



HAL
open science

Transformée de Radon discrète généralisée multidirectionnelle, formalisme théorique et applications en reconnaissance de formes

Inès Elouedi

► **To cite this version:**

Inès Elouedi. Transformée de Radon discrète généralisée multidirectionnelle, formalisme théorique et applications en reconnaissance de formes. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1187 . tel-01402021

HAL Id: tel-01402021

<https://theses.hal.science/tel-01402021v1>

Submitted on 24 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Faculté des
sciences de Tunis



Ecole Doctorale Mathématiques et Sciences
et Technologies de l'Information et de la
Communication (MSTIC)

Transformée de Radon généralisée discrète multi directionnelle, Formalisme théorique et Applications en Reconnaissance de formes

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 09/12/2015 en vue de l'obtention du

**Diplôme de Docteur en Signal, Images,
Automatique**

par

Ines ELOUEDI

Préparée sous convention de cotutelle UTM-FST (Tunisie) – UPEC-Paris (France)

Composition du jury:

MC. Imed Riadh FARAH
Pr. Dorra SELLAMI
Pr. Anissa MOKRAOUI
MC. Julien MAROT
MC. Régis FOURNIER
MA. Atef Hamouda
Pr. Amine NAIT-ALI
Pr. Khaled BSAÏES

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Directeur
Directeur

ISAMM, Tunisie
ENIS, Tunisie
UNIV-PARIS13, France
UNIV-AMU, France
UPEC, France
FST, Tunisie
UPEC, France
FST, Tunisie

Table des matières

Introduction générale	1
1 Les transformées géométriques	6
1.1 Introduction	6
1.2 La transformée de Fourier	6
1.3 La transformée de Radon	8
1.3.1 Formalisme Mathématique	9
1.3.2 Propriétés	12
1.3.3 Applications de la transformée de Radon	15
1.3.4 La transformée de Radon Généralisée	16
1.4 La transformée en Ondelettes	16
1.4.1 La transformée en Ondelettes multiRésolution	18
1.4.1.1 Généralisation en 2D : La transformée d'ondelettes 2D orthogonales multirésolution	19
1.5 Transformées d'ondelettes orientées	20
1.5.1 La transformée de Ridgelettes	21
1.5.2 La transformée en Curvelets	22
1.5.3 La transformée en Contourlets	24
1.5.4 La transformée en Bandelettes	25
1.5.5 La transformée en Wedgelets	26
1.6 Synthèse et Comparaison des transformées étudiées	27

1.7	Conclusion	29
2	La Transformée de Radon	30
2.1	Introduction	30
2.2	La transformée de Radon (TR)	30
2.2.1	Inversion analytique de la transformée de Radon dans le domaine continu	31
2.2.1.1	Inversion directe	31
2.2.1.2	La rétroprojection filtrée	31
2.3	Les méthodes discrètes de reconstruction de la TR classique exactement inversible	33
2.3.1	La transformée de Radon discrète (DRT)	33
2.3.2	La transformée de Radon Finie (TRF)	37
2.3.3	La transformée discrète périodique de Radon (TDPR)	40
2.3.4	La transformée de Radon Périodique Discrète Orthogonale (TRPDO)	42
2.3.5	La transformée de Radon Finie Générale (TRFG)	44
2.3.6	La transformée Mojette (TM)	45
2.4	La transformée de Radon Généralisée (TRG)	48
2.4.1	Formalisme continu de la TRG de Deans	48
2.4.2	Formalismes continu et discret de la TRG de Tofts	49
2.4.3	Formalismes continu et discret de la TRG pour la reconnaissance des sphères dans une image à D-dimensions de Cris	51
2.4.4	Approche proposée : La transformée de Radon Discrète Rectangulaire (TRDR)	53
2.4.5	La transformée de Radon circulaire et Arc-circulaire	57
2.4.6	La transformée de Radon en V-line (TRV)	58
2.4.7	La transformée de Radon sur les courbes de Cormack	59
2.5	Récapitulatif et objectifs de notre recherche	60

2.6	Conclusion	61
3	Approche proposée : La Transformée de Radon Généralisée Discrète Multi-Directionnelle	63
3.1	Introduction	63
3.2	Motivation	64
3.3	Formalisme de La transformée de Radon Généralisée discrète multi-directionnelle	66
3.4	Inversion de la transformée de Radon Généralisée Discrète Multi-Directionnelle	72
3.5	La transformée de Radon Généralisée Discrète Multi-Directionnelle rapide	75
3.6	Résultats expérimentaux	76
3.6.1	Inversion	76
3.6.2	Reconnaissance de formes	78
3.6.3	Application de la GMDRT sur des images satellitaires à haute résolution	80
3.6.3.1	Extraction de contours	80
3.6.3.2	Application de la GMDRT	81
3.6.3.3	Extraction des maximums locaux	81
3.6.3.4	Comparaison	83
3.7	Discussion	86
3.8	Conclusion	89
4	Approche proposée : La Transformée de Radon Polynomiale discrète exactement inversible	90
4.1	Formalisme de la Transformée de Radon Polynomiale discrète exactement inversible	91
4.1.1	La Transformée de Radon Finie (TRF)	91

4.1.2	Le formalisme de La transformée de Radon discrète Polynomiale (PDRT)	92
4.2	Inversion de la Transformée de Radon Polynomiale discrète exactement inversible	97
4.3	Reconnaissance de formes	98
4.4	Expérimentation et Evaluation	100
4.4.1	Inversion	100
4.4.2	Reconnaissance des formes (Détection de la position et de l'orientation des polynômes) :	100
4.5	Application de la PDRT à la reconnaissance des empreintes digitales . .	104
4.5.1	Prétraitement	106
4.5.1.1	Binarisation	106
4.5.1.2	Squelettisation	106
4.5.2	Extraction des caractéristiques globales	107
4.5.3	Identification	110
4.5.4	Résultats expérimentaux	111
4.5.5	Propriétés	113
4.5.5.1	Etude de la robustesse de notre approche au bruit . . .	114
4.5.5.2	Invariance de la signature à la translation et à la rotation	115
4.6	Discussion	116
4.7	Conclusion	117
	Conclusion et Perspectives	118
	Bibliographie	120

Liste des figures

1.1	La décomposition fréquentielle d'une note musicale	8
1.2	Représentation polaire d'une droite	10
1.3	Dualités point/sinusoïde, Image/sinogramme [Kin05]	10
1.4	La transformée de Radon d'une image.	11
1.5	Dualité point/droite, image/linéogramme [Kin05].	12
1.6	Représentation graphique du théorème de la coupe centrale [Kin05] . .	14
1.7	(A) Ondelette de Haar, (B) Ondelette dérivée première de Gaussienne, (C) Le chapeau mexicain, (D) Ondelette de Meyer	17
1.8	Décomposition en ondelettes orthogonales de trois niveaux de Lenna . .	19
1.9	Comparaison entre transformée en Ondelettes séparées et une transfor- mée en Ondelettes Oreintées	20
1.10	(a) Projection Radon. (b) Traitement des différentes projections par la transformée en Ondelettes [Leb09].	21
1.11	Première génération de la Transformée de Curvelet (DCTG1).	23
1.12	Un schéma illustratif de la transformée en Contourlet[ER04]	24
1.13	Principe de la transformée en Bandelettes.(a) Détection des contours. (b) Construction des zones des pixels "bandelettes". (c) Déformation de la zone [Leb09].	26
2.1	Le produit matriciel entre la matrice de sélection R_m et un vecteur de l'image permet de sommer les pixels qui contribuent à la projection $y(n)$ [Bey87].	35

2.2	Exemples de droites discrètes sur une image de taille $p \times p$ [FF93].	38
2.3	Exemple de projection TFR .(a)Image initiale I . (b) les projections $R_m(t)$ de I [FF93].	39
2.4	La reconstruction de l'image I de Fig. 2.3 à partir de ses projections dans Fig. 2.3 [FF93].	39
2.5	Illustration des corrections effectuées à chaque itération pour inverser l'image de Lena de taille $3^5 \times 3^5$ [A.K06].	42
2.6	Diagramme illustrant le processus multi résolution de la transformée ODPRT appliquée sur une image de taille $2^4 \times 2^4$ [LHS03a].	43
2.7	Illustration des corrections effectuées à chaque itération sur l'image Lena de taille 175×175 [AI07].	46
2.8	Illustration de la transformée de Mojette avec des vecteurs (p_i, q_i) et des angles θ_i [GN97].	47
2.9	Trois premières étapes pour inverser la transformée de Mojette[GN97].	48
2.10	Les images de test [Tof96b]. a) Image initiale contenant huit hyperboles. b) L'image est binarisé.	51
2.11	Le résultat de l'application de la GRT [Tof96b]. a) Espace de Radon où on observe des pics au niveau des paramètres des hyperboles. b) l'espace de Radon est seuillé.	51
2.12	Résultat de l'application de la TRG [HvGVvV05]. a) Image initiale b) Les pics aux centres des cercles. d) L'image estimée	52
2.13	Illustration de la projection sur l'image.	53
2.14	Les lignes de la matrice R_k et les colonnes de l'image i qui participent au calcul de la projection y_k	54
2.15	Différentes matrices R_k	55
2.16	La visualisation des espaces TRDR (c.à.d. $y_{\theta,k}(j)$) pour des rectangles d'orientations et de tailles différentes	56
2.17	Exemples de boîtes englobantes (en blanc) d'objets rectangulaires (en noir).	57

2.18	Le principe de la modalité de projection TRV ainsi que les paramètres utilisés [RN11a].	59
3.1	Absence de l'aspect multidirectionnel à la TRG	65
3.2	Projection suivant une courbe parabolique d'équation $\varphi(l) = l^2$. (a) : Les courbes suivent la direction horizontale et sont translatées dans les deux directions horizontales et verticales.(b) : Les courbes sont orientées suivant l'angle $\theta = \pi/4$ et translatées dans les deux directions horizontales et verticales.	66
3.3	Une projection des courbes paraboliques horizontales qui sont verticalement translatées , $\theta = 0$, $M = 1$, $L = 1$, $N = 3$, $n = 0$	69
3.4	Construction des lignes centrales des matrices de sélection. (a) : La construction des lignes centrales des matrices de sélection $R_{0,0}$ et $R_{1,0}$. (b) : La construction des lignes centrales des matrices $R_{0,\pi/4}$ et $R_{1,\pi/4}$.	70
3.5	La construction finale de $R_{m,0}$: Les pixels rouges sont générés par la translation du vecteur (j, j)	72
3.6	Reconstruction exacte, courbe de projection : parabole d'équation $\varphi(l) = l^2$, angle de projection $\theta = 90^\circ$	76
3.7	Reconstruction exacte, courbe de projection : hyperbole d'équation $\varphi(l) = l^3$, angle de projection $\theta = 0^\circ$	77
3.8	Reconstruction exacte, courbe de projection : parabole d'équation $\varphi(l) = l^2$, angle de projection $\theta = 45^\circ$	77
3.9	Résultats de la GMDRT pour la détection des paraboles de différentes orientations. (a) :Image initiale (b) : l'espace de Radon correspondant à la projection des paraboles d'équation $\varphi(x) = y^2$ mises en rotation suivant $\theta = 0$. Les coordonnées des pics correspondent aux positions des sommets des paraboles dans l'image initiale. (c) : L'espace de Radon correspondant à la projection des paraboles d'équation $\varphi(x) = y^2$ mises en rotation suivant $\theta = \pi/4$. Les coordonnées des pics correspondent aux positions des sommets des paraboles dans l'image initiale.	79

3.10	Résultats de la GMDRT pour la détection des rectangles de différentes orientations. (a) : Image initiale.(b) : les pics entourés par des rectangles rouges résultent de la projection de l'image initiale par des rectangles mis en rotation suivant $\pi/4$. Les pics présentent les coordonnées du coin gauche supérieure du rectangle. (c) : les pics entourés par des rectangles rouges résultent de la projection de (a) par des rectangles horizontaux présentant les coordonnées des deux rectangles horizontaux de l'image initiale.	80
3.11	Extraction du contour.	81
3.12	Les résultats d'extraction des bâtiments en utilisant la GMDRT.	82
3.13	Résultat de la GMDRT pour l'extraction des bâtiments(a)Image initiale I1.(b) Les bâtiments détectés.Les paramètres appliqués sont : $\theta \in [0^\circ, 180^\circ[$, $l \in [19, 32]$, $w \in [19, 32]$ et la taille du filtre maximums locaux est 21×21	84
3.14	Résultat de la GMDRT pour l'extraction des bâtiments. (a)Image initiale I3. (b) Les bâtiments détectés.Les paramètres appliqués sont : $\theta \in [0^\circ, 180^\circ[$, $l \in [19, 32]$, $w \in [19, 32]$ et la taille du filtre maximums locaux est 21×21	85
3.15	Erreurs de l'extraction des bâtiments(a) : Image originale. (b) : Image contours. (c) : Les bâtiments reconstruits sur l'image originale. L'ellipse jaune présente un bâtiment correctement identifié. L'ellipse bleu présente un bâtiment partiellement identifié. L'ellipse rouge présente un bâtiment non détecté et l'ellipse vert présente une erreur de commission. Les paramètres appliqués sont $\theta \in [0^\circ, 180^\circ[$, $l \in [19, 32]$, $w \in [19, 32]$ et la taille du filtre maximums locaux est 21×21	85
4.1	Une illustration de la PDRT appliquée à une image de taille 3×3 . a) Image initiale de taille 3×3 . b) Les projections horizontales et verticales de l'image initiale suivant des courbes paraboliques d'équation $y = m(\langle x - v \rangle_3)^2 + t \rangle_3$	97
4.2	Illustration de l'inversion exacte. (a) Image initiale. (b) l'espace de Radon généré par la PDRT en projetant l'image par des courbes paraboliques de paramètres $m = 1$ et $\theta = 0^\circ$. (c) Image reconstruite.	100

4.3	Reconnaissance des hyperboles par la PDRT. (a) L'image initiale contenant deux hyperboles d'équation $y = x^3$. Le premier a été translaté par le vecteur $(v, t) = (10, 0)$ et le deuxième a été pivoté par l'angle $\theta = 45^\circ$. (b) l'espace de Radon R_{0° montre un pic à $(10, 0)$. (c) l'espace de Radon R_{45° montre un pic à $(0, 0)$	101
4.4	Reconnaissance des paraboles par la PDRT (a) L'image initiale contenant deux paraboles d'équation $y = x^2$. Le premier a été translaté par le vecteur $(v, t) = (10, 0)$ et le deuxième a été pivoté par l'angle $\theta = 45^\circ$. (b) l'espace de Radon R_{0° montre un pic à $(10, 0)$. (c) l'espace de Radon R_{45° montre un pic à $(0, 0)$	102
4.5	Reconnaissance d'empreintes digitales par la PDRT. (a) Une image d'empreinte digitale en niveaux de gris où le sommet de la parabole à identifier est pointé par une flèche rouge. (b) L'image binarisée et squelettisée. (c) L'espace de radon généré à partir de l'application de la PDRT sur l'image binarisée et squelettisée montrant un pic à la même position que le sommet de la parabole. (d) : L'espace de radon généré à partir de l'application de la PDRT sur l'image initiale en niveaux de gris montrant un pic à la même position que le sommet de la parabole.	103
4.6	(a) Etude de la robustesse de la PDRT aux (d) effets d'alias, (f) au bruit ajouté, (h) à la rotation.	105
4.7	Approche d'identification des empreintes digitale	106
4.8	Prétraitement de l'empreinte digitale	107
4.9	Détection de différentes courbes paraboliques dans une empreinte digitale	108
4.10	Des signatures d'empreintes digitales	110
4.11	Quelques empreintes digitales de la base de données	112
4.12	Etude de la précision de détection de paraboles face au bruit ajouté	114
4.13	Etude de la robustesse des signatures face au bruit	115
4.14	Illustration de l'invariance de la PDRT à la translation et à la rotation	116

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre les différentes transformées	27
3.1	Les mesures des résultats obtenus par la GMDRT	86
3.2	Les résultats obtenus de la DRV [LDCWM09], la R - θ signature [REH11], et de la GMDRT	86
3.3	La complexité des transformées de radon exactement inversibles	88
4.1	Les résultats obtenus des trois tests (2, 4, 6 impressions retenues par personne) dans la base de données	113

Introduction générale

Les transformées géométriques sont des outils mathématiques qui permettent de présenter une fonction f dans un espace différent de celui de sa définition, appelé espace transformé. Il s'agit d'une décomposition de la fonction f suivant des fonctions d'analyse qui peuvent être des sinusoides dans le cas de la transformée de Fourier, des petites ondes à support fini dans le cas des ondelettes ou des droites dans le cas de la transformée de Radon.

Les transformées géométriques trouvent leur intérêt dans les informations tirées de l'espace transformé. Si les ondelettes par exemple mettent en relief les singularités ponctuelles de f , d'autres détectent des singularités de formes géométriques plus variées comme les droites pour la transformée de Radon et les segments de droites pour la transformée en Curvelet...

Parmi les transformées géométriques, la transformée de Radon a rencontré un succès important dans le domaine du traitement d'images. Des propriétés de la transformée de Radon comme la réversibilité et la concentration d'énergie sont à l'origine de son utilisation fréquente dans plusieurs domaines d'application. Nous citons à titre d'exemple la reconnaissance des formes, la reconstruction tomographique et le débruitage...

La transformée de Radon est un outil intégral qui intègre une fonction 2D le long des droites. Si nous nous plaçons dans le contexte image, la transformée de Radon permet de concentrer la somme des intensités des pixels d'une droite en un point de l'espace transformé. C'est ainsi qu'une droite dans une image est transformée en un point de forte intensité dans l'espace transformé de Radon.

La transformée de Radon est aussi à l'origine de plusieurs autres transformées géométriques comme les Ridgelettes, les Curvelettes et les Beamlettes. Ces transformées font partie de la famille des ondelettes orientées qui décomposent une image en tenant compte de la géométrie spatiale des singularités.

Le succès de la transformée de Radon a suscité l'intérêt de la généraliser à des primitives autres que les droites. La transformée de Radon généralisée est alors une extension de la transformée de Radon qui projette une fonction 2D le long des courbes de différentes natures. C'est ainsi qu'une courbe d'une image est transformée en un point dans l'espace transformé.

Plusieurs travaux ont été proposés dans le cadre de la généralisation de la transformée de Radon. Cependant, la plupart de ces travaux se sont limités à définir la transformée directe sans pour autant proposer une inversion, ce qui restreint leurs domaines d'application. Des approches inversibles existent également mais elles ne sont définies que sur des familles de courbes bien déterminées. L'inversion de ces transformées est analytiquement définie. L'implémentation numérique par conséquent, ne donne que des approximations du signal initial.

Notre travail s'inscrit dans cet axe de recherche et vise à définir une nouvelle transformée de Radon généralisée tout en préservant les propriétés importantes de la transformée de Radon classique, notamment la réversibilité.

Notre objectif est alors de définir une transformée de Radon généralisée qui permet d'allier la généralisation et la réversibilité "exacte" dans le sens qu'aucune restriction n'est posée sur les courbes de projection tout en assurant la propriété de réversibilité exacte.

Nous entendons par le terme réversibilité exacte, l'égalité en tout pixel entre l'image reconstruite à partir de l'espace transformé et l'image initiale.

Une autre propriété tout autant importante de la transformée de Radon est l'aspect multidirectionnel qui signifie la projection des courbes selon différentes orientations. Nous proposons de prendre en considération cet aspect dans la définition de la nouvelle transformée étant donné que cette propriété permet de détecter, dans le contexte de reconnaissance de formes, des courbes et des formes à des orientations différentes.

Dans le cadre de ce travail, notre intérêt a été orienté vers le domaine discret. Plusieurs approches ont été définies dans le domaine continu à travers des formalismes analytiques. La discrétisation de ces approches engendre une perte d'informations, ce qui se traduit par un manque de précision des images reconstruites.

Pour pallier à ce problème, nous avons choisi de définir le formalisme de la nouvelle transformée directement dans le domaine discret et cherché à établir des algorithmes d'inversion exacte.

Nous présentons dans ce travail une première approche qui est à la fois multi modale, multi directionnelle et exactement inversible. Cette approche appelée la " Transformée de Radon généralisée multi-directionnelle" est basée sur un formalisme algébrique dont la projection est exprimée sous forme d'une multiplication matricielle. La réversibilité est exacte si certaines conditions sont vérifiées.

Cette approche permet une reconnaissance de formes, peu importe leur nature ou leur orientation. Nous avons appliqué cette approche pour la reconnaissance d'objets rectangulaires. En termes de précision, les résultats expérimentaux obtenus se sont avérés encourageants et illustrent un apport significatif comparativement à d'autres méthodes existantes.

Nous avons également proposé une deuxième approche qui projette l'image suivant des polynômes. Cette approche intitulée la "Transformée de radon discrète polynomiale" est également multi directionnelle et exactement inversible. Elle permet la reconnaissance des formes qui peuvent être approximées à des courbes polynomiales. Nous avons appliqué cette transformée à la reconnaissance des empreintes digitales. Les résultats obtenus sont prometteurs. Des propriétés intéressantes comme l'invariance aux transformations géométriques (rotation, translation et bruit) caractérisent notre approche.

Ces deux approches ont été précédées par une contribution dans le cadre de la généralisation de Radon et qui a porté sur la définition d'une " Transformée de Radon discrète rectangulaire ". Cette transformée a été définie dans le but de l'extraction de formes rectangulaires dans des images numériques. La reconnaissance des formes à travers cette nouvelle transformée est réduite à la simple recherche de pics dans l'espace transformé de Radon. Comparée avec les formalismes existants, cette approche

a l'avantage de tenir en compte l'orientation des formes projetées.

Le présent rapport est composé des chapitres suivants :

Le **chapitre 1** présente un état de l'art de quelques transformées géométriques, notamment les ondelettes, Radon, les ridgelettes, les curvelettes et les bandelettes. Nous présentons leurs formalismes mathématiques ainsi que leurs propriétés et nous nous intéressons à leurs domaines d'application. Nous proposons à la fin du chapitre une étude comparative des différentes transformées soulignant les propriétés de chacune.

Le **chapitre 2** est structuré en deux parties. La première correspond à l'étude de la transformée de Radon "classique" connue par ses projections rectilignes multidirectionnelles. Nous nous focalisons en particulier sur les travaux récents qui proposent des formalismes discrets "exactement" réversibles. La deuxième partie du chapitre est une étude de la transformée de Radon généralisée. Nous décrivons les différents formalismes proposés dans la littérature et nous présentons une première approche qui consiste en une généralisation non réversible de la transformée de radon. Cette nouvelle transformée appelée la transformée de Radon discrète rectangulaire, a pour objectif de détecter, de manière directe, des formes rectangulaires. Nous présentons à la fin du chapitre les objectifs à atteindre dans nos travaux de recherche.

Le **chapitre 3** décrit une deuxième approche appelée la "transformée de radon généralisée multi directionnelle ". Il s'agit d'une approche basée sur un formalisme algébrique qui est à la fois exactement inversible et multi directionnel. Une application de l'approche pour la détection des bâtiments dans des images de télédétection est également décrite. Une discussion est proposée à la fin du chapitre dans laquelle nous situons notre travail par rapport aux méthodes existantes.

Dans le **chapitre 4**, nous détaillons notre nouvelle approche appelée la "transformée de Radon polynomiale" qui se base sur un formalisme arithmétique pour projeter l'image initiale suivant des courbes polynomiales. Cette nouvelle transformée est exactement inversible et multi directionnelle. Une application de la nouvelle méthode

à la reconnaissance des empreintes digitales est présentée.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion qui résume les contributions effectuées et propose quelques perspectives.

Les transformées géométriques

1.1 Introduction

Une transformée géométrique représente une fonction f dans un domaine transformé différent de son domaine de définition spatiale. On a souvent recours aux transformées géométriques pour déterminer certaines caractéristiques d'une fonction à partir de son domaine transformé. C'est dans ce but que de nombreuses transformées ont été proposées dans la littérature. Elles varient selon le but de définition et les caractéristiques qui les régissent. Toutefois, elles sont toutes fondées sur une base mathématique qui leur permet de reconstruire une fonction f à partir de son domaine transformé. C'est ainsi qu'une transformée est constituée de deux volets. Le premier constitue la transformée directe qui permet de passer du domaine spatial au domaine transformé. Le deuxième volet couvre la transformée inverse qui assure la reconstruction de f à partir de son domaine transformé. Dans ce chapitre, nous présentons une étude de quelques transformées géométriques. Notre objectif est de donner un aperçu global afin de positionner notre travail par rapport aux transformées existantes dans la littérature.

1.2 La transformée de Fourier

En 1822, Josef Fourier a montré qu'une fonction intégrable peut être représentée par une somme infinie de fonctions exponentielles complexes et périodiques [Fou22]. La transformée de Fourier consiste alors en la décomposition d'un signal $x(t)$ à partir d'une famille de sinusoïdes, ce qui permet de représenter le spectre du signal dans le

domaine fréquentiel [Pap77].

La transformée de Fourier, pour une fréquence f , consiste à intégrer le signal temporel $x(t)$ multiplié par le terme exponentiel $e^{-2i\Pi ft}$:

$$TF(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\Pi ft} dt \quad (1.1)$$

Le signal $x(t)$ peut être rétabli à travers l'intégration de toutes ses composantes fréquentielles comme suit :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} TF(f)e^{2i\Pi ft} df \quad (1.2)$$

La transformée de Fourier à deux dimensions est une généralisation de celle à une dimension.

Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables. La transformée de Fourier continue de cette fonction est donnée par :

$$TF2D(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-2\Pi i(xu+yv)} dx dy \quad (1.3)$$

Les deux variables u et v représentent respectivement les fréquences spatiales de la fonction selon les directions Ox et Oy .

L'inversion de la transformée de Fourier à deux dimensions est donnée par :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} TF2D(u, v)e^{2\Pi i(xu+yv)} du dv \quad (1.4)$$

Un spectre fréquentiel détermine toutes les fréquences qui composent un signal ainsi que les amplitudes correspondantes (figure 1.1). Cependant, cette décomposition est idéale dans le cas des signaux réguliers mais inapte pour la détection des singularités dans les signaux non stationnaires. Le problème de cette transformée est qu'elle ne permet pas une mise en correspondance entre une fréquence détectée et sa localisation spatiale [Cad08].

Afin de remédier au problème de la localisation temps-fréquence, Denis Gabor a proposé en 1946 une solution basée sur l'idée d'analyser la fonction f en utilisant une fonction $g(t)$ localisée dans le temps, c'est-à-dire nulle sur tout \mathbb{R} sauf sur l'intervalle d'intérêt. C'est le principe de la transformée de Fourier à fenêtre où l'analyse de Fourier

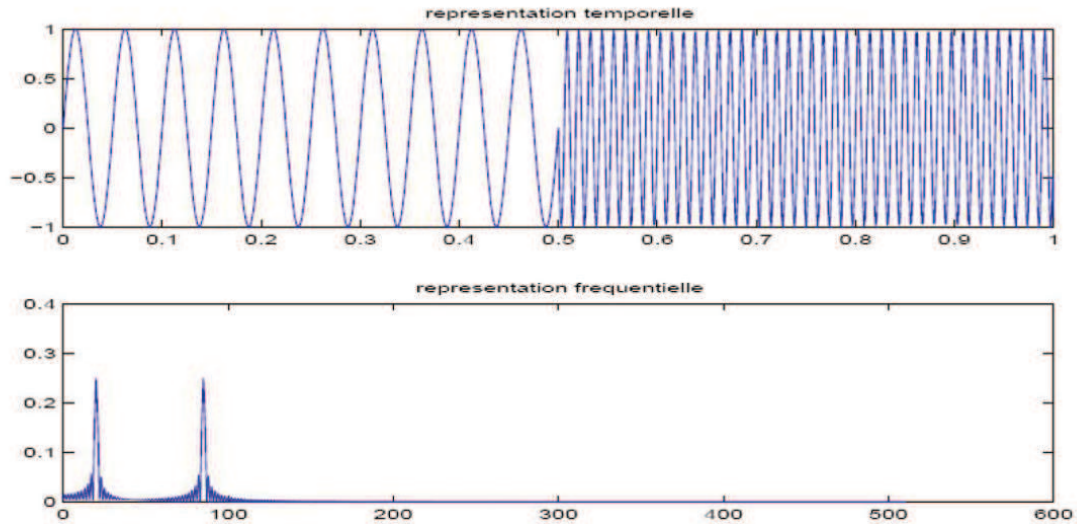


Figure 1.1 — La décomposition fréquentielle d'une note musicale

est localement effectuée sur une fenêtre d'analyse glissante [Fla98]. Bien que cette transformée permet de mieux localiser les fréquences dans un signal, elle a un problème de résolution temps/fréquence. Une fenêtre étroite donne une bonne résolution dans le domaine temporel, mais faible dans le domaine fréquentiel, et vice-versa pour une fenêtre large [Cad08].

1.3 La transformée de Radon

La transformée de Radon (TR) porte le nom de Johann Radon (1887-1956), mathématicien autrichien connu pour ses travaux sur la théorie de l'intégration. La TR permet de déterminer une fonction à partir de ses intégrales le long des lignes droites du plan [Rad17]. La TR consiste alors à intégrer une fonction le long des droites de différentes orientations. Une projection des droites suivant une orientation bien déterminée est appelée un profil de Radon. L'ensemble de profils est dénoté par le domaine transformé de Radon.

1.3.1 Formalisme Mathématique

Nous distinguons deux formalismes différents de la TR continue [Tof96a]. Le premier définit les droites dans le système de coordonnées polaires. Il est généralement utilisé dans le domaine de reconstruction tomographique. Le deuxième se base sur l'équation affine des droites et est souvent employé dans la sismologie, la compression ainsi que le domaine de reconnaissance des formes.

Formalisme polaire ρ, θ

Radon [Rad17] définit formellement la TR comme suit :

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans l'espace euclidien à deux dimensions et $T_R f(\rho, \theta)$ est sa transformée dans le domaine Radon :

$$\begin{aligned} T_R f(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy & (1.5) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho \cos \theta - s \sin \theta, \rho \sin \theta + s \cos \theta) ds. \end{aligned}$$

Où $\theta \in [0, \pi[$, $\rho \in]-\infty, \infty[$ et $\delta(\cdot)$ la fonction de dirac.

L'espace (ρ, θ) est généralement appelé l'espace Radon (ER) ou l'espace des paramètres. L'équation $\rho = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ représente l'équation paramétrique d'une ligne droite en coordonnées polaires. L'équation 1.5 signifie l'intégration de l'image le long des droites de paramètres polaires ρ, θ . Le résultat d'intégration est stocké dans l'espace Radon aux coordonnées (ρ, θ) .

$T_R f(\rho, \theta)$ représente l'intégrale de f le long d'une droite Δ qui est orientée suivant l'angle $\theta + \Pi/2$ et translatée de ρ suivant la direction de θ . La figure 1.2 illustre cette représentation :

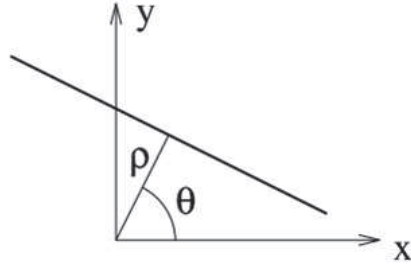


Figure 1.2 — Représentation polaire d'une droite

Il est à noter que l'intervalle des angles de projection θ est restreint à $[0, \Pi[$. En effet, l'intégrale d'une droite à un angle θ et à une distance ρ est équivalente à celle de paramètres polaires $(\theta + \Pi, -\rho)$. Nous avons ainsi : $T_R f(\rho, \theta) = T_R f(-\rho, \theta + \Pi)$.

Un point (j, k) de f se transforme en une courbe sinusoïdale en ER étant donné que $\rho = j \cos \theta + k \sin \theta = \sqrt{j^2 + k^2} \sin(\tan^{-1}(j/k) + \theta)$.

Ceci est illustré dans Fig.1.3.a où le point $(17, 30)$ de l'image initiale est transformé en une courbe sinusoïdale d'équation $\rho = \sqrt{17^2 + 30^2} \sin(\tan^{-1}(17/30) + \theta)$. La représentation de l'ensemble de projections de la TR est appelée "Sinogramme".

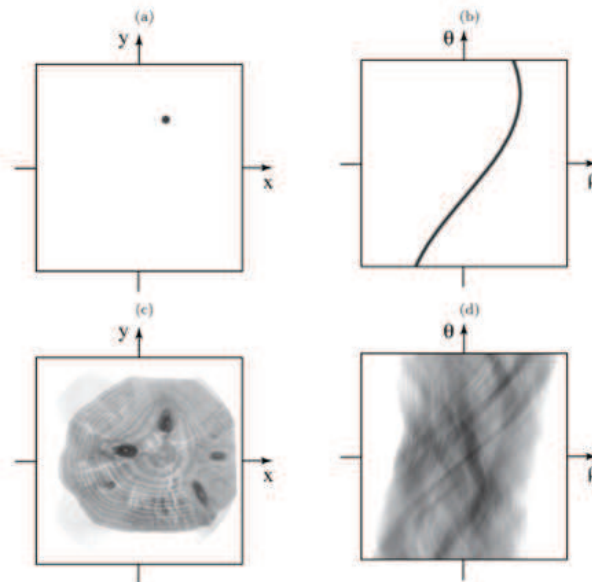


Figure 1.3 — Dualités point/sinusöide, Image/sinogramme [Kin05]

Un des avantages les plus importants de la TR est sa capacité de transformer une droite dans une image initiale en un pic (un point de forte intensité) dans ER comme

le montre la figure 1.4.

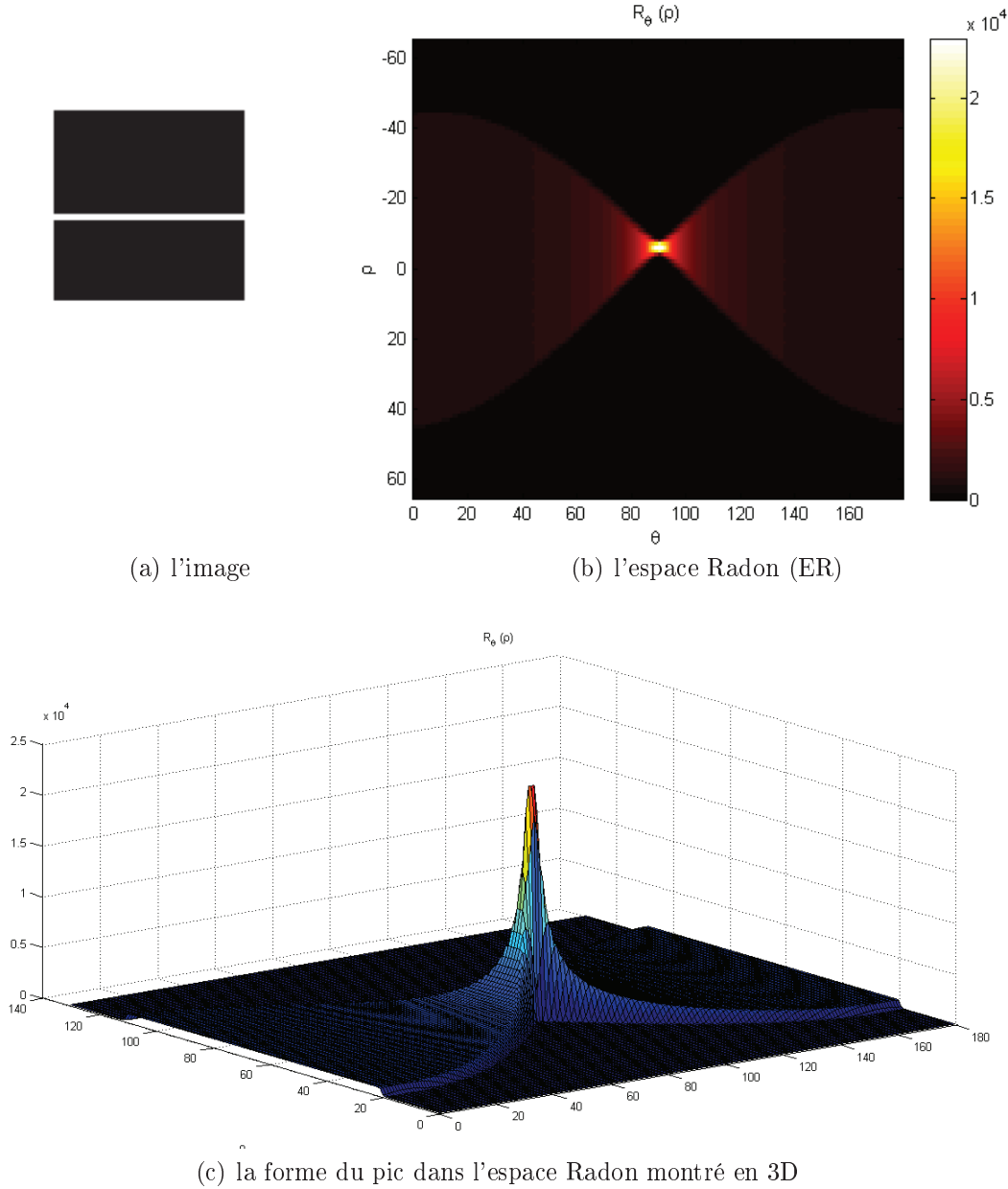


Figure 1.4 — La transformée de Radon d'une image.

Formalisme Affine p, τ

Ce formalisme a été introduit dans le domaine de Séismologie [Yil87]. Il s'agit d'intégrer une fonction $f(x, y)$ suivant des droites d'équation $y = px + \tau$ où p est le coefficient directeur de la droite et τ est son ordonnée à l'origine. Nous présentons ici

le formalisme proposé par [Dea93] :

$$T_R f(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(y - px - \tau) dx dy. \quad (1.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, px + \tau) dx. \quad (1.7)$$

Un point de coordonnées (j, k) dans le domaine de f est transformé par la TR affine en une droite de paramètres $-j$ et k , $-j$ étant son coefficient directeur et k son ordonnée à l'origine. Par conséquent, une image 2D est transformée en un ensemble de lignes d'où le nom de linéogramme qui dénote, exactement comme le sinogramme, l'espace Radon ER de f (figure 4.4). D'une manière similaire au formalisme (ρ, θ) , la TR affine transforme une ligne droite de paramètres affines p^* et τ^* en un pic de coordonnées (p^*, τ^*) dans le domaine de Radon ER.

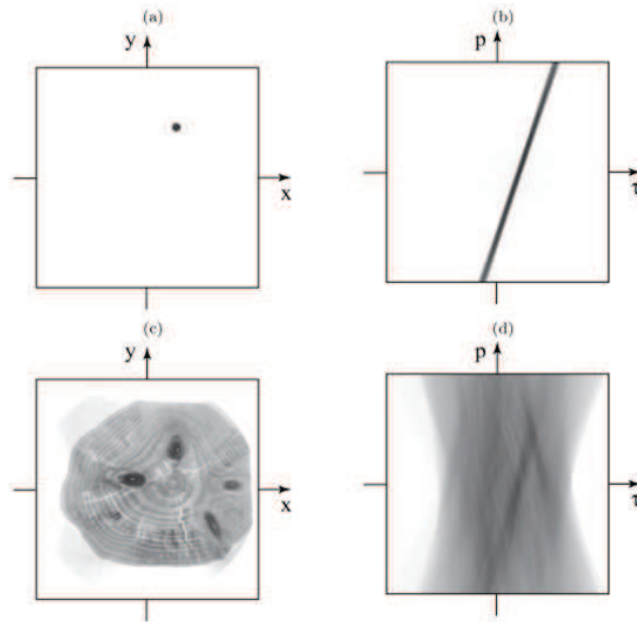


Figure 1.5 — Dualité point/droite, image/linéogramme [Kin05].

1.3.2 Propriétés

La transformée de Radon a plusieurs propriétés dont certaines sont pertinentes pour la représentation des formes [Dea93] :

1. Linéarité : Soient f et g deux fonctions, c_1 et c_2 deux constantes, alors :

$$T_R(c_1f + c_2g) = c_1T_R(f) + c_2T_R(g)$$

2. Symétrie : $T_Rf(\rho, \theta) = T_Rf(-\rho, \theta \pm \pi)$

3. Périodicité : $T_Rf(\rho, \theta) = T_Rf(\rho, \theta + 2k\pi)$, k entier

4. Rotation : Une rotation d'un angle θ_0 de f implique un décalage de phase en fonction de θ_0 : $T_RRot^{\theta_0}f(\rho, \theta) = T_Rf(\rho, \theta + \theta_0)$

5. Translation : Une translation de f par $\vec{u} = (x_0, y_0)$ implique une translation de $x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta$: $T_Rf(\rho, \theta) = T_Rf(\rho - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta, \theta)$

6. Echelle : un changement d'échelle avec $\alpha \neq 0$ sur f entraîne un changement d'échelle au niveau de la transformée $\frac{1}{|\alpha|}T_Rf(\alpha\rho, \theta)$

Théorème de la coupe centrale

Le théorème de la coupe centrale définit une relation qui existe entre les projections de f et les fréquences spatiales de f . La transformée de Fourier 1D d'un profil de Radon de f , TRf_θ , est égale à la transformée de Fourier 2D de f le long d'une droite d'angle polaire θ et passant par le centre du domaine de Fourier (Fig. 4.6).

Soit la transformée de fourier 2D de f suivante :

$$\hat{f}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy, \quad (1.8)$$

où u et v représentent les fréquences spatiales. Le théorème de la coupe centrale peut alors être mathématiquement exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} T_R\hat{f}(w, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} T_Rf(\rho, \theta) \exp[2i\pi w\rho] d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) \exp[2i\pi w\rho] dx dy d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[2i\pi(xw \cos \theta + yw \sin \theta)] dx dy \\ &= \hat{f}(w \cos \theta, w \sin \theta). \end{aligned} \quad (1.9)$$

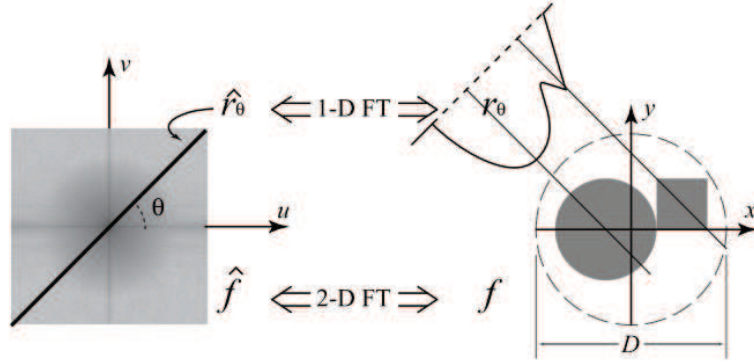


Figure 1.6 — Représentation graphique du théorème de la coupe centrale [Kin05]

Propriété de la convolution

Le théorème de la coupe centrale donne lieu à une autre propriété de la TR connue sous le nom propriété de convolution. L'opération de convolution 2-D $f = g \otimes h$, définie comme

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(a, b)h(x - a, y - b)dad b, \quad (1.10)$$

peut être obtenu à travers la convolution 1D de la projection $T_R f$ puisque $T_R f(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} T_R g(\rho - \tau, \theta)T_R h(\tau, \theta)d\tau$.

Réversibilité

La TR est par définition inversible dans le domaine continu. L'image peut être récupérée à partir de l'espace Radon au moyen des formules suivantes [Ner96] :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} Q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)d\theta \\ Q(\rho, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega, \theta)|\omega| \exp^{j2\pi\omega\rho} d\omega \\ S(\omega, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_R f(\rho, \theta) \exp^{-j2\pi\omega\rho} d\rho. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ce qui revient d'abord à filtrer l'espace de Radon ER dans la direction ρ au moyen d'une fonction de transfert $H(f) = |f|$, et puis rétroprojeter le ER filtré sur

le domaine de f . Bien que ces formules tiennent dans l'espace continu, l'inversion de la TR discrète est bien possible. Plusieurs approches ont été proposées, telles que la reconstruction algébrique et l'inversion de Fourier [Ben08].

1.3.3 Applications de la transformée de Radon

La TR est appliquée dans un large éventail de domaines. Une liste complète jusqu'à 1993 peut être trouvée dans [Dea93]. Certains de ces domaines comprennent :

Médecine : X -ray, γ -ray, l'échographie, transmission par résonance magnétique nucléaire Tomodensitométrie (CT), CT par émission de photons uniques et CT par émission de positons, (SPECT et le PET, respectivement).

Astronomie : reconstruction de l'image dans la bande de numérisation, l'astronomie radar et des études d'occultation.

Microscopie électronique : la reconstruction en 3-D des spécimens provenant de microscopie électronique.

Géophysique : le calcul de sismogrammes synthétiques, la TR de la vitesse pile sismogrammes pour obtenir des profils sismiques.

Optique : projection des données d'interférométrie utilisées pour reconstruire la distribution de l'indice de réfraction dans des domaines tels que l'aérodynamique, des écoulements de fluides et la physique des plasmas.

Analyse des contraintes : enquêtes élastostatiques et élastodynamique.

Traitement d'image : détection de lignes et de courbes en reconnaissance de forme, de transmission d'image dans les communications.

Depuis 1993, la puissance de calcul a progressé et un nombre croissant d'applications de la TR dans de nombreux aspects du traitement de l'image ont été proposées. Certaines de ces applications comprennent la compression d'image [Kin05], la classification des empreintes digitales [ZHM08], la détection des routes [ZC07] et des bâtiments [WH09], la détection du sillage des navires [Cou05], [KTS09], [MOP99], la détection de mouvements [Mil99]. Aussi, la TR combinée avec la transformée de Fourier (TF) ou la transformée en ondelettes continue constituent un outil très puissant pour l'analyse d'images.

1.3.4 La transformée de Radon Généralisée

Plusieurs recherches ont été menées pour généraliser les courbes de projection de la TR. C'est ainsi que la Transformée de Radon généralisée (TRG) a été définie comme l'intégrale d'une fonction sur une famille de courbes géométriques autres que les droites.

La Transformée de Radon Généralisée, du même principe que la TR, permet de transformer une courbe dans une image en un point dans l'Espace de Radon (ER). Les coordonnées des points de l'ER représentent les paramètres des courbes projetées. Par exemple, une parabole de paramètres a, b et d'équation $y = ax^2 + b$ est transformée en un point de coordonnées (a, b) dans l'espace de Radon.

Un formalisme proposé de la TRG continu est proposé par Deans [Dea81].

$$R(\xi, p) = \int \int_D F(x, y) \delta[p - C(x, y; \xi)] dx dy. \quad (1.12)$$

où $F(x, y)$ présente l'image 2D et $p = C(x, y; \xi)$ dénote l'équation d'une famille de courbes dans le plan xy paramétrisé selon le scalaire p et l'ensemble de paramètres $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ composant le vecteur ξ .

L'intérêt porté à la TRG provient de son impact sur le domaine de reconnaissance de formes vu la possibilité de concentrer les intensités d'une courbe en un point. Cependant, les travaux proposés dans le cadre de l'inversion de la TRG ont été effectués pour quelques familles de courbes. Nous citons à titre d'exemple la transformée de Radon circulaire (CRT), la TR arc-circulaire (CART) et La TR en V-line (TRV).

Un deuxième problème de la TRG est l'absence de l'aspect multi-directionnel du fait qu'on ne varie pas les angles de projection dans leur définition (Eq. 2.37).

1.4 La transformée en Ondelettes

La Transformée en Ondelettes Continue (TOC) d'une fonction de carrée intégrable $f \in L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des produits scalaires de cette fonction avec les membres de la famille d'ondelettes continues $\psi_{a,b}$ [Don98]. La définition de la TOC est donnée par l'expression suivante :

$$WT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}^*(x) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dx. \quad (1.13)$$

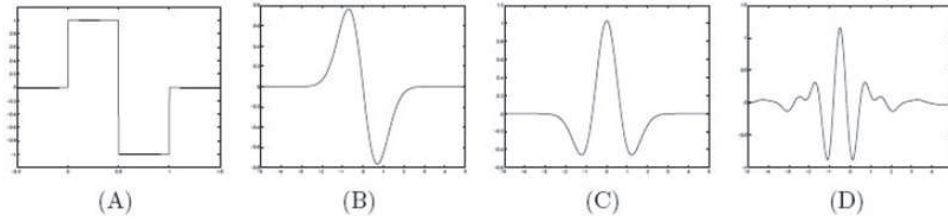


Figure 1.7 — (A) Ondelette de Haar, (B) Ondelette dérivée première de Gaussienne, (C) Le chapeau mexicain, (D) Ondelette de Meyer

où $\psi_{a,b}^*$ désigne le complexe conjugué de l'ondelette $\psi_{a,b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Une ondelette signifie une petite onde qui satisfait à la condition d'admissibilité suivante :

$$C_\Psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\zeta)|^2}{\zeta} d\zeta < \infty$$

où $\hat{\Psi}$ est la transformée de Fourier de ψ . Ceci implique $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$.

Une famille d'ondelettes $\psi_{a,b}$ est obtenue par dilatation et translation de l'ondelette mère ψ en variant ses paramètres de façon continue sur \mathbb{R} [pD92] :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

Il est clair que les ondelettes filles varient selon les deux paramètres suivants :

- Paramètre d'échelle a qui est l'inverse de la fréquence de l'ondelette et qui détermine sa largeur. Une faible valeur de a donne lieu à une ondelette compressée. Inversement, augmenter la valeur de a entraîne une dilatation de l'ondelette.
- Paramètre de translation b qui représente la position de l'ondelette sur l'axe de temps.

Dans la littérature, il existe plusieurs fonctions d'ondelettes. Sur la figure 1.7, nous présentons quatre exemples : ondelette de Haar, ondelette dérivée première de Gaussienne, dérivée seconde de gaussienne connue par le chapeau mexicain et ondelette de Meyer.

Le signal f peut être reconstruit à partir de sa transformée en ondelettes continue en utilisant la formule de la transformée inverse :

$$f(x) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} WT(a, b) \Psi_{a,b}(x) \frac{dad b}{a^2} \quad (1.14)$$

où C_Ψ est une constante définie par :

$$0 < C_\Psi = 2\Pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Psi}(w)|^2 \frac{dw}{|w|} < \infty \quad (1.15)$$

1.4.1 La transformée en Ondelettes multiRésolution

Une des méthodes les plus répandues dans la littérature est celle proposée en 1989 par S. Mallat [Mal89] qui a permis d'ouvrir un champ d'exploitation de la transformée en ondelettes dans diverses applications en traitement d'images. Cette méthode combine l'analyse multirésolution et la TOD pour avoir une représentation d'une fonction non redondante et sans perte.

L'Analyse Multirésolution introduite dans [Mal89] a pour objectif d'approximer une fonction à une résolution 2^j . Le passage d'une résolution à une autre donne une représentation de plus en plus grossière de la fonction initiale ainsi que de son détail. Cette décomposition permet de récupérer les détails d'une fonction et d'avoir, ainsi, une transformée réversible.

Une analyse Multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est basée sur deux décompositions complémentaires appelées respectivement Approximation et Détail. L'approximation décompose f à une résolution 2^j par une fonction d'échelle $\varphi(x)$. Un coefficient $a_j(k)$, à une échelle j , est défini par le produit scalaire entre $f(x)$ et la fonction d'échelle dilatée et translatée $\varphi(x)$. A chaque fois que nous passons d'une échelle à une autre, des informations sont perdues. Mallat montre dans son travail [Mal89] que le détail perdu entre deux échelles consécutives est récupéré par la décomposition en Détail. Cette décomposition est effectuée par une base d'ondelettes orthogonales $\Psi_{j,k}$ dérivées d'une ondelette mère Ψ définie comme suit :

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les coefficients de la projection sur les ondelettes $\Psi_{j,k}$ sont appelés coefficients de détail, notés par $d_j(k)$ et calculés en utilisant le produit scalaire $d_j(k) = \langle f, \Psi_j(k) \rangle$.

S. Mallat propose une méthode de calcul rapide basée sur deux filtres. L'un est un filtre passe-bas, appelé h et l'autre est un filtre passe-haut dénoté par g [Mal99].

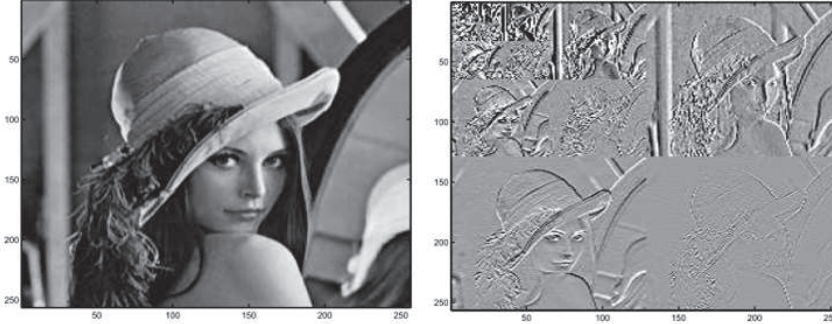


Figure 1.8 — Décomposition en ondelettes orthogonales de trois niveaux de Lenna

Il montre que le calcul des coefficients d'approximation du niveau $(j + 1)$, $a_{j+1}[k]$, respectivement les coefficients de détail $d_{j+1}[k]$, du signal original $f(x)$ se fait par le simple produit de convolution entre les coefficients $(a_j[k])$ et le filtre passe bas h , respectivement entre les coefficients $(d_j[k])$ et filtre passe haut g .

1.4.1.1 Généralisation en 2D : La transformée d'ondelettes 2D orthogonales multirésolution

Les bases d'ondelettes 2D orthogonales sont dérivées de trois ondelettes élémentaires Ψ^H , Ψ^V et Ψ^D dénotant respectivement les ondelettes à direction Horizontale, Verticale et Diagonale [MP06]. Les ondelettes d'analyse sont obtenues par dilatation et translation des bases Ψ^H , Ψ^V et Ψ^D . La fonction d'échelle ainsi que les trois fonctions d'ondelettes bidimensionnelles sont obtenues par les produits séparables suivants :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(x)\varphi(y) \\ \Psi^V(x, y) &= \varphi(x)\Psi(y) \\ \Psi^H(x, y) &= \Psi(x)\varphi(y) \\ \Psi^D(x, y) &= \Psi(x)\Psi(y)\end{aligned}$$

La figure 1.10 montre la décomposition en 3 niveaux de l'image Lenna par les Ondelettes orthogonales bidimensionnelles multirésolution.

Dans le domaine du traitement d'images, la transformée en ondelettes orthogonales est utilisée dans diverse applications. Nous citons la compression d'image sous la norme

JPEG2000, la segmentation et la détection des singularités [Cad08].

Les bases d'ondelettes orthogonales permettent d'obtenir une bonne représentation de l'image avec peu de coefficients. Cependant, bien que ces dernières soient très efficaces pour les zones régulières, les textures homogènes et les singularités ponctuelles, elles ne peuvent exploiter la régularité géométrique des contours. C'est pour cette raison que des applications basées sur les ondelettes comme la compression et le débruitage deviennent inefficaces sur des images qui contiennent des singularités de forme géométrique linéaire et curviligne. C'est ainsi que de nouvelles transformées plus adaptées à la représentation de contours ont été proposées sous le nom d'ondelettes orientées.

1.5 Transformées d'ondelettes orientées

Les ondelettes orientées regroupent les transformées géométriques qui associent à la transformée d'ondelettes d'autres traitements afin de mieux représenter les contours anisotropes. En effet, les ondelettes séparées permettent de bien représenter les contours de directions horizontale et verticale mais elles sont inefficaces aux autres directions. Un effet de Gibbs est observé lorsqu'il s'agit d'un contour anisotrope. Le but de ces transformées est de minimiser le nombre de coefficients d'analyse et de les concentrer tout au long des contours. La figure 1.9 illustre l'avantage des ondelettes orientées pour l'analyse des contours.

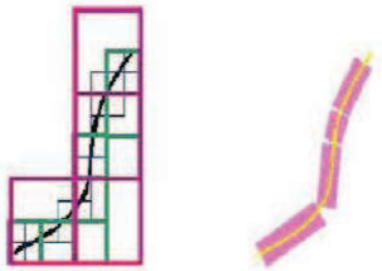


Figure 1.9 — Comparaison entre transformée en Ondelettes séparées et une transformée en Ondelettes Orientées

1.5.1 La transformée de Ridgelettes

La transformée de Ridgelettes a été proposée pour analyser les images contenant des singularités en lignes droites [Emm98], [Don00]. Ceci revient à concentrer les coefficients de la décomposition tout au long des contours linéaires. L'analyse en Ridgelettes s'appuie sur la transformée de Radon, du fait que cette dernière permet de représenter les droites par des points. Une analyse par ondelettes est par la suite effectuée sur le domaine de Radon afin d'en extraire les singularités ponctuelles. En résumé, la transformée en Ridgelettes revient à appliquer une analyse en ondelettes 1D sur chacune des projections de Radon où l'angle θ est fixé.

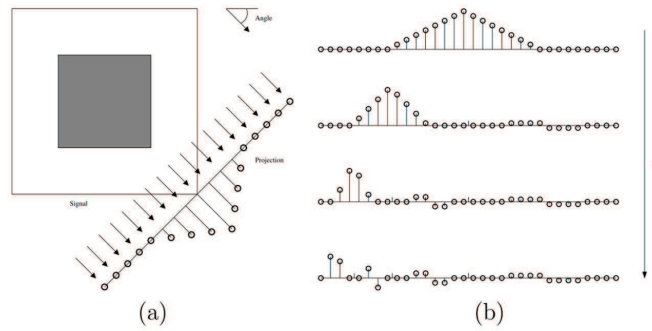


Figure 1.10 — (a) Projection Radon. (b) Traitement des différentes projections par la transformée en Ondelettes [Leb09].

Une Ridgelette bidimensionnelle $\Psi_{a,b,\theta}$ définie par une échelle $a > 0$, une position $b \in \mathbb{R}$ et une orientation $\theta \in [0, 2\Pi]$, est exprimée comme suit :

$$\Psi_{a,b,\theta}(x) = \Psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \Psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) - b)/a \quad (1.16)$$

Une Ridgelette est constante tout au long des lignes $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = t$, où t est une constante. La transformée de Ridgelettes continue d'une fonction f est donnée par l'équation suivante :

$$Rf(a, b, \theta) = \int \int f(x_1, x_2) \Psi_{a,b,\theta}^*(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.17)$$

L'expression de la transformée peut être définie à partir de la formule de la transformée de Radon :

$$\begin{aligned}
Rf(a, b, \theta) &= \int R(\theta, t) a^{-1/2} \Psi^*((t - b)/a) dt \\
&= \int \int f(x_1, x_2) a^{-1/2} \Psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) - b)/a) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

La transformée en Ridgelettes a été développée pour analyser les images qui contiennent des singularités linéaires. Cependant, les contours dans une image ont souvent la forme curviligne. La transformée en Curvelets semble alors être plus adaptée à les représenter .

1.5.2 La transformée en Curvelets

Dans une image réelle, les contours ne peuvent être approximés par des droites vu les différentes formes curvilignes qu'ils prennent. Les Ridgelettes sont alors inefficaces pour les analyser. Cependant, une courbe peut être représentée par plusieurs segments de droites. De ce fait, la transformée de Ridgelettes peut être appliquée d'une manière locale sur des blocs de l'image. C'est le principe de la transformée en Curvelet qui est considérée comme une généralisation de la transformée de Ridgelettes [FS12]. On distingue une première génération de Curvelets dont le principe consiste à appliquer la transformée de Ridgelettes sur des fenêtres de différentes tailles et échelles [DD00],[CD01]. L'objectif est de développer une analyse multi-échelle en utilisant des Ridgelettes normalisées, translattées et d'échelles variées. Cette décomposition illustrée par la figure 1.11 suit les étapes suivantes :

1. Une analyse multirésolution est appliquée à l'image en utilisant l'algorithme à trous de la transformée d'ondelettes. Le résultat de cette analyse à J niveaux est composé d'une image d'approximation C_J et de J images de détail w_j , $j = 1, \dots, J$.
2. Chaque image de détail w_j est partitionnée en blocs. La taille B_j d'un bloc dépend du niveau de résolution j . Si j est impair, alors $B_{j+1} = 2 \times B_j$. sinon, $B_{j+1} = B_j$.
3. la transformée de Ridgelettes est appliquée sur chaque bloc B_j .

Plusieurs problèmes ont été levés dans l'analyse en Curvelets, à savoir le nombre élevé de paramètres, la redondance et le coût important du calcul.

Pour pallier à ces problèmes, une seconde génération des Curvelets a vu le jour [ECY06],[ECY02]. Il s'agit d'une décomposition plus simple, indexée uniquement par

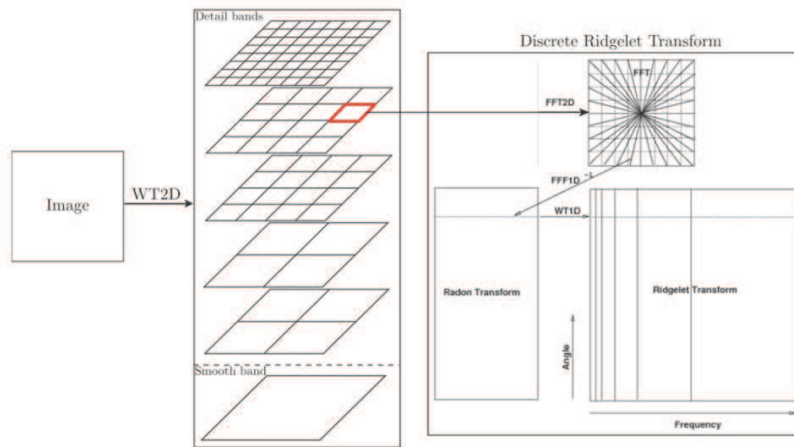


Figure 1.11 — Première génération de la Transformée de Curvelet (DCTG1).

trois paramètres, échelle, orientation (angle) et position.

A la différence de la première génération, la nouvelle décomposition n'applique pas la transformée de Ridgelettes. Une Curvelet mère est directement définie dans le domaine de Fourier. De ce fait, l'analyse en Curvelets est appliquée à la transformée de Fourier de l'image, plus précisément à des fenêtres de Fourier à support fini. Les coefficients de la transformée discrète en Curvelets sont alors obtenus en appliquant la transformée de Fourier inverse [ECY06].

Fadili et Starck exposent dans leur article [FS12] les différentes applications de la transformée en Curvelets dans le domaine du traitement d'images. Ils citent l'emploi des Curvelets pour le débruitage, l'ajustement du contraste et la décomposition morphologique.

Concernant la reconnaissance des formes, la transformée en Curvelet a été employée dans plusieurs applications. Nous citons la reconnaissance faciale 3D [EBBE15], la caractérisation des images texturées [GR11] et la reconnaissance des lettres sur des manuscrits anciens [GJ07]. Cependant, bien que la transformée en Curvelets a eu du succès pour analyser des courbes, elle ne permet qu'une étude locale d'une courbe. En effet, pour chaque pixel du contour, la transformée de Curvelet permet de déterminer son orientation, sa position et sa courbure. De ce fait, plusieurs coefficients sont obtenus pour caractériser une courbe sans pour autant détecter facilement la forme et l'orientation globales du contour.

1.5.3 La transformée en Contourlets

La transformée en Contourlets proposée par Do et al. [DV05] analyse les contours et se présente comme étant une variante de la transformée en Curvelets. Les résultats obtenus par l'analyse en Curvelets et ceux obtenus par la transformée en Contourlets sont très similaires. Cependant, elles diffèrent par certains aspects. La transformée en contourlets contrairement à la transformée en curvelets utilise la pyramide Laplacienne (LP) pour l'aspect multirésolution et une banque de filtres directionnels(DFB), à la place de la transformée de Ridgelettes pour l'aspect directionnel. Une autre différence par rapport à la transformée en Curvelets est qu'elle a été tout d'abord présentée dans le cadre discret pour être généralisée par la suite au domaine continu. La figure 1.12 illustre le principe général de la transformée en Contourlets.

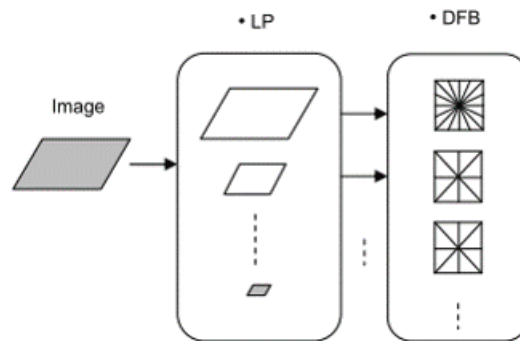


Figure 1.12 — Un schéma illustratif de la transformée en Contourlet[ER04]

Une version de la transformée en Contourlet, appelée "Non-SubSampled Contourlet Transform"(NSCT), a été proposée en 2006 par Da Cunha et al. [dCZD06]. Les auteurs ont éliminé les étapes de sous-échantillonnage et de synthèse des filtres pour rendre la transformée invariante à la translation. L'algorithme proposé a été inspiré par l'algorithme à trous de la transformée en ondelettes.

La redondance de cette transformée est moins importante que pour la transformée en Curvelets. Par conséquent, la transformée en Contourlet est plus adaptée à la compression que la transformée en Curvelet. En plus de la compression [DV05], la transformée en Contourlet a été appliquée au débruitage [ER04] et à l'ajustement de contraste[dCZD06]. Concernant le domaine de la reconnaissance de formes, la transformée en Contourlet a été bien utilisée dans différentes disciplines. Nous citons à

titre d'exemple la reconnaissance faciale [CHZ⁺10], la reconnaissance des véhicules [RMKK08] et la reconnaissance de l'iris [AP09].

1.5.4 La transformée en Bandelettes

La transformée en Bandelettes s'inscrit dans le groupe des transformées géométriques adaptatives où l'analyse de l'image est adaptée à son contenu géométrique. Le principe de cette transformée est d'effectuer une analyse en ondelettes séparables orientées suivant un modèle géométrique qui peut être un contour où un flux de vecteurs orientés.

Nous distinguons deux générations de la transformée en Bandelettes. Dans la première, une base de bandelettes [PM05a] décompose l'image le long de vecteurs d'un flux géométrique. Ce flux géométrique indique la direction où les niveaux de gris d'image ont une variation régulière au bord d'un contour. Un flux géométrique est composé de vecteurs parallèles aux bords de contours. Pour l'extraction des flux géométriques, La transformée en bandelettes commence par une segmentation dyadique de l'image. Le flux géométrique est identifié sur chaque sous-bande en approximant le contour par une courbe polynomiale paramétrée. Une fois l'orientation de flux géométrique est identifiée, la bande est recalée de telle sorte que la direction du flux géométrique soit ou bien horizontale ou verticale. Décomposer la bande recalée par une base orthogonale d'ondelettes séparables est équivalent à décomposer l'image originale en bandelettes orthogonales. La figure 1.13 illustre les étapes de la décomposition en bandelettes. Bien que redondante, la transformée en bandelettes a été appliquée en compression en améliorant en particulier la qualité de l'image décompressée.

Cependant, cette transformée n'est pas construite directement dans le domaine discret et ne permet pas une représentation multirésolution des formes géométriques de l'image. En conséquence, la mise en oeuvre et l'analyse mathématique sont complexes et inefficaces. Une deuxième approche a été alors proposée sous le nom de Bandelettes de deuxième génération [PM05b]. La nouvelle approche est définie dans le domaine discret et s'appuie sur une base de bandelettes multirésolution. L'analyse commence par une décomposition en ondelettes orthogonales de l'image. Une segmentation en quadtree est ensuite procédée sur les différentes bandes de fréquence de la transformée en ondelettes. Une approximation du flux géométrique est effectuée sur chaque feuille du quadtree

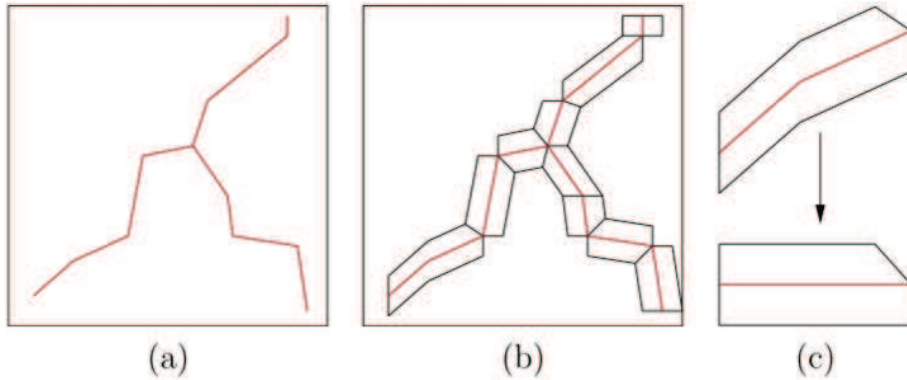


Figure 1.13 — Principe de la transformée en Bandelettes. (a) Détection des contours. (b) Construction des zones des pixels "bandelettes". (c) Déformation de la zone [Leb09].

suivie par une décomposition orthogonale en utilisant une base de bandelettes $B = \{b_n\}$. Ces bandelettes sont présentées comme des filtres adaptés au flux géométrique existant. Par conséquent, elles présentent le mieux possible la régularité géométrique des contours. L'algorithme proposé présente une décomposition rapide de complexité $O(N)$ et améliore nettement les résultats de compression comparés avec la transformée en ondelettes [PM05b].

1.5.5 La transformée en Wedgelets

La transformée en Wedgelets appartient à la famille des transformées adaptatives dont l'analyse dépend du contenu de l'image. Cette transformée est basée sur une segmentation de l'image en Quadtree. Une feuille Quadtree contient une rupture "edgel" qui la sépare en deux blocs homogènes. L'intégration se fait au niveau de chaque côté du contour. Le codage en quadtree donne lieu à un dictionnaire d'Edgels qui partitionnent l'image en zones uniformes. L'association de cette transformée avec celle des Ondelettes 2D a amélioré le résultat de compression [WRCB02]. En effet, le dictionnaire qui présente un ensemble de paramètres dépendants de l'image traitée, permet de mieux analyser le contenu image. La généralisation de la transformée de Wedgelets en dimension 3D a donné naissance à la transformée de surflets [VCB04].

1.6 Synthèse et Comparaison des transformées étudiées

Nous avons vu que chaque transformée se distingue par une décomposition bien spécifique qui la caractérise. Le choix d'une transformée correspond à des compromis que l'on doit fixer en fonction de l'application visée. Alors que la transformée en Ondelettes représente les singularités ponctuelles dans une image, la transformée de Radon ainsi que les ridgelettes décomposent l'image suivant des droites rectilignes. D'autres transformées comme les Curvelets, les Contourlets et les Bandelettes représentent les formes curvilignes dans une image. Nous observons également que les transformées diffèrent selon leur adaptabilité au contenu de l'image. Nous distinguons des approches non adaptatives qui possèdent une décomposition indépendante du contenu de l'image analysée telles que les Ridgelettes, les Curvelets et les Contourlets. D'autre part, des approches adaptatives comme les Bandelettes et les Wedgelets analysent une image en tenant compte de la spécificité de ses modèles géométriques. Elles nécessitent alors une description explicite des singularités que l'on souhaite mettre en valeur dans l'image.

Bien que ces dernières soient plus performantes en termes de régularité des contours, elles nécessitent un traitement supplémentaire pour étudier les modèles de l'image, ce qui entraîne un surcoût de calcul.

Le tableau 1.1 présente une comparaison des différentes transformées étudiées en termes de la nature de la singularité, de l'aspect multi-échelle et du nombre d'orientations.

Tableau 1.1 — Comparaison entre les différentes transformées

Transformée	Nature de singularité	Multi-échelle	orientations	Inversion
Radon	Droite	Non	infinité	Oui
Radon généralisée	Infinité de courbes	Non	1	Non
Ondelettes	ponctuelle	Oui	3	Oui
Ridgelet	droite	Non	Infinité	Oui
Curvelet	Des segments de contour	Oui	2^k	Oui
Contourlet	Des segments de contour	Oui	2^k	Oui
Bandelettes	Contours dans quadtree	Oui	Infinité	Oui
Wedgelets	Edegels	Oui	infinité	Oui

Le tableau 1.1 montre que les bandelettes et les wedgelets sont des transformées multiéchelles ayant un nombre illimité d'orientations. Notons toutefois que ces deux transformées font partie des approches adaptatives qui nécessitent un traitement supplémentaire sophistiqué et coûteux en temps de calcul. Par contre, si nous cherchons une transformée non adaptative qui réunit à la fois l'aspect multi-échelles et le nombre élevé d'orientations, nous trouvons que les Curvelets ainsi que les Contourlets satisfont ces deux critères.

Cependant, bien que ces transformées présentent un atout considérable pour la représentation des contours et des structures géométriques, très peu d'entre elles ont été appliquées à la reconnaissance de formes. En effet, elles permettent d'offrir une vue locale des structures géométriques sous forme de segments de contours. C'est ainsi que des caractéristiques comme l'allure de la courbe, son orientation et sa position ne peuvent pas être générées facilement. Néanmoins, on trouve principalement des applications en biométrie qui appliquent les ondelettes orientées dans leur processus de reconnaissance [EBBE15], [CHZ⁺10] et [AP09]. Nous notons que la reconnaissance dans ce genre d'applications se fait à partir de collecte des petites composantes de la forme géométrique. Elle visent à coder l'image en optant pour une décomposition en fragments de courbes curvilignes, la décomposition étant unique et déterminante pour chaque donnée biométrique. Il s'agit de caractériser l'image par l'ensemble de ses composantes minimales. Nous pouvons faire une analogie avec une mosaïque où la totalité de l'image est reconnue par ses petits fragments. Le processus de l'identification est basé sur des visions locales de l'information sans pour autant arriver à reconnaître les caractéristiques des formes géométrique globales.

Le tableau 1.1 montre également que la transformée présentant le plus de flexibilité dans la nature des singularités est la transformée de Radon généralisée. C'est ainsi que la transformée de radon généralisée est souvent utilisée dans la reconnaissance de formes. Cependant, la définition non inversible ainsi que l'absence de l'aspect multi-directionnel présentent les problèmes majeurs de cette transformée. D'autre part, elle nécessite la connaissance à priori de la nature des singularités dans l'image avant d'entamer la phase de projection.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général des transformées géométriques. Nous avons présenté leurs principes, leurs propriétés ainsi que leurs champs d'application. Une étude comparative des différentes transformées nous a mené à promouvoir l'intérêt de la réalisation d'une nouvelle transformée discrète qui généralise la transformée de Radon. Cependant, les approches de la transformée de Radon généralisée existent dans la littérature. L'approche souhaitée vise à se distinguer par deux critères, la réversibilité exacte ainsi que l'aspect multi-orientations. Dans le chapitre suivant, nous présentons les différents travaux qui nous ont été une source d'inspiration, à savoir les méthodes discrètes exactement réversibles de la transformée de Radon ainsi que les différentes approches de la transformée de Radon généralisée.

2.1 Introduction

Vu le large éventail d'applications de la transformée de Radon (TR), plusieurs études ont été menées afin de généraliser la TR en remplaçant la droite, support d'intégration, par des courbes et des formes géométriques variées (Cercles, paraboles, hyperbole,...). Dans ce contexte, nous cherchons à établir une transformée de Radon Généralisé (TRG) qui soit discrète, exactement inversible et multi directionnelles.

Pour ce faire, une étude des travaux précédents des méthodes d'inversion aussi bien analytiques que discrètes s'impose afin d'en tirer profit. Ainsi, nous commençons dans ce chapitre par étudier la TR dans les deux domaines continu et discret. Nous nous intéressons en particulier aux différentes approches discrètes exactement inversibles de la TR.

Nous présentons en deuxième lieu les différentes approches existantes de la TRG dont une contribution proposée. Nous terminons par présenter nos critiques par rapport aux méthodes existantes et déterminer l'axe de nos recherches.

2.2 La transformée de Radon (TR)

Comme présenté dans le chapitre précédent, la TR est une transformée géométrique intégrale, qui intègre une fonction d'intérêt, le long d'une droite du plan. L'inversion de la TR permet de restituer une fonction f à partir de ses intégrales.

2.2.1 Inversion analytique de la transformée de Radon dans le domaine continu

L'inversion de la TR consiste à déterminer la fonction f à partir de ses projections. L'inversion analytique consiste à la résolution des équations intégrales de l'expression continue de la TR et de sa transformée de Fourier. Deux méthodes d'inversion analytiques sont bien répandues dans le domaine de reconstruction tomographique, à savoir la méthode d'inversion directe et la rétroprojection filtrée.

2.2.1.1 Inversion directe

la méthode d'Inversion directe consiste à récupérer la fonction $f(x, y)$ en se basant sur le théorème de la coupe centrale. Le théorème de la coupe centrale (Eq.1.9) énonce que $T_R \hat{f}(w, \theta) = \hat{f}(u, v)$ où $u = w \sin \theta$ et $v = w \cos \theta$. Ainsi, $\hat{f}(u, v) = T_R \hat{f}(\sqrt{u^2 + v^2}, \tan^{-1}(u/v))$. En substituant $\hat{f}(u, v)$ par cette formule dans la transformée 2D inverse 1.11, nous aurons la formule d'inversion suivante :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_R \hat{f}(\sqrt{u^2 + v^2}, \tan^{-1}(u/v)) \exp[2i\pi(ux + vy)] dudv. \quad (2.1)$$

En effet, θ variant entre 0 et π , tout le plan de Fourier de f est bien couvert par les transformées de Fourier des $T_R f$. Ainsi, la transformée de Fourier de f peut être connue en tout point (u, v) du plan de Fourier. Cette méthode nécessite d'effectuer autant de transformées de Fourier 1D que d'angles de projection ce qui n'est pas possible dans le domaine discret où le nombre d'angles de projection est limité.

2.2.1.2 La rétroprojection filtrée

La rétroprojection filtrée part de la transformée de Fourier inverse (TFI) et exprime l'intégration suivant les coordonnées cartésiennes u et v sous forme des coordonnées polaires w et θ , où $u = w \sin \theta$ et $v = w \cos \theta$. Ceci permet l'utilisation du théorème de la coupe centrale (Eq.1.9). C'est ainsi que $f(x, y)$ peut être récupérée à partir de $T_R f$

comme suit :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u, v) \exp[2i\pi(ux + vy)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(w \cos \theta, w \sin \theta) \exp[2i\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)] \frac{\partial(u, v)}{\partial(w, \theta)} dw d\theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La Jacobienne est obtenue comme suit :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(w, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(u)}{\partial(w)} & \frac{\partial(u)}{\partial(\theta)} \\ \frac{\partial(v)}{\partial(w)} & \frac{\partial(v)}{\partial(\theta)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -w \sin \theta \\ \sin \theta & w \cos \theta \end{vmatrix} = w \cos^2 \theta + w \sin^2 \theta = w. \quad (2.3)$$

Par conséquent, la formule d'inversion devient en utilisant Eq.1.9 :

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} T_R \hat{f}(w) \exp[2i\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)] w dw d\theta. \quad (2.4)$$

Et étant donné que $T_R f(\rho, \theta + \pi) = T_R f(\rho, -\pi)$, les limites de l'intégration peuvent être changées comme suit :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |w| T_R \hat{f}(w, \theta) \exp[2i\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)] dw d\theta \\ &= \int_0^{\pi} T_R \tilde{f}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $T_R \tilde{f}(\rho, \theta)$ est une projection filtrée :

$$T_R \tilde{f}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| T_R \hat{f}(w, \theta) \exp[2i\pi w \rho] dw. \quad (2.6)$$

La projection est multipliée par un filtre de rampe dans le domaine fréquentiel. Les hautes fréquences ayant un important gradient sont amplifiées et les basses fréquences qui ont un faible gradient sont réduites. Intuitivement, ce filtrage de fréquence spatial compte pour l'intégration sur θ dans le processus de rétro-projection (Eq. 2.5). Une multiplication des fonctions dans le domaine fréquentiel correspond à une convolution dans le domaine spatial. Les projections qui sont filtrées par le filtre rampe dans le domaine fréquentiel, $T_R \tilde{f}$, peuvent être aussi obtenues aussi dans le domaine spatial par la convolution directe avec un noyau h étant donné que :

$$T_R \tilde{f}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} T_R f(\rho - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Or $T_R \tilde{f}(\rho, \theta) = T_R f(\rho, \theta) * h$. Ici, le noyau de convolution, h , qui reproduit l'effet de (Eq. 2.6), est :

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| \exp[i2\pi w\tau] dw = \frac{-1}{2\pi^2 \tau^2}. \quad (2.8)$$

2.3 Les méthodes discrètes de reconstruction de la TR classique exactement inversible

Les méthodes de reconstruction présentées dans la section précédente ne sont pas exactement inversibles dans le domaine discret. L'inversion génère une image approximative à l'image originale. De plus, la qualité d'inversion dépend du nombre d'angles de projection. Plus le nombre de projection est élevé, plus l'image reconstruite est proche de l'image originale. Cependant, dans la pratique le nombre de projections est souvent limité. D'autres méthodes discrètes de la TR proposent des algorithmes d'inversion exacte où l'image reconstruite est égale en tout point à l'image originale. Dans cette section, nous présentons les différentes méthodes discrètes exactement inversibles de la TR.

2.3.1 La transformée de Radon discrète (DRT)

Beylkin a défini une classe de transformées désignée par la transformée de Radon discrète (DRT)[Bey87]. La DRT est une méthode discrète algébrique exactement inversible. Elle a été spécifiquement conçue pour l'étude sismologique. La projection est basée sur la multiplication entre une matrice de sélection R_m et les colonnes d'une image $I(n)$. Les entrées différentes de 0 d'une matrice de sélection R_m permettent de sélectionner les pixels d'une colonne $I(n)$ qui contribuent à une projection rectiligne. Soit une image $I(n, l)$ de taille $N \times (2L + 1)$ où n dénote l'indice d'une colonne de l'image, $0 \leq n < N$ et l est l'indice de sa ligne, $-L \leq l \leq L$.

Une colonne $I(n)$ de l'image peut être alors présentée ainsi :

$$I(n) = \begin{bmatrix} I_{-L}(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ I_0(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ I_L(n) \end{bmatrix} \text{ et l'image } I \text{ est écrite comme un vecteur } I = \begin{bmatrix} I(0) \\ I(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Une condition que doit vérifier l'image I est qu'elle soit périodique de période N de telle sorte que

$$I(n) = I(n + N). \quad (2.10)$$

La transformée discrète de Beylkin est exprimée ainsi :

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M R_m I(n + M) = \begin{bmatrix} y_{-J}(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_0(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_J(n) \end{bmatrix} \text{ et le vecteur } y = \begin{bmatrix} y(-L) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(L) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

M est le nombre de vecteurs de voisinage de chaque côté de $I(n)$ où $2M + 1 \leq N$. R_m est la matrice de dimensions $(2J + 1) \times (2L + 1)$ qui sélectionne les éléments du vecteur $I(n + m)$ qui participeront à la projection $y(n)$. la j ème ligne de la matrice R_m définit les éléments de $I(n + m)$ qui contribuent à $y_j(n)$. La construction de la matrice R_m s'effectue selon l'équation suivante :

$$R_m(l, j) = \delta(m - (jl) \bmod N), -L \leq l \leq L, -J \leq j \leq J \quad (2.12)$$

La figure 2.1 illustre le principe de la projection de la DRT :

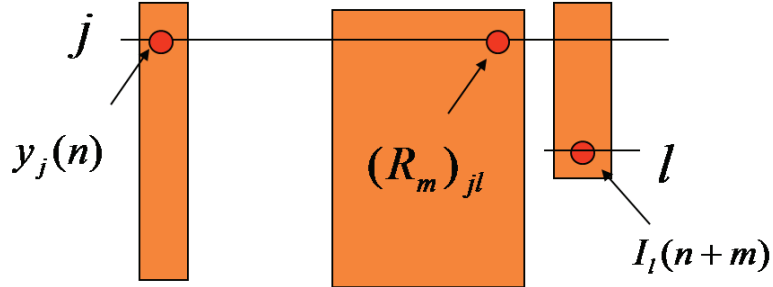


Figure 2.1 — Le produit matriciel entre la matrice de sélection R_m et un vecteur de l'image permet de sommer les pixels qui contribuent à la projection $y(n)$ [Bey87].

L'équation 2.11 peut être écrite sous la forme : $Y = RI$ où R est une matrice block-circulante contenant toutes les matrices R_m . La matrice suivante illustre R pour $M = 2$.

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_{-2} & R_{-1} \\ R_{-1} & R_0 & R_1 & R_2 & R_{-2} \\ R_{-2} & R_{-1} & R_0 & R_1 & R_2 \\ R_2 & R_{-2} & R_{-1} & R_0 & R_1 \\ R_1 & R_2 & R_{-2} & R_{-1} & R_0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Le produit matriciel directe $Y = RI$ est de complexité $O((2L + 1)(2J + 1)N^2)$. L'inversion exacte de la méthode de Beylkin revient à résoudre un système d'équations linéaires $Y = RI$. L'inversion est basée sur l'identité suivante :

$$(R^*R)^{-1}R^*R = I \quad (2.14)$$

La matrice R^* est la matrice conjuguée transposée de R . Or, il n'est pas nécessaire de résoudre le large système linéaire $Y = RI$. Ce système peut être décomposé dans le domaine fréquentiel en sous-systèmes linéaires plus petits. Soient $H = (R^*R)$ et $z = R^*y = HI$.

Une colonne $z(n)$ peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{m=-M}^M R_m^* y(n+m) \\ &= \sum_{m=-2M}^{2M} H_m^* I(n+m) \end{aligned} \quad (2.15)$$

où $H_m = \sum_{m'=-M}^{m'=M-m} R_{m'}^* R_{m+m'}$ et $H_m = H_m^*$, pour $0 \leq m \leq 2M$

Beylkin [Bey87] a prouvé que si la condition 2.10 est vérifiée et si $z(n)$ est exprimée selon l'équation 2.15, alors :

$$\hat{z}(k) = \hat{H}(k)\hat{I}(k). \quad (2.16)$$

pour $0 \leq k \leq N$ où $\hat{z}(k)$ et $\hat{I}(k)$ sont les transformées de Fourier de $z(n)$ et $I(n)$.

$$\hat{z}(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} z(n) \exp[2\pi i(nk/N)]. \quad (2.17)$$

$$\hat{I}(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} I(n) \exp[2\pi i(nk/N)]. \quad (2.18)$$

Les matrices $\hat{H}(k)$ sont définies comme suit :

$$\hat{H}(k) = \sum_{m=-2M}^{m=2M} H_m \exp[-2\pi i(nk/N)]. \quad (2.19)$$

Ainsi, si $\det(\hat{H}(k))$ est non nul pour $0 \leq k \leq N - 1$, alors l'inversion de la DRT à partir des projections $y(n)$ est unique et exacte. Le processus de l'inversion suit les 4 étapes suivantes :

1. $z(n)$, la transformée adjointe de $y(n)$ est obtenue à travers l'équation 2.15 pour $n \in [0, N]$.
2. Effectuer la transformée de Fourier de $z(n)$ pour obtenir $\hat{z}(k)$.
3. Résoudre le système linéaire 2.16 pour déterminer $\hat{I}(k)$ pour $k = 0 \dots N - 1$.
4. Effectuer la transformée de Fourier inverse de $\hat{I}(k)$ pour obtenir $I(n)$.

Bien que cette transformée permet une reconstruction exacte d'images, la projection n'est pas aussi simple que les méthodes discrètes usuelles. De plus, la capacité mémoire requise est importante vu le nombre élevé des matrices de sélection R_m . Dans les sections suivantes, nous présentons une suite de méthodes exactement inversibles fondées sur des opérations arithmétiques simples.

2.3.2 La transformée de Radon Finie (TRF)

La transformée de Radon finie ou TRF [FF93] est une méthode discrète simple mais puissante qui ne requiert que des opérations arithmétiques. C'est une méthode qui permet une inversion exacte sans le recours à l'interpolation des données.

La TRF est appliquée aux images carrées de taille $p \times p$ où p est un nombre premier. La TRF suppose qu'une image est périodique de période p dans les deux directions x et y et définit l'image $p \times p$ sous la forme d'un groupe fini muni de l'addition \mathbb{Z}_p^2 .

Comme p est premier, il existe uniquement $p+1$ projections rectilignes possibles qui correspondent à $p+1$ sous-groupes uniques. La transformée de Radon finie regroupe des projections horizontales R_m et des projections verticales R_0^\perp .

Les projections R_m sont définies comme la somme des pixels appartenant à des droites d'équation : $x \equiv (my + t) \pmod{p}$. Les projections verticales R_0^\perp présentent la somme des droites de projections d'équation : $y \equiv 0x + t \pmod{p}$. Ainsi, pour les gradients $0 \leq m \leq p-1$ et les translations $0 \leq t \leq p-1$, les projections sont définies comme suit :

$$R_m(t) = \sum_{y=0}^{p-1} I((my + t) \pmod{p}, y). \quad (2.20)$$

$$R_0^\perp(t) = \sum_{x=0}^{p-1} I(x, t). \quad (2.21)$$

Un exemple de ces projections est présenté dans la figure 2.2 où les points grisés, appartenant à une droite, sont sommés pour donner un seul élément de l'espace de Radon. Les pixels de la droite $x \equiv 2y + 3 \pmod{7}$ sont sommés pour donner $R_2(3)$ (Fig 2.2(a)). Egalement, les pixels appartenant à $y \equiv 0x + 3 \pmod{7}$ sont sommés pour donner $R_0^\perp(3)$ (Fig 2.2(b)).

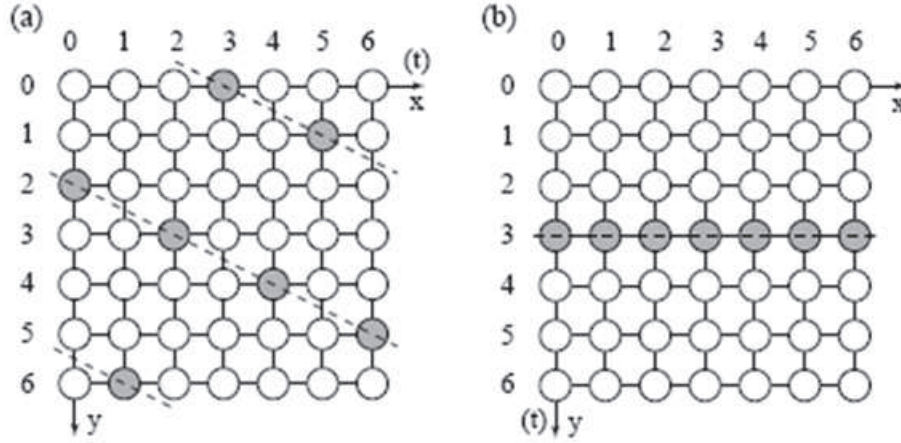


Figure 2.2 — Exemples de droites discrètes sur une image de taille $p \times p$ [FF93].

L'inversion ou la reconstruction de l'image initiale $I(x, y)$ à partir de R utilise la même méthode que pour la projection. En effet, lors de la projection, on somme les pixels de l'image initiale $I(x, y)$ pour déterminer chaque élément de R . D'une façon similaire, la reconstruction inverse somme les points de la projection R pour reconstruire chaque élément de I [AI07]. Il s'agit d'effectuer la somme de toutes les projections R_m et R_0^\perp des droites d'équation $x \equiv my + t \pmod{p}$ qui passent par le point $I(x, y)$. Sachant les coordonnées x et y du pixel à reconstruire, il s'agit alors de sommer toutes les projections $R_m(x - my \pmod{p})$ et $R_0^\perp(y)$. Pour m fixe et pour t variant entre 0 et $p - 1$, tous les pixels de l'image sont sélectionnés une et une seule fois vu que p est premier. Ainsi, la somme de la totalité des pixels de l'image $Isum$ peut être obtenue comme suit :

$$Isum = \sum_{t=0}^{p-1} R_m(t). \quad (2.22)$$

En outre, puisque p est premier, l'image reconstruite I à la position (x, y) contient $p+1$ copies du pixel originale $I(x, y)$ (p copies sélectionnées par les $R_m(t)$ et une seule copie par R_0^\perp) avec une seule copie de chaque élément du reste de l'image initiale.

La reconstruction exacte du pixel $I(x, y)$ est ainsi possible en soustrayant $Isum$ de la somme des projections et en divisant par la suite le reste par p .

Ainsi, l'image I est reconstruite selon l'équation suivante :

$I(x,y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$	1	<u>2</u>	3
$y = 1$	4	5	<u>6</u>
$y = 2$	<u>7</u>	8	9

(a)

$R(t, m)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
$m = 0$	147	258	369
$m = 1$	159	<u>267</u>	348
$m = 2$	168	249	357
$m = 3$	123	456	789

(b)

Figure 2.3 — Exemple de projection TFR .(a)Image initiale I . (b) les projections $R_m(t)$ de I [FF93].

$I'(x, y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$	123	123	123
	159	<u>267</u>	348
	168	249	357
	147	258	369
$y = 1$	456	456	456
	348	159	<u>267</u>
	249	357	168
	147	258	369
$y = 2$	789	789	789
	<u>267</u>	348	159
	357	168	249
	147	258	369

Figure 2.4 — La reconstruction de l'image I de Fig. 2.3 à partir de ses projections dans Fig. 2.3 [FF93].

$$I(x, y) = \frac{1}{p} \left(\sum_{m=0}^{p-1} R_m(x - my(\text{mod} p)) + R_0^\perp(y) - I_{\text{sum}} \right) \quad (2.23)$$

Un exemple de projection sur une image simple de taille 3×3 est présenté dans Fig. 2.3 où les pixels soulignés appartiennent à la droite de gradient $m = 1$ et de translation $t = 1$. La reconstruction de l'image initiale à partir de R est illustrée dans Fig 2.4.

La complexité de la projection directe de la TRF ainsi que son inversion est de l'ordre $O(p^3)$. Cette méthode de coût de complexité faible est simple, non redondante, permet une reconstruction exacte qui ne requiert pas une interpolation de données. Cependant, cette méthode ne s'applique que sur des images carrées de taille $p \times p$ où p est un nombre premier. Ainsi, plusieurs chercheurs ont proposé d'apporter des modifications sur cette méthode pour l'appliquer sur des images de taille quelconque.

2.3.3 La transformée discrète périodique de Radon (TDPR)

La transformée discrète périodique de Radon (TDPR) [A.K06] est une méthode discrète, exactement inversible. Elle est appliquée sur des images carrées de taille $p^n \times p^n$ avec p un nombre premier ($p \geq 2$) et n un entier positif. Cette méthode présente une extension de la méthode Transformée de Radon finie (TRF)[FF93] présentée dans la section précédente. Cette méthode transforme l'image initiale en $(p^n + p^{n-1})$ projections. La projection ainsi que l'inversion ne requièrent que des opérations arithmétiques. La TDPR est composée de deux types de projections : horizontales dénotées par R et verticales R_s . Pour les projections horizontales (respectivement verticales), les intercepts t suivent l'axe des X (respectivement l'axe des Y). Un élément de projection horizontal $R(m, t)$ est défini comme la somme des pixels se trouvant sur la ligne discrète $x \equiv my + t \pmod{N}$. De même, un élément de la projection verticale $R_s^\perp(s, t)$ est la somme des pixels appartenant à la droite discrète $y \equiv spx + t \pmod{N}$ où $N = p^n$ [A.K06]. Les équations de projection sont les suivantes :

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x, y) \delta(\langle x - my - t \rangle_N) \\ &= \sum_{y=0}^{N-1} I(\langle my + t \rangle_N, y), 0 \leq m < N \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} R_s^\perp(t) &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x, y) \delta(\langle y - spx - t \rangle_N) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} I(x, \langle spx + t \rangle_N), 0 \leq s < \frac{N}{p}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $N = p^n$ et $\langle x \rangle_N$ dénote $x \pmod{N}$.

Etant donné que $N = p^n$ a des facteurs autres que 1 et N (i.e. n'est pas premier), la projection DPRT provoque des redondances, c à d des pixels qui sont sélectionnés plus qu'une fois par les projections. Il s'agit des pixels de coordonnées multiples de p, p^2, \dots, p^n [A.K06]

La méthode d'inversion propose une correction de la redondance des pixels en calculant le nombre de fois qu'un pixel est présenté dans les projections. Un point $I(x, y)$ est alors reconstruit selon l'équation 2.26 :

$$I(x, y) = \varepsilon_0(x, y) - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i(x, y) - \frac{p}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} R_m(t). \quad (2.26)$$

où

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^{N-1} R_m(\langle x - my \rangle_N) + \sum_{s=0}^{\frac{N}{p}-1} R_s^\perp(\langle y - psx \rangle_N) \right],$$

$$\varepsilon_i = \frac{p-1}{p^i N} \left[\sum_{m=0}^{\frac{N}{p^i}-1} \sum_{j=0}^{p^i-1} R_m(\langle x - my \rangle_{\frac{N}{p^i}} + j \frac{N}{p^i}) + \sum_{s=0}^{\frac{N}{p^{i+1}}-1} \sum_{j=0}^{p^i-1} R_s^\perp(\langle y - psx \rangle_{\frac{N}{p^i}} + j \frac{N}{p^i}) \right]$$

La reconstruction se fait alors itérativement. A chaque itération, la reconstruction est raffinée en soustrayant les valeurs de pixels redondants jusqu'à l'obtention d'une image reconstruite exactement identique à l'image originale. La figure 4.2 illustre les différentes itérations de reconstruction. La figure 4.2(a) présente le résultat de reconstruction en utilisant uniquement $\varepsilon_0(x, y) - \frac{p}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} R_m(t)$. La figure 4.2(b) présente le résultat en soustrayant $\varepsilon_1(x, y)$. figure 4.2(c) montre le résultat en soustrayant $\varepsilon_2(x, y)$. La soustraction de $\varepsilon_3(x, y)$ et $\varepsilon_4(x, y)$ permet d'apporter toutes les corrections nécessaires et reproduit exactement l'image originale figure 4.2(d) [A.K06].



Figure 2.5 — Illustration des corrections effectuées à chaque itération pour inverser l'image de Lena de taille $3^5 \times 3^5$ [A.K06].

La complexité de la projection TDPR est de l'ordre de $O(N^3)$, tandis que l'inversion est de l'ordre de $O(N^3 \log_p N)$. Cette méthode permet une inversion exacte de la transformée de Radon en étendant la taille de l'image à $p^n \times p^n$. Cependant, la projection entraîne de la redondance de données ce qui amplifie le temps d'exécution de la reconstruction. Pour remédier à ce problème, Kingston propose une nouvelle base orthogonale non redondante de projection [A.K06].

2.3.4 La transformée de Radon Périodique Discrète Orthogonale (TRPDO)

Afin de réduire la redondance et réduire en conséquence la complexité, Lun et al. ont proposé une base de projection non redondante à travers la méthode " Transformée de radon périodique discrète orthogonale " [LHS03b][LHS03a]. Une base orthogonale a comme but de présenter tout pixel de l'image une et une seule fois par les projections. La projection orthogonale est composée de trois éléments qui sont X_m , X_s^\perp qui sont basés sur les projections DPRT R_m , R_s^\perp et la projection X_1 "Spatial alias " ayant les équations suivantes :

pour $m \in \mathbb{Z}_N$ et $s, t \in \mathbb{Z}_{N/2}$

$$X_m(t) = R_m(t) - R_m(t + N/2), \quad (2.27)$$

$$X_s^\perp(t) = R_s^\perp(t) - R_s^\perp(t + N/2), \quad (2.28)$$

$$X^1(x, y) = I(x, y) + I(x, y + \frac{N}{2}) + I(x + \frac{N}{2}, y) + I(x + \frac{N}{2}, y + \frac{N}{2}) \quad (2.29)$$

La transformée est ensuite appliquée sur le " Spatial alias " $X^1(x, y)$ pour avoir $(X^1)_m$, $(X^1)_s^\perp$ et X^2 . Ceci est répété jusqu'à la i ème résolution où X^i devienne de taille 1×1 présentant le terme DC de l'image. Le diagramme de la figure 2.6 montre le processus de projection pour $N = 16$.

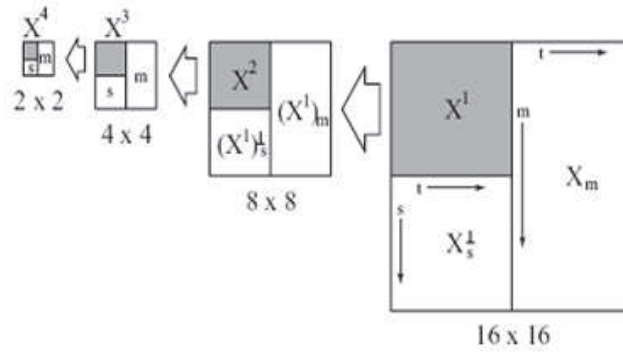


Figure 2.6 — Diagramme illustrant le processus multi-résolution de la transformée ODPRT appliquée sur une image de taille $2^4 \times 2^4$ [LHS03a].

La transformée est inversée à travers un processus multi-résolutoire similaire. Le terme DC X^n et les projections $(X^{n-1})_m$ et $(X^{n-1})_s^\perp$ sont sommés suivant l'équation ci-dessous pour reproduire X^{n-1} . De même, X^{n-1} , $(X^{n-1})_m$ et $(X^{n-1})_s^\perp$ sont sommés pour produire X^{n-2} . Cette opération est réitérée jusqu'à l'obtention de $X^0 = I(x, y)$.

L'inversion est assurée par l'équation 2.30 suivante :

$$X^{k-1}(x, y) = \frac{1}{2^{2k}} X^k(\langle X \rangle_{\frac{N}{2^k}}, \langle Y \rangle_{\frac{N}{2^k}}) + \frac{1}{2^k N} \left[\sum_{m=0}^{\frac{N}{2^k}-1} (X^i)_m(\langle y - mx \rangle_{\frac{N}{2^k}}) + \sum_{s=0}^{\frac{N}{2^{k+1}}-1} (X^i)_s^\perp(\langle x - 2sy \rangle_{\frac{N}{2^k}}) \right] \quad (2.30)$$

la projection ainsi que l'inversion ont une complexité d'ordre $O(N^3)$. Nous observons alors que cette méthode élimine la redondance, ce qui produit une réduction de la complexité en temps d'exécution. Cependant, le point faible de cette méthode est le passage nécessaire par la projection non orthogonale DPRT pour effectuer la projection orthogonale ODPRT.

2.3.5 La transformée de Radon Finie Générale (TRFG)

La Transformée de Radon Finie Générale (TRFG) [AI07] est une méthode discrète, exactement inversible basée sur des opérations arithmétiques. Elle est appliquée sur des images carrées de taille $N \times N$, avec N un entier quelconque tel que $N = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times p_3^{n_3} \dots$. Où p_i est un nombre premier et n_i est un entier positif quelconque. Cette méthode présente une extension naturelle de DPRT [AI07] appliquée sur des images carrées de taille $p^n \times p^n$.

Pour effectuer la projection, il faut définir les groupes de projection Θ_N (Projection set) composés de vecteurs suivant lesquels, la projection est opérée. pour $N = p^n$, un groupe de projections Θ_{p^n} contient les vecteurs de base $(m, 1)$ correspondant aux projections horizontales des droites d'équation : $x \equiv my + t \pmod{p^n}$, avec $0 \leq m < p^n$, et $(1, ps)$ pour les projections verticales des droites d'équation $y \equiv psx + t \pmod{p^n}$, $0 \leq s < p^{n-1}$. Ainsi, $\Theta_{p^n} = \{(m, 1), (1, ps)\}$.

Pour $N = p^{n_1} \times q^{n_2}$, p et q étant des entiers premiers, $\Theta_N = (q \times p^{n_1} + p \times q^{n_2}) \pmod{N}$. Un exemple de groupe de projections pour $N = 6$ est Θ_6 qui est obtenu à partir de deux groupes de projection des deux entiers premiers 2 et 3 : $\Theta_6 = 3\Theta_2 + 2\Theta_3$:

Une projection $R_{b,a}(t)$ est définie par la somme des pixels $I(x, y)$ tel que $ax \equiv by + t \pmod{N}$. La TRFG définie sur des images carrées de taille $N \times N$ est exprimée comme suit :

$$R_{b,a}(t) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x, y) \delta(\langle ax - by - t \rangle_N), \text{ pour } (b, a) \in \Theta_N. \quad (2.31)$$

Où $\langle x \rangle_n$ est à 1 pour $x \equiv 0 \pmod{n}$ et à 0 sinon.

Du même principe que la DPRT [A.K06], reconstruire la valeur originale du pixel $I(x, y)$ revient à sommer les projections des droites discrètes qui passent par ce pixel. Ceci incorpore le pixel (x, y) N fois et tous les autres pixels au moins une fois. Il

faut donc calculer le nombre de sélection d'un pixel par toutes les projections. Ceci permet de corriger la redondance des pixels lors de la rétroprojection définie comme suit $1/N \sum_{(b,a) \in \Theta_N} R_{b,a}(\langle ay - bx \rangle_N)$. Les pixels redondants qui requièrent la correction lors du processus de reconstruction ont les coordonnées égales aux facteurs F de N . Par exemple, pour $N = 3^5 = 45$, la correction doit être faite à l'échelle 15×15 , 9×9 , 5×5 et 3×3 . Une fois la correction effectuée sur la somme des projections qui sélectionnent $I(x, y)$, on soustrait I_{sum} (la somme des pixels de l'image) et on divise le reste par N . La rétroprojection au niveau des pixels à l'échelle de $F \times F$ se fait suivant l'équation suivante :

$$\xi_F^N(x, y) = \sum_{(b,a) \in \Theta_N} \sum_{k=0}^{N/F-1} R_{b,a}(\langle ay - bx + kF \rangle_N) \quad (2.32)$$

L'équation 2.32 de la rétroprojection au niveau de l'échelle $F \times F$ est utilisée pour corriger la redondance des pixels au niveau de la résolution $F \times F$ (9×9 par exemple) mais doit être multiplié par la fraction A_F suivante :

$$A_F = \frac{F}{N} \prod_{p|N/F} -p \text{ si } \gcd(p, F) = 1, 1 - p \text{ sinon.} \quad (2.33)$$

Cette technique est appliquée pour corriger la rétro projection à chaque résolution F facteur de N . L'inversion se fait alors suivant l'équation suivante :

$$I(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{F|N} A_F^N \xi_F^N(x, y). \quad (2.34)$$

Un exemple de reconstruction est illustré par la figure 2.7.

La complexité de la projection directe est de $O(N^3)$ et l'inversion est de l'ordre de $O(N^4)$. Cette méthode généralise la transformée de Radon Finie (TRF) proposée par Matus et Flusser [FF93] et la rend applicable sur des images carrées de taille quelconque. Néanmoins, cette méthode est restreinte aux images carrées.

2.3.6 La transformée Mojette (TM)

La transformée Mojette [GN97] est une version linéaire discrète exacte de la transformée de Radon. C'est une méthode simple qui ne nécessite que des opérations d'addition et de soustraction. La transformée Mojette 2D, dénotée par Mf produit des

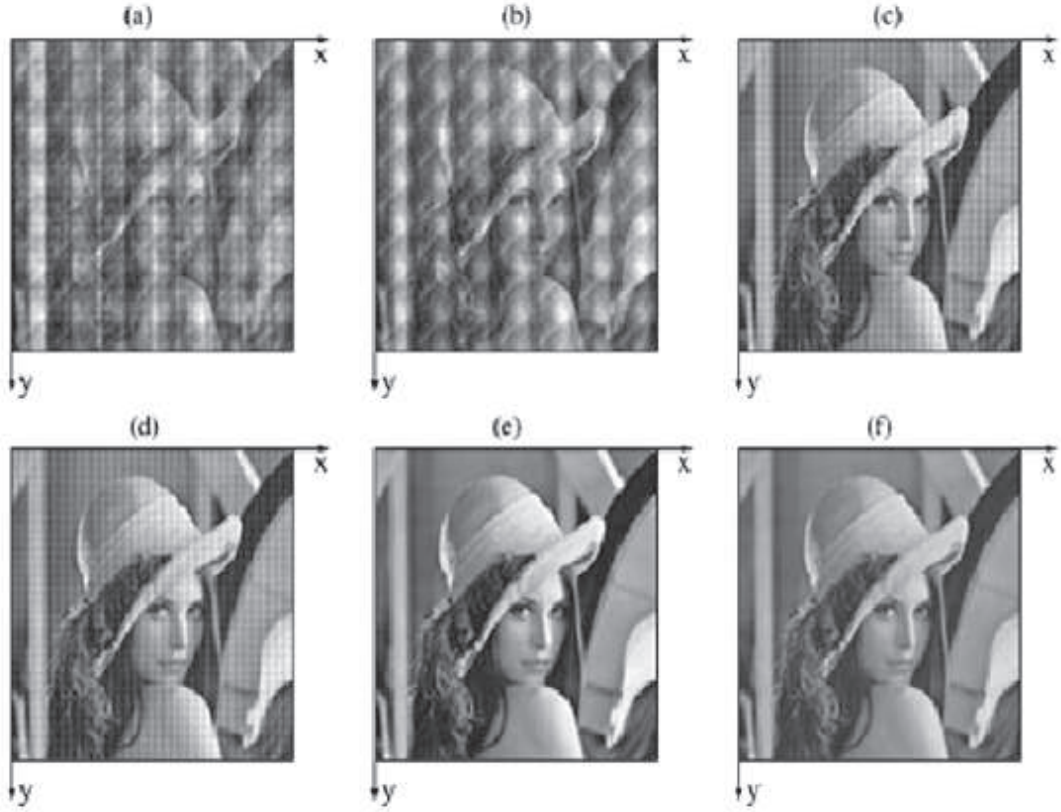


Figure 2.7 — Illustration des corrections effectuées à chaque itération sur l'image Lena de taille 175×175 [AI07].

droites de projection : $proj(p, q, b)$ pour des angles $\theta = \arctan(p/q)$ où le $pgcd(p, q) = 1$. L'équation de la projection Mojette est la suivante :

$$Mf(i, j) = proj(p, q, b) = \sum_i \sum_j f(i, j) \Delta(b + qK - pl). \quad (2.35)$$

Où Δ est le symbole de Kronecker et b est l'indice d'un point de la projection. Pour une image de taille $P \times Q$, le nombre de bins (points sélectionnés par une projection) générés par un vecteur de projection (p, q) est :

$$Nombre_{bins}(p, q) = (Q - 1)|p| + (P - 1)|q| + 1. \quad (2.36)$$

Pour qu'une image de taille $P \times Q$ soit reconstructible, les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$P \leq \sum_{i=1}^l |p_i| \text{ et } Q \leq \sum_{i=1}^l q_i$$

Un exemple de projection suivant le vecteur $(2, 1)$ est présenté dans la figure 2.8 :

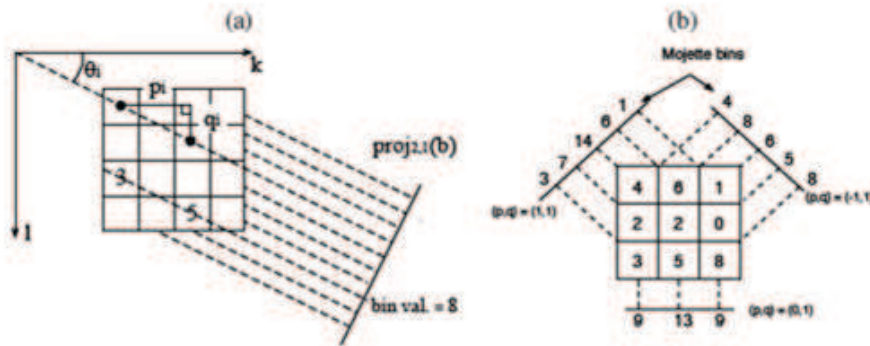


Figure 2.8 — Illustration de la transformée de Mojette avec des vecteurs (p_i, q_i) et des angles θ_i [GN97].

L'inversion de la transformée de Mojette est un simple algorithme qui consiste à chercher et mettre à jour les projections. Cette transformée permet à une simple procédure itérative de recouvrir l'image initiale. L'inversion consiste à chercher les projections contenant un seul pixel. Puis, la valeur de la projection est rétro-projetée et soustraite des autres projections contenant ce pixel [GN97]. Le nombre de pixels appartenant à ces bins est aussi décrémenté. La figure 2.9 montre trois premiers pas de la transformée inverse de Mojette correspondant aux projections de l'exemple de la figure 2.8.

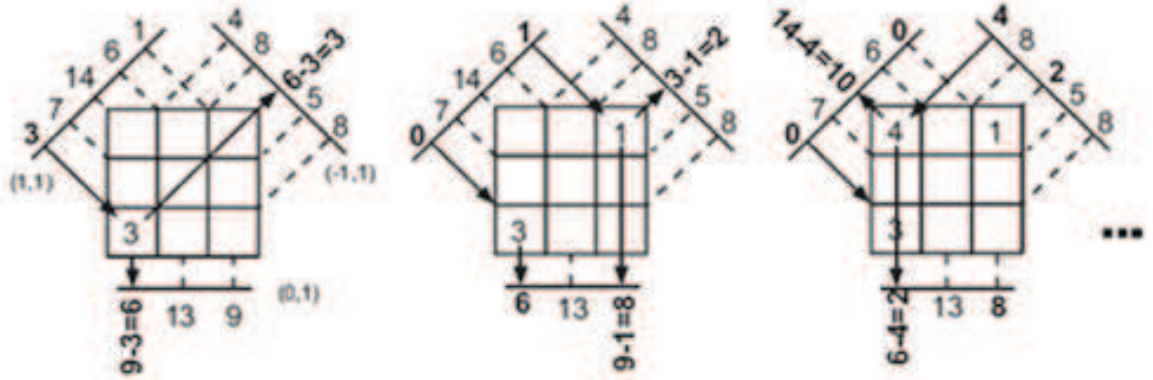


Figure 2.9 — Trois premières étapes pour inverser la transformée de Mojette[GN97].

L'ordre de complexité de cette projection et de la transformation inverse est $O(I \times P \times Q)$, où $P \times Q$ est la taille de l'image et I est le nombre de projections.

La transformée de Mojette, comme la DPRT, représente l'image comme un groupe de projections. Elle permet une reconstruction exacte via un nombre limité de projections (même avec une seule projection). Elle est appliquée sur des images de taille indéfinie et a une complexité faible $O(PQI)$. Par contre, le nombre de projections ainsi que leurs directions sont laissées au choix de l'utilisateur ce qui n'est pas toujours pratique vu que des conditions de constructibilité doivent être vérifiées.

2.4 La transformée de Radon Généralisée (TRG)

La TRG suscite un intérêt continu afin de définir la TR sur des courbes différentes des droites, pour lesquelles, la transformée reste inversible. Dans ce qui suit, nous présentons des travaux effectués dans ce cadre. Nous distinguons des méthodes non inversibles, destinées principalement au domaine de la reconnaissance de formes et d'autres inversibles, appliquées à la reconstruction tomographique.

2.4.1 Formalisme continu de la TRG de Deans

Un premier formalisme de la TRG était brièvement proposé par Deans [Dea81] :

$$R(\xi, p) = \int \int_D F(x, y) \delta[p - C(x, y; \xi)] dx dy. \quad (2.37)$$

où $F(x, y)$ présente l'image 2D et $p = C(x, y; \xi)$ dénote l'équation d'une famille de courbes dans le plan xy paramétrisé selon le scalaire p et l'ensemble de paramètres $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ composant le vecteur ξ .

Il est clair que $R(\xi, p)$ présentera une concentration d'énergie précisément aux valeurs p et ξ si l'image $F(x, y)$ comprend la courbe C . Par exemple, si F contient la courbe $y = x^2$ alors R présentera un pic (un point de forte intensité) au niveau des paramètres suivants : $p = 0$, $\xi_1 = 1$ et $\xi_2 = -1$.

2.4.2 Formalismes continu et discret de la TRG de Tofts

Peter Tofts dans ses travaux de thèse [Tof96b] a proposé un formalisme continu de la GRT :

$$R(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \delta[y - \phi(x; \xi)] dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \phi(x; \xi)) dx. \quad (2.38)$$

La GRT est définie comme étant l'intégration de $F(x, y)$ le long des courbes de projection ϕ .

En outre, Toft propose un formalisme discret de la GRT. Il commence par discrétiser l'espace de l'image et l'espace de paramètres. Il dénote par j le vecteur de paramètres η -dimensionnel défini comme suit :

$$j = (j_1, \dots, j_i, \dots, j_n)$$

La correspondance entre le vecteur j et le vecteur d'échantillonnage de paramètres est comme suit :

$$\xi = \xi^j = \theta(j) \text{ où } \xi_i^j = \theta_i(j_i)$$

$\theta_i(j_i)$ est la fonction d'échantillonnage de l'espace de Radon :

$$\xi_i^j = \theta_i(j_i) = \xi_{i, \min}^j + j_i \Delta_{\xi_i^j}; j_i = 0, \dots, J_i - 1. \quad (2.39)$$

où $\xi_{i, \min}^j$ représente la limite inférieure et $\Delta_{\xi_i^j}$ représente l'intervalle d'échantillonnage de ξ_i^j .

L'espace de l'image est supposé échantillonné uniformément comme suit :

$$x = x_m = x_{min} + m\Delta_x; m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

$$y = y_n = y_{min} + n\Delta_y; n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Ainsi, l'équation de la courbe de projection peut être discrétisée comme suit :

$$y = y_{min} + n\Delta_y = \Phi(x_{min} + m\Delta_x; \theta(j)) \quad (2.40)$$

$\Phi(m; j)$ est la version discrète de la courbe de projection $\Phi(m; \xi)$. La discrétisation de $\Phi(m, \xi)$ se base sur l'interpolation du plus proche voisin (Nearest neighbour approximation). Ainsi, $\Phi(m; j)$ est exprimé comme suit :

$$\Phi(m; j) = n = \left[\frac{\Phi(x_{min} + m\Delta_x; \theta(j)) - y_{min}}{\Delta_y} \right] \quad (2.41)$$

où $[x]$ retourne l'entier le plus proche de x .

Soit $F(m, n)$ la version discrète du signal $F(x, y)$, i.e., $F(m, n) = F(x_m, y_n)$. $R(j)$, la GRT discrète de $F(m, n)$, est alors définie comme suit :

$$R(j) = \sum_{m=0}^{M-1} F(m, \Phi(m; j)) \quad (2.42)$$

Toft propose un algorithme rapide pour l'estimation des paramètres d'une courbe à partir de l'espace de radon obtenu à partir de la GRT discrète. Il teste son algorithme sur des hyperboles synthétiques pour une application de sismologie. Nous présentons ici quelques résultats relevés de son travail. Fig.2.10 représente une image contenant des hyperboles synthétiques. L'espace de Radon (Fig.2.11) relatif à cette image relève des pics de coordonnées égales aux paramètres des hyperboles.

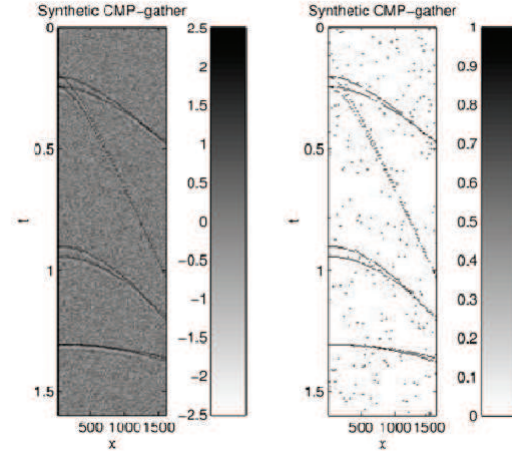


Figure 2.10 — Les images de test [Tof96b]. a) Image initiale contenant huit hyperboles. b) L'image est binarisée.

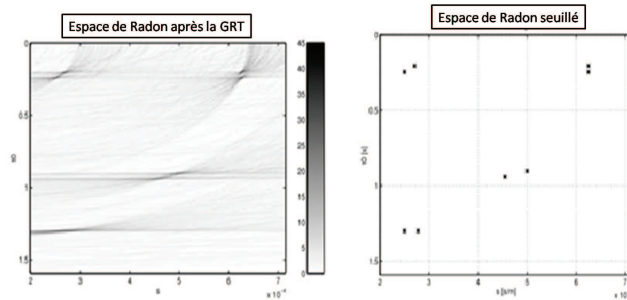


Figure 2.11 — Le résultat de l'application de la GRT [Tof96b]. a) Espace de Radon où on observe des pics au niveau des paramètres des hyperboles. b) l'espace de Radon est seuillé.

2.4.3 Formalismes continu et discret de la TRG pour la reconnaissance des sphères dans une image à D-dimensions de Cris

Cris et al. dans leur travail [HvGVvV05], proposent une discrétisation de la TRG fondée sur trois aspects. Le premier est la discrétisation en se basant sur des concepts de la théorie d'échantillonnage où ils dérivent des critères d'échantillonnage adéquats pour la discrétisation de la TRG. Le deuxième aspect est la précision, dans le sens de prouver que les maximums locaux (les pics) relèvent les vrais paramètres des courbes existantes dans l'image. Ils testent leur travail sur le cas particulier des sphères dans

des images à D dimensions (cercles pour une image 2D). Le troisième aspect est la réduction de la mémoire requise lors de la projection. Tout d'abord, ils définissent la TRG dans le domaine continu qui projette l'image à D dimensions $I(\vec{x})$ selon des formes arbitraires $c(\vec{p})$ où \vec{p} est le vecteur contenant les paramètres de la courbe c :

$$R_{c(\vec{p})}(\vec{p}) = \int_{\mathbb{R}^D} I(\vec{x})\delta(C(\vec{x}; \vec{p}))d\vec{x} \quad (2.43)$$

$C(\vec{x}; \vec{p})$ est l'ensemble des fonctions de contrainte (Constraint functions) qui définissent la forme $c(\vec{p})$. Pour un point de coordonnées \vec{x} qui appartient à la courbe, toutes les fonctions $C_i(\vec{x}; \vec{p})$ doivent retourner 0.

Leur version discrète de la TRG est présentée comme suit :

$$R(p) = \int_{\mathbb{R}^D} c(\vec{p}, \vec{x})I(\vec{x})d\vec{x} = \Delta\vec{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}^D} C(\vec{p}, n\Delta\vec{x})I(n\Delta\vec{x}) \quad (2.44)$$

où $\Delta\vec{x}$ représente la distance d'échantillonnage de \vec{x} . L'intégrale est remplacée par la somme. Un point de coordonnées \vec{x} est remplacé par $\vec{x}_n = n\Delta\vec{x}$. Nous reportons dans Fig.2.12 le résultat de leur méthode sur une image présentant différents cercles. L'extraction des centres des cercles ainsi que leurs rayons à partir de l'espace de Radon permet une estimation de l'image initiale (Fig.2.12.c).

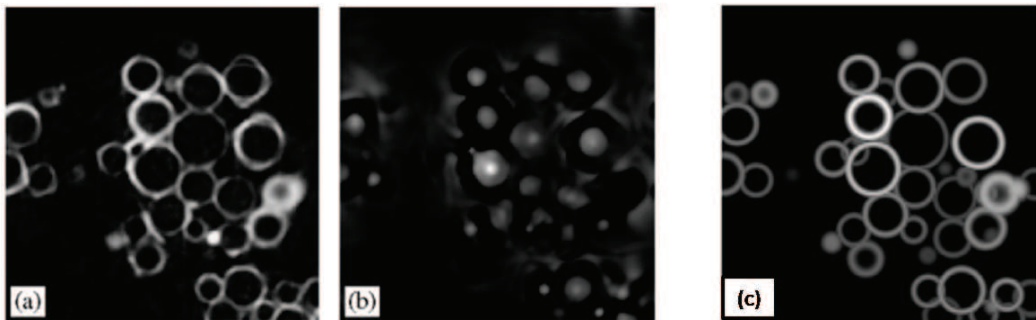


Figure 2.12 — Résultat de l'application de la TRG [HvGVvV05]. a) Image initiale
b) Les pics aux centres des cercles. d) L'image estimée

Cette transformée a été appliquée pour la reconnaissance des sphères à D dimensions. Les résultats expérimentaux ont montré une précision d'extraction. Le problème de réduction de la capacité de mémoire a été également traité dans cette approche. Cependant, bien que cette approche a un intérêt au domaine de reconnaissance de formes, n'est pas inversible, ce qui limite ses champs d'application.

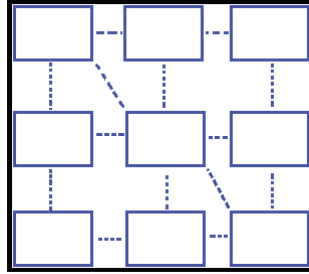


Figure 2.13 — Illustration de la projection sur l'image.

2.4.4 Approche proposée : La transformée de Radon Discrète Rectangulaire (TRDR)

Dans cette section, nous présentons la transformée de Radon discrète Rectangulaire que nous avons proposé dans le but de reconnaître des formes rectangulaires à partir des images satellitaires à haute résolution [EHR12a]. Cette transformée, à la différence de celles citées ci-dessus, tient en considération l'orientation des formes. Ainsi, les données extraites à partir de l'espace de Radon sont : la position, les paramètres et l'orientation des formes.

La TRDR est une transformée qui projette l'image initiale suivant des formes rectangulaires orientées selon un angle quelconque $\theta \in [0, 2\pi[$ et translatées horizontalement et verticalement. Cette nouvelle projection permet de balayer la totalité de l'image par l'objet à projeter selon la Figure 2.13 :

Soit une image de taille $(L \times N)$, $i_l(n)$ est un point de l'image, avec l , $(0 \leq l \leq L-1)$ est l'indice de lignes de l'image et n , $(0 \leq n \leq N-1)$ est l'indice de colonnes.

Une colonne d'indice n de l'image peut être représentée par le vecteur $i(n)$:

$$i(n) = \begin{bmatrix} i_0(n) \\ \dots \\ i_l(n) \\ \dots \\ i_{L-1}(n) \end{bmatrix}$$

Et toute l'image par le vecteur i :

$$i = \begin{bmatrix} i(0) \\ i(1) \\ \dots \\ \dots \\ i(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Nous proposons la transformée suivante :

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{m=M-1} R_k(m) i(n+m). \quad (2.46)$$

Cette transformée est basée sur la multiplication des matrices de projection R_k de taille $(M \times L)$ par les vecteurs de l'image initiale i .

Chaque ligne m , $0 \leq m \leq M-1$ de R_k sélectionne les pixels de la colonne $i(n+m)$ participant à la projection rectangulaire comme le montre la figure suivante :

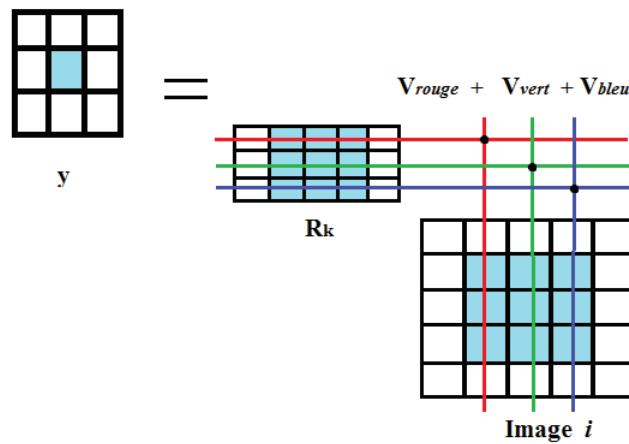


Figure 2.14 — Les lignes de la matrice R_k et les colonnes de l'image i qui participent au calcul de la projection y_k .

La construction de la matrice R_k consiste à dessiner le rectangle à projeter S de taille $M \times O$ à la position k , $0 \leq k \leq L - O - 1$. Une illustration est présentée par la figure 2.15.

Dans l'équation de projection 2.46, $y_k(n)$ correspond à la valeur de projection du rectangle S à la position (k, n) de l'image i .

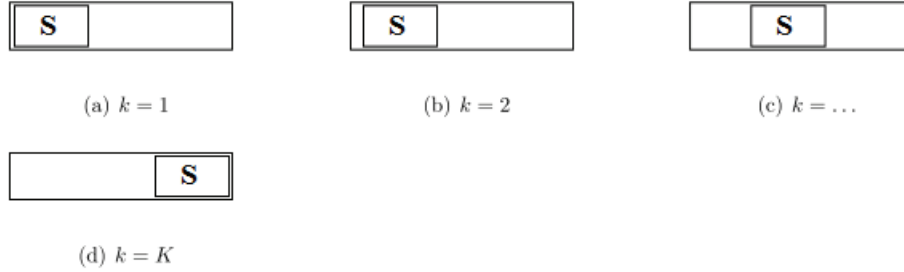


Figure 2.15 — Différentes matrices R_k .

$y(n)$ désigne le vecteur suivant :

$$y(n) = \begin{bmatrix} y_0(n) \\ \vdots \\ y_k(n) \\ \vdots \\ y_{(L-O-1)}(n) \end{bmatrix}$$

qui contient la valeur de toutes les projections des rectangles positionnés à la colonne n de l'image initiale.

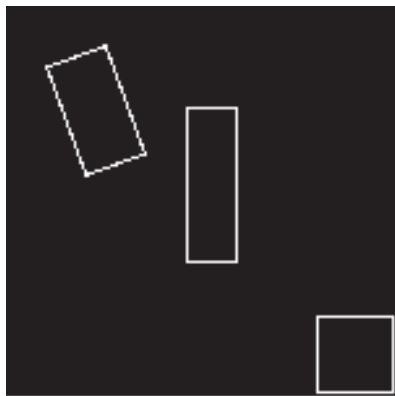
Ainsi, un pic de l'espace Radon rectangulaire y témoigne de l'existence d'un rectangle à l'image initiale à la même position (qui correspond au coin haut-gauche du rectangle).

La description ci-dessus présente l'approche TRDR seulement pour l'angle 0° . Pour définir la TRDR multidirectionnelle, nous étendons tout d'abord la dimension de y pour avoir une matrice à 3 dimensions ($K \times J \times \Theta$) qui prend en considération l'ensemble des angles d'orientation Θ . Chaque objet rectangulaire est pivoté selon l'angle $(90 - \theta)^\circ$ dans la matrice R_k où $\theta \in \Theta$.

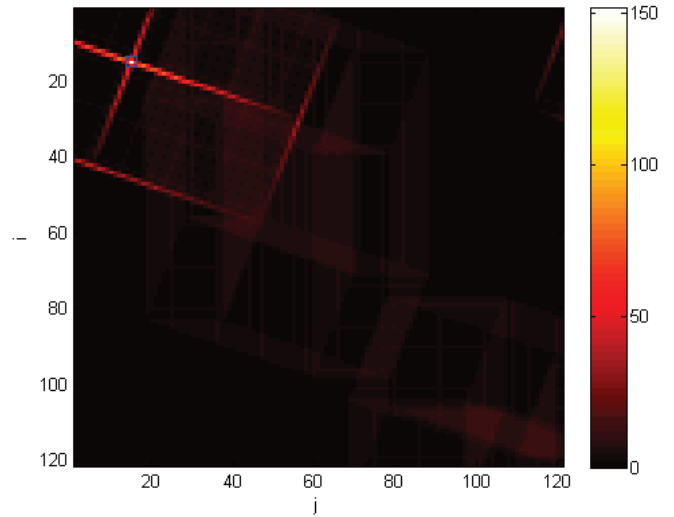
La formule suivante généralise la formule 2.46 pour produire une transformée multidirectionnelle :

$$y_{k,\theta}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} R_{k,\theta}(m) i(n+m). \quad (2.47)$$

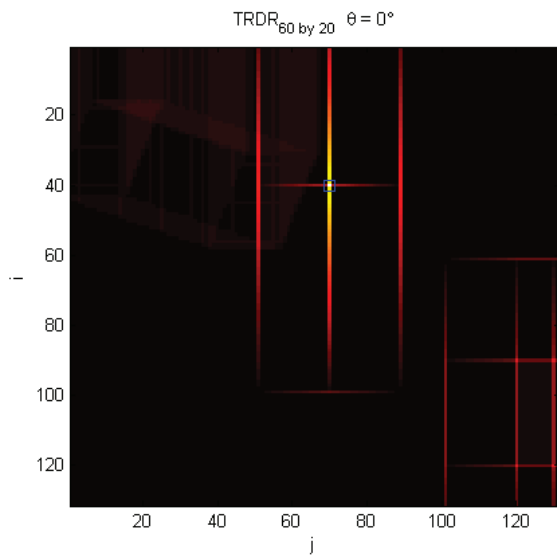
Les coordonnées (k, j) de chaque pic représentent le coin haut-gauche de la fenêtre minimale englobant la forme rectangulaire que nous recherchons. Pour $\theta = 0^\circ$, la fenêtre minimale coïncide avec le rectangle lui-même (figure 2.17(a)), mais en changement



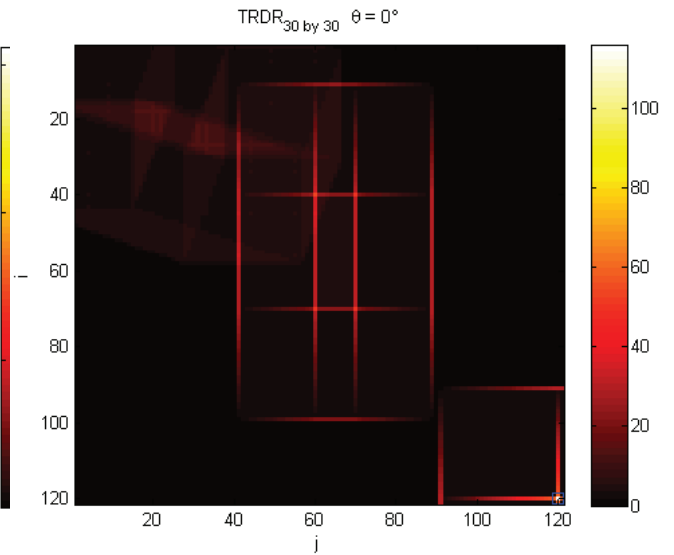
(a) l'image binaire de synthèse



(b) l'espace de TRDR pour un rectangle 25×45 et $\theta = 160^\circ$



(c) l'espace pour un rectangle 60×20 et $\theta = 0^\circ$



(d) l'espace pour un carré 30×30 et $\theta = 0^\circ$

Figure 2.16 — La visualisation des espaces TRDR (c.à.d. $y_{\theta,k}(j)$) pour des rectangles d'orientations et de tailles différentes

d'angle θ (figure 2.17(b)), le coin haut-gauche de la fenêtre minimale devient le point représentatif de l'objet.



Figure 2.17 — Exemples de boîtes englobantes (en blanc) d'objets rectangulaires (en noir).

La TRDR a été appliquée pour extraire les bâtiments d'une image Quickbird [EHR12a]. Nous avons appliqué la TRDR en prenant en considération les dimensions des bâtiments, qui ont généralement une hauteur qui appartient à $[19, 42]$, une largeur qui appartient à $[19, 40]$ et un angle d'orientation $\theta \in [0, \pi]$.

Les résultats expérimentaux sur cinq images satellitaires [EHR12a] ont donné un taux d'extraction de l'ordre de 87%. cette méthode pourrait donner un résultat meilleur, si les images ne contiennent que des bâtiments de forme rectangulaire. Les mesures de qualité et d'exactitude égales à 0,986 et 0,862 respectivement, sont considérés comme satisfaisants comparés avec d'autres approches d'extraction [EHR12a].

En revanche, cette transformée, bien que multidirectionnelle, est non inversible et est définie uniquement sur les rectangles. Dans la suite du chapitre, nous présentons des travaux réversibles de la TRG.

2.4.5 La transformée de Radon circulaire et Arc-circulaire

La transformée de Radon Circulaire (CRT) consiste à intégrer une fonction f le long d'un cercle de rayon t centré au point $(u, 0)$ sur l'axe des abscisses [T.94]. La CRT peut être définie comme suit :

$$g(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(t - \sqrt{(x-u)^2 + y^2}) dx dy. \quad (2.48)$$

Parmi tous les cercles du plan, Quinto [T.94] ne considère que les translations d'un cercle de rayon fixe ainsi que tous les cercles centrés dans un cercle et montre qu'ils

sont inversibles. Plusieurs inversions analytiques de la CRT ont été proposées. Une étude des différentes méthodes est présentée dans [RN01]. Cependant, l'implémentation numérique de ces méthodes dans le domaine discret pose des difficultés. Nous citons le problème d'interpolation des données dans le domaine du Fourier.

Etant donné que la reconstruction des images synthétiques de Radar (SAR) peut être modélisée par une inversion de Radon circulaire, la CRT a été proposée comme une alternative aux techniques usuelles de modélisation des images synthétiques de Radar [HA87].

Une transformée de Radon Arc-Circulaire (CART) définie sur les arcs de cercles a également été proposée [RN11b], [GRL11], [GRL12].

La CART a été présentée comme étant la base mathématique pour la formation d'images dans une nouvelle modalité d'imagerie tomographique, *Campton Scattered Tomography* (CST) [GRL11], [GRL12]. Cependant, les résultats des algorithmes de reconstruction de la CART ont prouvé qu'ils manquent de précision et qu'ils sont sensibles au bruit [GRL11], [GRL12].

La définition de la transformée de Radon circulaire en 3D a donné lieu à la transformée de Radon Sphérique (SRT) [And88]. Récemment, la SRT a été également proposée pour la modélisation 3D des images synthétiques de Radar [RRN13].

2.4.6 La transformée de Radon en V-line (TRV)

Cette transformée est définie sur des droites brisées formant la lettre V verticale [RN11a], [NR10], [MNTZ10]. Cette transformée a été utilisée pour une nouvelle modalité d'imagerie tomographique dont le principe consiste à réfléchir les radiations sur un miroire. La trajectoire des radiations prend alors la forme V comme le montre la figure 2.18. Cette nouvelle imagerie a l'avantage d'utiliser un détecteur uni-dimensionnel qui ne fait pas de rotations pour la reconstruction des images en 2 dimensions.

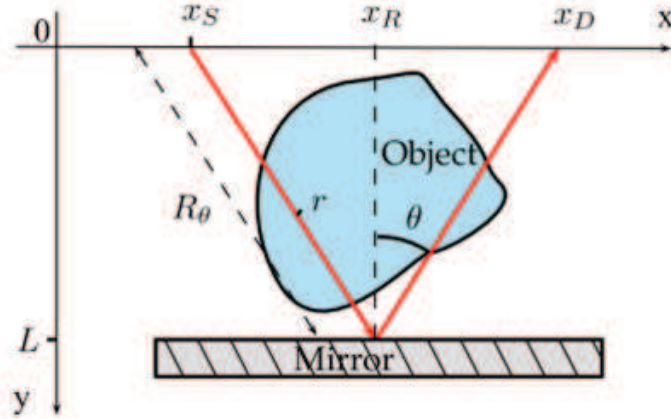


Figure 2.18 — Le principe de la modalité de projection TRV ainsi que les paramètres utilisés [RN11a].

La TRV est définie par cette expression :

$$g(x_R, \theta) = \int_0^\infty f(x_R + r \sin \theta, r \cos \theta) dr + \int_0^\infty f(x_R - r \sin \theta, r \cos \theta) dr \quad (2.49)$$

Une reconstruction analytique proposée dans [RN11a] et [MNTZ10] suit le même principe que la méthode Filtered Back-projection de la TR classique. Cependant, les résultats de l'implémentation numérique de l'inversion manquent de précision. L'image reconstruite est nettement dégradée par rapport à l'image initiale.

2.4.7 La transformée de Radon sur les courbes de Cormack

Dans son travail [M.81], Cormack a montré que la TR définie sur deux familles de courbes est inversible à travers une décomposition circulaire harmonique. Ces courbes sont définies comme les solutions d'une équation non linéaire différentielle de premier ordre qui est invariante par rapport à une inversion géométrique. Une courbe de Cormack C_σ est caractérisée par deux paramètres : ϕ , son angle de rotation autour de l'origine, et p , la longueur décrivant sa taille. Son équation dans l'espace de coordonnées polaire (r, θ) est exprimée comme suit :

$$\cos \sigma(\theta - \phi) = \left(\frac{p}{r}\right)^\sigma. \quad (2.50)$$

où $\sigma \in \mathbb{R} \setminus 0$ et $|\theta - \phi| < \Pi/2\sigma$.

Les courbes de Cormack peuvent être classées suivant la valeur de σ en deux familles. La première correspond aux structures les plus simples. Les cas les plus représentatives de cette famille sont les droites pour $\sigma = 1$, les paraboles pour $\sigma = 1/2$ et les hyperboles à une branche pour $\sigma = 2$.

La deuxième famille correspond aux courbes qui sont invariantes à la rotation. Pour $\sigma = -1/2, -1, -2$, nous trouvons les cardioides, les cercles centrés à l'origine et les lemnisactes de Bernoulli.

La transformée de Radon d'une fonction $f(r, \theta)$ sur les courbes de Cormack est donnée par l'équation suivante :

$$g(p, \theta) = \int_{(r, \theta) \in C_\sigma} dl_\sigma f(r, \theta). \quad (2.51)$$

où dl_σ est la ligne élémentaire de C_σ .

Les courbes de Cormack ont été étendues par [TN11] pour supporter une troisième famille de courbes dont les plus représentatives sont les arcs de cercle qui s'intersectent orthogonalement à un cercle fixe.

2.5 Récapitulatif et objectifs de notre recherche

Plusieurs études ont été portées sur la TRG. Nous distinguons des approches non inversibles qui, étant similaires à la transformée de Hough généralisée, peuvent être appliquées à la reconnaissance des formes. En effet, ces méthodes sont capables de concentrer l'énergie d'une courbe en un point de forte intensité. Ainsi, la recherche de formes est réduite à la détection des pics dans le domaine transformé. En revanche, nous avons remarqué que les formalismes proposés ne tiennent pas en compte l'orientation des courbes. Elles ne gardent pas alors l'aspect multi-directionnel de la TR classique. D'autres approches inversibles ont été proposées pour de nouvelles modalités de reconstruction tomographiques. La plus généralisée de ces transformées est celle de Cormack[M.81] vu la variété des courbes de projection. Cependant, nous constatons que plusieurs conditions sont liées aux courbes de Cormack comme la symétrie et la régularité. De ce fait, l'étendue des courbes à projeter reste limitée.

Notons également que bien que cette généralisation admet une formule d'inversion explicite, l'implémentation numérique n'est pas triviale. Les algorithmes effectués pour la

reconstruction des images synthétiques ont donné des résultats fidèles à l'image initiale mais non précis. Nous constatons alors que d'une manière similaire à la TR classique, la discrétisation des formules d'inversion de la TRG ne donnent pas la précision souhaitée, voire l'exactitude.

Compte tenu de ces remarques, nous avons fixé comme objectif de réaliser une transformée discrète de Radon généralisée qui satisfait à ces trois critères :

- Une généralisation large : Nous cherchons à définir la projection sur tout type de courbes. Nous limitons alors les contraintes et les critères que les courbes de projection doivent vérifier. La généralisation des courbes permettrait d'élargir les champs d'application, notamment la reconnaissance de grandes variétés de formes.

- La réversibilité exacte :

Nous visons à réaliser une transformée "exactement" réversible dans le sens où la transformée inverse permet une reconstruction égale à l'image initiale, c'est-à-dire sans aucune perte d'informations.

Nous avons alors choisi de rechercher à inverser la TRG directement dans le domaine discret sans passer par une inversion analytique. Pour ce faire, nous nous inspirons des méthodes discrètes existantes de la transformée de Radon exactement réversibles présentées dans ce chapitre.

- L'aspect multi-directionnel : La transformée de Radon projette les droites suivant différentes orientations d'angle θ . De même, les courbes de projection de la nouvelle transformée devraient suivre différents chemins avec différentes orientations possibles. L'angle θ serait un paramètre fondamentale qui devrait figurer parmi les paramètres du domaine transformé.

Afin de mettre au point l'intérêt de la nouvelle transformée, Nous visons à l'appliquer dans le domaine de la reconnaissance de formes et de comparer les résultats obtenus avec ceux des méthodes existantes.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général des différentes méthodes d'inversion discrètes et analytiques de la TR classique et généralisée. Cette étude nous a permis de nous fixer comme objectif de réaliser une transformée de Radon généralisée

discrète, exactement inversible et multi-directionnelle. Dans le chapitre suivant, nous présenterons notre première contribution qui consiste en un formalisme algébrique de la TRG répondant aux critères souhaités.

Approche proposée : La Transformée de Radon Généralisée Discrète Multi-Directionnelle

3.1 Introduction

La transformée de Radon (TR) est située parmi les transformées géométriques les plus anciennes dont le principe consiste à décomposer l'image suivant des droites rectilignes. La généralisation de la nature des courbes de projection de Radon s'avère intéressante vu son apport à divers domaines comme la tomographie, la reconnaissance des formes et le débruitage.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche de la TRG qui est multi modale, exactement inversible et multi directionnelle que nous avons appelé "Transformée de Radon Généralisée Discrète multi-directionnelle"(GMDRT). Nous commençons par présenter la motivation de l'introduction de cette méthode. Nous présentons par la suite le formalisme discret de la GMDRT ainsi que son algorithme d'inversion. Nous présentons ensuite l'intérêt de la méthode dans le domaine de la reconnaissance des formes à travers une application d'extraction de bâtiments à partir des images de télédétection. Une discussion est introduite à la fin de ce chapitre pour comparer notre travail avec d'autres méthodes existantes.

3.2 Motivation

Nous avons montré dans le chapitre précédent que les approches existantes de la transformée de Radon généralisée (TRG) peuvent être classées en deux familles. La première comprend des approches généralisées à tous les types de courbes mais non inversibles, tandis que la deuxième famille regroupe des approches qui sont bien inversibles mais limitées à des courbes bien déterminées.

Nous portons ici un intérêt particulier aux approches de la première famille puisqu'il est de nos objectifs de généraliser les courbes de projection sans poser de contraintes sur leur définition.

Un formalisme représentatif de la première famille est celui de Deans [Dea81] :

$$\begin{aligned} A(\alpha_1, \dots, \alpha_k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(y) - t) dx dy. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(y) + t, y) dy. \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ représente la courbe de projection, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les k paramètres de φ et t est le pas de translation de la courbe dans la direction horizontale. La TRG comme exprimée dans l'équation.3.1 permet la projection d'une fonction f selon des courbes quelconques. Cependant, cette généralisation s'accompagne de plusieurs limites, à savoir l'irréversibilité et l'absence de l'aspect multidirectionnel. En effet, ce formalisme ne permet pas de varier les orientations des courbes de projection. Les courbes projetées sont par définition orientées suivant la direction horizontale. De plus, la translation des courbes est assurée par le paramètre de translation t qui permet de déplacer les courbes dans une direction unique qui est la direction horizontale. Ceci implique, qu'à la différence de la TR classique qui permet d'extraire des droites dans n'importe quelle orientation, la TRG ne détecte que les courbes orientées suivant la direction horizontale. La figure3.1 illustre la limite de la TRG dans la détection des courbes orientées suivant un angle $\theta \neq 0$. La figure3.1 montre la capacité de la TR à détecter des droites de différentes directions (Fig3.1.a et Fig3.1.b). En contre partie, la TRG telle que définie ci-dessus, n'a pas détecté les paraboles de direction non horizontale ou celles verticalement translatées (Fig3.1.(e) et Fig3.1.(f)).

La GMDRT est proposée comme nouvelle approche de la TRG qui assure à la fois la projection des courbes suivant différents angles d'orientation et la reconstruction

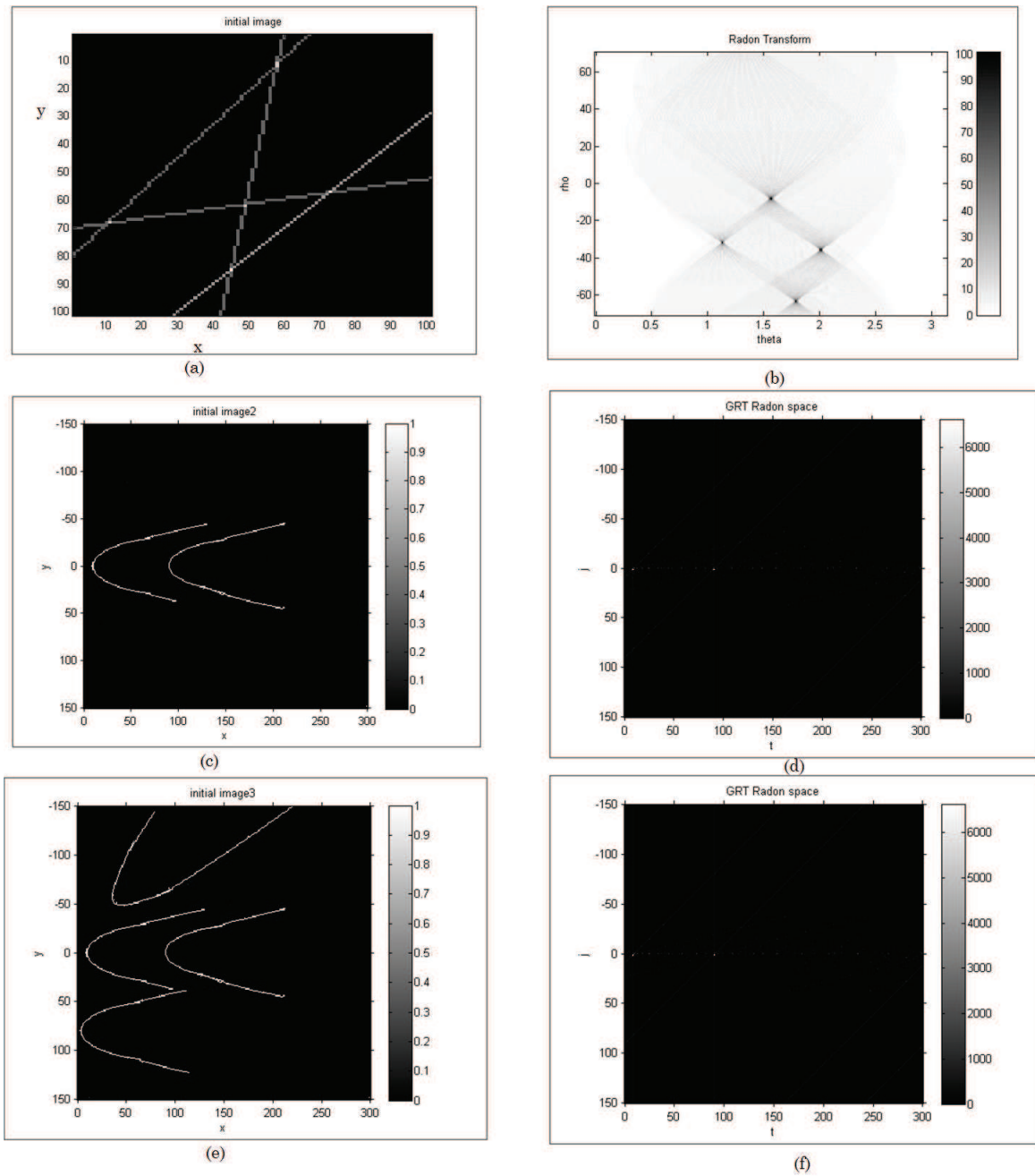


Figure 3.1 — Absence de l'aspect multidirectionnel à la TRG

exacte de l'image initiale à partir de l'espace de Radon.

3.3 Formalisme de La transformée de Radon Généralisée discrète multi-directionnelle

Notre approche, la GMDRT [EFNAH13] est inspirée de la transformée de Radon Discrète (DRT) exactement inversible de Beylkin [Bey87] présenté dans le chapitre précédent. Notre travail généralise la DRT pour permettre une projection multi-directionnelle suivant des formes et des courbes arbitraires.

La GMDRT consiste à projeter une image 2D discrète suivant des courbes paramétrées φ qui sont orientées selon un angle θ et translattées suivant les deux axes horizontale et verticale. Ceci permet aux courbes de parcourir la totalité de l'image dans toutes les directions comme il est montré dans Fig.3.2.

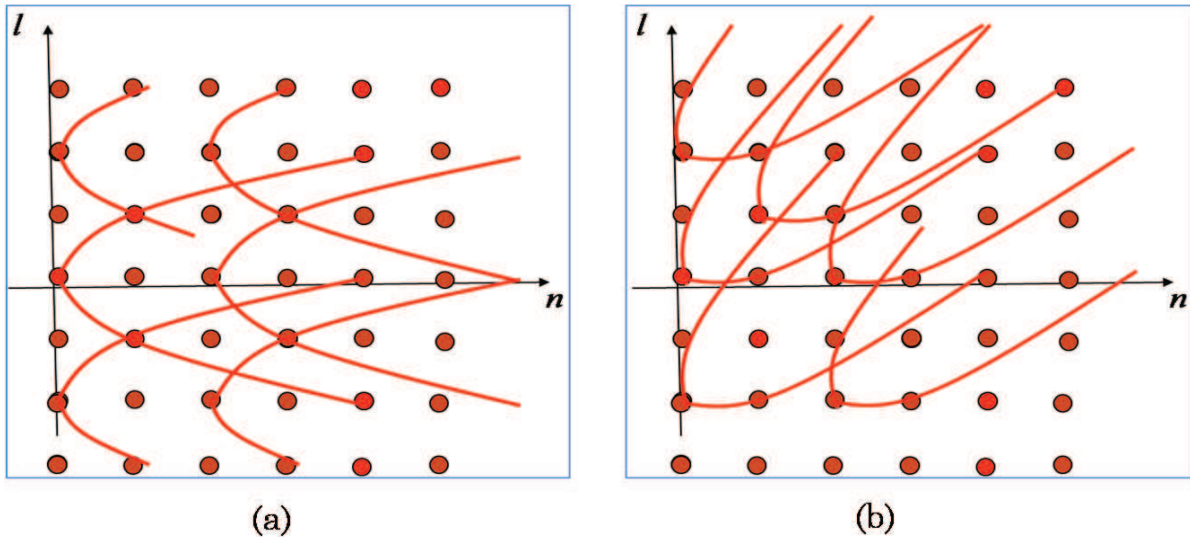


Figure 3.2 — Projection suivant une courbe parabolique d'équation $\varphi(l) = l^2$.

(a) : Les courbes suivent la direction horizontale et sont translattées dans les deux directions horizontales et verticales. (b) : Les courbes sont orientées suivant l'angle

$\theta = \pi/4$ et translattées dans les deux directions horizontales et verticales.

Soit $I(l, n)$ une image à deux dimensions de lignes $l, -L \leq l \leq L$ et de colonnes $n, 0 \leq n \leq N - 1$. Une colonne n de l'image peut être représentée par un vecteur $I(n)$:

$$I(n) = \begin{bmatrix} I_{-L}(n) \\ \dots \\ I_0(n) \\ \dots \\ I_L(n) \end{bmatrix} \text{ et la totalité de l'image } I = \begin{bmatrix} I(0) \\ I(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ I_L(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

On suppose que l'image I est périodique de période égale à N . La condition de périodicité est exprimée comme suit :

$$I(n) = I(n + N) \quad (3.3)$$

La condition 3.3 est la même que celle de la transformée de Fourier Discrète (DFT) qui est définie sur des séquences périodiques.

La GMDRT est définie par un formalisme algébrique exprimant la projection sous forme d'un ensemble de produits entre des matrices de projection et les vecteurs de l'image.

Les matrices de projection permettent de sélectionner les pixels de l'image qui appartiennent à une courbe de projection φ . Les entrées d'une matrice de projection sont alors composées de 1 et 0.

Une multiplication de la matrice de projection avec l'image I entraîne que les pixels qui se croisent avec les entrées égales à 1 seront comptabilisés dans la somme de projection, alors que ceux qui coïncident avec des entrées nulles seront exclues.

Deux points devraient être éclairés par rapport à la GMDRT. Premièrement, nous devons montrer comment une discrétisation de la TRG multidirectionnelle pourra être définie sous la forme d'un produit matrice/vecteur. Deuxièmement, nous devons montrer comment inverser la GMDRT.

Nous proposons l'expression suivante comme formalisme de la GMDRT :

$$y_\theta(n) = \sum_{m=-M}^{m=M} R_{m,\theta} I(n + m) \quad (3.4)$$

où $y_\theta(n)$ représente la projection de GMDRT d'angle θ . M représente le nombre de colonnes au voisinage du vecteur $I(n)$ impliqué dans le calcul de $y_\theta(n)$. Nous notons que $N = 2M + 1$.

$R_{m,\theta}$ est la matrice de projection de taille $(2L + 1) \times (2L + 1)$ dont les entrées non nulles sélectionnent les éléments de $I(n + m)$ qui contribuent à la projection $y_\theta(n)$.

Chaque ligne $j, -L \leq j \leq L$ de $R_{m,\theta}$ sélectionne de $I(n + m)$ les pixels qui appartiennent à la courbe φ de position (j, n) .

Chaque entrée j du vecteur $y_\theta(n)$, $-L \leq j \leq L$, dénote le résultat d'une projection de I par une courbe φ positionnée à (j, n) et orientée suivant l'angle θ . C'est ainsi que le vecteur $y_\theta(n)$ représente l'ensemble de projections de I par les courbes φ positionnées à la colonne n et orientées suivant θ .

y_θ représente l'ensemble des projections d'angle θ suivant des courbes φ déplacées dans la totalité de l'image.

$$y_\theta(n) = \begin{bmatrix} y_\theta(-L, n) \\ \dots \\ y_\theta(j, n) \\ \dots \\ y_\theta(L, n) \end{bmatrix} \text{ and } y_\theta = \begin{bmatrix} y_\theta(0) \\ y_\theta(1) \\ \dots \\ y_\theta(N - 1) \end{bmatrix}$$

La figure 3.3 présente $R_{0,0}$ et $R_{1,0}$ qui déterminent respectivement à partir des colonnes $I(0)$ et $I(1)$, les pixels qui se croisent avec des courbes paraboliques d'équation $\varphi(l) = l^2$ et dont les sommets sont positionnés à la colonne d'indice 0.

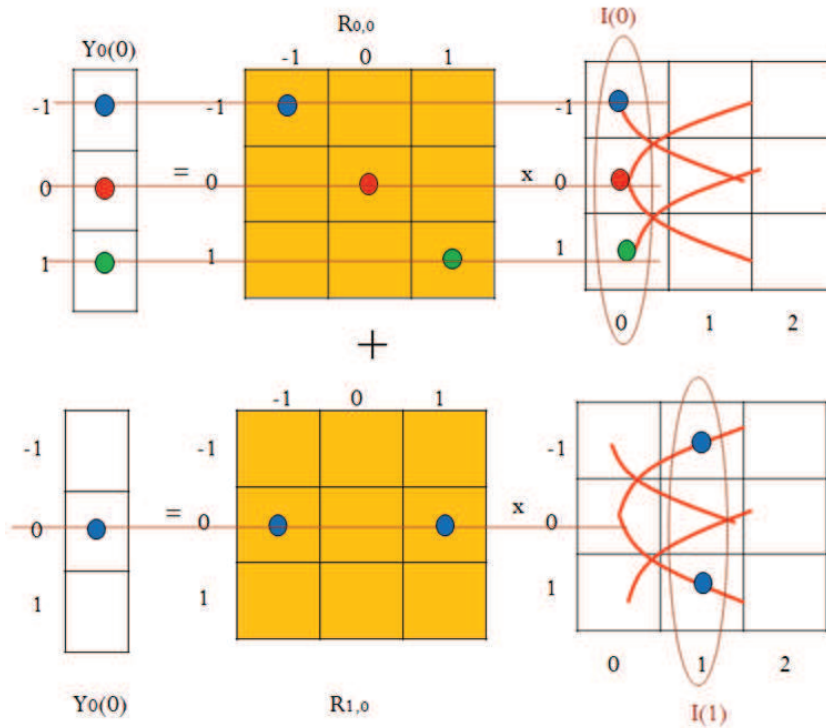


Figure 3.3 — Une projection des courbes paraboliques horizontales qui sont verticalement translatées , $\theta = 0$, $M = 1$, $L = 1$, $N = 3$, $n = 0$.

La question qui se pose ici est comment définir les matrices de projection $R_{m,\theta}$ qui, une fois multipliées par les vecteurs $I(n)$, projettent l'image suivant des courbes orientées selon θ (Eq3.4).

La projection de la GMDRT peut être illustrée par une analogie avec le processus d'appariement modèle (Template matching). Le modèle ici est la courbe φ pivotée suivant θ et les matrices $R_{m,\theta}$ sont les projections verticales du modèle (Fig. 3.4).

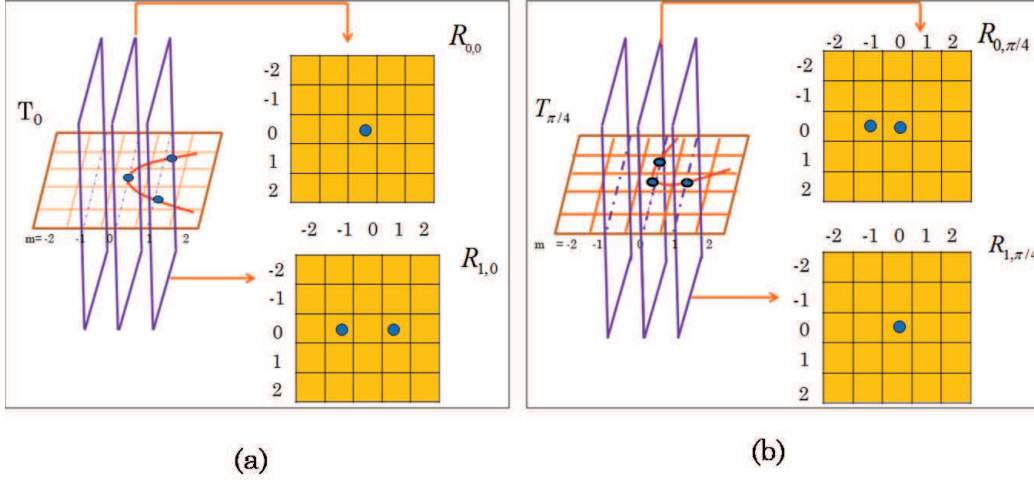


Figure 3.4 — Construction des lignes centrales des matrices de sélection. (a) : La construction des lignes centrales des matrices de sélection $R_{0,0}$ et $R_{1,0}$. (b) : La construction des lignes centrales des matrices $R_{0,\pi/4}$ et $R_{1,\pi/4}$

Soit T_θ la matrice du modèle de taille $(2L+1) \times (2M+1)$ dans laquelle nous traçons la courbe de projection pivotée selon θ en se basant sur l'équation suivante :

$$T_\theta(l, m) = \delta(m' - \varphi(l')) \quad (3.5)$$

où

$$(l', m') = Rt_{\theta,(a,b)}^{-1}(l, m) = ([[(l - a) \cos \theta + (m - b) \sin \theta + a], [-(l - a) \sin \theta + (m - b) \cos \theta + b]).$$

Les lignes de la matrice T_θ sont indexées par l , $-L \leq l \leq L$ et les colonnes par m , $-M \leq m \leq M$ avec $N = 2M + 1$.

$Rt_{\theta,(a,b)}^{-1}$ indique l'opérateur de rotation planaire autour d'un point fixe (a, b) et d'angle θ . L'opérateur $[.]$ arrondit l' et m' à la valeur la plus proche dans respectivement $[-L, L]$ et $[-M, M]$.

(a, b) représente les coordonnées qui dénotent respectivement le pas de translation horizontale et verticale de la courbe φ . Les Figures 3.4.a et 3.4.b illustrent un exemple d'une matrice modèle dans laquelle nous avons tracé une courbe parabolique.

Les matrices $R_{m,\theta}$ sont les projections verticales de la matrice modèle T_θ . Une projection verticale signifie que chaque colonne m dans T_θ est égale à la ligne centrale (i.e., ligne 0) de $R_{m,\theta}$:

$$R_{m,\theta}(0, l) = T_\theta(l, m), \text{ pour } -L \leq l \leq L \quad (3.6)$$

Chaque colonne m en T_θ spécifie une matrice de projection $R_{m,\theta}$. Ainsi, $(2M + 1)$ matrices de projection seront construites pour chaque T_θ . Une projection verticale est illustrée dans la Figure 3.4.

L'équation 3.6 ne définit que la ligne centrale de la matrice de projection $R_{m,\theta}$ ce qui ne permet de sélectionner que les courbes centrales (i.e., les courbes positionnées à la ligne 0).

La sélection de toutes les courbes indépendamment de leurs positions dans l'image nécessite la construction de toutes les lignes de la matrice de projection $R_{m,\theta}$.

D'une manière intuitive, traduire verticalement la courbe φ à la position j dans la matrice modèle T_θ et effectuer par la suite la projection verticale sur la ligne j à la place de la ligne 0 de la matrice $R_{m,\theta}$, entraîne la construction de toutes les lignes j .

Autrement, le même résultat peut être obtenu en projetant en première étape la ligne centrale de $R_{m,\theta}$ puis en translatant les points de la ligne centrale par le vecteur (j, j) comme il est illustré dans la figure 3.5. La construction de $R_{m,\theta}$ peut être analytiquement décrite comme suit :

$$R_{m,\theta}(j, l) = \begin{cases} \text{si } L < l - j \leq 2L \text{ alors } T_\theta(\langle l - j \rangle_{-(2L+1)}, m) \\ \text{si } -2L \leq l - j < -L \text{ alors } T_\theta(\langle l - j \rangle_{(2L+1)}, m) \\ \text{sinon, } T_\theta(l - j, m) \end{cases} \quad (3.7)$$

où $-L \leq j \leq L$ et $-L \leq l \leq L$.

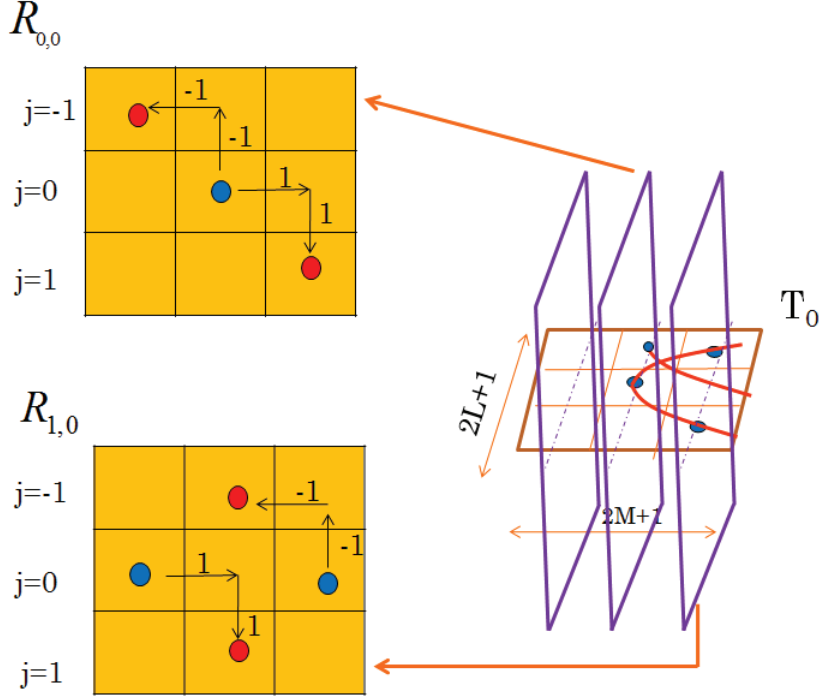


Figure 3.5 — La construction finale de $R_{m,0}$: Les pixels rouges sont générés par la translation du vecteur (j, j) .

En substituant T_θ par sa formule dans l'équation 3.5, nous pouvons directement construire les matrices $R_{m,\theta}$ sans le recours à la construction des matrices modèles T_θ :

$$R_{m,\theta}(j, l) = \delta(m' - \varphi(l')) \quad (3.8)$$

où

$$(l', m') = \begin{cases} Rt_{\theta,(a,b)}^{-1}(\langle l - j \rangle_{-(2L+1)}, m) \text{ si } L < l - j \leq 2L \\ Rt_{\theta,(a,b)}^{-1}(\langle l - j \rangle_{(2L+1)}, m) \text{ si } -2L \leq l - j < -L, \\ Rt_{\theta,(a,b)}^{-1}(l - j, m) \text{ si } -L \leq l - j \leq L \end{cases}$$

3.4 Inversion de la transformée de Radon Généralisée Discrète Multi-Directionnelle

Le problème inverse de la GMDRT est traité comme étant un problème d'algèbre linéaire.

En effet, le formalisme de la GMDRT comme exprimé dans Eq.3.4 peut être écrit sous une forme compacte :

$$y_\theta = R_\theta I \quad (3.9)$$

Où R_θ est une matrice circulante par blocs contenant l'ensemble des matrices $R_{m,\theta}$ et I est l'image initiale en empilant ses colonnes. L'équation suivante illustre R_θ pour $N = 3, L = 1$ et $M = 1$:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} R_{0,\theta} & R_{1,\theta} & R_{-1,\theta} \\ R_{-1,\theta} & R_{0,\theta} & R_{1,\theta} \\ R_{1,\theta} & R_{-1,\theta} & R_{0,\theta} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La méthode d'inversion proposée consiste à la résolution du système linéaire Eq.3.9 et présente un cas particulier de la méthode d'inversion exacte de Beylkin [Bey87] étant donné que R_θ est par définition une matrice carrée.

Nous décomposons ce système linéaire en un ensemble de petits systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel dont la résolution conduit, sous certaines conditions, à une inversion unique et exacte.

Si la projection $y_\theta(n)$ est définie par Eq.3.4 et si $I(n)$ satisfait à la condition 3.3, nous avons alors :

$$\hat{y}_\theta(k) = \hat{R}_\theta(k) \times \hat{I}(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.11)$$

où $\hat{y}_\theta(k)$ et $\hat{I}(k)$ sont les transformées de Fourier discrètes de respectivement $y_\theta(n)$ et $I(n)$:

$$\hat{y}_\theta(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} y_\theta(n) \exp(2\pi ink/N).$$

et

$$\hat{I}(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} I(n) \exp(2\pi ink/N).$$

Les matrices $\hat{R}_\theta(k)$ sont construites comme suit :

$$\hat{R}_\theta(k) = \sum_{m=-M}^{m=M} R_{m,\theta} \exp(-2\pi imk/N)$$

L'équation 3.11 est obtenue en appliquant la transformée de Fourier de l'équation de projection 3.4 à chaque côté de l'équation 3.4 comme suit :

$$\hat{y}_\theta(k) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{N-1} R_{m,\theta} I(n+m) \exp(2\pi ink/N).$$

En posant $\tilde{n} = n + m$, nous aurons :

$$\hat{y}_\theta(k) = \sum_{m=-M}^M R_{m,\theta} \exp(-2\pi imk/N) \sum_{\tilde{n}=m}^{\tilde{n}=N+m-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N).$$

Or, la condition 3.3 implique que :

$$\sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{n}=m-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N) = \sum_{\tilde{n}=N}^{\tilde{n}=N+m-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N).$$

Et comme nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{m=-M}^M R_{m,\theta} \exp(-2\pi imk/N) \sum_{\tilde{n}=m}^{\tilde{n}=N+m-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N) \\ = \sum_{\tilde{n}=m}^{\tilde{n}=N-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N) + \sum_{\tilde{n}=N}^{\tilde{n}=N+m-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N) \end{aligned}$$

alors,

$$\hat{y}_\theta(k) = \sum_{m=-M}^M R_{m,\theta} \exp(-2\pi imk/N) \sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{n}=N-1} I(\tilde{n}) \exp(2\pi i\tilde{n}k/N).$$

qui est la même que l'équation 3.11.

L'inversion de la GMDRT est alors fondée sur la résolution de petits systèmes d'équations linéaires exprimés dans le domaine fréquentiel par l'équation 3.11.

À condition qu'aucune des matrices $\hat{R}_\theta(k)$ n'a un déterminant égal à zéro, l'inversion est exacte et unique. La procédure d'inversion de la GMDRT suit les trois étapes suivantes :

1. Effectuer la transformée de fourier de $y_\theta(n)$ pour un θ choisi.
2. Pour tout $k, 0 \leq k \leq N - 1$, résoudre le système linéaire de l'équation 3.11 pour obtenir $\hat{I}(k)$.
3. Effectuer la transformée de fourier inverse de $\hat{I}(k)$ pour trouver $I(n)$.

3.5 La transformée de Radon Généralisée Discrète Multi-Directionnelle rapide

La GMDRT rapide consiste à déterminer les projections $y_\theta(n)$ à partir du domaine fréquentiel en exploitant la transformée de Fourier rapide (la FFT). Nous nous basons alors sur l'équation du système linéaire fréquentiel 3.11 dont la résolution donne $\hat{y}_\theta(k)$, la transformée de Fourier de $y_\theta(n)$.

Pour déterminer une projection $y_\theta(n)$, nous procédons alors comme suit :

1. La FFT du vecteur de l'image $I(n)$ pour déterminer $\hat{I}(k)$, le nombre d'opérations est de l'ordre de $(2L + 1) \times N \times \log(N)$.
2. La multiplication entre les matrices $\hat{R}_\theta(k)$ et les vecteur $\hat{I}(k)$ (3.11), le nombre d'opérations est de l'ordre de $(2L + 1) \times (2L + 1) \times N$.
3. La FFT Inverse de $\hat{y}_\theta(k)$ pour déterminer $y_\theta(n)$, le nombre d'opérations est de l'ordre de $(2L + 1) \times N \times \log(N)$.

La construction des matrices $\hat{R}_\theta(k)$ doit être précédée par la construction des matrices de projection $R_{m,\theta}$ comme le montre l'équation 3.11.

Cependant, il est bien évident qu'il est plus rapide de définir les matrices de projection $\hat{R}_\theta(k)$ directement dans le domaine fréquentiel sans passer par la construction des matrices $R_{m,\theta}$:

$$\hat{R}_\theta(k)(j, l) = \exp(-2\pi i \varphi_\theta(j, l)) \quad (3.12)$$

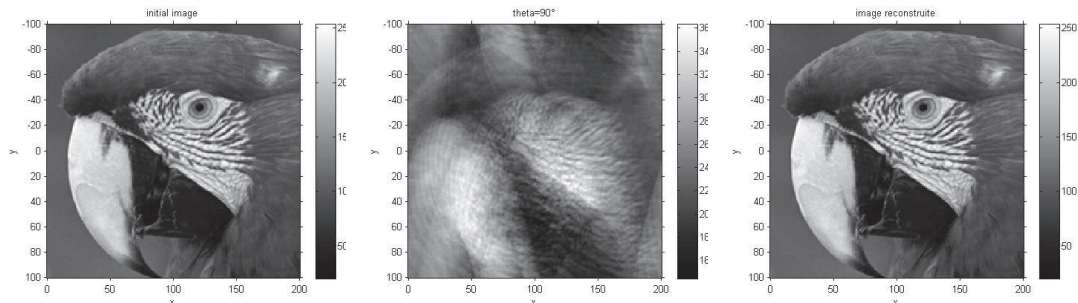
où φ_θ représente la rotation de φ par θ .

3.6 Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous testons deux aspects de la GMDRT, à savoir l'exactitude de l'algorithme d'inversion et la précision de reconnaissance de formes. Quant au deuxième aspect, nous avons en premier lieu testé la GMDRT sur des images synthétiques présentant des formes simples et par la suite appliqué la GMDRT sur des images satellitaires à haute résolution dans le but de détecter des bâtiments de forme rectangulaire.

3.6.1 Inversion

Nous avons testé l'exactitude de l'inversion de la GMDRT sur différentes images. Nous avons varié pour chacune l'angle d'orientation θ entre 0 et 2π . Nous avons également projeté les images de test par plusieurs courbes de projection : paraboles, hyperboles et cercles. A titre d'exemple, les figures 3.6, 3.7, 3.8 montrent le résultat de l'inversion appliquée à des images de taille 201×201 .



(a) Image initiale (b) Espace de Radon, $\theta = 90^\circ$, des paraboles de projection $\varphi(l) = l^2$ (c) Image reconstruite

Figure 3.6 — Reconstruction exacte, courbe de projection : parabole d'équation $\varphi(l) = l^2$, angle de projection $\theta = 90^\circ$

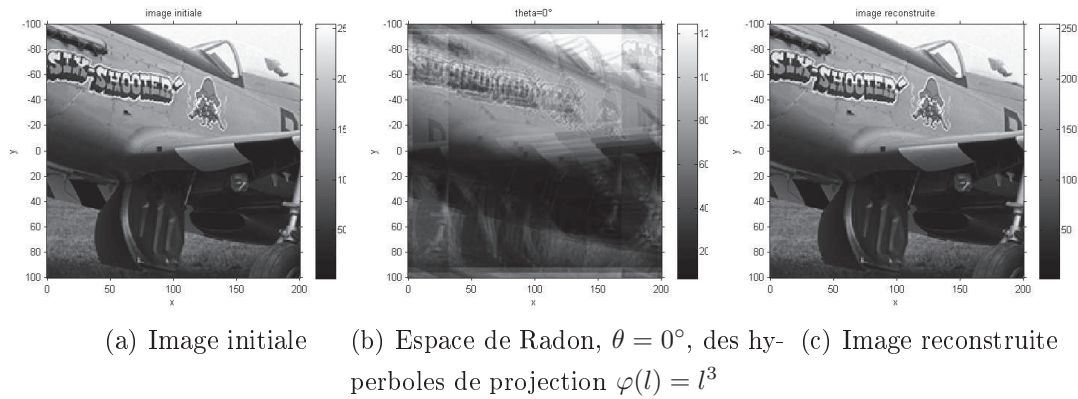


Figure 3.7 — Reconstruction exacte, courbe de projection : hyperbole d'équation $\varphi(l) = l^3$, angle de projection $\theta = 0^\circ$

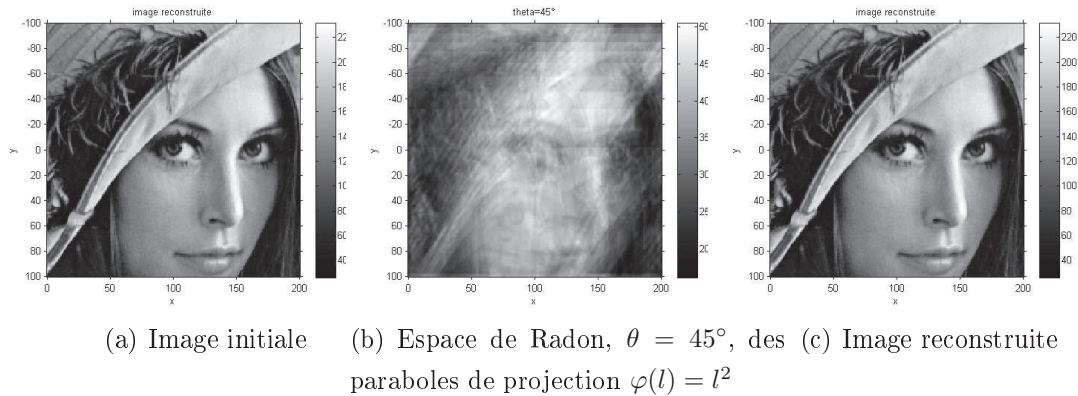


Figure 3.8 — Reconstruction exacte, courbe de projection : parabole d'équation $\varphi(l) = l^2$, angle de projection $\theta = 45^\circ$

Comme il est illustré par les figures 3.6, 3.7 et 3.8, les images reconstruites sont visuellement identiques aux images initiales. Pour tester l'exactitude de l'inversion de la GMDRT, nous avons comparé les pixels de l'image initiale avec ceux de l'image reconstruite et nous avons calculé le pourcentage d'exactitude de chaque image reconstruite (nombre de pixels exactes / la totalité des pixels de l'image).

Sur 7 images testées de taille 201×201 , l'application de l'inversion de la GMDRT révèle une exactitude totale à l'image reconstruite.

3.6.2 Reconnaissance de formes

Nous utilisons la GMDRT pour détecter des courbes paramétrées et des objets géométriques en localisant de manière précise leurs positions, leurs paramètres et leurs angles de rotation. Les coordonnées d'un point dans l'espace transformé de Radon correspondent à celles de la position d'une forme orientée selon un angle θ dans l'image. Nous avons testé notre approche sur deux images synthétiques simples qui représentent respectivement des paraboles et des rectangles pivotés et distribués suivant des directions différentes (Figure 3.9, Figure3.10).

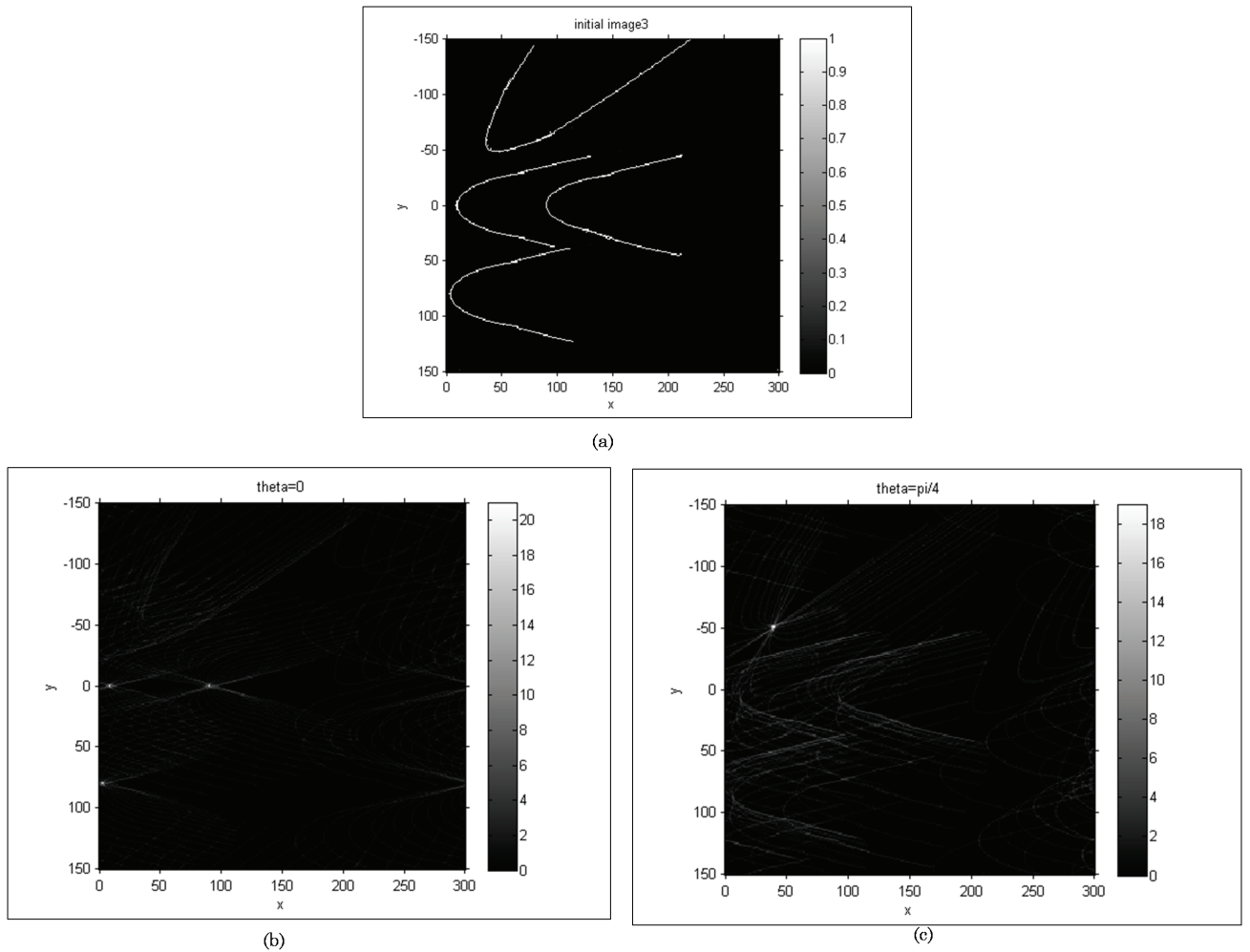


Figure 3.9 — Résultats de la GMDRT pour la détection des paraboles de différentes orientations. (a) :Image initiale (b) : l'espace de Radon correspondant à la projection des paraboles d'équation $\varphi(x) = y^2$ mises en rotation suivant $\theta = 0$. Les coordonnées des pics correspondent aux positions des sommets des paraboles dans l'image initiale. (c) : L'espace de Radon correspondant à la projection des paraboles d'équation $\varphi(x) = y^2$ mises en rotation suivant $\theta = \pi/4$. Les coordonnées des pics correspondent aux positions des sommets des paraboles dans l'image initiale.

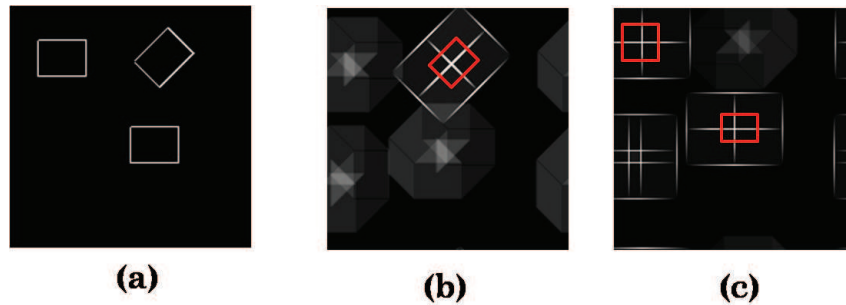


Figure 3.10 — Résultats de la GMDRT pour la détection des rectangles de différentes orientations. (a) : Image initiale. (b) : les pics entourés par des rectangles rouges résultent de la projection de l'image initiale par des rectangles mis en rotation suivant $\pi/4$. Les pics présentent les coordonnées du coin gauche supérieure du rectangle. (c) : les pics entourés par des rectangles rouges résultent de la projection de (a) par des rectangles horizontaux présentant les coordonnées des deux rectangles horizontaux de l'image initiale.

3.6.3 Application de la GMDRT sur des images satellitaires à haute résolution

Nous avons appliqué la GMDRT pour l'extraction de bâtiments rectangulaires à partir d'images Quickbird de la ville de Strasbourg d'une résolution spatiale égale à 0,6 m / pixel [EHR⁺12b]. En utilisant la méthode GMDRT, l'extraction de bâtiments est réduite à la détection de pics de l'espace de Radon. Nous décrivons les différentes étapes requises pour l'extraction de bâtiments, à savoir : Extraction de contours , Application de la GMDRT et Extraction des maximums locaux.

3.6.3.1 Extraction de contours

L'image initiale est traitée par le filtre morphologique multi-échelles. Ce filtre [MC02] opère par quatre éléments structurants de différentes échelles. Ce filtre a été utilisé pour éliminer le bruit (les taches et les lignes fines) tout en préservant les frontières des bâtiments. De plus, ce filtre permet de réduire la variation spectrale à l'intérieur des régions de bâtiments. Nous détectons les contours de l'image d'origine au moyen de l'opérateur Canny [Can86] qui estime les contours de l'image à l'aide de l'opérateur gradient (Fig 3.11).

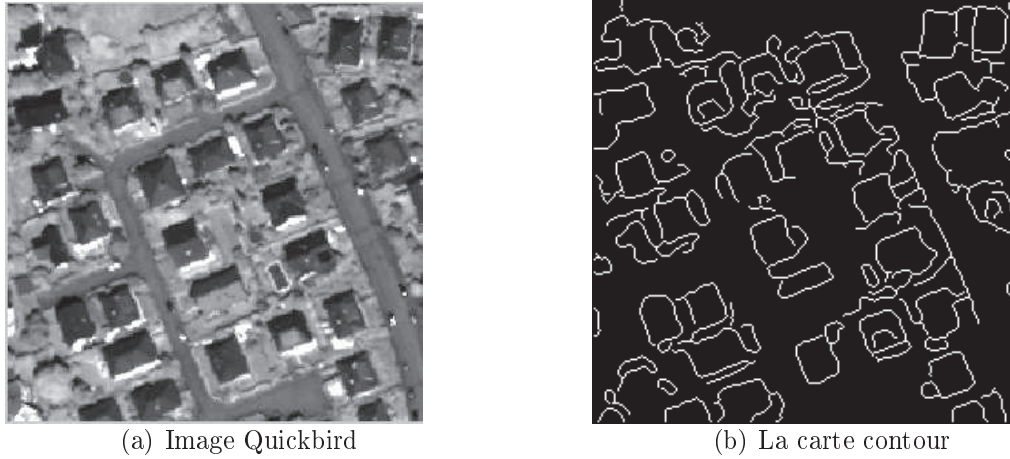


Figure 3.11 — Extraction du contour.

3.6.3.2 Application de la GMDRT

Nous avons itérativement appliqué la GMDRT en projetant l'image contour par des objets rectangulaires. A chaque itération, une projection est effectuée en fixant les paramètres associés i.e., l'angle d'orientation θ , la largeur w et la longueur l des rectangles de projection. Compte tenu de la résolution de l'image et des connaissances réelles sur la taille des bâtiments, nous avons varié la longueur l et la largeur w dans l'intervalle $[19, 32]$ ainsi que l'angle θ dans $[0^\circ, 180^\circ]$ avec un pas de 5° .

Par conséquent, le résultat de la GMDRT rectangulaire est l'ensemble de profils de Radon $y_{\theta,l,w}$. Un coefficient $y_{\theta,l,w}(x, y)$ indique la somme des intensités de pixels appartenant à un rectangle de taille $l \times w$, orienté suivant θ et dont le coin supérieur gauche est positionné au niveau de (x, y) .

De l'espace $y_{\theta,l,w}$, nous gardons uniquement les coefficients supérieurs à un seuil s égal à la moyenne de tous les coefficients. Le processus de seuillage élimine les faibles coefficients indiquant une faible probabilité de l'existence réelle d'un bâtiment.

3.6.3.3 Extraction des maximums locaux

$y_{\theta,l,w}$ est un profil de Radon à 2 dimensions où chaque pixel indique le résultat de la projection d'un rectangle de paramètres l et w et d'angle d'orientation θ . Par conséquent, un pic dénote les paramètres ainsi que les coordonnées de la position d'un bâtiment.

Pour détecter les pics dans les différents profils de Radon, nous avons utilisé un filtre de maximums locaux. La taille du filtre a été fixée à 21×21 en tenant compte de la distance minimale entre les bâtiments. Après avoir sélectionné les maximums locaux dans tous les profils de radon, nous vérifions les coordonnées des pics sélectionnés. Si plusieurs pics sont à la même position ou à des positions très approximatives, le pic ayant la valeur la plus élevée sera retenue comme étant le pixel délégateur d'un bâtiment. Enfin, la reconstruction est réalisée à partir des informations acquises de la localisation des bâtiments, leurs tailles et leurs orientations (Fig.3.12)

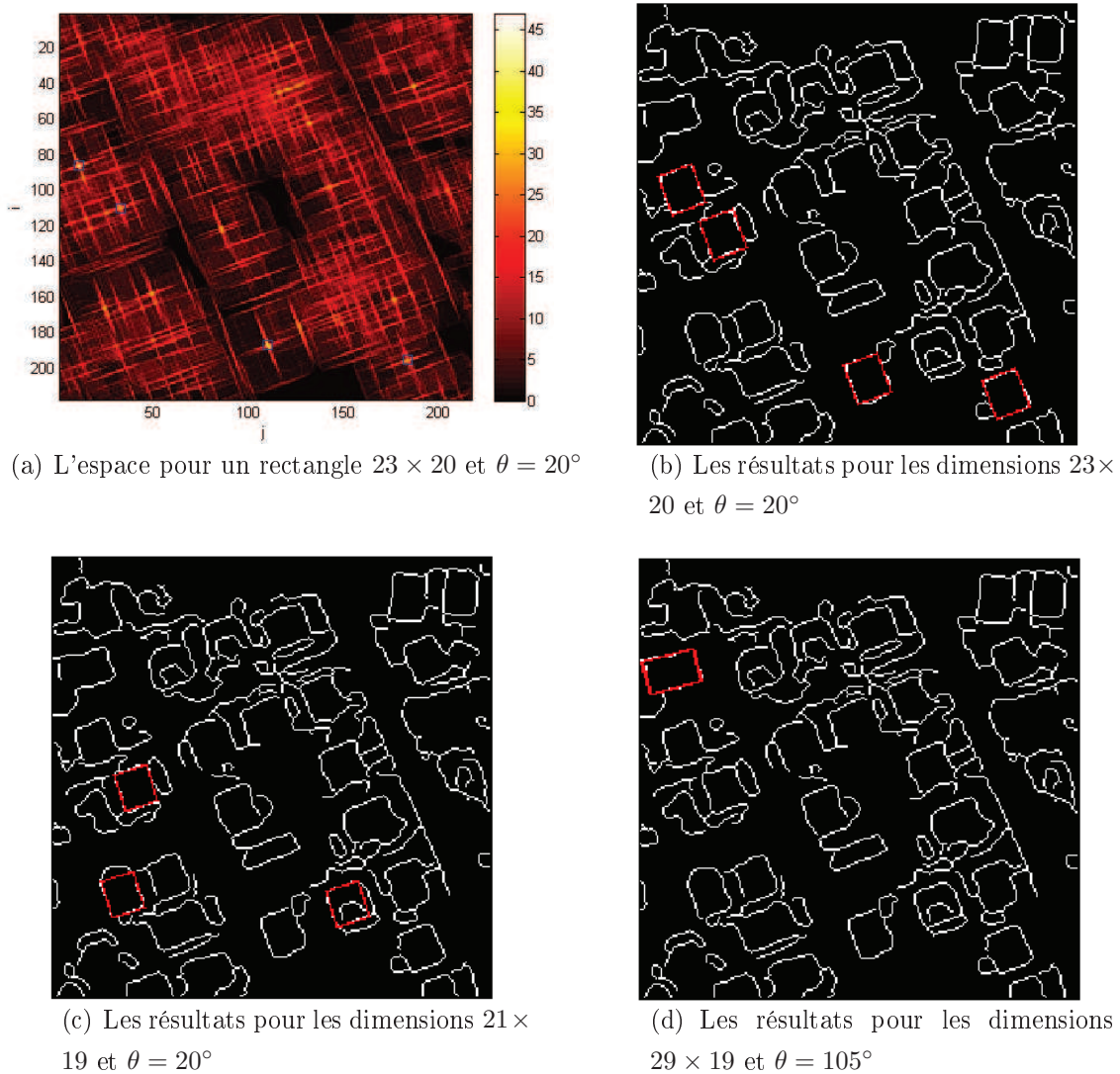


Figure 3.12 — Les résultats d'extraction des bâtiments en utilisant la GMDRT.

3.6.3.4 Comparaison

Nous avons testé notre approche sur plusieurs fenêtres de l'image de Strasbourg. Quelques résultats sont présentés dans les figures 3.13 et 3.14. Les mesures adoptées pour l'évaluation des résultats sont celles définies par [BGHC10].

Pour l'évaluation quantitative, nous avons utilisé la formule suivante :

$$BER = \frac{BCE}{TB}$$

Où BER (Buildings Extraction Rate) est le taux d'extraction des bâtiments, BCE (Buildings Correctly Extracted) est le nombre de bâtiments correctement extraits et TB (Total Buildings) est le nombre total des bâtiments existants dans la zone de test. Pour une évaluation qualitative, nous avons utilisé ces métriques :

$$Exactitude = \frac{BCE}{BCE + FA}$$

et

$$\text{qualité} = \frac{BCE}{BCE + BPE + BNE + FA}$$

Où BPE(Buildings Partially Extracted) est le nombre de bâtiments partiellement extraits, BNE (Buildings Not Extracted) est le nombre de bâtiments non extraits et FA (False Alarms) est le nombre des fausses alarmes indiquant les bâtiments identifiés à tort.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux d'autres méthodes, la R- θ signature [REH11] qui propose un descripteur de forme basé sur la transformée de Radon classique et la méthode DRV [LDCWM09], qui détecte les bâtiments à l'aide des informations de type photométrique, géométrique et morphologiques. Le tableau 3.2 illustre le résultat de l'application de notre approche et une comparaison avec la DRV et la R- θ signature. en terme de pourcentage d'extraction BER, notre méthode est meilleure que la R- θ signature et assez proche de la DRV (89% pour la GMDRT contre 91% pour la DRV). Toutefois, en termes de qualité et d'exactitude, les résultats sont en faveur de notre approche.

Les résultats d'extraction de la GMDRT peuvent cependant être améliorés si la phase d'extraction de bâtiments assure un meilleur résultat. En effet, l'extraction par-

tielle de bâtiments est principalement causée par des contours de bâtiments tronqués comme il est montré dans la Figure 3.15. D'autre part, les bâtiments peuvent ne pas avoir des contours de forme parfaitement rectangulaire. Le processus de projection conduit alors à une sommation partielle des pixels du contour. Si les coefficients de GMDRT qui en résultent sont inférieures au seuil s , les bâtiments ne seront pas extraits (Figure 3.15). Cependant, notre méthode tend à limiter le nombre de fausses alarmes grâce au processus de seuillage qui élimine les formes non rectangulaires et les petits contours étroits qui sont causés par les effets de luminosité du sol.

Contrairement aux deux méthodes RDV et R- θ signature qui considèrent principalement les bâtiments comme des objets présentant une faible variation du niveau de gris interne et une forte variation dans son voisinage immédiat, notre méthode GMDRT est uniquement fondée sur le critère de rectangularité pour extraire les bâtiments. Par conséquent, les deux méthodes DRV et R- θ signature souffrent du niveau élevé d'erreurs de fausses alarmes sur les routes (une variation faible au niveau de l'asphalte et une variance élevée des bords de routes) et sur les pelouses (une variation faible de l'herbe à l'intérieur des pelouses et une variance élevée des bordures de pelouse). Afin d'améliorer les résultats, la GMDRT pourrait être associée à l'approche DRV en raison de la complémentarité entre les critères rectangularité et homogénéité.

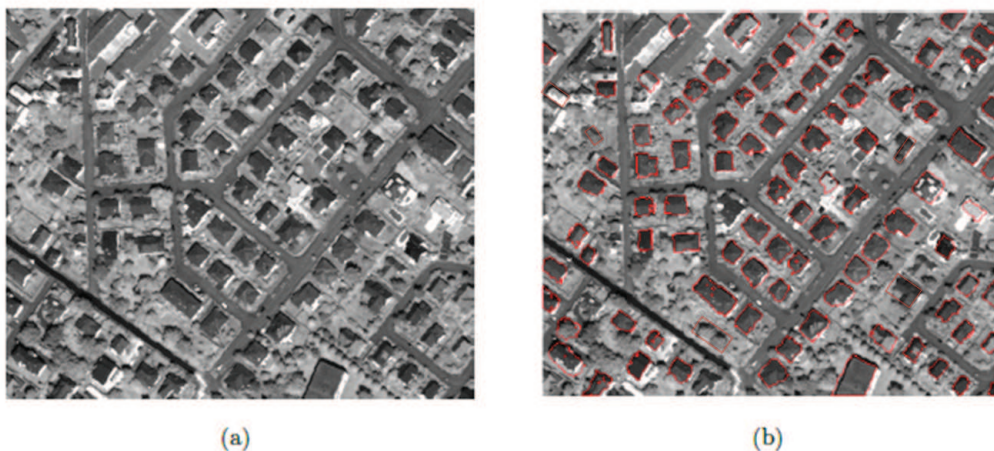


Figure 3.13 — Résultat de la GMDRT pour l'extraction des bâtiments (a) Image initiale II. (b) Les bâtiments détectés. Les paramètres appliqués sont : $\theta \in [0^\circ, 180^\circ[$, $l \in [19, 32]$, $w \in [19, 32]$ et la taille du filtre maximums locaux est 21×21 .

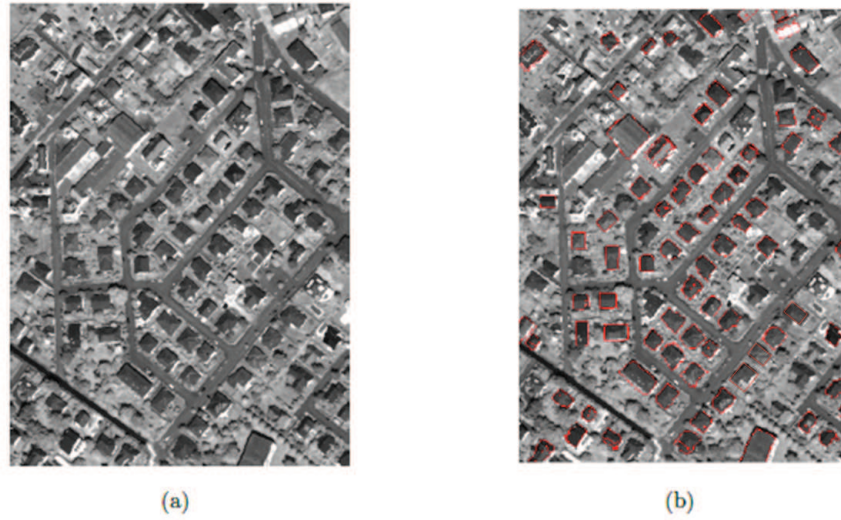


Figure 3.14 — Résultat de la GMDRT pour l'extraction des bâtiments. (a) Image initiale I3. (b) Les bâtiments détectés. Les paramètres appliqués sont : $\theta \in [0^\circ, 180^\circ[$, $l \in [19, 32]$, $w \in [19, 32]$ et la taille du filtre maximums locaux est 21×21 .

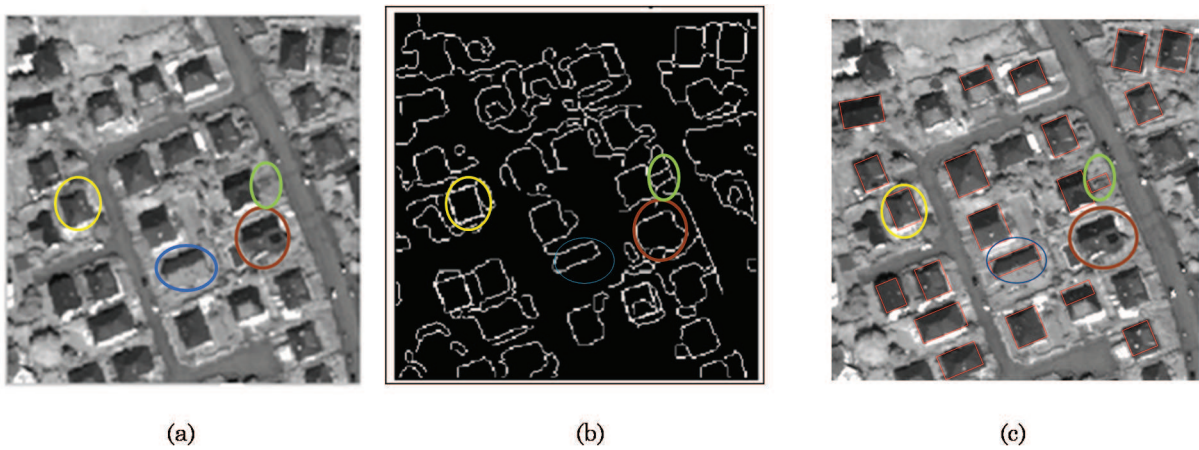


Figure 3.15 — Erreurs de l'extraction des bâtiments (a) : Image originale. (b) : Image contours. (c) : Les bâtiments reconstruits sur l'image originale. L'ellipse jaune présente un bâtiment correctement identifié. L'ellipse bleu présente un bâtiment partiellement identifié. L'ellipse rouge présente un bâtiment non détecté et l'ellipse verte présente une erreur de commission. Les paramètres appliqués sont $\theta \in [0^\circ, 180^\circ[$, $l \in [19, 32]$, $w \in [19, 32]$ et la taille du filtre maximums locaux est 21×21 .

Tableau 3.1 — Les mesures des résultats obtenus par la GMDRT

	I1	I2	I3	I4	I5	Total
BCE	100	83	65	43	184	475
BPE	2	4	0	0	2	8
BNE	8	5	13	3	17	46
FA	4	3	3	0	5	15
TB	110	92	78	46	203	529

Tableau 3.2 — Les résultats obtenus de la DRV [LDCWM09], la R- θ signature [REH11], et de la GMDRT

Méthode	BER (%)	Exactitude	Qualité
DRV	91	0.940	0.820
R- θ signature	83	0.926	0.808
GMDRT	89	0.969	0.873

3.7 Discussion

Contrairement aux travaux de généralisation de la TR présentés dans le chapitre précédent, la GMDRT a l'avantage de vérifier à la fois deux critères intéressants. Le premier est la généralisation dans le sens que la GMDRT s'applique sur toutes les courbes et formes possibles et le deuxième est la réversibilité exacte.

Nous avons également montré que la GMDRT est particulièrement intéressante dans le domaine de reconnaissance de formes puisque l'extraction des données d'une forme géométrique (position, paramètres et orientations) se fait par la simple détection de pics dans l'espace de Radon. L'application de la GMDRT à des images satellitaires pour la reconnaissance de bâtiments confirme que notre méthode peut être utilisée dans le domaine de la reconnaissance de formes. Une comparaison avec d'autres méthodes d'extraction de bâtiments a montré que les résultats de la GMDRT sont prometteurs. Cependant, nous avons supposé dans cette étude que les paramètres des courbes sont fixes. Dans le cas contraire, l'espace de Radon aura plus de dimensions que le nombre de paramètres des courbes. Ceci implique que l'espace de Radon pourra

occuper une taille importante de mémoire.

La projection directe de la GMDRT s'effectue en N_θ multiplications entre les N matrices de projection $R_{m,\theta}$ de taille $(2L + 1) \times (2L + 1)$ et les N vecteurs de l'image (Eq. 3.4). La complexité de la projection GMDRT est alors égale à $N_\theta N^2 (2L + 1)^2$ où N_θ désigne le nombre d'angles de projection. Par contre, La complexité de la GMDRT rapide présentée dans la section 1.5 est égale à $N_\theta [2(2L + 1)N \log N + (2L + 1)^2 N]$. Si nous travaillons sur des images carrées, i.e., $N = (2L + 1)$, alors la complexité de la GMDRT et de la GMDRT rapide est respectivement de l'ordre $O(N^4)$ et $O(N^3)$.

L'inversion de la GMDRT est basée sur la résolution de N systèmes linéaires (Eq. 3.11). La complexité de l'inversion de la GMDRT est de l'ordre de $O(N(2L + 1)^3)$. Comme la GMDRT est exactement inversible, nous l'avons comparée, en termes de complexité de calcul, avec des Transformées de Radon exactement inversibles présentées dans le chapitre précédent. Le tableau 3.3 montre que la GMDRT n'est pas plus coûteuse en temps de calcul que les autres méthodes mais elle est la plus coûteuse en mémoire vu le nombre élevé de matrices de projection $R_{m,\theta}$ à construire ($N \times N_\theta$ matrices). Il est à noter aussi que la GMDRT, contrairement aux autres méthodes, n'impose pas de contraintes sur la taille de l'image.

Tableau 3.3 — La complexité des transformées de radon exactement inversibles

	Taille de l'image	Type de projection	Complexité de la projection	Complexité de l'inversion
FRT [FF93]	$N \times N$, N nombre premier	TRC	$O(N^3)$	$O(N^3)$
ODRT [A.K06]	$N \times N$, $N = p^n$, p nombre premier, n entier positif	TRC	$O(N^2(1 + 1/p) \log N)$	$O(N^2(1 + 1/p) \log N)$
DPRT [HLS96]	$N \times N$, $N = 2^n$	TRC	$O(N^3)$	$O(N^3)$
GFRT [AI07]	$N \times N$, N nombre quelconque	TRC	$O(N^3)$	$O(N^4)$
Transformée Mojette [AA08]	$P \times Q$, P et Q quelconques	TRC	$O(IPQ)$, I nombre de projections	$O(IPQ)$
GRT [Bey87]	$L \times N$, L et N quelconques	TRC	$O(N^2L^2)$	$O(NL^3)$
GMDRT	$L \times N$, L et N quelconques	TRG	$O(N_\theta N^2 L^2)$	$O(NL^3)$
GMDRT rapide	$L \times N$, L et N quelconques	TRG	$O(N_\theta NL^2)$	$O(NL^3)$

3.8 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre la transformée de Radon Généralisée multi directionnelle. Cette généralisation garde les deux propriétés de base de la transformée de Radon classique, à savoir : l'inversion et la projection multi directionnelle. Nous avons montré à travers une application dans le domaine de télédétection son intérêt dans la reconnaissance des formes. Grâce à sa capacité de reconstruire d'une manière exacte l'image initiale à partir du domaine transformé, la GMDRT peut être appliquée dans la compression, le codage et le débruitage des images. Dans le chapitre suivant, nous présentons un deuxième formalisme de la transformée de radon généralisée qui est moins coûteux en temps de calcul et en mémoire et qui reste exactement inversible.

CHAPITRE

4

Approche proposée : La Transformée de Radon Polynomiale discrète exactement inversible

Introduction

La GMDRT présentée dans le chapitre précédent est une généralisation de la transformée de Radon classique. Elle permet une reconnaissance précise des formes dans une image. Dans ce chapitre, nous présentons une approche de généralisation fondée sur des propriétés arithmétiques. Cette nouvelle transformation appelée la "Transformée de Radon Polynomiale discrète" (PDRT) est basée sur une projection polynomaile de Radon. Nous commençons par présenter le formalisme mathématique de la projection aussi bien directe que inverse de la PDRT. Nous mettons en évidence par la suite la précision de la transformée aussi bien dans l'exactitude d'inversion que dans la reconnaissance de formes. Nous présentons ensuite une application de la PDRT à la reconnaissance des empreintes digitales. Une discussion est à la fin introduite dans la quelle nous comparons la PDRT avec d'autres approches.

4.1 Formalisme de la Transformée de Radon Polynomiale discrète exactement inversible

La transformée de Radon Polynomiale discrète (PDRT) d'une image I est une fonction R définie sur une famille de polynômes. La valeur de R pour un polynôme donné est la somme de pixels de I appartenant à ce polynôme. La PDRT est inspirée du formalisme FRT [FF93] présenté dans le deuxième chapitre. Nous commençons par présenter brièvement l'approche FRT [FF93] puis nous décrivons le formalisme de la PDRT suivi par son algorithme d'inversion.

4.1.1 La Transformée de Radon Finie (TRF)

La TRF est une Transformée de Radon classique discrète appliquée à des images carrées de taille $p \times p$ où p est un nombre premier [FF93]. La TRF suppose que l'image est périodique dans le groupe fini \mathbb{Z}_p^2 . La TRF projette une image suivant des droites affines rectilignes définies par le gradient m , et l'ordonnée par rapport à l'origine t . Les projections de la TRF sont divisées en deux familles de projections. La première regroupe les projections horizontales appelées $R_m = \{R_m(t), t \in \mathbb{Z}_p, m \in \mathbb{Z}_p\}$ qui présentent la somme de pixels appartenant aux droites d'équation $y \equiv mx + t \pmod{p}$. Tandis que la deuxième famille correspond aux projections verticales $R^\perp = \{R^\perp(t), t \in \mathbb{Z}_p\}$ qui dénotent la somme des droites perpendiculaires d'équation $x \equiv t \pmod{p}$. Soit I une image carrée de taille $p \times p$. Les formules de projections R_m et R^\perp sont présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 R_m(t) &= \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) \times \delta(y - \langle mx + t \rangle_p). \\
 R^\perp(t) &= \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) \times \delta(x - t).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

où la notation $\langle x \rangle_p$ signifie $x \pmod{p}$ et δ est la fonction Kronecker delta. Partant de l'hypothèse de périodicité de l'image par p et en raison d'un ensemble de propriétés arithmétiques, la TRF est exactement inversible [FF93].

D'une manière similaire à la TRF, la PDRT est appliquée sur des images numériques

de taille $p \times p$ où p est un nombre premier. Cette restriction sur la taille de l'image entraîne un certain nombre de propriétés arithmétiques donnant lieu à un algorithme exactement inversible. Néanmoins, si l'on veut appliquer la PDRT sur une image de taille arbitraire $M \times N$, la taille de l'image pourrait être étendue en ajoutant des zéros pour atteindre la taille la plus proche $p \times p$ où p est le plus petit nombre premier qui vérifie $p \geq \sup\{M, N\}$.

4.1.2 Le formalisme de La transformée de Radon discrète Polynomiale (PDRT)

Comme indiqué plus haut, la PDRT généralise la TRF [EFNAH]. La PDRT remplace les droites d'équation $y \equiv (mx + t) \pmod{p}$ par des polynômes d'équation $y \equiv (mx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + t) \pmod{p}$ où $m, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, t$ des coefficients non nuls. Dans la suite du chapitre, nous ne considérons que les polynômes d'équation $y \equiv mx^n + t \pmod{p}$ où $n > 1$ et m et t sont des entiers de \mathbb{Z}_p , mais il est à noter que la PDRT est applicable et les preuves sont valides pour n'importe quel polynôme.

La PDRT, définie dans l'espace discret, additionne les valeurs de pixels d'une image numérique 2D le long de courbes polynomiales. Soit $I(x, y)$ une image carrée de taille $p \times p$ où p est un nombre premier et x et y sont dans \mathbb{Z}_p . On suppose que cette image est périodique d'une période p , dans les deux directions x et y tels que :

$$I(x + p, y + p) = I(x, y)$$

Soit Q un polynôme de degré $n > 1$ défini par l'équation suivante :

$$Q(x) = \langle mx^n + t \rangle_p$$

où la notation $\langle x \rangle_p$ signifie $x \pmod{p}$, $m \in \mathbb{Z}_p$ est le coefficient principal de Q et $t \in \mathbb{Z}_p$ est le pas de translation horizontal suivant l'axe des y . Nous désignons par x l'axe vertical et par y l'axe horizontal. Soit $A_{m,t}$ la fonction de sélection qui détermine à partir de l'image I les points appartenant à une courbe polynomiale Q définie par un coefficient principal m et un pas de translation horizontal t . $A_{m,t}$ est exprimée comme

suit :

$$A_{m,t}(x) = (x, \langle mx^n + t \rangle_p)$$

La PDRT peut alors être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} R(m, t) &= \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) \times \delta(y - \langle mx^n + t \rangle_p) \\ &= \sum_{x=0}^{p-1} I(x, \langle mx^n + t \rangle_p) \\ &= \sum_{x=0}^{p-1} I(A_{m,t}(x)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour tout m dans \mathbb{Z}_p , le coefficient $t = 0$ est défini comme étant le point situé en haut à gauche de l'image (i.e. $I(0, 0)$). Le pas de translation t parcourt les colonnes de gauche à droite (figure 4.1). $\langle x \rangle_p$ qui signifie $x \bmod p$ retourne t au début de la x ième ligne à chaque fois que $mx^n + t$ dépasse p . La PDRT est caractérisée par trois propriétés :

a1 Chaque projection $R(m, t)$ est la somme de exactement p points distincts de l'image I . Cette propriété est due au fait que la fonction $A_{m,t}$, qui sélectionne les points à sommer par la projection, est injective.

b1 L'ensemble de pixels sélectionnés par $A_{m,t}$ est unique pour chaque m dans \mathbb{Z}_p .

En effet, pour t fixé, deux fonctions distinctes de sélection $A_{m_1,t}$ et $A_{m_2,t}$ où $m_1 \neq m_2$ se croisent uniquement pour $x = 0$. En d'autres termes :

Pour $m_1 \neq m_2$, $\langle m_1x^n + t \rangle_p \neq \langle m_2x^n + t \rangle_p$ pour tout x dans $\mathbb{Z}_p - \{0\}$.

Preuve :

Nous supposons que pour $m_1 \neq m_2$:

$$\langle m_1x^n + t \rangle_p = \langle m_2x^n + t \rangle_p .$$

Nous avons alors :

$$\langle m_1x^n \rangle_p = \langle m_2x^n \rangle_p$$

Pour $x \neq 0$ et puisque p est premier, nous avons $\langle x^n \rangle_p$ est inversible étant donné que $\langle x^n \rangle_p \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$.

En conséquence, nous obtenons $m_1 = m_2$ ce qui est absurde.

Ainsi, nous pouvons déduire que pour $m_1 \neq m_2 \in \mathbb{Z}_p$:

$$A_{m_1,t} \cap A_{m_2,t} = \{(0, t)\}, t \in \mathbb{Z}_p$$

c1 Pour une valeur fixe m dans \mathbb{Z}_p , toutes les fonctions $A_{m,t}$ sélectionnent des points distincts de I . i.e. :

Pour une valeur fixe m dans \mathbb{Z}_p et pour $t \neq t' \in \mathbb{Z}_p$,

$$A_{m,t} \cap A_{m,t'} = \emptyset$$

ceci signifie que les polynômes horizontalement parallèles ne s'intersectent pas.

Compte tenu des propriétés a1) et b1), nous pouvons déduire que pour t fixe et pour m allant de 0 à $p - 1$, tous les pixels dans $I(x, y)$ ne seront choisis qu'une seule fois par les fonctions de sélection $A_{m,t}$, à l'exception du point $(0, t)$ qui est un pixel commun entre tous les ensembles de pixels générés par $A_{m,t}$.

Ainsi, pour t fixe dans \mathbb{Z}_p , toutes les fonctions $A_{m,t}$ sélectionnent en totale $p \times (p - 1)$ pixels distincts de $I(x, y)$.

Les p pixels restants sont ceux ayant comme abscisse $x = 0$ (c'est à dire les points $(0, t)$ pour t allant de 0 à $p - 1$).

D'une manière similaire à la projection TRF, les p pixels d'image restants seront additionnés par la projection verticale R_0^\perp qui peut être obtenue comme la somme de la courbe polynômiale perpendiculaire d'équation : $x = \langle 0y^n + 0 \rangle_p$ comme suit :

$$R_0^\perp(0) = \sum_{y=0}^{p-1} I(0, y). \quad (4.3)$$

Les propriétés a1) et c1) impliquent que pour une valeur m donnée, toutes les projections $R(m, t)$ pour t variant entre 0 et $p - 1$ sélectionnent tous les pixels de $I(x, y)$ une et une seule fois. Par conséquent,

$$\sum_{t=0}^{p-1} R(m, t) = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) = Isum \quad (4.4)$$

Où I_{sum} présente la somme totale de pixels de l'image I .

En observant les équations de projection (Eq.4.2 et Eq.4.3), nous pouvons déduire que les courbes polynomiales sont uniquement déplacées suivant la direction horizontale. En conséquence, les courbes ne parcourent pas la totalité de l'image ce qui rend la méthode inadaptée au problème de reconnaissance de formes.

Afin de palier à ce problème et de pouvoir ainsi translater verticalement les courbes polynomiales, nous avons ajouté le paramètre de translation verticale v défini dans \mathbb{Z}_p . Ce nouveau paramètre désigne le pas de translation du polynôme suivant l'axe des x dans l'image initiale.

Ainsi, chaque projection $R(m, v, t)$ est constituée de la somme de pixels appartenant à une courbe polynomiale Q de coefficient principal m et qui est translaté à la position (v, t) :

$$\begin{aligned}
 R(m, v, t) &= \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) \times \delta(y - \langle m(\langle x - v \rangle_p)^n + t \rangle_p) \\
 &= \sum_{x=0}^{p-1} I(x, \langle m(\langle x - v \rangle_p)^n + t \rangle_p) \\
 &= \sum_{x=0}^{p-1} I(A_{m,v,t}(x)), v, t \in \mathbb{Z}_p
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Notons la fonction de sélection $A_{m,v,t}$, qui sélectionne les pixels de I comme suit :

$$A_{m,v,t} = (x, \langle m(\langle x - v \rangle_p)^n + t \rangle_p)$$

La projection verticale est définie comme la somme des pixels de la courbe polynomiale perpendiculaire d'équation $x = \langle 0y^n + v \rangle_p$:

$$R_0^\perp(v) = \sum_{y=0}^{p-1} I(v, y). \tag{4.6}$$

En translatant verticalement les courbes polynomiales, toutes les propriétés a1), b1) et c1) sont toujours vérifiées et peuvent alors être exprimées comme suit :

a2 Chaque projection somme p points distincts.

b2 Pour des valeurs fixes de t et v , les ensembles de pixels générés par les deux fonctions de sélection $A_{m_1,v,t}$ et $A_{m_2,v,t}$ se croisent de façon unique au point (v, t) . c'est à dire :

Pour $m_1 \neq m_2$, $\langle m_1(\langle x - v \rangle_p)^n + t \rangle_p \neq \langle m_2(\langle x - v \rangle_p)^n + t \rangle_p$ pour $x \in \mathbb{Z}_p - \{v\}$.

c2 Pour des valeurs fixes m et v dans \mathbb{Z}_p , toutes les fonctions $A_{m,v,t}$ sélectionnent des points distincts de I .i.e. : Pour m et v fixes dans \mathbb{Z}_p et pour $t \neq t' \in \mathbb{Z}_p$, $A_{m,v,t} \cap A_{m,v,t'} = \emptyset$.

La somme totale des pixels de l'image peut être déduite des propriétés a2) et c2), comme suit :

$$\sum_{t=0}^{p-1} R(m, v, t) = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) = Isum \quad (4.7)$$

La Figure 4.1 présente une illustration des projections PDRT appliquées à une simple image I de taille 3×3 : La courbe projetée ici est une parabole d'équation $y = \langle mx^2 + t \rangle_3$. Dans cet exemple, nous avons choisi de varier les valeurs de x dans $[-(p-1)/2, (p-1)/2]$ au lieu de $[0, p-1]$. Cette modification est effectuée vu que les paraboles sont des courbes symétriques. Les trois propriétés de la PDRT restent valides avec ce changement. le paramètre de translation verticale v s'étend alors de $-(p-1)/2$ à $(p-1)/2$. La périodicité de l'image est également préservée de manière que, si $(x - v)$ dépasse $(p-1)/2$ (respectivement $-(p-1)/2$), $(x - v)$ sera retournée au début de la colonne .i.e. à la valeur de $-(p-1)/2$ (respectivement à la fin de la colonne soit $(p-1)/2$), c'est à dire :

Si $(x - v) \in]-p, -(p-1)/2[$, alors la colonne $I(x - v) = I(\langle x - v \rangle_p)$.
 Si $(x - v) \in](p-1)/2, p[$, alors la colonne $I(x - v) = I(\langle x - v \rangle_{-p})$.

A titre d'exemple, pour $m = 1, t = 1$ et $v = 0$, les pixels soulignés 5, 3, 9 sont additionnés par $R(1, 0, 1)$. Lorsque l'on déplace horizontalement la courbe (c'est à dire lorsque $t = 2$), le pixel 5 sera translatée au pixel 6 et les pixels 3 et 9 seront retournés par $mod(3)$ respectivement aux pixels 1et 7. Les pixels sommés par $R(1, 0, 2)$ sont donc 6, 1, 7. Quand on translate verticalement la même courbe (c'est à dire pour $v = -1$), la

périodicité de l'image suivant l'axe des abscisses permet au pixel 9 d'être sélectionné. Les pixels additionnées pour $R(1, -1, 1)$ sont alors 2, 6, 9.

		t=0	t=1	t=2
I(x,y)		y=0	y=1	y=2
v=-1	x=-1	1	2	<u>3</u>
v=0	x=0	4	<u>5</u>	6
v=1	x=1	7	8	<u>9</u>

(a)

R(m, -1,t)	t=0	t=1	t=2
m=0	1+4+7	2+5+8	3+6+9
m=1	1+5+8	2+6+9	3+4+7
m=2	1+6+9	2+4+7	3+5+8

R(m, 0, t)	t=0	t=1	t=2
m=0	1+4+7	2+5+8	3+6+9
m=1	2+4+8	3+5+9	1+6+7
m=2	3+4+9	1+5+7	2+6+8

R(m, 1,t)	t=0	t=1	t=2
m=0	1+4+7	2+5+8	3+6+9
m=1	2+5+7	3+6+8	1+4+9
m=2	3+6+7	1+4+8	2+5+9

r=-1 r=0 r=1

Vertical Projection:

$R_0^\perp(v)$	1+2+3	4+5+6	7+8+9
----------------	-------	-------	-------

(b)

Figure 4.1 — Une illustration de la PDRT appliquée à une image de taille 3×3 . a) Image initiale de taille 3×3 . b) Les projections horizontales et verticales de l'image initiale suivant des courbes paraboliques d'équation $y = \langle m(\langle x - v \rangle_3)^2 + t \rangle_3$

4.2 Inversion de la Transformée de Radon Polynomiale discrète exactement inversible

L'algorithme d'inversion de la PDRT reconstruit exactement l'image initiale à partir de l'espace de Radon. La reconstruction d'un point $I(v, t)$ consiste, dans un premier temps, à additionner toutes les projections $R(m, v, t)$ et $R_0^\perp(v)$ qui ont déjà sélectionné et sommé le point $I(v, t)$. La propriété b2) stipule que pour des valeurs fixes t et v , toutes les projections $R(m, v, t)$ ainsi que la projection verticale $R_0^\perp(v)$ somme des

pixels distincts de I et se croisent seulement au point $I(v, t)$. En outre, compte tenu de la propriété a2) qui énonce que chaque projection somme p points distincts de l'image carrée de taille $p \times p$, nous pouvons observer que tous les pixels de l'image initiale ne sont additionnées qu'une seule fois, excepté pour le point $I(v, t)$, qui est sélectionné $(p + 1)$ fois (p fois par les projections $R(m, v, t)$ et une fois par la projection verticale $R_0^\perp(v)$).

En conséquence, la valeur finale de $I'(v, t)$ contient $p + 1$ copies de la valeur originale de I à la position (v, t) , plus la somme totale des intensités de l'image. Etant donné que la somme totale des pixels de l'image est obtenue par Eq.4.7, alors l'équation de reconstruction peut être définie comme suit :

$$I'(v, t) = 1/p \times \left(\sum_{m=0}^{p-1} R(m, v, t) + R_0^\perp(v) - Isum \right) \quad (4.8)$$

4.3 Reconnaissance de formes

A Partir de l'équation 4.5, nous observons que la PDRT a la capacité de concentrer les pixels d'un polynôme en un point dont les coordonnées sont les paramètres du polynôme. Le but de cette section est de détecter avec précision des formes curvilignes qui peuvent être approximées par des courbes polynomiales.

Ayant la connaissance à priori des paramètres des polynômes de projection (coefficients et degré), nous donnons la possibilité de reconnaître à la fois l'orientation et la position d'un polynôme (s'il existe) dans l'image donnée. Nous rappelons que la direction des lignes droites de projection dans la transformée de Radon classique (TRC) est définie par l'angle θ . Toutefois, le nombre entier m associé à la méthode TRF [FF93] présente la pente des droites. La variation de la pente m conduit à la variation de la direction des lignes droites, ce qui préserve la propriété multidirectionnelle de la transformée de Radon classique.

Dans notre cas, l'entier m représente le coefficient du terme principal du polynôme et par la suite, la variation de m entraîne une variation de l'ouverture du polynôme et n'a aucun effet sur son orientation.

Afin de pouvoir extraire les polynômes orientés, et dans le but de respecter la propriété multidirectionnelle de la transformée de Radon classique, nous avons introduit

l'angle θ comme un nouveau paramètre qui définit l'orientation de la projection polynomiale. R_θ est alors le résultat de la projection de l'image suivant des polynômes orientés selon θ . Une expression de la PDRT multidirectionnelle est définie par l'équation suivante :

$$R_\theta(m, v, t) = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I(x, y) \times \delta(y' - \langle m(\langle x' - v \rangle_p)^n + t \rangle_p) \quad (4.9)$$

Où

$$(x', y') = Rt_\theta^{-1}(x, y) = ([x \cos \theta + y \sin \theta], [-x \sin \theta + y \cos \theta])$$

Rt_θ^{-1} exprime la rotation inverse de (x, y) et $[.]$ permet d'arrondir un résultat à l'entier le plus proche dans $[0, p - 1]$. Une projection $R_\theta(m, v, t)$ additionne les pixels dont la rotation inverse les situe sur un polynôme Q de paramètres m, v, t désignant respectivement le coefficient principal et les paramètres de translation verticale et horizontale.

A titre d'exemple, si une courbe polynomiale est d'équation $y = m'x^2$, orientée selon θ et translatée verticalement à v' et horizontalement à h' , la PDRT donnera générera un pic de coefficient $R_{\theta'}(m', v', t')$.

Cependant, l'équation 4.9 ne vérifie plus la propriété c2) de la PDRT puisque la rotation peut générer des pixels en commun entre les polynômes horizontalement parallèles. Ainsi, l'algorithme d'inversion n'est plus correcte. Pour pallier à ce problème, nous proposons de considérer l'image pivotée $I_{-\theta}$ à la place de I afin d'éviter le recours à la rotation des courbes de projection :

$$R_\theta(m, v, t) = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} I_{-\theta}(x, y) \times \delta(y - \langle m(\langle x - v \rangle_p)^n + t \rangle_p) \quad (4.10)$$

L'algorithme d'inversion entraîne la reconstitution exacte de l'image pivotée $I_{-\theta}$. L'image initiale I peut alors être obtenue par la rotation inverse de $I_{-\theta}$.

4.4 Expérimentation et Evaluation

Dans cette section, nous appliquons notre méthode pour évaluer l'exactitude de l'inversion et la précision de détection des courbes polynomiales.

4.4.1 Inversion

Nous avons testé l'algorithme d'inversion sur plusieurs images. L'inversion est exacte pour chaque test. A titre d'exemple, Figure 4.2 montre le résultat de la PDRT sur une image initiale qui a été projetée suivant des courbes paraboliques d'équation $y = x^2$. L'image reconstruite est identique en tout point à l'image initiale.

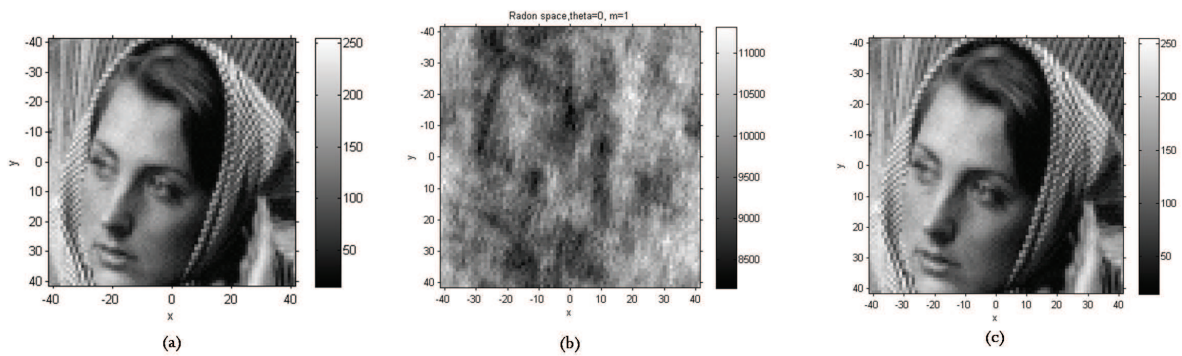


Figure 4.2 — Illustration de l'inversion exacte. (a) Image initiale. (b) l'espace de Radon généré par la PDRT en projetant l'image par des courbes paraboliques de paramètres $m = 1$ et $\theta = 0^\circ$. (c) Image reconstruite.

4.4.2 Reconnaissance des formes (Détection de la position et de l'orientation des polynômes) :

Nous appliquons la PDRT dans le but de détecter la position et l'orientation des polynômes à partir de l'espace de Radon. La figure 4.3 représente le résultat de la PDRT sur une image de synthèse contenant deux hyperboles. Nous avons projeté l'image initiale par des courbes d'équation $y = x^3$ et nous avons varié l'angle de projection θ d'un pas de 5° dans l'intervalle $[0^\circ, 180^\circ]$. Un pic est détecté dans chacun des espaces de Radon R_{0° et R_{45° qui représentent le pas de translation des hyperboles par rapport à l'origine $(0, 0)$.

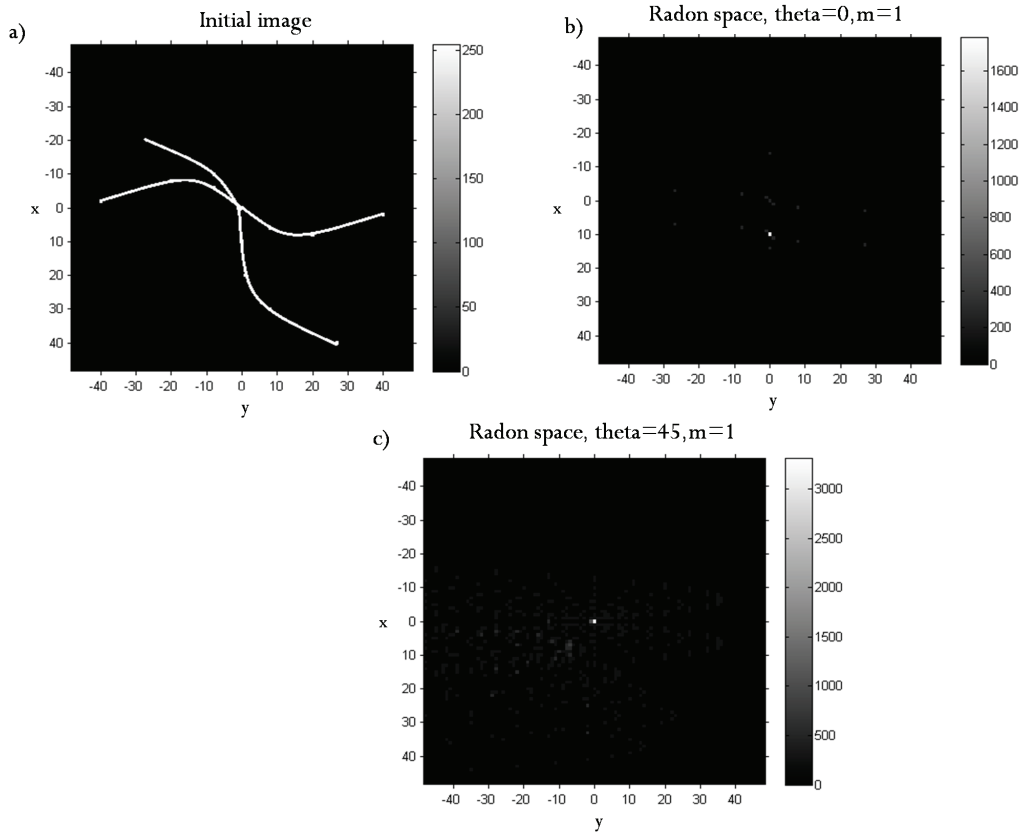


Figure 4.3 — Reconnaissance des hyperboles par la PDRT. (a) L'image initiale contenant deux hyperboles d'équation $y = x^3$. Le premier a été translaté par le vecteur $(v, t) = (10, 0)$ et le deuxième a été pivoté par l'angle $\theta = 45^\circ$. (b) l'espace de Radon R_{0° montre un pic à $(10, 0)$. (c) l'espace de Radon R_{45° montre un pic à $(0, 0)$

De la même manière, la figure 4.4 montre l'extraction de la position ainsi que l'orientation des deux paraboles existantes dans l'image.

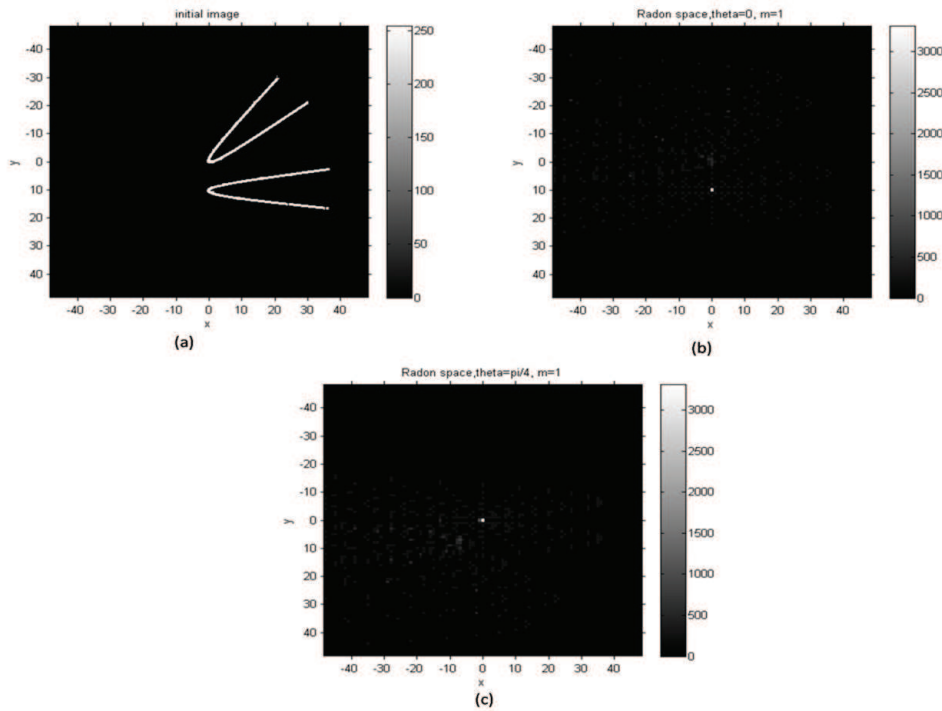


Figure 4.4 — Reconnaissance des paraboles par la PDRT (a) L'image initiale contenant deux paraboles d'équation $y = x^2$. Le premier a été traduit par le vecteur $(v, t) = (10, 0)$ et le deuxième a été pivoté par l'angle $\theta = 45^\circ$. (b) l'espace de Radon R_{0° montre un pic à $(10, 0)$. (c) l'espace de Radon R_{45° montre un pic à $(0, 0)$

La figure 4.5 illustre le résultat de la PDRT appliquée à une image d'empreinte digitale réelle. Nous avons d'abord binarisé et squelettisé l'image initiale (Fig.4.5.b). Nous avons appliqué par la suite la PDRT en projetant l'image traitée par des paraboles d'équation : $ay = mx^2$. La figure 4.5.c présente l'espace de Radon correspondant aux paramètres $\theta = 0, a = 50$ et $m = 3$. Clairement, un pic est obtenu à la position du sommet de la parabole pointée par la flèche rouge.

La figure 4.5.d présente le résultat de la PDRT directement appliquée à l'image en niveaux de gris. Le résultat montre la précision de la détection sur des images ne subissant aucun prétraitement.

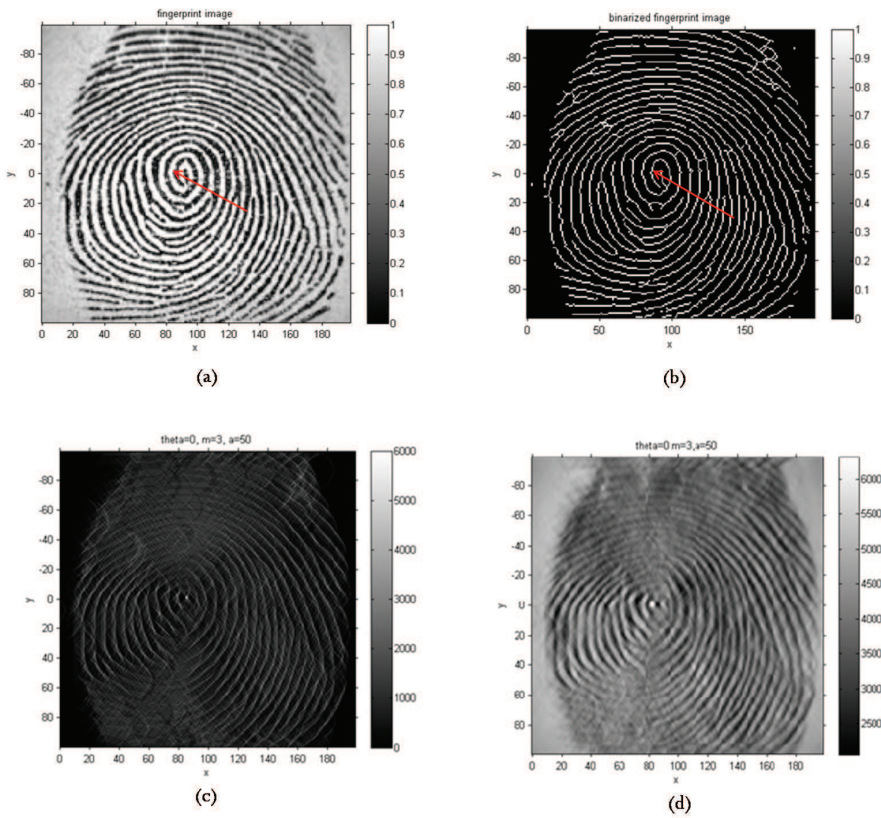


Figure 4.5 — Reconnaissance d’empreintes digitales par la PDRT. (a) Une image d’empreinte digitale en niveaux de gris où le sommet de la parabole à identifier est pointé par une flèche rouge. (b) L’image binarisée et squelettisée. (c) L’espace de radon généré à partir de l’application de la PDRT sur l’image binarisée et squelettisée montrant un pic à la même position que le sommet de la parabole. (d) : L’espace de radon généré à partir de l’application de la PDRT sur l’image initiale en niveaux de gris montrant un pic à la même position que le sommet de la parabole.

Nous avons étudié la précision de la PDRT dans la détection des courbes polynomiales sur des images ayant subi une dégradation de qualité par effets de crénelage, d’ajout de bruit et de rotation. L’application de la PDRT sur une image contenant une parabole crénelée montre que le pic résultant (Fig.4.6.d) est plus large que le pic fin et lumineux de la figure 4.6.b. Néanmoins, la position du sommet de la parabole peut toujours être facilement détectée puisqu’il s’agit d’un maximum local. Nous avons également ajouté du bruit gaussien et d’autres objets parasites à l’image initiale (lignes fines). Le résultat présenté dans la figure 4.6.f montre que la méthode détecte toujours la position du sommet malgré le bruit ajouté grâce à sa capacité de concentration

d'énergie. D'autre part, nous avons pivoté l'image de la figure 4.6.e suivant l'angle de rotation $\theta = 45^\circ$ (Fig.4.6.g). L'espace de radon correspondant présenté dans la figure 4.6.h montre que l'extraction de la position du polynôme est invariante par rapport à la rotation. En effet, la PDRT projette l'image à plusieurs angles de rotation ce qui permet l'extraction de la position du polynôme indépendamment de son orientation.

4.5 Application de la PDRT à la reconnaissance des empreintes digitales

Nous avons estimé qu'une application possible de la PDRT est la reconnaissance des empreintes digitales. En effet, une empreinte digitale est constituée des stries fines qui adoptent la forme des courbes polynomiales de différents paramètres et orientations. Par conséquent, nous avons adopté la PDRT comme une nouvelle technique de détection des empreintes digitales.

La procédure d'identification se base sur un nouveau descripteur construit par la PDRT. Ce descripteur se présente sous la forme d'une signature qui caractérise chaque empreinte digitale. Cette procédure présente l'avantage d'être insensible à la translation, à la rotation et au bruitage. Nous présentons dans cette section les différentes étapes pour reconnaître une empreinte digitale ; à savoir : prétraitement, extraction des caractéristiques et identification. Les différentes étapes de la procédure d'identification sont illustrées dans la figure 4.7.

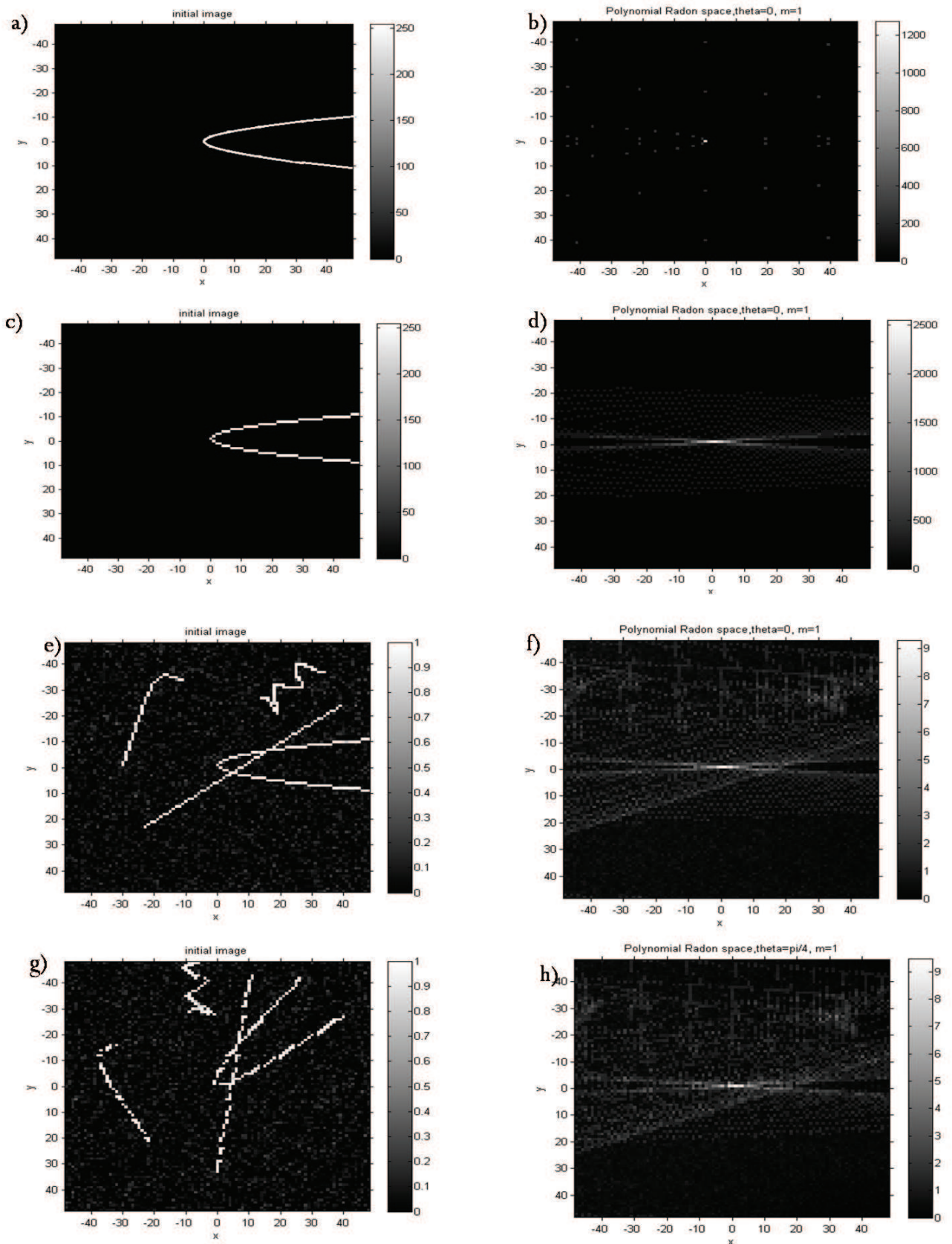


Figure 4.6 — (a) Etude de la robustesse de la PDRT aux (d) effets d'alias, (f) au bruit ajouté, (h) à la rotation.

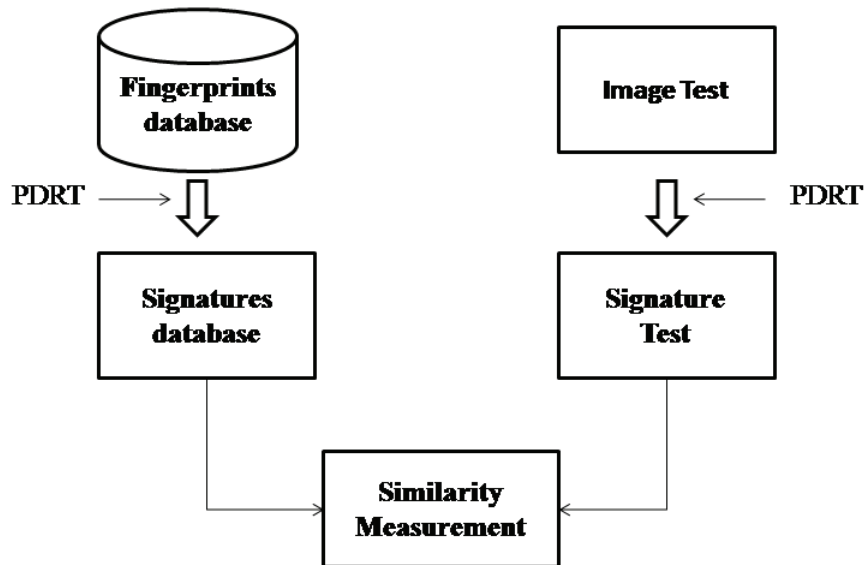


Figure 4.7 — Approche d'identification des empreintes digitale

4.5.1 Prétraitement

Le prétraitement est constitué d'un ensemble de traitements qui ont pour objectif d'améliorer la qualité de l'image et de faciliter les traitements à suivre. Il est basé en première étape sur une binarisation suivie par une squelettisation de l'image.

4.5.1.1 Binarisation

La binarisation consiste à réduire en noir les pixels dont l'intensité est inférieure à un seuil s et en blanc les pixels de valeur supérieure ou égale à s .

4.5.1.2 Squelettisation

Dans l'image binarisée, les lignes de l'empreinte sont bien claires mais elles sont de taille épaisse. la squelettisation permet de réduire l'ensemble des lignes à des courbes

d'un pixel d'épaisseur. La figure 4.8 permet d'illustrer l'étape de prétraitement sur une empreinte digitale.

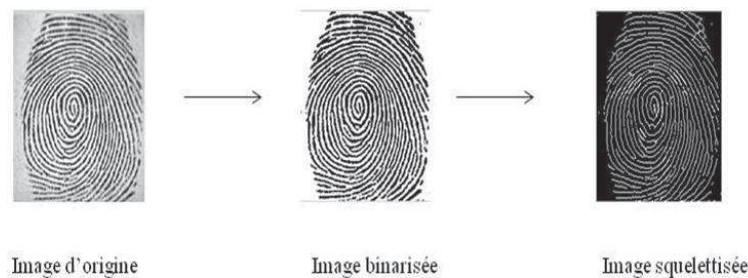


Figure 4.8 — Prétraitement de l'empreinte digitale

4.5.2 Extraction des caractéristiques globales

Une observation des structures globales des empreintes montre des courbes qui peuvent être simulées à des paraboles entières ou partielles. Nous avons alors procédé à la détection des courbes paraboliques à partir des empreintes digitales.

Nous construisons par la suite une signature pour chaque empreinte digitale dans laquelle nous inscrivons les caractéristiques globales des paraboles détectées.

Pour la reconnaissance des paraboles, la PDRT transforme l'image d'empreinte initiale en l'espace de Radon polynomial. Chaque pic dans ce dernier espace correspond à une parabole dans la première image (Fig.4.5). Les coordonnées du pic obtenu indiquent les caractéristiques de la courbe correspondante, à savoir son orientation, ses paramètres et sa position. Ainsi, l'ensemble de pics détectés présente des points porteurs d'informations sur les paraboles existantes dans l'empreinte digitale.

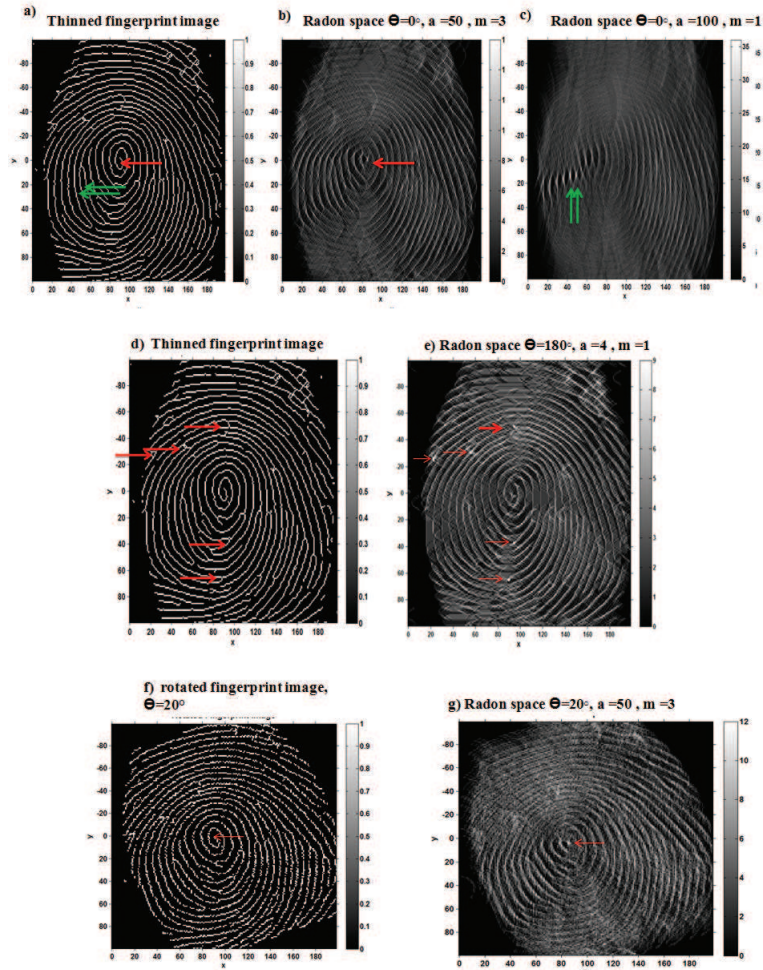


Figure 4.9 — Détection de différentes courbes paraboliques dans une empreinte digitale

Pour cette fin, nous avons projeté l'image suivant des courbes paraboliques d'équation $ay = bx^2 + d$. Nous avons itérativement appliqué la PDRT sur l'empreinte digitale. A chaque itération, une projection parabolique est effectuée selon un angle d'orientation θ fixé dans l'intervalle $[0^\circ, 180^\circ]$. Nous avons incrémenté l'angle d'orientation dans cet intervalle en considérant un pas de 5° .

Pour chaque orientation, nous appliquons la projection parabolique en variant le coefficient du terme principal de parabole, $p = \frac{b}{a}$. De plus, le paramètre d est implicitement varié puisque la PDRT projette par définition les courbes en les translatant dans les deux directions horizontale et verticale.

Etant donné que chaque projection est effectuée suivant les deux paramètres fixés θ et p , le résultat de notre algorithme de projection est un ensemble d'espaces de Radon

$R_{\theta,p}$. Un coefficient $R_{\theta,p}(x, y)$ dénote la somme de pixels d'une parabole orientée suivant θ , d'un coefficient principal p et dont le sommet est positionné à (x, y) .

De chaque espace de Radon trouvé $R_{\theta,p}$, nous ne gardons que les coefficients les plus lumineux afin de ne détecter que les paraboles les plus déterminantes. Le seuil appliqué est calculé comme suit :

$$Seuil = e + (max - e)/\alpha$$

où e est la moyenne des intensités de pixels de l'espace $R_{\theta,p}$, max est sa valeur maximale et α est une valeur de pondération comprise entre 0 et 1.

Les pics retenus de tous les espaces de Radon $R_{\theta,p}$ sont enregistrés dans un espace (θ, p) intitulé signature. L'objectif principal de la construction d'une signature est de caractériser chaque empreinte digitale par un ensemble de points représentatifs. Cette signature est robuste contre le bruit, la rotation et la translation. Les signatures d'empreintes digitales sont utilisées dans la phase d'identification qui établit le taux de similarité entre les différentes empreintes digitales. La figure 4.10 présente quelques signatures d'empreintes digitales générées.

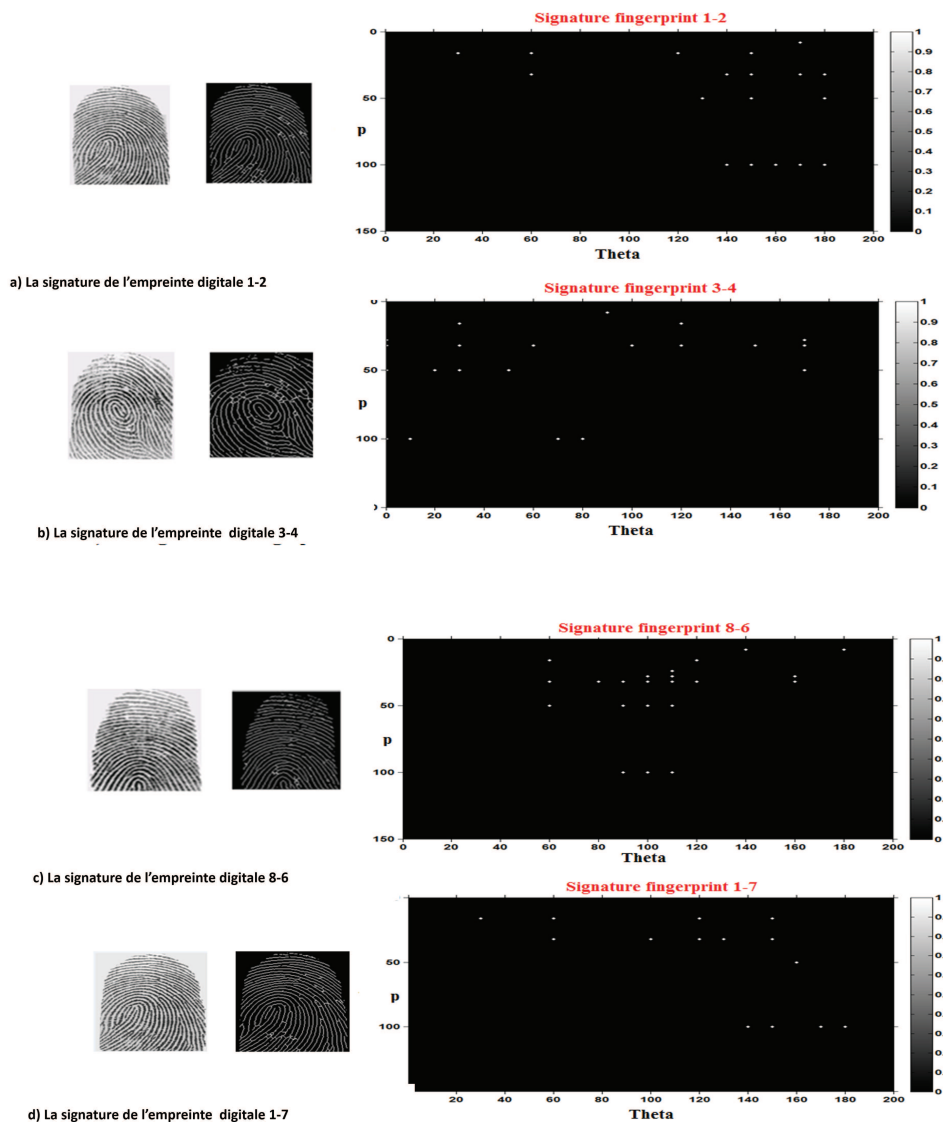


Figure 4.10 — Des signatures d'empreintes digitales

4.5.3 Identification

Pour calculer le taux de similarité entre l'empreinte à identifier et celles de la base de données, nous avons utilisé une approche de sélection par vote. Cette approche consiste à identifier l'empreinte de la base de données qui recueille le plus grand nombre de votes. Pour cet objectif, chaque pic de la signature d'entrée est affecté à une ou plusieurs signatures des empreintes stockées dans la base. L'affectation est réalisée en mesurant la distance euclidienne entre le pic en question et ceux des signatures enregistrées dans la base de données. Ainsi, nous votons aux signatures qui contiennent un pic de mêmes

coordonnées ou de coordonnées proches. La signature élue est celle qui a reçu le plus haut pourcentage de votes :

$$per = \frac{n}{m} \times 100$$

Où n est le nombre de pics affectés et m est le nombre total de pics dans la signature. Une empreinte digitale est identifiée dans la base de données uniquement si son pourcentage de voix est supérieur à un seuil déterminé. Dans le cas contraire, elle est rejetée.

4.5.4 Résultats expérimentaux

Pour tester la performance de la méthode proposée, nous avons utilisé la base de données " Upekfingerprint Database ". Cette base contient 16 personnes (empreintes indexées de 1 à 16). Huit impressions différentes par personne sont disponibles. Elle contient alors au total 128 empreintes digitales. Les images ont été acquises par une caméra digitale et la taille de chacune est 248×338 . Nous présentons dans la figure 4.11 des empreintes digitales qui sont 1_2, 3_4, 8_6, 10_8, 14_2 et 1_7. Les images d'empreintes digitales 1_2 et 1_7 représentent deux acquisitions de la même personne indexée par 1.



Figure 4.11 — Quelques empreintes digitales de la base de données

Pour évaluer les résultats de notre application, nous avons effectué trois tests expérimentaux. Le premier test (respectivement le deuxième et troisième) a été réalisé en retenant dans la base de données uniquement 2 impressions par personne (respectivement 4 et 6 impressions par personne). Dans chaque essai, les impressions retenues ont été choisies arbitrairement. La performance du système d'identification est évaluée en mesurant le taux d'identification IR (Identification Rate), le taux de faux positifs FMR (False Matching Rate) et le taux de faux négatifs FNMR (False Non Matching Rate).

Le taux d'identification (IR) est le pourcentage d'empreintes digitales correctement identifiées dans la base de données.

$$IR = \frac{\text{Nombre de personnes correctement identifiées}}{\text{Nombre total de personnes}}$$

Le taux de faux positifs (FMR) est le taux d'empreintes digitales qui ont été faussement appariées par le système à une empreinte digitale de la base de données.

$$FMR = \frac{\text{Nombre de personnes incorrectement identifiées}}{\text{Nombre total de personnes}}$$

Le taux de faux négatifs FNMR est le taux d'empreintes digitales existantes dans la base de données mais qui n'ont pas été identifiées par le système.

$$FNMR = \frac{\text{Nombre de personnes non identifiées}}{\text{Nombre total de personnes}}$$

Pour le processus d'identification, le seuil du pourcentage de votes en dessous duquel, la personne est rejetée a été choisi expérimentalement à 0,65. Le tableaux 4.1 montre les résultats obtenus par les trois tests (2, 4, 6 impressions retenues par personne).

Tableau 4.1 — Les résultats obtenus des trois tests (2, 4, 6 impressions retenues par personne) dans la base de données

	IR	FNMR	FMR
Test1	83.75%	10%	4%
Test2	86.3%	8.7%	5%
Test3	87.5%	8.75%	3.75%

D'après ces tests, nous pouvons conclure que les résultats de notre approche sont prometteurs. Cependant, la précision d'identification dépend du nombre d'impressions par personne stockées dans la base de données et de la qualité des images. Notons toutefois que la base de données que nous avons utilisé pour les tests ne contient que 16 empreintes, ce qui ne permet que de révéler la faisabilité de la reconnaissance des empreintes digitales à travers notre approche. Il est alors indispensable de tester notre méthode sur une base de données plus large afin de confirmer les résultats obtenus.

4.5.5 Propriétés

Nous avons étudié la robustesse de la PDRT face à des transformations comme la translation, la rotation et l'ajout du bruit. Pour ce faire, nous avons mesuré le niveau de similarité entre la signature de l'image originale et chacune des signatures des images transformées.

4.5.5.1 Etude de la robustesse de notre approche au bruit

Pour évaluer la robustesse de notre approche au bruit, nous avons testé en premier lieu la précision de la détection des paraboles dans une image d’empreinte digitale où un bruit gaussien a été ajouté. Différents SNRs (Signal to Noise Ratio (dB)) ont été pris en considération. La figure 4.12 montre la stabilité de la détection pour différents niveaux de bruit. Il est à noter que le résultat de détection est sensible à des SNRs négatifs qui correspondent à un niveau élevé du bruit (Fig. 4.12). Notons que ce test a été appliqué à des empreintes digitales sans qu’elles subissent aucun prétraitement.

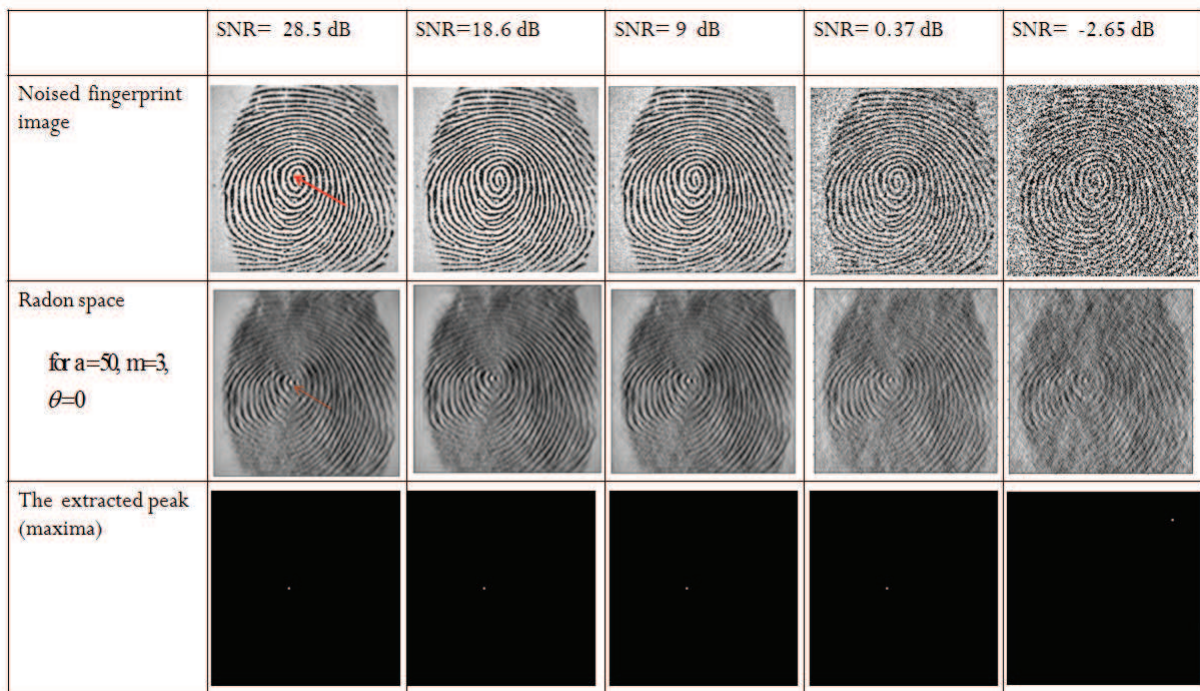


Figure 4.12 — Etude de la précision de détection de paraboles face au bruit ajouté

Nous avons également testé la robustesse de notre approche en ajoutant un bruit de type sel et poivre aux images d’empreintes digitales. La figure 4.13 montre le pourcentage de la similitude entre la signature d’une empreinte initiale et celle bruitée. Les résultats font preuve de la robustesse contre l’ajout du bruit, à l’exception des bruits de haute densité. De plus, grâce à sa capacité de concentration d’énergie, la PDRT donne de bon résultats de détection aux images binaires comme aux images en niveaux de gris, ce qui permet d’épargner le coût de prétraitements.

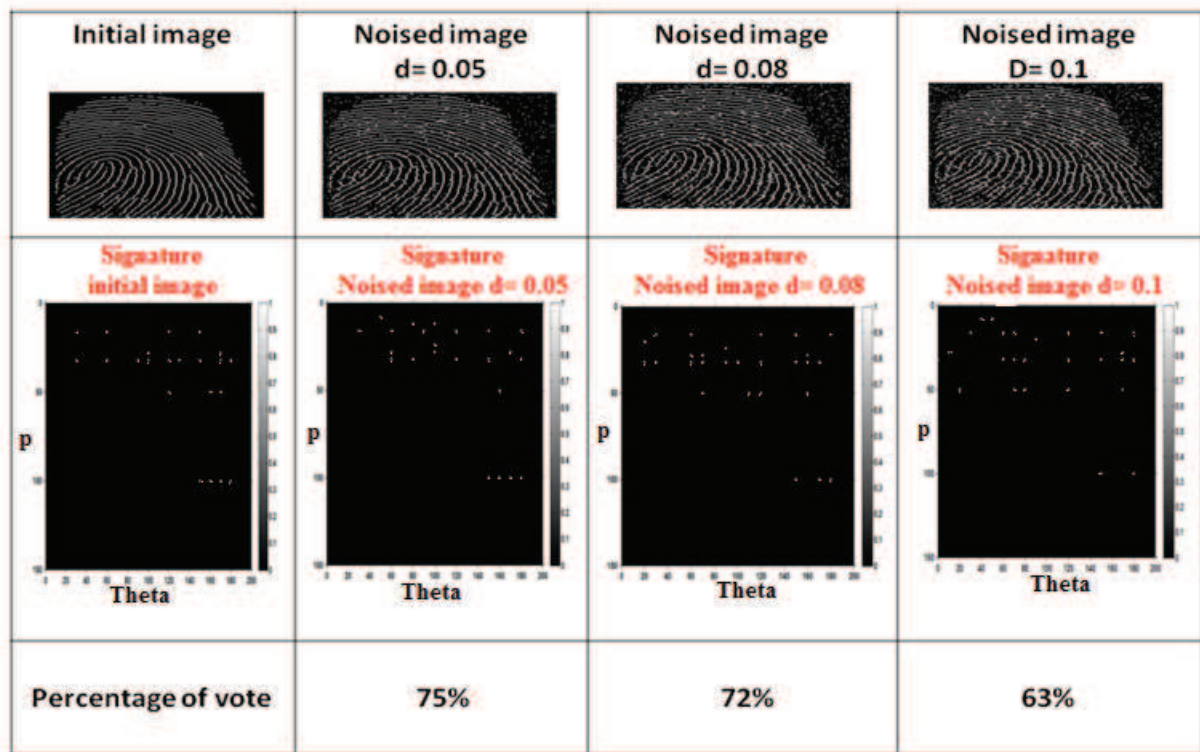


Figure 4.13 — Etude de la robustesse des signatures face au bruit

4.5.5.2 Invariance de la signature à la translation et à la rotation

Une translation de l’empreinte n’entraîne aucune variation sur sa signature. En comparant la signature d’une empreinte et de sa tradlatée, nous constatons une quasi similarité ente elles. La signature est alors invariante à la translation. De même, une rotation de θ_0 de l’empreinte entraine une translation de θ_0 de la signature suivant l’axe horizontal des θ . La figure 4.14 montre le pourcentage de votes entre une signature d’une empreinte initiale et celle tradlatée et pivotée.

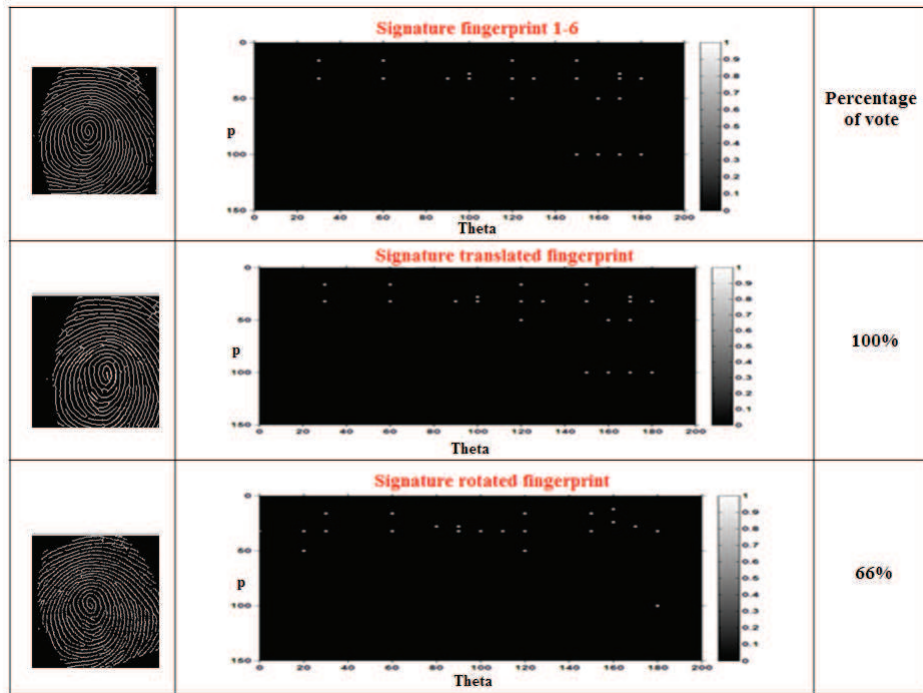


Figure 4.14 — Illustration de l'invariance de la PDRT à la translation et à la rotation

4.6 Discussion

Nous avons montré que la PDRT est une approche de Radon généralisée qui permet à la fois une inversion exacte et une détection de courbes polynomiales dans une image. Nous avons également mis en évidence l'intérêt de la PDRT dans le domaine de reconnaissance de formes à travers une application de reconnaissance d'empreintes digitales. Une comparaison entre la PDRT et la méthode dont nous sommes inspiré, la TRF [FF93], montre que la PDRT est plus coûteuse en temps de calcul. En effet, en se basant sur l'équation 4.5, la complexité de la PDRT est de l'ordre de $O(p^5)$ contre $O(p^3)$ pour la FRT [FF93]. L'inversion de la PDRT est de l'ordre $O(p^3)$ vs $O(p^3)$ pour la FRT. Comparée à la GMDRT, la PDRT est également plus lente mais elle occupe moins de mémoire que la GMDRT. Vu la capacité de la PDRT à détecter les courbes polynomiales, une comparaison avec la transformée de Hough (HT) généralisée s'impose. la PDRT a le même coût de complexité en temps de calcul et en mémoire que la HT. Cependant, la PDRT a l'avantage d'être exactement inversible, ce qui n'est pas vrai pour la HT. Nous pouvons toutefois bénéficier des travaux optimisant la HT

([YM97],[PIK94], [GZ97],[LLL86]) pour améliorer la performance de la PDRT.

4.7 Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé une nouvelle approche qui généralise la transformée de radon classique pour projeter des courbes polynomiales suivant des directions différentes. L'inversion exacte, la nature multi-directionnelle de la transformation et les résultats prometteurs dans le domaine de la reconnaissance des formes s'avèrent utiles dans diverses applications de traitement d'images. Nous avons montré que la transformation est particulièrement avantageuse dans des applications qui requièrent à la fois une inversion exacte et une reconnaissance des courbes. Les résultats montrent la précision de la méthode pour la détection de la position et de la direction des courbes polynomiales.

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé différentes contributions dans le but de généraliser la transformée de Radon classique. Nous avons ainsi généralisé les formes et les courbes de projection de l'opérateur Radon. La nouvelle transformée se caractérise par trois aspects intéressants :

- L'aspect modèle : Chaque point de l'espace transformé de Radon correspond à un modèle dans l'espace spatial. Il est le résultat de la somme des pixels appartenant au modèle. Ainsi, l'étude des points dans l'espace transformé de Radon permet de dégager des informations intéressantes sur les modèles existants dans l'espace de l'image ; à savoir : la localisation, les paramètres et l'orientation des modèles. La dualité point/modèle (ou la capacité de concentration d'énergie) s'avère ainsi très avantageuse dans le domaine de la reconnaissance des formes.
- La Composition directionnelle : la transformée de Radon discrète généralisée multidirectionnelle est fondée sur la décomposition directionnelle de l'information. En approfondissant le raisonnement, l'opérateur direct va concentrer en un seul point la somme des pixels dans la direction de la courbe choisie. Le domaine transformé de Radon se constituera au fur et à mesure que les courbes effectuent une rotation, selon le même principe utilisé dans la transformée de Radon classique.
- La réversibilité exacte : signifie la reconstruction exacte de l'image initiale à partir de l'espace de Radon. L'image reconstruite est égale en tout point à l'image initiale. Cette propriété est importante, notamment pour des domaines d'application comme le codage, la compression et le débruitage de l'image.

Comme champs d'application, nous avons testé nos approches théoriques dans le domaine de la reconnaissance de formes, notamment, la détection des bâtiments de

formes rectangulaires à partir des images satellitaires de très haute résolution et la reconnaissance des empreintes digitales. Les résultats obtenus s'avèrent intéressants mais peuvent être améliorés si nous nous basons sur d'autres critères en plus de l'aspect modèle pour la reconnaissance de formes.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives parmi lesquelles, nous citons :

- ▷ L'étude multi résolution. L'une des propriétés les plus intéressantes de la transformée d'ondelettes est l'aspect multi résolution. Il s'avère alors intéressant de nous inspirer de la transformée d'ondelettes en joignant l'aspect multi résolution à notre transformée. En effet, cette multi-résolution se traduit par la modification du contenu fréquentiel des courbes de projection utilisées dans la transformation. Ainsi, en augmentant ou en diminuant la résolution, les courbes de projection permettent d'épouser des formes plus ou moins complexes.
- ▷ L'étude de l'optimisation de complexité : Nous pensons qu'il est important dans un travail ultérieur d'optimiser le temps de calcul et la capacité mémoire requise de la transformée de Radon généralisée. En effet, le nombre élevé de paramètres utilisé dans la transformation (paramètres des courbes de projection, pas de translation horizontal et vertical, angle de rotation, ..) entraîne un coût de complexité élevé aussi bien en temps de calcul qu'en mémoire. Pour réduire la complexité, nous pouvons nous inspirer des travaux d'optimisation de la transformée de Hough généralisée. En outre, il serait intéressant que les paramètres des courbes de projection soient calculés ou estimés de manière optimale, selon un critère d'information prédéterminé, assurant le minimum de dispersion. L'optimisation peut s'effectuer sur des paramètres tels que : le pas de translation qui déterminera le nombre de chemins de projection selon une direction donnée et le pas de rotation.
- ▷ Autres applications de la transformée de Radon généralisée : Dans les applications effectuées tout au long de cette thèse, nous nous sommes intéressés uniquement au domaine de la reconnaissance des formes. Par conséquent, l'aspect réversibilité de la transformée n'a pas été exploité dans nos applications. Il serait alors intéressant dans des futurs travaux de nous pencher sur des applications qui se basent sur l'inversion comme la compression et le débruitage.

Bibliographie

- [AA08] A.KINGSTON et F. AUTRUSSEAU : Lossless image compression via predictive coding of discrete radon projection. *Signal processing : Image communication*, 23:313–324, 2008.
- [AI07] A.KINGSTON et I.SVALBE : Generalized finite radon transform for $n \times n$ images. *Image Vision and Computing*, 25:1620–1630, 2007.
- [A.K06] A.KINGSTON : Orthogonal discrete radon transform over $p^n \times p^n$ images. *Signal processing*, 86:2040–2050, 2006.
- [And88] L.-E. ANDERSSON : On the determination of a function from spherical averages. *SIAM J. Math. Anal.*, 19:214–23, 1988.
- [AP09] Amir AZIZI et Hamid Reza POURREZA : A new method for iris recognition based on contourlet transform and non linear approximation coefficients. In *Emerging Intelligent Computing Technology and Applications, 5th International Conference on Intelligent Computing, ICIC 2009, Ulsan, South Korea, September 16-19, 2009. Proceedings*, pages 307–316, 2009.
- [Ben08] J. BENECH : *Spécificité de la mise en œuvre de la tomographie dans le domaine de l'arc électrique - validité en imagerie médicale*. Thèse de doctorat, l'Université Toulouse III - Paul Sabatier, France, 2008.
- [Bey87] G. BEYLKIN : Discrete radon transform. *IEEE trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(2):162–172, 1987.
- [BGHC10] M. BOUZIANI, K. GOITA et HE.DONG-CHEN : Automatic change detection of buildings in urban environment from very high spatial resolution images using existing geo database and prior knowledge. *ISPRS Journal Photogramm Remote Sensing*, 65:143–153, 2010.

- [Cad08] O. Le CADET : *Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images : Applications à l'imagerie médicale et au tatouage d'images*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de GRENOBLE, 2008.
- [Can86] J. CANNY : A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:679–714, 1986.
- [CD01] Emmanuel J. CANDÈS et David L. DONOHO. : Curvelets and curvilinear integrals. *Journal of Approximation Theory*, 113(1):59–90, 2001.
- [CHZ⁺10] Yong CHENG, Yingkun HOU, Chunxia ZHAO, Zuoyong LI, Yong HU et Cailing WANG : Robust face recognition based on illumination invariant in nonsubsampling contourlet transform domain. *Neurocomputing*, 73(10-12):2217–2224, 2010.
- [Cou05] Ph. COURMONTAGNE : An improvement of ship wake detection based on the radon transform. *Signal Processing*, 85, 2005.
- [dCZD06] Arthur L. da CUNHA, Jianping ZHOU et Minh N. DO : The nonsub-sampled contourlet transform : Theory, design, and applications. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(10):3089–3101, 2006.
- [DD00] D.L. DONOHO et M.R. DUNCAN : Digital curvelet transform : strategy, implementation and experiments. *In Proc. Aerosense 2000, Wavelet Applications VII*, volume 4050, 2000.
- [Dea81] Stanley DEANS : Hough transform from the radon transform. *IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE*, PAMI-3(2):185 – 188, 1981.
- [Dea93] S.R DEANS : *The Radon Transform and Some of Its Applications*. revised edition, Krieger, Malabar, FL., 1993.
- [Don98] Andrei DONCESCU : Les ondelettes : théorie et applications. Rapport technique, Université de La Rochelle, 1998.
- [Don00] D.L. DONOHO. : Orthonormal ridgelet and linear singularities. *Mathematical Analysis*, 31, 2000.
- [DV05] Minh N. DO et Martin VETTERLI : The contourlet transform : an efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(12):2091–2106, 2005.

- [EBBE15] S. ELAIWAT, Mohammed BENNAMOUN, Farid BOUSSAÏD et Amar A. EL-SALLAM : A curvelet-based approach for textured 3d face recognition. *Pattern Recognition*, 48(4):1235–1246, 2015.
- [ECY02] D. Donoho E. CANDÈS, L. Demanet et L. YING : New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with smooth singularities. *In Technical report, Statistics, Stanford University*, 2002.
- [ECY06] D. Donoho E. CANDÈS, L. Demanet et L. YING : Fast discrete curvelet transforms. *In Multiscale Modeling and Simulation*, volume 5, 2006.
- [EFNAH] Ines ELOUEDI, Régis FOURNIER, Amine NAÏT-ALI et Atef HAMOUDA : The polynomial discrete radon transform. *En cours de révision dans le journal Pattern Recognition Letters*.
- [EFNAH13] Ines ELOUEDI, Régis FOURNIER, Amine NAÏT-ALI et Atef HAMOUDA : Generalized multi-directional discrete radon transform. *Signal Processing*, 93(1):345–355, 2013.
- [EHR12a] Ines ELOUEDI, Atef HAMOUDA et Hmida ROJBANI : Rectangular discrete radon transform for buildings extraction from high resolution satellite images. *In ICIAR (1)*, pages 418–426, 2012.
- [EHR⁺12b] Ines ELOUEDI, Atef HAMOUDA, Hmida ROJBANI, Régis FOURNIER et Amine NAÏT-ALI : Extracting buildings by using the generalized multi directional discrete radon transform. *In ICISP*, pages 531–538, 2012.
- [Emm98] Candès EMMANUEL : *Ridgelets : Theory and Applications*. Thèse de doctorat, Stanford Universit, 1998.
- [ER04] Ramin ESLAMI et Hayder RADHA : The contourlet transform for image denoising using cycle spinning. *In Conference Record of the Thirty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, volume 2, pages 1982 – 1986. IEEE, 2004.
- [FF93] F.MATUS et J. FLUSSER : Image representation via a finite radon transform. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(10):996–1006, 1993.
- [Fla98] P. FLANDRIN : *Temps-fréquence*. 1998.
- [Fou22] Joseph FOURIER : *Théorie analytique de la chaleur*. 1822.

- [FS12] M.J. FADILI et J.L. STARCK : Curvelets and ridgelets. *In Computational Complexity : Theory, Techniques, and Applications*, pages 754–773, 2012.
- [GJ07] Stéphane Brès Hubert Emptoz GUILLAUME JOUTEL, Véronique Eglin : Extraction de caractéristiques dans les images par transformée multi-échelle. *In GRETSI, Groupe de Recherche et Etudes du Traitement du Signal, Troyes*, pages 469–47, 2007.
- [GN97] J. GUÉDON et N. NORMAND : The mojette transform : applications in image analysis and coding. *The International Society for Optical Engineering*, 3024:873–884, 1997.
- [GR11] F. GÓMEZ et E. ROMERO : Rotation invariant texture characterization using a curvelet based descriptor. *Pattern Recognition Letters*, 32(16): 2178–2186, 2011.
- [GRL11] M. K. Nguyen G. RIGAUD et A. K. LOUIS : Circular harmonic decomposition approach for numerical inversion of circular radon transforms. *In NCMIP (New Computational Methods for Inverse Problems)*, Cachan, France, May 2011.
- [GRL12] M. K. Nguyen G. RIGAUD et A. K. LOUIS : Novel numerical inversions of two circular-arc radon transforms in compton scattering tomography. 20(6):809–839, September 2012.
- [GZ97] N. GUIL et E.L. ZAPATA : Lower order circle and ellipse hough transform. *Pattern Recognition*, 30(10):1729–1744, 1997.
- [HA87] H. HELLSTEN et L.-E. ANDERSSON : An inverse method for processing of aperture radar data. *Inverse problems*, 3:111–124, 1987.
- [HLS96] T. HSUNG, D. LUN, et W. SIU : The discrete periodic radon transform. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 44:2651–2657, 1996.
- [HvGVvV05] Cris L. Luengo HENDRIKS, Michael van GINKEL, Piet W. VERBEEK et Lucas J. van VLIET : The generalized radon transform : Sampling, accuracy and memory considerations. *Pattern Recognition*, 38(12):2494–2505, 2005.
- [Kin05] Andrew Maurice KINGSTON : *Extension and Application of Finite Discrete Radon Projection Theory*. Thèse de doctorat, School of Physics, Monash University, Australia., September 2005.

- [KTS09] M. KRISHNAVENI, S. KUMAR THAKUR et P. SUBASHINI : An optimal method for wake detection in sar images using radon transformation combined with wavelet filters. *International Journal of Computer Science and Information Security*, 6(1), 2009.
- [LDCWM09] S. LHOMME, He. DONG-CHEN, C. WEBER et D. MORIN : A new approach to building identification from very-high-spatial-resolution images. *International Journal of Remote Sensing*, 30:1341–1354, 2009.
- [Leb09] Guillaume LEBRUN : *Ondelettes géométriques adaptatives : vers une utilisation de la distance géodésique*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2009.
- [LHS03a] D. LUN, T. HSUNG et T. SHEN : Orthogonal discrete periodic radon transform. part ii : applications. *Signal processing*, 83:957–971, 2003.
- [LHS03b] D. LUN, T. HSUNG et T. SHEN : Orthogonal discrete periodic radon transform. part i : theory and realization. *Signal processing*, 83:941–955, 2003.
- [LLL86] H. LI, M.A. LAVIN et R.J. LEMASTER : Fast hough transform : a hierarchical approach. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 36:139–161, 1986.
- [M.81] Cormack A. M. : The radon transform on a family of curves in the plane. *In Proc. Am. Math. Soc.*, 1981.
- [Mal89] S. MALLAT : A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, 1989.
- [Mal99] Stephane MALLAT : *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
- [MC02] S. MUKHOPADHYAY et B. CHANDA : An edge preserving noise smoothing technique using multi-scale morphology. *Signal Processing*, 82:527–544, 2002.
- [Mil99] P. MILANFAR : A model of the effect of image motion in the radon transform domain. *IEEE trans. on Image Processing*, 8(9):1276–1281, 1999.

- [MNTZ10] Marcela MORVIDONE, Mai Khuong NGUYEN, Tuong T. TRUONG et Habib ZAIDI : On the v-line radon transform and its imaging applications. *Int. J. Biomedical Imaging*, 2010, 2010.
- [MOP99] E. MAGLI, G. OLMO et L.L. PRESTI : Pattern recognition by means of the radon transform and the continuous wavelet transform. *Signal Processing*, 73:277–289, 1999.
- [MP06] S. MALLAT et G. PEYRÉ : *Journee annuelle de la SMF*, chapitre Traitement geometrique des images par bandelettes, pages 39–67. SMF, june 2006.
- [Ner96] A. NERI : Optimal detection and estimation of straight patterns. *IEEE trans. on Image Processing*, 5(5):787–792, May 1996.
- [NR10] M. K NGUYEN et R. RÉGNIER : Inversion of a new v-line radon transform and its numerical analysis. *In International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 2010.
- [Pap77] A. PAPOULIS : *Signal analysis*. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series. McGraw-Hill, 1977.
- [pD92] pI. DAUBECHIES : *Ten Lecture on Wavelet*. Elsevier, 1992.
- [PIK94] J. PRINCEN, J. ILLINGWORTH et J. KITTLER : Hypothesis testing : A framework for analyzing and optimizing hough transform performance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4:329–341, 1994.
- [PM05a] E. Le PENNEC et S. MALLAT : Sparse geometric image representation with bandelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(3):423–437, 2005.
- [PM05b] Gabriel PEYRÉ et Stéphane MALLAT : Discrete bandelets with gemotric orthogonal filters. *In CIP*, 2005.
- [Rad17] J. RADON : Ufiber die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten. *Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math-Phys. Kl*, 62:262–267, 1917.
- [REH11] Hmida ROJBANI, Ines ELOUEDI et Atef HAMOUDA : R-signature : A new signature based on radon transform and its application in buildings extraction. *In ISSPIT*, pages 490–495, 2011.

- [RMKK08] Saeid RAHATI, Reihaneh MORAVEJIAN, Ehsan Mohamad KAZEMI et Farhad Mohamad KAZEMI : Vehicle recognition using contourlet transform and SVM. *In Fifth International Conference on Information Technology : New Generations (ITNG 2008), 7-8 April 2008, Las Vegas, Nevada, USA*, pages 894–898, 2008.
- [RN01] N. J. REDDING et G. N. NEWSAM : Inverting the circular radon transform. Rapport technique, Defence Sciences and technology Organization DESTO Research Report, August 2001.
- [RN11a] Rémi REGNIER et M.K. NGUYEN : A novel coupled transmission-reflection tomography and the v-line radon transform. *In 18th IEEE International Conference on Image Processing*, 2011.
- [RN11b] G. RIGAUD et M. K. NGUYEN : Reconstruction d’images basée sur la décomposition harmonique circulaire pour une nouvelle modalité de la tomographie compton. *In in the proc. of GRETSI’2011*, Bordeaux, France, September 2011.
- [RRN13] G. Rigaud R. RÉGNIER et M. K. NGUYEN : New approximated inversion of spherical radon transform in sar imaging. *In Proc. IEEE-International Conference Image Processing (ICIP)*, Melbourne, Australia, September 2013.
- [T.94] Quinto E. T. : Radon transforms on curves in the plane. *Lectures in Applied Mathematics*, 30:231–244, 1994.
- [TN11] T. T. TRUONG et M. K. NGUYEN : Radon transforms on generalized cormack’s curves and a new compton scatter tomography modality. *Inverse Problems*, 27(12):125001–125024, 2011.
- [Tof96a] P. TOFT : *The Radon Transform, Theory and Implementation*. Thèse de doctorat, Department of Mathematical Modelling Section for Digital Signal Processing Technical University of Denmark, 1996.
- [Tof96b] Peter TOFTS : *The Radon Ttransform : Theory and implementation*. Thèse de doctorat, 1996.
- [VCB04] D. Baron V. CHANDRASEKARAN, M. B. Wakin et R. G. BARANIUK : Compression of higher dimensional functions containing smooth discontinuities. *38th Annual Conference on Information Science and Systems*, 2004.

- [WH09] L. WANG et Y. HAO : Radon transform and forstner operator applying in buildings contour extraction. *In The IEEE Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 2009.
- [WRCB02] M. WAKIN, J. ROMBERR, H. CHOI et R. BARANIUK : Rate-distortion optimized image compression using wedgelets. *IEEE International Conference on Image Processing*, 2002.
- [Yil87] Ozdogan YILMAZ : *Seismic data Processing*. Society of Exploration of geophysics, 1987.
- [YM97] S.Y. YUEN et C.H. MA : An investigation of the nature of parameterization for the hough transform. *Pattern Recognition*, 6:1009–1040, 1997.
- [ZC07] Q. ZHANG et I. COULOIGNER : Accurate centerline detection and line width estimation of thick lines using the radon transform. *IEEE trans. on Image Processing*, 16(2), 2007.
- [ZHM08] A. Serir Z. HADDAD, A. Beghdadi et A. MOKRAOUI : Fingerprint features extraction using radon transform. *In International Workshop on Visual Signal Processing and its applications*, Paris 13, France, November 2008.