces trois solutions par rapport à la valeur moyenne u_m du champ de vitesse présente un diagramme de bifurcation de forme serpentine, *i.e.* les deux solutions symétriques s_0 et s_m se croisent régulièrement (voir la Fig. 2.2). Un scénario analogue est présenté dans le diagramme de bifurcation de la Fig. 4.1 où les deux branches des solutions symétriques s_0 et s_m sont suivis en fonction du paramètre u_m , la moyenne du champ $U_{eq}(z)$. Nous avons considéré un pore de rayon dont la forme géométrique donnée par l'Eq. (3.1) avec $r_{min} = 0.14$ et $\alpha = 3.5$ (courbe noire de la Fig. 3.12), et une particule sphérique de rayon $R = 0.05$ ($\epsilon = 0.3571$). Les variations des deux fonctions $\gamma(z)$ et $U_{eq}(z)$ correspondantes sont représentées dans Fig. 3.15 (courbes noires). Les deux solutions s_0 et s_m se croisent régulièrement et échangent de stabilité via une bifurcation fourche (BF) d'où émerge et se termine la branche s_a de solution périodique asymétrique. Par exemple la solution s_m devient instable en $b_{ui}^{(1)} = 4.83$, alors que la solution s_0 devient stable en $b_{us}^{(1)} = 5.74$. Ces bifurcations se répètent pour d'autres valeurs de u_m ,

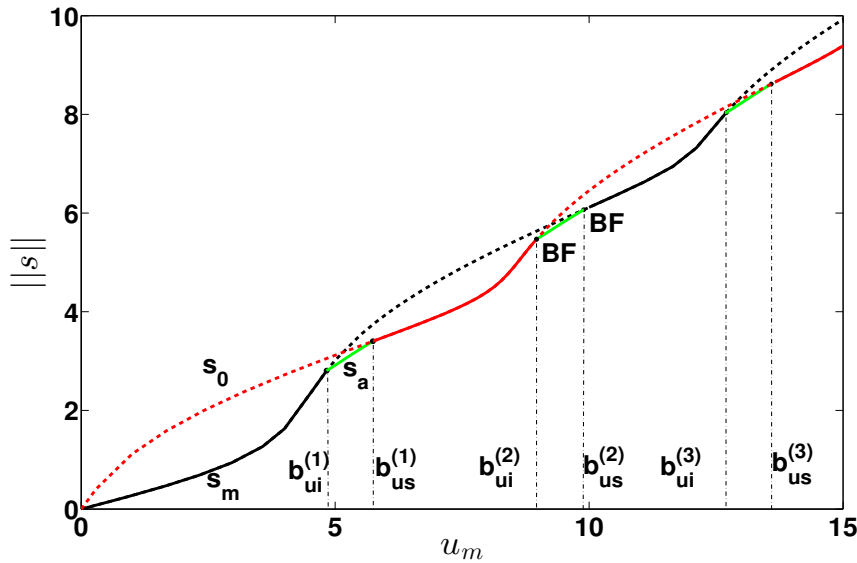


FIGURE 4.1 – Cette figure présente le diagramme de bifurcation des solutions 1-périodiques en fonction de u_m : s_0 (rouge), s_a (noir) et s_m (vert). Une ligne continue désigne que la solution est stable et une ligne pointillée désigne une solution instable. Les points désignent les bifurcations fourches que nous notons BF. Ici, $\gamma = 100$, $\alpha = 3.5$, $r_{min} = 0.14$, $\epsilon = 0.35$, $R_1 = R_2 = 0.05$ (sphère), $\beta = 0$ (pompage symétrique).

que nous notons sur la Fig. 4.1 par $b_{ui}^{(2)}$, $b_{us}^{(2)}$, $b_{ui}^{(3)}$, $b_{us}^{(3)}$. Les premiers intervalles ont le même ordre de grandeur que dans le cas γ constant du chapitre 2. De manière analogue au chapitre deux, il existe toujours une solution stable qui est un attracteur de toutes les dynamiques. Par exemple, l'évolution de la position de la particule montrée dans la Fig. 4.2 pour $u_m = 5$ montre que la dynamique de la particule tend vers la solution périodique s_a .

De manière analogue au chapitre 2, nous explorons les dynamiques issues des branches de Fig. 4.3 en faisant varier le paramètre d'asymétrie de pompage β , les autres paramètres étant identiques. Nous effectuons un premier diagramme de bifurcation selon β avec $u_m = 5$ (Fig. 4.3). Si $\beta = 0$, d'après le diagramme de bifurcation de la Fig. 4.1 il y a quatre solutions, s_0 , s_m et deux copies de s_a . Lorsque β croît, les branches conservent leur stabilité jusqu'à un point de retournement. Les deux copies de s_a (branches TS_2 et TS_4 dans Fig. 4.3) joignent les branches s_0 et s_m (branches TS_1 et TS_3) en deux points tangents $\beta = bs_{at}^{(1)}$ et $\beta = bs_{at}^{(2)}$. Si $\beta < bs_{at}^{(2)}$, la dynamique converge vers une solution périodique stable. Il existe aussi deux branches de solutions périodique qui émergent

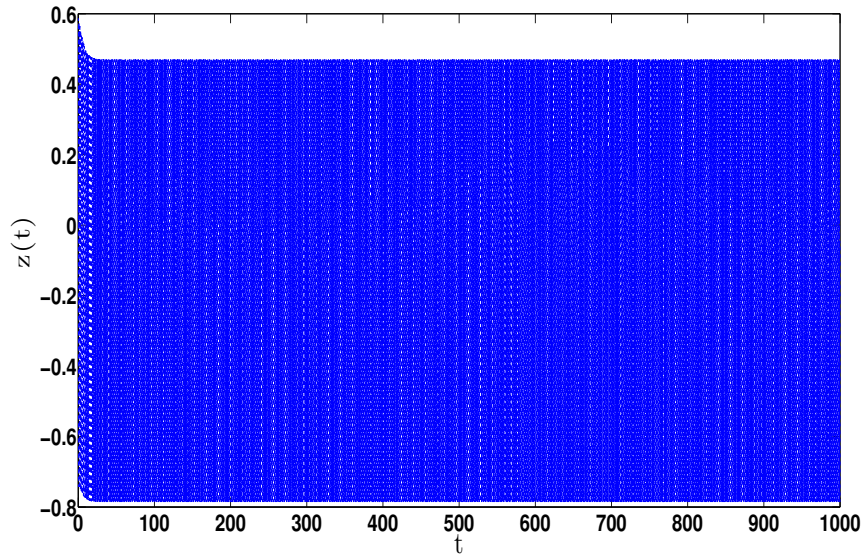


FIGURE 4.2 – Evolution de la position de la particule pour $u_m = 5$. Ici, $r_{min} = 0.14$, $\gamma = 3.5$, $\epsilon = 0.35$, et $\beta = 0$.

de la solution en $\beta = 1$. En effet, d'après la forme de pompage choisie, le pompage est nul pour $\beta = 1$ et donc la solution $z(t) = C^{te}$ est solution du problème. En diminuant la valeur de β à partir de 1, deux solutions apparaissent, dont l'une est stable et l'autre instable. De nouveau, ces branches se terminent en une bifurcation tangente en $\beta = b_{s_{at}}^{(3)}$. Pour $b_{s_{at}}^{(3)} < \beta < 1$, la dynamique converge vers l'unique solution périodique et stable. Nous remarquons que $b_{s_{at}}^{(2)}$ est plus petite que $b_{s_{at}}^{(3)}$, et que dans cet intervalle étroit de longueur ≈ 0.0146 aucune solution périodique a lieu, ceci peut permettre l'existence d'une solution de transport. L'intégration numérique montre que pour des valeurs de β tels que $b_{s_{at}}^{(2)} < \beta < b_{s_{at}}^{(3)}$, des solutions de transport existent effectivement. Par exemple, pour $\beta = 0.46$ l'évolution de la trajectoire de la particule au cours du temps est présentée dans la Fig. 4.4. Plus la valeur de l'asymétrie β s'approche de l'une des deux bifurcations $b_{s_{at}}^{(2)}$ ou $b_{s_{at}}^{(3)}$ plus le transport est lent. Une analyse plus précise de la vitesse du transport fait apparaître la loi puissance en $1/2$ trouvée dans le chapitre 2. Cela indique c'est aussi une bifurcation intermittente de type-I qui se produit en $b_{s_{at}}^{(2)}$ et en $b_{s_{at}}^{(3)}$. L'influence de chaque bifurcation se manifeste par la présence de deux plateaux d'oscillations analogues à la Fig. 2.19. Ainsi la vitesse maximale du transport est obtenue approximativement au milieu des deux bifurcations. Par exemple, la Fig. 4.4

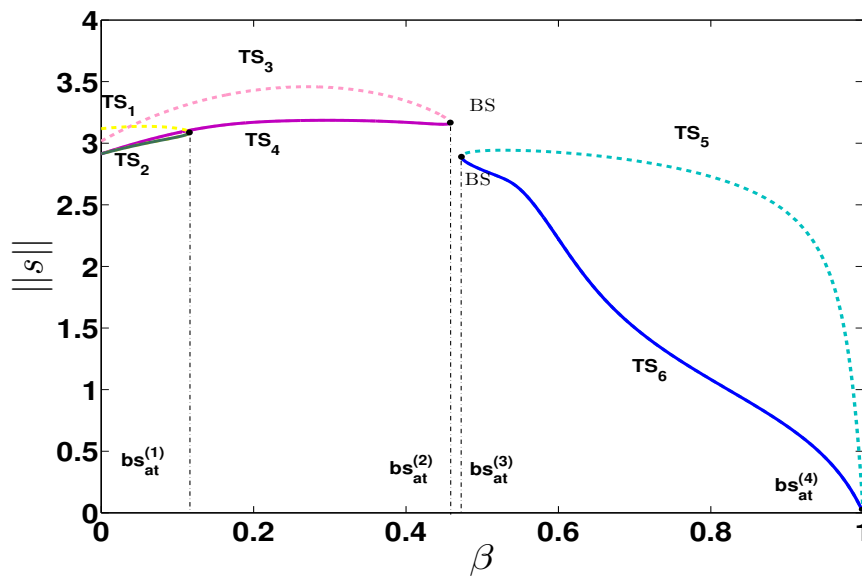


FIGURE 4.3 – Digramme de bifurcation selon l’asymétrie β des solutions 1-périodiques s_0 (en rouge), s_m (en noir), et s_a (en vert) du diagramme de la Fig. 4.1 pour $u_m = 5$. Une courbe continue désigne une solution stable et un ligne pointillée désigne une solution instable. Les points désignent les bifurcation tangentes (points selles) que nous notons par BS. $\min(\gamma(z)) = 100$, $u_m = 5$, $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 0.35$, $\beta = 0.46$.

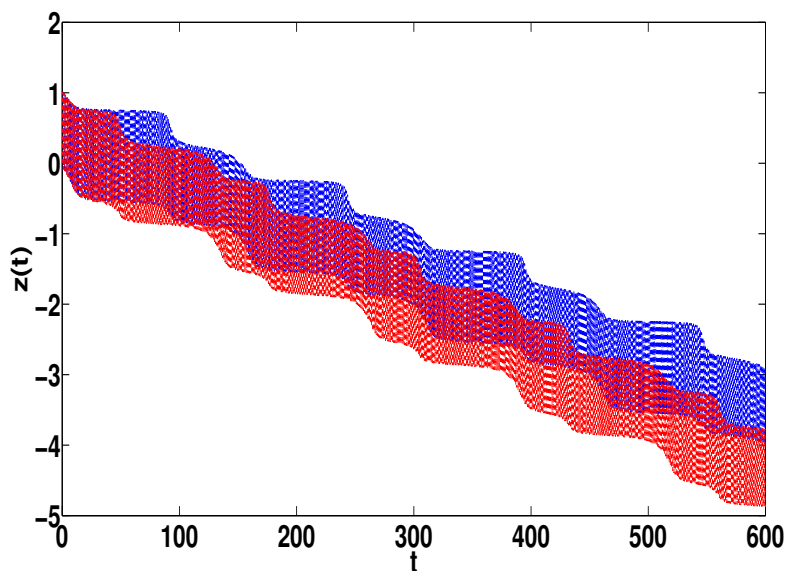


FIGURE 4.4 – Evolutions de la trajectoire de la particule, $z(t)$, pour deux valeurs différentes de β entre les deux bifurcations $bs_{at}^{(2)}$ et $bs_{at}^{(3)}$: $\beta = 0.46$ (en bleu) et $\beta = 0.4654$ (en rouge). $\min(\gamma(z)) = 100$, $u_m = 5$, $\alpha = 3.5$, et $\epsilon = 0.35$.

montre que pour $\beta = 0.46$ le transport est plus lent que celui obtenu pour $\beta = 0.465$.

Afin de mettre en évidence l'effet de la forme géométrique du pore, nous prenons des pores avec des courbures différentes. D'un point de vue qualitatif, les résultats pour $\alpha = 4$ et $\epsilon = 0.35$ sont similaires à ceux trouvés pour $\alpha = 3.5$ et $\epsilon = 0.3571$. Dans le cas symétrique $\beta = 0$, le diagramme de bifurcation fait apparaître la même structure sinueuse des solutions s_0 et s_m avec des intervalles analogues d'existence des solutions asymétriques s_a stables (Voir la Fig. 4.5.a). Egalement, la continuation de ces deux solutions pour $u_m = 5$ selon l'asymétrie du pompage montre qu'une solution de transport existe pour certaines valeurs de β (Voir la Fig. 4.5.b). La comparai-

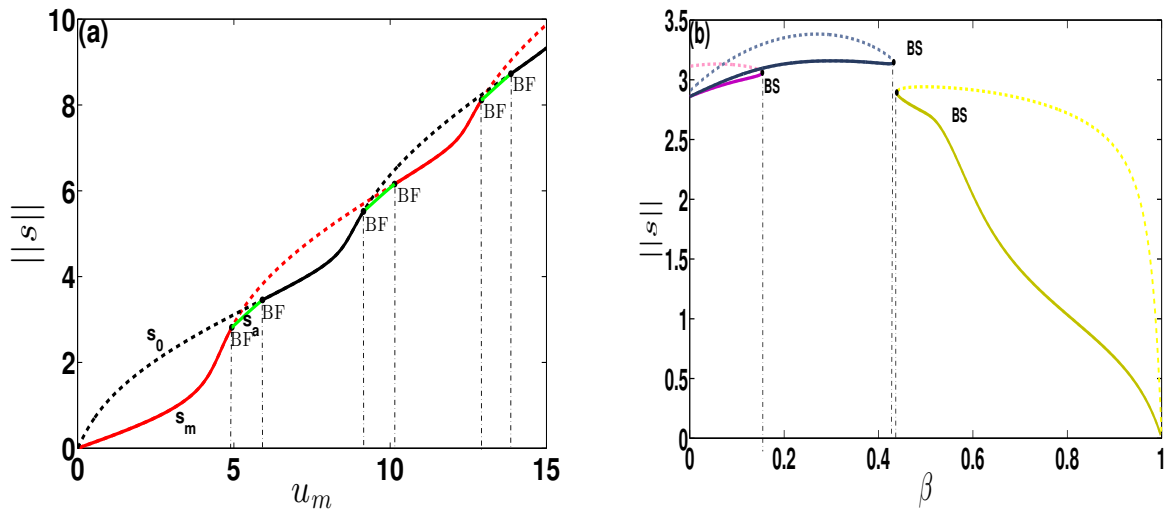


FIGURE 4.5 – La figure à gauche (a) présente le diagramme de bifurcation des solutions 1-périodiques en fonction de u_m : s_0 (rouge), s_a (noir) et s_m (vert) pour un pompage symétrique, $\beta = 0$. Une ligne continue désigne que la solution est stable et une ligne pointillée désigne une solution instable. Les points désignent les bifurcations fourches que nous notons BF. La figure à droite (b) montre la continuation des trois solutions du diagramme (a) selon l'asymétrie du pompage, β en $u_m = 5$. ces solutions subissent des bifurcations selles en différentes valeurs de β que nous notons BS. Ici, $\gamma = 100$, $\alpha = 4$, $r_{min} = 0.14$, $\epsilon = 0.35$, $R_1 = R_2 = 0.05$ (sphère).

son quantitative des deux diagrammes de bifurcation Fig. 4.3 et Fig. 4.5.b obtenus pour les mêmes paramètres exceptée la courbure α montre que l'intervalle d'existence de la solution de transport pour $\alpha = 3.5$ est nettement plus large que celui trouvé pour $\alpha = 4$. L'intégration directe de l'équation de mouvement, l'Eq. (4.3), nous permet de remarquer que le transport obtenu pour $\alpha = 3.5$ est aussi plus rapide que celui obtenu pour $\alpha = 4$. Dans la Fig. 4.6, nous montrons l'évolu-

tion de la trajectoire de la particule vérifiant $\epsilon = 0.35$ pour $\alpha = 3.5$ en $\beta = 0.4654$ et pour $\alpha = 4$ en $\beta = 0.4354$. Ce résultat est plutôt contraire à ce qu'on pouvait attendre puisque l'effet ratchet est dû à une cambrure prononcée. Cependant avec d'autres paramètres, on peut avoir un effet inverse et donc, on ne peut pas conclure le lien entre une augmentation de cambrure avec une meilleure efficacité du transport.

Finalement, pour une courbure fixée ($\alpha = 3.5$), le domaine d'existence d'une solution de transport

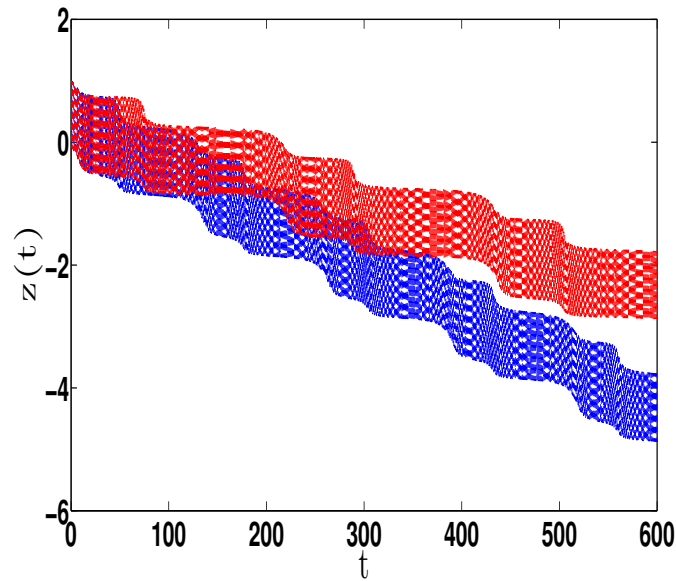


FIGURE 4.6 – Evolution de la position de la particule pour $\alpha = 3.5$ en $\beta = 0.4654$ (en bleu) et pour $\alpha = 4$ en $\beta = 0.4354$. $\min(\gamma) = 100$. Ici $u_m = 5$, $\epsilon = 0.3571$.

augmente avec u_m : l'intervalle correspondant à $u_m = 10$ est nettement plus large que celui correspondant à $u_m = 5$ (voir Fig. 4.3 et Fig. 4.7). De plus les deux courbes bleues des deux figures Fig. 4.4 et Fig. 4.8 montrent que pour $u_m = 10$ le transport est plus rapide que pour $u_m = 5$.

4.2.2 Domaine d'existence de solutions de transport

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré l'existence d'une solution de transport pour différentes courbures avec $\min(\gamma) = 100$. Dans ce paragraphe, nous explorons les solutions de transport pour différentes valeurs de $\min(\gamma)$ et u_m . Les deux profils $\hat{\gamma}(z)$ et $\hat{U}_{eq}(z)$ sont fixés ainsi que l'asymétrie du pompage, *i.e.* les paramètres α , ϵ , et β , et nous étudions la continuation des

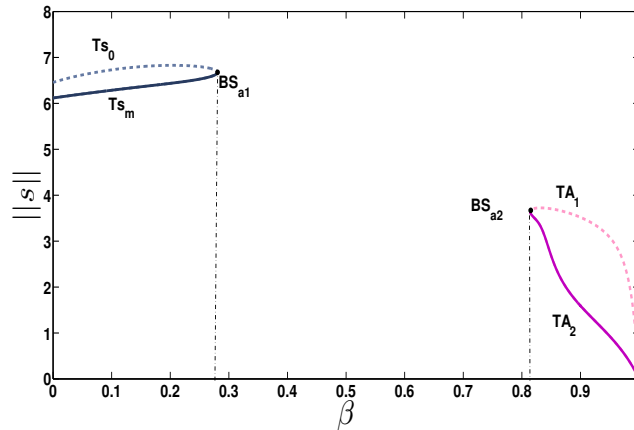


FIGURE 4.7 – Continuation des deux solutions s_0 et s_m selon β pour $u_m = 10$. Pour $at < BS_{a1} = 0.2807$ les deux solutions existent et conservent leurs stabilités : s_0 reste instable et s_m reste stable. En $at = BS_{a1}$, les deux solutions s'unifient en une seule via la bifurcation selle BS_{a1} . En diminuant β à partir de 1, TA_1 est instable et TA_2 est stable jusqu'à qu'une autre bifurcation selle se produit en $BS_{a2} = 0.8143$. Ces deux branches disparaissent pour $at < BS_{a2}$.

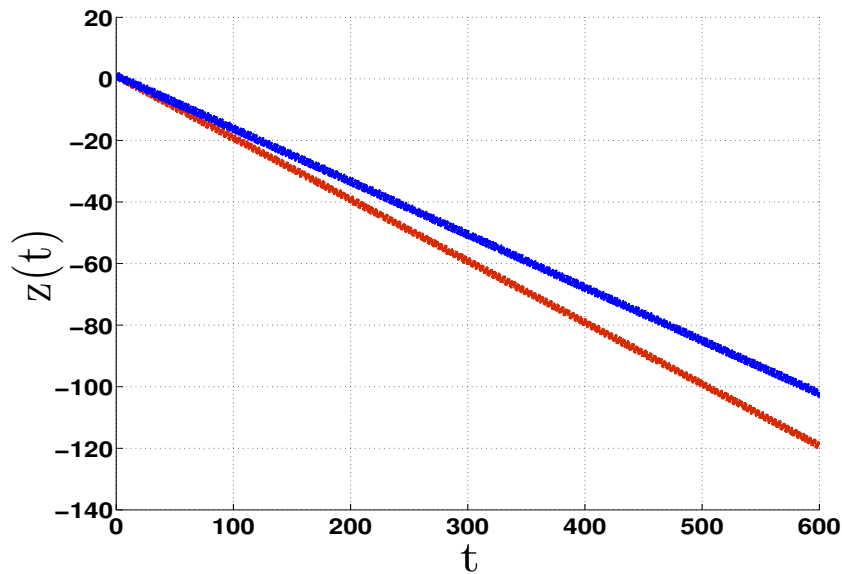


FIGURE 4.8 – Evolution de la trajectoire de la particule pour $u_m = 10$ et pour $\beta = 0.46$ (en bleu) et $\beta = 0.5474$ (en rouge) $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 0.35$.

points de bifurcations (des points selles) dans le plan $(\min(\gamma), u_m)$. Nous traitons le cas de $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 0.35$ et $\beta = 0.5$.

Tout d'abord, nous étudions la continuation des solutions 1-périodiques avec $\min(\gamma(z)) = 100$

et $\beta = 0.5$ selon le paramètre u_m . Le diagramme de bifurcation présenté dans la Fig. 4.9 montre qu'une solution de transport est possible pour $BS_1 < u_m < BS_2$ et pour $u_m > BS_3$. Ensuite, nous étudions le lieu de ces points de bifurcation, BS_1 , BS_2 , et BS_3 dans le plan (C_1, C_2) dans la Fig. 4.10. Ce diagramme permet d'identifier les zones d'existence d'une solution de transport dans

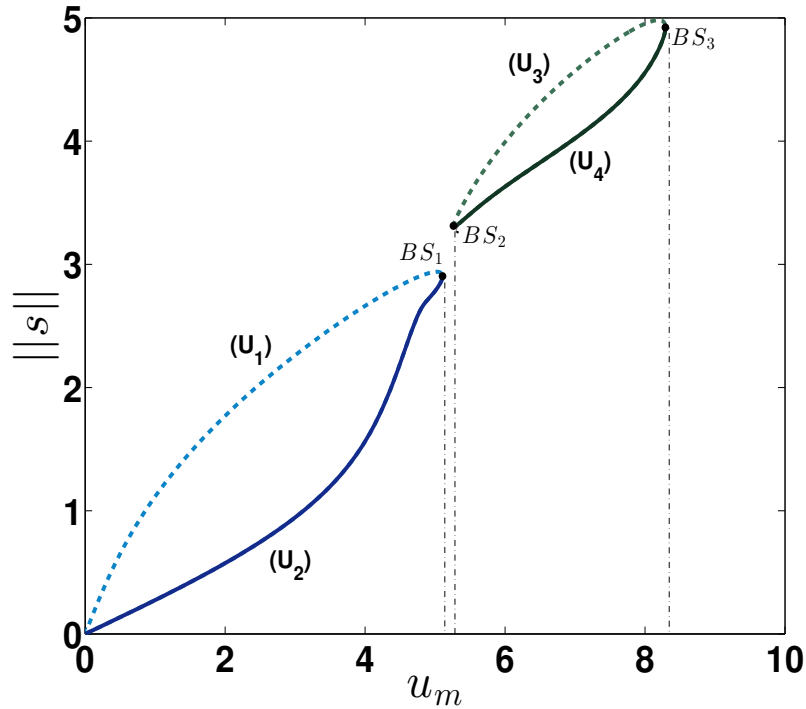


FIGURE 4.9 – Diagramme de bifurcation selon le paramètre u_m des solutions périodiques que nous notons (U_1) , (U_2) , (U_3) , et (U_4) . BS_1 , BS_2 , et BS_3 désignent des bifurcations selles. Ici $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 0.35$, et $\beta = 0.5$.

le plan (C_1, C_2) qui peuvent aussi se définir de la manière suivante $C_1 = \min(\gamma(z))/\min(\hat{\gamma}(z))$ et $C_2 = \bar{U}_{eq}(z)/\bar{\hat{U}}_{eq}(z)$, où la barre désigne la valeur moyenne sur une période spatiale. Nous remarquons que BS_3 est supérieure à BS_1 et BS_2 en tout point du plan. De plus, pour $p_1 < C_1 < p_2$ et $709.8 < C_2 < 732.9$, BS_2 est supérieure à BS_1 ce qui laisse apparaître une fenêtre étroite de transport délimité par les deux courbes BS_1 et BS_2 (roses et bleues) entre les deux points p_1 et p_2 de la Fig. 4.9. Au dessus de la courbe BS_3 a priori une solution de transport existe. Pour $C_1 < p_3$ l'existence du transport est seulement limité par notre hypothèse d'un écoulement quasi-statique. Si $C_1 > p_3$, nous avons mis en évidence une autre branche de solution de transport délimitée par

BS_4 . Cette courbe coupe la courbe BS_3 en $C_1 = p_4$, ce qui fournit une valeur maximale de C_2 pour obtenir le transport. En remarquant que C_1 est proportionnel à la trainée, on a donc trouvé une majoration de la trainée adimensionnelle pour laquelle un transport peut avoir lieu.

En calculant l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds, les transports possibles sont dans la fenêtre entre p_1 et p_2 et dans la zone fine entre les courbe entre BS_3 et BS_4 . Par exemple, si nous considérons un fluide de viscosité $\mu \approx \mu_{eau}/2$, comme l'essence, et une particule de masse volumique dix fois plus grand que la masse volumique de l'eau, $\rho_p = 10\rho_{eau}$, comme le plomb, un transport est possible pour $T \approx 0.64e - 03$ avec $L = 10\mu m$. Pour ces valeurs on a $C_1 \approx 692.3$, et la Fig. 4.9 montre que pour $1341 < C_2 < 1353$ le transport est possible. Nous vérifions que pour ces valeurs le nombre de Reynolds $Re = 0.18$ est de l'ordre de $\Theta(10^{-1})$.

En augmentant la courbure du pore, le diagramme représentant la continuation des points selles pour $\alpha = 4$ est similaire à celui obtenu pour $\alpha = 3.5$, et le domaine d'existence d'une solution de transport est défini par trois régions. Une première située au dessus de la courbe bleue et au dessous de la courbe jaune de la figure d'en bas de la Fig. 4.10 pour $K_1 < C_1 < K_2$. La deuxième région est celle située au dessus de la courbe marron pour $C_1 < K_3$, et finalement la troisième région limitée par les deux courbes marron et jaune pour $K_3 < C_1 < K_4$.

Ce résultat confirme ce qu'on avait obtenu concernant l'influence de la courbure sur le transport en faisant varier β . Sans une analyse numérique de l'existence des solutions, il n'est pas possible de définir une règle générale pour savoir si une augmentation de la courbure sera favorable ou non au transport. En fait, le transport arrive dans des intervalles de paramètres ou bandes. Et si on est proche des frontières du domaine le transport est lent tandis que centré dans le domaine, le transport est plus rapide.

4.3 Effet de la taille de la particule

Dans la section précédente, nous avons établi l'existence d'une solution de transport pour deux formes géométriques différentes du pore, *i.e.* deux valeurs différentes de la courbure du pore α . Dans cette section nous allons adresser l'effet de la taille de la particule sur l'existence du transport.

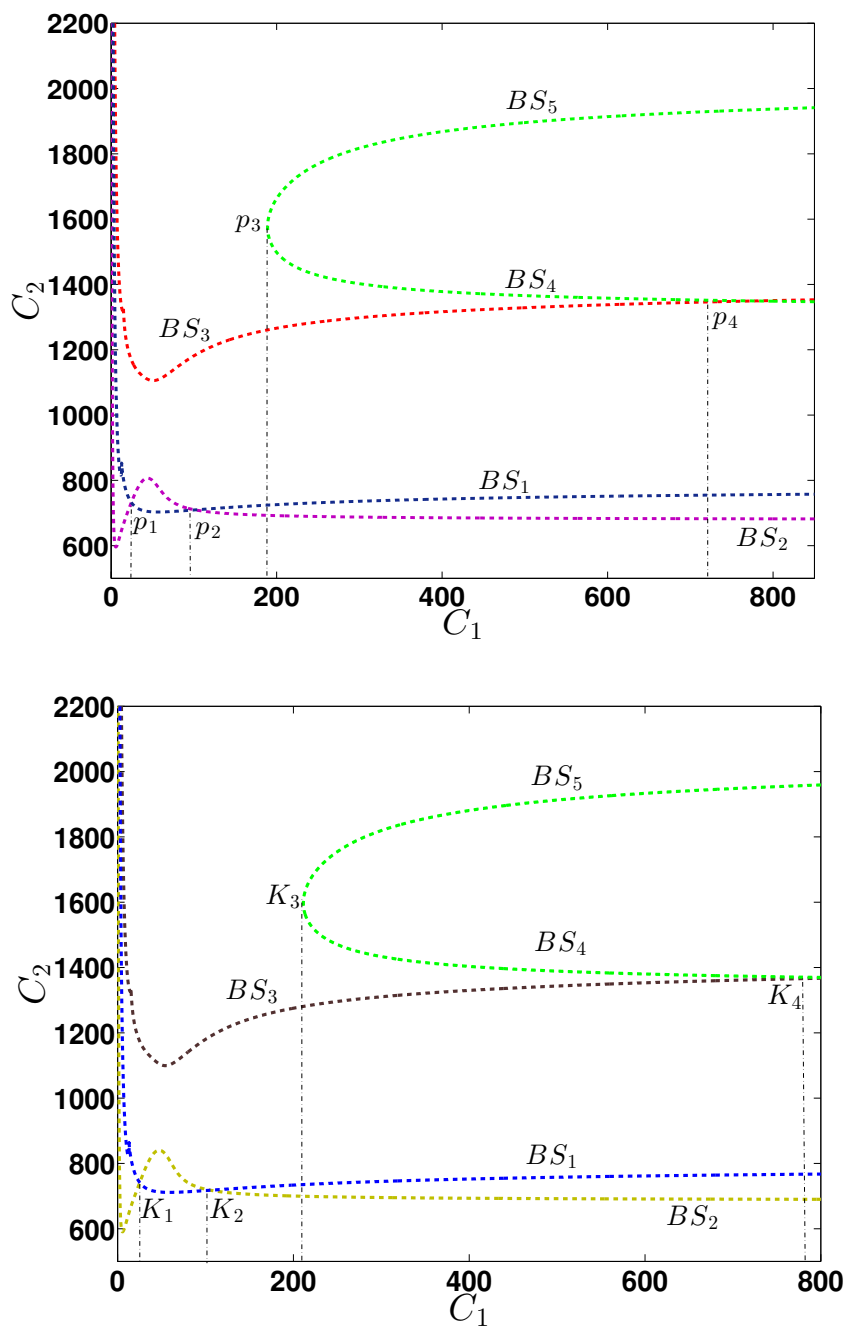


FIGURE 4.10 – Continuation des points selles pour $\alpha = 3.5$ (en haut) et pour $\alpha = 4$ (en bas), et $\epsilon = 0.35$ dans le plan (C_1, C_2) . Ici $r_{min} = 0.14$, et $\beta = 0.5$.

Nous notons, que dans cette section deux effets vont être discutés, l'effet de taille de la particule par rapport au rayon minimal du pore, i.e le paramètre ϵ , d'une part, et, d'autre part, l'effet de la

taille de la particule par rapport à la longueur du pore, i.e. κ . Pour cela, nous fixons la courbure du pore, α , et nous étudions le transport pour deux valeurs différentes de ϵ et de κ séparément.

4.3.1 Influence du paramètre ϵ

Dans ce paragraphe, nous considérons une courbure fixée du pore, ici $\alpha = 3.5$ et nous comparons les deux cas : (i) $\epsilon \approx 0.35$ et (ii) $\epsilon \approx 0.7$. Le cas $\epsilon \approx 0.35$ ayant été déjà traité, nous considérons le cas $\epsilon = 0.7$. La continuation selon le paramètre u_m des solutions s_0 , s_m et s_a dans le cas symétrique est similaire au diagramme de bifurcation Fig. 4.1 pour $\epsilon = 0.35$. Donc pour un cas symétrique le transport n'est pas possible. Dans le cas asymétrique, dans la Fig. 4.11 nous établissons un diagramme de bifurcation analogue à Fig. 4.9 où u_m est le paramètre de bifurcation, les autres paramètres étant identiques excepté β qui est égale à 0.5. On retrouve des bandes d'existence des solutions 1-périodiques. Cependant, ces domaines se chevauchant ($BS_1 > BS_2$), il n'y a donc pas de transport pour u_m autour de 5 contrairement au cas $\epsilon = 0.35$. Pour des valeurs de u_m supérieures à $BS_3 \approx 8.23$ un éventuel transport est possible.

Cependant, la continuation des points de bifurcation dans le plan (C_1, C_2) montre que pour des valeurs de $\min(\gamma)$, BS_2 est plus grande que BS_1 ce qui peut promettre l'existence d'une solution de transport. Ceci est vrai pour $7.64 < C_1 < 21.67$, i.e. $28.2076 < \min(\gamma(z)) < 79.8970$. De manière analogue au cas précédent, $\epsilon = 0.35$, pour $C_1 < L_3 = 37.42$, une solution de transport peut exister pour toute valeur de $C_2 > BS_3$. De plus, pour $L_3 < C_1 < L_4 = 170.1$ une solution transport peut ainsi exister pour C_2 entre la courbe rose claire et l'autre rose foncé de la Fig. 4.11. Par exemple, si nous considérons les mêmes caractéristiques physiques de l'écoulement et de la particule (masse volumique, viscosité, et période de pompage), nous remarquons que pour une particule de taille plus grande, le transport existe encore et de plus la vitesse de transport est plus grande. Dans la Fig. 4.12, nous représentons l'évolution de la position d'une particule de rayon $R = 0.05$ et vérifiant $C_1 = 692.3051$ et $C_2 = 1356.1$ en rouge et celle d'une particule de rayon $R = 0.1$ et vérifiant $C_1 = 86.49940$ et $C_2 = 1360.8$ en bleu, avec ces valeurs de (C_1, C_2) appartiennent au domaine d'existence de la solution de transport.

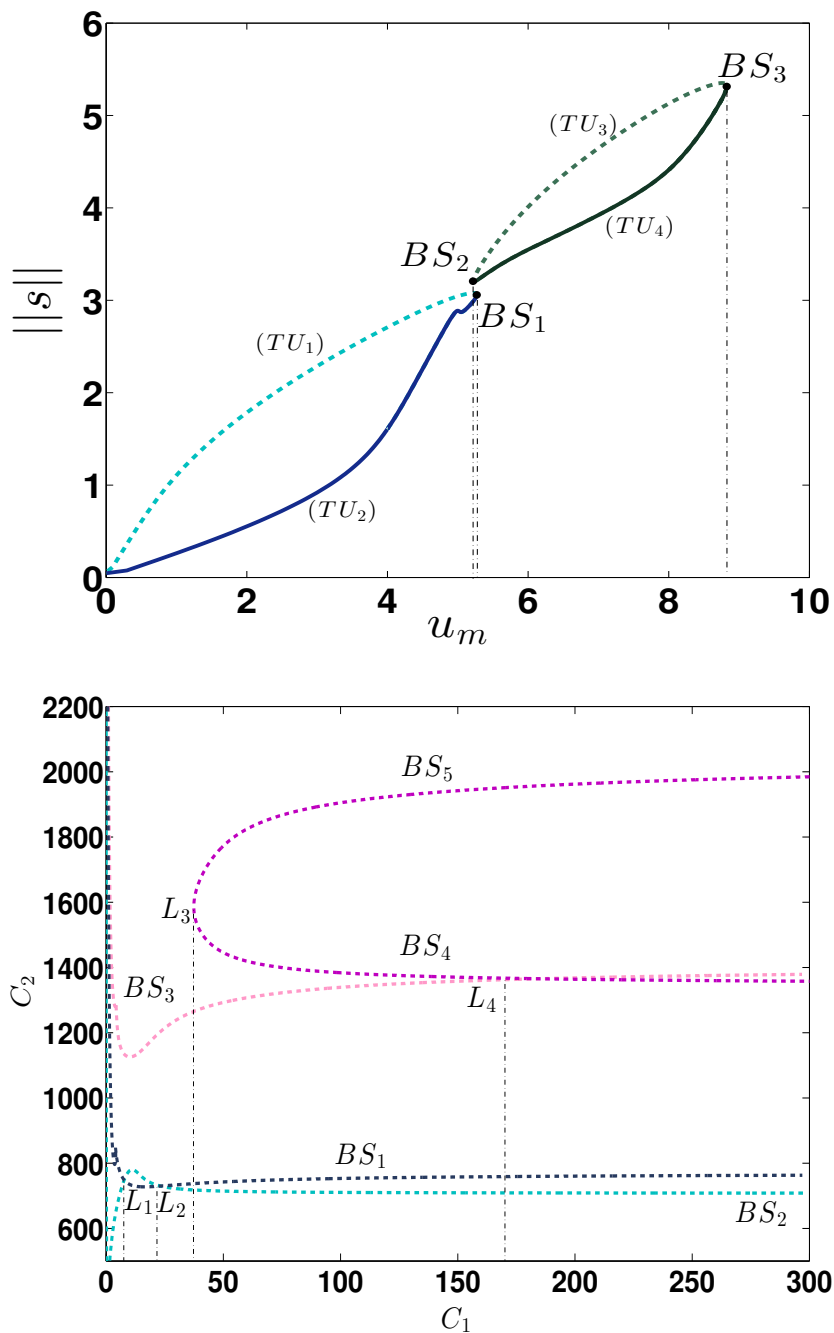


FIGURE 4.11 – Diagramme de bifurcation selon le paramètre u_m des solutions périodiques que nous notons (TU_1) , (TU_2) , (TU_3) , et (TU_4) pour $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 0.7$. BS_1 , BS_2 , et BS_3 désignent des bifurcations selles ; $BS_1 > BS_2$ et pas de solution de transport que pour $u_m > BS_3$. Ici $r_{min} = 0.14$ et $\beta = 0.5$.

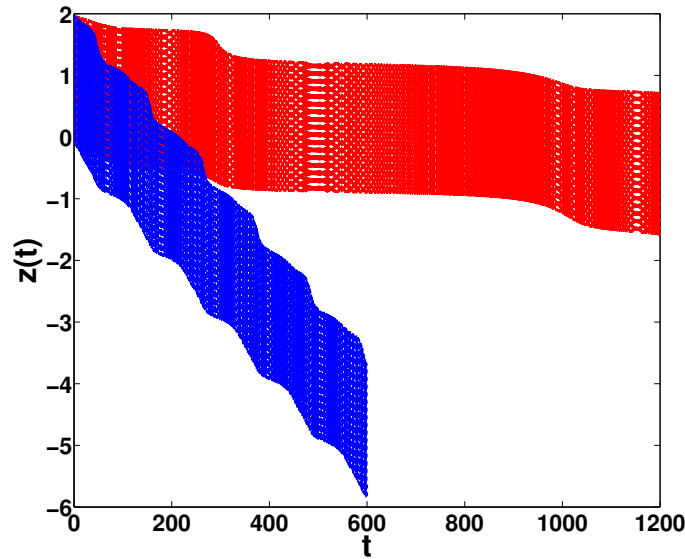


FIGURE 4.12 – En rouge : évolution de la position de la particule pour $\epsilon = 0.35$, $C_1 = 692.3051$ et $C_2 = 1356.1$. En bleu : évolution de la position de la particule pour $\epsilon = 0.7$, $C_1 = 86.49940$ et $C_2 = 1360.8$. Ici, $T = 0.64 \times 10^{-3}s$, $\mu = 0.64 \times 10^{-3}Pa.s$, et $\rho_p = \rho_{plomb}$ avec $\alpha = 3.5$, $r_{min} = 0.14$, et $\beta = 0.5$.

4.4 Particule ellipsoïdale

Dans cette section nous allons aborder le cas d'une particule ellipsoïdale de rayons R_1 et R_2 dont le grand axe est selon l'axe de révolution du tube. Les deux coefficients $\hat{\gamma}$ et \hat{U}_{eq} sont présentés dans la Fig. 3.18.b. Par analogie à la section précédente, nous allons identifier paramètres pour lesquels une dynamique de transport associé à un pompage asymétrique est possible. Pour cela, nous effectuons un diagramme de bifurcation selon u_m des solutions obtenues pour $\beta = 0.5$ et $\min(\gamma) = 100$. Ce diagramme présenté dans la Fig. 4.13(a) montrent l'exigence de 4 solutions périodiques sur l'intervalle $[0; 9]$. En particulier, sur l'intervalle $[0; SE_1]$ que les deux solutions (E_1) qui est instable et (E_2) qui est stable existent, et en $u_m = SE_1$ ces deux solutions se bifurquent via une bifurcation point selle. Ainsi, sur l'intervalle $[SE_2; SE_3]$ les deux branches E_3 et E_4 se bifurquent en SE_2 et SE_3 . Puisque dans l'intervalle $[SE_1 = 4.912; SE_2 = 5.08]$ et au delà de $SE_3 = 8.186$ aucune solution existe, on peut alors attendre à obtenir une solution de transport. Par exemple, nous considérons une valeur de $u_m = 4.996$ qui appartient à l'intervalle $[SE_1; SE_2]$ et

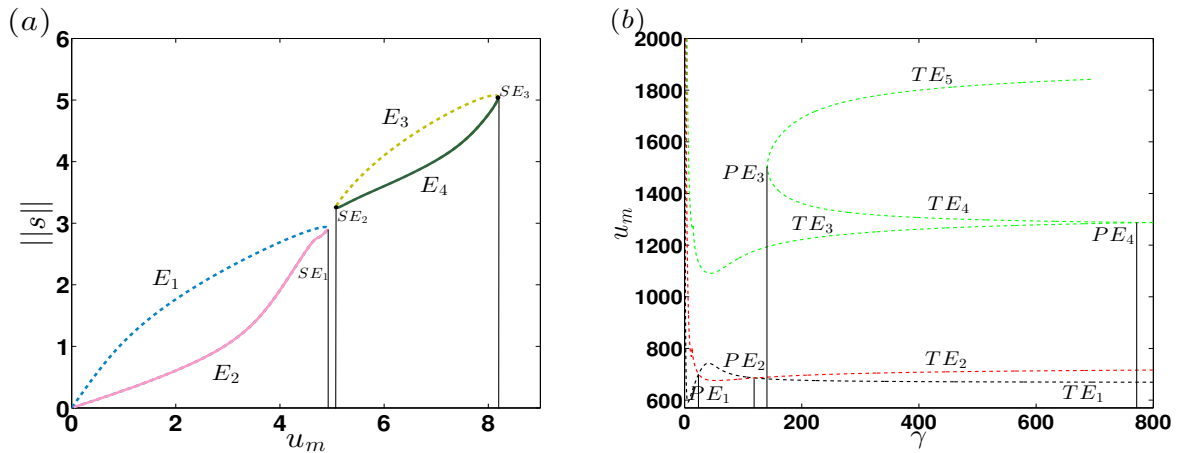


FIGURE 4.13 – A gauche : Diagramme de bifurcation selon le paramètre u_m des solutions périodiques obtenues pour $\beta = 0.5$ et $\min(\gamma) = 100$, et que nous notons (E_1) , (E_2) , (E_3) , et (E_4) pour $\alpha = 3.5$ et une ellipsoïde de paramètres géométriques $\epsilon = 0.3571$, $\psi = 0.1$, et $\kappa = 0.5$. SE_1 , SE_2 , et SE_3 désignent des bifurcations selles. A droite : Continuation des points selles dans le plan (C_1, C_2) . Ici $r_{min} = 0.14$ et $\beta = 0.5$.

nous intégrons l'équation de mouvement. La Fig. 4.14 qui présente l'évolution de la position de la particule montre que le transport a eu lieu. En outre, nous retrouvons les lieux des points selles afin

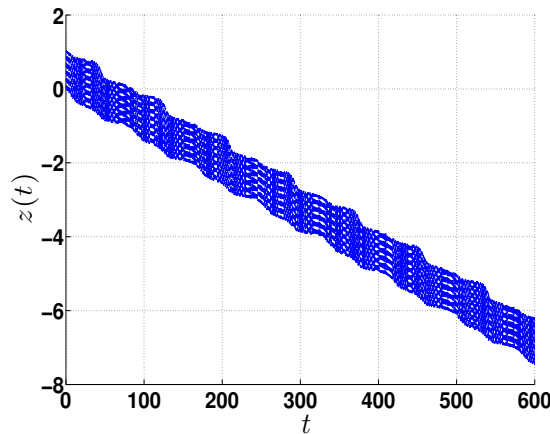


FIGURE 4.14 – Evolution de la trajectoire d'une ellipsoïde de $\kappa = 0.05$ pour $u_m = 4.996$ et $\beta = 0.5$. Ici on a $\alpha = 3.5$, $\epsilon = 0.35$, $\psi = 0.1$.

de définir le domaine d'existence de la solution de transport dans le plan (C_1, C_2) . Un diagramme similaires à ceux d'avant est obtenu et nous en concluons que le transport est possible dans la région située au dessus de la courbe rouge et en dessus de la courbe noire et limitée par $PE_1 < C_1 < PE_2$.

Une deuxième région d'existence est définie par le zone situé au dessus de la courbe TE_3 et pour $C_1 < PE_3$. Ce diagramme montre l'apparition d'autres points selles qui sont notés par TE_4 et TE_5 et donc un troisième zone d'existence est défini par la région fine située entre la branche TE_3 et la branche TE_4 pour les valeurs de C_1 entre PE_3 et PE_4 .

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons établi la possibilité de transport d'une particule par effet cliquet, *i.e.* le transport de particules dans une direction privilégiée et induit par un pompage alternatif de moyenne nulle. Le dispositif de transport est constitué d'un canal possédant une géométrie périodique qui est plongé dans un fluide visqueux. La particule est en suspension dans ce fluide et est entraînée par ce fluide. L'écoulement est induit par un pompage alternatif (moyenne nulle), il est considéré quasi-statique et est décrit par la loi de Stokes. Historiquement, l'effet cliquet a été introduit dans des études précédentes (par exemple, [35, 53]) pour interpréter l'existence d'un transport effectif dans une certaine plage de paramètres et en particulier la possibilité d'inverser la direction du transport en changeant seulement la fréquence du pompage. Cependant, les références citées ci-dessus négligent l'inertie des particules, *i.e.* la particule est advectée, et le transport ne peut exister que sous l'action des fluctuations thermiques. Pourtant une récente étude expérimentale sur le transport de particules dans des pores révèle que les fluctuations thermiques sont négligeables et que c'est la force de Stokes qui domine [83].

Par conséquent, nous avons étudié la possibilité d'obtenir un transport de particules de tailles plus grandes où l'inertie n'est plus négligeable. Parmi les nombreux mécanismes non-linéaires potentiellement à l'origine de ce transport, nous avons choisi un modèle minimal où nous négligeons les termes non-linéaires de l'écoulement du fluide et où donc seul l'aspect ratchet (variation spatiale et périodique du champ de vitesse) est considéré. Cette approche a été motivée, d'une part, par le faible nombre de Reynolds de l'écoulement mais aussi de mieux comprendre la possibilité d'un effet cliquet dans un fluide de Stokes.

Nous avons utilisé le logiciel AUTO [89] pour analyser numériquement les bifurcations et la conti-

nuation des solutions périodiques qui sont obtenues à partir des cas remarquables (faible amplitude, pore symétrique, pompage symétrique) en variant différents paramètres. Parmi ces paramètres, certains sont propres à la géométrie du système comme la courbure du pore et sa taille, la forme de la particule et sa taille et donc les variations des deux coefficients γ et U_{eq} , et l'asymétrie du pore. D'autres sont liés aux propriétés de l'écoulement comme la vitesse moyenne de l'écoulement et l'asymétrie du pompage.

Tout d'abord, nous avons montré l'existence du transport pour une particule ponctuelle où la taille de la particule est petite par rapport à celle du pore et pour différentes grandeurs de l'inertie, γ autour de 10 et γ autour de 100. Nous avons noté que les mécanismes de transport produits pour ces deux valeurs sont différents. En particulier, nous avons montré que pour $\gamma = 10$ un transport est possible pour un champ de vitesse symétrique, *i.e.* un pore symétrique. Nous interprétons l'existence de ce transport qui peut être périodique comme une conséquence d'une brisure de symétrie spontanée (due à l'inertie), de crises qu'on appelle en anglais "*merging crisis*", et de phénomènes de synchronisation. De plus, à cause de la symétrie spatiale, les transports dans les directions opposées coexistent. Dans ce cas, une brisure "forcée" de la symétrie spatiale implique un phénomène d'inversion de la direction de transport en variant un paramètre. C'est un phénomène générique des problèmes à effet ratchet et légèrement asymétriques où un transport synchronisé existe. Tandis que pour γ autour de 100, le doublement de période n'a pas lieu ainsi que les dynamiques chaotiques et un transport dans le cas symétrique n'est pas possible. Par contre, lorsque le problème n'a plus la symétrie de parité, une bifurcation intermittente de type-I se produit à un point de retournement pour une valeur critique de l'asymétrie. Au-delà de la bifurcation un transport intermittent apparaît et dont la vitesse augmente avec l'asymétrie.

Nous avons montré dans le chapitre 2 que l'ordre de grandeur de γ implique que la taille de la particule n'est pas négligeable par rapport au diamètre du tube. En outre, dans ce cas nous avons vérifié que les variations du coefficient de traînée ne sont pas négligeables. Ces dernières peuvent conduire à l'effet cliquet connu sous "*friction ratchet*" [29, 106]. Dans la suite de ce présent travail nous avons examiné le transport en combinant les deux effets "*ratchet flow*" et "*friction ratchet*".

Ensuite, afin d'effectuer cette étude nous avons calculé les variations des deux coefficients $\gamma(z)$

et $U_{eq}(z)$ pour différents paramètres géométriques du tube et de la particule. En particulier, nous avons souligné l'influence de la courbure du pore, du rapport du rayon de la particule par rapport au rayon du tube d'une part, et par rapport à sa longueur d'autres part, ainsi que de la forme de la particule. Ce calcul est réalisé en utilisant la formulation des équations intégrales de frontières qui ont été résolues numériquement avec la méthode de collocation.

Finalement, en utilisant ces coefficients, nous avons identifié les solutions périodiques et nous avons suivi leurs bifurcations selon différents paramètres géométriques et physiques du problème, comme la force, l'asymétrie du pompage et son intensité. Nous avons montré, que pour des valeurs réalistes de γ , un seul type de transport a lieu et il correspond au transport intermittent qui est obtenu au delà d'une bifurcation tangente et intermittente. Nous avons ainsi montré la possibilité de réaliser un transport avec une géométrie spatiale symétrique combiné à un pompage asymétrique. Ce type de cliquet a été évoquée dans un autre contexte dans une étude expérimentale [21].

Ce travail de thèse nous a permis de montrer l'existence d'un transport dont nous avons identifié les différents mécanismes dans un cadre déterministe *i.e.* où les effets des fluctuations thermiques ne sont pas pris en compte. Une première perspective serait de tenir compte des termes non-linéaires dans l'équation de Navier-Stokes. En effet, le transport synchronisé n'est possible que si le nombre de Reynolds est au moins de l'ordre de l'unité. Une méthode de continuation peut être de nouveau utilisée mais nécessite un coup CPU plus important. En effet, on ne peut plus ramener le problème à un système d'équations différentielles ordinaires. Une autre généralisation serait une modélisation tridimensionnelle du transport. En revanche, l'interaction du contact de la particule avec la paroi peut rendre le problème particulièrement complexe.

Une seconde perspective serait d'introduire un bruit et étudier son influence sur la dynamique de la particule. En effet la combinaison entre ces deux phénomènes est un sujet qui n'est pas actuellement abordé.

Nous notons que le modèle numérique que nous avons développé peut être applicable à d'autres géométries de tubes et de particules ce qui permet d'envisager son application à d'autres problèmes physiques. De plus, nous pourrions utiliser ce modèle pour simuler le transport dans une structure

microfluidique ou dans un milieu poreux avec une structure quasi-périodique. Cela ouvrirait, en particulier, des perspectives concernant les simulations de transport dans des structures de type biologique.

Une dernière perspective dans le cadre de la qualité de l'eau (thématique principale du laboratoire EMMAH) consisterait à utiliser le modèle pour analyser la faisabilité d'un processus de filtration et de dépollution des eaux usées par l'exploitation de l'effet cliquet dans une structure de milieux poreux.

Annexe A

Pompage de petite amplitude

Nous supposons que l'amplitude de la vitesse du fluide est petite relativement à la longueur du pore et nous démontrons que la dérive converge vers une solution stable. Des résultats similaires sont obtenus pour une force pondéromotrice. Contrairement à ces études, la force de traînée exercée sur la particule n'est pas négligeable.

L'hypothèse que l'amplitude est petite implique que la moyenne de la vitesse est aussi petite, *i.e.* $u_m \ll 1$, et ceci constitue le paramètre négligeable dans le développement qui suit. Nous décomposons la trajectoire de la particule sous forme d'une somme d'une fonction 1-périodique que nous notons z_p et une dérive z_d :

$$z(t) = z_p(t) + z_d(t) \quad (\text{A.1})$$

Plus précisément, nous imposons les conditions suivantes :

$$z_p = \mathcal{O}(u_m) \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{z}_d = \mathcal{O}(u_m^2) \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{z}_d = \mathcal{O}(u_m^2) \quad (\text{A.4})$$

Poursuite on peut supposer que $z_d(t)$ est constante pendant une durée et ceci nous permet d'écrire l'approximation suivante :

$$z_d(t) = z_d(t_0) + \mathcal{O}(u_m^2) \simeq z_d^0 \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} u_0(z(t)) &= u_0(z_p(t) + z_d(t)) \\ &= u_{0d} + u'_{0d} z_p + \mathcal{O}(u_m^3) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

avec $u_{0d} = u_0[z_d(t_0)]$ et $u'_{0d} = u'_{0d}(z_d) = \frac{du_0}{dz}[z_d(t_0)]$. En remplaçant $z(t)$ par sa décomposition (Eq. (A.1)) dans l'Eq. (2.5), elle devient :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_d + \ddot{z}_p + \gamma\dot{z}_d + \gamma\dot{z}_p \\ = \gamma(u_{0d} + u'_{0d} z_p) \sin 2\pi t + \mathcal{O}(u_m^3). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Nous étudions cette équation en se concentrant sur deux échelles différentes : une courte échelle de temps où z_d est constante et une longue échelle en considérant valeur moyenne sur une période et donnée par $\langle . \rangle$. Par suite, nous obtenons les deux équations :

$$\ddot{z}_p + \gamma\dot{z}_p = \gamma u_{0d} \sin 2\pi t + \mathcal{O}(u_m^2) \quad (\text{A.8})$$

$$\langle \ddot{z}_d \rangle + \gamma \langle \dot{z}_d \rangle = \gamma u'_{0d} \langle z_p(t) \sin 2\pi t \rangle + \mathcal{O}(u_m^3) \quad (\text{A.9})$$

La courte échelle donnée par l'Eq. (A.8) peut être résolue au premier ordre :

$$z_p(t) = -\frac{u_d}{2\pi} \left(1 + \left(\frac{2\pi}{\gamma} \right)^2 \right)^{-1/2} \sin(2\pi t + \varphi) + \mathcal{O}(u_m^2) \quad (\text{A.10})$$

avec la phase $\phi \in]0, \pi/2]$ tel que $\tan \phi = \gamma/(2\pi)$. En remplaçant cette solution dans l'Eq. (A.9), l'équation gouvernant la dérive s'écrit au premier ordre :

$$\ddot{z}_d + \gamma\dot{z}_d = -\gamma\alpha u_0(z_d)u'_0(z_d), \quad (\text{A.11})$$

avec $\alpha = \frac{1}{4\pi}(1 + (2\pi/\gamma)^2)^{-1/2} \cos \phi > 0$ et z_d est identifiée par sa valeur moyenne. La vitesse de la dérive pour $u'_0 = 0$, *i.e.*, aux extremas du champs de vitesse. Les analyses de la stabilité montrent qu'en un minimum local de u_0 le point d'équilibre est stable tandis qu'il est un point selle et en particulier instable en un maximum local. En conclusion, pour une amplitude assez petite, on s'attend à que les particules soient attirées par le minima du champ de la vitesse.

Annexe B

Calcul de la force de traînée

B.1 Adimensionnement de l'équation de l'écoulement

Soit l'équation de Navier Stokes qui décrit l'écoulement :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{f} \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{B.2})$$

On néglige la force extérieure \vec{f} , on divise les variables de l'équation par les valeurs caractéristiques correspondantes et on pose :

$$\hat{x} = x/L; \quad \hat{t} = t/T; \quad \hat{u} = u/v_c; \quad \hat{p} = p/[p]$$

avec v_c est la vitesse du centre de la particule dans un écoulement de Poiseuille dans un cylindre de rayon r_{min} , *i.e.* la vitesse maximale de ce dernier, $v_c = -\frac{[p]r_{min}^2}{4\mu L}$. En remplaçant les variables dimensionnelles dans l'équation (B.1) par les variables adimensionnelles, et la multipliant par $\frac{L^2}{\mu v_c}$, elle devient :

$$\frac{\rho v_c}{T} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{\rho v_c}{L} (\hat{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \hat{u} = -\frac{[p]}{L} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu v_c}{L^2} \hat{\Delta} \hat{u} \quad (\text{B.3})$$

Afin de faire apparaître les deux nombres adimensionnelles, Re et St , nous multiplions l'équation précédente par $\frac{L^2}{\mu v_c}$ et elle devient :

$$\begin{aligned} \frac{\rho L^2}{\mu T} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{\rho v_c L}{\mu} (\hat{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \hat{u} &= -\frac{[p]L}{\mu v_c} \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\Delta} \hat{u} \\ \frac{Re}{St} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re (\hat{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \hat{u} &= -\left(\frac{2L}{r_{min}}\right)^2 \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\Delta} \hat{u} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

avec $Re = (\rho[p]r_{min}^2)/(4\mu^2)$ et $Re/St = (\rho L^2)/(\mu T)$.

B.2 Existence et Unicité de la solution

On cherche (\vec{u}, \vec{p}) solution de l'équation (3.14). En d'autres termes, on cherche (\vec{u}, \vec{p}) qui appartient au sous espace $V(\Omega)$:

$$V(\Omega) = \left[\vec{v} \in H^1(\Omega), \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \vec{v}_{SL} = \vec{0}, \vec{v}(r, z + L) = \vec{v}(r, z) \right]$$

On montre que cet espace est un espace d'Hilbert.

La formulation variationnelle du problème consiste à multiplier l'équation de la quantité de mouvement de par une fonction test qui appartient à $V(\Omega)$ et l'intégrer sur Ω :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Omega \quad (\text{B.5})$$

D'après la formule de Green on a, $\forall i = 1, 2$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \Delta u_i v_i \, d\Omega = -\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i \, d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega} v_i \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{n} \, dS_y \quad (\text{B.6})$$

et

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS_y \quad (\text{B.7})$$

avec $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$.

Ceci nous permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} p \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS_y \quad (\text{B.8})$$

De nouveau, en s'accordant aux conditions aux limites, on montre que :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i \, d\Omega = [p] \int_{S^e} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS_y \quad (\text{B.9})$$

Soient :

– $a(u,v)$ la forme bilinéaire définie par :

$$\begin{aligned} a(u, v) : V \times V &\longmapsto \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

– $l(v)$ la forme linéaire définie par :

$$\begin{aligned} l(v) : V &\longmapsto \mathbb{R} \\ v &\longmapsto [p] \int_{S^e} v \, n \, dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

On montre que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est bicontinue sur $V \times V$ et coercive, et également que la forme linéaire $l(v)$ est continue sur V . En vertu de ceci et du théorème de Lax-Millgramm, on peut dire que ce problème admet une solution et que cette solution est unique.

B.3 Passage en coordonnées cylindriques

$$A_r(z_c, (z, \theta)) = \frac{\cos \theta}{d} - \frac{(r(z_c) - r(z) \cos \theta)(r(z) - r(z_c) \cos \theta)}{d^3} \quad (\text{B.12})$$

$$A_z(z_c, (z, \theta)) = -\frac{(r(z) - r(z_c) \cos \theta)(z_c - z)}{d^3} \quad (\text{B.13})$$

$$B_r(z_c, (z, \theta)) = \frac{(r(z_c) - r(z) \cos \theta)(z_c - z)}{d^3} \quad (\text{B.14})$$

$$B_z(z_c, (z, \theta)) = \frac{1}{d} + \frac{(z_c - z)^2}{d^3} \quad (\text{B.15})$$

$$C_r(z_c, (z, \theta)) = \frac{(r(z_c) - r(z) \cos \theta)(z_c - z)[n_z(z_c - z) - n_r r(z) + n_r r(z_c) \cos \theta]}{d^5} \quad (\text{B.16})$$

$$C_z(z_c, (z, \theta)) = \frac{(z_c - z)^2[n_z(z_c - z) - n_r r(z) + n_r r(z_c) \cos \theta]}{d^5} \quad (\text{B.17})$$

$$D_r(z_c, (z, \theta)) = \frac{[n_z(z_c - z) - n_r(r(z) - r(z_c) \cos \theta)][\cos \theta(r(z_c)^2 + r(z)^2) - \frac{r(z_c)r(z)}{2}(3 + \cos 2\theta)]}{d^5} \quad (\text{B.18})$$

$$D_z(z_c, (z, \theta)) = \frac{(r(z) - r(z_c) \cos \theta)(z_c - z)[n_r(r(z) - r(z_c) \cos \theta) - n_z(z_c - z)]}{d^5} \quad (\text{B.19})$$

B.4 Formulation intégrale du problème incident

Le problème incident vérifie l'équation de Stokes avec les conditions aux limites données dans (3.14) dont la solution est (u^0, p^0) les champs de vitesse et de pression incidents.

La formulation intégrale de celui-ci s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} u_r^0 \\ u_z^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r \\ C_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^0 \\ t_z^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_z \end{pmatrix} dS_y \\ \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} u_r^0 \\ u_z^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_r \\ D_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^0 \\ t_z^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_z \end{pmatrix} dS_y \end{array} \right.$$

où les deux équations du système désignent la projection de l'équation régularisée (3.43) sur r et sur z respectivement. On note que les exposants $(^0)$ seront omis dans la suite. La première équation du système s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r \\ C_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r \\ t_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_z \end{pmatrix} dS_y \\ &= \int_{S^e} \begin{pmatrix} u_r^e \\ u_z^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r^e \\ C_z^e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^e \\ t_z^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^e \\ A_z^e \end{pmatrix} dS_y + \int_{S^\ell} \begin{pmatrix} u_r^\ell \\ u_z^\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r^\ell \\ C_z^\ell \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^\ell \\ t_z^\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^\ell \\ A_z^\ell \end{pmatrix} dS_y \\ &+ \int_{S^s} \begin{pmatrix} u_r^s \\ u_z^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r^s \\ C_z^s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^s \\ t_z^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^s \\ A_z^s \end{pmatrix} dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Or d'après les conditions aux limites de périodicité, non glissement, et de symétrie et d'après les formules analytiques du vecteur contraintes sur chaîne des trois surfaces du tube, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_z^s(r, L) &= u_z^e(r, 0) & \forall 0 \leq r \leq r(0) \\ u_r^s(r, L) &= u_r^e(r, 0) = 0 & \forall 0 \leq r \leq r(0) \\ t_r^s(r, L) &= t_r^e(r, 0) & \forall 0 \leq r \leq r(0) \\ t_z^s(r, L) &= t_z^e(r, 0) + [p] & \forall 0 \leq r \leq r(0) \\ u_r^\ell(r(z), z) &= u_z^\ell(r(z), z) = 0 & \forall 0 \leq z \leq L \end{aligned}$$

Parsuite, l'équation (B.20) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{S^e} \begin{pmatrix} 0 \\ u_z^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r^e - C_r^s \\ C_z^e - C_z^s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^e - t_r^s \\ t_z^e - t_z^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^e \\ A_z^e \end{pmatrix} dS_y + \int_{S^\ell} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r^\ell \\ C_z^\ell \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_r^\ell \\ t_z^\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^\ell \\ A_z^\ell \end{pmatrix} dS_y \\ &= [p] \int_{S^s} A_z^s dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

De plus, d'après la formule analytique du vecteur contrainte, on a t_z^e est égale à la pression. En utilisant les propriétés des fonction impaires, on montre que la pression est constante sur la surface d'entrée et puisque cette dernière est définie à une constante près, on peut l'imposer égale 0. Ceci nous permet d'écrire la formulation finale de l'équation intégrale correspondante au problème sans la particule comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{S^e} u_z^e \begin{pmatrix} D_r^e - D_r^s \\ D_z^e - D_z^s \end{pmatrix} + t_r^e \begin{pmatrix} A_r^e - A_r^s \\ A_z^e - A_z^s \end{pmatrix} dS_y - \int_{S^\ell} t_r^\ell \begin{pmatrix} A_r^\ell \\ A_z^\ell \end{pmatrix} + t_z^\ell \begin{pmatrix} B_r^\ell \\ B_z^\ell \end{pmatrix} dS_y \\ &= [p] \int_{S^s} \begin{pmatrix} B_r^s \\ B_z^s \end{pmatrix} dS_y \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

B.5 Intégrales singulières

Dans cette section on va montrer que les quatre fonctions A_r , A_z , B_r , et B_z s'écrivent sous la forme de l'équation (3.59) pour tout (z_c, θ_c) et (z, θ) . Soit la fonction A_r :

$$A_r = \underbrace{\frac{\cos \theta}{d}}_{A_{r1}} - \underbrace{\frac{(r(z_c) - r(z) \cos \theta)(r(z) - r(z_c) \cos \theta)}{d^3}}_{A_{r2}} \quad (\text{B.23})$$

Concernant A_{r1} , on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_{r1} &= \frac{\cos \theta}{d} \\ &= \frac{\cos \theta}{\rho} + \Theta(1) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Également, on montre que la fonction A_{r2} s'écrit aussi de cette forme. En effet, et de nouveau en utilisant le développement de Taylor on a :

$$\begin{aligned} (r(z_c) - r(z)\cos\theta)(r(z) - r(z_c)\cos\theta) &= H(z_c)^2(z - z_c)^2 + \Theta(\rho^3) \\ &= \frac{H(z_c)^2 \cos^2 \phi}{(1 + H(z_c)^2)} \rho^2 + \Theta(\rho^3) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Parsuite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_{r2} &= \frac{(r(z_c) - r(z)\cos\theta)(r(z) - r(z_c)\cos\theta)}{d^3} \\ &= \left(\frac{H(z_c)^2 \cos^2 \phi}{(1 + H(z_c)^2)} \right) \frac{1}{\rho} + \Theta(1) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

et don A_r s'écrt :

$$A_r = \left(\cos \theta - \frac{H(z_c)^2 \cos^2 \phi}{(1 + H(z_c)^2)} \right) \frac{1}{\rho} + \Theta(1) \quad (\text{B.27})$$

Concernant la fonction A_z on a :

$$\begin{aligned} (r(z) - r(z_c) \cos \theta) &= g(z_c) + (z - z_c)H(z_c) - g(z_c) \cos \theta \\ &= g(z_c)(1 - \cos \theta) + (z - z_c)H(z_c) + \Theta(\rho^2) \\ &= g(z_c)\left(\frac{\theta^2}{2}\right) + (z - z_c)H(z_c) + \Theta(\rho^2) \\ &= \frac{H(z_c)}{(1 + H^2(z_c))}(\rho \cos \phi) + \Theta(\rho^2, \theta^2) \end{aligned}$$

ce qui donne que :

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{(r(z) - r(z_c) \cos \theta)(z - z_c)}{d^3} \\ &= \frac{H(z_c)}{(1 + H^2(z_c))} \cos^2 \phi \frac{1}{\rho} + \Theta(\rho^3, \rho\theta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

En ce qui concerne B_r , on montre que :

$$\begin{aligned} r(z_c) - r(z) \cos \theta &= r(z_c) - [r(z_c) + (z - z_c)H(z_c)] \cos \theta + \Theta(\rho^2) \\ &= r(z_c) - [r(z_c) + (z - z_c)H(z_c)]\left[1 - \frac{\theta^2}{2}\right] + \Theta(\rho^2, \theta^4) \\ &= r(z_c)\frac{\theta^2}{2} - H(z_c)(z - z_c) + H(z_c)(z - z_c)\frac{\theta^2}{2} + \Theta(\rho^2, \theta^4) \\ &= r(z_c)\frac{\theta^2}{2} - H(z_c)(z - z_c) + \Theta(\rho^2, \theta^4, \rho\theta^2) \end{aligned}$$

Poursuite, on a :

$$\begin{aligned}
 (r(z_c) - r(z) \cos \theta)(z_c - z) &= [r(z_c) \frac{\theta^2}{2} - H(z_c)(z - z_c) + \Theta(\rho^2, \theta^4, \rho\theta^2)][z_c - z] \\
 &= (z - z_c)^2 H(z_c) + \Theta(\rho^3, \theta^4, \rho\theta^2, \rho^2\theta^2) \\
 &= H(z_c) \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{(1 + H^2(z_c))} + \Theta(\rho^3, \theta^4, \rho\theta^2, \rho^2\theta^2)
 \end{aligned}$$

Et conséquemment, la fonction B_r s'écrit :

$$\begin{aligned}
 B_r &= \frac{(r(z_c) - r(z) \cos \theta)(z_c - z)}{d^3} \\
 &= H(z_c) \frac{\cos^2 \phi}{(1 + H^2(z_c))} \frac{1}{\rho} + \Theta(1)
 \end{aligned}$$

De la même manière et d'après ce qui précède on a :

$$\begin{aligned}
 B_z &= \frac{1}{\rho} + \Theta(1) + \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{1 + H(z_c)^2} \frac{1}{\rho} + \Theta(1) \\
 &= \left(1 + \frac{\cos^2 \phi}{(1 + H(z_c)^2)} \right) \frac{1}{\rho} + \Theta(1)
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Bibliographie

- [1] Gert Blankenstein and Ulrik Darling Larsen. Modular concept of a laboratory on a chip for chemical and biochemical analysis. *Biosensors and Bioelectronics*, 13(3) :427–438, 1998.
- [2] Mehmet Toner and Daniel Irimia. Blood-on-a-chip. *Annual review of biomedical engineering*, 7 :77, 2005.
- [3] Hallvard Ødegaard. Optimised particle separation in the primary step of wastewater treatment. *Water Science and Technology*, 37(10) :43–53, 1998.
- [4] Anthony Seaton and Kenneth Donaldson. Nanoscience, nanotoxicology, and the need to think small. *The Lancet*, 365(9463) :923–924, 2005.
- [5] Karluss Thomas and Philip Sayre. Research strategies for safety evaluation of nanomaterials, part i : evaluating the human health implications of exposure to nanoscale materials. *Toxicological Sciences*, 87(2) :316–321, 2005.
- [6] C Medina, MJ Santos-Martinez, A Radomski, OI Corrigan, and MW Radomski. Nanoparticles : pharmacological and toxicological significance. *British journal of pharmacology*, 150(5) :552–558, 2007.
- [7] Günter Oberdörster, Andrew Maynard, Ken Donaldson, Vincent Castranova, Julie Fitzpatrick, Kevin Ausman, Janet Carter, Barbara Karn, Wolfgang Kreyling, David Lai, et al. Principles for characterizing the potential human health effects from exposure to nanomaterials : elements of a screening strategy. *Particle and Fibre toxicology*, 2(1) :8, 2005.

- [8] Dan Shi, Nael H El-Farra, Mingheng Li, Prashant Mhaskar, and Panagiotis D Christofides. Predictive control of particle size distribution in particulate processes. *Chemical Engineering Science*, 61(1) :268–281, 2006.
- [9] J Calvin Giddings. Field-flow fractionation : analysis of macromolecular, colloidal, and particulate materials. *Science*, 260(5113) :1456–1465, 1993.
- [10] Manfred Dürr, Jörg Kentsch, Torsten Müller, Thomas Schnelle, and Martin Stelzle. Micro-devices for manipulation and accumulation of micro-and nanoparticles by dielectrophoresis. *Electrophoresis*, 24(4) :722–731, 2003.
- [11] Nicole Pamme. Continuous flow separations in microfluidic devices. *Lab on a Chip*, 7(12) : 1644–1659, 2007.
- [12] G Segre. Radial particle displacements in poiseuille flow of suspensions. *Nature*, 189 : 209–210, 1961.
- [13] G Serge and A Silberberg. Behavior of macroscopic rigid spheres in poiseuille flow. *J. Fluid Mech*, 14(1) :115–157, 1962.
- [14] Dino Di Carlo, Daniel Irimia, Ronald G Tompkins, and Mehmet Toner. Continuous inertial focusing, ordering, and separation of particles in microchannels. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(48) :18892–18897, 2007.
- [15] Ali Asgar S Bhagat, Sathyakumar S Kuntaegowdanahalli, and Ian Papautsky. Continuous particle separation in spiral microchannels using dean flows and differential migration. *Lab on a Chip*, 8(11) :1906–1914, 2008.
- [16] Ali Asgar S Bhagat, Sathyakumar S Kuntaegowdanahalli, and Ian Papautsky. Inertial microfluidics for continuous particle filtration and extraction. *Microfluidics and nanofluidics*, 7(2) :217–226, 2009.
- [17] Jean-Philippe Matas, Jeffrey F Morris, and Élisabeth Guazzelli. Inertial migration of rigid spherical particles in poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 515 :171–195, 2004.

- [18] JP Matas, JF Morris, and Elisabeth Guazzelli. Lateral forces on a sphere. *Oil & gas science and technology*, 59(1) :59–70, 2004.
- [19] Howard Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical engineering science*, 16(3) :242–251, 1961.
- [20] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition Volume I*, volume 1. Basic Books, 2013.
- [21] Takahiro Harada and Kenichi Yoshikawa. Fluctuation-response relation in a rocking ratchet. *Physical Review E*, 69(3) :031113, 2004.
- [22] B Lindner, L Schimansky-Geier, P Reimann, P Hänggi, and M Nagaoka. Inertia ratchets : A numerical study versus theory. *Physical Review E*, 59(2) :1417, 1999.
- [23] P Jung, JG Kissner, and P Hänggi. Regular and chaotic transport in asymmetric periodic potentials : Inertia ratchets. *Physical review letters*, 76(18) :3436, 1996.
- [24] Holger Schanz, Marc-Felix Otto, Roland Ketzmerick, and Thomas Dittrich. Classical and quantum hamiltonian ratchets. *Physical review letters*, 87(7) :070601, 2001.
- [25] Roland Bartussek, Peter Hänggi, and Jürgen G Kissner. Periodically rocked thermal ratchets. *EPL (Europhysics Letters)*, 28(7) :459, 1994.
- [26] Ivar Zapata, Roland Bartussek, Fernando Sols, and Peter Hänggi. Voltage rectification by a squid ratchet. *Physical review letters*, 77(11) :2292, 1996.
- [27] ALR Bug and BJ Berne. Shaking-induced transition to a nonequilibrium state. *Physical review letters*, 59(8) :948, 1987.
- [28] R Dean Astumian and Martin Bier. Fluctuation driven ratchets : molecular motors. *Physical review letters*, 72(11) :1766, 1994.
- [29] Peter Reimann. Brownian motors : noisy transport far from equilibrium. *Physics reports*, 361(2) :57–265, 2002.

- [30] Luc P Faucheux and Albert Libchaber. Selection of brownian particles. *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 91(18) :3163–3166, 1995.
- [31] L Gorre-Talini, S Jeanjean, and P Silberzan. Sorting of brownian particles by the pulsed application of an asymmetric potential. *Physical Review E*, 56(2) :2025, 1997.
- [32] L Gorre-Talini, JP Spatz, and P Silberzan. Dielectrophoretic ratchets. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 8(3) :650–656, 1998.
- [33] Juliette Rousselet, Laurence Salome, Armand Ajdari, Jacques Prost, et al. Directional motion of brownian particles induced by a periodic asymmetric potential. *Nature*, 370(6489) :446–448, 1994.
- [34] Emil Lundh and Mats Wallin. Ratchet effect for cold atoms in an optical lattice. *Physical review letters*, 94(11) :110603, 2005.
- [35] Sven Matthias and Frank Müller. Asymmetric pores in a silicon membrane acting as massively parallel brownian ratchets. *Nature*, 424(6944) :53–57, 2003.
- [36] P Reimann, R Bartussek, R Häussler, and P Hänggi. Brownian motors driven by temperature oscillations. *Physics Letters A*, 215(1) :26–31, 1996.
- [37] Marcelo O Magnasco. Forced thermal ratchets. *Physical Review Letters*, 71(10) :1477, 1993.
- [38] Dante R Chialvo and Mark M Millonas. Asymmetric unbiased fluctuations are sufficient for the operation of a correlation ratchet. *Physics Letters A*, 209(1) :26–30, 1995.
- [39] Charles R Doering, Werner Horsthemke, and Jason Riordan. Nonequilibrium fluctuation-induced transport. *Physical review letters*, 72(19) :2984, 1994.
- [40] Roland Bartussek, Peter Reimann, and Peter Hänggi. Precise numerics versus theory for correlation ratchets. *Physical review letters*, 76(7) :1166, 1996.
- [41] Mangal C Mahato and AM Jayannavar. Synchronized first-passages in a double-well system driven by an asymmetric periodic field. *Physics Letters A*, 209(1) :21–25, 1995.

- [42] J Luczka, R Bartussek, and P Hänggi. White-noise-induced transport in periodic structures. *EPL (Europhysics Letters)*, 31(8) :431, 1995.
- [43] S Flach, O Yevtushenko, and Y Zolotaryuk. Directed current due to broken time-space symmetry. *Physical review letters*, 84(11) :2358, 2000.
- [44] S Flach and S Denisov. Symmetries and transport with quasiperiodic driving. *ACTA PHYSICA POLONICA SERIES B*, 35(4) :1437–1446, 2004.
- [45] O Yevtushenko, S Flach, Y Zolotaryuk, and AA Ovchinnikov. Rectification of current in ac-driven nonlinear systems and symmetry properties of the boltzmann equation. *EPL (Europhysics Letters)*, 54(2) :141, 2001.
- [46] Peter Reimann. Supersymmetric ratchets. *Physical review letters*, 86(22) :4992, 2001.
- [47] H Linke, BJ Alemán, LD Melling, MJ Taormina, MJ Francis, CC Dow-Hygelund, V Narayanan, RP Taylor, and A Stout. Self-propelled leidenfrost droplets. *Physical review letters*, 96(15) :154502, 2006.
- [48] Sami Sassine. Transport électronique contrôlé par micro-ondes dans des microstructures asymétriques : Effet ratchet mésoscopique. 2007.
- [49] Usman A Marte, Uchechukwu E Vincent, Abdulahi N Njah, and Biodun S Badmus. Dynamical response of particles in asymmetric ratchet potential. *Symmetry*, 6(4) :896–908, 2014.
- [50] Shantu Saikia and Mangal C Mahato. Deterministic inhomogeneous inertia ratchets. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 389(19) :4052–4060, 2010.
- [51] José A Fornés. Hydrodynamic interactions introduce differences in the behaviour of a ratchet dimer brownian motor. *Journal of Biomaterials and Nanobiotechnology*, 6(02) :81, 2015.

- [52] Paolo Margaretti, Ignacio Pagonabarraga Mora, and José Miguel Rubí Capaceti. Entropic transport in confined media : a challenge for computational studies in biological and soft-matter systems. *Frontiers in Physics*, 2013, vol. 1, num. 21, p. 1-9, 2013.
- [53] Christiane Kettner, Peter Reimann, Peter Hänggi, and Frank Müller. Drift ratchet. *Physical Review E*, 61(1) :312, 2000.
- [54] Ko Higashitani, Nobuhisa Tanise, Atsuro Yoshiba, Akihiko Kondo, and Hiroshi Murata. Dispersion of coagulated particles by contractile flow to orifice. *Journal of chemical engineering of Japan*, 25(5) :502–507, 1992.
- [55] SJ Peng and RA Williams. Direct measurement of floc breakage in flowing suspensions. *Journal of colloid and interface science*, 166(2) :321–332, 1994.
- [56] Ratjika Chanamai, Norbert Herrmann, and D Julian McClements. Ultrasonic spectroscopy study of flocculation and shear-induced floc disruption in oil-in-water emulsions. *Journal of colloid and interface science*, 204(2) :268–276, 1998.
- [57] Volker Schröder, Olaf Behrend, and Helmar Schubert. Effect of dynamic interfacial tension on the emulsification process using microporous, ceramic membranes. *Journal of Colloid and Interface Science*, 202(2) :334–340, 1998.
- [58] S Bhattacharya, J Bławdziewicz, and E Wajnryb. Hydrodynamic interactions of spherical particles in poiseuille flow between two parallel walls. *Physics of Fluids (1994-present)*, 18(5) :053301, 2006.
- [59] Haim Diamant. Hydrodynamic interaction in confined geometries. *Journal of the Physical Society of Japan*, 78(4) :041002, 2009.
- [60] Howard Brenner. Effect of finite boundaries on the stokes resistance of an arbitrary particle part 2. asymmetrical orientations. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(01) :144–158, 1964.
- [61] Bruce Caswell. The effect of finite boundaries on the motion of particles in non-newtonian fluids. *Chemical Engineering Science*, 25(7) :1167–1176, 1970.

- [62] William L Haberman and Rose M Sayre. Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes. Technical report, DTIC Document, 1958.
- [63] V Ilic, D Tullock, N Phan-Thien, and AL Graham. Translation and rotation of spheres settling in square and circular conduits : experiments and numerical predictions. *International journal of multiphase flow*, 18(6) :1061–1075, 1992.
- [64] KH Chen and PY Keh. Slow motion of a droplet between two parallel walls. *Chem. Eng. Sci*, 56 :6863–6871, 2001.
- [65] Howard Brenner. The stokes resistance of an arbitrary particle—iii : shear fields. *Chemical Engineering Science*, 19(9) :631–651, 1964.
- [66] Howard Brenner. The stokes resistance of an arbitrary particle—iv arbitrary fields of flow. *Chemical Engineering Science*, 19(10) :703–727, 1964.
- [67] Anton Oberbeck. Ueber stationäre flüssigkeitsbewegungen mit berücksichtigung der inneren reibung. 1876.
- [68] A Ambari, B Gauthier-Manuel, and E Guyon. Wall effects on a sphere translating at constant velocity. *Journal of Fluid Mechanics*, 149 :235–253, 1984.
- [69] Byrne B.J. Happel, J. Motion of a sphere and fluid in a cylindrical tube. *Industrial & Engineering Chemistry*, 46 :1181–1186, 1954.
- [70] Stefan Blaser. Forces on the surface of small ellipsoidal particles immersed in a linear flow field. *Chemical Engineering Science*, 57(3) :515–526, 2002.
- [71] George B Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, pages 161–179, 1922.
- [72] TC Chen and R Skalak. Stokes flow in a cylindrical tube containing a line of spheroidal particles. *Applied Scientific Research*, 22(1) :403–441, 1970.

- [73] Peter M Bungay and Howard Brenner. The motion of a closely-fitting sphere in a fluid-filled tube. *International Journal of Multiphase Flow*, 1(1) :25–56, 1973.
- [74] PHILIP L Paine and P Scherr. Drag coefficients for the movement of rigid spheres through liquid-filled cylindrical pores. *Biophysical journal*, 15(10) :1087, 1975.
- [75] RGM van Der Sman. Drag force on spheres confined on the center line of rectangular microchannels. *Journal of colloid and interface science*, 351(1) :43–49, 2010.
- [76] Noor Al Quddus, Walied A Moussa, and Subir Bhattacharjee. Motion of a spherical particle in a cylindrical channel using arbitrary lagrangian–eulerian method. *Journal of colloid and interface science*, 317(2) :620–630, 2008.
- [77] H Jin, N Phan-Thien, and RI Tanner. A finite element analysis of the flow past a sphere in a cylindrical tube : Ptt fluid model. *Computational mechanics*, 8(6) :409–422, 1991.
- [78] Dedy Zulhidayat Noor, Ming-Jyh Chern, and Tzyy-Leng Horng. An immersed boundary method to solve fluid–solid interaction problems. *Computational Mechanics*, 44(4) :447–453, 2009.
- [79] Mirela Kohr. Boundary integral method for a stokes flow past a solid sphere and a viscous drop. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(42) :5529–5542, 2001.
- [80] C Pozrikidis. Computation of stokes flow due to the motion or presence of a particle in a tube. *Journal of engineering mathematics*, 53(1) :1–20, 2005.
- [81] Markus Brenk, Hans-Joachim Bungartz, Miriam Mehl, Ioan L Muntean, Tobias Neckel, and Tobias Weinzierl. Numerical simulation of particle transport in a drift ratchet. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(6) :2777–2798, 2008.
- [82] Hai-Yan Wang and Jing-Dong Bao. The roles of ratchet in transport of two coupled particles. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 337(1) :13–26, 2004.

- [83] Klaus Mathwig, Frank Müller, and Ulrich Gösele. Particle transport in asymmetrically modulated pores. *New Journal of Physics*, 13(3) :033038, 2011.
- [84] Philippe Beltrame, Mounia Makhoul, and Maminirina Joelson. Deterministic particle transport in a ratchet flow. *Physical Review E*, 93(1) :012208, 2016.
- [85] Philippe L. Similon and Allan N. Kaufman. Theory of ponderomotive stabilization of a magnetically confined plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1061–1064, Sep 1984. doi : 10.1103/PhysRevLett.53.1061. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.1061>.
- [86] Brian W. J. McNeil and Neil R. Thompson. X-ray free-electron lasers. *Nat Photon*, 4(12) : 814–821, 12 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2010.239>.
- [87] E.J. Doedel, W. Govaerts, and Yu.A. Kuznetsov. Computation of periodic solution bifurcations in odes using bordered systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(2) :401–435, 2003.
- [88] J. C. Alexander and H. G. Doedel, E. Jand Othmer. On the resonance structure in a forced excitable system. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(5) :1373–1418, 1990.
- [89] Eusebius J Doedel, Thomas F Fairgrieve, Björn Sandstede, Alan R Champneys, Yuri A Kuznetsov, and Xianjun Wang. Auto-07p : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. 2007.
- [90] David Speer, Ralf Eichhorn, and Peter Reimann. Transient chaos induces anomalous transport properties of an underdamped brownian particle. *Phys. Rev. E*, 76 :051110, Nov 2007. doi : 10.1103/PhysRevE.76.051110. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.76.051110>.
- [91] Uwe Thiele, Andrew J. Archer, Mark J. Robbins, Hector Gomez, and Edgar Knobloch. Localized states in the conserved swift-hohenberg equation with cubic nonlinear-

- rity. *Phys. Rev. E*, 87 :042915, Apr 2013. doi : 10.1103/PhysRevE.87.042915. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.87.042915>.
- [92] James Testa, Jose Perez, and Carson Jeffries. Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator. *Physical Review Letters*, 48(11) :714, 1982.
- [93] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A Yorke. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Physical review letters*, 57(11) :1284, 1986.
- [94] José L Mateos and Fernando R Alatríste. Phase synchronization in tilted inertial ratchets as chaotic rotators. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(4) :043125, 2008.
- [95] David Speer, Ralf Eichhorn, and Peter Reimann. Transient chaos induces anomalous transport properties of an underdamped brownian particle. *Physical Review E*, 76(5) :051110, 2007.
- [96] Uwe Thiele and Edgar Knobloch. On the depinning of a driven drop on a heterogeneous substrate. *New Journal of Physics*, 8(12) :313, 2006.
- [97] Philippe Beltrame, Edgar Knobloch, Peter Hänggi, and Uwe Thiele. Rayleigh and depinning instabilities of forced liquid ridges on heterogeneous substrates. *Physical Review E*, 83(1) : 016305, 2011.
- [98] Yves Pomeau and Paul Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74(2) :189–197, 1980.
- [99] José A. Cuesta, Niurka R. Quintero, and Renato Alvarez-Nodarse. Time-shift invariance determines the functional shape of the current in dissipative rocking ratchets. *Phys. Rev. X*, 3 :041014, Nov 2013. doi : 10.1103/PhysRevX.3.041014. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.3.041014>.
- [100] Constantine Pozrikidis. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press, 1992.

-
- [101] Marc Bonnet. Boundary integral equations methods in solids and fluids. 1999.
- [102] Philip J Davis and Philip Rabinowitz. *Methods of numerical integration*. Courier Corporation, 2007.
- [103] Arthur H Stroud and Don Secrest. *Gaussian quadrature formulas*, volume 39. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [104] MASSIMO Guiggiani, GUNA Krishnasamy, TJ Rudolphi, and FJ Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of applied mechanics*, 59(3) :604–614, 1992.
- [105] Rolf H. Luchsinger. Transport in nonequilibrium systems with position-dependent mobility. *Phys. Rev. E*, 62 :272–275, Jul 2000. doi : 10.1103/PhysRevE.62.272. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.272>.
- [106] Rolf H Luchsinger. Transport in nonequilibrium systems with position-dependent mobility. *Physical Review E*, 62(1) :272, 2000.